Универзитет у Београду
Математички факултет

мр Ангелина В. Илић Степић

О формализацији p-адске, квалитативне и условне вероватноће

докторски рад

Београд, 2011.

Садржај

Предговор

Посматрање теорије вероватноће као део логике први је започео Лајбниц. Данас је доста развијена формализација вероватносног резоновања и ту можемо издвојити два водећа приступа, односно две врсте логика: логике са вероватносним квантификаторима [54, 55, 56] и логике са вероватносним операторима [29, 42, 43, 46, 48].

Кислер је развио логике са вероватносним квантификаторима [55]. Он је посмастрао структуре (M, μ), где је M структура првог реда а језик ових логика садржи квантификаторе облика $P\overline{x} \geq r$ при чему формула $(P\overline{x} \geq r)\alpha(x)$ значи мера (вероватноћа) скупа $\{\overline{x} : \alpha(\overline{x})\}$ је већа или једнака r. Поред тога разматрао је и вероватносне логике погодне за изражавање особина случајних промењљивих. Увео је интегралне операторе, затим квантификаторе облика $\int ...dx$, као и оператор $E[\cdot|\cdot]$ којим се изражава условно очекивање случајне промењљиве.

Логике са вероватносним операторима омогућавају формално закључивање о вероватноћи. Фагин, Халперн и Мегидо [42, 43] развили су разне аксиматске системе за резоновање о вероватноћи и при том показали теореме потпуности одговарајућих логика. Интерпретација вероватноће у овим радовима је субјективистичка, односно вероватноћа је схваћена као степен веровања. Независно од њих, вероватносним логикама и њиховим везама са темпоралним логикама бавили су се Рашковић и Огњановић [37, 51, 29, 48, 33]. У овим логикама језик класичне логике проширен је листом оператора $P_{\geq s}\alpha$, при чему је s рационалан број (s може припадати неком коначном или бесконачном подскупу скупа рационалних бројева или неком јединичном интервалу одређеног рекурзивног неархимедовског поља које садржи реационалне бројеве). Наведени оператор $P_{\geq s}\alpha$ има значење: "вероватноћа формуле α је већа или једнака s". У поменутим радовима дате су бесконачне аксиоматизације одговарајућих логика, при чему су формуле коначне (а докази могу бити бесконачни). Затим је свугде показана коректност и јака потпуност. Формално резоновање о условној вероватноћи може бити корисно у многим областима рачунарства и вештачке интелигенције. У [42] уведена је логика за резоновање о условним вероватноћама и при том су коришћена реално затворена поља, док су у [33, 34] уведене логике које садрже неколико типова вероватносних опеартора а за кодомен вероватноће узет је јединични интервал неархимедовског поља $\mathbf{Q}[\varepsilon]$.

Овај рад представља својеврстан наставак развоја вероватносних логика при чему је за кодомен вероватноће коришћено поље p-адских бројева. Овде је такође дата је бесконачна аксиоматизација, док су формуле коначне. Доказане су одговарајуће теореме коректности и потпуности. Поред вероватносних логика са p-адски вредносном вероватноћом овде је дато и једно проширење реално вредносне логике [32]. Овде је заправо представље но неколико вероватносних логика за p-адски вредносну вероватноћу, затим су дати примери у којима се ове логике примењују. Прва међу њима је p-адска исказна логика L_{Q_p} у којој је користећи операторе облика: $K_{r,\rho}\alpha$ могуће исказати "вероватноћа исказне формуле α припада p-адској кугли са центром r и полупречинокм ρ". Специјално, $K_{r,0}\alpha$ значи "вероватноћа исказне формуле α је једнака r". Након проширења логике L_{Q_p} у различитим правцима, уведени су оператори $D_\rho\alpha, \beta$ који имају значење: "p-адско растојање између вероватноће формуле α и вероватноће формуле β је мање до једнако ρ". На овај начин се "p-адски " упоређују вероватноће двеју формула без знања о њиховом вредностима. На крају је разматрана p-адска условна вероватноћа увођењем оператора $CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ који има значење: " условна вероватноћа формуле α при услову β припада p-адској кугли са центом r и полупречником ρ ".

Поље Q_p није уређено, па се не могу користити стандардни оператори $P_{\geq r}\alpha$, помоћу којих се вероватноћа апроксимирала низом интервала. Уместо тога, опрераторима $K_{r,\rho}$ вероватноћа се апроксимира низом кугли. Дакле, овај недостатак уређења у Q_p представља једну од основних разлика између реално вредносне и p-адски врсносне вероватноће а самим тим и разлику између одговарајућих логика које их формализују. Са друге стране, поље Q_p садржи и негативне бројеве па је у вероватносној логици за p-адски вредносну вероватноћу могуће записати $K_{-\frac{1}{3},0}\alpha$, дакле, вероватноћа од α је једнака $-\frac{1}{3}$. У вероватносној логици заб реално вредносну вероватноћу овако нешто нема смисла.

Поред ових разлика у изражајности вероватносне логике зс p-адски вредносну вероватносне логике за реално вредносну вероватноћу, потреба за формализацијом p-адске вероватноће настала је и због веома пристутног p-адског приступа разним областима математика а посебно вероватноће. Наиме, након што је Kurt Hensel [52] увео p-адске бројеве у циљу примена одређених техника у теорији бројева, интерес за p-адику је растао. Тако да данас постоје и развијају се разне области математике као што су: теорија модела p-адских поља, p-адска анализа која укључује и теорију дистрибуција, диференцијалне и псеудодиференцијалне једначине, спектрална теорија и коначно p-адска вероватноћа који је развио Андреи Креников. Развојем p-адске вероватноће створена је математичка подлога за рад са специфичностима које се јављају у квантној физици, као што су негативне вероватноће (Wigner-ова диструбуција на фазном простору и Dirak-ове дистибуције).

Развој вероватносне логике са p-адски вредносном вероватноћом представља новину у области вероватносне логике. Наиме, до сада нису развијане логике ове врсте, и поред резултата представљених у овом раду постоји још један рад на ту тему - [40]. У [40] кодомен вероватноће је $\mathbf{Q_p}^{alg} \cap \mathbf{Z_p}$ (скуп p-адских целих бројева који су алгебарских над $\mathbb{Q}_p$). Како је овај скуп пребројив он се може узети и за индексни скуп, тј. посматрају се оператори облика $P_{=s}$. У овом раду се кодомен вероватноће проширује на $K[0,p^M]$ (кугла у $\mathbb{Q}_p$ произвољно великог али фиксираног полупречника), која представља стандардан кодомен вероватноће у [1]. Како оператор $K_{s,0}$ има исто значење као и $P_{=s}$ резултати из [40] могу се изразити у логици L_{Q_p} (и наравно у осталим наведеним логикама).

Садржај рада подељен је у 10 глава. У првих 7 глава представљене су редом вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу: је L_{Q_p},$L^i_{Q_p}$, $L^{fo}_{Q_p}$ (логика првог реда), $L^D_{Q_p}$, $L^{D,i}_{Q_p}$, $CPL_{\mathbf{Z_p}}$, $CPL^i_{\mathbf{Z_p}}$, $CPL^{fin}_{\mathbf{Z_p}}$. Осма глави садржи три примера. У прва два примера описани су експерименти у којима вероватноћа одређених догађаја не постоји у пољу $\mathbf{R}$ а постоји у $\mathbf{Q_p}$ и при том се (p-адски) резултати могу описати средствима приказаних логика. Трећим примером описна је једна употреба L_{Q_p}-логике која је при том модификована тако да може имати и другу интерпретациију која није вероватносна. У деветој глави представљена је једна реално вредносна вероватносна логика $L_{\succeq}$ у којој је коришћењем оператора $\succeq$ могуће правити исказе облика "вероватноћа формуле α је већа или једнака од неког рационалног броја" као и исказе облика "вероватноћа формуле α је већа или једнака од вероватноће формуле β". Приметимо да постоји аналогија између логика $L_{\succeq}$ и $L^D_{Q_p}$ јер у оба случаја добијамо могућност извесног поређења вероватноћа двеју формула без знања о њиховим вредностима. Коначно, у последњој глави дат је кратак увод у p-адске бројеве.

Садржај главе 1 биће објављен у [5], док је садржај главе 9 објављен у [4].

1 p-адска исказна логика L_{Q_p}

У овој глави, приказана је основна p-адска вероватносна логика у којој нису дозвољене итерације вероватносних оператора као ни мешање исказних и вероватносних формула.

1.1 Синтакса и семантика

Нека је p фиксиран прост број и $M \in \mathbf{N}$ произвољно велики али фиксиран природан број. Дефинишимо следеће скупове:

1. $\mathbf{Q}_M = \{r \in \mathbf{Q} : |r|_p \leq p^M\}$,
2. $\mathbf{Z}_M = \mathbf{Z}^- \cup \{0, 1, 2, \ldots, M\}$, где је $\mathbf{Z}^-$ скуп негативних целих бројева, и
3. $R = \{p^{M-n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\} = \{p^n : n \in \mathbf{Z}_M\} \cup \{0\}$.

Претпоставимо да је Var пребројив скуп исказних слова. Са For_{Cl} означавамо скуп исказних формула над Var. Исказне формуле означавамо са α,β,γ, итд. Скуп вероватносних формула, у ознаци For_P, је најмањи скуп који задовољава следеће особине:

- Ако $\alpha \in For_{Cl}$, $r \in \mathbf{Q}_M, \rho \in R$ онда је $K_{r,\rho}\alpha$ вероватносна формула.
- Ако су φ, ϕ вероватносне формуле, онда су и $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \phi)$ вероватносне формуле.

Вероватносне формуле означавамо са φ,ϕ,θ итд. Скуп For свих L_{Q_p}-формула је унија скупова For_{Cl} и For_P. Формуле означавамо са A, B, C итд. Остали логички врзници $(\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ дефинишу се на уобичајен начин. Са $\bot$ ћемо означавати $\alpha \wedge \neg\alpha$ као и $\varphi \wedge \neg\varphi$, сматрајући да је значење јасно из контекста. Слично, користимо $\top$ за $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\varphi \vee \neg\varphi$.

У [1] Khrennikov је предложио адаптацију Колмогоровљевог мера теоретског приступа у за потребе p-адске вероватноће. Према дефиницији из [1], p-адски вероватносни простор је тројка (W, H, μ) где је W непразан скуп, H поље подскупова од W а $\mu : H \to \mathbf{Q_p}$ је адитивна функција за коју важи $\mu(W) = 1$. При томе је ту образложено зашто је потребно да кодомен функције μ не буде цео $\mathbf{Q_p}$ већ нека конкретна (велика) кугла у $\mathbf{Q_p}$, па је у том циљу кодомен вероватноће $K[0, r]$, где је $r = p^n$ за неки произвољно велики фиксиран природан број n. Простор вероватноће са оваквом рестрикцијом кодомена назива се p-адски r-вероватносни простор. Наредна дефиниција L_{Q_p}-модела базирана је на овој дефиницији p-адског $r-$вероватносног простора.

Дефиниција 1 *L_{Q_p}-модел је структура $M = \langle W, H, \mu, v\rangle$ где:*

- *W је непразан скуп светова.*

- *H је алгебра подскупова од W.*
- *$\mu : H \to \mathbf{K}[\mathbf{0}, \mathbf{p}^{\mathbf{M}}]$ је мера (адитивна функција) таква да је $\mu(W) = 1$.*
- *$v : W \times Var \to \{true, false\}$ је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружује $true$ или $false$. Валуација $v(w, \cdot)$ се на уобичајен начин продужује на скуп свих исказних формула.* ■

Ако је M један L_{Q_p}-модел, са $[\alpha]_M$ означавамо скуп свих светова w таквих да је $v(w, \alpha) = true$. Индекс M ћемо изостављати уколико је из контекста јасно о ком моделу се ради. L_{Q_p}-модел $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ је *мерљив* ако $[\alpha]_M \in H$ за сваку формулу $\alpha \in For_{Cl}$. Овде ћемо се фокусирати на класу свих мерљивих L_{Q_p}-модела. Дакле, под "L_{Q_p}-модел" сматрамо "мерљив L_{Q_p}-модел".

Дефиниција 2 *Нека је $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ један L_{Q_p}-модел. Релација задовољивости дефинисана је на следећи начин:*

- *Ако $\alpha \in For_{Cl}$ онда $M \models \alpha$ акко $v(w, \alpha) = true$ за свако $w \in W$.*
- *Ако $\alpha \in For_{Cl}$ онда $M \models K_{r,\rho}\alpha$ акко $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho$.*
- *Ако $\varphi \in For_P$ онда $M \models \neg\varphi$ акко није $M \models \varphi$.*
- *Ако $\varphi, \psi \in For_P$ онда $M \models \varphi \wedge \psi$ акко $M \models \varphi$ анд $M \models \psi$.* ■

Вероватносна формула φ је L_{Q_p}-*задовољива* ако постоји L_{Q_p}-модел M тако да $M \models \varphi$. Вероватносна формула φ је L_{Q_p}-*ваљана* ако за сваки L_{Q_p}-модел M, $M \models \varphi$. Скуп вероватносних формула T је L_{Q_p}- задовољив ако постоји L_{Q_p}-модел M тако да $M \models \varphi$ за свако $\varphi \in T$.

Обратимо пажњу на дефиницију задовољивости за формуле облика $K_{r,\rho}\alpha$. За произвољно ρ, $M \models K_{r,\rho}\alpha$ значи да $\mu([\alpha])$ припада p-адској кугли са центром r и полупречником ρ. У специјалном случају, када је $\rho = 0$ и $M \models K_{r,0}\alpha$, на основу Дефиниције 2, $\mu([\alpha]) = r$.

Такође, можемо рачунати меру таутологије($\top$) и контрадикције($\bot$). μ је мера која задовољава услове нормализације и адитивности, и како је $[\top] = W$ и $[\bot] = \emptyset$, закључујемо да $\mu([\top]) = 1$ и $\mu([\bot]) = 0$, то јест, за сваки модел M, $M \models K_{1,0}\top$ и $M \models K_{0,0}\bot$.

1.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $AX_{L_{Q_p}}$ садржи следеће шема-аксиоме:

1. Све инстанце исказних таутологија.
2. $K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho'}\alpha$, кад год је $\rho' \geq \rho$
3. $K_{r_1,\rho_1}\alpha \wedge K_{r_2,\rho_2}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow K_{r_1+r_2,max(\rho_1,\rho_2)}(\alpha \vee \beta)$.

4. $K_{r_1,\rho_1}\alpha \Rightarrow \neg K_{r_2,\rho_2}\alpha$, ако је $|r_1 - r_2|_p > max(\rho_1, \rho_2)$

5. $K_{r_1,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r_2,\rho}\alpha$, ако је $|r_1 - r_2|_p \leq \rho$

и правила извођења:

1. Из A и $A \Rightarrow B$ извести B. Овде су A и B или обе исказне , или обе вероватносне формуле.

2. Из α извести $K_{1,0}\alpha$

3. Ако је $n \in \mathbf{N}$, из $\varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$, извести $\varphi \Rightarrow \perp$.

4. Из $\alpha \Rightarrow \perp$, извести $K_{0,0}\alpha$

5. Ако $r \in \mathbf{Q}_M$, из $\varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$, извести $\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$.

6. Из $\alpha \Leftrightarrow \beta$ извести $(K_{r,\rho}\alpha \Leftrightarrow K_{r,\rho}\beta)$.

Продискутујмо значење наведених аксиома и правила извођења.

Аксиома 1 и правило извођења 1 обезбеђују да је класична исказна логика подлогика ове логике. Аксиома 2 одговара особини p-адских кугли: кугла мањег полупречника садржана је у кугли већег полупречника (под условом да кугле нису дисјунктне). Аксиома 3 одговара адитивности мере и такође одражава својство p-адске норме (јака неједнакост троугла). Приметимо да је Аксиома 3 добро дефинисана јер ако $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_M$, онда на основу јаке неједнакости троугла, $r_1 + r_2 \in \mathbf{Q}_M$. Аксиома 4 обезбеђује да мера формуле не може припадати двема дисјунктним куглама. Како свака тачка p-адске кугле може бити њен центар, Аксиома 5 говори да мера формуле припада свакој од ових кугли. Приметимо да су кугле $K[r, p^{M-n}]$ садржане у кугли $K[0, p^M]$. Заиста, нека $a \in K[r, p^{M-n}]$. Тада је $|a|_p = |a-r+r|_p \leq max\{|a-r|_p, |r|_p\} \leq max\{p^{M-n}, p^M\} = p^M$. Специјално, за $r = 0$ и $n = 0$ ту се налази и кугла $K[0, p^M]$.

Правило 2 личи на правило несецитасије у модалним логикама, при чему овде може бити примењено само на исказне формуле. Правило 3 обезбеђује да за сваку исказну формулу α и сваки полипречник ρ постоји $r \in \mathbf{Q}_M$ тако да мера формуле α припада кугли са центром $r \in \mathbf{Q}_M$ и полупречником ρ. Правило 4 омогућава да контрадикција има меру 0. Правило 5 обезбејује следећу особину : ако је мера формуле α произвољно блиска неком рационалном броју r, тада је мера формуле α једнака r. Коначно, правило 6 обезбеђује да еквивалентне исказне формуле имају исту меру. Приметимо да су правила 3 и 5 бесконачна.

Дефиниција 3 *Формула A је* синтаксна последица скупа формула *T (у ознаци $T \vdash_{AX_{L_{Q_p}}} A$) ако постоји највише пребројив низ формула A_0, A_1 ...,A тако да је свака формула A_i аксиома или формула из скупа T, или је изведена из претходних формула помоћу неког правила извођења. Низ формула A_0, A_1 ...,A је доказ за A и његова дужина је ординал следбеник.*

Дефиниција 4 *Формула A је* теорема *($\vdash_{AX_{L_{Q_p}}} A$) ако је синтаксна последица празног скупа. При томе ћемо индекс $AX_{L_{Q_p}}$ изостављати уколико то не прети да изазове забуну и писаћемо само $\vdash$.*

Ознаку $\nvdash$ користићемо са значењем: није $\vdash$.

Дефиниција 5 *Скуп формула T је* конзистентан *ако постоје формуле $\alpha \in For_{Cl}$ и $\varphi \in For_P$ тако да $T \nvdash \alpha$ и $T \nvdash \varphi$.*

Дефиниција 6 *Конзистентан скуп формула T је* максималан конзистентан *ако:*

- *За све $\alpha \in For_{Cl}$, ако $T \vdash \alpha$, онда α и $K_{1,0}\alpha$ припадају скупу T;*
- *За све $\varphi \in For_P$ или $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$.*

Дефиниција 7 *Скуп формула T је* дедуктивно затворен *ако за сваку формулу $A \in For$, ако $T \vdash A$ онда $A \in T$.*

1.3 Коректност и потпуност

Теорема 1 *(Коректност) Аксиоматски систем $AX_{L_{Q_p}}$ је коректан у односу на класу L_{Q_p}-модела.*

Доказ: Показаћемо да је свака инстанца аксиома ваљана формула као и да правила извђења чувају ваљаност. Размотримо прво аксиоме:

- Аксиома 1: Очигледно, на основу дефиниције L_{Q_p}-модела.
- Аксиома 2: Ако $M \models K_{r,\rho}\alpha$ онда је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho$. Нека је $\rho' \geq \rho$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho'$ па $M \models K_{r,\rho'}\alpha$. Дакле, $M \models K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho'}\alpha$.
- Аксиома 3: Нека $M \models Kr_1, \rho_1\alpha$, $M \models K_{r_2,\rho_2}\beta$ и $M \models K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r_1|_p \leq \rho_1$, $|\mu([\beta]) - r_2|_p \leq \rho_2$ и $|\mu([\alpha \wedge \beta]) - 0|_p \leq 0$. Према томе, $\mu([\alpha\wedge\beta]) = 0$ и на основу адитивности мере $\mu([\alpha\vee\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$. Дакле, $\mu([\alpha \vee \beta]) - (r_1 + r_2) = (\mu([\alpha]) - r_1) + (\mu([\beta]) - r_2)$ и $|\mu([\alpha \vee \beta]) - (r_1 + r_2)|_p = |(\mu([\alpha]) - r_1) + (\mu([\beta]) - r_2)|_p \leq max\{|\mu([\alpha]) - r_1|_p, \mu([\beta]) - r_2\} \leq max\{\rho_1, \rho_2\}$. Према томе $M \models K_{r_1+r_2, max\{\rho_1,\rho_2\}}(\alpha \vee \beta)$.
- Аксиома 4: Претпоставимо да $M \models K_{r_1,\rho_1}\alpha$ и да је $|r_1 - r_2|_p > max\{\rho_1, \rho_2\}$ за неко $r_2 \in \mathbf{Q}_M$, $\rho_2 \in R$. Тада $|\mu([\alpha]) - r_1|_p \leq \rho_1$ и ако $M \models K_{r_2,\rho_2}\alpha$ онда је $|\mu([\alpha]) - r_2|_p \leq \rho_2$, па $|r_1 - r_2|_p = |(r_1 - \mu([\alpha])) + (\mu([\alpha]) - r_2)|_p \leq max\{|r_1 - \mu([\alpha])|_p, |r_2 - \mu([\alpha])|_p\} \leq max\{\rho_1, \rho_2\}$, контрадикција. Отуда, $M \models \neg K_{r_2,\rho_2}\alpha$ па $M \models K_{r_1,\rho_1}\alpha \Rightarrow \neg K_{r_2,\rho_2}\alpha$.
- Аксиома 5: Нека $M \models K_{r_1,\rho}\alpha$ и нека је $|r_1 - r_2| \leq p$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r_1| \leq \rho$ и $|\mu([\alpha]) - r_2|_p = |(\mu([\alpha]) - r_1) + (r_1 - r_2)|_p \leq max\{|\mu([\alpha]) - r_1|_p, |r_1 - r_2|\} \leq \rho$. Према томе $M \models K_{r_2,\rho}\alpha$, и отуда $M \models K_{r_1,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r_2,\rho}\alpha$.

Размотримо сада правила извођења:

- Правило 1: Ово правило чува ваљаност из истог разлога као и у класичној логици.

- Правило 2: Нека је α ваљана формула. Тада, за сваки модел M, $M \models \alpha$. Према томе, за сваки свет $w \in W$, $v(w,\alpha) = true$, па је $[\alpha] = W$ и отуда на основу својства нормализације мере μ, $\mu([\alpha]) = 1$. Дакле, $|\mu([\alpha]) - 1|_p = 0$ то јест $M \models K_{1,0}\alpha$.

- Правило 3: Претпоставимо да за сваки модел M, $M \models \varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$. Нека је

  $\mu([\alpha]) = c_{-M}p^{-M} + c_{-M+1}p^{-M+1} \ldots c_{-M+n}p^{-M+n} + c_{-M+n+1}p^{-M+n+1} + \ldots$. Ако је $r = c_{-M}p^{-M} + c_{-M+1}p^{-M+1} \ldots c_{-M+n}p^{-M+n}$ тада $r \in \mathbf{Q}_M$ и $\mu([\alpha]) - r = c_{-M+n+1}p^{-M+n+1} + c_{-M+n+2}p^{-M+n+2} + \ldots$. Према томе $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-n-1} < p^{M-n}$ и $M \models K_{r,p^{M-n}}\alpha$. Како $M \models \varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha$ следи да $M \models \neg\varphi$ и отуда $M \models \varphi \Rightarrow \perp$.

- Правило 4: Нека за сваки модел M, $M \models \alpha \Rightarrow \perp$ то јест, $M \models \neg\alpha$. Тада је $[\neg\alpha] = W$ и $\mu([\neg\alpha]) = 1$. Отуда је $\mu([\alpha]) = 0$ и $M \models K_{0,0}\alpha$.

- Правило 5: Претпоставимо да $\varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ важи у сваком моделу M, за свако $n \in \mathbf{N}$. Нека је M произвољан L_{Q_p}-модел. Ако $M \models \neg\varphi$ онда $M \models \varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$. У супротним, ако $M \models \varphi$, онда $M \models K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Ако је за неко n, $|\mu([\alpha]) - r|_p = p^{M-n}$ онда не важи $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-(n+1)}$. Према томе, не постоји n тако да је $|\mu([\alpha]) - r|_p = p^{M-n}$ па је $|\mu([\alpha]) - r|_p = 0$. (јер $|\cdot|_p : K_{0,p^M} \rightarrow \{p^{M-n} | n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$).

- Правило 6: Нека је $\alpha \Leftrightarrow \beta$ тачно у сваком моделу M. Тада, за сваки свет $w \in W$, $v(w,\alpha) = true$ акко $v(w,\beta) = true$ и отуда $[\alpha] = [\beta]$. Претпоставимо да $M \models K_{r,\rho}\alpha$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho$ и са обзиром да је $[\alpha] = [\beta]$, $|\mu([\beta]) - r|_p \leq \rho$, то јест, $M \models K_{r,\rho}\beta$. Према томе $M \models K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta$. На исти начин из $M \models K_{r,\rho}\beta$ добијамо $M \models K_{r,\rho}\alpha$. ■

Теорема 2 *(Теорема дедукције) Нека је T скуп формула и A и B обе исказне или обе вероватносне формуле. Тада : Ако $T, A \vdash B$ онда $T \vdash A \Rightarrow B$.*

Доказ: Користићемо трансфинитну индукцију по дужини доказа за B. Ако је дужина доказа 1 онда је формула B аксиома или $B \in T$. Како је $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ таутологија, на основу правила 1, добија се $T \vdash A \Rightarrow B$. Претпоставимо да је дужина доказа $k > 1$. Формула B може поново бити аксиома или припадати скупу T и тада као малопре закључујемо да $T \vdash A \Rightarrow B$. Формула B може бити добијена и применом неког од правила извођења на предходне формуле у доказу. Размотримо појединачно свако од ових правила.

- B је добијена из C и $C \Rightarrow B$ применом Правила 1. Тада, на основу индукцијске хипотезе $T \vdash A \Rightarrow C$ и $T \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$.

  Како је $(A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ таутологија, користећи Правило 1 два пута добијамо $T \vdash A \Rightarrow B$.

- Нека је $B = K_{1,0}\alpha$ добијено из $T \cup \{A\}$ применом Правила 2 и при том $A \in For_P$. Тада:

  $T, A \vdash \alpha$

  $T, A \vdash K_{1,0}\alpha$ на основу Правила 2

  Како , $\alpha \in For_{Cl}$ и $A \in For_P$, A не утиче на доказ за формулу α, па према томе:

  $T \vdash \alpha$

  $T \vdash K_{1,0}\alpha$ на основу Правила 2

  $T \vdash K_{1,0}\alpha \Rightarrow (A \Rightarrow K_{1,0}\alpha)$

  $T \vdash A \Rightarrow K_{1,0}\alpha$ на основу Правила 1.

- Претпоставимо да је $B = (\varphi \Rightarrow \perp)$ добијена из $T \cup \{A\}$ применом Правила 3 и $A \in For_P$. Тада за неко $n \in \mathbf{N}, \alpha \in For_{Cl}$:

  $T, A \vdash \varphi \Rightarrow \neg(K_{r,p^{M-n}}\alpha)$ за свако $r \in \mathbf{Q}_1$,

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \neg(K_{r,p^{M-n}}\alpha))$ за свако $r \in \mathbf{Q}_1$, на основу индукцијеске хипотезе,

  $T \vdash A \wedge \varphi \Rightarrow \neg(K_{r,p^{M-n}}\alpha)$ за свако $r \in \mathbf{Q}_1$,

  $T \vdash A \wedge \varphi \Rightarrow \perp$, на основу Правила 3

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \perp)$.

- Нека је $B = K_{0,0}\alpha$ добијено из $\alpha \Rightarrow \perp$ користећи Правило 4. Тада:

  $T, A \vdash \alpha \Rightarrow \perp$

  Како $(\alpha \Rightarrow \perp) \in For_{Cl}$ и $A \in For_P$, A не утиче на доказ за $(\alpha \Rightarrow \perp)$, и отуда:

  $T \vdash \alpha \Rightarrow \perp$

  $T \vdash K_{0,0}\alpha$ на основу Правила 4

  $T \vdash K_{0,0}\alpha \Rightarrow (A \Rightarrow K_{0,0}\alpha)$

  $T \vdash A \Rightarrow K_{0,0}\alpha$ на основу Правила 1.

- Претпоставимо да је $B = (\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$ добијено применом Правила 5. Тада:

  $T, A \vdash \varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу индукцијске хипотезе.

  $T \vdash (A \wedge \varphi) \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

  $T \vdash (A \wedge \varphi) \Rightarrow K_{r,0}\alpha$ на основу Правила 5

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$.

- Коначно, претпоставимо да је $B = (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta)$ добијено из $T \cup \{A\}$ користећи Правило 6, и нека $A \in For_P$. У том случају:

  $T, A \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$

  Како $A \in For_P$ и $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \in For_{Cl}$, A не утиче на доказ за формулу $\alpha \Leftrightarrow \beta$, па према томе:

  $T \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$

  $T \vdash (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta)$ на основу Правила 6

  $T \vdash (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta) \wedge (K_{r,\rho}\beta \Rightarrow K_{r,\rho}\alpha)$

  $T \vdash (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta)$

  $T \vdash (K_{r,\rho}\beta \Rightarrow K_{r,\rho}\alpha)$

  Како је

  $(K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta) \Rightarrow (A \Rightarrow (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta))$

  инстанца таутологије, користећи Правило 1 добијамо:

  $T \vdash A \Rightarrow (K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho}\beta)$

  $T \vdash A \Rightarrow (K_{r,\rho}\beta \Rightarrow K_{r,\rho}\alpha)$

  $T \vdash A \Rightarrow (K_{r,\rho}\alpha \Leftrightarrow K_{r,\rho}\beta)$ на основу класичног резоновања.

$\blacksquare$

Теорема 3 *Сваки конзистентан скуп формула T се може проширити до максималног конзистентног скупа.*

Доказ: Нека је T конзистентан скуп формула, $\overline{T}$ скуп свих исказних формула изведених T, α_0, α_1, ... једно набрајање свих формула из For_{Cl} и φ_0,φ_1, ... једно набрајање свих формула из For_P. Нека је $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N^2}$ било која бијекција (f је функција облика $f(i) = (\pi_1(i), \pi_2(i))$). Дефинишемо низ скупова T_i на следећи начин:

1. $T_0 = T \cup \overline{T} \cup \{K_{1,0}\alpha | \alpha \in \overline{T}\}$

2. за свако $i \geq 0$,

   (а) Ако је $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ конзистентан онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$.

   (б) Ако $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ није конзистентан онда:

      (i) Ако је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$ онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i, \psi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.

      (ii) Иначе $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i\}$

3. За свако $i \geq 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}\}$ за неко $r \in \mathbf{Q}_M$ тако да T_{2i+2} буде конзистентан.

Показаћемо да је за свако i, скуп T_i конзистентан. T_0 је конзистентан јер садржи последице конзистентног скупа. Скупови добијени у корацима 2а су очигледно конзистентни. У кораку 2б (ii) се такође добијају конзистентни скупови . Предпоставимо супротно. $T_{2i}, \varphi_i \vdash\perp$ Према теореми Дедукције $T_{2i} \vdash \neg\varphi_i$, и како је T_{2i} конзистентан, конзистентан је и скуп $T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i\}$. Посматрајмо корак 2б$(i)$. Претпоставимо да је $\varphi_i = (\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$, $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ неконзистентан и да је за свако $n \in \mathbf{N}$, $T_{2i} \cup \{\neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha), \varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha\}$ неконзистентан. Тада:

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha), \varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha \vdash\perp$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha) \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу Теореме Дедукције,

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha) \vdash \varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу таутологије $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha) \vdash \varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$ на основу Правила 5

$T_{2i} \vdash \neg(\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$ на основу Теореме Дедукције,

$T_{2i} \vdash \varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$.

Како је $T_{2i} \cup \{\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha\}$ неконзистентан, из $T_{2i} \vdash \varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$ следи да је T_{2i} неконзистентан, што представља контрадикцију.

Посматрајмо сада корак 3. Претпоставимо да је за свако $r \in \mathbf{Q}_M$ скуп $T_{2i+1} \cup \{K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}\}$ неконзистентан. Нека је $T_{2i+1} = T_0 \cup T^+_{2i+1}$, где је T^+_{2i+1} скуп свих формула из скупа For_P које су додате на T_0 у претходним корацима конструкције. Тада:

$T_0, T^+_{2i+1}, K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)} \vdash\perp$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$

$T_0, T^+_{2i+1} \vdash \neg K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$, на основу теореме Дедукције.

$T_0 \vdash (\bigwedge_{\varphi \in T^+_{2i+1}} \varphi) \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}$ за свако $r \in \mathbf{Q}_1$, на основу теореме Дедукције.

$T_0 \vdash (\bigwedge_{\varphi \in T^+_{2i+1}} \varphi) \Rightarrow\perp$ на основу Правила 3.

Отуда $T_{2i+1} \vdash\perp$, што представља контрадикцију.

Нека је $T^* = \bigcup_{i<\omega} T_i$. Остаје да покажемо да је T^* максималан и конзистентан. Кораци 1 и 2 горње конструкције гарантују да је T^* максималан. Надаље, показујемо да је T^* дедуктивно затворен скуп који не садржи све формуле па је према томе T^* конзистентан.

Прво, покажимо да T^* не садржи све формуле. Нека $\alpha \in For_{Cl}$. На основу конструкције скупа T_0, α и $\neg\alpha$ не могу истовремено припадати скупу T_0. Претпоставимо да $\varphi \in For_P$. Тада за неке i, j $\varphi = \varphi_i$ и $\neg\varphi = \varphi_j$. Како је $T_{max(2i,2j)+1}$ конзистентан T^* не може садржати φ и $\neg\varphi$.

Покажимо сада да је T^* дедуктивно затворен. Ако $\alpha \in For_{Cl}$ и $T^* \vdash \alpha$ тада на основу конструкције скупа T_0, $\alpha \in T^*$ и $K_{1,0}\alpha \in T^*$. Нека $\varphi \in For_P$. Приметимо да ако $\varphi = \varphi_j$ и $T_i \vdash \varphi_j$, онда мора важити $\varphi \in T^*$ јер је $T_{max(i,2j)+1}$ конзистентан. Претпоставимо да низ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi$ представља доказ за φ из T^*. Ако је низ коначан, онда постоји скуп T_i тако да $T_i \vdash \varphi$. Тада, као малопре, $\varphi \in T^*$. Према томе, претпоставимо да је низ пребројив. Показаћемо да за свако i, ако је φ_i добијено применом неког правила извођења , и све премисе припадају скупу T^*, онда и $\varphi_i \in T^*$. Ако је правило коначно, онда постоји скуп T_j који садржи све премисе и $T_j \vdash \varphi_i$. У том случају, резоновањем као горе , закључујемо да $\varphi_i \in T^*$. Према томе, посматрајмо бесконачна правила.

Претпоставимо да је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow \perp)$ добијена из скупа премиса $\{\varphi_r^i = (\psi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha) | r \in \mathbf{Q}_M\}$, користећи Правило 3, за неке $\alpha \in For_{Cl}, n \in \mathbf{N}$. На основу индукцијске хипотезе хипотезе $\varphi_r^i \in T^*$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$. На основу корака 3 приказане конструкције, постоје $r\prime$ и l тако да $\psi \Rightarrow K_{r',p^{M-n}}\alpha$ припада скупу T_l. Како све премисе припадају скупу T^*, за неко k, $\psi \Rightarrow \neg K_{r',p^{M-n}}\alpha \in T_k$. Ако је $m = max(l,k)$ тада $\psi \Rightarrow \neg K_{r',p^{M-n}}\alpha, \psi \Rightarrow K_{r',p^{M-n}}\alpha \in T_m$. Према томе $T_m \vdash \psi \Rightarrow K_{r',p^{M-n}}\alpha$ и $T_m \vdash \psi \Rightarrow \neg K_{r',p^{M-n}}\alpha$ па $T_m \vdash \psi \Rightarrow \perp$. Тада , на исти начин као горе, закључујемо да $\psi \Rightarrow \perp \in T^*$.

Посматрајмо правило 5. Нека је $\alpha_i = (\beta \Rightarrow K_{r,0}\gamma)$ добијено из скупа претпоставки $\{\alpha_n^i = (\beta \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\gamma) | n \in \mathbf{N}\}$. На основу индукцијске хипотезе $\alpha_n^i \in T^*$ за свако n. Претпоставимо да $\alpha_i \notin T^*$. На основу корака 2б(i) горње конструкције, постоји n и j тако да $\beta \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\gamma$ припада T_j. Како је $\beta \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\gamma$ претпоставка постоји неко j' тако да $\beta \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\gamma \in T_{j'}$. Ако је $l = max(j, j')$ онда $\beta \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\gamma, \beta \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha \in T_l$. Отуда $T_l \vdash \beta \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\gamma$ и $T_l \vdash \beta \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\gamma$ па $T_l \vdash \beta \Rightarrow \perp$ и отуда $T_l \vdash \beta \Rightarrow K_{r,0}\gamma$. Одатле закључујемо да $\beta \Rightarrow K_{r,0}\gamma \in T^*$, што представља контрадикцију.

∎

Нека је T^* максимално конзистентан скуп добијен помоћу конструкције описане у Теореми 3. На основу корака (3) поменуте конструкције, T^* има следећу особину: За сваку формулу $\alpha_n \in For_{Cl}$ и за свако $m \in \mathbf{N}$ постоји бар једно $r \in \mathbf{Q}_M$ тако да $K_{r,p^{M-m}}\alpha_n \in T^*$. Како је T^* дедуктивно затворен, користећи Аксиому 5, можемо добити бесконачно много рационалних бројева $r \in \mathbf{Q}_M$ тако да $K_{r,p^{M-m}}\alpha_n \in T^*$. Сада, за сваку формулу $\alpha_n \in For_{Cl}$ правимо низ рационалних бројева r_m^n на следећи начин:

- За свако $m \in \mathbf{N}$ произвољно бирамо r за које важи $K_{r,p^{M-m}}\alpha_n \in T^*$ и то r ће бити m-ти члан низа,то јест, $r_m^n = r$.

