МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

2

«ВИЩА ШКОЛА»

И. И. ЛЯШКО, А. К. БОЯРЧУК, Я. Г. ГАЙ, Г. П. ГОЛОВАЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

2 РЯДЫ, ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов университетов и технических высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
«ВИЩА ШКОЛА»
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
КИЕВ — 1977

517.2
М34

УДК 517(07)

Математический анализ в примерах и задачах, ч. 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Издательское объединение «Вища школа», 1977, 672 с.

Пособие состоит из четырех глав. В начале каждого параграфа помещен соответствующий теоретический материал, а затем подробно рассмотрены примеры и контрпримеры. В нем содержится свыше 1140 решенных примеров и задач, имеются также примеры и задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов механико-математических и физических факультетов, а также факультетов кибернетики университетов, физико-математических факультетов педагогических институтов и для студентов технических вузов.

Ил. 30.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *А. С. Макуха*

$$М\frac{20203-104}{М211(04)-77}17-77$$

Глава I

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1°. Общие понятия. *Числовым рядом* называют выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

а числа a_n — его членами.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм S_n ряда (1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, то ряд (1) называют *сходящимся*. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называют *расходящимся*.

Если $a_n \geqslant 0$, то ряд (1) называют *положительным*; если $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то ряд (1) называют *строго положительным*.

2°. Остаток числового ряда после n-го члена. Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{2}$$

называется n-м *остатком ряда* (1) или остатком после n-го члена и обозначается символом r_n. Если ряд (1) сходится, то его остаток $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком и поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n-й остаток.

3°. Необходимое условие сходимости ряда. Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

4°. Критерий Коши. Для того чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что при всех $n > N$ и при всех натуральных p выполнялось бы неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

5°. Обобщенный гармонический ряд. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{4}$$

называется *обобщенным гармоническим рядом*. Ряд (4) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. При $p = 1$ этот ряд называется *гармоническим*.

6°. Мажорантный ряд. Если $a_n \leqslant c_n (n = 1, 2, \ldots)$, $a_n \geqslant 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{5}$$

называют *мажорантным* для ряда (1). Из сходимости мажорантного ряда (5) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость любого мажорантного для него ряда.

7°. Общий признак сравнения. Если ряд (1) положительный, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ строго положительный и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, где $c = \text{const}$, $c \neq 0$, то из сходимости ряда с членами b_n следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда с членами b_n. В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то ряды с членами a_n и b_n сходятся или расходятся одновременно.

8°. Признак сравнения со степенью. Если при $n \to \infty$

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

то при $p > 1$ ряд (1) сходится, а при $p \leqslant 1$ расходится (этот признак следует из общего признака сравнения рядов).

9°. Признак Даламбера. Если ряд (1) строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

то при $L < 1$ этот ряд сходится, а при $L > 1$ расходится. При $L = 1$ о сходимости ряда (1) ничего сказать нельзя, так как есть сходящиеся или расходящиеся ряды, для которых $L = 1$.

10°. Признак Коши. Если ряд (1) положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ этот ряд сходится, а при $q > 1$ расходится. При $q = 1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

11°. Признак Раабе. Если ряд (1) строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

то при $p > 1$ он сходится, а при $p < 1$ расходится. При $p = 1$ о сходимости или расходимости ряда (1) ничего сказать нельзя.

12°. Признак Гаусса. Если ряд (1) строго положителен и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$, $|\theta_n| < c$, то при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится, а при $\lambda < 1$ расходится. Если же $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при

$\mu \leqslant 1$. Заметим, что признак Гаусса обобщает признаки Даламбера и Раабе.

13°. Интегральный признак Коши. Если функция $f(x) \geqslant$ $\geqslant 0$ при $x > 0$ и не возрастает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

1. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

Решение. Мы должны показать, что сходится последовательность частичных сумм S_n этого ряда:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Для этого с помощью очевидных преобразований приведем S_n к виду:

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Теперь легко видеть, что последовательность S_n сходится, т. е. сходится, по определению, данный числовой ряд. Сумма его

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

2. а) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$ $(|q|<1)$.

Решение. Пусть u_n и v_n — последовательности частичных сумм рядов б) и а) соответственно, u и v — их суммы. Тогда, использовав формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $(i=\sqrt{-1})$, можем написать:

$$u_n+iv_n=qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+\cdots+q^ne^{in\alpha}=\frac{qe^{i\alpha}-q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}.$$

Принимая во внимание условие $|q|<1$, имеем: $|qe^{i\alpha}|<1$; отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha})=0$. А тогда из предыдущей формулы находим:

$$u+iv=\lim_{n\to\infty}(u_n+iv_n)=\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}=q\left(\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2}+\right.$$
$$\left.+i\,\frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}\right).$$

Поэтому $u = q\dfrac{\cos\alpha - q}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$, $v = \dfrac{q\sin\alpha}{1 - 2q\cos\alpha + q^2}$.

Примечание. Если $z_n = x_n + iy_n$ — последовательность комплексных чисел и $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то, по определению, полагают $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x + iy$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Решение. Непосредственно находим: $S_n = (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} =$

$$= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Следовательно, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$.

4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Решение. Пусть $x \neq k\pi$ (k — целое) и ряд сходится. Тогда должно выполняться необходимое условие сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0 \qquad (x \neq k\pi). \tag{1}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1)x = 0$, или $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin nx\cos x + \cos nx \sin x) = 0$. Принимая во внимание (1), из последнего соотношения находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0 \qquad (x \neq k\pi). \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) эквивалентны такому:

$$\lim_{n\to\infty} (\cos^2 nx + \sin^2 nx) = 0,$$

которое противоречит известной формуле $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Источник противоречия — формула (1). Следовательно, если $x \neq k\pi$, то данный ряд расходится. Сходимость же ряда при $x = k\pi$ (k — целое) очевидна, и сумма такого ряда равна нулю.

5. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 = 1$, $p_1 < p_2 < \cdots$), полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает существование предела любой подпоследовательности последовательности его частичных сумм, равного сумме ряда S. Возьмем эту подпоследовательность в виде:

$$a_1 = S_{p_1},\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_2-1} = S_{p_2},\ a_1 + a_2 + \cdots + \\ + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \cdots + a_{p_3-1} = S_{p_3},\ \ldots,\ a_1 + a_2 + \cdots + \\ + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{p_n} = S$ по условию. Но так как последовательность частичных сумм второго ряда $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ равна $S_{p_{n+1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ также равен S, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение неверно, так как из сходимости подпоследовательности еще не вытекает сходимость самой последовательности. Возьмем пример. Пусть $a_n = (-1)^{n+1}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$, очевидно, расходится, хотя, например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-1)$, получаемый из предыдущего в результате группировки его членов по два, сходится.

6. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Доказательство. Пусть p_k — произвольная подпоследовательность натуральных чисел; S_n и S_{p_k} — частичные суммы первого и второго рядов соответственно. Тогда, в силу положительности членов a_n, будем иметь неравенства:

$$S_1 \leqslant S_n \leqslant S_{p_1} \text{ для всех } n\,(1 \leqslant n \leqslant p_1),$$
$$S_{p_1} \leqslant S_n \leqslant S_{p_2} \text{ для всех } n\,(p_1 \leqslant n \leqslant p_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{p_k} \leqslant S_n \leqslant S_{p_{k+1}} \text{ для всех } n\,(p_k \leqslant n \leqslant p_{k+1}).$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, когда $k \to \infty$, и учитывая, что второй ряд сходится, получаем:

$$\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{p_{k+1}} = S.$$

Не пользуясь признаками сходимости п. 3° — 13°, исследовать сходимость рядов:

7. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots$

Решение. Очевидно, последовательность частичных сумм данного ряда возрастает. Покажем, что она неограничена. С этой целью рассмотрим ее подпоследовательность $S_{2^n}(n = 1, 2, \ldots)$:

$$S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{3},\quad S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7},\ \ldots,$$
$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

В силу оценок

$$1+\frac{1}{3}>1,\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\ \ldots,$$
$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

имеем неравенство

$$S_{2^n}=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>1+\frac{n-1}{4}.$$

Отсюда следует, что подпоследовательность S_{2^n} неограничена, а значит, неограничена и последовательность S_n. Таким образом, данный ряд расходится.

8. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$

Решение. Рассмотрим ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{5\sqrt{6}}+\frac{1}{6\sqrt{7}}+\frac{1}{7\sqrt{8}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{8\sqrt{9}}+\cdots+\frac{1}{15\sqrt{16}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right)+\cdots, \tag{1}$$

полученный в результате группировки членов данного ряда. Замечаем, что

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{8}}<\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{7}}<\frac{4}{\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2}=\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2},$$

. . . .

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{(2^n)^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}}<$$
$$<\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^n}.$$

Поэтому для последовательности частичных сумм ряда (1) имеем оценку: $S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots+$ $+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. Отсюда, учитывая очевидную монотонность S_n, заключаем, что ряд (1) сходится. А тогда, на основании примера 6, сходится и данный ряд.

9. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$

Решение. В силу оценки $S_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1)$, данный ряд расходится.

10. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(a_n,\ b_n)$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,\ b_n)$?

Решение. а) Если $a_n\leqslant b_n$ при всех n, то $\min(a_n,\ b_n)=a_n$. Следовательно, по условию, ряд а) расходится. Если же, например, ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ расходятся, а ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n},\quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \tag{1}$$

сходятся (это может быть, в частности, в том случае, когда a_{2n+1}, $b_{2n}\to+\infty$ монотонно возрастают, а a_{2n}, b_{2n+1} достаточно быстро стремятся к нулю, оставаясь положительными), то начиная с некоторого номера n_0 будем иметь: $\min(a_n,\ b_n)=c_n$ $(n\geqslant n_0)$, где c_n — последовательность, состоящая из чередующихся членов последовательностей a_{2n} и b_{2n+1} $(n\geqslant n_0)$. Например, она может иметь такой вид:

$$c_n=\{a_{2n_0},\ b_{2n_0+1},\ a_{2n_0+2},\ b_{2n_0+3},\ \ldots\}\ (n\geqslant n_0).$$

В этом случае последовательность частичных сумм ряда $\sum c_n$, являющаяся суммой последовательностей частичных сумм сходящихся рядов (1), сходится.

Таким образом, ряд $\sum\min(a_n,\ b_n)$ может как сходиться, так и расходиться.

б) Так как $\max(a_n,\ b_n)\geqslant a_n\geqslant 0$, то $S'_n\geqslant S_n\to+\infty$ (по условию) при $n\to\infty$ (здесь S'_n, S_n — последовательности частичных сумм рядов б) и $\sum a_n$ соответственно). Следовательно, в этом случае всегда ряд б) расходится.

11. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,(a_n\geqslant 0)$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится.

Доказательство. Очевидно, последовательность частичных сумм c_n второго ряда монотонно не убывает. Кроме того, в силу $a_n\geqslant 0$ и сходимости первого ряда, справедливо неравенство:

$$c_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=S_n^2\leqslant\text{const}.$$

Поэтому, на основании теоремы о монотонной и ограниченной последовательности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, т. е., по определению, второй ряд сходится.

Заметим, что обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ сходится (по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом), хотя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится (см. пример 7).

12. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}.$$

Доказательство. Используя элементарное неравенство $|a_n b_n| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, а также условие теоремы, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) = c.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ сходится. А тогда и второй ряд, в силу оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leqslant 2\left(c + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|\right),$$

также сходится. Сходимость третьего ряда вытекает из сходимости первого, если положить в нем $b_n = \frac{1}{n}$ и воспользоваться тем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

13. Доказать, что если $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. По определению предела, для $\forall \varepsilon > 0$ $(0 < < \varepsilon < |a|)$ $\exists N$ такое, что при $\forall n > N$ и любом натуральном $p > 0$ справедливы неравенства $a - \varepsilon < (n+m) a_{n+m} < a + \varepsilon$ $(m = 1, 2, \ldots, p)$, или неравенства

$$\frac{a-\varepsilon}{n+m} < a_{n+m} < \frac{a+\varepsilon}{n+m}.$$

Суммируя эти неравенства по m от 1 до p, получаем:

$$(a-\varepsilon)\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{n+m} < \sum_{m=1}^{p} a_{n+m} < (a+\varepsilon)\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{n+m}.$$

Отсюда видно, что, в силу расходимости гармонического ряда $\left(\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{p}\frac{1}{n+m}=+\infty\right)$, остаток рассматриваемого ряда расходится. Следовательно, расходится и сам ряд.

Примечание. Из условия теоремы следует, что $a_n=\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=O^*\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. Поэтому, на основании признака сравнения со степенью, ряд расходится. Однако мы предпочли здесь непосредственное доказательство.

14. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n>0)$ с монотонно убывающими членами сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

Доказательство. По критерию Коши, из сходимости ряда следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N$ такое, что при всех $n>N$ и всех $p>0$ справедливо неравенство $a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$. Так как a_n — монотонная и положительная последовательность, то из последнего неравенства вытекает, что $pa_{n+p}<\frac{\varepsilon}{2}$. Полагая, далее, последовательно $p=n$ и $p=n+1$, отсюда находим, что $2na_{2n}<\varepsilon$ и $(2n+1)a_{2n+1}<\varepsilon$ при $n>N$. Следовательно, $na_n<\varepsilon$ при любом (четном и нечетном) $n>2N$, что и требовалось доказать.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

15. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\dots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\dots$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Найдем число N такое, что при всех $n>N$ и произвольном $p>0$ будет справедлива оценка $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, где S_n — последовательность частичных сумм данного ряда. Имеем:

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\right.$$
$$\left.+\dots+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|=\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}-\dots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}.$$

Отсюда следует, что $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, если за число N взять $\frac{2}{\varepsilon}$. Поэтому, согласно критерию Коши, ряд сходится.

16. $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\dots+\frac{\cos x^n}{n^2}+\dots$

Доказательство. Найдем число N такое, что при всех $n>N$ и произвольном $p>0$ будет выполняться неравенство $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0$. Имеем:

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\dots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, положив $N = \frac{1}{\varepsilon}$, по критерию Коши, получим, что данный ряд сходится.

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

17. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Положим $p = n$. Тогда

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

при всех n. Следовательно, по критерию Коши, данный ряд расходится.

18. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

Доказательство. Поскольку

$$S_{6n} - S_{3n} = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n},$$

где S_{6n}, S_{3n} — подпоследовательности последовательности частичных сумм данного ряда, то

$$S_{6n} - S_{3n} > \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \cdots + \frac{1}{6n-2} > \frac{n}{6n-2} > \frac{1}{6}.$$

Поэтому, согласно критерию Коши, ряд расходится.

19. $\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Оценим разность:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}$$

при всех n. Таким образом, по критерию Коши, ряд расходится.

Пользуясь различными признаками, исследовать сходимость рядов:

20. $\frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \cdots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \cdots$

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0,$$

то, по признаку Даламбера, ряд сходится.

21. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots$

Решение. Замечаем, что общий член ряда a_n имеет вид:

$$a_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}.$$

Отсюда находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}.$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если } n=m^2;\\ \frac{1}{n^2}, & \text{если } n\neq m^2\end{cases}$ (m — натуральное число).

Решение. Покажем, что ряд

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}\right)+\cdots, \qquad (1)$$

полученный в результате группировки членов данного ряда, сходится. Для этого оценим сначала каждый член ряда (1). Имеем:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<1+2\cdot\frac{1}{2^2}<2\cdot 1;\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}<\frac{1}{4}+\frac{4}{5^2}<2\cdot\frac{1}{4};$$
$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{[(n+1)^2-1]^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{2n}{(n^2+1)^2}<2\cdot\frac{1}{n^2};\ \ldots$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, по признаку сравнения со степенью, сходится, то, в силу общего признака сравнения, сходится и ряд (1). А тогда, на основании утверждения, доказанного в примере 6, заключаем, что данный ряд также сходится.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$

Решение. Легко видеть, что

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}\leqslant\frac{1}{(1+x^2)^n}. \qquad (1)$$

Предполагая, что $x\neq 0$ (при $x=0$ ряд, очевидно, сходится) и применяя к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x^2)^n} \qquad (2)$$

признак Даламбера, замечаем, что ряд (2) сходится.

Используя теперь неравенство (1) и общий признак сравнения, можем утверждать, что данный ряд сходится.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1$, то, в силу необходимого признака, ряд расходится.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Решение. Поскольку $\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^n}{2^{\frac{n+1}{2}} n^{n+2}} = \frac{1}{n^2 2^{\frac{n+1}{2}}} \equiv a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то, в силу общего признака сравнения, сходится и данный ряд.

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

Решение. Нетрудно найти, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2\frac{n-1}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1$. Поэтому, согласно признаку Коши, ряд сходится.

27. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \cdots$

Решение. Замечая, что общий член ряда имеет вид:

$$a_n = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ корень}}} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

и полагая здесь $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$, получаем: $a_n = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ сходится, то, по общему признаку сравнения, сходится и данный ряд.

28. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\ (a_n > 0)$, то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$ и настолько мало, что выполняется неравенство $\varepsilon < q_1 - q$. По определению предела, для данного ε можно найти такой номер N, начиная с которого выполняются неравенства:

$$q - \varepsilon < \frac{a_{N+1}}{a_N} < q + \varepsilon, \quad q - \varepsilon < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < q + \varepsilon, \ \ldots,$$

$$q - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < q + \varepsilon.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получаем:

$$a_N (q - \varepsilon)^{n-N} < a_n < (q + \varepsilon)^{n-N} a_N,$$

откуда

$$0 < \frac{a_n}{q_1^n} < a_N \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n (q + \varepsilon)^{-N} \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1} < 1\right).$$

Теперь видно, что увеличением числа n можно достигнуть неравенства

$$\frac{a_n}{q_1^n} < a_N (q + \varepsilon)^{-N} \left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n < \varepsilon,$$

показывающего, что $a_n = o(q_1^n)$.

29. Пусть для членов строго положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ выполняется неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1$ при $n \geqslant n_0$. Доказать, что для остатка ряда $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ справедлива оценка $R_n \leqslant a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$, если $n \geqslant n_0$.

Доказательство. В силу условия теоремы, имеем:

$$a_{n_0+1} \leqslant \rho a_{n_0}, \ a_{n_0+2} \leqslant \rho^2 a_{n_0}, \ \ldots, \ a_{n+1} \leqslant \rho^{n-n_0+1} a_{n_0}, \ \ldots,$$

откуда $R_n \leqslant a_{n_0} \rho^{n-n_0+1} (1 + \rho + \rho^2 + \cdots) = a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$ при $n \geqslant n_0$, что и требовалось доказать.

30. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!!)^2}{(4n)!!}$ достаточно взять, чтобы соответствующая частичная сумма S_n отличалась от суммы ряда S меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-6}$?

Решение. Будем пользоваться результатом предыдущего примера. Положим здесь $n_0 = 1$. Тогда $a_{n_0} = \frac{1}{2}$, а при $n \geqslant 1$ имеем: $\rho \leqslant \frac{1}{3}$. Следовательно, $R_n \leqslant \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-6}$, откуда находим: $n \geqslant \frac{6 - \lg \frac{4}{3}}{\lg 3} \approx 12{,}3$. Таким образом, для достижения заданной точности достаточно взять 13 членов ряда.

31. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ $(a_n > 0)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon < 1 - q$. В силу существования конечного верхнего предела, для выбранного ε найдется такой номер N, начиная с которого справедливы неравенства

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon \, (i = N, \ N+1, \ \ldots, \ n-1).$$

Перемножая эти неравенства, находим:

$$0 < a_n < \frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N} (q+\varepsilon)^n.$$

Так как ряд $\sum (q+\varepsilon)^n$ сходится, то, в силу общего признака сравнения, заключаем, что ряд $\sum a_n$ также сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассматривая, например, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots,$$

замечаем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty,$$

в то время как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right),$$

очевидно, сходится. Таким образом, из того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, не следует, вообще говоря, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$.

32. Доказать, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{1}$$

то существует также

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{2}$$

Обратное утверждение неверно: если существует предел (2), то предел (1) может и не существовать.

Доказательство того, что из (1) следует (2), может быть проведено точно так же, как и в примере 81, гл. I, ч. 1.

Для доказательства того, что из (2) не следует (1), рассмотрим ряд с членами $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$. Имеем: $\rho_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2\,(3+(-1)^n)}$. Поскольку

$\rho_{2n}=\frac{1}{4}$, $\rho_{2n+1}=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n$ не существует. В то же время

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(-1)^n}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(3+(-1)^n)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\left(\ln 3+\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, обратное утверждение неверно.

33. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\,(a_n\geqslant 0)$, то а) при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; б) при $q>1$ этот ряд расходится (обобщенный признак Коши).

Доказательство. Пусть $q<1$. Для фиксированного ε, удовлетворяющего условию $0<\varepsilon<1-q$, в силу условия примера, найдется номер N, начиная с которого выполняются неравенства $0\leqslant a_{N+1}<(q+\varepsilon)^{N+1}$, ..., $0\leqslant a_n<(q+\varepsilon)^n$ $(q+\varepsilon<1)$. Но так как ряд $\sum(q+\varepsilon)^n$ сходится, то, по общему признаку сравнения, из последнего неравенства вытекает, что ряд $\sum a_n$ сходится.

Пусть $q>1$. Тогда для ε, выбранного из условия $0<\varepsilon<q-1$, найдется номер M такой, что при всех $k>M$ члены подпоследовательности a_{n_k} $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\to q$ при $n_k\to+\infty)$ будут удовлетворять неравенствам

$$a_{n_{M+1}}>(q-\varepsilon)^{n_{M+1}},\ a_{n_{M+2}}>(q-\varepsilon)^{n_{M+2}},\ \ldots,\ a_{n_k}>(q-\varepsilon)^{n_k}\ (q-\varepsilon>1).$$

Отсюда следует, что общий член ряда к нулю не стремится, т. е. ряд $\sum a_n$ расходится.

Исследовать сходимость рядов:

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Решение. Имея в виду обобщенный признак Коши, находим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}(\sqrt{2}+1)}{3}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Решение. Так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}=\frac{4}{9}<1,$$

то, по обобщенному признаку Коши, данный ряд сходится.

36. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \cdots$

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^p \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\,(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(2n+1)}\right)^p =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + \frac{p\,(p-1)}{2\,(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Согласно признаку Гаусса, отсюда находим: при $p>2$ ряд сходится, а при $p\leqslant 2$ — расходится.

Примечание. Область сходимости можно было бы найти, используя признак Раабе.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

Решение. Преобразовывая отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ к виду

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,e^n\,(n+1)^{n+p+1}}{n^{n+p}\,(n+1)!\,e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e}\,e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^{-1+(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{p-0,5}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{p-0,5}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n\to\infty)$$

и используя признак Раабе, заключаем, что при $p>\frac{3}{2}$ ряд сходится.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

Решение. Упрощая отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n!}\,(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n+1})}{(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})\,\sqrt{(n+1)!}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

и составляя последовательность Раабе R_n, устанавливаем, что ряд сходится.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p\,(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

Решение. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда p — целое отрицательное или нуль, и упростим отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = \left(1+\frac{p}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q+1} =$$

$$= \left(1-\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{q+1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{q-p+1}{n} +$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q-p+1$, то, согласно признаку Раабе, ряд сходится, если $q>p$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

Решение. Составляя отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+$$
$$+\left(\frac{p}{2}+q\right)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty),$$

получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{p}{2}+q$ и, на основании признака Раабе, заключаем, что данный ряд сходится при $\frac{p}{2}+q>1$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right)^{\alpha}\quad(p>0,\ q>0)$.

Решение. Приводя отношение $\frac{c_n}{a_{n+1}}$ к виду $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^{\alpha}=$ $=\left(1+\frac{q-p}{p+n}\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha(q-p)}{p+n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{\alpha(q-p)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$ и пользуясь признаком Раабе, устанавливаем, что ряд сходится при $\alpha(q-p)>1$.

Примечание. В примерах 37, 39—41 $o\left(\frac{1}{n}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Поэтому, согласно признаку Гаусса, для установления условий расходимости соответствующих рядов во всех полученных неравенствах вместо знака $>$ следует поставить знак $\leqslant$.

42. Доказать, что если для строго положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n\to\infty$ выполняется условие $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, то $a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$, где $\varepsilon>0$ произвольно мало, причем, если $p>0$, то $a_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, т. е. a_n при $n\geqslant n_0$, монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Доказательство. Начнем со случая, когда $p>0$. Фиксируя произвольное ε_0 $(0<\varepsilon_0<p)$, из условия существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$ находим:

$$1+\frac{p-\varepsilon_0}{i}<\frac{a_i}{a_{i+1}}<1+\frac{p+\varepsilon_0}{i}\quad(i=N,\ \ldots,\ n-1),$$

где N — достаточно большой фиксированный номер. Из написанных неравенств следует:

$$\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{n-1}\right)<\frac{a_N}{a_n}<\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{N}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{p+\varepsilon_0}{n-1}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $a_n>0$, а также пользуясь неравенством Бернулли (пример 4, гл. I, ч. 1), получаем:

$$0<a_n<\frac{a_N}{\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N}\right)\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{p-\varepsilon_0}{n-1}\right)}<$$
$$<\frac{a_N}{1+(p-\varepsilon_0)\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}. \qquad \text{(A)}$$

Поскольку $p-\varepsilon_0>0$, а $\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\to\infty$ при $n\to\infty$, то из неравенства (A) вытекает, что $a_n\to 0$. Принимая во внимание еще, что при $p>0$ последовательность a_n монотонна (это видно из того, что при $n\geqslant n_0$, где n_0 — достаточно большое число, $\frac{p}{n}>o\left(\frac{1}{n}\right)$, следовательно, $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$), убеждаемся в справедливости второй части утверждения.

Для доказательства первой части утверждения (p — любое, а $\varepsilon>0$) покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{p-\varepsilon}a_n)=0$.

Вводя обозначение $\varepsilon_n=n^{p-\varepsilon}a_n$ и составляя отношение $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$, получаем:

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varepsilon-p}\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=\left(1+\frac{\varepsilon-p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).$$

Замечая, что это отношение имеет тот же вид, что и $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, на основании доказанного выше, приходим к выводу, что $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если:

43. $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}$ $(n>1)$.

Решение. Преобразовывая выражение для общего члена a_n и используя при этом разложения $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем:

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=n^{-\frac{p}{2}}\left(2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-p}\left(-\frac{2}{n+1}+\right.$$

$$+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=n^{-\frac{p}{2}}2^{-p}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(-\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}\right)$$

при $n\to\infty$.

