

PĐ 10471

DUŠAN D. TOŠIĆ

OCENE GREŠAKA NEKIH NUMERIČKIH METODA ZA REŠAVANJE
OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

- doktorska disertacija -

Prirodno-matematički fakultet

Beograd, 1984.

S A D R Ž A J

PREDGOVOR	1
1. UVOD	4
1.1. Neki osnovni pojmovi povezani sa diskretizacionim metodama	4
1.2. O nekim klasama diskretizacionih metoda za obične diferencijalne jednačine	13
1.3. Dvostrane aproksimacije rešenja Cauchy-evog zadatka za obične diferencijalne jednačine	22
2. RICHARDSON-OVA METODA EKSTRAPOLACIJE	26
2.1. Primena Richardson-ove metode ekstrapolacije	26
2.2. Uopštenja o razlaganju za Richardson-ovu metodu ekstrapolacije	27
2.3. Zaključak	33
3. DISKRETIZACIJA I OCENA GREŠKE PRILIKOM DISKRETIZACIJE KOD ČAPLIGINOVE METODE	34
3.1. Neke karakteristike Čapliginove metode	34
3.2. Diskretizacija Čapliginove metode	35
3.3. Određivanje početnih aproksimacija	36
3.4. Ispitivanje konveksnosti	40
3.5. Nalažanje sledećih aproksimacija	43
3.6. Zaključak	50
4. DVOSTRANE ITERATIVNE METODE ZA REŠAVANJE CAUCHY-EVOG ZADATKA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA	52
4.1. Osnovni pojmovi i postavka zadatka	52
4.2. Algoritam za usavršavanje početnih aproksimacionih intervala	53
4.3. Problemi dvostranih aproksimacionih metoda tipa prediktor-korektor	55
4.4. Primeri	59
4.5. Zaključak	61

5. PRECIZIRANJE LOKALNE GREŠKE DISKRETIZACIJE KOD LINEARNIH VIŠEKORAČNIH METODA -----	64
5.1. O asimptotskoj oceni lokalne greške diskre- tizacije -----	64
5.2. Opis i obrazloženje postupka za preciziranje lokalne greške diskretizacije -----	65
5.3. Primeri -----	68
LITERATURA -----	71

P R E D G O V O R

Diferencijalne jednačine imaju važnu ulogu u nauci i tehnici. Za veliki broj diferencijalnih jednačina rešenja se ne mogu naći pomoću kvadratura, već jedino približno. Poslednjih decenija problemi u vezi sa numeričkim rešavanjem diferencijalnih jednačina intenzivno su proučavani. Za poslednjih dvadesetak godina skoro da se ne može naći časopis iz numeričke analize u kome bar jedan rad nije posvećen pitanjima numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina. Srazmerno broju radova rastao je i broj knjiga i monografija. Za knjige i monografije iz ove oblasti karakteristično je da su veoma različitih koncepcija. Na primer, monografija [34] zasnovana je na skoro celokupnoj savremenoj funkcionalnoj analizi, dok su pojedine knjige iz ove oblasti posvećene samo jednom algoritmu. ([20])

Za približno nalaženje rešenja Cauchy-evog problema običnih diferencijalnih jednačina postoje analitičke i diskretizacione metode. Nije teško uočiti da se u vezi sa ovim problemom glavna pažnja u naučnoj literaturi, za sada, posvećuje diskretizacionim metodama. Diskretizacione metode se uglavnom lako primenjuju na savremenim elektronskim računarima pa je i razumljivo znatno veće interesovanje za njih u poređenju sa analitičkim metodama.

Kada je reč o diskretizacionim metodama za rešavanje Cauchy-evog problema, radovi se mogu svrstati u dve klase (Videti [16] i [20]):

- (1) klasa radova posvećena krutim sistemima diferencijalnih jednačina (tzv. problemi krutosti običnih diferencijalnih jednačina);
- (2) klasa radova koja nije u vezi sa problemima krutosti.

U ovom radu ne proučavaju se kruti sistemi diferencijalnih jednačina i nadalje će biti reči samo o problemima

"nekrutosti". Probleme nekrutosti karakteriše veliki broj radova koji se odnose na usavršavanje postojećih metoda i ispitivanje njihovih teorijskih svojstava. Ocenjivanjem grešaka za različite metode u različitim situacijama prave se pokušaji da se nađe optimalna metoda za pojedine klase diferencijalnih jednačina. Takođe se vrši upoređivanje metoda s obzirom na pogodnost njihove implementacije na elektronskim računarima. Pri tome su najinteresantniji i najteži problemi ocene greške.

Mada postoje različite metode za ocenu grešaka numeričkih rešenja Cauchy-evog problema za obične diferencijalne jednačine, Richardson-ov postupak ekstrapolacije još uvek se najviše proučava. Značajna pažnja u naučnoj literaturi posvećuje se metodama intervalne analize i dvostranim aproksimacijama tačnog rešenja. Kod ovih metoda, kroz proces izračunavanja približnog rešenja, ocenjuje se gornja granica razlike između tačnog i približnog rešenja.

U ovom radu problem ocene grešaka za numerička rešenja Cauchy-evog problema za obične diferencijalne jednačine, proučava se iz različitih aspekata.

Rad se sastoji iz pet glava koje su izdvojene na odeljke. Rezultati druge glave već su objavljeni. ([35]) U procesu objavljivanja su neki rezultati iz treće glave ([36]), dok su rezultati četvrte glave saopšteni na "Sedmom balkanskom kongresu matematičara" u Atini. Rezultati pete glave prvi put su izloženi u ovom radu.

Prva glava sadrži definicije osnovnih pojmova i već poznate rezultate na kojima su zasnovani novodobijeni rezultati u narednim glavama. Mnoge definicije i teoreme u ovoj glavi, uzete su iz: [34], [21], [16], [20], [9] i [25]. Teoreme su navođene bez dokaza, s tim što je ukazano na literaturu u kojoj se mogu naći dokazi.

U drugoj glavi razmatraju se teorijske osnove Richardson-ovog postupka ekstrapolacije. Formulirane su i dokazane teoreme koje predstavljaju uopštenje teoreme o razlaganju za Richardson-ov postupak ekstrapolacije. Teorema o razlaganju navedena je u monografiji [26]. Ovi rezultati ne odnose se samo na obične diferencijalne jednačine, već važe za široku klasu jednačina matematičke fizike.

Treća glava sadrži rezultate u vezi sa diskretizacijom

Čapliginove¹⁾ metode za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Čapliginova metoda je analitička metoda i omogućava dvostranu aproksimaciju Cauchy-evog rešenja za obične diferencijalne jednačine. Karakteriše je velika brzina konvergencije približnih rešenja ka tačnom. Nažalost, ova metoda je teško primenljiva u praksi zbog glomaznih formula koje se pojavljuju u toku računanja. Zato je u ovoj glavi napravljen pokušaj diskretizacije Čapliginove metode i razmotrene su teškoće koje se prilikom diskretizacije javljaju. Detaljno se, na različite načine, analizira greška prilikom diskretizacije Čapliginove metode.

U četvrtoj glavi izložena je jedna nova iterativna metoda za dvostranu aproksimaciju Cauchy-evog rešenja običnih diferencijalnih jednačina. Metoda je tipa prediktor-korektor. Kao prediktor koristi se neka od hibridnih metoda za dvostranu aproksimaciju, a kao korektor neka od implicitnih Adams-ovih formula. Dokazuje se da, pod odredjenim uslovima, dobijene dvostrane aproksimacije uokviruju rešenje datog Cauchy-evog zadatka. Razlika između gornjeg i donjeg rešenja služi kao pokazatelj tačnosti aproksimacija.

Peta glava sadrži rezultate u vezi sa preciznijom ocenom lokalne greške diskretizacije nekih klasa linearnih višekoračnih metoda.

Dobijeni teorijski rezultati u četvrtoj i petoj glavi ilustrovani su konkretnim numeričkim primerima.

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim svima koji su na bilo koji način pomogli prilikom izrade ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem mentoru dr Ljubomiru Protiću koji je pažljivo pročitao ceo rukopis i korisnim sugestijama doprineo da pojedini delovi ovog rada postanu korektniji i jasniji.

Beograd, februara 1984.

Dušan Tošić

¹⁾ Imena ruskih autora iz tehničkih razloga biće pisana latinicom (onako kako se čitaju). Na kraju u literaturi, ova imena će biti zapisana u originalu na ruskom.

1. U V O D

U svim delovima ovog rada biće reči o procesima diskretizacije i diskretizacionim metodama; zato je prvi odeljak uvoda posvećen osnovnim pojmovima i uopštenim rezultatima u vezi sa ovom problematikom. U drugom odeljku opisani su glavni rezultati u vezi sa osnovnim klasama diskretizacionih metoda za rešavanje Cauchy-evog problema za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Pojedini od uopštenih pojmova iz prvog odeljka objašnjavaju se u drugom odeljku na konkretnim metodama. Treći odeljak sadrži opis dvostranih metoda sa posebnim osvrtom na Čapliginovu metodu za približno rešavanje Cauchy-evog zadatka običnih diferencijalnih jednačina.

1.1. Neki osnovni pojmovi povezani sa diskretizacionim metodama

Osnovni pojmovi u ovom odeljku definisani su uopšteno bez navođenja konkretnih primera. Detaljnija razmatranja većine od ovih pojmova, potkrepljena primerima, mogu se naći u monografiji [34] od Stetter-a.

Definicija 1.1.1. Zadatak koji se rešava nekom metodom diskretizacije naziva se polazni zadatak. Polazni zadatak \mathcal{P} je određen trojkom (D, S, F) gde su D i S Banach-ovi prostori, a F preslikavanje skupa D u skup S , pri čemu S sadrži nula-element. Tačno rešenje polaznog zadatka je element $u \in D$ za koji važi:

$$(1.1.1) \quad Fu = 0 .$$

Nadalje će redovno biti pretpostavljeno da postoji tačno rešenje polaznog zadatka i da je jedinstveno. Pitanja postojanja i jedinstvenosti tačnog rešenja polaznog zadatka, neće se razmatrati.

Kada je reč o Cauchy-evom problemu za obične difere-

ncijalne jednačine, prostor D je najčešće prostor $C^{(p)}[a,b]$ ($p > 0$) neprekidnih i diferencijabilnih funkcija do reda p na odsečku $[a,b]$. (Ukoliko drugačije ne bude naglašeno, podrazumevaće se da je $p = 1$.) Prostor S u tom slučaju je proizvod $R \times C[c,d]$. Nadalje neće uvek biti naglašavano da se operiše nad ovim prostorima. U delu rada gde se razmatraju uslovi za primenu Richardson-ovog postupka ekstrapolacije, dobijeni rezultati su opšteg karaktera i odnose se, takođe, na granične zadatke. U ovom delu posebno je istaknuto nad kojim prostorima se operiše.

Metode diskretizacije zasnivaju se na zameni polaznog zadatka nizom konačno-dimenzionalnih koji se mogu rešiti metodom numeričke analize. Zamena polaznog zadatka vrši se tako da rešenja konačno-dimenzionalnih zadataka u nekom smislu aproksimiraju tačno rešenja u . Ukoliko se uzme više članova niza konačno-dimenzionalnih zadataka, treba da se dobiju bolje aproksimacije za u .

Definicija 1.1.2. Metoda diskretizacije \mathcal{M} primenjena na polazni zadatak \mathcal{P} sastoji se iz beskonačnog niza petorki:

$$(D_n, S_n, \Delta_n, \omega_n, \varphi_n)_{n \in N'}$$

gde su D_n i S_n konačno-dimenzionalni Banach-ovi prostori takvi da važi: $\Delta_n : D \rightarrow D_n$, $\omega_n : S \rightarrow S_n$; Δ_n i ω_n su linearna preslikavanja za koja važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n y\|_{D_n} = \|y\|_D \quad \text{za svako fiksirano } y \in D \text{ i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n d\|_{S_n} = \|d\|_S \quad \text{za svako fiksirano } d \in S^2 ;$$

$\varphi_n : (D \rightarrow S) \rightarrow (D_n \rightarrow S_n)$ pri čemu F pripada oblasti definisanosti svakog φ_n ; N' je beskonačni podskup skupa prirodnih brojeva N .

Definicija 1.1.3. Diskretizacioni zadatak \mathcal{D} polaznog zadatka \mathcal{P} je beskonačan niz trojki (D_n, S_n, F_n) , ($n \in N'$, $F_n : D_n \rightarrow S_n$) koji se dobija primenom metode diskretizacije $\mathcal{M} = (D_n, S_n, \Delta_n, \omega_n, \varphi_n)$ na polazni zadatak \mathcal{P} . U ovom slučaju pišemo: $\mathcal{D} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$.

Rešenje diskretizacionog zadatka je niz $(\eta_n)_{n \in N'}$ i $\eta_n \in D_n$ za koji važi:

$$(1.1.2) \quad F_n \eta_n = 0 \quad n \in N'$$

Ovde se za prostore D_n i S_n pretpostavlja da su istih dimenzija.

Kao prostori D_n i S_n najčešće se javljaju prostori funkcija nad diskretnim i konačnim podskupovima intervala iz R^m koji se nazivaju mreže. Definicijom 1.1.4. precizira se pojam mreže.

Definicija 1.1.4 Mrežom G_n na intervalu $[a, b]$ naziva se konačan skup tačaka $t_\nu \in [a, b]$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, takvih da je:

$$t_0 = a \text{ i } t_{\nu-1} < t_\nu \text{ ;}$$

veličina $h_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$, $\nu = 1, \dots, n$ naziva se korak mreže G_n , a tačke t_ν , ($\nu = 0, \dots, n$) čvorovi mreže G_n ; maksimalni korak mreže je $h = \max_{1 \leq \nu \leq n} h_\nu$. Mreža G_n naziva se ravnomerna ako je

$$t_\nu - t_{\nu-1} = h = (b-a)/n, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Celokupno izlaganje u ovom radu odnosiće se uglavnom na ravnomerne mreže, što se neće posebno naglašavati.

Preslikavanja Δ_n i ω_n diskretizuju neprekidne funkcije iz D i S u funkcije na konačnom broju tačaka (tzv. mrežne funkcije). Preslikavanje $F_n = \mathcal{C}_n(F)$ najčešće se izražava pomoću diferencnih operatora definisanih na mreži.

Pomenute diferencne šeme na mrežama predstavljaju samo jednu interpretaciju definicija 1.1.1. - 1.1.3; uopštenost ovih definicija dozvoljava i druge interpretacije.

Postojanje i jedinstvenost tačnog rešenja u iz (1.1.1) ne podrazumeva postojanje i jedinstvenost aproksimacionih rešenja (η_n). Znači za problem diskretizacije vezana su i pitanja postojanja i jedinstvenosti aproksimacionih rešenja (η_n). Ova pitanja povezana su sa pitanjima saglasnosti, konvergencije i stabilnosti diskretizacionih metoda. Saglasnost, stabilnost i konvergencija su suštinski pojmovi za diskretizacione metode pa ćemo ih stoga definisati u sledećem tekstu.

Definicija 1.1.5. Metoda diskretizacije \mathcal{M} primenjena na polazni zadatak $\mathcal{P} = (D, S, F)$ saglasna je sa \mathcal{P} u tački $y \in D$ ako y pripada oblastima definisanosti preslikavanja F i $\mathcal{C}_n(F)\Delta_n$ i ako važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \mathcal{C}_n(F)\Delta_n y - \omega_n Fy \|_{S_n} = 0, \quad n \in N'.$$

Metoda \mathcal{M} je saglasna sa zadatkom \mathcal{P} ako je saglasna sa njim za svako $y \in D$. Ako je metoda \mathcal{M} saglasna sa \mathcal{P} , onda se i za

diskretizacioni zadatak $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ kaže da je saglasan sa \mathcal{P} .

Prilikom diskretizacije veličina n je povezana sa obrnuto proporcionalnom veličinom h . Naime, za ravnomerne mreže, u jednodimenzionom slučaju, važi: $h = (b-a)/n$ gde je $b - a$ poznata konstanta.

Pojedina svojstva diskretizacionih metoda preglednije se opisuju pomoću veličine h . U tom smislu i diskretizaciono rešenje η_n označava se i sa η^h što će biti korišćeno ponekad i u ovom radu.

Sledećom definicijom još preciznije se određuje saglasnost pomoću veličine h .

Definicija 1.1.6. Metoda \mathcal{M} i diskretizacioni zadatak $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ saglasni su sa polaznim zadatkom do reda p u tački y ako važi:

$$(1.1.3) \quad \|\varrho_n(F)\Delta_n y - \omega_n Fy\|_{S_n} = O(h^p) \quad \text{kad } n \rightarrow \infty$$

Jedna vrsta ocene tačnosti metode diskretizacije može se dobiti zamenom približnog rešenja η_n tačnim rešenjem u tačkama prostora D_n gde je definisano približno rešenje. Na taj način dolazi se do važnog pojma lokalne greške diskretizacije.

Definicija 1.1.7. Neka je metoda diskretizacije \mathcal{M} saglasna sa polaznim zadatkom \mathcal{P} koji ima tačno rešenje u . Niz $(\mathcal{L}_n)_{n \in N'}$, $\mathcal{L}_n \in S_n$ definisan na sledeći način:

$$\mathcal{L}_n = \varrho_n(F)\Delta_n u, \quad n \in N'$$

naziva se lokalna greška diskretizacije metode \mathcal{M} i zadatka $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ za polazni zadatak \mathcal{P} .

Lokalna greška diskretizacije metode \mathcal{M} je veličine $O(h^p)$ ako je metoda \mathcal{M} saglasna sa polaznim zadatkom \mathcal{P} do reda p u smislu definicije 1.1.6. U ovom slučaju za metodu diskretizacije \mathcal{M} kaže se da je reda $p-1$.

Lokalna greška diskretizacije ne pruža potpunu sliku o aproksimaciji rešenja u približnim rešenjima (η_n) . Tačno rešenje u i jedan član η_n niza $(\eta_n)_{n \in N'}$ pripadaju različitim prostorima pa najpre treba rešiti pitanje kako ih upoređivati. Postoji nekoliko načina za upoređivanje ovih elemenata.



a najprihvatljiviji i najčešće korišćen je da se uporede $\Delta_n z$ i η_n u prostoru D_n za svako $n \in N'$. Intuitivno to bi značilo da se upoređivanje vrši samo na skupu tačaka na kojem je definisano η_n , tj. na mreži diskretizacije.

Definicija 1.1.8. Neka se metoda diskretizacije M primenjuje na polazni zadatak \mathcal{P} sa tačnim rešenjem u . Neka diskretizacioni zadatak $M(\mathcal{P})$ ima jedinstveno rešenje $(\eta_n)_{n \in N'}$. Niz

$$\varepsilon_n = \eta_n - \Delta_n z, \quad n \in N'$$

naziva se globalna greška diskretizacije metode M (tj. zadatka $M(\mathcal{P})$) za polazni zadatak \mathcal{P} .

Definicija 1.1.9. Za diskretizacionu metodu M i zadatak $M(\mathcal{P})$ kaže se da konvergiraju ka polaznom zadatku \mathcal{P} ako: važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varepsilon_n\|_{D_n} = 0.$$

Da bi diskretizaciona metoda konvergirala, potreban uslov je da bude saglasna sa polaznim zadatkom, ali nije dovoljan. Ako $\mathcal{L}_n \rightarrow 0$, ne znači da će za svaki operator F $\varepsilon_n \rightarrow 0$ kad $n \rightarrow \infty$. Globalna greška diskretizacije nastaje kao rezultat rešavanja jednačine $F_n \eta_n = 0$, a ne jednačine $F_n \xi_n = \mathcal{L}_n$ iz koje bi se dobilo tačno rešenje $\xi_n = \Delta_n z$ u prostoru D_n .

Ako je metoda diskretizacije osetljiva na male izmene tačnog rešenja, (tj. ako male izmene tačnog rešenja izazivaju velike izmene diskretizacionog rešenja), onda i pored smanjenja lokalne greške diskretizacije, može da dođe do uvećanja globalne greške diskretizacije. Dakle, da bi se naveli dovoljni uslovi za konvergenciju, potrebne su još neke karakterizacije diskretizacionih metoda.

Definicija 1.1.10. Za diskretizacionu metodu M primenjenu na polazni zadatak \mathcal{P} sa tačnim rešenjem u kažemo da je stabilna na $(\xi_n) = (\Delta_n z)$ ako za diskretizacioni zadatak $M(\mathcal{P})$ postoje konstante S i r tako da ravnomerno u odnosu na svako $n \in N'$ važi:

$$(1.1.4) \quad \|\xi_n^{(1)} - \xi_n^{(2)}\|_{D_n} \leq S \|F_n \xi_n^{(1)} - F_n \xi_n^{(2)}\|_{S_n}$$

za svaki par $\xi_n^{(i)}$, $i = 1, 2$ koji ispunjava uslov:

$$\| F_n \xi_n^{(i)} - F_n \xi_n \| < r.$$

S i r se nazivaju, redom, granica stabilnosti i prag stabilnosti.

Ovde treba istaknuti da relacija (1.1.4) treba da važi ravnomerno sa svako $n \in \mathbb{N}$; tj. da se konstante S i r mogu izabrati nezavisno od n.

Saglasnost i stabilnost u uskoj su vezi sa postojanjem i jedinstvenošću diskretizacionog zadatka. Sledeće dve teoreme koje se navode bez dokaza (dokazi se mogu naći u [34]) precizno kazuju o kakvoj povezanosti je reč.