На овај начин добијамо низ: $r_0^n, r_1^n, r_2^n \ldots$ где $K_{r_j^n, p^{M-j}}\alpha_n \in T^*$. У ситуацијама када индекс n формуле α_n није важан ми га изостављамо, то јест, за формулу α посматрамо низ облика $r(\alpha) = r_0,\ r_1,\ \ldots,$ где $K_{r_j, p^{M-j}}\alpha \in T^*$.

Приметмо да је могуће да буде $r_m = r_k$, за $m \neq k$.

Лема 1 *Нека је низ* $r(\alpha)$ *дефинисан као малопре. Тада је* $r(\alpha)$ *Кошијев низ (у односу на p-адску норму) и при том* $\lim^p_{n\to\infty} r_n \in K[0, p^M]$.

Доказ: Нека је ε произвољно. Изаберимо n_0 тако да $p^{M-n_0} \leq \varepsilon$. Ако је $n, m \geq n_0$ тада постоје чланови низа $r_n, r_m \in \mathbf{Q}_M$ тако да $K_{r_n, p^{M-n}}\alpha, K_{r_m, p^{M-m}}\alpha \in T^*$. Показаћемо да је $|r_n - r_m|_p \leq max\{p^{M-n}, p^{M-m}\}$. Претпоставимо супротно, то јест $|r_n - r_m|_p > max\{p^{M-n}, p^{M-m}\}$. Тада:

$T^* \vdash K_{r_n, p^{M-n}}\alpha$

$T^* \vdash K_{r_m, p^{M-m}}\alpha$

$T^* \vdash K_{r_n, p^{M-n}}\alpha \Rightarrow \neg K_{r_m, p^{M-m}}\alpha$ на основу Аксиоме 4

$T^* \vdash \neg K_{r_m, p^{M-m}}\alpha$ на основу правила 1, што противречи конзистентности скупа T^*.

Отуда, $|r_n - r_m|_p \leq max\{p^{M-n}, p^{M-m}\} \leq p^{M-n_0} \leq \varepsilon$.

Дакле, постоји $\lim^p_{n\to\infty} r_n \in \mathbf{Q_p}$.

Нека $a = \lim^p_{n\to\infty} r_n$. Тада постоји $n_0 \in \mathbf{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$, $|a - r_n|_p \leq p^M$. Отуда $|a|_p = |a - r_n + r_n|_p \leq max\{|a - r_n|_p, |r_n|_p\} \leq p^M$. ∎

Следећа лема тврди да поменути лимес не зависи од начина на који смо бирали r_k'ове.

Лема 2 *Нека* $\alpha \in T^*$, $\alpha \in For_{Cl}$. *Претпоставимо да су* $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *и* $(r'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *два различита низа добијена горњом конструкцијом. (то јест , бар за једно* m, $r_m \neq r'_m$*). Тада је* $\lim^p_{n\to\infty} r_n = \lim^p_{n\to\infty} r'_n$.

Доказ: На основу Аксиоме 4, као и у предходној леми закључујемо да је за свако n, $|r_n - r'_n|_p \leq p^{M-n}$. Претпоставимо да је $\lim^p_{n\to\infty} r_n = a$. Нека је ε произвољно. Тада постоји n'_0 тако да за свако $n \geq n'_0$ $|r_n - a|_p \leq \varepsilon$. Изаберимо n''_0 тако да је $p^{M-n''_0} \leq \varepsilon$. Нека је $n_0 \geq max\{n'_0, n''_0\}$ и $n \geq n_0$. Тада:

$|r'_n - a|_p = |(r'_n - r_n) + (r_n - a)|_p \leq max\{|r'_n - r_n|_p, |r_n - a|_p\} \leq max\{p^{M-n}, \varepsilon\} = \varepsilon$, јер је $p^{M-n} \leq p^{M-n_0} \leq \varepsilon$. Отуда је $\lim^p_{n\to\infty} r'_n = a$. ∎

Нека је $M_{T^*} = \langle W, H, \mu, v\rangle$, где :

- $W = \{w | w \models \overline{T}\}$ је скуп свих класичних интерпретација које задовољавају скуп $\overline{T}$,
- $H = \{[\alpha] : \alpha \in For_{Cl}\}$
- $\mu : H \to \mathbf{Q_p}$: Нека је $r(\alpha) = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Тада

$$\mu([\alpha]) = \begin{cases} r & \text{ако } K_{r,0}\alpha \in T^* \\ \lim^p_{n\to\infty} r_n & \text{иначе} \end{cases}$$

- за сваки свет w и свако исказно сково $p \in Var$, $v(w,p) = true$ акко $w \models p$.

Приметимо да је $\mu([\alpha])$ добро дефинисано: на основу Аксиоме 4 не може се догодити да $K_{r_1,0}\alpha, K_{r_2,0}\alpha, \in T^*$, за $r_1 \neq r_2$, док је на основу Леме 2 наведени лимес јединствен.

Теорема 4 *Нека је $M_{T^*} = \langle W, H, \mu, v\rangle$ управо дефинисана структура. Тада за све $\alpha, \beta \in For_{Cl}$ важи следеће:*

1. *ако је $[\alpha] = [\beta]$ онда је $\mu([\alpha]) = \mu([\beta])$;*
2. *ако је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$ онда је $\mu([\alpha \vee \beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$;*
3. *$\mu(W) = 1$ и отуда $\mu(\emptyset) = 0$;*
4. *$\mu([\neg\alpha]) = 1 - \mu([\alpha])$.*

Доказ:

1. Нека је $[\alpha] = [\beta]$. Тада је $\{w | v(w,\alpha) = true\} = \{w | v(w,\beta) = true\}$. Отуда, за сваки свет w, $v(w, \alpha \Leftrightarrow \beta) = true$ па $\alpha \Leftrightarrow \beta \in \overline{T}$, то јест $\alpha \Leftrightarrow \beta \in T^*$ односно $T^* \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$.

   Нека је $\mu([\alpha]) = r$.

   (а) Претпоставимо да $K_{r,0}\alpha \in T^*$. Тада:
   $T^* \vdash K_{r,0}\alpha$
   $T^* \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$
   $T^* \vdash K_{r,0}\alpha \Rightarrow K_{r,0}\beta$ на основу Правила 6
   $T^* \vdash K_{r,0}\beta$ на основу Правила 1.
   Отуда $K_{r,0}\beta \in T^*$ па је $\mu([\beta]) = r$.

   (б) Сада, претпоставимо да $K_{r,0}\alpha \notin T^*$. Тада је $\lim^p_{n\to\infty} r_n = r$ где је $(r_n)_{n\in\mathbf{N}} = r(\alpha)$ Тада,као и малопре, имамо да за сваки члан низа важи следеће:
   $T^* \vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$
   $T^* \vdash K_{r_n,p^{M-n}}\alpha$
   $T^* \vdash K_{r_n,p^{M-n}}\alpha \Rightarrow K_{r_n,p^{M-n}}\beta$ на основу Правила 6
   $T^* \vdash K_{r_n,p^{M-n}}\beta$.

   Према томе, за свако $n \in \mathbf{N}$, $K_{r_n,p^{M-n}}\beta \in T^*$ и на основу Леме 1, $\mu([\beta]) = \lim^p_{n\to\infty} r_n = r$.

2. Нека је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$. Тада, не постоји свет w тако да је $v(w, \alpha) = true$ и $v(w, \beta) = true$, то јест, не постоји свет w тако да је $v(w, (\alpha \wedge \beta)) = true$. Према томе, за сваки w, $v(w, \neg(\alpha \wedge \beta)) = true$ и на основу потпуности класичне исказне логике, $\neg(\alpha \wedge \beta) \in T^*$. Тада важи следеће:

   $T^* \vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$

   $T^* \vdash \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \bot$

   $T^* \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \bot$

   $T^* \vdash K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$ на основу Правила 4.

   Нека је $\mu([\alpha]) = r_1$ и $\mu([\beta]) = r_2$.

   (а) Претпоставимо да $K_{r_1,0}\alpha \in T^*$ и $K_{r_2,0}\beta \in T^*$. У том случају:
   $T^* \vdash K_{r_1,0}\alpha$
   $T^* \vdash K_{r_2,0}\beta$
   $T^* \vdash K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$
   $T^* \vdash K_{r_1,0}\alpha \wedge K_{r_2,0}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$
   $T^* \vdash (K_{r_1,0}\alpha \wedge K_{r_2,0}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)) \Rightarrow K_{r_1+r_2,0}(\alpha \vee \beta)$, нз основу Аксиоме 3
   $T^* \vdash K_{r_1+r_2,0}(\alpha \vee \beta)$ на основу Правила 1
   Према томе $\mu([\alpha \vee \beta]) = r_1 + r_2$.

   (б) Претпоставимо да $K_{r_1,0}\alpha \notin T^*$ и $K_{r_2,0}\beta \notin T^*$. Тада је $r_1 = \lim^p_{n\to\infty} r^1_n$ и $r_2 = \lim^p_{n\to\infty} r^2_n$ где је $r(\alpha) = (r^1_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $r(\beta) = (r^2_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Тада за свако $n \in \mathbf{N}$:
   $T^* \vdash K_{r^1_n,p^{M-n}}\alpha \wedge K_{r^2_n,p^{M-n}}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$
   $T^* \vdash (K_{r^1_n,p^{M-n}}\alpha \wedge K_{r^2_n,p^{M-n}}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)) \Rightarrow K_{r^1_n+r^2_n,p^{M-n}}(\alpha \vee \beta)$ на основу Аксиоме 3
   $T^* \vdash K_{r^1_n+r^2_n,p^{M-n}}(\alpha \vee \beta)$.
   Према томе, за свако $n \in \mathbf{N}$, $K_{r^1_n+r^2_n,p^{M-n}}(\alpha \vee \beta) \in T^*$ и отуда је
   $\mu([\alpha \vee \beta]) = \lim^p_{n\to\infty}(r^1_n + r^2_n) = \lim^p_{n\to\infty} r^1_n + \lim^p_{n\to\infty} r^2_n = r_1 + r_2$.

   (в) Размотирмо случај када $K_{r_1,0}\alpha \in T^*$ и $K_{r_2,0}\beta \notin T^*$(или обрнуто). Приметимо да константан низ $r^1_n = r_1$ може бити изабран за $r(\alpha)$ јер $K_{r_1,p^{M-n}} \in T^*$ за свако $n \in \mathbf{N}$ (користећи Аксиому 2 и чињеницу да $K_{r_1,0} \in T^*$). Сада, ако је $r_2 = \lim^p_{n\to\infty} r^2_n$, $(r^2_n)_{n\in\mathbf{N}} = r(\beta)$, случај (в) се своди на случај (б).

3. За свако $p \in Var$, $p \vee \neg p \in \overline{T}$ па $K_{1,0}(p \vee \neg p) \in T^*$. Отуда је $\mu([p \vee \neg p]) = 1$. Са друге стране, за сваки свет w, $v(w, p \vee \neg p) = true$ и према томе $[p \vee \neg p] = W$. Слично, за свако $p \in Var$, $T^* \vdash (p \wedge \neg p) \Rightarrow \bot$. Отуда, на основу Правила 4, $T^* \vdash K_{0,0}(p \wedge \neg p)$. Дакле $K_{0,0}(p \wedge \neg p) \in T^*$ и $\mu([p \wedge \neg p]) = 0$. Са друге стране, не постоји w тако да је $v(w, p \wedge \neg p) = true$, па је $[p \wedge \neg p] = \emptyset$.

4. Не постоји свет w тако да је $v(w,\alpha) = true$ и $v(w,\neg\alpha) = true$ па је $[\alpha] \cap [\neg\alpha] = \emptyset$. Како је на основу (3) $\mu([\alpha \vee \neg\alpha]) = 1$, користећи (2) имамо да је $1 = \mu([\alpha]) + \mu([\neg\alpha])$.

∎

Теорема 5 (Јака потпуност) *Скуп формула T је конзистентан акко има L_{Q_p}-модел.*

Доказ: ($\Leftarrow$) Овај смер следи на основу теореме коректности аксиоматског система $AX_{CPL_{Z_p}}$ (Теорема 1).

($\Rightarrow$). Нека је $M_{T^*} = (W, H, \mu, v)$ модел конструисан на горе описани начин. У Тероеми 4 је показано да је M_{T^*} један L_{Q_p}-модел. Индукцијом по сложености формула доказујемо да за сваку формулу A, $M_{T^*} \models A$ акко $A \in T^*$.

- Нека је $A = \alpha \in For_{Cl}$. Ако $\alpha \in T^*$, онда $\alpha \in \overline{T}$ и за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$, то јест, $M_{T^*} \models \alpha$ Обрнуто, ако $M_{T^*} \models \alpha$ онда на основу потпуности класичне исказне логике, $\alpha \in \overline{T}$, па $\alpha \in T^*$.

- Нека је $A = K_{r,\rho}\alpha$ за неко $r \in \mathbf{Q}_M$, $\rho \in R$ и $\alpha \in For_{Cl}$. Претпоставимо да $K_{r,\rho}\alpha \in T^*$. Размотримо прво случај: $\rho > 0$. Тада је $\rho = p^{M-t}$ за неко $t \in \mathbf{N}$ и изаберимо $r(\alpha)$ тако да је $r_t = r$. Нека је $r(\alpha) = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $\mu([\alpha]) = \lim^p_{n\to\infty} r_n$. Тада

  $(\forall\varepsilon)(\exists n_0)(\forall n)(n \geq n_0 \rightarrow |r_n - \mu([\alpha])|_p \leq \varepsilon)$

  Нека је $\varepsilon = p^{M-t}$. Ако је $t \geq n_0$ онда је $|r_t - \mu([\alpha])|_p \leq p^{M-t}$ и отуда $M_{T^*} \models K_{r_t,p^{M-t}}\alpha$, то јест, $M_{T^*} \models K_{r,p^{M-t}}\alpha$. Претпоставимо сада да је $t < n_0$. Нека је $k \geq n_0$. У том случају $K_{r_k,p^{M-k}}\alpha \in T^*$ и $|r_k - \mu([\alpha])|_p \leq p^{M-t}$. Дакле:

  $T^* \vdash K_{r_t,p^{M-t}}\alpha$

  $T^* \vdash K_{r_k,p^{M-k}}\alpha$

  $T^* \vdash K_{r_k,p^{M-k}}\alpha \Rightarrow K_{r_k,p^{M-t}}\alpha$ на основу Аксиоме 2 јер је $p^{M-t} > p^{M-k}$

  $T^* \vdash K_{r_k,p^{M-t}}\alpha$

  $T^* \vdash K_{r_t,p^{M-t}}\alpha \wedge K_{r_k,p^{M-t}}\alpha$.

  ако је $|r_t - r_k| > p^{M-t}$ онда на основу Аксиоме 4, $T^* \vdash K_{r_t,p^{M-t}}\alpha \Rightarrow \neg K_{r_k,p^{M-t}}\alpha$ и отуда $T^* \vdash \neg K_{r_k,p^{M-t}}\alpha$ што је у контрадикцији са чињеницом да је T^* конзистентан. Према томе $|r_t - r_k| \leq p^{M-t}$ и

  $|r_t - \mu([\alpha])|_p = |(r_t - r_k)) + (r_k - \mu([\alpha]))|_p \leq max\{|r_t - r_k|_p, |r_k - \mu([\alpha]|_p\} \leq p^{M-t}$

  па $M_{T^*} \models K_{r,p^{M-t}}\alpha$.

  Нека је $\rho = 0$ то јест $K_{r,0}\alpha \in T^*$.Тада на основу дефиниције μ, у моделу $M_{T^*} = \langle W, H, \mu, v\rangle$, имамо да је $\mu([\alpha]) = r$. Према томе $|\mu([\alpha]) - r|_p = 0$ па $M_{T^*} \models K_{r,0}\alpha$.

У супротном смеру , претпоставио да $M_{T^*} \models K_{r,\rho}\alpha$ и нека је $r(\alpha) = (r_m)_{m\in\mathbf{N}}$ (за свако $m \in \mathbf{N}, K_{r_m,p^{M-m}}\alpha \in T^*$). Прво, претпоставимо да је $\rho = p^{M-t}$ за неко $t \in \mathbf{N}$. У том случају $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-t}$ где је $\mu([\alpha]) = \lim_{m\to\infty} r_m$. Неке је $\varepsilon = p^{M-t}$. Тада

$(\exists m_0)(\forall m)(m \geq m_0 \to |r_m - \mu([\alpha])|_p \leq \varepsilon)$.

Нека је $m \geq max\{t, m_0\}$. Тада је $p^{M-m} \leq p^{M-t}$ и $|r_m - \mu([\alpha])|_p \leq p^{M-t}$. Како је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-t}$ имамо да важи $|r_m - r|_p = |(r_m - \mu([\alpha])) + (\mu([\alpha]) - r)|_p \leq max\{|(r_m - \mu([\alpha])|_p, |\mu([\alpha]) - r|_p\} \leq p^{M-t}$. Отуда,

$T^* \vdash K_{r_m,p^{M-m}}\alpha$

$T^* \vdash K_{r_m,p^{M-m}}\alpha \Rightarrow K_{r_m,p^{M-t}}\alpha$, на основу Аксиоме 2, јер је $p^{M-t} \geq p^{M-m}$

$T^* \vdash K_{r_m,p^{M-t}}\alpha$ на основу Правила 1

$T^* \vdash K_{r_m,p^{M-t}}\alpha \Rightarrow K_{r,p^{M-t}}\alpha$, на основу Аксиоме 5, јер је $|r_m - r|_p \leq p^{M-t}$

$T^* \vdash K_{r,p^{M-t}}\alpha$ на основу Правила 1

и како је T^* дедуктивно затворен, $K_{r,p^{M-t}}\alpha \in T^*$.

Ако је $\rho = 0$ онда $M_{T^*} \models K_{r,0}\alpha$, то јест $|\mu([\alpha]) - r|_p = 0$. Нека је $n \in \mathbf{N}$ произвољно. Тада $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-n}$ и отуда $M_{T^*} \models K_{r,p^{M-n}}\alpha$. Према томе, како је тврђење малопре доказано за строго позитивне полупречнике имамо да за свако $n \in \mathbf{N}$, $K_{r,p^{M-n}} \in T^*$. Даје, на основу Правила 5, $T^* \vdash K_{r,0}\alpha$, то јест $K_{r,0}\alpha \in T^*$.

- Нека је $A = \neg B$, $B \in For_P$. Тада $M_{T^*} \models \neg B$ акко не важи $M_{T^*} \models B$ акко $B \notin T^*$ акко $\neg B \in T^*$.

- Нека је $A = (B \wedge C)$, $B, C \in For_P$. Тада $M_{T^*} \models (B \wedge C)$ акко $M_{T^*} \models B$ и $M_{T^*} \models C$ акко $B \in T^*$ и $C \in T^*$ акко $(B \wedge C) \in T^*$(последњи закључак је елементарна последица чињеница да аксиоматски систем $AX_{L_{Q_p}}$ укључује инстанце таутологија и да је T^* дедуктивно затворен).

∎

1.4 Одлучивост

У овој глави анализирамо одлучивост проблема задовољивости за L_{Q_p}-формуле. Како је процедура одлучивости за класичне исказне формуле позната, размотрићемо проблем одлучивости за вероватносне формуле.

Нека $\varphi \in For_P$. Ако су $p_1, \ldots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у φ, онда је атом формуле φ формула облика $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$, где је $\pm p_i$ или p_i или $\neg p_i$. Користећи класично резоновање може се показати да је формула φ логички еквивалентна формули

$$DNF(\varphi) = \bigvee_{i=1,m} \bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$$

где $\pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$ означава или $K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$ или $\neg K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$. φ је задовољива акко је бар један дисјункт из $DNF(\varphi)$ задовољив.

Фиксирајмо неко i и посматрајмо дисјункт

$$D_i = \bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$$

из $DNF(\varphi)$. Нека су $p_1, \dots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у D_i. Свака исказна формула $\alpha_{i,j}$ је еквивалентна својој савршеној дисјунктивној нормалној форми, у ознаци $FDNF(\alpha_{i,j})$.

Ако $\models (\alpha \Leftrightarrow \beta)$ тада , на основу Правила 6, за сваки модел M и за све $r \in \mathbf{Q}_M$, $\rho \in R$, следи да $M \models K_{r,\rho}\alpha$ акко $M \models K_{r,\rho}\beta$. Према томе, дисјункт D_i је задовољив акко је формула

$$\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} FDNF(\alpha_{i,j})$$

задовољива. Приметимо да је за различите атоме a_i и a_j, $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$. Отуда, за сваки модел M, $\mu[a_i \vee a_j] = \mu[a_i] + \mu[a_j]$. Са друге стране, како је $\mu(W) = \bigcup_{i=1,2^n} [a_i]$ и $\mu(W) = 1$, $D_i = \bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}$ је задовољив ако је следећи систем задовољив:

$$\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$$

$$J_1 = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p \leq p^{n_1} & \text{ако } \pm K_{r_1,p^{n_1}} \alpha_{i,1} = K_{r_1,p^{n_1}} \alpha_{i,1} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p > p^{n_1} & \text{ако } \pm K_{r_1,p^{n_1}} \alpha_{i,1} = \neg K_{r_1,p^{n_1}} \alpha_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$J_{k_i} = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p \leq p^{n_{k_i}} & \text{ако } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} = K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p > p^{n_{k_i}} & \text{ако } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} = \neg K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} \end{cases}$$

где $a_t \in \alpha_{i,j}$ значи да се атом a_t појављује у $FDNF(\alpha_{i,j})$ и при том $y_t = \mu([a_t])$. Означимо овај систем са S_i.

Размотримо прво неједнакости које се појављују у систему S_i.

Нека $n \in \mathbf{Z}_M$ и нека је

$$r = r_{-M}p^{-M} + \dots + r_{-n-1}p^{-n-1} + r_{-n}p^{-n} + r_{-n+1}p^{-n+1} + \dots$$

У наставку ћемо користити и кратку p-адску репрезентацију

$$r = r_{-M}r_{-M+1}\dots r_{-n-1}r_{-n}r_{-n+1}\dots$$

Неједнакост

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p \leq p^n$$

значи да $\sum_{a_t\in\alpha} y_t$ и r имају исти "почетни комад" у (краткој) p-адској репрезентацији ; прецизније, ако је

$$\sum_{a_t\in\alpha} y_t = (\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-M}(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-M+1}\dots(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-n-1}(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-n}\dots$$

и $r = r_{-M}r_{-M+1}\dots r_{-n-1}r_{-n}r_{-n+1}$, тада је неједнакост

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p \leq p^n$$

еквивалентна са:

$$\begin{aligned}
(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-M} &= r_{-M} \text{ и}\\
(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-M+1} &= r_{-M+1} \text{ и}\\
&\vdots\\
(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-n-1} &= r_{-n-1}
\end{aligned}$$

Даље, посматрајмо строге неједнакости. Неједнакост

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p > p^n$$

је задовојена акко је задовојена бар једна од следећих једначина

$$\begin{aligned}
(J^1) : |\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p &= p^{n+1}\\
(J^2) : |\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p &= p^{n+2}\\
&\vdots\\
(J^{M-n}) : |\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p &= p^{M}
\end{aligned}$$

Следећу лему користимо приликом утврђивања задовољивости ових једнакости.

Лема 3 *Нека је* $n \in \mathbf{Z}_M$, $r = r_{-M}r_{-M+1}\dots r_{-n-1}r_{-n}r_{-n+1}\dots$ *кратка p-адска репрезентација броја* r, $r' = r_{-M}r_{-M+1}\dots r_{-n-1}r_{-n}$ *коначно парче ове репрезентације,* $\alpha \in For_{Cl}$ *и* $l = |\{a_t|a_t \in \alpha\}|$. *Тада*

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p = p^n$$

акко

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r'|_p = p^n$$

Доказ: Нека је $|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p = p^n$. Тада је $\sum_{a_t\in\alpha} y_t = r + c_{-n}p^{-n} + c_{-n+1}p^{-n+1}+ \dots$, где је $c_{-n} \neq 0$. Како је $r = r' + r_{-n+1}p^{-n+1} + r_{-n+2}p^{-n+2}+ \dots$ имамо да је $\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r' = c_{-n}p^{-n} + (c_{-n+1} + r_{-n+1})p^{-n+1} + (c_{-n+2} + r_{-n+2})p^{-n+2}+ \dots$ и отуда је $|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r'|_p = p^n$.

У супротном смеру претпоставимо да је $|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r'|_p = p^n$. Тада је $\sum_{a_t\in\alpha} y_t = r' + c_{-n}p^{-n} + c_{-n+1}p^{-n+1}+ \dots$, где је $c_{-n} \neq 0$. Према томе $\sum_{a_t\in\alpha} y_t = r + c_{-n}p^{-n} + (c_{-n+1} - r_{-n+1})p^{-n+1} + (c_{-n+2} - r_{-n+2})p^{-n+2}+ \dots$ и отуда $|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p = p^n$. ∎

Према томе,

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r|_p = p^n$$

акко

$$|\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r'|_p = p^n$$

акко

$$\sum_{a_t\in\alpha} y_t - r' = c_i p^{-n} + c_{-n+1}p^{-n+1} + \dots$$

за неко $c_i \in \{1, 2\ \dots, p-1\}$ акко

$$(\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-M} = r_{-M}, \dots, (\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-n-1} = r_{-n-1}, (\sum_{a_t\in\alpha} y_t)_{-n} = r_{-n} + c_i$$

(где се подразумева да је последње сабирање $(r_{-n} + c_i)$ p-адско.)

Посматрајмо сада цео систем S_i. Претпоставимо да имамо a неједнакости облика $|\cdot|_p > p^{n^i}$, $1 \leq i \leq a$ и b неједнакости облика $|\cdot|_p \leq p^{n^j}$, $a+1 \leq j \leq a+b$, где је $a+b = k_i$. Заменимо y^{2^n} са $1 - \sum_{i=1}^{2^n} y_t$ и ову смену ставимо у неједнакости $\{J_1\ \dots J_{k_i}\}$. На овај начин добијамо систем:

$$\begin{aligned}
(J_1): |y_1^1 + y_2^1 + \ldots + y_{n_1}^1 - r^1|_p &> p^{n^1} \\
&\vdots \\
(J_a): |y_1^a + y_2^a + \ldots + y_{n_a}^a - r^a|_p &> p^{n^a} \\
(J_{a+1}): |y_1^{a+1} + y_2^{a+1} + \ldots + y_{n_{a+1}}^{a+1} - r^{a+1}|_p &\leq p^{n^{a+1}} \\
&\vdots \\
(J_{a+b}): |y_1^{a+b} + y_2^{a+b} + \ldots + y_{n_{a+b}}^{a+b} - r^{a+b}|_p &\leq p^{n^{a+b}}
\end{aligned}$$

На основу претходне дискусије, овај систем је задовољив акко је бар један од следећих
$(M-n^1)(M-n^2)\ldots(M-n^a)$ система задовољиво:

$$\begin{aligned}
(J'_1): |y_1^1 + y_2^1 + \ldots + y_{n_1}^1 - r^1|_p &= p^{m^1} \\
&\vdots \\
(J'_a): |y_1^a + y_2^a + \ldots + y_{n_a}^a - r^a|_p &= p^{m^a} \\
(J_{a+1}): |y_1^{a+1} + y_2^{a+1} + \ldots + y_{n_{a+1}}^{a+1} - r^{a+1}|_p &\leq p^{n^{a+1}} \\
&\vdots \\
(J_{a+b}): |y_1^{a+b} + y_2^{a+b} + \ldots + y_{n_{a+b}}^{a+b} - r^{a+b}|_p &\leq p^{n^{a+b}}
\end{aligned}$$

где је $n^i < m^i \leq M$. Сваки од ових система је задовољив акко је бар један од наредних $(p-1)^a$ система задовољиво:

$$H_1 = \begin{cases} (y_1^1 + y_2^1 + \ldots + y_{n_1}^1)_{-M} = r^1_{-M} \\ \ldots \\ (y_1^1 + y_2^1 + \ldots + y_{n_1}^1)_{-m^1-1} = r^1_{-m^1-1} \\ (y_1^1 + y_2^1 + \ldots + y_{n_1}^1)_{-m^1} = r^1_{-m^1} + c_1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$H_a = \begin{cases} (y_1^a + y_2^a + \ldots + y_{n_a}^a)_{-M} = r^a_{-M} \\ \ldots \\ (y_1^a + y_2^a + \ldots + y_{n_a}^a)_{-m_a-1} = r^a_{-m_a-1} \\ (y_1^a + y_2^a + \ldots + y_{n_a}^a)_{-m_a} = r^a_{-m_a} + c_a \end{cases}$$

$$H_{a+1} = \begin{cases} (y_1^{a+1} + y_2^{a+1} + \ldots + y_{n_{a+1}}^{a+1})_{-M} = r^{a+1}_{-M} \\ \ldots \\ (y_1^{a+1} + y_2^{a+1} + \ldots + y_{n_{a+1}}^{a+1})_{-n^{a+1}-1} = r^{a+1}_{-n^{a+1}-1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$H_{a+b} = \begin{cases} (y_1^{a+b} + y_2^{a+b} + \ldots + y_{n_{a+b}}^{a+b})_{-M} = r_{-M}^{a+b} \\ \ldots \\ (y_1^{a+b} + y_2^{a+b} + \ldots + y_{n_{a+b}}^{a+b})_{-n^{a+b}-1} = r_{-n^{a+b}-1}^{a+b} \end{cases}$$

где $c_i \in \{1, 2 \ldots p-1\}$.

Коначно, размотримо процедуру за проверавање задовољивости система последњег типа. Нека је

$$G = \max\{-m^1, \ldots, -m^a, -n^{a+1}, \ldots, -n^{a+b}\}.$$

Како свако $(y_j^i)_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ постоји p^{G+M+1} могућности за репрезентацију облика $y_j^i = (y_j^i)_{-M}(y_j^i)_{-M+1} \ldots (y_j^i)_G$.

Систем

$$H_1, \ldots, H_a, H_{a+1}, \ldots, H_{a+b}$$

има највише $2^n - 1$ променљивих y_j^i, па постоји највише

$$B \leq p^{(G+M+1)\cdot(2^n-1)}$$

начина да се изабере репрезентација облика

$$y_j^i = (y_j^i)_{-M}(y_j^i)_{-M+1} \ldots (y_j^i)_G$$

за све променљиве које се појављују у систему. Нумеришимо ове репрезентације са R_1,R_2 .... $R_{(G+M+1)\cdot(2^n-1)}$. Прецизније:

- репрезентацију R_1 означавамо са

  $$000\ldots0, 000\ldots0, \ldots 000\ldots0$$

  а то значи да је $(y_j^i)_k = 0$ за све i, j, k,

- репрезентацију R_2 означавамо са

  $$100\ldots0, 000\ldots0, \ldots 000\ldots0$$

  а то значи да је $(y_1^1)_{-M} = 1$, док су остали $(y_j^i)_k$ једнаки 0, итд.

Дакле, поступак је следећи: придружимо репрезентацију R_1 променљивама и проверимо да ли је систем задовољив. Ако R_1 не задовољава систем, пробамо са R_2 и тако даље. Према томе, након коначно много корака, ми налазимо репрезентацију која задовољава систем, или закључујемо да ниједна репрезентација не задовојава систем H_1, ..., H_a, H_{a+1}, ..., H_{a+b}.

Нека је φ вероватносна формула чију задовољивост испитујемо. φ је задовољива акко је задовољив систем J_1, ... J_a, J_{a+1} ... J_{a+b}. Систем J_1, ... J_a, J_{a+1} ... J_{a+b} је задовољив акко је задовољив бар један од $(M-n^1)(M-n^2)\ldots(M-n^a)\cdot(p-1)^a$ система H_a, H_{a+1}, ..., H_{a+b}. У сваком од $j = 1 \ldots (M-n^1)(M-$

$n^2)\ldots(M-n^a)\cdot(p-1)^a$ система H_a, H_{a+1}, ..., H_{a+b} појављује се број G_j(горе, у конкретном систему означено са G). Нека је $\overline{G}=max\{G_j\}$. Како су M (које се појављује у дефиницију скупа $\mathbf{Q}_M$), сви n^i-ови из неједнакости J_i', n који представља број атома формуле φ, број неједнакости k_i (а тиме и бројеви a и b строгих, односно обичних неједнакости) фиксирани природни бројеви,

$$p^{(\overline{G}+M+1)\cdot(2^n-1)}\cdot(M-n^1)(M-n^2)\ldots(M-n^a)\cdot(p-1)^a$$

је фиксиран природан број . Да бисмо испитали задовољивост формуле φ треба да тестирамо највише $p^{(\overline{G}+M+1)\cdot(2^n-1)}\cdot(M-n^1)(M-n^2)\ldots(M-n^a)\cdot(p-1)^a$ репрезентација. Тестирање сваке репрезентације подразумева коначно много сабирања (коначних) p-адских бројева. Дакле, цела процедура се завршава у коначно много корака, што доказује одлучивост логике L_{Q_p}.

Пример 1 *У овом примеру претпоставимо да је* $p=5$ *и* $M=10^{10}$. *Проверимо задовољивост формуле*

$$\varphi=K_{\frac{13}{75},5^{-2}}p_1\wedge\neg K_{\frac{2}{3},5^2}(p_1\Rightarrow p_2)$$

где $p_1,p_2\in Var$. φ *је задовољива акко је формула*

$$\psi=K_{\frac{13}{75},5^{-2}}((p_1\wedge p_2)\vee(p_1\wedge\neg p_2))\wedge\neg K_{\frac{2}{3},5^2}((p_1\wedge p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_2))$$

задовољива. Постоје четири атома у ψ:

$$a_1=(p_1\wedge p_2),a_2=(p_1\wedge\neg p_2),a_3=(\neg p_1\wedge p_2),a_4=(\neg p_1\wedge\neg p_2).$$

Нека је $y_i=\mu([a_i])$, $i=\overline{1,4}$. *Тада је* ψ *задовољива акко је наредни систем задовољив:*

$$y_1+y_2+y_3+y_4=1$$

$$|y_1+y_2-\frac{13}{75}|_p\leq 5^{-2}$$

$$|y_1+y_3+y_4-\frac{2}{3}|_p>5^2$$

Заменивши y_4 *са* $1-y_1-y_2-y_3$, *последњи систем се своди на:*

$$|y_1+y_2-\frac{13}{75}|_p\leq 5^{-2}$$

$$|y_2-\frac{1}{3}|_p>5^2$$

Овај систем је задовољив акко је бар један од следећих система $J_1,J_2\ \ldots J_{10^{10}-2}$ *задовољив:*

$$J_1 = \begin{cases} y_1 + y_2 - \frac{13}{75}|_p \leq 5^{-2} \\ |y_2 - \frac{1}{3}|_p = 5^3 \end{cases}$$

$$J_2 = \begin{cases} y_1 + y_2 - \frac{13}{75}|_p \leq 5^{-2} \\ |y_2 - \frac{1}{3}|_p = 5^4 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$J_{10^{10}-2} = \begin{cases} y_1 + y_2 - \frac{13}{75}|_p \leq 5^{-2} \\ |y_2 - \frac{1}{3}|_p = 5^{10^{10}} \end{cases}$$

Прво проверимо да ли је J_1 *задовољив. 5-адска репрезентација броја* $\frac{13}{75}$ *је*

$$1 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 \ldots$$

Дакле, коефицијенти уз $5^{-10^{10}}, 5^{-10^{10}+1} \ \ldots 5^{-3}$ *су једнаки нули. Кратка 5-адска репрезентација броја* $\frac{13}{75}$ *је*

$$00\ldots 014.131313\ldots = 00\ldots 014.\overline{13}.$$

Слично, кратка 5-адска репрезентација броја $\frac{1}{3}$ *је*

$$00\ldots 02.3131313\ldots = 00\ldots 02.\overline{31}.$$

Систем J_1 *је задовољив акко је бар један од следећа четири система задовољив.*

$$H_i = \begin{cases} (y_1 + y_2)_{-10^{10}} = 0 \\ \vdots \\ (y_1 + y_2)_{-3} = 0 \\ (y_1 + y_2)_{-2} = 1 \\ (y_1 + y_2)_{-1} = 4 \\ (y_1 + y_2)_0 = 1 \\ (y_1 + y_2)_1 = 3 \\ (y_2)_{-10^{10}} = 0 \\ \vdots \\ (y_2)_{-4} = 0 \\ (y_2)_{-3} = i \end{cases}$$

за $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. *На пример, проверимо задовољивост система* H_2 $(i = 2)$. *Очигледно је да*

$$y_2 = 00\ldots 00200.00 * * * * * * \ldots$$

задовољава једнакости

$$\begin{cases} (y_2)_{-10^{10}} = 0 \\ \vdots \\ (y_2)_{-4} = 0 \\ (y_2)_{-3} = 2 \end{cases}$$

из H_2 (симбол $*$ значи да је цифра на одговарајућој позицији небитна). Нека је

$$y_1 = 00 \ldots 0304.13 ******\ldots$$

Даље, проверимо да ли је систем H_2 задовољен репрезентацијом

$$00 \ldots 0304.13, 00 \ldots 00200.00.$$

Збир $y_1 + y_2$ у $\mathbf{Q_5}$ је:

$00 \ldots 0304.13 ******\ldots$
$00 \ldots 0200.00 ******\ldots$
$-------------$
$00 \ldots 0014.13 ******\ldots$

Према томе, све једнакости из H_2

$$\begin{cases} (y_1 + y_2)_{-10^{10}} = 0 \\ \vdots \\ (y_1 + y_2)_{-3} = 0 \\ (y_1 + y_2)_{-2} = 1 \\ (y_1 + y_2)_{-1} = 4 \\ (y_1 + y_2)_{0} = 1 \\ (y_1 + y_2)_{1} = 3 \end{cases}$$

су задовољене. Како је H_2 задовољив, задовољив је и систем J_1 одакле следи задовољивост формуле φ.