Видим, что, по признаку сравнения со степенью, ряд сходится при $p>0$.

44. $a_n=\log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $(a>0,\ b>0)$.

Решение. Пользуясь приемом предыдущего примера, имеем:

$$a_n=\frac{\ln(1+n^{-1}\sqrt[n]{a})}{n\ln b}=\frac{1}{n\ln b}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{ при } n\to\infty\ (b\neq 1).$$

Следовательно, по признаку сравнения со степенью, ряд сходится, если $b\neq 1$.

45. $a_n=\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$.

Решение. Пользуясь разложениями функций $\ln(1+x)$, e^x по формуле Маклорена, находим:

$$a_n=\left(e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^p=e^p\left(1+e^{-1+n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\right)^p=$$

$$=e^p\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^p=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)\text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, если $p>1$, то, согласно признаку сравнения со степенью, ряд сходится.

46. Доказать признак Жамэ: положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если $(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant p>1$ при $n>n_0$, и расходится, если $(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1$ при $n>n_0$.

Доказательство. Непосредственно из первого условия находим: $0\leqslant a_n\leqslant\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n$ (заметим, что при $n>n_0$ выполняется неравенство $1-\frac{p\ln n}{n}>0$), откуда

$$0\leqslant a_n\leqslant e^{n\ln\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)}.$$

Используя разложения функций $\ln(1+x)$, e^x по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, из последнего неравенства имеем неравенство

$$0\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^p}e^{-p^2\frac{\ln^2 n}{2n}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)}=\frac{1}{n^p}-\frac{p^2\ln^2 n}{2n^{p+1}}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{p+1}}\right)\ (n\to\infty),$$

из которого следует, что ряд сходится при $p>1$.

Поступая аналогично, из второго неравенства условия примера можно найти, что

$$a_n \geqslant \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty).$$

Последнее неравенство означает, что ряд расходится.

47. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$ сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (логарифмический признак).

Доказательство. Из условий примера легко получаем неравенства $0 < a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ при $n \geqslant n_0$ (первый случай), а также неравенство $a_n \geqslant \frac{1}{n}$ при $n \geqslant n_0$ (второй случай). Следовательно, по признакам сравнения, можно утверждать, что в первом случае ряд сходится, если $\alpha > 0$, а во втором расходится, что и требовалось доказать.

Исследовать на сходимость ряды с общим членом a_n, если:

48. $a_n = \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}} \ (n > 2)$.

Решение. Так как $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n))^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1{,}1$ при $n > \exp(\exp(\exp 1{,}1))$, то, согласно логарифмическому признаку, ряд сходится.

49. $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \ (n > 1)$.

Решение. В силу оценки

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \leqslant 1,$$

справедливой при достаточно большом $n \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0\right)$, на основании логарифмического признака, утверждаем, что данный ряд расходится.

Примечание. Ни признак Жамэ, ни логарифмический признак не позволяют установить, будет ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\gamma} n}$ при $\gamma > 0$.

Действительно, применяя, например, логарифмический признак, получаем: $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = 1 + \gamma \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$. Отсюда следует, что так как $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1$ при всех n, то ряд, по логарифмическому признаку, не может расходиться. С другой стороны, поскольку $\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \to 0$ при $n \to \infty$, то для любых $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует n_0

такое, что $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} < 1 + \varepsilon$ при $n > n_0$; другими словами, в силу стремления к нулю члена $\gamma \frac{\ln (\ln n)}{\ln n}$, не существует $\alpha > 0$ такого, чтобы при всех $n > n_0$ выполнялось неравенство $\gamma \frac{\ln (\ln n)}{\ln n} > \alpha > 0$ и, следовательно, неравенство $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$.

Таким образом, ряд не может ни сходиться, ни расходиться. Это означает, что вопрос о сходимости указанного ряда не может быть решен с помощью логарифмического признака. Аналогичную ситуацию получим, если для исследования данного ряда применим признак Жамэ.

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость рядов с общим членом a_n:

50. $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$ $(n > 1)$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ при $x > 1$ является положительной и, судя по знаку производной, убывающей (при любом p и достаточно большом x). Поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак Коши. Имеем:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{+\infty} \frac{d (\ln x)}{\ln^p x} = \frac{1}{(p-1)\, 2^{p-1}} < \infty$$

при $p > 1$. Следовательно, ряд также сходится при $p > 1$.

51. $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln (\ln n))^q}$ $(n > 2)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, нетрудно установить, что здесь применим интегральный признак. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln (\ln x))^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p \ln^q t}.$$

Если $p = 1$, то отсюда находим, что

$$I = \int_{\ln (\ln 3)}^{+\infty} \frac{dz}{z^q} = \left. \frac{z^{-q+1}}{1-q} \right|_{\ln (\ln 3)}^{+\infty} < \infty$$

при $q > 1$. Следовательно, ряд сходится при $p = 1$ и $q > 1$.

Если $p > 1$, то в силу того, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln^\gamma t}{t^\varepsilon} = 0$ при $\varepsilon > 0$ и любом γ, можем написать $\frac{1}{t^p \ln^q t} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$ при достаточно большом $t > 0$, где $p \geqslant \alpha > 1$.

Аналогично, если $p < 1$, то при достаточно большом $t > 0$ справедливо неравенство $\frac{1}{t^p \ln^q t} \geqslant \frac{1}{t^\alpha}$, где $p \leqslant \alpha < 1$.

А тогда, на основании признака сравнения (см. § 4, гл. IV, ч. 1), можем утверждать, что рассматриваемый интеграл сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p < 1$ (в обоих случаях q — любое). Это же, согласно интегральному признаку Коши, относится и к данному ряду.

52. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \ln (3+p) \ldots \ln (n+1+p)} \quad (p > 0),$$

используя интегральный признак и признак сравнения.

Решение. Ряд расходится, как следует из оценки общего члена ряда:

$$\frac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \ln (3+p) \ldots \ln (n+p+1)} \geqslant \ln 2 \times$$
$$\times \frac{\ln (n_0+2) \ln (n_0+3) \ldots \ln (n+1)}{\ln (p+2) \ln (p+3) \ldots \ln (p+n+1)} >$$
$$> \frac{\ln 2}{\ln (p+n-n_0+2) \ln (p+n-n_0+3) \ldots \ln (p+n+1)} \geqslant \frac{\ln 2}{\ln^{n_0} (p+n+1)},$$

где целое $n_0 > p > 0$, и предыдущего примера.

53. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

Решение. Легко показать, что $\nu(n) = [\lg n] + 1 \leqslant \ln n + 1$. Так как $\frac{\nu(n)}{n^2} \leqslant \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ и ряды $\sum \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ сходятся, то, согласно признаку сравнения, сходится и данный ряд.

54 Пусть λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

Решение. Графически можно установить, что для $\lambda_n > 0$ справедливы неравенства $n\pi < \lambda_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\frac{1}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$$

и, в силу признака сравнения со степенью, данный ряд сходится.

Аналогично поступаем в случае $\lambda_n < 0$.

55. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln (n!)}$.

Решение. Согласно интегральному признаку Коши, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится. Пользуясь неравенством $\ln (n!) < n \ln n$ и общим признаком сравнения, заключаем, что данный ряд также расходится.

56. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ со строго положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Доказательство. Поскольку

$$0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n},$$

то, в силу результата примера 48 (ч. 1, гл. I), а также теоремы о монотонной и ограниченной последовательности, из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого.

С другой стороны, в силу оценки

$$\frac{1}{2}(4a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) \leqslant a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^{n+1}},$$

из сходимости первого ряда вытекает сходимость второго.

57. Пусть $f(x) > 0$ при $x \geqslant 1$ — монотонно невозрастающая функция. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

Доказательство. В силу монотонного невозрастания функции $f(x)$, имеем неравенства $0 < f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ при $k \leqslant x \leqslant k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, используя которые, находим:

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n,$$

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx > \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k+1) = R_n - f(n+1).$$

Теперь легко видеть, что из полученных неравенств следует требуемая оценка.

Для вычисления суммы ряда с указанной точностью воспользуемся доказанной выше оценкой. В данном случае $R_n = 0{,}01$; $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Тогда

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0{,}01 < \frac{1}{(n+1)^3} + \int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

откуда получаем число первых членов ряда n, которое нужно взять для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01: $n = 7$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} \approx 1 + 0{,}1250 + 0{,}0370 + {}$ $+ 0{,}0156 + 0{,}0080 + 0{,}0046 + 0{,}0029 \approx 1{,}1931 \approx 1{,}19$ (с недостатком).

58. Доказать признак Лобачевского: строго положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m — наибольший номер членов a_n, удовлетворяющих неравенству $a_n \geqslant 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots, p_m)$.

Доказательство. В силу условий теоремы, имеем цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} a_1 > a_2 > \cdots > a_{p_0} \geqslant \frac{1}{2^k} > a_{p_0+1} > a_{p_0+2} > \cdots > a_{p_1} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2^{k+1}} > a_{p_1+1} > \cdots > a_{p_2} \geqslant \frac{1}{2^{k+2}} > a_{p_2+1} > \cdots > a_{p_{m-1}+1} > \\ > \frac{1}{2^{k+m-1}} > a_{p_{m-1}+2} > \cdots > a_{p_m} \geqslant \frac{1}{2^{k+m}}, \end{gathered} \tag{1}$$

где k — некоторое натуральное число. Из неравенств (1) находим:

$$\begin{gathered} \frac{p_0}{2^k} < a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_0} < p_0 a_1, \\ \frac{p_1 - p_0}{2^{k+1}} < a_{p_0+1} + \cdots + a_{p_1} < \frac{p_1 - p_0}{2^k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m} < \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}}, \end{gathered}$$

откуда следует

$$\begin{gathered} \frac{p_0}{2^k} + \frac{p_1 - p_0}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} < S_{p_m} < p_0 a_1 + \\ + \frac{p_1 - p_0}{2^k} + \cdots + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m-1}}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $S_{p_m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_m}$ — подпоследовательность последовательности частичных сумм первого ряда.

Далее, так как

$$\frac{p_0}{2^k} + \frac{p_1 - p_0}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{p_m - p_{m-1}}{2^{k+m}} = \frac{1}{2^{k+1}}\left(C_m + \frac{p_m}{2^m}\right) > \frac{C_m}{2^{k+1}},$$

$$p_0a_1+\frac{p_1-p_0}{2^k}+\ldots+\frac{p_m-p_{m-1}}{2^{k+m-1}}=p_0a_1+\frac{1}{2^k}\left(C_m-2p_0+\frac{p_m}{2m}\right)<$$
$$<p_0a_1+\frac{C_m}{2^k}+\frac{C_m}{2^k}=p_0a_1+\frac{C_m}{2^{k-1}},$$

где C_m — последовательность частичных сумм второго ряда, то из (2) получаем оценку

$$\frac{C_m}{2^{k+1}}<S_{p_m}<p_0a_1+\frac{C_m}{2^{k-1}}.$$

Из полученной оценки и монотонности C_m и S_{p_m} следует, что если сходится первый ряд, то сходится и второй, а из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого.

Исследовать сходимость следующих рядов:

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n+1}\right).$

Решение. Применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, а также пользуясь элементарными преобразованиями тригонометрических функций, получаем:

$$a_n=\operatorname{ctg}\frac{\pi n}{4n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n+1}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(4n-2)}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(4n-2)}}-\cos\frac{\pi}{2(2n+1)}=$$
$$=\frac{1-\frac{\pi}{2(4n-2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{\pi}{2(4n-2)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}-1+\frac{\pi^2}{8(2n+1)^2}+$$
$$+o\left(\frac{1}{n^3}\right)=-\frac{\pi}{4n-2}+o\left(\frac{1}{n}\right)=O^*\left(\frac{1}{n}\right)\text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, по признаку сравнения со степенью, ряд расходится.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}.$

Решение. При $n\geqslant 3$ справедливы неравенства

$$\frac{n-2}{n^\alpha}<\frac{\ln(n!)}{n^\alpha}<\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^\alpha}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$, согласно интегральному признаку, сходятся при $\alpha>2$, то исследуемый ряд, в силу признаков сравнения, также сходится при $\alpha>2$.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$.

Решение. Пользуясь формулой Маклорена, получаем:

$$a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и общего признака сравнения, заключаем, что данный ряд сходится.

62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

Решение. Так как $\sin\frac{1}{n} > \frac{2}{\pi n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right) < \ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Следовательно,

$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)} > \frac{1}{\ln^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)} > \frac{2}{\pi n \ln\frac{\pi n}{2}} = O^*\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n \to \infty).$$

Таким образом, на основании интегрального признака Коши и общего признака сравнения, из последнего соотношения следует, что данный ряд расходится.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

Решение. Очевидно, при $a = 0$ ряд расходится. При $a \neq 0$ применяем признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin^2\frac{a}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится, если $a \neq 0$.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^\alpha}-1\right)$.

Решение. При $\alpha \geqslant 0$ ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому будем считать, что $\alpha < 0$, и при установлении порядка стремления общего члена ряда при $n \to \infty$ будем пользоваться формулой Маклорена. Имеем:

$$n^{n^\alpha} - 1 = e^{n^\alpha \ln n} - 1 = \frac{\ln n}{n^{-\alpha}} + o\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^{-\alpha}}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда, на основании интегрального признака и общего признака сходимости, видим, что ряд сходится при $\alpha < -1$.

Примечание. Примеры 61 и 64 можно решать следующим образом. Обозначим $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1$, $b_n = n^{n^\alpha} - 1$, причем ряд с членами b_n будем рассматривать при всех значениях параметра α, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Далее, имеем:

$$\frac{\ln n}{n^2+1} = \ln(1+a_n), \quad n^\alpha \ln n = \ln(1+b_n),$$

откуда, в силу условий $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\ln(1+a_n) \sim a_n$, $\ln(1+b_n) \sim b_n$ при $n \to \infty$, следует, что исследуемые ряды сходятся или расходятся одновременно с рядами $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^\alpha \ln n$. Применив к двум последним рядам интегральный признак Коши, получим, что ряд с членами a_n сходится, а ряд с членами b_n сходится при $\alpha < -1$.

65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Решение. Имеем:

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{n^{a+b}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}}.$$

Так как последовательности $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{b+n}$ и $\left(1+\frac{b}{n}\right)^{a+n}$ при $n\to\infty$ стремятся к постоянным e^a и e^b соответственно, то $a_n \sim \frac{e^{-a-b}}{n^{a+b}}$ при $n\to\infty$.

Следовательно, по признаку сравнения со степенью, данный ряд сходится при $a+b > 1$.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$.

Решение. Очевидно, если $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится, ибо общий член ряда не стремится к нулю. Далее, при $\alpha > 0$, используя формулу Маклорена, получаем:

$$a_n = \ln\frac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right) = -\ln\left(n^\alpha \sin\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -\ln\left(n^\alpha\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right)\right) = O^*\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Таким образом, по признаку сравнения со степенью, ряд сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$.

67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{-(b\ln n + c\ln^2 n)}$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Имеем: $\alpha^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} = n^{-(b \ln \alpha + c \ln \alpha \cdot \ln n)}$. Отсюда видим, что если $c \neq 0$, то, согласно признаку сравнения со степенью, ряд сходится при $c \ln \alpha > 0$. Действительно, в этом случае

$$0 < n^{-(b \ln \alpha + c \ln \alpha \cdot \ln n)} < n^{-(b \ln \alpha + c \ln \alpha \cdot \ln N)}$$

при $n > N$, где N такое, что $b \ln \alpha + c \ln \alpha \cdot \ln N > 1$.

Если $c \ln \alpha < 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, т. е. данный ряд расходится.

Если $c = 0$, то, по признаку сравнения, ряд сходится при $b \ln \alpha > 1$, т. е. при $\alpha^b > e$.

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

68. $u_n = \left(\int\limits_0^n \sqrt[4]{1 + x^4}\, dx\right)^{-1}$.

Решение. Поскольку

$$\int\limits_0^n \sqrt[4]{1 + x^4}\, dx > \int\limits_0^n x\, dx = \frac{n^2}{2},$$

то $0 < u_n < \frac{2}{n^2}$, т. е., по признаку сравнения, ряд сходится.

69. $u_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

Решение. В силу оценки

$$u_n > \frac{1}{\pi(n+1)} \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

и расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$, приходим к выводу, что данный ряд также расходится.

70. $u_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1 + x}\, dx$.

Решение. В силу неравенств

$$0 \leqslant \frac{\sin^3 x}{1 + x} \leqslant x^3 \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{n}\right),$$

$$0 < u_n < \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} x^3\, dx = \frac{\pi^4}{4n^4}$$

и признаков сравнения, данный ряд сходится.

71. $u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}$.

Решение. Так как $0 < u_n \leqslant \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot n!}{(2n)!}$, по признаку Даламбера, сходится, то данный ряд, по общему признаку сравнения, также сходится.

72. $u_n = n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Решение. Легко видеть, что при $n \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$u_n \leqslant \frac{n \ln^2 n}{n^{\alpha}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = a_n, \tag{1}$$

а при достаточно большом n — неравенство

$$n^{1-\alpha} = \frac{n}{n^{\alpha}} \leqslant u_n. \tag{2}$$

Ряд $\sum n^{1-\alpha}$, по признаку сравнения со степенью, сходится, если $\alpha > 2$. Ряд $\sum a_n$, на основании примера 51, сходится при этом же условии. Поэтому, согласно общему признаку сравнения, из (1) и (2) следует, что данный ряд сходится при $\alpha > 2$.

Заменив последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соответствующими рядами, исследовать сходимость их, если:

73. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

Решение. Поскольку $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) + x_1$, то

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2}.$$

Полученный ряд сходится по признаку сравнения, ибо

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})^2} \sim \frac{1}{2k^{\frac{3}{2}}} \text{ при } k \to \infty;$$

поэтому сходится также данная последовательность.

74. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$.

Решение. Поступая аналогично проделанному в предыдущем примере, получаем:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2}(\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(k+1)}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot (\ln^2 k - \ln^2(k+1)) \right).$$

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, имеем:

$$2a_n = \frac{2\ln(n+1)}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} \cdot \ln n(n+1) =$$

$$= \frac{2\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1) + \ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{-2\ln n}{n(n+1)} - 2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{-2\ln n}{n(n+1)} - \frac{2}{n^2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = O^*\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, сходимость последовательности x_n эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Последний, по интегральному признаку Коши, сходится; поэтому сходится и данная последовательность.

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

1°. Абсолютная и условная сходимости ряда. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится условно.

Если ряд сходится абсолютно, то члены ряда можно переставлять местами в любом порядке. Сумма такого ряда останется прежней. Если же ряд сходится лишь условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с наперед заданным значением суммы (при этом не исключается $\pm\infty$).

2°. Признак Лейбница. Если $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geqslant 0$ и последовательность b_n начиная с некоторого номера n_0 монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Для остатка ряда справедлива оценка: $R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta_n \leqslant 1)$.

3°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

сходится, если сходится ряд $\sum a_n$ и последовательность b_n монотонно ограничена.

4°. Признак Дирихле. Ряд (1) сходится, если последовательность b_n начиная с некоторого номера n_0 монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена.

5°. Члены сходящегося ряда можно группировать произвольным образом; при этом сумма ряда не изменится.

75. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда $a_n \to 0$ при $n \to \infty$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i, входящих в член $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ $(1 = p_1 < p_2 < \ldots)$, ограничено.

Доказательство. Пусть S_{nk}^A — последовательность частичных сумм ряда б). Тогда

$$\begin{aligned} S_{nk}^A = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + \cdots + a_{p_3-1} + \cdots + \\ + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots a_{p_{n+1}-1} = \\ = S_k + a_{k+1} + \cdots + a_{p_{n+1}-1} \quad (p_n \leqslant k \leqslant p_{n+1} - 1), \end{aligned}$$

где S_k — последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Так как $a_n \to 0$ и число членов последовательности $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{p_{n+1}-1} = C_k$, по условию, ограничено, то $C_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{nk}^A = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$, что и требовалось доказать.

76. Доказать, что ряд

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p_2-1} - a_{p_2} - \cdots - a_{p_3-1} + a_{p_3} + \ldots$$

сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{i=p_{n+1}-1} a_i \right) \quad (a_i > 0;\ 1 = p_1 < p_2 < \ldots).$$

Доказательство. Пусть сходится первый ряд. Тогда сходится любая подпоследовательность последовательности его частичных сумм, в том числе и такая:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{i=p_k}^{i=p_{k+1}-1} a_i \right),$$

т. е. последовательность частичных сумм второго ряда. Следовательно, второй ряд также сходится.

Пусть теперь сходится второй ряд. Тогда $\sum\limits_{i=p_n}^{i=p_{n+1}-1} a_i \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что, в силу положительности a_i, сумма $a_{k+1} + \cdots + a_{p_{n+1}-1}$ (см. предыдущий пример) также стремится к нулю и

$$\lim_{n\to\infty} S_{nk}^A = \lim_{k\to\infty} S_k,$$

т. е. сходится первый ряд.

77. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

Доказательство. Пусть S — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ для последовательности частичных сумм S_n этого ряда выполняются неравенства $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$. В силу условия теоремы, при $n > N + m$ можем написать: $S - \varepsilon < S_n' < S + \varepsilon$, где S_n' — последовательность частичных сумм ряда, полученного в результате указанной перестановки. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S$.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

78. $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \cdots$

Решение. Общий член ряда $a_n = (-1)^n b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$. Так как b_n начиная с некоторого номера монотонно стремится к нулю, то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Доказать сходимость этого ряда можно и непосредственно. Именно, замечая, что последовательность S_n частичных сумм этого ряда представляется в виде

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \cdots + S_n^{(n+1)},$$

где

$$S_n^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$S_n^{(2)} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n^{(k+1)} = 2\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n^{(n)} = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right), \quad S_n^{(n+1)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n},$$

получаем:

$$S_n=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ \cdots\ +\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)-$$
$$-\frac{2}{3}\,\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{4}{3}\,\frac{(n-1)\,(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}+2\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Легко теперь видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует (т. е. ряд сходится) и равен $\frac{2}{9}$.

79. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ \ldots$

Решение. Так как общий член ряда имеет вид $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, а последовательность $\frac{1}{n}$ монотонно стремится к нулю, то, по признаку Лейбница, ряд сходится. Найдем S_{2n}. Имеем:

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \cdots\ +\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +$$
$$+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}\right)=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-$$
$$-(C+\ln n+\varepsilon_n)=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n,$$

где C — постоянная Эйлера, а $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$ (см. пример 85, гл. I, ч. 1). Учитывая еще, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$, где S_n — последовательность частичных сумм данного ряда, получаем окончательно:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \cdots\ =\ln 2.$$

80. Зная, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, доказать следующее утверждение: если члены ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ \ldots$ переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет равна $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Доказательство. В результате указанной перестановки получим ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ \cdots\ +\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-$$
$$-\ \cdots\ -\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+\ \cdots\ +\frac{1}{4p-1}-\ \ldots,$$

сумма которого, в силу примера 76, равна сумме ряда

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ \cdots\ +\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ \cdots\ +\frac{1}{2q}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2p+1}+\ \cdots\ +\frac{1}{4p-1}\right)-\ \ldots \qquad (1)$$

в случае сходимости последнего.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(n-1)q+2}-\frac{1}{2(n-1)q+4}-\cdots-\frac{1}{2nq}\right). \tag{2}$$

Ряд (2) получается из ряда (1) в результате группировки членов ряда (1) по два. Поэтому, если мы покажем, что ряд (2) сходится, и найдем его сумму, то, на основании результата, полученного в примере 75, можем утверждать, что ряд (1) имеет ту же сумму.

Пусть $p > q$. Тогда нетрудно получить, что

$$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2nq}+$$

$$+\left(\frac{1}{2nq+1}+\frac{1}{2nq+3}+\cdots+\frac{1}{2np-1}\right), \tag{3}$$

где S_n — последовательность частичных сумм ряда (2). Прибавляя и вычитая в выражении (3) слагаемое

$$\frac{1}{2nq+2}+\frac{1}{2nq+4}+\cdots+\frac{1}{2np}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{nq+1}+\frac{1}{nq+2}+\cdots+\frac{1}{np}\right)$$

и пользуясь асимптотической формулой

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln\frac{m}{n}+\varepsilon_{mn}\ \left(\varepsilon_{mn}\underset{m\to\infty}{\to}0\right),$$

которая получается на основании примера 85 (гл. I, ч. 1), из (3) получаем:

$$S_n = C_{2np}+\ln\frac{2np}{2nq}-\frac{1}{2}\ln\frac{np}{nq}+\varepsilon'_n\ \left(\varepsilon'_n\underset{n\to\infty}{\to}0\right), \tag{4}$$

где C_{2np} — четная подпоследовательность частичных сумм сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Таким образом, из (4) находим:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

Заметим, что при $p \leqslant q$ аналогичным образом получается этот же результат. В частности, если $p=2$ и $q=1$, то

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2;$$

если $p=1$, $q=2$, то

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

81. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Решение. Рассмотрим, например, ряд:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Очевидно, этот ряд получается из данного ряда в результате такой перестановки: за тремя положительными членами следует один отрицательный. Покажем, что ряд расходится.

В силу неравенства $\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{6n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}>0$, имеем оценку общего члена второго ряда: $a_n>\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Поскольку ряд $\sum \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$, по признаку сравнения со степенью, расходится, то, по общему признаку сравнения, ряд $\sum a_n$ также расходится, что и требовалось. Заметим, что исходный ряд сходится по признаку Лейбница.

82. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \tag{1}$$

где $b_n>0$, $b_n\to 0$ при $n\to\infty$. Следует ли отсюда, что ряд (1) сходится?

Решение. Вообще говоря, нет. Если b_n имеет, например, вид $b_n=(\alpha+(-1)^n\beta)\varepsilon_n$, где $\alpha>\beta>0$ и $\varepsilon_n\downarrow 0$ $\left(\varepsilon_n\sim\frac{1}{n^{\gamma}}\right.$ при $n\to\infty$, $\left.0<\gamma\leqslant 1\right)$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\alpha+(-1)^n\beta)\varepsilon_n$$

расходится. Действительно, последовательность частичных сумм

$$S_n=\alpha\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\varepsilon_k+\beta\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k$$

расходится ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$), так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\varepsilon_k$ существует из-за сходимости, по признаку Лейбница, ряда $\sum(-1)^n\varepsilon_n$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k=+\infty$ в силу признака сравнения со степенью.