Teorema 1.1.1. Neka za polazni zadatak $\mathcal{P} = (D, S, F)$ sa tačnim rešenjem u, metoda diskretizacije \mathcal{M} zadovoljava sledeće uslove:

- (1) preslikavanja $F_n = \mathcal{E}_n(F) : D_n \rightarrow S_n$ definisana su i neprekidna u oblasti $B_g(\Delta_n z) = \{ \xi_n \in D_n : \|\xi_n - \Delta_n z\| < g \text{ gde } g > 0 \text{ ne zavisi od } n;$
- (2) metoda \mathcal{M} je saglasna sa \mathcal{P} ;
- (3) metoda \mathcal{M} je stabilna na \mathcal{P} .

Tada diskretizacioni zadatak $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ ima jedinstveno rešenje (η_n) , $\eta_n \in D_n$ za svako dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.1.2. Ako su ispunjeni uslovi teoreme 1.1.1. metoda diskretizacije \mathcal{M} konvergira ka \mathcal{P} . Ako je pri tom metoda \mathcal{M} saglasna sa \mathcal{P} do reda p, onda ona konvergira ka \mathcal{P} brzinom reda p.

Mada nije eksplicitno naglašeno, u dosadašnjim razmatranjima bila je prisutna pretpostavka da se rešenje diskretizacionog zadatka (niz (η_n)) izračunava tačno. U praksi se redovno rešenje diskretizacionog zadatka nalazi samo približno. Za izračunavanje se koriste računska sredstva na kojima rešenje može da se dobije pomoću aritmetičkih operacija samo na ograničen broj decimala. Na krajnji rezultat u izračunavanju numeričkog rešenja utiču:

- (a) greška zaokrugljivanja,
- (b) greška zamene nearitmetičkih operacija aritmetičkim.

Na svakom digitalnom računaru raspoloživ je samo konačan broj racionalnih brojeva. Kada se primeni aritmetička operacija

na dva ovakva broja, kao rezultat ne mora da se dobije racionalan broj raspoloživ na računaru. U tom slučaju rezultat se zamenjuje približnim brojem raspoloživim na računaru i tada nastaje greška zaokruglivanja. S druge strane, kad god se izračunava nearitmetička funkcija, aproksimira se konačnim nizom aritmetičkih operacija, što utiče na pojavu greške pod (b). Greške pod (a) i (b) čine grešku izračunavanja.

Definicija 1.1.11. Neka je zadat algoritam za određivanje rešenja η_n diskretnog zadatka \mathcal{D} i neka se kao rezultat primene algoritma dobija element $\tilde{\eta}_n$. Element $\rho_n = F_n \tilde{\eta}_n$ naziva se lokalna greška izračunavanja, a element $r_n = \tilde{\eta}_n - \eta_n$ naziva se globalna greška izračunavanja numeričkog rešenja.

Iz izloženog može se zaključiti da se problemu ocene greške diskretizacionih metoda može pristupiti na više načina. Jedan od pristupa je utvrđivanje gornje granice ukupne greške. Prilikom utvrđivanja gornje granice ukupne greške polazi se od najnepovoljnijeg slučaja pa ovaj pristup često i ne pruža pravu sliku o ponašanju greške. Zato je ponekad važnije kvantitativno i kvalitativno ispitivanje ponašanja greške. U pristupu poznatom kao direktna analiza greške, ocenjuje se doprinos svakog izvora greške pa se na osnovu toga izračunava gornja granica razlike između tačnog rešenja Δ_n i numeričkog rešenja η_n .

Prilikom analize ponašanja i ocene greške često se koristi tzv. asimptotsko razlaganje lokalne i globalne greške diskretizacije. Asimptotsko razlaganje grešaka može se definisati i u najopštijem slučaju.

Definicija 1.1.12. Neka se metoda diskretizacije primenjuje na zadatak \mathcal{P} . Niz preslikavanja $\Lambda_n : D \rightarrow S$ takvih da je:

$$\mathcal{E}_n(F) \Delta_n y = F_n \Delta_n y = \omega_n [F + \Lambda_n] y$$

za svako y u oblasti definisanosti F naziva se preslikavanje lokalne greške diskretizacije metode \mathcal{M} za zadatak \mathcal{P} .

Definicija 1.1.13. Preslikavanje lokalne greške diskretizacije $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ metode \mathcal{M} dozvoljava asimptotsko razlaganje do reda q ako postoji neprazan skup $D_q \subset D$ i preslikavanja : $\Lambda_j : D_q \rightarrow S$, $j = 1, \dots, q$ koja ne zavise od n tako da za svako

$y \in D_q$ važi:

$$(1.1.5) \quad \|\omega_n [\mathcal{L}_n y - \sum_{j=1}^q h^j \mathcal{L}_{j,y}] \| = o(h^{q+1}), \quad \text{kad } n \rightarrow \infty$$

Pod navedenim uslovima u definiciji 1.1.13. za $y \in D_q$ imamo:

$$F_n \Delta_n y = \omega_n [Fy + \sum_{j=1}^q h^j \mathcal{L}_{j,y}] + o(h^{q+1})$$

Specijalno, ako je tačno rešenje $u \in D_q$ onda važi:

$$(1.1.6) \quad \mathcal{L}_n = F_n \Delta_n u = \sum_{j=1}^q h^j \omega_n(\mathcal{L}_{j,u}) + o(h^{q+1})$$

Relacijom (1.1.6) definisano je asimptotsko razlaganje do reda q lokalnih grešaka diskretizacije (\mathcal{L}_n) metode \mathcal{M} za zadatak \mathcal{P} .

Ako je metoda \mathcal{M} saglasna do reda p sa zadatkom \mathcal{P} , onda na osnovu (1.1.3) važi:

$$\mathcal{L}_{j,u} = 0, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Slično se definiše i asimptotsko razlaganje globalne greške diskretizacije.

Definicija 1.1.14. Neka je \mathcal{M} metoda diskretizacije primenjena na polazni zadatak \mathcal{P} . Ako postoje elementi $e_j \in D$, $j = 1, \dots, q$, nezavisni od n tako da važi:

$$(1.1.7) \quad \mathcal{E}_n = \Delta_n \left[\sum_{j=1}^q h^j e_j \right] + o(h^{q+1}) \quad \text{kad } n \rightarrow \infty,$$

onda kažemo da globalna greška diskretizacije (\mathcal{E}_n) $_{n \in N'}$ metode \mathcal{M} dopušta asimptotsko razlaganje do reda q .

Ako metoda \mathcal{M} konvergira ka \mathcal{P} brzinom reda p , onda je $e_j = 0$, $j = 1, \dots, p-1$ i $e_p \neq 0$.

Asimptotsko razlaganje se koristi, uglavnom, za proučavanje lokalne greške diskretizacije. U glavi 5 ovog rada analizira se ponašanje lokalne greške diskretizacije nekih klasa diskretizacionih metoda na osnovu asimptotskog razvoja.

U najvećem broju slučajeva za približno izračunavanje greške koristi se njen prvi član u asimptotskom razvoju.

Definicija 1.1.15. Neka diskretizaciona metoda \mathcal{M} konvergira brzinom reda p ka polaznom zadatku \mathcal{P} , i neka lokalna i globalna greška diskretizacije metode \mathcal{M} dopuštaju asimpto



tsko razlaganje do reda p :

$$\mathcal{L}_n = h^p \omega_n \mathcal{L}_p u + O(h^{p+1})$$

$$\xi_n = h^p \Delta_n e_p + O(h^{p+1}) \quad \text{kad } h \rightarrow 0.$$

Elementi: $h^p \omega_n \mathcal{L}_p u \in S_n$ i $h^p \Delta_n e_p \in D_n$ nazivaju se glavni članovi odgovarajućih grešaka diskretizacije.

Asimptotsko razlaganje grešaka je bitno za Richardson-ovu metodu ekstrapolacije koja služi za uvećanje tačnosti diskretizacionih rešenja i za ocenu grešaka kod diskretizacionih rešenja.

Richardson je 1910. godine predložio postupak za uvećanje tačnosti numeričkih rešenja diferencnih i diferencijalnih jednačina. Od tada se ovaj postupak naširoko primenjuje u raznim oblastima numeričke analize pod nazivom: "Richardson-ova metoda ekstrapolacije".

Osnovna ideja Richardson-ovog postupka ekstrapolacije sastoji se u tretiranju rešenja diskretizacionog zadatka kao funkcije koraka h , tj. $\eta_n = \eta^h$. Za niz vrednosti koraka h : $h_1 < h_2 < \dots < h_r$ izračunavaju se vrednosti $\eta^{h_1}, \eta^{h_2}, \dots, \eta^{h_r}$ pa se na osnovu ovih vrednosti formira interpolaciona funkcija $\mathcal{X}(h)$ sa čvorovima $(h_\varrho, \eta^{h_\varrho})$, $\varrho = 0, \dots, r$. Intuitivno, $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{X}(h)$ trebalo bi da predstavlja tačno rešenje polaznog zadatka. Međutim, vrednosti η^{h_ϱ} u opštem slučaju pripadaju različitim prostorima. Da bi funkcija $\mathcal{X}(h)$ mogla da se definiše, mora da se definiše prostor $D_{\bar{n}}$ kojem bi pripadala sva rešenja η^{h_ϱ} . To znači da se rešenja diskretizacionog zadatka moraju razmatrati na mreži $G_{\bar{n}} = \bigcap_{j=0}^r G_j$. Dakle, rešenje uvećane tačnosti (ili ocena greške diskretizacionog rešenja) može se dobiti samo na mreži $G_{\bar{n}}$.

Definicija 1.1.16. Neka je \mathcal{M} metoda diskretizacije za polazni zadatak \mathcal{P} . Ako za određen Banach-ov prostor \bar{D} i linearno preslikavanje $\bar{\Delta} : D \rightarrow \bar{D}$ sa normom $\|\bar{\Delta}\| = 1$ postoji beskonačan skup $\bar{N} \subset N'$ i niz linearnih preslikavanja $\bar{u}_n : D_n \rightarrow \bar{D}$, $n \in \bar{N}$ takvih da važi:

$$(1.1.8) \quad \bar{u}_n \Delta_n = \bar{\Delta} \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{u}_n\| = 1$$

metoda \mathcal{M} se naziva $\bar{\Delta}$ -transmisiona, a preslikavanje \bar{u}_n

transmisiono preslikavanje.

Ako je metoda \mathcal{M} $\bar{\Delta}$ -transmisiona, a greške diskretizacije metode \mathcal{M} za zadatak \mathcal{P} dopuštaju asimptotsko razlaganje do reda q , tada na osnovu (1.1.8) važi:

$$(1.1.9) \quad \bar{u}_n \eta^h = \bar{\Delta} \sum_{j=p}^q h^j e_j + o(h^{q+1}), \quad n \in \bar{N}$$

tj. $\bar{u}_n \eta^h$ dopušta asimptotsko razlaganje u prostoru \bar{D} .

Funkcija $\chi(h)$ (koja se može strogo definisati, a što ćemo ovde izostaviti), za niz argumenata h_ρ ima vrednosti: $\eta^{h_\rho} \in \bar{D}$, ($\rho = 0, \dots, r$). Richardson-ov postupak ekstrapolacije sastoji se u tome da se izračuna:

$$\chi(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \chi(h) \in \bar{D}$$

Ako funkcija $\chi(h)$ pripada linearnom prostoru, vrednost $\chi(0)$ može se dobiti iz linearne kombinacije $\sum_{\rho=0}^r \zeta_\rho(h) \eta^{h_\rho}$ i dobijena vrednost se uzima kao aproksimacija za $\bar{\Delta}z$. Richardson-ov postupak ekstrapolacije ima smisla primenjivati ako funkcija $\chi(h)$ ima istu strukturu kao i razvoj (1.1.9), tj.

$$\chi(h) = \text{const} + o(h^p).$$

Uslovi pod kojima se može primeniti Richardson-ov postupak ekstrapolacije za jednu široku klasu zadataka matematičke fizike, detaljno se razmatraju u glavi 2 ovog rada.

1.2. O nekim klasama diskretizacionih metoda za obične diferencijalne jednačine

U radovima [16] i [20] Lambert je napravio sažete prikaze najznačajnijih dostignuća u vezi sa najpoznatijim diskretizacionim metodama za Cauchy-ev zadatak običnih diferencijalnih jednačina. Svrha ovog odeljka je da se navedu poznati rezultati u vezi sa ovim predmetom koji bi bili polazna osnova u narednim glavama. U tom smislu radovi [16] i [20] bili su inspirativni za pisanje ovog odeljka.

Neka je dat Cauchy-ev problem:

$$(1.2.1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

pri čemu $x_0 \in [a, b]$ i $y_0, y, f \in \mathbb{R}^m$.

Da bi polazni zadatak (1.2.1) imao jedinstveno rešenje, pretpostavlja se da funkcija $f(x,y)$ zadovoljava Lipschitz-ov uslov na $[a, b]$, tj. da za $x \in [a, b]$ postoji konstanta L tako da za svako konačno $y(x)$ i $\bar{y}(x)$ važi:

$$\| f(x, y(x)) - f(x, \bar{y}(x)) \| \leq L \| y(x) - \bar{y}(x) \|$$

kao i da $f(x, y)$ pripada klasi neprekidnih funkcija.

Proces diskretizacije polaznog zadatka (1.2.1) kod većine metoda zasniva se na formiranju mreže, tj. diskretnog skupa tačaka $G^h = \{ x_i \mid x_i = a + ih, i = 0, \dots, n, nh = b-a \}$ u kojima se pomoću diskretizacione metode izračunava niz vrednosti $\{ y_i \mid i = 0, \dots, n \}$, a koje predstavljaju aproksimacione vrednosti za $y(x_i)$. Vrednosti funkcije $f(x_i, y_i)$ za aproksimacionu vrednost y_i u tački x_i često će biti označena sa f_i .

Jednu od najrasprostranjenijih klasa diskretizacionih metoda za rešavanje zadatka (1.2.1) čine tzv. linearne višekoračne metode. Ove metode dobijaju se integracijom interpolacionih (ekstrapolacionih) polinoma koji su formirani nad određenim podskupom tačaka iz skupa $\{ (x_i, y_i), \mid i = 0, \dots, n \}$.

Definicija 1.2.1. Neka su poznate vrednosti $y_r = w_r$, $r = 0, \dots, k-1$ niza (y_n) . Metode pomoću kojih se preostale vrednosti niza (y_n) dobijaju iz formule:

$$(1.2.2) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i+j}$$

gde su α_j i β_j konstante $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ i $k \geq 1$, nazivaju se linearne višekoračne metode. Vrednosti $y_r = w_r$, $r = 1, \dots, k-1$ nazivaju se startne vrednosti, a k je broj koraka.

Definicija 1.2.2. Linearne višekoračne metode iz klase metoda (1.2.2) je eksplicitna ako je $\beta_k = 0$; ako je $\beta_k \neq 0$ metoda je implicitna.

Pomoću eksplicitnih metoda niz (y_n) dobija se direktno iz formule (1.2.2). U slučaju implicitnih metoda da bi se formirao niz (y_n) na svakom koraku treba rešiti jednu, u opštem slučaju, nelinearnu jednačinu.

U tablici 1.2.1 navedene su neke konkretne eksplicitne i implicitne formule Adams-ovog tipa koje će biti potrebne u

narednim glavama. Lokalna greška diskretizacije za svaku od navedenih formula je oblika $C_{p+1} y^{(p+1)}(\xi)h^{p+1}$ gde $\xi \in [x_i, x_{i+k}]$ a p je red metode. (Videti [6], [15], [21]) Broj koraka k , red metode p i koeficijent C_{p+1} takode su navedeni u tablici.

Tablica 1.2.1

№	formula	k	p	C_{p+1}
1	$y_{i+1} - y_i = hf_i$	1	1	1/2
2	$y_{i+3} - y_{i+2} = \frac{h}{12} (23f_{i+2} - 16f_{i+1} + 5f_i)$	3	3	3/8
3	$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} (f_{i+1} - f_i)$	1	2	-1/12
4	$y_{i+2} - y_{i+1} = \frac{h}{12} (5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i)$	2	3	-1/24
5	$y_{i+3} - y_{i+2} = \frac{h}{24} (9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i)$	3	4	-19/720

U praksi se retko upotrebljavaju samo eksplicitna ili samo implicitna metoda. Češće je u upotrebi par eksplicitna-implicitna metoda koji određuje novu tzv. prediktor-korektor metodu. Kao prediktor (P) koristi se eksplicitna metoda i služi za nalaženje početne aproksimacije $y_{i+k}^{(0)}$ za y_{i+k} . Ulogu korektora ima implicitna metoda pomoću koje se usavršava početna aproksimacija $y_{i+k}^{(0)}$. Korektor-komponentu ćemo označavati sa C.

Neka su α_j^* i β_j^* oznake za koeficijente u eksplicitnoj metodi, tj. prediktor-komponenti. Sa α_j i β_j označimo koeficijente u korektor-komponenti i neka, radi jednostavnijeg zapisa, obe metode imaju isti broj koraka k (što ne umanjuje opštost sledeće definicije prediktor-korektor metode).

Definicija 1.2.3. Sledećim formulama:

$$P: \alpha_k^* y_{i+k}^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{i+j}^{(r)} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{i+j}^{(r-t)}$$

$$E^r: f_{i+k}^{(s)} = f(x_{i+k}, y_{i+k}^{(s)})$$

$$(1.2.3) \quad C^r: \alpha_k y_{i+k}^{(s+1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{i+j}^{(r)} = h \beta_k f_{i+k}^{(s)} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{i+j}^{(r-t)}$$

$$s = 0, 1, \dots, r-1,$$

$$E^{1-t}: f_{i+k}^{(r)} = f(x_{i+k}, y_{i+k}^{(r)}), \text{ samo ako je } t=0;$$

određena je prediktor-korektor metoda koja se kraće označava sa $P(EC)^r E^{1-t}$. Broj iteracija r unapred je zadat.

Ukoliko broj iteracija nije unapred dat, postupak iteracije nastavlja se dok ne dođe do poklapanja dve susedne iteracije na određen broj decimala.

Za $t = 0$ iz formula (1.2.3) dobija se prva varijanta prediktor-korektor metode u oznaci $P(EC)^r E$ u kojoj se nakon iterativnog postupka u jednom čvoru izračunava vrednost

$$f(x_{i+k}, y_{i+k}^{(r)})$$

da bi se koristila prilikom računanja u sledećem čvoru.

Ta $t = 1$ dobija se druga varijanta prediktor-korektor metode u oznaci $P(EC)^r$ gde se vrednost izvoda ne izračunava nakon iterativnog postupka.

Jednu od fundamentalnih klasa metoda za rešavanje Cauchy-evog zadatka običnih diferencijalnih jednačina, čine jednokoračne metode poznate pod nazivom metode Runge Kutta.

Definicija 1.2.4. Metode za rešavanje zadatka (1.2.1) opisane formulama:

$$y_0 = \xi$$

$$y_{i+1} - y_i = h \phi(x_i, y_i, h)$$

(1.2.4)

$$\phi(x, y, h) = \sum_{\nu=1}^M c_{\nu} k_{\nu}$$

$$k_{\nu} = f(x + h a_{\nu}, y + h \sum_{\nu=1}^M b_{\nu} k_{\nu}), \nu = 1, \dots, M$$

gde su c_{ν} i $b_{\nu\gamma}$ konstante, a $a_{\nu} = \sum_{\gamma=1}^M b_{\nu\gamma}$ nazivaju se metode Runge-Kutta.

Definicija 1.2.5. Ako su koeficijenti $b_{\nu\gamma} = 0$ za $\nu \geq \gamma$ u formulama (1.2.4), metoda Runge-Kutta je eksplicitna; ako su koeficijenti $b_{\nu\gamma} = 0$ za $\nu > \gamma$, metoda je semi-implicitna; ako nijedan od prethodnih uslova nije ispunjen, metoda Runge-Kutta je implicitna.

Sve klasične metode Runge-Kutta su eksplicitne i kod njih se niz (y_n) izračunava direktno. Kod semi-implicitnih metoda na svakom koraku, u opštem slučaju, mora da se reši skup od M nelinearnih jednačina. Za implicitne metode na svakom koraku, u opštem slučaju, mora da se reši mM nelinearnih jednačina. Primetimo da su eksplicitne metode Runge-Kutta daleko češće u upotrebi u poređenju sa implicitnim, što nije slučaj kod višekoračnih metoda.

Treću, značajnu klasu metoda za rešavanje Cauchy-evog zadatka običnih diferencijalnih jednačina čine tzv. hibridne metode.

Definicija 1.2.6. Metode za rešavanje zadatka (1.2.1) u kojima se niz (y_n) formira pomoću formula:

$$(1.2.5) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i+j} + h \beta_{\nu} f_{i+\nu},$$

gde je $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $\nu = 0, \dots, k$ i $f_{i+\nu} = f(x_{i+\nu}, y_{i+\nu})$, nazivaju se k-koračne hibridne metode.

Hibridne metode predstavljaju neku vrstu kombinacija linearnih višekoračnih metoda i metoda Runge-Kutta. Po strukturi su bliske višekoračnim metodama, a zajedničko sa metodama Runge-Kutta im je da se vrednosti funkcije $f(x, y)$ izračunavaju u tačkama $x_{i+\nu}$ i $y_{i+\nu}$ gde ν nije ceo broj, tj. $x_{i+\nu} \notin (x_n)$. Tačke $x_{i+\nu}$ biraju se tako da hibridna metoda daje što je moguće veću tačnost.

Slično višekoračnim metodama i hibridne metode mogu biti korišćene kao komponente prediktor-korektor metoda.

Klase metoda za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina iz definicija 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4. i 1.2.6. ne obuhvataju sve numeričke metode za rešavanje ovog zadatka. Međutim, metode

iz opisanih klasa su najrasprostranjenije i najčešće korišćene u praktičnoj primeni.

