U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

Bogoljub Ž. Predić

T R O J K E   N E P R E K I D N O S T I

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD, 1984. GOD.

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

U matematici, kao i u svim oblastima koje koriste matematiku, pojam preslikavanja (funkcije) je od osnovne važnosti. Preslikavanje govori o medjusobnoj zavisnosti dve ili više pojava, veličina, svojstava i sl. Tako, preslikavanja se prirodno javljaju kao sredstvo i objekt istraživanja u matematici i topologiji posebno. Jedna od problematika vezanih za preslikavanja je uzajamna klasifikacija prostora i preslikavanja. Mogu se naglasiti sledeća tri tipa zadataka u vezi ove problematike:

1) Data je klasa preslikavanja L. Koja svojstva topoloških prostora se čuvaju preslikavanjima iz klase L?
2) Data je klasa A topoloških prostora i klasa L preslikavanja. Koja svojstva imaju prostori koji se dobijaju kao slike prostora iz klase A posredstvom preslikavanja iz klase L?
3) Dati karakterizaciju inverzne slike prostora iz klase A preslikavanjima iz klase L?

Prvi radovi takve vrste dosta su stari. Značaj te problematike naročito je istakao P.S. Aleksandrov (vidi [4]) na simpozijumu iz topologije u Pragu 1961. godine. Iza toga ova problematika često se javljala kao predmet istraživanja, u čemu vidno mesto ima Arhangelskij*). Tako P.S. Aleksandrov je dokazao da je svaki metrički kompakt neprekidna slika kantorovog savršenog skupa. Han i Mazurkievič su pokazali da je neprekidna slika segmenta lokalno povezan metrizabilan kompakt. Često su prostori karakterisani kao slike nekih vrlo poznatih prostora preslikavanjem koje je iz date klase preslikavanja.

Preslikavanja sa kojima se ova ispitivanja vrše najčešće su iz klasa neprekidnih preslikavanja, faktor preslikavanja, otvorenih preslikavanja, zatvorenih preslikavanja i savršenih preslikavanja. Ponekad se upotrebljavaju jača ili slabija preslikavanja od navedenih. U poslednje vreme naročito se primenjuju neka oslabljivanja neprekidnosti kao što su gotovo neprekidna preslikavanja, slabo neprekidna preslikavanja i poluneprekidna preslikavanja.

Rad je podeljen u osam odeljaka, koji su numerisani arapskim brojevima. Odeljci 3., 4., 5., 6., 7. i 8. imaju svoj uvodni deo i deo u kome se izlaže problematika obuhvaćena odgovarajućim naslovom. Izuzetno odeljak 6. ima tri dela i uvodni deo. Razlog je taj što se u šestom odeljku obradjuju tri pojma tesno povezana medju sobom. Tako se svaki iskaz u šestom odeljku označava trima ciframa od kojih je prva broj odeljka, druga deo odeljka, a treća broj iskaza u tom delu odeljka. U ostalim odeljcima iskazi se numerišu dvema ciframa od kojih je prva broj odeljka a druga broj iskaza u odeljku. Tako, na primer, 5.3. znači treći iskaz u petom odeljku.

---

*) Arhangelskij A.V., Otobraženija i prostranstva, UMN.21(1966), No 4, 132-184.

Na početku svakog odeljka, radi boljeg uvida u materiju odeljka, dat je motiv, pregled postojećih rezultata u vezi tog odeljka i kratak sadržaj.

Kada se poziva na neki iskaz iz samog teksta, navodi se samo broj tog iskaza. Brojevi u uglastim zagradama označavaju redni broj iz popisane literature, koja je inače abecedna.

Terminologija i simboli su uglavnom uobičajeni, kao recimo u [5], [7], [10], [11], [14], [27], [28].

Kraj dokaza svakog tvrdjenja naglašen je oznakom ||.

Dobar deo rezultata 3., 4., 5., 6., 7. i 8 odeljka su originalni.

Za prostore X i Y ne pretpostavljaju se nikakva separaciona ili druga svojstva. Medjutim, za preslikavanje $f : X \to Y$ pretpostavlja se da je neprekidno, mada je to najčešće i naglašeno.

Na kraju rada dati su spisak upotrebljavane literature, simboli i oznake i popis pojmova.

Veći deo ovog rada izlagan je na Seminaru topologije, koji se drži pod rukovodstvom prof. dr Dušana Adnadjevića i doc.dr Mile Mršević.

Zadovoljstvo mi je da se zahvalim profesoru Dušanu Adnadjeviću, pod čijim rukovodstvom je ova teza radjena, a koji mi je svojim sugestijama i savetima pružio dragocenu pomoć.

Bogoljub Ž. Predić

1. UVOD

Filipov V.V. je inicirao istraživanje svojstva trojki (f,X,Y), gde su X i Y topološki prostori, a f neprekidno preslikavanje od X u Y. Pokazalo se da se trojka u mnogo čemu ponaša kao prostor. S druge strane neki primeri pokazuju da analogija izmedju prostora i trojki nije uvek moguća. Jedan od motiva za razmatranje trojki je sledeći:

Ako je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač prostora Y, $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje, tada je $f^{-1}(\mathcal{V})$ takodje otvoren pokrivač prostora X. Pokrivači prostora X oblika $f^{-1}(\mathcal{V})$ su jedna specijalna podfamilija familije svih pokrivača. Otud, ako se u definiciji nekog pojma zahteva da svi pokrivači prostora X imaju svojstvo $\mathcal{P}$, onda i pokrivači oblika $f^{-1}(\mathcal{V})$ moraju imati svojstvo $\mathcal{P}$, dok obrnuto nije tačno. S druge strane mnoga topološka svojstva definišu se na sledeći način: uoče se dve klase $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ pokrivača prostora. Kaže se da prostor X ima neko svojstvo ako se u svaki njegov pokrivač koji je iz klase $\mathcal{M}$ može upisati pokrivač iz klase $\mathcal{N}$. Takva svojstva su recimo kompaktnost, parakompaktnost, prebrojiva kompaktnost, dimenzija.

Problematika obradjena u ovom radu mogla bi se podeliti u dve grupe i kratko izložiti na sledeći način:

I

(a) Dati vezu izmedju topologije na prostoru X i svojstava trojke (f, X, Y).

(b) Dati vezu izmedju topologije na prostoru Y i svojstava trojke (f, X, Y).

(c) Dati vezu izmedju topologija na prostorima X i Y koristeći odredjena svojstva trojke (f, X, Y).

(d) Kada se poklapaju navedena svojstva prostora X i trojke (f, X, Y), odnosno, kada se poklapaju navedena svojstva prostora Y i trojke (f, X, Y)?

II

Za trojku (f, X, Y) definišu se svojstva (a), (b), (c),...

Kakva je veza izmedju svojstava (a), (b), (c),...?

Opišimo u najkraćim crtama svaki od odeljaka ovog rada.

PRVI ODELJAK je uvodni deo. Ovde su dati motivi za obradu ove teme, problematika koja je obradjena, gde je mesto onog što je novo u radu. U ovom delu takodje je dat kratak opis svih radnih odeljaka rada.

DRUGI ODELJAK sadrži osnovne definicije i svojstva prostora. Radi se o definicijama i svojstvima koji se kasnije analogno razmatraju na trojkama, ili pak imaju posredan značaj za materiju koja se ovde razmatra. Činjenice ovde navedene mogu se naći, na primer, u [10], [11] i [14].

TREĆI ODELJAK odnosi se na separaciona svojstva prostora i trojki (f,X,Y). Uvedeni su pojmovi nekih separacionih svojstava koji nisu bili razmatrani u [40]. Daju se brojni primeri koji opravdavaju uvodjenje novih pojmova ili pak pokazuju da neki iskaz ima samo jedan smer.

ČETVRTI ODELJAK govori o pojmovima kompaktnosti, Lindelöf-ovost i parakompaktnost za prostore X i Y i odgovarajuće trojke (f, X, Y). Data je veza izmedju parakompaktnosti i kolekcijske normalnosti trojke (Teorema 4.15.), parakompaktnosti i Lindelöf-ovosti za trojke (Teorema 4.17.), kao i uslov pod kojim su parakompaktnost prostora Y i trojke (f, X, Y) ekvivalentni, i drugi slični stavovi.

PETI ODELJAK razmatra pojam apsolutne zatvorenosti. Na topološkim prostorima taj pojam su uveli Aleksandrov i Urison (vidi [6]), i dosta je obradjivan kao recimo u [11], [12], [25], [39], [43]. Ovde je uveden pojam odgovarajući apsolutnoj zatvorenosti za trojke. Uvodjenje pojma apsolutne zatvorenosti trojke (f, X, Y) daje jedan pojam izmedju apsolutne zatvorenosti prostora X i apsolutne zatvorenosti prostora Y (U smislu Stavova 5.2. i 5.3.). Navedimo i neke od rezultata: Stav 5.8. (koji daje jednu ekvivalenciju za apsolutnu zatvorenost disjunktne sume trojki), Stav 5.9. (koji daje ekvivalentan uslov apsolutne zatvorenosti proizvoda trojki), Lema 5.11. (koja omogućava da se kod proizvoda trojki radi sa baznim pokrivačima).

ŠESTI ODELJAK razmatra tri pojma, a to su slaba kompaktnost, *U*-prostori i pseudokompaktnost. Definišu se odgovarajući pojmovi za trojke. Pokazano je da se pojam slabe kompaktnosti trojke nalazi izmedju pojma slabe kompaktnosti prostora X i slabe kompaktnosti prostora Y (Stav 6.2.2. i Stav 6.2.5.). Iz navedenog, dobijeno je tvrdjenje da je neprekidna slika slabo kompaktnog prostora slabo kompaktan prostor. Slično je pokazano za *U*-trojke i pseudokompaktne trojke, a uz to data je veza izmedju navedenih triju svojstava trojki.

SEDMI ODELJAK posvećen je gustoći prostora i gustoći trojki. Navedimo neke rezultate: Pojam separabilnosti trojke (f, X, Y) je izmedju pojma separabilnosti prostora X i separabilnosti prostora Y (Stav 7.2. i Stav 7.3.), Stav 7.7., Posledicu 7.9. (to je jedno uopštenje poznatog rezultata da je neprekidna slika separabilnog prostora separabilan prostor, pri čemu u ovom slučaju preslikavanje je višeznačno) i Stav 7.10. (separabilnost je pod izvesnim uslovima inverzna invarijanta otvorenih preslikavanja).

OSMI ODELJAK odnosi se na dimenzije trojki. Deo rezultata ovog odeljka odnosi se na vezu dimenzija i separacionih svojstava trojki (Stav 8.8., Stav 8.10., Stav 8.12., Stav 8.14.). Neki rezultati daju vezu izmedju različitih dimenzija trojki (Stav 8.10., Stav 8.14.). Stav 8.14. je jedno pojačanje Teoreme 9. iz [40]. U odeljku je razmatrana i nepovezanost, odnosno potpuna nepovezanost trojki (Stav 8.16.).

2. O OSNOVNIM DEFINICIJAMA I SVOJSTVIMA

U ovom odeljku daje se pregled pojmova i činjenica o topološkim prostorima, a u vezi onih pojmova koji se definišu na trojkama (f, X, Y). Neki od pojmova i činjenica, koji se u ovom odeljku navode, direktno su vezani za odgovarajuće pojmove na trojkama, dok se drugi navode zbog svog značaja i posredne primene.

2.1. *Separaciona svojstva.* Jedna od prvih svojstava sa kojima se srećemo pri radu sa topološkim prostorima su separaciona svojstva. Većina prostora ima svojstvo da je svaka tačka zatvoren skup, pa su ti prostori T_1 prostori. U definiciji kompaktnosti i parakompaktnosti prostora neki autori traže da je prostor T_2 i zadovoljava odgovarajući uslov u vezi svakog otvorenog pokrivača. Takav prostor tada zadovoljava mnogo jača separaciona svojstva. Jedan takav rezultat je:

Teorema. (vidi [14]) Svaki kompaktan prostor je kolekcijski normalan prostor.

Naredna dva rezultata povezuju separaciona svojstva sa pojmovima koji se izražavaju u sasvim drukčijim terminima. Tako, imamo da su separaciona svojstva tesno vezana za preslikavanja odnosno za kompaktnost.

Urisonova lema (vidi [14]) Za svaki par A, B disjunktnih zatvorenih podskupova normalnog prostora X postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ takva da važi: $f(x) = 0$ za svako $x \in A$ i $f(x) = 1$ za svako $x \in B$.

Teorema (Keesling J.*)) Prostor 2^X je normalan ako i samo ako je prostor X kompakt.

2.2. *Kompaktnost, Lindelöf-ovost, parakompaktnost.* Medju pojmovima koji se izražavaju u terminima otvorenih pokrivača, ovi pojmovi se najčešće koriste. Kompaktni prostori su Lindelöf-ovi, a ovi parakompaktni. Medjutim, ako je parakompaktan prostor istovremeno prebrojivo kompaktan, tada je on i kompaktan prostor. Zanimljivo je da je topološki proizvod kompaktnih prostora, kompaktan prostor, dok odgovarajući rezultat za Lindelöf-ove i parakompaktne prostore ne važi. Metrički prostor naravno ne mora biti kompaktan, ali jeste parakompaktan. Tako, klasa parakompaktnih prostora je dosta velika i ima naročito primenu u metrizacionim problemima. Navedena tri pojma slično se ponašaju i u odnosu na preslikavanja. Dok je neprekidna slika svakog kompaktnog prostora kompaktan prostor, parakompaktnost se ne prenosi neprekidnim preslikavanjima. Medjutim, važi:

Teorema. (Michael, vidi [14]). Parakompaktnost je invarijanta zatvorenih preslikavanja.

2.3. *Apsolutna zatvorenost.* Neprekidna slika kompaktnog prostora u T_2 prostor je zatvoren podskup. Ovo svojstvo kompakt-

---

*) Keesling J., On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces, Pacific J. of Math., 33(1970), 657-667.

nih prostora je poslužilo za definiciju apsolutne zatvorenosti, kao jednog uopštenja kompaktnosti. Za Hausdorff-ov prostor X kažemo da je apsolutno zatvoren ako je X zatvoren podprostor svakog Hausdorff-ovog prostora u kome je sadržan. Sledeći rezultat pokazuje da se svojstvo apsolutne zatvorenosti može izraziti u terminima pokrivača.

Teorema. (vidi [14]) Hausdorff-ov prostor X je apsolutno zatvoren ako i samo ako za svaki otvoren pokrivač prostora X postoji konačan deo čija zatvaranja su pokrivač prostora X.

2.4. *Slaba kompaktnost, U-prostori i pseudokompaktnost.* Slaba kompaktnost se može okarakterisati na sledeći način: Za svaki prebrojiv otvoren pokrivač prostora X postoji konačan deo čija unija zatvaranja pokriva X. Iz te definicije neposredno sledi da je svaki apsolutno zatvoren prostor slabo kompaktan prostor. Iz Definicije 6.1.5. jednostavno sledi da je svaki slabo kompaktan prostor *U*-prostor, a ovaj pseudokompaktan prostor. Medjutim, ako je prostor kompletno regularan tada se navedena tri pojma poklapaju. Treba voditi računa da neki autori u definiciji pseudokompaktnosti traže da je prostor kompletno regularan (vidi [14]).

2.5. *Gustoća prostora.* Ovaj pojam se definiše kao najmanji kardinalni broj podskupova datog prostora čije zatvaranje daje čitav prostor. Poseban značaj imaju prostori čija gustoća je prebrojiva. Ti prostori se nazivaju separabilnim prostorima. Gustoća je invarijanta neprekidnih preslikavanja. U vezi gustoće proizvoda topoloških prostora značajan je sledeći rezultat:

Teorema. (vidi [14]) Ako je $d(X_s) \leq m \geq \aleph_0$ za svako $s \in S$ i $|S| = 2^m$, tada važi $d(\prod_{s S} X_s) \leq m$.

Kao specijalan slučaj navedene teoreme imamo da je separabilnost c-multiplikativno svojstvo.

2.6. *Dimenzija prostora.* Najčešće se obradjuju tri dimenzione funkcije ind X, Ind X i dim X, mada je razvijena teorija o još nekim dimenzionim funkcijama. Kod dimenzionih funkcija ind X i Ind X polazište je "pregrada" koja razdvaja prostor na dva otvorena podskupa, dok je kod dimenzione funkcije dim X polazište otvoren pokrivač prostora X. S obzirom na primenu kod trojki (f, X, Y) za nas su od značaja izmedju ostalih sledeći rezultati:

Stav. (vidi [5]) Ako je $X_0 \subset X$ zatvoren u X, tada važi $\mathrm{Ind}\, X_0 = \mathrm{Ind}\, X$.

Stav. (vidi [5]) Za T_1 prostor X važi $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$.

Formula Urisona-Mengera. Ako su M i N podskupovi nasledno normalnog prostora X tada važi $\mathrm{ind}\,(M \cup N) = \mathrm{ind}\, M + \mathrm{ind}\, M + 1$.

Teorema (vidi [5]) Ako je neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ normalnog prostora X na parakompakt Y zatvoreno tada važi $\dim X = \dim f + \mathrm{Ind}\, Y$.

Teorema. (vidi [5]) Za normalan prostor X važi $\mathrm{Ind}\, \beta X = \mathrm{Ind}\, X$.

Teorema. (vidi [14]) Za Tychonoff-ljev prostor X važi $\dim \beta X = \dim X$.

3. SEPARACIONA SVOJSTVA TROJKI NEPREKIDNOSTI

Ovaj odeljak odnosi se na separaciona svojstva prostora i separaciona svojstva trojki neprekidnosti (f, X, Y). U radu |40| uveden je pojam normalnosti trojki. Ovde su date definicije T_o, T_1, T_2 i T_3 trojke, zatim semi T_i $i = 0,1,2,3$ trojke, veze medju njima, kao i veze sa odgovarajućim svojstvima prostora X i Y. U radu se takodje daju primeri koji opravdavaju uvodjenje novih svojstava, odnosno pokazuju da izvesna tvrdjenja važe samo u jednom smeru. Tako se daje primer trojke koja jeste semi T_2 trojka a nije T_2 trojka. Takodje se daju primeri trojki koje jesu T_i trojke a nisu T_{i+1} trojke. Medjutim, pod izvesnim uslovima semi T_i trojke i T_i trojke se poklapaju. Pošto svojstvo da je X T_i prostor u opštem slučaju ne povlači za sobom da je i trojka (f, X, Y) T_i trojka, dat je primer prostora X koji jeste T_i prostor a da (f, X, Y) nije T_i trojka. U ovom odeljku se zatim daje veza prostora dekompozicije $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ i separacionih svojstava trojki (f, X, Y). Najzad od separacionih svojstava uvedena je i kolekcijska normalnost trojke (f, X, Y) i primerom pokazano da normalna trojka ne mora biti kolekcijski normalna trojka.