■

1.5 Минимални услови за p-адску исказну логику

Као што је већ поменуто, услови које треба да испуњава p-адска вероватноћа -адитивност и нормираност преузети су из [1] па су сходно томе дефинисани L_{Q_p}-модели и дате одговарајуће аксиоме. Како у $\mathbf{Q_p}$ нема уређења овде не постоји ограничење $\mu([\alpha]) \leq 1$ као у случају реално вредносне логике. Према томе услов нормираности нема толики значај. То нас је навело да размотирмо питање "минималних услова за p-адску вероватноћу" и питање њене формализације. Продискутујмо питање (коначне) адитивности. Са становишта субјективистичке интерпретације, вероватноћа се схвата као степен веровања.

Степен вероватња често се дефинише у терминима клађења: степен веровања неког агента у догађај A једнак је $P(A)$ уколико је он спреман да плати $P(A)$ новчних јединица за опкладу у којој ће добити једну новчану јединицу уколико се оствари догађај A, односно нула новчаних јединица уколико са A не оствари. Следећа теорема даје довољан услов под којим је немогуће да кладионичар направи систем тако да онај који се клади сигурно губи.

Теорема 6 *Нека је $\mathcal{F}$ коначно поље исказа (затворено за коначне уније и негације), и нека је P функција цене (дефинисана као горе). Тада је агент који улаже суму $P(A)$ заштићен од сигурног губитка акко је P адитивна функција (вероватноћа).*

За доказ видети [50]. Са обзиром да овде (као и у другим вероватносним логикама) вероватноћу схватамо као степен веровања, природно је инсистирати на адитивности.

Из самог услова адитивности следи да је мера контрадикције нула јер је $\mu([\top]) = \mu([\top \vee \bot]) = \mu([\top]) + \mu([\bot])$ па ће ово својсво мере свакако бити испуњено. Навешћемо заправо само разлике између ове минималне логике која описује p-адску вероватноћу и управо описане L_{Q_p}-логике.

1. У дефиницији модела, $\mu : H \to K[0, p^M]$ је адитивна функција.

2. Избацити правило 2.

   Дакле, сада више није испуњено да је у сваком моделу мера таутологије 1.

3. Постоји разлика код Теореме 4 која говори о особинама максималног конзистентног скупа. Као се у канонски модел више не додају формуле $K_{1,0}\alpha$ за све синтаксне последице α почетног конзистентног скупа T, неће ни у овом моделу важити $\mu(W) = 1$.

4. Коначно, у доказу одлучивости у систему чија се задовољивост испитује, не постоји услов $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$, па се самим тим у наведеном поступку не користи смена $y_{2^n} = 1 - \sum_{i=1}^{2^n-1} y_t$.

Наведимо још једну могућу интересантну модификацију логике L_{Q_p}. Са обзиром на ирелевантност услова $\mu(W) = 1$ можемо захтевати да буде $\mu(W) = c$ за било који константу c. Да би се то постигло довољно је у правилу извођења 2 јединицу заменити са c. Такође, приликом формирања максималног конзистентног скупа, додају се формуле $K_{c,0}\alpha$ за све синтаксне последице почетног скупа T. Приметимо да се у случају $c = 0$ добија интересантна последица: $\mu([\alpha]) = -\mu([\neg\alpha])$.

1.6 Нека поређења вероватносне логике за реално (рационално) вредносне вероватноће и вероватносне логике за p-адски вредносне вероватноће

Као што је истакнуто у уводу, у вероватносној логици за реално вредносну вероватноћу можемо поредити (по величини) вероватноће формула. У вероватносној логици за p-адски вредносну вероватноћу то није могуће. p-адски вредносном вероватноћом добијамо могућност да вероватноћа формуле буде неки негативан број, што се једноставно записује у логици помоћу формула облика $K_{r,0}\alpha$, $r \in Q_M$, $r < 0$.

Како $\mathbf{Q_p}$ и $\mathbf{R}$ садрже $\mathbf{Q}$, а развијене су вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу [51], можемо се запитати какав је однос теорема вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу и вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу, тј. да ли теореме једне логике важе у другој. Вероватносне логике за реално вредносну вероватноћу као логика L_{Q_p} за p-адски вредносну вероватноћу (и друге логике које ће бити представљене у наставку) користе одређене подскупове скупа рационалних бројева као свој индексни скуп. У случају вероватносних логика за реално вредносну вероватноћу користе се оператори $P_{\geq s}$, где $s \in \mathbf{Q} \cap [0,1] = S$, док се у случају логика за p-адску вероватноћу користе оператори $K_{r,\rho}$ где $r \in Q_M$, за неко фиксирано M. Ови скупови су очигледно различити и при том $S \nsubseteq Q_M$ и $Q_M \nsubseteq S$. На пример, $\frac{1}{p^{M+1}} \in S$ а како је $|\frac{1}{p^{M+1}}|_p = p^{M+1}$, $\frac{1}{p^{M+1}} \notin Q_M$. Са друге стране, за $M \geq 10$, $p^{10} \in Q_M$ док $p^{10} \notin S$. Код рационално вредносне логике формулу $P_{\geq s}\alpha$ можемо представити теоријом $\{P_{\neq s}\alpha | s \in \mathbf{Q} \cap [0,s)\}$. Међутим, због претходних разматрања о индексним скуповима, ову теорију не можемо изједначити са неком p-адском теоријом која садржи само формуле облика $K_{r,0}\alpha$. Из тог разлога, теореме вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу не можемо презаписивати у одговарајуће формуле логике за p-адски вредносну вероватноћу, па самим тим не можемо испитивати њихову истинитост у p-адској логици. Са друге стране, полазећи од вероватносних логика за p-адски вредносну вероватноћу, јасно је да формулу $K_{r,\rho}\alpha$ не можемо представити као теорију која садржи само формуле облика $K_{r,0}\alpha$, $r \in Q_M$, јер вредност вероватноће формуле може бити неки прави p-адски број. Због поменутог односа индексних скупова S и Q_M ни теорију која се састоји искључиво од формула облика $K_{r,0}\alpha$, $r \in Q_M$ не можемо изједначити са неком теоријом логике за рационално вредносну вероватноћу, која садржи формуле облика $P_{=s}\alpha$. Према томе, теореме вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу не можемо презаписивати у формуле вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу.

Посматрајмо један специјалан случај вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу са коначим кодоменом $[0, \frac{1}{p^M}, \frac{2}{p^M}, \ldots, \frac{p^M}{p^M}]$. Сада можемо изједначити формуле $P_{=s}\alpha$ са формулама $K_{s,0}\alpha$. Нека је $T = \{P_{\neq s}\alpha | s \neq \frac{1}{p^M}\}$

једна теорија ове логике. Тада важи $T \vdash P_{=\frac{1}{p^M}}\alpha$. Презаписујући ову логику на језик опертаора $K_{r,0}$ добијамо теорију $T' = \{\neg K_{s,0}\alpha | s \neq \frac{1}{p^M}\}$. Међутим овде $T' \nvdash K_{\frac{1}{p^M},0}\alpha$, (сементички гледано јасно је да не важи $T' \vdash K_{\frac{1}{p^M},0}\alpha$ јер вредност вероватноће формуле α може бити и неки прави p-адски број). Дакле, и у овом специјалном случају, теореме вероватносне логике за рационално вредносну вероватноћу нису обавезно и теореме вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу.

Нека је $T = \{K_{0,p^{-n}}\alpha | n \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg K_{0,0}\alpha\}$. Сваки коначан подскуп скупа T је задовољив али T није задовољив, дакле не важи теорема компактности. Како теорема компактности следи из теореме потпуности (њене јаке форме-сваки конзистентан скуп је задовољив), са коначном аксиоматизацијом не бисмо имали теорему потпуности. Исту ситуацију имамо и код вероватно сних логика са реално вредносном вероватноћом.

Напоменимо још да са обзиром да су формуле For_P коначне, (тј. нису допуштене бесконачне коњукције и дисјункције) у језику логике L_{Q_p} не може се изразити σ-адитивност.

2 p-адска исказна логика са итерацијама $L^i_{Q_p}$

Логика $L^i_{Q_p}$ се разликује од логике L_{Q_p} утолико што су дозвољене итерације вероватносних формула као и мешање вероватносних и класичних формула.

2.1 Синтакса и семантика

Нека је p фиксиран прост број, $M \in \mathbf{N}$ произвољно велик али фиксиран природан број и нека су скупови $\mathbf{Q}_M$, $\mathbf{Z}_M$ и R дефинисани као и у логици L_{Q_p}. Језик логике $L^i_{Q_p}$ се поклапа са језиком логике L_{Q_p}. Скуп $For(L^i_{Q_p})$ формула овог језика је најмањи скуп који садржи исказна слова и затворен је за следећа правила:

- Ако је α формула, $r \in \mathbf{Q}_M$ и $\rho \in R$ онда је $K_{r,\rho}\alpha$ формула.
- Ако су α и β формуле она су и $\neg\alpha$ и $(\alpha \wedge \beta)$ формуле.

Примери формула су: $K_{\frac{1}{3},\frac{1}{p^{10}}}p_1$, $K_{2,p^{10}}(p_1 \wedge K_{1,1}p_2)$, $(K_{\frac{2}{3},\frac{1}{p^2}}p_3) \wedge p_4$. Формуле из скупа $For(L^i_{Q_p})$ ћемо означавати малим словима грчког алфабета: α, β, γ итд. Остали логички везници $(\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ се дефинишу на уобичајен начин. Такође, користимо ознаку $\perp$ за $\alpha \wedge \neg\alpha$ као и $\top$ за $\alpha \vee \neg\alpha$.

Дефиниција 8 Вероватносни модел *је структура* $M = \langle W, v, Prob\rangle$ *где:*

- *W је непразан скуп светова.*
- *$v : W \times Var \to \{true, false\}$ је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружује $true$ или $false$.*
- *$Prob$ је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује један коначно-адитивни вероватносни простор $\langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$ тако да:*
  - *$W(w)$ је подскуп скупа свих светова W,*
  - *$H(w)$ је алгебра подскупова од $W(w)$ и*
  - *$\mu(w) : H(w) \to \mathbf{K}[\mathbf{0}, \mathbf{p}^{\mathbf{M}}]$ је коначно адитивна функција таква да је $\mu(w)(W(w)) = 1$.*

■

Дефиниција 9 *Нека је M произвољан $L^i_{Q_p}$ модел и w произвољан свет тог модела. Формула α је задовољена у свету w, у ознаци $w \models_w \alpha$ ако важи:*

- *Ако је α исказно слово, $\alpha \in Var$ онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако $v(w)(\alpha) = true$.*

- *Ако је α облика $K_{r,\rho}\beta$, онда $w \models_M K_{r,\rho}\beta$ ако и само ако* $|\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\}) - r|_p \leq \rho$
- *Ако је α облика $\neg\beta$ онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако није $w \models_M \beta$.*
- *Ако је α облика $\beta \wedge \gamma$ онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако $w \models_M \beta$ и $w \models_M \gamma$* ■

У даљем излагању индекс M који означава разматрани модел ћемо изостављати из ознаке $w \models_M$ ако се модел подразумева. У моделу $M = \langle W, v, Prob \rangle$ скуп $\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \alpha\}$ ћемо означавати са $[\alpha]_{M,w}$ или само са $[\alpha]_w$.

Скуп формула T је $L^i_{Q_p}$-*задовољив* ако постоји свет w неког $L^i_{Q_p}$-модела M тако да је за све $\alpha \in T$, $w \models \alpha$. Формула α је $L^i_{Q_p}$-*задовољива* ако је скуп $\{\alpha\}$ $L^i_{Q_p}$-задовољив . Формула α је $L^i_{Q_p}$-*ваљана* у $L^i_{Q_p}$-моделу M (у ознаци $M \models \alpha$) ако је задовољива у сваком свету модела M. Формула α је $L^i_{Q_p}$-*ваљана* (у ознаци $\models \alpha$) ако је ваљана у сваком моделу.

2.2 Аксиоматизација

За аксиоматизацију логике $L^i_{Q_p}$ користи се исти аксиоматски систем $AX_{L_{Q_p}}$ приказан у глави 1. са јединим разликом код правила 6, које сада гласи:

Из $\alpha \Rightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta)$ изводимо $\alpha \Rightarrow (K_{r,\rho}\gamma \Leftrightarrow K_{r,\rho}\delta)$.

Напоменимо да је ова разлика техничке природе и да потребна код доказа теореме дедукције.

Дефиниција 10 *Формула α је теорема аксиоматског система $AX_{L^i_{Q_p}}$, у ознаци $\vdash_{AX_{L^i_{Q_p}}} \alpha$ ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ такав да је свака α_i аксиома или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула. Низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ је* доказ (извођење) *за формулу α и његова дужина је ординал следбеник.* ■

Дефиниција 11 *Формула α је* синтакса последица скупа формула T, *у ознаци $T \vdash_{AX_{L^i_{Q_p}}} \alpha$ ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ такав да је свака α_i аксиома или припада скупу T или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула, уз ограничење да се правила 2 и 4 могу применити само на теореме. Низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$* је доказ (извођење) *за α из скупа формула T и његова дужина је пребројив ординал следбеник.* ■

Уместо ознака $\vdash_{AX_{L^i_{Q_p}}}$ и $T \vdash_{AX_{L^i_{Q_p}}}$ користићемо само $\vdash$ и $T \vdash$ уколико то не прети да изазове забуну.

Дефиниција 12 *Скуп формула T је* конзистентан *ако постоји формула α таква да није $T \vdash \alpha$. У супротном, скуп је неконзистентан.* ■

Дефиниција 13 *Скуп формула је* максималан *ако за сваку формулу* α, $\alpha \in T$ *или* $\neg\alpha \in T$. *Скуп формула је* максимално конзистентан *ако је максималан и конзистентан. Скуп формула* T *је* дедуктивно затворен *ако за сваку формулу* α *важи: ако* $T \vdash \alpha$ *онда* $\alpha \in T$.

2.3 Коректност и потпуност

Теорема 7 *(Теорема коректности) Аксиоматски систем* $AX_{L^i_{Q_p}}$ *је коректан у односу на класу* $L^i_{Q_p}$*-модела.*

Доказ се изводи као и у глави 1.

Теорема 8 *(Теорема дедукције) Ако је* T *скуп формула,* α *формула и* $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ *онда* $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Доказ:

Доказ се изводи као и у глави 1, са тим да постоје разлике у случајевима када су примењивана правила 2, 4 и 6. Дакле, овде ћемо обрадити само те случајеве.

1. Нека је $\beta = K_{1,0}\gamma$ добијена из $T \cup \{\alpha\}$ применом правила 2. Тада су теореме γ и $K_{1,0}\gamma$ па се из $\vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$ добија $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

2. Ако је $\beta = K_{0,0}\gamma$ добијено из $T \cup \{\alpha\}$ коришћењем правила 4, онда су $\gamma \Rightarrow \bot$ и $K_{0,0}\gamma$ теореме. Тада из $\vdash K_{0,0}\gamma \Rightarrow (\alpha \Rightarrow K_{0,0}\gamma)$ применом правила 1 добијамо $T \vdash \alpha \Rightarrow K_{0,0}\gamma$.

3. Неке је $\beta = (\epsilon \Rightarrow (K_{r,\rho}\gamma \Leftrightarrow K_{r,\rho}\delta))$ добијено из $T \cup \{\alpha\}$ применом правила 6. Тада

   $T \cup \{\alpha\} \vdash \epsilon \Rightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta)$

   $T \vdash \alpha \Rightarrow (\epsilon \Rightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta))$, на основу индукцијске хипотезе, односно

   $T \vdash (\alpha \wedge \epsilon) \Rightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta)$

   $T \vdash (\alpha \wedge \epsilon) \Rightarrow (K_{r,\rho}\gamma \Leftrightarrow K_{r,\rho}\delta)$, на основу правила 6, односно

   $T \vdash \alpha \Rightarrow (\epsilon \Rightarrow (K_{r,\rho}\gamma \Leftrightarrow K_{r,\rho}\delta))$

∎

Теорема 9 *Сваки конзистентан скуп формула* T *се може проширити до максималног конзистентног скупа.*

Доказ: Нека је T конзистентан скуп формула, α_0, α_1, ... једно набрајање свих формула из $For(L^i_{Q_p})$ и $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}^2$ било која бијекција. Дефинишемо низ скупова T_i на следећи начин:

1. $T_0 = T$

2. за свако $i \geq 0$,

   (a) Ако је $T_{2i} \cup \{\alpha_i\}$ конзистентан онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\alpha_i\}$.

   (б) Ако $T_{2i} \cup \{\alpha_i\}$ није конзистентан онда:

      (i) Ако је $\alpha_i = (\beta \Rightarrow K_{r,0}\gamma)$ онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\alpha_i, \beta \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\gamma\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.

      (ii) Иначе, $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\alpha_i\}$

3. За свако $i \geq 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}\}$ за неко $r \in \mathbf{Q}_M$ тако са T_{2i+2} буде конзистентан.

Скупови добијени у корацима 1 и 2a су очигледно конзистентни. На исти начин као и у глави 1, показује се да се у корацима 2б(i),2б (ii) као и у кораку 3 добијају конзистентни скупови .

Нека је $T^* = \bigcup_{i<\omega} T_i$. Треба показати да је T^* максималан и конзистентан скуп. Корак 2 горње конструкције гарантује да је T^* максималан. Показаћемо да је T^* дедуктивно затворен скуп који не садржи све формуле. Одатле, скуп T^* ће бити конзистентан.

Приметимо прво да T^* не садржи све формуле. Ако би за неку формулу и α и $\neg\alpha$ припадало T^* онда би за неке i, j важило $\alpha = \alpha_i$ и $\neg\alpha = \alpha_j$ па би скуп $T_{max(2i,2j)+1}$ био неконзистентан, што представља контрадикцију.

Коначно, дедуктивна затвотеност скупа T^* показује се на исти начин као и у одељку . ∎ ∎

Нека је T^* максимално конзистентан скуп добијен помоћу конструкције описане у Теореми 3. Сада, за сваку формулу $\alpha \in For(L^i_{Q_p})$, на исти начин као и у глави 1, правимо низ рационалних бројева $r(\alpha) = r_0$, r_1, ..., тако да $K_{r_j,p^{M-j}}\alpha \in T^*$.

За овај низ важе особине доказане у лемама 1 и 2 из главе 1, (низ је Кошијев, његов лимес припада кигли $K[0, p^M]$ и не зависи од начина на који су бирани чланови).

Неке је стуктура $M = \langle W, Prob, v\rangle$ дефинисана на следећи начин:

- W је скуп свих максимално конзистентних скупова.
- v је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује валуацију $v(w) : Var \to \{true, false\}$, тако да за свако исказно слово $p \in Var$, $v(w)(p) = true$ ако и само ако $p \in w$.
- За свако $w \in W$, $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$ тако да:
  - $W(w) = W$

– $H(w)$ је класа скупова облика $[\alpha] = \{w \in W : \alpha \in w\}$, за сваку формулу α

– $\mu(w)$ је дефинисана на следећи начин: Нека је $[\alpha] \in H(w)$ и $r(\alpha) = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Тада

$$\mu(w)([\alpha]) = \begin{cases} r & \text{ако } K_{r,0}\alpha \in w \\ \lim^p_{n\to\infty} r_n & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 10 *Нека је $M = \langle W, Prob, v\rangle$ управо дефинисана структура. Тада за сваки $w \in W$ и све $\alpha, \beta \in For(L^i_{Q_p})$ важи:*

1. *Ако је $[\alpha] = [\beta]$ онда је $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$.*
2. *Ако је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$ онда је $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) = \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$*
3. *$\mu(w)(W) = 1$ и $\mu(w)(\emptyset) = 0$*
4. *$\mu(w)([\neg\alpha]) = 1 - \mu(w)([\alpha])$*

Доказ:

1. Нека је $[\alpha] = [\beta]$. Тада је $[\alpha] \subseteq [\beta]$ односно $\{w|\alpha \in w\} \subseteq \{w|\beta \in w\}$. Према томе, ако је w максимално конзистентан скуп онда $w \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Одатле закључујемо да не постоји максимално конзистентан скуп w такав да $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \in w$ па је због тога $\alpha \wedge \neg\beta$ неконзистентан то јест $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Како важи и $[\beta] \subseteq [\alpha]$ добијамо да је $\vdash \beta \Rightarrow \alpha$. Дакле, $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$. Даље, на исти начин као и у Теореми 4, закључујемо да је $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$.

2. Нека је $[\alpha] \cap [\beta] = \emptyset$. Тада не постоји максимално конзистентан скуп w тако да $\alpha \in w$ и $\beta \in w$, односно такав да $\alpha \wedge \beta \in w$. Према томе $\alpha \wedge \beta$ је неконзистентан па је $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$ односно $\vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \bot$ и отуда на основу правила 4, $\vdash K_{0,0}(\alpha \wedge \beta)$. Даље, на исти начин као и у Теореми 4, закључујемо да је $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) = \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$. Докази ставки 3 и 4 се такође изводе као у глави 1.

∎

Теорема 11 (Јака потпуност) *Скуп формула T је конзистентан ако и само има $L^i_{Q_p}$-модел.*

Доказ: ($\Leftarrow$) Овај смер следи на основу теореме коректности аксиоматског система $AX_{L^i_{Q_p}}$ (Теорема 7).

($\Rightarrow$). Нека је $M = \langle W, Prob, v\rangle$ модел конструисан на горе описани начин. У Тероеми 10 је показано да је M један $L^i_{Q_p}$-модел. Индукцијом по сложености формула, на исти начин као и у Теореми 5 главе 1, доказујемо да за сваку формулу α и за сваки свет $w \in W$, $w \models \alpha$ ако и само ако $\alpha \in w$. ∎

2.3 Одлучивост

Процедура одлучивања за логике у којима је допуштена итерација вероватносних оператора детаљно је објашњена у [51] као и у главии 9 овог рада. Овде се ослањамо на дату процедуру са тим да наводимо одговарајуће разлике.

Теорема 12 *Ако је формула α задовољива, онда је задовољива у $L^i_{Q_p}$- моделу са коначно много светова.*

Конструкција модела M^* са коначно много светова изводи се на исти начин као у [51], са тим да је потребно показати да за свако w из скупа светова модела M^* важи:

$(M, w) \models K_{r,\rho}\alpha$ акко $(M^*, w) \models K_{r,\rho}\alpha$

- $(M, w) \models K_{r,\rho}\alpha$ акко
  $|\mu(w)(\{u : u \in W(w), (u, M) \models \alpha\}) - r|_p \leq \rho$ акко
  $|\sum_{C_u \models \alpha} \mu(w)(C_u \cap W(w) - r|_p \leq \rho$ акко
  $|\sum_{C_u \models \alpha, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u') - r|_p \leq \rho$
  $|\mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \alpha\}) - r|_p \leq \rho$ акко
  $(M^*, w) \models K_{r,\rho}\alpha$

■

Теорема 13 *Проблеми задовољивости и ваљаности за $L^i_{Q_p}$-логику су одлучиви.*

Доказ се изводи на исти начин као и у глави 9, са тим да за сваки w_i, посматрамо следећи скуп линеарних једначина и неједначина:

$\sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(w_j) = 1$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p \leq \rho$ ако $K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p > \rho$ ако $\neg K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$

($\beta_j \in \alpha$ означава да је β_j коњукт у α).

Поступак испитивања задовољивости оваквих система дат је у глави 1.

3 p-адска логика првог реда $L_{Q_p}^{fo}$

Комбинујући исказне вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу описане у претходне две главе као и вероватносну логику првог реда за реално вредносну вероватноћу приказану у [29, 51], можемо једноставно конструисати вероватносну логику првог реда за p-адски вредносну вероватноћу. Ослањајући се на нотацију из [51], у овој глави биће укратко приказана ова логика. Језик логике $L_{Q_p}^{fo}$ садржи k-арне релацијске симболе $P_0^k, P_1^k \dots$ и k-арне фунцијске симболе $F_0^k, F_1^k \dots$, за сваки природан број k, класичне операторе $\wedge$ и $\neg$, универзални квантификатор $\forall$, листу вероватносних оператора облика $K_{r,\rho}$ за сваки $r \in \mathbf{Q_M}$ и $\rho \in R$, променљиве $x, y, z \dots$, зарез и заграде (и).

Скуп терма и атомских формула дефинише се као и у класичној логици првог реда, док је скуп $For(L_{Q_p}^{fo})$ формула овог језика је најмањи скуп који садржи атомске формуле и затворен је за правила:

1. ако је α формуле, $r \in \mathbf{Q_M}$ и $\rho \in R$ онда је $K_{r,\rho}\alpha$ формула.

2. ако су α и β формуле, онда су и $\neg\alpha$ и $\alpha \wedge \beta$ формуле.

3. ако је α формула и x променљива онда је и $(\forall x)\alpha$ формула.

Дефиниција 14 *Вероватносни модел је структура $M = (W, D, I, Prob)$ где:*

- *W је непразан скуп светова,*

- *D је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује непразан домен $D(w)$,*

- *I је пресликавање које савком свету $w \in W$ придружује класичну интерпретацију, првог реда, $I(w)$, тако да:*

- *за свако i и сваки симбол константе F_i^0, $I(w)(F_i^0) \in D(w)$,*

- *за свако i и k, $I(w)(F_i^k)$ је функција из $D(w)^k$ у $D(w)$,*

- *за свако i и k, $I(w)(P_i^k)$ је k-арна релација над $D(w)$.*

- *$Prob$ је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује један коначно-адитивни вероватносни простор $(W(w), H(w), \mu(w))$ тако да:*

- *$W(w)$ је подскуп скупа свих светова W,*

- *$H(w)$ је алгебра подскупова од $W(w)$*

- *$\mu(w) : H(w) \to K[0, p^M]$ је коначно адитивна и нормирана функција.*

За дату валиацију v, вредности терма t у свету w - $I(w)(t)_v$ као и вредност формуле α - $I(w)(\alpha)_v$ дефинишу се као и у случају класичне логике првог реда, са тим да је потребно навести случај формуле облика $K_{r,\rho}\alpha$: за дату валуацију v

- ако је $\beta = K_{r,\rho}\alpha$ онда је $I(w)(\beta)_v = \top$ ако је

$$|\mu(w)\{u \in W(w) : I(u)(\alpha)_v = \top\} - r|_p \leq \rho$$

иначе је $I(w)(\beta)_v = \perp$.

Аксиоматски систем за ову логику садржи све аксиоме и правила извођења логике L_{Q_p} као и две додатне акисоме и једно ново правило. Две нове аксиоме су :

- $(\forall x)(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\forall x)\beta)$
- $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(t \setminus x)$, где је $\alpha(t \setminus x)$ добијено заменом свих слободних појављивана x у $\alpha(x)$, термом t који је слободан за x у $\alpha(x)$.

а ново правило је: генерализација

- Из α извести $(\forall x)\alpha$

Модел је са *фиксираним доменом* ако је за све w и u, $D(u) = D(w)$. Модел је са *ригидним термима* ако је за све светове w и u, и сваку функцијски симбол F, $I(w)(F) = I(u)(F)$. У [51] детаљно је образложено због чега разматрамо моделе са фиксираним доменом и ригидном термима. Наиме ту је наведен пример модела са два света у коме терми нису ригидни и показано је да у једном од та два света инстанца аксиоме $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(t \setminus x)$ није ваљана. Исти пример се може искористити овде са тим да се оператор $P \geq \frac{1}{2}$ замени оператором $K_{0,\frac{1}{2}}$. У [51] дата је комплетна дефиниција вредности формуле α при валуацији v, у свету w- $I(w)(\alpha)_v$ (овде је наведен само случај нових оператора) Са обзиром да на основу те дефиниција истинитосна вредност формуле $\forall x K_{0,\frac{1}{2}}\alpha(x)$ у неком свету w неког модела M зависи од вредности $I(u)(\alpha(x))_{v[d\setminus x]}$ и овде се јавља проблем уколико d није у $D(u)$.

Доказ коректности аксиоматског система $AX_{L_{Q_p}}$ у односу на $L^{fo}_{Q_p}$ моделе изводи се аналогно, док је коректност нових аксиома и правила извођења дата у [51]. Слично, у доказу теореме дедукције, разматрање новог правила описано је у [51].

Полазећи од конзистентног скупа реченица T на језику $\mathcal{L}(L^{fo}_{Q_p})$ формирамо максималан конзистентан скуп реченица $\overline{T}$ са сведоцима у језику приширеном скупом константи $\mathcal{C}$ које се не јављају у $\mathcal{L}(L^{fo}_{Q_p})$. Нека је $\alpha_0, \alpha_1 \ldots$ скуп свих реченица проширеног језика, и $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N^2}$ произвољна бијекција. Дефинишимо низ скупова T_i на следећи начин:

1. $T_0 = T$
2. За свако $i \geq 0$, ако је $T_{2i} \cup \{\alpha_i\}$ конзистентан онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \alpha_i$.
3. За свако $i \geq 0$, ако $T_{2i} \cup \{\alpha_i\}$ није конзистентан онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \neg\alpha_i$.
4. ако је скуп T_{2i+1} добијен додавањем реченице облика $\neg(\forall x)\beta(x)$, тада за неко $c \in \mathcal{C}$ скупу T_{2i+1} додајемо реченицу $\neg\beta(c)$, тако да T_{2i+1} буде конзистентан.
5. ако је скуп T_{2i+1} добијен додавањем реченице облика $\neg(\beta \Rightarrow \neg K_{r,0}\gamma)$, тада за неко $n \in \mathbf{N}$ скупу додајемо и реченице $\beta \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\gamma$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.
6. За свако $i \geq 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{K_{r,p^{M-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}\}$ за неко $r \in \mathbf{Q}_M$ тако да T_{2i+2} буде конзистентан, при чему је $\alpha_{\pi_2(i)}\}$ реченица.
7. $\overline{T} = \bigcup_i T_i$.

Доказ конзистентности ових скупова изоди се аналогно исказним случајевима, док су случајеви са квантором дати у [51],где је такође доказано да је $\overline{T}$ дедуктивно затворен, максималан скуп који не садржи све формуле, па је конзистентан.

Конструкција канонског модела изводи се као у [51] уз разлику приликом дефинисања мере:

$$\mu([\alpha]) = \begin{cases} r & \text{ако } K_{r,0}\alpha \in \overline{T} \\ \lim^p_{n\to\infty} r_n & \text{иначе} \end{cases}$$

При том се за сваку реченицу α, низ $r(\alpha) = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ конструише као и пре.

У доказу теореме потпуности, полазећи од конзистентног скупа реченица конструишемо канонски модел на језику проширеном скупом константи и показујемо да за за све реченице α важи: $w \models \alpha$ акко $\alpha \in w$. Случајеви вероватносних формула изводе се као и код логике L_{Q_p} док су случајеви атомичних реченица и реченица облика $(\forall x)\alpha$ обрађени у [51].

Користећи исте конструкције као и у [51], показује се да је формула облика $P^2(t_1, t_2)$ задовољива ако и само ако је задовољива формула облика $K_{0,p^M}(P^1_1(t_1)\wedge P^1_2(t_2))$, где су P^2 и $P^1_{1,2}$ бинарни, односно унарни релацијски симболи. На основу тога, закључујемо да је монадски фрагмент логике $L^{fo}_{Q_p}$ неодлучив. Такође можемо посматрати p-адску логику првог реда у којој нису дозвољене итерације вероватносних оператора као ни мешање класичних и вероватносних формула. У том случају модели се дефинишу као и код реално вредносних вероватноћа(са тим да је кодомен вероватноће $K[0, p^M]$). Коначно, као и у случају реално вредносне показује се да је монадички фрагмент ове логике одлучив.

4 p-адска исказна логика $L^D_{Q_p}$

Логика $L^D_{Q_p}$ се разликује од логике L_{Q_p} описане у првој глави по томе што је у језик додат нови оператор $D_\rho\alpha,\beta$, који има значење-p-адско растојање између мере формуле α и мере формуле β је мање или једнака ρ. Са обзиром да у Q_p немамо уређење, ово нам даје могућност да на неки начин поредимо вероватноће двају формула, мерећи заправо њихову "близину". Увођење оваквог проширења је заправо покушај да се направи аналогија са вероватно сном логиком са реално вредносном вероватноћом (глава 9) у којој је могуће поредити вероватноће двају формула без знања о њиховим вредностима.

4.1 Синтакса и семантика

Бројеве p и M као и скупове $\mathbf{Q}_M$, $\mathbf{Z}_M$ и R дефинишемо као и до сада. Језик логике $L^D_{Q_p}$ је унија језика логике L_{Q_p} и листе вероватносних оператора: D_ρ за свако $\rho \in R$. Скуп исказних формула овог језика означавамо да For_{Cl}. Исказне формуле означавамо са α,β,γ, итд. Скуп вероватносних формула, у ознаци For^D_P, је најмањи скуп који задовољава следеће особине:

- Ако $\alpha \in For_{Cl}$, $r \in \mathbf{Q}_M, \rho \in R$ онда је $K_{r,\rho}\alpha$ вероватносна формула.
- Ако су $\alpha, \beta \in For_{Cl}$, $\rho \in R$ онда је $D_\rho\alpha,\beta$ вероватносна формула.
- Ако су φ, ϕ вероватносне формуле, онда су и $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \phi)$ вероватносне формуле.

Дакле, вероватносне формуле означавамо са φ, ψ итд. Скуп $L^D_{Q_p}$- формула, у ознаци For^D је унија скупова For_{Cl} и For^D_P. Формуле означавамо са A,B,C итд.

$L^D_{Q_p}$-модел дефинисан је на исти начих као и L_{Q_p}-модел. Релација задовољења дефинисана је као и у случају логике L_{Q_p}, са тим да је потребно још дефинисати задовољење за формуле облика $D_\rho\alpha,\beta$. Дакле:

ако $\alpha, \beta \in For_{Cl}$ и $\rho \in R$ онда $M \models D_\rho\alpha,\beta$ акко $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p \leq \rho$

Према овој дефиницији $M \models D_\rho\alpha,\beta$ значи да је а p-аско растојање између $\mu(w)([\alpha])$ и $\mu(w)([\beta])$ мање или једнако ρ.

Појмови задовољивости и ваљаности дефинишу се као и у случају логике L_{Q_p}.

4.2 Аксиоматизација

аксиоматски систем $AX_{L^D_{Q_p}}$ укључује следеће шема-аксиоме:

1. Инстанце исказних таутологија;
2. $K_{r,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r,\rho'}\alpha$, кад год је $\rho' \geq \rho$;

3. $K_{r_1,\rho_1}\alpha \wedge K_{r_2,\rho_2}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow K_{r_1+r_2,max(\rho_1,\rho_2)}(\alpha \vee \beta)$;

4. $K_{r_1,\rho_1}\alpha \Rightarrow \neg K_{r_2,\rho_2}\alpha$, ако је $|r_1 - r_2|_p > max(\rho_1, \rho_2)$;

5. $K_{r_1,\rho}\alpha \Rightarrow K_{r_2,\rho}\alpha$, ако је $|r_1 - r_2|_p \leq \rho$;

6. $K_{r,\rho_1}\alpha \wedge D_{\rho_2}\alpha, \beta \Rightarrow K_{r,max(\rho_1,\rho_2)}\beta$;

7. $K_{r,\rho}\alpha \wedge K_{r,\rho}\beta \Rightarrow D_\rho\alpha, \beta$;

и правила извођења:

1. Из A и $A \Rightarrow B$ извести B, овде су A и B обе исказне или обе вероватносне;

2. Из α извести $K_{1,0}\alpha$;

3. Из $\alpha \Rightarrow \perp$ извести $K_{0,0}\alpha$;

4. Ако $n \in \mathbf{N}$, из $\varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $r \in \mathbf{Q}_M$, извести $\varphi \Rightarrow \perp$.

5. Ако $r \in \mathbf{Q}_M$, из $\varphi \Rightarrow K_{r,p^{M-n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$, извести $\varphi \Rightarrow K_{r,0}\alpha$.

6. Из $\varphi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$, извести $\varphi \Rightarrow D_0\alpha, \beta$.

7. Из $\alpha \Leftrightarrow \beta$ извести $K_{r,\rho}\alpha \Leftrightarrow K_{r,\rho}\beta$.

Дакле, аксиоматски систем $AX_{L^D_{Q_p}}$ садржи две нове аксиоме и једно ново правили у односу на аксиоматски систем $AX_{L_{Q_p}}$. Продискутујмо ове нове аксиоме, односно ново правило. Аксома 6 одражава следеће својство: ако знамо којој кугли припада мера формуле α и знамо растојање између мера формула α и β, онда можемо да одредимо куглу којој припада формула β. Аксиома 7 тврди: ако мера формуле α и мера формуле β припадају истој кугли, чији је полупречник ρ, онда је разлика између ових мера мања или једнака ρ. Правило 6 обезбеђује следеће: ако је растојање између мере формуле α и мере формуле β произвољно близу 0 онда је оно једнако 0.

Дефиниције: синтаксе последице, теореме, конзистентног и максималног конзистентног скупа су исте као и у глави 1.

4.3 Коректност и потпуност

Теорема 14 (*Коректност*) *Аксиоматски систем* $AX_{L^D_{Q_p}}$ *је коректан у односу на класу* $L^D_{Q_p}$*-модела.*

Доказ: Коректност већег дела овог система доказана је у глави 1. Овде ћемо показати да су аксиоме 6 и 7 ваљане као и да правило 6 чува ваљаност.

- Аксиома 6: Ако $M \models K_{r,\rho_1}\alpha \wedge D_{\rho_2}\alpha,\beta$, тада је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho_1$ и $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p \leq \rho_2$. Према томе, $|\mu([\beta]) - r|_p = |(\mu([\beta]) - \mu([\alpha])) + (\mu([\alpha]) - r)|_p \leq max\{|\mu([\beta]) - \mu([\alpha])|_p, |\mu([\alpha]) - r|_p\} = max\{\rho_1, \rho_2\}$. Дакле, $M \vdash K_{r,max\{\rho_1,\rho_2\}}\beta$.