Ocene i ponašanja grešaka mogu se istovremeno (zajednički) proučavati za sve metode opisane u ovom odeljku (izuzev druge varijante prediktor-korektor metode). Naime, pretpostavlja jući da su date startne vrednosti: $y_\nu = w_\nu$, $\nu = 0, \dots, k-1$, navedene metode mogu se opisati uopštenom formulom:

$$(1.2.6) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+j} - h \Phi_f(x_i, y_{i+k}, \dots, y_i, h) = 0.$$

Funkcija Φ_f zavisi od f i važi:

$$\Phi_{f=0}(x_i, y_{i+k}, y_{i+k-1}, \dots, y_i, h) \equiv 0.$$

Ako Φ_f zavisi od y_{i+k} , reč je o implicitnim metodama; u suprotnom, reč je o eksplicitnim metodama.

S obzirom na definiciju 1.1.7. lokalna greška diskretizacije za metode opisane formulom (1.2.6) u tački x_{i+k} je:

$$(1.2.7) \quad \mathcal{L}_{i+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{i+j}) - h \Phi_f(x_i, y(x_{i+k}), \dots, y(x_i), h).$$

(Napomenimo da postoji nekoliko varijanti definicije lokalne greške diskretizacije. Na primer, u [8] lokalna greška diskretizacije u tački x_{i+k} definiše se kao \mathcal{L}_{i+k} / h .)

Za metode opisane pomoću (1.2.6) stabilnost je proučavana iz različitih aspekata. U tom smislu za metode opisane pomoću (1.2.6) postoje razne definicije stabilnosti. (Definicija stabilnosti je, između ostalog, povezana sa normom u prostoru S_n diskretizacionog zadatka, Lipchitz-ovim uslovom za F iz odeljka 1.1. i dr. Videti [21], [34], [17].)

Navodimo neke definicije stabilnosti za metode iz klase (1.2.6).

Definicija 1.2.7. Neka su $\{\delta_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ poremećaji i $\{z_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ izmene numeričkog rešenja zadatka (1.2.1), definisani na sledeći način:

$$z_\nu = w_\nu(h) + \delta_\nu \quad \nu = 0, \dots, k-1$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{i+j} = h \Phi_f(x_i, z_{i+k}, \dots, z_i, h) + \delta_{i+k}$$

Dalje, neka su (δ_n) i (δ_n^*) dva niza poremećaja, a (z_n) i (z_n^*)

dva niza izmenjenih numeričkih rešenja zadatka (1.2.1). Ako postoje konstante S i $h_0 \neq 0$ tako da za svako $h \in (0, h_0]$ važi: $\|z_i - z_i^*\| < S\varepsilon$ kadgod je $\|\delta_i - \delta_i^*\| < \varepsilon$, $i = 0, \dots, n$, za metodu (1.2.6) kažemo da je nula-stabilna.

U definiciji 1.2.7. koristi se termin nula-stabilna metoda da bi se naglasilo da je reč o stabilnosti za h blisko nuli.

Definicija 1.2.8. Za metodu opisanu pomoću (1.2.6), karakterističan polinom se definiše kao:

$$(1.2.7) \quad P(\zeta) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j \quad .$$

Definicija 1.2.9. Za metodu opisanu pomoću (1.2.6) kažemo da zadovoljava koreni uslov ako svi koreni karakterističnog polinoma $P(\zeta)$ iz (1.2.7) leže unutar jediničnog kruga ili na jediničnoj kružnici, pri čemu su svi koreni na jediničnoj kružnici prosti. Za metode klase (1.2.6) kažemo da zadovoljavaju strogi koreni uslov ako njihov karakteristični polinom $p(\zeta)$ ima jedan prost koren $+1$, a sve ostale korene unutar jediničnog kruga.

Sledeće dve teoreme povezane su sa konvergencijom metoda opisanih pomoću (1.2.6). (Videti [16] i [20] .)

Teorema 1.2.1. Metoda iz klase (1.2.6) je nula-stabilna ako i samo ako zadovoljava koreni uslov.

Teorema 1.2.2. Metoda iz klase (1.2.6) je konvergentna ako i samo ako je saglasna i nula-stabilna.

Ako je neka metoda konvergentna, ne znači da je uvek pogodna za praktičnu primenu. Nula-stabilnost kazuje da je obezbeđeno stabilno ponašanje greške kad $h \rightarrow 0$. Ovo ne znači da će metoda biti stabilna za neku fiksiranu vrednost koraka h (različitu od nule). Kao kontra-primer navedimo metodu iz klase (1.2.6) poznatu pod nazivom Simpson-ovo pravilo:

$$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3} (f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i)$$

koja ni za jedno pozitivno, fiksirano h ne obezbeđuje stabilno širenje greške.

Javlja se potreba za definisanjem neke druge vrste

stabilnosti koja bi garantovala stabilno ponašanje greške i za fiksiranu vrednost koraka h . Nažalost, nemoguće je definisati stabilnost uz ovaj zahtev, a da se ne uzme u obzir konkretan Cauchy-ev zadatak. Definicije apsolutne i relativne stabilnosti uzimaju u obzir zahtev da korak h bude fiksiran i pozitivan, pri čemu se Cauchy-ev zadatak razmatra na unapred određenoj modelnoj jednačini. Ovde nećemo navoditi ove definicije stabilnosti (videti [16] i [20]), već ćemo definisati samo strogo-stabilne metode koje ćemo koristiti u narednim glavama.

Definicija 1.2.10. Za metodu iz klase (1.2.6) kažemo da je strogo stabilna ako je saglasna i zadovoljava strogi koreni uslov.

Stroga stabilnost metode obezbeđuje postojanje nepraznog regiona apsolutne stabilnosti, a što strogo stabilne metode čini praktično primenljivim.

Adams-ove metode imaju karakteristični polinom oblika:

$$P(\zeta) = \alpha_k \zeta^k - \alpha_{k-1} \zeta^{k-1}$$

i široku oblast apsolutne stabilnosti. Znači, s obzirom na način prostiranja greške, Adams-ove metode su pogodne za praktičnu primenu. U praksi Adams-ove metode se upotrebljavaju obično u okviru prediktor-korektor metode. Prednosti prediktor-korektor metoda zasnivaju se na jednostvanom obliku lokalne greške diskretizacije za prediktor i korektor, relativno velikoj oblasti apsolutne stabilnosti i relativno jednostavnoj implementaciji na računarima. Nedostaci su im: neophodnost obezbeđivanja startnih vrednosti i nepogodnost za izmenu dužine koraka h . Zbog ovih nedostataka prediktor-korektor metoda, dugi niz godina bile su popularnije metode Runge-Kutta u poređenju sa njima. Međutim, formule za ocenu globalne greške diskretizacije kod metoda Runge-Kutta su komplikovane i nepodesne što je sa gledišta ocene greške priličan nedostatak. Kod savremenih algoritama nedostaci prediktor-korektor metoda lakše se prevazilaze, nego li nedostaci drugih metoda. Stoga su ove metode danas vrlo često u upotrebi.

Iz prethodnog dela zaključuje se da pojedine metode iz klase (1.2.6) imaju prednosti nad drugim metodama iz iste klase ako im se jednostavnije nalazi i ocenjuje lokalna, odnosno globalna greška diskretizacije.

Postojeće metode za ocenu lokalne greške diskretizacije

uglavnom se zasnivaju na njenom asimptotskom razlaganju. Prilikom ocenjivanja greške najčešće se izračunava glavni član, a retko kada se uzimaju i sleseći članovi.

Najčešće korišćene metode za ocenu lokalne greške diskretizacije su: Richardson-ova metoda ekstrapolacije, metoda umetanja i Milne-ova metoda. (Videti [21], [31], [14].)

Richardson-ova metoda ekstrapolacije izložena je uopšteno u odeljku 1.1. Ovo je metoda koja je najčešće primenjivana za ocenu greške, mada ne daje uvek najbolje rezultate.

Osnovna ideja metode umetanja je da se numeričko rešenje izračunava u istom čvoru metodom reda p i metodom reda $p+1$. Glavni član greške metode reda p , u čvorovima gde su izračunate numeričke vrednosti, procenjuje se oduzimanjem dobijenih numeričkih rešenja. Svakako da nije baš racionalno primenjivati dve numeričke metode da bi se ocenila greška na numeričkom rešenju metode koja je nižeg reda. Međutim, glavna karakteristika metode umetanja je da se prilikom primene metode reda $p+1$ koriste rezultati izračunavanja vršenih prilikom primene metode reda p . Ovo se pre svega odnosi na izračunavanje vrednosti funkcije $f(x, y)$. Na taj način proces izračunavanja je znatno kraći od procesa u kojem bi se metode reda p i $p+1$ primenjivale nezavisno jedna od druge. Metoda umetanja daje dobre rezultate za jednokoračne metode diskretizacije.

Milne-ova metoda je najčešće korišćena za ocenu greške prediktor-korektor metode. (Videti [14] i [21].)

Pored pomenutih metoda za ocenu lokalne greške diskretizacije, postoji i niz specifičnih metoda koje se odnose na uže klase metoda diskretizacije.

Za ocenu globalne greške diskretizacije postoji više načina. U knjizi [21] navedene su formule pomoću kojih se ocenjuje globalna greška diskretizacije za jednu specijalnu klasu linearnih višekoračnih metoda. Ocena lokalne greške diskretizacije za opšti slučaj linearnih višekoračnih metoda razmatrana je u [14].

Jedan uopšten prisup u ocenjivanju globalne greške diskretizacije (koji se ne odnosi samo na Cauchy-ev problem) poznat je pod imenom metoda Zadunaisky. Ova metoda ukratko je opisana u [20]. Za ocenu globalne greške diskretizacije mogu se koristiti i dvostrane aproksimacione metode o kojima će više biti reči u narednom odeljku.

1.3. Dvostrane aproksimacije rešenja Cauchy-evog zadatka za obične diferencijalne jednačine

Ideja o dvostarnoj aproksimaciji nepoznate veličine potiče još iz perioda Archimedes-a. Sa razvojem matematičke analize, dvostrane aproksimacije se upotrebljavaju kako u teorijskim razmatranjima, tako i u praktičnim izračunavanjima. Međutim, elektronska računarska tehnika najviše je uticala na široku primenu metoda koje se zasnivaju na dvostranim aproksimacijama. Šezdesetih godina ovog veka nastala je i posebna grana matematike u čijoj su osnovi dvostrane aproksimacije - intervalna analiza. U intervalnoj analizi uopštava se pojam broja pomoću pojma interval. Umesto operisanja sa brojevima, operiše se sa intervalima i krajnji rezultat dobija se u obliku intervala . ([27] , [33]). U intervalnoj analizi koristi se specijalna aritmetika, a postoje i posebne metode intervalne analize. Na primer, poznata je Moore-ova metoda za rešavanje Cauchy-evog zadatka običnih diferencijalnih jednačina ([33]).

Između dvostarnih aproksimacionih metoda klasične i funkcionalne analize s jedne strane, i metoda intervalne analize s druge strane, može se uočiti razlika. Međutim, za pojedine metode moglo bi se reći da se nalaze na granici i teško ih je svrstati u jednu od pomenutih klasa.

Glavni motiv za razvijanje dvostranih aproksimacionih metoda je nastojanje da se kroz proces računanja kontroliše razlika (greška) između tačnog rešenja i dobijenih aproksimacija. Koja vrsta greške se kontroliše pomoću dvostranih aproksimacionih metoda?

Korišćenjem intervalne aritmetike potpuno je pod kontrolom greška izračunavanja. U zavisnosti od korišćene metode intervalne analize, može da se kontroliše globalna greška diskretizacije, a samim tim i lokalna. Dvostrane metode klasične i funkcionalne analize pogodne su za ocenjivanje lokalne greške diskretizacije. Ustvari, za dvostarne aproksimacione metode karakteristično je da su praktično primenljive ako ispunjavaju nekoliko uslova od kojih su posebno značajna sledeća dva:

- (a) tačno rešenje se uvek nalazi između gornje i donje granice koje se određuju aproksimacionim metodama;

(b) razlika između finalne gornje i donje aproksimacije nije velika.

Metode intervalne analize su determinističkog karaktera, tj. kod ovih metoda uslov (a) treba da je uvek ispunjen. Nažalost, postoje i takvi problemi (odnosno algoritmi za rešavanje pojedinih problema) kod kojih metode intervalne analize ne mogu da zadovolje uslov (b). To praktično znači da za rešavanje takve klase zadataka ne mogu uspešno da se primenjuju metode intervalne analize. (Videti [29]); zato su od značaja dvostrane aproksimacione metode klasične i funkcionalne analize.

U glavama 3 i 4 biće razmatrane dvostrane aproksimacione metode za rešavanje Cauchy-evog zadatka (1.2.1). U glavi 3 proučavani su problemi koji se javljaju prilikom diskretizacije Čapliginove metode, a glava 4 sadrži opis jedne dvostrane prediktor-korektor metode. Stoga navedimo neke poznate rezultate u vezi sa Čapliginovom metodom i dvostranim metodama uopšte.

Čapliginova metoda je analitička metoda prvobitno predložena za približno rešavanje Cauchy-evog zadatka običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Kasnije je metoda uopštena na Banach-ove prostore ([19],[37]) pomoću raznih diferencijalnih operatora. To su pretežno teorijska razmatranja, dok o praktičnim primenama Čapliginove metode nema mnogo radova. Postoje uopštenja Čapliginove metode na obične diferencijalne jednačine višeg reda ([6]), ali njihova primena je skopčana sa priličnim teškoćama pa ih nećemo nadalje pominjati.

Neka je dat Cauchy-ev problem (1.2.1) i pretpostavimo da postoji rešenje problema (1.2.1) na intervalu $[x_0, b]$, da je $f(x, y)$ neprekidna funkcija i ima neprekidne izvode:

$$(1.3.1) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

u oblasti rešenja Cauchy-evog problema.

Teorema 1.3.1. Neka je

$$I(y) = y' - f(x, y)$$

diferencijalni operator koji odgovara diferencijalnoj jednačini (1.2.1) i $y(x)$ rešenje problema (1.2.1). Ako funkcija $u = u(x) \in C^1$ zadovoljava uslov:

$$I(u) \leq 0 \quad \text{za} \quad x_0 \leq x \leq b \quad \text{i} \quad u(x_0) = y_0$$

tada na intervalu $[x_0, b]$ važi nejednakost:

$$u \leq y .$$

Analogno, ako je $v = v(x) \in C^1$ i ispunjava uslov:

$$I(v) \geq 0 \text{ za } x_0 \leq x \leq b \text{ i } v(x_0) = y_0$$

tada na intervalu $[x_0, b]$ važi nejednakost:

$$y \leq v .$$

Dokaz navedene teoreme može se naći u [10] .

Na teoremi 1.3.1. zasniva se Čapliginova metoda za približno rešavanje zadatka (1.2.1).

Neka su poznate funkcije $u_0(x)$ i $v_0(x)$ tako da važi:

$$(1.3.2) \quad u_0(x) < y(x) < v_0(x)$$

za svako $x \in [x_0, b]$. Takođe, neka važi:

$$(1.3.3) \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(x, y(x))} > 0 \text{ u oblasti } [x_0, b] \times [u_0(x), v_0(x)]$$

Pod navedenim pretpostavkama linearni Cauchy-evi problemi:

$$u'_{k+1} = f(x, u_k(x)) + \frac{\partial f(x, u_k(x))}{\partial y} (u_{k+1}(x) - u_k(x))$$

$$\left(\begin{array}{l} 1. \\ 3. \\ 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} u_{k+1}(x_0) = y_0 \\ v'_{k+1} = f(x, u_k(x)) + \left\{ \frac{f(x, v_k(x)) - f(x, u_k(x))}{v_k(x) - u_k(x)} \right\} (v_{k+1}(x) - u_k(x)) \\ v_{k+1}(x_0) = y_0 \end{array}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

imaju, redom, rešenja $u_{k+1}(x)$ i $v_{k+1}(x)$ tako da ako razlika $v_0(x) - u_0(x)$ nije velika za $x \in [x_0, b]$ važi:

$$(1.3.5) \quad u_0(x) \leq u_1(x) \leq \dots \leq u_{k+1}(x) \leq y(x) \leq v_{k+1}(x) \leq \dots \leq v_1(x) \leq v_0(x) .$$

Za aproksimacije $u_{k+1}(x)$ i $v_{k+1}(x)$ važi Luzinova ocena greške (videti [24]):

$$(1.3.6) \quad |v_{k+1}(x) - u_{k+1}(x)| < \frac{C}{2^{2k}} \text{ za } x \in [x_0, b]$$

gde je C neka realna konstanta.

Brzina konvergencije aproksimacija $u_k(x)$ i $v_k(x)$ ka tačnom rešenju $y(x)$ je vrlo velika što se vidi iz relacije (1.3.6).

Upravo zbog ove velike brzine konvergencije Čapliginova metoda je predmet interesovanja i proučavanja matematičara. (Detaljnije o Čapliginovoj metodi videti u [6], [10] i [9].)

Navedimo neke karakteristike dvostranih aproksimacionih metoda koje se dobijaju kao modifikacije poznatih numeričkih metoda, a koje će nam biti potrebne u glavi 4.

Klasične numeričke metode za rešavanje zadatka (1.2.1) ponekad se mogu modifikovati u dvostrane aproksimacione metode na osnovu oblika glavnog člana u asimptotskom razvoju lokalne greške diskretizacije. (Videti [18], [22].) Naime, ako se lokalna greška diskretizacije neke numeričke metode može predstaviti u obliku:

$$(1.3.7) \quad \mathcal{L}(h) = \rho h^{s+1} \Psi(f) + o(h^{s+2})$$

gde je $\rho \neq 0$ nekakva konstanta, a $\Psi(f)$ određen operator, onda se ova numerička metoda ponekad jednostavno modifikuje u dvostranu metodu. Gornja i donja aproksimacija biraju se tako da u jednom slučaju greška bude oblika:

$$\mathcal{L}(h) = - \rho h^{s+1} \Psi(f) + o(h^{s+2}),$$

a u drugom slučaju, oblika:

$$\mathcal{L}(h) = + \rho h^{s+1} \Psi(f) + o(h^{s+2}).$$

Funkcija $f(x,y)$ mora da zadovoljava određene uslove o postojanju i neprekidnosti izvoda do određenog reda.

Jasno, modifikacije poznatih jednostranih numeričkih metoda u dvostrane mogu biti izvršene i na neki drugi način. U glavi 4 predložen je jedan algoritam za realizaciju dvostrane prediktor-korektor metode gde se kao prediktor i korektor koriste modifikovane klasične metode numeričke analize.

2. RICHARDSON-OVA METODA EKSTRAPOLACIJE

2.1. Primena Richardson-ove metode ekstrapolacije

Od kada je nastala pa do danas, Richardson-ova metoda ekstrapolacije je primenjivana u raznim delovima numeričke analize. Metoda je i danas vrlo aktuelna. Kao potvrda za to služi veliki broj radova objavljen u poslednje vreme (navedimo samo neke: [2] , [7] , [11] , [26] , [32]) u kojima se direktno ili indirektno proučava ova metoda.

Richardson-ova metoda ekstrapolacije upotrebljava se u kombinaciji sa drugim numeričkim metodama za rešavanje zadataka:

- (1) uvećanje tačnosti dobijenih numeričkih rešenja;
- (2) ocene grešaka nad numeričkim rešenjima.

Kada se Richardson-ova metoda ekstrapolacije upotrebljava za ocenu grešaka nad numeričkim rešenjima, pretpostavlja se da su dominantne greške diskretizacije, a da je malo uticajna greška računanja.

Zadaci (1) i (2) povezani su tzv. paradoksom Richardson-ovog postupka ekstrapolacije. (Videti [34] .) Naime, ili se sve informacije o rešenju koriste za dobijanje najtačnije mogućeg numeričkog rešenja bez ocene greške, ili se zadržava manje tačno rešenje uz ocenu greške.

Da bi se Richardson-ov postupak primenio za rešavanje jednog od pomenutih zadataka, treba unapred znati da li je dopustiva primena ovog postupka, tj. da li će postupak dati željeni rezultat. Na osnovu razmatranja u odeljku 1.1. to bi značilo da treba ispitati da li postoji asimptotsko razlaganje lokalne (globalne) greške diskretizacije.

1979. godine Marčuk i Šajdurov objavili su monografiju 26 o primeni Richardson-ove metode ekstrapolacije za uvećanje tačnosti numeričkih rešenja zadataka matematičke fizike kada se rešenja dobijaju pomoću diferencnih shema. U pomenutoj monografiji se

detaljno proučavaju uslovi za primenu Richardson-ovog postupka ekstrapolacije za određene klase zadataka. Za svaki od razmatranih slučajeva u [26] primena Richardson-ovog postupka ekstrapolacije zasniva se na teoremi o razlaganju.

U sledećem odeljku ovog rada formulisane su dve teoreme koje predstavljaju uopštenje teoreme o razlaganju iz monografije [26].

2.2. Uopštenja teoreme o razlaganju za Richardson-ovu metodu ekstrapolacije

Neka je dat polazni zadatak:

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ll} Lu = f & u \text{ u } D \\ \ell u = g & \text{na } G \end{array} .$$

L i ℓ su linearni diferencijalni operatori, D je ograničena oblast u n -dimenzionalnom prostoru R^n ($n \geq 1$), G je granica oblasti D ili jedan njen deo. Funkcije f, g i u definisane su u D na G i na \bar{D} , respektivno. (\bar{D} je oznaka za zatvaranje oblasti D .)

Označimo sa $M_k(D)$, $N_k(G)$ i $P_k(\bar{D})$ klase funkcija iz prostora funkcija definisanih na skupovima D , G i \bar{D} koje zavise od celobrojnog parametra $k \geq 0$ i čiji su elementi funkcije f, g i u , redom.