DEFINICIJE I NEKI REZULTATI O SEPARACIONIM SVOJSTVIMA PROSTORA I TROJKI NEPREKIDNOSTI

U ovom odeljku biće reči o mogućnosti definisanja nekih separacionih svojstava i njihovim osobinama, i nekim svojstvima u vezi separacionih svojstava.

Ovde će se pod prostorom podrazumevati topološki prostor a pod preslikavanjem $f : X \longrightarrow Y$ neprekidno preslikavanje. Definicije su prema Engelking-u [14] odnosno Berge-u [10]. Za inverziju preslikavanja f upotrebljavane su sledeće oznake: Za $y \in Y$ i $B \subset Y$ imamo $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Sa $\mathcal{B}(A)$ je označena familija otvorenih okolina podskupa A datog prostora.

DEFINICIJA 3.1. *Trojka* (f, X, Y) *se naziva* T_0 *trojka ako za svako* $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, *bar za jedan od podskupova* $f^{-1}(y_1)$, $f^{-1}(y_2)$ *postoji otvorena okolina koja ne seče drugi podskup: postoji* $U_1 \in \mathcal{B}\,|f^{-1}(y_1)|$ i $U_1 \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$, *ili postoji* $U_2 \in \mathcal{B}|f^{-1}(y_2)|$ *i* $U_2 \cap f^{-1}(y_1) = \emptyset$.

DEFINICIJA 3.2. *Trojka* (f, X, Y) *je semi* T_0 *trojka ako za svako* y_1, $y_2 \in Y$ *i proizvoljne tačke* $x_1 \in f^{-1}(y_1)$, $x_2 \in f^{-1}(y_2)$, *bar za jednu od tačaka* x_1, x_2 *postoji otvorena okolina koja ne sadrži drugu tačku.*

Na sličan način možemo definisati T_i trojke i semi T_i trojke za $i = 1,2,3,4.$ oponašajući odgovarajuće definicije separacionih svojstava topoloških prostora.

Očigledno je da važi:

STAV 3.3. *Ako je trojka* (f, X, Y) T_i *trojka tada je i semi* T_i *trojka,* $i = 0,1,2,3,4$.

Obrnuto u opštem slučaju ne važi, što pokazuju naredni primeri.

Primer 3.4. Neka je $X = R = Y$, X topologizirano tako da su skupovi koji ne sadrže nulu otvoreni ako su otvoreni u uobičajenom smislu, a ako sadrže nulu otvoreni su ako sadrže skup oblika $(-a, a) - \{1/n : n \in N\}$, gde je a neki pozitivan broj. Preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ definisano sa

$$f(x) = \begin{cases} x : x \neq 1/n, & n \in N \\ 1 : x = 1/n, & \text{za neko } n \in N \end{cases}$$

je neprekidno ako Y ima antidiskretnu topologiju. Skupovi $f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1)$ se ne mogu separirati otvorenim okolinama, a X je T_2 prostor, pa imamo trojku koja jeste semi T_2 trojka i T_1 trojka a nije T_2 trojka.

Primer 3.5. Neka je $X = \{-1/n : n \in N\} \cup \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$ sa uobičajenom topologijom na pravoj, a $Y = \{a,b\}$ sa antidiskretnom topologijom. Preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ definisano sa

$$f(x) = \begin{cases} a : x \in \{-1/n : n \in N\} \\ b : x \in \{0\} \cup \{1/n : n \in N\} \end{cases}$$

je neprekidno, (f, X, Y) je semi T_2 trojka koja jeste T_0 trojka a nije T_1 trojka.

Primer 3.6. Ako se uzme $X = Y$ prostor koji jeste T_i prostor a nije T_{i+1} prostor, $i = 0,1,2,3$, a za f identično preslikavanje dobija se primer semi T_i trojke koja nije semi T_{i+1} trojka.

Primer 3.7. Ako se za prostor X i Y uzme Niemytzki-eva ravan, i u prostoru Y zatvoreni podskupovi $Q = \{(x,0) : x$ racionalan broj$\}$ i $P = \{(x,0) : x$ nije racionalan broj$\}$, a za $f : X \longrightarrow Y$ identično preslikavanje, dobijamo trojku (f, X, Y) koja jeste T_3 trojka a nije T_4 trojka.

Ako je X T_i prostor, $i = 0,1,2$, trojka (f, X, Y) ne mora biti T_i trojka. Da bi se to videlo dovoljno je uzeti $Y = \{1, 2\}$ sa grubom topologijom, a $X = R$ sa uobičajenom topologijom i preslikavanje f definisati na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q & \text{(racionalni brojevi)} \\ 2 : x \in R - Q & \end{cases}$$

Kako se podskupovi $f^{-1}(1) = Q$ i $f^{-1}(2) = R - Q$ ne mogu separirati ni u kom pogledu, trojka (f, X, Y) u ovom slučaju nije čak ni T_0 trojka. Treba zapaziti da ova trojka jeste semi T_i trojka, $i = 0,1,2$.

Primer 3.8. Ovo je primer T_3 prostora X, a da trojka (f,X,Y) nije T_3 trojka.

Neka je $X = R$ sa uobičajenom topologijom, a $Y = \{1, 2, 3\}$. Topologija na Y neka je zadata familijom $\tau_Y = \{\emptyset, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$. Definišimo preslikavanje f sa

$$f(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q - \{0\} \\ 2 : x = 0 \\ 3 : x \in R - Q \end{cases}$$

Kako je u Y jedini neprazan otvoren skup $\{1,3\}$, a njegova inverzna slika je $R - \{0\}$, tj. $f^{-1}(\{1,3\})$ je otvoren, imamo da je f neprekidno preslikavanje.

U Y jedini neprazan zatvoren skup je $A = \{2\}$ i uočimo tačku recimo 1 koja nije u A. Podskupovi $f^{-1}(2) = 0$ i $f^{-1}(1) = Q - \{0\}$ ne mogu se separirati otvorenim skupovima. Iz navedenog sledi da trojka (f, R, Y) nije T_3 trojka.

Jednostavno se može pokazati da ako je X T_i prostor Y ne mora biti T_i prostor. A poznato je (vidi [14]) da je od separacionih svojstava jedino regularnost inverzna invarijanta i to za perfektna preslikavanja. Medjutim, separaciona svojstva se sa prostora Y prenose na trojke (f, X, Y).

STAV 3.9. Ako je Y T_i prostor, tada za svaki prostor X i neprekidno preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ važi da je trojka (f, X, Y) T_i trojka.

STAV 3.10. Neka je $f : X \longrightarrow Y$ neprekidno preslikavanje i $f^{-1}(y) \subset X$ kompaktan (ne obavezno i T_2) podskup od X za svako y Y. Tada važi: Trojka (f, X, Y) je semi T_2 trojka ako i samo ako je T_2 trojka.

Dokaz. Kako je svaka T_2 trojka semi T_2 trojka, treba dokazati da pod navedenim uslovima važi i obrnuto.

Neka je $A = f^{-1}(y_1)$ i $B = f^{-1}(y_2)$, gde su y_1 i y_2 bilo koje dve tačke iz Y. Pošto je (f, X, Y) semi T_2 trojka za svako $b \in B$ i $a \in A$ postoje disjunktni otvoreni skupovi V_a i U_a, takvi da je $b \in V_a$ i $a \in U_a$. Ako se postupak sprovede za svako a A imaćemo familije podskupova $\{V_a : a \in A\}$ i $\{U_a : a \in A\}$, gde je prvo podfamilija okolina tačke b, a drugo pokrivač kompaktnog skupa A. Neka je $U_1, U_2, \ldots, U_n$ konačan podpokrivač pokrivača $\{U_a : a \in A\}$, a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ odgovarajuće okoline tačke b iz familije $\{V_a : a \in A\}$. Skup $U = \cup \{U_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ je otvorena okolina od A a $V_b = \cap \{V_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ otvorena okolina tačke b, i važi $U \cap V_b = \emptyset$. Ako se ovaj postupak ponovi za svako $b \in B$ dobićemo familiju okolina {U} skupa A i pokrivač $\{V_b : b \in B\}$ skupa B. Zbog kompaktnosti skupa B postoji konačan podpokrivač $V_{b1}, V_{b2}, \ldots, V_{bk}$ pokrivača $\{V_b : b \in B\}$. Otvoreni podskup $\cup \{V_{bi} : i = 1,2,\ldots,k\}$ sadrži skup B, a otvoreni podskup $\cap \{U_{bi} : i = 1,2,\ldots,k\}$ sadrži skup A. Ovde se podskupovi U_{bi} uzeti iz familije U pokrivača skupa A, tako da je

$U_{bi} \cap V_{bi} = \emptyset$. Tako skupovi $A = f^{-1}(y_1)$ i $B = f^{-1}(y_2)$ imaju disjunktne otvorene okoline, pa je (f, X, Y) T_2 trojka. ||

STAV 3.11. Za neprekidno i na preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ prostora X *na prostor Y, (f, X, Y) je T_1 trojka ako i samo ako je skup $f^{-1}(y)$ zatvoren za svako $y \in Y$.*

Dokaz. Neka je (f, X, Y) T_1 trojka, $y \in Y$ i $x \notin F^{-1}(y)$. Tada postoji $y' \in Y$ takvo da je $x \in f^{-1}(y')$. Kako je (f, X, Y) T_1 trojka, postoji otvoren skup $U \subset X$ takav da važi $f^{-1}(y') \subset U$ i $U \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. U je otvorena okolina od x koja ne seče podskup $f^{-1}(y)$, pa je $f^{-1}(y)$ zatvoren. Na sličan način sledi i obrnuto. ||

Kako je za neprekidno preslikavanje $f : x \longrightarrow Y$ i T_1 prostor Y, podskup $f^{-1}(y)$ zatvoren za svako $y \in Y$, bilo bi od interesa videti da li se u nekim prostorima X i Y, ispunjenost aksiome T_1 za Y može okarakterisati zatvorenošću $f^{-1}(y)$ za svako $y \in Y$. Ako je f zatvoreno preslikavanje od X na Y tada zatvorenost $f^{-1}(y)$ za svako y iz Y povlači da je Y T_1 prostor.

Ako je f otvoreno ili čak faktor preslikavanje a $f^{-1}(y)$ zatvoren skup za svako $y \in Y$, takodje, iz $f(X - f^{-1}(y)) = Y - \{y\}$, važi da je Y T_1 prostor.

Da u opštem slučaju zatvorenost podskupova $f^{-1}(y)$ za svako y iz Y ne povlači T_1 aksiomu za prostor Y, sledi iz sledećeg primera.

Primer 3.12. Neka je $X = Y$ i ima bar dve tačke, a $f : X \longrightarrow Y$ je bilo kakvo preslikavanje. Neka X ima diskretnu topologiju a Y indiskretnu topologiju. Zbog diskretnosti topologije na X, f je neprekidno preslikavanje i za svako y iz Y podskup $f^{-1}(y)$ je zatvoren u X. Medjutim, nijedno y iz Y nije zatvoren podskup u Y.

STAV 3.13. Ako je (f, X, Y) T_2 trojka tada za svako y iz Y važi $f^{-1}(y) = \bigcap\{\overline{O} : O \in B(f^{-1}(y))\}$.

Dokaz. Ako je (f, X, Y) T_2 trojka, tada za svako $y_1 \neq y_2$ iz Y postoje otvoreni podskupovi O_1 i O_2 i važi $O_1 \supset f^{-1}(y_1)$, $O_2 \supset f^{-1}(y_2)$ i $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Ali tada su $X - O_1$ i $X - O_2$ zatvoreni podskupovi, pa je $f^{-1}(y_1) \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset X - O_2$ i $f^{-1}(y_2) \subset O_2 \subset \overline{O}_2 \subset X - O_1$. Kako je ovo ispunjeno za svako y_1, y_2 iz Y tada važi $f^{-1}(y) = \bigcap \overline{O}$ za svaki otvoren podskup O koji sadrži podskup $f^{-1}(y)$. ||

Iz narednog primera vidi se da obrnuto ne važi.

Primer 3.14. Neka je L Niemytzki-eva ravan, a Y faktor prostor L/R Niemytzki-evog prostora. Relacija ekvivalencije je uvedena tako da su u $L-L_1$ klase ekvivalencije sastavljene samo od po jedne tačke, a L_1 je podeljeno u dve klase $R(r)$ i $R(i)$, jedna ima za prvu koordinatu racionalne, a druga iracionalne brojeve. Za f uzimamo prirodnu pro jekciju $f(x) = R(x)$, gde je $R(x)$ klasa ekvivalencije tačke x. Tada (f, X, Y) ima osobinu da je $f^{-1}(y) = \bigcap\{\overline{O}: O \quad B(f^{-1}(y))\}$, a (f, X, Y) nije T_2 trojka jer se skupovi $f^{-1}(R(r))$ i $f^{-1}(R(i))$ ne mogu razdvojiti otvorenim podskupovima.

Prethodno razmatranje sugeriše poznati rezultat da je prostor X regularan ako i samo ako za svaki zatvoren podskup $A \quad X$ važi $A = \bigcap\{\overline{O} : O \in B(A)\}$. Odnosno važi:

STAV 3.15. T_1 prostor X je regularan ako i samo ako svaki zatvoren podskup u X jednak je preseku zatvaranja svih svojih okolina.

Dokaz. Neka je X T_1 prostor i ima svojstvo da za svaki zatvoren podskup A važi $A = \bigcap\{\overline{U}, U \in B(A)\}$, gde je $B(A)$ familija svih otvorenih okolina podskupa A. Neka je dalje $x \in V$ i V otvoren podskup prostora X. Tada je $B = X - V$ zatvoren podskup, pa važi da je B jednak preseku zatvaranja svih svojih okolina. Ako bi za svaki otvoren skup W, koji sadrži B, važilo $x \in \overline{W}$, važilo bi i $x \in B$, što je suprotno pretpostavci. Tako postoji otvorena okolina W_0 skupa $X - V$ takva da $x \notin \overline{W}_0$. Otud imamo $x \in X - \overline{W}_0 \subset X - W_0 \subset V$, što je ekvivalentno regularnosti prostora X. ||

S tim u vezi bilo bi od interesa dati odgovor na:

Pitanje 3.16. Da li postoji uslov sličan uslovu u prethodnom stavu, koji daje normalnost prostora?

Za (f, X, Y) separaciono svojstvo normalnost uvodi se na sledeći način:

DEFINICIJA 3.17. ([40]). Za trojku (f, X, Y) kažemo da je normalna ako za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa $A, B \subset Y$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subset X$ takvi da važi $f^{-1}(A) \subset U$ i $f^{-1}(B) \subset V$.

Sada se može iskazati analogon poznate teoreme da je kompaktan Hausdorff-ov prostor normalan. Dokaz je jednostavan.

STAV 3.18. Ako je (f, X, Y) kompaktna trojka i Y Hausdorff-ov prostor, tada je (f, X, Y) normalna trojka.

Treba naglasiti da je u [40] dat primer regularne kompaktne trojke koja nije normalna trojka. U navedenom radu takodje se daje veza izmedju normalnosti trojke (f, X, Y) i nekih drugih svojstava prostora X i Y i preslikavanja f. Mi ćemo ovde dati definiciju kolekcijske normalnosti i neke rezultate u vezi toga.

DEFINICIJA 3.19. Za (f, X, Y) kažemo da je kolekcijski normalna trojka ako za svaku diskretnu familiju $\{B_t : t \in T\}$ zatvorenih podskupova u Y postoji diskretna familija $\{U_t : t \in T\}$ sku-

pova otvorenih u X takva da je $f^{-1}(B_t)\ U_t$ za svako $t\in T$.

STAV 3.20. *Ako je X kolekcijski normalan prostor tada je $(f,\ X,\ Y)$ kolekcijski normalna trojka.*

Dokaz sledi iz činjenice da je inverzna slika diskretne familije preko neprekidnog preslikavanja takodje diskretna familija.

STAV 3.21. *Ako je Y kolekcijski normalan prostor, $(f,\ X,\ Y)$ je kolekcijski normalna trojka.*

Dokaz. Neka je $F=\{F_s\ :\ s\in S\}$ diskretna familija skupova zatvorenih u Y, pa postoji diskretna familija $\{V_s\ :\ s\in S\}$ skupova otvorenih u Y takva da važi $F_s\subset V_s$, pa je $f^{-1}(F_s)\subset f^{-1}(V_s)$ za svako $s\in S$. Tražena diskretna familija otvorenih skupova je $\{f^{-1}(V_s)\ :\ s\in S\}$. ||

Da bi se bolje videli Stavovi 3.20. i 3.21. treba napomenuti da kolekcijska normalnost nije invarijanta neprekidnih preslikavanja (čak ni otvorenih), nije inverzna invarijanta perfektnih preslikavanja, ali jeste invarijanta zatvorenih preslikavanja.

Naredni Primer 3.22. pokazuje da suprotno od Stava 3.20. nije tačno.

Primer 3.22. Neka je X Sorgenfrey-ova linija, koja je parakompaktan prostor pa time i kolekcijski normalan. Medjutim, proizvod X x X nije normalan prostor pa time nije ni kolekcijski normalan prostor. Ako uočimo projekciju $\pi\ :\ X\times X\longrightarrow X$ imamo trojku $(\pi,\ X\times X,\ X)$ koje jeste kolekcijski normalna trojka a da prostor X x X nije kolekcijski normalan prostor.

Da obrnuto od Stava 3.21. nije tačno, sledi iz toga da ako se uzme za X realna prava sa diskretnom topologijom a za Y realna prava sa antidiskretnom topologijom imamo: Prostor Y nije kolekcijski normalan prostor. Ako je $f : X \to Y$ identično preslikavanje, (f, X, Y) jeste kolekcijski normalan prostor.

S obzirom da svako preslikavanje $f : X \to Y$ indukuje jednu dekompoziciju $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ prostora X, postoji veza topologije na tom skupu sa topologijama na X i Y i sa preslikavanjem f. Samim tim postoji veza prostora na $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ sa trojkom (f, X, Y). U sledećem delu ovog odeljka biće razmatrane trojke (f, X, Y) u tom smislu.