- Аксиома 7: Нека је M произвољан модел и нека $M \models K_{r,\rho}\alpha \wedge K_{r,\rho}\beta$. Тада $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho$ и $|\mu([\beta]) - r|_p \leq \rho$ и отуда је $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = |(\mu([\alpha]) - r) + (r - \mu([\beta]))|_p \leq max\{|\mu([\alpha]) - r|_p, |r - \mu([\beta])|_p\} \leq \rho$. Према томе $M \models D_\rho\alpha,\beta$.

- Правило 6: Претпоставимо да $\varphi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha,\beta$ важи у сваком моделу M, за свако $n \in \mathbf{N}$. Нека је M произвољан $L^D_{Q_p}$-модел. Ако $M \models \neg\varphi$ онда $M \models \varphi \Rightarrow D_0\alpha,\beta$. У супротним, ако $M \models \varphi$, онда $M \models D_{p^{M-n}}\alpha,\beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq p^{M-n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Ако је за неко n, $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = p^{M-n}$ онда не важи $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p \leq p^{M-(n+1)}$. Према томе, не постоји n тако да је $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = p^{M-n}$ па је $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = 0$. (јер $|\cdot|_p : K[0, p^M] \to \{p^{M-n} | n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$).

■ ■

Теорема 15 *(Теорема дедукција) Нека је T скуп формула и A и B обе исказне или обе вероватносне формуле. Тада : Ако $T, A \vdash B$ онда $T \vdash A \Rightarrow B$.*

Доказ:

Доказ се изводи исто као и у Теореми 2. Овде ћемо само размотрити случај када је формула B добијена Применом правила 6

Дакле, нека је $B = (\varphi \Rightarrow D_0\alpha,\beta)$ добијено из $T \cup \{A\}$ применом Правила 6. Тада:

$T, A \vdash \varphi \Rightarrow (D_{p^{M-n}}\alpha,\beta)$ за свако $n \in \mathbf{N}$

$T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (D_{p^{M-n}}\alpha,\beta))$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу индукцијске хипотезе,

$T \vdash A \wedge \varphi \Rightarrow (D_{p^{M-n}}\alpha,\beta))$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

$T \vdash A \wedge \varphi \Rightarrow D_0\alpha,\beta$ на основу Правила 6,

$T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow D_0\alpha,\beta)$.

■ ■

Теорема 16 *Сваки конзистентан скуп се може проширити до максималног конзистентног скупа.*

Доказ: Доказ се изводи аналогно доказу Теореме 3, са тим да постоје додатни кораци који се односе на формуле облика $D_\rho\alpha,\beta$. Дакле, овде ћемо посебно размотрити те кораке.

Прво, приликом формирања скупова T_i, у случају када је

$\varphi_i = (\psi \Rightarrow D_0\alpha,\beta)$ и ако је $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ некознистентан, онда је

$T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i, \psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha,\beta\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.

Даље, приликом доказивања да је за свако i, T_i конзистентан, потебно је размотирти овај случај.

Нека је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta)$, нека је $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ неконзистентан и претпоставимо да је за свако $n \in \mathbf{N}$, $T_{2i} \cup \{\neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta), \psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta\}$ неконзистентан. Тада:

$T_{2i}, \neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta), \psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta \vdash \bot$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

$T_{2i}, \neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta) \vdash \neg(\psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу теореме Дедукције

$T_{2i}, \neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta) \vdash \psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$, користећи класичну таутологију $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

$T_{2i}, \neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta) \vdash \beta \Rightarrow D_0\alpha, \beta$ на основу Правила 6

$T_{2i} \vdash \neg(\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta) \Rightarrow (\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta)$ на основу теореме Дедукције

$T_{2i} \vdash \psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta$.

Како је $T_{2i} \cup \{\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta\}$ неконзистентан, из $T_{2i} \vdash \psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta$ следи да је T_{2i} неконзистентан, контрадикција.

Коначно, у циљу показивања дедуктивне затворености скупа T^*, докажимо да и за формуле облика $\varphi = (\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta)$ важи : ако је φ добијена из неког скупа претпоставки и ако све те претпоставке припадају скупу T^* онда и φ припада скупу T^*.

Дакле, нека је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta)$ добијена из скупа претпоставки $\{\varphi_n^i = (\psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta) | n \in \mathbf{N}\}$ применом Правила 6. На основу индукцијске хипотезе $\varphi_n^i \in T^*$ за свако n. Претпоставимо да $\varphi_i \notin T^*$. На основу додатног корака у конструкцији скупа T^* који смо овде увели, постоје n и j тако да $\psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ припада скупу T_j. Како је $\psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ премиса, постоји j' тако да $\psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta \in T_{j'}$. Ако је $l = max(j, j')$ тада $\psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta, \psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta \in T_l$. Отуда $T_l \vdash \psi \Rightarrow D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ и $T_l \vdash \psi \Rightarrow \neg D_{p^{M-n}}\alpha, \beta$ па $T_l \vdash \psi \Rightarrow \bot$ и према томе $T_l \vdash \psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta$. Дакле, закључујемо да $\psi \Rightarrow D_0\alpha, \beta \in T^*$, контрадикција.

∎

Канонски модел конструише се на исти начин као и у случају логике L_{Q_p}.

Теорема 17 (Јака потпуност) *Скуп формула T је конзистентан акко има $L_{Q_p}^D$-модел.*

Доказ: Доказ се изводи као и у случају логике L_{Q_p} (Теорема 5), са тим да је потребно додатно размотрити формуле облика $D_\rho\alpha, \beta$.

Нека је $\varphi = D_\rho\alpha, \beta$. Прво, претпоставимо да $D_\rho\alpha, \beta \in T^*$. Нека је $\mu([\alpha]) = r$, где је $r = \lim^p_{n\to\infty} r_n$, $r(\alpha) = (r_n)_{n\in N}$. Претпоставимо да је $\rho > 0$. Изаберимо $n \in \mathbf{N}$ тако да је $p^{M-n} < \rho$. Како је у Теореми 5 доказано $T^* \vdash K_{r,\rho}\alpha$ акко $M_{T^*} \models K_{r,\rho}\alpha$ (за све $\alpha \in For_{Cl}, r \in Q_M, \rho \in R$), из $T^* \vdash K_{r_n, p^{M-n}}\alpha$ добијамо $M_{T^*} \models K_{r_n, p^{M-n}}\alpha$ и отуда $|\mu([\alpha]) - r_n|_p \leq p^{M-n} < \rho$. Према томе:

$T^* \vdash D_\rho\alpha, \beta$

$T^* \vdash K_{r_n, p^{M-n}}\alpha$

$T^* \vdash D_\rho\alpha,\beta \wedge K_{r_n,p^{M-n}}\alpha \Rightarrow K_{r_n,\rho}\beta$, на основу Аксиоме 6,

$T^* \vdash K_{r_n,\rho}\beta$, на основу Правила 1,

и отуда $T^* \models K_{r_n,\rho}\beta$ то јест $|\mu([\beta]) - r_n|_p \leq \rho$.

Дакле:

$|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = |(\mu([\alpha]) - r_n) + (r_n - \mu([\beta]))|_p \leq max\{|\mu([\alpha]) - r_n|_p, |r_n - \mu([\beta])|_p\} \leq \rho$ па $M_{T^*} \models D_\rho\alpha,\beta$.

Сада размотримо случај $\rho = 0$, односно $D_0\alpha,\beta \in T^*$.Тада, на основу Аксиоме 6, за свако $n \in \mathbf{N}$, $T^* \vdash K_{r_n,p^{M-n}}\alpha \wedge D_0\alpha,\beta \Rightarrow K_{r_n,p^{M-n}}\beta$, и отуда на основу Правила 1, за свако $n \in \mathbf{N}$, $K_{r_n,p^{M-n}}\beta \in T^*$. Према томе $\mu([\beta]) = \lim^p_{n\to\infty} r_n = r = \mu([\alpha])$ па је $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p = 0$ односно $M_{T^*} \models D_0\alpha,\beta$.

У супротном смеру претпоставимо да $M_{T^*} \models D_\rho\alpha,\beta$. Тада је $|\mu([\alpha]) - \mu([\beta])|_p \leq \rho$. Нека је $\mu(w)([\alpha]) = r$ и $\mu([\beta]) = q$, где је $r = \lim^p_{n\to\infty} r_n$, $q = \lim^p_{n\to\infty} q_n$, $r(\alpha) = (r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $r(\beta) = (q_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Претпоставимо да је $\rho > 0$ и изаберимо n_0' тако да је за $n \geq n_0'$, $|r - r_n|_p \leq \rho$ и $|q - q_n|_p \leq \rho$. Тада, из $|r - q|_p \leq \rho$ и $|r - r_n|_p \leq \rho$ добијамо $|q - r_n|_p \leq \rho$. Даље, из $|q - r_n|_p \leq \rho$ и $|q - q_n|_p \leq \rho$ следи $|r_n - q_n|_p \leq \rho$. Изаберимо n_0'' тако да је $p^{M-n_0''} \leq \rho$. Нека је $n_0 \geq max\{n_0', n_0''\}$ и $n \geq n_0$. Тада је $p^{M-n} \leq \rho$ и отуда:

$T^* \vdash K_{r_n,p^{M-n}}\alpha$

$T^* \vdash K_{q_n,p^{M-n}}\beta$

$T^* \vdash K_{r_n,\rho}\alpha$ користећи Аксиому 2,

$T^* \vdash K_{q_n,\rho}\beta$ користећи Аксиому 2,

$T^* \vdash K_{r_n,\rho}\beta$, користећи Аксиому 5, јер $|r_n - q_n|_p \leq \rho$,

$T^* \vdash K_{r_n,\rho}\alpha \wedge K_{r_n,\rho}\beta \Rightarrow D_\rho\alpha,\beta$, на основу Аксиоме 7.

$T^* \vdash D_\rho\alpha,\beta$, на основу Правила 1.

Коначно, претпоставимо да је $\rho = 0$, то јест да $M_{T^*} \models D_0\alpha,\beta$. Тада, за свако $n \in \mathbf{N}$, $M_{T^*} \models D_{p^{M-n}}\alpha,\beta$. Даље, на основу претходних разматрања, за свако $n \in \mathbf{N}$, $T^* \vdash D_{p^{M-n}}\alpha,\beta$. Дакле, користећи Правило 6, добијамо $T^* \vdash D_0\alpha,\beta$ ∎

4.4 Одлучивост

Размотрићемо процедуру одлучивања за вероватносне формуле, односно формуле из скупа For_p^D.

Нека $\varphi \in For_p^D$ и нека су $p_1, \ldots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у φ. φ логички еквивалентна формули

$$DNF(\varphi) = \bigvee_{i=1,m} ((\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm D_{p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l}))$$

где $\pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$ $(\pm D_{p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l})$ означава $K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$ или $\neg K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$ $(D_{p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l}$ или $D_{p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l})$. φ је задовољива акко је бар један дисјункт из $DNF(\varphi)$ задовољив.

Фиксирајмо неко i и посмарајмо одговарајући дисјункт

$$D_i = (\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} \alpha_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm D_{p^{n_{i,l}}} \alpha_{i,l}, \beta_{i,l})$$

из $DNF(\varphi)$. Нека су $p_1, \dots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у D_i. Свака исказна формула $\alpha_{i,j}$ је еквивалентна својој савршеној дисјунктивној нормалној форми, у ознаци $FDNF(\alpha_{i,j})$. Ако $\models (\alpha \Leftrightarrow \beta)$, тада на основу правила 7, за сваки модел $\mathcal{M}$ и све $r \in \mathbf{Q}_M$, $\rho \in R$, $\mathcal{M} \models K_{r,\rho}\alpha$ акко $\mathcal{M} \models K_{r,\rho}\beta$. Слично, ако $\models (\alpha \Leftrightarrow \gamma)$ и $\models (\beta \Leftrightarrow \gamma))$, тада је у моделу $\mathcal{M}$, $\mu([\alpha] - \mu([\beta]) = \mu([\gamma] - \mu([\delta])$ па отуда за свако ρ, $\mathcal{M} \models D_\rho\alpha, \beta$ акко $\mathcal{M} \models D_\rho\gamma, \delta$. Према томе, дисјункт D_i је задовољив акко је формула

$$(\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}} FDNF(\alpha_{i,j})) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm D_{p^{n_{i,l}}} FDNF(\alpha_{i,l}), FDNF(\beta_{i,l}))$$

задовољива. Са обзиром да за различите атоме a_i и a_j, $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$, за сваки модел $\mathcal{M}$ је $\mu[a_i \vee a_j] = \mu[a_i] + \mu[a_j]$. Према томе, дисјункт D_i је задовољив акко је наредни систем задовољив:

$$\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$$

$$J_1 = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p \leqslant p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} = K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p > p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} = \neg K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$J_{k_i} = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p \leqslant p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} = K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p > p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} = \neg K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$L_1 = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - \sum_{a_t \in \beta_{i,1}} y_t|_p \leqslant p^{n_1} & \text{ако је } \pm D_{p^{n_1}}\alpha_{i,1}, \beta_{i,1} = D_{p^{n_1}}\alpha_{i,1}, \beta_{i,1} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - \sum_{a_t \in \beta_{i,1}} y_t|_p > p^{n_1} & \text{ако је } \pm D_{p^{n_1}}\alpha_{i,1}, \beta_{i,1} = \neg D_{p^{n_1}}\alpha_{i,1}, \beta_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$L_{s_i} = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,s_i}} y_t - \sum_{a_t \in \beta_{i,s_i}} y_t|_p \leqslant p^{n_{s_i}} & \text{ако је } \pm D_{p^{n_{s_i}}}\alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} = D_{p^{n_{s_i}}}\alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,s_i}} y_t - \sum_{a_t \in \beta_{i,s_i}} y_t|_p > p^{n_{s_i}} & \text{ако је } \pm D_{p^{n_{s_i}}}\alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} = \neg D_{p^{n_{s_i}}}\alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} \end{cases}$$

Неједнакости облика $|\sum_{a_t\in\alpha_{i,j}} y_t - \sum_{a_t\in\beta_{i,j}} y_t|_p \leqslant p^{n_j}$ своде се на неједнакости $|\sum_{a_t\in\alpha_{i,j}\triangle\beta_{i,j}} \pm y_t - 0|_p \leqslant p^{n_j}$. Према томе, процедура испитивања задовољивости за системе $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$, $J_1, \ldots J_{k_i}$,$L_1 \ \ldots L_{s_i}$,а самим тим и за логику $L^D_{Q_p}$ је дата у глави 1.

5 p-адска исказна логика $L^{D,i}_{Q_p}$

Ова логика је на неки начин комбинација претходне три. У језику ове логике имамо вероватносне операторе $K_{r,\rho}$, $r \in Q_M, \rho \in R$ као и операторе D_ρ, $\rho \in R$, и при томе су дозвољење итерације вероватносних оператора као и мешање класичних и вероватносних формула (као и у случају логике $L^i_{Q_p}$). Скуп формула ове логике обележавамо са $For(L^{D,it}_{Q_p})$. Логика $L^{D,i}_{Q_p}$ користи исти аксиоматски систем као и логика $L^D_{Q_p}$ док је дефиниција модела иста као и у логици $L^i_{Q_p}$. Релација задовољена је иста као и у случају логике $L^i_{Q_p}$ са тим да је потребно додефинисати задовољење за формуле облика $D_\rho\alpha,\beta$:

Ако $\alpha,\beta \in For(L^{D,it}_{Q_p})$ онда $w \models_M D_\rho\alpha,\beta$ акко је

$$|\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \alpha\}) - \mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\})|_p \leq \rho$$

Са обзиром да ова логика користи већ познати аксиоматски систем, Теорема коректности и Теорема дедукције су показане у претходним главама. Исказ и доказ теореме о конструкцији максималног конзистентног скупа исти је као и у претходној глави. Канонски модел се конструише као и у код логике $L^i_{Q_p}$, па је отуда и доказ теореме потпуности исти као и у случају те логике са тим да је потребно посебно размотрити формуле облика $D_\rho\alpha,\beta$, што је ура ђено у претходној глави која говори о логици $L^D_{Q_p}$. Са обзиром да је показана одлучивост за логике $L^i_{Q_p}$ и $L^D_{Q_p}$ овде ћемо навести додатне кораке.

Прво, у доказу теореме која тврди да је формула задовољива у неком моделу M акко је задовољива у одговарајућемо моделу M^* са коначно много светова потребно је показати да у сваком свету w модела M^* важи: $(M,w) \models D_\rho\alpha,\beta$ акко $(M^*,w) \models D_\rho\alpha,\beta$

- $(M,w) \models D_\rho\alpha,\beta$ акко

$$|\mu(w)(\{u : u \in W(w), (u,M) \models \alpha\}) - \mu(w)(\{u : u \in W(w), (u,M) \models \beta\})|_p \leq \rho$$

акко

$$|\sum_{C_u \models \alpha} \mu(w)(C_u \cap W(w) - \sum_{C_u : \models \beta} \mu(w)(C_u \cap W(w)|_p \leq \rho$$

акко

$$|\sum_{C_u \models \alpha, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u') - \sum_{C_u : \models \beta, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u')|_p \leq \rho$$

акко

$$|\mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \alpha\}) - \mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \beta\})|_p \leq \rho$$

акко

$(M^*, w) \models D_\rho \alpha, \beta$

Друго, приликом разматрања свих модела са коначно много светова, испитује се задовољивост следећих система:

$\sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(w_j) = 1$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p \leq \rho$ ако $K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p > \rho$ ако $\neg K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)|_p \leq \rho$ ако $D_\rho \beta, \gamma \in \alpha_i$

$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - \sum_{w_j : \gamma \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)|_p > \rho$ ако $\neg D_\rho \beta, \gamma \in \alpha_i$

Испитивање задовољивости оваквих система је приказана у претходним главама.

6 p-адска исказна логика CPL_{Z_p}

У језику ове логике, поред оператора $K_{r,\rho}$ уведен је и оператор $CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ који има значење: условна вероватноћа догађаја α при услову β припада p-адској кугли са центром r полупречником ρ. Како је $P(A \wedge B) = P(A|B) \cdot P(B)$, очигледно је да морамо користити множење p-адских бројева. Са обзиром да је $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p$, Q_M а тиме и кугла $K[0, p^M]$ нису затворени за множење. Једина p-адска кугла затворена за множење је јединична кугла $K[0, 1]$ која се уобичајено обележава са $\mathbf{Z}_p$. Према томе, да бисмо очували услов ограничености за вероватноћу (*boundedness condition*), овде ће кодомен вероватноће бити $\mathbf{Z}_p$. Поред тога, да би вероватноћа припадала јединичној кугли, морамо сузити скуп рационалних бројева- центара p-адских кугли којима апроксимирамо веро ватноћу. Очигледно, ту довољно је узети скуп рационалних бројева чија је p-адска норма мања до једнака 1.

6.1 Синтакса и семантика

Нека је p фиксиран прост број. Дефинишимо следеће скупове:

1. $\mathbf{Q}_1 = \{r \in \mathbf{Q} | |r|_p \leq 1\}$ и

2. $R = \{p^{-n} | n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.

Језик логике CPL_{Z_p} је пребројиво проширење класичног исказног језика које се састоји од пребројивог скупа исказних слова $Var = \{p_1, p_2 \dots\}$, класичних опреатора $\neg$ и $\wedge$, и листе вероватносних оператора облика $CK_{r,\rho}$ за све $r \in \mathbf{Q}_1$, $\rho \in R$. Са For_{Cl} означавамо скуп класичних исказних формула, док је скуп вероватносних формула, у ознаци For_P^{CPL} најмањи скуп формула који испуњава:

- Ако $\alpha, \beta \in For_{Cl}$, $r \in \mathbf{Q}_1, \rho \in R$ онда је $CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ вероватносна формула.

- Ако су φ, ϕ вероватносне формуле онда су и $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \phi)$ вероватносне формуле.

Вероватносне формуле ћемо обележавати са: φ, ϕ, θ итд. Скуп For^{CPL} свих CPL_{Q_p}-формула је унија скупова For_{Cl} анд For_P^{CPL}. Формуле ћемо обележавати са A, B, C итд.

Дефиниција 15 CPL_{Z_p} *модел је структура* $M = \langle W, H, \mu, v\rangle$ *где су:*

- W *непразан скуп светова.*

- H *је алгебра подскупова од* W.

- $\mu : H \to \mathbf{Z_p}$ *је коначно адитивна функција таква да је* $\mu(W) = 1$.

- $v : W \times Var \to \{true, false\}$ *је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружије* true *или* $false$. *Валуација* $v(w, \cdot)$ *се на уобичајен начин продужује на скуп свих исказних формула.* ■

Ако је M један CPL_{Z_p}-модел, са $[\alpha]_M$ ћемо означавати скуп свих светова w таквих да је $v(w, \alpha) = true$. Индекс ћемо изостављати уколико је из контекста јасно о коме моделу се ради . CPL_{Z_p}-модел $M = \langle W, H, \mu, v\rangle$ је мерљив ако $[\alpha]_M \in H$ за све $\alpha \in For_{Cl}$. Надаље ћемо се фокусирати на класу мерљивих CPL_{Z_p}-модела. Дакле, под "CPL_{Q_p}-модел" сматрамо "мерљив CPL_{Z_p}-модел".

Дефиниција 16 *Нека је* $M = \langle W, H, \mu, v\rangle$ *један* CPL_{Z_p}*-модел. Релација задовољивости дефинисана је на следећи начин:*

- *Ако* $\alpha \in For_{Cl}$ *онда* $M \models \alpha$ *ако и само ако* $v(w, \alpha) = true$ *за све* $w \in W$.

- *Ако* $\alpha, \beta \in For_{Cl}$ *онда* $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ *ако и само ако:*
  - $\mu([\beta]) = 0$ *и* $|r-1|_p \leq \rho$ *или*
  - $\mu([\beta]) \neq 0$ *и* $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq \rho$.
- *Ако* $\varphi \in For_P$, *онда* $M \models \neg\varphi$ *акко није* $M \models \varphi$.
- *Ако* $\varphi, \psi \in For_P$ *онда* $M \models \varphi \wedge \psi$ *акко* $M \models \varphi$ *и* $M \models \psi$. ■

Приметимо да на основу ове дефиниције, $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \top$ акко је $|\mu([\alpha]) - r|_p \leq \rho$. Дакле, условна вероватноћа, када је услов таутологија, своди се на обичну вероватноћу. Према томе, $CK_{r,\rho}\alpha, \top$ надаље обележавамо са $K_{r,\rho}\alpha$.

Вероватносна формула φ је CPL_{Z_p}-*задовољива* ако постоји CPL_{Z_p}-модел M тако да $M \models \varphi$. Вероватносна формула φ је CPL_{Z_p}-*ваљана* ако за све CPL_{Z_p}-моделе M, $M \models \varphi$. Скуп вероватносних формула T је задовољив ако постоји CPL_{Z_p}-модел M тако да $M \models \varphi$ за све $\varphi \in T$.

Релација задовољивости дефинисана је на основу корисне претпоставке да је условна вероватноћа једнака 1 када услов има вероватноћу нула. Обратимо опажњу на дефиницију задовољивости за формуле облика $CK_{r,\rho}\alpha, \beta$. За произвољно $\rho \in R$, $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ значи да количник $\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])}$ који представља вероватноћу догађаја α при услову β, припада p-адској кугли са центром r и полупречником ρ. Ако је $\rho = 0$, као и у предходом случају добијамо да је вероватноћа догађаја α при услову β једнака r.

6.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $AX_{CPL_{Z_p}}$ за логику CPL_{Z_p} садржи следеће шема-аксиоме:

1. Све инстанце исказних таутологија.
2. $K_{r_1,\rho_1}\alpha \wedge K_{r_2,\rho_2}\beta \wedge K_{0,0}(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow K_{r_1+r_2, max(\rho_1,\rho_2)}(\alpha \vee \beta)$.
3. $CK_{r,\rho}\alpha, \beta \Rightarrow CK_{r,\rho'}\alpha, \beta$, кад год је $\rho' \geq \rho$
4. $CK_{r_1,\rho_1}\alpha, \beta \Rightarrow \neg CK_{r_2,\rho_2}\alpha, \beta$, ако је $|r_1 - r_2|_p > max(\rho_1, \rho_2)$,
5. $CK_{r_1,\rho}\alpha, \beta \Rightarrow CK_{r_2,\rho}\alpha, \beta$, ако је $|r_1 - r_2|_p \leq \rho$
6. $K_{r_1 r_2,\rho_1}(\alpha\wedge\beta)\wedge K_{r_2,\rho_2}\beta \Rightarrow CK_{r_1, \frac{max\{\rho_1,\rho_2\}}{|r_2|_p}}\alpha, \beta$ кад год је $r_2 \neq 0$, $|r_1|_p \leq 1$, $|r_2|_p > \rho_2$, $|r_2|_p \geq \rho_1$.
7. $CK_{r,\rho}\alpha, \beta \wedge K_{r_1,\rho_1}\beta \Rightarrow K_{r\cdot r_1, max\{|r_1|_p\cdot\rho, |r|_p\cdot\rho_1\}}\alpha \wedge \beta$, ако је $r_1 \neq 0$, $|r_1|_p > \rho_1$.
8. $K_{0,0}\beta \wedge K_{r,\rho}(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow CK_{1,0}\alpha, \beta$

и правила извођења:

1. Из A и $A \Rightarrow B$ извести B, уколико су A и B обе вероватносне , или обе класичне исказне формуле.

2. Из α извести $K_{1,0}\alpha$

3. Ако $n \in \mathbf{N}$, из $\varphi \Rightarrow \neg K_{r,p^{-n}}\alpha$ за свако $r \in \mathbf{Q}_1$, извести $\varphi \Rightarrow \perp$.

4. Из $\alpha \Rightarrow \perp$, извести $K_{0,0}\alpha$

5. Ако $r \in \mathbf{Q}_1$, из $\varphi \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$, извести $\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$.

6. Из $\alpha \Leftrightarrow \beta$ извести $(K_{r,\rho}\alpha \Leftrightarrow K_{r,\rho}\beta)$.

Аксиоме $3-5$ су аналогне аксиомама $2, 4$ и 5 аксиоматског система $AX_{L_{Q_p}}$ (глава 1) и оне диктирају особине које количиник двеју вероватноћа мора да испуњава, као што су то аксиоме система $AX_{L_{Q_p}}$ тврдиле за вероватноћу једне формуле. Слично, правило извођења 5 овог система аналогно правилу 5 система $AX_{L_{Q_p}}$. Прецизније: аксиома 3 одговара својству p-адских кугли: кугла мањег полупречника је садржана у кугли већег полупречника (уколико кугле нису дисјунктне); аксиома 4 обезбеђује да условна вероватноћа (одговарајући количник мера) не може припадати двема дисјунктним куглама. Како свака тачка p-адске кугле може бити њен центар, аксиома 5 омогућава да одговарајући количник мера припада свакој од ових кугли. Аксиоме $6-8$ су другачије и оне одражавају дефиницују условне вероватноће. Размотримо ограничења постављена у аксиоми 6 и неке њихове последице. Наиме, како је $|r_1|_p \leq 1$ имамо да је $|r_1 \cdot r_2|_p = |r_1|_p \cdot |r_2|_p \leq |r_2|_p$. Одатле се види да је ово аксиому немогуће применити, нпр, на ситуацију $K_{r,0}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{r',0}\beta$ ако је $|r|_p > |r'|_p$. Према томе, логика CPL_{Z_p} не даје одговор колика је условна вероватноћа догађаја α при услову β за овакав пар формула. Ова ситуација је на неки начин неизбежна јер би се у супротном добило да је норма условне вероватноће већа од 1. Продискутујмо полупречнике кугли који се јављају у аксиомама 6 и 7. У случају логика са реалновредносном вероватноћом, условна вероватноћа догађаја α при услову β добија се као количник $\frac{\mu([\alpha \wedge \beta])}{\mu[\beta]}$. Овде вероватноћу апроксимирамо куглом око одговарајућег центра, тачније око центра који се добија као количник центара кугли којима припадају $\mu([\alpha \wedge \beta])$ и $\mu([\beta])$. Дакле, како $\mu([\alpha \wedge \beta])$ припада кугли са центом $r_1 \cdot r_2$ и $\mu([\beta])$ припада кугли са центом r_2, треба ограничити $|\frac{\mu([\alpha \wedge \beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p$ са неким погодним полупречником. Применом особина $|\cdot|_p$ добија се $\frac{max\{\rho_1, \rho_2\}}{|r_2|_p}$ (за детаље погледати доказ теореме коректности). Слична разматрања примењују се код аксиоме 7.

Правило 5 одражава следеће својство: ако је количник мера $(\alpha \wedge \beta)$ и β који одговара условној вероватноћи произвољно близу неком рационалном броју r, онда је мера поменутог количника једнака r.

Формула A је *синтакса последица* скупа формула T ($T \vdash_{AX_{CPL_{Z_p}}} \alpha$) ако постоји низ формула $A_0, A_1 \ldots A$ такав да је свака A_i аксиома или припада скупу T или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула.

Низ формула $A_0, A_1 \ldots A$ је *доказ* (*извођење*) за A из скупа формула T и његова дужина је ординал следбеник. $T \nvdash A$ значи да не важи $T \vdash A$. Формула A је теорема ($\vdash A$) ако је синтаксна последица празног скупа. Скуп формула T је конзистентан ако постоје формуле $\alpha \in For_{Cl}$ и $\varphi \in For_P$ тако да $T \nvdash \alpha$ и $T \nvdash \varphi$. Конзистентан скуп формула T је максимално конзистентан ако:

- За све $\alpha \in For_{Cl}$, ако $T \vdash \alpha$, онда α и $K_{1,0}\alpha$ припадају скупу T;
- За све $\varphi \in For_P$ или $\varphi \in T$ или $\neg\varphi \in T$.

Скуп формула T је *дедуктивно затворен* ако за све $A \in For$, из $T \vdash A$ следи $A \in T$.

6.3 Коректност и потпуност

Теорема 18 *(Теорема коректности) Аксиоматски систем $AX_{CPL_{Z_p}}$ је коректан у односу на класу CPL_{Z_p}-модела.*

Доказ: Како је коректност једног дела аксиоматског система показана у претходним главама, показаћемо да су аксиоме 3-8 ваљане као и да правило 5 чува ваљаност.

- Аксиома 3: Нека за произвољан CPL_{ZQ_p} модел важи $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta$. Претпоставимо прво да је $\mu([\beta]) \neq 0$. Тада је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq \rho$ па за $\rho' \geq \rho$ имамо $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq \rho'$. Према томе $M \models CK_{r,\rho'}\alpha, \beta$, односно $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta \Rightarrow CK_{r,\rho'}\alpha, \beta$. Ако је $\mu([\beta]) \neq 0$ онда је на основу дефиниције 16, $|r-1|_p \leq \rho$ па је отуда и $|r-1|_p \leq \rho'$, одакле поново на основу исте дефиниције добијамо да $M \models CK_{r,\rho'}\alpha, \beta$.
- Аксиома 4: Претпоставимо да $M \models CK_{r_1,\rho_1}\alpha, \beta$ и да је $|r_1 - r_2|_p > max\{\rho_1, \rho_2\}$ за неко $r_2 \in \mathbf{Q}_1$, $\rho_2 \in R$. Тада, у случају да је $\mu([\beta]) \neq 0$ имамо следећу ситуацију: $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p \leq \rho_1$ и ако $M \models CK_{r_2,\rho_2}\alpha, \beta$ онда је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_2|_p \leq \rho_2$, па је зато $|r_1 - r_2|_p = |(r_1 - \frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])}) + (\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_2)|_p \leq max\{|r_1 - \frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])}|_p, |r_2 - \frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])}|_p\} \leq max\{\rho_1, \rho_2\}$, контрадикција. Према томе $CM \models \neg K_{r_2,\rho_2}\alpha, \beta$ и отуда $M \models CK_{r_1,\rho_1}\alpha, \beta \Rightarrow \neg CK_{r_2,\rho_2}\alpha, \beta$.

  Уколико је $\mu([\beta]) = 0$ тада из $M \models CK_{r_1,\rho_1}\alpha, \beta$ и дефиниције 16 следи да је $|r_1 - 1|_p \leq \rho_1$. Ако би важило $M \models CK_{r_2,\rho_2}\alpha, \beta$ онда би на исти начин следило и $|r_2 - 1|_p$, одакле бисмо имали $|r_1 - r_2|_p \leq max\{|r_1 - 1|_p, |1 - r_2|_p\} \leq \{\rho_1, \rho_2\}$, што представља контрадикцију.
- Аксиома 5: Нека $M \models CK_{r_1,\rho}\alpha, \beta$ и нека је $|r_1 - r_2| \leq p$. Уколико је $|\mu([\beta]) \neq 0|_p$ онда је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1| \leq \rho$ па је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_2|_p = |(\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1) + (r_1 - r_2)|_p \leq$

$max\{|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p, |r_1 - r_2|\} \leq \rho$. Према томе $M \models CK_{r_2,\rho}\alpha, \beta$. У случају да је $\mu([\beta]) = 0$, из $M \models CK_{r_1,\rho}\alpha, \beta$ на основу дефиниције 16 следи $|r_1 - 1|_p \leq \rho$, па је $|r_2 - 1|_p = |r_2 - r_1 + r_1 - 1|_p \leq max\{\rho, \rho\} = \rho$, односно $M \models CK_{r_2,\rho}\alpha, \beta$. Дакле, у сваком случају $M \models CK_{r_1,\rho}\alpha, \beta \Rightarrow CK_{r_2,\rho}\alpha, \beta$.

- Аксиома 6: Претпоставимо да $M \models K_{r_1 \cdot r_2, \rho_1}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{r_2,\rho_2}\beta$ и да је при том испуњено $r_2 \neq 0$, $|r_1|_p \leq 1$ и $|r_2|_p > \rho_2$, $|r_2|_p \geq \rho_1$. Тада је

  $|\mu([\alpha \wedge \beta]) - r_1 \cdot r_2|_p \leq \rho_1$ и $|\mu([\beta]) - r_2|_p \leq \rho_2$. Према томе $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p = |\frac{\mu([\alpha\wedge\beta]) - \mu([\beta]) \cdot r_1}{\mu([\beta])}|_p = \frac{|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2 - \mu([\beta]) \cdot r_1|_p}{|\mu([\beta])|_p}$.

  Будући да $M \models K_{r_2,\rho_2}\beta$ имамо да је $|\mu([\beta]) - r_2|_p \leq \rho_2$ и отуда $|\mu([\beta])|_p = |\mu([\beta]) - r_2 + r_2|_p = max\{|\mu([\beta]) - r_2|_p, |r_2|_p\} = |r_2|_p$ јер је $|\mu([\beta]) - r_2|_p \leq \rho_2 < |r_2|_p$. Даље,

  $|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2 - \mu([\beta]) \cdot r_1|_p \leq max\{|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r_1 \cdot r_2|_p, |r_1|_p \cdot |r_2 - \mu([\beta])|_p\}$ $\leq max\{\rho_1, |r_1|_p \cdot \rho_2\} \leq max\{\rho_1, \rho_2\}$ јер је $|r_1|_p \cdot \rho_2 \leq \rho_2$. Отуда је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p \leq \frac{max\{\rho_1,\rho_2\}}{|r_2|_p}$, односно $M \models CK_{r_1, \frac{max\{\rho_1,\rho_2\}}{|r_2|_p}}\alpha, \beta$.

  Приметимо да овде не може бити $\mu([\beta]) = 0$ јер би одатле на основу дефиниције 16 следило $M \models K_{0,0}\beta$. Отуда, због $M \models K_{r_2,\rho_2}\beta$ и аксиоме 4 мора важити $|r_2 - 0| \leq max\{0, \rho_2\}$, што је у супротности са условом $|r_2| > \rho_2$.

- Аксиома 7: Нека $M \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta \wedge K_{r_1,\rho_1}\beta$, односно $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq \rho$ и $|\mu([\beta]) - r_1|_p \leq \rho_1$. Тада је $|\mu([\alpha \wedge \beta]) - \mu([\beta]) \cdot r|_p \leq |\mu([\beta])|_p \cdot \rho$ и отуда

  $|\mu([\alpha \wedge \beta]) - r \cdot r_1|_p = |\mu([\alpha \wedge \beta]) - \mu([\beta]) \cdot r + \mu([\beta]) \cdot r - r \cdot r_1|_p \leq$

  $max\{|\mu([\beta])|_p \cdot \rho, |r|_p \cdot |\mu([\beta]) - r_1|_p\} \leq max\{|\mu([\beta])|_p \cdot \rho, |r|_p \cdot \rho_1\}$. Како је $|\mu([\beta])|_p = |\mu([\beta]) - r_1 + r_1|_p \leq max\{|r_1|_p, \rho_1\}$ коначно добијамо да је $|\mu([\alpha \wedge \beta]) - r \cdot r_1|_p \leq max\{|r_1|_p \cdot \rho, \rho \cdot \rho_1, |r|_p \cdot \rho_1\}$. Према томе $M \models K_{r \cdot r_1, max\{|r_1|_p \cdot \rho, \rho \cdot \rho_1, |r|_p \cdot \rho_1\}}(\alpha \wedge \beta)$.

  Слично као и у случају претходне аксиоме, и овде не може бити $\mu([\beta]) = 0$ јер би тада важило $M \models K_{0,0}\beta$, па како $M \models K_{r_1,\rho_1}$ добили бисмо $|r_1|_p \leq \rho_1$, што је у контрадикцији са претпоставком.