В частности, если $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ расходится. Этот пример показывает, что условие монотонности последовательности b_n в признаке Лейбница, вообще говоря, не является лишним.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

83. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$

Решение. Так как сгруппированный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится, то, на основании доказательства, приведенного в примере 75, приходим к выводу, что данный ряд также сходится.

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Решение. Так как

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left(\sin \frac{\pi}{8} \right)^{-1} \left| \sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{n+1}{8} \pi \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

а последовательность $n^{-1} \ln^{100} n$ начиная с достаточно большого n монотонно стремится к нулю (это вытекает из того, что $\lim_{x \to +\infty} x^{-1} \ln^{100} x = 100 \lim_{x \to +\infty} x^{-1} \ln^{99} x = 0$, а $(x^{-1} \ln^{100} x)' < 0$ при $x > e^{100}$), то, согласно признаку Дирихле, данный ряд сходится.

85. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Решение. Ряды $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$ сходятся: первый — по признаку Лейбница, второй (в силу ограниченности последовательности

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos 2k \right| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2 \cos 1} \cos (2n+1) \right| < \frac{1 + (\cos 1)^{-1}}{2}$$

и монотонного стремления $\frac{1}{n}$ к нулю при $n \to \infty$) — по признаку Дирихле. Следовательно, их полуразность

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1 - \cos 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

является также сходящимся рядом.

86. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Решение. Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$, по признаку Лейбница, сходится, а ряд $\sum\frac{1}{n-1}$ — расходится (к $+\infty$), заключаем, что данный ряд также расходится (к $+\infty$).

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$.

Решение. Так как

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+k^2}-n\right)\right)\equiv(-1)^n b_n,$$

где $b_n=\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ — последовательность, монотонно (при $n>n_0$) стремящаяся к нулю при $n\to\infty$, то, по признаку Лейбница, ряд сходится.

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Решение. Рассмотрим ряд, полученный в результате группировки членов данного ряда. Имеем:

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\ \cdots\ +\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ \cdots\ +\frac{1}{15}\right)+$$
$$+\ \cdots\ +(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ \cdots\ +\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)+\ \cdots$$

Поскольку

$$A_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ \cdots\ +\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2k+1}{k^2}\to 0 \text{ при } k\to\infty \text{ и}$$

$$A_k-A_{k+1}=(2k+1)\sum_{m=0}^{2k}\frac{1}{(k^2+m)\left((k+1)^2+m\right)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-$$
$$-\frac{1}{k^2+4k+3}>\frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)}-\frac{1}{k^2+4k+2}-\frac{1}{k^2+4k+3}>0$$

при $k\geqslant k_0$, то ряд $\sum(-1)^k A_k$, согласно признаку Лейбница, сходится. А тогда на основании выводов, полученных в примере 76, данный ряд также сходится.

89. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Решение. Имеем:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=(-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}-\pi n\right)=(-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n},$$

по признаку Лейбница, сходится, а последовательность $\cos\frac{\pi}{n+1}$ монотонна и ограничена, то исследуемый ряд, по признаку Абеля, также сходится.

90. Доказать, что знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots \quad (b_n > 0)$$

сходится, если $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, где $p > 0$.

Доказательство. Как следует из примера 42, при $p > 0$ последовательность $b_n \downarrow 0$ при $n > n_0$. Поэтому, по признаку Лейбница, данный ряд сходится, что и требовалось доказать.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

91. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Решение. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда общий член ряда к нулю не стремится и, следовательно, ряд расходится. Полагая, далее, что $p > 0$, и пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, находим:

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку ряд $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$, согласно признаку Лейбница, сходится при $p > 0$, а ряд $\sum a_n^*$, где $a_n^* = \frac{1}{2n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$, по признаку сравнения, сходится при $p > \frac{1}{2}$ $\left(\text{при } p \leqslant \frac{1}{2} \text{ ряд расходится к } +\infty\right)$, то данный ряд сходится только при $p > \frac{1}{2}$.

В силу неравенства

$$\frac{1}{2n^p} < \left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right| < \frac{2}{n^p} \quad (p > 0)$$

и признаков сравнения, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при значениях p, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$, исследуемый ряд сходится условно.

92. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + (-1)^n)^p}$.

Решение. При $p \leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю, т. е. ряд расходится. Поэтому, считая, что $p > 0$, и применяя формулу Маклорена с остаточным членом в форме Пеано, преобразовываем общий член ряда к виду:

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = (-1)^n n^{-p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} = (-1)^n n^{-p} \times$$
$$\times\left(1+p\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\right)$ сходятся при $p > 0$ (первый — в силу признака Лейбница, а второй — по признаку сравнения). Поэтому исходный ряд сходится при этом же условии.

Поскольку, далее,

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{(n+(-1)^n)^p} \leqslant \frac{1}{(n-1)^p} \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots)$$

и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$, то, в силу последнего неравенства и признака сравнения со степенью, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$. Следовательно, при $0 < p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно.

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

Решение. Очевидно, при $p \leqslant 0$ ряд расходится, так как при этом не выполняется необходимое условие сходимости. При $p > 0$, как и в предыдущем примере, представим общий член ряда в виде

$$\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1} = n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p > 0$, так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}, \text{ а } \frac{1}{n^p} \downarrow 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$, в силу признака сравнения, сходится или расходится одновременно с рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}.$$

В свою очередь, ряд $\sum\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p>0$, а ряд $\sum\frac{1}{n^{2p}}$ сходится при $p>\frac{1}{2}$ $\Bigg($заметим, что при $p\leqslant\frac{1}{2}$ последний ряд расходится к $+\infty$, поэтому и ряд $\sum\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ расходится, если $p\leqslant\frac{1}{2}\Bigg)$. Следовательно, исходный ряд сходится лишь при $p>\frac{1}{2}$.

Для установления области абсолютной сходимости воспользуемся оценками

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p}\leqslant\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\cdot\frac{1}{\left|1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right|}\leqslant\frac{2\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p},$$

$$\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p}=\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}\leqslant\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\leqslant\frac{1}{n^p}$$

и признаком сравнения. Из этих неравенств следует, что данный ряд сходится абсолютно лишь при $p>1$. Поэтому при $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ ряд сходится условно.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. $\qquad$ (1)

Решение. Очевидно, при $p>1$ ряд сходится абсолютно. Для выяснения области условной сходимости рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n, \tag{2}$$

где $A_n=\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(n^2+2n)^p}$, полученный в результате группировки членов данного ряда. Поскольку $0 < A_n < \frac{2n+1}{n^{2p}} \to 0$ при $n \to \infty$ и $p > \frac{1}{2}$, а также

$$A_n - A_{n+1} = \sum_{i=0}^{2n} \frac{((n+1)^2+i)^p - (n^2+i)^p}{(n^2+i)^p (n^2+2n+i+1)^p} - (n^2+4n+2)^{-p} -$$

$$-(n^2+4n+3)^{-p} > \frac{(2n+1)((n^2+4n+1)^p - (n^2+2n)^p)}{(n^2+2n)^p (n^2+4n+1)^p} -$$

$$- \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} > 0$$

при достаточно большом n, то, в силу признака Лейбница, ряд (2) сходится. С другой стороны, $A_n > \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ не стремится к 0 при $p \leqslant \frac{1}{2}$; поэтому ряд (2) расходится, если $p \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, согласно примеру 76, ряд (1) сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$. Таким образом, область условной сходимости ряда (1) определяется неравенствами $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$.

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^k]} \right)$, полученный в результате группировки членов данного ряда, в силу оценки

$$\frac{1}{[e^{k-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^k]} > \frac{[e^k]-[e^{k-1}]}{[e^k]} = 1 - \frac{[e^{k-1}]}{[e^k]} \to 1 - \frac{1}{e} \neq 0 \ (k \to \infty),$$

расходится. Следовательно, согласно примеру 76, исследуемый ряд также расходится.

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \right)^p$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} \right)^p : \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)(2n+2)} \right)^p =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{2n+1}\right)^p = 1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{p}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty).$$

Отсюда видим, что, согласно примеру 90, ряд сходится, если $p > 0$. Так как при $p \leqslant 0$ общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то это условие ($p > 0$) является и необходимым для сходимости ряда.

Далее, по признаку Гаусса, ряд сходится абсолютно лишь при $p > 2$. Следовательно, при значениях p, удовлетворяющих неравенству $0 < p \leqslant 2$, данный ряд сходится только условно.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

Решение. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k \cdot \sin k^2\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} (\cos k(k-1) - \cos k(k+1))\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|1 - \cos(n+1)n| \leqslant 1$$

и $\frac{1}{n} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$. Для этого предположим противное, т. е. пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sin (n+1)^2$ также равен нулю. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sin (n+1)^2 = \lim_{n\to\infty} \sin (n^2+2n+1) = \lim_{n\to\infty} (\sin n^2 \cdot \cos(2n+1) +$$

$$+ \sin(2n+1) \cdot \cos n^2) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n+1)\sqrt{1-\sin^2 n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin(2n+1) = 0. \qquad (1)$$

В силу последнего равенства, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2n+3) = \lim_{n\to\infty} (\sin(2n+1) \cdot \cos 2 + \sin 2 \cdot \cos(2n+1)) =$$

$$= \sin 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(2n+1) = 0. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin^2(2n+1) + \cos^2(2n+1)) = 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Итак, данный ряд расходится.

99. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$.

Решение. Сразу заметим, что если $p \leqslant 0$ или $q \leqslant 0$, то ряд расходится в силу необходимого признака. Поэтому, далее, считаем, что $p > 0$ и $q > 0$.

Имея в виду пример 75, сгруппируем члены данного ряда следующим образом:

$$\left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}\right) + \left(\frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q}\right) + \ldots = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^q}\right).$$

Так как

$$\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^q}=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-q}=\frac{1}{n^p}-$$
$$-\frac{1}{n^q}\left(1-\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^q}+\frac{q}{n^{q+1}}+o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right) \text{ при } n\to\infty,$$

то, по признаку сравнения, сгруппированный ряд сходится при $p=q>0$. Если же $p\neq q$, то отсюда следует, что ряд сходится при $p>1$ и $q>1$ одновременно. А тогда, согласно упомянутому примеру, при этих же условиях сходится и данный ряд.

Очевидно, абсолютно ряд сходится лишь при $p>1$ и $q>1$.

100. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots$

Решение. Ряд $1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится лишь при $p>1$, так как при этом условии сходится ряд $\sum\frac{1}{n^p}$, и члены абсолютно сходящегося ряда можно представить в любом порядке.

При $p=1$ получаем ряд, сходимость которого исследована в примере 80. Там мы установили, что ряд сходится.

Рассмотрим случай, когда $0<p<1$. Образуем подпоследовательность последовательности частичных сумм данного ряда:

$$S_{3n}=1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}+\frac{1}{(2n+1)^p}+$$
$$+\frac{1}{(2n+3)^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p}=C_{2n}+\frac{1}{(2n+1)^p}+$$
$$+\frac{1}{(2n+3)^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p},$$

где C_{2n} — подпоследовательность последовательности частичных сумм сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. Поскольку

$$\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p}>\frac{n}{(4n-1)^p}\to+\infty \text{ при } n\to\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\lim_{n\to\infty}C_{2n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\cdots+\frac{1}{(4n-1)^p}\right)=+\infty.$$

Следовательно, данный ряд при $0<p<1$ расходится. Заметив, что расходимость его при $p\leqslant 0$ следует из необходимого условия, окончательно устанавливаем, что исследуемый ряд абсолютно сходится, если $p>1$, и условно, — если $p=1$.

101. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$

Решение. Очевидно, при $p>1$ данный ряд сходится абсолютно, ибо при этом условии сходится ряд $\sum\frac{1}{n^p}$, и члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в любом порядке.

Пусть $0<p<1$. Рассмотрим подпоследовательность S_{3n} последовательности частичных сумм данного ряда. Имеем:

$$S_{3n}=\frac{1}{(2n+1)^p}+\frac{1}{(2n+3)^p}+\dots+\frac{1}{(4n-1)^p}.$$

Поскольку $S_{3n}\geqslant\frac{n}{(4n-1)^p}\to+\infty$ при $n\to+\infty$, то данный ряд расходится.

Пусть $p=1$. Тогда $0<S_{3n}<\frac{1}{2}$ и, по теореме о монотонной и ограниченной последовательности, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$ конечен. Следовательно, сходится ряд

$$\left(1+\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{5}\right)+\dots$$

А так как все условия примера 75 здесь выполнены, то данный ряд также сходится.

Учитывая еще, что при $p\leqslant 0$ исследуемый ряд расходится, окончательно устанавливаем, что он сходится абсолютно при $p>1$, а при $p=1$ — условно.

102. $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\dots$ (1)

Решение. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1,\,4,\,7\dots}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}-\frac{2}{(n+1)^q}+\frac{1}{(n+2)^p}\right),\tag{2}$$

полученный из данного в результате группировки его членов по три. Считая, что $p>0$ и $q>0$, имеем:

$$a_n=\frac{1}{n^p}-\frac{2}{(n+1)^q}+\frac{1}{(n+2)^p}=2\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{n^q}\right)+2\left(\frac{q}{n^{q+1}}-\frac{p}{n^{p+1}}\right)+$$
$$+o\left(\frac{1}{n^{q+1}}\right)+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)\text{ при } n\to\infty.$$

Отсюда, в силу признаков сравнения, следует, что при $p=q$ ряд (2) сходится. Пусть $p\neq q$. Тогда $a_n\sim\frac{1}{n^{\min(p,\,q)}}$ при $n\to\infty$ и, следовательно, по признакам сравнения, ряд (2) расходится, если $\min(p,q)\leqslant 1$. Так как все условия примера 75 здесь выполнены, то выводы, относящиеся к ряду (2), остаются в силе и для ряда (1).

Замечая еще, что при $p\leqslant 0$ или $q\leqslant 0$ исследуемый ряд (1) расходится (общий член ряда не стремится к нулю), а при $p>1$ и $q>1$ он сходится абсолютно, заключаем, что при $0<p=q\leqslant 1$ ряд сходится условно.

103. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\,n^q}$ определить: а) область абсолютной сходимости; б) область условной сходимости.

Решение. Очевидно, если p равно целому отрицательному числу, то ряд сходится абсолютно. Поэтому считаем, что $p \neq -n$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q = 1+\frac{q-p}{n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to\infty,$$

где последовательность $b_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}$ начиная с некоторого номера имеет определенный знак.

Из данного отношения, на основании примера 90, находим, что ряд сходится, если $q-p>0$. На основании же признака Гаусса, заключаем, что ряд сходится абсолютно, если $q-p>1$. Из этого отношения следует также, что если $q-p<0$, то последовательность $|b_n|$ монотонно возрастает и, значит, ряд расходится. Если же $q=p$, то имеем:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ при } n\to\infty. \qquad (1)$$

Покажем, что b_n не стремится к нулю при $n\to\infty$. Из (1) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)n^2 = C = \text{const}.$$

Это означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n>N$ выполняются неравенства

$$1+\frac{C-\varepsilon}{(k+1)^2}<\frac{b_{k+1}}{b_{k+2}}<1+\frac{C+\varepsilon}{(k+1)^2}\ (k=N,\ \ldots,\ n-2),$$

откуда, считая, что N достаточно велико, находим:

$$0<\frac{b_{N+1}}{b_n}<\left(1+\frac{C+\varepsilon}{(N+1)^2}\right)\left(1+\frac{C+\varepsilon}{(N+2)^2}\right)\cdots\left(1+\frac{C+\varepsilon}{(n-1)^2}\right).$$

Из этого неравенства, учитывая пример 38 (гл. I, ч. 1), получаем:

$$0<\frac{b_{N+1}}{b_n}<e^{(C+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}.$$

Следовательно,

$$|b_n|>|b_{N+1}|\,e^{-(|C|+\varepsilon)\left(\frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\cdots\right)}.$$

Поскольку правая часть этого неравенства от n не зависит, то $|b_n|$ не стремится к 0 при $n\to\infty$, что и требовалось установить. А тогда, в силу необходимого признака сходимости, данный ряд расходится, если $p = q$.

Итак, заключаем, что при $p < q \leqslant p + 1$ ряд сходится условно, а при $q > p + 1$ — абсолютно. Кроме того, он сходится абсолютно, если p равно целому отрицательному числу, а q — любое.

104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$, где $\binom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

Решение. Для удобства представим общий член ряда в виде

$$\binom{m}{n} = (-1)^{n-1} b_n, \quad b_n = \frac{(n-m-1)(n-m-2)\cdots(1-m)\,m}{n!}.$$

Очевидно, при $m = 0, 1, 2, \ldots$ ряд сходится абсолютно. Поэтому, исключая этот случай, можно образовать отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n(n-m)}. \tag{1}$$

Так как начиная с некоторого номера n_0 последовательность b_n имеет определенный знак, то, не умаляя общности, будем считать, что $b_n > 0$ $(n \geqslant n_0)$. В таком случае из отношения (1), учитывая пример 90, находим, что ряд сходится, если $m + 1 > 0$. Поскольку при $m + 1 \leqslant 0$ последовательность монотонно возрастает, то условие $m + 1 > 0$ является также и необходимым для сходимости ряда. Далее, по признаку Гаусса, из (1) следует, что ряд сходится абсолютно, если $m > 0$, а при $m < 0$ — расходится (абсолютно).

Таким образом, все сказанное позволяет сделать вывод, что при $m \geqslant 0$ ряд сходится абсолютно, а если $-1 < m < 0$, то ряд сходится условно.

105. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — не абсолютно сходящийся ряд и $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{|a_i| + a_i}{2}$, $N_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{|a_i| - a_i}{2}$. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{N_n}{P_n} = 1$.

Доказательство. Обозначая через S_n и C_n соответственно частичные суммы данного ряда и ряда, составленного из абсолютных величин $|a_i|$, будем иметь: $N_n = C_n - S_n$ и $P_n = C_n + S_n$. В силу условия теоремы, можно написать, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = +\infty$. А тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{N_n}{P_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{C_n - S_n}{C_n + S_n} = 1$, что и требовалось доказать.

106. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ для каждого $p > 0$ лежит между $\dfrac{1}{2}$ и 1.

Доказательство. Так как ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то подпоследовательности частичных сумм его имеют один и тот же предел S, причем подпоследовательность

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right)$$

возрастает, а подпоследовательность

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right)$$

убывает. Следовательно, $S_{2n} < S < S_{2n-1}$, откуда находим, что $S < S_1 = 1$. Для доказательства оценки снизу рассмотрим подпоследовательность S_{4n-1}. Поскольку график функции $\frac{1}{x^p}$ $(p > 0,\ x > 0)$ является выпуклым вниз, то выполняются неравенства

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p},\ \frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p},\ \ldots,\ \frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}.$$

Отсюда для S_{4n-1} имеем оценку:

$$S_{4n-1} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(4n)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} >$$

$$> 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} - \cdots - \frac{1}{(4n-2)^p} + \frac{1}{(4n)^p} = 1 - \frac{1}{2^p} S_{2n},$$

из которой предельным переходом получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n-1} = S \geqslant 1 - \frac{1}{2^p} \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1 - \frac{S}{2^p}.$$

Итак, $S \geqslant \frac{2^p}{2^p+1} > \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

107. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$, если: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$?

Решение. а) Согласно оценке остатка, вытекающей из теоремы Лейбница, нужное число N находим из неравенства $\frac{1}{\sqrt{(N+1)^2+1}} < \frac{1}{10^6}$, откуда $N \geqslant 10^6$.

б) В силу признака Дирихле, ряд сходится, а по теореме п. 5° сумма ряда равна сумме сгруппированного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n,\quad b_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=180(n-1)+1}^{180n-1} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}},$$

который, очевидно, является рядом лейбницева типа, т. е. сходящимся по признаку Лейбница. Следовательно, для остатка этого ряда справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=180n+1}^{180n+179} \frac{\sin k^\circ}{\sqrt{k}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{180n+1}} \sum_{k=180n+1}^{180n+179} \sin k^\circ < \frac{1}{\sqrt{N+1}\sin\frac{\pi}{360}} < 10^{-6},$$

откуда $N \geqslant 1,32 \cdot 10^{16}$.

108. Доказать, что гармонический ряд останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных членов ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

Доказательство. Указанный в условии ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} - \dots - \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+q+1} + \\ + \dots + \frac{1}{2p+q} - \dots,$$

в силу примера 76, сходится или расходится одновременно с рядом

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) + \\ + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \dots \qquad (1)$$

Пусть $p > q$. Поскольку справедливы оценки

$$S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{p+q}\right) > 1 - \frac{q}{p} = (p-q)\frac{1}{p},$$

$$S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+q}\right) - \left(\frac{1}{2p+q+1} + \dots + \frac{1}{2p+2q}\right) > \\ > S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right),$$

. . . .

$$S_{2n} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \dots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) \equiv x_n > 0$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то ряд (1) расходится.

Пусть $p < q$. Тогда, оценивая частичные суммы ряда следующим образом:

$$S_1 < p,\ S_2 < p - \frac{q}{p+q},\ S_3 < p - \frac{q-p}{p+q},$$

$$S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q}{2(p+q)},\ S_5 < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

. . . .

$$S_{2n} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{q}{n(p+q)},$$

$$S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

находим, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty$, т. е. ряд (1) расходится.

Наконец, пусть $p = q$. Тогда ряд (1) есть ряд лейбницева типа, следовательно, он сходится.

§ 3. Действия над рядами

1°. Сложение рядов. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1}$$

сходятся, то справедливы равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

где λ, μ — произвольные числа.

2°. Правило Коши. Согласно правилу, под произведением двух рядов (1) понимается третий ряд, общий член которого имеет вид:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

Вообще говоря, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \neq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Однако, если один из рядов сходится, а второй сходится абсолютно, то всегда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Эта формула справедлива и в том случае, когда все три ряда сходятся.

Найти суммы рядов:

109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Решение. Так как

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = 1 - 2\sin^2\frac{n\pi}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{если } n \neq 3k \ (k = 1,\ 2,\ \ldots); \\ 1, & \text{если } n = 3k, \end{cases}$$

и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{3n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходятся, то, на основании утверждения 1°, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{2^6} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}\right) + \frac{1}{2^9} - \cdots = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = -\frac{2}{7}.$$

110. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $(|xy| < 1)$.

Решение. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n$, на основании утверждения 1°, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 1 + y + xy + xy^2 + x^2y^2 + x^2y^3 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = (1 + y) \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1+y}{1-xy}.$$

111. Показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$

Решение. Ряд $\sum \frac{1}{n!}$ сходится, поэтому, согласно 2°, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

где $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(n-k)!}$ $\left(a_k = \frac{1}{(k-1)!}, \quad b_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right)$.

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$c_{n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

что и требовалось показать.

112. Показать, что квадрат сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ является рядом расходящимся.

Решение. Прежде всего заметим, что данный ряд сходится (условно) по признаку Лейбница. По правилу п. 2°, имеем:

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}\right] = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}}.$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}} \geqslant \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots; \; k = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\,(n-k+1)}} \geqslant \frac{n}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, в силу необходимого признака, расходится, что и требовалось показать.

113. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ и $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ есть абсолютно сходящийся ряд.

Решение. Легко установить (хотя бы с помощью признака Коши), что эти ряды расходятся. По правилу перемножения рядов имеем:

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1},$$

где $a_1 = 1,\ a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ b_1 = 1,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)\ (n = 2, 3, \dots)$. Следовательно,

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4\cdot 3^{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1}2^k = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4$, что и требовалось показать.

§ 4. Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1°. Понятие равномерной сходимости последовательностей и рядов.

Определение 1. *Последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ называется сходящейся к функции $f(x)$ на промежутке X, если при каждом фиксированном значении $x_0 \in X$ числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится к числу $f(x_0)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x_0)$ такое, что $\forall n > N(\varepsilon, x_0)$ справедливо неравенство*

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на промежутке X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ (зависящее от ε и не зависящее от x) такое, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in X$. В этом случае пишут: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X$.

Определение 3. *Функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots \qquad (1)$$

называется сходящимся на промежутке X *к функции* $S(x)$, *если сходится последовательность его частичных сумм* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Определение 4. *Функциональный ряд* (1) *называется равномерно сходящимся к своей сумме* $S(x)$ *на промежутке* X, *если последовательность частичных сумм ряда* $S_n(x)$ *равномерно сходится на* X *к* $S(x)$.

2°. Мажорантный признак Вейерштрасса. Если для функционального ряда (1) существует сходящийся мажорирующий на X числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(|u_k(x)| \leqslant a_k,\ x \in X,\ k = 1, 2, \ldots)$, то ряд (1) сходится равномерно на X.

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на промежутке X необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, чтобы $\forall n > N(\varepsilon)$, $\forall p > 0$ неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

выполнялось сразу для всех $x \in X$.

4°. Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

равномерно ограничены на промежутке X, т. е. существует такая постоянная c $(0 < c < +\infty)$, что

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| < c \text{ при } n = 1, 2, \ldots \text{ и всех } x \in X,$$

а последовательность функций $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots$, монотонно не возрастая, равномерно стремится к нулю на X, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x) \qquad (2)$$

сходится равномерно на X.

5°. Признак Абеля. Ряд (2) сходится равномерно на промежутке X, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ сходится равномерно на X, а функции $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Функциональные свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, то $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Если все члены ряда $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

7°. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, т. е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

при любом $x_0 \in [a, b]$, $n \to \infty$.

Если ряд (1), члены которого непрерывны на сегменте $[a, b]$, сходится равномерно на этом сегменте, то справедливо равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt, \tag{3}$$

т. е. ряд (1) можно почленно интегрировать в пределах $[x_0, x]$ при любых x_0 и x из $[a, b]$, причем ряд (3) сходится равномерно по x на $[a, b]$.

8°. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда. Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится к $f(x)$ на $[a, b]$, а последовательность $f_n'(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на $[a, b]$, то $f(x)$ также дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x)=\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$, т. е. допустим предельный переход под знаком производной.

Если ряд (1) с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма ряда $S(x)$ дифференцируема на $[a, b]$, причем на этом сегменте выполняется равенство

$$S'(x)=\sigma(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x),$$

т. е. ряд (1) можно почленно дифференцировать.