Količnik (faktor) preslikavanja se definiše kao takvo neprekidno preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ prostora X na prostor Y da su u Y otvoreni svi podskupovi A čija je inverzna slika $f^{-1}(A)$ otvoren podskup od X, tj. Y je snabdeveno najbogatijom topologijom za koju je f neprekidno preslikavanje.

Dekompozicija $\{A_t : t \in T\}$, prostora X naziva se gornje poluneprekidna dekompozicija ako za svaki zatvoreni skup $Z \subset X$ važi da je $\cup \{A_t, A_t \cap Z \neq \emptyset\}$ zatvoren podskup (vidi [14]).

Jednostavno se može dokazati da je $\{A_t : t \in T\}$ gornje poluneprekidna dekompozicija ako i samo ako za svaki otvoren skup $U \subset X$, skup $\cup \{A_t : A_t \subset U\}$ je otvoren podskup.

STAV 3.23. Ako je $f : X \longrightarrow Y$ količnik preslikavanje prostora X na prostor Y i odgovarajuća dekompozicija $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ prostora X je gornje poluneprekidna dekompozicija, tada je (f, X, Y) T_i trojka ako i samo ako je Y T_i prostor, gde $i = 0,1,2,3,4$.

Ako je (f, X, Y) T_i trojka dokazaćemo da je Y T_i prostor. Suprotan smer je očigledan. Dokaz ćemo uraditi za $i = 0$. Ako je $i = 1,2,3,4$ dokaz ide analogno.

Neka je $y' \neq y''$ Y. Pošto je (f, X, Y) T_0 trojka postoji otvorena okolina O podskupa $f^{-1}(y')$ takva da je $f^{-1}(y'') \cap O = \emptyset$. Kako je dekompozicija $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ gornje poluneprekidna dekompozicija, podskup $\cup \{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \subset O\}$ je otvoren podskup u X, sadrži $f^{-1}(y')$, a ne sadrži $f^{-1}(y'')$. Pošto je f količnik preslikavanje a $\cup \{f^{-1}(y) : f^{-1}(y) \subset O\} = f^{-1}(B)$, sledi da je B tražena okolina tačke y'. ||

Preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ naziva se perfektno ako je X Hauzdorfov prostor, f neprekidno i zatvoreno preslikavanje, a $f^{-1}(y)$ kompaktni podskupovi od X za svako y iz Y (vidi[14]). Perfektna preslikavanja imaju mnoge dobre osobine čije posledice možemo videti i iz narednog izlaganja.

S obzirom da je regularnost inverzna invarijanta perfektnih preslikavanja može se pokazati sledeće tvrdjenje:

STAV 3.24. Ako je $f : X \longrightarrow Y$ zatvoreno i na preslikavanje tada je Y T_3 prostor ako i samo ako je (f, X, Y) T_3 trojka.

Dokaz. Da je (f, X, Y) T_3 trojka ako je Y T_3 prostor sledi iz definicije T_3 trojke (f, X, Y).

Suprotan deo teoreme sledi iz sledećeg razmatranja. Neka je y iz Y, $B = \overline{B} \subset Y$ i y nije iz B. Kako je (f, X, Y) T_3 trojka postoje otvoreni podskupovi O_1 i O_2 u X takvi da je $O_1 \supset f^{-1}(y)$, $O_2 \supset f^{-1}(B)$ i $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. S obzirom na zatvorenost preslikavanja f, skupovi $Y - f(X - O_1)$ i $Y - f(X - O_2)$ su otvorene okoline od y i B respektivno, pa treba samo još pokazati da su ovi skupovi disjunktni, a to sledi iz niže uočene jednakosti.

$$(Y - f(X - O_1)) \cap (Y - f(X - O_2)) = Y - f(X - O_1) \cup f(X - O_2) =$$

$$= Y - f\,(X - O_1 \cap O_2) = Y - f(X) = \emptyset . \quad ||$$

4. KOMPAKTNE, LINDELÖF-OVE I PARAKOMPAKTNE TROJKE NEPREKIDNOSTI

U ovom odeljku govori se o pojmovima kompaktnost, Lindelöf-ovost i parakompaktnost za prostore X i Y i trojke neprekidnosti (f, X, Y). Navedeni pojmovi uvedeni su za trojke (f, X, Y) u radu [40]. Postoje primeri trojki gde prostori X i Y nisu kompaktni, dok je (f, X, Y) kompaktna trojka. Medju rezultatima navedenog rada mogu se istaći sledeći:

STAV. *Trojka (f, X, Y) je kompaktna (Lindelöf-ova) ako i samo ako je kompaktna (Lindelöf-ova) trojka (i, f(X), Y), gde je i preslikavanje utapanja.*

TEOREMA. *Proizvod kompaktnih trojki je kompaktna trojka.*

Jedna od motivacija za razmatranje navedenih pojmova na trojkama je ta da ako je $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ otvoren pokrivač prostora Y, tada je i $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_a) : a \in A\}$ otvoren pokrivač prostora X. Pokrivači prostora X oblika $f^{-1}(\mathcal{V})$ mogu imati svojstva koja nemaju svi pokrivači prostora X. Tako se proučavanje svojstava kompaktnosti, Lindelöf-ovosti, parakompaktnosti uklapa u problematiku sledećeg tipa: Imamo dve klase $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ pokrivača prostora. Za prostor X kažemo da ima neko svojstvo m ako se u svaki pokrivač prostora X iz klase A može upisati pokrivač iz klase B.

U ovom odeljku je navedena problematika dalje razradjivana i dobijeni neki novi rezultati.

Tako je recimo pokazano da se kod kompaktne trojke ne mora raditi sa svim otvorenim pokrivačima, već samo sa pokrivačima baznim podskupovima.

Jedan analogon poznate teoreme da je neprekidna slika kompaktnog prostora opet kompaktan prostor je rezultat da se neprekidnim preslikavanjem kompaktne trojke opet dobija kompaktna trojka. Medju značajnijim rezultatima ovog odeljka su:

Teorema 4.17. koja daje vezu izmedju parakompaktnosti i Lindelöf-ovosti trojki.

Teorema 4.18. koja daje jedan uslov pod kojim su parakompaktnost prostora Y i trojke (f, X, Y) ekvivalentni.

NEKI REZULTATI O KOMPAKTNIM, LINDELÖF-OVIM I PARAKOMPAKTNIM TROJKAMA NEPREKIDNOSTI

DEFINICIJA 4.1. *Trojka (f, X, Y) se zove (vidi [40]) 1) kompaktna, 2) Lindelöf-ova, 3) parakompaktna, ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ prostora Y, u otvoren pokrivač $f^{-1}(\mathcal{V})$ prostora X je moguće upisati otvoren podpokrivač $\mathcal{U}$ tako da je $\mathcal{U}$ 1) konačan, 2) prebrojiv, 3) lokalno konačan.*

Ako je $f : X \to Y$ homeomorfizam, tada očigledno sve topološke osobine koje ima X imaju i Y i (f, X, Y). U opštem slučaju nije tako, što se vidi iz sledećeg primera. Neka je $X = Y = [0,1]$, X je sa diskretnom topologijom, Y sa uobičajenom topologijom a f je identično preslikavanje. Zbog diskretnosti topologije na X, f je neprekidno preslikavanje i X nije kompaktan prostor. Medjutim, Y je kompaktan prostor pa je i (f, X, Y) kompaktna trojka.

STAV 4.2. Trojka (f, X, Y) je kompaktna ako i samo ako za svaku familiju zatvorenih skupova $\{B_t : t\in T\}$ prostora Y sa osobinom konačnog presecanja familija $\{f^{-1}(B_t) : t\in T\}$ ima neprazan presek.

Dokaz. Neka je (f, X, Y) kompaktna trojka, a $\{B_t : t\in T\}$ zatvoreni podskupovi u Y sa osobinom konačnog presecanja. Ako bi bilo $\bigcap\{f^{-1}(B_t) : t\in T\} = \emptyset$, važilo bi $\{B_t : t\in T\} = \emptyset$ pa i $\bigcup \{\complement B_t : t\in T\} = Y$. Zbog kompaktnosti trojke (f, X, Y) postojala bi konačna podkolekcija sa osobinom $\bigcup \{f^{-1}(\complement B_i) : i = 1,2,\ldots,n\} = X$, odnosno $\bigcap\{B_i : i = 1,2,\ldots,n\} = \emptyset$. Što je suprotno pretpostavci. Slično bi išao suprotan smer dokaza. ||

Treba napomenuti da u Definiciji 4.1. umesto što se traži da svaki pokrivač $f^{-1}(\mathcal{V})$ ima pokrivač datih osobina, može se tražiti da se pokrivač $f^{-1}(\mathcal{V})$ može reducirati na konačan podpokrivač. Ovo naravno važi samo za kompaktnost i Lindelöf-ovost trojki (f, X, Y).

DEFINICIJA 4.3. Pod podtrojkom (f', X', Y') trojke (f, X, Y) podrazumevamo trojku (f', X', Y'), gde je $X'\subset X$, $Y'\subset Y$, $f'(x) = f(x)$, $x\in X'$ i $f' : X' \longrightarrow Y'$.

Sada se može iskazati jedno očigledno svojstvo trojki.

STAV 4.4. Ako je Y' zatvoren podskup prostora Y a X' proizvoljan podskup prostora X, tada, ako je (f, X, Y) kompaktna *trojka takva je i podtrojka* (f', X', Y'). *Ako je, medjutim,* $A \subset X$, $f_A = f|A$ *i* (f, X, Y) *kompaktna trojka, takva je i* (f_A, A, Y) *trojka.*

STAV 4.5. *Neka je* Y *Hausdorff-ov prostor,* $A \subset X$, $B \subset Y$, $f : X \longrightarrow Y$ *neprekidno preslikavanje,* $A = f^{-1}(B)$ *i* $f_A = f|A$. *Ako je* (f_A, A, B) *kompaktna trojka, tada se za svako* $y \in Y - B$ *podskupovi* $f^{-1}(B)$ *i* $f^{-1}(y)$ *mogu razdvojiti otvorenim skupovima. Otud* B *i* y *se takodje mogu razdvojiti otvorenim podskupovima.*

Dokaz. Za svako $y \in Y - B$ i $b \in B$ postoje disjunktne otvorene okoline V_b i W_b takve da je $b \in V_b$ a $y \in W_b$. Otuda su $f^{-1}V_b$ i $f^{-1}W_b$ otvoreni disjunktni podskupovi od X. Medjutim, ako se y fiksira a b uzme sve vrednosti iz B, imaćemo familiju otvorenih podskupova $\{f^{-1}V_b : b \in B\}$ koja pokriva A. Kako je (f_A, A, B) kompaktna trojka, postoji konačna familija $f^{-1}V_1, f^{-1}V_2, \ldots, f^{-1}V_n$ koja pokriva A. Ako su W_i odgovarajuće okoline od V_i, otvoreni podskupovi $\cup\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ i $\cap\{f^{-1}(W_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ su disjunktni i važe inkluzije $A \subset \cup\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ i $f^{-1}(y) \subset \{f^{-1}(W_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$. Otud, takodje važe inkluzije $B \subset \cup\{V_i : i = 1,2,\ldots,n\}$ i $y \in \cap\{W_i : i = 1,2,\ldots,n\}$. ||

POSLEDICA 4.6. *Neka je* $A = f^{-1}(B) \subset X$, $B \subset Y$, $f : X \to Y$ *neprekidno preslikavanje, i* Y *je Hausdorff-ov prostor. Tada, ako je* (f_A, A, B) *kompaktna trojka* $A \subset X$ *i* $B \subset Y$ *su zatvoreni podskupovi.*

DEFINICIJA 4.7. *Za trojku* (g, P, Q), *gde su* P *i* Q *topološki prostori, a* g *preslikava* P *i* Q *neprekidno, kažemo da je neprekidna slika trojke* (f, X, Y), *ako postoje neprekidna sirjektivna preslikavanja* $\varphi : X \to P$ *i* $\psi : Y \to Q$ *takva da važi* $\psi \circ f = g \circ \varphi$.

STAV 4.8. Ako je (f, X, Y) kompaktna trojka, a (g, P, Q) neprekidna slika trojke (f, X, Y), tada je i (g, P, Q) kompaktna trojka.

Dokaz. Ako je $(V_t : t \in T)$ otvoren pokrivač prostora Q, tada je $\{f^{-1} \circ \psi^{-1}(V_t) : t \in T\}$ otvoren pokrivač prostora X koji zbog kompaktnosti trojke (f, X, Y) ima konačan podpokrivač $\{f^{-1} \circ \psi^{-1}(V_i) : i = 1,2,\dots,n\}$. Tada zbog $\psi \circ f = g \circ \varphi$ važi da je $\{g^{-1}(V_i) : i = 1,2,\dots,n\}$ otvoren pokrivač prostora P, pa je (g, P, Q) kompaktna trojka. ||

Da suprotno od iskaza Stava 4.8. ne važi vidi se iz sledećeg primera. Neka je $X = Y = R$ sa uobičajenom topologijom a $f : X \longrightarrow Y$ neka je identično preslikavanje. Neka je $P = R$ i $Q = [-1,1]$ takodje sa uobičajenom topologijom a $g : P \longrightarrow [-1,1]$ definisano sa

$$g(x) = \begin{cases} -1 & : x < -1 \\ x & : -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases}$$

Ako je $\varphi : X \to P$ identično preslikavanje a $\psi : Y \to Q$ definisano kao i g. Imaćemo $\psi \circ f = g \circ \varphi$ i (g, P, Q) jeste kompaktna trojka a da (f, X, Y) nije kompaktna trojka.

IZ dokaza Stava 4.8. može se uočiti da su tačni odgovarajući iskazi ako se kompaktnost zameni svojstvom Lindelöf-a, odnosno svojstvom prebrojive kompaktnosti:

STAV 4.9. Ako je (f, X, Y) Lindelöf-ova trojka, a (g, P, Q) neprekidna slika trojke (f, X, Y), tada je i (g, P, Q) Lindelöf-ova trojka.

Mada je definicija prebrojive kompaktnosti trojke slična definicijama kompaktne i Lindelöf-ove trojke, navedimo je radi kompletnosti i iskazivanja narednog stava.

DEFINICIJA 4.10. *Za trojku (f, X, Y) kažemo da je prebrojivo kompaktna ako za svaki otvoren prebrojiv pokrivač V prostora Y za otvoren prebrojiv pokrivač $f^{-1}(V)$ prostora X postoji konačan podpokrivač.*

STAV 4.11. *Ako je (f, X, Y) prebrojivo kompaktna trojka, a (g, P, Q) neprekidna slika trojke (f, X, Y), tada je i (g, P, Q) prebrojivo kompaktna trojka.*

STAV 4.12. *Trojka (f, X, Y) je kompaktna ako i samo ako za svaki otvoren bazni pokrivač $\{B_t : t \in T\}$ prostora Y, otvoreni pokrivač $\{f^{-1}(B_t) : t \in T\}$ ima konačan podpokrivač.*

Dokaz bazira na činjenici da se u svaki otvoren porrivač $\mathcal{U}$ može upisati bazni otvoreni porkivač $\mathcal{B}$ i da inverzno preslikavanje održava inkluzivnost skupova.

Ako se uoči kompozicija dva preslikavanja, mogu se pokazati sledeća svojstva: Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada važi:

STAV 4.13. *Trojka $(g \circ f, X, Z)$ je kompaktna ako je bar jedna od trojki (f, X, Y), (g, Y, Z) kompaktna trojka.*

STAV 4.14. *Ako je $(g \circ f, X, Z)$ kompaktna trojka i f sirjektivno preslikavanje, tada je i (g, Y, Z) kompaktna trojka.*

Slično se može reći za kompoziciju više preslikavanja, odnosno za Lindelöf-ove i parakompaktne trojke.

Kako iz parakompaktnosti prostora X slede neka separaciona svojstva prostora X, logično je istraživati vezu izmedju parakompaktnosti trojke (f, X, Y) i separacionih svojstava prostora

X, Y i trojke (F, X, Y). Na kraju odeljka biće razmatrana i veza izmedju parakompaktnosti prostora X, Y i trojke (f, X, Y). S tim u vezi imamo sledeći rezultat:

TEOREMA 4.15. Ako je (f, X, Y) parakompaktna trojka i Y regularan prostor, tada je (f, X, Y) kolekcijski normalna trojka.

Dokaz. Neka je $F = \{F_s : s \in S\}$ diskretna familija skupova zatvorenih u prostoru Y. Familija $f^{-1}(F) = \{f^{-1}(F_s) : s \in S\}$ je diskretna familija skupova zatvorenih u prostoru X. Za svako $y \in Y$ odaberimo otvorenu okolinu V_y koja seče najviše jedan element od F, pa $f^{-1}(V_y)$ seče najviše jedan element diskretne familije $f^{-1}(F)$ i $\{f^{-1}(V_y) : y \in Y\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Kako je Y regularan prostor, a F diskretna familija skupova zatvorenih u Y možemo uzeti da napred nadjene okoline V_y su takve da $\overline{V}_y$ seče najviše jedan element familije F, za svako $y \in Y$. Sledi da i $f^{-1}(\overline{V}_y)$ seče najviše jedan element familije $f^{-1}(F)$. S druge strane, zbog neprekidnosti preslikavanja f imamo $f^{-1}(V_y) \subset \overline{f^{-1}(V_y)} \subset f^{-1}(\overline{V}_y)$, pa i skupovi $f^{-1}(V_y)$ i $\overline{f^{-1}(V_y)}$ seku najviše po jedan element familije $f^{-1}(F)$. Kako je (f, X, Y) parakompaktna trojka otvoreni pokrivač $\{f^{-1}(V_y) : y \in Y\}$ ima otvoreno lokalno konačno rafiniranje recimo $\{U_t : t \in T\}$. Pošto je svako U_t sadržano u nekom $f^{-1}(V_y)$, svako U_t seče najviše jedan element familije $f^{-1}(F)$. Uočimo otvoreni pokrivač $\{W_t : t \in T\}$ definisan sa $W_t = U_t - \overline{\cup\{U_i : i \quad T - \{t\}\}}$. Pošto je $\{U_t : t \in T\}$ lokalno konačna familija važi $\overline{\cup\{U_i : i \quad T' \subset T\}} = \cup\{\overline{U}_i : i \quad T' \subset T\}$, pa imamo $W_t = U_t - \cup\{\overline{U}_i : i \in T - \{t\}\}$. Tako nadjena familija $\{W_t : t \in T\}$ je otvoreno lokalno konačno rafiniranje familije $\{f^{-1}(V_y) : y \in Y\}$ i za svaki podskup $f^{-1}(F_s)$ imamo njegovu otvorenu okolinu $H_s = \cup\{W_t : W_t : W_t \cap F_s \neq \emptyset\}$. Zbog uslova $W_t = U_t - \cup\{\overline{U}_i :$

$i \in T - \{t\}\}$, H_s su ne samo disjunktne okoline elementa familije $f^{-1}(F)$, već je i familija $\{H_s : s \in S\}$ diskretna familija. ||

POSLEDICA 4.16. Ako je u parakompaktnoj trojki (f, X, Y) prostor Y regularan, tada je (f, X, Y) normalna trojka.

