Primene infinitarnih logika u verovatnosno-temporalnom rezonovanju i teoriji modela

Dragan Doder

Beograd 2011.

Sadržaj

1

Uvod

Tema ovog rada su uglavnom problemi koje nije moguće rešiti sredstvima klasične logike. Prvo su infinitarne logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ i $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$ primenjene u teoriji modela, za rešavanje problema kontinuuma za odredjene klase modela. Zatim su u verovatnosno-temporalnim logikama rešeni neki otvoreni problemi primenom infinitarnih pravila izvodjenja. Na kraju, dati su novi semantički rezultati u oblasti nemonotonih logika i merenja protivrečnih teorija, koji omogućuju razvoj novih infinitarnih aksiomatsih sistema.

Sve tri glave rada sadrže originalne rezultate. Delovi druge glave objavljeni su u [72], delovi treće glave objavljeni su u [18, 19, 84], delovi četvrte glave objavljeni su u [17, 21, 16], dok su delovi druge, treće i četvrte glave na recenziji.

Druga glava rada prikazuje dva opšta pristupa za pokazivanje da za skupove opisivim nekim od teorija i formula infinitarne logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ važi kontinuum hipoteza. Drugo poglavlje te glave prezentuje jednostavan način za kodiranje raznih pojmova, pre svega prebrojivih struktura i nekih kombinatornih problema. Preciznije, definisana je operacija $*$ koja kodira rečenice jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ u infinitatni iskazni račun, sa prikladno odabranim skupom iskaznih slova koji zavisi od razmatrane strukture. Time se na uniforman način dokazuju teoreme Kukera, Rejesa, Makaija i teorema Burisa i Kvajtineca. Osnovna ideja je da se pokaže da je broj kodiranja raznih pojmova analitički podskup skupa svih valuacija, koji, generisan diskretnom topologijom na prebrojivom skupu iskaznih slova, postaje izomorfan Kantorovom skupu. Tada se, korišćenjem teoreme o savršenom podskupu, pokazuje da za skupove koje opisujemo važi kontinuum hipoteza. Primeri su gore navedene teoreme, broj linearnih proširenja parcijalno uređenog prebrojivog skupa, prostor Zariskog i neki kombinatorni pojmovi. Treće poglavlje bavi se prebrojivim modelima prebrojivog jezika. Tada broj valuacija, snabdeven odgovarajućom topologijom, postaje Berov prostor. Pokazano je da za broj tih valuacija koje zadovoljavaju fiksirani tip jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ važi kontinuum hipoteza. Isti rezultat je pokazan i za širu klasu modela, koja nije nužno prebrojiva, pri čemu se ili ograničavamo na egzistencijalne formule, ili prihvatamo pretpostavku Projektivne determinisanosti.

Treća glava rada bavi se razvojem potpunih aksiomatskih sistema za verovatnosno-temporalne logike. U drugom poglavlju ove glave data je aksiomatizacija za temporalne logike prvog reda sa razgranatim vremenom, kao i njeno proširenje sa dva tipa verovatnosnih operatora. Infinitarnim pravilima izvođenja prevaziđen je problem nekompaktnosti kako temporalnog, tako i verovatnosnog dela logike, i obezbeđena je jaka potpunost. Sledeće poglavlje se bavi verovatnosno-temporalnim rezonovanjem o svedočenju. Halpern i Pucela su razvili aksiomatski sistem koji je u osnovi iskazni, ali sadrži kvantifikaciju preko realno vrednosnih promenljivih. U tom radu, postavljen je problem iskazne aksiomatizacije, na koji ovo poglavlje daje odgovor.

Četvrta glava se odnosi na pristup rezonovanju sa nekonzistentnim i nemonotonim znanjem. U njenom drugom poglavlju, definisano je nekoliko mera protivrečnosti iskaznih teorija, kako semantički, tako i sintaksno zasnovanih i ispitani su odnos između njih i veza sa postojećim merama protivrečnosti. Prelaskom na uslovne verovatnosne mere, dobijeni su rezultati koji se na više načina mogu dovesti u vezu sa nemonotonim rezonovanjem. To se odnosi na konačne aproksimacije difolt pravila Sistema P Krausa, Lemana i Magidora, kao i na kombinaciju aproksimacija sa racionalnim zaključivanjem, pri čemu se koriste hiperrealne verovatnoće. Treće poglavlje razmatra neke potklase klase racionalnih relacija. Korišćenjem rezultata Lemana i Magidora, predstavljena je nova semantika za te relacije, bazirana na nestandardnim verovatnoćama. Takođe su prvi put korišćene nestandardne verovatnosne mere za definisanje preferencijalnih relacija koje nisu racionalne. Dobijeni rezultati omogućavaju razvoj verovatnosnih logika u kojima će moći da se modeluju pomenute relacije. Poslednje poglavlje se vraća na standardne verovatnoće. Primenom takozvanih verovatnoća sa skokovima, razvijen je formalni sistem u kome se mogu modelovati nemonotone relacije.

Veliki deo disertacije je proizvod zajedničkog rada sa profesorima Zoranom Ognjanovićem, Žarkom Mijajlovićem, Miodragom Raškovićem, Zoranom Markovićem, Aleksandrom Perovićem i Nebojšom Ikodinovićem, kojima dugujem veliku zahvalnost i bez kojih ovaj rad ne bi bio moguć.

2

Infinitarne logike i kontinuum hipoteza

Neka je X poljski prostor. Familija Borelovih podskupova od X je najmanja σ-algebra na $P(X)$ koja sadrži zatvorene podskupove od X. Neprekidne slike Borelovih skupova zovemo analitičkim skupovima.

Prema radovima Kukera [60], Rejesa [93], Barvajza [4] i Makaija [70] , određene klase matematičkih objekata $\mathcal{S}$ vezanih za prebrojive strukture $\mathbb{A}$, kao na primer Aut$\mathbb{A}$ (automorfizmi od $\mathbb{A}$), ponašaju se upravo kao analitički podskupovi Kantorovog prostora. To znači da na njih možemo primeniti sledeću teoremu:

Teorema 2.0.1 (Suslin) *Ako je X beskonačan analitički podskup poljskog prostora, onda je $|X| = \aleph_0$ ili $|X| = 2^{\aleph_0}$.* $\square$

Suslinova teorema važi i za ma koji projektivni skup, uz jaku pretpostavku Projektivne determinisanosti (PD). Kažemo da za klasu $\mathcal{X}$ skupova važi kontinuum hipoteza (CH), ako je svaki neprebrojiv skup $\mathcal{S}$ iz $\mathcal{X}$ kardinalnosti $2^{\aleph_0}$.

Kako se borelovi skupovi dobijaju (od zatvorenih) prebrojivim unijama i presecima, oni su prirodno povezani sa infinitarnim logikama opisanim u narednoj glavi. Koristeći tu vezu i Suslinovu teoremu, u ovom delu rada ćemo, interpretiranjem u infinitarne logike, pokazati da za razne klase skupova vezane za neke (uglavnom prebrojive) strukture važi CH.

2.1 Logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ i $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$

Logika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ je ekstenzija klasične logike prvog reda $\mathcal{L}_{\omega\omega}$. Pored uobičajenih logičkih simbola, ona sadrži konjunkcije ($\bigwedge$) i disjunkcije ($\bigvee$) prebrojive dužine [51]. Na primer, ako jezik sadrži prebrojiv skup konstanti $c_n, n \in \omega$, onda formula ove logike

$$\forall x \bigvee_{n\in\omega} x = c_n$$

tvrdi da je domen prebrojiv. Mnoge matematičke strukture koje se ne mogu opisati klasičnom logikom prvog reda, mogu se opisati pomoću $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Relacija zadovoljenja se proširuje na logičan način, kao i aksiomatski sistem, koji je potpun. Sa druge strane, Teorema kompaktnosti ne važi za logiku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Sa druge strane, logika $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$ je ekstenzija klasične iskazne logike sa skupom iskaznih slova $\mathcal{P}$, koja takođe dopušta prebrojive konjunkcije i disjunkcije. Skup formula $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ logike $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$ definišemo rekurzivno:

$$F_0 = \mathcal{P},$$

$$F_{n+1} = F_n \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in F_n\} \cup \{\bigwedge S \mid S \in [F_n]^{\leq\omega}\} \cup \{\bigvee S \mid S \in [F_n]^{\leq\omega}\},$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \bigcup_{n\in\omega} F_n.$$

Pri tom, zapis $[X]^{\leq\omega}$ označava skup svih najviše prebrojivih podskupova od X. Ako je $S = \{\varphi_n \mid n \in \omega\}$, onda se za $\bigwedge S$ i $\bigvee S$ uvodi zapis $\bigwedge_{n\in\omega}\varphi_n$ i $\bigvee_{n\in\omega}\varphi_n$, redom. Preslikavanje $\mu : \mathcal{P} \mapsto 2$ zovemo valuacijom. Vrednost formule pri valuaciji μ definišemo indukcijom po složenosti formule:

$p[\mu] = \mu(p), \quad p \in \mathcal{P}$,

$(\bigwedge_{n\in\omega}\varphi_n)[\mu] = \prod_{n\in\omega}\varphi_n[\mu]$, gde je $\prod_{n\in\omega}\varphi_n[\mu]$ infimum skupa $\{\varphi_n[\mu] \mid n \in \omega\}$ u Bulovoj algebri $\mathbf{2} = (2, \cdot, +, ', 0, 1)$,

$(\bigvee_{n\in\omega}\varphi_n)[\mu] = \sum_{n\in\omega}\varphi_n[\mu]$, gde je $\sum_{n\in\omega}\varphi_n[\mu]$ supremum skupa $\{\varphi_n[\mu] \mid n \in \omega\}$ u $\mathbf{2}$,

$(\neg\varphi)[\mu] = \varphi[\mu]'$.

2.2 Metod interpretacije u $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$

U ovoj glavi opisaćemo metod za kodiranje nekih svojstava prvog reda. Na primeru Kukerove teoreme (videti [60]) ilustrovaćemo metod interpretacije u infinitarnu iskaznu logiku.

2.2.1 Kukerova teorema

Teorema 2.2.1 *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ prebrojiva algebra prebrojivog jezika L. Tada broj automorfizama od $\mathbb{A}$ zadovoljava kontinuum hipoezu.*

Dokaz

Na početku, opisujemo iskaznu teoriju prikladnu za kodiranje pojma automorfizma modela $\mathbb{A}$.

Neka je $f \in \mathrm{Aut}\mathbb{A}$. Uvodimo skup iskaznih slova $\mathcal{P} = \{p_{ab} \mid a, b \in A\}$, pri čemu p_{ab} intuitivno znači $f(a) = b$. Teoriju T, koja formalno opisuje svojstva automorfizma, definišemo na sledeči način:

- $T_1 = \{\neg(p_{ab_1} \wedge p_{ab_2}) \mid b_1 \neq b_2, a, b_1, b_2 \in A\}$.
  Primetimo da je $\mathfrak{M}(T_1) = \bigcap_{\varphi \in T_1} \hat{\varphi}^{-1}[1]$, pa je $\mathfrak{M}(T_1)$ zatvoren podskup Kantorovog prostora $2^{\mathcal{P}}$. Očigledno, T_1 kodira pojam funkcije.

- $T_2 = \{\bigvee_b p_{ab} \mid a \in A\}$.
  Pošto je $\mathfrak{M}(T_2) = \bigcap_a \bigcup_b \hat{\theta}^{-1}_{ab}[1]$, zaključujemo da je $\mathfrak{M}(T_2)$ G_δ podskup od $2^{\mathcal{P}}$. Primetimo da T_2 opisuje činjenicu da je A domen funkcije.

- $T_3 = \{\neg(p_{a_1 b} \wedge p_{a_2 b}) \mid a_1 \neq a_2, a_1, a_2, b \in A\}$.
  Primetimo da je $\mathfrak{M}(T_3)$ zatvoren skup u $2^{\mathcal{P}}$, kao i da T_3 opisuje injektivnost funkcije.

- $T_4 = \{\bigvee_a p_{ab} \mid b \in A\}$.
  Slično kao u slučaju teorije T_2, $\mathfrak{M}(T_4)$ je G_δ podskup od $2^{\mathcal{P}}$. Teorija T_4 opisuje pojam surjekcije.

– Neka je F n-aran funkcijski simbol jezika L. Teoriju T_F definišemo na sledeći način:

$$T_F = \{\neg(p_{a_1 b_1} \wedge \cdots \wedge p_{a_n b_n}) \vee p_{F^{\mathbb{A}}(a_1,\ldots,a_n) F^{\mathbb{A}}(b_1,\ldots,b_n)} \mid a_i, b_j \in A\}.$$

Ako je $T_5 = \bigcup_F T_F$, očigledno je $\mathfrak{M}(T_5)$ F_σ podskup od $2^{\mathcal{P}}$. Primetimo da teorija T_F obezbeđuje kompatibilnost funkcije f sa F. Dakle, T_5 opisuje činjenicu da je f endomorfizam algebre $\mathbb{A}$.

Neka je $T = T_1 \cup \cdots \cup T_5$. Jasno je da teorija T kaže da je f automorfizam algebre $\mathbb{A}$. Dakle,

$$\mathfrak{M}(T) = \bigcap_{i=1}^{5} \mathfrak{M}(T_i)$$

je Borelov podskup od $2^{\mathcal{P}}$, kao konačan presek Borelovih skupova. Tada $\mathfrak{M}(T)$ zadovoljava kontinuum hipotezu.

Konačno, preslikavanje $H : \mathfrak{M}(T) \longrightarrow \mathrm{Aut}\mathbb{A}$ definisano sa $H(\mu)(a) = b$ akko $\mu(p_{ab}) = 1$ je bijekcija, pa za broj automorfizama prebrojive algebre važi kontinuum hipoteza. □

2.2.2 Preslikavanje *

U ovoj sekciji prezentujemo opšti metod za kodiranje svojstava prvog reda prebrojivih struktura valuacijama rečenica infinitarne iskazne logike $\mathcal{L}_{\omega_1}$.

Za formulu φ definišemo funkciju $\hat{\varphi} : 2^{\mathcal{P}} \longrightarrow 2$ takvu da je $\hat{\varphi}(\mu) = \varphi[\mu]$ za sve $\mu : \mathcal{P} \longrightarrow 2$. Ako je formula φ konačna, primetimo da je funkcija $\hat{\varphi}$ neprekidna. Primetimo da je valuacija μ model formule φ ako je $\hat{\varphi}(\mu) = 1$. Ako pretpostavimo da je skup 2 snabdeven diskretnom topologijom, skup valuacija $2^{\mathcal{P}}$ je Kantorov prostor. Kako je $\hat{\varphi}$ Borelova funkcija, skup $\mathfrak{M}(\varphi)$ svih modela od φ je Borelov podskup od $2^{\mathcal{P}}$. Time je dokazana sledeća teorema.

Teorema 2.2.2 *Neka je T teorija logike $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$ sa prebrojivim skupom iskaznih slova $\mathcal{P}$. Tada je $\mathfrak{M}(T)$ Borelov podskup Kantorovog prostora $2^{\mathcal{P}}$.*

Na osnovu Suslinove teoreme dobijamo:

Posledica *CH važi za* $\mathfrak{M}(\varphi)$.

Neka je $\mathbb{A} = (A, \dots)$ prebrojiva struktura prvog reda na prebrojivom jeziku L i neka je $L_A = L \cup \{\underline{a} \mid a \in A\}$. Dalje, neka je $(\mathbb{A}, a)_{a \in A}$ prosta ekspanzija $\mathbb{A}$ u L_A. Skup iskaznih slova $\mathcal{P}$ sastoji se od znakova oblika $p_{F,a_1,\dots,a_n,b}$ ili $q_{R,a_1,\dots,a_n}$, gde su F i R funkcijski i relacijski simboli jezika L arnosti n, a $a_i \in A$ i $b \in A$. Preslikavanje $*$ iz skupa Sent_{L_A} svih $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-rečenica jezika L_A, u skup $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$ infinitarnih iskaznih formula nad skupom iskaznih slova $\mathcal{P}$ definišemo rekurzivno, na sledeći način:

$(F(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \underline{b})^* = p_{F,a_1,\dots,a_n,b}$, pri čemu je $p_{F,a_1,\dots,a_n,b}$ novo iskazno slovo, a F funkcijski simbol jezika L,

$(R(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n))^* = q_{R,a_1,\dots,a_n}$, pri čemu je $q_{R,a_1,\dots,a_n}$ novo iskazno slovo, a R relacijski simbol iz L,

$(\neg\theta)^* = \neg\theta^*$, $(\bigwedge_{n\in\omega} \theta_n)^* = \bigwedge_{n\in\omega} \theta_n^*$, $(\bigvee_{n\in\omega} \theta_n)^* = \bigvee_{n\in\omega} \theta_n^*$,

$(\forall x\theta)^* = \bigwedge_{a\in A} \theta(\underline{a})^*$, $(\exists x\theta)^* = \bigvee_{a\in A} \theta(\underline{a})^*$,

$$(F(t_1(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im}), \dots, t_n(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im})) = \underline{b})^* = \bigwedge_{(b_1,\dots,b_n)\in A^n} (\bigwedge_{i=1}^n (\underline{b}_i = t_i(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im}))^* \to p_{F,b_1,\dots,b_n,b}),$$

$$(R(t_1(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im}), \dots, t_n(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im})))^* = \bigwedge_{(b_1,\dots,b_n)\in A^n} ((\bigwedge_{i=1}^n t_i(\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{im}) = \underline{b}_i)^* \wedge q_{R,b_1,\dots,b_n}).$$

Teorema 2.2.3 *Neka je* $\mathbb{A} = (A, \dots)$ *prebrojiv model prebrojivog jezika* L *i neka je* L' *prebrojiva ekspanzija od* L. *Ako je* T $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$*-teorija jezika* L', *onda je skup svih* L'*-ekspanzija* $\mathbb{A}'$ *od* $\mathbb{A}$ *koje su modeli od* T *moguće kodirati Borelovim skupom u Kantorovom prostoru.*

Dokaz Neka je, pri gore uvedenoj notaciji, $T^* = \{\varphi^* \mid \varphi \in T\}$. Tada je skup $\mathfrak{M}(T^*) = \bigcap_{\varphi\in T} \mathfrak{M}(\varphi^*)$ Borelov, kao prebrojiv presek Borelovih skupova. Potrebno je pokazati da postoji bijekcija između valuacija koje su modeli od T^* i ekspanzija $\mathbb{A}'$ od $\mathbb{A}$ u L' koje su modeli od T. Preslikavanje h, koje svakoj valuaciji $\mu \in \mathfrak{M}(T^*)$ pridružuje ekspanziju $h(\mu) = \mathbb{A}_\mu$ od $\mathbb{A}$, definišemo na sledeći način:

Ako je $F \in L'$ funkcijski simbol, tada je

$$F^{\mathbb{A}_\mu}(a_1, \ldots, a_n) = b \quad \text{akko} \quad (F(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \underline{b})[\mu] = 1,$$

odnosno $F^{\mathbb{A}_\mu}(a_1, \ldots, a_n) = b$ akko $\mu(p_{F,a_1,\ldots,a_n,b}) = 1$.

Ako je $R \in L'$ relacijski simbol, tada je

$$R^{\mathbb{A}_\mu}(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{akko} \quad (R(\underline{t}_1, \ldots, \underline{t}_n))[\mu] = 1,$$

odnosno $R^{\mathbb{A}_\mu}(t_1, \ldots, t_n)$ akko $\mu(q_{R,t_1,\ldots,t_n}) = 1$.

Jednostavnom indukcijom po složenosti formule φ može se pokazati da je $\mathbb{A}_\mu$ model teorije T, kao i da $\mu \neq \nu$ povlači $\mathbb{A}_\mu \neq \mathbb{A}_\nu$. Dakle, preslikavanje h je injektivno. Sa druge strane, ako je $\mathbb{A}'$ L'-ekspanzija od $\mathbb{A}$ koja je model teorije T,valuaciju $\mu_{\mathbb{A}'}$ definišemo na sledeći način:

$$\mu_{\mathbb{A}'}(p_{F,a_1,\ldots,a_n,b}) = 1 \text{ akko } \mathbb{A}' \models F(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \underline{b}.$$

$$\mu_{\mathbb{A}'}(q_{R,t_1,\ldots,t_n}) = 1 \text{ akko } \mathbb{A}' \models R(t_1, \ldots, t_n).$$

Pošto je $\mathbb{A}'$ model teorije T, i $\mu_{\mathbb{A}'}$ je model teorije T^*, odnosno $h(\mu_{\mathbb{A}'}) = \mathbb{A}'$. Dakle, preslikavanje h je i surjektivno. Na kraju, primetimo da preslikavanje h^{-1} kodira ekspanzije $\mathbb{A}'$. □

Prema posledici Teoreme 2.2.2, pri pretpostavkama prethodne teoreme ima- mo:

Posledica Ako je skup svih L'-ekspanzija $\mathbb{A}'$ od $\mathbb{A}$ koje su modeli teorije T neprebrojiv, njegova kardinalnost je $2^{\aleph_0}$.

Iz Teoreme 2.2.3 može se lako izvesti varijanta Makaijeve teoreme iz [70].

Za rečenicu ψ logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ kaže se da je Σ^1_1-rečenica, ako je oblika $\exists R\varphi(R)$, pri čemu je $\varphi(R)$ formula logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ na jeziku $L \cup \{R\}$, gde relacijski simbol R nije deo jezika L.

Teorema 2.2.4 *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ prebrojiv model prebrojivog jezika L, a L' prebrojiva ekspanzija od L. Ako je $\psi = \exists R\varphi(R)$ Σ^1_1-rečenica jezika L' u $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ i R nije iz L', Onda se skup svih L'-ekspanzija $\mathbb{A}'$ od $\mathbb{A}$ koje su modeli rečenice ψ može kodirati analitickim podskupom Kantorovog prostora.*

Dokaz Označimo sa $\mathcal{S}$ skup svih ekspanzija $\mathbb{A}'' = (\mathbb{A}', R)$ koje zadovoljavaju rečenicu $\varphi(R)$, pri čemu je $\mathbb{A}'$ ekspanzija od $\mathbb{A}$ u jezik L'. Prema Teoremi 2.2.3, $\mathcal{S}$ se može kodirati Borelovim podskupom B Kantorovog prostora $2^{\mathcal{P}}$, gde je $\mathcal{P}$ skup iskaznih slova definisan na početku poglavlja. Označimo sa $\mathcal{P}_1$ skup iskaznih slova iz $\mathcal{P}$ čiji indeksi ne sadrže relacijski simbol R, a sa $\mathcal{P}_2$ skup preostalih iskaznih slova (onih u kojima se R pojavljuje među indeksima). Očigledno je da važi $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$. Dakle, B je Borelov podskup od $2^{\mathcal{P}_1} \times 2^{\mathcal{P}_2}$. Njegova projekcija B' na $2^{\mathcal{P}_1}$ kodira $\mathcal{S}'$, skup svih ekspanzija $\mathbb{A}'$ koje zadovoljavaju formulu ψ. Konačno, B' je analitički skup, kao projekcija Borelovog skupa. □

Primetimo da se rezultat prethodne teoreme može pojačati stavljanjem prebrojivog niza egzistencijalnih kvantifikatora oblika $\exists R$ ispred formule φ, umesto samo jednog. Dokaz bi koristio iste argumente, praktično bez izmena.

Napomena 2.2.1 *Kao posledica, CH važi za broj: linearnih ekstenzija parcijalnih uređenja prebrojivog skupa, kongruencija prebrojive algebre (teorema Burisa i Kvajtineca), prostih ideala prebrojivog prstena (prostor Zariskog), maksimalnih lanaca i antilanaca prebrojivog parcijalnog uređenja. Takođe, CH važi i za broj rešenja nekih kombinatornih problema, koji se mogu kodirati direktno, kao u slučaju Kukerove teoreme. U njih spada bojenje čvorova prebrojivog grafa u četiri boje, pri čemu se susedni čvorovi boje različitim bojama, kao i dole kodiran broj popločavanja ravni Vangovim dominama.*

Primer 2.2.1 ***Vangove domine***

Ovaj primer je povezan sa problemom popločavanja ravni dominama [101] (videti i [55], (Vol. 1, pp 381-384)). Pretpostavimo da imamo prebrojivo mnogo domina, pri čemu je svaka domina kvadrat dužine jedan, koji je podeljen dijagonalama na četiri trougla u koje su upisani prirodni brojevi.

Dominu predstavljamo uređenom četvorkom prirodnih brojeva (a, b, c, d), pri čemu su a, b, c i d brojevi upisani u donjem, levom, gornjem i desnom trouglu, redom. Neka je S konačan skup tipova domina.

Ravan se pokriva dominama na dole opisan način. Temena domina imaju celobrojne koordinate. Pozicija domine je koordinata gornjeg desnog temena. Domine se slažu na uobičajen način, pri čemu se zahteva da trouglovi koji se *dodiruju budu označeni istim brojem. Prema Pravilu prenosa iz nestandardne analize, postojanje pokrivanja prvog kvadranta povlači postojanje pokrivanja cele ravni. Naime, pretpostavimo da postoji pokrivanje prvog kvadranta. Koristeći princip prenosa, dobijamo pokrivanje nestandardnog prvog kvadranta. Ako je H bilo koji beskonačan prirodan broj, onda je pokrivanje galaksije tačke (H, H) takođe i pokrivanje standardne ravni.*

Sada ćemo razmotriti broj mogućih pokrivanja ravni.

Neka je $\mathcal{P} = \{p^{m,n}_{abcd} \mid (a,b,c,d) \in S, m,n \in \omega\}$ skup iskaznih slova, pri čemu je nameravano značenje slova $p^{m,n}_{abcd}$ "domina tipa (a,b,c,d) je na poziciji (m,n)". Odgovarajuću iskaznu teoriju T koja opisuje pokrivanje ravni definišemo na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = \{\textstyle\bigvee_S p^{m,n}_{abcd} \mid m,n \in \mathbb{Z}\},\\
&T_2 = \{\neg p^{m,n}_{abcd} \vee \neg p^{m,n-1}_{pqrs} \mid a \neq r, p^{m,n}_{abcd}, p^{m,n-1}_{pqrs} \in S\},\\
&T_3 = \{\neg p^{m,n}_{abcd} \vee \neg p^{m+1,n}_{pqrs} \mid b \neq s, p^{m,n}_{abcd}, p^{m+1,n}_{pqrs} \in S\},\\
&T_4 = \{\neg p^{m,n}_{abcd} \vee \neg p^{m,n+1}_{pqrs} \mid c \neq p, p^{m,n}_{abcd}, p^{m,n+1}_{pqrs} \in S\},\\
&T_5 = \{\neg p^{m,n}_{abcd} \vee \neg p^{m-1,n}_{pqrs} \mid q \neq d, p^{m,n}_{abcd}, p^{m-1,n}_{pqrs} \in S\},\\
&T = T_1 \cup \ldots \cup T_5.
\end{aligned}
$$

Primetimo da teorija T_1 opisuje pokrivanje ravni, dok teorije T_2, T_3, T_4 i T_5 opisuju svojstva slaganja domina. Takođe, očigledno je $\mathfrak{M}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} \hat{\varphi}^{-1}[1]$, pa je $\mathfrak{M}(T)$ Borelov podskup Kantorovog prostora $2^{\mathcal{P}}$ i $\mathfrak{M}(T)$ zadovoljava kontinuum hipotezu. Kako postoji bijekcija između skupa pokrivanja ravni i skupa svih modela teorije T, i broj pokrivanja zadovoljava kontinuum hipotezu.

2.3 O broju valucaija u Borelovim modelima

U ovom poglavlju ćemo se baviti topološkim i kardinalnim svojstvima skupa valuacija koje zadovoljavaju formulu infinitarne logike $L_{\omega_1\omega}$. Osnovna ideja je da se domen modela snabde odgovarajućom topologijom.

2.3.1 Broj valuacija u slučaju prebrojivih modela

Neka je L jezik infinitarne logike $L_{\omega_1\omega}$ sa prebrojivim skupom promenjivih V i neka je $\mathbb{B} = (B, \ldots)$ prebrojiv model jezika L. Ako domen B snabdemo diskretnom topologijom, skup svih valuacija B^V je homeomorfan Berovom prostoru.

Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna formula prvog reda jezika L. Preslikavanje $\hat{\varphi} : B^V \longrightarrow 2$ definišemo sa

$$\hat{\varphi}(\mu) = \begin{cases} 1 & , \quad \mathbb{B} \models \varphi[\mu] \\ 0 & , \quad \mathbb{B} \models \neg\varphi[\mu] \end{cases} .$$

Lema 2.3.1 *Funkcija $\hat{\varphi}$ je neprekidna.*

Dokaz Skup

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] &= \{\mu \in B^V \mid \mathbb{B} \models \varphi[\mu]\} \\ &= \bigcup \{\pi_1^{-1}[\{a_1\}] \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}[\{a_n\}] \mid a_i \in B \wedge \mathbb{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\}, \end{aligned}$$

je otvoren, kao unija otvorenih skupova. Slično, $\hat{\varphi}^{-1}[\{0\}]$ je otvoren skup, pa je preslikavanje $\hat{\varphi}$ neprekidno. □

Neka je $t(x_1, \ldots, x_n) = \{\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \mid m \in \omega\}$ prebrojiv tip jezika L, sa skupom promenjivih $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Funkciju $\hat{t} : B^V \longrightarrow 2^N$ definišemo na sledeći način:

$$\hat{t}(\mu) = \langle \hat{\varphi}_n[\mu] \mid n \in \omega \rangle.$$

Kako za svako m važi $\pi_m \circ \hat{t} = \hat{\varphi}_m$ i kako je svaka funkcija $\hat{\varphi}_m$ neprekidna, neposredno dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica Preslikavanje $\hat{t}$ je neprekidno.

Skup svih valuacija koje zadovoljavaju tip $t(x_1, \ldots, x_n)$ je $\hat{t}^{-1}[\{\langle 1 \mid n \in \omega\rangle\}]$, odakle sledi:

Posledica Skup svih valuacija koje zadovoljavaju tip $t(x_1, \ldots, x_n)$ je zatvoren podskup Berovog prostora B^V.

Posmatrajmo sada formule $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ i tipove $t(x_1, x_2, \ldots)$ (logike $L_{\omega_1\omega}$) sa prebrojivo mnogo promenljivih, kao i njima odgovarajuće funkcije $\hat{\varphi}$ i $\hat{t}$.

Teorema 2.3.1 *Za proizvoljnu $L_{\omega_1\omega}$-formulu $\varphi(x_1, x_2, \ldots)$ funkcija $\hat{\varphi}$ je Borelova.*

Dokaz U dokazu koristimo indukciju po složenosti formule φ. Ako je formula φ atomična, prema prethodnom tvrđenju je $\hat{\varphi}$ neprekidna funkcija.