9°. Почленный предельный переход в функциональных рядах и последовательностях. Если функциональный ряд (1) сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = c_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k,$$

т. е. в равномерно сходящемся ряде можно переходить к пределу почленно.

Если последовательность функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится в окрестности точки x_0 и при каждом n существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = A_n,$$

то последовательность чисел A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ также сходится и

$$\lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to x_0} f_n(x)).$$

Определить промежутки сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^p \sin nx}{1 + n^q}$ $(q > 0;\ 0 < x < \pi)$.

Решение. Для сходимости ряда необходимо, чтобы $\dfrac{n^p}{1+n^q} = \dfrac{1}{n^{q-p}} \cdot \dfrac{1}{1+n^{-q}} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. чтобы $q - p > 0$.

Абсолютная сходимость. Так как $|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \dfrac{1 - \cos 2nx}{2}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} |\sin nx| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1+n^q} n^p$$

расходится при $0 < q - p \leqslant 1$. Действительно, первый ряд справа, в силу признаков сравнения, расходится к $+\infty$, поскольку $\dfrac{n^p}{1+n^q} \sim \dfrac{1}{n^{q-p}}$ при $n \to \infty$, а второй ряд справа при $0 < q - p \leqslant 1$, по признаку Дирихле, сходится, ибо

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx \right| = \left| \frac{\sin nx \cdot \cos (n+1) x}{\sin x} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}$$

и $\dfrac{n^p}{1+n^q} \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

С другой стороны, поскольку $|\sin nx| \leqslant 1$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q}|\sin nx| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{1+n^q},$$

в силу признаков сравнения, сходится, если $q-p>1$ $\left(\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}}\right.$ при $\left.n \to \infty\right)$.

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно только при $q-p>1$.

Условная сходимость. Представляя данный ряд в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}} \cdot \frac{1}{1+n^{-q}}$$

и пользуясь признаком Абеля, находим, что при $q-p>0$ ряд сходится. Действительно, в этом случае последовательность $\frac{1}{1+n^{-q}} \uparrow 1$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{q-p}}$, в силу признака Дирихле, сходится. Следовательно, при $0<q-p \leqslant 1$ исследуемый ряд сходится условно.

115. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

Решение. Так как (см. пример 37, гл. I, ч. 1) $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{e}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, то для сходимости ряда необходимо, чтобы $x \neq 0$, а также $|a| \neq 1$ (при $x=0$ или при $|a|=1$ данный ряд, в силу признаков сравнения и расходимости гармонического ряда, расходится).

При $x \neq 0$ и $|a| \neq 1$ применяем признак Коши. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+a^{2n}x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{если } |a|>1; \\ 1, & \text{если } |a|<1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $|a|>1$ ряд сходится абсолютно, а при $|a|<1$ о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

Далее, поскольку при $|a|<1$ $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{1+a^{2n}x^2} \geqslant \frac{1}{n(1+x^2)}$, то, в силу признака сравнения, если $|a|<1$, исследуемый ряд расходится.

Итак, ряд сходится абсолютно, если $|a|>1$ и $x \neq 0$.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $(y \geqslant 0)$.

Решение. Пусть $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тогда ряд, по признаку Коши, сходится при $|x| < 1$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n+y^n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+y^n}} = |x| < 1.$$

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x \geqslant 1$, то $\frac{x^n}{n+y^n} \geqslant \frac{x^n}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$. Следовательно, в силу признака сравнения, данный ряд расходится, ибо расходится гармонический ряд.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x < -1$, то общий член ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n+y^n} = +\infty$.

Если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $x = -1$, то получим ряд лейбницева типа:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+y^n}.$$

Пусть $y > 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n \cdot \frac{1}{1+ny^{-n}},$$

в силу признака Коши, абсолютно сходится, если $|x| < y$.

При $x = \pm y$ общий член исследуемого ряда к нулю не стремится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y^n}{n+y^n} = 1$.

Итак, если $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$, то ряд сходится абсолютно. Если же $x = -1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то данный ряд сходится лишь условно.

117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x \geqslant 0)$.

Решение. Рассмотрим три случая: а) $0 \leqslant x < 1$; б) $x = 1$; в) $x > 1$.

В случае а) имеем: $\ln(1+x^n) \sim x^n$ при $n \to \infty$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$, согласно признаку Коши, сходится при любом y, то, в силу признака сравнения, при таких же условиях сходится и исследуемый ряд.

В случае б) получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$, который при $y > 1$ сходится по признаку сравнения.

Наконец, в случае в) имеем:

$$\ln(1+x^n) = n\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right) \sim n\ln x + \frac{1}{x^n} \text{ при } n\to\infty.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^{y-1}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y x^n}$ сходятся при $y > 2$, то данный ряд, по признаку сравнения, также сходится при $y > 2$.

118. Доказать, что если ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

Доказательство. К ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

применим признак Абеля. Здесь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ сходится по условию; $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ — монотонная и ограниченная последовательность при $x \geqslant x_0$. Следовательно, по признаку Абеля, ряд сходится также при $x > x_0$.

119. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} (\sup_{x\in X} r_n(x)) = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X к функции $f(x)$. По определению, это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X$. Отсюда следует, что $\sup r_n(x) \leqslant \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $\lim_{n\to\infty}(\sup_{x\in X} r_n(x)) = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\sup_{x\in X} r_n(x) < \varepsilon$. Но так как $r_n(x) \leqslant \sup_{x\in X} r_n(x)$, то $r_n(x) < \varepsilon$ при $\forall x \in X$.

Последнее, по определению, означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, что и требовалось доказать.

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

120. $f_n(x) = x^n$; а) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. а) Имеем: $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Так как $\sup_{0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}} x^n = \frac{1}{2^n}$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, то, согласно примеру 119, последовательность сходится равномерно.

б) Находим предельную функцию $f(x)$. Имеем:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 1, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$|f_n(x)-f(x)|=\begin{cases}x^n, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 0, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

Поскольку $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-f_n(x)|=1$, то, в силу упомянутого примера, последовательность сходится неравномерно.

121. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. Очевидно, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

то по критерию, доказанному в примере 119, $f_n(x)\rightrightarrows 0$.

122. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. Здесь также $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $x\in[0, 1]$. Функция $f_n(x)$ достигает абсолютного максимума во внутренней точке сегмента: $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\in(0, 1)$. Таким образом, имеем:

$$\sup_{x\in[0,1]} r_n(x)=f_n(x_n)=\frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} r_n(x)\right)=\frac{1}{4}\neq 0.$$

Отсюда следует, что последовательность $f_n(x)\to 0$ неравномерно.

123. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение. Нетрудно видеть, что $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n+x}=x$ и справедлива оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx}{1+n+x}-x\right|\leqslant\dfrac{2}{n+1}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\right)=0,\ \text{т. е. } f_n(x)\rightrightarrows x.$$

124. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$, $-\infty<x<+\infty$.

Решение. При $n\to\infty$ $f_n(x)\to|x|$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\right|=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)}=\frac{1}{n};$$

поэтому $f_n(x)\rightrightarrows|x|$ на всей числовой оси.

125. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$; $0 < x < +\infty$.

Решение. Очевидно,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (0 < x < +\infty).$$

Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\right| = \sup_{0<x<+\infty}\frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}\right)^2} = +\infty,$$

то, по утверждению примера 119, последовательность сходится неравномерно.

126. а) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$; $-\infty < x < +\infty$; б) $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$; $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Имеем: а) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n} = 0$; б) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n} = 0$.

Так как а) $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n} \to 0$ при $n\to\infty$; б) $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}\left|\sin\frac{x}{n}\right| = 1$ $\left(\text{достигается при } x_n = \frac{\pi n}{2}(2k+1) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right)$, то, в силу примера 119, заключаем, что в случае а) $f_n(x) \rightrightarrows 0$, а в случае б) последовательность сходится неравномерно.

127. а) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$; б) $f_n(x) = x\operatorname{arctg} nx$; $0 < x < +\infty$.

Решение. а) Имеем: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}$. Поскольку

$$\sup_{0<x<+\infty}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \lim_{x\to+0}\left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx\right| = \frac{\pi}{2},$$

то последовательность, согласно примеру 119, сходится неравномерно.

б) Здесь $f(x) = \frac{\pi x}{2}$. Найдем $\sup r_n(x)$. Дифференцируя функцию $r_n(x)$, имеем:

$$r_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx - \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Уравнение $r_n'(x) = 0$ при каждом n имеет корень x_n. Далее, $\lim\limits_{x\to+0} r_n(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} r_n(x) = \lim\limits_{t\to+0}\frac{t}{n\operatorname{tg} t} = \frac{1}{n}$ $\left(t = \frac{1}{x}\right)$, $r_n(x_n) = \left|\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx_n\right| x_n = \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^2} < \frac{1}{n}$.

Таким образом, $\sup\limits_{0<x<+\infty} r_n(x) = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} r_n(x)\right) = 0$, т. е. $f_n(x) \rightrightarrows \frac{\pi x}{2}$.

128. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; а) на конечном интервале (a, b); б) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. В обоих случаях легко находим предельную функцию $f(x)=e^x$. Далее, в случае а) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(a)=\lim_{n\to\infty}\left|e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right|=0,$$
$$\lim_{n\to\infty} r_n(b)=\lim_{n\to\infty}\left|e^b-\left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right|=0.$$

Из этих соотношений вытекает, что уравнение

$$\left(e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)'_x=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}=0 \qquad (1)$$

всегда имеет корень x_n $(a<x_n<b)$. Из (1) получаем: $e^{x_n}=\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$. Используя это выражение, для $r_n(x)$ находим: $r_n(x_n)=\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\times$ $\times\frac{|x_n|}{n}\leqslant\left(1+\frac{M}{n}\right)^n\frac{M}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, где $M=\max(|a|, |b|)$. Следовательно, последовательность на интервале (a, b) сходится равномерно.

В случае б) получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=+\infty,$$

поэтому $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} r_n(x)=+\infty$. Таким образом, последовательность $f_n(x)$ на всей числовой оси сходится неравномерно.

129. $f_n(x)=n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$; $1\leqslant x\leqslant a$.

Решение. Легко найти, что $f_n(x)\to\ln x$ на $[1, a]$ при $n\to\infty$. Дифференцируя функцию $r_n(x)=\left|\ln x-n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)\right|$, получаем $r'_n(x)\geqslant$ $\geqslant 0$ при $x\geqslant 1$, в силу чего $r_n(x)$ не убывает на сегменте $[1, a]$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in[1, a]} r_n(x)=\left|\ln a-n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right|$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[1, a]} r_n(x)\right)=0$; $f_n(x)\rightrightarrows\ln x$ на $[1, a]$.

130.

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n};\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \text{если } \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n};\\ 0, & \text{если } x\geqslant\frac{2}{n}\end{cases}$$

на сегменте $[0, 1]$.

Решение. Поскольку $f_n(0)=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. Далее, для $\forall x\in(0,\ 1]\ \exists N$: $\forall n>N\quad x>\frac{2}{n}$. Следовательно, $f_n(x)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ при $x\in(0,\ 1]$. Таким образом, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ при $x\in[0,\ 1]$.

Поскольку $\sup\limits_{x\in[0,\ 1]} f_n(x)=n$ $\left(\text{и достигается при } x=\frac{1}{n}\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,\ 1]} f_n(x)\right)=+\infty$, в силу чего последовательность сходится неравномерно.

131. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на сегменте $[a,\ b]$, и $f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Из определения целой части следует, что $[nf(x)]=nf(x)-p_n(x)$ $(0\leqslant p_n(x)<1)$. Поэтому $f_n(x)$ можно представить в виде: $f_n(x)=f(x)-\frac{p_n(x)}{n}$. Отсюда находим: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=$ $=f(x)$, а также $|f_n(x)-f(x)|=\frac{p_n(x)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\to 0$, т. е. $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

132. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на $(a,\ b)$ и $f_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$. Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, где $a<\alpha<\beta<b$.

Доказательство. Из условия существования производной вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)=f'(x)$. Применяя к функции $r_n(x)=\left|f'(x)-n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)\right|$ формулу Лагранжа, получаем:

$$r_n(x)=\left|f'(x)-f'\left(x+\frac{\theta_n(x)}{n}\right)\right|\qquad(0<\theta_n(x)<1).$$

Поскольку функция $f'(x)$ непрерывна на сегменте $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, то, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна. Это значит, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$ такое, что как только $\frac{\theta_n(x)}{n}<\delta$, то $r_n(x)<\varepsilon$ для всех x сразу. Но неравенство $\frac{\theta(x)}{n}<\delta$ выполняется при достаточно большом n и $\forall x$, поэтому, переходя на язык «$\varepsilon-N$», скажем следующее: для $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $r_n(x)<\varepsilon$ сразу для всех $x\in[\alpha,\ \beta]$, т. е. $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$, что и требовалось доказать.

133. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a,\ b]$.

Доказательство. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \int\limits_0^1 f(x+t)\,dt \equiv \varphi(x)$, причем $\varphi(x) \in C[a, b]$. Представив функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(x+t)\,dt$$

и применив теорему о среднем для интегралов, получим:

$$r_n(x) = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int\limits_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} f(x+t)\,dt - \frac{f\left(x+\frac{i}{n}\right)}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x+\tau_i) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| f(x+\tau_i) - f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|, \text{ где } \tau_i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right].$$

Из равномерной непрерывности функции $f(x)$ на любом конечном сегменте $[a, b]$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Взяв n настолько большим, чтобы $\left|\tau_i - \frac{i}{n}\right| < \delta$, получим $r_n(x) < < \varepsilon$, откуда следует, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Оценивая остаток ряда следующим образом

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $S(x)$, $S_n(x)$ — соответственно сумма и последовательность частичных сумм данного ряда, сходящегося в силу признака сравнения $\left(\left| \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \right)$, заключаем, что рассматриваемый ряд сходится равномерно.

135. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$.

Решение. Так как сумма этого ряда $S(x) = e^x$, то остаток ряда $r_n(x) = e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Но $\sup\limits_{0<x<+\infty} |r_n(x)| = +\infty$ (функция $e^x \to +\infty$ при

$x \to +\infty$ быстрее любой степенной функции x^n), поэтому ряд сходится неравномерно.

136. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1-x)\,x^n$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Решение. Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (1-x)\,x^k = 1 - x^{n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; отсюда находим сумму ряда

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_n(x) - S(x)| = 1$, т. е. данный ряд сходится неравномерно.

Примечание. Если функциональный ряд непрерывных на сегменте функций сходится на этом сегменте к разрывной функции, то ряд сходится неравномерно.

137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{((n-1)\,x+1)\,(nx+1)}$; $\quad 0 < x < +\infty$.

Решение. Находим частичную сумму ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)\,x+1)\,(kx+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)\,x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

откуда получаем, что $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = 1$ $\quad (0 < x < +\infty)$. Далее, поскольку $\sup\limits_{0<x<+\infty} \dfrac{1}{nx+1} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{nx+1} = 1$, то ряд сходится неравномерно.

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$; $\quad$ а) $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) $\varepsilon \leqslant x < +\infty$.

Решение. Представляя общий член ряда $a_n(x)$ в виде

$$a_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)\,x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)\,x)(1+nx)},$$

находим частичную сумму ряда

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

Отсюда следует, что

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Далее, в случае а) имеем: $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant\varepsilon} |S(x)-S_n(x)| = |S(+0)-$
$-S_n(+0)|=1$, поэтому ряд сходится неравномерно. В случае б) находим:

$$\sup_{\varepsilon\leqslant x<+\infty} |S(x)-S_n(x)| = \frac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\cdots(1+n\varepsilon)} \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

в силу чего ряд сходится равномерно.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \qquad |x|<+\infty.$

Решение. Найдем $\sup\limits_{|x|<+\infty} |a_n(x)|$, где $a_n(x)$ — общий член ряда. Имеем:

$$\sup_{|x|<+\infty} |a_n(x)| = \sup_{|x|<+\infty} \left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

и достигается при $x_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ является мажорантным для данного ряда. Так как мажорантный ряд сходится, то исходный ряд, согласно признаку Вейерштрасса, сходится равномерно.

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \quad \frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2.$

Решение. Легко найти, что

$$\sup_{\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2} (x^n+x^{-n}) = 2^n+\frac{1}{2^n} < 2^{n+1}.$$

Поскольку, к тому же, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}2^{n+1}$, в силу признака Даламбера, сходится, то исследуемый ряд сходится равномерно.

141. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}, \quad |x|<a, \quad$ где $a>0$.

Решение. Мажорантным для данного ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, сходимость которого при $a<1$ очевидна, так как в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} < \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

Пусть $a \geqslant 1$. Тогда, обозначая через S_n последовательность частичных сумм мажорантного ряда, в силу оценки

$$S_n < S_{2n+1} = \frac{a}{0!} + \frac{a^2}{1!} + \frac{a^3}{1!} + \dots + \frac{a^{2n}}{n!} + \frac{a^{2n+1}}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant a + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^{2k+1}}{(k+1)!} = S,$$

получим $S_n \leqslant S$. Следовательно, последовательность S_n, будучи монотонно возрастающей, ограничена сверху. А тогда, по известной теореме, она сходится, т. е. сходится мажорантный ряд.

142. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right), \qquad |x| < a.$

Решение. Исходя из неравенств

$$0 \leqslant \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \leqslant \frac{x^2}{n \ln^2 n} < \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

и сходимости числового ряда $\sum \frac{a^2}{n \ln^2 n}$, мажорантного для данного функционального, приходим к выводу о равномерной сходимости предложенного ряда.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

143. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ а) на сегменте $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; б) на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Решение. а) Так как частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничены

$$\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$

а последовательность $\frac{1}{n} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то, по признаку Дирихле, ряд сходится равномерно.

б) В этом случае указанная сумма не является ограниченной по совокупности переменных x и n, поскольку при $x = \frac{\pi}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, признак Дирихле не применим.

Воспользуемся критерием Коши. Взяв $\varepsilon = 0{,}1$, оценим разность

$$|S_{2n}(x) - S_n(x)|\Big|_{x=\frac{1}{n}} = \left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin 2nx}{2n}\right|\Bigg|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n+2} + \cdots + \frac{\sin 2}{2n} \geqslant \frac{\sin 1}{2} > \varepsilon$$

при любом n. Следовательно, по критерию Коши, последовательность сходится неравномерно, т. е. неравномерно сходится исследуемый ряд (сходимость ряда при каждом фиксированном x $(0 < x < 2\pi)$ следует из того же признака Дирихле, а при $x = 0$ и $x = 2\pi$ сходимость ряда очевидна).

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$; $\qquad 0 < x < +\infty$.

Решение. При каждом фиксированном $x > 0$ имеем: $2^n \sin\frac{1}{3^n x} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{x}$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что, по признаку сравнения, данный ряд сходится. Для исследования на равномерную сходимость ряда применим критерий Коши. Пусть $\varepsilon = 1$, $p = n$, $x = \frac{1}{3^n}$. Тогда

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|2^{n+1}\sin\frac{1}{3} + 2^{n+2}\sin\frac{1}{3^2} + \cdots + 2^{2n}\sin\frac{1}{3^n}\right| >$$

$$> 2^{n+1}\sin\frac{1}{3} > \varepsilon \text{ при } n > 1,$$

т. е. ряд сходится неравномерно.

145. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $\qquad 0 \leqslant x < +\infty$.

Решение. Так как частичные суммы, в силу оценки

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{n+1}{2}x\right| \leqslant 2,$$

ограничены, а функциональная последовательность $(n+x)^{-\frac{1}{2}}$ равномерно по x $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty\right)$ и монотонно по n $\left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} - \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}\,(\sqrt{n+1+x} + \sqrt{n+x})} > 0\right)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится равномерно.

146. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $\qquad 0 \leqslant x < +\infty.$

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ сходится (см. пример 88), а функции $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ограничены (числом 1) и при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ образуют монотонную последовательность. Следовательно, по признаку Абеля, данный ряд сходится равномерно.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $\qquad 0 < x < +\infty.$

Решение. Поскольку $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k\right| \leqslant 1$, а функциональная последовательность $\frac{1}{n+x}$ равномерно по x $\left(\frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty\right)$ и монотонно по n стремится к нулю при $n \to \infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится равномерно.

148. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Решение. Нет, не обязательно. Действительно, если, например, $f_n(x) = (-1)^n \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ — неотрицательная функциональная последовательность, равномерно по x и монотонно по n стремящаяся к нулю, и ряд $\sum \varphi_n(x)$ сходится, то, по признаку Дирихле, ряд $\sum f_n(x)$ сходится равномерно. Абсолютная его сходимость вытекает из сходимости ряда $\sum \varphi_n(x)$. Но так как из сходимости ряда $\sum \varphi_n(x)$ не обязательно вытекает равномерная сходимость, то ряд $\sum |f_n|$ не обязательно сходится равномерно.

Рассмотрим пример. Пусть $\varphi_n(x) = (1-x)x^n$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Равномерная сходимость этой последовательности к нулю доказана в примере 121. Монотонность ее по n очевидна. Следовательно, по признаку Дирихле, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$ при $x \in [0, 1]$ сходится равномерно. Легко видеть, что этот ряд сходится и абсолютно и сумма его

$$S(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 1; \\ 0, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Тем не менее ряд $\sum |(-1)^n (1-x) x^n|$ сходится неравномерно (см. пример 136).

149. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$, где

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

Доказательство. Нетрудно найти, что

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n); \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \end{cases}$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} \ (k=1, 2, \ldots); \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $S_n(x)$ и $S(x)$ — последовательность частичных сумм и сумма данного ряда соответственно. Далее,

$$S(x) - S_n(x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(k+1)} \leqslant x \leqslant 2^{-k} \quad (k = n+1, \ n+2, \ldots); \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |S(x) - S_n(x)| = \frac{1}{n+1}$ $\left(\text{достигается при } x_n = \frac{3}{2^{n+3}}\right)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при фиксированном $x \in [0, 1]$ он содержит не более одного отличного от нуля члена.

Пусть c_n — члены числового мажорирующего ряда. По условию, $c_n \geqslant \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)|$. Так как $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ и достигается при $x = \frac{3}{2^{n+2}}$, то $c_n \geqslant \frac{1}{n}$. Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, поэтому исходный ряд нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

150. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого — монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Принимая во внимание монотонность функций $\varphi_n(x)$, оценим остаток ряда $r_n(x)$. При $x \in [a, b]$ имеем:

$$|r_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \max[|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|]. \quad (1)$$

Поскольку ряд с членами $\varphi_n(x)$ сходится абсолютно при $x = a$ и $x = b$ то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \Rightarrow$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k(b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Так как $\max(|\varphi_k(a)|, |\varphi_k(b)|) \leqslant |\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|$, то, на основании неравенств (2), неравенство (1) принимает вид

$$\underset{x \in [a, b]}{|r_n(x)|} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\varphi_k(a)| + |\varphi_k(b)|) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $r_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[a, b]$, т. е. исследуемый ряд сходится равномерно.

Абсолютная сходимость ряда вытекает из оценки (1).

151. Пусть $a_n \to \infty$ так, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть X — замкнутое ограниченное множество, не содержащее точек a_k. Тогда, в силу условия $a_n \to \infty$, $\forall x \in X$ и при достаточно больших $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $|x - a_n| \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — фиксировано. При $n \geqslant N$ имеем:

$$\frac{1}{|x - a_n|} = \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{x}{a_n} - 1\right|} \leqslant \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left|\frac{M}{|a_n|} - 1\right|},$$

где $M = \sup_{x \in X} |x|$. Так как при достаточно больших n $\frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{M}{|a_n|}\right)} \sim \frac{1}{|a_n|}$, то ряд с членами $b_n = \frac{1}{|a_n|\left(1 - \frac{M}{|a_n|}\right)}$ сходится. По мажорантному признаку Вейерштрасса, ряд с членами $u_n(x) = \frac{1}{x - a_n}$

сходится равномерно. Сходимость ряда с членами $|u_n(x)|$ следует из неравенства $|u_n(x)| \leqslant b_n$.

152. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

Доказательство. Функции $\frac{1}{n^x}$ ограничены единицей и при каждом $x \geqslant 0$ образуют монотонную последовательность $\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant \geqslant 0\right)$, а ряд $\sum a_n$ сходится по условию; поэтому, по признаку Абеля, ряд $\sum \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

153. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Функции $\sin nx$, $\cos nx$ непрерывны в указанной области. Кроме того, ряды

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно. Поэтому, во-первых, почленное дифференцирование данного ряда, по п. 8°, законно; во-вторых, по п. 6°, функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны.

154. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ а) определена и непрерывна во всех точках, за исключением целочисленных: $x = 0$, ± 1, $\pm 2, \ldots$; б) периодическая с периодом, равным 1.

Решение. а) Функции $f_n(x) = \frac{1}{(n-x)^2}$ непрерывны при всех $x \neq n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Представляя $f_n(x)$ в виде

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2} \quad (n \neq 0, \ |n| > \alpha)$$

и обозначая $\alpha = \max(|a|, |b|)$, видим, что при всех $x \in (a, b)$, где (a, b) — любой интервал, не содержащий точек $x = n$, функции $\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^2}$ ограничены числом $\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{|n|}\right)^2}$ и монотонны при каждом фиксированном $x \in (a, b)$. Ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ $(n \neq 0)$ сходится равномерно, так как его члены не зависят от x. Поэтому, по признаку Абеля, ряд с членами $f_n(x)$ сходится равномерно на (a, b). Поскольку (a, b) — произвольный интервал, не содержащий точек $x = n$, то ряд $\sum f_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на каждом замкнутом множестве, не содержащем точек $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. А тогда, по п. 6°, заключаем, что функция $f(x)$ непрерывна в области существования.

б) Поскольку замена x на $x+1$ эквивалентна замене под знаком суммы ряда n на $n+1$, то $f(x+1) = f(x)$, т. е. функция $f(x)$ периодическая с периодом, равным 1.

155. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)\,xe^{-(n-1)x})$ сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако его сумма есть функция, непрерывная на этом сегменте.

Решение. Имеем:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (kxe^{-kx} - x(k-1)\,e^{-(k-1)x}) = nxe^{-nx},$$

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Таким образом, $S(x)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция. Однако $\sup\limits_{x \in [0, 1]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{e}$, поэтому ряд сходится к своей сумме неравномерно.

156. Определить области существования функции $f(x)$ и исследовать ее на непрерывность, если а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$; в) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$.

