ACADÉMIE ROYALE SERBE

EXTRAIT
DU
BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET NATURELLES

A. SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET PHYSIQUES

№ 3

M. N. Saltykow

Structure d'un système normal d'équations aux derivées partielles du premier ordre, aux intégrales données des caractéristiques.

BELGRADE
1936

ACADÉMIE ROYALE SERBE

EXTRAIT
DU
BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET NATURELLES

A. SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

№ 3

M. N. Saltykow

Structure d'un système normal d'équations aux derivées partielles du premier ordre, aux intégrales données des caractéristiques.

BELGRADE
1936

Structure d'un système normal d'équations aux derivées partielles du premier ordre, aux intégrales données des caractéristiques

PAR

M. N. SALTYKOW

(Présenté à la Séance de l'Académie des Sciences naturelles du 4 mai 1936)

1. Il s'agit, dans les lignes qui vont suivre, d'exposer plusieurs considérations sur la solution d'un beau problème posé par M. D. Michnevitch, dont il vient d'étudier[1]) la solution.

Le premier complément à ses dernières recherches concerne les formules qui résolvent le problème dans le cas, où les intégrales données sont en involution.

La seconde remarque a pour but d'établir les conditions générales de solubilité du problème étudié dans le cas d'un groupe quelconque des intégrales données.

2. Considérons, d'abord, pour fixer les idées, un groupe de r fonctions distinctes et *en involution:*

$$f_1, f_2, \ldots, f_r, \qquad (r \leqslant n) \tag{1}$$

---

[1]) *Formation du système normal d'équations aux dérivées partielles du premier ordre au moyen d'intégrales données des caractéristiques.* (Bulletin de l'Académie des Sciences Math. et Nat. A. Sc. Math. et Phys, Belgrade 1936 N 3. p. 149.).

à $2n$ variables canoniques:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \tag{2}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{3}$$

La question se pose de former un système normal de m équations en involution aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue z de n variables indépendantes (2):

$$\left.\begin{array}{ll} F_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, & \\ i = 1, 2, \ldots m, & (m \leqslant n), \end{array}\right\} \tag{4}$$

où les variables (3) désignent respectivement les dérivées partielles:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

et dont les fonctions (1) seraient les intégrales des caractéristiques.

Il va sans dire, que les fonctions cherchées F_i doivent représenter les solutions distinctes en involution du système normal de r équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue F suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} (f_k, F) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots r, \end{array}\right\} \tag{5}$$

les parenthèses désignant celles de Poisson.

Comme il est bien connue, le système complet des solutions distinctes de ce dernier système (5) se présente sous la forme canonique: [2])

$$\left.\begin{array}{r} f_1, f_2, \ldots, f_r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}, \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-r}, \end{array}\right\} \tag{6}$$

---

[2]) *N. Saltykow. — Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris. Gauthier-Villars et Cie 1931 Chapitre IV. p. 37. n⁰ 20.

jouissant des propriétés canoniques suivantes:

$$(\varphi_s,\ \varphi_i) \equiv 0, \qquad (\psi_s,\ \psi_i) \equiv 0,$$

$$(s,\ i = 1,\ 2, \ldots\ n-r),$$

$$(\varphi_s,\ \psi_i) \equiv \begin{cases} 0, & s \gtrless i, \\ 1, & s = i. \end{cases}$$

Cela étant, on tire aisément du système (6) plusieurs systèmes des n intégrales distinctes en involution.

Leur forme générale peut être écrite de la manière suivante:

$$\left.\begin{array}{l} f_1,\ f_2, \ldots,\ f_r,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_l, \\ \qquad\qquad \psi_{l+1},\ \psi_{l+2}, \ldots,\ \psi_{n-r}, \end{array}\right\} \quad (7)$$

où il est permis de donner à l'indice l une valeur arbitraire quelconque de 1 à $n-r$.

Tout système de m fonctions arbitraires Ψ_i, formées des solutions (7), sera encore en involution.

Par conséquent, les m fonctions caractéristiques requises pourraient être définies par les formules:

$$\left.\begin{array}{l} F_i \equiv \Psi_i\,(f_1, f_2, \ldots f_r,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \ldots,\ \varphi_l,\ \psi_{l+1}, \ldots,\ \psi_{n-r}), \\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ m, \end{array}\right\} \quad (8)$$

les fonctions Ψ_i étant arbitraires.

Or, il faut bien prendre en considération que les équations formées au moyen de ces dernières fonctions F_i ne devraient point se réduire aux équations indépendantes des variables canoniques de la seconde classe (3).