Pretpostavimo da je formula φ oblika $\bigvee_{n\in\omega} \varphi_n$. Tada je

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \bigcup_{n\in\omega} \hat{\varphi}_n^{-1}[\{1\}],$$

Borelov skup kao prebrojiva unija Borelovih skupova. Neka je φ formula $\neg\psi$. Tada je skup

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \hat{\psi}^{-1}[\{0\}],$$

Borelov, prema indukcijskoj hipotezi. Ako je formula φ oblika

$$\exists x \psi(x, x_1, x_2, \ldots),$$

onda je skup

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] &= \{\mu \in B^V \mid \mathbb{B} \models \exists x \psi(x, x_1, x_2, \ldots)[\mu]\} \\ &= \bigcup_{b\in B} \{\mu \in B^V \mid \mathbb{B} \models \psi(b, x_1, x_2, \ldots)[\mu]\},\end{aligned}$$

Borelov kao prebrojiva unija Borelovih skupova. □

Posledica Skup svih valuacija koje zadovoljavaju tip $t(x_1, x_2, \ldots)$ je Borelov podskup Berovog prostora, pa zadovoljava kontinuum hipotezu.

Primer Za broj preseka prebrojivog linearnog uređenja važi kontinuum hipoteza. Zaista, pojam preseka može se opisati konjunkcijom sledećih formula:

$$\forall x \bigvee_{i\in\omega} x = x_i, \quad \bigwedge_{i\in\omega} x_{2i} < x_{2i+2}, \quad \bigwedge_{i\in\omega} x_{2i+3} < x_{2i+1},$$

$$\bigwedge_{i,j\in\omega} x_{2i} < x_{2j+1}, \quad \bigwedge_{i\in\omega} \bigvee_{j\in\omega} x_{2i} < x_{2j}, \quad \bigwedge_{i\in\omega} \bigvee_{j\in\omega} x_{2j+1} < x_{2i+1}.$$

2.3.2 Broj valuacija u slučaju neprebrojivih modela

U ovom poglavlju ćemo razmatrati mogućnost prenošenja rezultata prethodne sekcije u slučaju da modeli nisu nužno prebrojivi. Preciznije, posmatraćemo model $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ jezika L, čiji domen A je poljski prostor i čije su sve funkcije i relacije Borelove. Takve modele ćemo zvati Borelovim modelima.

Primetimo da su, u slučaju da je A prebrojiv skup, sve relacije i funkcije Borelove. U Borelovom modelu $\mathbb{A}$ možemo identifikovati valuacije iz skupa A^V sa elementima poljskog prostora A^ω.

U ostatku poglavlja ćemo koristiti sledeće činjenice:

Lema 2.3.2 *Pretpostavimo da je A poljski prostor, a B Borelov podskup od A^n. Ako je π permutacija skupa $\{0, \ldots, n-1\}$, onda je skup*

$$\{(a_{\pi(0)}, \ldots, a_{\pi(n-1)}) | (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in B\}$$

Borelov.

Lema 2.3.3 *Pretpostavimo da je A poljski prostor, a B Borelov podskup od A^n. Tada su $B \times A^k$ i $B \times A^\omega$ Borelovi podskupovi od A^{n+k} i A^ω, redom.*

Neka je $\mathbb{A}$ Borelov model jezika L i neka je $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ term jezika L, pri čemu su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve promenljive koje se javljaju u t. Term-preslikavanje $f_t \colon A^m \to A$ definišemo na prirodan način: $f_t(a_1, a_2, \ldots, a_m) = t^{\mathbb{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_m]$. Prema sledećoj lemi, u Borelovim modelima term-preslikavanja su Borelove funkcije.

Lema 2.3.4 *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ Borelov model jezika L i neka je t term jezika L. Tada je funkcija f_t Borelova.*

Dokaz Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti terma. Očigledno, termi složenosti 0 definišu unarne funkcije koje su ili identiteti ili konstantne funkcije.

Neka je $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, pri čemu je g funkcijski simbol, a $t_1, \ldots, t_n$ su termi manje složenosti. Dalje, neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sve promenljive koje se javljaju u termu t. Termi $t_1, \ldots, t_n$ definišu Borelove term-funkcije $h_1, \ldots, h_n$, prema indukcijskoj hipotezi. Dokazaćemo da je funkcija $f = g^{\mathbb{A}} \circ (h_1, \ldots, h_n)$ Borelova, tako što ćemo pokazati da je $(h_1, \ldots, h_n)\colon A^m \to A^n$ Borelova funkcija. Graf funkcije $(h_1, \ldots, h_n)$ je skup

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | h_i(a_0, \ldots, a_m) = b_i, i \in \{1, \ldots, n\}\} =$$

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | h_i(a_0, \ldots, a_m) = b_i\}.$$

Dalje, skup

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | h_1(a_0, \ldots, a_m) = b_1\} =$$

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+2} | h_1(a_0, \ldots, a_m) = b_1\} \times A^{n-1}$$

je Borelov, prema prethodnoj lemi. Slično se pokazuje da su i ostali članovi preseka Borelovi skupovi, pa je i funkcija $(h_1, \ldots, h_n)$ Borelova. □

Teorema 2.3.2 *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ Borelov model. Ako je φ formula jezika $L_{\omega_1 \omega}$ bez kvantifikatora, onda je skup valuacija za koje važi formula φ Borelov podskup od A^V.*

Dokaz Kako je

$$\{\nu \in A^V | \mathbb{A} \models \bigwedge_{n \in \omega} \varphi_n\} = \bigcap_{n \in \omega} \{\nu \in A^V | \mathbb{A} \models \varphi_n\}$$

i

$$\{\nu \in A^V | \mathbb{A} \models \neg\varphi\} = \{\nu \in A^V | \mathbb{A} \models \varphi\}^c,$$

dovoljno je dokazati tvrđenje za atomične formule.

Neka je $R(t_1(x_0, \ldots, x_m), \ldots, t_n(x_0, \ldots, x_m))$ atomična formula. Pokažimo da je

$$S = \{(a_0, \ldots, a_m) \in A^{m+1} | R^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m])\}$$

Borelov skup. Primetimo da je $S = \pi(S_1)$, gde je

$$S_1 = \{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | R^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n), b_i = t_n^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m]\},$$

a $\pi : A^{m+n+1} \longrightarrow A^{m+1}$ je projekcija

$$\pi((a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)) = (a_0, \ldots, a_m).$$

Tada je

$$S_1 = \{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | R^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)\} \cap$$

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | b_i = t_i^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m]\}.$$

Prema pretpostavkama teoreme i na osnovu Leme 2.3.3, skup

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | R^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)\} =$$

$$A^{m+1} \times \{(b_1, \ldots, b_n) \in A^n | R^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)\}$$

je Borelov. Na osnovu lema 2.3.2, 2.3.3 i 2.3.4, zaključijemo da je

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} | b_1 = t_1^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m]\} =$$

$$\{(a_0, \ldots, a_m, b_1) \in A^{m+2} | b_1 = t_1^{\mathbb{A}}[a_0, \ldots, a_m]\} \times A^{n-1}$$

Borelov skup, kao i ostali članovi preseka. Dakle, skup S_1 je Borelov.

Projekcija π je neprekidno preslikavanje. Primetimo da je restrikcija $\pi|_{S_1}$ injektivna. Dakle, S je Borelov skup kao injektivna slika Borelovog skupa S_1 (videti Teoremu 15.1 iz [53]). □

Pošto je neprekidna slika Borelovog skupa analitički skup, dobijamo sledeće tvrđenje.

Posledica *Pretpostavimo da model* $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ *jezika* L *zadovoljava uslove prethodne teoreme. Ako je* φ $L_{\omega_1\omega}$*-formula oblika* $\exists x_1 \ldots \exists x_n \psi$*, pri čemu* ψ *ne sadrži kvantifikatore, za broj valuacija koje zadovoljavaju* φ *važi kontinuum hipoteza.*

Na isti način kao sto je dokazana Teorema 2.3.3, može se dokazati i sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3.3 *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ model jezika L, pri čemu je A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathbb{A}$ su projektivne. Ako je φ proizvoljna formula jezika $L_{\omega_1\omega}$, onda je skup valuacija koje zadovoljavaju φ projektivni podskup A^V.*

Posledica *Neka je $\mathbb{A} = (A, \ldots)$ model jezika L, pri čemu je A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathbb{A}$ su projektivne. Pod pretpostavkom PD (Projektivna determinisanost), za skup valuacija koje zadovoljavaju formulu jezika $L_{\omega_1\omega}$ važi kontinuum hipoteza.*

3

Neke temporalne verovatnosne logike

3.1 Verovatnosne i temporalne logike

Prvi rad koji sadrži model-teoretski pristup teoriji verovatnoće je poznati Kislerov rad [52], u kojem su uvedeni verovatnosni kvantifikatori oblika $Px > r$. Formula $(Px > r)\phi(x)$ je tačna, ako je mera skupa $\{x \mid \phi(x)\}$ veća od r. Koristeći dopustive i prebrojive fragmente infintarne logike, Huver je dao rekurzivnu aksiomatizaciju u [46]. Svoju popularnost i razvoj verovatnosne logike duguju primenama u rezonovanju u prisustvu neodređenosti. Prvi rad iz verovatnosnih logika usmerenim ka modelovanju neodređenosti je [30] Fagina, Halperna i Megidoa, baziran na idejama iz [74, 75]. Izražajnost logike povećana je ugradnjom aritmetičkih operacija u sintaksu. Primer formule je

$$\frac{2}{3}P(\alpha) - 5P(\beta) \geqslant \frac{3}{4},$$

gde su α i β klasične formule, a nameravano značenje od $P(\alpha)$ je "verovatnoća od α". Standardna semantika za verovatnosne logike je specijalna vrsta Kripkeovih modela, pri čemu je relacija među svetovima zamenjena konačno aditivnom verovatnosnom merom.

Značajno je istaći da Teorema kompaktnosti ne važi u verovatnosnim logikama sa realno vrednosnom semantikom. Naime, ako formula α nije ni tautologija ni kontradikcija, onda konačno zadovoljiva teorija

$$T = \{P(\alpha) > 0\} \cup \{P(\alpha) < 10^{-n} \mid n \in \omega\}$$

nije zadovoljiva ($P(\alpha)$ mora da bude infinitezimala). Na osnovu toga, nijedna konačna aksiomatizazcija verovatnosnih logika neće biti potpuna. Temeljan prikaz verovatnosnih logika sa infinitarnim pravilima izvođenja dat je u [83].

Moderni razvoj temporalnih logika počinje radom Prajora, polovinom prošlog veka [89]. U osnovi, glavna ideja temporalnih logika je u dodavanju vremenske komponente odnosu mogućih svetova - relacija dostiživosti izražena je preko prošlosti (prethodni svetovi) i budućnosti (naredni svetovi). Kao i u modalnim logikama, informacije o pojedinačnom svetu izražavaju se pomoću klasičnih formula, dok temporalni operatori govore o vezama između svetova. Njihovoj popularnosti doprinele su mnoge primene u teorijskom računarstvu [29].

Osnovno pitanje vezano za modelovanje konkretne temporalne logike tiče se protoka vremena. On može biti linearan ili razgranat, neprekidan ili diskretan. Druga podela je više filozofskog nego praktičnog tipa i većina istraživanja u ovoj oblasti bavi se opisom vremena koje je diskretno. Sa druge strane, prva podela je značajna i sa praktičnog stanovišta. Ako je vreme diskretno, nekada je zgodnije pretpostaviti da je vreme razgranato, odnosno da neki vremenski trenutak može da ima više potencijalnih naslednika.

U ranim radovima, klasični logički jezici obogaćeni su unarnim operatorima F (future) i P (past). Potpuna aksiomatizacja prikazana je u [7]. Za logiku sa izražajnijim jezikom, sa operatorima U (until) i S (since), potpunost je pokazana u [12].

Potpuna aksiomatizacija iskazne logike sa linearnim vremenom, sa operatorima $\bigcirc$ (next) i U, prikazana je u [38, 65], dok je njeno proširenje prvog reda dato u [68]. Jako potpun aksiomatski sistem za predikatski slučaj dat je u [79], a njegovo verovatnosno proširenje u [81].

Iskazna logika sa razgranatim vremenom, sa osnovnim operatorima $\bigcirc$, U i A, opisana je u [27, 28]. Za razliku od linearnih operatora $\bigcirc$ i U koji govore o fiksiranom putu, temporalni operator A omogućava promenu puta. Malo je potpunih aksiomatizacija iskazne logike sa razgranatim vremenom

[94, 97]. Prva potpuna aksiomatizacija u predikatskom slučaju prikazana je u [18].

Slično kao i kod realno-vrednosnih verovatnosnih logika, nekompaktnost je odlika temporalnih logika sa diskretnim vremenom. Standardan primer nezadovoljive, a konačno zadovoljive teorije (pri čemu je protok vremena izomorfan sa $(\mathbb{N}, \leqslant)$) je

$$T = \{F\ \neg\phi\} \cup \{\bigcirc\phi, \bigcirc\bigcirc\phi, \bigcirc\bigcirc\bigcirc\phi, \ldots\},$$

gde je značenje izvedenog operatora F "desiće se".

3.2 Verovatnosne logike sa razgranatim vremenom

U ovom delu rada prikazaćemo potpunu infinitarnu aksiomatizaciju razgranate vremenske iskazne logike sa dve vrste verovatnosnih operatora, kao i proširenje prvog reda.

3.2.1 Formule i modeli

Neka je $\mathcal{P}$ najviše prebrojiv skup iskaznih slova. Skup For svih formula logike pBTL je najmanji skup sa sledećim osobinama:

- $\mathcal{P} \subseteq For$,
- ako $\alpha, \beta \in For$, onda $\alpha \wedge \beta, \neg\alpha \in For$,
- ako $\alpha, \beta \in For$, onda $\bigcirc\alpha, \alpha U \beta, A\alpha \in For$,
- ako $\alpha \in For$ i $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, onda $P^{p}_{\geqslant r}\alpha, P^{s}_{\geqslant r}\alpha \in For$.

Intuitivno značenje operatora je:

- $\bigcirc\alpha$: α će važiti u narednom vremenskom trenutku na određenom putu,
- $\alpha U \beta$: α će važiti u svakom stanju (na određenom putu), sve dok β ne postane tačno,

- $A\alpha$: α važi na svakom putu koji počinje datim stanjem,
- $P^p_{\geqslant r}\alpha$: verovatnoća da α važi u slučajno izabranom stanju na određenom putu je bar r,
- $P^s_{\geqslant r}\alpha$: verovatnoća skupa puteva (čiji je zajednički početak određeno stanje) na kojima važi α je bar r.

Za formulu kažemo da je *formula stanja* ako je bulovska kombinacija: iskaznih slova, formula oblika $P^s_{\geqslant r}\alpha$ i oblika $A\alpha$. Sa St ćemo označavati skup svih formula stanja. Za $n \in \omega$, $\bigcirc^{n+1}\alpha$ definišemo kao $\bigcirc(\bigcirc^n\alpha)$. Ako je T skup formula, onda sa $\bigcirc T$ označavamo skup $\{\bigcirc\alpha | \alpha \in T\}$, a sa AT skup $\{A\alpha | \alpha \in T\}$. Temporalni operatori F (nekada), G (uvek) i E (egzistencijalni kvantifikator puta) uvode se na sledeći način:

- $F\alpha$ je $\top U\alpha$,
- $G\alpha$ je $\neg F\neg\alpha$,
- $E\alpha$ je $\neg A\neg\alpha$.

Zapis ćemo pojednostaviti i uvođenjem ostalih verovatnosnih operatora:

- $P^p_{<r}\alpha$ je zamena za $\neg P^p_{\geqslant r}\alpha$, $P^p_{\leqslant r}\alpha$ je zamena za $P^p_{\geqslant 1-r}\neg\alpha$, $P^p_{>r}\alpha$ je zamena za $\neg P^p_{\leqslant r}\alpha$, dok je $P^p_{=r}\alpha$ zamena za $P^p_{\geqslant r}\alpha \wedge P^p_{\leqslant r}\alpha$,
- $P^s_{<r}\alpha$, $P^s_{\leqslant r}\alpha$, $P^s_{>r}\alpha$ i $P^s_{=r}\alpha$ uvodimo na sličan način.

Primer formule je

$$EG\alpha \rightarrow P^s_{\geqslant\frac{1}{2}} P^p_{\geqslant\frac{1}{3}}\alpha,$$

što čitamo na sledeći način: "ako postoji put na kojem formula α uvek važi, onda na bar pola puteva α važi u bar trećini stanja".

Definicija 3.2.1 *Model $\mathcal{M}$ je svaka uređena šestorka*

$$\langle S, v, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path}\rangle$$

za koju važi:

- S *je neprazan skup stanja (vremenskih trenutaka),*

- $v : S \times \mathcal{P} \longrightarrow \{0,1\}$ *svakom stanju pridružuje valuaciju.*

- R *je binarna relacija na skupu* S*, koja je totalna (za svako* $s \in S$ *postoji* $t \in S$ *takvo da je* sRt*),*

- Σ *je skup* ω*-nizova* $\sigma = s_0, s_1, s_2, \ldots$ *stanja iz* S*, za koje* $s_i R s_{i+1}$ *važi za svako* $i \in \omega$*. Elemente skupa* Σ *zovemo* putevima. *Pretpostavljamo da je* Σ *zatvoren za nastavke, odnosno: ako je* $\sigma = s_0, s_1, s_2, \ldots$ *put, onda je put i* $s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots$*, za svako* $i \in \omega$*,*

- $Prob^{state}$ *pridružuje svakom stanju* $s \in S$ *verovatnosni prostor* $Prob_s = \langle H_s, \mu_s \rangle$ *, za koji važi:*

  - H_s *je algebra podskupova od* $\Sigma_s = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma_0 = s\}$ *(sadrži* Σ_s *kao element i zatvorena je za komplemente i konačne unije),*
  - $\mu_s : H_s \longrightarrow [0,1]$ *je konačno aditivna verovatnosna mera:*
    - $\mu_s(H_s) = 1$,
    - $\mu_s(X \cup Y) = \mu_s(X) + \mu_s(Y)$, *kad god su skupovi* X *i* Y *disjunktni.*

- $Prob^{path}$ *pridružuje svakom putu* $\sigma \in \Sigma$, $\sigma = s_0, s_1, \ldots, s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots$ *verovatnosni prostor* $Prob_\sigma = \langle A_\sigma, \mu_\sigma \rangle$*, za koji važi:*

  - A_σ *je algebra podskupova od* $S_\sigma = \{\pi \in \Sigma \mid \pi = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, for\ i \in \omega\}$,
  - $\mu_\sigma : A_\sigma \longrightarrow [0,1]$ *je konačno aditivna verovatnosna mera.*

Neka je $\sigma = s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots$ Zbog jednostavnijeg zapisa, ubuduće ćemo koristiti sledeće oznake:

- $\sigma_{\geq i}$ je put $s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots$

- σ_i je stanje s_i.

Definicija 3.2.2 *Neka je* $\mathcal{M} = \langle S, v, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path} \rangle$ *bio koji model. Relaciju zadovoljivosti* $\models$ *(činjenicu da je formula* α *zadovoljena na putu* σ *modela* $\mathcal{M}$ *označavamo sa* $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$*) definišemo rekurzivno, na sledeći način:*

- *ako je* $p \in \mathcal{P}$*, onda je* $\mathcal{M}, \sigma \models p$ *akko* $v(s_0, p) = 1$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models \neg\alpha$ *akko* $\mathcal{M}, \sigma \not\models \alpha$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha \wedge \beta$ *akko* $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$ *i* $\mathcal{M}, \sigma \models \beta$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models \bigcirc\alpha$ *akko* $\mathcal{M}, \sigma_{\geq 1} \models \alpha$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models A\alpha$ *akko za svaki put* π $\sigma_0 = \pi_0$ *povlači* $\mathcal{M}, \pi \models \alpha$.
- $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha U \beta$ *akko postoji* $i \in \omega$ *takvo da je* $\mathcal{M}, \sigma_{\geq i} \models \beta$ *i za svako* $j \in \omega$ *takvo da je* $0 \leq j < i$ *važi* $\mathcal{M}, \sigma_{\geq j} \models \alpha$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models P^s_{\geqslant r}\alpha$ *akko* $\mu_{\sigma_0}\{\pi \in \Sigma_{\sigma_0} \mid \mathcal{M}, \pi \models \alpha\} \geqslant r$,
- $\mathcal{M}, \sigma \models P^p_{\geqslant r}\alpha$ *akko* $\mu_{\sigma}\{\pi \in S_{\sigma} \mid \mathcal{M}, \pi \models \alpha\} \geqslant r$.

Primetimo da zadovoljivost formula stanja zavisi samo od početnog stanja puta.

Za dati model $\mathcal{M} = \langle S, v, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path} \rangle$ i put $\sigma \in \Sigma$ uvodimo sledeće oznake:

- $[\alpha]^{path}_{\mathcal{M},\sigma} = \{\pi \in S_\sigma \mid \mathcal{M}, \pi \models \alpha\}$,
- $[\alpha]^{state}_{\mathcal{M},s} = \{\pi \in \Sigma_s \mid \mathcal{M}, \pi \models \alpha\}$.

Moguć problem sa definicijom 3.2.2 je da može da postoji formula α takva da $[\alpha]^{path}_{\mathcal{M},\sigma}$ i $[\alpha]^{state}_{\mathcal{M},s}$ ne pripadaju A_σ i H_s. Da bismo prevazišli taj problem, u daljem tekstu razmatraćemo samo takozvane merljive modele.

Definicija 3.2.3 *Model* $\mathcal{M} = \langle S, v, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path} \rangle$ *je merljiv, ako ispunjava dole navedene uslove:*

- $[\alpha]^{path}_{\mathcal{M},\sigma} \in A_\sigma$, *za svaku formulu* $\alpha \in For$,

- $[\alpha]^{state}_{\mathcal{M},s} \in H_s$, *za svaku formulu* $\alpha \in For$.

Verovatnosnu logiku sa razgranatim vremenom, karakterisanu klasom merljivih modela, označavaćemo sa

Izraz $\mathcal{M}, \sigma \models T$ znači da je $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$ za svaku formulu $\alpha \in T$. Formula α je zadovoljiva, ako postoje model $\mathcal{M}$ i put σ tog modela, za koje je $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$. Formula je valjana, ako je $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$ za svaki model $\mathcal{M}$ i svaki put σ modela $\mathcal{M}$. Zapis $T \models \alpha$,koji čitamo: "α je semantička posledica od T", znači da za svaki model $\mathcal{M}$ i svaki put σ modela $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \sigma \models T$ povlači $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$.

3.2.2 Aksiomatizacija

Iskazne aksiome

A1. sve tautologije klasične iskazne logike

Temporalne axiome

A2. $\bigcirc(\alpha \to \beta) \to (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta)$

A3. $\neg \bigcirc \alpha \leftrightarrow \bigcirc\neg\alpha$

A4. $\alpha U \beta \leftrightarrow \beta \vee (\alpha \wedge \bigcirc(\alpha U \beta))$

A5. $p \to Ap,\ \ p \in \mathcal{P}$

A6. $Ep \to p,\ \ p \in \mathcal{P}$

A7. $A\alpha \to \alpha$

A8. $A(\alpha \to \beta) \to (A\alpha \to A\beta)$

A9. $A\alpha \to AA\alpha$

A10. $E\alpha \to AE\alpha$

Verovatnosne aksiome ($x \in \{p, s\}$)

A11. $P^x_{\geq 0}\alpha$

A12. $P^x_{\leq s}\alpha \rightarrow P^x_{<t}\alpha$, $t > s$

A13. $P^x_{<s}\alpha \rightarrow P^x_{\leq s}\alpha$

A14. $(P^x_{\geq s}\alpha \wedge P^x_{\geq r}\beta \wedge P^x_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow P^x_{\geq \min(1,s+r)}(\alpha \vee \beta)$

A15. $(P^x_{\leq s}\alpha \wedge P^x_{<r}\beta) \rightarrow P^x_{<s+r}(\alpha \vee \beta)$, $s + r \leq 1$

Temporalno-verovatnosne aksiome

A16. $G\alpha \rightarrow P^p_{\geq 1}\alpha$

A17. $A\alpha \rightarrow P^s_{\geq 1}\alpha$

A18. $P^s_{\geq r}\alpha \rightarrow AP^s_{\geq r}\alpha$

A19. $EP^s_{\geq r}\alpha \rightarrow P^s_{\geq r}\alpha$

Pravila izvođenja

R1. iz $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ izvesti β

R2. iz α izvesti $\bigcirc\alpha$

R3. iz α izvesti $A\alpha$

R4. iz skupa pretpostavki

$$\{\gamma \rightarrow \neg((\wedge_{k=0}^{i} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{i+1}\beta) \mid i \in \omega\}$$

izvesti $\gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta)$

R5. iz skupa pretpostavki

$$\{\beta \rightarrow \bigcirc^m P^x_{\geq r - \frac{1}{k}}\alpha \mid k \in \omega, k \geq \frac{1}{r}\}$$

izvesti $\beta \rightarrow \bigcirc^m P^x_{\geq r}\alpha$ (za ma koje $m \in \omega$ i $x \in \{p, s\}$)

Prema aksiomi A1 i pravilu izvođenja R1 (Modus ponens), pBTL je ekstenzija klasične iskazne logike. Aksiome A2–A4 su standardne aksiome za temporalne logike sa diskretnim linearnim vremenom, dok se aksiome A5–A10 bave nelinearnim aspektima temporalnih logika [97]. Verovatnosne aksiome opisuju osnovna svojstva verovatnosnih mera: nenegativnost i konačnu aditivnost. Poslednja grupa aksioma govori o odnosu temporalnog i verovatnosnog dela logike.

Pravila izvođenja R2 i R3 su varijante modalne nesesitacije. Ta dva pravila mogu se primenjivati samo na teoreme.

Pravila R4 i R5 su infinitarna pravila izvođenja. Prvo od njih karakteriše temporalni operator U, a intuitivno značenje drugog je da verovatnoća koja je proizvoljno blizu broju r ne sme da bude manja od r.

Kažemo da je formula α sintaksna posledica (ili "izvodiva iz") skupa formula T, u zapisu $T \vdash \alpha$, ako postoji najviše prebrojiv skup formula $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha$, takav da je svaka formula α_i ili aksioma, ili pripada skupu T, ili je izvedena uz pomoć nekog od pravila izvođenja (pri čemu se pravila R2 i R3 mogu primeniti samo na teoreme). Takav niz zovemo dokazom formule α iz T. Kažemo da je formula α teorema, u oznaci $\vdash \alpha$, ako je izvodiva iz praznog skupa. Skup formula T je neprotivrečan ako postoji formula koja se iz njega ne može izvesti; inače je protivrečan. Kažemo da je neprotivrečan skup formula T makslimalno neprotivrečan, ako za svaku formulu $\alpha \in For$, ili $\alpha \in T$ ili $\neg\alpha \in T$.

Saglasnost gore izloženog aksiomatskog sistema, u odnosu na posmatranu klasu modela, moguće je pokazati indukcijom po složenosti izvođenja.

3.2.3 Potpunost

Teorema 3.2.1 (Teorema dedukcije) *Ako je T skup formula, a φ formula i ako važi $T, \varphi \vdash \psi$, onda je $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$.*

Dokaz Teorema se dokazuje transfinitnom indukcijom po dužini dokaza. Ilustrovaćemo dokaz na primeru primene pravila izvođenja R4.

Pretpostavimo da je $T, \varphi \vdash \gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta)$ dobijeno primenon pravila izvođenja R4. Tada je $T, \varphi \vdash \gamma \rightarrow \neg((\wedge_{k=0}^{i} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{i+1}\beta)$, za svako $i \in \omega$.

Prema induktivnoj hipotezi, $T \vdash \varphi \to (\gamma \to \neg((\bigwedge_{k=0}^{i} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{i+1}\beta))$, za svako $i \in \omega$. Primenom aksime A1 neposredno dobijamo $T \vdash (\varphi \wedge \gamma) \to (\neg((\bigwedge_{k=0}^{i} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{i+1}\beta)))$, za svako $i \in \omega$. Na osnovu pravila R4 je $T \vdash (\varphi \wedge \gamma) \to (\neg(\alpha U \beta))$. Konačno, prema aksiomi A1 je $T \vdash \varphi \to (\gamma \to \neg(\alpha U \beta))$.

Slučajevi kada je formula ψ teorema i kada primenjujemo Modus ponens su standardni, dok su slučajevi kada se primenjuju pravila R2 i R3 trivijalni, pošto se ta pravila mogu primeniti samo na teoreme. Slučaj kada se primenjuje pravilo izvođenja R5 je slično razmatranom slučaju (R4). □

Lema 3.2.1 *Neka su α, β i γ proizvoljne formule. Tada važi:*

1. *sledeće pravilo izvođenja je izvedeno pravilo: iz skupa pretpostavki*

$$\{\gamma \to \bigcirc^i \beta \mid i \in \omega\}$$

   izvesti $\gamma \to G\beta$,

2. *ako je $\vdash \alpha$, onda je $\vdash G\alpha$,*
3. $\vdash G \bigcirc \alpha \leftrightarrow \bigcirc G\alpha$,
4. $\vdash (\bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta) \to \bigcirc(\alpha \to \beta)$,
5. $\vdash \bigcirc(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\bigcirc\alpha \wedge \bigcirc\beta)$,
6. $\vdash \bigcirc(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\bigcirc\alpha \vee \bigcirc\beta)$,
7. $G\alpha \vdash \bigcirc^i\alpha$ *za svako* $i \geq 0$,
8. *ako je $T \vdash \alpha$, pri čemu je T skup formula, tada je $\bigcirc T \vdash \bigcirc\alpha$.*
9. *za svako $j \geq 0$ važi $\bigcirc^j \beta, \bigcirc^0\alpha, \ldots, \bigcirc^{j-1}\alpha \vdash \alpha U \beta$,*
10. *ako je T skup formula takav da $T \vdash \alpha$, onda $AT \vdash A\alpha$.*
11. $\vdash G\alpha \leftrightarrow \alpha \wedge \bigcirc G\alpha$,
12. $\vdash G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta)$,

13. $\vdash G(\alpha \to \bigcirc\alpha) \to (\alpha \to G\alpha)$,

14. $\vdash (G(\alpha \to \alpha_1) \wedge (\alpha U \beta)) \to (\alpha_1 U \beta)$,

15. $\vdash (G(\beta \to \beta_1) \wedge (\alpha U \beta)) \to (\alpha U \beta_1)$,

16. $\vdash F\alpha \leftrightarrow F\neg\neg\alpha$

17. $\vdash \alpha U \beta \to F\beta$.