Решение. а) По признаку Коши, ряд сходится, если $\lim\limits_{n \to \infty} \left| x + \frac{1}{n} \right| < 1$, т. е. при $|x| < 1$ (и расходится при $|x| \geqslant 1$, так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю). Функция $f(x)$, таким образом, определена при $|x| < 1$. При $|x| \leqslant r < 1$ функциональный ряд сходится равномерно, поскольку сходится мажорантный для него ряд с членами $\left(r + \frac{1}{n}\right)^n$. Поэтому, на основании п. 6°, можно утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна при $|x| \leqslant r < 1$, т. е. непрерывна на интервале $(-1, 1)$.

б) Функции $f_n(x) = \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$ непрерывны при $-\infty < x < +\infty$, а ряд с членами $f_n(x)$ равномерно сходится на всей числовой оси.

В самом деле, представив функции $f_n(x)$ в виде

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2+n^2}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right),$$

замечаем, что функции $\varphi_n(x) = \dfrac{n^2}{x^2+n^2}$ монотонны и ограничены при каждом x, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ сходится равномерно на каждом интервале $(-L, L)$, в силу чего ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, по признаку Абеля, сходится равномерно на $(-L, L)$. Поэтому сумма ряда является непрерывной функцией на $(-L, L)$. В силу произвольности числа L, утверждаем, что сумма ряда непрерывна на всей числовой оси.

в) Ряд сходится на всей числовой оси. Вычисляя его сумму, получаем:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция $f(x)$ непрерывна при $x \neq 0$ и разрывна в точке $x = 0$.

157. Пусть r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1}$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и не дифференцируема в рациональных точках интервала $(0, 1)$.

Доказательство. Функции $a_k(x) = |x - r_k|$ непрерывны при любом x. Кроме того, данный функциональный ряд, на основании мажорантного признака Вейерштрасса, сходится равномерно. Поэтому, согласно п. 6°, функция $f(x)$ непрерывна.

Пусть рациональные числа интервала $(0, 1)$ пронумерованы, например, в порядке, указанном стрелками в следующей таблице:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	...
...	...	...	...	...

Очевидно, для любого иррационального числа i из того, что $|i-r_k|\to 0$, следует, что $k\to\infty$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|i+\Delta x-r_k|-|i-r_k|}{\Delta x\cdot 3^k}$, где $\Delta x\to 0$, разобьем на две части по следующему правилу: в первую часть (I) поместим те его члены, номер которых удовлетворяет неравенству

$$|i-r_k|>|\Delta x|, \tag{2}$$

а во вторую часть (II) — члены с номерами, определяющимися неравенством

$$|i-r_k|\leqslant|\Delta x|. \tag{3}$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|i+\Delta x-r_k|-|i-r_k|}{\Delta x\cdot 3^k}=\sum_{\mathrm{I}}+\sum_{\mathrm{II}},$$

откуда, учитывая неравенства (2) и (3), получаем оценку

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|i+\Delta x-r_k|-|i-r_k|}{\Delta x\cdot 3^k}-\sum_{\mathrm{I}}\frac{\operatorname{sgn}(i-r_k)}{3^k}\right|\leqslant\sum_{\mathrm{II}}\frac{3}{3^k}. \tag{4}$$

Пусть $\Delta x\to 0$. Тогда из (3) следует, что $|i-r_k|\to 0$. Это означает, что ряд справа в (4) начнет «терять» члены, вообще говоря, в произвольном порядке; но, в силу замечания, сделанного выше, при стремлении Δx к нулю из указанного ряда будут уходить большие члены, так что $\sum\limits_{\mathrm{II}}\frac{3}{3^k}\to 0$ вследствие сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$.

Следовательно, из (4) находим:

$$f'(i)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(i-r_k)}{3^k}\qquad(0<i<1).$$

Пусть $x=r_n$. Представляем (1) в виде

$$f(x)=\frac{|x-r_n|}{3^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|x-r_k|}{3^k}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}.$$

Очевидно, функция $\frac{|x-r_n|}{3^n}$ не дифференцируема в точке $x=r_n$, а функции

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|x-r_k|}{3^k}\quad\text{и}\quad\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}$$

дифференцируемы в этой точке. Поэтому сумма трех функций есть функция не дифференцируемая.

158. Доказать, что дзета-функция Римана

$$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

Доказательство. Пусть $x \geqslant x_0 > 1$. Тогда, в силу сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}} \quad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

и признака Вейерштрасса, заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}$$

сходится равномерно при $x \geqslant x_0 > 1$. Так как, кроме того, функции n^{-x} непрерывны в указанной области, то, по п. 6°, функции

$$\varsigma^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}$$

также непрерывны при $x \geqslant x_0 > 1$, т. е. при $x > 1$.

Сходимость ряда (1) вытекает из признаков сравнения и оценки $\ln^p n \leqslant n^{\frac{x_0-1}{2}}$ $(x_0 > 1)$, справедливой при достаточно большом n.

159. Доказать, что тэта-функция

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Доказательство. Сходимость ряда вытекает из сходимости ряда с общим членом $e^{-\pi |n| x}$ и признака сравнения ($e^{-\pi n^2 x} \leqslant e^{-\pi |n| x}$), т. е. функция $\theta(x)$ определена при $x > 0$.

Далее, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x_0} \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

где $x \geqslant x_0 > 0$, являющийся мажорирующим по отношению к ряду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2p} e^{-\pi n^2 x}. \tag{2}$$

Поскольку ряд (1), по признаку Коши, сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (2) сходится равномерно. Следовательно, по п. 8°, функция $\theta(x)$ любое число раз $(p = 1,\ 2,\ \ldots)$ дифференцируема при

$x \geqslant x_0 > 0$. В силу произвольности числа x_0, сделанное заключение пригодно при $x > 0$.

160. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на дифференцируемость, если: а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$; б) $f(x)=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

Решение. а) Функциональная последовательность $\frac{x}{n+x}$ при $x \neq$ $\neq -n$ монотонно по n стремится к нулю. Следовательно, по признаку Лейбница, ряд сходится, т. е. функция $f(x)$ существует при всех $x \neq -n$.

Так как функции $\left(\frac{x}{n+x}\right)'_x=\frac{n}{(n+x)^2}$ непрерывны при $x \neq -n$ и ряд

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(n+x)^2},$$

в силу признака Дирихле, сходится равномерно, то почленное дифференцирование ряда а) законно.

б) Ряд сходится равномерно, по признаку Вейерштрасса, при всех конечных x. Действительно, здесь $\frac{|x|}{n^2+x^2} \leqslant \frac{A}{n^2}$ $(A=\text{const})$ и ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, функция $f(x)$ существует при всех x $(-\infty < x < +\infty)$.

Далее, выполняя формальное дифференцирование ряда, получаем:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \quad (x \neq 0). \tag{1}$$

Поскольку $\varphi_n(x)=\frac{n^2 \operatorname{sgn} x - x|x|}{(n^2+x^2)^2} \leqslant \frac{n^2+A^2}{n^4} \leqslant \frac{2n^2}{n^4}=\frac{2}{n^2}$ при $n \geqslant n_0$ и ряд $\sum \frac{2}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится равномерно при $|x| < A$. А тогда, принимая во внимание непрерывность функций $\varphi_n(x)$ при $x \neq 0$ и учитывая п. 8°, заключаем, что почленное дифференцирование ряда б) справедливо.

Для исследования на дифференцируемость ряда б) в точке $x=0$ рассмотрим

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to \pm 0}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}\right). \tag{2}$$

Здесь ряд $\sum \frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому, по п. 9°,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+(\Delta x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty. \tag{3}$$

Тогда, как следует из (2), с учетом (3) можно написать: $f'_+(0)=$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $f'_-(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Таким образом, функция $f(x)$ в точке $x=0$ не дифференцируема.

161. При каких значениях параметра α: а) последовательность

$$f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx} \tag{1}$$

($n=1, 2, \ldots$) сходится на сегменте $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

Решение. а) Если $x>0$, то, используя правило Лопиталя, легко проверить, что $\lim\limits_{y\to+\infty} y^\alpha xe^{-yx}=0$ при любом α. При $x=0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=$ $=0$ — очевидно. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ при всех $x\in[0, 1]$.

б) Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} n^\alpha xe^{-nx}\right)=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & \text{если } \alpha<1;\\ \frac{1}{e}, & \text{если } \alpha=1;\\ +\infty, & \text{если } \alpha>1,\end{cases}$$

то, на основании утверждения примера 119, данная последовательность сходится равномерно только при $\alpha<1$.

в) Так как $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=0$, а

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}-e^{-n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\right)n^\alpha\right)$$

равен нулю лишь при $\alpha<2$, то предельный переход под знаком интеграла возможен только при $\alpha<2$.

162. Показать, что последовательность $f_n(x)=nx(1-x)^n$ ($n=$ $=1, 2, \ldots$) сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Решение. Очевидно, предельная функция равна нулю на $[0, 1]$. Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in[0,1]} (nx(1-x)^n)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e} \neq 0;$$

поэтому последовательность $f_n(x)$ сходится неравномерно. В то же время

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x(1-x)^n\,dx = \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 (1-u)u^n\,du =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0,$$

что и требовалось показать.

Найти:

163. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$.

Решение. Данный ряд, согласно признаку Абеля, сходится равномерно в области $x \geqslant 1$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$, поэтому, по п. 9°, возможен предельный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

164. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$.

Решение. Поскольку данный ряд сходится неравномерно на $[0, 1]$, то мы не имеем права переходить к пределу под знаком суммы. Поэтому найдем этот предел, предварительно вычислив сумму данного ряда. Имеем:

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n = \lim_{x\to 1-0} \left(\lim_{n\to\infty} (1-x^n)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \begin{Bmatrix} 1, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{Bmatrix} = 1.$$

165. $\lim\limits_{x\to +0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

Решение. Данный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $x \geqslant 0$. Поэтому, по п. 9°, имеем:

$$\lim_{x\to +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to +0} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

166. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

Решение. Поскольку $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно. Замечая еще, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\frac{1}{n^2}$, на основании п. 9°, переходим к пределу под знаком суммы:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

167. Законно ли почленное дифференцирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$?

Решение. Функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$ $(n=1, 2, \ldots)$ непрерывно дифференцируемы при $|x|<+\infty$. Кроме того, ряд производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно при $|x|<+\infty$. Следовательно, по п. 8°, почленное дифференцирование ряда законно.

168. Законно ли почленное интегрирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ на сегменте $[0, 1]$?

Решение. Данный функциональный ряд сходится на $[0, 1]$ неравномерно. Действительно, для частичной суммы $S_n(x)$ и суммы $S(x)$ ряда имеем:

$$S_n(x)=-x+x^{\frac{1}{2n+1}},\qquad S(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0;\\ 1-x, & \text{если } 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Видим, что сумма ряда — разрывная функция, поэтому ряд не может сходиться равномерно. Тем не менее, поскольку

$$\int_0^1 S(x)\,dx=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2},$$

то почленное интегрирование ряда законно.

169. Пусть $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x)=ce^x$, где c — постоянная величина.

Доказательство. В силу равномерной сходимости $f^{(n)}(x)$ к функции $\varphi(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ для всех $x \in (a, b)$ справедливы неравенства

$$\varphi(x) - \varepsilon < f^{(n)}(x) < \varphi(x) + \varepsilon,$$
$$\varphi(x) - \varepsilon < f^{(n+1)}(x) < \varphi(x) + \varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Умножая обе части первого неравенства на 1, второго — на $(x_0 - x)$, третьего — на $\frac{(x_0 - x)^2}{2!}$ и т. д., а затем складывая результаты, получаем:

$$(\varphi(x) - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0 - x)^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} f^{(n+k)}(x) \frac{(x_0 - x)^k}{k!} <$$
$$< (\varphi(x) + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x_0 - x)^k}{k!} \quad (a < x < x_0 < b).$$

Отсюда находим:

$$(\varphi(x) - \varepsilon) e^{x_0 - x} < f^{(n)}(x_0) < (\varphi(x) + \varepsilon) e^{x_0 - x}, \text{ или}$$
$$|f^{(n)}(x_0) e^{x - x_0} - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = e^{x - x_0} \lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x_0). \qquad (1)$$

Но так как, по условию, $f^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, то $f^{(n)}(x_0) \to \varphi(x_0)$. Поэтому из (1) следует, что $\varphi(x) = \varphi(x_0) e^{x - x_0} = ce^x$, где $c = \varphi(x_0) e^{-x_0} = \text{const}$. Поскольку функция e^x непрерывна на всей числовой оси и систему интервалов можно выбрать взаимоперекрывающуюся, то функция $\varphi(x) = ce^x$ на всей числовой оси.

170. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на каждом сегменте $[a, b]$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{n \to \infty} (\sup\limits_x f_n(x)) = \sup\limits_x \varphi(x)$?

Решение. Рассмотрим пример: $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Здесь функции $f_n(x)$ ограничены (единицей) и $\varphi(x) = 0$ на $[a, b]$. Так как $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f_n(x) = e^{-(b-n)^2}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} e^{-(b-n)^2} = 0$, то последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Однако, поскольку $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} f_n(x) = e^{-(n-n)^2} = 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_x f_n(x)) \neq \sup_x \varphi(x).$$

Таким образом, ответ отрицателен.

§ 5. Степенные ряды

1°. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

называется *степенным рядом*; a_n — *коэффициенты* степенного ряда, (они не зависят от x), a — фиксированная точка на числовой оси. Область сходимости степенного ряда всегда имеет вид интервала $|x-a|<R$, где R — *радиус сходимости* степенного ряда ($R\geqslant 0$). Радиус сходимости может быть определен по формуле Коши—Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}, \tag{А}$$

или по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{Б}$$

если этот предел существует. В случае, когда предел (А) равен нулю или когда предел (Б) равен $+\infty$, степенной ряд сходится на всей числовой оси.

Для выяснения вопроса о поведении степенного ряда в концевых точках интервала сходимости следует пользоваться признаками сходимости числовых рядов (исключая признаки Коши, Даламбера и им подобные).

2°. Основные свойства степенных рядов. Сумма степенного ряда внутри интервала сходимости представляет собой непрерывную функцию. Более того, внутри интервала сходимости она бесконечно дифференцируема.

Если степенной ряд на конце его интервала сходимости $x=R+a$ расходится, то сходимость ряда в интервале $[a, R+a)$ не может быть равномерной.

Если степенной ряд сходится при $x=R+a$, то сходимость ряда будет равномерной и на сегменте $[a, R+a]$.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд сходится в точке $x=R+a$, то его сумма $S(x)$ есть непрерывная слева функция в этой точке*, т. е.

$$S(R+a)=\lim_{x\to R+a-0}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для левого конца интервала сходимости.

3°. Разложение функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(a-R, a+R)$ в степенной ряд, то этот ряд является *рядом Тейлора* для функции $f(x)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(a-R, a+R)$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируема и остаточный член в формуле Тейлора для этой функции стремился к нулю при $n\to\infty$ на указанном интервале. Разложение имеет вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{В}$$

Функция $f(x)$, разлагающаяся в ряд Тейлора, называется *аналитической* и ее разложение (В) единственно.

Практически важными являются случаи представления остаточного члена разложения (B) (или остатка ряда (B)) в форме Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

и в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1},$$

где $0<\theta<1$, $0<\theta_1<1$.

4°. Полагая в формуле (B) $a=0$, получим пять основных разложений:

$$\text{I.}\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x|<\infty).$$

$$\text{II.}\quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|x|<\infty).$$

$$\text{III.}\quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x|<\infty).$$

$$\text{IV.}\quad (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n \quad (-1<x<1).$$

$$\text{V.}\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\leqslant 1).$$

5°. Операции над степенными рядами. Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

всегда имеют общий интервал сходимости и внутри этого интервала справедливы следующие операции сложения и умножения:

$$\lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \mu\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)(x-a)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$; λ, μ — числа.

Кроме этого, внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать; при этом интервал сходимости полученного таким образом ряда совпадает с интервалом сходимости исходного ряда. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} (x-a)^n,$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C.$$

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n.$

Решение. По формуле Коши—Адамара имеем:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n + (-2)^n}{n}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k + 4^k}{2k}} = 3;$$

поэтому при $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится, так как равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x = -\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n 3^n},$$

в силу признака сравнения, расходится $\left(\frac{3^n + (-2)^n}{n3^n} = \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{4n}\right)$.

Следовательно, в точке $x = -\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, а в точке $x = -\frac{2}{3}$ — расходится.

172. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

Решение. По формуле (Б) находим:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)!\, ((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4;$$

поэтому при $|x| < 4$ ряд сходится абсолютно.

При $x=4$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Поскольку $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$, то $a_n < a_{n+1}$. Это означает, что последовательность a_n монотонно возрастает. Следовательно, общий член ряда к нулю не стремится, т. е. ряд расходится. По этой же причине он расходится и в точке $x = -4$.

173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Решение. По формуле Коши—Адамара находим радиус сходимости ряда:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Следовательно, при $|x| < \frac{1}{e}$ ряд сходится абсолютно. При $x = \frac{1}{e}$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$. Покажем, что общий член этого ряда к нулю не стремится. Действительно, имеем:

$$a_n = e^{-n + n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{-n + n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \to e^{-\frac{1}{2}}, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, в точке $x = \frac{1}{e}$ степенной ряд расходится. По той же причине он расходится и в точке $x = -\frac{1}{e}$.

174. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a > 1)$.

Решение. Находим радиус сходимости ряда по формуле (Б). Имеем:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

следовательно, данный степенной ряд сходится на всей числовой оси.

175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

Решение. По формуле (Б) находим:

$$R = \lim_{n \to \infty} 2\left(\frac{(2n-1)!!\,(2n+2)!!}{(2n)!!\,(2n+1)!!}\right)^p = 2 \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p = 2.$$

Следовательно, при $-1 < x < 3$ ряд сходится абсолютно.

При исследовании характера сходимости ряда в точках $x=-1$ и $x=3$ пользуемся примером 90 и признаком Гаусса соответственно. Имеем:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p=1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где $a_n=\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$. Отсюда, учитывая упомянутые признаки, заключаем, что в точке $x=-1$ ряд сходится при $p>0$, а при $p>2$ он сходится абсолютно. Следовательно, в точке $x=-1$ он сходится условно при $0<p\leqslant 2$. В точке $x=3$ ряд сходится абсолютно при $p>2$ и расходится при $p\leqslant 2$.

176. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p x^n.$

Решение. По формуле (Б) получаем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p.$$

Поэтому ряд сходится абсолютно при $|x|<2^p$.

Рассмотрим поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости. Для этого образуем отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p=1+\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\quad(\varepsilon>0),$$

где $a_n=\left(\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$. Пользуясь признаком Гаусса, из этого отношения находим, что в точке $x=-2^p$ ряд сходится абсолютно при $p>2$, а при $p\leqslant 2$ ряд расходится. На основании же примера 90 устанавливаем, что в точке $x=2^p$ ряд сходится при $p>0$; абсолютно сходится при $p>2$ (по признаку Гаусса). Следовательно, в этой точке он сходится условно, если $0<p\leqslant 2$.

177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n.$

Решение. Для удобства исследования представим ряд в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1-m)(n-m-2)\cdots(1-m)m}{n!}x^n.$$

Очевидно, ряд сходится абсолютно, если $m=0, 1, 2, \ldots$, а x — любое; поэтому далее будем считать, что $m\neq 0, 1, 2, \ldots$.

Для нахождения радиуса сходимости применяем формулу (Б). Имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n-m}\right|=1,\ \text{где}$$

$$a_n=\frac{(n-m-1)(n-m-2)\cdots(1-m)m}{n!}.$$

Пусть $x=-1$. Тогда, составляя для числового ряда $\sum a_n$ отношение

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{m+1}{n}+\frac{m(m+1)}{n(n-m)} \tag{1}$$

и пользуясь признаком Гаусса, находим, что в этой точке степенной ряд сходится абсолютно, если $m>0$, и расходится, если $m<0$.

Пусть $x=1$. Тогда из (1), на основании примера 90, заключаем, что степенной ряд сходится, если $m>-1$. Следовательно, при $-1<m<0$ ряд сходится условно.

178. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$ $(a>0)$.

Решение. По формуле Коши—Адамара находим:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}=1,$$

т. е. при $|x|<1$ степенной ряд сходится абсолютно.

Положим $x=1$ и к полученному числовому ряду применим признак Раабе. Тогда получим:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(e^{\gamma_n\ln a}-1\right)=$$

$$=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}(n\gamma_n)=\ln a\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } a>1;\\ 0, & \text{если } a=1;\\ -\infty, & \text{если } a<1,\end{cases}$$

где $\gamma_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Следовательно, в точке $x=1$ степенной ряд сходится абсолютно при $a>1$ и расходится, если $0<a\leqslant 1$.

Положив $x=-1$, замечаем, что при $a\leqslant 1$ ряд расходится, поскольку общий член его не стремится к нулю. Если же $a>1$, то, по исследованному выше, заключаем, что степенной ряд в точке $x=-1$ сходится абсолютно.

179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

Решение. Применяя формулу (Б), получаем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=1.$$

Следовательно, при $|x|<1$ степенной ряд сходится абсолютно.

Пусть $x=1$. Тогда, имея в виду утверждение примера 90, для ряда $\sum(-1)^n b_n$, где $b_n=\left(\frac{n}{e}\right)^n\frac{1}{n!}$, составим отношение

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= e^{1+n\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = 1+\frac{1}{n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to\infty). \qquad (1)$$

Теперь видим, что по указанному утверждению ряд сходится.

Пусть $x = -1$. Тогда, воспользовавшись признаком Гаусса, из отношения (1) получим, что степенной ряд расходится (здесь $\mu = 1$). Отсюда следует, что в точке $x = 1$ имеет место условная сходимость.

180. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n.$

Решение. Поскольку $1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$ (см. пример 85, гл. I, ч. 1), то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n + C + \varepsilon_n} = 1.$$

Таким образом, по формуле Коши—Адамара, ряд сходится при $|x| < 1$. В точках $x = 1$ и $x = -1$ ряд расходится, так как общий член ряда на основании указанного выше примера не стремится к нулю при $n\to\infty$.

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n.$

Решение. Применяя формулу Коши—Адамара, получаем:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[2k]{2k}} = 4.$$

Отсюда следует, что при $|x| < \frac{1}{4}$ ряд сходится абсолютно.

Так как для подпоследовательности S_{2n} последовательности частичных сумм числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n4^n}$ выполняется неравенство $S_{2n} \geqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, то в точке $x = \frac{1}{4}$ ряд расходится. Аналогично в точке $x = -\frac{1}{4}$ имеем:

$$S_{2n} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}+\frac{1}{2n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$; поэтому и в этой точке ряд расходится.

182. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (ряд Принсгейма).

Решение. Согласно формуле Коши—Адамара, находим:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$.

В точке $x = 1$ получаем числовой ряд, сходимость которого доказана в примере 88.

В точке $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n\neq 4,\ 9,\ 16,\ \ldots)}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+[\sqrt{n}]}}{n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \qquad (1)$$

Поскольку первый ряд справа лейбницева типа, то он сходится. Второй ряд также сходится. Так как, кроме этого, ряд (1) слева абсолютно расходится (как гармонический), то мы приходим к выводу, что в точке $x = -1$ данный степенной ряд сходится условно.

183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

Решение. По формуле Коши—Адамара получаем:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10^{[\lg n]+1}}{n}} = 1.$$

(см. пример 53), т. е. при $0 < x < 2$ степенной ряд сходится абсолютно.

В силу неравенства $n = 10^{\lg n} < 10^{[\lg n]+1} \leqslant 10^{\lg n+1} = 10n$ заключаем, что в точках $x = 0$ и $x = 2$ ряд расходится, так как при этом общий член ряда не стремится к нулю.

Написать разложения следующих функций по целым положительным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

184. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

Решение. Функция $\sin x$ является аналитической на всей числовой оси. Функция $\arcsin x$ также аналитична, но на интервале $|x| < 1$ (см. пример 197). Поэтому функция $f(x)$ как суперпозиция этих функций аналитична на интервале $|x| < 1$. Легко найти ее разложение в степенной ряд, если воспользоваться рядом Тейлора и значениями производных функции $f(x)$ в точке $x = 0$ (см. пример 130, гл. II, ч. 1). Имеем:

$$\sin(\mu \arcsin x) = \mu x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu(\mu^2 - 1^2) \cdots (\mu^2 - (2k-1)^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$= \mu x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(1^2 - \mu^2) \cdots ((2k-1)^2 - \mu^2)}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \qquad (1)$$

Применяя формулу (Б), находим радиус и интервал сходимости ряда (1):

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)^2 - \mu^2} \right| = 1; \quad |x| < 1$$

($\mu \neq 0$, $2k+1$; k — целое).

Если $\mu = 0$ или $2k+1$ (k — целое), то ряд (1) превращается в конечную сумму, имеющую смысл при всех x ($|x| < \infty$). Однако в силу того что левая часть разложения (1) имеет смысл только при $|x| \leqslant 1$, равенство (1) в этом случае справедливо только при $|x| \leqslant 1$.

185. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Решение. Используя разложение функции e^x, получаем:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Радиус и интервал сходимости находим по формуле (Б):

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n \to \infty} (2n+1)(2n+2) = +\infty,$$

т. е. полученное разложение справедливо при всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

186. Написать три члена разложения функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) и $f(0) = e$ по целым положительным степеням переменной x.

Решение. Представляя функцию $f(x)$ в виде $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ и используя два из пяти основных разложений (см. п. 4°), получаем:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} =$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right) =$$

$$= e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{x^3}{16} + \cdots\right). \qquad (1)$$

Поскольку функция e^x аналитична на всей числовой оси, а функция $\varphi(x) = \frac{1}{x}\ln(1+x)$, $\varphi(0) = 1$ имеет разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n},$$

справедливое на интервале $|x| < 1$, то функция $e^{\varphi(x)}$ как суперпозиция этих функций разлагается в ряд в окрестности нуля также на интервале $|x| < 1$. Следовательно, разложение (1) справедливо при $|x| < 1$.

187. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ а) по степеням x; б) по степеням бинома $x - 5$, не производя самого разложения.

Решение. Преобразовывая функцию $f(x)$ для случаев а) и б) к виду а) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$; б) $f(t+5) \equiv \varphi(t) = \frac{t+5}{(t+3)(t+2)}$ ($t = x - 5$) и принимая во внимание то, что радиус сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра разложения до первой особой точки аналитической функции или какой-нибудь ее производной, находим:

а) $x = 2$ — точка бесконечного разрыва функции $f(x)$; $x = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию), а поэтому $R = 2$, и интервал сходимости определяется неравенством $|x| < 2$.