Neka je u tačno rešenje zadatka (2.2.1) i neka je $\bar{D}_h \subset \bar{D}$ mreža sa promenljivim parametrom h . Označimo sa u^h rešenje diskretizacionog zadatka za polazni zadatak (2.2.1), tj. približno rešenje u čvorovima mreže \bar{D}_h .

Richardson-ova metoda može se primeniti u ovom slučaju ako je moguće razlaganje:

$$(2.2.2) \quad u^h = u + \omega^h$$

pri čemu funkcija ω^h za svako fiksirano $x \in D$ mora biti specijalnog oblika u odnosu na h .

Navedimo dovoljne uslove za postojanje razlaganja tipa (2.2.2) i u zavisnosti od uslova, formulišimo teoreme o razlaganju. Uslovi se formulišu na sličan način kao u monografiji [26].

Uslov 1 Za svako celobrojno k , $0 \leq k \leq m$ i svaki par funkcija $f \in M_k(D)$, $g \in N_k(G)$ postoji jedinstveno rešenje $u \in P_k(\bar{D})$

polaznog zadatka (2.2.1).

Neka su \bar{D}_h , G_h i $\overset{\circ}{D}_h$ diskretni skupovi koji predstavljaju analogne skupove skupovima \bar{D} , G i D , respektivno. ($\bar{D}_h \subset \bar{D}$, $G_h \subset G$, $D_h \subset D$). Diskretizacijom polaznog zadatka (2.2.1) dobija se sistem jednačina oblika:

$$(2.2.3) \quad \begin{array}{l} L_h u^h = f \\ \ell_h u^h = g \end{array} \quad \begin{array}{l} u \\ \text{na} \end{array} \quad \begin{array}{l} \overset{\circ}{D}_h \\ G_h \end{array}$$

L_h i ℓ_h su linearni algebarski operatori. U diskretizovane linearne prostore mrežnih funkcija, definisanih na \bar{D}_h , G_h i $\overset{\circ}{D}_h$

uvodimo norme: $\|\cdot\|_{\bar{D}_h}$, $\|\cdot\|_{G_h}$, $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{D}_h}$, redom.

Uslov 2. Ako je funkcija ψ^h definisana na \bar{D}_h i predstavlja rešenje zadatka:

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{l} L_h \psi^h = f^h \\ \ell_h \psi^h = g^h \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{na} \\ \text{na} \end{array} \quad \begin{array}{l} \overset{\circ}{D}_h \\ G_h \end{array}$$

gde su f^h i g^h funkcije definisane u oblastima $\overset{\circ}{D}_h$ i G_h , redom, tada važi ocena:

$$(2.2.5) \quad \|\psi^h\|_{\bar{D}_h} \leq c \left(\|f^h\|_{\overset{\circ}{D}_h} + \|g^h\|_{G_h} \right)$$

Uslov 3a Za svaku funkciju $\varphi \in P_k(\bar{D})$ gde je $0 \leq k \leq m$ važi razlaganje²⁾:

$$\begin{array}{l} L_h \varphi = L\varphi + \sum_{j=\bar{k}}^k \alpha(h)^j a_j + \vartheta^h \quad \text{na } \overset{\circ}{D}_h \\ \ell_h \varphi = \ell\varphi + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha(h)^j b_j + \vartheta^h \quad \text{na } G_h \end{array}$$

pri čemu je $\alpha(x) \in C$ monotono rastuća funkcija i $\alpha(h) \geq 0$ za $h \geq 0$; Funkcije a_j i b_j ne zavise od h , $a_j \in M_{k-j}(D)$, $b_j \in N_{k-j}(G)$, a za ostatke ϑ^h i ϑ^h važe ocene:

2) Za zbir u kome je gornja granica manja od donje pretpostavlja se da je nula.

$$\| \phi^h \|_{\overset{\circ}{D}_h} \leq c_1 \alpha(h)^{k+\beta}, \quad \| \psi^h \|_{D_h} \leq c_2 \alpha(h)^{k+\beta}$$

gde konstante c_1 i c_2 ne zavise od h , a β od h , k i \mathcal{C} .

Teorema 2.2.1. Neka za polazni zadatak (2.2.1) važe uslovi 1,2 i 3a, pri čemu $f \in M_m(D)$, $g \in N_m(D)$. Tada za diskretizaciono rešenje u^h važi razlaganje:

$$u^h = u + \sum_{j=1}^m \alpha(h)^j v_j + \eta^h \quad \text{na } \bar{D}_h.$$

Funkcije v_j ne zavise od h , $v_j \in P_{m-j}(D)$, a za ostatak η^h važi ocena:

$$\| \eta^h \|_{\bar{D}_h} \leq c_3 \alpha(h)^{m+\beta}$$

gde konstanta c_3 ne zavisi od h .

Dokaz teoreme 2.2.1. analogan je dokazu teoreme o razlaganju u [26] pa ga nećemo navoditi.

U radu [13] uopštava se metoda ekstrapolacije Neville-a pomoću razlaganja:

$$(2.2.6) \quad T(h) = T(0) + \sum_{j=0}^m a_j e_j(h) + R_m(h)$$

gde su $e_j(h)$ poznate funkcije ($j = 1, \dots, m$) za koje važi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e_{j+1}(h)}{e_j(h)} = 0, \quad R_m(h) = O(e_{m+1}(h)),$$

a $T(0)$, a_1, \dots, a_m nepoznate veličine.

U radu [7] dokazano je postojanje veze između raznih metoda ekstrapolacije i može se videti koja vrsta veze postoji između metode ekstrapolacije Richardson-a i Neville-a.

Teoremu o razlaganju iz [26] moguće je uopštiti tako da važi i za razlaganje (2.2.6) pri čemu funkcije $e_j(h)$ treba da ispunjavaju neke dodatne uslove. Tako umesto uslova 3a treba da bude ispunjen uslov 3b.

Uslov 3b Za svaku funkciju $\mathcal{C} \in P_k(\bar{D})$, $0 \leq k \leq m$ važi razlaganje:

$$(2.2.7) \quad L_h \mathcal{C} = L \mathcal{C} + \sum_{j=1}^k e_j(h) a_j + \phi^h \quad \text{na } \overset{\circ}{D}_h$$

$$l_h \varphi = l \varphi + \sum_{j=1}^k e_j(h) b_j + \varrho^h \quad \text{na } G_h,$$

gde funkcije a_j, b_j ne zavise od h i $a_j \in M_{k-j}(D)$, $b_j \in N_{k-j}(D)$. Funkcije e_j ($j = 0, \dots, k+1$) su neprekidne i ispunjavaju uslove:

$$\begin{aligned} 1^\circ & e_0(h) = 1, \\ 2^\circ & e_{j+1}(h) = o(e_j(h)) \quad \text{kad } h \rightarrow 0, \\ 3^\circ & \frac{e_{j-i}(h) e_i(h)}{e_j(h)} = k_{ij} + o(e_{m-j-1}(h)) \quad \text{kad } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pri čemu konstante k_{ij} ne zavise od h , ($i = 0, \dots, j$), a za ostatke ϕ^h i ϱ^h važi:

$$(2.2.8) \quad \|\phi^h\|_{\bar{D}_h} \leq c_4 \|e_{k+1}\|_C, \quad \|\varrho^h\|_{G_h} \leq c_5 \|e_{k+1}\|_C$$

kad $h \rightarrow 0$, gde c_4 i c_5 ne zavise od h , a $\|\cdot\|_C$ je norma u prostoru neprekidnih funkcija.

Teorema 2.2.2. Neka su za zadatke (2.2.1) i (2.2.3) ispunjeni uslovi 1, 2 i 3b, tako da $f \in M_m(D)$ i $g \in N_m(G)$. Tada za diskretizaciono rešenje u^h važi razlaganje:

$$(2.2.9) \quad u^h = u + \sum_{j=1}^m e_j(h) v_j + \eta^h \quad \text{na } \bar{D}_h.$$

Funkcije v_j ne zavise od h , $v_j \in P_{m-j}(\bar{D})$, a za ostatak η^h važi ocena:

$$\|\eta^h\|_{\bar{D}_h} \leq c_6 \|e_{m+1}\|_C \quad \text{kad } h \rightarrow 0.$$

Dokaz . Neka je $v_j \in P_{m-j}(\bar{D})$ proizvoljan niz funkcija ($j = 1, \dots, m$), nezavisan od h . Definišimo diskretizacionu funkciju η^h na sledeći način:

$$(2.2.10) \quad \eta^h = u^h - u - \sum_{j=1}^m e_j(h) v_j \quad \text{na } \bar{D}_h.$$

Zamenjujući u^h iz (2.2.10) u (2.2.3), dobijamo:

$$(2.2.11) \quad \begin{aligned} L_h u + \sum_{j=1}^m e_j(h) L_h v_j + L_h \eta^h &= f \quad \text{na } \bar{D}_h \\ l_h u + \sum_{j=1}^m e_j(h) l_h v_j + l_h \eta^h &= g \quad \text{na } G_h. \end{aligned}$$

Saglasno uslovu 3b dobija se:

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} L_h u &= f + \sum_{i=1}^m e_i(h) a_{0,i} + \phi_0^h & \text{na} & \mathring{D}_h \\ l_h u &= g + \sum_{i=1}^m e_i(h) b_{0,i} + \psi_0^h & \text{na} & G_h \end{aligned}$$

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} L_h v_j &= L v_j + \sum_{i=1}^{m-j} e_i(h) a_{j,i} + \phi_j^h & \text{na} & \mathring{D}_h \\ l_h v_j &= l v_j + \sum_{i=1}^{m-j} e_i(h) b_{j,i} + \psi_j^h & \text{na} & G_h \end{aligned}$$

gde $a_{j,i} \in M_{m-j-i}(D)$, $b_{j,i} \in N_{m-j-i}(G)$, $a_{j,i}$ i $b_{j,i}$ ne zavise od h , a za ostatke važe nejednakosti:

$$(2.2.14) \quad \|\phi_j^h\|_{D_h} \leq c_{j,1} \|e_{m-j+1}\|_C, \|\psi_j^h\|_{G_h} \leq c_{j,2} \|e_{m-j+1}\|_C,$$

gde konstante $c_{j,1}$ i $c_{j,2}$ ne zavise od h . Iz (2.2.12), (2.2.13) i (2.2.11) dobijamo:

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} f + \sum_{j=1}^m e_j(h) L v_j + \sum_{j=0}^m e_j(h) \sum_{i=1}^{m-j} e_i(h) a_{j,i} + \sum_{j=0}^m e_j(h) \phi_j^h \\ + L_h \eta^h = f \quad \text{na} \quad \mathring{D}_h, \\ g + \sum_{j=1}^m e_j(h) l v_j + \sum_{j=0}^m e_j(h) \sum_{i=1}^{m-j} e_i(h) b_{j,i} + \sum_{j=0}^m e_j(h) \psi_j^h \\ + l_h \eta^h = g \quad \text{na} \quad G_h. \end{aligned}$$

Uvedimo oznake:

$$(2.2.16) \quad \xi^h = \sum_{j=0}^m e_j(h) \phi_j^h, \quad \zeta^h = \sum_{j=0}^m e_j(h) \psi_j^h;$$

koristeći (2.2.14) i svojstvu 3^0 iz uslova 3b (za funkcije e_j , $j = 0, \dots, k+1$), dobijamo:

$$\|\xi^h\|_{D_h} \leq c_7 \|e_{m+1}\|_C, \quad \|\zeta^h\|_{G_h} \leq c_8 \|e_{m+1}\|_C \quad \text{kad } h \rightarrow 0.$$

Konstante c_7 i c_8 ne zavise od h .

Transformišimo jednakosti (2.2.15) na sledeći način:

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^m e_j(h) \left[L v_j + \sum_{i=1}^j \frac{e_j(h) e_{j-i}(h)}{e_j(h)} a_{j-i,i} \right] + \xi^h + L_h \eta^h = 0 \quad \text{na} \quad \mathring{D}_h \\ \sum_{j=1}^m e_j(h) \left[l v_j + \sum_{i=1}^j \frac{e_j(h) e_{j-i}(h)}{e_j(h)} b_{j-i,i} \right] + \zeta^h + l_h \eta^h = 0 \quad \text{na} \quad G_h. \end{aligned}$$

Iz uslova 3b (svojstvo 3^0) i (2.2.17) nalazimo:

$$(2.2.18) \quad \sum_{j=1}^m e_j(h) \left[Lv_j + \sum_{i=1}^j k_{ij} a_{j-i,i} \right] + \xi^h + \xi_1^h + L_h \eta^h = 0 \quad \text{na } \overset{\circ}{D}_h,$$

$$\sum_{j=1}^m e_j(h) \left[\ell v_j + \sum_{i=1}^j k_{ij} b_{j-i,i} \right] + \zeta^h + \zeta_1^h + \ell_h \eta^h = 0 \quad \text{na } G_h,$$

pri čemu je:

$$\| \xi_1^h \|_{\overset{\circ}{D}_h} = \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j a_{j-i,i} e_j(h) \circ (e_{m-j+1}(h)) \right\|_{\overset{\circ}{D}_h} \leq c_9 \| e_{m+1} \|_C,$$

$$\| \zeta_1^h \|_{G_h} = \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j b_{j-i,i} e_j(h) \circ (e_{m-j+1}(h)) \right\|_{G_h} \leq c_{10} \| e_{m+1} \|_C,$$

kad $h \rightarrow 0$. Konstante c_9 i c_{10} ne zavise od h . Na osnovu ocene za ξ_1^h i ζ_1^h dobijamo:

$$(2.2.19) \quad \begin{aligned} \| \xi_1^h + \xi^h \|_{\overset{\circ}{D}_h} &\leq c_{11} \| e_{m+1} \|_C, & c_{11} &= c_9 + c_7 \text{ i} \\ \| \zeta_1^h + \zeta^h \|_{G_h} &\leq c_{12} \| e_{m+1} \|_C, & c_{12} &= c_8 + c_{10} \text{ kad } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Funkcije $v_j \in P_{m-j}(\overline{D})$, ($j=1, \dots, m$) nalazimo iz jednakosti:

$$(2.2.20) \quad \begin{aligned} Lv_j &= - \sum_{i=1}^j k_{ij} a_{j-i,i} && \text{u } D \\ \ell v_j &= - \sum_{i=1}^j k_{ij} b_{j-i,i} && \text{na } G. \end{aligned}$$

Dokažimo indukcijom da je to moguće. Zaista za $j=1$ imamo:

$$\begin{aligned} Lv_1 &= - k_{11} a_{0,1} && \text{u } D \\ \ell v_1 &= - k_{11} b_{0,1} && \text{na } G. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir uslov 1, funkcija v_1 određuje se na jedinstven način i $v_1 \in P_{m-1}(\overline{D})$, jer prema pretpostavci u uslovu 3b važi:

$a_{0,1} \in M_{m-1}(D)$, $b_{0,1} \in N_{m-1}(G)$, a k_{11} je konstanta iz uslova 3b.

Pretpostavimo da smo odredili funkcije $v_j \in P_{m-j}(D)$ za $j = 1, \dots, k$, a $k = 1, \dots, m$. Na osnovu uslova 3b za funkcije v_j ($j = 1, \dots, k$) važe k razlaganja oblika (2.2.13) tako da

$$(2.2.21) \quad a_{j,i} \in M_{m-j-i}(D), \quad b_{j,i} \in N_{m-j-i}(G).$$

Za $j = k+1$ dobijamo:

$$(2.2.22) \quad Lv_{k+1} = - \sum_{i=1}^{k+1} k_{ij} a_{k-i+1,i} \quad \text{u } D$$

$$\ell v_{k+1} = - \sum_{i=1}^{k+1} k_{ij} b_{k-i+1,i} \quad \text{na } G.$$

U (2.2.22) desne strane pripadaju prostorima M_{m-k-1} i $N_{m-k-1}(G)$, redom, (k_{ij} su konstante koje ne zavise od h i x prema uslovu 3b). Na osnovu uslova 1 zadatak (2.2.22) ima jedinstveno rešenje $v_{k+1} \in P_{m-k-1}(\bar{D})$ koje ne zavise od h zato što funkcije $a_{k-i+1,i}$ i $b_{k-i+1,i}$ ($i = 1, \dots, k+1$) ne zavise od h .

Ako sve funkcije $v_j \in P_{m-j}(\bar{D})$, ($j = 1, \dots, m$) odredimo na opisan način, na osnovu (2.2.20) relacija (2.2.18) postaje:

$$\begin{aligned} L_h \eta^h &= - (\xi^h + \xi_1^h) & \text{na } \overset{\circ}{D}_h \\ \ell_h \eta^h &= - (\zeta^h + \zeta_1^h) & \text{na } G_h, \end{aligned}$$

kada $h \rightarrow 0$. Uslov 2 obezbeđuje nejednakost:

$$\|\eta^h\|_{\bar{D}_h} \leq c_{13} (\|\xi^h + \xi_1^h\|_{D_h} + \|\zeta^h + \zeta_1^h\|_{G_h}) \text{ kad } h \rightarrow 0.$$

Ocena za η^h u teoremi 2.2.2. sledi iz (2.2.19) pri čemu je $c_6 = c_{13}(c_{11} + c_{12})$, a razlaganje (2.2.9) sa željenim svojstvima dobija se iz (2.2.10). Time je teorema 2.2.2. dokazana.

Za $\alpha(h) = h$ iz teoreme 2.2.1 u ovom radu, dobija se teorema 2.1 iz monografije [26]; takođe za $e_i(h) = h^i$ iz teoreme 2.2.2. u ovom radu sledi teorema 2.1 iz [26].

Kako se u praksi primenjuje Richardson-ova metoda ekstrapolacije može se naći u velikom broju knjiga; pomenimo [16], [3] [34] i [26]. Specijalno u knjigama [16] i [34], detaljno se razmatra primena Richardson-ove metode ekstrapolacije za ocenu grešaka nad numeričkim rešenjima Cauchy-evog problema za obične diferencijalne jednačine.

2.3. Zaključak

Dugo vremena Richardson-ova metoda ekstrapolacije upotreblja se za ocene grešaka i popravljjanje vrednosti numeričkih rezultata bez teorijske zasnovanosti. Teorema o razlaganju iz [26] predstavlja osnovu za teorijsko zasnivanje Richardson-ovog postupka ekstrapolacije. U ovoj glavi navedene su dve teoreme koje predstavljaju uopštenje pomenute teoreme o razlaganju.

3. DISKRETIZACIJA I OCENA GREŠKE PRILIKOM DISKRETIZACIJE KOD ČAPLIGINOVE METODE

3.1. Neke karakteristike Čapliginove metode

U odeljku 1.3. ukratko je opisana Čapliginova metoda za nalaženje približnog rešenja Cauchy-evog zadatka (1.2.1). Izdvajamo neke karakteristike Čapliginove metode koje je čine i danas interesantnom za proučavanje.

Čapliginova metoda je dvostrana i analitička. Zbog dvostrane aproksimacije tačnog rešenja, Čapliginova metoda teorijski, u analitičkoj formi, pruža mogućnost za jednostavnu ocenu greške između tačnog i približnih rešenja. Nažalost, u analitičkoj formi Čapliginova metoda nije lako primenljiva na diskretnim elektronskim računskim sredstvima. Da bi mogla da se primenjuje na savremenim računarima, Čapliginova metoda mora na neki način da se diskretizuje. Sa diskretizacijom ostaju stari problemi koji se javljaju prilikom primene Čapliginove metode i pojavljuju se neki novi. Između ostalog, i ocena greške nad diskretizovanim Čapliginovim aproksimacijama pojavljuje se kao značajan problem.

U odeljku 1.3 istaknuta je velika brzina konvergencije aproksimacija (koje se dobijaju pomoću Čapliginove metode) ka tačnom rešenju. Luzin, 1932. godine u radu [25], između ostalog, o Čapliginovoj metodi piše: "... takva brzina konvergencije ne postoji ni kod jedne do sada poznate metode." Velika brzina konvergencije aproksimacija ka tačnom rešenju, na neki način je kompezacija za nedostatke prisutne kod Čapliginove metode.

Od nedostataka Čapliginove metode pomenimo: praktičnu neprimenljivost metode u analitičkoj formi i zahtev za ispunjenje određenih, dosta strogih, uslova za primenu ove metode. Kada se Čapliginova metoda primenjuje u analitičkoj formi, već posle nekoliko koraka formule za izračunavanje aproksimacija postaju tako glomazne (obično se javljaju integrali koji ne mogu da se

izračunaju pomoću kvadratura) da su praktično neupotrebljive. To je još jedan razlog zbog čega se pristupa diskretizaciji Čapliginove metode. Prema tome, kada je ovde reč o praktičnoj primeni Čapliginove metode, podrazumevaće se da je reč o Čapliginovoj metodi u diskretizovanom obliku.

Uslov za primenu Čapliginove metode je da $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$

ima isti znak u okolini rešenja $y(x)$. Ovaj uslov se ističe kao jedan od glavnih nedostataka Čapliginove metode u poređenju sa metodama intervalne analize [28]. Postoje razne modifikacije Čapliginove metode u kojima ovaj uslov ne figuriše ([6] , [19], [1]), ali kod ovih modifikacija obično se smanjuje brzina konvergencije aproksimacija ka tačnom rešenju.

U radu [37] dokazuje se da je Čapliginova metoda ustvari Newton-ova metoda. Ovaj rezultat može ponekad da se iskoristi prilikom primene Čapliginove metode. Naime, pošto je Newton-ova metoda dosta proučavana, dobijeni teorijski rezultati mogu da se primene i na Čapliginovu metodu. Na primer, kada su ispunjeni uslovi za konvergenciju Newton-ove metode, u tom slučaju konvergirajuće i Čapliginova metoda, a što se ne mora posebno dokazivati.