Dokaz (1) je neposredna posledica pravila R4, gde su α i β zamenjeni sa $\top$ i $\neg\beta$, redom. (2) sledi iz (1) i R2.

Dokazi za (3), (8) i (9) mogu se pronaći u [81].

(10): Koristićemo indukciju po dužini izvođenja formule α iz T. Pretpostavimo de je $T \vdash (\forall x)\alpha$ dobijeno iz $T \vdash \alpha$ primenom pravila R2. Tada je:

- $T \vdash \alpha$,
- $AT \vdash A\alpha$ (prema induktivnoj hipotezi),
- $AT \vdash (\forall x)A\alpha$ (primenom pravila R2.),
- $AT \vdash A(\forall x)\alpha$ (na osnovu aksiome A15).

Ostali slučajevi se razmatraju na sličan način.

(14): Primetimo da je, prema (9):

- $G(\alpha \to \alpha_1) \vdash \neg(\alpha_1 U \beta) \to \neg((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha_1) \wedge \bigcirc^i \beta)$, za svako $i \geq 0$,
- $G(\alpha \to \alpha_1) \vdash \neg(\alpha_1 U \beta) \to ((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha_1) \to \neg \bigcirc^i \beta)$, za svako $i \geq 0$,
- $G(\alpha \to \alpha_1) \vdash \neg(\alpha_1 U \beta) \to ((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha) \to \neg \bigcirc^i \beta)$, za svako $i \geq 0$,
- $G(\alpha \to \alpha_1) \vdash \neg(\alpha_1 U \beta) \to \neg((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^i \beta)$, za svako ,
- $G(\alpha \to \alpha_1) \vdash \neg(\alpha_1 U \beta) \to \neg((\alpha U \beta))$, prema pravilu R4,

odakle dobijamo tvrđenje. Tvrđenje (15) možemo dokazati na sličan način, dok (16) sledi iz definicije $F\alpha = \top U\alpha$ i prethodnog. (17) sledi direktno iz (14), zamenom $\alpha_1 = \top$. Preostala tvrđenja su jednostavne posledice temporalnog dela uvedene aksiomatizacije. □

Značajno je istaći da aksiome i pravila izvođenja, predložena kao delovi aksiomatizacije nekih (slabo) potpunih aksiomatskih sistema [12, 94, 97] za temporalne logike, važe u našoj logici, prema Lemi 3.2.1. Na osnovu toga, ovde predložena aksiomatizacija je dovoljna za opis semantičkih svojstava operatora $\bigcirc$, A i U.

Teorema 3.2.2 *Svaki neprotivrečan skup formula T može se proširiti do maksimalno neprotivrečnog skupa formula T^*.*

Dokaz Pretpostavimo da je $For = \{\alpha_i \mid i \in \omega\}$. Maksimalno konzistentan nadskup T^* definisaćemo na sledeći način:

1. $T_0 = T$.
2. Ako je α_i neprotivrečna sa T_i, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$.
3. Ako je α_i protivrečna sa T_i, onda:
   (a) Ako je formula α_i oblika $\gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta)$, onda je
   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma \rightarrow ((\wedge_{k=0}^{n_0} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{n_0+1}\beta)\},$$
   pri čemu je n_0 ceo broj za koji je skup T_{i+1} neprotivrečan.
   (b) U suprotnom, ako je formula α_i oblika $\gamma \rightarrow \bigcirc^m P^x_{\geq r}\beta$, za $x \in \{p, s\}$, onda je
   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\gamma \rightarrow \neg \bigcirc^m P^x_{\geq r - \frac{1}{n_1}}\beta\}$$
   pri čemu je n_1 ceo broj za koji je skup T_{i+1} neprotivrečan.
   (c) U suprotnom, $T_{i+1} = T_i$.
4. $T^* = \bigcup_{n \in \omega} T_n$.

Pokažimo postojanje broja n_0 u koraku 3(a) konstrukcije. Ako bi $\gamma \rightarrow ((\wedge_{k=0}^{n} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{n+1}\beta)$ bio protivrečno sa T_i, za svako $n \in \omega$, onda bi prema Teoremi 3.2.1 važilo $T_i \vdash \neg(\gamma \rightarrow ((\wedge_{k=0}^{n} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{n+1}\beta))$, za svako $n \in \omega$. Na osnovu aksiome A1 zaključujemo $T_i \vdash \gamma \rightarrow \neg((\wedge_{k=0}^{n} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{n+1}\beta)$, za svaki $n \in \omega$. Na osnovu pravila R4 dobijamo $T_i \vdash \gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. Na sličan način možemo pokazati da postoji broj n_1 iz koraka 3(b) konstrukcije.

Lako se pokazuje da je skup T_i neprotivrečan za svako i, kao i da za svako $\alpha \in For$, ili $\alpha \in T^*$ ili $\neg\alpha \in T^*$.

Primetimo da bi deduktivna zatvorenost skupa T^* povlačila njegovu neprotivrečnost: iz $T^* \vdash \bot$ bi sledilo $\bot \in T^*$, pa bi postojao i takav da $\bot \in T_i$, što je u suprotnosti sa konstrukcijom. Da bismo dokazali da je skup T^* deduktivno zatvoren, dovoljno je da pokažemo da je zatvoren za pravila izvođenja, pošto su instance aksioma očigledno u T^*. Pokazaćemo samo zatvorenost za pravilo R4, pošto je slučaj kada razmatramo pravilo R5 sličan, a ostali slučajevi su trivijalni.

Pretpostavimo da $\gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta) \notin T^*$ i da je $\gamma \rightarrow \neg((\wedge_{k=0}^{i} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{i+1}\beta) \in T^*$ za svaki $i \in \omega$. Zbog maksimalnosti skupa T^*, $\neg(\gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta)) \in T^*$, odnosno $\gamma \wedge (\alpha U \beta) \in T^*$. Sledi da je $\gamma \in T^*$ i $\alpha U \beta \in T^*$, pa postoje $m, n \in \omega$ takvi da je $\gamma \in T_m$ i $\alpha U \beta \in T_n$. Ako je $\gamma \rightarrow \neg(\alpha U \beta) = \alpha_l$, onda, prema konstrukciji skupa T^*, postoji prirodan broj n_0 takav da je $\gamma \rightarrow ((\wedge_{k=0}^{n_0} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^{n_0+1}\beta) \in T_l$. Na osnovu Leme 3.2.1(9) je $T_l \vdash \alpha U \beta$. Odatle sledi $T_{\max\{l,m,n\}} \vdash \bot$, što je u suprotnosti sa neprotivrečnosti skupa $T_{\max\{l,m,n\}}$. □

Relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu svih maksimalno neprotivrečnih skupova formula definišemo na sledeći način:

$$T_1^* \sim T_2^* \text{ akko } T_1^* \cap St = T_2^* \cap St.$$

Klasa ekvivalencije od T^* je $[T^*] = \{T_1^* \mid T_1^* \sim T^*\}$.

Lema 3.2.2 *Ako je T^* maksimalno neprotivrečan skup i ako $A\alpha \notin T^*$, postoji skup $T' \in [T^*]$ takav da $\alpha \notin T'$.*

Dokaz Neka je $T = T^* \cap St$. Ako je skup $T \cup \{\neg\alpha\}$ neprotivrečan, on se, na osnovu Teoreme 3.2.2 može proširiti do maksimalno neprotivrečnog skupa T'. Pošto je $T = T' \cap St$, dobijamo $T' \in [T^*]$.

Ako je skup $T \cup \{\neg\alpha\}$ protivrečan, onda $T \vdash \alpha$. Na osnovu Leme 3.2.1.10 dobijamo $AT \vdash A\alpha$. Pošto je $T \subseteq St$, na osnovu aksioma A5, A9,A10 i A18 je $T \vdash A\alpha$. Odatle sledi da je $A\alpha \in T^*$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom. $\square$

Kanonički model $\mathcal{M}^* = \langle S, v, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path}\rangle$ definišemo sledećim uslovima:

- $S = \{[T^*] \mid T^*$ je maksimalno neprotivrečan skup formula$\}$,
- $v([T^*], p) = 1$ akko $T^* \vdash p,\ \ p \in \mathcal{P}$,
- $[T_1^*]R[T_2^*]$ ako postoje $T_3^* \sim T_1^*$ i $T_4^* \sim T_2^*$ takvi da je $T_4^* = \{\alpha | \bigcirc \alpha \in T_3^*\}$,
- Σ je skup puteva oblika $[T_0^*]$, $[T_1^*]$, $[T_2^*]$,... za koje je $T_{i+1}^* = \{\alpha | \bigcirc \alpha \in T_i^*\}$, za svako $i \in \omega$. Ako niz $\{T_i^*\}_{i\in\omega}$ određuje put σ, skup T_i^* ćemo označavati sa $\sigma(i)$,
- $Prob^{path}$ je određen verovatnosnim prostorima $Prob_\sigma = \langle A_\sigma, \mu_\sigma\rangle$, za $\sigma = [T_0^*], [T_1^*], [T_2^*], \ldots$, takvim da važi:
  - $A_\sigma = \{[\alpha]_\sigma \mid \alpha \in For\}$, gde je $[\alpha]_\sigma = \{\sigma_{\geqslant i} \mid T_i^* \vdash \alpha, i \in \omega\}$,
  - $\mu_\sigma([\alpha]_\sigma) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid T_0^* \vdash P^p_{\geqslant r}\alpha\}$,
- $Prob^{state}$ se definiše na sledeći način: za svako stanje s, verovatnosni prostor $Prob_s = \langle H_s, \mu_s\rangle$ je određen uslovima:
  - $H_s = \{[\alpha]_s \mid \alpha \in For\}$, gde je $[\alpha]_s = \{\pi \mid \pi(0) \sim T_0^*,\ \pi(0) \vdash \alpha\}$,
  - $\mu_s([\alpha]_s) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid T_0^* \vdash P^s_{\geqslant r}\alpha\}$.

Teorema 3.2.3 *$\mathcal{M}^*$ je* pBTL-*model.*

Dokaz Pošto definicije v i μ_s zavise od izabranog elementa klase ekvivalencije, potrebno je pre svega pokazati da je definicija $\mathcal{M}^*$ korektna:

- v je dobro definisano, pošto je $\mathcal{P} \subseteq St$, pa $T_1^* \vdash p$ akko $T_2^* \vdash p$, kad god je $T_1^* \sim T_2^*$, $p \in \mathcal{P}$.

- Definicija relacije R je takođe korektna. Naime, koristeći temporalne aksiome, možemo pokazati da se svojstva neprotivrečnosti i maksimalnosti prenose sa T^* na $T^*_{\bigcirc} = \{\alpha | \bigcirc \alpha \in T^*\}$.

  Pretpostavimo da je skup $T^*_{\bigcirc}$ protivrečan, odnosno da je $T^*_{\bigcirc} \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$, za neku formulu α. Prema Lemi 3.2.1.9, $T^* \vdash \bigcirc(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Na osnovu Leme 3.2.1.5 i aksiome A3 dobijamo $T^* \vdash \bigcirc\alpha \wedge \neg\bigcirc\alpha$, sto nije u skladu sa neprotivrečnosti teorije T^*.

  Pretpostavimo da skup $T^*_{\bigcirc}$ nije maksimalan. Tada postoji formula α takva da $\alpha \notin T^*_{\bigcirc}$ i $\neg\alpha \notin T^*_{\bigcirc}$. Odatle dobijamo $\bigcirc\alpha \notin T^*$ i $\neg \bigcirc \alpha \notin T^*$ (po aksiomi A3), što protivreči maksimalnosti teorije T^*.

  Takođe, R je očigledno totalna relacija.

- A_σ je algebra skupova. Lako se pokazuje da je $S_\sigma = [\top]_\sigma$, $[\alpha]^c_\sigma = [\neg\alpha]_\sigma$ i $[\alpha]_\sigma \cup [\beta]_\sigma = [\alpha \vee \beta]_\sigma$. Takođe, H_s je algebra skupova.

- Funkcija μ_s je dobro definisana, pošto je svaka formula oblika $P^s_{\geqslant r}\alpha$ formula stanja, pa pripada maksimalno neprotivrečnom skupu T_1^* ako i samo ako pripada svakom drugom skupu $T_2^* \in [T_1^*]$. Odatle dobijamo $\sup\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid T_1^* \vdash P^s_{\geqslant r}\alpha\} = \sup\{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid T_2^* \vdash P^s_{\geqslant r}\alpha\}$.

Prema aksiomi A11, $\mu_s(\alpha) \geqslant 0$, za svako $\alpha \in For$. Na osnovu pravila izvođenja R3, $\vdash A\top$, pa je po aksiomi A17 $T^* \vdash P^s_{\geqslant 1}\top$, za svaki maksimalno neprotivrečan skup T^*. Pošto je $H_s = [\top]_s$, očigledno je $\mu_s(H_s) = 1$. Na isti način dobijamo i $\mu_\sigma(A_\sigma) = 1$ (na osnovu Leme 3.2.1(2) i aksiome A16).

Za dokaz konačne aditivnosti funkcija μ_s i μ_σ, upućujemo na [81], gde je dokazan veoma sličan rezultat. $\square$

Primetimo da je, pošto svaka klasa $[T^*]$ sadrži više maksimalno neprotivrečnih skupova, moguće da iz jednog stanja kreće više puteva.

Teorema 3.2.4 (Teorema potpunosti) *Svaki neprotivrečan skup formula je zadovoljiv.*

Dokaz Neka je T neprotivrečan skup formula i neka je $\mathcal{M}^*$ gore konstruisan model. Dokazaćemo da za svaku formulu $\alpha \in For$ važi $\mathcal{M}^*, \sigma \models \alpha$ akko $\alpha \in \sigma(0)$.

Ako je α iskazno slovo, to je neposredna posledica definicije v. U slučajevima kada je α konjunkcija ili negacija, dokaz je standardan.

Ako je $\alpha = \bigcirc\beta$, onda je $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$ akko $\mathcal{M}, \sigma_{\geq 1} \models \beta$ akko $\beta \in \sigma(1)$ akko $\alpha \in \sigma(0)$ (prema konstrukciji $\mathcal{M}$).

Pretpostavimo da je $\alpha = \beta U \gamma$. Neka važi $(\mathcal{M}, \sigma) \models \beta U \gamma$. Tada postoji $j \geq 0$ takvo da je $(\mathcal{M}, \sigma_{\geq j}) \models \gamma$ i za svako k, $0 \leq k < j$, $(\mathcal{M}, \sigma_{\geq k}) \models \beta$. Prema induktivnoj hipotezi, $\gamma \in \sigma(j)$ i $\beta \in \sigma(k)$, za sve $j \geq 0$, $0 \leq k < j$. Prema konstrukciji $\mathcal{M}$ je $\bigcirc^j\gamma \in \sigma(0)$ i $\bigcirc^k\beta \in \sigma(0)$, za sve $j \geq 0$, $0 \leq k < j$. Na osnovu Leme 3.2.1.9 sledi $\beta U \gamma \in \sigma(0)$. Za dokaz u suprotnom smeru, pretpostavimo $\beta U \gamma \in \sigma(0)$. Prema Lemi 3.2.1.17 je $F\gamma \in \sigma(0)$, odnosno $\neg F\gamma = G\neg\gamma \notin \sigma(0)$. Na osnovu konstrukcije $\mathcal{M}$, postoji $j \geq 0$ takvo da je $\bigcirc^j\gamma \in \sigma(0)$, odnosno $\gamma \in \sigma(j)$. Neka je $j_0 = \min\{j : \bigcirc^j\gamma \in \sigma(0)\}$. Ako je $j_0 = 0$, onda je $\gamma \in \sigma(0)$, pa prema induktivnoj hipotezi važi $(\mathcal{M}, \sigma) \models \gamma$. Odatle je $(\mathcal{M}, \sigma) \models \beta U \gamma$.

Neka je $\alpha = A\beta$. Ako je $\mathcal{M}^*, \sigma \not\models A\beta$, postoji put $\pi \in \Sigma_{\sigma_0}$ za koji je $\mathcal{M}^*, \pi \models \neg\beta$. Na osnovu induktivne hipoteze je $\neg\beta \in \pi(0)$, pa $\beta \notin \pi(0)$. Prema aksiomi A7 važi $A\beta \notin \pi(0)$. Iz $\pi(0) \sim \sigma(0)$ i $A\beta \in St$ dobijamo $A\beta \notin \sigma(0)$. Za dokaz suprotnog smera, pretpostavimo da je $\mathcal{M}^*, \sigma \models A\beta$. Tada za sve puteve $\pi \in \Sigma_{\sigma_0}$ važi $\mathcal{M}^*, \sigma \models \beta$. Prema induktivnoj hipotezi, za sve $\pi \in \Sigma_{\sigma_0}$ je $\beta \in \pi(0)$. Ako je $A\beta \notin \sigma(0)$, na osnovu Leme 3.2.3 dobijamo da postoji put $\rho \in \Sigma_{\sigma_0}$ za koji važi $\beta \notin \rho(0)$, suprotno pretpostavci.

Neka je $\alpha = P^s_{\geq r}\beta$ (u slučaju kada je $\alpha = P^p_{\geq r}\beta$ dokaz je sličan). Pretpostavimo da je $\mathcal{M}^*, \sigma \models P^s_{\geq r}\beta$. Ako je $\sup\{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid P^s_{\geq t}\beta \in \sigma(0)\} = r$, onda je $P^s_{\geq r}\beta \in \sigma(0)$, na osnovu maksimalnosti skupa $\sigma(0)$ i pravila izvođenja R3. U slučaju da je $\sup\{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid P^s_{\geq t}\beta \in \sigma(0)\} > r$, postoji $q \in \mathbb{Q} \cap (r, \sup\{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid P^s_{\geq t}\beta \in \sigma(0)\}]$ takvo da je $P^s_{\geq q}\beta \notin \sigma(0)$. Iz deduktivne zatvorenosti skupa $\sigma(0)$ sledi $P^s_{\geq r}\beta \in \sigma(0)$. Sa druge strane, ako je $P^s_{\geq r}\beta \in \sigma(0)$, onda je $\mu_s(\{\pi \mid \pi(0) \sim \sigma(0),\ \pi(0) \vdash \beta\}) = \sup\{t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \mid P^s_{\geq t}\beta \in \sigma(0)\} \geq r$. Prema induktivnoj hipotezi, $\{\pi \mid \pi(0) \sim \sigma(0),\ \pi(0) \vdash \beta\} = \{\pi \mid \pi(0) \sim \sigma(0),\ \mathcal{M}^*, \pi \models \beta\}$, pa važi $\mathcal{M}^*, \sigma \models P^s_{\geq r}\beta$.

Konačno, pretpostavimo da je T^* maksimalno neprotivrečan skup formula za koji je $T \subseteq T^*$. Ako je $\sigma = [T^*], [\{\alpha | \bigcirc \alpha \in T^*\}], [\{\alpha | \bigcirc^2 \alpha \in T^*\}] \ldots,$ onda je $\mathcal{M}^*, \sigma \models T$. □

Primetimo da na osnovu dokaza prethodne teoreme važi $[\alpha]_\sigma = \{\sigma_{\geqslant} i \mid T_i^* \vdash \alpha, i \in \omega\} = \{\pi \in S_\sigma \mid \mathcal{M}^*, \pi \models \alpha\} = [\alpha]^{path}_{\mathcal{M},\sigma}$. Slično, $[\alpha]_s = [\alpha]^{state}_{\mathcal{M}^*,\sigma}$, pa je model $\mathcal{M}^*$ merljiv.

Posledica 3.2.1 *Ako je $T \models \alpha$, onda je $T \vdash \alpha$.*

Dokaz Neka važi $T \models \alpha$. Tada skup $T \cup \{\neg\alpha\}$ nije zadovoljiv. Prema Teoremi 3.2.4 je $T \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot$, pa je prema Teoremi dedukcije , $T \vdash \alpha$. □

3.2.4 Predikatski slučaj

U ovom poglavlju opisaćemo logiku prvog reda pBTL^{fo}, koja na prirodan način proširuje logiku pBTL i skiciramo osnovne ideje, izbegavajući ponavljanje već izloženih tehničkih detalja.

Razmatraćemo jezike koji predstavljaju najviše prebrojiva proširenja klasičnog jezika prvog reda. Svaki jezik sadrži klasične veznike, temporalne operatore i dva tipa verovatnosnih operatora kao i u iskaznom slučaju, kao i kvantifikator $\forall$ i, za svaki prirodan broj $n \geq 0$, n-arne relacijske simbole $P_0^n, P_1^n, \ldots$ i n-arne funkcijske simbole $F_0^n, F_1^n, \ldots$ Funkcijske simbole dužine 0 ćemo zvati simbolima konstanti. Termi, pojam terma slobodnog za promenljivu i formule definišu se na uobičajen način. Rečenice su formule bez slobodnih promenljivih. Odgovarajući modeli su uređene sedmorke oblika

$$\langle S, D, I, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path} \rangle,$$

pri čemu:

- S, R, Σ, $Prob^{state}$ i $Prob^{path}$ se uvode na sličan način kao i u iskaznom slučaju,
- D je neprazan domen

- I pridružuje interpretaciju $I(s)$ svakom stanju $s \in S$, tako da za sve j i k važi:
  - $I(s)(F_j^k)$ je funkcija iz D^k u D,
  - za sve $s, t \in S$ važi $I(s)(F_j^k) = I(t)(F_j^k)$,
  - $I(s)(P_j^n)$ je n-arna relacija na skupu D.

Neka je $\langle S, D, I, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path} \rangle$ model. Valuacija v pridružuje element domena svakom stanju s i svakoj promenljivoj x, odnosno $v(s)(x) \in D$. Ako je $s \in S$, $d \in D$ i ako je v valuacija, onda je $v[d/x]_s$ valuacija koja se razlikuje od v samo po tome što je $v[d/x]_s(s)(x) = d$.

Vrednost terma t u stanju s pri valuaciji v (u oznaci $I(s)(t)_v$) definiše se na sledeći način:

- ako je t promenljiva x, onda je $I(s)(x)_v = v(s)(x)$,
- ako je $t = F_j^k(t_1, \ldots, t_k)$, onda je $I(s)(t)_v = I(s)(F_j^k)(I(s)(t_1)_v, \ldots, I(s)(t_k)_v)$.

Primetimo da koristimo domene sa fiksiranim modelom, što je slično objektualnoj interpretaciji za modalne logike prvog reda. U slučaju odbacivanja tih pretpostavki, mogućje su neočekivane posledice, poput neváženja neki standardnih aksioma logike prvog reda. Sada definišemo šta znači da je formula α zadovoljena na putu σ u modelu $\mathcal{M}$ pri valuaciji v, u oznaci $\mathcal{M}, \sigma, v \models \alpha$:

- $\mathcal{M}, \sigma, v \models P_j^k(t_1, \ldots, t_k)$ akko $\langle I(\sigma_0)(t_1)_v, \ldots, I(\sigma_0)(t_k)_v \rangle \in I(\sigma_0)(P_j^k)$,
- $\mathcal{M}, \sigma, v \models (\forall x)\alpha$ akko za svako $d \in D$ važi $(\mathcal{M}, \sigma, v[d/x]_{\sigma_0}) \models \alpha$,
- slučajevi kada je formula konjunkcija, negacija, kao i kada je dobijena primenom temporalnih ili verovatnosnih operatora, isti su kao u iskaznom slučaju.

Zapis $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$ znači da je $\mathcal{M}, \sigma, v \models \alpha$ za svako v. Rečenica α je zadovoljiva ako postoji put σ u modelu $\mathcal{M}$ takav da je $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$. Skup T rečenica je zadovoljiv ako postoji put σ nekog modela $\mathcal{M}$ takav da za svaku formulu $\alpha \in T$ važi $\mathcal{M}, \sigma \models \alpha$. Model je merljiv, ako su merljivi svi skupovi vremenskih trenutaka određeni rečenicama. Kao i u iskaznom slučaju, razmatraćemo podklasu merljivih modela. Infinitarni aksiomatski sistem sadrži sve sheme aksioma i sva pravila izvođenja logike pBTL (pri čemu se kod aksiome A5 i A6 iskazna slova zamenjuju atomičnim formulama), kao i sledeće sheme aksioma:

A20. $(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$, ako promenljiva x nije slobodna u α

A21. $(\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(t/x)$, gde je $\alpha(t/x)$ dobijena zamenom svih slobodnih pojavljivanja promenljive x u $\alpha(x)$ termom t, koji je slobodan za x u $\alpha(x)$

A22. $(\forall x) \bigcirc \alpha(x) \rightarrow \bigcirc(\forall x)\alpha(x)$

A23. $(\forall x)A\alpha(x) \rightarrow A(\forall x)\alpha(x)$

i pravilo izvođenja

R6. iz α izvesti $(\forall x)\alpha$.

Aksiome A22 i A23 su varijante Barkanove formule, dok je pravilo R6 Gedelova Generalizacija. Saglasnost ovog aksiomatskog sistema se lako proverava, pravolinijskom indukcijom po dužini izvođenja. Ilustrujmo to na primeru aksiome A23. Neka je σ put modela $\mathcal{M}$ i neka je $\mathcal{M}, \sigma \models (\forall x)A\alpha(x)$, odnosno ta svaku valuaciju v važi $\mathcal{M}, \sigma, v \models (\forall x)A\alpha(x)$. Sledi da za svaku valuaciju v i svako $d \in D$ važi $\mathcal{M}, \sigma, v[d/x]_{\sigma_0} \models A\alpha(x)$. Dakle, za svako v i d i za svaki put π iz $\mathcal{M}$, ako $\sigma_0 = \pi_0$ onda $\mathcal{M}, \pi, v[d/x]_{\pi_0} \models \alpha(x)$. Tada za svako v i π važi da $\sigma_0 = \pi_0$ povlači $\mathcal{M}, \pi, v \models (\forall x)\alpha(x)$. Odatle, za svaku valuaciju v važi $\mathcal{M}, \sigma, v \models A(\forall x)\alpha(x)$, odakle je $\mathcal{M}, \sigma \models A(\forall x)\alpha(x)$.

Potpunost dokazujemo slično kao i u iskaznom slučaju. Teorema dedukcije i Lema 3.2.1 se dokazuju lakim modifikacijama. Na primer, dokažimo dodatni slučaj Leme 3.2.1(10), kada se formula $(\forall x)\alpha$ dobija pomoću pravila izvođenja R6. Tada je: $T \vdash \alpha$; $AT \vdash A\alpha$ (prema induktivnoj hipotezi); $AT \vdash (\forall x)A\alpha$ (po pravilu izvođenja R6); $AT \vdash A(\forall x)\alpha$ (prema aksiomi A23).

Maksimalno neprotivrečne skupove koji zadovoljavaju uslov:

> ako $\neg(\forall x)\alpha(x)$ pripada skupu, tada za neki term t i $\neg\alpha(t)$ pripada tom skupu.

zovemo zasićenim skupovima.

Sledeća teorema odgovara Teoremi 3.2.2.

Teorema 3.2.5 *Neka je T neprotivrečan skup rečenica jezika L i neka je C prebrojivo beskonačan skup simbola konstanti van jezika L ($C \cap L = \emptyset$). Tada se T može proširiti do zasićenog skupa T^* u jeziku $L \cup C$.*

Dokaz Dokaz je zapravo dopuna dokaza Teoreme 3.2.2. U kompletiranju teorije pojavljuje se novi slučaj:

> Ako je $\alpha_i = \neg(\forall x)\beta(x)$, onda je $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\beta(c)\}$ za konstantu $c \in C$ takvu da je teorija T_{i+1} neprotivrečna.

Dokaz postojanja takve konstante je standardan, kao i slučaj zatvorenosti teorije za pravilo izvođenja R6. □

Kanonički model $\mathcal{M} = \langle S, D, I, R, \Sigma, Prob^{state}, Prob^{path}\rangle$ definišemo na sledeći način:

- definicija S, R, Σ, $Prob^{state}$ i $Prob^{path}$ je slična definiciji u pravljenju kanonskog modela u iskaznom slučaju,
- D je skup svih terma bez promenljivih jezika L,
- za $s \in S$, $I(s)$ je interpretacija takva da:
  - za svaki funkcijski simbol F_j^k, $I(w)(F_j^k)$ je funkcija iz D^m u D takva da za sve terme bez promenljivih $t_1, \ldots, t_k$ jezika L važi $I(w)(F_j^k) : \langle t_1, \ldots, t_k\rangle \rightarrow F_j^k(t_1, \ldots, t_k)$,
  - za svaki relacijski simbol P_j^k, $I(w_i)(P_j^k) = \{\langle t_1, \ldots, t_k\rangle$ za sve terme bez promenljivih $t_1, \ldots, t_k$ jezika L: $P_j^k(t_1, \ldots, t_k) \in w_i\}$.

Teorema 3.2.6 *$\mathcal{M}^*$ je $pBTL^{fo}$-model.*

Dokaz Dopunićemo dokaz Teoreme 3.2.3 pokazivanjem da je skup $T^*_{\bigcirc}$ zasićen, ako je zasićen skup T^*. Pretpostavimo da postoji $\neg(\forall x)\alpha(x) \in T^*_{\bigcirc}$ takva da za svaki term bez promenljivih t jezika L važi $\neg\alpha(t) \notin T^*_{\bigcirc}$. Tada je $\bigcirc\neg(\forall x)\alpha(x) \in T^*$ i za svaki t je $\bigcirc\neg\alpha(t) \notin T^*$. Koristeći aksiome A3 i A23, dobijamo $\neg(\forall x) \bigcirc \alpha(x) \in T^*$ i za svaki term t je $\neg \bigcirc \alpha(t) \notin T^*$, što protivreči zasićenosti skupa T^*. □

Teorema 3.2.7 (Jaka teorema potpunosti) *Svaki neprotivrečan skup rečenica je zadovoljiv.*

Dokaz Jedini novi slučajevi u odnosu na iskazni slučaj odnose se na atomične rečenice i rečenice oblika $(\forall x)\beta$. Ako je α atomična, po definiciji I važi $\mathcal{M}^*, \sigma \models \alpha$ akko $\alpha \in \sigma(0)$. Neka je $\alpha = (\forall x)\beta$. Ako je $\alpha \in \sigma(0)$, prema aksiomi A21 je $\beta(t) \in \sigma(0)$ za svaki $t \in D$. Prema induktivnoj hipotezi je $\mathcal{M}^*, \sigma \models \beta(t)$ za svaki $t \in D$, pa $\mathcal{M}^*, \sigma \models (\forall x)\beta$. Ako $\alpha \notin \sigma(0)$, tada postoji $t \in D$ takav da $\mathcal{M}^*, \sigma \models \neg\beta(t)$, pošto je skup $\sigma(0)$ zasićen. Odatle je $\mathcal{M}^*, \sigma \not\models (\forall x)\beta$. □

3.2.5 Srodni radovi

Razgranata vremenska logika PCTL koja kombinuje temporalno i verovatnosno rezonovanje uvedena je u [42]. Temporalni deo logike je takozvana CTL logika [26]. Formule su interpretirane na Markovljevim lancima sa diskretnim vremenom i opisan je algoritam za proveru zadovoljivosti formula na datom Markovljevom lancu. Ne postoji aksiomatizacija. Logika prati podelu iz CTL na formule stanja i formule puta. Izvršeno je sledeće proširenje klasičnog iskaznog jezika:

- $\alpha U^{\leq t}\beta$ i $\alpha \mathcal{U}^{\leq t}\beta$ su formule puta, ako su α i β formule stanja i $t \in \omega \cup \{\infty\}$. Intuitivno značenje formule $\alpha U^{\leq t}\beta$ je slično kao i formule $\alpha U \beta$, sa razlikom da β mora da postane tačno za najviše t vremenskih trenutaka (ako je $t = \infty$, onda se $U^{\leq t}$ i U poklapaju). Veza $\alpha \mathcal{U}^{\leq t}\beta$ i $\alpha \mathcal{U}\beta \equiv \alpha U \beta \vee G\alpha$ je analogna prethodnoj.