TEOREMA 4.17. Ako je (f, X, Y) parakompaktna trojka, Y regularan prostor, a X separabilan prostor, tada je (f, X, Y) Lindelöf-ova trojka.

Dokaz. Neka je $\{V_t : t \in T\}$ otvoreni pokrivač prostora Y. Za svako $y \in Y$ odaberimo otvorenu okolinu W_y takvu da je $W_y \subset \overline{W}_y \subset V_t$ za neko $t \in T$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f važi $f^{-1}(W_y) \subset \overline{f^{-1}(W_y)} \subset f^{-1}(\overline{W}_y) \subset f^{-1}(V_t)$. Otvoreni pokrivač $\{f^{-1}(W_y) : y \in Y\}$ prostora X je rafiniranje pokrivača $\{f^{-1}(V_t) : t \in T\}$. Zbog parakompaktnosti trojke (f, X, Y) postoji otvoreno lokalno konačno rafiniranje $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ pokrivača $\{f^{-1}(W_y) : y \in Y\}$.

Neka je A prebrojiv svugde gust podskup od X. Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač i od A, pa postoji $U_1, U_2, \dots$ prebrojiv deo od $\mathcal{U}$ koji pokriva A. Za svako U_i postoji $f^{-1}(V_{t(i)})$ sa osobinom $U_i \subset \overline{U}_i \subset f^{-1}(V_{t(i)})$. Odatle imamo $A \subset \overline{A} = X = \overline{\cup \{U_i \cap A : i = 1,2,\dots\}} = \cup \{\overline{U_i \cap A} : i = 1,2,\dots\} \subset \cup \{\overline{U}_i : i = 1,2,3,\dots\} \subset \cup \{f^{-1}(V_{t(i)}) : i = 1,2,\dots\}$. Familija $\{f^{-1}(V_{t(i)}) : i = 1,2,3,\dots\}$ je traženi prebrojiv podpokrivač od $\{f^{-1}(V_t) : t \in T\}$. ||

Od svojstava koja se definišu u terminima otvorenih pokrivača, parakompaktnost je medju složenijim i, za razliku recimo od kompaktnosti, nije invarijanta neprekidnih preslikavanja. Parakompaktnost takodje nije invarijanta otvorenih preslikavanja, ali jeste invarijanta zatvorenih preslikavanja i inverzna invarijanta savršenih (perfektnih) preslikavanja. S obzirom na gore rečeno, od interesa je naći vezu izmedju parakompaktnosti trojke i parakompaktnosti prostora X i Y. U vezi toga imamo tvrdjenje:

TEOREMA 4.18. Za perfektno i na preslikavanje $f : X \longrightarrow Y$ važi: Y je parakompaktan prostor ako i samo ako je (f, X, Y) parakompaktna trojka.

Dokaz. Da bi pokazali kako iz parakompaktnosti prostora Y sledi parakompaktnost trojke (f, X, Y) uočimo otvoren pokrivač $\{V_t : t \in T\}$ parakompaktnog prostora Y, lokalno konačan pokrivač $\{V'_{t'} : t' \in T'\}$ upisan u dati pokrivač $\{V_t : t \in T\}$ i za svako y iz Y okolinu V_y koja seče samo konačno elemenata pokrivača $\{V'_{t'} : t' \in T'\}$.

Sada imamo da je pokrivač $\{f^{-1}(V'_{t'}) : t' \in T'\}$ prostora X lokalno konačan i upisan u pokrivač $\{f^{-1}(V_t) : t \in T\}$, gde otvorena okolina $f^{-1}(V_y)$ svake tačke x iz $f^{-1}(y)$ seče konačno elemenata pokrivača $\{f^{-1}(V'_{t'}) : t' \in T'\}$.

Da bi pokazali da iz parakompaktnosti trojke (f, X, Y) sledi parakompaktnost prostora Y, dokažimo da sledi parakompaktnost prostora X, za perfektna preslikavanja. Podjimo od otvorenog pokrivača $\{U_s : s \in S\}$ prostora X. Kako su podskupovi $f^{-1}(y)$ kompaktni za svako y iz Y, jer je f perfektno preslikavanje, za svako y iz Y uočimo konačan skup S(y) iz S, tako da $\{U_s : s \in S(y)\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa $f^{-1}(y)$, tj. $f^{-1}(y) \subset \cup \{U_s : s \in S(y)\}$. Zbog parakompaktnosti trojke (f, X, Y), za otvoreni*) pokrivač $\{f^{-1}(V_y) : y \in Y\}$ prostora X postoji lokalno konačan pokrivač $\{W_t : t \in T\}$ upisan u pokrivač $\{f^{-1}(V_y) : y \in Y\}$.

---

*) Podskupovi V_y uzeti su takvi da važi $f^{-1}(V_y) \quad \cup \{U_i : U_i \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset\}$. Egzistencija podskupova V_y sa gornjim svojstvom obezbedjena je zatvorenošću preslikavanja f (vidi 1.4.13. u [14]), a podskupova U_i sa gornjim svojstvom ima samo konačno.

Za svako x iz X postoji otvorena okolina O_x koja seče samo konačno elemenata pokrivača $\{W_t : t \in T\}$, tj. za svako x iz X postoji konačan podskup $T(x)$ indeks skupa T, tako da je $O_x \cap W_t \neq \emptyset$ samo za t iz $T(x)$.

S druge strane svako x iz $f^{-1}(y)$ leži u konačno elemenata pokrivača $\{U_s : s \in S(y)\}$ podskupa $f^{-1}(y)$.

Otvoreni pokrivač $\{W_t \cap U_s : t \in T(x), \quad s \in S(y), \quad x \in X\}$ prostora X je lokalno konačan i upisan u pokrivač $\{U_s : s \in S\}$, jer okolina $O_x \cap \bigcap \{U_s : s \in S(y)\}$ tačke x seče samo konačno elemenata pokrivača $\{W_t \cap U_s : t \in T(x), \quad s \in S(y), \quad x \in X\}$. ||

5. APSOLUTNA ZATVORENOST TROJKI NEPREKIDNOSTI

U ovom odeljku razmatra se apsolutna zatvorenost trojki. Inspiracija za ovakvo razmatranje potiče od [6], [12] i [25]. Naime, u ovim radovima se razmatra pojam apsolutno zatvorenih prostora kao jedan oblik uopštenja pojma kompaktnosti. Sam pojam je uveden u [6], a dosta je obradjivan u [25], [39], [43], [11], i [12]. Kako je pojam apsolutne zatvorenosti vezan za pokrivače prostora logično je bilo uvesti pojam apsolutne zatvorene trojke kao što je u [40] bio uveden pojam kompaktne trojke. U ovom delu rada daje se veza izmedju apsolutne zatvorenosti trojke i nekih sličnih svojstava kao što je kompaktnost trojke ili slaba kompaktnost trojke. S druge strane pokazuje se da su ta svojstva pod izvesnim uslovima ekvivalentna. Kao što je poznato neprekidna slika apsolutno zatvorenog prostora je apsolutno zatvoren prostor. Uvodjenje pojma apsolutne zatvorenosti trojke (f, X, Y) daje jedan pojam koji je izmedju apsolutne zatvorenosti prostora X i apsolutne zatvorenosti prostora Y. Takodje se daju primeri koji govore da su navedene implikacije stroge, odnosno daju se primeri trojki koje jedan uslov zadovoljavaju a drugi ne.

Kod pojmova tipa kompaktnosti, kao što je apsolutna zatvorenost, od interesa je posmatrati i ponašanje prema diskretnim topološkim sumama i prema proizvodu, pa je ta problematika ovde takodje razmatrana.

NEKI REZULTATI O APSOLUTNO ZATVORENIM TROJKAMA

Definicija apsolutno zatvorene*) trojke daje se analogno definiciji 4.1. (vidi [40]) za kompaktne trojke. Neka su X i Y topološki prostori a $f : X \longrightarrow Y$ neprekidno preslikavanje od X u Y. Tada možemo dati sledeću definiciju:

DEFINICIJA 5.1. Trojka (f, X, Y) je apsolutno zatvoreno ako za svaki otvoren pokrivač $V = \{V_t : t \in T\}$ prostora Y postoji konačan deo $V_1, V_2, \ldots, V_n$ takav da je $\cup\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,\ldots,n\} = \cup\{\overline{f^{-1}(V_i)} : i = 1,2,\ldots,n\} = X$.

STAV 5.2. Ako je X apsolutno zatvoren prostor tada je (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka.

Dokaz. Neka je $V = \{V_t : t \in T\}$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora Y, tada je $f^{-1}(V) = \{f^{-1}(V_t) : t \in T\}$ otvoren pokrivač prostora X. Kako je X apsolutno zatvoren prostor, pokrivač $f^{-1}(V)$ ima konačan deo koji zadovoljava uslov definicije apsolutne zatvorenosti trojke (f, X, Y). ||

STAV 5.3. Ako je (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka, f sirjektivno preslikavanje i Y Hausdorff-ov prostor, tada je Y apsolutno zatvoren prostor.

---

*) U [14] apsolutna zatvorenost se naziva H-zatvorenost (H-closedness).

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = \{V_t : t \in T\}$ otvoren pokrivač prostora Y, tada postoji konačan deo $V_1, V_2, \dots, V_n$ $\mathcal{V}$ takav da je $\overline{\cup\{f^{-1}(V_i)} : i = 1,2,3,\dots,n\} = X$. Medjutim, kako je f neprekidno preslikavanje važi $\overline{f^{-1}(V_i)} \subset f^{-1}(\overline{V}_i)$, pa sledi $X = \cup\{\overline{f^{-1}(V_i)} : i = 1,2,3,\dots,n\} = \overline{\cup\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,3,\dots,n\}} \subset \cup\{f^{-1}(\overline{V}_i) : i = 1,2,3,\dots,n\}$, a odatle $\cup\{f^{-1}(\overline{V}_i) : i = 1,2,3,\dots,n\} = X$. I konačno imamo $\cup\{\overline{V}_i : i = 1,2,\dots,n\} = Y$. ||

POSLEDICA 5.4. Ako je Hausdorff-ov prostor Y neprekidna slika apsolutno zatvorenog prostora X, tada je Y apsolutno zatvoren prostor.

Stavovi 5.2. i 5.3., i Posledica 5.4. daju sledeću šemu implikacija

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
X \text{ aps.zat.} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{Posledica 5.4.}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Stav 5.2.}"'] & & Y \text{ aps.zat.} \\
& (f,\ X,\ Y = fX) \text{ aps.zat. trojka} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Stav 5.3.}"'] &
\end{tikzcd}$$

Sledeća dva primera 5.5. i 5.6. pokazuju da implikacije suprotne od onih u prethodnoj šemi nisu tačne.

Primer 5.5. Neka je Y apsolutno zatvoren i nekompaktan prostor i $|Y| \leq \aleph_0$. Ako se za X uzme skup Y sa diskretnom topologijom, a za $f : X \to Y$ identično preslikavanje, imaćemo da je f neprekidno preslikavanje, (f, X, Y) nije apsolutno zatvorena trojka a $Y = f(X)$ jeste apsolutno zatvoren prostor.

Primer 5.6. Neka je X prava sa uobičajenom topologijom, Y

prava sa grubom topologijom, a $f : X \to Y$ identično preslikavanje. Jedini pokrivač prostora Y je ceo prostor Y, pa je (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka, a X pošto je regularan i nekompaktan prostor nije apsolutno zatvoren prostor (vidi [6]).

DEFINICIJA 5.7. *Disjunktna topološka suma familije trojki* $\{(f_a, X_a, Y_a) : a \in A\}$ *je trojka* (f, X, Y), *gde je* $X = \oplus \{X_a : a \in A\}$ $Y = \oplus \{Y_a : a \in A\}$ *i* $f | X_a = f_a$ *za svako* $a \in A$, *a* $\oplus$ *označava disjunktnu sumu odgovarajućih prostora i* $f_a : X_a \to Y_a$.

STAV 5.8. *Disjunktna topološka suma familije trojki* $\{(f_a, X_a, Y_a) : a \in A\}$ *je apsolutno zatvorena trojka ako i samo ako svaka trojka* (f_a, X_a, Y_a), $a \in A$, *apsolutno zatvorena trojka i A konačan skup.*

Dokaz. Neka je skup A konačan skup, a svaka trojka (f_a, X_a, Y_a) apsolutno zatvorena, i V proizvoljan otvoren pokrivač od $Y = \oplus \{Y_a : a \in A\}$. Familija $f^{-1}(V)$ je otvoren pokrivač prostora $X = \oplus \{X_a : a \in A\}$. Pošto je A konačan skup i svaka trojka (f_a, X_a, Y_a), $a \in A$, apsolutno zatvorena, to postoji konačan deo $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2), \dots, f^{-1}(V_n)$ familije $f^{-1}(V) = \{f^{-1}(V), V \in V\}$, takav da je $\overline{\cup \{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,3,\dots,n\}} = X$.

Neka je sada (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka gde je $X = \oplus \{X_a : a \in A\}$, $Y = \oplus \{Y_a : a \in A\}$, $f_a : X_a \to Y_a$, $a \in A$, i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje tako da je $f|X_a = f_a$. Neka je U otvoren pokrivač podprostora Y_{a_0} za neko $a_0 \in A$ i $V = \{Y_a : a \in A - \{a_0\}\}$ $U \cup V$ je otvoren pokrivač sume $\oplus \{Y_a : a \in A\}$. Familije $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ su disjunktne i čine otvoren pokrivač prostora X_{a_0} i $X - X_{a_0}$. Kako je trojka (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka, iz gornjih familija se može izdvojiti konačan deo $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_n)$ i $f^{-1}(Y_1) = X_1$, $f^{-1}(Y_2) = X_2, \dots,$

$f^{-1}(Y_k) = X_k$ čije adherencije pokrivaju X_{a_0} i $X - X_{a_0}$ respektivno. To znači da je svaki prostor X_a apsolutno zatvoren prostor, a A konačan skup. ||

Ako se proizvod familije trojki $\{(f_a, X_a, Y_a) : a \in A\}$ (vidi [40]) uvede uslovom da je to trojka (f, X, Y) gde je preslikavanje $f : X \to Y$ definisano sa $f = \{f_a : a \in A\}$, $X = \Pi\{X_a : a \in A\}$, a $Y = \Pi\{Y_a : a \in A\}$, može se pokazati sledeće tvrdjenje:

STAV 5.9. Topološki proizvod familije $\{(f_a, X_a, Y_a) : a \in A\}$ *je apsolutno zatvoren ako i samo ako sve trojke* (f_a, X_a, Y_a) *su apsolutno zatvorene trojke.*

Dokaz Stava 5.9. sledi iz sledećih rezultata: Lema 5.10., Lema 5.11., Lema 5.12. i komentara iza tih lema.

LEMA 5.10. Hausdorff-ov prostor X je apsolutno zatvoren ako i samo ako za svaki otvoren bazni pokrivač $\mathcal{B} = \{B_t : t \in T\}$ *prostora X postoji konačan deo* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $\mathcal{B}$ *sa osobinom* $\cup\{\overline{B}_i : i = 1,2,3,\ldots,n\} = X$.

Dokaz. Neophodnost uslova je jasna. Pokažimo da je uslov i dovoljan. Neka je $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ otvoren pokrivač prostora X. Za svako $x \in X$ postoji $a(x) \in A$ takvo da je $x \in U_{a(x)}$, i neka je $t(x) \in T$ takvo da je $x \in B_{t(x)} \subset U_{a(x)}$. Familija $\{B_{t(x)} : x \in X\} \subset \mathcal{B}$ ima konačan deo $B_1, B_2, \ldots, B_n$ takav da je $\cup\{\overline{B}_i : i = 1,2,3,\ldots,n\} = X$. Ali tada zbog $B_{t(x)} \subseteq U_{a(x)}$, važi za odgovarajuće elemente pokrivača $\mathcal{U}$ da postoji konačan deo $U_1, U_2, \ldots, U_n$ pokrivača $\mathcal{U}$ sa osobinom $\cup\{\overline{U}_i : i = 1,2,3,\ldots,n\} = X$. ||

LEMA 5.11. Neka su X_a, Y_a, $a \in A$, *topološki prostori, a* $f_a : X_a \to Y_a$ *neprekidna preslikavanja. Trojka* $(\prod_a f_a, \prod_a X_a, \prod_a Y_a)$ *je je apsolutno zatvorena ako i samo ako za svaki bazni pokrivač*

$\mathcal{B} = \{\prod_a B_a^i : a\in A,\ i\in I\}$, *prostora* $\prod Y_a$ *koji je otvoren, postoji konačan deo* $\prod_a B_a^1, \prod_a B_a^2, \ldots, \prod_a B_a^n$ *takav da je* $\cup\{\overline{f^{-1}(\prod_a B_a^i)} : i = 1,2,\ldots,n\} = \prod\{X_a : a\in A\}$.