3.2. Diskretizacija Čapliginove metode

Diskretizacija Čapliginove metode vrši se tako što se u čvornim tačkama (x_i) , $i = 0, \dots, n$ za svaku donju aproksimaciju $u_k(x)$ i gornju aproksimaciju $v_k(x)$ određuju, redom, nizovi $(u_k(x_i))$ i $(v_k(x_i))$, $k = 0, 1, 2, \dots$ koji predstavljaju diskretizovane aproksimacije tačnog rešenja.

Označimo sa G interval $[x_0, b]$, a njegov diskretni analogon označimo sa G^h . Znači $G^h = \{x_i \mid x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n\}$. Ako je $\varphi(x)$ proizvoljna funkcija definisana na G , odgovarajuća diskretizovana funkcija biće označena sa $\varphi^h(x)$. Kako je funkcija $\varphi^h(x)$ definisana jedino na skupu G^h , vrednosti funkcija $\varphi(x)$ i $\varphi^h(x)$ mogu se upoređivati jedino na skupu G^h . Razlika $\varphi(x) - \varphi^h(x_i)$ je greška diskretizacije u tački x_i .

U procesu diskretizacije Čapliginove metode ostaju problemi prisutni i u njenoj analitičkoj formi, a koje treba rešiti prilikom primene metode. To su: određivanje početnih aproksima-

cija (okvirnih krivih) $u_0(x_i), v_0(x_i), i = 1, \dots, n$, ispitiva-
nje znaka izvoda $f''_y(x, y)$ u oblasti gde se traži rešenje (to
je oblast određena okvirnim krivama $u_0(x), v_0(x)$ i pravama $x =$
 $x_0, x = x_n$) i određivanje sledećih aproksimacija kada su poznate
prethodne. Pored ovih problema javlja se novi problem: ocena ra-
zlike između tačnog i diskretizovanog rešenja.

U narednim odeljcima predložena su neka rešenja pomenu-
tih problema sa naglaskom na oceni tačnosti diskretizovanih apro-
ksimacija.

3.3. Određivanje početnih aproksimacija

Početne aproksimacije za Čapliginovu metodu u analiti-
čkoj formi mogu biti određene na nekoliko načina. Neki od tih
načina mogu se jednostavno primeniti prilikom diskretizacije Ča-
pliginove metode, dok su drugi manje pogodni. Navodimo nekoliko
postupaka za određivanje početnih aproksimacija koji se mogu pri-
meniti prilikom diskretizacije.

Postupak 3.3.1. Postoje klase klase diferencijalnih je-
dnačina za koje se mogu odrediti funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ tako da
se sva rešenja tih diferencijalnih jednačina, koja prolaze kroz
tačku (x_0, y_0) , nalaze između funkcija $\varphi(x)$ i $\psi(x)$. Funkcije
 $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ možemo nazvati graničnim funkcijama za klasu difere-
ncijalnih jednačina čija rešenja se nalaze između njih. Nekoliko
opštih metoda za nalaženje graničnih funkcija određenih klasa di-
ferencijalnih jednačina, opisano je u knjizi [30].

Prilikom diskretizacije granične funkcije se mogu uzeti
za početne aproksimacije ako ispunjavaju određene početne uslove.
Na osnovu njihovog analitičkog oblika, u nizu tačaka $x_i, i = 1, \dots, n$
izračunavaju se vrednosti početnih aproksimacija. Ako se
problem rešava na računaru, funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ (odnosno $u_0(x)$
i $v_0(x)$) bi se zadavale preko neke funkcijske naredbe, ili na ne-
ki drugi način, zavisno od programskog jezika.

U sledeća tri primera za dati Cauchy-ev problem (za od-
ređene klase diferencijalnih jednačina) navedene su granične fu-
nkcije. Primeri su uzeti iz [30] gde se i dokazuje da važi:

$$\varphi(x) \leq y(x) \leq \psi(x).$$

Primer 1. Za Cauchy-ev problem:

$$y' = m x^2 + n \exp(-ky^2), \quad y(x_0) = y_0, \quad (k, m, n \in \mathbb{R}^+)$$

kada su $x_0, y_0, x, y > 0$, granične funkcije su:

$$\varphi(x) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3)$$

$$\psi(x) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3) + n(x - x_0).$$

Primer 2. Ako imamo:

$$y' = \frac{a + y^2}{ab + x + by^2}, \quad y(x_0) = y_0, \quad (a, b \in \mathbb{R}^+)$$

granične funkcije u oblasti $x > 0$ i $y > 0$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$) su:

$$\varphi(x) = y_0 + a \log \frac{x + ab}{x_0 + ab} \quad \text{i}$$

$$\psi(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{b}$$

Primer 3. Neka je dat Cauchy-ev problem:

$$y' = y^2 + f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gde je $f(x)$ pozitivna, dovoljno glatka funkcija na intervalu $[\alpha_1, \alpha_2]$ i važi: $M \leq f(x) \leq N$. Granične funkcije u ovom slučaju su:

$$\varphi(x) = \frac{y_0 \sqrt{N} + N \operatorname{tg}((x-x_0)\sqrt{N})}{\sqrt{N} + y_0 \operatorname{tg}((x-x_0)\sqrt{N})}$$

$$\psi(x) = \frac{y_0 \sqrt{M} + M \operatorname{tg}((x-x_0)\sqrt{M})}{\sqrt{M} + y_0 \operatorname{tg}((x-x_0)\sqrt{M})}$$

Opisani postupak 3.3.1. nije univerzalan. Postoje diferencijalne jednačine za koje je teško odrediti granične funkcije, a ako je i moguće, razmak između ovih funkcija može da bude veliki, što znači da nisu prihvatljive kao početne aproksimacije za Čapliginovu metodu. Osim toga, ako je kvalitativna analiza diferencijalne jednačine (pomoću kvalitativne analize određuju se granične funkcije) složen posao, onda se primena ovog postupka ne isplati.

Postupak 3.3.2. U knjizi [6] dokazano je da za problem (1.2.1) važi: $u(x) \leq y(x) \leq U(x)$ pri čemu je:

$$u(x) = y_0 - \int_{x_0}^x \exp(L(x-t)) |f(t, y_0)| dt$$

$$U(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \exp(L(x-t)) |f(t, y_0)| dt$$

gde je L Lipschitz-ova konstanta. Za funkcije $u(x)$ i $U(x)$ važi: $u(x_0) = U(x_0) = y_0$ pa prema tome ako razlika između njih nije velika, mogu biti uzete za početne aproksimacije $u_0(x)$ i $v_0(x)$. Prilikom diskretizacije za određivanje vrednosti funkcija $u_0(x)$ i $v_0(x)$ u čvornim tačkama, treba vršiti numeričku integraciju. Pored neophodnosti primene numeričke integracije, loša strana ovog postupka je što pre primene treba odrediti i Lipschitz-ovu konstantu.

Primer 1. Neka je dat Cauchy-ev problem:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Treba naći rešenje ovog problema na odsečku $[0, 0.5]$ sa korakom $h = 0.1$. Za Lipschitz-ovu konstantu možemo uzetu $L = 1$. Vrednosti početnih aproksimacija u čvornim tačkama, dobijene pomoću postupka 3.3.2. prikazane su u sledećoj tabeli.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$u_0(x)$ $v_0(x)$	∓ 0.00034	∓ 0.00281	∓ 0.00972	∓ 0.02365	∓ 0.04744

Postupak 3.3.3. Za analitički oblik Čapliginove metode ovaj postupak opisan je u [10]. Neka je funkcija $f(x, y)$ zadatka (1.2.1) neprekidna u oblasti $D = \{ x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, |y - y_0| \leq \beta \}$ ($\alpha, \beta > 0$). Uvedimo sledeće oznake:

$$m = \min_{(x,y) \in D} f(x,y), \quad M = \max_{(x,y) \in D} f(x,y), \quad b = \min \left(\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{\beta}{m} \right).$$

Kao početne aproksimacije na intervalu G mogu biti uzete:

$$u_0(x) = y_0 + m(x - x_0), \quad v_0(x) = y_0 + M(x - x_0).$$

Prilikom diskretizacije glavni problem je određivanje konstanti m i M . Postoje algoritmi za nalaženje m i M (videti [12]), ali primena ovih algoritama čini postupak određivanja početnih aproksimacija komplikovanim.

Primer 1. Za zadatak:

$$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0,$$

u oblasti $D = [0,1] \times [0,1]$, $m = 0$, $M = 3$ pa se na intervalu $[0, 1/3]$ kao početne aproksimacije uzimaju funkcije:

$$u_0 \equiv 0, \quad v_0 = 3x.$$

Postupak 3.3.4. Ovaj postupak zasniva se na Čapligino-voj teoremi 1.3.1 o diferencijalnim nejednakostima. Ideja je da se formira klasa tzv. probnih funkcija i da se u toj klasi traže početne aproksimacije. Klasi probnih funkcija treba da čine funkcije koje zadovoljavaju isti početni uslov kao i rešenje problema (1.2.1) i imaju različite brzine rašćenja (opadanja). Iz klase probnih funkcija bira se jedna funkcija $u = u(x)$ i ispituje se da li zadovoljava jednu od nejednakosti:

$$(3.3.1) \quad u' \geq f(x,u) \quad \text{ili} \quad u' \leq f(x,u)$$

na intervalu gde se traži rešenje. U zavisnosti od toga koja nejednakost je zadovoljena, funkcija $u(x)$ se uzima za jednu početnu aproksimaciju. Ukoliko funkcija $u(x)$ ne zadovoljava ni jednu od nejednakosti (3.3.1), uzima se nova funkcija iz klase probnih funkcija i procedura se ponavlja. Izbor klase probnih funkcija zavisi od problema koji se rešava, tj. od funkcije $f(x,y)$.

Primer 1. Neka je dat Cauchy-ev zadatak:

$$(3.3.2) \quad y' = x^2 + y^2 - 32.1, \quad y(0) = 0.1$$

i neka se traži rešenje na intervalu $[0,1]$. Za klasu probnih funkcija uzmimo funkciju $y = c_1x + c_2$ sa konstantama c_1 i c_2 koje mogu da se variraju. Ustvari, menjamo konstantu c_1 tako da bude zadovoljena jedna od nejednakosti u (3.3.1), a konstantu c_2 biramo tako da važi: $c_2 = y_0 - c_1x_0$. Postupajući na taj način za zadatak (3.3.2) nalazimo sledeće početne aproksimacije:

$$u_0(x) = -33x + 0.1$$

$$v_0(x) = 0.1x + 0.1$$

Postupak 3.3.4. suštinski je analitički i nije pogodan za diskretizaciju. Jedan od načina diskretizacije bio bi da se za probne funkcije ispituje važnost nejednakosti (3.3.1) u čvornim tačkama. Jasno, ukoliko jedna od nejednakosti (3.3.1) za određenu probnu funkciju važi u svim čvornim tačkama ne znači da će važiti na celom odsečku gde se traži rešenje.

Pored opisanih postupaka 3.3.1. - 3.3.4. za izbor početnih aproksimacija može da se koristi i neka metoda za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina. Vrednosti početnih aproksimacija izračunavaju se oduzimanjem (dodavanjem) određenih veličina dobijenim približnim vrednostima u čvornim tačkama. Za razliku od opisanih postupaka 3.3.1. - 3.3.4. ovakav način određivanja početnih aproksimacija suštinski je diskretan. Nažalost dobijene vrednosti najčešće nisu pouzdane zbog toga što je teško, u opštem slučaju, precizno oceniti grešku kod numeričkih metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina. Osim toga, korišćenje nove numeričke metode za rešavanje diferencijalnih jednačina (u okviru Čapliginove metode) učinilo bi Čapliginovu metodu isuviše komplikovanom.

3.4. Ispitivanje konveksnosti

Uslov za primenu Čapliginove metode opisane u odeljku 1.3. je da $f''_{xy}(x,y) \geq 0$ u oblasti $E = \{ x_0 \leq x \leq b, u_0(x) \leq y(x) \leq v_0(x) \}$. Ukoliko je $f''_{xy}(x,y) \leq 0$ u oblasti E, metoda se može takođe primeniti s tim što funkcije $u_k(x)$ i $v_k(x)$ menjaju mesta u formulama 1.3.2, 1.3.4. i 1.3.5. Znači, bitno je da $f''_{xy}(x,y)$ ima isti znak u oblasti E.

Prilikom diskretizacije u vezi sa ovim javljaju se dva zadatka:

- 1^o određivanje izvoda $f''_{xy}(x,y)$ i
- 2^o ispitivanje znaka izvoda $f''_{xy}(x,y)$ u oblasti E.

Oba zadatka mogu se rešavati analitičkim putem. Ako je funkcija $f(x,y)$ složeniija, taj posao može da bude mukotrpan. Osim toga, ukoliko se Čapliginova metoda realizuje na računaru, pogodnije je, ako je moguće, da se i ispitivanje konveksnosti izvrši na računaru.

Zadatak 1^o je lakši za rešavanje na pojedinim programskim jezicima (na primer, LISP), na drugim je teži, ali u principu mogu se naći (napraviti) algoritmi za diferenciranje određenih klasa funkcija.

Zadatak 2^o je drugačije prirode. U suštini zadatak 2^o je kontinualnost. Naime, znak drugog izvoda trebalo bi ispitati

u kontinuum mnogo tačaka, a na diskretnom računaru teorijski je moguće samo u konačno mnogo tačaka. Zbog toga ovaj zadatak nije pogodan za rešavanje na današnjim diskretnim računarima.

Da bismo izbegli rešavanje zadatka 1^o, koristićemo sledeću definiciju konveksnosti.

Definicija 3.4.1. Funkcija $\varphi(x)$ definisana na odsečku $[\alpha, \beta]$ je konveksna na ovom odsečku ako za svako $a, b \in [\alpha, \beta]$ važi:

$$(3.4.1) \quad \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} .$$

Ako se u (3.4.1) promeni smisao nejednakosti, za funkciju $\varphi(x)$ kaže se da je konkavna.

(Često se funkcije koje ispunjavaju uslove definicije 3.4.1. nazivaju Jensen-konveksne funkcije.)

Koristeći se definicijom 3.4.1. problem ispitivanja konveksnosti funkcije svodimo samo na zadatak 2^o. Zadatak 2^o rešićemo samo "aproksimativno". Naime, usled nemogućnosti da ispitamo konveksnost funkcije pomoću računara, ispitivaćemo \mathcal{T} -konveksnost. Prethodno definišimo pojam \mathcal{T} -konveksnosti.

Definicija 3.4.2. Neka je funkcija $\varphi(x)$ definisana na intervalu $[\alpha, \beta]$ i neka je $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$. Funkcija $\varphi(x)$ je \mathcal{T} -konveksna na intervalu $[\alpha, \beta]$ ako važi:

$$(3.4.2) \quad \varphi(x_i) \leq \frac{\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1})}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ukoliko se promeni smisao nejednakosti u (3.4.2), za funkciju $\varphi(x)$ se kaže da je \mathcal{T} -konkavna.

Iz definicija 3.4.1. i 3.4.2. zaključujemo da je konveksna funkcija uvek \mathcal{T} -konveksna, a da obrnuto ne mora da važi. Ukoliko je funkcija $\varphi(x)$ dovoljno glatka (sa takvim uglavnom u praksi operišemo) i \mathcal{T} mala veličina, onda \mathcal{T} -konveksnost može služiti kao nekakav pokazatelj konveksnosti. Dakle, nadalje ćemo konveksnost funkcije zamenjivati \mathcal{T} -konveksnošću i umesto ispitivanja konveksnosti, ispitivaćemo \mathcal{T} -konveksnost. Ovim smo izvršili diskretizaciju problema konveksnosti, ali sa diskretizacijom javlja se i nepouzdanost u ocenjivanju konveksnosti.

Na osnovu definicije 3.4.2. definisaćemo τ -konveksnost funkcije $f(x,y)$ u odnosu na y u oblasti E .

Definicija 3.4.3. Funkcija $f(x,y)$ je τ -konveksna u odnosu na y u oblasti E ako je za svako fiksirano x_i ($i = 1, \dots, n$) funkcija $f(x,y)$ τ -konveksna na intervalu $[u_0(x_i), v_0(x_i)]$.

Na osnovu definicije 3.4.3. možemo načiniti algoritam za ispitivanje τ -konveksnosti funkcije $f(x,y)$ u odnosu na y u oblasti E . Pretpostavimo da znamo funkciju $f(x,y)$, nizove $u_{oi} = u_0(x_i)$, $v_{oi} = v_0(x_i)$ i konstante a, n i τ .

ALGORITAM 3.4.

Korak 1 Za $i = 1, 2, \dots, n$, izvršiti korake od 2 do 5.

Korak 2 Neka je:

$$m = \left[\frac{v_{oi} - u_{oi}}{\tau} \right] + 1$$

$$t = \frac{v_{oi} - u_{oi}}{m}.$$

Korak 3 Za $j = 1, \dots, m-1$, izvršiti korake 4 i 5.

Korak 4 Neka je $y = u_{oi} + jt$.

Korak 5 Ako je $f(x_i, y) \geq \frac{f(x_i, y-t) + f(x_i, y+t)}{2}$

tada izdati poruku: " $f(x,y)$ nije τ -konveksna u odnosu na y u E ," a inače nastaviti.

Korak 6 Izdati poruku: " $f(x,y)$ je τ -konveksna u odnosu na y u E "

Korak 7 Završiti postupak.

Algoritam 3.4. lako se može modifikovati tako da se pored τ -konveksnosti ispituje i τ -konkavnost.

Na osnovu rečenog, smatraćemo da za rešavanje Cauchy-evog zadatka (1.2.1) možemo koristiti Čapliginovu metodu ako je funkcija $f(x,y)$ τ -konveksna ili τ -konkavna. Ako funkcija $f(x,y)$ nije ni τ -konveksna, ni τ -konkavna, originalnu Čapliginovu metodu ne možemo primeniti; na raspolaganju nam ostaje neka od modifikacija u kojoj se ne zahteva da $f'_y(x,y)$ ima stalan znak u oblasti E . Modifikacije Čapliginove metode u kojima se ne zahteva da $f'_y(x,y)$ ima stalni znak u E , izložene su u [6] i [1].

3.5. Nalaženje sledećih aproksimacija

Rešavajući Cauchy-eve zadatke iz (1.3.4) za obične linearne diferencijalne jednačine, nalazimo sledeće Čapliginove aproksimacije kada znamo prethodne.

Pretpostavimo da je pored funkcije $f(x,y)$ data i funkcija $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ i da se vrednosti ovih funkcija mogu izračunati na osnovu njihovih analitičkih izraza. Radi jednostavnijeg zapisa uvodimo sledeće oznake:

$$(3.5.1) \quad p_k(x) = - \frac{\partial f(x, u_k(x))}{\partial y}$$

$$(3.5.2) \quad q_k(x) = - \frac{f(x, v_k(x)) - f(x, u_k(x))}{v_k(x) - u_k(x)}$$

gde su, kao i ranije, $u_k(x)$ i $v_k(x)$ oznake za gornju i donju k -tu aproksimaciju u Čapliginovoj metodi. Neka je:

$$(3.5.3) \quad I(a(x), b(x)) = \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right) \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, b(t) + a(t)u_k(t)) \exp\left(\int_{x_0}^t a(z)dz\right) dt \right)$$

Na osnovu formula (3.5.1), (3.5.2) i (3.5.3), ako znamo aproksimacije $u_k(x)$ i $v_k(x)$, naredne aproksimacije $u_{k+1}(x)$ i $v_{k+1}(x)$, izračunavaju se na sledeći način:

$$(3.5.4) \quad u_{k+1}(x) = I(p_k(x), u_k(x))$$

$$(3.5.5) \quad v_{k+1}(x) = I(q_k(x), v_k(x))$$

Formule (3.5.4) i (3.5.5) važe za analitički oblik Čapliginove metode. Proces diskretizacije prilikom izračunavanja sledećih aproksimacija, započinje diskretizacijom izraza (3.5.4) i (3.5.5).

S obzirom na oblik izraza (3.5.3) problem diskretizacije u ovoj fazi svodi se na numeričku integraciju. Međutim, ovde su mogući različiti pristupi. Razmotrimo neke od njih.

Pretpostavimo da su poznate vrednosti k -te donje i gornje aproksimacije na skupu G^h . Na osnovu ovih vrednosti možemo formirati interpolacione polinome $P_{u_k}(x)$ i $P_{v_k}(x)$ na odsečku $[x_0, x_n]$. Pomoću formiranih interpolacionih polinoma koji su definisani na

intervalu G , imamo mogućnost da sa određenom tačnošću izračunamo vrednosti k -tih aproksimacija u bilo kojoj tački na odsečku G . Ova mogućnost dozvoljava nam da koristimo veliki broj formula za numeričku integraciju. Neka ograničenja u pogledu obimnosti izračunavanja za sada ne razmatramo. Dakle, ako zanemarimo obim izračunavanja i grešku izračunavanja, postavlja se pitanje kolika je greška diskretizacije prilikom računanja $u_{k+1}^h(x)$ i $v_{k+1}^h(x)$, odnosno, kolika je greška diskretizacije na jednom koraku u procesu integracije. Sledeća teorema daje odgovor na ovo pitanje.

Teorema 3.5.1. Ako su ispunjeni sledeći uslovi kad $h \rightarrow 0$:

- 1^o vrednosti funkcija $a(x)$, $b(x)$ i $u_k(x)$ u (3.5.3) izračunavaju sa tačnošću ne manjom od $O(h^{r_1})$;
- 2^o Prilikom numeričke integracije kod svih integrala koji se javljaju u (3.5.3) greška metode nije veća od $O(h^{r_2})$; onda se $I(a(x), b(x))$ iz (3.5.3) na skupu G^h izračunava sa greškom $O(h^r)$ gde je $r = \min(r_1, r_2)$.