- $\alpha U^{\leq t}_{>r}\beta$ i $\alpha \mathcal{U}^{\leq t}_{>r}\beta$ su formule stanja, ako su α i β formule puta i $t \in \omega \cup \{\infty\}$. Zadovoljenje je, prevedeno na našu terminologiju, definisano sa:

$$\mathcal{M}, \sigma \models \alpha U^{\leq t}_{>r} \beta \text{ akko } \mu_{\sigma_0}(\{\pi \mid \sigma_0 = \pi_0,\ \mathcal{M}, \pi \models \alpha U^{\leq t} \beta\}) > r,$$

PCTL formule su izrazive u našem jeziku. Na primer:

- $\alpha U^{\leq n} \beta$ je izrazivo formulom $\beta \vee \bigvee_{i=1}^{n}((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^i \beta)$,
- $\alpha U^{\leq n}_{>r} \beta$ se može zapisati kao $P^s_{>r}(\beta \vee \bigvee_{i=1}^{n}((\wedge_{k=0}^{i-1} \bigcirc^k \alpha) \wedge \bigcirc^i \beta))$.

Sa druge strane, operator $P^p_{\geqslant r}$ nije izraziv u PCTL. Takođe, bulovske kombinacije formula stanja i puta ("mešane") nisu PCTL-formule.

Izražajnija verovatnosna logika sa razgranatim vremenom, PCTL* opisana je u [3]. Ona koristi jezik CTL* sa kvantifikatorima stanja zamenjenim verovatnoćama ($P_{=1}$, $P_{>0}$). Dakle, iskazni jezik je proširen sa:

- formulama stanja: $P_{\geq r} \alpha$ (α je formula puta),
- formulama puta: $\bigcirc \alpha$, $\alpha U \beta$ (α i β su formule stanja).

Ako posmatramo zadovoljivost, njihov operator $P_{\geqslant r}$ odgovara našem $P^s_{\geqslant r}$, dok naš operator $P^p_{\geqslant r}$ nije izraziv u PCTL*. Kao i u slučaju PCTL, konjunkcija formule stanja i formule puta nije formula. Ni u ovom radu nema aksiomatizacije.

Verovatnosna modalna logika PPL uvedena je u radu [100]. U njoj je dozvoljena primena verovatnoća na konačne nizove formula. Predstavljen je potpun aksiomatski sistem Gencenovog tipa. Verovatnoće se izražavaju pomoću terma, slično kao i u [30]. Jezik dopusta linearne kombinacije terma oblika $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, a dozvoljena je i iteracija verovatnoća u termu. Sa semantičkog stanovišta, formulu $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq r$ možemo izraziti u našoj logici kao $P^s_{\geqslant r}(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigcirc^i \alpha_i)$. Sa druge strane, PPL-formule ne mogu da govore o verovatnoći formule na putu (za razliku od našeg operatora $P^p_{\geqslant r}$). Klasični temporalni operatori nisu definabilni u PPL. Iako naš jezik ne dozvoljava linearne kombinacije verovatnoća, kombinovanje tehnika iz [19, 20, 86] i ideja iz ove glave bi rezultovale logikom u kojoj su PPL-formule izrazive.

Napomenimo da su u nekim radovima razmatrana verovatnosna proširenja intervalnih vremenskih logika [41, 47, 66].

3.3 Dinamička verovatnosna logika

3.3.1 Svedočenje (Evidence)

Halpern i Fagin [44] su predložili da se evidence posmatra kao funkcija koja slika verovatnoće pre opservacije u verovatnoće posle opservacije (iako za englesku reč evidence postoji više prevoda, nijedan od njih ne poklapa se u potpunosti sa značenjem koje ćemo razmatrati u ovom poglavlju). Navodimo uvodni primer iz [45].

Pretpostavimo da imamo kutiju sa novčićima, od kojih su neki standardni, dok su neki sa dve glave. Neka je jedan od novčića slučajno izvučen, bez gledanja. Posle konačno mnogo (recimo 10) bacanja tog novčića, sta možemo da kažemo o hipotezi da je on nestandardan, ako ne znamo broj stadardnih i nestandardnih novčića u kutiji?

Ako je bar jednom "palo pismo", hipoteza je očigledno pogrešna. Sa druge strane, ako je u svim bacanjima "pala glava", svakako da eksperiment ide u prilog hipotezi.

Naravno, proporcija novčića u kutiji je dovoljna za računanje verovatnoće posle eksperimenta. Kako su u praksi su prethodne verovatnoće često nepoznate, izračunavanje nije moguće. Ipak, eksperiment bi trebao da govori u prilog jednoj ili više hipoteza.

Intuitivno, verovatnoća hipoteze zavisi od:

- prethodne verovatnoće (odnosa standardnih i nestandardnih novčića u kutiji);
- toga u kojoj meri eksperiment podržava hipotezu.

Druga stavka je formalizovana težinom evidence-a. To je funkcija koja pridružuje broj iz intervala $[0, 1]$ svakoj opservaciji i hipotezi. Prelazimo na opis modeliranja evidence-a.

Neka je $\mathcal{P}$ skup iskaznih slova, a $For_{\mathcal{P}}$ odgovarajući skup formula. Funkciju $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava uslove:

1. $\mu(\phi) = 1$, ako je ϕ tautologija;

2. $\mu(\phi) = 0$, ako je ϕ kontradikcija;

3. $\mu(\phi \vee \psi) = \mu(\phi) + \mu(\psi) - \mu(\phi \wedge \psi)$

zovemo konačno aditivnom verovatnosnom merom.

Neka je $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ skup međusobno isključivih hipoteza, koji je potpun, a $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ skup mogućih opservacija.

Za hipoteze h_i, neka je μ_i funkcija koja zadovoljava

- $\mu_i : O \longrightarrow [0, 1]$;

- $\mu_i(o_1) + \ldots + \mu_i(o_n) = 1$.

Pretpostavljamo da za svako $o \in O$ postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ takvo da je $\mu_i(o) > 0$. Evidence prostor je $\mathtt{E} = \langle H, O, \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$. Za dato $\mathtt{E}$, definiše se težinska funkcija $w_{\mathtt{E}}$ sledećim uslovima:

- $w_{\mathtt{E}} : O \times H \longrightarrow [0, 1]$;

- $w_{\mathtt{E}}(o_i, h_j) = \frac{\mu_j(o_i)}{\mu_1(o_i)+\ldots+\mu_m(o_i)}$.

Sledeća teorema [45] obezbeđuje karakterizaciju težinskih funkcija.

Teorema 3.3.1 *Neka je $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$, $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ i neka je $f : O \times H \longrightarrow [0, 1]$. Tada postoji evidence prostor*

$$\mathtt{E} = \langle H, O, \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$$

takav da je $f = w_{\mathtt{E}}$ akko f zadovoljava:

1. $f(o_i, h_1) + \ldots + f(o_i, h_m) = 1$, *za svako* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. *Postoje* $x_1, \ldots, x_n > 0$ *takvi da za svako* $j \in \{1, \ldots, m\}$,

   $x_1 f(o_1, h_j) + \ldots + x_n f(o_n, h_j) = 1$.

Takođe, ako su zadovoljeni uslovi 1. i 2., onda se μ_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ može definisati sa

$$\mu_j(o_i) = \frac{f(o_i, h_j)}{x_j}.$$

Ako znamo i verovatnoće pre opservacije, možemo koristiti Dempsterovo pravilo za računanje posteriornih verovatnoća.

Ono kombinuje verovatnosne distribucije ν_1 i ν_2 na $\mathcal{H}$ na sledeći način: za svaki merljivi skup $H \subseteq \mathcal{H}$

$$(\nu_1 \oplus \nu_2)(H) = \frac{\sum_{h \in H} \nu_1(h)\nu_2(h)}{\sum_{h \in \mathcal{H}} \nu_1(h)\nu_2(h)}.$$

Neka je μ verovatnosna mera na $For(H)$, skupu iskaznih formula nad H, koja zadovoljava

$$\mu(h_1) + \ldots + \mu(h_m) = 1.$$

Kako hipoteze isključuju jedna drugu, μ bi trebala da zadovolji $\mu(h_i \wedge h_j) = 0$, za $i \neq j$. Tada je $\mu(h_1 \vee \ldots \vee h_m) = \mu(h_1) + \ldots + \mu(h_m)$, pa se potpunost skupa hipoteza može izraziti sa $\mu(h_1) + \ldots + \mu(h_m) = 1$.

Primetimo da za svako $\phi \in For(H)$ postoji $\phi' \in For(H)$ oblika $\bigvee_{i \in I} h_i$, za neko $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, za koje važi $\mu(\phi) = \mu(\phi')$.

Zaista, očigledno važi $\phi \in H$; pretpostavimo da je $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_1')$ i $\mu(\phi_2) = \mu(\phi_2')$, gde je ϕ_1' oblika $\bigvee_{i \in I_1} h_i$, a ϕ_2' oblika $\bigvee_{i \in I_2} h_i$.

Tada je $\mu(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mu((\phi_1 \wedge \phi_2)')$ i $\mu(\neg\phi_1) = \mu((\neg\phi_1)')$ za $(\phi_1 \wedge \phi_2)' = \bigvee_{i \in I_1 \cap I_2} h_i$ i $(\neg\phi_1)' = \bigvee_{i \in \{1,\ldots,m\} \setminus I_1} h_i$.

U [45] je primećeno da za svaku opservaciju o za koju je $\mu_1(o) + \ldots + \mu_m(o) > 0$, važi $w_{\mathrm{E}}(o, h_1) + \ldots + w_{\mathrm{E}}(o, h_m) = 1$, pa postoji jedinstvena verovatnosna mera na $For(H)$ koja proširuje $w_{\mathrm{E}}(o, \cdot)$, takva da su hipoteze isključive. Tu meru ćemo takođe označavati sa $w_{\mathrm{E}}(o, \cdot)$. Neformalno, možemo shvatiti elemente od $For(H)$ podskupovima od H.

Ako je μ početna verovatnoća hipoteza, možemo računati verovatnoće posle opservacije o na sledeći način:

$$\mu_o = \mu \oplus w_{\mathrm{E}}(o, \cdot).$$

Ako je $\mathtt{E} = \langle H, O, \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$ evidence prostor, definišemo

$$\mathtt{E}^* = \langle H, O^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_m^* \rangle :$$

- $O^* = \{\langle o^1 \ldots, o^k \rangle | k \in \omega, o^i \in O\}$.
- $\mu_i^* : O \longrightarrow [0,1]$ se definišu kao

$$\mu_i^*(\langle o^1 \ldots, o^k \rangle) = \mu_i(o^1) \cdots \mu_i(o^k).$$

U [45] je pokazano da je $w_{\mathtt{E}^*}(\langle o^1 \ldots, o^k \rangle, \cdot) = w_{\mathtt{E}}(o^1, \cdot) \oplus \cdots \oplus w_{\mathtt{E}}(o^k, \cdot)$.

Neformalno, $w_{\mathtt{E}^*}(\langle o^1 \ldots, o^k \rangle, h)$ je težina da je h tačno, posle opservacije $o^1 \ldots, o^k$. Takođe, u aksiomatizaciji dinamičke logike koristićemo i činjenicu da je $w_{\mathtt{E}^*}(\langle o^1 \ldots, o^k \rangle, h_i)$ jednako:

$$\frac{w_{\mathtt{E}^*}(o^1, h_i) \cdots w_{\mathtt{E}^*}(o^k, h_i)}{w_{\mathtt{E}^*}(o^1, h_1) \cdots w_{\mathtt{E}^*}(o^k, h_1) + \cdots + w_{\mathtt{E}^*}(o^1, h_m) \cdots w_{\mathtt{E}^*}(o^k, h_m)}.$$

Ako je poznata početna verovatnoća μ na H, verovatnoću posle niza opservacija $\langle o^1 \ldots, o^k \rangle$ računamo na sledeći način:

$$\mu_{\langle o^1 \ldots, o^k \rangle} = \mu \oplus w_{\mathtt{E}}(o, \cdot).$$

3.3.2 Statička logika

Neka je $For(V)$ skup formula nad skupom iskaznih slova V.

Neka je $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$, $O = \{o_1, \ldots, o_n\}$ i $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$.

Definicija 3.3.1 *Skup $Term$ svih verovatnosnih terma je:*

- $Term(0) = \{P_0(\alpha), P_1(\alpha) | \alpha \in For(H)\} \cup \{w(o,h) | o \in O, h \in H\} \cup C \cup \{0,1\}$.
- $Term(n+1) = Term(n) \cup \{(\mathtt{f}+\mathtt{g}), (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}), (-\mathtt{f}) | \mathtt{f}, \mathtt{g} \in Term(n)\}$.
- $Term = \bigcup_{n=0}^{\infty} Term(n)$. □

Verovatnosne terme označavamo sa $\mathtt{f}, \mathtt{g}$ i $\mathtt{h}$. Uvodimo i uobičajene skraćenice: $\mathtt{f}+\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}+\mathtt{g})$, $\mathtt{f}+\mathtt{g}+\mathtt{h}$ je $((\mathtt{f}+\mathtt{g})+\mathtt{h})$, $\mathtt{f}\cdot\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}\cdot\mathtt{g})$ i $(\mathtt{f}\cdot\mathtt{g})\cdot\mathtt{h} = \mathtt{f}\cdot(\mathtt{g}\cdot\mathtt{h})$. Slično, $-\mathtt{f}$ je $(-\mathtt{f})$, $\mathtt{f}-\mathtt{g}$ je $(\mathtt{f}+(-\mathtt{g}))$, $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $2\mathtt{f} = \mathtt{f}+\mathtt{f}$...

Definicija 3.3.2 *Osnovna verovatnosna formula je svaka formula oblika*

$$\mathtt{f} \geqslant 0.$$

Skup For formula je najmanji skup koji sadrži osnovne verovatnosne formule, opservacije i hipoteze koji je zatvoren za bulovske veznike. □

Formule označavamo sa ϕ, ψ i θ. Radi jednostavnijeg zapisa, uvodimo sledeće skraćenice:

- $\mathtt{f} \leqslant 0$ je $-\mathtt{f} \geqslant 0$.
- $\mathtt{f} > 0$ je $\neg(\mathtt{f} \leqslant 0)$.
- $\mathtt{f} < 0$ je $\neg(\mathtt{f} \geqslant 0)$.
- $\mathtt{f} = 0$ je $\mathtt{f} \leqslant 0 \ \wedge \ \mathtt{f} \geqslant 0$.
- $\mathtt{f} \neq 0$ je $\neg(\mathtt{f} = 0)$.
- $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g}$ je $\mathtt{f} - \mathtt{g} \geqslant 0$. Slično se definišu $\mathtt{f} \leqslant \mathtt{g}$, $\mathtt{f} > \mathtt{g}$, $\mathtt{f} < \mathtt{g}$, $\mathtt{f} = \mathtt{g}$ i $\mathtt{f} \neq \mathtt{g}$.

Možemo pretpostaviti da su i racionalni brojevi takođe termi. Na primer, formula $\frac{1}{3}\mathtt{f} \geqslant \frac{1}{2}\mathtt{g}$ je zamena za $2\mathtt{f} - 3\mathtt{g} \geqslant 0$.

Model $\mathcal{M}$ je bilo koja uređena $(n+4)$-ka $\langle \mathtt{E}, \mu, o, h, d_1, \ldots, d_n \rangle$ za koju važi:

- $\mathtt{E} = \langle H, O, \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$ je evidence prostor.
- μ je konačno aditivna verovatnosna mera na $For(H)$, takva da je

$$\mu(h_1) + \ldots + \mu(h_m) = 1.$$

- $o \in O$ je opservacija.
- $h \in H$ je hipoteza.
- $d_1, \ldots, d_n$ su pozitivni realni brojevi za koje važi

$$d_1 w_{\mathtt{E}}(o_1, \mathtt{h}_j) + \ldots + d_n w_{\mathtt{E}}(o_n, h_j) = 1$$

(njihovo postojanje obezbeđuje Teorema 3.3.1).

Već smo napomenuli da se elementi od $For(H)$ mogu smatrati podskupovima od H. To nam omogućava primenu Dempsterovog pravila u sledećoj definiciji.

Definicija 3.3.3 *Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathtt{E}, \mu, o, h, d_1, \ldots, d_n \rangle$ proizvoljan model. Relaciju zadovoljivosti $\models$ definišemo rekurzivno:*

- *Ako je $h' \in H$, onda je $\mathcal{M} \models h'$ ako $h' = h$.*
- *Ako je $o' \in O$, onda je $\mathcal{M} \models o'$ ako $o' = o$.*
- *$\mathcal{M} \models \mathtt{f} \geqslant 0$ ako $\mathtt{f}^{\mathcal{M}} \geqslant 0$, gde je $\mathtt{f}^{\mathcal{M}}$ rekurzivno definisano:*
  - $0^{\mathcal{M}} = 0$, $1^{\mathcal{M}} = 1$.
  - $c_i^{\mathcal{M}} = d_i$.
  - $P_0(\phi)^{\mathcal{M}} = \mu(\phi)$, $\phi \in For(H)$.
  - $w(o,h)^{\mathcal{M}} = w_{\mathtt{E}}(o,h)$.
  - $P_1(\phi)^{\mathcal{M}} = (\mu \oplus w_{\mathtt{E}}(o,\cdot))(\phi)$, $\phi \in For(H)$.
  - $(\mathtt{f} + \mathtt{g})^{\mathcal{M}} = \mathtt{f}^{\mathcal{M}} + \mathtt{g}^{\mathcal{M}}$.
  - $(\mathtt{f} \cdot \mathtt{g})^{\mathcal{M}} = \mathtt{f}^{\mathcal{M}} \cdot \mathtt{g}^{\mathcal{M}}$.
  - $(-\mathtt{f})^{\mathcal{M}} = -(\mathtt{f}^{\mathcal{M}})$.
- *$\mathcal{M} \models \neg\phi$ ako $\mathcal{M} \not\models \phi$.*
- *$\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi$ ako $\mathcal{M} \models \phi$ i $\mathcal{M} \models \psi$.* $\square$

Formula ϕ je *zadovoljiva* ako postoji model $\mathcal{M}$ za koji je $\mathcal{M} \models \phi$. Formula ϕ je *valjana* ako je zadovoljena u svakom modelu. Skup formula T je zadovoljiv, ako postoji $\mathcal{M}$ takav da $\mathcal{M} \models \phi$ za sve $\phi \in T$.

Aksiomatizacija

Iskazne aksiome

A1. $\tau(\phi_1, \dots, \phi_n)$, pri čemu je $\tau(p_1, \dots, p_n) \in For_C$ iskazna tautologija.

A2. $\mathtt{f} = \mathtt{g} \to (\phi(\dots, \mathtt{f}, \dots) \to \phi(\dots, \mathtt{g}, \dots))$

Verovatnosne aksiome ($i \in \{0, 1\}$)

A3. $P_i(\alpha) \geqslant 0$.

A4. $P_i(\top) = 1$.

A5. $P_i(\alpha) = P_i(\beta)$, kad god je $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautologija.

A6. $P_i(\alpha \vee \beta) = P_i(\alpha) + P_i(\beta) - P_i(\alpha \wedge \beta)$.

Aksiome o hipotezama

A7. $h_1 \vee \dots \vee h_m$.

A8. $h_i \to \neg h_j$, za sve $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$.

Aksiome o opservacijama

A7. $o_1 \vee \dots \vee o_n$.

A8. $o_i \to \neg o_j$, za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Aksiome komutativnog uređenog prstena

A10. $0 < 1$.

A11. $\mathtt{f} + \mathtt{g} = \mathtt{g} + \mathtt{f}$.

A12. $(\mathtt{f} + \mathtt{g}) + \mathtt{h} = \mathtt{f} + (\mathtt{g} + \mathtt{h})$.

A13. $\mathtt{f} + 0 = \mathtt{f}$.

A14. $\mathtt{f} - \mathtt{f} = 0$.

A15. $\mathtt{f} \cdot \mathtt{g} = \mathtt{g} \cdot \mathtt{f}$.

A16. $\mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} \cdot \mathtt{h}) = (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) \cdot \mathtt{h}$.

A17. $\mathtt{f} \cdot 1 = \mathtt{f}$.

A18. $\mathtt{f} \cdot (\mathtt{g} + \mathtt{h}) = (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}) + (\mathtt{f} \cdot \mathtt{h})$.

A19. $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{f}$.

A20. $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \vee \ \mathtt{g} \geqslant \mathtt{f}$.

A21. $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \wedge \ \mathtt{g} \geqslant \mathtt{h}) \rightarrow \mathtt{f} \geqslant \mathtt{h}$.

A22. $\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \rightarrow \ \mathtt{f} + \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} + \mathtt{h}$.

A23. $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \wedge \ \mathtt{h} > 0) \ \rightarrow \mathtt{f} \cdot \mathtt{h} \geqslant \mathtt{g} \cdot \mathtt{h}$.

A24. $(\mathtt{f} \geqslant \mathtt{g} \ \wedge \ \mathtt{h} < 0) \ \rightarrow \mathtt{f} \cdot \mathtt{h} \leqslant \mathtt{g} \cdot \mathtt{h}$.

Aksiome za evidence

A26. $w(o, h) \geqslant 0$, $o \in O$, $h \in H$.

A27. $w(o, h_1) + \ldots + w(o, h_m) = 1$, $o \in O$.

A28. $o \rightarrow P_0(h) w(o, h) = P_1(h)(P_0(h_1) w(o, h_1) + \ldots + P_0(h_m) w(o, h_m))$, $o \in O$, $h \in H$.

A29. $c_1 > 0 \wedge \ldots \wedge c_n > 0 \wedge c_1 w(o_1, h_1) + \ldots + c_n w(o_n, h_1) = 1 \wedge \ldots \wedge c_1 w(o_1, h_m) + \ldots + c_n w(o_n, h_m) = 1$.

Aksiome A27 i A29 odgovaraju stavkama 1 i 2 Teoreme 3.3.1, redom. Specijalno, aksioma A29 eliminiše kvantore iz aksiome E4 u radu [45], što je važno za dobijanje slabo potpune aksiomatizacije u tom radu.

Pravila izvođenja

R1. (*Modus ponens*) Iz ϕ i $\phi \to \psi$ izvedi ψ.

R2. (*Arhimedovo pravilo*) Iz skupa premisa

$$\{\phi \ \to \ \mathtt{f} \geqslant -n^{-1} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

izvedi $\phi \to \mathtt{f} \geqslant 0$.

Da bismo uvideli neophodnost pravila R2, posmatrajmo formalni sistem bez njega. Tada je skup formula

$$T = \{P_0(h) > 0\} \cup \{P_0(h) < 10^{-n} \mid n \in \omega\}.$$

konačno zadovoljiv, pa i neprotivrečan u redukovanom sistemu (bez R2). Kako T nije zadovoljiv, redukovani sistem nije potpun.

Ključ za nepotpunost redukovanog sistema leži u činjenci da uređena grupa realnih brojeva nije ω_1-zasićena. Pošto teorijama možemo formalno izraziti stavove poput “verovatnoća hipoteze h je beskonačno bliska racionalnom broju s, ali i različita od njega”, možemo formalno reprezentovati i tipove oblika

$$\{x \neq s\} \cup \{s - 10^{-n} < x < s + 10^{-n} \mid n \in \omega\}$$

koji su svi ispušteni u $(\mathbb{R}, \leqslant, s)_{s \in (0,1) \cap \mathbb{Q}}$. Arhimedovim pravilom sve te teorije pravimo protivrečnim. Konačno, izraz “Arhimedovo” naglašava da su samo standardne verovatnoće dozvoljene, pa kodomen verovatnoće ili težinske funkcije ne može da bude nearhimedovsko polje.

Pojmovi izvođenja, teoreme, protivrečosti, deduktivne zatvorenosti i maksimalno neprotivrečnog skupa definišu se na uobičajen način. Naravno, dužina izvođenja može da bude bilo koji ordinal naslednik manji od ω_1.

Teorema 3.3.2 *Svaki neprotivrečan skup formula T može se proširiti do maksimalno protivrečnog skupa T^*, odnosno do skupa koji zadovoljava uslov:*

$$\text{za svako } \phi \in For, \text{ ili je } \phi \in T^*, \text{ ili je } \neg\phi \in T^*.$$

Dokaz Dokaz je veoma sličan dokazu teoreme 3.3.5, pa ćemo ga preskočiti.
□

Za kompletiranje T^*, definišemo *kanonski model*
$\mathcal{M}^* = \langle \mathtt{E}, \mu, o, h, d_1, \ldots, d_n \rangle$:

- $d_i = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash c_i \geqslant r\}$.

- Evidence prostor $\mathtt{E} = \langle H, O, \mu_1, \ldots, \mu_m \rangle$ je definisan skupovima H i O i funkcijama $\mu_j : O \longrightarrow [0,1]$;

$$\mu_j(o_i) = \frac{w_{\mathtt{E}}(o_i, h_j)}{d_j},$$

  gde je $w_{\mathtt{E}}(o_i, h_j) = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash w(o_i, h_j) \geqslant r\}$.

- $\mu(\phi) = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P_0(\phi) \geqslant r\}$.

- h je jedinstvena hipoteza za koju je $T^* \vdash h$.

- o je jedinstvena opservacije za koju je $T^* \vdash o$.

Lema 3.3.1 *$\mathcal{M}^*$ je model.*

Dokaz Potrebno je da dokažemo da je μ verovatnosna mera, odnosno:

1. $\mu(\top) = 1$.
2. $\mu(\phi) = \mu(\psi)$, kad god je $\phi \leftrightarrow \psi$ tautologija.
3. $\mu(\phi \vee \psi) = \mu(\phi) + \mu(\psi) - \mu(\phi \wedge \psi)$.

Pošto su prve dve stavke trivijalne, dokažimo 3. Koristeći činjenicu da je skup $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, možemo izabrati rastući niz $\underline{a}_0 < \underline{a}_1 < \underline{a}_2 < \cdots$ i opadajući niz $\overline{a}_0 < \overline{a}_1 < \overline{a}_2 < \cdots$ u $\mathbb{Q}$ tako da je $\lim \underline{a}_n = \lim \overline{a}_n = \mu(\phi)$. Na osnovu definicije mere μ i maksimalne neprotivrečnosti skupa T^*, dobijamo

$$T^* \vdash P_0(\phi) \geqslant \underline{a}_n \wedge P_0(\phi) < \overline{a}_n$$

za sve n. Slično, biramo i rastuće nizove $(\underline{b}_n)_{n\in\omega}$ i $(\underline{c}_n)_{n\in\omega}$, kao i opadajuće nizove $(\overline{b}_n)_{n\in\omega}$ i $(\overline{c}_n)_{n\in\omega}$ u $\mathbb{Q}$, za koje je $\lim \underline{b}_n = \lim \overline{b}_n = \mu(\psi)$ i $\lim \underline{c}_n = \lim \overline{c}_n = \mu(\phi \wedge \psi)$.

Pomoću aksioma komutativnog uređenog prstena dobijamo

$$T^* \vdash \underline{a}_n + \underline{b}_n - \overline{c}_n \leqslant P_0(\phi) + P_0(\psi) - P_0(\phi \wedge \psi) < \overline{a}_n + \overline{b}_n - \underline{c}_n$$

za sve n. Pošto je $\vdash P_0(\phi \vee \psi) = P_0(\phi) + P_0(\psi) - P_0(\phi \wedge \psi)$, imamo

$$T^* \vdash \underline{a}_n + \underline{b}_n - \overline{c}_n \leqslant P_0(\phi \vee \psi) < \overline{a}_n + \overline{b}_n - \underline{c}_n$$

za sve n. konačno, iz

$$\mu(\phi \vee \psi) = \sup\{r \mid T^* \vdash P_0(\phi \vee \psi) \geqslant r\}$$

i

$$\lim \underline{a}_n + \underline{b}_n - \overline{c}_n = \lim \overline{a}_n + \overline{b}_n - \underline{c}_n = \mu(\phi) + \mu(\psi) - \mu(\phi \wedge \psi),$$

dobijamo $\mu(\phi \vee \psi) = \mu(\phi) + \mu(\psi) - \mu(\phi \wedge \psi)$.

Sada ćemo dokazati jednakost $d_1 w_{\mathrm{E}}(o_1, h_1) + \ldots + d_n w_{\mathrm{E}}(o_n, h_1) = 1$. Kao i gore, biramo rastuće nizove racionalnih brojeva $(\underline{a}^i_k)_{k\in\omega}$ i $(\underline{b}^i_k)_{k\in\omega}$, kao i opadajuće nizove racionalnih brojeva $(\overline{a}^i_k)_{k\in\omega}$ i $(\overline{b}^i_k)_{k\in\omega}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, takve da važi $\lim \underline{a}^i_k = \lim \overline{a}^i_k = d_i$ i $\lim \underline{b}^i_k = \lim \overline{b}^i_k = w_{\mathrm{E}}(o_i, h_1)$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$.

Jednakost je neposredna posledica sledećih činjenica:

- $T^* \vdash \underline{a}_k^1 \underline{b}_k^1 + \ldots + \underline{a}_k^n \underline{b}_k^n \leqslant 1$, za sve k.
- $T^* \vdash \overline{a}_k^1 \overline{b}_k^1 + \ldots + \overline{a}_k^n \overline{b}_k^n > 1$, za sve k.
- $\vdash c_1 w(o_1, h_1) + \ldots + c_n w(o_n, h_1) = 1$.
- $\lim \underline{a}_k^1 \underline{b}_k^1 + \ldots + \underline{a}_k^n \underline{b}_k^n = \lim \overline{a}_k^1 \overline{b}_k^1 + \ldots + \overline{a}_k^n \overline{b}_k^n = d_1 w_{\mathtt{E}}(o_1, h_1) + \ldots + d_n w_{\mathtt{E}}(o_n, h_1)$.