On démontre, dans la théorie des intégrales canoniques[3]),

[3]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration ... p. 35, nº 18.

que seules les intégrales canoniques de la première ligne (6), dites de la première classe, jouissent de la propriété d'être toujours distinctes par rapport aux variables canoniques de la seconde classe. Par conséquent, pour être sûr, du point de vue théorique, que les équations formées ne vont pas se transformer en celles qui n'impliqueraient pas toutes les variables (3), il ne faudrait prendre que les expressions (8), où l'on a posé $l = n - r$.

Formons, par exemple, tous les systèmes normaux d'équations aux dérivées partielles du premier ordre admettant les intégrales suivantes des caractéristiques en involution:

$$p_1 + x_2, \qquad \frac{p_2 + x_1}{p_4 + x_3}, \qquad p_3 + x_4. \tag{9}$$

Pour composer le système canonique des intégrales en question, égalons les fonctions (9) à de constantes arbitraires que l'on désignera respectivement par a_1, a_2, et a_3.

Le système normal des trois équations aux dérivées partielles du premier ordre, à quatre variables indépendantes, que l'on obtient de cette manière, admet comme intégrale complète la formule:

$$z = a_1 x_1 + C(a_2 x_2 + x_4) + a_3 x_3 - x_1 x_2 - x_3 x_4 + C_1,$$

C et C_1 désignant deux constantes arbitraires.

Cela posé, le théorème généralisé de Jacobi[4]) produit les deux intégrales du système correspondant:

$$\varphi_1 \equiv p_4 + x_3 , \qquad \psi_1 \equiv \frac{x_2 (p_2 + x_1)}{p_4 + x_3} + x_4,$$

vérifiant la relation

$$(\varphi_1, \psi_1) \equiv 1.$$

[4]) *N. Saltykow.* — Méthodes classiques d'intégration.... p. 34, n[0] 18.

On obtient, donc, le système cherché d'équations aux dérivées partielles du premier ordre sous l'une des deux formes suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_i \left(p_1+x_2,\ \dfrac{p_2+x_1}{p_4+x_3},\ p_3+x_4,\ p_4+x_3\right)=0, \\ i=1,\ 2,\ \ldots\ m, \end{array}\right\} \quad (10)$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_i \left(p_1+x_2,\ \dfrac{p_2+x_1}{p_4+x_3},\ p_3+x_4,\ \dfrac{x_1(p_2+x_1)}{p_4+x_3}+x_4\right)=0, \\ i=1,\ 2,\ \ldots\ m, \end{array}\right\} \quad (11)$$

les fonctions Ψ_i et Θ_i étant arbitraires.

Selon les valeurs que l'on donnera à l'indice m, à partir de 1 jusqu'à 4, les équations (10) ou (11) définissent respectivement soit une équation, soit un système normal des deux, trois ou quatre équations dont les caractéristiques admettent les fonctions données (9) comme un système incomplet d'intégrales.

Or, il est évident que, dans le cas des quatre équations où $m=4$, les formules (10) ont l'avantage de définir quatre équations distinctes par rapport aux variables canoniques de la seconde classe p_1, p_2, p_3 et p_4. Cependant les équations (11) produisent, avec la même hypothèse $m=4$, des équations indépendantes de ces dernières variables.

3. Passons à l'étude d'un ensemble quelconque des r fonctions distinctes:

$$f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_r, \qquad (r<2n) \qquad (12)$$

des variables (2) et (3).

Il est d'abord évident que les fonctions (12) doivent engendrer un groupe fonctionnel pour pouvoir représenter les intégrales des caractéristiques.

Ce théorème que M. D. Michnevitch avait particulièrement étudié dans le cas d'une seule équation[5]), s'étend évidemment aussi au cas qui nous occupe, pour la formation d'un système en involution des m équations aux dérivés partielles:

$$\left.\begin{array}{l} F_i\,(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (m \leqslant n), \end{array}\right\} \tag{13}$$

dont les fonctions données (12) doivent représenter les intégrales des caractéristiques.

Cela étant, supposons que les fonctions (12) représentent un groupe fonctionnel possédant μ fonctions *distinguées* que l'on désignera par $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$.

Écrivons, donc, que le groupe (12) peut être représenté d'une autre manière par la suite des fonctions distinctes suivantes:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu, f_{\mu+1}, f_{\mu+2}, \ldots f_r \,. \tag{14}$$

Il s'ensuit que les μ premières fonctions (14) se trouvent en involution entre elles et avec les autres fonctions du groupe fonctionnel considéré (12).