Dokaz Za $x_i \in G^h$ imamo:

$$\int_{x_0}^{x_i} a(t) dt = S_1^h + R_1 + R_2$$

gde je R_1 greška koja se javlja usled ograničene tačnosti podintegralnih funkcija, a R_2 greška metode numeričke integracije. S obzirom na pretpostavke 1^o i 2^o, $R_1 = O(h^{r_1})$, $R_2 = O(h^{r_2})$. Ako je $r = \min(r_1, r_2)$, onda važi:

$$(3.5.6) \quad \int_{x_0}^{x_i} a(x) dx = S_1^h + O(h^r)$$

Imajući u vidu (3.5.6) imamo:

$$(3.5.7) \quad \exp\left(-\int_{x_0}^{x_i} a(x) dx\right) = S_2^h + O(h^r).$$

Uvedimo sledeću oznaku:

$$(3.5.8) \quad g(x) = (f(x, b(x)) + a(x)u_k(x)) \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

pa je:

$$(3.5.9) \quad I(a(x), b(x)) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \left(y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt\right)$$

Na osnovu (3.5.6) i (3.5.8) imamo:

$$g(x_j) = (f(x_j, b(x_j)) + a(x_j)u_k(x_j)) \left(S_3^h + O(h^r)\right).$$

Imajući u vidu pretpostavku 1^o dobijamo:

$$g(x_j) = g_j^h + O(h^r).$$

Zaključujemo da se vrednosti funkcije $g(x)$ na G^h izračunavaju sa tačnošću $O(h^r)$. Na osnovu ovoga i pretpostavki 1^o i 2^o nalazimo:

$$(3.5.10) \quad \int_{x_0}^{x_i} g(x) dx = S_4^h + O(h^r) + O(h^r) \\ = S_4^h + O(h^r).$$

Iz (3.5.7) i (3.5.10) dobija se:

$$(3.5.11) \quad I(a(x_i), b(x_i)) = S_2^h y_0 + S_2^h S_4^h + O(h^r) \\ = I^h + O(h^r),$$

što je i trebalo dokazati.

U ovom slučaju nismo obraćali pažnju na obim izračunavanja. Sa uvođenjem interpolacionih polinoma proces diskretizacije je prilično izkomplikovan. Osim toga, nikakve racionalizacije u izračunavanju integrala nisu napravljene. Za izračunavanje vrednosti jedne iteracije u i -toj tački mreže G^h trebalo bi izračunati $(i+1)$. puta integral. U programu preko kojeg bi se realizovala diskretizacija Čapliginove metode, trebalo bi $(i+1)$. puta obratiti se potprogramu za izračunavanje integrala. Zavisno od metode za numeričku integraciju, broj obraćanja potprogramu za izračunavanje vrednosti interpolacionog polinoma bio bi znatno veći.

Da li je moguće izvršiti diskretizaciju Čapliginove metode bez korišćenja interpolacije?

Pretpostavlja se da su poznate početne aproksimacije $u_0(x)$ i $v_0(x)$ u konačan broj tačaka na intervalu G i treba pomoću numeričke integracije izračunati $u_k(x)$ i $v_k(x)$ na G^h .

U okviru ove varijante razlikujemo dva slučaja:

- (1) $u_0(x)$ i $v_0(x)$ poznate su samo u tačkama mreže G^h , tj. u $n+1$ tačaka.
- (2) $u_0(x)$ i $v_0(x)$ poznate su u m unapred izabranih tačaka na intervalu G gde je $m > n+1$.

U slučaju (1) mogu se upotrebiti jedino kvadraturene formule sa ekvidistantnim čvornim tačkama zbog ekvidistantne prirode mreže G^h . Od Newton-Cotes-ovih formula jedino su upotrebljive pravougaona i trapezna formula. Zaista, ako bismo hteli da upotrebimo neku formulu koja daje veću tačnost, pri izračunavanju, na primer, $u_1^h(x_1)$ potrebna je bar jedna vrednost iz unutrašnjosti intervala $[x_0, x_1]$, što prema pretpostavci u ovom slučaju nije dato.

Pošto trapezna formula daje veću tačnost u poredenju sa

pravougaonom, razmotrimo kako bi se računale sledeće aproksimacije pomoću trapezne formule i kolika je greška diskretizacije.

Konkretno, neka su poznate vrednosti $u_k^h(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, kako se izračunavaju $u_{k+1}^h(x_i)$, $i = 1, \dots, n$?

Na osnovu (3.5.4) i (3.5.3) nalazimo:

$$(3.5.12) \quad u_{k+1}^h(x_i) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x_i} p_k(x) dx\right) \left(y_0 + \int_{x_0}^{x_i} g_k(x) dx\right)$$

gde je

$$g_k(x) = (f(x, u_k(x)) + p_k(x)u_k(x)) \exp\left(\int_{x_0}^x p_k(t) dt\right).$$

Primenom uopštene trapezne formule dobijamo:

$$(3.5.13) \quad u_{k+1}^h(x_i) = \exp\left(-\frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (p_k^h(x_j) + p_k^h(x_{j+1}))\right) \left(y_0 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (g_k^h(x_j) + g_k^h(x_{j+1}))\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Jednakost (3.5.13) možemo zapisati i na sledeći način:

$$(3.5.14) \quad u_{k+1}^h(x_i) = S_2^h(y_0 + S_3^h)$$

gde je

$$S_2^h = \exp(S_1^h), \quad S_1^h = -\frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (p_k^h(x_j) + p_k^h(x_{j+1})) \quad i$$

$$S_3^h = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (g_k^h(x_j) + g_k^h(x_{j+1})).$$

Analogno se izračunava $v_{k+1}^h(x_i)$.

Sledećim teoremama utvrđuje se kolika je greška diskretizacije ako se koristi formula (3.5.13).

Teorema 3.5.2. Vrednosti $u_{k+1}^h(x_i)$ koje se dobijaju pomoću formule (3.5.13) ne mogu biti izračunate sa većom tačnošću od $O(h^2)$ kad $h \rightarrow 0$.

Dokaz Greška metode kod uopštene trapezne formule je veličine $O(h^2)$. Znači, relacija (3.5.12) može biti zapisana na sledeći način:

$$u_{k+1}^h(x_i) = \exp\left(-\frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (p_k(x_j) + p_k(x_{j+1})) + O(h^2)\right) \left(y_0 + \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{i-1} (g_k(x_j) + g_k(x_{j+1})) + O(h^2)\right)$$

Ako se vrednosti funkcija $p_k(x)$ i $q_k(x)$ izračunavaju sa tačnošću ne manjom od $O(h)$ (lako se dokazuje da je to ostvarljivo), dobijamo:

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x_i) &= \exp(S_1^h + O(h^2)) (y_0 + S_2^h + O(h^2)) \\ &= (S_2^h + O(h^2)) (y_0 + S_3^h + O(h^2)) \\ &= S_2^h (y_0 + S_3^h) + O(h^2) \\ &= u_{k+1}^h(x_i) + O(h^2), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Na isti način se dokazuje da vrednosti $v_{k+1}(x_i)$ ne mogu biti izračunate pomoću trapezne formule sa tačnošću većom od $O(h^2)$.

Na osnovu teoreme 3.5.2. i ocene (1.3.6) lako se ocenjuje razlika između $u_{k+1}^h(x_i)$ i $v_{k+1}^h(x_i)$.

Teorema 3.5.3. Ako se $u_{k+1}(x_i)$ i $v_{k+1}(x_i)$ izračunavaju pomoću trapezne formule iz (3.5.4) i (3.5.5), onda važi:

$$|v_{k+1}^h(x_i) - u_{k+1}^h(x_i)| \leq O(h^2) + \frac{C}{2^{2k}}$$

kad $h \rightarrow 0$, ($i = 1, \dots, n$).

Dokaz Na osnovu nejednakosti trougla dobija se:

$$\begin{aligned} |v_{k+1}^h(x_i) - u_{k+1}^h(x_i)| &\leq |u_{k+1}(x_i) - u_{k+1}^h(x_i)| + |v_{k+1}(x_i) - v_{k+1}^h(x_i)| \\ &\quad + |u_{k+1}(x_i) - v_{k+1}(x_i)|. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 3.5.2. i korišćenjem ocene (1.3.6) dobijamo:

$$\begin{aligned} |v_{k+1}^h(x_i) - u_{k+1}^h(x_i)| &\leq O(h^2) + O(h^2) + \frac{C}{2^{2k}} \\ &= O(h^2) + \frac{C}{2^{2k}}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

NAPOMENA: Umesto formule (3.5.12) za izračunavanje $u_{k+1}(x_i)$ može se koristiti i sledeća formula:

$$(3.5.15) \quad u_{k+1}(x_i) = \exp\left(-\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_k(x) dx\right) u_{k+1}(x_{i-1}) + \exp\left(-\int_{x_0}^{x_i} p_k(x) dx\right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_k(x) dx$$

ako je prethodno izračunata vrednost $u_{k+1}(x_{i-1})$.

Razmotrimo slučaj (2) kada se vrednosti početnih aproksimacija mogu izračunati i van čvorova mreže G^h . (Ovo je slučaj kada su aproksimacije $u_0(x)$ i $v_0(x)$ zadate u analitičkom obliku pomoću neke vrste potprograma.) I u ovom slučaju pogodne su kvadraturene formule sa ekvidistantnim čvornim tačkama, ali cilj nam je da obezbeđuju veću tačnost.

Najčešće primenjivane kvadraturene formule u praktičnim izračunavanjima su: Simpson-ova formula i Romberg-ovo pravilo. (Videti: [3], [8], [15].) Razmotrimo kako se ove kvadraturene formule mogu primeniti u izračunavanju aproksimacija $u_k(x)$ i $v_k(x)$.

Pretpostavimo najpre da imamo potprogram za numeričku integraciju pomoću Simpson-ove formule preko kojeg možemo zadati dužinu intervala integracije i broj čvornih tačaka. Pri tom broj čvornih tačaka za Simpson-ovu formulu mora da bude neparan.

Koliko vrednosti funkcije $u_k(x)$ je potrebno na intervalu $[x_0, x_1]$ da bi se izračunala vrednost $u_{k+1}^h(x_1)$ pomoću Simpson-ove formule? Prema formuli (3.5.12) najpre se mora izračunati integral funkcije $p_k(x)$ u granicama od x_0 do x_1 . Za to su potrebne vrednosti funkcije $p_k(x)$ u najmanje tri tačke: x_0 , $x_{1/2} = x_0 + h/2$ i x_1 . Kako se $p_k(x)$ izračunava preko $u_k(x)$, to znači potrebne su i vrednosti funkcije $u_k(x)$ u ovim tačkama. Pored ovoga, potrebno je izračunati i integral funkcije $g_k(x)$ od x_0 do x_1 . I ovde su potrebne vrednosti funkcije $g_k(x)$ u tačkama: x_0 , $x_{1/2}$, x_1 . No

$$g(x_{1/2}) = (f(x_{1/2}, u_k(x_{1/2})) + p_k(x_{1/2})u_k(x_{1/2}) \cdot \exp(\int_{x_0}^{x_{1/2}} p_k(x) dx)) ,$$

što znači da prethodno treba izračunati integral funkcije $p_k(x)$ u granicama od x_0 do $x_{1/2}$. Za to su potrebne vrednosti funkcije $p_k(x)$ u tačkama x_0 , $x_{1/4} = x_0 + h/4$, $x_{1/2}$. Znači da bi se primenila Simpson-ova formula za izračunavanje $u_{k+1}^h(x_1)$, potrebne su vrednosti funkcije $u_k(x)$ u tačkama: x_0 , $x_{1/4}$, $x_{1/2}$, x_1 . Greška metode se tada izražava preko $h/2$ tako da se praktično izračunava $u_{k+1}^{h/2}(x_1)$.

Na osnovu rečenog može se zaključiti da za izračunavanje vrednosti $u_k^{h/2}(x_1)$, treba obezbediti vrednosti početne aproksimacije $u_0(x)$ u tačkama x_0 i $x_j = x_0 + h/(2^{2j})$, $j = 0, \dots, k$.

Slični zaključci u pogledu broja tačaka važili bi za intervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. Greška koja se čini pri izračunavanju aproksimacija $u_k(x_i)$ je veličine $O((h/2)^4)$, kad $h \rightarrow 0$.

Isti zaključak važi i za izračunavanje aproksimacije $v_k(x)$.

Razmotrimo primenu Romberg-ovog postupka za izračunavanje $u_k(x)$ i $v_k(x)$.

Pomoću Romberg-ovog postupka obezbeđuju se početne aproksimacije integrala trapeznom formulom, a zatim se Richardson-ovim postupkom ekstrapolacije nalaze poboljšane vrednosti integrala. Tačnost zavisi od broja elemenata koji učestvuju u ekstrapolaciji. U najjedostavnijem slučaju obezbeđena je tačnost od $O(h^4)$.

Slično kao i kod Simpson-ove metode, postavlja se pitanje koliko vrednosti funkcije $u_k(x)$ treba obezbediti na intervalu $[x_0, x_1]$ da bi se pomoću Romberg-ovog postupka izračunala vrednost $u_k(x_1)$.

U ovom slučaju najpre treba izvršiti integraciju sa korakom h , tj. prema formuli (3.5.13) i dobiti vrednost $u_{k+1}^{(1)}(x_1)$. Potom treba primeniti trapeznu formulu za korak $h/2$ i izračunati $u_{k+1}^{(2)}(x_1)$. Prilikom računanja vrednosti $u_{k+1}^{(2)}(x_1)$ potrebne su vrednosti funkcije $u_k(x)$ u tačkama $x_0, x_{1/2}, x_1$. Konačna vrednost dobija se iz formule:

$$u_{k+1}^h(x_1) = \frac{4u_{k+1}^{(2)}(x_1) - u_{k+1}^{(1)}(x_1)}{3}$$

i pri tom je $u_{k+1}^h(x_1) = u_{k+1}^h + O(h^4)$.

Prema tome, da bi se izračunalo $u_k^h(x_1)$ pomoću Romberg-ovog postupka, potrebne su vrednosti početne aproksimacije $u_0(x)$ u tačkama x_0 i $x_j = x_0 + h/(2^j)$, $j = 0, \dots, k$.

Potpuno isti postupak primenjuje se prilikom izračunavanja $v_k(x_1)$. Takođe isti zaključci u pogledu broja tačaka važe i za interval $[x_i, x_{i+1}]$.

Ukoliko se želi veća tačnost pomoću Romberg-ovog postupka, potrebno je obezbediti vrednosti početnih aproksimacija u većem broju tačaka.

Do sada pomenute formule za numeričku integraciju mogu se kombinovati međusobno, a i kada se pojedinačno primenjuju mogu biti primenjivane na drugi način. Pored pomenutih mogu se koristiti i druge formule za numeričku integraciju samostalno ili

u kombinaciji sa pomenutim.

3.6. Zaključak

Čapliginova metoda je praktično neprimenljiva u analitičkoj formi zbog glomaznih formula u kojima se javljaju integrali koji se ne mogu odrediti tačno pomoću kvadratura. Prema tome, u današnjim okolnostima, praktična primena Čapliginove metode moguća je jedino u nekom diskretizovanom obliku. Prilikom diskretizacije pojavljuju se ograničavajući faktori prisutni i u analitičkoj formi. Iz razmatranja u odeljku 3.3. zaključuje se da ne postoji neka univerzalna metoda za izbor početnih aproksimacija prilikom diskretizacije i da je u opštem slučaju teško garantovati da nađene početne diskretizovane aproksimacije ukviruju tačno rešenje na mreži G^h . Takođe, pouzdanost u ispitivanju konveksnosti nije zagarantovana.

Ključno mesto u procesu diskretizacije je izračunavanje sledećih (na osnovu prethodnih) aproksimacija u Čapliginovoj metodi. Iz odeljka 3.5. zaključujemo da postoje različiti pristupi u izračunavanju diskretizovanih aproksimacija. Svi ovde predloženi pristupi zasnivaju se na numeričkoj integraciji i to:

- 1° sa korišćenjem interpolacionog polinoma i
- 2° bez korišćenja interpolacionog polinoma.

Korišćenjem iterpolacionih polinoma pruža se velika mogućnost u izboru metoda za numeričku integraciju, ali se znatno uvećava obim izračunavanja. Metode za numeričku integraciju i interpolaciju mogu se izabrati tako da ukupna greška metode diskretizacije bude mala, no zbog obimnog izračunavanja teško je kontrolisati grešku izračunavanja.

U slučaju kada se ne koriste interpolacioni polinomi za izražavanje aproksimacija, ograničen je izbor metoda za numeričku integraciju.

Kada su početne aproksimacije poznate samo u čvornim tačkama mreže G^h , izbor formula za numeričku integraciju je toliko sužen da se u izračunavanju aproksimacija ne može dobiti veća tačnost od $O(h^2)$. Ako početne aproksimacije možemo izračunati u većem broju unapred izabranih tačaka, veći je izbor formula za

numeričku integraciju, mada i dalje ograničen. U ovom slučaju uvećava se i obim računanja.

Prema tome, mada se mogu naći specijalni slučajevi u kojima bi diskretizovana Čapliginova metoda imala prednosti nad drugim metodama, u većini slučajeva obim izračunavanja kod Čapliginove metode znatno je veći nego kod drugih metoda, a algoritam za njenu realizaciju je složeniji.

Iz svega izloženog sledi da se Čapliginova metoda ne može preporučiti kao efikasna metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina.

4. DVOSTRANE ITERATIVNE METODE ZA REŠAVANJE
CAUCHY-EVOG ZADATKA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH
JEDNAČINA

4.1. Osnovni pojmovi i postavka zadatka

Neka je dat problem (1.2.1) i neka je određen skup tačaka $G^h = \{ x_i \mid x_i = x_0 + ih, i = 0, \dots, n \}$ za korak $h > 0$. Dalje, neka neprekidna funkcija $f(x, y)$ iz (1.2.1) zadovoljava Lipschitz-ov uslov.

Definicija 4.1.1. Dvostrano aproksimaciono rešenje problema (1.2.1) reda $p-1$ ($p \geq 1$) u tački x_i je interval $Y_i = [y_i^D, y_i^G]$ za čije granice važi:

$$(4.1.1) \quad y_i^D, y_i^G \in \{ y_i^{[p-]}, y_i^{[p+]} \}$$

gde je

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} y(x_i) &= y_i^{[p-]} - c_1 \mathcal{C}_1(\xi_i) h^p + o(h^{p+1}) \\ y(x_i) &= y_i^{[p+]} + c_2 \mathcal{C}_2(\eta_i) h^p + o(h^{p+1}) \end{aligned}$$

pri čemu konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ kad $h \rightarrow 0$ i $nh = x_n - x_0$; tačke $\xi_i, \eta_i \in [x_0, x_i]$; funkcije $\mathcal{C}_1(x)$ i $\mathcal{C}_2(x)$ su neprekidne na intervalu $[x_0, x_n]$, a vrednosti $\mathcal{C}_1(\xi_i)$ i $\mathcal{C}_2(\eta_i)$ su istog znaka.

Naš zadatak je da odredimo aproksimaciono rešenje reda $p-1$ na intervalu $[x_0, x_n]$ za zadatak (1.2.1).

U definiciji 4.1.1. od znaka vrednosti $\mathcal{C}_1(\xi_i)$ i $\mathcal{C}_2(\eta_i)$ zavisi da li je $y_i^{[p-]} \geq y_i^{[p+]}$ ili $y_i^{[p-]} < y_i^{[p+]}$. Vrednosti y_i^D i y_i^G biraju se tako da je:

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} y_i^D &= \min \{ y_i^{[p-]}, y_i^{[p+]} \} \\ y_i^G &= \max \{ y_i^{[p-]}, y_i^{[p+]} \} \end{aligned}$$

Da bismo u zapisu intervala Y_i istakli da su njegove granice određene kao u (4.1.3), ponekad ćemo koristiti oznaku

$Y_i^{[p]}$. Pored ove, koristićemo oznake $\psi_i^{[p-1]}$, odnosno $\psi_i^{[p+1]}$ za sledeće vrednosti proizvoljne funkcije $\psi(x,y)$: $\psi(x_i, y_i^{[p-1]})$, $\psi(x_i, y_i^{[p+1]})$. Ukoliko nije bitno koja granica intervala $Y_i^{[p]}$ je u pitanju, koristićemo oznaku $y_i^{[p]}$, a $\psi_i^{[p]}$ je tada oznaka za vrednost funkcije $\psi(x_i, y_i^{[p]})$.

Pretpostavimo da su poznati intervali $Y_r^{[p]}$ za koje važi: $y(x_r) \in Y_r^{[p]}$, $r = 0, \dots, k-1$. Takođe, pretpostavimo da su poznati intervali $Y_{i+k}^{[q]}$ za koje važi $y(x_{i+k}) \in Y_{i+k}^{[q]}$, $i = 0, \dots, n-k$ i $q < p$.

Glavni problem u okviru opšteg zadatka je kako od početnih, grubih aproksimacionih intervala $Y_{i+k}^{[q]}$ dobiti savršenije aproksimacione intervale za koje bi važilo: $y(x_{i+k}) \in Y_{i+k}^{[p]}$. Ovaj problem je rešen u sledećem odeljku pomoću algoritma za usavršavanje početnih aproksimacionih intervala.

4.2. Algoritam za usavršavanje početnih aproksimacionih intervala

U cilju rešenja postavljenog zadatka biramo linearnu višekoračnu metodu:

$$(4.2.1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i+j}$$

kod koje su α_j i β_j konstante, $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $k \geq 1$ i $\beta_k \neq 0$.