Na sličan način se pokazuje da su i ostali uslovi teoreme 3.3.1 zadovoljeni, pa je $w_{\mathtt{E}}$ težinska funkcija i pomoću nje se mogu definisati funkcije μ_i. Konačno, iz aksioma o hipotezama i opservacijama i maksimalne neprotivrečnosti skupa T^* direktno sledi da postoji jedinstven h takav da je $T^* \vdash h$ i jedinstven o takav da je $T^* \vdash o$. □

Teorema 3.3.3 (Teorema jake potpunosti) *Svaki neprotivrečan skup je zadovoljiv.*

Dokaz Prema teoremi 3.3.2, neprotivrečan skup formula T se može proširiti do maksimalno neprotivrečnog skupa T^* koji definiše model $\mathcal{M}^*$, na gore opisan način. Potrebno je pokazati da za svaku formulu ϕ važi $\mathcal{M}^* \models \phi$ akko $\phi \in T^*$. Dokaz sprovodimo indukcijom po složenosti formule. Preskočićemo slučajeve kada je formula opservacija i hipoteza, kao i slučajeve kada je bulovska kombinacija u koraku indukcije.

Neka je $\mathtt{f} \geqslant 0 \in T^*$. Pomoću aksioma komutativnog uređenog prstena možemo pokazati da je

$$\vdash \mathtt{f} = r_1 \mathtt{g}_1 + \ldots + r_{n_{\mathtt{f}}} \mathtt{g}_{n_{\mathtt{f}}},$$

za neko $n_{\mathtt{f}} \in \omega$, gde je svaki $\mathtt{g}_i$ oblka $\mathtt{g}_i = \mathtt{h}_1 \cdots \mathtt{h}_{n_i}$, za neki $\mathtt{h}_j \in Term(0) \setminus \{0, 1\}$.

Primetimo da važi $\vdash \mathtt{g}_i \geqslant 0$ i $\mathtt{h}_i^{\mathcal{M}^*} = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash \mathtt{h}_i \geqslant r\}$.

Koristeći rastuće nizove racionalnih brojeva $(\underline{a}_k^i)_{k \in \omega}$ i opadajuće nizove racionalnih brojeva $(\overline{a}_k^i)_{k \in \omega}$, za koje je $\lim \underline{a}_k^i = \lim \overline{a}_k^i = \mathtt{h}_i^{\mathcal{M}^*}$, može se pokazati, slično kao i u dokazu prethodne teoreme, da je

$$\vdash \underline{a}_k^1 \cdots \underline{a}_k^{n_i} \leqslant \mathtt{g}_i < \overline{a}_k^1 \cdots \overline{a}_k^{n_i},$$

za svako $k \in \omega$ i $i \in \{1, \ldots, n_{\mathtt{f}}\}$, pa je

$$\mathtt{g}_i^{\mathcal{M}^*} = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash \mathtt{g}_i \geqslant r\}.$$

Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $T^* \vdash r_i \geqslant 0$ za $1 \leqslant i \leqslant m_{\mathtt{f}}$ i da je $T^* \vdash r_i < 0$ za $m_{\mathtt{f}} < i \leqslant n_{\mathtt{f}}$. Ponovo, koristeći rastuće nizove $(\underline{b}_k^i)_{k\in\omega}$ i opadajuće nizove $(\overline{b}_k^i)_{k\in\omega}$, takve da je $\lim \underline{b}_k^i = \lim \overline{a}_k^i = \mathtt{g}_i^{\mathcal{M}^*}$, dobijamo

$$\vdash r_1 \underline{b}_k^1 + \ldots + r_{m_{\mathtt{f}}} \underline{b}_k^{m_{\mathtt{f}}} + r_{m_{\mathtt{f}}+1} \overline{b}_k^{m_{\mathtt{f}}+1} + \ldots + r_{n_{\mathtt{f}}} \overline{b}_k^{n_{\mathtt{f}}} \leqslant \mathtt{f},$$

i

$$\vdash \mathtt{f} < r_1 \overline{b}_k^1 + \ldots + r_{m_{\mathtt{f}}} \overline{b}_k^{m_{\mathtt{f}}} + r_{m_{\mathtt{f}}+1} \underline{b}_k^{m_{\mathtt{f}}+1} + \ldots + r_{n_{\mathtt{f}}} \underline{b}_k^{n_{\mathtt{f}}},$$

za svako $k \in \omega$.

Konačno,

$$\mathtt{f}^{\mathcal{M}^*} = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash \mathtt{f} \geqslant r\},$$

pa je $\mathtt{f}^{\mathcal{M}^*} \geqslant 0$, odnosno $\mathcal{M}^* \models \mathtt{f} \geqslant 0$.

Za suprotan smer, neka je $\mathcal{M}^* \models \mathtt{f} \geqslant 0$. Ako je $\mathtt{f} \geqslant 0 \notin T^*$, prema konstrukciji T^* postoji n takav da je $\mathtt{f} < -n^{-1} \in T^*$. Ponavljajući postupak opisan gore, dobijamo $\mathtt{f}^{\mathcal{M}^*} \geqslant 0$, što je kontradikcija. Dakle, $\mathtt{f} \geqslant 0 \in T^*$.

□

3.3.3 Dinamička logika

Sada ćemo predstaviti temporalnu logiku koja je podesna za rad sa nizovima opservacija napravljenih tokom vremena. Kako je logika sa linearnim vremenom (izomorfnom skupu prirodnih brojeva), jezik će sadržati temporalne operatore $\bigcirc$ i U.

Skup terma $Term$ definišemo rekurzivno, kao i u statičkom slučaju. Razlika je samo u tome što nam nisu potrebna dva verovatnosna operatora, pošto je verovatnoća posle opservacije P_1 sada reprezentovana kao verovatnoća u sledećem vremenskom trenutku.

- $Term(0) = \{P(\alpha) | \alpha \in For(H)\} \cup \{w(o,h) | o \in O, h \in H\} \cup C \cup \{0,1\}$.
- $Term(n+1) = Term(n) \cup \{(\mathtt{f} + \mathtt{g}), (\mathtt{f} \cdot \mathtt{g}), (-\mathtt{f}) | \mathtt{f}, \mathtt{g} \in Term(n)\}$.

- $Term = \bigcup_{n=0}^{\infty} Term(n)$.

Skup formula For definišemo rekurzivno, kao najmanji skup koji zadovoljava sledeće uslove:

- Zapisi oblika $f \geqslant 0$, $f \in Term$ opservacije i hiporeze su formule.
- Ako su ϕ i ψ formule, onda su i $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\bigcirc\phi$ i $\phi U \psi$ formule.

Zapis pojednostavljujemo zamenama kao i u statičkom slučaju. Takođe, $\bigcirc^0\phi$ je ϕ, a $\bigcirc^{n+1}\phi$ je $\bigcirc(\bigcirc^n\phi)$. Ako je T skup formula, $\bigcirc T$ označava $\{\bigcirc\phi | \phi \in T\}$, a $\bigcirc^{-1}T$ označava $\{\phi | \bigcirc \phi \in T\}$.

Dalje, operatori F i G se uvode na uobičajen način.

Jedan primer formule je

$$(o \wedge w(o, h) \geqslant r \wedge G(P(h) > 0)) \rightarrow F(o \rightarrow P(h) \geqslant s)$$

što bismo čitali na sledeći način: "ako je primećeno o, težina opservacije o za h je bar r i ako je verovatnoća od h uvek pozitivna, onda će nekad u budućnosti verovatnoća od h biti bar s, ako je primećeno o".

Usvajanjem semantike iz prethodnog poglavlja, definišemo model $\overline{\mathcal{M}}$ kao beskonačan niz $\langle \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots \rangle$, takav da je

$$\mathcal{M}_k = \langle \mathtt{E}^*, \mu, h, d_1, \ldots, d_n, o^1, o^2, \ldots, o^k \rangle$$

(posebno, $\mathcal{M}_0 = \langle \mathtt{E}^*, \mu, h, d_1, \ldots, d_n \rangle$).

Za model $\overline{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots \rangle$, rekurzivno definišemo relaciju zadovoljivosti $\models$:

- $\mathcal{M}_k \models h'$ ako je $h' = h$.
- $\mathcal{M}_k \models o'$ ako je $o' = o^k$.
- $\mathcal{M} \models \mathtt{f} \geqslant 0$ ako je $\mathtt{f}^{\mathcal{M}} \geqslant 0$, gde je $\mathtt{f}^{\mathcal{M}}$ definisano na sledeći način:
  - $0^{\mathcal{M}_k} = 0$, $1^{\mathcal{M}_k} = 1$, $c_i^{\mathcal{M}_k} = d_i$.

- $P(\phi)^{\mathcal{M}_k} = \mu \oplus w_{\mathtt{E}^*}(\langle o^1, \dots, o^k \rangle, \cdot)(\phi)$, $\phi \in For(H)$.
- $w(\langle o^{i_1}, \dots, o^{i_k} \rangle, h')^{\mathcal{M}_k} = w_{\mathtt{E}^*}(\langle o^{i_1}, \dots, o^{i_k} \rangle, h')$.
- $(\mathtt{f} + \mathtt{g})^{\mathcal{M}_k} = \mathtt{f}^{\mathcal{M}_k} + \mathtt{g}^{\mathcal{M}_k}$.
- $(\mathtt{f} \cdot \mathtt{g})^{\mathcal{M}_k} = \mathtt{f}^{\mathcal{M}_k} \cdot \mathtt{g}^{\mathcal{M}_k}$.
- $(-\mathtt{f})^{\mathcal{M}_k} = -(\mathtt{f}^{\mathcal{M}_k})$.

• $\mathcal{M}_k \models \neg\phi$ ako $\mathcal{M}_k \not\models \phi$.

• $\mathcal{M}_k \models \phi \wedge \psi$ ako $\mathcal{M}_k \models \phi$ i $\mathcal{M}_k \models \psi$.

• $\mathcal{M}_k \models \bigcirc\phi$ ako $\mathcal{M}_{k+1} \models \phi$.

• $\mathcal{M}_k \models \phi U \psi$ ako postoji $l \in \omega$ takvo da je $\mathcal{M}_{k+l} \models \psi$, a za svako $l' \in \omega$ takvo da je $l' < l$, $\mathcal{M}_{k+l'} \models \phi$.

Skup formula T je zadovoljiv ako postoje model $\overline{\mathcal{M}}$ i $k \in \omega$ takvi da je $\mathcal{M}_k \models \phi$ za svaku formulu $\phi \in T$. Formula ϕ je zadovoljiva ako je skup $\{\phi\}$ Zadovoljiv. Formula ϕ je valjana, ako za svaki model $\overline{\mathcal{M}}$ i $k \in \omega$ važi $\mathcal{M}_k \models \phi$.

Modifikovaćemo aksiome prethodnog poglavlja; aksiomatizacija uključuje Iskazne aksiome, aksiome o opservacijama i hipotezama i aksiome komutativnog uređenog polja, kao i verovatnosne aksiome, ali ćemo izbaciti indekse, pošto sada imamo samo jedan verovatnosni operator P.

Aksiome A26, A27, i A29 su deo novog sistema. Aksioma A28 se zamenjuje sledećom aksiomom:

A30. $\bigcirc(P(h) \geqslant r) \to P(h)w(o,h) \geqslant r(P(h_1)w(o,h_1) + \ldots + P(h_m)w(o,h_m))$, $o \in O$, $h \in H$, $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Takođe, dodajemo i aksiomu

A31. $w(o^1, h) \cdots w(ob^k, h) =$
$$w(\langle o^1, \dots, o^k \rangle, h)(w(o^1, h_1) \cdots w(o^k, h_1) + \cdots + w(o^1, h_m) \cdots w(o^k, h_m)).$$

Temporalne aksiome

A32. $\bigcirc(\phi \to \psi) \to (\bigcirc\phi \to \bigcirc\psi)$.

A33. $\neg \bigcirc \phi \leftrightarrow \bigcirc\neg\phi$.

A34. $\phi U \psi \leftrightarrow \psi \vee (\phi \wedge \bigcirc(\phi U \psi))$.

A35. $\phi U \psi \to F\psi$.

A36. $\phi \leftrightarrow \bigcirc\phi$, $\phi \in For(H)$.

A37. $\mathrm{f} \geqslant 0 \leftrightarrow \bigcirc(\mathrm{f} \geqslant 0)$, ako se u f ne javlja operator P.

Pravila izvođenja

R1. Iz ϕ i $\phi \to \psi$ izvedi ψ.

R2. Iz ϕ izvedi $\bigcirc\phi$, ako je ϕ teorema.

R3. Iz skupa premisa $\{\phi \to \bigcirc^m \mathrm{f} \geqslant -n^{-1} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ izvedi $\phi \to \bigcirc^m \mathrm{f} \geqslant 0$ (za bilo koje $m \in \omega$).

R4. Iz skupa premisa $\{\phi \to \bigcirc^n \psi \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ izvedi $\phi \to G\psi$.

Pravilo R3 je temporalna modifikacija Arhimedovog pravila. Pravilo R4 tiče se sličnog fenomena nekompaktnosti. Naime, kako je protok vremena izomorfan skupu $(\mathbb{N}, \leqslant)$, možemo formalno izraziti tip beskonačnog elementa u jeziku linearnih uređenja:

$$p(x) = \{x > n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Naravno, ovaj tip je ispušten u standardnom skupu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leqslant)$. Formalni primer tipa beskonačnog elementa u našoj logici je:

$$T = \{F\neg\alpha\} \cup \{\bigcirc^n \alpha \mid n \in \mathbb{N}\},$$

gde α nije ni kontradikcija ni tautologija. Poredeći $p(x)$ i T, x stoji za vremenski trenutak u kom je $\neg\alpha$ zadovoljen.

Svojstva temporalnog dela aksiomatizacije koji se koristi u dokazu naveden je u sledećoj lemi:

Lema 3.3.2 *1.* $\vdash \bigcirc(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\bigcirc\phi \wedge \bigcirc\psi)$.

2. $\vdash \bigcirc(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\bigcirc\phi \vee \bigcirc\psi)$.

3. Ako $T \vdash \phi$, *onda* $\bigcirc T \vdash \bigcirc\phi$.

4. $\{\phi, \bigcirc\phi, \ldots, \bigcirc^{n-1}\phi, \bigcirc^{n}\psi\} \vdash \phi U \psi$.

Teorema 3.3.4 (Teorema dedukcije) *Neka je* T *proizvoljan skup formula i neka* $\phi, \psi \in For$. *Tada* $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ *povlači* $T \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Dokaz Dokaz je transfinitnom indukcijom po dužini izvođenja. Slučaj kada je ψ teorema je standardan, kao i slučajevi kada se primenjuje pravilo R1. Slučajevi kada se ψ dobija primenom pravila R2 je trivijalan, pošto se R2 može primeniti samo na teoreme, pa su ϕ, ψ i $\phi \rightarrow \psi$ teoreme.

Pretpostavimo da je $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$, gde je ψ dobijeno primenom pravila R3. Tada je ψ oblika $\theta \rightarrow \bigcirc^{m}\mathtt{f} \geqslant 0$, i $T \cup \{\phi\} \vdash \theta \rightarrow \bigcirc^{m}\mathtt{f} \geqslant -n^{-1}$, za svako $n \in \omega$. Na osnovu induktivne hipoteze dobijamo $T \vdash \phi \rightarrow (\theta \rightarrow \bigcirc^{m}\mathtt{f} \geqslant -n^{-1})$, odnosno $T \vdash (\phi \wedge \theta) \rightarrow \bigcirc^{m}\mathtt{f} \geqslant -n^{-1}$, za svako $n \in \omega$. Konačno, koristeći R3 dobijamo $T \vdash (\phi \wedge \theta) \rightarrow \bigcirc^{m}\mathtt{f} \geqslant 0$, pa je $T \vdash \phi \rightarrow \psi$.

Neka je $T \cup \{\phi\} \vdash \psi \rightarrow G\theta$ dobijeno pomoću pravila R4. Tada je $T \cup \{\phi\} \vdash \psi \rightarrow \bigcirc^{n}\theta$, za svako $n \in \omega$. Slično kao i gore, $T \vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow \bigcirc^{n}\theta$, za svako $n \in \omega$. Koristeći R4 dobijamo $T \vdash (\phi \wedge \psi) \rightarrow G\theta$, odakle je $T \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow G\theta)$. □

Teorema 3.3.5 *Svaki neprotivrečan skup formula* T *može se proširiti do maksimalno neprotivrečnog skupa.*

Dokaz Pretpostavimo da je $For = \{\phi_i \mid i = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Definišimo T^* na sledeći način:

1. $T_0 = T$.

2. Ako je ϕ_i neprotivrečno sa T_i, onda $T_{i+1} = T_i \cup \{\phi_i\}$.

3. Ako je ϕ_i protivrečno sa T_i, onda:

   (a) Ako je ϕ_i oblika $\psi \to \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant 0$, onda

   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\psi \to \bigcirc^m \mathtt{f} < -n^{-1}\},$$

   gde je n prirodan broj za koji je skup T_{i+1} neprotivrečan (postojanje takvog n obezbeđuje teorema dedukcije; ako je $T_i \cup \{\phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} < -n^{-1}\}$ protivrečno za sve n, možemo zaključiti

   $$T_i \vdash \phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant -n^{-1}$$

   za sve n. Prema R3, $T_i \vdash \phi \to \bigcirc^m f \geqslant 0$, pa bi T bilo protivrečno).

   (b) U suprotnom, ako je ϕ_i oblika $\psi \to G\theta$, onda

   $$T_{i+1} = T_i \cup \{\psi \to \neg \bigcirc^n \theta\},$$

   gde je n prirodan broj za koji je T_{i+1} neprotivrečno (postojanje takvog broja se dokazuje slično kao u prethodnom slučaju, pomoću teoreme dedukcije).

   (c) U suprotnom, $T_{i+1} = T_i$.

4. $T^* = \bigcup_{n \in \omega} T_n$.

Pokazaćemo da je T^* maksimalno neprotivrečan skup.

Očigledno je svaki T_i neprotivrečan. Pokažimo maksimalnost: za svaki $\phi \in For$, ili je $\phi \in T^*$ ili je $\neg\phi \in T^*$. Neka je $\phi = \phi_i$ i $\neg\phi = \phi_j$. Ako je i $\phi \notin T^*$ i $\neg\phi \notin T^*$, onda prema konstrtukciji T^* i teoremi dedukcije važi $T_i \vdash \neg\phi$ i $T_j \vdash \phi$. Ako je n prirodan broj takav da je $n > i, j$, onda je $T_n \vdash \phi \wedge \neg\phi$, pa bi T_n bio protivrečan; kontradikcija.

Sada ćemo pokazati deduktivnu zatvorenost skupa T^*, odnosno da $T^* \vdash \phi$ povlači $\phi \in T^*$. Aksiome su sigurno u T^*, pa ćemo pokazati zatvorenost za pravila izvođenja R1-R4.

R1: Neka je $\{\phi, \phi \to \psi\} \subseteq T^*$ i pretpostavimo da je $\phi = \phi_i$, $\psi = \phi_j$ i $\neg\psi = \phi_k$. Ako je $\neg\psi \in T^*$, onda za svaki $n > i, j, k$ važi $T_n \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Kako je T_n neprotivrečan, $\neg\psi \notin T^*$, pa zbog maksimalnosti T^* važi $\psi \in T^*$.

R2: Neka je $\vdash \phi$ i $\neg \bigcirc \phi = \phi_i$. Ako $\neg \bigcirc \phi \in T^*$, onda $T_{i+1} \vdash \neg \bigcirc \phi \wedge \bigcirc\phi$ ($\vdash \phi$ povlači $\vdash \bigcirc\phi$), pa bi T_{i+1} bio protivrečan. Prema maksimalnosti T^*, $\bigcirc\phi \in T^*$.

R3: Neka je $\phi_{l_n} = (\phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant -n^{-1}) \in T^*$, za svako $n \in \omega$. Ako je $\phi_j = \phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant 0 \notin T^*$, onda $\neg(\phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant 0) \in T_i$, za neko $i \in \omega$. Dakle, $T_i \vdash \phi$. Prema konstrukciji skupa T^*, $\phi \to \bigcirc^m \mathtt{f} < -m^{-1}) \in T_{j+1}$, za neko $m \in \omega$. Ako je $k > i, j, l_m$, onda $T_k \vdash \phi$, $T_k \vdash \bigcirc^m \mathtt{f} < -m^{-1}$ i $T_k \vdash \bigcirc^m \mathtt{f} \geqslant -m^{-1}$. Dakle, T_k bi bio protivrečan.

R4: Neka je $\phi_{l_n} = (\phi \to \bigcirc^n \psi) \in T^*$ za svako $n \in \omega$. Ako $\phi_j = \phi \to G\psi \notin T^*$, onda $\neg(\phi \to G\psi) \in T_i$, za neko $i \in \omega$ (pa je $T_i \vdash \phi$). Po konstrukciji T^*, $\phi \to \neg \bigcirc^m \psi \in T_{j+1}$, za neko $m \in \omega$. Ako je $k > i, j, l_m$, onda $T_k \vdash \phi$, pa $T_k \vdash \bigcirc^m \psi \wedge \neg \bigcirc^m \psi$; kontradikcija.

Konačno dobijamo da je skup T^* neprotivrečan: ako je $T^* \vdash \perp$, na osnovu deduktivne zatvorenosti T^* je $\perp \in T^*$, pa $\perp \in T_i$ za neko $i \in \omega$; kontradikcija.
□

Lema 3.3.3 *Ako je skup T^* maksimalno neprotivrečan, takav je i skup $\bigcirc^{-1}T^*$.*

Dokaz Ako $\bigcirc^{-1}T^* = \{\phi | \bigcirc \phi \in T^*\}$ nije maksimalan, postoji formula ϕ takva da $\phi \notin \bigcirc^{-1}T^*$ i $\neg\phi \notin \bigcirc^{-1}T^*$. Tada $\bigcirc\phi \notin T^*$ i $\bigcirc\neg\phi \notin T^*$, pa po aksiomi A33 $\neg \bigcirc \phi \notin T^*$, što protivreči maksimalnosti skupa T^*.

Ako je $\bigcirc^{-1}T^*$ protivrečan, postoji formula ϕ takva da je $\bigcirc^{-1}T^* \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Kako je $T^* = \bigcirc(\bigcirc^{-1}T^*)$, prema lemi 3.3.2 je $T^* \vdash \bigcirc(\phi \wedge \neg\phi)$, a prema istoj lemi i aksiomi A33 je $T^* \vdash \bigcirc\phi \wedge \neg \bigcirc \phi$; kontradikcija. □

Prema teoremi 3.3.5 i lemi 3.3.3, za dati neprotivrečan skup T možemo da napravimo model $\overline{\mathcal{M}}$ na sledeći način:

- Prvo proširimo T do maksimalno neprotivrečnog skupa T_0^*.
- Za svaki pirodan broj n, neka je $T_n^* = \bigcirc^{-1} T_{n-1}^*$.
- Za $n \in \omega$, neka je $\mathcal{M}'_n = \langle \mathrm{E}^*, \mu, h, d_1, \ldots, d_n, o^n \rangle$ kanonski model maksimalno neprotivrečne teorije T_n^*, definisane kao u statičkom slučaju (sa razlikom $\mu(\phi) = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P(\phi) \geqslant r\}$, pošto sada imamo samo jedan verovatnosni operator).
- $\mathcal{M}_n = \langle \mathrm{E}^*, \mu, h, d_1, \ldots, d_n, o^1, \ldots, o^n \rangle$, gde je

$$\mathcal{M}'_k = \langle \mathrm{E}^*, \mu, h, d_1, \ldots, d_n, o^k \rangle,$$

  za svaki $k \leqslant n$.
- $\overline{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots \rangle$.

Model $\overline{\mathcal{M}}$ je dobro definisan, pošto aksiome A36 i A37 obezbeđuju da hipoteze i težinske funkcije ne zavise od vremenskog trenutka. Aksioma A30 obezbeđuje da se mera μ u sledećem trenutku menja u skladu sa opservacijom u tom trenutku.

Dokaz teoreme potpunosti se bazira na dokazu teoreme u statičkom slučaju. Dokazuje se da za svaku formulu ϕ, $\mathcal{M}_i \models \phi$ akko $\phi \in T_i^*$, indukcijom po složenosti formula. Dva nova slučaja - kada je formula oblika $\bigcirc\phi$ ili $\phi U \psi$, dokazuju se slično kao i u slučaju logike sa razgranatim vremenom (prethodna glava).

Dakle, važi sledeća teorema:

Teorema 3.3.6 (Teorema jake potpunosti) *Svaki neprotivrečan skup je zadovoljiv.*

4

Mere protivrečnih teorija i difolti

4.1 Uvodna glava

4.1.1 O protivrečnim teorijama

U mnogim primenama klasičnih logika u praksi, istraživači se sreću sa pojavama protivrečnih teorija i nepreciznog modelovanja "implikacija sa izuzecima". Iako se sa stanovišta matematičke logike protivrečnosti smatraju nepoželjnim, a često i neinteresantnim, neki autori ih vide kao potencijalno korisne [36, 37].

Mnogi logički formalizmi za izvođenje netrivijalnih zaključaka iz protivrečnih teorija su razvijeni: parakonzistentne logike, difolt pravila izvođenja, formalno argumentovanje i posibilističke logike [24, 25, 39, 48, 59, 63, 88, 69, 2]. U takvim formalizmima, dve različite protivrečne teorije mogu imati različite skupove posledica.

Razvoj tih tehnika ukazao je na potrebu za poređenjem protivrečnih skupova formula [50]. U radovima [40, 56], merenje stepena protivrečnosti bazirano je na veličini dela logičkog jezika koji utiče na protivrečnost. Drugi pristup prati ideju filozofa Sorensena [99], po kojoj je protivrečan skup A bolji od protivrečnog skupa B, ako je najmanji broj formula iz A potreban za izvođenje kontradikcije veći nego najmanji takav broj formula iz B. To svojstvo važi u ne-adjunktivnim logikama [57, 92], specijalnoj vrsti parakonzistentnih logika.

Sorensenove ideje prvi je formalno istraživao Najt [54], povezujući ih sa postojanjem odgovarajućih verovatnoća na protivrečnim skupovima formula. Glava 4.2 predstavlja proširenje i dopunu Najtovih rezultata, uključujući i primene na difolte.

4.1.2 Hiperrealni brojevi

Hiperrealan broj je je element nekog fiksiranog ω_1-zasićenog proširenja $\mathbb{R}^*$ uređenog polja realnih brojeva $\mathbb{R}$. Sa $[0,1]^*$ označavaćemo jedinični interval hiperrealnih brojeva, odnosno skup svih $a \in \mathbb{R}^*$ takvih da je $0 \leqslant a \leqslant 1$. Infinitezimala je bilo koji element skupa $\mathbb{R}^*$ koji je strogo manji od svakog pozitivnog realnog (standardnog) broja, a strogo veći od svakog negativnog.

Zapis $a \approx b$ znači da je $a - b$ infinitezimala.

Hiperrealan broj $a \in \mathbb{R}^*$ je prava infinitezimala ako je $a \approx 0$ i $a \neq 0$ (ω_1-zasićenost obezbeđuje postojanje pravih infinitezimala); $a \in \mathbb{R}^*$ je konačan ako postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je $a \approx b$. Standardni deo konačnog broja $a \in \mathbb{R}^*$ je jedinstveni $b \in \mathbb{R}$ za koji je $a \approx b$. Standardni deo od a se označava sa $\mathrm{st}(a)$.

Neka su a, $b \in \mathbb{R}^*$, $a \geqslant 0$, $b > 0$. Kažemo da je a strogo manjeg reda nego b (što zapisujemo kao $a \ll b$), ako je a/b infinitezimala. Primetimo da relacija $\ll$ ima sledeće osobine:

$a \not\ll b$ i $a \not\ll c$ povlači $a \not\ll b + c$; $\quad a \ll c$ i $b \ll c$ povlači $a + b \ll c$.

4.1.3 Verovatnosne mere

Neka je $\mathcal{P}$ najviše prebrojiv skup iskaznih slova, a $For_{\mathcal{P}}$ odgovarajući skup iskaznih formula. Konačno aditivna verovatnosna mera na $For_{\mathcal{P}}$ je funkcija $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]^*$ sa svojstvima:

1. $\mu(\alpha) = 1$, ako je α tautologija,

2. $\mu(\alpha \vee \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$, ako je $\alpha \wedge \beta$ kontradikcija.

Verovatnosna mera je standardna, ako $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]$, inače je nestandardna. Lako je pokazati da svaka verovatnosna mera μ ima svojstva:

- $\mu(\neg\alpha) = 1 - \mu(\alpha)$,
- $\mu(\alpha \vee \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta) - \mu(\alpha \wedge \beta)$,
- $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$, ako je $\alpha \leftrightarrow \beta$ tautologija.

Indukcijom po n, lako se pokazuje da je

$$\mu(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \geqslant \mu(\phi_1) + \cdots + \mu(\phi_n) - (n-1). \tag{4.1}$$

Verovatnosna mera μ je čista, ako $\mu(\alpha) = 0$ povlači da je α kontradikcija. Uslovne verovatnosne mere se definišu na uobičajen način: za $\mu(\alpha) \neq 0$, $\mu(\beta|\alpha) = \frac{\mu(\alpha\wedge\beta)}{\mu(\alpha)}$.

4.1.4 Preferencijalne relacije

Pojam difolt pravila je jedan od osnovnih pojmova nemonotonog rezonovanja. Grubo govoreći, difolti su pravila sa izuzecima, koja dozvoljavaju izvođenje zaključaka iz dostupnih ali nepotpunih podataka. U [35], Gabej je predložio da se proučavanje default rezonovanja fokusira na odgovarajuće relacije izvođenja. Ubrzo zatim, Kraus, Leman i Magidor su u radu [59] naveli skup svojstava, nazvan Sistem P (P kao početno slovo reči preferencijalna) koja bi svaka nemonotona relacija izvođenja trebala da zadovolji. Ta pravila su opšte prihvaćena kao jezgro nemonotonog rezonovanja (videti, na primer, [34]).

U [59] je pokazano da je svaka preferencijalna relacija generisana nekom preferencijalnom strukturom. U radu Lemana i Magidora [63] ispituje se dodatno pravilo Racionalna monotonost. Za tu potklasu preferencjalnih relacija data je i preferencijalna i nestandardna verovatnosna semantika.