- Аксиома 8: Претпоставимо да $M \models K_{0,0}\beta \wedge K_{r,\rho}(\alpha \wedge \beta)$. Тада је $\mu([\beta]) = 0$ и како је $|1 - 1|_p = 0$, на основу дефиниције релације задовољења имамо да $M \models CK_{1,0}\alpha, \beta$

Размотримо још ново правило извођења:

- Правило 5: Претпоставимо да $\varphi \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ важи у свако моделу M, за свако $n \in \mathbf{N}$. Нека је M произвољан CPL_{Z_p}-модел. Ако $M \models \neg\varphi$ онда $M \models \varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$. У супротном, ако $M \models \varphi$, онда $M \models CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq p^{-n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Ако је за неко n,

$|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p = p^{-n}$ онда је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq p^{-(n+1)}$ неће важити. Према томе, не постоји n тако да $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p = p^{-n}$ па на основу дефиниције p-адске норме следи $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p = 0$.

∎

Теорема 19 *(Теорема дедукције) Нека је T скуп формула и A и B обе исказне или обе вероватносне формуле. Тада: Ако $T, A \vdash B$ онда $T \vdash A \Rightarrow B$.*

Доказ: Доказ се изводи као и у случају Теореме 2. Овде ћемо посебно размотрити случајеве када је формула B добијена применом правила 5.

- Претпоставимо да је $B = (\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta)$ добијено применом Правила 6. Тада:

  $T, A \vdash \varphi \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу индукцијксе хипотезе.

  $T \vdash (A \wedge \varphi) \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

  $T \vdash (A \wedge \varphi) \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$ на основу Правила 5

  $T \vdash A \Rightarrow (\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta)$.

∎

Теорема 20 *Сваки конзистентан скуп формула може бити проширен до максимално конзистентног скупа.*

Доказ: Нека је T конзистентан скуп формула , $\overline{T}$ скуп свих класичних последица скупа T, α_0, α_1, ... једно набрајање свих формула из скупа For_{Cl}, φ_0,φ_1, ... једно набрајање свих формула из скупа For_P и $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N^2}$ било која бијекција (f је функција облика $f(i) = (\pi_1(i), \pi_2(i))$). Дефинишимо низ теорија T_i на следећи начин:

1. $T_0 = T \cup \overline{T} \cup \{K_{1,0}\alpha | \alpha \in \overline{T}\}$
2. за свако $i \geq 0$,
   (а) Ако је $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ конзистентан онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$.
   (б) Иначе, ако је $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ неконзистентан онда:
      (i) Ако је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow K_{r,0}\alpha)$ онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i, \psi \Rightarrow \neg K_{r,p^{-n}}\alpha\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.

(*ii*) Ако је $\varphi_i = (\psi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta)$ онда је $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i, \psi \Rightarrow \neg CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ тако да T_{2i+1} буде конзистентан.

(*iii*) Иначе $T_{2i+1} = T_{2i} \cup \{\neg\varphi_i\}$

3. За свако $i \geq 0$, $T_{2i+2} = T_{2i+1} \cup \{K_{r,p^{-\pi_1(i)}}\alpha_{\pi_2(i)}\}$ за неко $r \in \mathbf{Q}_1$ тако да T_{2i+2} буде конзистентан.

На исти начин као и у Теореми 3 показујемо да је за свако и i, скуп T_i конзистентан. Овде ћемо још показати да се у кораку 2б(*ii*) добијају конзистентни скупови. Претпоставимо да је $\varphi_i = (\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta)$, $T_{2i} \cup \{\varphi_i\}$ је неконзистентан и за свако $n \in \mathbf{N}$, $T_{2i} \cup \{\neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta), \varphi \Rightarrow \neg CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta\}$ је неконзистентан. Тада:

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta), \varphi \Rightarrow \neg CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta \vdash \perp$ за свако $n \in \mathbf{N}$,

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta) \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \neg CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta)$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу Теореме Дедукције,

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta) \vdash \varphi \Rightarrow CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$, на основу таутологије $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

$T_{2i}, \neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta) \vdash \varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$ на основу Правила 5

$T_{2i} \vdash \neg(\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta)$ на основу Теореме Дедукције,

$T_{2i} \vdash \varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$.

Како је $T_{2i} \cup \{\varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta\}$ неконзистентан, из $T_{2i} \vdash \varphi \Rightarrow CK_{r,0}\alpha, \beta$ следи да је T_{2i} неконзистентан, што представља контрадикцију.

Остатак доказа се изводи исто као у Теореми 3. ∎

Конструкција канонског модела изводи се на исти начин као и у случају логике L_{Q_p}, (глава 1).

Теорема 21 (Јака потпуност) *Скуп формула T је конзистентан акко има CPL_{Z_p}-модел.*

Доказ: Доказ се изводи на исти начин као и у случају Теореме 5, са тим да је потребно додатно размотрити формуле облика $CK_{r,\rho}\alpha, \beta$.

- Нека је $A = CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ за неке $r \in \mathbf{Q}_1$, $\rho \in R$ и $\alpha, \beta \in For_{Cl}$. Претпоставимо да $CK_{r,\rho}\alpha, \beta \in T^*$. Нека је $\mu([\beta]) = b$ и $r(\beta) = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ($b = \lim^p_{n\to\infty} b_n$ и $K_{b_n,p^{-n}}\beta \in T^*$ за свако $n \in \mathbf{N}$). Претпоставимо прво да је $b \neq 0$ и у оквиру те претпоставке размотримо следеће случајеве:

  - $r \neq 0$ и $\rho \neq 0$ Нека је $\varepsilon < min\{\frac{|b|_p \cdot \rho}{|r|_p}, |b|_p\}$ и n_0' такво да за $n \geq n_0'$ важи $|b - b_n|_p \leq \varepsilon$. Тада је $|b_n|_p = |(b_n - b) + b|_p = max\{|b_n - b|_p, |b|_p\} = |b|_p$, јер је $|b_n - b|_p \leq \varepsilon < |b|_p$. Нека је затим n_0'' такво да је $p^{-n_0''} < min\{\frac{|b|_p \cdot \rho}{|r|_p}, |b|_p\}$ и $n_0 = max\{n_0', n_0''\}$. За свако $n \geq n_0$ добијамо следеће:

$T^* \vdash CK_{r,\rho}\alpha,\beta \wedge K_{b_n,p^{-n}}\beta$, где је $|b_n|_p \neq 0$, па отуда на основу Аксиоме 7, $T^* \vdash K_{r\cdot b_n, max\{|b_n|_p\cdot\rho, |r|_p\cdot p^{-n}\}}(\alpha\wedge\beta)$. Како је $p^{-n} < \frac{|b_n|_p\cdot\rho}{|r|_p}$ и $p^{-n} < |b_n|_p$ имамо да је $|r|_p \cdot p^{-n} < |b_n|_p \cdot \rho$ и $\rho \cdot p^{-n} < \rho \cdot |b_n|_p$ и отуда $max\{|b_n|_p \cdot \rho, |r|_p \cdot p^{-n}\} = \rho \cdot |b_n|_p$ односно $T^* \vdash K_{r\cdot b_n, \rho\cdot|b_n|_p}(\alpha\wedge\beta)$. Према томе $|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r\cdot b_n|_p \leq \rho \cdot |b_n|_p$ и отуда $|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r\cdot\mu([\beta])|_p = |(\mu([\alpha\wedge\beta]) - r\cdot b_n) + (r\cdot b_n - r\cdot\mu([\beta]))|_p \leq max\{\rho\cdot|b_n|_p, |r|_p\cdot|b_n - \mu([\beta])|_p\} = \rho\cdot|b_n|_p$ јер је $|b_n - \mu([\beta])|_p \leq \varepsilon < \frac{\rho\cdot|b_n|_p}{|r|_p}$. Дакле, $|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r\cdot\mu([\beta])|_p \leq \rho\cdot|b_n|_p$ па је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r|_p \leq \rho$, односно $M_{T^*} \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$.

- $r = 0$. У овом случају закључујемо на сличан начин као и у претходном са тим да бирамо ε такво да је $\varepsilon < |b|_p$ и n_0'' такво да је $p^{-n_0''} < |b|_p$. Даље, резонујући као малопре добијамо да
  $T^* \vdash K_{r\cdot b_n, max\{|b_n|_p\cdot\rho, |r|_p\cdot p^{-n}\}}(\alpha\wedge\beta)$
  односно, $T^* \vdash K_{0,\rho\cdot|b_n|_p}(\alpha\wedge\beta)$ јер је $|r|_p = 0$ и $p^{-n} < |b_n|_p$. Према томе $|\mu([\alpha\wedge\beta])|_p \leq \rho\cdot|b_n|_p$ и отуда $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])}|_p \leq \rho$ односно $M \models CK_{0,\rho}\alpha,\beta$.
- $r \neq 0$ и $\rho = 0$. Како $T^* \vdash CK_{r,0}\alpha,\beta$ користећи Аксиому 3 закључујемо да за свако $n \in \mathbf{N}$, $T^* \vdash CK_{r,p^{-n}}\alpha,\beta$. Отуда, на основу малопре показаног имамо да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $M_{T^*} \models CK_{r,p^{-n}}\alpha,\beta$ односно $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r| \leq p^{-n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Према томе, не постоји $n \in \mathbf{Z}$ такво да је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r| = p^n$ па на основу дефиниције p-адске норме следи да је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r| = 0$. Дакле, $M_{T^*} \models CK_{r,0}\alpha,\beta$.

  Претпоставимо сада да је $b = 0$, односно $|\mu([\beta])|_p = 0$. Тада $T^* \vdash K_{0,0}\beta$ и отуда на основу Аксиоме 8, $T^* \vdash CK_{1,0}\alpha,\beta$ па на основу Аксиоме 4 мора важити $|r-1|_p \leq \rho$. Одатле, на основу Дефиниције 16 закључујемо да $M_{T^*} \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$.

У супротном смеру претпоставимо да $M_{T^*} \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$. Нека је $\mu([\alpha\wedge\beta]) = a$, $\mu([\beta]) = b$. Претпоставимо прво да је $b \neq 0$ и разликујмо следеће случајеве.

- $\rho \neq 0$. Нека је $r(\alpha\wedge\beta) = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и $r(\beta) = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Уколико је $a \neq 0$ изаберимо ε тако да је $\varepsilon < min\{|a|_p, |b|_p\cdot\rho, \frac{|b|_p\cdot\rho}{|a|_p}\}$. Нека је n_0' такво да за $n \geq n_0'$ важи $|a_n - a|_p \leq \varepsilon$ и $|b_n - b|_p \leq \varepsilon$. Тада за $n \geq n_0$ важи $|a_n|_p = |(a_n - a) + a|_p = max\{|a_n - a|_p, |a|_p\} = |a|_p$, јер је $|a_n - a|_p \leq \varepsilon < |a|_p$ и на исти начин $|b_n| = |b|_p$. Даље, за такво n је испуњено: $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}|_p = |\frac{a_n\cdot b - b_n\cdot a}{b_n\cdot b}|_p = |\frac{(a_n\cdot b - a\cdot b) + (a\cdot b - b_n\cdot a)}{b_n\cdot b}|_p = \frac{|(a_n\cdot b - a\cdot b) + (a\cdot b - b_n\cdot a)|_p}{|b|_p^2}$ $\leq \frac{max\{|a_n - a|_p\cdot|b|_p, |b_n - b|_p\cdot|a|_p\}}{|b|_p^2} \leq \frac{max\{\varepsilon\cdot|b|_p, \varepsilon\cdot|a|_p\}}{|b|_p^2} \leq max\{\frac{\varepsilon}{|b|_p}, \frac{\varepsilon\cdot|a|_p}{|b|_p}\} \leq \rho$.

  Ако је $a = 0$ изаберимо $\varepsilon < |b|_p\cdot\rho \leq |b|_p$ и n_0' тако да је за $n \geq n_0'$, $|a_n|_p \leq \varepsilon$. Тада је као и малопре $|b_n|_p = |b|_p$ и
  $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{0}{b}|_p = |\frac{a_n}{b}|_p \leq \rho$.

Према томе, у оба случаја имамо

$|\frac{a_n}{b_n} - r|_p = |(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - r)|_p \leq max\{|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}|_p, |\frac{a}{b} - r|_p\} \leq \rho$. Нека је n_0'' такво да је $p^{-n_0''} < |b|_p \cdot \rho$ и нека је $n_0 \geq max\{n_0', n_0''\}$. Тада за $n \geq n_0$ имамо $|a_n - b_n \cdot r|_p \leq |b_n|_p \cdot \rho$ и отуда

$|a - b_n \cdot r|_p \leq max\{|a - a_n|_p, |a_n - b_n \cdot r|_p\} \leq max\{\varepsilon, |b_n|_p \cdot \rho\} = |b_n|_p \cdot \rho$, што значи да $M_{T^*} \models K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta)$ и отуда

$T^* \vdash K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta)$. Према томе

$T^* \vdash K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{b_n, p^{-n}}\beta$

и како је $p^{-n} < |b_n|_p \cdot \rho \leq |b_n|_p$ примењујући Аксиому 6 и правило извођења 1, добијамо $T^* \vdash CK_{r, \frac{max\{|b_n|_p \cdot \rho, p^{-n}\}}{|b_n|_p}}\alpha, \beta$ односно, $T^* \vdash CK_{r,\rho}\alpha, \beta$.

- Нека је је $\rho = 0$. Из $M_{T^*} \models CK_{r,0}\alpha, \beta$ добијамо $|\frac{\mu([\alpha \wedge \beta])}{\mu([\beta])} - r|_p = 0$ па је $|\frac{\mu([\alpha \wedge \beta])}{\beta} - r|_p \leq p^{-n}$ за свако $n \in \mathbf{N}$, односно $M_{T^*} \models CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$. На основу управо показаног, добијамо $T^* \vdash CK_{r,p^{-n}}\alpha, \beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$ и одатле користећи правило извођења 5, $T^* \vdash CK_{r,0}\alpha, \beta$.

Коначно, размотримо случај када је $b = 0$. Тада на основу дефиниције релације задовољења имамо да важи $|r - 1|_p \leq \rho$. Са друге стране, из $\mu([\beta]) = 0$, добијамо $T^* \vdash K_{0,0}\beta$ и отуда користећи Аксиому 8 имамо $T^* \vdash CK_{1,0}\alpha, \beta$. Како је $\rho \geq 0$, на основу Аксиоме 3 добијамо $T^* \vdash CK_{1,\rho}\alpha, \beta$. Коначно, због $|r - 1|_p \leq \rho$, примењујући Аксиому 5 имамо $T^* \vdash CK_{r,\rho}\alpha, \beta$.

■

6.4 Одлучивост

Како је процедура одлучивости за за класичне исказне формуле позната, размотрићемо проблем одлучивости за вероватносне формуле. Процедура одлучивости за вероватносне формуле у којима учествују само оператори $K_{r,\rho}$ описана је детаљно у глави 1, па ћемо се овде ослањати на показане резултате.

Нека $\varphi \in For_p$. Ако су $p_1, \ldots, p_n$ сва исказна слова која се појављују у φ, онда је атом формуле φ формула облика $\pm p_1 \wedge \ldots \wedge \pm p_n$, где је $\pm p_i$ или p_i или $\neg p_i$. Користећи класично резоновање може се показати да је формула φ логички еквивалентна формули

$$DNF(\varphi) = \bigvee_{i=1,m} ((\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l}, \beta_{i,l}))$$

где $\pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$ $(\pm CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l}, \beta_{i,l})$ означава $K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$ или $\neg K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}$

$CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l}$ или $\neg(CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l})$. φ је задовољива акко је бар један дисјункт из $DNF(\varphi)$ задовољив.

Фиксирајмо неко i и посмарајмо одговарајући дисјункт

$$D_i = (\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}\alpha_{i,j}) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}\alpha_{i,l},\beta_{i,l})$$

из $DNF(\varphi)$. Нека су $p_1,\dots,p_n$ сва исказна слова која се појављују у D_i. Свака исказна формула $\alpha_{i,j}$ је еквивалентна својој савршеној дисјунктивној нормалној форми, у ознаци $FDNF(\alpha_{i,j})$. Ако $\models (\alpha \Leftrightarrow \beta)$, тада на основу правила 6, за сваки модел $\mathcal{M}$ и све $r \in \mathbf{Q}_M$, $\rho \in R$, $\mathcal{M} \models K_{r,\rho}\alpha$ акко $\mathcal{M} \models K_{r,\rho}\beta$. Слично, ако $\models (\alpha \Leftrightarrow \gamma)$ и $\models (\beta \Leftrightarrow \delta))$, тада $\models (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\gamma \wedge \delta)$ па је $\mu([\alpha \wedge \beta]) = \mu([\gamma \wedge \delta])$ и $\mu([\beta]) = \mu([\delta])$. Отуда за сваки модел $\mathcal{M}$ и све $r \in \mathbf{Q}_1$, $\mathcal{M} \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$ акко $\mathcal{M} \models CK_{r,\rho}\gamma,\delta$. Према томе, дисјункт D_i је задовољив акко је формула

$$(\bigwedge_{j=1,k_i} \pm K_{r_{i,j},p^{n_{i,j}}}FDNF(\alpha_{i,j})) \wedge (\bigwedge_{l=1,s_i} \pm CK_{r_{i,l},p^{n_{i,l}}}FDNF(\alpha_{i,l}),FDNF(\beta_{i,l}))$$

задовољива. Са обзиром да за различите атоме a_i и a_j, $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$, за сваки модел $\mathcal{M}$, $\mu[a_i \vee a_j] = \mu[a_i] + \mu[a_j]$. Према томе, дисјункт D_i је задовољив акко је наредни систем задовољив:

$$\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$$

$$J_1 = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p \leqslant p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} = K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p > p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} = \neg K_{r_1,p^{n_1}}\alpha_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$J_{k_i} = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p \leqslant p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} = K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p > p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} = \neg K_{r_{k_i},p^{n_{k_i}}}\alpha_{i,k_i} \end{cases}$$

$$L_1 = \begin{cases} |\frac{\sum_{a_t \in \alpha_{i,1} \cap \beta_{i,1}} y_t}{\sum_{a_t \in \beta_{i,1}} y_t} - r_1|_p \leqslant p^{n'_1} & \text{ако је } \pm CK_{r_1,p^{n'_1}}\alpha_{i,1},\beta_{i,1} = CK_{r_1,p^{n'_1}}\alpha_{i,1},\beta_{i,1} \\ |\frac{\sum_{a_t \in \alpha_{i,1} \cap \beta_{i,1}} y_t}{\sum_{a_t \in \beta_{i,1}} y_t} - r_1|_p > p^{n'_1} & \text{ако је } \pm CK_{r_1,p^{n'_1}}\alpha_{i,1},\beta_{i,1} = \neg CK_{r_1,p^{n'_1}}\alpha_{i,1},\beta_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$L_{s_i} = \begin{cases} |\frac{\sum_{a_t \in \alpha_{i,s_i} \cap \beta_{i,s_i}} y_t}{\sum_{a_t \in \beta_{i,s_i}} y_t} - r_{s_i}|_p \leqslant p^{n'_{s_i}} & \text{ако је } \pm CK_{r_{s_i},p^{n'_{s_i}}}\alpha_{i,s_i},\beta_{i,s_i} = CK_{r_{s_i},p^{n'_{s_i}}}\alpha_{i,s_i},\beta_{i,s_i} \\ |\frac{\sum_{a_t \in \alpha_{i,s_i} \cap \beta_{i,s_i}} y_t}{\sum_{a_t \in \beta_{i,s_i}} y_t} - r_{s_i}|_p > p^{n'_{s_i}} & \text{ако је } \pm CK_{r_{s_i},p^{n'_{s_i}}}\alpha_{i,s_i},\beta_{i,s_i} = \neg CK_{r_{s_i},p^{n'_{s_i}}}\alpha_{i,s_i},\beta_{i,s_i} \end{cases}$$

где $a_t \in \alpha_{i,j}$ значи да се атом a_t појављује у $FDNF(\alpha_{i,j})$, док $a_t \in \alpha_{i,j} \cap \beta_{i,j}$ значи да се атом a_t појављује у $FDNF(\alpha_{i,j})$ и у $FDNF(\beta_{i,j})$ и при том је $y_t = \mu([a_t])$.

У неједнакостима $L_1, \ldots, L_{s_i}$ уведимо смене

$$z_j = \frac{\sum_{a_t \in \alpha_{i,j} \cap \beta_{i,j}} y_t}{\sum_{a_t \in \beta_{i,j}} y_t}, 1 \leq j \leq s_i$$

На тај начин добијамо систем

$$\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1$$

$$J_1 = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p \leqslant p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1, p^{n_1}} \alpha_{i,1} = K_{r_1, p^{n_1}} \alpha_{i,1} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,1}} y_t - r_1|_p > p^{n_1} & \text{ако је } \pm K_{r_1, p^{n_1}} \alpha_{i,1} = \neg K_{r_1, p^{n_1}} \alpha_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$J_{k_i} = \begin{cases} |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p \leqslant p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i}, p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} = K_{r_{k_i}, p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} \\ |\sum_{a_t \in \alpha_{i,k_i}} y_t - r_{k_i}|_p > p^{n_{k_i}} & \text{ако је } \pm K_{r_{k_i}, p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} = \neg K_{r_{k_i}, p^{n_{k_i}}} \alpha_{i,k_i} \end{cases}$$

$$L_1 = \begin{cases} |z_1 - r_1|_p \leqslant p^{n'_1} & \text{ако је } \pm CK_{r_1, p^{n'_1}} \alpha_{i,1}, \beta_{i,1} = CK_{r_1, p^{n'_1}} \alpha_{i,1}, \beta_{i,1} \\ |z_1 - r_1|_p > p^{n'_1} & \text{ако је } \pm CK_{r_1, p^{n'_1}} \alpha_{i,1}, \beta_{i,1} = \neg CK_{r_1, p^{n'_1}} \alpha_{i,1}, \beta_{i,1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$L_{s_i} = \begin{cases} |z_{s_i} - r_{s_i}|_p \leqslant p^{n'_{s_i}} & \text{ако је } \pm CK_{r_{s_i}, p^{n'_{s_i}}} \alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} = CK_{r_{s_i}, p^{n'_{s_i}}} \alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} \\ |z_{s_i} - r_{s_i}|_p > p^{n'_{s_i}} & \text{ако је } \pm CK_{r_{s_i}, p^{n'_{s_i}}} \alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} = \neg CK_{r_{s_i}, p^{n'_{s_i}}} \alpha_{i,s_i}, \beta_{i,s_i} \end{cases}$$

Поступак решавања система $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1, J_1 \ldots, J_{k_i}$ дат је у глави 1. Показано је да се налажење неког решења $(y_1, \ldots y_{2^n})$ овог система, своди на налажење парцијалних решења, односно репрезнтација, облика $\overline{y}_{fin} = (y_{1,fin}, \ldots y_{2^n,fin})$ где свако $y_{i,fin}$ има коначно много цифара у развоју. Прецизније, $y_{i,fin} = (y_i)_0 (y_i)_1 \ldots (y_i)_G$, где $(y_i)_j \in \{0, \ldots p-1\}$ и $G \leq max\{-n_1 \ldots -n_{k_i}\}$. Показано је да је број парцијалних решења коначан. Испитивање задовољивости своди се на испитивање потенцијалних парцијалних решења док се не наиђе на задовољавајуће или се утврди да ни једно од њин не задовољава систем. У циљу решавања ширег система $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1, J_1 \ldots, J_{k_i}, L_1, \ldots L_{s_i}$ узмимо да је $G = max\{-n_1 \ldots -n_{k_i}, -n'_1 \ldots -n'_{s_i}\}$ а затим (евентуално)проширимо описану претрагу испитујући сва потенцијалана парцијална решења система $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1, J_1 \ldots, J_{k_i}$ и формирајмо скуп R свих оних који га задовољавају.

Посматрајмо систем $L_1, \ldots, L_{s_i}$. Претпоставимо да у њему имамо a неједнакости облика $|\cdot|_p \leq p^{n^i}$ и b неједнакости облика $|\cdot|_p > p^{n^j}$, где је $a+b=s_i$.

$$\begin{aligned}
(L'_1) : |z^1 - r^1|_p &\leq p^{n^1}\\
&\vdots\\
(L'_a) : |z^a - r^a|_p &\leq p^{n^a}\\
(L'_{a+1}) : |z^{a+1} - r^{a+1}|_p &> p^{n^{a+1}}\\
&\vdots\\
(L'_{a+b}) : |z^{a+b} - r^{a+b}|_p &> p^{n^{a+b}}
\end{aligned}$$

Овај систем има еквивалентан је унији $(-n^{a+1})\cdot(-n^{a+2}) \ldots \cdot(-n^{a+b})$ система облика

$$\begin{aligned}
(L'_1) : |z^1 - r^1|_p &\leq p^{n^1}\\
&\vdots\\
(L'_a) : |z^a - r^a|_p &\leq p^{n^a}\\
(L''_{a+1}) : |z^{a+1} - r^{a+1}|_p &= p^{m_1}\\
&\vdots\\
(L''_{a+b}) : |z^{a+b} - r^{a+b}|_p &= p^{m_b}
\end{aligned}$$

где је $n^{a+k} < m_k \leq 0$.

Свака $a+b$-торка $(z^1, \ldots, z^a, z^{a+1}, \ldots, z^{a+b})$ за коју је испуњено

$$(z^k)_0 = (r^k)_0, \ldots, (z^k)_{-n^k-1} = (r^k)_{-n^k-1}, 1 \leq k \leq a$$

$$(z^{a+j})_0 = (r^{a+j})_0, \ldots, (z^{a+j})_{-m_j-1} = (r^{a+j})_{-m_j-1}, (z^{a+j})_{-m_j} = (r^{a+j})_{-m_j} + c_j, 1 \leq j \leq b$$

за неко $c_j \in \{1, 2 \ldots, p\}$.

је решење система $L'_1 \ldots L'_a, L''_{a+1} \ldots L''_{a+b}$.

Ако је $z^k_{fin} = (z^k)_0 \ldots (z^k)_{-n^k-1}$, односно $z^k_{fin} = (z^k)_0 \ldots (z^k)_{-m_k}$,

$\overline{z}_{fin} = (z^1_{fin}, \ldots, z^a_{fin}, z^{a+1}_{fin}, \ldots, z^{a+b}_{fin})$ је парцијално решење система $L'_1 \ldots L'_a, L''_{a+1} \ldots L''_{a+b}$. Испитивање задовољивости ових система своди се на налажење његових парцијалних решења. Како сваки систем $L'_1 \ldots L'_a, L''_{a+1} \ldots L''_{a+b}$ има највише p^b парцијалних решења, систем $L'_1 \ldots L'_a, L'_{a+1} \ldots L'_{a+b}$ има највише $T = (-n^{a+1})\cdot(-n^{a+2}) \ldots \cdot(-n^{a+b}) \cdot p^b$ парцијалних решења, $\overline{z}^1_{,fin}, \ldots, \overline{z}^T_{fin}$

Коначно, размотримо поступак испитивања задовољивости целог система $(A) = \sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1, J_1 \ldots, J_{k_i}, L_1, \ldots L_{s_i}$. Претпоставимо да систем $\sum_{i=1}^{2^n} y_t = 1, J_1 \ldots, J_{k_i}$ има S парцијалних решсња, тј. $R = \{\overline{y}^1_{fin} \ldots \overline{y}^S_{fin}\}$.

Систем (A) је задовољив акко постоји бар један пар $\overline{y}^l_{fin}, \overline{z}_{j,fin}$ тако да је

$$(z^{j_1}_{fin})_0 = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_1}\cap\beta_{i,j_1}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_1}} y_{t,fin}})_0,\ \ldots,\ (z^{j_1}_{fin})_{-n^{j_1}-1} = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_1}\cap\beta_{i,j_1}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_1}} y_{t,fin}})_{-n^{j_1}-1}$$

$$\vdots$$

$$(z^{j_a}_{fin})_0 = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_a}\cap\beta_{i,j_a}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_a}} y_{t,fin}})_0,\ \ldots,\ (z^{j_a}_{fin})_{-n^{j_a}-1} = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_a}\cap\beta_{i,j_a}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_a}} y_{t,fin}})_{-n^{j_a}-1}$$

$$(z^{j_{a+1}}_{fin})_0 = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_{a+1}}\cap\beta_{i,j_{a+1}}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_{a+1}}} y_{t,fin}})_0,\ \ldots,\ (z^{j_{a+1}}_{fin})_{-m_{j_1}} = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_{a+1}}\cap\beta_{i,j_{a+1}}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_{a+1}}} y_{t,fin}})_{-m_{j_1}}$$

$$\vdots$$

$$(z^{j_{a+b}}_{fin})_0 = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_{a+b}}\cap\beta_{i,j_{a+b}}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_{a+b}}} y_{t,fin}})_0,\ \ldots,\ (z^{j_{a+b}}_{fin})_{-m_{j_b}} = (\frac{\sum_{a_t\in\alpha_{i,j_{a+b}}\cap\beta_{i,j_{a+b}}} y_{t,fin}}{\sum_{a_t\in\beta_{i,j_{a+b}}} y_{t,fin}})_{-m_{j_b}}.$$

Дакле, да бисмо испитати задовољивост потребно је упарити редом сваки $\overline{z}_{j,fin}$ за сваким $\overline{y}^l_{fin}$ док се не наиђе на неки пар који испуњава дате једнакости и у том случају је систем задовољив. Уколико се овим поступком испитају сви парови и ни један не испуњава ове једнакости систем је незадовољив.

Напомена: Овде се подразумева p-адско дељење.

6.5 p-адска исказна логика $CPL^i_{Z_p}$

Логика $CPL^i_{Z_p}$ се разликује од логике CPL_{Z_p} представљене у претходној глави, утолико што су дозвољене итерације вероватносних формула као и мешање исказних и вероватносних формула. Скупови Q_1 и R дефинисани су као и у претходној глави.

Језик логике $CPL^i_{\mathbf{Z}_p}$ поклапа се са језиком логике $CPL_{\mathbf{Z}_p}$. Скуп $For(CPL^i_{Z_p})$ формула овог језика је најмањи скуп који садржи исказна слова и затворен је за следећа правила:

- Ако је α формула, $r \in \mathbf{Q}_1$ и $\rho \in R$ онда је $K_{r,\rho}\alpha$ формула.
- Ако су α и β формуле, $r \in \mathbf{Q}_1$ и $\rho \in R$ онда је и $CK_{r,\rho}\alpha,\beta$ формула.
- Ако су α и β формуле она су и $\neg\alpha$ и $(\alpha \wedge \beta)$ формуле.

Дефиниција 17 Вероватносни модел *је структура* $M = \langle W, v, Prob\rangle$ *где су:*

- W *непразан скуп светова.*
- $v : W \times Var \Rightarrow \{true, false\}$ *је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружује труе или фалсе.*
- *Проб је пресликавање које сваком свету* $w \in W$ *придружује један коначно-адитивни вероватносни простор* $\langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$ *тако да:*
  - $W(w)$ *је подскуп скупа свих светова* W,

– *$H(w)$ је алгебра подскупова од $W(w)$ и*

– *$\mu(w) : H(w) \to \mathbf{Z_p}$ је коначно адитивна функција таква да је $\mu(w)(W(w)) = 1$.*

Дефиниција 18 *Нека је M произвољан $CPL^i_{Z_p}$ модел и w произвољан свет тог модела. Формула α је задовољена у свету w, у ознаци $w \models_w \alpha$ ако важи:*

- *Ако је α исказно слово , онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако $v(w)(\alpha) = true$.*
- *Ако је α облика $K_{r,\rho}\beta$, онда $w \models_M K_{r,\rho}\beta$ ако и само ако $|\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta\}) - r|_p \leq \rho$*
- *Ако је α облика $CK_{r,\rho}\beta, \gamma$, онда $w \models_M CK_{r,\rho}\beta, \gamma$ акко*
  - *$\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \gamma\}) = 0$ и $|r-1|_p$ или*
  - *$\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \gamma\}) \neq 0$ и*

$$|\frac{\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \beta \wedge \gamma\})}{\mu(w)(\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \gamma\})} - r|_p \leq \rho$$

- *Ако је α облика $\neg\beta$ онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако није $w \models_M \beta$.*
- *Ако је α облика $\beta \wedge \gamma$ онда $w \models_M \alpha$ ако и само ако $w \models_M \beta$ и $w \models_M \gamma$*

Индекс M који означава разматрани модел изостављамо из ознаке $w \models_M$ ако се модел подразумева. У моделу $M = \langle W, v, Prob\rangle$ скуп $\{w' : w' \in W(w), w' \models_M \alpha\}$ означавамо са $[\alpha]_{M,w}$ или само са $[\alpha]_w$.

Скуп формула T је $CPL^i_{Z_p}$ *-задовољив* ако постоји свет w $CPL^i_{Z_p}$ модела M тако да је за све $\alpha \in T$, $w \models \alpha$. Формула α је $CPL^i_{Z_p}$*- задовољива* ако је скуп $\{\alpha\}$ $CPL^i_{Z_p}$-задовољив . Формула α је $CPL^i_{Z_p}$ ваљана у $CPL^i_{Z_p}$ моделу M (у ознаци $M \models \alpha$) ако је задовољива у сваком свету модела M. Формула α је $CPL^i_{Z_p}$ ваљана (у ознаци $\models \alpha$) ако је ваљана у сваком моделу.

За аксиоматизацију логике $CPL^i_{Z_p}$ користи се аксиоматски систем $AX_{CPL_{Z_p}}$ наведен у претходној глави са тим да правило 6 гласи

Из $\alpha \Rightarrow (\gamma \Leftrightarrow \delta)$ изводимо $\alpha \Rightarrow (K_{r,\rho}\gamma \Leftrightarrow K_{r,\rho}\delta)$ (као и у глави 2).

Дефиниција 19 *Формула α је теорема аксиомацког система $AX_{CPL^i_{Z_p}}$, у ознаци $\vdash_{AX_{CPL^i_{Z_p}}} \alpha$ ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ такав да је свака α_i аксиома или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула. Низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ је* доказ (извођење) *за формулу α и његова дужина је ординал следбеник.* ■

Дефиниција 20 *Формула α је* синтакса последица скупа формула T, *у ознаци* $T \vdash_{AX_{CPL^i_{Z_p}}} \alpha$ *ако постоји низ формула* $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ *такав да је свака* α_i *аксиома или припада скупу* T *или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула, уз ограничење да се правила 2 и 4 могу применити само на теореме. Низ формула* $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ *је* доказ (извођење) α *из скупа формула* T *и његова дужина је ординал следбеник.* ■

Уместо ознака $\vdash_{AX_{CPL^i_{Z_p}}}$ и $T \vdash_{AX_{L^i_{Q_p}}}$ користићемо само $\vdash$ и $T \vdash$ уколико то не прети да изазове забуну.

Дефиниција 21 *Скуп формула* T *је* конзистентан *ако постоји формула* α *таква да није* $T \vdash \alpha$. *У супротном, скуп је неконзистентан.* ■

Дефиниција 22 *Скуп формула је* максималан *ако за сваку формулу* α, $\alpha \in T$ *или* $\neg\alpha \in T$. *Скуп формула је* максимално конзистентан *ако је максималан и конзистентан. Скуп формула* T *је* дедуктивно затворен *ако за сваку формулу* α *важи: ако* $T \vdash \alpha$ *онда* $\alpha \in T$.

Теорема 22 *(Теорема коректности) Аксиоматски систем* $AX_{CPL_{Z_p}}$ *је коректан у односу на класу* $CPL^i_{ZQ_p}$*-модела.*

Доказ се изводи као у претходној глави. ■

Теорема 23 *(Теорема дедукције) Ако је* T *скуп формула,* α *формула и* $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ *онда* $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Доказ:

Доказ се изводи као и у претходној глави, са тим да постоје разлике у случајевима када су примењивана правила 2, 4, и 6. Међутим, случајеви примене правила 2, 4 и 6 одрађени су у глави која је бави првом логиком са итерацијама $L^i_{Q_p}$.

■

Теорема 24 *Сваки конзистентан скуп формула може бити проширен до максимално конзистентног скупа.*

Доказ се изводи као и у педходној глави. ■

Констукција канонског модела изводи се као и у случају логике $L^i_{Q_p}$.

Теорема 25 (Јака потпуност) *Скуп формула* T *је конзистентан акко има* $CPL^i_{Z_p}$*-модел.*

Доказ се изводи као и у случају логике CPL_{Z_p} ■ Са обзиром да је показана одлучивост за логике $L^i_{Q_p}$ и CPL_{Z_p} овде ћемо навести додатне корака.

Прво, у доказу теореме која тврди да је формула задовољива у неком моделу M акко је задовољива у одговарајућемо моделу M^* са коначно много светова потребно је показати да у сваком свету w модела M^* важи: $(M,w) \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$ акко $(M^*,w) \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$

- $(M,w) \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$ акко

$$|\frac{\mu(w)(\{u : u \in W(w), (u,M) \models \alpha \wedge \beta\})}{\mu(w)(\{u : u \in W(w), (u,M) \models \beta\})} - r|_p \leq \rho$$

акко

$$|\frac{\sum_{C_u \models \alpha\wedge\beta} \mu(w)(C_u \cap W(w))}{\sum_{C_u \models \beta} \mu(w)(C_u \cap W(w))} - r|_p \leq \rho$$

акко

$$|\frac{\sum_{C_u : \models \alpha\wedge\beta, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u')}{\sum_{C_u : \models \beta, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u')} - r|_p \leq \rho$$

акко

$$|\frac{\mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u,M^*) \models \alpha \wedge \beta\})}{\mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u,M^*) \models \beta\})} - r|_p \leq \rho$$

акко

$(M^*,w) \models CK_{r,\rho}\alpha,\beta$

Даље, приликом разматрања свих модела са коначно много светова, испитује се задовољивост следећих система:

$$\sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(w_j) = 1$$

$$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p \leq \rho \text{ ако } K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$$

$$|\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) - r|_p > \rho \text{ ако } \neg K_{r,\rho}\beta \in \alpha_i$$

$$|\frac{\sum_{w_j : \alpha\wedge\beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)}{\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)} - r|_p \leq \rho \text{ ако } CK_\rho\alpha,\beta \in \alpha_i$$

$$|\frac{\sum_{w_j : \alpha\wedge\beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)}{\sum_{w_j : \beta \in \alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)} - r|_p > \rho \text{ ако } \neg CK_\rho\alpha,\beta \in \alpha_i$$

Поступак испитивања задовољивости оваквих система је описан у предходној глави.