Dokaz. Kako je neophodnost uslova jasna, pokažimo da je uslov dovoljan. Neka je $V = \{V_t : t\in T\}$ otvoreni pokrivač prostora $\prod\{Y_a : a\in A\}$. Za svako $y\in\prod\{Y_a : a\in A\}$ postoji $t(y)$ takvo da je $y\in V_{t(y)}\subset \prod\{Y_a : a\in A\}$, i postoji bazni element $\prod\{B_a^y : a\in A\}$ takav da je $y\in\prod\{B_a^y : a\in A\}\subset V_{t(y)}$. Familija $\{\prod(B_a^y : a\in A) : y\in\prod_a Y_a\}$ je otvoren bazni pokrivač prostora $\prod\{Y_a : a\in A\}$, a $\{f^{-1}(\prod\{B_a^y : a\in A\}) : y\in\prod_a Y_a\}$ je otvoren bazni pokrivač prostora $\prod\{X_a : a\in A\}$. Kako je $f^{-1}(\prod B_a^y, a\in A) = \prod\{f_a^{-1}(B_a^y), a\in A\}$, nadjeni pokrivač je bazni za prostor $\prod\{X_a : a\in A\}$, i po pretpostavci postoji konačan deo tog pokrivača $\prod_a f_a^{-1}(B_a^1), \prod_a f_a^{-1}(B_a^2), \ldots, \prod_a f_a^{-1}(B_a^n)$ takav da je $\cup\{\overline{\prod_a f_a^{-1}(B_a^i)} : i = 1,2,\ldots,n\} = \prod\{X_a : a\in A\}$. Medjutim, svaki $\prod\{B_a^i : a\in A\}$ je u nekom elementu V_i pokrivača V, pa postoji konačan deo $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sa osobinom $\prod\{X_a : a\in A\} = \cup\{\overline{f^{-1}(\prod_a B_a^i)} : i = 1,2,3,\ldots,n\} = \cup\{\overline{\prod_a f_a^{-1}(B_a^i)} : i = 1,2,3,\ldots,n\}\subset\cup\{\overline{f^{-1}(V_a^i)} : i = 1,2,\ldots,n\}$. ||

LEMA 5.12. *Trojka* $(\prod_{a\in A} f_a, \prod_{a\in A} X_a, \prod_{a\in A} Y_a)$ *je apsolutno zatvorena ako i samo ako za svaki otvoren subbazni pokrivač prostora* $\prod\{Y_a : a\in A\}$ *postoji konačan deo takav da je zatvaranje inverznih slika članova tog dela pokrivač prostora* $\prod\{X_a : a\in A\}$.

Neophodnost uslova iskazanih u Stavu 5.9. sledi iz sledećeg izlaganja: Neka je $(\prod f_a, \prod X_a, \prod Y_a)$, gde je $a\in A$, apsolutno zatvorena trojka i $V_{a_0} = \{V_{a_0}^t : t\in T\}$ otvoreni pokrivač prostora Y_{a_0}. Za svako $t\in T$ neka je $\prod_{a\in A} V_a^t$ takvo da je $V_a^t = Y_a$ za svako $a\in A-\{a_0\}$. Familija $\{\prod_{a\in A} V_a^t : t\in T\}$ je otvoreni pokrivač prostora $\prod_{a\in A} Y_a$. Kako je $(\prod_{a\in A} f_a, \prod_{a\in A} X_a, \prod_{a\in A} Y_a)$ apsolutno zatvo-

rena trojka, postoji konačan deo $\prod_{a\in A} V_a^1, \prod_{a\in A} V_a^2, \dots, \prod_{a\in A} V_a^n$ navedenog pokrivača takav da važi $\prod_{a\in A} X_a = \cup\,\{\overline{f^{-1}(\prod_{a\in A} V_a^i)}: i=1,2,\dots,n\} = \cup\,\{\overline{\prod_{a\in A} f_a^{-1}(V_a^i)} : i = 1,2,\dots,n\} = \cup\,\{\prod_{a\in A} \overline{f_a^{-1}(V_a^i)} : i = 1,2,\dots,n\}$.
Odatle sledi da je $\{\overline{f_{a_0}^{-1}(V_{a_0}^i)} : i = 1,2,\dots,n\}$ pokrivač prostora X_{a_0}. ||

S obzirom na definiciju 4.1., gde se za kompaktnost trojke (f, X, Y) zahteva da za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ prostora Y postoji konačan deo pokrivača $f^{-1}(\mathcal{V})$ koji pokriva prostor X, imamo:

STAV 5.13. *Svaka kompaktna trojka je apsolutno zatvorena trojka.*

STAV 5.14. *Neka je (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka, a Y regularan prostor, tada je (f, X, Y) kompaktna trojka.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora Y, a $\mathcal{W}$ otvoren pokrivač prostora Y koji je upisan u pokrivač $\mathcal{V}$ tako da za svako $y\in Y$ postoje $W\in\mathcal{W}$ i $V\in\mathcal{V}$ tako da je $y\in W\subset\overline{W}\subset V$. Zbog regularnosti prostora Y takav pokrivač $\mathcal{W}$ postoji. Familija $\{f^{-1}(W): W\in\mathcal{W}\}$ je pokrivač prostora X, a pošto je (f, X, Y) apsolutno zatvo rena trojka postoji konačan deo $f^{-1}(W_1)$, $f^{-1}(W_2),\dots, f^{-1}(W_n)$ takav da je $\cup\,\{\overline{f^{-1}(W_i)} : i = 1,2,3,\dots,n\} = X$. Kako za svaki W_i postoji $V_i\in\mathcal{V}$ sa osobinom $\overline{W}_i\subset V_i$ imamo $\cup\,\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,3,\dots,n\} = X$. ||

Jedno oslabljenje apsolutne zatvorenosti je slaba kompaktnost, gde se traži da svaki prebrojiv otvoren pokrivač ima konačan deo čije zatvaranje pokriva dati prostor. Taj pojam za trojke detaljno je obradjen u sledećem odeljku s obzirom na njegove veze sa pojmovima $\mathcal{U}$- trojki i pseudokompaktnim trojkama. S druge strane, s obzirom na vezu sa apsolutnom zatvorenošću, ovde se kratko dotičemo tog pojma radi kompletnosti ovog odeljka. Dajemo i definiciju ekvivalentnu Definiciji 6.2.1.

DEFINICIJA 5.15. Trojka (f, X, Y) *je slabo kompaktna ako za svaki prebrojiv otvoren pokrivač* $\mathcal{V}$ *prostora* Y *postoji konačan deo* $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ *takav da je* $\overline{\cup \{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,3,\ldots,n\}} = X$.

Može se pokazati da važi sledeća šema implikacija, analogna šemi za apsolutnu zatvorenost:

$$\begin{tikzcd} X \text{ slabo kompaktan} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & Y \text{ slabo kompaktan} \\ & (f, X, Y) \text{ slabo kompaktna trojka} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

STAV 5.16. Svaka apsolutno zatvorena trojka (f, X, Y) *je slabo kompaktna trojka.*

Prethodni Stav 2.16. je jasan. Da obrnuto nije tačno sledi iz sledećeg primera: Neka je T Tihonovljeva ravan. Ona jeste slabo prebrojivo kompaktan prostor a nije apsolutno zatvoren prostor. Ako se za preslikavanje uzme identično preslikavanje Tihonovljeve ravni na sebe, imamo da je (f, T, T) slabo prebrojivo kompaktna trojka koja nije apsolutno zatvorena trojka. Slično, primer prostora koji jeste apsolutno zatvoren prostor a nije kompaktan prostor daje apsolutno zatvorenu trojku koja nije kompaktna trojka.

Ako se uvede pojam otvorene filterske baze prostora, tada se apsolutno zatvorena trojka može okarakterisati sledećim:

STAV 5.17. Ako je $f : X \to Y$ *neprekidno i sirjektivno preslikavanje, tada su za trojku* (f, X, Y) *ekvivalentna tvrdjenja:*

1. *Trojka (f, X, Y) je apsolutno zatvorena trojka.*

2. *Za svaku otvorenu filtersku bazu V i Y, familija $f^{-1}(V)$ ima tačku nagomilavanja u X.*

3. *Za svaku otvorenu filtersku bazu V u Y, otvoren ultrafiltar u X koji je generisan preko $f^{-1}(V)$ konvergira u X.*

Dokaz. U [6], [11] i [39] dokazano je da su sledeća svojstva, koja se odnose na otvorene pokrivače i otvorene filterske baze, medjusobno ekvivalentna:

(a) Sva otvorena filterska baza prostora P ima tačku nagomilavanja.

(b) Svaki otvoren pokrivač prostora P ima konačan deo čija unija je gust deo prostora P.

(c) Svaki otvoren ultrafiltar na prostoru P je konvergentan.

S obzirom na definiciju apsolutne zatvorenosti trojke (f, X, Y), svojstvo (b) se može uzeti za osnovu, pa je Stav 5.17. posledica ekvivalencije svojstava (a), (b) i (c).

6. SLABO KOMPAKTNE TROJKE, U-TROJKE I PSEUDOKOMPAKTNE TROJKE NEPREKIDNOSTI

U ovom odeljku biće reči o slabo kompaktnim prostorima, *U*-prostorima i pseudokompaktnim prostorima, i primenama navedenih svojstava na trojke (f, X, Y). Nešto slično je u [40] uradjeno sa kompaktnošću, a u ovom radu proučavanje je prošireno na navedena tri pojma. Ova tri pojma su redom uopštenja pojma apsolutne zatvorenosti pa otud imamo ovaj odeljak iza odeljka o apsolutno zatvorenim trojkama. Za razliku od ostalih odeljaka ovde se definicije i iskazi numerišu trima brojevima, gde je prvi broj oznaka odeljka, drugi broj je oznaka dela odeljka. Prvi deo je uvodni, drugi deo se odnosi na slabo kompaktne trojke, treći deo se odnosi na *U*-trojke, a četvrti deo na pseudokompaktne trojke. Treći broj je broj iskaza u tom delu odeljka.

Drugi deo odeljka bavi se pojmom slabe kompaktnosti i njegove primene na trojke neprekidnosti. Daju se veze izmedju slabe kompaktnosti prostora X i Y i trojke (f, X, Y), kao i neke ekvivalencije uslova slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y).

U trećem delu ovog odeljka obradjuje se pojam *U*-prostora i

$\mathcal{U}$-trojki. Daje se veza sa slabo kompaktnim trojkama kao i veza sa svojstvima prostora X i Y.

Najzad u četvrtom delu ovog odeljka radi se sa svojstvom pseudokompaktnosti prostora X i Y i trojki (f, X, Y).

Na početku odeljka (u uvodnom - prvom delu) daju se neke definicije i svojstva pomenutih pojmova: slaba kompaktnost, $\mathcal{U}$-prostori i pseudokompaktnost. Razlog za ovo je jednostavnije izlaganje pri primeni ovih pojmova na trojke.

6.1. NEKE DEFINICIJE I SVOJSTVA SLABO KOMPAKTNIH PROSTORA I $\mathcal{U}$-PROSTORA

Kao što je poznato (vidi [32], [8] i [31]) pojam slabe kompaktnosti se može uopštiti pojmom $\mathcal{U}$-prostora, a ovaj pojmom pseudokompaktnosti. Veze izmedju navedenih pojmova mogu se šematski prikazati na sledeći način:

X slabo kompaktan $\Longrightarrow$ X je $\mathcal{U}$-prostor $\Longrightarrow$ X je pseudokompaktan

U daljem izlaganju biće nam potrebne sledeće dve definicije:

DEFINICIJA 6.1.1. (vidi [31]) Neka je $\mathcal{U}$ familija podskupova topološkog prostora X. Tačka $x_0 \in X$ je tačka nagomilavanja familije $\mathcal{U}$ ako svaka okolina tačke x_0 ima neprazan presek sa beskonačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.

DEFINICIJA 6.1.2. (vidi [31]) Familija A podskupova topološkog prostora X je lokalno konačna ako svaka tačka prostora X ima okolinu koja seče najviše konačno članova iz A, ili ekvivalentno *tome, ako familija A nema nijednu tačku nagomilavanja.*

U [8] je pokazana sledeća teorema o ekvivalenciji, koja je vrlo korisna u radu s obzirom na raznovrsnost uslova preko kojih se može raditi.

TEOREMA 6.1.3. Neka je X topološki prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:

(a) X je slabo kompaktan.

(b) Svaka prebrojiva lokalno konačna familija disjunktnih i otvorenih skupova u X je konačna.

(c) Ako je U prebrojiv otvoren pokrivač prostora X, tada postoji konačan deo familije U čija adherencija pokriva prostor X.

U-prostori, koji su uopštenje slabo kompaktnih prostora, uvode se preko pojma *U*-sistema.

DEFINICIJA 6.1.4. (vidi [32]) Niz $U = \{U_n : n \in N\}$ *nepraznih otvorenih podskupova od X je U-sistem u prostoru X ako je* $\overline{U}_j \cap \overline{\bigcup \{U_n : n \in N - \{j\}\}} = \emptyset$ *za svako* $j \in N$.

DEFINICIJA 6.1.5. (vidi [32]) Topološki prostor X je U-prostor ako svaki U-sistem u prostoru X ima tačku nagomilavanja.

Ako se uvedu odgovarajući pojmovi na trojkama (f, X, Y) imaćemo uopštenja tih pojmova i nekih od poznatih rezultata koji su vezani za navedene pojmove.

6.2. SLABO KOMPAKTNE TROJKE

DEFINICIJA 6.2.1. Trojka (f, X, Y) je slabo kompaktna ako za svaku lokalno konačnu familiju V otvorenih nepraznih podskupova prostora Y, familija $f^{-1}(V)$ je konačna u prostoru X.

Neka od svojstava slabo kompaktnih trojki su:

STAV 6.2.2. Ako je prostor X slabo kompaktan tada je i trojka (f, X, Y) slabo kompaktna trojka.

Dokaz sledi iz činjenice da ako je $\mathcal{D}$ lokalno konačna familija nepraznih otvorenih podskupova prostora Y, tada je i inverzna familija $f^{-1}(\mathcal{D})$ lokalno konačna familija nepraznih otvorenih podskupova prostora X, pa kako je prostor X slabo kompaktan $f^{-1}(\mathcal{D})$ je konačna familija. ||

STAV 6.2.3. Ako je (f, X, Y) apsolutno zatvorena trojka tada je (f, X, Y) slabo kompaktna trojka.

Dokaz prethodnog stava sledi, iz definicije apsolutne zatvorenosti trojke (f, X, Y) i slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y), neposredno. Da obrnuto nije tačno, tj. da postoji slabo kompaktna trojka koja nije apsolutno zatvorena trojka vidi se iz sledećeg: Neka je prostor $X = [0, \omega_1)$, gde je ω_1 prvi neprebrojiv redni broj, a topologija na X uobičajena, uredjajna topologija svih rednih brojeva $0 \leq \alpha < \omega_1$. Prostor rednih brojeva $[0, \omega_1)$ nije normalan, pa otuda nije ni apsolutno zatvoren prostor. Ovo s toga što apsolutno zatvoren prostor koji je normalan prostor jeste kompaktan prostor, a poznato je da $[0, \omega_1)$ nije kompaktan prostor. S druge strane prostor $[0, \omega_1)$ rednih brojeva jeste slabo kompaktan prostor, jer je prebrojivo kompaktan prostor. Da je

$[0, \omega_1)$ prebrojivo kompaktan prostor sledi iz činjenice da ako se uzme prebrojiv pokrivač $\mathcal{U} = \{[0, \alpha)\}$ $\{(\alpha_i,\beta_i) : i=1,2,\ldots.\}$ prostora $[0, \omega_1)$, jedan član pokrivača mora biti oblika (α_{i_0}, ω_1). Podskup $[0, \alpha_{i_0}+1|$ je kompaktan, pa postoji konačan deo $\{[0,\alpha_{i_0})\}$ $\cup \{(\alpha_i,\beta_i) : i = 1,2,\ldots,n\}$ koji pokriva $[0, \alpha_{i_0}+1]$. Tada je i $[0, \omega_1)$ pokriven sa konačno elemenata pokrivača $\mathcal{U}$. Trojka (f, X, Y) gde je $X = Y = [0, \omega_1)$ a f identično preslikavanje je slabo kompaktna trojka koja nije apsolutno zatvorena trojka.

Vezu izmedju slabe kompaktnosti prostora X, slabe kompaktnosti prostora Y i slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y) prikazuje sledeća šema:

$$\begin{tikzcd}
X \text{ slabo kompaktan} \arrow[rr, Rightarrow, "3"] \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & & Y \text{ slabo kompaktan} \\
& (f, X, Y) \text{ slabo kompaktna trojka} \arrow[ur, Rightarrow, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

Implikacija 1 je pokazani Stav 6.2.2., a implikacije 2 i 3 daju naredna dva tvrdjenja.

STAV 6.2.4. *Ako je f sirjektivno preslikavanje i (f, X, Y) slabo kompaktna trojka, tada je i Y slabo kompaktan prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = \{V_1, V_2,\ldots\}$ prebrojiv otvoren pokrivač prostora Y, tada, zbog slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y), postoji konačan deo $V_1, V_2,\ldots, V_n$ takav da važi $\cup\, \overline{\{f^{-1}(V_i) : i = 1,2,\ldots,n\}} = X$. Medjutim, kako je f sirjektivno preslikavanje takodje važi $\cup \{\overline{V}_i : i = 1,2,\ldots,n\} = Y$, pa je Y slabo kompaktan prostor. ||

Implikacija 3 je poznato tvrdjenje:

$[0, \omega_1)$ prebrojivo kompaktan prostor sledi iz činjenice da ako se uzme prebrojiv pokrivač $\mathcal{U} = \{[0, \alpha)\}$ $\{(\alpha_i, \beta_i) : i = 1,2,\dots\}$ prostora $[0, \omega_1)$, jedan član pokrivača mora biti oblika (α_{i_0}, ω_1). Podskup $[0, \alpha_{i_0}+1|$ je kompaktan, pa postoji konačan deo $\{[0,\alpha_{i_0})\}$ $\cup \{(\alpha_i, \beta_i) : i = 1,2,\dots,n\}$ koji pokriva $[0, \alpha_{i_0}+1]$. Tada je i $[0, \omega_1)$ pokriven sa konačno elemenata pokrivača $\mathcal{U}$. Trojka (f, X, Y) gde je $X = Y = [0, \omega_1)$ a f identično preslikavanje je slabo kompaktna trojka koja nije apsolutno zatvorena trojka.

Vezu izmedju slabe kompaktnosti prostora X, slabe kompaktnosti prostora Y i slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y) prikazuje sledeća šema:

$$\begin{tikzcd}
X \text{ slabo kompaktan} \arrow[rr, Rightarrow, "3"] \arrow[dr, Rightarrow, "1"'] & & Y \text{ slabo kompaktan} \\
& (f, X, Y) \text{ slabo kompaktna trojka} \arrow[ur, Rightarrow, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

Implikacija 1 je pokazani Stav 6.2.2., a implikacije 2 i 3 daju naredna dva tvrdjenja.