Preferencijalna relacija [59] je binarna relacija $\mid\!\sim$ na $For_{\mathcal{P}}$ koja zadovoljava dole navedena svojstva, koja čine Sistem P (REF–Reflexivity, LLE–Left logical equivalence, RW–Right weakening, CM–Cautious monotonicity):

$$REF: \frac{}{\alpha {\mid\!\sim} \alpha}; \qquad LLE: \frac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta,\ \alpha {\mid\!\sim} \gamma}{\beta {\mid\!\sim} \gamma};$$
$$RW: \frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta,\ \gamma {\mid\!\sim} \alpha}{\gamma {\mid\!\sim} \beta}; \qquad AND: \frac{\alpha {\mid\!\sim} \beta,\ \alpha {\mid\!\sim} \gamma}{\alpha {\mid\!\sim} \beta \wedge \gamma};$$
$$OR: \frac{\alpha {\mid\!\sim} \gamma,\ \beta {\mid\!\sim} \gamma}{\alpha \vee \beta {\mid\!\sim} \gamma}; \qquad CM: \frac{\alpha {\mid\!\sim} \beta,\ \alpha {\mid\!\sim} \gamma}{\alpha \wedge \beta {\mid\!\sim} \gamma}.$$

Relacija je nemonotona u smislu da ne zadovoljava Pravilo monotonosti:

$$M: \frac{\alpha {\mid\!\sim} \gamma}{\alpha \wedge \beta {\mid\!\sim} \gamma}.$$

Preferencijalna relacija ${\mid\!\sim}$ je racionalna relacija, ako zadovoljava restrikovanu formu monotonosti, takozvanu Racionalnu monotonost:

$$RM: \frac{\alpha {\mid\!\sim} \gamma,\quad \alpha \not{\mid\!\sim} \neg\beta}{\alpha \wedge \beta {\mid\!\sim} \gamma}.$$

Neka je μ konačno aditivna verovatnosna mera na $For_{\mathcal{P}}$. Binarna relacija ${\mid\!\sim}_\mu$ na $For_{\mathcal{P}}$ definisana sa

$$\alpha {\mid\!\sim}_\mu \beta \ \text{ akko } \ \mu(\beta|\alpha) \approx 1 \text{ ili } \mu(\alpha) = 0$$

je racionalna relacija [63].

Leman i Magidor su u [63] pokazali da je svaka racionalna relacija generisana nekom čistom konačno aditivnom verovatnosnom merom. Drugim rečima, za svaku racionalnu relaciju ${\mid\!\sim}$ postoji čista hiperrealna verovatnosna mera μ na $For_{\mathcal{P}}$ za koju je ${\mid\!\sim} = {\mid\!\sim}_\mu$.

4.2 Merenje protivrečnosti

4.2.1 n-neprotivrečnost i n-verovatnost

Definicija 4.2.1 *Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m\}$. Atom je bilo koja formula oblika*

$$\pm p_1 \wedge \cdots \wedge \pm p_m,$$

pri čemu je $+p$ zamena za p, a $-p$ za $\neg p$.

Za svaku formulu $\phi \in For_{\mathcal{P}}$ postoje atomi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takvi da je ϕ ekvivalentno sa $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_k$ (disjunktivna normalna forma formule ϕ). Zato ćemo dalje u ovom poglavlju pretpostavljati da se skup formula sastoji od predstavnika klasa ekvivalencije, odnosno da ne sadrži ekvivalentne formule (za predstavnike ćemo uzimati baš formule u DNF).

Definicija 4.2.2 *Teorija T je n-neprotivrečna ako joj je svaki podskup $T' \subseteq T$ kardinalnosti n neprotivrečan.*

Pretpostavimo da je $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Tada postoji 2^m atoma i 2^{2^m} različitih klasa ekvivalencije formula (elemenata odgovarajuće Lindenbaumove algebre). Dakle, možemo pretpostaviti da ima 2^{2^m} različitih formula.

Definicija 4.2.3 *Teorija T je strogo n-neprotivrečna ako je n-neprotivrečna, a nije $(n+1)$-neprotivrečna.*

Iako postoje neprotivrečne teorije kardinalnosti 2^{2^m-1}, prema sledećoj teoremi ne postoje strogo n-neprotivrečne teorije za veliko n.

Teorema 4.2.1 *Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Postoji strogo n-neprotivrečna teorija $T \subseteq For_{\mathcal{P}}$ akko $n < 2^m$.*

Dokaz Skup S svih negacija atoma (komplemenata atoma u Lindenbaumovoj algebri) formira jednu $(2^m - 1)$-neprotivrečnu teoriju koja nije 2^m-neprotivrečna. Zaista, negacija bilo kog atoma ekvivalentna je disjunkciji svih preostalih atoma, kojih ima $2^m - 1$, tako da je konjunkcija bilo kojih k formula iz S ekvivalentna disjunkciji $2^m - k$ atoma. Posebno, konjunkcije dužine $2^m - 1$ ekvivakentne su nekom atomu, a konjunkcija dužine 2^m je kontradikcija.

Slično, za $k < 2^m$, skup koji se sastoji od negacija bilo kojih k atoma i od konjunkcije negacija preostalih $2^m - k$ atoma će biti k-neprotivrečna teorija.

Obrnuto, pretpostavimo da je $T = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{2^m}, \ldots\}$ strogo n-neprotivrečna teorija, za neko $n \geqslant 2^m$. Bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da je $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}\}$ minimalno protivrečan podskup od T i da su sve formule iz T disjunkcije atoma. Tada ϕ_1 nije tautologija, pa ϕ_1 sadrži najviše $2^m - 1$ atoma.

Tvrdimo da postoji atom iz ϕ_1 koji nije u ϕ_2 i obrnuto, da postoji atom iz ϕ_2 koji nije u ϕ_1. U suprotnom, ϕ_1 povlači ϕ_2 ili ϕ_2 povlači ϕ_1, pa skup $\{\phi_1, \dots, \phi_{n+1}\}$ ne bi bio minimalno protivrečan. Dakle, ϕ_1 i ϕ_2 sadrže najviše $2^m - 2$ zajednička atoma.

Slično, za bilo koji $k < 2^m$ postoji atom koji se javlja u $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$, ali ne i u ϕ_{k+1}, kao i atom koji se javlja u ϕ_{k+1} ali ne u $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k$, pa $\phi_1, \dots, \phi_{k+1}$ sadrže najviše $2^m - (k+1)$ zajednička atoma. Sledi da ne postoji zajednički atom za formule $\phi_1, \dots, \phi_{2^m}$, pa je skup $\{\phi_1, \dots, \phi_{2^m}\}$ protivrečan, suprotno pretpostavci. $\square$

Definicija 4.2.4 *Teorija $T \subseteq For_{\mathcal{P}}$ je n-verovatna za meru $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]$ ako*

$$\mu(\phi) > 1 - \frac{1}{n}$$

za sve $\phi \in T$.

Teorija T je n-verovatna ako postoji verovatnosna mera μ takva da je T n-verovatna za μ.

Lema 4.2.1 *Svaka n-verovatna teorija je n-neprotivrečna.*

Dokaz Neka je T n-verovatna.Ako T ne bi bila n-neprotivrečna, postojao bi protivrečan podskup $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ od T, bi bilo

$$\mu(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) = 0,$$

za svaku meru μ. Odatle je

$$\mu(\neg\phi_1) + \cdots + \mu(\neg\phi_n) \geqslant \mu(\neg\phi_1 \vee \cdots \vee \neg\phi_n) = 1.$$

Sa druge strane, T je n-verovatna, pa $\mu(\neg\phi_i) < \frac{1}{n}$, za neku μ; kontradikcija. $\square$

Naredni primer pokazuje da obrnut smer u prethodnoj lemi ne mora da važi.

Primer 4.2.1 *Definisaćemo strogo n-neprotivrečnu teoriju kardinalnosti $n+2$ koja nije n-verovatna. Konstuisaćemo formule teorije tako da svakih n formula ima zajednički atom (nekog konačnog jezika).*

Neka je n proizvoljan prirodan broj i $\mathcal{P}'$ proizvoljan podskup od $\mathcal{P}$ kardinalnosti m takav da je $2^m > \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Dalje, neka je $\{\alpha_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n+2\}$ neki skup atoma nad $\mathcal{P}'$ i

$$T = \{\phi_1, \ldots, \phi_{n+2}\},$$

gde je ϕ_k formula $\bigvee\limits_{k \neq i,j} \alpha_{ij}$ (drugim rečima, α_{ij} se pojavljuje kao disjunkt u svakoj formuli izuzev u i-toj i j-toj). T je strogo n-neprotivrečna, pošto svakih n formula od T imaju zajednički atom koji definiše model za taj skup formula, ali ne postoji zajednički atom za $n+1$ formula iz T. (Na primer, za $n=3$ je $\phi_1 = \alpha_{23} \vee \alpha_{24} \vee \alpha_{25} \vee \alpha_{34} \vee \alpha_{35} \vee \alpha_{45}$, $\phi_2 = \alpha_{13} \vee \alpha_{14} \vee \alpha_{15} \vee \alpha_{34} \vee \alpha_{35} \vee \alpha_{45}$, $\phi_3 = \alpha_{12} \vee \alpha_{14} \vee \alpha_{15} \vee \alpha_{24} \vee \alpha_{25} \vee \alpha_{45}$, $\phi_4 = \alpha_{12} \vee \alpha_{13} \vee \alpha_{15} \vee \alpha_{23} \vee \alpha_{25} \vee \alpha_{35}$, $\phi_5 = \alpha_{12} \vee \alpha_{13} \vee \alpha_{14} \vee \alpha_{23} \vee \alpha_{24} \vee \alpha_{34}$. Atom α_{45} obezbeđuje neprotivrečnost skupa $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.)

Pretpostavimo da je $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}\}$ n-verovatna za meru μ. Pokazaćemo da je broj

$$s = \mu(\phi_{n+2}) = \sum_{j \neq n+2} \mu(\alpha_{ij})$$

veoma mali. Bez smanjenja opštosti, pretpostavimo da je

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+2} \mu(\alpha_{ij}) = 1.$$

Kako je po pretpostavci $\mu(\phi_i) > 1 - \frac{1}{n}$, $\quad i \in \{1, \ldots, n+1\}$, sledi da je

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu(\phi_i) > (n+1)(1 - \frac{1}{n}),$$

pa je

$$n(1-s) + (n-1)s > (n+1)(1 - \frac{1}{n}).$$

Dakle,

$$s < n - (n+1)(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \tag{4.2}$$

odakle T nije n-verovatna (za $n > 2$).

□

Kako je pojam n-neprotivrečnosti slabiji od pojma n-verovatnosti, definišemo novi pojam, koji odgovara n-neprotivrečnosti.

Definicija 4.2.5 *Teorija $T \subseteq For_{\mathcal{P}}$ je lokalno n-verovatna ako je svaki podskup T kardinalnosti $n+1$ n-verovatan.*

Teorema 4.2.2 *Teorija $T \subseteq For_{\mathcal{P}}$ je lokalno n-verovatna akko je n-neprotivrečna.*

Dokaz Neka je T n-neprotivrečna. Neka je $T_0 = \{\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}\}$ proizvoljan podskup od T kardinalnosti $n+1$. Neka je $\mathcal{P}_{T_0} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ skup svih iskaznih slova iz T_0, a $\mathcal{P}'_{T_0} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ drugi skup iskaznih slova za koji je $\mathcal{P}_{T_0} \cap \mathcal{P}'_{T_0} = \emptyset$. Posmatrajmo atome nad $\mathcal{P}_{T_0} \cup \mathcal{P}'_{T_0}$. Kako je T n-neprotivrečna, formule $\phi_2, \ldots, \phi_{n+1}$ će imati bar jedan zajednički atom. Neka je jedan od njih α_1. Na sličan način, neka je α_j atom za skup $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}\} \setminus \{\phi_j\}$ takav da $\alpha_j \neq \alpha_i$, za sve $i < j$. Primetimo da uvek postoji takav atom, jer su nad skupom slova $\mathcal{P}_{T_0} \cup \mathcal{P}'_{T_0}$.

Neka je $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]$ bilo koja mera za koju je:

- $\mu(\alpha_i) = \frac{1}{n+1}$, $i \in \{1, \ldots, n+1\}$
- $\mu(\alpha_i) = 0$, $i \in I \setminus \{1, \ldots, n+1\}$.

Tada je $\mu(\phi_j) \geq \frac{n}{n+1}$ za $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. Primetimo da, ako je skup $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n+1}\}$ protivrečan, onda $\mu(\phi_j) = \frac{n}{n+1}$, za svaki j.

Dokaz u suprotnom smeru je isti kao dokaz leme 4.2.1. □

Posledica 4.2.1 *Teorija je strogo n-neprotivrečna akko je lokalno n-verovatna i nije lokalno $(n+1)$-verovatna.*

Primer 4.2.2 pokazuje da se kardinalnost podskupa ne može povećati, ako želimo da očuvamo ekvivalenciju iz teoreme 4.2.2.

Primer 4.2.2 *Neka je $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_{n+2}\}$ teorija iz primera 4.2.1. Izračunajmo maksimalno $r \in [0, 1]$ takvo da postoji mera μ za koju je*

$$\mu(\phi_i) \geqslant r, \quad i \in \{1, \ldots, n+2\}.$$

Na isti način kao što smo dobili nejednakost (4.2) možemo da dobijemo

$$s \leqslant n - (n+1)r. \tag{4.3}$$

Sa druge strane, posto je

$$\mu(\phi_{n+2}) \geqslant r,$$

dobijamo

$$s \geqslant r. \tag{4.4}$$

Iz (4.3) i (4.4) zaključujemo

$$r \leqslant \frac{n}{n+2}.$$

□

Prethodni primer je u vezi sa teoremom Najta [54, Corollary 4.12] koju navodimo, reformulisanu u skladu sa uvedenom terminologijom.

Teorema 4.2.3 *Neka je T n-neprotivrečna teorija kardinalnosti m. Tada postoji verovatnosna mera μ, takva da je $\mu(\phi) \geqslant \frac{n}{m}$ za sve $\phi \in T$.*

Primer 4.2.2 pokazuje da se teorema 4.2.3 ne može pojačati u smislu da je $\frac{n}{m}$ maksimalan, odnosno da ne postoji $r > \frac{n}{m}$ za koji postoji μ tako da je $\mu(\phi) \geqslant r$ for all $\phi \in T$.

4.2.2 Uslovna n-verovatnost i n-neprotivrečnost

Neka je $\phi \in For_{\mathcal{P}}$ i neka je μ mera na $For_{\mathcal{P}}$ takva da je $\mu(\phi) > 0$. Ako je uslovna verovatnosna mera definisana sa

$$\mu(\psi|\phi) = \frac{\mu(\psi \wedge \phi)}{\mu(\phi)},$$

poznato je da je i $\mu_\phi : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]$, definisana sa $\mu_\phi(\psi) = \mu(\psi|\phi)$, takođe verovatnosna mera.

Definicija 4.2.6 *Teorija T je n-verovatna modulo ϕ ako postoji verovatnosna mera μ takva da je $\mu(\phi) > 0$ i $\mu(\psi|\phi) > 1 - \frac{1}{n}$, za sve $\psi \in T$.*

Lema 4.2.2 *Ako je T n-verovatna modulo ϕ, onda je T n-verovatna i n-neprotivrečna.*

Dokaz Prema lemi 4.2.1, dovoljno je pokazati da je T n-verovatna. To je, međutim, direktna posledica definicije 4.2.6 i činjenice da je μ_ϕ takođe mera.
□

Teorema 4.2.4 *Neka je T konačna n-verovatna teorija i $\phi \in For_{\mathcal{P}}$. Ako je ϕ neprotivrečno sa svakim neprotivrečnim podskupom od T, onda je T n-verovatna modulo ϕ.*

Dokaz Neka je μ verovatnosna mera za koju je $\mu(\psi) > 1 - \frac{1}{n}$, za sve $\psi \in T$.

Na ovom mestu ćemo koristiti dokaz teoreme [54, Lemma 4.7], gde je pokazano da ako postoji mera μ takva da je $\mu(\psi) \geq r$ za sve $\psi \in T$ i neki $r \in [0,1]$, i ako je ϕ neprotivrečno sa svakim neprotivrečnim podskupom od T, onda postoji i mera ν takva da je $\nu(\psi) \geq \mu(\psi)$ za sve $\psi \in T$ i $\nu(\phi) = 1$.

Dalje, za $\psi \in T$ imamo

$$\nu(\psi|\phi) = \nu(\psi) \geq \mu(\psi) > 1 - \frac{1}{n}.$$

□

Definicija 4.2.7 *Teorija T je n-verovatna modulo $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, ako postoji mera μ takva da je $\mu(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k) > 0$, za sve $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $\mu(\phi_i | \phi_j) > 1 - \frac{1}{n}$, i za sve $\psi \in T$ postoji indeks $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je*

$$\mu(\psi | \phi_i) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Teorema 4.2.5 *Ako je T n-verovatna modulo $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$, onda je T (n-k+1)-verovatna modulo $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k$.*

Dokaz Neka je $\nu(\psi) = \mu(\psi | \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)$. Za sve $\psi \in T$ postoji $i \in \{1, \ldots, k\}$ takav da je

$$\mu(\psi | \phi_i) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Izaberimo proizvoljno $\psi \in T$. Bez gubitka opštosti, neka je odgovarajući indeks i u prethodnoj formuli jednak 1. Tada je:

$$\begin{aligned}
\nu(\psi) &= \frac{\mu(\psi \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)}{\mu(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)} \\
&= \frac{\mu(\psi \wedge \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)/\mu(\phi_1)}{\mu(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)/\mu(\phi_1)} \\
&= \frac{\mu(\psi \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)}{\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)} \\
&\geqslant \frac{\mu(\psi | \phi_1) + \mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1) - 1}{\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)} \\
&= 1 - \frac{1 - \mu(\psi | \phi_1)}{\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)} \\
&> 1 - \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})}{\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1)}.
\end{aligned}$$

Primenjujući nejednakost (4.1), dobijamo

$$\mu(\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k | \phi_1) \geqslant \mu(\phi_2 | \phi_1) + \cdots + \mu(\phi_k | \phi_1) - (k-2)$$

$$\begin{aligned} &> (k-1)(1-\frac{1}{n})-(k-2) \\ &= \frac{n-k+1}{n}. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned} \nu(\psi) &> 1-\frac{1}{n\cdot\frac{n-k+1}{n}} \\ &= 1-\frac{1}{n-k+1}. \end{aligned}$$

□

Posledica 4.2.2 *Ako je T n-verovatna modulo $\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$, onda je T i (n-k+1)-verovatna, dakle i $(n-k+1)$-neprotivrečna.*

Sada definišemo sintaksni analogon "n-verovatna modulo skup formula".

Definicija 4.2.8 *Ako su T i S skupovi formula, T je n-neprotivrečna modulo S ako je za ma koje $\psi_1,\ldots,\psi_n\in T$ skup $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}\cup S$ neprotivrečan.*

Posledica 4.2.3 *Ako je T n-verovatna modulo $\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$, onda je T (n-k+1)-neprotivrečna modulo $\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$.*

Dokaz Za meru ν iz dokaza teoreme 4.2.5 i za ma koje $\psi\in T$ imamo $\nu(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_k)=1$ i $\nu(\psi)>1-\frac{1}{n-k+1}$. Dakle, $\nu(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_{n-k+1}\wedge\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_k)>0$ za sve $\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_{n-k+1}\in T$. □

4.2.3 Jaka n-verovatnost

Definicija 4.2.9 *Za nestandardnu verovatnosnu meru μ kažemo da je ψ μ-posledica od ϕ, ako $\mu(\psi|\phi)\approx 1$. Takođe kažemo da je $T\subseteq For_{\mathcal{P}}$ skup μ-posledica skupa $\Phi\subseteq For_{\mathcal{P}}$, ako za svako $\psi\in T$ postoji $\phi\in\Phi$ takvo da je ψ μ-posledica od ϕ.*

Primer 4.2.3 *Neka je* $\phi, \theta \in For_{\mathcal{P}}$, $\mu(\phi) = \frac{1}{2}$, $\mu(\theta) \approx 0$ *i* $\mu(\theta) \neq 0$. *Tada je* $\mu(\phi|\phi \vee \theta) \approx 1$, $\mu(\neg\phi|\neg\phi \vee \theta) \approx 1$ *i* $\mu((\phi \vee \theta) \wedge (\neg\phi \vee \theta)) = \mu(\theta) \neq 0$. *Dakle, skup* $\Phi = \{\phi \vee \theta, \neg\phi \vee \theta\}$ *je neprotivrečan, ali skup njegovih* μ*-posledica* $T = \{\phi, \neg\phi\}$ *je protivrečan.* □

Cilja nam je da definišemo nov pojam n-verovatnosti (vezan za meru μ) koji će biti očuvan za μ-posledice.

Definicija 4.2.10 *Neka je* n *prirodan broj. Teorija* T *je jako* n*-verovatna za* μ*, ako za svakih* n *formula* $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ *broj* $\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ *nije infinitezimala.*

Teorija T *je jako verovatna za* μ*, ako je jako* n*-verovatna za* μ *za sve* $n \in \omega$.

Primetimo da je, za datu meru μ, jaka n-verovatnost (za μ) pojam jači od n-neprotivrečnosti i da jaka verovatnost (za μ) povlači neprotivrečnost.

Teorema 4.2.6 *Neka je* Φ *neprazan skup, jako* n*-verovatan za* μ *i neka je* T *skup* μ*-posledica od* Φ*. Tada je* T *takođe* n*-verovatna za* μ.

Dokaz Neka je $T = \{\psi_i | i \in \omega\}$ i neka je za sve $i \in \omega$ ϕ_i element od Φ takav da je $\mu(\psi_i|\phi_i) \approx 1$. Bez gubitka opštosti, dovoljno je dokazati da $\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \approx 0$ ne važi. Neka je $\psi \in \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ i zbog jednostavnosti pretpostavimo da je $\psi = \psi_1$. Kao i u dokazu teoreme 4.2.5, važi

$$\mu(\psi|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \geq 1 - \frac{1 - \mu(\psi_1|\phi_1)}{\mu(\phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n|\phi_1)}.$$

Pošto je $\mu(\psi_1|\phi_1) \approx 1$ i $\mu(\phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n|\phi_1) \geq \mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$ nije infinitezimala, po pretpostavci, sledi $\mu(\psi|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \approx 1$, za sve $\psi \in \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$.

Primenjujući nejednakost (4.1) na meru $\mu(\cdot|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$, dobijamo

$$\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \geq$$

$$\mu(\psi_1|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) + \ldots + \mu(\psi_n|\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) - (n-1) \approx 1.$$

Dakle,

$$\frac{\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)}{\mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)} \approx 1.$$

Odatle je

$$\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \approx \mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n).$$

Kako $\mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$ nije infinitezimala, po pretpostavci, ni $\mu(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ nije infinitezimala. Sledi da je T jako n-verovatna za μ. □

Posledica 4.2.4 *Neka je Φ neprazan skup, jako verovatan za μ i neka je T skup μ-posledica od Φ. Tada je i T jako verovatan za μ.*

Prema posledici, jaka verovatnost Φ obezbeđuje jaku verovatnost skupa "posledica" T. Ako smo zainteresovani samo za običnu neprotivrečnost skupa T, ovaj uslov nije neophodan:

Primer 4.2.4 *Neka je $\Phi = \{\phi_i | i \in \omega\}$ neprotivrečna teorija i neka je $T = \{\psi_i | i \in \omega\}$ skup formula. Neka je μ verovatnosna mera za koju važi:*

- *za sve $i \in \omega$ postoji infinitezimala ε_i takva da je $\mu(\psi_i | \phi_i) = 1 - \varepsilon_i$,*
- *$\mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) > n \max\{\varepsilon_i | i = 1, \ldots, n\}$, za sve $n \in \omega$.*

Kao i u dokazu teoreme 4.2.5, možemo izvesti nejednakost (za $i \in \omega$)

$$\mu(\psi_i | \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \geq 1 - \frac{1 - \mu(\psi_i | \phi_i)}{\mu(\phi_1 \wedge \ldots \phi_{i-1} \wedge \phi_{i+1} \wedge \ldots \wedge \phi_n | \phi_i)}.$$

Prema pretpostavci, imamo

$$\mu(\psi_i | \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon_i}{\mu(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)} \mu(\phi_i) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Sledi da je skup $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ n-verovatan, pa i neprotivrečan. Neprotivrečnost skupa T je posledica teoreme kompaktnosti. □

4.2.4 Veze sa difoltima i verovatnosnim logikama

Prema pomenutom rezultatu Lemana i Magidora [63], relacija μ-posledice iz definicije 4.2.9 se može shvatiti kao racionalna relacija, a teorema 4.2.6 se može interpretirati kao rezultat o očuvanju jake n-verovatnosti pod racionalnim difolt izvođenjem. Sada ćemo definisati sintaksni analogon jake n-verovatnosti.

Za formulu ϕ kažemo da je izuzetak (za relaciju $\mid\!\sim$) akko $\top \mid\!\sim \neg\phi$ (videti [63]).

Definicija 4.2.11 *Teorija Φ je jako n-neprotivrečna za racionalnu relaciju $\mid\!\sim$, ako za svakih n formula $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Phi$, formula $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ nije izuzetak.*

Teorija Φ je jako neprotivrečna za $\mid\!\sim$, ako je jako n-neprotivrečna za $\mid\!\sim$ za sve $n \in \omega$.

Koristeći teoremu 4.2.6 i rezultate iz [63], neposredno dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 4.2.7 *Neka je Φ neprazan skup, jako n-neprotivrečan za $\mid\!\sim$ i neka je Ψ skup takav da za svaki $\psi \in \Psi$, $\phi \mid\!\sim \psi$ važi za neki $\phi \in \Phi$. Tada, Ψ je takođe n-neprotivrečna za $\mid\!\sim$.*

Sada se okrećemo drugoj primeni i u stilu Nilsona [74] i Džefa Parisa [85] pokušavamo da koristimo standardne mere, ali sa kontrolisanim opadanjem verovatnoće tokom izvođenja.

Definicija 4.2.12 *Neka je μ čista verovatosna mera na $For_{\mathcal{P}}$. Za svako $n \in \omega$ definišemo binarnu relaciju $\mid\!\sim^{\mu}_{n}$ na $For_{\mathcal{P}}$, sa $\alpha \mid\!\sim^{\mu}_{n} \beta$ akko $\mu(\beta|\alpha) > 1 - \frac{1}{n}$.*

Izostavljaćemo μ u $\mid\!\sim^{\mu}_{n}$ kad god je jasno iz konteksta. Sledeći rezultat navodi svojstva slična Sistemu P.

Teorema 4.2.8 *Neka je μ čista verovatosna mera na $For_{\mathcal{P}}$. Ako su relacije $\mid\!\sim_n$ definisane kao gore, onda važi:*

$$REF_n : \frac{}{\alpha \mid\!\sim_n \alpha}; \qquad LLE_n : \frac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \mid\!\sim_n \gamma}{\beta \mid\!\sim_n \gamma};$$

$$RW_n : \frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta, \gamma \mid\!\sim_n \alpha}{\gamma \mid\!\sim_n \beta}; \qquad AND_n : \frac{\alpha \mid\!\sim_{2n} \beta, \alpha \mid\!\sim_{2n} \gamma}{\alpha \mid\!\sim_n \beta \wedge \gamma};$$

$$OR_n : \frac{\alpha \mid\!\sim_{2n} \gamma, \beta \mid\!\sim_{2n} \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim_n \gamma}; \qquad CM_n : \frac{\alpha \mid\!\sim_n \beta, \alpha \mid\!\sim_n \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_{n-1} \gamma}.$$

Dokaz Dokazi za REF_n, LLE_n i RW_n su trivijalni.

CM_n je specijalan slučaj teoreme 4.2.5, za $n = 2$.

AND_n: Neka je $\mu(\beta|\alpha) > 1 - \frac{1}{2n}$ i $\mu(\gamma|\alpha) > 1 - \frac{1}{2n}$; koristeći CM_{2n} dobijamo $\mu(\gamma|\alpha \wedge \beta) > 1 - \frac{1}{2n-1}$. Iz jednakosti

$$\mu(\beta \wedge \gamma|\alpha) = \mu(\beta|\alpha)\mu(\gamma|\alpha \wedge \beta)$$

sledi $\mu(\beta \wedge \gamma|\alpha) > (1 - \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n-1}) = 1 - \frac{1}{n}$ pa je $\alpha \mid\!\sim_n \beta \wedge \gamma$.

OR_n: Neka je $\mu(\gamma|\alpha) > 1 - \frac{1}{2n}$ i $\mu(\gamma|\beta) > 1 - \frac{1}{2n}$. Koristićemo oznake α_0 i β_0 za $\alpha \wedge \neg\gamma$ i $\beta \wedge \neg\gamma$, redom.

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma|\alpha \vee \beta) &= \frac{\mu((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma))}{\mu(\alpha \vee \beta)} \\
&= \frac{\mu((\alpha \vee \beta) \setminus (\alpha_0 \vee \beta_0))}{\mu(\alpha \vee \beta)} \\
&\geq \frac{\mu(\alpha \vee \beta) - \mu(\alpha_0 \vee \beta_0)}{\mu(\alpha \vee \beta)} \\
&= 1 - \frac{\mu(\alpha_0 \vee \beta_0)}{\mu(\alpha \vee \beta)}
\end{aligned}$$

Po pretpostavci, $\mu(\alpha_0) < \frac{\mu(\alpha)}{2n} \leq \frac{\mu(\alpha \vee \beta)}{2n}$ i $\mu(\beta_0) \leq \frac{\mu(\alpha \vee \beta)}{2n}$, odakle je $\mu(\alpha_0 \vee \beta_0) < \frac{\mu(\alpha \vee \beta)}{n}$.

Konačno, $\mu(\gamma|\alpha \vee \beta) > 1 - \frac{1}{n}$, odnosno $\alpha \vee \beta \mid\!\sim_n \gamma$. □

Sledeće pitanje je: ako u zaključivanju koristimo i racionalnu relaciju $\mid\!\sim$ i $\mid\!\sim_n$ u pravilima nemonotonog izvođenja, da li se n prenosi u zaključak?