7 p-адска исказна логика $CPL_{Q_p}^{fin}$

Ово је логика која говори о условној вероватноћи, као и претходне две, са тим да је кодомен цело Q_p а у језику имамо коначно много исказних слова. Као и код логике CPL_{Z_p} овде нису дозвољене итерације, као ни мешање класичних и вероватносних формула. Основни разлог за увођење овакве логике је покушај да се обезбеди *услов ограничености*, који на језику скупова формула гласи: за сваку исказну формулу α у моделу $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$

$$sup\{|\mu([\beta])|_p : [\beta] \in H, [\beta] \subset [\alpha]\} < \infty$$

али да се избегне ограниченост коју је имала логика CPL_{Z_p} - да постоје парови формула α и β такви да се у овој логици не може говорити о условној вероватно ћи догађаја α при услову β.

За сваку исказну формулу α постоји коначно много логички нееквивалентних формула β (над коначним скупом исказних слова) тако да је $\beta \Rightarrow \alpha$ таутологија, односно тако да је $[\beta] \subset [\alpha]$. Према томе, уколико дозволимо да $\mu([\beta])$ буде произвољан p-адски број, онда у горњем услову посматрамо супремум коначно много елемената облика p^n, $n \in \mathbf{Z}$ који је онда коначан број.

Нека је $R = \{p^n | n \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$. Језик логике $CPL_{Q_p}^{fin}$ састоји се од коначног скупа исказних слова $Var = \{p_1, \ldots, p_n\}$, класичних оператора $\neg$ и $\wedge$, листе вероватносних оператора $K_{r,\rho}$ за све $r \in \mathbf{Q}$, $\rho \in R$ и листе вероватносних оператора $CK_{r,\rho}$ за све $r \in \mathbf{Q}$, $\rho \in R$. Скупови класичних и вероватносних формула дефинишу се исто као и у случају логике $CPL_{\mathbf{Z_p}}$.

Дефиниција 23 $CPL_{Q_p}^{fin}$ *модел је структура* $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ *где:*

- W *је непразан скуп светова.*
- H *је алгебра подскупова од* W.
- $\mu : H \to \mathbf{Q_p}$ *је коначно адитивна функција таква да је* $\mu(W) = 1$.
- $v : W \times Var \to \{true, false\}$ *је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружије* $true$ *или* $false$. *Валуација* $v(w, \cdot)$ *се на уобичајен начин продужује на скуп свих исказних формула.*

■

Релација задовољивости дефинише се као и у случају логике $CPL_{\mathbf{Z_p}}$. Ова логика користи исти аксиоматски систем $AX_{CPL_{Z_p}}$ као и логика CPL_{Z_p} са ти да постоји извесна разлика у аксиоми 6, јер не постоји потреба за ограничавањем на Z_p. Дакле, сада аксиома 6 гласи:

$$K_{r_1 r_2, \rho_1}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{r_2, \rho_2}\beta \Rightarrow CK_{r_1, \frac{max\{\rho_1, |r_1|_p \cdot \rho_2\}}{|r_2|_p}} \alpha, \beta, r_2 \neq 0, |r_2|_p > \rho_2$$

Сада ћемо навести донекле измењен доказ коректности ове аксиоме у односу на постојећи који је изведен у глави 6 .

Претпоставимо да $M \models K_{r_1 \cdot r_2, \rho_1}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{r_2,\rho_2}\beta$ и да је при том испуњено $r_2 \neq 0$ и $|r_2|_p > \rho_2$. На исти начин као и пре добијамо да је
$|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p = \frac{|\mu([\alpha\wedge\beta]) - \cdot r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2 - \mu([\beta]) \cdot r_1|_p}{|\mu([\beta])|_p}$
као и
$|\mu([\beta])|_p = |r_2|_p$. Сада,

$$|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2 - \mu([\beta]) \cdot r_1|_p \leq max\{|\mu([\alpha\wedge\beta]) - r_1 \cdot r_2|_p, |r_1|_p \cdot |r_2 - \mu([\beta])|_p\} \leq max\{\rho_1, |r_1|_p \cdot \rho_2$$

Отуда је $|\frac{\mu([\alpha\wedge\beta])}{\mu([\beta])} - r_1|_p \leq \frac{max\{\rho_1, |r_1|_p \cdot \rho_2\}}{|r_2|_p}$, односно $M \models CK_{r_1, \frac{max\{\rho_1, |r_1|_p \cdot \rho_2\}}{|r_2|_p}} \alpha, \beta$. ■

Конструкција максималног конзистентног скупа и канонског модела изводи се на уобичајен начин, док у доказу теореме потпуности постоје ситне разлике у смеру:

из $M_{T^*} \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta$ следи $T^* \vdash CK_{r,\rho}\alpha, \beta$, па ћемо овде ради прегледности извести у целини тај део доказа.

Дакле, претпоставимо да $M_{T^*} \models CK_{r,\rho}\alpha, \beta$. Нека је $\mu([\alpha \wedge \beta]) = a$, $\mu([\beta]) = b$. Претпоставимо прво да је $b \neq 0$ и разликујмо следеће случајеве.

- $\rho \neq 0, r \neq 0$. Нека је $r(\alpha \wedge \beta) = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ и $r(\beta) = (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Уколико је $a \neq 0$ изаберимо ε тако да је $\varepsilon < min\{|a|_p, |b|_p \cdot \rho, |b|_p, \frac{|b|_p \cdot \rho}{|a|_p}\}$. Нека је n_0' такво да за $n \geq n_0'$ важи $|a_n - a|_p \leq \varepsilon$ и $|b_n - b|_p \leq \varepsilon$. Тада за $n \geq n_0$ важи $|a_n|_p = |(a_n - a) + a|_p = max\{|a_n - a|_p, |a|_p\} = |a|_p$, јер је $|a_n - a|_p \leq \varepsilon < |a|_p$ и на исти начин $|b_n| = |b|_p$. Даље, за такво n је испуњено: $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}|_p = |\frac{a_n \cdot b - b_n \cdot a}{b_n \cdot b}|_p = |\frac{(a_n \cdot b - a \cdot b) + (a \cdot b - b_n \cdot a)}{b_n \cdot b}|_p = \frac{|(a_n \cdot b - a \cdot b) + (a \cdot b - b_n \cdot a)|_p}{|b|_p^2} \leq \frac{max\{|a_n - a|_p \cdot |b|_p, |b_n - b|_p \cdot |a|_p\}}{|b|_p^2}$ $\leq \frac{max\{\varepsilon \cdot |b|_p, \varepsilon \cdot |a|_p\}}{|b|_p^2} \leq max\{\frac{\varepsilon}{|b|_p}, \frac{\varepsilon \cdot |a|_p}{|b|_p}\} \leq \rho$.

  Ако је $a = 0$ изаберимо $\varepsilon < min\{|b|_p \cdot \rho, |b|_p\}$ и n_0' тако да је за $n \geq n_0'$, $|a_n|_p \leq \varepsilon$. Тада је као и малопре $|b_n|_p = |b|_p$ и
  $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{0}{b}|_p = |\frac{a_n}{b}|_p \leq \rho$.

  Према томе, у оба случаја имамо

  $|\frac{a_n}{b_n} - r|_p = |(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}) + (\frac{a}{b} - r)|_p \leq max\{|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}|_p, |\frac{a}{b} - r|_p\} \leq \rho$. Нека је n_0'' такво да је $p^{-n_0''} < min\{|b|_p \cdot \rho, |b|_p, \frac{|b|_p \cdot \rho}{|r|_p}\}$ и нека је $n_0 \geq max\{n_0', n_0''\}$. Тада за $n \geq n_0$ имамо $|a_n - b_n \cdot r|_p \leq |b_n|_p \cdot \rho$ и отуда

  $|a - b_n \cdot r|_p \leq max\{|a - a_n|_p, |a_n - b_n \cdot r|_p\} \leq max\{\varepsilon, |b_n|_p \cdot \rho\} - |b_n|_p \cdot \rho$, што значи да $M_{T^*} \models K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta)$ и отуда

  $T^* \vdash K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta)$. Према томе

  $T^* \vdash K_{b_n \cdot r, |b_n|_p \cdot \rho}(\alpha \wedge \beta) \wedge K_{b_n, p^{-n}}\beta$

  и како је $p^{-n} < |b_n|_p$ примењујући Аксиому 6 и правило извођења 1, добијамо $T^* \vdash CK_{r, \frac{max\{|b_n|_p \cdot \rho, |r|_p p^{-n}\}}{|b_n|_p}} \alpha, \beta$ односно, $T^* \vdash CK_{r,\rho}\alpha, \beta$.

Уколико је $r = 0$ доказ се разликује утолико што n_0'' бирамо тако да важи $p^{\ n_0''} < min\{|b_n|_p \cdot \rho, |b_n|_p\}$ и примењујући Аксиому 6, на исте претпоставке како малпоре добијамо $T^* \vdash CK_0, \frac{max\{|b_n|_p \cdot \rho, 0\}}{|b_n|_p}$, односно $T^* \vdash CK_{0,\rho}\alpha, \beta$.

- Случајеви $\rho = 0$ и $b = 0$ се не разликују од постојећих.

■

8 Примери

У овој глави представљамо два примера из [11], где релативне фреквенце осцилирају у односу на реалну метрику али се стабилизују у односу на p-адску норму. Експерименте из ових примера описујемо користећи одговарајуће L_{Q_p}-теорије. У првом примеру резултат експеримента је синтаксна последица неке L_{Q_p}-теорије, док у другом примеру показујемо да одговарајући резултат важи у сваком L_{Q_p}-моделу одређене теорије. Након тога једним примером илуструјемо могућност да логика L_{Q_p} има и другу инерпретацију сем вероватносне. Наиме, приказан је p-адско вредносни модел који симулира рад људског мозга а одговарајући резултати могу се добити као синтаксне последице одговарајуће теорије.

8.1 Вероватносни модел p-адског новчића

Прво ћемо описати модел p-адског новчића, који можемо сматрати аналогом обичог новчића. p-адски новчић је метални диск чија је једна страна обележена са a а друга са b. На распологању је електричан уређај који генерише негативнио наелектрисање на страни a или на страни b. У датом тренутку само једна страна може бити наелектрисана. Такође, постоји и компјутер који генерише низ случајних бројева $\xi(w) \in \{0, 1\}$. Овде посматрамо случај једнаких вероватноћа релизације 0 и 1. Компјутер ради по следећем алгоритму $\mathcal{A}$:

- Дати су фиксирани временски интервали , $\Delta = 1$, $\Delta t_a = \Delta$ и $\Delta t_b = p$.
- Ако је $\xi(w) = 0$, онда је наелектрисање (негативно) генерисано на страни a и ту остаје током временског интервала $\Delta t_a' = \Delta t_a \cdot p^2$ где је Δt_a претходни временски интервал у току кога је страна a била наелектрисана. Дакле, за страну a интервали наелектрисања су 1, p^2, p^4, ..., p^{2k}, ...
- Ако је $\xi(w) = 1$, онда је негативно наелектрисање генерисано на страни b и ту остаје током временског интервала: $\Delta t_b' = \Delta t_b \cdot p^2$, где је Δt_b претходни временски интервал у току кога је страна b наелектрисана. Према томе, за страну b добијамо интервале наелектрисања p, p^3, p^5, ..., p^{2k+1}, ...

Сада, посматрајмо статистички експеримент са p-адским новчићем. Можсмо замислити експеримент на следећи начин. Имамо две особе које учествују у његовом извођењу, и имамо метални диск (таблу) са константним позитивним наелектрисањем. Први учесник је посматрач који не зна ништа о структури овог новчића, већ само види метални диск. Други учесник баца новчић на таблу. Сваке секунде изводи се тачно једно бацање. Са обзиром на распореде наелектрисања, новчић ће увек пасти тако да страна која је на врху није наелектрисана. Описани алгоритам $\mathcal{A}$ почињс са радом након првог бацања.

Желимо да израчунаммо вероватноће реализација стане a, $P(a)$, и стране b, $P(b)$. Нека је $\{\xi_k(w)\}$ низ независних случајних променљивих $\xi_k(w) = 0, 1$ са вероватноћама по $\frac{1}{2}$. Нека је:

$$S_n(w) = \sum_{k=1,n} \xi_k(w)$$

$$T_n(w) = n - S_n(w) = \sum_{k=1,n} (1 - \xi_k(w))$$

$$n^b_m(w) = \sum_{k=1,T_m(w)} p^{2(k-1)}$$

$$n^a_m(w) = \sum_{k=1,S_m(w)} p^{2k-1}$$

и $N_m(w) = n^a_m(w) + n^b_m(w)$. Уведимо релативне фреквенце $\nu^a_m(w) = \frac{n^a_m(w)}{N_m(w)}$ и $\nu^b_m(w) = \frac{n^b_m(w)}{N_m(w)}$. Приметимо да је $|\nu^a_m(w)|_p = |\frac{n^a_m(w)}{N_m(w)}|_p = \frac{1}{p}$ и $|\nu^b_m(w)|_p = |\frac{n^b_m(w)}{N_m(w)}|_p = 1$. Према томе $\nu^a_m(w), \nu^b_m(w) \in \mathbf{Q}_M$.

Следеће теореме указују на различито понашање реалне и p-адске вероватноће.

Теорема 26 *Релативне фреквенце $\nu^a_m(w)$ и $\nu^b_m(w)$ немају лимес у пољу реалних бројева.* ■

Теорема 27 *Релативне фреквенце $\nu^a_m(w)$ и $\nu^b_m(w)$ имају лимес у $\mathbf{Q_p}$, и при том је $P(a) = \lim^p_{m\to\infty} \nu^a_m(w) = \frac{p}{1+p}$ и $P(b) = \lim^p_{m\to\infty} \nu^b_m(w) = \frac{1}{1+p}$.* ■

Нека β представља исказ "Страна b је реализована у експерименту". Тада постоји L_{Q_p}-теорија T која изводи формулу $K_{\frac{1}{1+p},0}\beta$, при чему $K_{\frac{1}{1+p},0}\beta$ значи "вероватноћа реализације стране b је једнака $\frac{1}{1+p}$".

Претпоставимо да након сваког бацања неко записује релативне фреквенце: ν^b_1, $\nu^b_2, \ldots$, ν^b_m, ... Ове фреквенце ће бити центри одређених p-адских кугли. У Теореми 27 вероватноћа реализације стране b једнака је (p-адском) лимесу низа ν^b_1, $\nu^b_2, \ldots$, ν^b_m, ...,и отуда је $(\forall n)(\exists m_n)(\forall m)[m \geq m_n \rightarrow |\frac{1}{1+p} - \nu^b_m|_p \leq \frac{1}{p^n}]$. Формирајмо следећи низ скупова L_{Q_p}-формула:

$$S_{n,m_n} = \{K_{\nu^b_m, \frac{1}{p^n}}\beta | m \geq m_n\}$$

и дефинишино теорију $T = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_{n,m_n}$. Тада:

- $T \vdash K_{\nu_m^b, \frac{1}{p^n}}\beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$ и $m \geq m_n$,
- $T \vdash K_{\frac{1}{1+p}, \frac{1}{p^n}}\beta$ за свако $n \in \mathbf{N}$, користећи Аксиому 5 из главе 1, јер је за свако $m \geq m_n$, $|\frac{1}{1+p} - \nu_m^b|_p \leq \frac{1}{p^n}$,
- $T \vdash K_{\frac{1}{1+p}, 0}\beta$ на основу Правила 5 из главе 1.

Дакле, добијамо исти резултат као и у Теореми 27. ■

8.2 Модел индустријске производње

Посматрајмо индустријски процес (у ознаци ИНД) који производи беле и црвене лопте. Лопте се производе у серијама од по $M = p^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ лопти истог типа, где је p фиксиран прост број. Процес ИНД је организован уз помоћ два независна низа случајних променљивих, $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\theta_k\}$, где:

- $\varepsilon_k = w$ или $\varepsilon_k = r$ ("w" значи бело и "r" значи црвено), и
- $\theta_k = 1$ или $\theta_k = 2$.

Претпоставимо да је у кораку k произведено $M_k = p^n$ лопти фиксиране боје. Тада:

- Ако је $\varepsilon_{k+1} = w(r)$, ИНД ће производити серију белих (црвених) лопти,
- Дужина ове нове серије је $M_{k+1} = M_k p^{\theta_{k+1}}$.

Претпоставимо да су произведене лопте измешане и стављене у кутију. Питамо се:

- колике су вероватноће $P(w)$ и $P(r)$ да извучемо белу (црвену) лопту из кутије након веома дугачког периода ИНД-производње (овде заправо посматрамо идеалан бесконачан период ИНД-производње).

Нека су T_1, T_2, $\ldots$, T_k, $\ldots$ моменти завршетка претходне и почетка следеће серије у ИНД-производњи. Да бисмо одредили вероватноће $P(w)$ и $P(r)$ рачунамо релативне фреквенце $\nu_k(w)$ и $\nu_k(r)$ белих и црвених лопти у моментима T_k, $k = 1, 2, \ldots$ и посматрамо лимесе низоава $\{\nu_k(w)\}$ и $\{\nu_k(r)\}$. Следећи резултати налазе се у [11] а говоре о стабилизацији ових релативних фреквенци. Прва теорема говори о стабилизацији у пољу p-аских бројева а друга у пољу реалних бројева.

Теорема 28 *Нека су $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\theta_k\}$ произвољни низови случајних променљивих. Тада поменути лимеси, $P(w) = \lim^p_{k\to\infty} \nu_k(w)$, $P(r) = \lim^p_{k\to\infty} \nu_k(r)$ постоје у пољу p-адских бројева. Прецизније, ако је $\{\alpha_k\}$ низ такав да је $\alpha_k = 1$ када је $\varepsilon_k = w$ и $\alpha_k = 0$ када је $\varepsilon_k = r$ онда је*

$$P(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k M_k / \sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

$$P(r)=\sum_{k-1}^{\infty}(1-\alpha_k)M_k/\sum_{k=1}^{\infty}M_k$$

■

Теорема 29 *Нека је $\{\theta_k\}$ произвољан низ случајних променљивих и нека је $\{\varepsilon_k\}$ низ случајних променљивих такав да вероватноће $\varepsilon_k=0$ и $\varepsilon_k=1$ нису једнаке 0. Тада горе наведене релативне фреквенце осцилирају у пољу реалних бројева.* ■

Сличо као и у претходном примеру, циљ је да опишемо овај екперимент као и оговарајући резултат из Теореме 28 у оквиру L_{Q_p}-логике. На пример, разматраћемо вероватноћу да се извуче бела лопта.

Како је $P(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k M_k/\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ p-адски али не и рационалан број, не можемо синтаксно представити исказ типа "вероватноћа догађаја (формуле) једнака је $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k M_k/\sum_{k=1}^{\infty}M_k$". Зато ћемо конструисати L_{Q_p}-теорију T тако да у сваком L_{Q_p}-моделу од T вероватноћа да извучемо белу лопту из кутије је једнака

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k M_k/\sum_{k=1}^{\infty}M_k.$$

Да бисмо конструисали одговарајућу теорију T представићемо релативне фреквенце $\nu_k(w)$ (белих лопти) у функцији од низова $\{\theta_k\}$ и $\{\alpha_k\}$. Дакле, приметимо да је:

$$\nu_k(w)=\frac{\alpha_1 p^{\theta_1}+\alpha_2 p^{\theta_1+\theta_2}+\ldots+\alpha_k p^{\theta_1+\ldots+\theta_k}}{p^{\theta_1}+p^{\theta_1+\theta_2}+\ldots+p^{\theta_1+\ldots+\theta_k}}=\frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots+\alpha_k p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}$$

и

$$\nu_k(r)=\frac{(1-\alpha_1)+(1-\alpha_2)p^{\theta_2}+\ldots+(1-\alpha_k)p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}.$$

Такође

$$|\nu_k(w)|_p=\left|\frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots+\alpha_k p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}}\right|_p=\frac{|\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots+\alpha_k p^{\theta_2+\ldots+\theta_k}|_p}{1}\leq 1.$$

Према томе, $\nu_k(w)\in\mathbf{Q}_M$. Исто важи и за $\nu_k(r)$.

Даље, уводимо скуп исказних слова који описује овај експеримент. Нека је $\{p^n_{\alpha_n,\theta_n}|n\in\mathbf{N},\alpha_n\in\{0,1\},\theta_n\in\{1,2\}\}$ скуп од пребројиво много исказих слова, где је n редни број ИНД серије, α_n означава боју лопте која ће бити произведена у $n-$тој серији (1 за бело и 0 за црвено) и θ_n означава дижину ове серије. На пример, ако је $n=5$, $\alpha_n=0$, $\theta_n=1$ и M и је дужина четврте серије, тада $p^5_{0,1}$ значи "у петој серији произвено $M\cdot p$ црвених лопти". Специјално, акоје $n=1$ тада је број произведених лопти у овој серији p или p^2. Нека је q ново исказно слово које означава исказ "Бела лопта је извучена из кутије". Дефинишимо теорију T на следећи начин:

- $T_1 = \{(K_{1,0}p^n_{01} \vee K_{1,0}p^n_{02} \vee K_{1,0}p^n_{11} \vee K_{1,0}p^n_{12}) | n \in \mathbf{N}\}$
- $T_2 = \{\neg(K_{1,0}p^n_{ij} \wedge K_{1,0}p^n_{i'j'}) | i \neq i'$ или $j \neq j', n \in \mathbf{N}\}$
- $T_3 = \{K_{1,0}p^1_{\alpha_1\theta_1} \wedge K_{1,0}p^2_{\alpha_2\theta_2} \wedge \ldots \wedge K_{1,0}p^n_{\alpha_n\theta_n} \Rightarrow K_{\frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots \alpha_n p^{\theta_2+\ldots+\theta_n}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\ldots+\theta_n}}, \frac{1}{p^n}} q | n \in \mathbf{N}\}$
- $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

T_1 каже да у сваком кораку ИНД-производње важи:

- црвене лопте су произведене, и серија је p пута дужа него претходна, $(K_{1,0}p^n_{01})$, или
- црвене лопте су произведене, и серија је p^2 пута дужа него претходна $(K_{1,0}p^n_{02})$, и
- слично за беле лопте$(K_{1,0}p^n_{11} \vee K_{1,0}p^n_{12})$.

T_2 тврди да у сваком кораку ИНД-производње важи:

- производе се лопте тачно једне боје, и
- одговарајућа серија има тачно једну дужину.

Коначно, T_3 каже да за свако $n \in \mathbf{N}$:

- ако су првих n корака у ИНД-продукцији познати,онда је могуће апроксимативно (са прецизношћу $\frac{1}{p^n}$) одредити вероватноћу догађаја "бела лопта је извучена из кутије" (q).

Покажимо прво да је теорија T конзистентна. У том циљу, конструишимо L_{Q_p}-модел M тако да $M \models T$. Приметимо да низови случајних променљивих $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\theta_k\}$, индукују пребројиво много низова облика $(\alpha_1; \theta_1, \alpha_2; \theta_2, \ldots, \alpha_n; \theta_n, \ldots)$. Фиксирајмо један такав низ, на пример $(\overline{\alpha_1}; \overline{\theta_1}, \overline{\alpha_2}; \overline{\theta_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}; \overline{\theta_n}, \ldots)$. За $n \in \mathbf{N}$, нека је

$$\overline{\nu_n} = \frac{\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} p^{\overline{\theta_2}} + \ldots + \overline{\alpha_n} p^{\overline{\theta_2}+\ldots+\overline{\theta_n}}}{1 + p^{\overline{\theta_2}} + \ldots + p^{\overline{\theta_2}+\ldots+\overline{\theta_n}}}$$

Нека је $M = \langle W, H, \mu, v \rangle$ L_{Q_p}-модел у коме важи:

- $\mu([p^n_{\overline{\alpha_n}\overline{\theta_n}}]) = 1$, за $n \in \mathbf{N}$,
- ако је $i \neq \overline{\alpha_n}$ или $j \neq \overline{\theta_n}$, $n \in \mathbf{N}$ онда је $\mu([p^n_{i,j}] = 0$, и
- $\mu([q]) = \lim^p_{n\to\infty} \overline{\nu_n}$

Покажимо сада да $M \models T$. Нека је $n \in \mathbf{N}$ произвољно. Тада $M \models K_{1,0}p^n_{\overline{\alpha_n \theta_n}}$ и отуда $M \models K_{1,0}p^n_{01} \vee K_{1,0}p^n_{02} \vee K_{1,0}p^n_{11} \vee K_{1,0}p^n_{12}$. Према томе $M \models T_1$. Како за свако $n \in \mathbf{N}$, $\mu([p^n_{\overline{\alpha_n \theta_n}}]) = 1$ и $\mu([p^n_{i,j}]) \neq 1$ ако $i \neq \overline{\alpha_n}$ или $j \neq \overline{\beta_n}$ имамо да $M \models T_2$. Коначно, покажимо да $M \models T_3$. Нека је $n \in \mathbf{N}$ произвољно и претпоставимо да $M \models K_{1,0}p^1_{\alpha_1\theta_1} \wedge K_{1,0}p^2_{\alpha_2\theta_2} \wedge \ldots \wedge K_{1,0}p^n_{\alpha_n\theta_n}$. Тада је $\alpha_i = \overline{\alpha_i}$, $\theta_i = \overline{\theta_i}$ и отуда $\overline{\nu_n} = \frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots+\alpha_n p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}$. Остаје да покажемо да

$$M \models K_{\frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots+\alpha_n p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}, \frac{1}{p^n}} q$$

односно, да

$$M \models K_{\overline{\nu_n}, \frac{1}{p^n}} q.$$

Како је $\mu([q]) = \lim^p_{n\to\infty} \overline{\nu_n}$, имамо да $(\exists n_0)(\forall m)(m \geq n_0 \to |\overline{\nu_m} - \mu([q])|_p \leq \frac{1}{p^n})$.

Ако је $n \geq n_0$, онда је $|\overline{\nu_n} - \mu([q])|_p \leq \frac{1}{p^n}$. Према томе, $M \models K_{\overline{\nu_n}, \frac{1}{p^n}} q$. Претпоставимо да је $n < n_0$. Тада, за неко $k \geq n_0$, $|\overline{\nu_k} - \mu([q])|_p \leq \frac{1}{p^n}$. Користећи особине p-адске норме, може се једноставно показати да је $|\overline{\nu_k} - \overline{\nu_n}|_p \leq \frac{1}{p^n}$. Према томе $|\overline{\nu_n} - \mu([q])|_p = |(\overline{\nu_n} - \overline{\nu_k}) + (\overline{\nu_k} - \mu([q]))|_p \leq max\{|\overline{\nu_n} - \overline{\nu_k}|_p, |\overline{\nu_k} - \mu([q])|_p\} \leq \frac{1}{p^n}$. Дакле, $M \models K_{\overline{\nu_n}, \frac{1}{p^n}} q$. ■

Сада ћемо показати да је у сваком L_{Q_p}-моделу теорије T вероватноћа да се извуче бела лопта из кутије једнака $\lim_{n\to\infty} \nu_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k M_k / \sum_{k=1}^{\infty} M_k$.

Дакле, нека је M неки L_{Q_p}-модел теорије T. Тада за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји тачо један пар $(\alpha_n; \theta_n)$ тако да $M \models K_{1,0}p^n_{\alpha_n\theta_n}$. Према томе, како је M такође модел теорије T_3, за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји низ парова $(\alpha_1; \theta_1, \alpha_2; \theta_2, \ldots, \alpha_n; \theta_n)$ тако да

$$M \models K_{\frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots\alpha_n p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}, \frac{1}{p^n}} q.$$

Према томе, постоји низ $\{\nu_n(w) = \frac{\alpha_1+\alpha_2 p^{\theta_2}+\ldots\alpha_n p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}{1+p^{\theta_2}+\ldots+p^{\theta_2+\cdots+\theta_n}}\}_{n\in\mathbf{N}}$ тако да

$$M \models K_{\nu_n(w), \frac{1}{p^n}} q,$$

и за свако $n \in \mathbf{N}$, $|\mu([q]) - \nu_n(w)|_p \leq \frac{1}{p^n}$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Ако изаберемо n_0 тако да је $\frac{1}{p^{n_0}} \leq \varepsilon$, онда је за $n \geq n_0$, $|\mu([q]) - \nu_n(w)|_p \leq \varepsilon$. Према томе, $\mu([q]) = \lim^p_{n\to\infty} \nu_n(w)$, односно, вероватноћа да се извуче бела лопта из кутије једнака је $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k M_k / \sum_{k=1}^{\infty} M_k$. ■

8.3 Размишљање као динамички систем над $\mathbf{Z_p}$

У овом примеру описаћемо математички модел који одговара процесу људског размишљања а који је развијен у [19, 20, 21]. Затим ћемо представити једну "подлогику" логике $L_{\mathbf{Q_p}}$ којом се могу описивати овакви процеси.

Процес љуског размишљања може се описати као динамички систем који оперише са идејама (информацијама). Формалније, то се може описати као нелинеарна функција:

$$x_{n+1} = f(x_n), x_n \in X$$

где је X простор информација. Поставља се питање проналаска одговарајућег математичког модела којим би се описали ови процеси. Први проблем који се намеће је прецизно описати скуп идеја; а други задатак је одедити функцију (функције) f. У [19, 20, 21] предложено је да скуп идеја, X буде управо скуп p-адски целих бројева $\mathbf{Z_p}$. Сада ћемо описати модел функционисана људског размишљања, где се p-адски бројеви природно намећу као простор у коме се цео поступак може реализовати.

Основне јединице у процесу мишљења су неурони. Сваки неурон има неки одређен број "стања" ("нивоа") у којима се може наћи. Претпоставимо да имамо исти број стања, p за све неуроне. Нека информација I може бити представљена ланцем неурона, $\mathcal{N} = (n_0, n_1 \dots n_N)$. Сваки овакав ланац неурона може се наћи у неком од p^N различитих I стања

$$x = (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{N-1}), \alpha_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Скуп свих могућих I стања обележавамо са X_I. Ланац неурона $\mathcal{N}$ има следећу хиреархијску структуру: Неурон n_0 је најважнији, неурон n_1 је мање важан од њега али важнији од осталих, итд. Сходно томе, ако се "упали" неурон n_0 то може узроковати паљење неурона $n_1, n_2 \dots n_N$; ако се "упали" неурон n_1 то може узроковати паљење неурона $n_2 \dots n_N$ али не и неурона n_0, итд. Прецизније, ако се неки неурон n_j налази на највећем могућем нивоу, тј, ако је $\alpha_j = (p-1)$ онда паљењем овог неурона добија се да је $\alpha_j = 0$, али следећи неурон n_{j+1} прелази у више стање, $\alpha_{j+1} := \alpha_{j+1} + 1$, итд. Приметимо, да ово одговара p-адском сабирању примењеном не бројеве дате у својој p-адској репрезентацији. Нека $s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Тада се скуп

$$A_s = \{x = (\alpha_0, \dots \alpha_N) : \alpha_0 = s\}$$

назива асоцијација реда 1. Ова асоцијација одговара свим ланцима $\mathcal{N} = (n_0, n_1 \dots n_N)$ чији је неурон n_0 у стању s. Слично, имамо и асоцијације вишег реда: $A_{s_0 \dots s_l} = \{x = (\alpha_0, \dots \alpha_N) : \alpha_0 = s_0, \dots \alpha_{l-1} = s_{l-1}\}$ је асоцијација реда l. Скуп свих асоцијација реда l, означава се са $X_{A,l}$. Скуп свих могућих асоцијација на скупу X_I је $X_A = \bigcup_l X_{A,l}$ а сваки подксуп $J \subset X_A$ назива се идеја.
У математичком моделу било би корисно посматрати бесконачна I-стања:

$$x = (\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_N \dots), \alpha_i = 0, 1, \dots p-1$$

На овај начин, добијамо да је скуп свих (бесконачних) I стања управо $\mathbf{Z_p}$, односно $X_I = \mathbf{Z_p}$. Хиреархијска структура на неуронима намеће као последицу да су две информације онолико блиске колико има је дугачак заједничи почетак. Приметимо да p-адско растојање

$$d(x, y) = |x - y|_p$$

омогућава да се близина информација мери баш на овај начин. Такође, приметимо да су асоцијације управо p-адске кугле. Ако је $r = \frac{1}{p^l}$ и $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}, \ldots)$ онда је

$$K[a, r] = \{x = x_0, x_1, \ldots x_{l-1} : x_0 = a_0, x_1 = a_1 \ldots x_{l-1} = a_{l-1}\} = A_{a_0 a_1 \ldots a_{l-1}}$$

Дакле, видимо да информације можемо сматрати p-адским целим бројевима. Сада је потребно објаснити како се са тим информацијама оперише, односно дефинисати одговарајуће функције на $X_I = \mathbb{Z}_p$.

У овом моделу, замишљено је да се размишљање врши на два нивоа, *свесном* и *подсвесном* . Свест "формулише" проблем и пошаље у подсвест. Заправо, свест пошаље одређену информацију x_0 или идеју (куглу или кугле око x_0). Такође, свест дефинише функцију f_α коју прослеђује подсвести као режим рада. Сада подсвест ради са овим информацијама и у стању је да генерише одређене *атракторе* које свест види као могућа решења. Такође, подсвест може генерисати одређене цикле ($a \to b \to \ldots \to c \to a$) који сигнализирају да свест треба да заустави процес који се дешава у подсвести. У том случају свест може променити почетну информацију $x_0 \to x_0'$ или променити режим рада $f_\alpha \to f_\alpha'$ и поново иницирати рад подсвести.

Према томе, изучавамо динамички систем

$$\mathbf{Z_p} \to \mathbf{Z_p}, x \to f(x),$$

где је $f : \mathbf{Z_p} \to \mathbf{Z_p}$ аналитичка функција. Посматрамо понашање итерација $x_n = f^n(x_0)$,где $x_0 \in \mathbf{Z_p}$ и $f^n = f \circ f \ldots \circ f$ (n пута). Ако је $f(x_0) = x_0$ онда је x_0 фиксна тачка функције f; ако је $x_n = x_0$ за неко $n \in \mathbf{N}$ онда кажемо да је x_0 периодична тачка функције f и при том најмањи број n за који важи $x_n = x_0$ зовемо период тачке x_0. У том случају, одговарајући циклус означавамо са $\gamma = (x_0, \ldots x_{n-1})$. Фиксна тачка x_0 зове се *атрактор* или *атрактивна тачка* ако постоји околина $V(x_0)$ тако да за свако $y \in V(x_0)$ важи $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$. Тада се скуп $A(x_0) = \{y \in \mathbf{Z_p} : f^n(y) \to x_0, n \to \infty\}$ зове *база атракције* тачке x_0. Нека је x_0 фиксна тачка функције f. Тада се свака кугла $K[0, \frac{1}{p^k}]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$ $\ldots$ зове *Siegel -ов диск*, ако је свака сфера $S[x_0, \frac{1}{p^l}]$, $l \geq k$ инваријантна сфера функције f. Унија свих *Siegelovih* дискова са центром x_0 је максималан *Siegelov* диск и обележава се са $SI(x_0)$.

У [19, 20, 21] разматране су функције облика $f_c(x) = x^2 + c$ као и функције облика $f_n(x) = x^n$ за које се испоставља да омогућавају веома "богато" понашање динамичких система. За разне функције наведеног типа показани су резултати о њиховим фиксним тачкама, атракторима и *Siegel -ovim* дисковима. Овде ћемо навести један такав резултат који се користи у даљем тексту. Посматрамо понашање динамичког система $f_n(x) = x^n$. Очигледно је да је тачка $x_0 = 0$ атрактивна тачка овог система као и да је њена база атракције $A(0) = K[0, \frac{1}{p}]$. Потребно је размотрити понашање овог система на сфери $S[0, 1]$.

Теорема 30 *Динамички систем $f_n(x) = x^n$ има $m = (n-1, p-1)$ фиксних тачака $a_j, j = 1 \ldots m$ на сфери $S[0, 1]$. Фиксне тачке $a_j \neq 1$ налазе се на сфери $S[1, 1]$.При томе*

1. *Ако је $(n, p) = 1$ тада су све ове тачке центри Siegelovih дискова и $SI(a_j) = K[a_j, \frac{1}{p}]$.*

2. *Ако је $(n, p) \neq 1$ онда су све ове тачке атрактори и $A(a_j) = K[a_j, \frac{1}{p}]$*

Наведимо пример једног размишљања у $\mathbf{Q_2}$ са функцијом $f(x) = x^2$.

Туриста реба да путује и он зна за неких m земаља. Свака земља има једно од два обележја: 0 ако туриста није у могућности да путује у ту земљу и 1 ако јесте. Скуп земаља је уређен на следећи начин: $Z_0, Z_1 \ldots Z_{m-1}$, где је Z_0 земља у коју би он највише желео да путује, Z_1 је следећа на листи жеља итд. Према томе, стање његове свести о овој ситуацији може се описати помоћу броја $x = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \ldots \alpha_{m-1} \cdot 2^{m-1}$. Туриста треба да донесе одлику да ли ће да путује и где на основу неког почетног знања о овом броју $x = x_0$. Дакле, туриста размишља тако што на x_0 сукцесивно примењује функцију $f(x) = x^2$.