STAV 6.2.4. Ako je f sirjektivno preslikavanje i (f, X, Y) slabo kompaktna trojka, tada je i Y slabo kompaktan prostor.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots\}$ prebrojiv otvoren pokrivač prostora Y, tada, zbog slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y), postoji konačan deo $V_1, V_2, \dots, V_n$ takav da važi $\cup \{\overline{f^{-1}(V_i)} : i = 1,2,\dots,n\} = X$. Medjutim, kako je f sirjektivno preslikavanje takodje važi $\cup \{\overline{V_i} : i = 1,2,\dots,n\} = Y$, pa je Y slabo kompaktan prostor. ||

Implikacija 3 je poznato tvrdjenje:

STAV 6.2.6. Neprekidna slika slabo kompaktnog prostora je slabo kompaktan prostor.

6.3. U-TROJKE

Da bi uveli U-trojke uvešćemo prvo U-sistem trojke.

DEFINICIJA 6.3.1. *Niz $V = \{V_i : i \in N\}$ nepraznih otvorenih podskupova prostora Y se naziva U-sistem trojke (f, X, Y) ako važi $\overline{f^{-1}(V_j)} \cap \overline{\cup \{f^{-1}(V_i) : i \in N - \{j\}\}} = \emptyset$ za svako $j \in N$.*

Sada se može dati definicija U-trojke u terminima U-sistema trojke.

DEFINICIJA 6.3.2. *(f, X, Y) je U-trojka ako za svaki U-sistem trojke (f, X, Y) inverzna slika f^{-1} tog sistema ima tačku nagomilavanja.*

Veze izmedju U-prostora X, U-prostora Y i U-trojke (f, X, Y) daju sledeća tvrdjenja:

STAV 6.3.3. *Ako je X U-prostor tada je i trojka (f, X, Y) U-trojka.*

Dokaz. Ako je niz $V = \{V_1, V_2, \ldots\}$ U-sistem trojke (f, X, Y), tada je, zbog definicije U-sistema trojke (f, X, Y), sistem $f^{-1}(V)$ U-sistem u prostoru X. Pošto je X U-prostor sistem $f^{-1}(V)$ ima tačku nagomilavanja $x_0 \in X$, a to znači da je (f, X, Y) U-trojka.||

LEMA 6.3.4. *Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje, a $V = \{V_1, V_2, \ldots\}$ U-sistem u prostoru Y. Tada je $f^{-1}(V)$ U-sistem u prostoru X.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots\}$ $\mathcal{U}$-sistem u prostoru Y. Kako je f neprekidno preslikavanje za svaki skup $B \subset Y$ važi $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Pored toga važi $f^{-1}(\cup\{B_i : i \in I\}) = \cup\{f^{-1}(B_i) : i \in I\}$. Pošto je $\mathcal{V} = \{V_i : i \in N\}$ $\mathcal{U}$-sistem u prostoru Y, imamo $\overline{V}_j \cap \overline{\cup\{V_i : i \in N - \{j\}\}} = \emptyset$. Kada primenimo inverzno preslikavanje f^{-1} na gornju jednakost dobijamo $f^{-1}(\overline{V}_j) \cap f^{-1}(\overline{\cup\{V_i : i \in N - \{j\}\}}) = \emptyset$ i zbog neprekidnosti preslikavanja f važi $\overline{f^{-1}(V_j)} \cap \overline{\cup\{f^{-1}(V_i) : i \in N - \{j\}\}} = \emptyset$. To znači da je $f^{-1}(\mathcal{V})$ $\mathcal{U}$-sistem prostora X. ||

Koristeći gornju Lemu 6.3.4. sledi Stav 6.3.5.

STAV 6.3.5. *Neka je f sirjektivno preslikavanje prostora X na prostor Y. Tada, ako je (f, X, Y) $\mathcal{U}$-trojka i Y je $\mathcal{U}$-prostor.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V} = \{V_i : i \in N\}$ $\mathcal{U}$-sistem prostora Y. Prema Lemi 6.3.4. $f^{-1}(\mathcal{V})$ je $\mathcal{U}$-sistem prostora X, pa i $\mathcal{U}$-sistem trojke (f, X, Y). Pošto je (f, X, Y) $\mathcal{U}$-trojka sistem $f^{-1}(\mathcal{V})$ ima tačku nagomilavanja recimo $x_0 \in X$. Medjutim, zbog neprekidnosti preslikavanja f, tačka $f(x_0) \in Y$ je tačka nagomilavanja $\mathcal{U}$-sistema $\mathcal{V}$ u prostoru Y. Tako Y je $\mathcal{U}$-prostor. ||

Navedenim tvrdjenjima treba dodati i sledeće:

STAV 6.3.6. *Neprekidna slika $\mathcal{U}$-prostora je $\mathcal{U}$-prostor.*

S druge strane treba uočiti da je Stav 6.3.6. posledica navedenih stavova 6.3.3. i 6.3.5., a sve njih lepo ilustruje šema:

$$\begin{tikzcd}
X\ \mathcal{U}\text{-prostor} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & Y\ \mathcal{U}\text{-prostor} \\
& (f, X, Y)\ \mathcal{U}\text{-trojka} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Naredno tvrdjenje pokazuje da je pojam $\mathcal{U}$-trojke uopštenje pojma slabe kompaktnosti trojke (f, X, Y).

STAV 6.3.7. *Svaka slabo kompaktna trojka* (f, X, Y) *je i* $\mathcal{U}$-*trojka.*

Dokaz. Neka je niz $\mathcal{V} = \{V_i : i \in N\}$ otvorenih nepraznih podskupova prostora Y $\mathcal{U}$-sistem trojke (f, X, Y). Tada je $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_i) : i \in N\}$ niz nepraznih medjusobno disjunktnih, otvorenih podskupova prostora X. Ako (f, X, Y) ne bi bila $\mathcal{U}$-trojka niz $f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V_i) : i \in N\}$ ne bi imao tačku nagomilavanja, a to znači da bi niz otvorenih, medjusobno disjunktnih, nepraznih podskupova $f^{-1}(\mathcal{V})$ bio lokalno konačan. Pošto je (f, X, Y) slabo kompaktna trojka, prema 6.2.4.(b) lokalno konačan niz $f^{-1}(\mathcal{V})$ bio bi konačan, a to je suprotno pretpostavci da je $\mathcal{V} = \{V_i : i \in N\}$ prebrojiva familija u prostoru Y. ||

6.4. PSEUDOKOMPAKTNE TROJKE

Jedno od svojstava kompaktnog prostora je da je neprekidna realna funkcija na tom prostoru ograničena. Obrnuto nije tačno, naime postoje nekompaktni prostori takvi da je svaka realna neprekidna funkcija na njima ograničena. Navedeno svojstvo Hewitt je u [22] uzeo za definiciju pseudokompaktnih prostora, koji su jedno uopštenje kompaktnog prostora. Pseudokompaktni prostori su takodje uopštenje $\mathcal{U}$-prostora pa otud i slabo kompaktnih prostora.

Navešćemo neka od poznatih svojstava pseudokompaktnih prostora, kako bi se bolje videla svojstva pseudokompaktnih trojki iz sledećeg dela ovog odeljka.

STAV 6.4.1. (vidi [14]) Svaki prebrojivo kompaktan prostor je pseudokompaktan prostor.

STAV 6.4.2. (vidi [14]) Svaki normalan pseudokompaktan prostor je prebrojivo kompaktan prostor.

STAV 6.4.3. (vidi [14]) Neprekidna slika pseudokompaktnog prostora je pseudokompaktan prostor.

Pogledajmo kako se ovi pojmovi mogu uopštiti primenjujući ih na trojke (f, X, Y).

DEFINICIJA 6.4.4. (f, X, Y) je pseudokompaktna trojka ako za svaku realnu neprekidnu funkciju $g : Y \to R$, kompozicija $g \circ f : X \to R$ je ograničena.

Naredna tri tvrdjenja daju nam veze izmedju pseudokompaktnosti prostora X, pseudokompaktnosti prostora Y i pseudokompaktnosti trojke (f, X, Y).

STAV 6.4.5. Ako je Y pseudokompaktan prostor tada je i (f, X, Y) pseudokompaktna trojka.

Dokaz. Neka je $g : Y \to R$ proizvoljna realna neprekidna funkcija definisana na prostoru Y. Tada je, zbog pseudokompaktnosti prostora Y, funkcija g ograničena. Otuda je i kompozicija $g \quad f : X \to R$ definisana sa $g(f(x)) \quad R$ ograničena, tj. (f, X, Y) je pseudokompaktna trojka. ||

Naredno tvrdjenje daje nam vezu izmedju pseudokompaktnosti prostora X i pseudokompaktnosti trojke (f, X, Y).

STAV 6.4.6. Ako je X pseudokompaktan prostor tada je i (f, X, Y) pseudokompaktna trojka.

Dokaz. Neka je $g : Y \to R$ proizvoljna realna neprekidna funkcija. Kompozicija $g \circ f : X \to R$ je takodje realna neprekidna funkcija, pa kako je X pseudokompaktan prostor $g \circ f$ je ograničena funkcija. ||

Prethodnim dvama tvrdjenjima treba dodati poznatu činjenicu o prenošenju svojstva pseudokompaktnosti neprekidnim preslikavanjem.

STAV 6.4.7. (*vidi* [14]) *Neprekidna slika pseudokompaktnog prostora je pseudokompaktan prostor.*

Prethodna tvrdjenja 6.4.5., 6.4.6. i 6.4.7. možemo ilustrovati sledećom šemom implikacija.

$$\begin{tikzcd}
X \text{ pseudokompaktan} \arrow[rr, Rightarrow, "3"] \arrow[dr, Rightarrow, "2"'] & & Y \text{ pseudokompaktan} \arrow[dl, Rightarrow, "1"] \\
& (f,\ X,\ Y) \text{ pseudokompaktna trojka} &
\end{tikzcd}$$

Primedba 6.4.8. Neka je $X = Y = R$ i topologija na R uobičajena. Ako za preslikavanje $f : X \to Y$ uzmemo $\sin : X \to Y$ imamo da je $\sin(X) = [-1, +1]$ kompaktan skup u Y. Otuda, za svaku neprekidnu realnu funkciju $g : Y \to R$ važi da je $g(\sin(X))$ kompaktan podskup prave R. Znači da je $g(\sin(X))$ ograničen podskup prave R. Dobijena trojka (f, X, Y) je pseudokompaktna a da prostori X i Y nisu pseudokompaktni, pa suprotne implikacije od 1 i 2 nisu tačne. Da suprotno od 3 nije tačno može se naći recimo u [14]. Tako, pseudokompaktnost trojke (f, X, Y) obuhvata pseudokompaktnost i prostora X i prostora Y.

Sledeće tvrdjenje pokazuje da je pojam pseudokompaktne trojke jedno uopštenje $\mathcal{U}$-trojke.

STAV 6.4.9. *Ako je (f, X, Y) $\mathcal{U}$-trojka, tada je (f, X, Y) pseudokompaktna trojka.*

Dokaz. Neka je $g : Y \to R$ proizvoljna realna neprekidna funkcija. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to R$ neprekidna realna funkcija. Ako bi $g \circ f$ bila neograničena funkcija za svako $n \in N \subset R$ postojala bi tačka $x_n \in X$ takva da je $g(f(x_n)) \geq n$. S obzirom na neograničenost funkcije $g \circ f$ možemo uzeti da važi $g(f(x_n)) > g(f(x_{n-1}))$. Za svako $n \in N$ može se naći okolina V_n tačke $g(f(x_n))$ takva da važi $\overline{V}_n \cap \overline{V}_{n+1} = \emptyset$ za svako $n \in N$. Nadjeni niz $\{V_n : n \in N\}$ je $\mathcal{U}$-sistem u prostoru R pa je prema Lemi 6.3.4. $\{(g^{-1}(V_n)) : n \in N\}$ $\mathcal{U}$-sistem prostora Y, a $\{f^{-1}(g^{-1}(V_n)) : n \in N\}$ $\mathcal{U}$-sistem trojke (f, X, Y). Kako je (f, X, Y) $\mathcal{U}$-trojka, sistem $\{f^{-1}(g^{-1}(V_n)) : n \in N\}$ ima tačku nagomilavanja $x_0 \in X$. Ali tada je $g(f(x_0)) = a_0 \in R$ tačka nagomilavanja $\mathcal{U}$-sistema $\{V_n : n \in N\}$, što je suprotno pretpostavci o familiji $\{V_n : n \in N\}$. Znači, funkcija $g \circ f$ mora biti ograničena, pa je (f, X, Y) pseudokompaktna trojka. ||

Povezana, tvrdjenja 6.3.7. i 6.4.9. daju sledeću šemu implikacija:

$$(f, X, Y)\ \begin{matrix}\text{slabo}\\ \text{kompaktna}\\ \text{trojka}\end{matrix} \Longrightarrow (f, X, Y)\ \mathcal{U}\text{-trojka} \Longrightarrow (f, X, Y)\ \begin{matrix}\text{pseudokompaktna}\\ \text{trojka}\end{matrix}$$

7. GUSTINA PROSTORA I TROJKI NEPREKIDNOSTI

Gustina prostora je važan i dosta obradjivan pojam u topologiji. Naročito često se obradjuje prebrojiva gustina, tj. separabilnost prostora. Težina i gustoća prostora se prenose neprekidnim preslikavanjima. Zato, ovde je razmatrana gustoća prostora u odnosu na jednoznačna preslikavanja i višeznačna preslikavanja. Pokazano je da se neki rezultati o jednoznačnim preslikavanjima mogu uopštiti i na višeznačna preslikavanja. S obzirom na prenošenje svojstva gustoće preko neprekidnih preslikavanja uveden je i pojam gustoće trojke (f, X, Y), gde su X i Y topološki prostori, a f neprekidno preslikavanje od X na Y. Pokazano je da gustoća trojke leži izmedju gustoće prostora X i prostora Y, i dati su primeri o strogoj inkluzivnosti navedenih svojstava.

DEFINICIJE I NEKI REZULTATI O GUSTINI PROSTORA I TROJKI

Ovde će biti razmotrena mogućnost uvodjenja pojma gustine trojke (f, X, Y), kao još jednog topološkog svojstva primenjenog na (f, X, Y), a u smislu daljih analogija izmedju topoloških prostora i trojki (f, X, Y). Ova analogija je u [40] uočena za neka druga svojstva, pa se i ovde pretpostavlja da su X i Y topološki prostori a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje od X u Y.

Pojam ćemo razmatrati na primeru prebrojive gustoće, odnosno separabilnosti.

DEFINICIJA 7.1. *Trojku (f, X, Y) zovemo separabilna trojka ako postoji prebrojiv podskup $B \subset Y$ takav da je $f^{-1}(B) \subset X$ svugde gust podskup od X.*

Sledeći rezultat je poznat.

STAV 7.2. *Ako je X separabilan prostor, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje prostora X na topološki prostor Y, tada je i $Y = f(X)$ separabilan prostor.*

Medjutim, u veži Definicije 7.1. mogu se pokazati sledeća dva tvrdjenja.

STAV 7.3. *Ako je (f, X, Y) separabilna trojka, a $f : X \to Y$ sirjektivno preslikavanje, tada je prostor $Y = f(X)$ separabilan prostor.*

Dokaz. Neka je $B \subset Y$ prebrojiv podskup od Y takav da je $f^{-1}(B)$ svugde gust podskup od X. Neka je y proizvoljna tačka iz Y i V proizvoljna okolina od y. Kako je $f^{-1}(B)$ svugde gust u X a $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X imamo $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$. Odavde medjutim sledi $f^{-1}(V \cap B) \neq \emptyset \Longrightarrow V \cap B \neq \emptyset$. Iz čega sledi da je B svugde gust podskup od Y. ||

STAV 7.4. *Ako je X separabilan prostor tada je trojka (f, X, Y) separabilna trojka.*

Dokaz. Ako je X separabilan prostor postoji A X takav da je card $A = \aleph_0$ i $A \subset \overline{A} = X$. Za skup $B = f(A)$ važi $\operatorname{card} B = \aleph_0$. Skup $A_1 = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B) \supset A$ je svugde gust jer sadrži A pa je (f, X, Y) separabilna trojka. ||

Ako je $f : X \to Y$ preslikavanje topološkog prostora X na topološki prostor Y iz Stavova 7.2., 7.3. i 7.4. imamo sledeću šemu implikacija:

$$
\begin{tikzcd}
X \text{ separabilan prostor} \arrow[rr, Rightarrow, "a"] \arrow[dr, Rightarrow, "b"'] & & Y \text{ separabilan prostor} \\
& (f, X, Y) \text{ separabilna trojka} \arrow[ur, Rightarrow, "c"'] &
\end{tikzcd}
$$

Primerima ćemo pokazati da obrnute implikacije nisu tačne.

Primer 7.5. Neka je X = R sa diskretnom topologijom (gustina X je c), Y = R sa uobičajenom topologijom, a $f : X \to Y$ identično preslikavanje. Prostor Y = f(X) je separabilan, dok X i (f, X, Y) nisu separabilni prostori.

Primer 7.5'. Neka je X = R sa diskretnom topologijom, a Y skup celih brojeva Z sa uobičajenom podtopologijom. Preslikavanje f definišimo na sledeći način.

$$f(x) = \begin{cases} 2n+1 & \text{za} \quad 2n < x < 2n+2 \\ x & \text{za} \quad x = 2n \end{cases} \qquad n \in Z$$

U ovom slučaju postoji prebrojiv podskup $B = \{2n+1,\ n \in Z\} \subset Y$ takav da je $f^{-1}(B) = \bigcup_{n \in Z} (2n,\ 2n+2)$ svugde gust podskup od X. Medjutim X nije separabilan prostor.

Tako Primer 7.5. pokazuje da suprotne implikacije od a i c nisu tačne, a Primer 7.5'. da suprotna implikacija od b nije tačna.

Jednostavno se da pokazati da se navedene veze izmedju separabilnosti prostora X, Y i separabilnosti trojke (f, X, Y) mogu proširiti i na slučaj bilo koje gustoće.

U sledećem delu ovog odeljka biće reči o vezi gustoće prostora i višeznačnih preslikavanja. Simbolika i osnovna svojstva višeznačnih preslikavanja mogu se naći u [10], a neka svojstva višeznačnih preslikavanja obradjivali su mnogi matematičari medju kojima vidno mesto zauzima Ponomarev. Ovde je od interesa rad [35]. Naredna razmatranja daju uopštenja poznatih rezultata o prenošenju gustoće neprekidnim preslikavanjem.