Teorema 4.2.9 *Neka je $\mid\!\sim$ racionalna relacija na $For_{\mathcal{P}}$, a μ odgovarajuća nestandardna mera. Ako su binarne relacije $\mid\!\sim_n$ na $For_{\mathcal{P}}$ definisane sa $\alpha \mid\!\sim_n \beta$ akko $\mu(\beta|\alpha) > 1 - \frac{1}{n}$ ili $\mu(\beta|\alpha) \approx 1 - \frac{1}{n}$, onda važi:*

$$LLE_n^{\approx} : \frac{\vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \alpha \mid\!\sim_n \gamma}{\beta \mid\!\sim_n \gamma}; \qquad RW_n^{\approx} : \frac{\vdash \alpha \rightarrow \beta, \gamma \mid\!\sim_n \alpha}{\gamma \mid\!\sim_n \beta};$$

$$OR_n^{\approx} : \frac{\alpha \mid\!\sim \gamma, \beta \mid\!\sim_n \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim_n \gamma}; \qquad AND_n^{\approx} : \frac{\alpha \mid\!\sim \beta, \alpha \mid\!\sim_n \gamma}{\alpha \mid\!\sim_n \beta \wedge \gamma};$$

$$CM1_n^{\approx} : \frac{\alpha \mid\!\sim_n \beta, \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_n \gamma}; \qquad CM2_n^{\approx} : \frac{\alpha \mid\!\sim \beta, \alpha \mid\!\sim_n \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_n \gamma}.$$

Dokaz Dokaz je laka modifikacija dokaza teoreme 4.2.8. Na primer, za dokaz $OR_n^{\approx}$ neka je $\mu(\gamma|\alpha) = 1 - \varepsilon_1$ i $\mu(\gamma|\beta) > 1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_2$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \approx 0)$. Kao i u dokazu OR_n, dobijamo $\mu(\gamma|\alpha \vee \beta) \geq 1 - \frac{\mu(\alpha_0 \vee \beta_0)}{\mu(\alpha \vee \beta)}$, gde je α_0 oznaka za $\alpha \wedge \neg\gamma$, a β_0 za $\beta \wedge \neg\gamma$. Iz $\mu(\alpha_0) \leq \varepsilon_1 \mu(\alpha \vee \beta)$ i $\mu(\beta_0) < (\varepsilon_2 + \frac{1}{n})\mu(\alpha \vee \beta)$ dobijamo $\mu(\alpha_0 \vee \beta_0) \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{n})\mu(\alpha \vee \beta)$. Dakle, $\mu(\gamma|\alpha \vee \beta) \geq 1 - \frac{1}{n} - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx 1 - \frac{1}{n}$.
$\square$

Ova teorema je u duhu [67, Theorem 5.1], gde je prezentovana slična kombinacija nemonotonog i verovatnosnog rezonovanja. Logika LPP^S iz rada [91] je prikladna za modelovanje racionalnih relacija. U njoj je iskazni račun proširen verovatnosnim operatorima primenjenim na iskazne formule: $CP_{\geq s}(\alpha, \beta)$, $CP_{\leq s}(\alpha, \beta)$ i $CP_{\approx s}(\alpha, \beta)$, sa očiglednim značenjima. Tako se formula $CP_{\approx 1}(\alpha, \beta)$ može koristiti za modelovanje $\beta \mid\!\sim \alpha$. na primer, pravilo $OR_n^{\approx}$ može se zapisati kao

$$CP_{\approx 1}(\gamma, \alpha) \wedge (CP_{\geq 1-\frac{1}{n}}(\gamma, \beta) \vee CP_{\approx 1-\frac{1}{n}}(\gamma, \beta)) \rightarrow$$
$$(CP_{\geq 1-\frac{1}{n}}(\gamma, \alpha \vee \beta) \vee CP_{\approx 1-\frac{1}{n}}(\gamma, \alpha \vee \beta)).$$

Rad [91] daje jako potpunu aksiomatizaciju logike, pa su (LPP^S-prevodi) svih P-pravila teoreme te logike. Isto važi za (LPP^S-prevoda) svih pravila iz teorema 4.2.8 i 4.2.9.

4.3 Verovatnosni pristup difoltima

Posle rezultata Krausa, Lemana i Magidora[59, 63], mnogi istraživači su proučavali razne klase preferencijalnih relacija, dobijenih dodavanjem pravila izvođenja Sistemu P [8, 9, 32, 33, 96, 105]. Preferencijalna semantika za neke od njih, nastale dodavanjem pravila jačeg od RM, data je u [9], a slabijih od RM u [104, 105]. Sa druge strane, verovatnosna semantika za te klase nije istraživana.

Naš cilj je da obezbedimo nestandardnu verovatnosnu semantiku za razne preferencijalne relacije.

4.3.1 Neke klase preferencijalnih relacija

U radovima [32, 33] uvedena su sledeća pravila (Negation rationality, Disjunction rationality):

$$NR: \frac{\alpha \mid\!\sim \beta,\ \alpha \wedge \gamma \not\mid\!\sim \beta}{\alpha \wedge \neg\gamma \mid\!\sim \beta} \qquad DR: \frac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma,\ \alpha \not\mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}.$$

Zna se da je NR strogo slabije od DR i da je DR strogo slabije od RM (pretpostavljamo, kao i u ostatku poglavlja, prisustvo pravila Sistema P). Još jedno pravilo (Weak rational monotonicity), koje je slabije od RM ali neuporedivo sa NR i DR, uvedeno je u [105]:

$$WRM: \frac{\alpha \mid\!\sim \gamma,\ \alpha \wedge \beta \not\mid\!\sim \gamma,\ \alpha \not\mid\!\sim \neg\beta}{\top \mid\!\sim \neg\alpha}$$

Pravilo (Determinacy preservation)

$$DP: \frac{\alpha \mid\!\sim \beta,\ \alpha \wedge \gamma \not\mid\!\sim \neg\beta}{\alpha \wedge \gamma \mid\!\sim \beta},$$

koje je uveo Makinson u [69], leži između RM i M.

Sledeća dva pravila (Rational contraposition, Weak determinacy)

$$RC: \frac{\alpha \mid\!\sim \beta,\ \neg\beta \not\mid\!\sim \alpha}{\neg\beta \mid\!\sim \neg\alpha}; \qquad WD: \frac{\top \mid\!\sim \neg\alpha,\ \alpha \not\mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \neg\beta}.$$

su slabija od DP i neuporediva sa RM, videti [9, 8]. Zna se da RC povlači WD i da je DP=WD+RM.

Pravila (Fragmented disjunction, conditional excluding middle)

$$FD : \frac{\alpha {\mid\!\sim} \beta \vee \gamma,\ \alpha {\not\mid\!\sim} \beta,\ \alpha {\not\mid\!\sim} \gamma}{\neg\beta {\mid\!\sim} \gamma}; \qquad CEM : \frac{\alpha {\not\mid\!\sim} \beta}{\alpha {\mid\!\sim} \neg\beta}.$$

su neuporediva sa M i striktno ispod DP, vidi [9, 96]. Uz to je CEM strogo iznad FD.

Preferencijalne relacije koje zadovoljavaju neko dodatno pravilo zvaćemo po tom pravilu. Na primer, DP-relacija je preferencijalna relacija koja zadovoljava pravilo DP.

Za neke od ovih relacija napravljena je preferencijalna semantika. Sledeće poglavlje sadrži novu, verovatnosnu semantiku za tri od ovih relacija: CEM, DP i FD.

4.3.2 Verovatnosna reprezentacija

Kažemo da nestandardna mera μ indukuje racionalnu relaciju ${\mid\!\sim}$ akko

$$\alpha {\mid\!\sim} \beta \ \text{ akko } \ \mu(\beta|\alpha) \approx 1 \text{ ili } \mu(\alpha) = 0.$$

CEM

Definicija 4.3.1 *Konačno aditivna verovatnosna mera $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]^*$ je CEM-mera akko*

$$\frac{\mu(\alpha)}{\mu(\beta)} \approx 0 \quad \text{or} \quad \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \approx 0$$

za sve $\alpha, \beta \in For_{\mathcal{P}}$ takve da $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, i $\mu(\alpha) \neq 0$ ili $\mu(\beta) \neq 0$.

Teorema 4.3.1 Neka je ${\mid\!\sim}$ racionalna relacija. Tada je ekvivalentno:

1. ${\mid\!\sim}$ je CEM-relacija;

2. Svaka mera μ koja indukuje ${\mid\!\sim}$ je CEM-mera.

Dokaz $2 \Rightarrow 1$: Neka je ${\mid\!\sim}$ racionalna relacija koja ne zadovoljava CEM, odnosno postoje α i β takvi da je $\alpha {\not\mid\!\sim} \beta$ i $\alpha {\not\mid\!\sim} \neg\beta$. Neka je μ bilo koja mera koja indukuje ${\mid\!\sim}$. Tada je

$$\frac{\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 1 \quad \text{i} \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 1. \tag{4.5}$$

Pošto je $\frac{\mu(\alpha\wedge\beta)}{\mu(\alpha)} + \frac{\mu(\alpha\wedge\neg\beta)}{\mu(\alpha)} = 1$, iz (4.5) sledi da

$$\frac{\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 0 \quad \text{i} \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 0.$$

Odatle je

$$\frac{\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)} \not\approx 0 \quad \text{i} \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)}{\mu(\alpha \wedge \beta)} \not\approx 0.$$

Takođe, $\alpha \wedge \beta$ i $\alpha \wedge \neg\beta$ su disjunktne formule, pa μ nije CEM-mera.

1 $\Rightarrow$ 2: Pretpostavimo da μ indukuje $\mid\!\sim$ i da postoje disjunktne formule β i γ takve da $\frac{\mu(\beta)}{\mu(\gamma)} \not\approx 0$ i $\frac{\mu(\gamma)}{\mu(\beta)} = k \not\approx 0$. Tada, $\mathrm{st}(k) > 0$. Ako je α formula $\beta \vee \gamma$, onda je

$$\mu(\beta|\alpha) = \frac{\mu(\beta)}{\mu(\beta) + \mu(\gamma)} = \frac{1}{k+1} \not\approx 1.$$

Slično, $\mu(\neg\beta|\alpha) = \frac{k}{k+1} \not\approx 1$. Sledi $\alpha \not\mid\!\sim \beta$ i $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$, pa $\mid\!\sim$ nije CEM-relacija. $\square$

Teorema 4.3.2 (Reprezentacija CEM) Preferencijalna relacija $\mid\!\sim$ zadovoljava CEM akko postoji CEM-mera μ koja indukuje $\mid\!\sim$.

Dokaz $\Rightarrow$: Pretpostavimo da $\mid\!\sim$ zadovoljava CEM. U prisustvu sistema P, CEM povlači RM. Prema teoremi Lemana i Magidora za racionalne relacije, postoji čista nestandardna mera μ takva da je

$$\alpha \mid\!\sim \beta \quad \text{akko} \quad \mu(\beta|\alpha) \approx 1 \text{ ili } \alpha = \bot$$

za sve $\alpha, \beta \in For_{\mathcal{P}}$. Prema teoremi 4.3.1, μ je CEM-mera.

$\Leftarrow$: Neka je μ CEM-mera koja indukuje $\mid\!\sim$. Ponovo, prema teoremi 4.3.1, $\mid\!\sim$ zadovoljava CEM. $\square$

DP

Definicija 4.3.2 *Konačno aditivna verovatnosna mera $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]^*$ je DP-mera akko*

$$\frac{\mu(\alpha)}{\mu(\beta)} \approx 0 \quad \text{ili} \quad \frac{\mu(\beta)}{\mu(\alpha)} \approx 0$$

za sve $\alpha, \beta \in For_{\mathcal{P}}$ takve da $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$, $\mu(\alpha) \neq 0$ ili $\mu(\beta) \neq 0$, i $\mu(\alpha) \approx 0$ i $\mu(\beta) \approx 0$.

Teorema 4.3.3 Neka je $\mid\!\sim$ racionalna relacija. Tada je ekvivalentno:

1. $\mid\!\sim$ je DP-relacija;
2. Svaka mera μ koja indukuje $\mid\!\sim$ je DP-mera.

Dokaz U dokazu koristimo činjenicu da je relacija DP-relacija akko zadovoljava RM i WD.

$2 \Rightarrow 1$: Pretpostavimo da racionalna relacija $\mid\!\sim$ ne zadovoljava DP i neka je μ ma koja mera koja indukuje $\mid\!\sim$. Tada postoje α i β takvi da je

$$\mu(\alpha) \approx 0, \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 1 \quad \text{i} \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)}{\mu(\alpha)} \not\approx 1. \tag{4.6}$$

Možemo dokazati kao i u dokazu teoreme 4.3.1, da važi

$$\frac{\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)} \not\approx 0 \quad \text{i} \quad \frac{\mu(\alpha \wedge \neg\beta)}{\mu(\alpha \wedge \beta)} \not\approx 0.$$

Pošto je $\mu(\alpha \wedge \beta), \mu(\alpha \wedge \neg\beta) \leqslant \mu(\alpha) \approx 0$, μ nije DP-mera.

$1 \Rightarrow 2$: Slično dokazu $1 \Rightarrow 2$ teoreme 4.3.1, uz dodatni uslov $\mu(\beta) \approx 0$ i $\mu(\gamma) \approx 0$. □

Teorema 4.3.4 (Reprezentacija DP) Preferencijalna relacija $\mid\!\sim$ zadovoljava DP akko postoji DP-mera μ koja indukuje $\mid\!\sim$.

Dokaz Sličan dokazu teoreme 4.3.2. □

FD

Definicija 4.3.3 *Konačno aditivna verovatnosna mera* $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]^*$ *je FD-mera akko je* μ *DP-mera takva da je* $\mu(\alpha) \approx 0$ *ili* $\mu(\beta) \approx 0$ *ili* $\mu(\gamma) \approx 0$, *kad god su svake dve od formula* α, β *i* γ *disjunktne.*

Teorema 4.3.5 Neka je $\mid\!\sim$ racionalna relacija. Tada je ekvivalentno:

1. $\mid\!\sim$ je FD-relacija;
2. Svaka mera μ koja indukuje $\mid\!\sim$ je FD-mera.

Dokaz 2 $\Rightarrow$ 1: Neka je μ FD-mera koja indukuje $\mid\!\sim$. Neka je $\alpha \mid\!\sim \beta \vee \gamma$, $\alpha \not\mid\!\sim \beta$ i $\alpha \not\mid\!\sim \gamma$. Dalje, neka je

$$\begin{array}{ll} a = \mu(\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma), & b = \mu(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma), \\ c = \mu(\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma), & d = \mu(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma). \end{array}$$

Tada je

(1) $\mu(\beta|\alpha) = \frac{b+d}{a+b+c+d} \not\approx 1$

(2) $\mu(\gamma|\alpha) = \frac{c+d}{a+b+c+d} \not\approx 1$

(3) $\mu(\beta \vee \gamma|\alpha) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \approx 1.$

Iz(3) direktno sledi $a \approx 0$. Primetimo da je $\mu(\alpha) = a + b + c + d$.
Tvrđenje 1. $\mu(\alpha) \not\approx 0$.

Zaista, ako važi $\mu(\alpha) \approx 0$, onda je $\ll$ totalno uređenje na $\{a, b, c, d\}$ pošto je μ i DP-mera. Iz (1) sledi da ni b ni d nisu maksimalni elementi od $\langle\{a, b, c, d\}, \ll\rangle$; slično, ni c nije maksimalan zbog (2), pa je a maksimum. Sa druge strane, maksimalnost a povlači $\mu(\beta \vee \gamma|\alpha) \approx 0$, što je u kontradikciji sa (3).
Tvrđenje 2. $b \not\approx 0$ i $c \not\approx 0$.

Zaista, ako je $b \approx 0$, onda $\frac{c+d}{a+b+c+d} \approx \frac{c+d}{c+d} = 1$ (a je infinitezimala) što nije u skladu sa (2). Primetimo da je $b + c + d \not\approx 0$, na osnovu tvrđenja 1. Slično, $c \approx 0$ nije u skladu sa (1).

Tvrđenje 3. $\mu(\neg\alpha) \approx 0$.

Ovo je direktna posledica prethodnog tvrđenja i činjenice da su $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma$ i $\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma$ disjunktne formule i da je μ FD-mera.

Konačno, prema prethodnim tvrđenjima važi

$$\begin{aligned}\mu(\neg\gamma|\neg\beta) &= \frac{\mu(\neg(\beta \vee \gamma))}{\mu(\neg\beta)} \leqslant \frac{\mu(\neg\alpha) + \mu(\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma)}{\mu(\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma)} \\ &= \frac{\mu(\neg\alpha) + a}{c} \approx 0,\end{aligned}$$

odnosno $\neg\beta \mathrel{|\!\!\sim} \gamma$.

$1 \Rightarrow 2$: Tvrđenje ćemo dokazati kontrapozicijom. Sa jedne strane, pretpostavimo da μ indukuje $\mathrel{|\!\!\sim}$ i da μ nije DP-mera. Po teoremi 4.3.3, $\mathrel{|\!\!\sim}$ nije DP-relacija, pa nije ni FD-relacija. Sa druge strane, pretpostavimo da μ indukuje $\mathrel{|\!\!\sim}$, μ je DP-mera i postoje disjunktne formule β, γ i δ takve da $\mu(\beta) \not\approx 0$, $\mu(\gamma) \not\approx 0$ i $\mu(\delta) \not\approx 0$. Neka je α formula $\beta \vee \gamma$. Lako se vidi da $\alpha \mathrel{|\!\!\sim} \beta \vee \gamma$, $\alpha \mathrel{|\!\!\not\sim} \beta$ i $\alpha \mathrel{|\!\!\not\sim} \gamma$, ali

$$\mu(\neg\gamma|\neg\beta) = \frac{\mu(\neg(\beta \vee \gamma))}{\mu(\neg\beta)} \geqslant \frac{\mu(\delta)}{\mu(\neg\beta)} \not\approx 0,$$

pa $\neg\beta \mathrel{|\!\!\not\sim} \gamma$. Dakle, $\mathrel{|\!\!\sim}$ nije FD-relacija. □

Teorema 4.3.6 (Representacija FD) Preferencijalna relacija $\mathrel{|\!\!\sim}$ zadovoljava FD akko postoji FD-mera μ koja indukuje $\mathrel{|\!\!\sim}$.

Dokaz Sličan dokazu teoreme 4.3.2. □

4.3.3 ε, μ preferencijalna relacija

Ovo poglavlje je započelo verovanjem da svaka prirodna verovatnosna reprezentacija nemonotonih relacija izvođenja treba da uključi uslovne verovatnoće. Zna se da $\mu(\alpha|\beta) \approx 1$ ne može da se koristi za relacije koje nisu racionalne. Uvedena relacija $\mathrel{|\!\!\sim}_{\varepsilon,\mu}$ predstavlja pionirski pokušaj da se nestandardnim verovatnosnim merama "siđe ispod" racionalne monotonosti. Definicija relacije $\mathrel{|\!\!\sim}_{\varepsilon,\mu}$ je zapravo modifikacija uslova $\mu(\beta|\alpha) \geqslant 1 - \varepsilon$.

U ovom poglavlju, ε će biti fiksirana strogo pozitivna infinitezimala, a $\mu : For_{\mathcal{P}} \longrightarrow [0,1]^*$ fiksirana čista nestandardna verovatnosna mera. ε, μ relaciju $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$ na $For_{\mathcal{P}}$ definišemo na sledeći način:

$$\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \beta \text{ akko } \varepsilon \not\lll \mu(\neg\beta|\alpha) \text{ ili } \mu(\alpha) = 0.$$

Sada ćemo precizno ispitati položaj uvedene relacije u hijerarhiji preferencijalnih relacija (iz poglavlja 4.3.1).

Teorema 4.3.7 $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$ je preferencijalna relacija.

Dokaz U ispitivanju pravila REF–CM razmatraćemo samo netrivijalne slučajeve, bez pojavljivanja $\perp$ ili $\top$.

Pošto je $\mu(\alpha|\alpha) = 1$ i μ je verovatnosna mera, imamo da je $\mu(\neg\alpha|\alpha) = 0$, pa je $\varepsilon \not\lll \mu(\neg\alpha|\alpha)$, odnosno $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \alpha$. Dakle, važi refleksivnost. Dokaz RW i LLE ćemo izostaviti, zbog jednostavnosti.

And. Pretpostavimo da je $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \beta$ i $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$. Tada, $\varepsilon \not\lll \mu(\neg\beta|\alpha)$ i $\varepsilon \not\lll \mu(\neg\gamma|\alpha)$, pa

$$\varepsilon \not\lll \mu(\neg\beta|\alpha) + \mu(\neg\gamma|\alpha).$$

Takođe,

$$\mu(\neg(\beta \wedge \gamma)|\alpha) = \mu(\neg\beta \vee \neg\gamma|\alpha) \leqslant \mu(\neg\beta|\alpha) + \mu(\neg\gamma|\alpha),$$

pa $\varepsilon \not\lll \mu(\neg(\beta \wedge \gamma)|\alpha)$, odnosno $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \beta \wedge \gamma$.

Or. Pretpostavimo da je $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$ i $\beta \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$. Prema definiciji $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$, postoje pozitivni $r, s \in \mathbb{R}^*$ takvi da $r \not\approx 0$, $s \not\approx 0$, $\varepsilon/\mu(\neg\gamma|\alpha) = r$ i $\varepsilon/\mu(\neg\gamma|\beta) = s$. Odavde izvodimo

$$\mu(\neg\gamma \wedge \alpha) = \frac{\varepsilon}{r}\mu(\alpha) \text{ i } \mu(\neg\gamma \wedge \beta) = \frac{\varepsilon}{s}\mu(\beta).$$

Pošto

$$\frac{1}{2}\left(\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)\right) \leqslant \mu(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leqslant \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2) \tag{4.7}$$

za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in For_{\mathcal{P}}$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\mu(\neg\gamma|\alpha \vee \beta) &= \frac{\mu((\neg\gamma \wedge \alpha) \vee (\neg\gamma \wedge \beta))}{\mu(\alpha \vee \beta)} \\
&\leqslant \frac{\mu(\neg\gamma \wedge \alpha) + \mu(\neg\gamma \wedge \beta)}{\frac{1}{2}(\mu(\alpha) + \mu(\beta))} \\
&= \frac{\frac{2\varepsilon}{r}\mu(\alpha) + \frac{2\varepsilon}{s}\mu(\beta)}{\mu(\alpha) + \mu(\beta)} \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{\min(r,s)},
\end{aligned}$$

odakle je

$$\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha \vee \beta)} \geqslant \frac{\min(r,s)}{2},$$

odnosno $\varepsilon \not\ll \mu(\neg\gamma|\alpha\vee\beta)$, što je po definiciji $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$ ekvivalentno sa $\alpha\vee\beta \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$.

CM. Neka je $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \beta$ i $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$. Iz $\varepsilon \not\ll \mu(\neg\beta|\alpha)$ sledi da je $\mu(\neg\beta|\alpha) \approx 0$, pa je $\mu(\beta|\alpha) \approx 1$. Dalje,

$$\mu(\neg\gamma|\alpha \wedge \beta) = \frac{\mu(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma)}{\mu(\alpha \wedge \beta)} = \frac{\mu(\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma)/\mu(\alpha)}{\mu(\alpha \wedge \beta)/\mu(\alpha)} = \frac{\mu(\beta \wedge \neg\gamma|\alpha)}{\mu(\beta|\alpha)},$$

pa je

$$\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha \wedge \beta)} = \frac{\varepsilon \cdot \mu(\beta|\alpha)}{\mu(\beta \wedge \neg\gamma|\alpha)} \geqslant \frac{\varepsilon \cdot \mu(\beta|\alpha)}{\mu(\neg\gamma|\alpha)} \not\approx 0,$$

pošto je $\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha)} \not\approx 0$ i $\mu(\beta|\alpha) \approx 1$. Konačno, prema definiciji $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$, imamo $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$.

□

Teorema 4.3.8 $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$ zadovoljava DR i NR.

Dokaz Pretpostavimo da $\varepsilon \ll \mu(\neg\gamma|\alpha)$ i $\varepsilon \ll \mu(\neg\gamma|\beta)$. Tada postoje pozitivne infinitezinale δ i η takve da $\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha)} = \delta$ i $\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\beta)} = \eta$, što je ekvivalentno sa $\mu(\neg\gamma \wedge \alpha) = \frac{\varepsilon}{\delta}\mu(\alpha)$ i $\mu(\neg\gamma \wedge \beta) = \frac{\varepsilon}{\eta}\mu(\beta)$. Dalje, prema (4.7),

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha\vee\beta)} &= \frac{\varepsilon\mu(\alpha\vee\beta)}{\mu((\neg\gamma\wedge\alpha)\vee(\neg\gamma\wedge\beta))}\\
&\leqslant \frac{2\varepsilon(\mu(\alpha)+\mu(\beta))}{\mu(\neg\gamma\wedge\alpha)+\mu(\neg\gamma\wedge\beta)}\\
&= \frac{2\varepsilon(\mu(\alpha)+\mu(\beta))}{\frac{\varepsilon}{\delta}\mu(\alpha)+\frac{\varepsilon}{\eta}\mu(\beta)}\\
&\leqslant \frac{2\varepsilon(\mu(\alpha)+\mu(\beta))}{\frac{\varepsilon}{\max(\delta,\eta)}(\mu(\alpha)+\mu(\beta))}\\
&= 2\max(\delta,\eta)\\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

odakle $\alpha\vee\beta \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$. Pošto DR povlači NR, tvrđenje je dokazano. □

Teorema 4.3.9 $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$ ne mora da zadovoljava WD, RC, DP, FD, CEM, M, RM i WRM.

Dokaz prema poglavlju 4.3.1, dovoljno je dokazati da ne važe WD i WRM. Za dokaz postojanja dole konstruisanih mera, pozivamo se na [90].

Konstruišimo kontraprimer za WD. Pretpostavimo da je μ čista mera za koju je $\mu(p_0) = 2\mu(p_0\wedge p_1) = 1-\varepsilon$. Tada je:

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{\mu(\neg p_0|\top)} = \frac{\varepsilon}{1-\mu(p_0)} = \frac{\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)} = 1;\\
&\frac{\varepsilon}{\mu(\neg p_1|p_0)} = \frac{\varepsilon}{1-\mu(p_1|p_0)} = \frac{\varepsilon\mu(p_0)}{\mu(p_0)-\mu(p_0\wedge p_1)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)} = 2\varepsilon;\\
&\frac{\varepsilon}{\mu(p_1|p_0)} = \frac{\varepsilon\mu(p_0)}{\mu(p_0\wedge p_1)} = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $\top \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \neg p_0$, $p_0 \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} p_1$ i $p_0 \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \neg p_1$, pa WD ne važi.

Sada ćemo konstruisati dokaz za WRM. Neka su κ i λ infinitezimale za koje važi $\varepsilon \ll \kappa$ i $\varepsilon \ll \lambda$. Dalje, neka su α, β i γ formule za koje $\alpha\wedge\neg\gamma$

povlači $\alpha \wedge \beta$ (dakle, $\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \beta$ je ekvivalentno sa $\alpha \wedge \neg\gamma$), $\mu(\alpha) = \kappa$, $\mu(\alpha \wedge \neg\gamma) = \varepsilon\kappa$ i $\mu(\alpha \wedge \beta) = \lambda\kappa$. Kako je $\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \beta$ ekvivalentno sa $\alpha \wedge \neg\gamma$, dobijamo $\mu(\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \beta) = \mu(\alpha \wedge \neg\gamma) = \varepsilon\kappa$.

- $\alpha \mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$: $\dfrac{\varepsilon}{\mu(\alpha|\top)} = \dfrac{\varepsilon}{\kappa} \approx 0$;
- $\alpha \wedge \beta \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \gamma$: $\dfrac{\varepsilon}{\mu(\neg\gamma|\alpha \wedge \beta)} = \dfrac{\varepsilon\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \beta)} = \dfrac{\varepsilon\mu(\alpha \wedge \beta)}{\mu(\alpha \wedge \neg\gamma \wedge \beta)} =$
  $\dfrac{\varepsilon\lambda\kappa}{\varepsilon\kappa} = \lambda \approx 0$;
- $\alpha \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \neg\beta$: $\dfrac{\varepsilon}{\mu(\beta|\alpha)} = \dfrac{\varepsilon\mu(\alpha)}{\mu(\alpha \wedge \beta)} = \dfrac{\varepsilon\kappa}{\lambda\kappa} = \dfrac{\varepsilon}{\lambda} \approx 0$;
- $\top \not\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu} \neg\alpha$: $\dfrac{\varepsilon}{\mu(\alpha|\top)} = \dfrac{\varepsilon}{\kappa} \approx 0$.

Dakle, WRM ne važi. □

4.3.4 Veza sa verovatnosnim logikama

Verovatnosna reprezentacija nekih nemonotonih relacija može se videti kao prirodno produženje istraživanja Lemana i Magidora [63]. Ona predstavlja finu vezu između uopštenog proučavanja nemonotonog rezonovanja i verovatnosnih logika. U verovatnosnoj logici Ax_{LPPS} iz [91] moguće je formalno reprezentovati racionalne relacije. Na osnovu rezultata izloženih u ovoj glavi, moguće je razviti logiku sa bogatijom sintaksom, u kojoj su prisutne aritmetičke operacije, u kojoj bi bilo moguće reprezentovati relacije CEM, DP, FD i $\mid\!\sim_{\varepsilon,\mu}$.

4.4 Realno-vrednosna logika za modelovanje difolta

Kao što je već rečeno, rezultat Lemana i Magidora [63] omogućio je aksiomatizaciju verovatnosne logike, sa Hardijevim poljem kao kodomenom, koja može da modeluje difolte. U ovoj glavi predstavljena je jednostavna realno-vrednosna verovatnosna logika koja može da modeluje preferencijalne relacije.

4.4.1 Verovatnoća sa skokovima

Nekoliko godina posle nestandardne semantike za racionalne relacije iz [63], razvijena je i standardna semantika koja koristi specijalnu klasu verovatnosnih mera, takozvane verovatnoće sa skokovima [6]. Tu se pretpostavlja da je skup iskaznih slova $\mathcal{P}$ konačan.

Verovatnoća sa skokovima je čista verovatnosna mera koja zadovoljava uslove

(1) $\sum_{at' \in At_{\mathcal{P}}, \mu(at') < \mu(at)} \mu(at') < \mu(at)$, za sve $at \in At_{\mathcal{P}}$,

(2) $\mu(at) = \mu(at')$ akko $\vdash at \leftrightarrow at'$, za sve $at \in At_{\mathcal{P}}$,

pri čemu je $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, a $At_{\mathcal{P}} = \{\pm p_1 \pm p_2 \pm \cdots \pm p_n | +p_i = p_i, -p_i = \neg p_i\}$ je skup atoma od $For_{\mathcal{P}}$. Ako se ograničimo na verovatnoće sa skokovima, onda se $\alpha \mid\!\sim \beta$ može reprezentovati uslovom

$$\mu(\beta|\alpha) > \mu(\neg\beta|\alpha), \tag{4.8}$$

ili, ekvivalentno,

$$\mu(\beta|\alpha) > \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

U ovoj glavi ćemo prikazati logiku sa jednostavnom sintaksom i semantikom, ali ipak dovoljno izražajnu da se u njoj može modelovati $\mid\!\sim$. Logika će sadržati operatore oblika $P_{\geq r}$, kao i operator kvalitativne verovatnoće $\preceq$ iz [82], pri čemu $\alpha \preceq \beta$ znači da je "β verovatno bar koliko i α". Tada se uslov (4.8) može izraziti kao

$$\mu(\beta \wedge \alpha) > \mu(\neg\beta \wedge \alpha), \tag{4.10}$$

pri čemu α nije kontradikcija.