(а) Ако $x_0 \in K[0, \frac{1}{2}]$, односно $\alpha_0 = 0$ тада на основу претходне теореме низ x_n конвергира ка атрактору $a_0 = 0 + 0 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot 2^{m-1}$. Дакле, ако не може да путује у земљу која му се највише допада, туриста је одлучио да не путује нигде.

(б) Ако $x_0 \in K[1, \frac{1}{2}]$, односно $\alpha_0 = 1$ тада на основу претходне теореме низ x_n конвергира ка атрактору $a_1 = 1 + 0 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot 2^{m-1}$. Дакле, ако може да путује у земљу која му се највише допада, туриста је одлучио путује у ту земљу и ниједну другу.

Опишимо ову ситуацују користећи делове логике L_{Q_p}. Наиме, оно што даје "вероватносну интерпретацију" овој логици је захтев да функција $\mu : H \to K[0, p^M]$ буде адитивна и нормирана, а што је омогућено аксиомом 3 (која говори о адитивности) и правилом извођења 2 које обезбеђује да таутологија има вероватноћу 1. Приметимо да остале аксиоме и правила извођења обезбеђују да исказна логика буде подлогика ове логике и одражавају специфичност поља $\mathbf{Q_p}$.

Сада ћемо дефинисати логику $L_{Z_p}^{thinking}$ наводећи разлике у односу на логику $\mathbf{L_{Q_p}}$.

1. У језику се користе оператори $K_{r,\rho}\alpha$, $r \in Q_1 = \{r \in \mathbf{Q} : |r|_p \leq 1\}$, $\rho \in \{p^{-n} : n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.

2. У дефиницији модела захтева се да μ буде било која функција из H у $\mathbf{Z_p}$.

3. Избацити аксиому 3 и правило извођења 2.

Ово би била нека основна логика о когнитивним процесима са тим да би се коришћење неке конкретне функције динамичког система обезбедило увођењем одговарајуће теорије у овој логици. При том би оператор $K_{r,\rho}\alpha$ имао значење: " знање који динамички процес има или одлука коју доноси о исказу α припада p-адској кугли са центром r и полупречником ρ".

Нека исказ α_i значи: Туриста путује у земљу α_i и нека је $\alpha = \alpha_0 \vee \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_{m-1}$. Према описаном примеру $\mu([\alpha]) = \mu([\alpha_0]) + \mu([\alpha_1]) \cdot 2 + \ldots \mu([\alpha_{m-1}]) \cdot 2^{m-1}$. Претпоставка је да знамо $\mu([\alpha_0])$ а извођењем у овој логици треба да добијемо $\mu([\alpha])$ као у примеру. Дефинишимо следеће теорије:

$T_1 = K_{x_0,\frac{1}{2}}\alpha \Leftrightarrow K_{x_0,0}\alpha_0$

$T_2 = \{K_{x_0^{2^n},\frac{1}{2^{2^n}}}\alpha \Rightarrow K_{x_0^{2^{n+1}},\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}\alpha | n \in \mathbf{N}\}$

$T = T_1 \cup T_2$

Сада:

$T, K_{1,0}\alpha_0 \vdash K_{1,\frac{1}{2^{2^n}}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$

$T, K_{1,0}\alpha_0 \vdash K_{1,\frac{1}{2^n}}\alpha$ за свако $n \in \mathbf{N}$ јер је $\frac{1}{2^{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$

и отуда

$T, K_{1,0}\alpha_0 \vdash K_{1,0}\alpha$

Дакле, $\mu([\alpha]) = 1 + 0 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot 2^{m-1}$, односно, иде у прву земљу.

На исти начин добијамо

$T, K_{0,0}\alpha_0 \vdash K_{0,0}\alpha$.

9 Логика која формализује квалитативну вероватноћу

У овом одељку представљена је реалновредносна логика $L_{\succeq}$ ([4]) у којој се могу записати искази типа "вероватноћа неке формуле је већа од датог рационалног броја" као и поређење вероватноћа двеју формула у виду "вероватноћа једне формуле је већа од вероватноће друге формуле".

9.1 Синтакса и семантика

Нека је I скуп свих рационалних бројева из интервала $[0, 1]$. Језик логике $L_{\succeq}$ састоји се из:

- пребројивог скупа $Var = \{p, g, r \ldots\}$
- класичних везника $\neg$ и $\wedge$
- и бинарног оператора $\succeq$

Скуп формула овог језика, у ознаци, $For_{L_{\succeq}}$ дефинисан је на следећи начин:

Дефиниција 24 *($For_{L_{\succeq}}$)*

- *Ако $p \in Var$ онда је p формула.*
- *Ако су α и β формуле и $r \in I$ онда су и $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \succeq r)$ и $(\alpha \succeq \beta)$ формуле.*

Остали логички везници $(\vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$ дефинишу се на уобичајен начин. Такође ћемо користити и $r \preceq \alpha$ са истим значењем као и $\alpha \succeq r$. Даље, $(\neg\alpha) \succeq 1 - r$ означавамо са $\alpha \preceq r$, $\alpha \preceq r \wedge \neg(r \preceq \alpha)$ са $\alpha \prec r$ и $\neg(\alpha \preceq r)$ са $\alpha \succ r$. Према томе, $r \succeq \alpha$ значи $\alpha \preceq r$. Слично, ако су α и β формуле користими ознаку $\alpha \preceq \beta$ за $\beta \succeq \alpha$, $\alpha \succ \beta$ означва $\neg(\alpha \preceq \beta)$ и $\alpha \prec \beta$ значи $\beta \succ \alpha$. Такође, $\alpha \succeq \beta \wedge \beta \succeq \alpha$ означавамо са $\alpha \asymp \beta$. Коначно, користимо $\perp$ да означимо $\alpha \wedge \neg\alpha$.

Дефиниција 25 *$L_{\succeq}$ модел је структура $M = \langle W, Prob, v\rangle$ где:*

- *W је непразан скуп елемената које називамо светови.*
- *$Prob$ је функција која сваком свету $w \in W$ придружује вероватносни простор $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w)\rangle$, где:*
  - *$W(w)$ је непразан подскуп од W*
  - *$H(w)$ је алгебра подскупова од $W(w)$ и*
  - *$\mu(w) : H(w) \to [0, 1]$ је коначно адитивна вероватносна мера, и*
- *$v : W \times Var \to \{true, false\}$ је исказна валуација која сваком свету и сваком исказном слову придружује $true$ или $false$.*

Дефиниција 26 *Нека је $M = \langle W, Prob, v\rangle$ један $L_{\succeq}$ модел и нека $w \in W$. Релацију задовољивости дефинишемо индуктивно на следећи начин:*

- *Ако $p \in Var$ онда $(w, M) \models p$ акко $v(w)(p) = true$.*
- *Ако $\alpha \in For_{L_{\succeq}}$ онда $(w, M) \models \neg\alpha$ акко не важи $(w, M) \models \alpha$.*
- *Ако $\alpha, \beta \in For_{L_{\succeq}}$ онда $(w, M) \models \alpha \wedge \beta$ акко $(w, M) \models \alpha$ и $(w, M) \models \beta$.*
- *Ако $\alpha \in For_{L_{\succeq}}$ и $r \in I$ онда $(w, M) \models \alpha \succeq r$ акко је $\mu(w)(\{w' \in W(w) | w' \models \alpha\}) \geq r$.*
- *Ако $\alpha, \beta \in For_{L_{\succeq}}$ онда $(w, M) \models \alpha \succeq \beta$ акко је $\mu(w)(\{w' \in W(w) | w' \models \alpha\}) \geq \mu(w)(\{w' \in W(w) | w' \models \beta\})$*

Надаље ћемо изостављати M из $(w, M) \models \alpha$ и писаћемо само $w \models \alpha$ ако је из контекста јасно о ком моделу M се ради. У $L_{\succeq}$-моделу $M = \langle W, Prob, v\rangle$, скуп $\{w' \in W(w) | w' \models \alpha\}$ означавамо са $[\alpha]_{M,w}$ или само са $[\alpha]_w$.

Скуп формула T је $L_{\succeq}$-*задовољив* ако постоји свет w у $L_{\succeq}$-моделу M тако да за сваку формулу $\alpha \in T$, $w \models \alpha$. Формула α је $L_{\succeq}$-*задовољива* ако је скуп формула $\{\alpha\}$ $L_{\succeq}$-задовољив. Формула α је $L_{\succeq}$-*ваљана у* $L_{\succeq}$ -*моделу* $M = \langle W, Prob, v\rangle$, (у ознаци $\models_M \alpha$) ако је задовољива у сваком свету модела M. Формула α је $L_{\succeq}$ -*ваљана* (у ознаци $\models \alpha$) ако је задовољива у сваком свету сваког модела.

9.2 Аксиоматизација

Аксиоматски систем $AX_{L_{\succeq}}$ има једанаест шема аксиома:

A1 Све инстанце исказних таутологија.

A2 $\alpha \succeq 0$

A3 $\alpha \succeq s \Rightarrow \alpha \succeq r,\ s \geq r$

A4 $\alpha \succeq \beta \vee \beta \succeq \alpha$

A5 $\alpha \succeq \beta \wedge \beta \succeq \gamma \Rightarrow \alpha \succeq \gamma$

A6 $\alpha \succeq \beta \wedge \beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$

A7 $(\alpha \succeq r \wedge \beta \succeq s \wedge (\alpha \wedge \beta \asymp 0)) \Rightarrow (\alpha \vee \beta \succeq r + s)$

A8 $\alpha \preceq r \wedge \beta \preceq s \Rightarrow \alpha \vee \beta \preceq r + s$

A9 $\alpha \preceq r \wedge \beta \prec s \Rightarrow \alpha \vee \beta \prec r + s$, $r + s \leq 1$

A10 $\alpha \prec r \Rightarrow \alpha \preceq r$

A11 $\alpha \succeq s \Rightarrow \alpha \succ r$, $s > r$

и четири правила изођења:

1. Из α и $\alpha \Rightarrow \beta$ извести β
2. Из α извести $\alpha \asymp 1$
3. Из $\alpha \Rightarrow (\beta \succeq r - 1/n)$, за свако $n \in \mathbf{N}$, $n \geq \frac{1}{r}$, извести $\alpha \Rightarrow (\beta \succeq r)$
4. Из $\gamma \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$, за свако $r \in I$, извести $\gamma \Rightarrow (\alpha \succeq \beta)$

Дефиниција 27 *Формула α је теорема аксиомацког система $AX_{L_{\succeq}}$, у ознаци $\vdash_{AX_{L_{\succeq}}\alpha}$ ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ такав да је свака α_i аксиома или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула. Низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ је* доказ (извођење) *за формулу α и његова дужина је ординал следбеник.* ■

Дефиниција 28 *Формула α је* синтакса последица скупа формула *T, у ознаци $T \vdash_{AX_{L_{\succeq}}\alpha}$ ако постоји низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ такав да је свака α_i аксиома или припада скупу T или је помоћу неког од правила извођења изведена из предходних формула, уз ограничење да се правило 2 може применити само на теореме. Низ формула $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha$ је* доказ (извођење) *за α из скупа формула T и његова дужина је ординал следбеник.* ■

Уместо ознака $\vdash_{AX_{L_{\succeq}}}$ и $T \vdash_{AX_{L_{\succeq}}}$ користићемо само $\vdash$ и $T \vdash$ уколико то не прети да изазове забуну.

$T \nvdash_{Ax_{L_{\succeq}}} \alpha$ значи да $T \vdash_{Ax_{L_{\succeq}}} \alpha$ не важи. Скуп формула T је *конзистентан* ако постоји бар једна формула α тако да $T \nvdash_{Ax_{L_{\succeq}}} \alpha$. Конзистентан скуп формула T је *максимално конзистентан* ако за сваку формулу α или $\alpha \in T$ или $\neg\alpha \in T$. Скуп формула T је ем дедуктивно затворен ако за сваку формулу α важи: ако $T \vdash \alpha$ онда $\alpha \in T$.

9.3 Коректност и потпуност

Теорема 31 *(Теорема дедукције) Ако је T скуп формула и $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ онда $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.*

Доказ: Користићемо трансфинитну индукцију по дужини доказа за β. Ако је дужина доказа 1 онда је формула β аксиома или $\beta \in T$. Како је $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$ таутологија, на основу правила 1, добија се $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Претпоставимо да је дужина доказа $k > 1$. Формула β може поново бити аксиома или припадати скупу T и тада као малопре закључујемо да $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Формула β може бити добијена и применом неког од правила извођења на предходне формуле у доказу. Размотримо појединачно свако од ових правила.

1. β је добијена из γ и $\gamma \Rightarrow \beta$ применом Правила 1. Тада, на основу индукцијске хипотезе $T \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$ и $T \vdash \alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)$. Како је $(\alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$ таутологија, користећи правило 1 два пута, добијмао $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

2. Нека је $\beta = (\gamma \asymp 1)$ добијена из γ. У том случају γ мора бити теорема и отуда је и β теорема. Тада, из $\vdash \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$, користећи правило 1 добијамо $T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

3 Претпоставимо да је $\beta = \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r)$ добијена из T, α применом правила 3. Тада:

$T, \alpha \vdash \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r - 1/n)$ за свако $n \geq \frac{1}{r}$

$T \vdash \alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow (\delta \succeq r - 1/n))$ за свако $n \geq \frac{1}{r}$, на основу индукцијске хипотезе

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\delta \succeq r - 1/n)$ за свако $n \geq \frac{1}{r}$ на основу класичне таутологије $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)$

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\delta \succeq r)$, на основу Правила 3.

$T \vdash \alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \delta \succeq r)$

$T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

4. Нека је $\beta = \gamma \Rightarrow (\delta \succeq \epsilon)$ добијема из T, α применом Правила 4. Тада:

$T, \alpha \vdash \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \Rightarrow \epsilon \succeq r)$ за свако $r \in I$

$T, \alpha \vdash (\gamma \wedge (\delta \succeq r)) \Rightarrow \epsilon \succeq r$ за свако $r \in I$

$T \vdash \alpha \Rightarrow ((\gamma \wedge (\delta \succeq r)) \Rightarrow \epsilon \succeq r)$ за свако $r \in I$, на основу претходне тачке

$T \vdash \alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \Rightarrow \epsilon \succeq r))$ за свако $r \in I$

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\delta \succeq r \Rightarrow \epsilon \succeq r)$ за свако $r \in I$

$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\delta \succeq \epsilon)$ на основу Правила 4.

$T \vdash \alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow (\delta \succeq \epsilon))$

$T \vdash \alpha \Rightarrow \beta$

∎

Теорема 32 *Сваки конзистентан скуп формула се може проширити до максималног конзистентног скупа.*

Доказ: Нека је T конзистентан скуп формула и $\theta_0, \theta_1, \ldots$ једно набрајање свих $L_{\succeq}$ формула . Дефинишимо низ теорија T_i на следећи начин:

1. $T_0 = T$
2. За свако $n \geq 0$,
   (а) Ако је $T_n \cup \theta_n$ конзистентан онда је $T_{n+1} = T_n \cup \theta_n$.
   (б) Ако је $T_n \cup \theta_n$ није конзистентан онда:
   - i ако је $\theta_n = \theta \Rightarrow A \succeq r$ онда је $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\theta_n, \theta \Rightarrow A \prec r - 1/n\}$, за неко n, $n > \frac{1}{r}$ тако да T_{n+1} буде конзистентан.
   - ii ако је $\theta_n = \gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)$ онда је $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\theta_n, \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r)\}$, за неко $r \in I$ тако да T_{n+1} буде конзистентан.
   - iii иначе, $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg\theta_n\}$.

Скупови добијени у кораку 1 и 2(а) су очигледно конзистентни. У кораку 2(б)iii се такође добојаји конзистентни скупови. Претпоставимо супротно, $T_n, \theta_n \vdash \perp$. Тада на основу Теореме дедукције, $T_n \vdash \neg\theta_n$, и како је T_n конзистентан, такав је и $T_n \cup \{\neg\theta_n\}$. Посматрајмо корак 2(б)$i$. Претпоставимо да је за свако n, $n > \frac{1}{r}$, скуп $T_{n+1} = T_n \cup \{\neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r), \theta \Rightarrow \alpha \prec r - 1/n\}$ неконзистентан. Тада:

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r), \theta \Rightarrow \alpha \prec r - 1/n \vdash \perp$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$.

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash (\theta \Rightarrow \alpha \prec r - 1/n) \Rightarrow \perp$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$, на основу Теореме дедукције.

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash \neg(\theta \Rightarrow \alpha \prec r - 1/n)$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$.

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash \theta \wedge \neg(\alpha \prec r - 1/n)$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$, на основу класичног резоновања.

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash \theta \wedge (\alpha \succeq r - 1/n)$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$.

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash \theta \Rightarrow (\alpha \succeq r - 1/n)$ за сваки цео број n, $n > \frac{1}{r}$, на основу класичне таутологије $\alpha \wedge \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$

$T_n, \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \vdash \theta \Rightarrow (\alpha \succeq r)$ на основу Правила 3

$T_n \vdash \neg(\theta \Rightarrow \alpha \succeq r) \Rightarrow (\theta \Rightarrow (\alpha \succeq r))$, на основу Теореме дедукције.

$T_n \vdash (\theta \Rightarrow \alpha \succeq r)$, на основу класичног резоновања, што противречи конзистентности скупа T_n јер је $T_n \cup \{\theta \Rightarrow (\alpha \succeq r)\}$ неконзистентан.

Даље, посмарајмо корак 2(б)ii. Претпоставимо да је за свако $r \in I$ скуп

$$T_{n+1} = T_n \cup \{\neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)), \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r)\}$$

неконзистентан. Тада:

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)), \{\gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r)\} \vdash \perp$, за свако $r \in I$, $r > 0$.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash (\gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r)) \Rightarrow \perp$, за свако $r \in I$, $r > 0$, на основу Теореме дедукције.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash \neg(\gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r))$, за савко $r \in I$, $r > 0$.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash (\gamma \wedge \neg(\delta \succeq r \wedge \epsilon \prec r))$ за свако $r \in I$, $r > 0$.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash (\gamma \wedge (\neg(\delta \succeq r) \vee \neg(\epsilon \prec r)))$ за свако $r \in I$, $r > 0$.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash \gamma \wedge (\delta \succeq r \Rightarrow \epsilon \succeq r)$ за свако $r \in I$, $r > 0$, на основу класичног резоновања.

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash \gamma \Rightarrow (\delta \succeq r \Rightarrow \epsilon \succeq r)$ за свако $r \in I$, $r > 0$, на основу класичне таутологије $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$

$T_n, \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \vdash \gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)$, на основу Правила 4

$T_n \vdash \neg(\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)) \Rightarrow \gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)$, на основу Теореме дедукције.

$T_n \vdash \gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)$, на основу класичног резоновања, што противречи конзистентности скупа T_n јер је $T_n \cup \{\gamma \Rightarrow (\epsilon \succeq \delta)\}$ неконзистентан.

Нека је $T^* = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Треба да покажемо да је T^* максималан конзистентан.

Кораци 2(а) - 2(б)iii гарантују да за сваку формулу θ, θ или $\neg\theta$ припада скупу T^*, то јест, да је T^* максималан. Са друге стране, не постоји формула θ, тако да θ и $\neg\theta$ припада T^*. Да бисмо то доказали, претпоставимо да је $\theta = \theta_n$ и $\neg\theta = \theta_m$ за неке n и m. Ако θ, $\neg\theta \in T^*$, онда и $\theta, \neg\theta \in T_{max(n,m)+1}$, што је у контадикцији са конзистентношћу скупа $T_{max(n,m)+1}$.

Надаље, показујемо да је T^* дедуктивно затворен, и како не садржи све формуле, одатле следи да је T^* конзистентан.

Ако за неко n, $T_n \vdash \theta$, онда мора важити $\theta \in T^*$. Претпоставимо супротно. Тада, $\neg\theta \in T^*$ па постоји k тако да $T_k \vdash \theta$ и $T_k \vdash \neg\theta$ што противречи конзистентности скупа T_k.

Претпоставимо да низ $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta$ представља доказ за θ у T^*. Ако је низ коначан, тада постоји скуп T_n тако да $T_n \vdash \theta$ и $\theta \in T^*$. Зато претпоставимо да је низ бесконачан пребројив. Показаћемо да за свако n важи: ако је θ_n добијено помоћу неког од правила извођења, и ако све премисе припадају скупу T^*, онда и $\theta_n \in T^*$. Ако је правило коначно, онда постоји скуп T_m који садржи све премисе и $T_m \vdash \theta_n$. У том случају, резонујући као малопре, закључујемо да $\theta_n \in T^*$.

Према томе, посматрајмо бесконачна правила.

Нека је $\theta_m = \alpha \Rightarrow (\beta \succeq r)$ добијена из скупа претпоставки $\{\theta_m^n \mid n > 1/r\}$ помоћу Правила 3, где је θ_m^n формула

$$\alpha \Rightarrow (\beta \succeq r - 1/n).$$

Претпоставимо да $\theta_m \notin T^*$. На основу индукцијске хипотезе, $\theta_m^n \in T^*$ за свако n. На основу корака 2(б)i горе описане конструкције, постоје n и l тако да $\alpha \Rightarrow (\beta \prec r - 1/n)$ припада T_l. Одатле следи да постоји j тако да $\alpha \Rightarrow (\beta \prec r - 1/n)$ и $\alpha \Rightarrow (\beta \succeq r - 1/n)$ припада то T_j. Тада $T_j \vdash \alpha \Rightarrow \perp$ и $T_j \vdash \alpha \Rightarrow (\beta \succeq r)$. Према томе, $\theta_m \in T^*$, контрадикција.

Нека је $\theta_m = \gamma \Rightarrow (\alpha \succeq \beta)$ добијена из скупа претпоставки $\{\theta_m^r \mid r \in I\}$ на основу Правила 4, где је θ_m^r формула

$$\gamma \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r).$$

Претпоставимо да $\theta_m \notin T^*$. На основу индукцијске хипотезе, $\theta_m^r \in T^*$ за свако r. На основу корака 2(б)ii дате констукције, постоје r и l тако да $\gamma \Rightarrow (\beta \succeq r \wedge \alpha \prec r)$ припада T_l. Одатле следи да постоји j тако да $\gamma \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r\}$ и $\gamma \Rightarrow (\beta \succeq r \wedge \alpha \prec r)$ припадају T_j. Тада $T_j \vdash \gamma \Rightarrow \bot$ и $T_j \vdash \gamma \Rightarrow (\alpha \succeq \beta)$. Дакле, $\theta_m \in T^*$, контрадикција. ∎

Теорема 33 *Нека $\alpha, \beta \in For_{L_{\succeq}}$, $r, s \in I$ и нека је T максималан конзистентан скуп формула. Тада,*

1. $T \vdash \alpha \succeq \beta \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$.
2. $\alpha \wedge \beta \in T$ *акко* $\alpha \in T$ *и* $\beta \in T$.

Доказ:

1. $T \vdash \alpha \succeq \beta \wedge \beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r$ на основу $A5$

   $T \vdash \neg(\alpha \succeq \beta \wedge \beta \succeq r) \vee \alpha \succeq r$

   $T \vdash \neg(\alpha \succeq \beta) \vee (\neg(\beta \succeq r) \vee \alpha \succeq r)$

   $T \vdash \alpha \succeq \beta \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$ на основу класичног резоновања.

2. Претпоставимо да $\alpha \in T$ и $\beta \in T$. Тада:

   $T \vdash \alpha$

   $T \vdash \beta$

   $T \vdash \alpha \wedge \beta$

   и како је T дедуктивно затворен, $\alpha \wedge \beta \in T$.

   Нека $\alpha \wedge \beta \in T$. Тада:

   $T \vdash \alpha \wedge \beta$

   $T \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha$

   $T \vdash (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta$ и користећи Правило 1

   $T \vdash \alpha$

   $T \vdash \beta$

   Како је T дедуктивно затворен, $\alpha \in T$ и $\beta \in T$.

∎

Нека је $M = \langle W, Prob, v \rangle$ где:

- W је скуп свих максималних конзистентних скупова формула,
- Ако $\alpha \in For_{L_{\succeq}}$ онда је $[\alpha] = \{w \in W | \alpha \in W\}$,

- v је пресликавање које сваком свету $w \in W$ придружује валуацију $v(w): Var \Rightarrow \{true, false\}$ тако да за свако $p \in Var$, $v(w)(p) = true$ акко $p \in w$.
- За сваки свет $w \in W$, $Prob(w)$ је деефинисано на следећи начин:
  - $W(w) = W$,
  - $H(w)$ је класа скупова облика $[\alpha] = \{w \in W | \alpha \in w\}$ за све $\alpha \in For_{L_{\succeq}}$,
  - $\mu(w)([\alpha]) = sup\{r | \alpha \succeq r \in w\}$.

Теорема 34 *Нека је* $M = \langle W, Prob, v\rangle$ *дефинисано као малопре. Тада за свако* $w \in W$ *важи:.*

1. *ако* $\vdash \alpha \asymp \beta$ *онда је* $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$,
2. $\mu(w)([\alpha]) \geq 0$, $\alpha \in For_{L_{\succeq}}$,
3. $\mu(w)([\neg\alpha]) = 1 - \mu(w)([\alpha])$,
4. *ако* $\vdash \alpha \wedge \beta \asymp 0$ *онда је* $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) = \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$,
5. *ако* $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ *онда је* $\mu(w)([\alpha]) \leq \mu(w)([\beta])$,
6. $\vdash \alpha \succeq \beta$ *акко* $\mu(w)([\alpha]) \geq \mu(w)([\beta])$,
7. *ако* $\vdash (\alpha \Leftrightarrow \beta) \asymp 1$ *онда је* $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$,
8. *ако је* $[\alpha] = [\beta]$ *онда је* $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$,
9. *ако је* $[\alpha] = [\beta]$ *онда је* $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$.

Доказ:

1. $\vdash \alpha \asymp \beta$ то јест,

   $\vdash \alpha \succeq \beta \wedge \beta \succeq \alpha$,

   $\vdash \alpha \succeq \beta$ на основу класичног резоновања,

   $\vdash \alpha \succeq \beta \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$ за свако $r \in I$, на основу Теореме 33 , па

   $\vdash \beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r$, за свако $r \in I$.

   Према томе, ако $\beta \succeq r \in w$ онда $\alpha \succeq r \in w$. На исти начин закључујемо и обрнуто, то јест, ако $\alpha \succeq r \in w$ онда $\beta \succeq r \in w$. Отуда, $\{r | \alpha \succeq r \in w\} = \{r | \beta \succeq r \in w\}$ па је $sup\ \{r | \alpha \succeq r \in w\}$ ı $sup\ \{r | \beta \succeq r \in w\}$.

2. Очигледно, на основу A2.

3. Нека је $r = sup\{t|\alpha \succeq t \in w\}$. Ако је $r = 1$ онда $\alpha \succeq 1 \in w$, односно $(\neg\alpha) \preceq 0 \in w$. Тада, на основу А2, $(\neg\alpha) \succeq 0 \in w$. Ако за неко $s > 0$, $(\neg\alpha) \succeq s \in w$ онда на основу А11 $(\neg\alpha) \succ 0 \in w$, контрдикција. Отуда је $\mu(w)[\neg\alpha] = 0$.

   Претпоставимо да је $r < 1$. Тада, за свако $r' \in (r, 1]$, $\neg(\alpha \succeq r') \in w$, то јест $\alpha \prec r' \in T$. На основу А10, $\alpha \preceq r' \in w$ па $(\neg\alpha) \succeq 1 - r' \in w$. Ако постоји $r'' \in [0, r)$ тако да $(\neg\alpha) \succeq 1 - r'' \in w$ онда $\neg(\alpha \succ r'') \in w$, што представља контрадикцију. Према томе, $sup\{t|(\neg\alpha) \succeq t \in w\} = 1-$ суп$\{t|\alpha \succeq t \in w\}$.

4. На основу аксиоме А7, $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) \geq r + s$ за све r и s такве да $\alpha \succeq r \in w$ и $\beta \succeq s \in w$. Према томе $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) \geq sup\{r|\alpha \succeq r \in w\} + sup\{s|\beta \succeq s \in w\}$ па је $\mu(w)([\alpha \vee \beta]) \geq \mu(w)([\alpha]) + \mu(w)([\beta])$.

   Претпоставимо да је $\mu(w)([\alpha]) = r_0$ и $\mu(w)([\beta]) = s_0$. Ако је $r_0 + s_0 = 1$ онда једнакост очигледно важи. Нека је $r_0 + s_0 < 1$. Претпоставимо да је $r_0 + s_0 < \mu(w)([\alpha \vee \beta])$. Тада је $r_0 + s_0 < t_0 = sup\{t|\alpha \vee \beta \succeq t \in w\}$. Ако је $t' \in (r_0 + s_0, t_0)$ произвољан рационалан број онда $\alpha \vee \beta \succeq t' \in w$. Нека су $r' > r_0$ и $s' > s_0$ рационални бројеви такви да је $r' + s' = t' < 1$, $\alpha \prec r' \in w$ и $\beta \prec s' \in w$. На основу аксиоме А10, $\alpha \preceq r' \in w$ и коначно, на основу А9, $\alpha \vee \beta \prec r' + s' \in w$, то јест, $\alpha \vee \beta \prec t' \in w$, контрадикција.

5. Нека $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Претпоставимо супротно: $\mu(w)([\alpha]) > \mu(w)([\beta])$. Тада постоји $r \in I$ тако да $\alpha \succeq r \in w$ и $\beta \succeq r \notin w$. Отуда $\beta \prec r \in w$. Тада:

   $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ на основу претпоставке,

   $\vdash \alpha \Rightarrow \beta \asymp 1$ на основу правила 2,

   $\vdash \neg\alpha \vee \beta \succeq 1$ на основу класичне таутологије $\vdash \alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$.

   Према томе

   $\vdash \neg\alpha \vee \beta \succeq 1 \wedge \neg\alpha \preceq 1 - r \wedge \beta \prec r$

   $\vdash \neg\alpha \preceq 1 - r \wedge \beta \prec r \Rightarrow \neg\alpha \vee \beta \succeq 1$

   на основу класичне таутологије $\alpha \wedge \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$.

   Примењујући А9 добијамо:

   $\vdash \neg\alpha \preceq 1 - r \wedge \beta \prec r \Rightarrow \neg\alpha \vee \beta \prec 1$, контрадикција.

6. $(\leftarrow)$ Нека је $\mu(w)(\alpha) \geq \mu(w)(\beta)$. Тада је $sup\{r|\alpha \succeq r \in w\} \geq sup\{r|\beta \succeq r \in w\}$. Претпоставимо да $\alpha \succeq \beta \notin w$. Тада постоји $r_0 \in I$ тако да $\beta \succeq r_0 \wedge \alpha \prec r_0 \in w$. Према томе, $sup\{r|\alpha \succeq r \in w\} \geq sup\{r|\beta \succeq r \in w\} \geq r_0$, па постоји $r \geq r_0$ тако да $\alpha \succeq r \in w$. На основу А3, $\vdash \alpha \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r_0$ и отуда користеећи правило 1, $\vdash \alpha \succeq r_0$, контрадикција.

   $(\rightarrow)$. Нека $\vdash \alpha \succeq \beta$. Тада:

   $\vdash \alpha \succeq \beta \Rightarrow (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$ за свако $r \in I$, на основу Теореме 33,

$\vdash (\beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r)$ за свако $r \in I$, на основу Правила 1.

За свако $r \in I$, ако $\beta \succeq r \in w$ онда $\alpha \succeq r \in w$ и отуда $sup\{r|\alpha \succeq r \in w\} \geq sup\{r|B \succeq r \in w\}$, то јест, $\mu(w)(\alpha) \geq \mu(w)(\beta)$.

7. Претпоставимо супротно, на пример $\mu(w)([\alpha]) > \mu(w)([\beta])$. Тада постоји $r \in I$ тако да $\alpha \succeq r \in w$ и $\beta \succeq r \notin w$. Према томе $\beta \prec r \in w$. Тада:

   $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta \asymp 1$, односно

   $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta \succeq 1 \wedge 1 \succeq \alpha \Leftrightarrow \beta$

   $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta \succeq 1$, на основу класичне таутологије, $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$

   $\vdash (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \succeq 1$.

   Отуда, на основу (6), $\mu(w)[((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))] \geq 1$.

   Како $\vdash (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \Rightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$, на основу (5), следи

   $\mu(w)[((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha))] \leq \mu(w)[(\neg\alpha \vee \beta)]$. Према томе, $\mu(w)(\neg\alpha \vee \beta) \geq 1$. Сада, на основу (6), $\vdash \neg\alpha \vee \beta \succeq 1$.Остатак доказа изводи се исто као и у делу (5).

8. Претпоставимо да је $[\alpha] \subseteq [\beta]$. Тада је $\{w|\alpha \in w\} \subseteq \{w|\beta \in w\}$, односно, за свако w, ако $\alpha \in w$ онда $\beta \in w$. Према томе, ако је w максималан конзистентан скуп, онда из $w \vdash \alpha$ следи $w \vdash \beta$, то јест $w \vdash \alpha \Rightarrow \beta$. Дакле, не постоји максималан конзистентан скуп w тако да $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \in w$. Отуда следи да је $\alpha \wedge \neg\beta$ неконзистентан, па $\alpha \wedge \neg\beta \vdash \perp$ односно $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

   Ако је $[\alpha] = [\beta]$ онда је $[\alpha] \subseteq [\beta]$ и $[\beta] \subseteq [\alpha]$ па $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$ и отуда $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$.

9. Ако је $[\alpha] = [\beta]$ онда на основу 8, $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$, па примењујући Правило 2 имамо да $\vdash (\alpha \Leftrightarrow \beta) \asymp 1$. Према томе, на основу (7), $\mu(w)([\alpha]) = \mu(w)([\beta])$.

∎

Теорема 35 *Скуп формула је конзистентан акко има $L_{\succeq}$ модел.*

Доказ: ($\rightarrow$) Овај смер следи на основу коректности аксиоматског система.

($\leftarrow$). Нека је $M = \langle W, Prob, v\rangle$ управо конструисан канонски модел. Индукцијом по сложености формула, показујемо да за сваки свет w и сваку формулу α, $w \models \alpha$ акко $\alpha \in w$.

- $w \models p$ акко $v(w)(p) = true$ акко $p \in w$ (на основу дефиниције канонског модела).
- $w \models \neg\alpha$ акко не важи $w \models \alpha$ акко $\alpha \notin w$ акко $\neg\alpha \in w$.

- $w \models \alpha \wedge \beta$ акко $w \models \alpha$ и $w \models \beta$ акко $\alpha \in w$ и $\beta \in w$ акко $\alpha \wedge \beta \in w$ (на основу Теореме 33).

- Претпоставимо да $\alpha \succeq r \in w$. Тада $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} \geq r$, то јест $\mu(w)[\alpha] \geq r$ и отуда $w \models \alpha \succeq r$.

  Нека $w \models \alpha \succeq r$. Тада је $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} \geq r$. Ако је $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} = r$ онда на основу Правила 3 и чињенице да је w дедуктивно затворен, следи да $w \vdash \alpha \succeq r$, односно $\alpha \succeq r \in w$. У супротном, ако је $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} = \mu(w)([\alpha]) > r$ онда на основу особина супремума и монотоности функције $\mu(w)$, следи $\alpha \succeq r \in w$.

- Претпоставимо да $\alpha \succeq \beta \in w$. Тада $w \vdash \alpha \succeq \beta$ и на основу Теореме 33 и Правила 1 за свако $r \in I$, $w \vdash \beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r$ Тада, за свако $r \in I$, ако $\beta \succeq r \in w$ онда $\alpha \succeq r \in w$. Према томе, $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} \geq sup\{s|\beta \succeq s \in w\}$, то јест, $\mu(w)([\alpha]) \geq \mu(w)([\beta])$ со $w \models \alpha \succeq \beta$.

  Нека $w \models \alpha \succeq \beta$. Тада је $\mu(w)([\alpha]) \geq \mu(w)([\beta])$, односно $sup\{s|\alpha \succeq s \in w\} \geq sup\{s|\beta \succeq s \in w\}$. Отуда, на основу особина супремума, за свако $r \in I$ важи: ако $\beta \succeq r \in w$ онда $\alpha \succeq r \in w$. Дакле, за свако , $r \in I$,

  $w \vdash \beta \succeq r \Rightarrow \alpha \succeq r$. Отуда, на основу Правила 4, $w \vdash \alpha \succeq \beta$, односно $\alpha \succeq \beta \in w$.

∎

9.4 Одлучивост

У овој глави анализирамо одлучивост проблема задовољивости $L_{\succeq}$-формуле.

Теорема 36 *Ако је формула α задовољива, онда је задовољива у $L_{\succeq}$- моделу са коначно много светова. Број светова у том моделу је највише 2^k, где је k број подформула формула α.*

Доказ: Претпоставимо да α важи у $L_{\succeq}$-моделу M= $\langle W, Prob, v\rangle$. Нека $Subf(\alpha)$ означава скуп свих подформула формуле α и нека је $k = |Subf(\alpha)|$. Уведимо релацију еквиваленције $\approx$ над W^2, тако да $w \approx u$ акко за сваку формулу $\beta \in Subf(\alpha)$, $w \models \beta$ акко $u \models \beta$. Количнички скуп $W_{/\approx}$ је коначан. Са C_u означавамо класу еквиваленције којој припада свет u . Посматрајмо модел $M^* = \langle W^*, Prob^*, v^*\rangle$, где:

- W^* садржи по један свет из сваке од класа количничког скупа $W_{/\approx}$.

- за сваки $w \in W^*$, $W^*(w) = \{u \in W^* : (\exists v \in C_u) u \in W(w)\}$

- за сваки $w \in W^*$, $H^*(w) = 2^{W^*(w)}$,

- за сваки $w \in W^*$, $\mu^*(w)(u) = \mu(w)(C_u \cap W(w))$, и за сваки $D \in H^*(w)$, $\mu^*(w)(D) = \sum_{u \in D} \mu(w)(C_u \cap W(w))$,
- за сваки $w \in W^*$, $v^*(w)(p) = v(w)(p)$, за свако $p \in Var$.