STAV 7.6. *Neka je* $F : X \to Y$ *donje poluneprekidno višeznačno i na preslikavanje. Tada, ako je* $A \subset X$ *prebrojiv svugde gust podskup prostora* X, *skup* $\cup\{F(a): a \in A\}$ *je svugde gust podskup od* Y.

Da bi iskazali sledeće tvrdjenje treba navesti pojam skoro jednoznačnog višeznačnog preslikavanja, koje je uvedeno u navedenom radu [35]. Za preslikavanje $F : X \to Y$ kaže se da je skoro jednoznačno ako za svaki otvoren podskup $V \subset Y$ važi da je $F^+(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ neprazan podskup od X.

STAV 7.7. *Neka je* $F : X \to Y$ *gore poluneprekidno skoro jednoznačno preslikavanje. Tada, ako je* $A \subset X$ *prebrojiv svugde gust podskup od* X, *skup* $\cup\{F(a): a \in A\}$ *je svugde gust podskup od* Y.

Stavovi 7.6. i 7.7. su jednostavni pa nisu dokazani. S druge strane iz njih imamo sledeće posledice:

POSLEDICA 7.8. (*vidi* [33]) *Ako je* $F : X \to Y$ *dole poluneprekidno i na preslikavanje,* X *separabilan prostor i* $F(x)$ *separabilan podprostor za svako* $x \in X$, *tada je i* Y *separabilan prostor.*

Ako je F gore poluneprekidno preslikavanje, uslov da $F(x)$ bude separabilan je nepotreban.

POSLEDICA 7.9. Ako je $F : X \to Y$ gore poluneprekidno skoro jednoznačno višeznačno preslikavanje i X separabilan prostor, tada je i Y separabilan prostor.

Dokaz. Pošto je X separabilan prostor, postoji prebrojiv svugde gust podskup $\{a_1, a_2, \ldots\} = A \subset X$. Za svako a_i odaberimo element $b_i \in F(a_i)$. Pokazaćemo da je pod navedenim uslovima skup $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ svugde gust u Y. Neka je V otvoren podskup u Y. Kako je F skoro jednoznačno i gore poluneprekidno preslikavanje, imamo da je $F^+(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ otvoren i neprazan podskup u X. A kako je A svugde gust u X, postoji i_0 takvo da je $a_{i_0} \in F^+(V)$, pa je i $b_{i_0} \in V$. Tako, prebrojiv skup B je svugde gust u Y. ||

Ako je F jednoznačno preslikavanje Posledice 7.8. i 7.9. daju poznatu činjenicu da je neprekidna slika separabilnog prostora separabilan prostor.

Preslikavanje slično onom koje je navedeno u Posledici 7.8. uvedeno je u [41], zahtevom da za jednoznačno preslikavanje $f : X \to Y$ podprostor $f^{-1}(y)$ bude druge prebrojivosti. Kada se radi sa višeznačnim preslikavanjem $F : X \to Y$, a istražuje gustoća, navedeni uslov prirodno prelazi u uslov da je $F(x)$ podprostor druge prebrojivosti, ili u podprostor koji je separabilan. Nešto slično je učinjeno u [33].

Treba primetiti da se gustoća prenosi i sa prostora Y na prostor X pod odredjenim uslovima. Naime, može se pokazati:

STAV 7.10. Neka je $f : X \to Y$ otvoreno (ne obavezno i neprekidno) sirjektivno preslikavanje i $f^{-1}(y)$ separabilan podprostor *za svako y Y. Tada, ako je Y separabilan prostor i X je separabilan prostor.*

Dokaz. Neka je B prebrojiv svugde gust podskup od Y. Za svako $b \in B$ odaberimo prebrojiv svugde gust deo A_b od $f^{-1}(b)$. Podskup $A = \{\cup A_b : b \in B\}$ je prebrojiv, a pokazaćemo da je i svugde gust u X. Neka je U proizvoljan otvoren skup u X. Podskup $f(U)$ je otvoren u Y, pa postoji $b_o \in B$ takvo da je $b_o \in B \cap f(U)$. Otud važi $U \cap f^{-1}(b_o) \neq \emptyset$. Ali kako je $f^{-1}(b_o)$ separabilan podprostor postoji $a_o \in A \cap U$, pa je A svugde gust u X. ||

POSLEDICA 7.11. Neka je $f : X \to Y$ otvoreno sirjektivno preslikavanje i $f^{-1}(y)$ separabilan podprostor od X za svako y Y. Tada je Y separabilan prostor ako i samo ako je X separabilan prostor.

8. DIMENZIJE TROJKI NEPREKIDNOSTI

Kao što je poznato dimenziona funkcija je preslikavanje koje topološkom prostoru X dodeljuje jedan element skupa $N \cup \{-1,0\}$, ili je pak dimenzija prostora beskonačna. Postoji više definicija dimenzija topološkog prostora, a sve su uopštenja dimenzije euklidskih prostora. Ta problematika može se naći recimo u [5] i [14]. U navedenim knjigama razmatrane su: mala induktivna dimenzija ind X (Menger - Urisohn-ova dimenzija), velika induktivna dimenzija Ind X (Brouwer - Čech-ova dimenzija) i pokrivajuća dimenzija dim X (Čech - Lebesgue-ova dimenzija). U radovima [1], [2], [3] i [34] razmatraju se i neke druge dimenzione funkcije kao $\dim_c$ (Pasynkov), Dim (Dea'k) i dm (Adnadjević), veze izmedju njih kao i veze sa pokrivajućom dimenzijom dim (Lebesgue).

U [5],kao i u [15], [16], [17], [18] i [19], razmatrani su odnosi medju dimenzionim funkcijama dim X, ind X i Ind X. Daju se uslovi pod kojima važe nejednakosti dim X = ind X i ind X = Ind X, primeri kompaktnih T_2 prostora X gde u gornjim nejednakostima važe stroge nejednakosti. U radovima [15], [16] i [17] dalje se razmatraju uslovi klasične teoreme Gureviča o povećanju i smanjenju dimenzije pri zatvorenim preslikavanjima. Izmedju ostalog tu je uvedeno jedno pojačanje zatvorenih preslikavanja (silno zamknutye otobraženija) i pokazano da takva preslikavanja ne smanjuju dimenziju.

U radu [40] uvode se pojmovi dimenzija dim, ind i Ind trojki (f, X, Y). Pokrivajuća dimenzija trojke dim (f, X, Y) daje se na sledeći način: dim (f, X, Y) $\leq$ n ako za svaki konačan otvoren pokrivač Ω prostora Y postoji otvoren pokrivač ω reda n+1 prostora X upisan u otvoren pokrivač $f^{-1}(\Omega)$. Kaže se dim(f,X,Y) = n ako je dim (f, X, Y) = n i nije ispunjeno dim (f, X, Y) < n. Na sličan način daju se induktivne dimenzije trojki ind(f, X, Y) i Ind (f, X, Y).

Za razliku od dimenzije topoloških prostora monotonost dimenzije trojki u odnosu na prostor Y važi gotovo bez ograničenja. Naime, u navedenom radu dokazano je da važi:

TEOREMA. *Za svaku trojku* (f, X, Y) *i* $f(X) \subseteq Z \subseteq Y$ *važi*

(a) $\dim (f, X, Y) \leq \dim (f, X, Z)$

(b) $\mathrm{ind}\,(f, X, Y) \leq \mathrm{ind}\,(f, X, Z)$

(c) $\mathrm{Ind}\,(f, X, Y) \leq \mathrm{Ind}\,(f, X, Z)$.

U istom radu data je veza izmedju dimenzije trojke i dimenzija prostora X i Y iskazana sledećim rezultatom:

TEOREMA. *Za svaku trojku* (f, X, Y) *važi*

(a) $\dim (f, X, Y) \leq \min \{\dim X, \dim Y\}$

(b) $\mathrm{ind}\,(f, X, Y) \leq \min \{\mathrm{ind}\,X, \mathrm{ind}\,Y\}$

(c) $\mathrm{Ind}\,(f, X, Y) \leq \min \{\mathrm{Ind}\,X, \mathrm{Ind}\,Y\}$

Ako su βX i βY maksimalne kompaktifikacije prostora X i Y, βf jedinstveno produženje funkcije $f : X \to Y$ u funkciju $\beta f : \beta X \to \beta Y$, u [40] je pokazano da važi:

TEOREMA. *Za normalne prostore X i Y ispunjeno je:*

(a) $\dim (f, X, Y) = \dim (\beta f, \beta X, \beta Y)$

(b) $\mathrm{Ind} (f, X, Y) = \mathrm{Ind} (\beta f, \beta X, \beta Y)$

U ovom odeljku rada daje se pregled i poboljšanje nekih rezultata iz [40] i neki novi rezultati kao što su: veza dimenzije dim i separacionih svojstava (Stav 8.8.), jedna veza pregrade prostora X i pregrade trojke (f, X, Y) (Stav 8.9.), veza izmedju različitih dimenzija trojki i dr.

DEFINICIJE I NEKI REZULTATI O DIMENZIJAMA TROJKI

U radu [40] uveden je pojam dimenzija dim, Ind i ind za trojku (f, X, Y), gde su X i Y topološki prostori a f neprekidno preslikavanje prostora X u prostor Y. Ovde će biti navedeni neki rezultati iz [40] i dati neki novi rezultati i zapažanja o dimenzijama trojki (f, X, Y).

DEFINICIJA 8.1. Reći ćemo da je podskup $A \subset X$ pregrada u trojci (f, X, Y) ako je A zatvoren podskup prostora X i $X - A = O_1 \cup O_2$, gde su O_1 i O_2 neprazni disjunktni i otvoreni podskupovi prostora X. Pregrada A trojke (f, X, Y) razdvaja zatvorene podskupove $P, Q \subset Y$ ako važi $f^{-1}(P) \subset O_1$ i $f^{-1}(Q) \subset O_2$.

DEFINICIJA 8.2. (vidi [40]) $\mathrm{Ind}(f, X, Y) = -1$ ako je $X = \emptyset$. Pretpostavimo da je $\mathrm{Ind}(f, X, Y) \leq k$ definisano za svako $k < n$. Tada kažemo $\mathrm{Ind}(f, X, Y) \leq n$ ako za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa $P, Q \subset Y$ postoji pregrada $A \subset X$ trojke (f, X, Y) koja razdvaja podskupove P i Q, takva da važi $\mathrm{Ind}(f|A, A, Y) \leq n-1$. Kažemo da je $\mathrm{Ind}(f, X, Y) = n$ ako važi

Ind $(f, X, Y) \leq n$ *i ne važi* *Ind* $(f, X, Y) \leq k$ *ni za jedno* $k < n$.

Dimenzija ind (f, X, Y) definiše se slično dimenziji Ind (f, X, Y) s time što se umesto para zatvorenih podskupova u Y uzima zatvoren podskup i tačka koja mu ne pripada.

Da bi se iskazala sledeća definicija potreban je pojam reda familije podskupova datog skupa X. Familija A podskupova skupa X ima red n ako postoji n elemenata $A_1, A_2, \ldots, A_n$ familije A takvih da važi $\bigcap\{A_i : i = 1,2,\ldots,n\} \neq \emptyset$, a bilo koja podfamilija od bar n+1 elemenata iz A ima prazan presek. To označavamo sa ord $A = n$. Ako je bilo koji presek od konačno elemenata familije A neprazan kažemo da je red familije beskonačan i pišemo ord $A = \infty$.

DEFINICIJA 8.3. (vidi [40]) Kažemo da je dimenzija $\dim (f, X, Y) \leq n$ *ako za svaki konačan otvoren pokrivač* Ω *prostora* Y *postoji otvoren, reda* $n+1$*, pokrivač* ω *prostora* X *upisan u pokrivač* $f^{-1}(\Omega)$. *Kažemo da je* $\dim (f, X, Y) = n$, *ako je* $\dim (f, X, Y) \leq n$, *a nije tačno* $\dim (f, X, Y) < n$.

Sledeća teorema daje neke veze izmedju dimenzija prostora i dimenzija trojki.

TEOREMA 8.4. (vidi [40]) Neka je sledeći dijagram komutativan.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Tada važi:

(a) $\dim (f, X, Y) \leq \dim Z$

(b) *Ind* $(f, X, Y) \leq$ *Ind* Z

(c) *ind* $(f, X, Y) \leq$ *ind* Z *za* T_1 *prostor* Y.

Treba zapaziti činjenicu da važi:

STAV 8.5. (a) $\dim X \leq n \Longrightarrow \dim (f, X, Y) \leq n$

(b) $\mathrm{Ind}\, X \leq n \Longrightarrow \mathrm{Ind}\, (f, X, Y) \leq n$

(c) $\mathrm{ind}\, X \leq n \Longrightarrow \mathrm{ind}\, (f, X, Y) \leq n$.

Ovo se može dokazati neposredno, a može se dobiti i kao posledica prethodne Teoreme 8.4. jer, ako se stavi $Z = X$, i za g uzme identično preslikavanje, imamo $\dim (f, X, Y) \leq \dim X$, $\mathrm{Ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{Ind}\, X$ i $\mathrm{ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{ind}\, X$.

Takodje imamo da Teorema 6. iz [40] sledi iz Teoreme 8.4. Jednom treba uzeti $Z = X$ i za g identično preslikavanje, a drugi put $Z = Y$ i za h identično preslikavanje. Za dimenziju dim te dve pretpostavke daju veze: (a) $\dim (f, X, Y) \leq \dim X$ i $\dim (f, X, Y) \leq \dim Y$, a to daje $\dim(f, X, Y) \leq \min (\dim X, \dim Y)$. Na sličan način imamo:

(b) $\mathrm{Ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{Ind}\, X$ i $\mathrm{Ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{Ind}\, Y \Longrightarrow$

$\mathrm{Ind}\, (f, X, Y) \leq \min (\mathrm{Ind}\, X, \mathrm{Ind}\, Y)$ i

(c) $\mathrm{ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{ind}\, X$ i $\mathrm{ind}\, (f, X, Y) \leq \mathrm{ind}\, Y \Longrightarrow$

$\mathrm{ind}\, (f, X, Y) \leq \min (\mathrm{ind}\, X, \mathrm{ind}\, Y)$.

Sledeći primer (vidi [40]) pokazuje da napred uočene nejednakosti ne moraju preći u jednakosti. Neka je Z kantorov savršen skup, X_1 metrizabilan kompaktan prostor i $\dim X_1 = k$, $X = X_1 \times Z$, Y metrizabilan kompaktan prostor dimenzije $\dim Y = n$. Pošto se kantorov prostor Z može neprekidno preslikati na prostor Y, obeležimo to preslikavanje sa h. Uočimo preslikavanje $f = h \circ \pi_Z$. Imaćemo $\dim (f, X, Y) = 0$, $\dim X = k$ i $\dim Y = n$.

Interesantno je da su dimenzione funkcije trojki monotone u odnosu na X po svim podskupovima. Naime važi:

TEOREMA 8.6. (vidi [40]) Neka je X_0 proizvoljan podprostor prostora X. Tada važi:

(a) $\dim(f|_{X_0}, X_0, Y) \leq \dim(f, X, Y)$

(b) $\mathrm{Ind}(f|_{X_0}, X_0, Y) \leq \mathrm{Ind}(f, X, Y)$

(c) $\mathrm{ind}(f|_{X_0}, X_0, Y) \leq \mathrm{ind}(f, X, Y)$.

Vedenisov je u [44] pokazao da za normalan prostor X važi $\mathrm{Ind}\, X = \mathrm{Ind}\, \beta X$. Pod pretpostavkom da je X normalan Wallman je u [45] pokazao da važi $\dim X = \dim \beta X$. U [26] Katětov je poboljšao rezultat Wallman-a i pokazao da je $\dim X = \dim \beta X$ ako je X Tihonovljev prostor i dimenzija dim definisana preko funkcionalno otvorenih pokrivača.

Analogije rezultata Vedenisova i Wallman-a dokazao je Kotov u [40] za trojke.

TEOREMA 8.7. (vidi [40]) Za normalne prostore X i Y ispunjeno je:

(a) $\mathrm{Ind}(f, X, Y) = \mathrm{Ind}(\beta f, \beta X, \beta Y)$

(b) $\dim(f, X, Y) = \dim(\beta f, \beta X, \beta Y)$

gde su βX i βY maksimalne kompaktifikacije prostora X i Y, a βf jedinstveno produženje neprekidne funkcije $f : X \to Y$.

Ako pretpostavimo da su prostori X i Y u trojci (f, X, Y) potpuno regularni T_1 prostori (prostori Tihonova), i ako se u definiciji dim (f, X, Y) traži da pokrivač prostora Y bude funkcionalno otvoren, rezultati u vezi ovako definisane dimenzije dim trojki (f, X, Y) bi se izmenili. Tako, ovo je jedna nova mogućnost istraživanja dimenzija trojki.

Sada ćemo dati neke veze izmedju dimenzija i separacionih svojstava trojki.

STAV 8.8. Ako je Ind (f, X, Y) konačan broj tada je (f, X, Y) normalna trojka.

Dokaz. Neka su P i Q disjunktni i zatvoreni podskupovi prostora Y. Kako je Ind (f, X, Y) konačan broj, to postoji pregrada C (zatvoren skup u X) takva da je $X - C = O_1 \cup O_2$, gde su O_1 i O_2 otvoreni skupovi u X i važi $f^{-1}(P) \subset O_1$ i $f^{-1}(Q) \subset O_2$. To znači da je (f, X, Y) normalna trojka. ||

STAV 8.9. Ako je $A \subset X$ pregrada trojke (f, X, Y) medju zatvorenim skupovima P, $Q \subset Y$ i $Y_0 \subset Y$ zatvoren podprostor od Y koji seče skupove P i Q, tada je $A \cap f^{-1}(Y_0)$ pregrada trojke $(f|f^{-1}(Y_0), f^{-1}(Y_0), Y)$ medju zatvorenim podskupovima $f^{-1}(P \cap Y_0) = f^{-1}(Y_0) \cap f^{-1}(P)$ i $f^{-1}(Q \cap Y_0) = f^{-1}(Y_0) \cap f^{-1}(Q)$.