4.4.2 Sintaksa i semantika za $LBSP$

Neka je $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ skup iskaznih slova, $For_{\mathcal{P}}$ skup formula i $At_{\mathcal{P}}$ skup atoma od $For_{\mathcal{P}}$. Skup formula For logike $LBSP$ je najmanji skup za koji važi:

- $\{P_{\geqslant r}\alpha, \alpha \preceq \beta \mid \alpha, \beta \in For_{\mathcal{P}}, r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\} \subseteq For$,

- ako $\phi, \psi \in For$, onda $\phi \wedge \psi, \neg\phi \in For$.

Pored već korišćenih pojednostavljenja zapisa, koristimo i zamene:

- $\alpha \prec \beta$ je $\alpha \preceq \beta \wedge \neg\beta \preceq \alpha$,

- $\alpha \succeq \beta$ i $\alpha \succ \beta$ se definišu na sličan način.

Semantiku za $LBSP$ čini klasa verovatnoća sa skokovima na $For_{\mathcal{P}}$, u oznaci $Meas^{\mathcal{P}}_{BS}$. Za $\mu \in Meas^{\mathcal{P}}_{BS}$, zadovoljenje se definiše na logičan način:

- $\mu \models P_{\geqslant r}\alpha$ ako $\mu(\alpha) \geqslant r$,

- $\mu \models \alpha \preceq \beta$ ako $\mu(\alpha) \leqslant \mu(\beta)$,

- $M \models \neg\phi$ i $M \models \phi \wedge \psi$ se definišu kao i ranije.

Zadovoljivost i valjanost se definišu uobičajeno.

Napomena 4.4.1 *Primetimo da, prema (4.10), formula*

$$(\alpha \wedge \neg\beta \prec \alpha \wedge \beta) \vee P_{=0}\alpha$$

modeluje $\alpha \mid\!\sim \beta$. □

4.4.3 Aksiomatizacija i potpunost

Aksiome

A1 instance iskaznih teorema

A2 $P_{\geqslant 0}\alpha$

A3 $P_{=1}\alpha$, ako je α tautologija

A4 $P_{>0}\alpha$, ako α nije kontradikcija

A5 $P_{\leqslant r}\alpha \rightarrow P_{<s}\alpha$, za $r < s$

A6 $P_{<r}\alpha \rightarrow P_{\leqslant r}\alpha$

A7 $P_{=1}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (P_{\geq r}\alpha \rightarrow P_{\geq r}\beta)$

A8 $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \rightarrow P_{\geqslant \min\{1,r+s\}}(\alpha \vee \beta)$

A9 $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \rightarrow P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, za $r + s \leqslant 1$

A10 $(\alpha \preceq \beta \wedge P_{\geqslant r}\alpha) \rightarrow P_{\geqslant r}\beta$

A11 $(\bigwedge_{at' \in S} at \succ at') \rightarrow at \succ \bigvee_{at' \in S} at'$, za sve $S \subseteq At_{\mathcal{P}}$

A12 $\bigwedge_{at, at' \in At_{\mathcal{P}}, at \neq at'} \neg(at \preceq at' \wedge at' \preceq at)$

Pravila izvođenja

R1 iz α i $\alpha \rightarrow \beta$ izvedi β

R2 iz $\varphi \rightarrow P_{\geqslant r - \frac{1}{k}}\alpha$ za svaki $k \geqslant \frac{1}{r}$ izvedi $\varphi \rightarrow P_{\geqslant r}\alpha$

R3 iz $\varphi \rightarrow (P_{\geqslant r}\alpha \rightarrow P_{\geqslant r}\beta)$ za svaki $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ izvedi $\varphi \rightarrow \alpha \preceq \beta$

Potpunost sistema se dokazuje na način sličan onom koji je prezentovan u drugoj glavi, u kombinaciji sa [82], zbog čega preskačemo detalje. Dokažimo samo

$\sum_{at' \in At_{\mathcal{P}}, \mu(at') < \mu(at)} \mu(at') < \mu(at)$, za sve $at \in At_{\mathcal{P}}$,

pri čemu se μ definiše pomoću odgovarajućeg kompletiranja T^*, kao

$$\mu(\alpha) = \sup\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P_{\geqslant r}\alpha\}.$$

Dakle, neka je $at \in At_{\mathcal{P}}$ i neka S označava skup $\{at' \in At_{\mathcal{P}} | \ \mu(at') < \mu(at)\}$. Ako je $at' \in S$, onda $\{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P_{\geqslant r}at'\} \subseteq \{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid T^* \vdash P_{\geqslant r}at\}$. Dakle, $T^* \vdash P_{\geqslant r}at' \to P_{\geqslant r}at$, za svaki $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Pomoću pravila R3 (za $\phi = \top$) dobijamo

$$T^* \vdash at' \preceq at. \tag{4.11}$$

Ako je $T^* \vdash at \preceq at'$, prema A10 imamo $T^* \vdash P_{\geqslant r}at \to P_{\geqslant r}at'$ (za sve r), pa je $\mu(at) \leq \mu(at')$; kontradikcija. Po maksimalnosti T^* je

$$T^* \vdash \neg(at \preceq at'). \tag{4.12}$$

Kako (4.11) i (4.12) povlače $T^* \vdash at \succ at'$, na osnovu aksiome A11 dobijamo

$$T^* \vdash at \succ \bigvee_{at' \in S} at'. \tag{4.13}$$

Posebno, $T^* \vdash at \succeq \bigvee_{at' \in S} at'$, pa je prema A10 $T^* \vdash P_{\geqslant r} \bigvee_{at' \in S} at' \to P_{\geqslant r}at$. Dakle, $\mu(\bigvee_{at' \in S} at') \leq \mu(at)$. Sa druge strane, ako je $\mu(at) \leq \mu(\bigvee_{at' \in S} at')$, na osnovu definicije μ imamo $T^* \vdash P_{\geqslant r}at \to P_{\geqslant r} \bigvee_{at' \in S} at'$, za sve r, pa je po R3 $T^* \vdash at \preceq \bigvee_{at' \in S} at'$; što protivreči (4.13). Sada tvrđenje sledi iz jednakosti $\mu(\bigvee_{at' \in S} at') = \sum_{at' \in At_{\mathcal{P}}, \mu(at') < \mu(at)} \mu(at')$.

4.4.4 Veza sa logikama LPP_2 i $LPP_{2,\preceq}$

U ovom poglavlju poredimo logiku $LBSP$ sa logikama LPP_2 i $LPP_{2,\preceq}$ (videti [77, 82]). Podrazumevamo da je $|\mathcal{P}| \leqslant \aleph_0$. Za logiku $\mathcal{L}$, odgovarajuću relaciju izvođenja označavaćemo sa $\vdash_{\mathcal{L}}$.

Skup formula logike LPP_2 je $For_{\mathcal{P}} \cup For_1$, gde je For_1 skup formula iz For u kojima se simbol $\preceq$ ne javlja. Nije dozvoljeno mešanje klasičnih i verovatnosnih formula, ni ponavljanje verovatnosnog operatora. Logika LPP_2 sadrži aksiome A1, A2, A5, A6, A8 i A9, pravila R1 i R2, kao i pravilo:

R4 Iz α izvedi $P_{\geqslant 1}\alpha$.

Sa LP_2 označavaćemo podlogiku od $LBSP$ sa skupom formula For_1 i aksiomama A1–A3, A5–A9 i pravilima izvođenja R1 i R2. Prema sledećoj teoremi,ako identifikujemo klasično reprezentovano znanje prikazano formulom $\alpha \in For_{\mathcal{P}}$ sa verovatnosnim, datim formulom $P_{\geqslant 1}\alpha \in For_1$, jačina logike LP_2 jednaka je jačini logike LPP_2.

Teorema 4.4.1 *Neka je $T \subseteq For_{\mathcal{P}} \cup For_1$ i neka je $T_1 = \{P_{\geqslant 1}\alpha \mid \alpha \in T \cap For_{\mathcal{P}}\} \cup (T \cap For_1)$. Tada je:*

1. *ako $T \vdash_{LPP_2} \alpha$, onda $T_1 \vdash_{LP_2} P_{\geqslant 1}\alpha$, $\alpha \in For_{\mathcal{P}}$,*

2. *$T \vdash_{LPP_2} \phi$ akko $T_1 \vdash_{LP_2} \phi$, $\phi \in For_1$.*

Dokaz (1): Pretpostavimo da $T \vdash_{L_{LPP_2}} \alpha$. Onda $T \cap For_{\mathcal{P}} \vdash_{L_{LPP_2}} \alpha$ i svaki dokaz za α je konačan. Neka je $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \alpha$ dokaz formule α. Primetimo da je svaka formula α_i ili instanca aksiome A1, ili pripada skupu $T \cap For_{\mathcal{P}}$, ili je dobijena iz prethodnih formula pravilom izvođenja R1. Pretpostavimo da je pravilo R1 korišćeno u dokazu m puta. Neka je α_k prva formula u dokazu dobijena pomoću R1. Tada postoje $i, j < k$ i β takvi da je $\alpha_i = \beta$ i $\alpha_j = \beta \to \alpha_k$. Iz $P_{=1}(\beta \to \alpha_k)$ i $A7_1 = P_{=1}(\beta \to \alpha_k) \to (P_{=1}\beta \to P_{=1}\alpha_k)$ (instanca aksiome A7) zaključujemo (prema R1) $(P_{=1}\beta \to P_{=1}\alpha_k)$. Iz prethodne formule i $P_{=1}\beta$ imamo $P_{=1}\alpha_k$. Dakle, $A7_1, P_{=1}\alpha_i, P_{=1}\alpha_j, P_{=1}\alpha_k$ je dokaz za $P_{=1}\alpha_k$ in LP_2. Nastavljajući, dobijamo da je $A7_1, A7_2, \ldots, A7_m, P_{=1}\alpha_0, P_{=1}\alpha_1, P_{=1}\alpha_2, \ldots, P_{=1}\alpha_n = P_{=1}\alpha$ dokaz za $P_{=1}\alpha$, pa $\{P_{\geqslant 1}\alpha \mid \alpha \in T \cap For_{\mathcal{P}}\} \vdash_{LP_2} P_{\geqslant 1}$.
(2): Neka je $T \vdash_{L_{LPP_2}} \phi$ i neka je $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\lambda = \phi$ dokaz za ϕ ($\Theta_i \in For_{\mathcal{P}} \cup For_1$). Tada modifikujemo dokaz, kao i u (1), zamenjujući formule oblika $\Theta_j \in For_{\mathcal{P}}$ sa $P_{\geqslant 1}\Theta_j$, kao i dodajući instance aksiome A7 pri svakoj primeni R1.

Za suprotan smer, primetimo da su aksiome A3 i A7 teoreme logike LPP_2.
□

Logika $LPP_{2,\preceq}$ ima skup formula $For_{\mathcal{P}} \cup For$ i sadrži aksiome A1, A2, A5, A6, A8, A9, A10 i aksiomu

A13 $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant r}\beta) \to \alpha \preceq \beta$.

Pravila izvođenja $LPP_{2,\preceq}$ su R1–R4.

Napomena 4.4.2 *Aksioma A13 je teorema logike LBSP i redundantna u* $LPP_{2,\preceq}$. *Zaista, iz* $P_{\leqslant r_1}\alpha \wedge P_{\geqslant r_1}\beta$ *dobijamo* $P_{\leqslant r_1}\alpha$, $P_{\geqslant r_1}\beta$ *and* $P_{\geqslant r_1}\alpha \to P_{\geqslant r_1}\beta$.

- *Neka je* $r \in (r_1, 1] \cap \mathbb{Q}$. *iz* $P_{\leqslant r_1}\alpha$, *prema A5 dobijamo* $P_{<r}\alpha$, *odnosno* $\neg P_{\geqslant r}\alpha$. *Dakle,* $P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta$.
- *Neka je* $r \in [0, r_1) \cap \mathbb{Q}$. *Iz* $P_{\geqslant r_1}\beta$ *dobijamo* $P_{\leqslant 1-r_1}\neg\beta$. *Prema aksiomi A5 je* $P_{<1-r}\neg\beta$. *Dakle,* $P_{\leqslant 1-r}\neg\beta$, *odnosno* $P_{\geqslant r}\beta$. *konačno,* $P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta$.

Dokazali smo da $\vdash (P_{\leqslant r_1}\alpha \wedge P_{\geqslant r_1}\beta) \to P_{\geqslant r}\alpha \to P_{\geqslant r}\beta$ *važi za svako* $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. *Na osnovu R3 je* $\vdash (P_{\leqslant r_1}\alpha \wedge P_{\geqslant r_1}\beta) \to \alpha \preceq \beta$. □

Neka je $LP_{2,\preceq}$ podlogika od $LBSP$ sa aksiomama A1–A3, A5–A10 i pravilima izvođenja R1–R3. Vidimo da je aksiomatizacija za $LP_{2,\preceq}$ dobijena dodavanjem aksiome A10 i pravila izvođenja R3 aksiomatskom sistemu logike LP_2. Prema Napomeni 4.4.2, možemo primetiti isti odnos za $LP_{2,\preceq}LP_2$ i $LP_{2,\preceq}LP_{2,\preceq}$. Na osnovu teoreme 4.4.1 dobijamo:

Posledica 4.4.1 *Neka je* $T \subseteq For_{\mathcal{P}} \cup For$, *i* $T_1 = \{P_{\geqslant 1}\alpha \mid \alpha \in T \cap For_{\mathcal{P}}\} \cup (T \cap For)$. *Tada:*

1. *ako* $T \vdash_{LPP_{2,\preceq}} \alpha$, *onda* $T_1 \vdash_{LP_{2,\preceq}} P_{\geqslant 1}\alpha$, $\alpha \in For_{\mathcal{P}}$,
2. $T \vdash_{LPP_{2,\preceq}} \phi$ *akko* $T_1 \vdash_{LP_{2,\preceq}} \phi$, $\phi \in For$. □

Literatura

[1] M. Abadi. The power of temporal proofs. *Theoretical Computer Science* vol. 65, 35–83, 1989.

[2] L. Amgoud, S.Kaci, *An argumentation framework for merging conflicting knowledge bases*, *International Journal of Approximate Reasoning* 45 (2007), pp. 321–340.

[3] A. Aziz, V. Singhal, F. Balarin, R. K. Brayton, and A. L. Sangiovanni-Vincentelli. It usually works: The temporal logic of stochastic systems. In *7th. International Workshop on Computer-Aided Verification.* LNCS, nr. 939, Springer-Verlag, 1995.

[4] J. Barwise, *Admissible Sets And Structures*, Springer, Berlin (1977).

[5] C. Beierle, G. Kern-Isberner. The Relationship of the Logic of Big-Stepped Probabilities to Standard Probabilistic Logics. *LNCS* 5956: 191–210, 2010.

[6] S. Benferhat, D. Duboas and H. Prade. Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. *Journal of Logic and Computation*, 9(6): 873–895, 1999.

[7] van Benthem, J.: The logic of time, Reidel, Dordrecht, 1972.

[8] H. Bezzazi, R. Pino Pérez. Rational Transitivity and its models. In: *Proceedings of the 26th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 160–165, IEEE Computer Society Press, 1996.

[9] H. Bezzazi, D. Makinson, R. Pino Pérez. Beyond rational monotony: some strong non-Horn rules for nonmonotonic inference relations. *Journal of Logic and Computation*, 7(5): 605–631, 1997.

[10] A. Bianco and L. de Alfaro. Model checking of probabilistic and nondeterministic systems. In *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, LNCS 1026, 499–512, Springer-Verlag, 1995.

[11] V. Biazzo, A. Gilio, T. Lukasiewicz, G. Sanfilippo, *Probabilistic logic under coherence, model theoretic probabilistic logic, and default reasoning in system P*, *Journal of Applied Non-Classical Logics* 12(2) (2002), pp. 189–213.

[12] J. Burgess. Axioms for tense logic. I. "Since" and "until". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 23 (4), 367 – 374, 1982.

[13] J. Burgess. Logic and time. *The journal of symbolic logic* vol. 44, no. 4, 566 – 582, 1979.

[14] J. Burgess. Basic tense logic. In D. Gabbay, F. Guenthner, editors *Handbook of philosophical logic* vol II, 89 – 133, D. Reidel Publishing Compaany, 1984.

[15] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, 3rd ed. North-Holland, Amsterdam (1990).

[16] D. Doder. A logic with big-stepped probabilities that can model nonmonotonic reasoning of system P. *Publications de l'Institut Mathématique*, prihvaćen za štampu.

[17] D. Doder, M. Rašković, Z. Marković, Z. Ognjanović. Measures of inconsistency and defaults. *International Journal of Approximate Reasoning*,51: 832–845, 2010.

[18] D. Doder, Z. Ognjanović and Z. Marković. An Axiomatization of a First-order Branching Time Temporal Logic. *Journal of Universal Computer Science*, vol. 16, no. 11, 1439–1451, 2010.

[19] D. Doder, Z. Marković, Z. Ognjanović, A. Perović and M. Rašković. A Probabilistic Temporal Logic That Can Model Reasoning about Evidence. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5956, 9–24, 2010.

[20] D. Doder, B. Marinković, P.Maksimović and A. Perović . A Logic with Conditional Probability Operators. *Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle Série, Beograd*, 87(101), 85–96, 2010.

[21] D. Doder, A. Perović and Z. Ognjanović. Probabilistic Approach to Nonmonotonic Consequence Relations. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Springer, vol. 6717, 459–471, 2011.

[22] D. Dubois, H. Fargier and H. Prade. Ordinal and Probabilistic Representations of Acceptance. *J. Artificial Intelligence Research* 22: 23–56, 2004.

[23] D. Dubois and H. Prade, *Conditional objects, possibility theory and default rules*, In: Conditionals: From Philosophy to Computer Science (G. Crocco et al., eds.), Oxford University Press (1995), 311–346.

[24] D. Dubois, J. Lang, H. Prade, *Possibilistic logic*, in: *Handbook of Logic in Artificial Intellicence and Logic Programming*, Vol. 3, ed. D. M. Gabbay et al., Oxford University Press (1994), pp. 439–513.

[25] P. M. Dung, *On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games*, *Artificial Intelligence* 77 (1995), pp. 321–357.

[26] E. Emerson, E. Clarke. Using branching time logic to synthesize synchronization skeletons. *Sci. Comput. Program.* 2, 241–266, 1982.

[27] E. Emerson, J. Halpern. 'Sometimes' and 'not never' revisited: on branching versus linear time. Journal of the ACM 33 (1986), 151–178.

[28] E. Emerson, A. Sistla. Deciding full branching time logic. Information and Control 61 (1984), 175–201.

[29] E. Emerson. Temporal and Modal Logic. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B: Formal Models and Sematics.* 995–1072, North-Holland Pub. Co./MIT Press, 1990.

[30] R. Fagin, J. Halpern, N. Megiddo, A logic for reasoning about probabilities, Information and Computation 87(1–2), pp 78–128, 1990.

[31] Y. Feldman. A decidable propositional dynamic logic with explicit probabilities. *Information and Control*, 63:11–38, 1984.

[32] M.Freund. Injective models and disjunctive relations. *Journal of Logic and Computation*, 3(3): 231–247, 1993.

[33] M.Freund, D. Lehmann. On negation rationality. *Journal of Logic and Computation*, 6(2): 263–269, 1996.

[34] N. Friedman, J.Y. Halpern. Plausibility measures and default reasoning. *Journal of the ACM*, 48: 648–685, 2001.

[35] D. Gabbay. Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems. In: *Logics and models of concurrent systems* , 439-457, Springer, 1985.

[36] D. M. Gabbay and A. Hunter, *Making inconsistency respectable (Part 1)*, in: *Fundamentals of Artificial Intelligence Research*, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 535, Springer Verlag, Berlin (1991), pp. 19–32.

[37] D. M. Gabbay and A. Hunter, *Making inconsistency respectable (Part 2)*, in: *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty*, *Lecture Notes in Computer Science* 747, Springer Verlag, Berlin (1993), pp. 129–144.

[38] D. Gabbay, A. Pnueli, S. Shelah, J. Stavi. On the temporal analysis of fairness. Proc. 7th ACM symp. Princ. of Prog. Lang., 163 – 173, 1980.

[39] P. Gardenfors and H. Rott, *Belief revision*, in: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 4, Oxford University Press (1995), pp. 35–132.

[40] J. Grant, A. Hunter, *Measuring inconsistency in knowledgebases*, *Journal of Intelligent Information Systems* 27 (2006), pp. 159–184.

[41] D.P. Guelev. Probabilistic neighbourhood logic. *Lecture Notes in Computer Science*, 1926:264–275, 2000.

[42] H. Hansson and B. Jonsson. A logic for reasoning about time and reliability. *Formal Aspect of Computing*, 6(5):512–535, 1994.

[43] S. Hart and M. Sharir. Probabilistic temporal logics for finite and bounded models. In *16th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 1–13. ACM, 1984. Extended version in: Information and Control 70 (1986), 2/3, 97-155

[44] J. Halpern, R. Fagin. Two views of belief: belief as generalized probability and belief as evidence. Artificial Intelligence, 54, pp 275–317, 1992.

[45] J. Halpern, R. Pucella. A logic for reasoning about evidence. Journal of Artificial Intelligence Research 26, pp 1–34, 2006.

[46] D. N. Hoover. Probability logic. *Annals of mathematical logic* 14:287 –313. 1978.

[47] D.V. Hung and Z. Chaochen. Probabilistic Duration Calculus for Continuous Time. *Formal Aspects of Computing*, 11(1):21–44, 1999.

[48] A. Hunter, *Paraconsistent logics*, in: *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, Vol. 2, ed. D. M. Gabbay and Ph Smets, Kluwer(1998), pp. 11–36.

[49] A. Hunter and S. Konieczny, *Approaches to measuring inconsistent information*, in: *Inconsistency Tolerance*, *Lecture Notes in Computer Science* 3300, Springer (2006), pp. 189–234.

[50] A. Hunter and S. Konieczny, *Measuring inconsistency through minimal inconsistent sets*, in: *Proceedings of the 11th International Conference on Knowledge Representation)*, AAAI Press (2008), pp. 358–366.

[51] H.J.Keisler, *Model Theory For Infinitary Logic*, North-Holland, Amsterdam (1971).

[52] H. J. Keisler. Hyperfinite model theory. in: *Logic Colloquim 76.* (eds. R. O. Gandy, J. M. E. Hyland), 5–110. North-Holland. 1977.

[53] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New York (1995).

[54] K. Knight, *Measuring inconsistency*, *Journal of Philosophical Logic* 31 (2001), pp. 77–91.

[55] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).

[56] S. Konieczny, J. Lang and P. Marquis, *Quantifying information and contradiction in propositional logic through epistemic actions*, in: *Proceedings of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, (2003), pp. 106–111.

[57] S. Konieczny, J. Lang and P. Marquis, *Reasoning under inconsistency: the forgotten connective*, in: *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, (2005), pp. , 484–489.

[58] D. Kozen. A probabilistic PDL. *Journal of Computer and System Sciences*, 30:162–178, 1985.

[59] S. Kraus, D. Lehmann, M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44(1–2):167–207, 1990.

[60] D. Kueker, *Definability, automorphisms and infinitary languages*, in: *The Syntax and Semantics of Infinitary Logic*, edited by J. Barwise, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 72, Springer, Berlin (1968), pp. 152-165.

[61] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa (1967)

[62] H.E. Kyburg Jr., C.M. Teng and G.R. Wheeler, *Conditionals and consequences*, Journal of Applied Logic, **5** (4), (2007), 638–650.

[63] D. Lehmann, M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence*, 55, 1–60, 1992.

[64] D. Lehmann and S. Shelah. Reasoning with time and chance. *Information and Control*, 53:165–198, 1982.

[65] O. Lichtenstein, A. Pnueli. Propositional temporal logics: decidability and completeness. Logic J. of the IGPL, vol. 8, no. 1 (2000), 55–85.

[66] Z. Liu, A.P. Ravn, E.V. Sorensen, and Z .Chaochen. A Probabilistic Duration Calculus. In H. Kopetz and Y. Kakuda, editors, *Dependable Computing and Fault-Tolerant Systems* Vol. 7 *Responsive Computer Systems*, Springer-Verlag, 30–52, 1993.

[67] T. Lukasiewicz, *Weak nonmonotonic probabilistic logic*, *Artificial Intelligence* 168(1–2), (2005), pp. 119–161.

[68] Z. Manna, A. Pnueli. Verification of concurrent programs: The temporal framework. in The correctness problem in computer science, edts. R. S. Boyer, J. S. Moor, 215–273, Academic Press, London, 1981.

[69] D. Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. In: *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Vol. 3: Non Monotonic Reasoning and Uncertain Reasoning*, 35–110, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[70] M. Makkai, *Admissible sets and infinitary logic*, in: *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, North-Holland, Amsterdam (1977), pp. 233-282.

[71] Z. Marković, Z. Ognjanović, and M. Rašković. A Probabilistic Extension of Intuitionistic Logic. *Mathematical Logic Quarterly*, 49: 415–424, 2003.

[72] Ž. Mijajlović, D. Doder, A. Ilić-Stepić. Borel sets and countable models. *Publications de l'Institut Mathématique*, prihvaćen za štampu.

[73] Y.N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North-Holland, Amsterdam (1980).

[74] N. Nilsson. Probabilistic logic. *Artificial Intelligence*, 28:71–87. 1986.

[75] N. Nilsson. Probabilistic logic revisited. *Artificial Intelligence*, 59:39–42. 1993.

[76] Z. Ognjanović and M. Rašković, *A logic with higher order probabilities*, Publications de l'Institut Mathématique, **60(74)** (1996), 1–4.

[77] Z. Ognjanović and M. Rašković. Some probability logics with new types of probability operators. *Journal of Logic and Computation*, 9(2):181–195, 1999.

[78] Z. Ognjanović and M. Rašković. Some first-order probability logics. *Theoretical Computer Science*, 247(1-2):191–212, 2000.

[79] Z. Ognjanović. Completeness theorem for a first order linear-time logic. Publications de L'institut Mathématique, Nouvelle série, 69(83) (2001), 1–7.

[80] Z. Ognjanović, Z. Marković and M. Rašković, *Completeness Theorem for a Logic with imprecise and conditional probabilities*, Publications de L'Institute Mathematique, **78(92)** (2005), 35–49.

[81] Zoran Ognjanović. Discrete Linear-time Probabilistic Logics: Completeness, Decidability and Complexity. *Journal of Logic Computation* Vol. 16, No. 2, 257–285, 2006.

[82] Z. Ognjanović, A. Perović and M. Rašković. Logics with the Qualitative Probability Operator. *Logic Journal of IGPL*, vol. 16, 2, 105–120, 2008.

[83] Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković. Probability logics. in *Zbornik radova* 12(20), Logic in computer science (edited by Z. Ognjanović), Mathematical Institute of Serbian Academy of Sciences and Arts, 35–111, 2009.

[84] Z. Ognjanović, D. Doder, Z. Marković. A Branching Time Logic with Two Types of Probability Operators. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, Springer, vol. 6929, 219–232, 2011.

[85] J. Paris, D. Picado Muino, M. Rosefield, *Inconsistency as qualified truth: A probability logic approach*, *International Journal of Approximate Reasoning* 50 (2008), pp. 1151–1163.

[86] A. Perović, Z. Ognjanović, M. Rašković and Z. Marković. A Probabilistic Logic with Polynomial Weight Formulas. *Lecture Notes in Computer Science* , vol. 4932, 239–252, 2008.

[87] A. Pnueli. The Temporal Logic of Programs. In *Proceedings of the 18th IEEE Symposium Foundations of Computer Science (FOCS 1977)*, 46–57, 1977.

[88] G. Priest, *Paraconsistent logics*, in: *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 6, Kluwer (2002).

[89] A. Prior. *Time and Modality* Oxford University Press, 1957.

[90] K. P. S. Bhaskara Rao, M. Bhaskara Rao. Theory of charges. Academic Press, 1983.

[91] M. Rašković, Z. Ognjanović, Z. Marković. A logic with approximate conditional probabilities that can model default reasoning. *International Journal of Approximate Reasoning* 49(1): 52–66, 2008.

[92] N. Rescher and R. Manor, *On inference from inconsistent premises*, *Theory and Decision* 1 (1970), pp. 179–219.

[93] G. Reyes, *Local definability theory*, Ann. Math. Logic 1, (1970) pp. 95-137.

[94] M. Reynolds. An axiomatization of full computation tree logic. *The Journal of Symbolic Logic* Vol. 66, No. 3, 1011–1057, 2001.

[95] K. Segerberg, Qualitative probability in a modal setting. In J.E. Fenstad (edt.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam, 1971.

[96] R. C. Stalnaker. A theory of conditionals. In: *Studies in Logical Theory* (ed. N. Rescher), American Philosophical Quarterly Monograph Series, Vol. 2, Blackwell, Oxford, 1968.

[97] C. Stirling. Modal and temporal logic. *Handbook of Logic in Computer Science*, vol. 2, 477–563, 1992.

[98] K. D. Stroyan, W. A. J. Luxemburg, Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press 1976.

[99] R. Sorensen, *Blindspots*, Claredon Press, Oxford (1988).

[100] E. Tzanis, R. Hirsch. Probabilistic Logic over Paths. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* Volume 220, Issue 3, 79–96, 2008.

[101] H. Wang, *Games, logic and computers*, Scientific American, 213, no. 5 (1965), pp 98–106.

[102] E. Weydert, Doxastic Normality Logic: A Qualitative Probabilistic Modal Framework for Defaults and Belief. Logic, Action and Information, Walter de Gruyter, 152–172 (1996).

[103] E. Weydert, Defaults, Logic and Probability – A Theoretical Perspective. *KI* 15(4): 44–49 (2001).

[104] Z. Zhu, W. Xiao. Two Representation Theorems for Non-monotonic Inference Relations. *Journal of Logic and Computation*, 17(4): 727–747, 2007.

[105] Z. Zhu, D. Zhang, S. Chen, W. Zhu. Some contributions to nonmonotonic consequence. *Journal of Computer Science and Technology*, 16(4): 297–314, 2001.