За свако w, $\mu^*(w)$ је вероватноћа, јер је

$$\mu^*(w)(W^*(w)) = \sum_{u \in W^*(w)} \mu^*(w)(C_u \cap W(w)) = \sum_{C_u \in W_{/\approx}} \mu^*(w)(C_u \cap W(w)) = 1$$

На основу дефиниције модела M^*, очигледено је да је то један $L_{\succeq}$- модел.

Показаћемо да за свако $\beta \in Subf(\alpha)$, $(w, M) \models \beta$ акко $(w, M^*) \models \beta$. Случајеви исказних слова и класичних оператора се изводе на уобичајен начин. Размотрићемо случајеве када је β облика $\gamma \succeq r$ и $\gamma \succeq \delta$.

- $(M, w) \models \gamma \succeq r$ акко
  $r \leq \mu(w)(\{u : u \in W(w), (u, M) \models \gamma\})$ акко
  $r \leq \sum_{C_u : \models \gamma} \mu(w)(C_u \cap W(w)$ акко
  $r \leq \sum_{C_u : \models \gamma, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u')$
  $r \leq \mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \gamma\})$ акко
  $(M^*, w) \models \gamma \succeq r$
- $(M, w) \models \gamma \succeq \delta$ акко
  $\mu(w)(\{u : u \in W(w), (u, M) \models \delta\}) \leq \mu(w)(\{u : u \in W(w), (u, M) \models \gamma\})$ акко
  $\sum_{C_u : \models \delta} \mu(w)(C_u \cap W(w) \leq \sum_{C_u : \models \gamma} \mu(w)(C_u \cap W(w)$ акко
  $\sum_{C_u : \models \delta, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u') \leq \sum_{C_u : \models \gamma, u' \in C_u \cap W^*} \mu(w)^*(u')$
  $\mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \delta\}) \leq \mu^*(w)(\{u : u \in W^*(w), (u, M^*) \models \gamma\})$ акко
  $(M^*, w) \models \gamma \succeq \delta$

∎

Теорема 37 *Проблеми задовољивости и ваљаности за $L_{\succeq}$-логику су одлучиви.*

Доказ: Нека је M један $L_{\succeq}$-модел, w свет тог модела у коме важи нека формула α, $Subf(\alpha) = \{\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ скуп свих потформула формуле α и $k = n+m$. Тада у сваком свету w важи тачно једна формула облика

$$\delta_w = \beta_1 \wedge \ldots \beta_n \wedge \neg\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \neg\gamma_m$$

Формулу α_i зовемо карактеристича формула света w_i. На основу прстходне теореме, постоји модел са највише 2^k светова, тако да α важи у неком свету тог модела. Према томе, за свако $l \leq 2^k$ посматрамо моделе са l светова. Како у сваком од тих светова важи тачно једна крактеристична формула, за свако l, размотрићемо све скупове од l карактеристичних формула које су међусобно неконтрадикторне и бар једна од тих формула садржи полазну формулу α. За сваки свет w_i, $i < l$, посматрамо следећи скуп линеарних једначина и неједначина ($\beta \in \delta_w$ значи да се β појављује као коњункт у δ_w)

$\sum_{j=1}^{l} \mu(w_i)(w_j) = 1$

$\mu(w_i)(w_j) \geq 0$ за сваки свет w_j

$\sum_{w_j:\beta\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) \geq r$ за све $\beta \succeq r \in \alpha_i$

$\sum_{w_j:\beta\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) < r$ за све $\neg(\beta \succeq r) \in \alpha_i$

$\sum_{w_j:\beta\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) \geq \sum_{w_j:\gamma\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)$ за све $\beta \succeq \gamma \in \alpha_i$

$\sum_{w_j:\beta\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) < \sum_{w_j:\gamma\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j)$ за све $\neg(\beta \succeq \gamma) \in \alpha_i$

Прва једначина значи да је за сваки свет w_i вероватноћа скупа свих светова једнака 1, док неједначине из другог реда значе да су вероватноће светова ненегативне. Како је $\sum_{w_j:\beta\in\alpha_j}^{l} \mu(w_i)(w_j) = \mu(w_i)([\beta]_{w_i})$, неједначине из група $3-6$ значе да су вероватносне формуле облика $\beta \succeq r, \neg(\beta \succeq r), \beta \succeq \gamma$ и $\neg(\beta \succeq \gamma)$ које се јављају као коњункције у карактеристичној формули α_i задовољене.

Унија система једначина и неједначина овог типа је систем једначина и неједначина чије решавање представља одлучив проблем. Према томе, процедура одлучивости своди се на следеће: ако је систем за фиксиране l и избор карактеристичних формула задовољив, у сваком од l светова се могу дефинисати вероватносни простори и бар у једном свету важи полазна формула α. Уколко за неке фиксиране l и избор карактеристичних формула одговарајући систем није решив, онда не постоји модел са највише l светова, такав да у i-том свету важи карактеристича формула α_i. Ако ни за које фиксиране l и избор карактеристичних светова одговарајући систем није решив, формула α није задовољива. Како је формула α ваљана акко $\neg\alpha$ није задовољива, проблем валајности је одлучив. ∎

10 Увод у p-адске бројеве

10.1 p-адска норма и њене особине

Нека је p фиксиран прост број.

Дефиниција 29 *1. За $x \in \mathbf{Z}$, $x \neq 0$ p-адска валуација од x је*

$$ord_p(x) = max\{n : p^n | x\} \geq 0$$

.

2. *за $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, $ord_p \frac{a}{b} = ord_p(a) - ord_p(b)$.*

3. *Уведимо конвенцију $ord_p(0) = \infty$*

Лема 4 *Ако $x, y \in \mathbf{Q}, ord_p$ има следеће особине:*

1. *$ord_p(x) = \infty$ акко $x = 0$;*

2. *$ord_p(xy) = ord_p(x) + ord_p(y)$;*

3. *$ord_p(x+y) \geq min\{ord_p(x), ord_p(y)\}$ при чему важи једнакост уколико је $ord_p(x) \neq ord_p(y)$;*

Дефиниција 30 *За $x \in \mathbf{Q}$, p-адску норму дефинишемо на следећи начин:*

- *$|x|_p = p^{-ord_p(x)}$ за $x \neq 0$;*
- *$p^{-\infty} = 0$, за $x = 0$.*

Дефиниција 31 *Функција $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbf{R}^+$ задовољава следеће особине ($|\cdot|_p$ је норма на $\mathbf{Q}$):*

1. *$|x|_p = 0$ акко $x = 0$;*

2. *$|xy|_p = |x|_p |y|_p$;*

3. *$|x + y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\}$, при чему важи једнакост уколико је $|x|_p \neq |y|_p$ Ова особина назива се* јака неједнакост троугла.

10.2 Конвергенција и нека тополошка својства

Нека је $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ низ рационалних бројева.

Дефиниција 32 *Низ $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ конвергира ка a у односу на норму $|\cdot|_p$ (у ознаци $\lim^p_{n \to \infty} a_n = a$) ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n)[n \geq n_0 \to |a_n - a|_p \leq \varepsilon].$$

Дефиниција 33 *Низ $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ је Кошијев, у односу на $|\cdot|_p$ ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m)[n, m \geq n_0 \to |a_n - a_m|_p \leq \varepsilon]$$

Пример 2 *Нека је* $a_n = 1 + p^2 + p^4 + \ldots + p^{2(n-1)}$. *Тада је:*
$|a_n - \frac{1}{1-p^2}|_p = |1 + p^2 + p^4 + \ldots + p^{2(n-1)} - \frac{1}{1-p^2}|_p = |\frac{1-p^{2n}}{1-p^2} - \frac{1}{1-p^2}|_p = |\frac{p^{2n}}{1-p^2}|_p = \frac{1}{p^{2n}}$.
За дато $\varepsilon > 0$, *можемо изабрати* M *тако да је* $p^M \geq \frac{1}{\varepsilon}$, *па ако је* $2n > M$ *онда је*
$|a_n - \frac{1}{1-p^2}| \leq \frac{1}{p^M} \leq \varepsilon$.
Према томе, $\lim^p_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-p^2}$.

Лема 5 *Нека су* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *и* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *два низа рационалних бројева.*

1. *Ако су низови* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *и* $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *Кошијеви у односу на* $|\cdot|_p$ *тада је и низ* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *Кошијев у односу на* $|\cdot|_p$.

2. $\lim^p_{n\to\infty}(a_n + b_n) = lim^p_{n\to\infty}a_n + \lim^p_{n\to\infty} b_n$

Доказ: Докажимо на пример својство (2). Претпоставимо да је $\lim^p_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim^p_{n\to\infty} b_n = b$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада, постоје n_0' и n_0'' тако да је за $n \geq n_0'$ $|a_n - a|_p \leq \varepsilon$ и за $n \geq n_0''$ $|b_n - b|_p \leq \varepsilon$. Нека је $n_0 = max\{n_0', n_0''\}$ и $n \geq n_0$. Тада је $|(a_n + b_n) - (a + b)|_p = |(a_n - a) + (b_n - b)|_p \leq max\{|a_n - a|_p, |b_n - b|_p\} \leq \varepsilon$. Отуда, на основу Дефиниције 32, $\lim^p_{n\to\infty}(a_n + b_n) = lim^p_{n\to\infty}a_n + \lim^p_{n\to\infty} b_n$. ∎

За фиксиран прост број p, поље p-адских бројева, $\mathbf{Q}_p$, се добија комлетирањем поља $\mathbf{Q}$, у односу на норму $|\cdot|_p$. Према томе, сваки Кошијев низ у $\mathbf{Q}_p$ има лимес $\mathbf{Q}_p$. Напоменимо да је поље $\mathbf{Q}_p$ неархимедовско.

Нека $a \in \mathbf{Q}_p$, $r \in \{p^n | n \in \mathbf{Z}\} \cup \{0\}$.

$$K(a, r) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p < r\}$$

,

$$K[a, r] = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p \leq r\}$$

су редом отворене и затворене кугле $\mathbf{Q}_p$ док је

$$S(a, r) = \{x \in \mathbf{Q}_p : |x - a|_p = r\}$$

сфера у $\mathbf{Q}_p$ са центорм a и полупречником r. Свака p-адска кугла $K[0, r]$ је адитивна подгрупа у $\mathbf{Q}_p$, док је кугла $K[0, 1]$ такође и прстен. Прстен целих бројева је подпрстен овог прстена па $K[0, 1]$ називамо *прстен p-адских целих* и означавамо са $\mathbf{Z}_p$. Кугле и сфере у $\mathbf{Q}_p$ имају следећа интересантна својства:

1. Две кугле имају непразан пресек акко је једна садржана у другој.

2. Ако $b \in K[a,r]$ онда је $K[a,r] = K[b,r]$. Дакле, свака тачка p-адске кугле је уједно и центар те кугле.

3. Кугле $K[a,r_1]$ и $K[b,r_2]$ су дисјунктне акко је $|a-b|_p > max\{r_1,r_2\}$.

На пример показаћемо треће својство.

($\Leftarrow$): Нека је $|a-b|_p > max\{r_1,r_2\}$. Ако постоји x тако да $x \in K[a,r_1] \cap K[b,r_2]$ онда је$|a-b|_p = |(a-x)+(x-b)|_p \leq max\{|a-x|_p, |b-x|_p\} \leq max\{r_1,r_2\}$, контрадикција.

($\Rightarrow$): Претпоставимо да је $|a-b|_p \leq max\{r_1,r_2\}$ и покажимо да је $\in K[a,r_1] \cap K[b,r_2] \neq \emptyset$. Нека је, на пример, $r_1 \leq r_2$. Ако $x \in K[a,r_1]$ онда је $|x-b|_p = |(x-a)+(a-b)|_p \leq max\{|x-a|_p, |a-b|_p\} \leq max\{r_1,r_2\} = r_2$. Према томе $x \in K[b,r_2]$. Дакле, $K[a,r_1] \subseteq K[b,r_2]$. ■

10.3 Репрезентација p-адских бројева и основне операције у $\mathbf{Q}_p$

Сваки p-адски број a може се на јединствен начин представити у облику

$$(1): a = \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j$$

где је $a_j \in \{0,1,\ldots p-1\}$, a_n је први ненула коефицијент у овој репрезентацији и $|a|_p = p^{-n}$.

Ако је x природан број, онда се x може на јединствен начин представити у облику:

$$x = c_0p^0 + c_1p^1 + \ldots + c_np^n$$

На пример, $181 = 1\cdot 5^0 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^2 + 1\cdot 5^3$. Дакле, природни бројеви се врло једноставно приказују у форми (1). Процедура за трансформисање произвољних рационалних бројева у форму (1) је мало сложенија и може се наћи у [23].

Постоји очигледна "1-1" кореспонденција између презентације

$$a_np^n + a_{n+1}p^{n+1} + a_{n+2}p^{n+2}\ldots$$

и кратке p-адске репрезентације

$$a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots$$

где су написани само одговарајући коефицијенти. Према томе, обе репрезентације се равноправно користе. Понекад се користи тачка у овом развоју како би се одвојили коефицијенти са позитивним индексом од оних са негативним:

- ако је $n < 0$ пишемо $a_na_{n+1}\ldots a_{-2}a_{-1}.a_0a_1a_2\ldots$, и на пример $\frac{241}{25}$ се може написати у облику $1\cdot 5^{-2} + 3\cdot 5^{-1} + 4\cdot 5^0 + 1\cdot 5^1 = 13.41$,

- ако је $n = 0$ пишемо $.a_0a_1a_2\ldots$, и на пример 241 се може представити у облику $1 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = .1341$,

- коначно, ако је $n > 0$ пишемо $.00\ldots 0a_ka_{k+1}a_{k+2}\ldots$, и 1205 се може представити у облику $0 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 = .01341$.

Ако је a рационалан број онда је његова p-адска репрезентација облика:

$$a_na_{n+1}\ldots a_{-1}.b_0b_1\ldots b_k\overline{c_1c_2\ldots c_l},$$

где је

$$\overline{c_1c_2\ldots c_l} = (c_1c_2\ldots c_l)(c_1c_2\ldots c_l)\ldots(c_1c_2\ldots c_l)\ldots.$$

Овакву репрезентацију зовемо периодична. На пример 5-адска репрезентација броја $\frac{1}{3}$ је

$$\frac{1}{3} = .231313131\ldots = .2\overline{31}.$$

Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 38 *Број $a \in \mathbf{Q_p}$ је рационалан акко је његова репрезентације $a = \sum_{j=n}^{\infty} a_jp^j$ где $a_j \in \{0, 1, \ldots p-1\}$, периодична.*

На основу горњих разматрања, репрезентација природних бројева је очигледно коначна. За дати природан број a репрезентација броја $-a$ добија се од репрезентације броја a не следећи начин: ако је $a = \sum_{j=n}^{\infty} a_jp^j$ онда је $-a = \sum_{j=n}^{\infty} b_jp^j$ где је $b_n = p - a_n$, $b_j = p - 1 - a_j$ за $j \geq n$. (видети [23]). Према томе репрезентација негативних целих бројева бесконачна и почевши од неке све цифре у тој репрезентацији су једнаке $p-1$. На пример, $-1 = 1 + (p-1)\cdot p + (p-1)\cdot p^2 + \ldots.$ "Прави p-адски бројеви", односно бројеви из $\mathbf{Q_p} \setminus \mathbf{Q}$ имају бесконачну непериодичну репрезентацију.

Сабирање, одузимање, множење p-адских бројева је објашњено у [23, 25]. Како се у процедурама одлучивања користе сабирање и дељење овде ће бити укратко проказане те процедуре. Размотримо прво сабирање. Нека су a, b два p-адска броја, $a_ma_{m+1}\ldots a_{-1}.a_0\ldots$ и $b_mb_{m+1}\ldots b_{-1}.b_0\ldots$ њихове p-адске репрерзентације, где је a_m прва ненула цифра у репрезентацији броја a док је $b_m \geq 0$ и не постоји ненула цифра пре b_m у репрезентацији броја b. Сабирање се врши с' лева у десно, и сабирају се цифре на одговарајућим позицијама: $a_j + b_j$. Такође, сабирање се врши по модулу p и остатак се пребацује на следећу позицију. Илуструјмо то на једном примеру.

Пример 3 *Израчунајмо $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{2}$ у Q_5. 5- адске репрезентације бројева $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$ су* $.413131313\ldots$ *и* $.014040404\ldots$.

Сабирање се одвија на следећи начин:
$.413131313\ldots$
$.014040404\ldots$

— — — — — —

.422222222...

Приметимо да ако конвертујемо .422222222... назад добићемо $\frac{3}{2}$ *што је једнако* $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$.

Размотримо сада дељење. Сваки $a \in \mathbf{Q_p}$ се може написати као $a = b \cdot p^n$ где $b \in \mathbf{Z_p}$. Због тога је довољно разматрати дељење (а и множење) само p-адских целих бројева. Нека су

$$d = d_0 + d_1p + d_2p^2 \dots$$

и

$$b = b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots$$

два p-адска цела броја, при чему је $d_0, b_0 \neq 0$. Ако је $a = \frac{d}{b}$, онда је

$$a = \frac{d_0 + d_1p + d_2p^2 \dots}{b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots} = a_0 + a_1p + a_2p^2 \dots$$

Како је $d = b \cdot a$ имамо да је $= b \cdot a = (b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots)(a_0 + a_1p + a_2p^2 \dots)$ $= c_0 + c_1p + c_2p^2 \dots$.

Производ $a_i \cdot b_i$ не мора припадати инетрвалу од 0 до $p-1$, па је због тога

$$c_0 = b_0a_0 = d_0 + t_1p.$$

Према томе

$$d_0 = a_0b_0 (mod p)$$

и одатле је

$$a_0 = d_0b_0^{-1} (mod p)$$

.

Сада, је $d_0 + d_1p + d_2p^2 \dots - a_0(b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots) = (a_1p + a_2p^2 \dots)(b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots)$ односно $(d_1 - a_0b_1)p + (d_2 - a_0b_2)p^2 \dots = (a_1p + a_2p^2 \dots)(b_0 + b_1p + b_2p^2 \dots)$.

Одатле, примењујући исти поступак добијамо a_1. Овим поступком добија се свака цифра у репрезентацији количника a.

Илуструјмо то једним примером. Поделимо у Q_5 бројеве $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{12}$. Одговарајући 5-адски развоји су

$$\frac{2}{3} = .4131313\dots$$

$$\frac{1}{12} = .3424242\dots$$

Како је

$b_0 = 3$, $b_0^{-1}(\ mod\ 5) = 3^{-1}(\ mod\ 5) = 2$ и $d_0 = 4$ имамо да је

$a_0 = b_0^{-1}d_0(\ mod\ 5) = 2 \cdot 4(\ mod\ 5) = 3$.

Како је $.413131\dots - 3 \cdot (.3424242\dots) = .03424242\dots$ добијамо да је

$a_1 = 2 \cdot 3 \ (mod\ 5) = 1.$

Дакле, овде се након другог корака процедура завршава и тражени количник је .31. Иначе, уколико се не зауставља, процедура се извршава док се не установи период.

Приметимо да можемо описати p-адске лопте користећи p-адске репрезентације тачака које припадају кугли. Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $a = a_{-n}p^{-n} + a_{-n+1}p^{-n+1} + \ldots + a_{-1}p^{-1} + a_0p^0 + a_1p + \ldots$. Тада је:

$$\begin{aligned} K[a, \frac{1}{p^m}] &= \{x_{-n}p^{-n} + x_{-n+1}p^{-n+1} + \ldots + x_{-1}p^{-1} + x_0p^0 + x_1p + \ldots \\ &\quad \mid \quad x_{-n} = a_{-n}, \ldots x_{m-1} = a_{m-1}\}. \end{aligned}$$

Тада, за свако $r \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{Z}$ постоји пребројиво много $q \in \mathbf{Q}$ тако да $q \in K[r, p^n]$.

У овом раду посматрали смо једну велику куглу у $\mathbf{Q}_p$, $K[0, p^M]$ где је M произвољно велики фиксиран природан број. Размотримо посебно репрезентације бројева из ове кугле.Ако $x, y \in K[0, p^M]$ тада су њихове репрезентације:

$x = x_{-M}p^{-M} + x_{-M+1}p^{-M+1} + \ \ldots x_0p^0 + x_1p + x_2p^2 + \ldots$

$y = y_{-M}p^{-M} + y_{-M+1}p^{-M+1} + \ \ldots y_0p^0 + y_1p + y_2p^2 + \ldots.$

Отуда је

$$x - y = (x_{-M} - y_{-M})p^{-M} + (x_{-M+1} - y_{-M+1})p^{-M+1} + \ldots (x_0 - y_0)p^0 + (x_1 - y_1)p + (x_2 - y_2)p^2 + \ldots$$

па је $|x - y|_p = p^{-j}$ где је $-j$ прва позиција у којој се коефицијенти у репрезентацији x и y разликују, односно $x_{-M} = y_{-M}$,$x_{-M+1} = y_{-M+1} \ \ldots x_{-j-1} = y_{-j-1}$, $x_{-j} \neq y_{-j}$. У том сличају кажемо да x и y имаају заједнички почетни комад $x_{-M} \ \ldots x_{-j-1}$ у p-адској репрезентацији.

Напоменимо да је поље $\mathbb{Q}_p$ непребројиво. На пример, посматрајући репрезентацију p-адских бројева видимо да њих има колико и бесконачних низова нула и јединица, односно континум.

10.4 Егзистенција корена и уређење у пољу Q_p

У [25] показана је следећа теорема.

Теорема 39 *Нека је p прост број, а цео број и $p^2 \nmid a$. Тада једначина $x^2 - a = 0$:*

1. *Нема решења у $\mathbf{Q}_p$ ако $p \mid a$;*

2. *Има два решења у $\mathbf{Q}_p$ ако је a квадратни остатак по модулу p (једначина $y^2 \equiv_p a$ има решења у $\mathbf{Z}$) и $p \nmid a$, односно нема решења у $\mathbf{Q}_p$ ако a није квадратни остатак по модулу p и $p \nmid a$.*

На пример, на основу ове теореме једноставно закључујемо да $\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{17}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}_7$, као и да за сваки прост број p, $\sqrt{1-p} \in \mathbf{Q}_p$.

Теорема 40 *Нека је K уређено поље и K' екстензија поља K. Да би постијало уређење на K' које индукује уређење на K потебно је да се -1 не може написати у облику $-1 = \sum_{i=1,m} a_i\alpha_i^2$ где $a_i \in K$, $a_i > 0$, $\alpha_i \in K'$ (видети [53]).*

На основу горњих разматрања, за сваки прост број p, $\sqrt{1-p} = \alpha_p^2 \in \mathbf{Q}_p$, па отуда $-1 = \frac{1-p}{p-1} = \frac{\alpha_p^2}{p-1}$. Према томе, на основу претходне теореме не постоји уређење на $\mathbf{Q_p}$.

Међутим, могуће је дефинисати парцијално уређење на $\mathbf{Q_p}$. Сада ћемо навести два примера парцијалних уређења на $\mathbf{Z_p}$.

1. Нека су $x = x_0x_1 \ldots x_n \ldots$ и $y = y_0y_1 \ldots y_n \ldots$ репрезентације два броја из $\mathbf{Z_p}$. Тада:

   (а) $x \leq y$ ако је $x_n \leq y_n$ за свако $n = 0, 1 \ldots$;

   (б) $x < y$ ако је $x_n \leq y_n$ за свако $n = 0, 1 \ldots$ и постоји n_0 тако да је $x_{n_0} < y_{n_0}$;

   (в) $x = y$ ако је $x_n = y_n$ за свако $n = 0, 1 \ldots$.

2. Нека су $x = x_0x_1 \ldots x_n \ldots$ и $y = y_0y_1 \ldots y_n \ldots$ репрезентације два броја из $\mathbf{Z_p}$. Тада је $x < y$ ако постоји n тако да је $x_n < y_n$ и $x_k \leq y_k$ за све $k > n$. Приметимо да је овде $x < y$ за све $x \in \mathbf{N}$ и $y \in \mathbf{Z_p} \setminus \mathbf{N}$. Нека је $p = 2$ и $x = -\frac{1}{3} = 10101\ldots1010\ldots$, $z = -\frac{2}{3} = 0101\ldots0101\ldots$, и $y = -16 = 0001\ldots1111\ldots$. Тада је $x < y$ и $z < y$, али x и z су неупоредиви.

Приметимо да је за свако p,

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots$$

максимум у оба ова уређења.

10.5 p-адски вероватносни простор

Овде се наводи дефиниција p -адског r-вероватносног простора из [1]:

Дефиниција 34 *Фиксирајмо $r = p^n$ за неко $n \in \mathbf{Z}$. Нека је Ω произвољан скуп и F поље подскупова од Ω (поље догађаја). Коначно, нека је $\mathbf{P} : F \to K[0, r]$ адитивна функција (мера) таква да је $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. Тада се тројка $(\Omega, F, \mathbf{P})$ назива* p-адски r вероватносни простор *док је* $\mathbf{P}$ p-адска r вероватноћа .

Ова рестикција кодомена на неку куглу у $\mathbf{Q_p}$ настала је у циљу да вероватноћа P испуњава услов ограничености - *услов ограничености*: за свако $A \in F$

$$\|A\| = sup\{|P(A)|_p : A \in F\} < \infty$$

Овај услов је неопходан да би се обезбедила интеграција по мери P на простору Ω.

Закључак

У овом раду, пре свега, логичким средствима формализована је вероватносна логика за p-адски вредносну вероватноћу. Приказано је неколико вероватносних логика, од којих свака представља једну комплетну и одлучиву екстензију класичне исказне логике. Описана је могућност проширења на логику првог реда као и једна примена ових техника на исказну логику над коначно много исказних слова.

Дата су два примера у којима је показано да је у неким ситуацијама p-адска вероватноћа погоднија од реалне, а описане логике су се показале довољно изражајне да се помоћу њих могу формално записати овакви експерименти а одговарајући резултати екперимената добити као последица одговарајућих теорија.

Предложена је једна невероватносна примена ових логика. Наиме, показано је да се одбацивањем захтева за адитивност може добити логика погодна за описивање когнитивних процеса.

Коначно, приказана је и једна реално вредносна логика у којој је могуће поредити вероватноће двеју формула без знања о њиховом вредностима.

Интересантно је приметити да се показани резултати који се односе на вероватносне логике за p-адски вредносну вероватноћу могу уопштити, односно да кодомен вероватновће не мора бити баш поље Q_p. Приметимо да је аксиоматским системом $AX_{L_{Q_p}}$ (као и осталим системима) заправо описан један ултраметрички простор у коме је окарактерисана особина адитивности мере. Поред тога јака неједнакост троугла користи се и у доказу теореме потпуности. Према томе, да би се применила ова аксиоматизација простор у који се слика вероватноћа мора бити ултраметрички. Осим тога, мора имати пребројив густ подскуп (што је у овом случају било $\mathbf{Q}$) да би се њиме апроксимирала вероватноћа. Такође приметимо да је важан услов који има Q_p а који се овде користи је да простор буде комплетан- сваки Кошијев низ конвергира.

Један значајан пример оваквог простора је поље Лоранових редова са коефицијентина у $\mathbf{Q}$, у ознаци $\mathbf{Q}[[X]]$. То је боље бесконачних низова рационалних бројева индексираних целим бројевима, а може се видети и као поље полинома бесконачног степена: $\sum_{i=n,\infty} a_i X^i$, где је n неки цео број и $a_i \in \mathbf{Q}$. Норма у овом простору дефинисана је са: $|\sum_{i=n,\infty} a_i X^i| = 2^{-k}$ где је k најмањи број такав да је $a_k \neq 0$. За пребројив густ подскуп можемо изабрати скуп свих коначних полинома $\sum_{i=n,m} a_i X^i$. Дакле, код описаних p-адских логика може се Q_p заменити са $\mathbf{Q}[[X]]$, сматрати свугде да је $p = 2$, и на тај начин добити вероватносне логике са новим кодоменом. Одлучивост би се морала додатно разматрати јер се са коначно много цифара $0, 1, \ldots, p-1$ на свакој позицији прелази на бесконачно елемената ($\mathbb{Q}$) тако да се поступак испитивања одлучивости не може на овај начин свести на испитивање коначно много комбинација.

Ултраметрички простори нису тако чести па је овај услов доста селективан по питању простора који га задовољавају. Са друге стране, технике које су овде показане могу се применити на било који комплетан метрички простор који има пребројив густ подскуп. Са тим у вези један од могућих даљих праваца би био адаптација ове аксиоматизације на произвољан Банахов простор, чија норма не мора бити ултраметричка.

Питање коначно вредносне или пребројиве вредносне p-адске вероватноће се овде природно намеће. Поменимо да је то урађено у [40]. Наиме ту се посматра један пребројив подскуп од $\mathbf{Q_p}$, $S = \mathbf{Q_p}^{alg} \cap \mathbf{Z_p}$ (скуп p-адских целих бројева који су алгебарских над Q). Како је овај скуп пребројив он се може узети и за индексни скуп, тј. посматрају се оператори облика $P_{=s}$ а правилом

Из $\varphi \Rightarrow \neg P_{=s}(\alpha)$ за свако $s \in S$ извести $\varphi \Rightarrow \perp$

се обезбеђује да вероватноћа припада изабраном скупу. Исти поступак се може применити и на било који коначан поскуп затворен за операције.

Литература

[1] A.Khrennikov. Toward theory of p-adic valued probabilities . Studies in logic, grammar and rhetoric 14(27), (2008)

[2] A.Van Roiij. Non-arcimedian functional analysis. Marcel Dekker, Inc., New-York (1978).

[3] W.Schikov. Ultrametric calculus. Cambrige Univ. Press, Cambribe (1984).

[4] Angelina Ilić Stepić . A logic for reasoninng about qualitative probability. Publications de l' institut mathematique: 52-66 87(101), 97-108 (2010).

[5] Angelina Ilić Stepić, Zoran Ognjanović, Nebojša Ikodinović, Aleksandar A p-adic probability logic. Biće objavljeno u časopisu Mathematical logic quarterly.

[6] I.V. Volovich. p-adic string. Class. Quant. Grav.,4, 83-87 (1978).

[7] P.G.O. Freud, E. Witten. Adelic string amplitudes. Phys. Lett.B, 199,191-195 (1987).

[8] P.H.Frampton, Y. Okada. p-adic string N-point function. Phys.Rev. Lett.B, 60, 484-486 (1988).

[9] V.S. Vladimirov. On the Freund-Witten adelic formula for Veneziano amplitudes. Lett. Math. Phys., 27, 123 -131 (1993).

[10] Ya.I.Aref'eva, B. Dragivch, P.H. Frampton, I.V. Volovich. The vave function of the Universe and p-adic gravity. Int.J. of Modern Phys, A,6, No 24, 4341-4358 (1991).

[11] A.Yu. Khrennikov. p-adic valued distibutions in mathematical physics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1994).

[12] A.Yu. Khrennikov. Interpretations of probability. Walter de Gruyter,Berlin,Germany.

[13] N. De Grande-De Kimpe,A.Yu. Khrennikov. Non-Arcimedean Laplace transform. Bull. Beligian Math. Soc, No. 3,225-237 (1996).

[14] V.S. Vladimirov,I.V. Volovich, E.I. Zelenov The spectral theory in the p-adic quantum mehanics. Izvestia Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat.,54, No. 2, 275-302 (1990).

[15] A.Yu. Khrennikov. Mathematical methods of the Non- Arcimedean physics. Uspekhi Mat.Nauk, 45, No. 4, 79-110 (1990).

[16] S. Albeverio,A.Yu. Khrennikov. Representation of the Weyl group in spaces of square integrable functions with respect to p-adic valued Gaussian distributions. J. of Phys. A, 29, 5515-5527 (1996).

[17] S. Albeverio, R.Cianci, A.Yu. Khrennikov. A representation of quantum field Hamiltonians in a p-adic Hilbert space. Theor. Math. Phys., 112, No. 3, 355-374 (1997).

[18] A.Yu. Khrennikov. Non-Arcimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Kluwer Acad. Publ., Dordreht, The Netherlands , (1997).

[19] A.Yu. Khrennikov. p-adic discrete dynamical systems and collective behaviour of information states in cognitive models. Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol.5, pp. 59-69.

[20] S. Albeverio, A.Yu. Khrennikov, P.E. Kloeden. Memory retieval as p-adic dynamical system. BioSystems 49, 105-115, (1999).

[21] Andrei Khrennikov. Human subconscious as p-adic dynamical system. J.theor.Biol. 193, 179–196, (1998).

[22] A.J.Baker An Intoduction to p-adic numbers and p-adic analysis. Department of mathematics, University of Glasgow, Glasgow G12 8QW, Scotland.

[23] C.K.Koc A tutorial on p-adic aritnmrtic. Electrical and Computer Engineering, Oregon State University, Corvallis, Oregon 97331.

[24] N.Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis and Zeta-Functions. Springer-Verlag, New-York Berlin Heidelberg Tokyo.

[25] G.Bachman. Introduction to p-adic numbers and valuation theory. Polytechnic institute of Brooklyn, mathematics department, Brooklyn, New-York.

[26] N. Nilsson. Probabilistic logic. Artificial intelligence, 28, 71–87, 1986.

[27] A.Yu. Khrennikov. p-adic probability interpretation of Bell's inequality Physics Letters A Volume 200, Issues 3-4, 24 April 1995, Pages 219-223.

[28] Z. Ognjanović, M. Rašković, A logic with higher order probabilities, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 60(74), pp 1–4, 1996.

[29] Z. Ognjanović, M. Rašković, Some first-order probability logics, Theoretical Computer Science 247(1–2), pp 191–212, 2000.

[30] Z. Ognjanović, Z. Marković, M. Rašković. Completeness Theorem for a Logic with imprecise and conditional probabilities, Publications de L'Institute Matematique (Beograd), ns. 78 (92) 35 - 49, 2005.

[31] Z. Ognjanović, N. Ikodinović. A logic with higher order conditional probabilities. Publications de L'Institute Matematique (Beograd), ns. 82(96) 141–154, 2007.

[32] Z. Ognjanović, A. Perović, M. Rašković. Logic with the qualitative probability operator. Logic journal of IGPL, 16(2), 105–120 (2008).

[33] M. Rašković,Z. Ognjanović, Z. Marković A probabilistic approach to default reasonong. 10. Intrenational Workshop on Non-Monotinic Reasoning NMR2004, Westing whistler, Canada, June 6-8, 335-341,2004

[34] M. Rašković,Z. Ognjanović, Z. Marković A logic with conditional probabilities. 9-th Europe conference JELIA-04, Logic in Artificial Inteligence, Lecture notes in Artificial Inteligence 3229,226-238,2004

[35] J. Paris, A. Vencovska. Proof systems for probabilistic uncertain reasoning. J. of Symbolic Logic, vol 63, no 3, 1007–1039, 1998.

[36] A. Perović, Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković. A probabilistic logic with polynomial weight formulas. S Hartmann and G. Kern-Isberner (Eds.) FoIKS 2008 LNCS 4932, pp 239–252, 2008.

[37] M. Rašković, Classical logic with some probability operators, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 53(67), pp 1–3, 1993.

[38] M. Rašković, Z. Ognjanović, A first order probability logic LP_Q, Publications de l'institut mathematique, Nouvelle série, tome 65(79), pp 1–7, 1999.

[39] M. Rašković, Z. Marković, Z. Ognjanović. A logic with approximate conditional probabilities that can model default reasoning. Int. J. Approx. Reasoning 49(1): 52-66 (2008).

[40] Miloš Milošvić. A propositional p-adic probability logic. Publications de l' institut mathematique: 52-66 87(101), 75-83 (2010).

[41] W. van der Hoek, Some considerations on the logic P_FD: a logic combining modality and probability, Journal of Applied Non-Classical Logics, 7(3), 287–307, 1997.

[42] R. Fagin, J. Halpern and N. Megiddo. A logic for reasoning about probabilities. *Information and Computation* 87(1-2):78 – 128. 1990.

[43] R. Fagin, J. Halpern. Reasoning about knoweldge and probability. *Journal of the ACM* vol. 41,no.,340-367. 1994.

[44] N. Nilsson. Probabilistic logic. *Artificial Intelligence*, 28:71–87. 1986.

[45] Z. Ognjanović, M. Raković, Z. Marković. Probability logics. in: em Zbornik radova, subseries Logic in computer science, 12 (20):35–111. 2009.

[46] Z. Marković,Z. Ognjanović, M. Raković. A Probabilistic Extension of Intuitionistic Logics. in: em Mathematical logic quarterly, vol 49, no. 5, 415-424 2003.

[47] M. Raković. Completeness theorem for biprobability models. in: em Journal of symbolic logic,51, 586-590 1986.

[48] Z. Ognjanović, M. Raković. Some probability logics with new types of probability operators. in: em Journal of logic and computation, vol. 9, issue 2,181-195 1999.

[49] Ž. Mijajlović, M. An Introduction to model theory. in: em University of Novi Sad, Faculty of science 1987.

[50] H.E.Kyburg, C.M.Teng Uncertain Inference in: Cambridge University Press 2001.

[51] Z. Ognjanović. Neke verovatnosne logike i njihove primene u računarstvu- Doktorska disertacija, Kragujevac, 1999.

[52] K.Hensel. Uber eine neue Begrundung der Theorie der algebraishen Zahlen. Jahresbericht der Deutchen Mathematiker -Vereinigung 6(3): 83-88 1897.

[53] Serge Lang. Algebra. Springer

[54] D.N.Hoover. Probability logic. Annals of mathematical logic 14, 287-313 1978.

[55] H.J.Keisler. Hyperfinite model theory. Logic Colloguium" 76, North-Holland, Amsterdam, 5-110 1977.

[56] H.J.Keisler. Probability quantifiers. Model-theoretic logics.etds. J.Barwise, S.Feherman, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag.Berlin , 509-556 1985.