Dokaz sledi iz sledećeg razmatranja: Neka je $X - A = O_1 \cup O_2$ i $f^{-1}(P) \subset O_1$, $f^{-1}(Q) \subset O_2$. Odavde sledi $(X - A) \cap f^{-1}(Y_0) = f^{-1}(Y_0) - A \cap f^{-1}(Y_0) = (O_1 \cup O_2) \cap f^{-1}(Y_0) = (O_1 \cap f^{-1}(Y_0) \cup (O_2 \cap f^{-1}(Y_0))$, tj. $f^{-1}(Y_0) - A \cap f^{-1}(Y_0) = (O_1 \cap f^{-1}(Y_0) \cup (O_2 \cap f^{-1}(Y_0))$, pri čemu važi $f^{-1}(P \cap Y_0) \subset O_1 \cap f^{-1}(Y_0)$ i $f^{-1}(Q \cap Y_0) \subset O_2 \cap f^{-1}(Y_0)$ a da su skupovi $O_1 \cap f^{-1}(Y_0)$ i $O_2 \cap f^{-1}(Y_0)$ otvoreni u podprostoru $f^{-1}(Y_0)$. ||

TEOREMA 8.10. Ako je $\dim (f, X, Y) = 0$ tada je (f, X, Y) normalna trojka i važi Ind $(f, X, Y) = 0$

Dokaz. Neka su P i Q disjunktni zatvoreni podskupovi prostora Y. Tada skupovi $O_1 = Y - Q$ i $O_2 = Y - P$ obrazuju otvoren pokrivač $\Omega = \{O_1, O_2\}$ prostora Y, pri čemu je ispunjeno $P \subset O_1$ i $Q \subset O_2$. Kako je $\dim (f, X, Y) = 0$ to u X postoji disjunktan otvoren pokrivač $\omega = \{o_1, o_2, \ldots, o_s\}$ upisan u otvoren pokrivač $f^{-1}(\Omega)$. Označimo sa O_1' uniju svih podskupova $o_i \in \omega$ koji leže u $f^{-1}(O_1)$, a sa O_2' uniju svih ostalih elemenata pokrivača ω. Tada su O_1' i O_2' disjunktni otvoreni skupovi i $\Omega' = \{O_1', O_2'\}$ je pokrivač prostora X. Ako je o_i iz ω i seče $f^{-1}(P)$, to o_i ne može ležati u $O_2' = f^{-1}(O_2)$, pa leži u $O_1' = f^{-1}(O_1)$. Slično, ako neko $o_j \in \omega$ seče $f^{-1}(Q)$, ne može ležati u $f^{-1}(O_1)$, pa leži u $O_2' = f^{-1}(O_2)$. Prema tome O_1' i O_2' su disjunktne otvorene okoline skupova $f^{-1}(P)$ i $f^{-1}(Q)$. Kako je pri tome još $X = O_1' \cup O_2'$, to je prazan skup pregrada izmedju $f^{-1}(P)$ i $f^{-1}(Q)$, što znači da je ispunjeno Ind $(f, X, Y) = 0$ i (f, X, Y) je normalna trojka. ||

DEFINICIJA 8.11. Trojka (f, X, Y) se naziva kompletno regularnom ako za svako $y \in Y$ i zatvoren podskup F koji ne sadrži tačku y postoji neprekidna funkcija $g : X \to [0,1]$ takva da je $g(f^{-1}(y)) = 0$ i $g(f^{-1}(F)) = 1$.

Sada se može iskazati lema koja će nam trebati kasnije, a i sama je od interesa.

LEMA 8.12. Ako je ind $(f, X, Y) = 0$, tada je (f, X, Y) kompletno regularna trojka.

Dokaz. Neka su $y \in Y$, $\overline{F} = F \subset Y$ i $y \notin F$. Kako je ind $(f, X, Y) = 0$ postoji zatvoren skup $A \subset X$ takav da je $X - A = O_1 \cup O_2$, pri čemu je $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ i $f^{-1}(y) \subset O_1$, $f^{-1}(F) \subset O_2$. Takodje zbog ind $(f, X, Y) = 0$ imamo ind$(f_{|A}, A, Y) = -1$, a to znači $A = \emptyset$. Odavde sledi da su O_1 i O_2 otvoreno-zatvoreni podskupovi. Ako sada definišemo preslikavanje $g : X \to [0,1]$ sa $g(O_1) = 0$ i $g(O_2) = 1$, preslikavanje g će biti neprekidno i važiće $g(f^{-1}(y)) = 0$ i $g(f^{-1}(F)) = 1$. ||

Sledeći Stav sledi iz definicije T_1 prostora i definicije ind (f, X, Y).

STAV 8.13. Ako je Y T_1-prostor tada važi ind (f, X, Y) = Ind (f, X, Y).

TEOREMA 8.14. Ako je Y normalan T_1-prostor tada za svaku trojku (f, X, Y) svojstva dim (f, X, Y) = 0 i Ind (f, X, Y) = 0 su ekvivalentna. Pod navedenim pretpostavkama takodje je ind (f, X, Y) = 0 i (f, X, Y) je normalna trojka.

Dokaz. Prema Teoremi 8.10. videli smo da iz dim(f, X, Y) = 0 sledi Ind (f, X, Y) = 0, a prema Stavu 8.13. je ind(f, X, Y) $\leq$ Ind (f, X, Y), odakle sledi ind (f, X, Y) = 0, pošto je $X \neq \emptyset$. Prema Teoremi 8.10. takodje sledi da je (f, X, Y) normalna trojka.

Dokažimo sada da iz Ind (f, X, Y) = 0 sledi dim(f, X, Y) = 0 pod pretpostavkom da je X normalan T_1 prostor. U tom cilju uočimo proizvoljan otvoren pokrivač $\Omega = \{O_1, O_2, \dots, O_s\}$ prostora Y. Kako je svaki konačan pokrivač tačkasto konačan i Y normalan prostor, postoji (vidi [29]) zatvoren pokrivač $\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ kombinatorno upisan u pokrivač Ω. To znači da je $A_i \subset O_i$, $i = 1,2,\dots,s$. Kako je po pretpostavci Ind (f, X, Y) = 0 to za svaki $A_i \in \alpha$ postoji otvoreno-zatvoren skup U_i u X takav da je $f^{-1}(A_i) \subset U_i \subset f^{-1}(O_i)$. Dakle, u $f^{-1}(\Omega)$ upisan je pokrivač $\gamma = \{U_1, U_2, \dots, U_s\}$ koji se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova. Stavimo $o_1 = U_1$, $o_2 = U_2 - U_1, \dots,$ $o_i = U_i - \cup \{U_j : j < i\}$, $i = 3,4,5,\dots,s$. Time dobijamo u $f^{-1}(\Omega)$ upisan disjunktan otvoreno-zatvoreni pokrivač $\omega = \{o_1, o_2, \dots, o_s\}$, a to znači da je dim (f, X, Y) = 0. ||

Prethodna Teorema 8.14. je jedno pojačanje Teoreme 9. Kotova iz [40].

Za topološki prostor X poznati su pojmovi povezanosti, nepovezanosti i potpune nepovezanosti prostora X. Ako se za trojke (f, X, Y) uvedu analogni pojmovi dobijaju se zanimljivi rezultati koji povezuju dimenzije trojki sa tim pojmovima, odnosno nekim drugim pojmovima iz topologije.

DEFINICIJA 8.15. *Za trojku* (f, X, Y) *kažemo da je nepovezana ako postoje podskupovi* P *i* Q *iz* Y *takvi da u prostoru* X *postoji razbijanje* $X = X_1 \cup X_2$ *gde su* X_1 *i* X_2 *otvoreno-zatvoreni podskupovi i važi* $f^{-1}(P) \subset X_1$, $f^{-1}(Q) \subset X_2$.

Ako su gore navedeni uslovi ispunjeni za svako $y, z \in Y$, *za trojku* (f, X, Y) *kažemo da je potpuno nepovezana.*

Ako je prostor X nepovezan trojka (f, X, Y) ne mora biti nepovezana. Medjutim, ako je trojka (f,X, Y) nepovezana i prostor X je nepovezan. S druge strane, ako je prostor Y nepovezan i trojka (f, X, Y) je nepovezana. Znači da važi šema implikacija:

$$\begin{tikzcd}
X \text{ nepovezan} & & Y \text{ nepovezan} \arrow[ll, Rightarrow, "1"'] \arrow[dl, Rightarrow, "3"] \\
& (f, X, Y) \text{ nepovezana trojka} \arrow[ul, Rightarrow, "2"] &
\end{tikzcd}$$

Da obrnuto od implikacija datih prethodnom šemom nije tačno sledi iz sledećih primera:

Ako se za X uzme nepovezan prostor, za Y povezan prostor a za $f : X \to Y$ konstantno preslikavanje, imaćemo primer da su Y i (f, X, Y) povezani, a da je X nepovezan prostor, tj. da suprotno od implikacija 1 i 2 nije tačno. S druge strane, ako za X uzmemo nepovezan prostor sastavljen od disjunktnih otvoreno-

-zatvorenih skupova X_1 i X_2, a za Y uzmemo povezan prostor od bar dve tačke y i z, i preslikavanje f definišemo sa $f(X_1) = y$ i $f(X_2) = z$, imaćemo da je f neprekidno preslikavanje, trojka (f, X, Y) je nepovezana a Y povezan prostor. Znači da suprotno od implikacije 3 u prethodnoj šemi ne mora biti tačno.

STAV 8.16. Ako je Y T_1-prostor i ind (f, X, Y) = 0 (tim pre ako je Ind (f, X, Y) = 0 ili dim (f, X, Y) = 0) sledi da je trojka (f, X, Y) potpuno nepovezana.

Dokaz. Neka su y i z proizvoljni elementi prostora Y. Iz ind (f, X, Y) = 0 sledi da postoji pregrada A trojke (f, X, Y) izmedju skupova $f^{-1}(y)$ i $f^{-1}(z)$ takva da je $X - A = O_1 \cup O_2$, $f^{-1}(y) \subset O_1$, $f^{-1}(z) \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, O_1 i O_2 su otvoreni podskupovi i ind $(f_{|A}, A, Y) = -1$. Odavde sledi $A = \emptyset$, pa su O_1 i O_2 otvoreno-zatvoreni podskupovi. ||

Iz gornjeg razmatranja sledi da nepovezana trojka ne mora biti potpuno nepovezana.

U vezi dimenzija trojki mogu se postaviti mnoga pitanja. Navedimo neka od njih.

Pitanje 8.17. Pod kojim uslovima važi ind (f, X, Y) = Ind (f, X, Y)?

Pitanje 8.18. Pod kojim uslovima važi ind (βf, βX, βY) = Ind (βf, βX, βY)?

Pitanje 8.19. Da li se može poboljšati Teorema 10.a) iz [40] (koja daje jednakost dim (βf, βX, βY) = dim (f, X, Y) za za normalne prostore X i Y) s obzirom na rezultat Katětova dim βX = dim X za Tychonoff-ljeve prostore?

Posebno bi od interesa bilo definisati dimenzionu funkciju dim (f, X, Y) ako je pokrivač Ω prostora Y iz Definicije 8.3. funkcionalno otvoren pokrivač.

L I T E R A T U R A

[1] АДНАДЖЕВИЧ Д., Некоторые свойства размерности dm нормальных пространств, Мат. весник, 3(18), 1966., 261-264.

[2] ADNADJEVIĆ D., Veze izmedju nekih kombinatornih dimenzija topoloških prostora, Mat. vesnik, 4(19), 1967., 409-413.

[3] АДНАДЖЕВИЧ Д., Отношения между некоторыми размерносными функциями топологических пространств, Труды международного симпозия по топологии и ее применениях, Херцег Нови, 1968., 35-37.

[4] ALEXANDROFF P.S., On some results concering topological spaces and their continuous mappings, Proc. Prague Simposium,1962., 41-54.

[5] АЛЕКСАНДРОВ П., ПАСЫНКОВ Б., Введение в теорию размерности, Наука, Москва, 1978.

[6] АЛЕКСАНДРОВ П.С., УРЫСОН П.С., Мемуар о компактных топологических пространствах, Москва, 1971.

[7] АРХАНГЕЛЬСКИЙ А.В., ПОНОМАРЕВ В.И., Основы обшей топологий в задачах и упражнениях, Москва, 1974.

[8] BAGLEY R.W., CONNEL E.H., McKNIGHT J.D., On properties characterizing pseudocompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 9/1958/, 500-506.

[9] BERRI M.P., Minimal topological spaces, Trans.Amer. Math.Soc., 108(1963), 97-105.

[10] BERGE C., Topological Spaces, London, 1963.

[11] BOURBAKI, Topologie générale, 4th ed., Actualites Sci.Ind., No 1142, Hermann, Paris, 1965.

[12] CHEN-TUNG LIN, Absolutely closed spaces, Trans.Amer. Math.Soc., 132(1968), 86-104.

[13] COMFORT W.W., A nonpseudocompact product space Whose finite subproducts are pseudocompact, Math.Ann. 170(1967), 41-44.

[14] ENGELKING R., General Topology, Warszawa, 1977.

[15] ФЕДОРЧУК В., Об отображениях, не понижающих размерность, ДАН, 185, Но.1, 1969., 54-57.

[16] ФЕДОРЧУК В., О сильно замкнутых отображениях, ДАН, 187, Но.1(1969) , 47-49.

[17] ФЕДОРЧУК В., Метод развертываемых спектров и вполне замкнутых отображений в общей топологии, УМН, 35, Но.3(1980), 112-121.

[18] ФИЛИПОВ В., О бикомпактах с несовпадающими индуктивными размерностями, 192, Но.2 (1970), 289-292.

[19] ФИЛИПОВ В., О бикомпактах с несовпадающими размерностями ind и dim, 192, Но.3 (1970), 516-519.

[20] GETTINGS R., Open mappings theory, Set theoretic topology, Acad.Press. I.N.C., 1977., 141-191.

[21] GILLMAN L., JERISON M., Rings of continuous functions, Van Nostrand, Princeton, M.J., 1960.

[22] HEWITT E., Rings of real-valued continuous functions, I, Trans.Amer.Math.Soc., 64(1948), 45-99.

[23] ISEKI K., On weakly compact and countably compact topological spaces, Proc.of the Japan Academy, 33(1957), 363-367.

[24] ISEKI K., KASAHARA S., On pseudocompact and countably compact spaces, Proc.Japan.Acad.Vol. 33, (1957), 100-102.

[25] KATĚTOV M., Über H-abgeschlossene und bikompakte Raüme, Časopis, Pešt.Mat.Fys., 69(1940), 36-49.

[26] KATĚTOV M., A theorem on the Lebesgue dimension, Časopis Pešt.Mat.Fys., 75(1950), 79-87.

[27] KELLEY J.L., General Topology, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955.

[28] KUREPA DJ., Teorija Skupova, Zagreb, 1951.

[29] LEFSCHETZ S., Algebraic topology, New York, 1942.

[30] LYNN A.S., ARTHUR J., SEEBACH J.R., Counterexamples in topology, Springer-Verlag, 1978.

[31] MARDEŠIĆ S., PAPIĆ P., Sur les espaces dont toute transformation reelle continue est bornee, Glasnik Mat.Fiz.Ast. 10(1955), 225-232.

[32] MILOVANČEVIĆ D., A characterization of compactness and pseudocompactness, Glasnik Mat. 12/32, (1977), 157-160.

[33] MIŠIĆ M., Višeznačna preslikavanja topoloških prostora, Doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1971.

[34] ПАСЫНКОВ Б.А., О спектрах и размерности топологических пространств, Мат.сборник, 57(99), 1962., 449-476.

[35] ПОНОМАРЕВ В.И., О свойствах топологических пространств сохраняющихся при многозначных отображениях, Мат.сб. 51(1960), 515-536.

[36] ПРЕДИЧ Б., Абсолютная замкнутость троек непрерывности, Мат.Вес., 36,1984.

[37] РАНЧИН Д.В., О компактности по модулю, ДАН, СССР, 202(1972), Но.4, 7610764.

[38] SCARBOROUGH C.T., STEPHENSON R.M., Minimal topologies, Coll.Math. 19(1968), 215-219.

[39] SCARBOROUGH C.T., STONE A.H., Products of nearly compact spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 124(1966), 131-147.

[40] СИМОНЯАН С.А., КОТОВ Ю.И., ЗОЛОТАРЕВ В.П., Об одном подходе к исследованию непрерывных отображений, Вестн.Моск.Ун-та. сер.мат. Но.I-1978., 10-15.

[41] СМИРНОВ Ю., О сильно-паракомпактных пространствах, Изв.Акад.Наук СССР, Сер.Мат., 20(1956), 253-274.

[42] STEPHENSON R.M., Pseudocompact spaces, Trans.Amer.Math. Soc., 134(1968), 437-448 .

[43] STONE A.H., Heraditarily compact spaces, Amer.J.Math. 82(1960), 900-916.

[44] ВЕДЕНИСОВ Н., О размерности в смысле E.Čech-а, Изв. Акад.Наук. СССР, Сер.Мат. 5(1941), 211-216.

[45] WALLMAN H., Lattices and topological spaces, Ann. of Math. 39(1938), 112-126.

[46] ПРЕДИЧ Б., Свойства отделимости троек непрерывности, Мат.Вес. (примљено за штампу).

[47] ПРЕДИЧ Б., Свойства типа бикомпактности троек непрерывности , Мат.Вес.(примлјено за птампу).

1. SIMBOLI I SKRAĆENICE

$x \in X$	x je element skupa X
$A \subset B$	A je podskup skupa B
$\cup$	unija
$\cap$	presek
Π	Kartezijev proizvod
$X - A = \complement A$	komplement skupa A
(X, τ)	skup X sa topologijom τ
$\overline{A} = cl(A)$	zatvaranje skupa A
$int(A)$	interior skupa A
$\bigoplus \{X_a : a \in A\}$	disjunktna topološka suma prostora X_a, a A
cX	kompaktifikacija prostora X
βX	Stone-Čech-ova kompaktifikacija prostora X
$P(X)$	partitivni skup skupa X
2^X	Vietoris-ova (konačna) topologija na familiji zatvorenih podskupova
$\emptyset$	prazan skup
$\|\|$	kraj dokaza
$f : X \to Y$	jednoznačno preslikavanje

$F : X \to Y$	višeznačno preslikavanje
f^{-1}	inverzno preslikavanje preslikavanja f
$F^{+}(A)$	mala koslika skupa A
$f\|_{A}$	restrikcija preslikavanja na podskup A
$\prod_{a\in A} f_a$	proizvod preslikavanja $f_a : X_a \to Y_a$, $a \in A$
$d(X)$	gustoća prostora X
$\|A\| = \text{card } A$	kardinalni broj skupa A
ord $\mathcal{A}$	red familije $\mathcal{A}$ podskupova nekog prostora

POPIS POJMOVA