Metodu opisanu formulom (4.2.1) biramo tako da ima lokalnu grešku diskretizacije veličine $O(h^{p+1})$ i da je strogo stabilna.

Formulu (4.2.1) možemo zapisati na sledeći način:

$$(4.2.2) \quad y_{i+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j y_{i+j} + h \left(\delta_k f_{i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j f_{i+j} \right)$$

gde su uvedene oznake:

$$\delta_j = \alpha_j / \alpha_k, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \delta_j = \beta_j / \alpha_k, \quad j = 0, \dots, k.$$

Granice intervala $Y_{i+k}^{[q]}$ usavršavaćemo pomoću formule (4.2.2) koristeći se iterativnim postupkom. U sledećem algoritmu donja i gornja granica i -tog intervala dvostranog aproksimacionog rešenja reda $p-1$, označene su sa y_i^D i y_i^G . Ukoliko je red

dvostranog aproksimacionog rešenja različit od $p-1$, donja i gornja granica i -tog intervala biće označene drugačije. Na primer, granice intervala $Y_{\mathcal{N}}^{[p]}$, $\mathcal{N} = 0, \dots, k-1$ su $y_{\mathcal{N}}^D$ i $y_{\mathcal{N}}^G$ i biće korišćene kao startne vrednosti za metodu (4.2.2). Donju i gornju granicu intervala $Y_{i+k}^{[q]}$ označićemo, redom, sa $y_{i+k}^{D,0}$ i $y_{i+k}^{G,0}$ i to su početne vrednosti koje usavršavamo do reda $p-1$.

ALGORITAM 4.2.

Korak 1 Za $\mathcal{N} = 0, \dots, k-1$ učitati granice $y_{\mathcal{N}}^D$ i $y_{\mathcal{N}}^G$ intervala $Y_{\mathcal{N}}^{[p]}$.

Korak 2 Za $i = 0, \dots, n-k$, izvršiti korake od 3 do 13.

Korak 3 Učitati granice $y_{i+k}^{D,0}$ i $y_{i+k}^{G,0}$ intervala $Y_{i+k}^{[q]}$.

Korak 4 Neka je $\nu = 0$.

Korak 5 Izvršiti korake 6 i 7:

$$\text{Korak 6 neka je } y_{i+k}^{D,\nu+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \min(\delta_j y_{i+j}^D, \delta_j y_{i+j}^G) + \\ h(\min(\delta_k f(x_{i+k}, y_{i+k}^{D,\nu}), \delta_k f(x_{i+k}, y_{i+k}^{G,\nu})) + \\ \sum_{j=0}^{k-1} \min(\delta_j f(x_{i+j}, y_{i+j}^D), \delta_j f(x_{i+j}, y_{i+j}^G))),$$

Korak 7 neka je $\nu = \nu + 1$,

sve dok ne bude ispunjen uslov $y_{i+k}^{D,\nu} = y_{i+k}^{D,\nu+1}$.

Korak 8 Neka je $y_{i+k}^D = y_{i+k}^{D,\nu+1}$.

Korak 9 neka je $\nu = 0$.

Korak 10 Izvršiti korake 11 i 12:

$$\text{Korak 11 neka je } y_{i+k}^{G,\nu+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \max(\delta_j y_{i+j}^D, \delta_j y_{i+j}^G) + \\ h(\max(\delta_k f(x_{i+k}, y_{i+k}^{D,\nu}), \delta_k f(x_{i+k}, y_{i+k}^{G,\nu})) + \\ \sum_{j=0}^{k-1} \max(\delta_j f(x_{i+j}, y_{i+j}^D), \delta_j f(x_{i+j}, y_{i+j}^G))),$$

Korak 12 neka je $\nu = \nu + 1$,

sve dok ne bude ispunjen uslov $y_{i+k}^{G,\nu} = y_{i+k}^{G,\nu+1}$.

Korak 13 Neka je $y_{i+k}^G = y_{i+k}^{G,\nu+1}$.

Korak 14 Za $j = 1, \dots, n$ štampati granice y_j^D i y_j^G intervala Y_j .

Korak 15 Završiti postupak.

U opisanom algoritmu vrši se usavršavanje granica intervala Y_{i+k} sve dok ne dođe do poklapanja dve uzastopne aproksimacije. Algoritam se može lako izmeniti tako da broj iteracija bude unapred fiksiran. U algoritmu su ključni koraci 6 i 11 preko kojih se odvija proces usavršavanja, a koji se zasnivaju na formuli (4.2.2).

4.3. Problemi dvostranih aproksimacionih metoda tipa prediktor-korektor

Algoritam 4.2. predstavlja korektor-komponentu za prediktor-korektor metodu gde prediktor-komponenta nije određena.

Da bi metoda za nalaženje dvostranog aproksimacionog rešenja zadatka (1.2.1) bila kompletna, treba rešiti sledeća pitanja:

1. U slučaju kad je broj koraka $k > 1$, kako naći startne aproksimacione intervale $Y_{i+k}^{[p]}$, $i = 0, \dots, k-1$?
2. Kako odrediti početne aproksimacione intervale $Y_{i+k}^{[q]}$ ($i = 0, \dots, n-k$), tj. koju metodu koristiti kao prediktor ?
3. Koji uslov treba da bude ispunjen da bi važiolo $y(x_{i+k}) \in Y_{i+k}^{[p]}$, ($i = 0, \dots, n-k$), tj. da bi algoritam 4.2. davao željene rezultate ?

Pored ovih pitanja pojavljuju se i pitanja koja su tipična za linearne višekoračne metode kao što su: kada će konvergirati proces opisan koracima 5 i 10 u algoritmu 4.2, kako izabrati korak h da se dobiju optimalni rezultati dr. Ova pitanja su detaljno razmatrana u knjigama [21] i [14] pa ih ovde nećemo razmatrati. Napomenimo da će proces opisan koracima 5 i 10 u algoritmu 4.2. konvergirati ako je ispunjen uslov: $h < 1/(L\beta_k)$. Da bi se izbeglo ispitivanje ovog uslova, često je u korektor-komponenti broj iteracija unapred zadat.

Među navedenim pitanjima pitanje 1 javlja se uvek kod višekoračnih metoda kada je $k > 1$. Pitanje 2 je karakteristično za svaku prediktor-korektor metodu. Međutim, kod dvostranih aproksimacionih metoda pitanja 1 i 2 više dolaze do izražaja zato što treba određivati intervale, a ne pojedinačne tačke. Pitanje 3 pojavljuje se samo kod dvostranih aproksimacionih metoda.

Razmotrimo neke odgovore na pitanja 1,2 i 3.

1. Za određivanje startnih intervala Y_N , $N = 0, \dots, k-1$ u slučaju kada je $k > 1$ mogu se koristiti dvostrane jednokoračne metode. Mada dvostrane jednokoračne metode nisu rasprostranjene kao jednokoračne, mogu se sresti u primeni. Dvostrane metode tipa Runge-Kutta opisane su u [22] i [23]. Metode intervalne analize opisane u [27] i [33] mogu biti takođe korišćene za određivanje startnih intervala. Imajući u vidu rezultate 3. glave, u izvesnim slučajevima može se koristiti i Čapliginova metoda. U [18] su opisane neke hibridne dvostrane metode koje se takođe mogu iskoristiti za određivanje startnih intervala.

2. Dvostrane hibridne metode iz [18] su odgovor i na drugo pitanje. Naime, kao prediktor može da se koristi sledeća hibridna metoda:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} y_{i+k}^{[2]} &= y_{i+k-1}^{[2-]} + hf_{i+k-1}^{[2-]} \\ y_{i+k}^{[2-]} &= y_{i+k-1}^{[2-]} + hf_{i+k}^{[2]} \\ y_{i+k}^{[2+]} &= y_{i+k-1}^{[2+]} + hf_{i+k-1}^{[2+]} \end{aligned}$$

Lokalna greška diskretizacije za metodu (4.3.1) je:

$$(4.3.2) \quad \mathcal{L}_{i+k}^{[2\pm]} = \pm \frac{1}{2} h^2 y''(x_{i+k-1}) + O(h^3)$$

U metodi opisanoj formulama (4.3.1) za određivanje početnih intervala svuda gde je donji indeks $i+k-1$, a gornji indeks (u uglastoj zagradi) 2, ako je pogodnije za izračunavanje gornji indeks se može zameniti sa p . To znači da će se za određivanje sledećeg početnog intervala koristiti prethodno usavršeni interval.

U slučaju da se žele precizniji početni intervali, može se koristiti hibridna (ili neka druga) metoda koja daje veću tačnost. Obično u takvim slučajevima prediktor metoda postaje komplikovanija. Na primer, u [18] je opisana metoda koja ima lokalnu grešku diskretizacije oblika:

$$\mathcal{L}_{i+k}^{[4\pm]} = \pm \frac{1}{216} h^4 y^{(4)}(x_{i+k-1}) + O(h^5).$$

Pored metode opisane formulama (4.3.1) u [18] su navedene i druge hibridne metode različite tačnosti koje se mogu koristiti kao prediktor-komponente u dvostranoj prediktor-korektor metodi.

Kao prediktor-komponente ne moraju biti korišćene isključivo hibridne metode, već ma koje dvostrane metode koje nisu isuviše

komplikovane. Na primer, mogu se koristiti neke metode iz odeljka 3.2.

3. U vezi sa pitanjem 3 navodimo teoremu koja kazuje kada se tačno rešenje nalazi između granica intervala dobijenih iterativnim putem pomoću algoritma 4.3.

Teorema 4.3.1. Ako su ispunjeni uslovi:

- (a) $y(x) \in Y_{\mathcal{V}}^{[p]}$, $\mathcal{V} = 0, \dots, k-1$,
- (b) $y(x_{i+k}) \in Y_{i+k}^{[q]}$, $i = 0, \dots, n-k$ i $q < p$,
- (c) parcijalni izvod $\partial f / \partial y$ je neprekidan i stalnog znaka u okolini rešenja $y(x)$,
- (d) linearna višekoračna metoda (4.2.2) ima lokalnu grešku diskretizacije veličine $O(h^{p+1})$ kad $h \rightarrow 0$,

onada važi:

$$(4.3.3) \quad y_{i+k}^{D, \mathcal{V}} < y(x_{i+k}) + O(h^{p+1}) < y_{i+k}^{G, \mathcal{V}}$$

za $i = 0, \dots, n-k$ i $\mathcal{V} = 1, 2, \dots$

Dokaz Dokažimo da (4.3.3) važi za $i = 0$, tj. da važi:

$$(4.3.4) \quad y_k^{D, \mathcal{V}} < y(x_k) + O(h^{p+1}) < y_k^{G, \mathcal{V}}, \quad \mathcal{V} = 1, 2, \dots$$

Nejednakosti (4.3.4) dokazaćemo matematičkom indukcijom po \mathcal{V} .

Dokažimo da (4.3.4) važi za $\mathcal{V} = 1$.

Na osnovu pretpostavke pod (a) važi:

$$(4.3.5) \quad \min(\tau_j y_j^D, \tau_j y_j^G) < \tau_j y(x_j) < \max(\tau_j y_j^D, \tau_j y_j^G)$$

za $j = 0, \dots, k-1$. Na osnovu pretpostavki pod (b) i (c) važi:

$$(4.3.6) \quad \min(\delta_k f(x_k, y_k^{D,0}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,0})) < \delta_k f(x_k, y(x_k)) < \max(\delta_k f(x_k, y_k^{D,0}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,0})).$$

Pretpostavke pod (a) i (b) obezbeđuju da važi:

$$(4.3.7) \quad \min(\delta_j f(x_j, y_j^D), \delta_j f(x_j, y_j^G)) < \delta_j f(x_j, y(x_j)) < \max(\delta_j f(x_j, y_j^D), \delta_j f(x_j, y_j^G))$$

za $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Množeći nejednakosti (4.3.7) i (4.3.6) sa h i sabirajući sa (4.3.5) dobijamo:

$$(4.3.8) \quad y_k^{D,1} < \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j y(x_j) + h \sum_{j=0}^k \delta_j f(x_j, y(x_j)) < y_k^{G,1}.$$

Na osnovu pretpostavke pod (d), imajući u vidu definiciju lokalne greške diskretizacije u odeljku 1.2. dobijamo:

$$(4.3.9) \quad y_k^{D,1} < y(x_k) + o(h^{p+1}) < y_k^{G,1}$$

što znači da (4.3.4) važi za $\nu = 1$.

Pretpostavimo da za $\nu > 1$ važi:

$$y_k^{D,\nu} < y(x_k) + o(h^{p+1}) < y_k^{G,\nu}$$

Na osnovu ove (indukcione) pretpostavke važi:

$$(4.3.10) \quad \min(\delta_k f(x_k, y_k^{D,\nu}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,\nu})) < \delta_k f(x_k, y(x_k) + o(h^{p+1})) \\ < \max(\delta_k f(x_k, y_k^{D,\nu}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,\nu})).$$

Imajući u vidu pretpostavku pod (c) dobijamo:

$$(4.3.11) \quad \min(\delta_k f(x_k, y_k^{D,\nu}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,\nu})) < \delta_k (f(x_k, y(x_k)) + o(h^{p+1})) \\ < \max(\delta_k f(x_k, y_k^{D,\nu}), \delta_k f(x_k, y_k^{G,\nu})).$$

Množeći nejednakosti (4.3.11) i (4.3.7) sa h i sabirajući sa

(4.3.5) imamo:

$$y_k^{D,\nu+1} < \sum_{j=0}^{k-1} h_j y(x_j) + h \left(\sum_{j=0}^k \delta_j f(x_j, y(x_j)) + o(h^{p+1}) \right) < y_k^{G,\nu+1}.$$

Ovim smo dokazali da za $i = 0$ i $\nu = 1, 2, \dots$ važe nejednakosti (4.3.3).

Indukcijom po i za $0 < i \leq n-k$ na sličan način se dokazuje da za svako $i = 0, 1, \dots, n-k$ važe nejednakosti (4.3.3).

Sa tim bi bio kompletiran dokaz teoreme 4.3.1.

U teoremi 4.3.1 pretpostavka pod (b) u vezi je sa globalnom greškom diskretizacije. Naime, pretpostavka pod (b) kazuje da je globalna greška diskretizacije kontrolisana već pomoću prediktora. O ponašanju globalne greške diskretizacije u okviru prediktora, teorema 4.3.1 ništa ne kazuje.

Teorema 4.3.1 takođe ne kazuje ništa o širini intervala $[y_{i+k}^D, y_{i+k}^G]$. Da se širina ovog intervala ne bi naglo uvećavala, potrebne su neke pretpostavke o stabilnosti korektor-komponente. U odeljku 4.2. mi smo pretpostavili da je korišćena metoda opisana pomoću formule (4.2.2) strogo stabilna. U najvećem broju slučajeva stroga stabilnost obezbeđuje da se pomoću algoritma 4.2. dobiju dobri rezultati.

Određivanje startnih intervala i ispitivanje kada će važiti pretpostavka pod (a) zahteva analizu jednokoračnih dvostranih metoda, što ćemo ovde izostaviti.

NAPOMENA: Iz izloženog se vidi da se opisana dvostrana prediktor-korektor metoda može bez većih teškoća primeniti i na sistem diferencijalnih jednačina, tj. na vektorski slučaj.

4.4. Primeri

1. primer

Neka je dat Cauchy-ev zadatak

$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} y' &= y + \exp(x) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Traži se rešenje zadatka (4.4.1) na intervalu $[0,1]$ za korak $h = 0.1$ sa greškom reda $O(h^3)$ u intervalnom obliku.

Tačno (teorijsko) rešenje zadatka (4.4.1) je $y(x) = x \exp(x)$.

Za rešavanje postavljenog zadatka primenićemo dvostranu prediktor-korektor metodu i u tačkama $\{x_i = ih \quad i = 1, \dots, 10\}$ rešenje predstaviti u obliku intervala Y_i .

Kao prediktor korisrićemo metodu opisanu formulama (4.3.1), a kao korektor Adams-Moulton-ovu metodu:

$$(4.4.2) \quad y_{i+2} = y_{i+1} + (h/12)(5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i)$$

kod koje je lokalna greška diskretizacije oblika:

$$-\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+2}]$$

Pošto je vrednost $y(x_0)$ poznata, od startnih intervala treba odrediti samo interval Y_1 za tačku $x_1 = 0.1$. Pretpostavimo da je to urađeno nekom od pomenutih metoda u odeljku 4.3.

Rezultati primene dvostrane prediktor-korektor metode prikazani su u tablici 4.4.1. Prva i druga vrsta sadrže, redom, donju i gornju granicu intervala nakon primene dvostrane hibridne metode (4.3.1). Treća i četvrta vrsta sadrže donju i gornju granicu intervala nakon primene korektora (4.4.2) prema algoritmu 4.2. Po vrstama su prikazani rezultati nakon prve i nakon druge iteracije. U petoj vrsti navedeni su numerički rezultati, koji se dobijaju iz tačnog (teorijskog) rešenja, na 6 decimala.

Napomenimo da je korišćena prediktor-korektor metoda oblika $P(EC)^r$ sa fiksnim brojem iteracija $r = 2$.

T A B L I C A 4.4.1

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y^{D2}	0.10000	0.23195	0.39065	0.58017	0.80528	1.07132	1.38442	1.75152	2.18051	2.68037
y^{G2}	0.12052	0.25595	0.41848	0.61245	0.84245	1.11413	1.43364	1.80804	2.24533	2.75461
y^{D4}										
1.	—	0.24366	0.40419	0.59580	0.82329	1.09205	1.40823	1.77878	2.21180	2.71617
2.	0.11040	0.24414	0.40475	0.59645	0.82404	1.09291	1.40922	1.77996	2.21310	2.71766
y^{G4}										
1.	—	0.24487	0.40568	0.59761	0.82542	1.09455	1.41116	1.78226	2.21581	2.72085
2.	0.11060	0.24441	0.40515	0.59699	0.82471	1.09373	1.41022	1.78118	2.21458	2.71944
y^T	0.110517	0.244280	0.404957	0.596730	0.824360	1.093276	1.409627	1.780433	2.213643	2.718281

2. primer

Zadatak je da se odredi numeričko rešenje Cauchy-evog problema:

$$(4.4.3) \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}$$

$$y(1) = \sqrt{3} = 1.7320508$$

na intervalu $[1,2]$ sa korakom $h = 0.1$ korišćenjem dvostrane prediktor-korektor metode sa tačnošću $O(h^4)$.

Diskretan skup tačaka u kojem tražimo rešenje je $\{x_i = 1+ih, i=1, \dots, 10\}$. Kao prediktor i u ovom slučaju korišćemo metodu (4.3.1), a kao korektor Adams-Moulton-ovu metodu:

$$(4.4.4) \quad y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{24} (9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i)$$

čija lokalna greška diskretizacije je oblika:

$$L_{i+5} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi), \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+3}.$$

Dakle, u ovom slučaju je $p = 4$, a $q = 2$.

Tačno rešenje zadatka (4.4.3) je

$$(4.4.5) \quad y(x) = \sqrt{x(x+2)}.$$

Numerički rezultati prikazani su u tablici 4.4.2. Kao i u prethodnom primeru, prva dva reda sadrže donju i gornju granicu intervala nakon primene prediktor-komponente. Treći i četvrti red sadrže donju i gornju granicu intervala nakon primene korektora (4.4.4), a peti red sadrži numerički izraženo tačno rešenje na 7 decimala. Rezultati u trećoj i četvrtoj vrsti dobijeni su nakon prve iteracije.

Pretpostavljeno je da su startni intervali poznati u tačkama 1.1 i 1.2.

4.5. Zaključak

Iz navedenih primera vidi se da su rezultati dobijeni numeričkim izračunavanjem u skladu sa teorijskim rezultatima. U oba primera kao korektor korišćena je jedna od Adams-Moulton-ovih formula. Adams-Moulton-ove metode su pogodne kao korektor -kompo-

T A B L I C A 4.4.2

$y \backslash x$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
y^{D2}	1.84574	1.95885	2.07061	2.18120	2.29081	2.39958	2.50761	2.61500	2.72183	2.82815
y^{G2}	1.84752	1.96035	2.07187	2.18228	2.29175	2.40041	2.50835	2.61567	2.72243	2.82870
y^{D5}	<u>1.84660</u>	<u>1.95958</u>	2.07121	2.18172	2.29126	2.39997	2.50795	2.61530	2.72209	2.82838
y^{G5}	<u>1.84663</u>	<u>1.95960</u>	2.07123	2.18175	2.29130	2.40002	2.50801	2.61537	2.72217	2.82846
y^T	1.8466185	1.9595918	2.0712315	2.1817424	2.2912880	2.4000000	2.5079872	2.6153390	2.7221315	2.8284271

nente jer imaju dobre karakteristike kada je u pitanju stabilnost.

Nedostatci opisane dvostrane prediktor-korektor metode su: neophodnost određivanja startnih intervala za $k > 1$ i zahtev da funkcija $f(x,y)$ bude diferencijabilna i stalnog znaka u okolini rešenja $y(x)$.

Iz navedenih rezultata zaključuje se da samo od korektor-komponente zavisi tačnost krajnjih rezultata, naravno, ukoliko tačno rešenje u određenoj tački pripada intervalu dobijenom pomoću prediktora. To praktično znači da izborom preciznije prediktor-komponente ne utičemo na tačnost krajnjeg rezultata, već jedino možemo smanjiti obim računanja.

5. PRECIZIRANJE LOKALNE GREŠKE DISKRETIZACIJE KOD LINEARNIH VIŠEKORAČNIH METODA

5.1 O asimptotskoj oceni lokalne greške diskretizacije

Lokalna greška diskretizacije kod linearnih višekoračnih metoda detaljno se razmatra u knjigama [14] i [21].