D'autre part, on a la relation suivante:[6])

$$r = \mu + 2\rho, \tag{15}$$

car la différence, entre les nombres représentant l'ordre r du groupe (12) et μ désignant le nombre de ses fonctions distinguées, est toujours pair.

Par conséquent, si le groupe fonctionnel (12) ne possédait point des fonctions distinguées, l'ordre r en serait pair 2ρ.

---

[5]) *Formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre au moyen d'intégrales données des caractéristiques* (Bulletin de l'Académie des Sciences Math. et Nat. A. Sciences Math. et Phys. Belgrade 1935, N 2, nº 8, p. p. 223—224).

[6]) *N. Saltykow. — Méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue,* Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1935, Chapitre III. p. 29.

En partant de l'hypothèse générale que le nombre μ soit quelconque, cherchons le nombre maximum de nouvelles fonctions en involution entre elles et avec les fonctions du groupe (14).

A cet effet, calculons d'abord une seule solution du système:

$$\left.\begin{array}{ll}(\Phi i,\ F)=0, & (f_{\mu+\rho},\ F)=0, \\ i=1,\,2,\,\ldots,\,\mu, & j=1,\ 2,\ \ldots\ 2\rho.\end{array}\right\} \qquad (16)$$

Supposons que $\Phi_{\mu+1}$ soit la solution cherchée du système (16), distincte des autres μ solutions connues Φ_1, Φ_2, ... Φ_μ.

Pour trouver, dans ce cas, la nouvelle solution $\Phi_{\mu+2}$, intégrons le système composé d'équations (16) et de l'équation suivante:

$$(\Phi_{\mu+1},\ F)=0. \qquad (17)$$

En procédant de cette manière, on aboutira finalement à un système de $n+\rho$ équations linéaires, formées des équations (16), (17) et les suivantes:

$$\begin{array}{l}(\Phi_{\mu+2},\ F)=0,\ (\Phi_{\mu+3},\ F)=0,\ \ldots, \\ (\Phi_{n-\rho},\ F)=0,\end{array}$$

dont on connaît le système complet des solutions distinctes en involution entre elles.

Ce dernier système est donné par les fonctions:

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_\mu,\ \Phi_{\mu+1},\ \Phi_{\mu+2},\ \ldots,\ \Phi_{n-\rho}, \qquad (18)$$

représentant le nombre maximum de $n-\rho$ fonctions distinctes qui se trouvent en involution entre elles et avec toutes les intégrales données des caractéristiques (12).

Le calcul des fonctions (18) peut être toujours effectué de telle manière que ces dernières soient distinctes par rapport aux variables canoniques de la seconde classe (3).

Il y a ici deux cas à distinguer suivant que:

1° *le nombre m de fonctions caractéristiques cherchées F_i est supérieur au nombre $n-\rho$ des intégrales (18), auquel cas le problème posé devient impossible;* et

2° *le nombre m de fonctions cherchées F_i est au plus égal à $n-\rho$, auquel cas le problème étudié admet toujours une solution donnée par les formules:*

$$F_i \equiv \Psi_i\,(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu, \Phi_{\mu+1}, \ldots \Phi_{n-\rho}),$$

$$i = 1, 2, , \ldots m,$$

Ψ_i désignant des fonctions arbitraires. Il va sans dire que le nombre m doit être supérieur à 1. En effet, si $m=1$, la fonction caractéristique correspondante unique F_1 s'obtiendra alors par un calcul plus simple que celui qui vient d'être exposé.

Remarquons, enfin, que le problème traité, au n° 2, ne représente qu'un cas particulier de ce dernier problème correspondant à l'hypothèse particulière, $\rho = 0$.

Il n'y aurait qu'une dernière remarque à faire, concernant les conditions qui doivent être satisfaites pour que les intégrales données (12) représentent un système complet des intégrales distinctes des caractéristiques du système (13).

La relation suivante devrait, alors, avoir lieu:

$$2n - m = r,$$

ou bien

$$m = 2n - r \equiv n + (n - r). \tag{19}$$

Comme il est impossible que m soit supérieur à n, on en tire l'inégalité complémentaire:

$$r \geqslant n, \tag{20}$$

Les deux formules obtenues (19) et (20) s'expriment, d'une autre manière, par les relations suivantes:

$$m = 2(n - \rho) - \mu, \qquad \mu + 2\rho \geqslant n.$$

Sans ces dernières conditions, le groupe fonctionnel (12) représentera toujours un système incomplet des intégrales des caractéristiques.