б) $t = -2$ — точка бесконечного разрыва функции $\varphi(t)$, а $t = 0$ — центр разложения ее в степенной ряд (по условию функция $\varphi(t)$ разлагается по степеням $t = x - 5$). Следовательно, $R = 2$; интервал сходимости ряда $|t| < 2$, или $3 < x < 7$.

188. Можно ли утверждать, что $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \rightrightarrows \sin x$ на $(-\infty, +\infty)$ при $N \to \infty$?

Решение. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$ на $(-\infty, +\infty)$, а

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} \left| \sin x - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = +\infty,$$

то, согласно примеру 119, последовательность $\varphi_N(x)$ сходится неравномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Пользуясь разложениями п. 4°, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

189. $\sin^3 x$.

Решение. Преобразовав $\sin^3 x$ к виду $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ и воспользовавшись разложением функции $\sin x$, найдем:

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3 - 3^{2n-1})}{(2n-1)!} x^{2n-1}.$$

По формуле (Б) легко найти, что этот ряд сходится абсолютно при всех x.

190. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Решение. Так как $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, то, дифференцируя почленно разложение для $(1-x)^{-1}$, получаем: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(|x| < 1)$.

191. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

Решение. Разлагая данную дробь на простейшие $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{2(1-x)^2}$ и используя разложение IV, п. 4°, а также результат предыдущего примера, можем написать:

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1+(-1)^{n+1}\right)x^n.$$

По формуле Коши — Адамара находим интервал абсолютной сходимости полученного степенного ряда: $|x| < 1$.

192. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

Решение. Представляя данную дробь в виде

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-(t+\bar{t})x+x^2} = \frac{1}{(x-t)(x-\bar{t})} =$$

$$= \frac{1}{t-\bar{t}}\left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x-\bar{t}}\right) = \frac{1}{t-\bar{t}}\left(\frac{t}{1-xt} - \frac{\bar{t}}{1-x\bar{t}}\right),$$

где $t = e^{i\varphi}$ $\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right)$, и используя разложение IV, п. 4°, а также формулу Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, получаем:

$$f(x) = \frac{1}{t-\bar{t}}\left(t\sum_{n=0}^{\infty}(xt)^n - \bar{t}\sum_{n=0}^{\infty}(x\bar{t})^n\right) =$$

$$= \frac{1}{t-\bar{t}}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(t^{n+1} - \bar{t}^{n+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(n+1)\varphi.$$

По формуле Коши — Адамара находим радиус и интервал сходимости этого ряда:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\sin(n+1)\varphi|} = 1;\ R = 1\ \ (|x| < 1).$$

193. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Чему равна $f^{(1000)}(0)$?

Решение. Разлагая функцию $f(x)$ на простые дроби и используя разложение IV, п. 4°, находим:

$$f(x)=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1+x^2)}-\frac{x}{2(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos n\pi+\sin(n+1)\frac{\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)x^n,$$

откуда

$$f^{(1000)}(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1000}^{\infty}\left(\cos n\pi+\sin(n+1)\frac{\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)\frac{n!\,x^{n-1000}}{(n-1000)!}.$$

Следовательно, $f^{(1000)}(0)=1000!$

194. $\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

Решение. Полагая $\sin\alpha=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, $\cos\alpha=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, где $z=e^{i\alpha}$, и разлагая данную дробь на простейшие, получаем:

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-xz}-\frac{1}{1-x\bar{z}}\right).$$

Применив к правой части этого соотношения разложение IV, п. 4°, можем написать:

$$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}x^n(z^n-\bar{z}^n)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha.$$

Очевидно, полученный ряд сходится абсолютно при $|x|<1$.

195. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

Решение. Преобразовывая данную функцию к виду

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)\ (x>-1)$$

и используя разложение V, п. 4°, получаем:

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\ (-1<x\leqslant 1).$$

Складывая полученные ряды в общей области их сходимости ($-1<x\leqslant 1$), окончательно имеем:

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big((-1)^{n-1}+$$

$$+2\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\Big)x^n\ (-1<x\leqslant 1).$$

Нетрудно видеть, что при $|x| < 1$ этот ряд сходится абсолютно, а в точке $x = 1$ сходится лишь условно (по признаку Дирихле).

196. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Решение. Рассматривая данную функцию как

$$\operatorname{Re}(e^{x\cos\alpha + ix\sin\alpha}) = \operatorname{Re}(e^{xe^{i\alpha}})$$

и применяя разложение I, п. 4°, можем написать:

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha) = \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n e^{in\alpha}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cos n\alpha}{n!}.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x^n\cos n\alpha|}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$$

и второй степенной ряд в этом неравенстве сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то полученное разложение справедливо при $|x| < \infty$.

Разложить в степенной ряд следующие функции:

197. $f(x) = \arcsin x$.

Решение. С помощью формулы IV, п. 4° имеем:

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Интегрируя этот ряд почленно (что возможно внутри интервала сходимости), находим:

$$f(x) = C + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Так как $f(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Вычисляем радиус сходимости полученного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} = 1.$$

Для исследования сходимости ряда в концевых точках применяем признак Раабе. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1}=\frac{3}{2}>1;$$

поэтому при $x=\pm 1$ ряд сходится абсолютно.

Таким образом, полученное разложение, в силу теоремы Абеля, справедливо при $|x|\leqslant 1$, т. е. во всей области существования $\arcsin x$.

198. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Решение. Разлагая производную данной функции $f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ при $|x|<1$ в степенной ряд

$$f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

интегрированием последнего получаем:

$$f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)}+C.$$

Поскольку $f(0)=0$, то $C=0$.

Как и в предыдущем примере, находим, что полученное разложение сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$ и в концевых точках сумма ряда равна, по теореме Абеля, значению функции $f(x)$ в этих точках. Таким образом, написанное разложение справедливо при $|x|\leqslant 1$.

199. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$.

Решение. Представляя функцию $f(x)$ в виде

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}2x-\pi\varepsilon(x),$$

где

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x>-\frac{1}{4},\\ 1, & \text{если } x<-\frac{1}{4}\end{cases}$$

(см. пример 370, гл. I, ч. 1), и разлагая в ряд функцию $\operatorname{arctg}2x$ с помощью почленного интегрирования ряда для ее производной, получаем:

$$\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}=\operatorname{arctg}2-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}-\pi\varepsilon(x).$$

Поскольку полученный ряд сходится при $|x|\leqslant\frac{1}{2}$ (абсолютная сходимость его при $|x|<\frac{1}{2}$ устанавливается с помощью признака Даламбера, а в концевых точках — с помощью признака Лейбница), то в данном случае

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 1, & \text{если } -\frac{1}{2} \leqslant x < -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

200. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2 - x^2}$.

Решение. Представляя производную функции $f(x)$ в виде

$$f'(x) = \frac{1}{1+t^4} + \frac{t^2}{1+t^4},$$

где $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, и пользуясь формулой IV, п. 4°, находим:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n+2}.$$

Очевидно, при $|t| < 1$ оба ряда справа абсолютно сходятся; поэтому при $|t| < 1$ их можно сложить. Имеем:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n}}{2^n} \quad (|x| < \sqrt{2}),$$

откуда интегрированием получаем:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

Поскольку интервал абсолютной сходимости ряда после интегрирования не меняется, то полученный ряд сходится абсолютно при $|x| < \sqrt{2}$. В точках $x = \pm\sqrt{2}$ ряд сходится, но только условно. Действительно, последовательность $\frac{1}{2n+1} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, а $\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\right| \leqslant 2$; поэтому, согласно признаку Дирихле, ряд сходится. Абсолютная расходимость ряда в этих точках следует из расходимости гармонического ряда. Но так как функция $f(x)$ в точках $x = \pm\sqrt{2}$ не определена, то полученное разложение справедливо только при $|x| < \sqrt{2}$.

201. $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$.

Решение. Дифференцируя функцию $f(x)$, получаем:

$$f'(x) = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

Пользуясь разложением IV, п. 4°, находим:

$$f'(x) = 2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\right) \cdot \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| < 1).$$

Интегрируя почленно полученный ряд, имеем:

$$f(x)=2\left(|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)}\right). \tag{1}$$

Этот ряд, согласно признаку Раабе, сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$, т. е. во всей области существования функции $f(x)$.

Примечание. Ряд (1), согласно теореме Абеля, представляет собой непрерывную на отрезке $|x|\leqslant 1$ функцию. Функция $f(x)$ также непрерывна на этом отрезке. Разложение IV, п. 4°, которым мы воспользовались, гарантирует нам совпадение суммы ряда $S(x)$ с функцией $f(x)$ в области $0<|x|<1$. Кроме того, $f(0)=S(0)=0$. Поэтому из всего сказанного следует, что функция $f(x)$ полностью совпадает с суммой ряда (1).

202. Используя единственность разложения

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots,$$

найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $f(x)=e^{x^2}$; б) $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$; в) $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

Решение. а) Разлагая функцию

$$F(h)\equiv f(x+h)-f(x)=e^{x^2}(e^{2xh+h^2}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}(e^{x^2})^{(n)} \tag{1}$$

в ряд по степеням h, находим:

$$F(h)=e^{x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+(-1)^n]}{2\left[\frac{n}{2}\right]!}h^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}h^n-1\right)\equiv e^{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}c_nh^n, \tag{2}$$

где $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{[1+(-1)^k]}{2\left[\frac{k}{2}\right]!}\cdot\frac{(2x)^{n-k}}{(n-k)!}$ — коэффициенты, полученные в результате перемножения двух степенных рядов. В силу единственности разложения, из (1) и (2) получаем:

$$(e^{x^2})^{(n)}=e^{x^2}n!\sum_{k=0}^{n}\frac{[1+(-1)^k]}{(n-k)!\,2\left[\frac{k}{2}\right]!}(2x)^{n-k}.$$

б) Представляя функцию

$$F(h)=e^{\frac{a}{x+h}}-e^{\frac{a}{x}}=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\left(e^{\frac{a}{x}}\right)^{(n)} \tag{1}$$

в виде ряда по степеням h, имеем:

$$F(h) = e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n h^n}{x^{2n}\left(1+\frac{h}{x}\right)^n} =$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{x^{2n} n!}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \cdot \frac{h^k}{x^k}\right) h^n =$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n h^n, \qquad (2)$$

где $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k,\,k}$, $a_{n,\,k} = \frac{(-1)^{n+k} a^n n(n+1)\cdots(n+k-1)}{x^{2n+k} n!\, k!}$, $a_{n,\,0} = \frac{(-1)^n a^n}{x^{2n} n!}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Сравнивая выражения (1) и (2), получаем:

$$\left(e^{\frac{a}{x}}\right)^{(n)} = e^{\frac{a}{x}} n! \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^{n-k}(n-k)(n-k+1)\cdots(n-1)}{(n-k)!\, k!} x^k \; (n = 2, 3, \ldots).$$

в) Как и в предыдущих случаях, имеем:

$$F(h) = \operatorname{arctg} \frac{h}{1+x^2+xh} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (\operatorname{arctg} x)^{(n)} \qquad (1)$$

(считаем, что $1 + x(x+h) > 0$). С другой стороны,

$$F(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} h^{2n-1}}{(2n-1)(1+x^2)^{2n-1}} \left(1 + \frac{xh}{1+x^2}\right)^{-(2n-1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} h^n \frac{\sin\frac{n\pi}{2} \cdot \left(1+\frac{xh}{1+x^2}\right)^{-n}}{n(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n \sin\frac{n\pi}{2}}{n(1+x^2)^n}\left(1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!\,(1+x^2)^k} x^k h^k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h^n, \qquad (2)$$

где $\quad c_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k,\,k}, \quad a_{n,\,k} = \frac{(-1)^k \sin\frac{n\pi}{2} \cdot (n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{(1+x^2)^{n+k} k!\, x^{-k}},$

$$a_{n,\,0} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n(1+x^2)^n}.$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cdot (n-k)(n-k+1)\cdots(n-1)\, x^k}{(n-k)\, k!}.$$

Заметим, что в двух последних случаях под выражением $(n-k)(n-$ $-k+1)\cdots(n-1)$ следует понимать единицу, если $k<1$.

203. Функцию $f(x)=\ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

Решение. Положив $\frac{x-1}{x+1}=t$, получим: $f\left(\frac{t+1}{1-t}\right) \equiv F(t)=\ln\frac{t+1}{1-t}$. Поскольку $x>0$, то $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=|t|<1$ (заметим, что справедливо и обратное утверждение). Следовательно, использовав формулу V, п. 4°, можем написать:

$$\ln\frac{t+1}{1-t}=\ln(1+t)-\ln(1-t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

204. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что $f(x)\,f(y)=$ $=f(x+y)$.

Доказательство. Перемножая ряды $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ и $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}$, получаем:

$$f(x)\,f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{x^{n-j}y^j}{(n-j)!\,j!}\right).$$

Но так как $(x+y)^n \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}y^k$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}y^k}{(n-k)!\,k!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=f(x+y),$$

что и требовалось доказать.

205. Пусть, по определению,

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Доказательство. Перемножая данные ряды, получаем:

$$\sin x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}. \qquad (1)$$

Легко показать, по индукции, что

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n+1)!}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}=2^{2n}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (2)$$

Подставляя левую часть тождества (2) в выражение (1) и учитывая данное определение функции $\sin x$, получаем:

$$\sin x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}2^{2n}}{(2n+1)!}\equiv\frac{1}{2}\sin 2x,$$

что и требовалось доказать.

206. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции $f(x)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right)^{-1}$.

Решение. Следует подобрать коэффициенты α_n так, чтобы выполнялось тождество по x:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\equiv 1,\ \text{где}\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n=f(x).$$

Это дает бесконечную систему уравнений относительно α_n:

$$\alpha_0=1,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{n-i+1}=-\frac{1}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

из которой последовательно находим: $\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\alpha_2=-\frac{1}{12}$, $\alpha_3=$ $=-\frac{1}{24}$, ...

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

207. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

Решение. Разлагая функцию $\operatorname{ch}\sqrt{x}$ в ряд по степеням $\sqrt{x}$, получаем:

$$f(x)=(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(2n)!}=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}-2x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(2n)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(2n)!}=1-\frac{3}{2}x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right)x^n.$$

Очевидно, это разложение справедливо при всех x.

208. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

Решение. Возводя в квадрат ряд $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, получаем: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n x^{n+1}$, где

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1-k)k}=\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=1$, то разложение справедливо при $|x|<1$.

209. $f(x)=e^x\cos x$.

Решение. Разлагая функцию $\bar{f}(x)=e^{x(1+i)}$ в степенной ряд:

$$\bar{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

и замечая, что $f(x)=\operatorname{Re}\bar{f}(x)$, получаем:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Поскольку $\left|\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\right|\leqslant\frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ сходится при $|x|<\infty$, то полученное разложение законно также при $|x|<\infty$.

210. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$ при $x\neq 0$ и $f(0)=1$.

Решение. Принимая во внимание результат примера 197, находим:

$$f(x)=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n}}{(2n)!!\,(2n+1)}\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n}}{(2n+1)}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{2n},$$

где

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}\frac{(2k-1)!!\,((2k)!!)^{-1}}{(2n-2k+1)(2k+1)},\ (-1)!!=1.$$

По индукции доказываем, что

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(2n-2i-1)!!\,(2i-1)!!}{(2n-2i)!!\,(2i)!!\,(2n-2i+1)\,(2i+1)} = \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+2)!}.$$

Поэтому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+2)!}\,x^{2n}. \tag{1}$$

Легко установить, что этот ряд сходится при $|x| < 1$. Для выяснения вопроса о сходимости ряда (1) в концевых точках $x = \pm 1$ воспользуемся признаком Раабе:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)n = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{2n} - \frac{2n+3}{2n\,(n+1)^2}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Видим, что ряд (1) сходится абсолютно также и в концевых точках интервала сходимости $|x| < 1$. Следовательно, разложение (1), в силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $|x| \leqslant 1$ и теоремы Абеля, справедливо на указанном отрезке.

211. Пусть разложение $\sec x$ записано в виде $\sec x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}\,x^{2n}$. Вывести рекуррентное соотношение для коэффициентов E_n (чисел Эйлера).

Решение. Нужное рекуррентное соотношение выведем из тождества:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}\,x^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!} \equiv 1.$$

Перемножая эти ряды, получаем: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n} \equiv 1$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!} = 1 \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда находим

$$E_0 = 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}\ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Заменяя $n-k$ на k, последнее соотношение можно представить также в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}E_k}{(2k)!\,(2n-2k)!} = \frac{1}{2n!}.$$

Это и есть искомое рекуррентное соотношение.

212. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ ($|x|<1$).

Решение. Преобразовывая данную функцию к виду $f(x)=(y^2+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\equiv F(y^2)\equiv Z(y)$, где $y=t-x$, $\alpha=1-t^2$, и используя результат примера 139, гл. II, ч. 1, получаем:

$$Z^{(n)}(y)=(2y)^n F^{(n)}(y^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2y)^{n-2}F^{(n-1)}(y^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2y)^{n-4}F^{(n-2)}(y^2)+\cdots.$$

Отсюда, учитывая, что $F^{(n)}(t^2)=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}$, находим:

$$Z^{(n)}(t)=(-1)^n f^{(n)}(0)=(-1)^n\left((2t)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}-\right.$$
$$-\frac{n(n-1)}{1!}(2t)^{n-2}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}+$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2t)^{n-4}\frac{(2n-5)!!}{2^{n-2}}-\cdots\right).$$

Следовательно, степенной ряд имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n Z^{(n)}(t)}{n!}x^n.$$

Покажем теперь, что при $|x|<1$ это разложение не формально. Легко видеть, что из условия $|x|<1$ и положительности подкоренного выражения вытекает неравенство $|t|\leqslant 1$. Пусть $t=\cos\alpha$. Тогда $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-xe^{i\alpha})(1-xe^{-i\alpha})}}.$$

Поскольку $|xe^{i\alpha}|=|xe^{-i\alpha}|=|x\|e^{i\alpha}|=|x|<1$, то, по формуле IV, п. 4°, имеем:

$$(1-xe^{\pm i\alpha})^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n e^{\pm in\alpha}.$$

Следовательно, функция $f(x)$, будучи произведением двух аналитических при $|x|<1$ функций $(1-xe^{i\alpha})^{-\frac{1}{2}}$ и $(1-xe^{-i\alpha})^{-\frac{1}{2}}$, также является аналитической при $|x|<1$, т. е. разлагается в сходящийся при $|x|<1$ степенной ряд, что и требовалось показать.

Заметим в заключение, что функции $P_n(t)=\dfrac{(-1)^n Z^{(n)}(t)}{n!}$ являются полиномами Лежандра (см. пример 136, гл. II, ч. 1), так что данную функцию (которая называется производящей для полиномов Лежандра) при $|x|<1$ можно разложить в степенной ряд:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\,x^n.$$

213. Пусть $f(x)\in C^{(\infty)}(a,\ b)$ и $|f^{(n)}(x)|\leqslant c^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ при $x\in(a,\ b)$. Доказать, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $x_0\in(a,\ b)$, сходящийся в интервале $(a,\ b)$.

Доказательство. Известно, что если некоторая функция разлагается в степенной ряд, то только в ряд Тейлора. Поэтому будем доказывать, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора, т. е.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n;\ x,\ x_0\in(a,\ b).$$

Для этого оценим остаточный член написанного ряда $R_n(x)$, который мы возьмем в форме Лагранжа. Имеем:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{(c(b-a))^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что $|R_n(x)|\to 0$ при $n\to\infty$ и независимо от $x\in(a,\ b)$. Но так как стремление к нулю остаточного члена одновременно с бесконечной дифференцируемостью функции $f(x)$ является необходимым и достаточным условием разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора, то теорема доказана.

214. Пусть $f(x)\in C^{(\infty)}[-1,\ 1]$ и $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ при $x\in[-1,\ 1]$. Доказать, что в интервале $(-1,\ 1)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Доказательство. Покажем, что данная функция разлагается в ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ при $x\in(-1,\ 1)$, т. е. разлагается в степенной ряд по степеням x.

Прежде всего, принимая во внимание, что функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на сегменте $[-1,\ 1]$, напишем формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!}x^{n+1},\tag{1}$$

откуда, в силу неотрицательности производных функции $f(x)$, получаем неравенство

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_n(1))}{(n+1)!}=f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\leqslant f(1).\tag{2}$$

Если бы нам удалось установить справедливость соотношения

$$\sup_{0<|x|\leqslant 1} f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = f^{(n+1)}(\xi_n(1)), \tag{3}$$

то тогда из формулы (1), учитывая неравенство (2), легко было бы получить оценку остаточного члена

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(1))}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant f(1)|x|^{n+1},$$

из которой следовало бы, что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ при $|x| < 1$. Последнее означало бы, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Маклорена на интервале $(-1, 1)$.

Покажем теперь справедливость утверждения (3). Пусть $0 < x \leqslant 1$. Дифференцируя выражение

$$f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = (n+1)!\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)x^{-n-1} \equiv \omega_n(x)$$

по x, получаем:

$$\omega_n'(x) = (n+1)!\,\varphi_n(x)\,x^{-n-2}, \tag{4}$$

где $\varphi_n(x) = xf'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}x^k - (n+1)\left(f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)$.

Легко найти, что $\varphi_n^{(i)}(0) = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, а $\varphi_n^{(n+1)}(x) = xf^{(n+2)}(x) \geqslant 0$ при $x > 0$. Поэтому, согласно примеру 186, гл, II, ч. 1, находим, что $\varphi_n(x) \geqslant 0$ при $x > 0$. А тогда, как следует из формулы (4), функция $\omega_n(x)$ является монотонно неубывающей.

Пусть $-1 \leqslant x < 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi_n(x) \equiv (-1)^n\varphi_n(-x) = (-1)^{n+1}\left(xf'(-x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{(k-1)!}(-1)^kx^k + \right.$$

$$\left. + (n+1)\left(f(-x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(-1)^kx^k\right)\right), \; x \in (0, 1].$$

Нетрудно проверить, что $\psi_n^{(i)}(0) = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, а $\psi_n^{(n+1)}(x) = xf^{(n+2)}(-x) \geqslant 0$; поэтому функция $\psi_n(x)$, согласно указанному выше примеру, неотрицательна, т. е. функция $f^{(n+1)}(\xi_n(x))$ и при $-1 \leqslant x < 0$ является монотонно неубывающей.

Учитывая, наконец, еще то, что $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n+1)}(\xi_n(x)) = f^{(n+1)}(0)$ (существует), приходим к выводу, что функция $f^{(n+1)}(\xi_n(x))$ является монотонно неубывающей на всем отрезке $[-1, 1]$ (при $x = 0$ полагаем: $f^{(n+1)}(\xi_n(0)) = f^{(n+1)}(0)$). Следовательно, соотношение (3) справедливо, что и требовалось доказать.

215. Доказать, что если 1) $a_n \geqslant 0$ и 2) существует $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S$.

Доказательство. В силу условия 2), имеем:

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n R^n + \lim_{x \to R-0} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = S,$$

откуда

$$S - \sum_{n=0}^{N} a_n R^n = \alpha_N, \tag{1}$$

где $\alpha_N = \lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$.

Поскольку, далее, $a_n \geqslant 0$, то $\alpha_N \geqslant 0$. Поэтому из (1) следует, что $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} a_n R^n \leqslant S$. Последнее означает, что последовательность $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n R^n$ ограничена. Но так как она еще и монотонна, то, в силу известной теоремы, сходится, т. е сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. А тогда, по теореме Абеля, будем иметь: $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Отсюда, приняв во внимание условие 2), найдем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S,$$

что и требовалось доказать.

Разложить в степенной ряд функции:

216. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Решение. Разлагая функцию $\frac{\sin t}{t}$ $(t \neq 0)$ в степенной ряд $\frac{\sin t}{t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$ $(0 < |t| < \infty)$ и интегрируя последний, получаем:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!} \quad (|x| < \infty).$$

217. $\int\limits_0^x \frac{t\, dt}{\ln (1+t)}$.

Решение. Коэффициенты a_n степенного ряда подынтегральной функции найдем из тождества: $1 \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n+1} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, которое дает систему алгебраических уравнений относительно a_k:

$$a_0 = 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k (-1)^{k+1}}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Из этой системы уравнений последовательно получаем: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{12}$, $a_3 = \frac{1}{24}$ и т. д. Таким образом, имеем:

$$\int_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + \cdots$$

Так как функция $\varphi(t) = \frac{t}{\ln(1+t)}$ аналитична всюду, за исключением точки $t = -1$ (при $t = 0$ полагаем, что $\varphi(0) = 1$), то радиус сходимости ряда $\sum a_n t^n$ равен единице. Следовательно, такой же радиус сходимости имеет и полученное разложение.

Применяя почленное дифференцирование, вычислить суммы следующих рядов:

218. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

Решение. Данный ряд, согласно формуле Коши — Адамара, имеет радиус сходимости, равный единице. По теореме п. 5°, степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости. Имеем: $1 - x^2 + x^4 - \cdots = \frac{1}{1+x^2}$ $(|x| < 1)$. Отсюда интегрированием получаем: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \operatorname{arctg} x + C$. Полагая здесь $x = 0$, находим что постоянная $C = 0$.

Окончательно имеем:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \operatorname{arctg} x.$$

Заметим, что в концевых точках интервала сходимости этот ряд сходится. Поэтому, согласно теореме Абеля, сумма ряда есть непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку функция $\operatorname{arctg} x$ также непрерывна на этом отрезке, то последнее равенство справедливо при всех $x \in [-1, 1]$.

219. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

Решение. Очевидно, этот ряд сходится на всей числовой оси. Обозначая через $S(x)$ сумму данного ряда, почленным дифференцированием его получаем:

$$S(x) + S'(x) = e^x, \quad S(x) - S'(x) = e^{-x}.$$

Отсюда $S(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$ $(|x| < \infty)$.

220. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots$

Решение. Дифференцируя почленно ряд внутри интервала сходимости $|x|<1$, получаем: $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\dots=S(x)$. Умножая обе части этого равенства на $x^2\,(x\neq 0)$ и пользуясь формулой V, п. 4°, находим:

$$S(x)=-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}. \tag{1}$$

При $x=0$ полагаем $S=\frac{1}{2}$ ($x=0$ — устранимая точка разрыва функции $S(x)$). Интегрируя (1), имеем:

$$\int S(x)\,dx=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+C. \tag{2}$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots\right)=0$, то из (2) находим: $C=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)=1$. Следовательно,

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots=\begin{cases}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & \text{если } x\neq 0;\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases} \tag{3}$$

При $|x|<1$ это равенство гарантировано теоремами о законности почленного дифференцирования и интегрирования степенного ряда внутри интервала сходимости. Покажем, что и в концевых точках интервала $x=\pm 1$ это равенство при некотором условии справедливо. Действительно, поскольку рассматриваемый степенной ряд сходится в точках $x=\pm 1$, то, на основании теоремы Абеля, его сумма является непрерывной функцией на сегменте $[-1, 1]$. Если значение функции в равенстве (3) справа в точке $x=1$ положить равным единице, то, как легко видеть, эта функция на сегменте $[-1, 1]$ также будет непрерывной. Поэтому окончательно можем написать:

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots=$$
$$=\begin{cases}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & \text{если } -1\leqslant x<0;\ 0<x<1;\\ 0, & \text{если } x=0;\\ 1, & \text{если } x=1.\end{cases}$$

221. $1+\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\dots$

Решение. Нетрудно проверить, что радиус сходимости ряда $R=1$. Умножая производную $S'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 3x^2+\dots$ ($|x|<1$) суммы данного ряда на $(1-x)\,(x\neq 1)$, получаем уравнение $(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x)$. Общим решением этого уравнения является функция $S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}$ $(C=\mathrm{const})$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $S(0)=1$, находим: $C=1$. Следовательно, $S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $(|x|<1)$.

Сходимость рассматриваемого ряда в концевой точке $x=-1$ легко установить, если воспользоваться примером 90; расходимость ряда в точке $x=1$ следует из признака Гаусса. Таким образом, сумма ряда, по теореме Абеля, есть непрерывная функция на полусегменте $[-1, 1)$. Поскольку функция $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ также непрерывна на этом полусегменте, то окончательно имеем:

$$1+\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots=\frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ при } -1\leqslant x<1.$$

Применяя почленное интегрирование, вычислить суммы рядов:

222. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$

Решение. Общий член этого ряда имеет вид $a_n(x)=(-1)^{n-1}n^2x^n$. Поэтому легко найти, что радиус сходимости ряда $R=1$.

Деля на x $(x\neq 0)$ сумму $S(x)$ данного ряда, а затем почленно его интегрируя в интервале $|x|<1$, получаем:

$$\int\frac{S(x)}{x}\,dx=x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots+C=$$

$$=(x^2-x^3+x^4-\cdots)'-x+x^2-x^3+\cdots+C=\frac{x}{(1+x)^2}+C.$$

Дифференцируя полученное равенство, находим: $S(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$ $(|x|<1,\ \ x\neq 0)$. Нетрудно видеть, что ограничение $x\neq 0$ здесь можно снять.

223. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$

Решение. Общий член ряда имеет вид $a_n(x)=n(n+1)x^n$; поэтому $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n(n+1)}}=1.$

Таким образом, степенной ряд сходится к своей сумме при $|x|<1$.

Почленно интегрируя рассматриваемый ряд в интервале $|x|<1$ дважды, получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2}\left(\int S(x)\,dx\right)=x+x^2+x^3+\cdots-\frac{C_1}{x}+C_2=\frac{x}{1-x}-\frac{C_1}{x}+C_2, \qquad (1)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования; $x\neq 0$.

Дифференцируя равенство (1) дважды и учитывая, что $S(0)=0$, окончательно находим: $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$.

224. Показать, что ряд $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ удовлетворяет уравнению $xy''+y'-y=0$.

Решение. Очевидно, данный ряд сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и почленно дифференцируем любое число раз. Далее, имеем:

$$xy'' + y' = (xy')' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y,$$

что и требовалось показать.

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с указанной степенью точности следующие значения функций:

225. $\sin 18°$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Пользуясь разложением функции $\sin x$ в степенной ряд, можем написать:

$$\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}.$$

Так как этот ряд лейбницева типа, то остаток ряда не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Поэтому, как следует из неравенств $\frac{\pi^7}{7!\,10^7} < 10^{-5} < \frac{\pi^5}{5!\,10^5}$, для получения результата с требуемой точностью достаточно взять три члена разложения. Имеем:

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!\,10^3} + \frac{\pi^5}{5!\,10^5} = \frac{\pi}{10}\left(1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12}10^{-5}\right) = 0{,}30902\ldots$$

226. $\operatorname{tg} 9°$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. В силу оценки $R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^4 < 0{,}0005\ (f(x) = \operatorname{tg} x)$, для получения приближенного значения $\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$ с указанной точностью достаточно взять два члена разложения функции $\operatorname{tg} x$ в степенной ряд (см. пример 253, гл. II, ч. 1). Таким образом,

$$\operatorname{tg} 9° = \operatorname{tg}\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} + \frac{\pi^3}{3 \cdot 20^3} = \frac{\pi}{20}\left(1 + \frac{\pi^2}{1200}\right) = 0{,}158\ldots$$

227. Исходя из равенства $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$, найти число π с точностью до 10^{-4}.

Решение. Пользуемся разложением функции $\arcsin x\ (|x| \leqslant 1)$ в степенной ряд (см. пример 197). Имеем:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n+1} n!\,(2n+1)}.$$

Поскольку 1) остаток данного ряда R_n оценивается следующим образом

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^{3k+1} k!\,(2k+1)} \leqslant \frac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{3n+2}(n+1)!\,(2n+3)},$$

2) неравенство $6 \cdot \frac{(2n+1)!!}{3 \cdot 2^{3n+2}(n+1)!\,(2n+3)} < 10^{-4}$ выполняется при $n \geqslant 4$, то для получения приближенного значения числа $\frac{\pi}{6}$ с требуемой точностью достаточно взять 5 членов указанного разложения:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{72 \cdot 8192} = 0{,}52359\ldots,$$

откуда $\pi = 3{,}1415\ldots$

228. Пользуясь формулой $\ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right)$, найти $\ln 2$ и $\ln 3$ с точностью до 10^{-5}.

Решение. Покажем сначала, как получена эта формула. Разлагая функции $\ln(1+x)$ и $\ln\frac{1}{1-x}$ в степенные ряды по степеням x, а затем складывая их в общей области сходимости ($|x| < 1$), находим:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{1}$$

Полагая здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем указанную формулу.

Найдем теперь соответствующие числа k членов ряда (1) для вычисления приближенных значений $\ln 2$ и $\ln 3$. С этой целью оценим остаток R_k этого ряда. Имеем:

$$R_k = 2\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+3}}{2k+3} + \cdots\right) \leqslant \frac{2x^{2k+1}}{(2k+1)(1-x^2)}.$$

Отсюда следует, что если $x = \frac{1}{3}$ $(n=1)$, то $R_k \leqslant 10^{-5}$ начиная с $k=5$, а если $x = \frac{1}{5}$ $(n=2)$, то $R_k \leqslant 10^{-5}$ начиная с $k=3$. Таким образом,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147}\right) = 0{,}69314\ldots,$$

$$\ln 3 \approx 0{,}69314 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625}\right) = 1{,}09860\ldots$$

229. С помощью разложений подынтегральных функций в ряды вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

а) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$; в) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; д) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$;

е) $\int\limits_0^1 x^x\,dx$.

Решение. а) Пользуясь формулой I, п. 4°, находим:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (|x| < \infty),$$

откуда

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}.$$

Полученный ряд лейбницева типа, поэтому, если для получения приближенного значения данного интеграла взять k членов ряда, то погрешность не превзойдет $(k+1)$-го члена ряда. Из этого условия находим нужное число k. Имеем: $\frac{1}{(k+1)!\,(2k+3)} \leqslant 0{,}001$, откуда $k \geqslant 4$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0{,}747\ldots$$

б) Пользуясь формулой I, п. 4° и разлагая подынтегральную функцию по степеням $\frac{1}{x}$, получаем: $e^{\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$, $0 < |x| < +\infty$. Интегрируя этот ряд почленно, имеем:

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx = 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{n\,(n+1)!\,2^n}.$$

Ограничиваясь k членами ряда, получаем:

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx \approx 2 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{n\,(n+1)!\,2^n}.$$

Из оценки остатка ряда

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)!\,2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}\,(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2\,(n+2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^2\,(n+2)\,(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}\,(n+1)}\left(1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2n+4} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \cdots\right) \leqslant 0{,}001$$

следует, что для получения результата с указанной точностью нужно взять $k \geqslant 3$. Таким образом,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx = 2 + 0{,}6931 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{7}{6608} = 2{,}834\ldots,$$

(или 2,835 — с избытком).

в) Здесь $x \geqslant 2$, поэтому подынтегральную функцию разлагаем по степеням $\frac{1}{x}$. Имеем:

$$(1+x^3)^{-1} = \frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{3(n+1)}} \; (|x|>1),$$

откуда

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)\, 2^{3n+2}}.$$

Поскольку ряд лейбницева типа, то для получения результата с указанной точностью достаточно взять число k $(k=0, 1, \ldots)$ членов ряда, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{(3k+5)\, 2^{3k+5}} \leqslant 0{,}001$, которое дает: $k \geqslant 1$. Следовательно,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{8} - \frac{1}{160} + \cdots = 0{,}118\ldots$$

(или 0,119 — с избытком).

г) Поскольку $0 < x < 1$, то подынтегральную функцию разлагаем по степеням x, пользуясь формулой IV, п. 4°. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int_0^1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} x^{4n}\right) dx =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(4n+1)} = S. \tag{1}$$

Полученный ряд сходится довольно медленно. Для ускорения его сходимости вычтем ряд, сумму которого легко найти, например ряд

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(4n+4)} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Тогда получим:

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!\,(4n+1)\,(n+1)}. \tag{2}$$

Этот ряд сходится значительно быстрее, чем ряд (1). Действительно, если для вычисления данного интеграла взять k_1 первых членов ряда (1) так, чтобы для остатка ряда была справедлива оценка

$$\left| \sum_{n=k_1+1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(4n+1)} \right| < \frac{(2k_1+1)!!}{(2k_1+2)!!\,(4k_1+5)} \leqslant 0{,}001,$$

то $k_1 \geqslant 36$; если же предложенный интеграл вычислять с той же точностью с помощью ряда (2), то, как следует из оценки

$$\frac{3}{4}\frac{(2k_2+1)!!}{(2k_2+2)!!\,(4k_2+5)\,(k_2+2)} \leqslant 0{,}001,$$

для этого достаточно взять k_2 ($k_2 \geqslant 6$) первых членов ряда (2). Таким образом, используя равенство (2), получаем:

$$S \approx \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{72}-\frac{5}{832}+\frac{7}{2176}-\frac{1}{512}+\frac{33}{25600}\right)=0{,}927\ldots$$

д) Преобразовываем интеграл к виду:

$$\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}\,dx+\int_{10}^{100}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 10+\int_{10}^{100}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{nx^{n+1}}\right)dx.$$

Здесь мы воспользовались разложением функции $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ по степеням $\frac{1}{x}$ ($|x|>1$).

Интегрируя почленно ряд, находим:

$$\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 10^n}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

Поскольку этот ряд лейбницева типа, то из оценки остатка его

$$\frac{1}{(k+1)^2\,10^{k+1}}\left(1-\frac{1}{10^{k+1}}\right)\leqslant 0{,}001$$

находим число k первых членов ряда, нужное для получения результата с указанной точностью. Нетрудно проверить, что $k \geqslant 2$. Поэтому

$$\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \approx 7{,}95279+(0{,}09-0{,}002475)=8{,}040\ldots$$

е) Представляя подынтегральную функцию в виде $x^x=e^{x\ln x}$ и разлагая ее в степенной ряд по степеням $x\ln x$ ($x>0$), можем написать: $x^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\ln^n x}{n!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем:

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,dx.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m \ln^n x\,dx=-\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^m \ln^{n-1} x\,dx=-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}.$$

Полагая в полученной рекуррентной формуле последовательно $n=1$, 2, ... , находим:

$$I_{m,1}=-\frac{1}{m+1}I_{m,0};\quad I_{m,2}=\frac{2!}{(m+1)^2}I_{m,0};\ \ldots;$$
$$I_{m,n}=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{m,0}.$$

Так как

$$I_{m,0}=\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1},$$

то $I_{m,n}=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, откуда $I_{n,n}=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

Таким образом,

$$\int_0^1 x^x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Как следует из оценки остатка ряда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\right|\leqslant\frac{1}{(n+2)^{n+2}}\leqslant 0{,}001,$$

для вычисления данного интеграла с точностью до 0,001 достаточно взять четыре первых члена этого ряда. Тогда получим:

$$\int_0^1 x^x\,dx\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}=0{,}783\ldots$$

230. Найти с точностью до 0,01 длину дуги одной полуволны синусоиды $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

Решение. Длина S указанной дуги выражается интегралом

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx. \qquad (1)$$

Преобразовывая подынтегральную функцию к виду

$$\sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{3}\cos 2x\right)^{\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $\frac{1}{3}|\cos 2x| \leqslant \frac{1}{3}$, разлагаем ее в степенной ряд по степеням $\frac{1}{3}\cos 2x$, используя формулу IV, п. 4°:

$$\sqrt{1+\cos^2 x} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\, 3^n} \cos^n 2x\right). \tag{2}$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\, 3^n} I_n\right), \tag{3}$$

где

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n 2x\, dx. \tag{4}$$

Почленное интегрирование ряда здесь законно, так как ряд (2), по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно по x, а ряд (3) сходится. Интегрируя в (4) по частям, находим:

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{n-1} 2x\, d(\sin x) = (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

откуда $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Поскольку $I_0 = \pi$, а $I_1 = 0$, то из полученной рекуррентной формулы получаем: $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$, $I_{2n-1} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Используя этот результат, из (3) и (1) окончательно имеем:

$$S = \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n-1)!!\,(2n-1)!!}{(4n)!!\, 3^{2n}\,(2n)!!}\right).$$

Оценивая остаток последнего ряда

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(4n-1)!!\,(2n-1)!!}{(4n)!!\, 3^{2n}\,(2n)!!} < \frac{(4k+3)!!\,(2k+1)!!}{3^{2k+2}\,(2k+2)!!\,(4k+4)!!} \times$$

$$\times\left(1 + \frac{(4k+7)(2k+3)}{9(4k+8)(2k+4)} + \ldots\right) < \frac{1}{6\cdot 3^{2k+2}}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{5}{3\cdot 9^{k+2}}$$

и учитывая, что абсолютная погрешность при вычислении данного интеграла не должна превышать 0,01, число первых членов ряда k находим из неравенства $\pi\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{5}{3\cdot 9^{k+2}} \leqslant 0{,}01$. Это дает $k \geqslant 1$. Следовательно, $S \approx \pi\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{48}\right) = 3{,}92\ldots$

§ 6. Ряды Фурье

1°. Основные определения. Система функций

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots,$$

определенная на отрезке $[-l, l]$, называется *основной тригонометрической системой*. Эта система функций ортогональна на отрезке $[-l, l]$.

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на $[-l, l]$ функция. Числа

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$ *по основной тригонометрической системе*.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. В частности, если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l};$$

ряд Фурье нечетной функции имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на сегменте $[-l, l]$, если она непрерывна в каждой точке $x \in [-l, l]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на сегменте $[-l, l]$, если эта функция кусочно-непрерывна и имеет непрерывную производную $f'(x)$ на этом сегменте, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых производная имеет конечные односторонние предельные значения.

2°. Теорема о разложении. Пусть кусочно-гладкая на сегменте $[-l, l]$ функция $f(x)$ периодически с периодом $2l$ продолжена на всю бесконечную прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Если для непрерывной и кусочно-гладкой на сегменте $[-l, l]$ функции $f(x)$ выполняется равенство $f(-l) = f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на этом сегменте и сумма ряда равна функции $f(x)$ в каждой точке $x \in [-l, l]$.

3°. О дифференцировании и интегрировании рядов Фурье. Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до некоторого порядка m $(m \geqslant 1)$ непрерывны на сегменте $[-l, l]$ и удовлетворяют условиям

$$f(-l) = f(l),\ f'(-l) = f'(l),\ \ldots,\ f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l).$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-l, l]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$.

Тогда: 1) сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^m (|a_k| + |b_k|);$$

2) ряд Фурье такой функции можно m раз почленно дифференцировать на указанном сегменте.

Ряд Фурье интегрируемой по Риману на сегменте $[-l, l]$ функции $f(x)$ можно интегрировать почленно на этом сегменте.

4°. Разложение в ряд Фурье по другим ортогональным системам. В математической физике часто приходится иметь дело с ортогональными полиномами.

1) *Полиномы Чебышева* $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$ ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весовой функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \frac{\pi}{2^{2n-1}}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

2) *Полиномы Лежандра* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т. е.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

3) *Полиномы Абеля — Лагерра* $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$ обладают свойством ортогональности на интервале $(0, +\infty)$ с весовой функцией e^{-x}. Таким образом, имеем:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} L_n(x)\,L_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

4) *Полиномы Чебышева — Эрмита* $H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ определены на всей числовой оси и для них справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) H_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq n; \\ \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}, \text{ если } m = n. \end{cases}$$

Разложить в ряд Фурье в указанных интервалах следующие функции:

231. $f(x) = \begin{cases} A, \text{ если } 0 < x < l; \\ 0, \text{ если } l < x < 2l, \end{cases}$

где A — постоянная, в интервале $(0, 2l)$.

Решение. Как видим, данная функция кусочно-гладкая, причем точка $x = l$ — точка разрыва первого рода. Поэтому, согласно теореме о разложении, функция $f(x)$ может быть представлена рядом Фурье.

Периодически (с периодом $2l$) продолжая функцию $f(x)$ на всю бесконечную прямую, построим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} A, \text{ если } 2kl < x < (2k+1)\,l; \\ \frac{A}{2}, \text{ если } x = kl; \\ 0, \text{ если } (2k-1)\,l < x < 2kl, \end{cases}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Согласно указанной теореме, функция $f^*(x)$ совпадает в каждой точке x бесконечной прямой с ее сходящимся рядом Фурье:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = A, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{A}{l}\int_0^l \cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{A}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{A}{n\pi}\left((-1)^{n+1} + 1\right).$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$, а

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{2n-1}{l}\pi x$$

только при $0 < x < l$ и $l < x < 2l$.

232. $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Решение. Эта функция непрерывна на $(-\pi, \pi)$ и имеет кусочно-непрерывную производную всюду, за исключением точки $x=0$. Периодически (с периодом 2π) продолжив функцию $f(x)$ на всю числовую ось, построим функцию $f^*(x)=|x-2k\pi|$, если $|x-2k\pi|\leqslant\pi$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Построенная функция удовлетворяет требованиям теоремы о разложимости в сходящийся к ней ряд Фурье.

Поскольку функция $f^*(x)$ четная, то $b_n=0$;

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1),\ a_0=\pi.$$

Следовательно,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\ (-\pi<x<\pi).$$

233. $f(x)=\sin ax$ в интервале $(-\pi, \pi)$ (a — не целое).

Решение. По данной функции построим функцию $f^*(x)=\sin(a(x-2k\pi))$, если $|x-2k\pi|<\pi$ и $f^*((2k+1)\pi)=0$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Эта функция является кусочно-гладкой при $|x-2k\pi|<\pi$. Кроме того, $\frac{1}{2}(f^*(x_k-0)+f^*(x_k+0))=f^*(x_k)$, где $x_k=(2k+1)\pi$ — точки разрыва первого рода функции $f^*(x)$. Поэтому функцию $f^*(x)$ можно разложить в ряд Фурье, сходящийся к ней в каждой точке числовой оси.

В силу нечетности функции $f^*(x)$, коэффициенты $a_n=0$;

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2}\sin a\pi\ (a\neq n).$$

Таким образом, имеем:

$$f^*(x)=\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}\ (|x|<\infty),$$

$$f(x)=\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}\ (|x|<\pi).$$

234. $f(x)=x$ в интервале $(a, a+2l)$.

Решение. Функция

$$f^*(x)=\begin{cases} x-2lk, & \text{если } 2lk+a<x<a+2l(k+1); \\ a+l, & \text{если } x=2lk \end{cases}$$

($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), построенная на основании данной функции и совпадающая с ней в интервале $(a, a+2l)$, является $2l$-периодической, кусочно-гладкой. Кроме того, в точках разрыва $x_k = 2lk$ выполняется равенство

$$f^*(x_k) = \frac{1}{2}(f^*(x_k - 0) + f^*(x_k + 0)).$$

Поэтому функция $f^*(x)$ разложима в сходящийся к ней в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$ ряд Фурье.

Далее, имеем:

$$a_0 = 2(a+l),\ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{k\pi}\sin\frac{k\pi a}{l},\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^*(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi a}{l}\quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$f^*(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x)\quad (|x| < \infty),$$

$$f(x) = a + l + \frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}(a-x)\quad (a < x < a+2l).$$

Разложить в ряд следующие периодические функции:

235. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

Решение. Данная функция кусочно-непрерывна (точки разрыва x_k первого рода удовлетворяют уравнению $\cos x_k = 0$) и имеет кусочно-непрерывную производную $f'(x) = 0$ при $x \neq x_k$. Кроме того, функция $f(x)$ периодична с периодом 2π и $f(x_k) = \frac{1}{2}(f(x_k - 0) + f(x_k + 0))$. Следовательно, она может быть разложена в ряд Фурье, сходящийся в каждой точке x числовой оси.

Учитывая четность рассматриваемой функции, получаем:

$$b_n = 0,\ \ a_0 = 0,\ \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, имеем:

$$\operatorname{sgn}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x,\ \ -\infty < x < +\infty.$$

236. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

Решение. Нетрудно проверить, что эта функция непрерывна на всей числовой оси и имеет кусочно-непрерывную производную (она не дифференцируема только в точках $x = k\pi$, где k — целое). Кроме того, она 2π-периодическая. Следовательно, ее ряд Фурье сходится к ней в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$.

Принимая во внимание четность данной функции, находим:

$$b_n = 0, \ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx = -\frac{2}{\pi}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Итак,

$$\arcsin(\cos x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}\cos nx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

237. $f(x) = (x)$ — расстояние x до ближайшего целого числа.

Решение. Функция (x) — четная, имеющая период $T = 1$; в остальном ее свойства аналогичны свойствам функции $\arcsin(\cos x)$, рассмотренной в предыдущем примере. Поэтому

$$b_n = 0, \ a_0 = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2}, \ a_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2\pi nx\,dx = \frac{((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, имеем:

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n-2)\pi x}{(2n-1)^2} \quad (|x| < \infty).$$

238. $f(x) = |\cos x|$.

Решение. Очевидно, данная функция непрерывна в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$ и имеет кусочно-непрерывную производную всюду, за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k — целое). Кроме того, она периодична (период $T = \pi$). Поэтому ее ряд Фурье сходится к этой функции в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$.

Учитывая четность функции, имеем:

$$b_n = 0, \ a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos 2nx\, dx = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1} \quad (|x| < \infty).$$

239. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ $(|\alpha| < 1)$.

Решение. Поскольку

$$\left|\alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant \frac{n|\alpha|^n |x|}{|\sin x|} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\alpha|^n|x|}{|\sin x|} < +\infty,$$

то, согласно признаку Вейерштрасса, данный ряд сходится равномерно на каждом сегменте, не содержащем точек $x = k\pi$ (k — целое). Так как, кроме того, функции $\frac{\sin nx}{\sin x}$ непрерывны при $x \neq k\pi$, то, по известной теореме, функция $f(x)$ непрерывна при $x \neq k\pi$.

Аналогично можно показать, что функция

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{n\cos nx \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin nx}{\sin^2 x}$$

также непрерывна при $x \neq k\pi$. Кроме того, как следует из равенств

$$\lim_{x\to k\pi} f(x) = \lim_{x\to k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x\to k\pi}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n \sin nx}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to k\pi}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\alpha^n\cos nx}{\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n(-1)^{(n+1)k} \equiv \beta k,$$

$x = k\pi$ — точки устранимого разрыва функции $f(x)$.

Таким образом, периодическая функция

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{если } x \neq k\pi; \\ \beta_k, & \text{если } x = k\pi \end{cases}$$

разлагается в сходящийся к ней всюду ряд Фурье. Имеем:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sin x}(\sin(n-2)x \cdot \cos 2x + \cos(n-2)x \cdot \sin 2x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin (n-2) x}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos (n-1) x =$$

$$= -\alpha + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos (n-1) x.$$

Отсюда находим:

$$f^*(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \cos (n-1) x =$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} + 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \alpha^2} \cos nx.$$

240. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sec x \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Как и в предыдущих примерах, строим $\frac{\pi}{2}$-периодическую функцию $f^*(x)$, равную $\sec x$, на сегменте $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Сразу находим, что

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{8}{\pi} \ln (1 + \sqrt{2}),$$

$$a_1 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x}{\cos x} dx = \frac{8}{\pi} \left(\ln (1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \sqrt{2} \right).$$

Для вычисления коэффициентов a_n при $n \geqslant 2$ выведем соотношение, связывающее a_n и a_{n-2}. Имеем:

$$a_{n-2} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos (4n-8) x}{\cos x} dx = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx \cdot \cos 8x \, dx}{\cos x} +$$

$$+ \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4nx \cdot \sin 8x}{\cos x} dx = a_n + \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4nx \cdot \sin 4x \cos 4x \, dx}{\cos x} -$$

$$- \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 4x \cdot \cos 4nx}{\cos x} dx = a_n - \beta_n, \tag{1}$$

где

$$\beta_n = -\frac{64}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4(n-1) x \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n 512 \sqrt{2} (n-1)}{\pi (4n-1)(4n-3)(4n-5)(4n-7)} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Из рекуррентной формулы (1) следует, что $a_2 = a_0 + \beta_2$, $a_3 = a_1 + \beta_3$, $a_4 = a_0 + \beta_2 + \beta_4$, $a_5 = a_1 + \beta_3 + \beta_5, \ldots, a_{2n} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_{2i}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $a_{2n+1} = a_1 + \sum_{i=0}^{n} \beta_{2i+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Разлагая дробь (2) на простые дроби, находим:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_{2i} = -\frac{8\sqrt{2}}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{8i-1} - \frac{1}{8i-3} - \frac{1}{8i-5} + \frac{1}{8i-7} \right) =$$

$$= \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{4n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \sin\left((2m-1) \frac{\pi}{4} \right),$$

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_{2i+1} = \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{4n} \frac{(-1)^m}{2m+3} \sin\left((2m+3) \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_0 + u_n) \cos 8nx + \sum_{n=0}^{\infty} (a_1 + v_n) \cos 4(2n+1)x,$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad \sec x = f^*(x), \text{ если } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

241. Функцию $f(x) = x^2$ разложить в ряд Фурье: а) по косинусам кратных дуг; б) по синусам кратных дуг; в) в интервале $(0, 2\pi)$. Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Решение. В случае а) функцию $f(x)$, рассматриваемую в силу условия только на сегменте $[-\pi, \pi]$, периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую ось. Тогда получим непрерывную и кусочно-гладкую функцию $f^*(x)$, совпадающую с функцией $f(x)$ при $|x| \leqslant \pi$ и разлагающуюся в ряд Фурье только по косинусам. Для коэффициентов a_n, b_n имеем:

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $f^*(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$; $x^2 =$ $= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ только при $|x| \leqslant \pi$.