U [14] je dokazano da sve linearne višekoračne metode lokalna greška diskretizacije može da se izrazi u obliku:

$$(5.1.1) \quad \mathcal{L}(y(x);h) = h^{p+1}C_{p+1}y^{(p+1)}(x) + o(h^{p+2})$$

kada $h \rightarrow 0$, $nh = b - x_0$ i funkcija $y(x)$ ima neprekidne izvode do reda $p+1$. ($C_{p+1} \in \mathbb{R}$, $p > 0$). Štaviše, lokalna greška diskretizacije, pod prethodnim uslovima, kod velikog broja višekoračnih metoda (Adams-ove, Milne-ove i metode zasnovane na diferenciranju) može da se izrazi još preciznije na sledeći način:

$$(5.1.2) \quad \mathcal{L}(y(x);h) = h^{p+1}C_{p+1}y^{(p+1)}(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+k}]$$

Pretpostavljajući da su vrednosti rešenja tačne u tačkama x_{i+j} , $j = 0, \dots, k-1$ (ova pretpostavka je uobičajena prilikom proučavanja lokalne greške diskretizacije, videti [21]), naš zadatak je da preciznije odredimo lokalnu grešku diskretizacije oblika (5.1.2). Naime, i pored toga što je poznat oblik lokalne greške diskretizacije, vrednost $y^{(p+1)}(\xi)$, u opštem slučaju, nije poznata. Dok ne procenimo veličinu $y^{(p+1)}(\xi)$, ne možemo preciznije odrediti lokalnu grešku diskretizacije. Preciziranje lokalne greške diskretizacije vršimo upravo ocenjujući veličinu $y^{(p+1)}(\xi)$. Kako je konstanta C_{p+1} obično poznata, sa ocenom izvoda $(p+1)$. reda, ocenjuje se sa izvesnom tačnošću i lokalna greška diskretizacije iz (5.1.2).

Postavljeni zadatak i do sada je rešavan i to na različite

načine. Najčešće korišćena, verovatno, je Milne-ova metoda. (Ova metoda je detaljno analizirana u [21].)

Pretpostavimo da želimo da preciziramo grešku metode reda p . Ideja je da se koristi metoda reda $p-1$ i da se na osnovu dobijenih rezultata u istoj tački približno odredi $y^{(p+1)}(\xi)$. Predloženi postupak pogodan je za primenu kod prediktor-korektor para gde je red prediktora za jedan manji od reda korektora. Dobijena ocena lokalne greške diskretizacije može da se koristi za popravljjanje numeričkih rezultata nađenih pomoću odgovarajuće metode. Međutim, zadovoljavajući rezultati mogu da se dobiju samo na nekoliko koraka čak i kod strogo stabilnih metoda. Bolji rezultati u popravljjanju numeričkih vrednosti mogu se očekivati kada se popravka vrši na osnovu globalne greške diskretizacije. Ocena globalne greške diskretizacije na osnovu njenog asimptotskog ponašanja je znatno složeniji posao. U [14] je data asimptotska ocena globalne greške diskretizacije za linearne višekoračne metode. U ovoj asimptotskoj oceni javlja se sabirak $h^p e(x)$ koji odgovara lokalnoj grešci diskretizacije. Kada su startne vrednosti izračunate sa većom tačnošću od one koju obezbeđuje lokalna greška diskretizacije, onda je sabirak $h^p e(x)$ dominantan i ocena globalne greške diskretizacije može da se izvrši na osnovu ovog sabirka. Funkcija $e(x)$ zavisi, između ostalog, od $y^{(p+1)}(x)$ pa rezultati dobijeni prilikom preciziranja lokalne greške diskretizacije mogu da se iskoriste i u oceni globalne greške diskretizacije.

5.2. Opis i obrazloženje postupka za preciziranje lokalne greške diskretizacije

Pretpostavimo da imamo dve linearne višekoračne metode reda $p-1$ i p sa lokalnom greškom diskretizacije oblika (5.1.2). Neka je pomoću prve metode u tački x_{i+k} dobijena vrednost $y_{i+k}^{(1)}$, a pomoću druge $y_{i+k}^{(2)}$. Dakle važi:

$$(5.2.1) \quad y(x_{i+k}) = y_{i+k}^{(1)} + d_1 h^p y^{(p)}(\xi)$$

$$(5.2.2) \quad y(x_{i+k}) = y_{i+k}^{(2)} + d_2 h^{p+1} y^{(p+1)}(\eta)$$

gde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, a $\xi, \eta \in [x_i, x_{i+k}]$

Pretpostavimo da je obezbeđena neprekidna diferencijabilnost izvoda funkcije $y(x)$ do potrebnog reda na intervalu $[x_0, x_n]$. Algoritam za ocenu greške iz (5.2.2) može se opisati na sledeći nači.

ALGORITAM 5.2

Korak 1 Neka je $l_1 = (y_{1+k}^{(2)} - y_{1+k}^{(1)}) / (d_1 h^p)$.

Korak 2 Za $i = 2, \dots, n-k$, izvršiti korake 3, 4 i 5.

Korak 3 Neka je $l_i = (y_{i+k}^{(2)} - y_{i+k}^{(1)}) / (d_1 h^p)$.

Korak 4 Neka je $\mathcal{L}_{i-1} = d_2 (l_i - l_{i-1}) h^p$.

Korak 5 Štampati \mathcal{L}_{i-1} .

Korak 6 Završiti postupak.

Pomoću opisanog algoritma ocenjuje se greška u tačkama x_{i+k} , $i = 1, \dots, n-k-1$, što znači da se pomoću ovog algoritma ne može oceniti lokalna greška diskretizacije u poslednjoj tački x_n .

Teorema 5.2.1. Za lokalnu grešku diskretizacije metode (5.2.2) ocenjenu pomoću algoritma 5.2 u tačkama x_{i+k} , $i=1, \dots, n-k-1$, važi:

$$\mathcal{L}_{i+k} = d_2 (l_{i+1} - l_i) h^p + o(h^{p+2}).$$

Dokaz Prema pretpostavci o neprekidnoj diferencijabilnosti izvoda imamo:

$$(5.2.3) \quad y^{(p)}(\xi) = y^{(p)}(x_i) + h y^{(p+1)}(x_i) + o(h^2),$$

$$(5.2.4) \quad y^{(p+1)}(\eta) = y^{(p+1)}(x_i) + o(h).$$

Zamenjujući izvode iz (5.2.3) i (5.2.4) u (5.2.1) i (5.2.2), nalazimo:

$$(5.2.5) \quad y(x_{i+k}) = y_{i+k}^{(1)} + d_1 h^p y^{(p)}(x_i) + d_1 h^{p+1} y^{(p+1)}(x_i) + o(h^{p+2})$$

$$(5.2.6) \quad y(x_{i+k}) = y_{i+k}^{(2)} + d_2 h^{p+1} y^{(p+1)}(x_i) + o(h^{p+2}).$$

Oduzimanjem (5.2.6) od (5.2.5) dobija se:

$$(5.2.7) \quad y_{i+k}^{(1)} - y_{i+k}^{(2)} + d_1 h^p y^{(p)}(x_i) + (d_1 - d_2) h^{p+1} y^{(p+1)}(x_i) + o(h^{p+2}) = 0.$$

Iz (5.2.7) imamo:

$$(5.2.8) \quad y^{(p)}(x_i) = \frac{y_{i+k}^{(2)} - y_{i+k}^{(1)}}{d_1 h^p} + \frac{d_2 - d_1}{d_1} h y^{(p+1)}(x_i) + o(h^2).$$

Uvodeći sledeće oznake:

$$\ell_i = \frac{y_{i+k}^{(2)} - y_{i+k}^{(1)}}{d_1 h^p} \quad \text{i} \quad c = \frac{d_2 - d_1}{d_1} h,$$

nalazimo:

$$(5.2.9) \quad y^{(p)}(x_i) = \ell_i + c y^{(p)}(x_i) + o(h^2)$$

Na osnovu formula za numeričko diferenciranje (videti [5]) imamo:

$$(5.2.10) \quad y^{(p+1)}(x_i) = \frac{y^{(p)}(x_{i+1}) - y^{(p)}(x_i)}{h} + o(h)$$

$$(5.2.11) \quad y^{(p+1)}(x_{i+1}) = y^{(p+1)}(x_i) + o(h).$$

Zamenjujući $y^{(p)}(x_i)$ i $y^{(p)}(x_{i+1})$ iz (5.2.9) u (5.2.10) i (5.2.11), nalazimo:

$$(5.2.12) \quad h y^{(p+1)}(x_i) = \ell_{i+1} + c y^{(p+1)}(x_{i+1}) - (\ell_i + c y^{(p+1)}(x_i)) + o(h^2)$$

$$h y^{(p+1)}(x_{i+1}) = h y^{(p+1)}(x_i) + o(h^2).$$

Sređivanjem (5.2.12) dobijamo sistem:

$$(5.2.13) \quad (h+c)y^{(p+1)}(x_i) - c y^{(p+1)}(x_{i+1}) = \ell_{i+1} - \ell_i + o(h^2)$$

$$c y^{(p+1)}(x_i) + (h-c)y^{(p+1)}(x_{i+1}) = \ell_{i+1} - \ell_i + o(h^2).$$

Iz sistema (5.2.13) nalazimo:

$$(5.2.14) \quad y^{(p+1)}(x_i) = y^{(p+1)}(x_{i+1}) = (\ell_{i+1} - \ell_i) / h + o(h).$$

Prema tome za grešku $d_2 h^{p+1} y^{(p+1)}(\eta)$, imajući u vidu (5.2.4), dobijamo: (za $i = 1, \dots, n-k-1$):

$$\begin{aligned} d_2 h^{p+1} y^{(p+1)}(\eta) &= d_2 h^{p+1} (y^{(p+1)}(x_i) + o(h)) \\ &= d_2 h^p (\ell_{i+1} - \ell_i) + o(h^{p+2}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Bolji rezultati mogu se očekivati ako se pretpostavi da funkcija $y(x)$ ima izvode višeg reda od $p+1$ i koriste preciznije formule za numeričko diferenciranje. U ovom slučaju algoritam 5.2 postaje znatno složeniji.

5.3. Primeri

1. primer

Neka je zadata prediktor-korektor metoda:

$$(5.3.1) \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$(5.3.2) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i))$$

u kojoj je za (5.3.1) (Euler-ova metoda) lokalna greška diskretizacije $h^2 y''(\xi)/2$, $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$, a za (5.3.2) (trapezna formula) $-h^3 y^{(3)}(\eta)/12$, $\eta \in [x_i, x_{i+1}]$. Prema tome, ispunjeni su uslovi za primenu algoritma 5.2.

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \text{i} \quad d_1 = 1/2.$$

$y_{i+1}^{(2)}$ izračunava se iterativnim postupkom iz formule:

$$y_{i+1}^{(2), \nu} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(2), \nu-1}) + f(x_i, y_i)) \quad \text{i} \quad d_2 = -\frac{1}{12},$$

pri čemu se uzima da je $y_{i+1}^{(2), 0} = y_{i+1}^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \dots$

Razmotrimo konkretan Cauchy-ev zadatak:

$$(5.3.3) \quad \begin{aligned} y' &= (4x + y - 3)^2 \\ y(1) &= -1. \end{aligned}$$

Tačno (teorijsko) rešenje zadatka (5.3.3) je:

$$y(x) = -4x + 3 + 2\text{tg}(2x - 2).$$

Traži se numeričko rešenje problema (5.3.3) na intervalu $[1, 1.5]$ sa korakom $h = 0.1$.

Primenom prediktor-korektor metode opisane pomoću formula (5.3.1) i (5.3.2) dobijaju se rezultati prikazani u tablici 5.3.1. U četvrtoj vrsti prikazana je ukupna greška načinjena na numeričkom rešenju (razlika između tačnog i nađenog numeričkog rešenja). U petoj vrsti je prikazana ocena lokalne greške diskretizacije pomoću algoritma 5.2. Na osnovu ocene greške diskretizacije vršena je korekcija dobijenih numeričkih rezultata. Korigovane vrednosti prikazane su u poslednjoj vrsti. Treća vrsta sadrži tačno rešenje, a prva i druga vrsta rešenja dobijena, redom, pomoću metoda (5.3.1) i (5.3.2).

T A B L I C A 5.3.1

$\begin{matrix} x \\ \text{Rez.} \end{matrix}$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$y_i^{(1)}$	-1.0000	-0.9750	-0.8742	-0.6226	-0.0556
$y_i^{(2)}$	-0.9917	-0.9469	-0.8146	-0.4977	0.2522
y^T	-0.994580	-0.954414	-0.831726	-0.540772	0.114815
R^T	-0.0029	-0.0075	-0.0171	-0.0430	-
R^0	-0.0033	-0.0053	-0.0109	-0.0305	-
y^D	-0.9949	-0.9522	-0.8255	-0.5282	-

Iz tablice 5.3.1 zapaža se da na svakom sledećem koraku raste razlika između nađene i stvarne greške, što se i očekivalo s obzirom da je reč o nađenoj lokalnoj grešci diskretizacije. Ako bismo išli još dalje od početne vrednosti, razlika između stvarne i procenjene lokalne greške diskretizacije postala bi još veća.

2. primer

Neka je data prediktor-korektor metoda:

$$(5.3.4) \quad y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{12} (23y'_{i+2} - 16y'_{i+1} + 5y'_i)$$

$$(5.3.5) \quad y_{i+3} = y_{i+2} + \frac{h}{24} (9y'_{i+3} + 19y'_{i+2} - 5y'_{i+1} + y'_i) .$$

Lokalna greška diskretizacije prediktor-komponente je:

$$\frac{3}{8} h^4 y^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [x_i, x_{i+3}], \text{ a korektor komponente (3.5.5):}$$

$$- \frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\eta), \quad \eta \in [x_i, x_{i+3}] .$$

Prema tome, prediktor i korektor komponente ispunjavaju uslove za primenu algoritma 5.2 sa konstantama $d_1 = 3/8$ i $d_2 = -19/720$. I u ovom slučaju $y_{i+3}^{(2)}$ se izračunava iterativnim putem iz (5.3.5), sa početnom iteracijom $y_{i+3}^{(2),0} = y_{i+3}^{(1)}$.

Pretpostavlja se da su poznate startne vrednosti u dvema prvim tačkama sa tačnošću većom od $O(h^5)$.

Neka je dat konkretan Cauchy-ev zadatak:

$$(5.3.6) \quad \begin{aligned} y' &= y - 2\sin x \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Treba odrediti numeričko rešenje na intervalu $[0, 0.7]$ pomoću metode (5.3.4)-(5.3.5) sa korakom $h = 0.1$ i da se oceni lokalna greška diskretizacije.

Tačno rešenje zadatka (5.3.6) je:

$$y(x) = \sin x + \cos x .$$

Numerički rezultati prikazani su u tablici 5.3.2. Prethodno izračunate startne vrednosti u tačkama 0.1 i 0.2 iznose:

$$y(0.1) = 1.09483758 \quad \text{i} \quad y(0.2) = 1.17873591.$$

T A B L I C A 5.3.2

x Rez.	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$y^{(1)}$	1.25081428	1.31043423	1.35696072	1.38992891	1.40900937
$y^{(2)}$	1.25085692	1.31047978	1.35700875	1.38997893	1.40906088
y^T	1.25085667	1.31047934	1.35700810	1.38997809	1.40905988
R^T	-2.2×10^{-7}	-4.4×10^{-7}	-6.1×10^{-7}	-8.4×10^{-7}	-
R^0	-2.0×10^{-7}	-1.7×10^{-7}	-1.4×10^{-7}	-1.5×10^{-7}	-

U tablici 5.3.2 za računanje vrednosti y_{i+3} korišćene su vrednosti $y_i^{(2)}$, $y_{i+1}^{(2)}$ i $y_i^{(2)}$ dobijene pomoću korektora (5.3.5) iterativnim putem do konvergencije (dok nije došlo do poklapanja dve susedne iteracije na 8 decimala). Međutim, u izračunavanju vrednosti y_{i+3} mogu da se koriste prethodno popravljene vrednosti na osnovu ocene lokalne greške diskretizacije. U ovom slučaju algoritam za izračunavanje vrednosti $y_{i+3}^{(2)}$ postaje znatno složeniji.

L I T E R A T U R A

- [1] Бабкин Б.М.: Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений на основе теоремы С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, ДАН, СССР, (1948) т. LIX.
- [2] Багаев Б.М, Шайдуров В.В: Повышение точности вариационно-разностных решений дифференциальных задач с особенностями, Вычислительные методы ред. Марчук Г. И. и Лионс Ж.Л, Наука, Новосибирск, (1978), 216-228.
- [3] Бахвалов Н.С: Численные методы 1, Наука, Москва, (1973), 167 - 185.
- [4] Bauch H: On the Iterative Inclusion of Solutions in Initial - Value Problems for Ordinary Differential Equations, Computing, 22, (1979), 185-203.
- [5] Berezin I.S, Žitkov N.P: Numerička analiza, Naučna knjiga, Beograd, (1963), 185-203.
- [6] Березин И.С, Жидков Н. П: Методы вычислений 2, Физ. Мат. Гиз. Москва, (1959), 259-372.
- [7] Brezinski C: A General Extrapolation Algorithm, Num. Mathematik, 35, 2, (1980), 175-189.
- [8] Burden R.L, Faires J.D, Reynolds A.G: Numerical Analysis, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, Massachusetts, (1981), 180-258.
- [9] Чаплыгин С. А: Избранные труды по механике и математике, Москва, (1954), 490-538.

- [10] Демидович Б.П, Марон И А, Шувалова: Численные методы анализа, Наука, Москва, (1967), 121 -207.
- [11] Denflhard P: Order and Stepsize Control in Extrapolation Methods, Num. Mathematik, 41, 3, (1983), 399-422.
- [12] Hansen E: Global Optimization Using Interval Analysis - The Multi-dimensional Case, Num. Mathematik, 34, (1980), 247-270.
- [13] Havie T: Generalized Neville type extrapolation schemes, BIT, 19, (1979), 204-213.
- [14] Henrici P: Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley and sons, inc. New York, London, (1962), 187-288.
- [15] Hildebrand F.B: Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, (1965), 188-239.
- [16] Холл Дж. Уатт Дж. (ред.): Современныe численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, Мир, Москва, (1979), 1 - 116.
- [17] Ieltsch R. Nevaulinna O: Stability and Accuracy of Time Discretizations of Initial-value Problem, Num. Mathematik, 40, 2, (1982), 245-296.
- [18] Крылов В.И, Бобков В.В, Монастырний П.И: Начала теории вычислительных методов - дифференциальные уравнения, Наука и техника, Минск, (1982), 1 - 146.
- [19] Курпель Н.С: Некоторые обобщения и модификации метода С. А. Чаплыгина у "Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений" (ред. Митропольский Ю.А. и Лучка А.Ю.) Инст. мат. АН УССР, Киев, (1971), 51 - 72.
- [20] Lambert J. D: The initial value problem for ordinary differential equations, in " The state of the Art in Numerical Analysis", (ed. Jacobs D.A.H.), Academic Press, London, New York, San Francisco, (1977), 451 -500.

- [21] Lambert J.D: Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley and sons, London, New York, Sydney, Toronto, (1973), 1-195.
- [22] Ляшко И.И, Макаров В.Л, Скоробогатько А.А: Методы вычислений, Вища школа, Киев, (1977), 253 - 285.
- [23] Лященко Н.Я, Долинный О.Б: О построении одного класса двусторонних формул типа Рунге-Кутты шестого порядка точности, Вычислительная и прикладная мат. вып. 33, (1977), 98 - 109.
- [24] Лузин Н. Н: Интегральное исчисление, Советская наука, Москва, (1949), 402-419.
- [25] Лузин Н. Н: О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина, Труды , ЦАГИ, 141, (1932), 1 - 27 .
- [26] Марчук Г.И, Шайдуров В.В: Повышение точности решений разностных схем, Наука, Москва, (1979), 9 - 97.
- [27] Moore R. E: Interval analysis, Prentice-Hall, inc, Englewood Cliffs, N.J. (1966), 90-106.
- [28] Moor R. E: Two-sided approximation to solutions of nonlinear operator equations - a comparison of methods from classical analysis, functional analysis and interval analysis, Lecture Notes in Computer Science (ed. G. Goos and Hartmanis J.), 29, (1975), 31-47.
- [29] Nickel K: Interval-Analysis, in "The state of the Art in Numerical Analysis", (ed. Jacobs D.A.H.), Academic Press, London, New York, San Francisco, (1977), 193-225.
- [30] Petrović M: Računanje s brojnim razmacima, Građevinska knjiga, Beograd, (1978), 6-36 i 133-147.
- [31] Protić LJ: Neke nove metode za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina , (doktorska disertacija), Beograd, (1978), 6-36.
- [32] Shampine L.F, Baca L.S: Smoothing the Extrapolated Midpoint Rule, Num. Mathematik, 41,2, (1983), 165-176.

- [33] Шокин Д. И: Интервальный анализ, Наука, Новосибирск, (1981), 60-91.
- [34] Штеттер Х: Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений, Мир, Москва, (1978), 1 - 82.
- [35] Тошич Д: Обобщения теоремы о разложении для метода экстраполяции Ричардсона, Мат. Весник, 5 (23) 4 (1981), 429-435.
- [36] Tošić D: Some problems related to discretization of Chaplygin's method, Matematički vesnik, (35) sv. 3, (1984), 305-318.
- [37] Vidossich G: Chaplygin's Method is Newton's Method, Journal of mathematical analysis and applications, 66, (1978), 188-206.