Для получения разложения в случае б) функцию x^2, рассматриваемую на интервале $(0, \pi)$, продолжим на полусегмент $(-\pi, 0]$ нечетным образом, а затем так построенную функцию периодически (с периодом 2π) продолжим на всю числовую ось. В результате получим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} |x - 2k\pi|(x - 2k\pi), & \text{если } |x - 2k\pi| < \pi; \\ 0, & \text{если } x = (2l+1)\pi \end{cases}$$

$(k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, определенную всюду на числовой оси и удовлетворяющую всем условиям теоремы п. 2°.

Вычислив коэффициенты

$$a_n = 0, \; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1),$$

можем написать:

$$f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx \quad (|x| < \infty),$$

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)\right)\sin nx \quad (0 \leqslant x < \pi).$$

Наконец, в случае в) по функции $f(x) = x^2 \, (0 < x < 2\pi)$ строим 2π-периодическую функцию $f^*(x)$, совпадающую с функцией $f(x) = x^2$ только на интервале $(0, 2\pi)$ и в точках разрыва $x = 2k\pi$ (k — целое), равную $2\pi^2$. Тогда для коэффициентов a_n и b_n функции $f^*(x)$ нетрудно получить выражения:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^*(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^*(x)\cos nx\, dx = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = -\frac{4\pi}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно,

$$f^*(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad (|x| < \infty),$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

Полагая в первом случае $x=\pi$ и $x=0$, получаем соответственно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. Складывая почленно эти два сходящихся ряда, находим: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

242. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & \text{если } 1<x<2;\\ 3-x, & \text{если } 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

Решение. Для коэффициентов Фурье функции $f^*(x)$ с периодом $T=3$, совпадающей на отрезке $[0, 3]$ с функцией $f(x)$, легко найти выражения:

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}f^*(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f^*(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x\,dx+\frac{2}{3}\int_1^2 dx+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)\,dx=\frac{4}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}f^*(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^3 f^*(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx=\frac{3}{\pi^2n^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}-1\right)\ (n=1, 2, \ldots);$$

$b_n=0$ (в силу четности функции $f^*(x)$).

Итак,

$$f^*(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\ (|x|<\infty),$$

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\ (0\leqslant x\leqslant 3).$$

Пользуясь формулами $\cos x=\frac{1}{2}(z+\bar z)$, $\sin x=\frac{1}{2i}(z-\bar z)$, где $z=e^{ix}$ и $\bar z=e^{-ix}$, получить разложения в ряд Фурье следующих функций:

243. $\cos^{2m}x$ (m — целое положительное число).

Решение. Пользуясь указанными формулами, а также формулой бинома Ньютона, можем написать:

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{4m}(z+\bar{z})^{2m} = \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k z^{2(m-k)} =$$

$$= \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x + i\sin 2(m-k)x) =$$

$$= \frac{1}{4m}\sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x = \frac{C_{2m}^m}{4m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

Здесь мы воспользовались тождеством $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$, а также четностью функции $\cos 2kx$ и нечетностью функции $\sin 2(m-k)x$.

244. $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

Решение. Применяя указанные в предыдущем примере формулы и разлагая данную дробь на простейшие, получаем:

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = \frac{1}{2i(1-qz)} - \frac{1}{2i(1-q\bar{z})}.$$

Поскольку $|qz| = |q\bar{z}| = |q| < 1$, то справедливы разложения в степенные ряды функций $(1-qz)^{-1}$ и $(1-q\bar{z})^{-1}$ по степеням qz и $q\bar{z}$ соответственно. Имеем:

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} q^n (z^n - \bar{z}^n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx,$$

что и требовалось выполнить.

245. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

Решение. Дифференцируя данную функцию по x и пользуясь предыдущим разложением, получаем:

$(\ln(1-2q\cos x+q^2))'_x = 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$, откуда $\ln(1-2q\cos x+q^2) =$

$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx + C$. Полагая здесь $x=\pi$, находим:

$$\ln(1+q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}(-1)^{n+1} + C.$$

Отсюда, в силу формулы V, § 5, следует, что $C=0$. Итак, окончательно получаем:

$$\ln(1-2q\cos x+q^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx.$$

246. Разложить в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f(x) = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

Решение. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant x - 2k\pi \leqslant 2\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и k — целое. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \tag{1}$$

где $z = e^{ix}$, сходится при всех указанных x.

Далее, покажем, что

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \operatorname{Re}\left(\ln\frac{1-z}{2}\right) \quad (\ln 1 = 0). \tag{2}$$

Действительно, пользуясь известным равенством

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{3}$$

и представлением $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где w — некоторое комплексное число, φ — его аргумент, $\operatorname{Re}\ln w = \ln|w|$, получаем $\left(\text{положив } w = \frac{1-z}{2}\right)$:

$$\operatorname{Re}\left(\ln\frac{1-z}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \tag{4}$$

Сравнивая соотношения (3) и (4), получаем (2), что и требовалось показать.

Таким образом, используя формулу (2) и разложение функции $-\ln(1-z)$ в ряд (1), имеем:

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Так как число ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует, что полученное разложение справедливо при всех $x \neq 2k\pi$.

247. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \int\limits_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

Решение. Производная функции $f(x)$, равная

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right),$$

является 2π-периодической функцией и на интервалах $0 < |x| < \pi$ может быть представлена рядом Фурье. Действительно, на основании предыдущего примера имеем:

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi,$$

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n}, \quad x \neq (2k+1)\pi.$$

Поэтому, если $x \neq k\pi$ (k — целое), то

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

Интегрируя полученный ряд почленно, находим:

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

248. Разложить в ряд Фурье функции $x = x(s)$, $y = y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 4a)$, дающие параметрическое представление контура квадрата: $0 < x < a$, $0 < y < a$, где s — длина дуги, отсчитанная против хода часовой стрелки от точки $O(0, 0)$.

Решение. Рассматриваемые функции описываются следующим образом:

$$x(s) = \begin{cases} s, & \text{если } 0 \leqslant s < a; \\ a, & \text{если } a \leqslant s < 2a; \\ 3a-s, & \text{если } 2a \leqslant s < 3a; \\ 0, & \text{если } 3a \leqslant s < 4a; \end{cases} \quad y(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant s < a; \\ s-a, & \text{если } a \leqslant s < 2a; \\ a, & \text{если } 2a \leqslant s < 3a; \\ 4a-s, & \text{если } 3a \leqslant s < 4a. \end{cases}$$

Далее значения функций $x(s)$ и $y(s)$ периодически повторяются.

Очевидно, данные функции непрерывны, кусочно-дифференцируемы и $4a$-периодичны. Следовательно, их можно разложить в сходящийся к ним ряд Фурье.

Коэффициенты Фурье функции $x(s)$ следующие:

$$a_0 = \frac{1}{2a}\int_0^{4a} x(s)\,ds = a, \quad a_n = \frac{1}{2a}\left(\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds + a\int_a^{2a}\cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{2a}^{3a}(3a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\,ds\right) = \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right),$$

$$b_n = \frac{1}{2a}\left(\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds + a\int_a^{2a}\sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds + \int_{2a}^{3a}(3a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\,ds\right) =$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем:

$$x(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi s}{2a} + (-1)^n\sin\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right).$$

Аналогично находим:

$$y(s) = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\left(\cos\frac{(2n-1)\pi s}{2a} - (-1)^n\sin\frac{(2n-1)\pi s}{2a}\right).$$

249. Как следует продолжить заданную в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi, \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$?

Решение. Поскольку $b_n = 0$, то функция $f(x)$ — четная, т. е. ее следует продолжить в интервал $(-\pi, 0)$ четным образом. Далее, замечая, что в данном разложении отсутствуют члены $a_{2n}\cos 2nx$, заключаем, что

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Разбивая этот интеграл на два:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos 2nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$$

и производя замену: в первом интеграле $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а во втором $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получаем:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0, \quad \text{или}$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx = \frac{(-1)^n}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)\right)\cos ny\,dy = 0,$$

т. е. функция $\Phi(y) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)$ является нечетной. Однако функция $\Phi(y)$, очевидно, четная; поэтому $\Phi(y) = 0$.

Итак, должно быть $f\left(\frac{\pi + y}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi - y}{2}\right)$ $(-\pi < y < \pi)$, или, если вернуться к переменной x по формуле $x = \frac{\pi - y}{2}$, $f(\pi - x) = -f(x)$. Следовательно, график так построенной функции должен быть симметричным относительно прямой $x = 0$, а точки $x = \pm\frac{\pi}{2}$ должны быть центрами симметрии его на интервалах $(0, \pi)$ и $(-\pi, 0)$ соответственно.

250. Функцию $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ разложить в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: а) по косинусам нечетных дуг; б) по синусам нечетных дуг.

Решение. а) Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f^*(x)$, которая в интервале $(-\pi, \pi)$ определяется следующим образом:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } 0<x<\frac{\pi}{2};\\ f(-x), \text{ если } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0;\\ (x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \text{ если } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi;\\ (x+\pi)\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \text{ если } -\pi\leqslant x\leqslant -\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Очевидно, построенная функция непрерывна в каждой точке x числовой оси и имеет кусочно-непрерывную производную. Кроме того, она четна и ее коэффициенты Фурье a_{2n} $(n=0, 1, 2, \ldots)$ равны нулю, так как

$$a_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^*(x)\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}(-1)^n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos 2ny\,dy+\frac{2}{\pi}(-1)^n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)y\cos 2ny\,dy=0$$

(в 3-м и 4-м интегралах мы произвели подстановки: $x=\frac{\pi}{2}-y$ и $x=\frac{\pi}{2}+y$ соответственно).

Таким образом, функция $f^*(x)$, совпадающая в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ с функцией $f(x)$, может быть разложена в ряд Фурье только по косинусам нечетных дуг. Имеем:

$$b_n=0,\ a_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^*(x)\cos(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(2n-1)x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Разложения функций $f^*(x)$ и $f(x)$ имеют вид:

$$f^*(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x \quad (|x| < \infty),$$

$$f(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

б) Поскольку в разложении Фурье должны отсутствовать косинусы, то функция $f^*(x)$, совпадающая в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ с функцией $f(x)$, нечетна. Кроме того, по условию, должно быть

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\sin 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(x)\sin 2nx\,dx +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^*(x)\sin 2nx\,dx = 0.$$

Произведя замену во втором интеграле $x = \frac{1}{2}(\pi - y)$, а в третьем $x = \frac{1}{2}(\pi + y)$, получим:

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0, \text{ или}$$

$$b_{2n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0.$$

Из двух последних равенств находим, что

$$b_{2n} = \frac{4}{\pi}(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^*\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)\sin ny\,dy = 0,$$

откуда следует, что функция $f^*\left(\frac{\pi-y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}\right)$ четная. Но так как она еще и нечетная (что очевидно), то $f^*\left(\frac{\pi-y}{2}\right) - f^*\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}\right) = 0$, или, возвращаясь к переменной x, можем записать: $f^*(x) = f^*(\pi - x)$. Геометрически это равенство означает, что график функции $f^*(x)$ в интервале $(0, \pi)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, для построения графика функции $f^*(x)$ с указанными свойствами следует, во-первых, график функции $f(x)$ зеркально отобразить относительно прямой $x=\frac{\pi}{2}$ в интервал $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; во-вторых, так полученный в интервале $(0, \pi)$ график функции $f^*(x)$ отобразить нечетным образом относительно точки $x=0$, как центра симметрии всего графика, в интервал $(-\pi, 0)$. Тогда для коэффициентов Фурье получим:

$$a_0=a_n=0,\ b_{2n}=0,\ b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^*(x)\sin(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2n-1)x\,dx+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(x-\pi)\sin(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}\left(1+\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)\quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, разложение функции $f^*(x)$ имеет вид

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x.$$

251. Функция $f(x)$ антипериодична с периодом π, т. е. $f(x+\pi)=-f(x)$. Какой особенностью обладает ряд Фурье этой функции в интервале $(-\pi, \pi)$?

Решение. Предполагая, что данная функция разложима в ряд Фурье, с учетом ее антипериодичности, получаем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=-a_0,$$

откуда следует, что $a_0=0$.

Далее, находим:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=(-1)^{n+1}a_n$$

(здесь мы использовали равенство $f(x+2\pi)=f(x)$). Следовательно, $a_{2n}=0$. Аналогично устанавливаем, что $b_{2n}=0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

252. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$, имеющей период 2π, вычислить коэффициенты

Фурье $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ «смещенной» функции $f(x+h)$ $(h = \text{const})$.

Решение. Учитывая 2π-периодичность и интегрируемость функции $f(x+h)$, имеем:

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t) (\cos nt \cos nh + \sin nt \sin nh)\, dt = a_n \cos nh + b_n \sin nh,$$

$$\bar{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t) (\sin nt \cos nh - \cos nt \sin nh)\, dt = b_n \cos nh - a_n \sin nh \; (n = 1, 2, \ldots;\ \bar{a}_0 = a_0).$$

253. Зная коэффициенты Фурье a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ интегрируемой функции $f(x)$ с периодом 2π, вычислить коэффициенты Фурье A_n, B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ функции Стеклова

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

Решение. Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \sim f(x)$$

2π-периодической интегрируемой функции $f(x)$, согласно п. 3°, можно почленно интегрировать. Поэтому, интегрируя его почленно по x в пределах от $x-h$ до $x+h$, получаем:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{nh} \sin nh \cos nx + \frac{b_n}{nh} \sin nh \sin nx \right) = f_h(x).$$

Отсюда находим: $A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n}{nh} \sin nh$, $B_n = \frac{b_n}{nh} \sin nh$.

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева:

254. $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

Решение. Исходим из общего представления функции рядом Фурье:

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \qquad (1)$$

где a_n — коэффициенты Фурье, подлежащие определению. Для их вычисления воспользуемся свойствами ортогональности полиномов Чебышева на интервале $(-1, 1)$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Умножив обе части равенства (1) на весовую функцию и проинтегрировав по $x \in (-1, 1)$, в силу указанного свойства и нечетности функции x^3, получим: $a_0 = 0$. Далее, умножив обе части равенства (1) на $\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и проинтегрировав по $x \in (-1, 1)$, найдем:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^3 T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi a_m}{2^{2m-1}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся явным выражением полиномов Чебышева и произведем подстановку $\arccos x = t$. Тогда получим:

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos(mt)\, dt = \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq 1,\ m \neq 3; \\ \frac{3}{4}, \text{ если } m = 1; \\ 1, \text{ если } m = 3. \end{cases}$$

Таким образом, при $x \in (-1, 1)$ $x^3 = \frac{3}{4} T_1(x) + T_3(x)$.

255. $f(x) = |x|$, $x \in (-1, 1)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, представляем данную функцию в виде: $|x| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x)$. Последовательно умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in (-1, 1)$, а также умножая на $\frac{T_m}{\sqrt{1-x^2}}$ и интегрируя по $x \in (-1, 1)$, получаем (пользуясь при этом свойством ортогональности полиномов):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{|x|\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$a_m = \frac{2^m}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{|x| \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos t| \cos(mt)\, dt =$$

$$= \frac{2^m}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos(mt)\, dt - \frac{2^m}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \cos(mt)\, dt = \begin{cases} 0, & m = 1; \\ \frac{2^{m+1}}{\pi} \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{1 - m^2}, & m \neq 1. \end{cases}$$

Итак, при $|x| < 1$ можем написать:

$$|x| = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} T_{2k}(x).$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра функции:

256. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -1<x<0;\\ 1, & \text{если } \quad 0<x<1.\end{cases}$

Решение. Имеем: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kP_k(x)$. Поэтому

$$a_k=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}f(x)\,P_k(x)\,dx=\frac{2k+1}{2}\int\limits_0^1 P_k(x)\,dx=$$

$$=\frac{2k+1}{2}\int\limits_0^1\frac{1}{2^kk!}\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}\,dx=\frac{2k+1}{2^{k+1}k!}\left.\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\right|_0^1,$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}f(x)\,P_0(x)\,dx=\frac{1}{2}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Остается вычислить $\left.\frac{d^{k-1}(x^2-1)^k}{dx^{k-1}}\right|_0^1$. Очевидно, при любом $k\geqslant 1$ в точке $x=1$ это выражение равно нулю. Для вычисления значения его в точке $x=0$ воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$((x^2-1)^k)^{(k-1)}=\Big(\sum_{l=0}^{k}C_k^l(-1)^lx^{2k-2l}\Big)^{(k-1)}=$$

$$=\sum_{l=0}^{l<\frac{k+1}{2}}C_k^l(-1)^l(2k-2l)(2k-2l-1)\cdots(-2l+k+2)\,x^{k-2l+1}. \qquad (1)$$

Из этого соотношения следует, что если k — число четное, то при $x=0$ сумма (1) равна нулю; если $k=2m+1$ — число нечетное, то в точке $x=0$ сумма (1) равна $C_{2m+1}^{m+1}(-1)^{m+1}2m(2m-1)\ldots 3\cdot 2$.

Таким образом,

$$a_{2m}=0,\ a_{2m+1}=\frac{(4m+3)(-1)^m(2m)!}{2^{2m+2}m!\,(m+1)!}\,(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(4m+3)(2m)!}{2^{2m+2}m!\,(m+1)!}P_{2m+1}(x).$$

257. $f(x)=|x|$ при $|x|<1$.

Решение. Как и в предыдущем примере, напишем: $f(x)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kP_k(x)$, где $a_k=\frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}|x|\,P_k(x)\,dx$.

При $k=2m+1$ имеем $a_{2m+1}=0$, так как в этом случае подынтегральная функция нечетна. При $k=2m$ подынтегральная функция четна, поэтому

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_{2m}=\frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}\int\limits_0^1 x\,\frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}}\,dx=$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}\left(x\frac{d^{2m-1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-1}}\Bigg|_0^1 - \frac{d^{2m-2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m-2}}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= \frac{4m+1}{2^{2m}(2m)!}((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)}|_{x=0} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Аналогично проделанному в примере 256, можем написать:

$$((x^2-1)^{2m})^{(2m-2)}|_{x=0} = (-1)^{m+1}C_{2m}^{m+1}(2m-2)!$$

Итак, окончательно имеем:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(4m+1)(2m-2)!}{2^{2m}(m-1)!(m+1)!}P_{2m}(x).$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Лагерра $L_n(x)$ при $x > 0$ следующие функции:

258. $f(x) = e^{-ax}$.

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n L_n(x)$ и используем ортогональность полиномов Лагерра на полуоси $x > 0$ с весом e^{-x}. Получим ($n \geqslant 1$):

$$a_n = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+a)}L_n(x)\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(e^{-ax}\frac{d^{n-1}(x^ne^{-x})}{dx^{n-1}}\Bigg|_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{d^{n-1}(x^ne^{-x})}{dx^{n-1}}dx\right).$$

Продолжая интегрирование по частям, находим:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}\int_0^{+\infty} x^ne^{-(1+a)x}dx.$$

Применяя к последнему интегралу также метод интегрирования по частям, после n-го шага получаем:

$$a_n = \frac{a^n}{(1+a)^n}\int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x}dx = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Принимая во внимание еще, что $a_0 = \frac{1}{1+a}$, окончательно имеем:

$$f(x) = \frac{1}{1+a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)^n}L_n(x).$$

259. $f(x)=x^n\ (n\geqslant 1)$.

Решение. Имеем:

$$a_0=\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!;\quad a_k=\frac{1}{k!}\int\limits_0^{+\infty} x^n \frac{d^k(x^ke^{-x})}{dx^k}dx=$$

$$=\frac{1}{k!}\left(x^n\frac{d^{k-1}(x^ke^{-x})}{dx^{k-1}}\Bigg|_0^{+\infty}-n\int\limits_0^{+\infty}x^{n-1}\frac{d^{k-1}(x^ke^{-x})}{dx^{k-1}}dx\right)=$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}n(n-1)\cdots(n-k+1)\int\limits_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=$$

$$=\frac{n!}{k!}(-1)^kn(n-1)\cdots(n-k+1),\ \text{если}\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

Если же $k>n$, то $a_k=0$. Таким образом,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n!)^2}{k!\,(n-k)!}L_k(x).$$

Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева — Эрмита следующие функции:

260. $f(x)=-1$, если $x<0$, и $f(x)=1$, если $x>0$.

Решение. Напишем искомое разложение в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kH_k(x),$$

где $a_k=\frac{k!}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}f(x)H_k(x)\,dx=\frac{-k!}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{x^2}{2}}H_k(x)\,dx+$

$$+\frac{k!}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_k(x)\,dx,\ a_0=0\ (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Пользуясь явным выражением полиномов $H_k(x)$ и производя в первом интеграле замену x на $-x$, получаем:

$$a_k=\frac{1+(-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d^k\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^k}dx=\frac{-(1+(-1)^{k+1})}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{x=0}.$$

Для вычисления значения выражения $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Big|_{x=0}$ рассмотрим функцию $u=e^{-\frac{x^2}{2}}$. Взяв производную, замечаем, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению $u'+xu=0$. Применяя к этому равенству формулу Лейбница, получаем:

$$u^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\,x^{(k)}u^{(n-1-k)}=0.$$

Полагая здесь $x=0$, имеем рекуррентную формулу: $u^{(n)}(0) = -(n-1)u^{(n-2)}(0)$ $(n=2, 3, \ldots)$. Поскольку $u(0)=1$, $u'(0)=0$, то отсюда нетрудно получить: $u^{(2l)}(0)=(-1)^l(2l-1)!!$ $(l=1, 2, \ldots)$, $u^{(2l+1)}(0)=0$.

Таким образом, если $k=2l+1$, то $a_{2l+1}=(-1)^{l+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2l-1)!!$ $(l=1, 2, \ldots)$, $a_1=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; если же $k=2l$, то $a_{2l}=0$.

Следовательно, окончательно можем написать:

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}(2l)!}{2^{l-1}\sqrt{2\pi}\,l!}H_{2l+1}(x).$$

261. $f(x)=|x|$.

Решение. Как и в предыдущем примере, имеем:

$$a_k=\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)}dx=\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-2)}\Bigg|_{x=0},$$

$$k=2, 3, \ldots;$$

$$a_{2l-1}=0,\quad a_{2l}=\frac{(-1)^{l-1}(2l-2)!}{2^{l-2}(l-1)!\sqrt{2\pi}}\quad (l=1, 2, \ldots),$$

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому разложение представляется в виде

$$|x|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}(2l-2)!}{2^{l-2}(l-1)!\sqrt{2\pi}}H_{2l}(x).$$

262. $f(x)=e^{-ax}$.

Решение. Вычислим коэффициенты разложения

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k)}dx\quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$a_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-ax}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(k-1)}dx\right)\quad (k=1, 2, \ldots),$$

или $a_k=aa_{k-1}$. Полагая в этой рекуррентной формуле $k=1, 2, \ldots$ и принимая во внимание, что

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+a)^2+\frac{a^2}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{e^{\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = e^{\frac{a^2}{2}},$$

получаем: $a_k = e^{\frac{a^2}{2}} a^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$e^{-ax} = e^{\frac{a^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^k H_k(x).$$

§ 7. Суммирование рядов

1°. Непосредственное суммирование. Пусть требуется просуммировать сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1}$$

Представляем u_n в виде $u_n = v_{n+1} - v_n$, где $v_{n+1} = S_n + v_1$, S_n — последовательность частичных сумм данного ряда. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = v_\infty - v_1.$$

В том случае, когда общий член ряда имеет вид

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

где $a_{n+k} = a_n + kd$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, $d = \mathrm{const}$, то

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

2°. Метод суммирования рядов, основанный на теореме Абеля. Пусть ряд (1) сходится. Тогда его сумму можно найти по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

3°. Суммирование тригонометрических рядов. Если сумма степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \quad z = e^{ix}$$

известна и равна $C(x)+iS(x)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos nx = C(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx = S(x).$$

Часто бывает полезным ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (\ln 1 = 0),$$

сходящийся при $|z| \leqslant 1$, за исключением точки $z=1$.

Найти суммы рядов:

263. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

Решение. Нетрудно видеть, что общий член этого ряда u_n равен $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, где числа n, $n+1$, $n+2$ образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому, согласно п. 1°, получаем:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} v_n - v_1,$$

где $v_n = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}$ $(m=2;\ a_n=n)$. Но так как $v_1=-\dfrac{1}{4}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, то $S=\dfrac{1}{4}$.

264. $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots$

Решение. Общий член данного ряда $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$. Следовательно, по признаку сравнения, ряд абсолютно сходится, ибо $|a_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Этот ряд абсолютно сходится при $|x|\leqslant 1$ и, как любой степенной ряд, внутри интервала сходимости имеет производную

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\ln\frac{1}{1-x}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим:

$$f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x+C.$$

Поскольку $f(0)=0$, то отсюда следует, что $C=0$. Итак,

$$f(x)=(1-x)\ln(1-x)+x.$$

Как видим, здесь вполне применим метод суммирования рядов Абеля (см. п. 2°). Поэтому имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to -1+0} ((1-x)\ln(1-x)+x) =$$
$$= 2\ln 2 - 1.$$

265. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Решение. Представляя данный сходящийся ряд с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде разности двух сходящихся рядов:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

применяем метод непосредственного суммирования. Для каждого и двух последних рядов имеем:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\right.$$
$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+3}\right)\right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\dots+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{4}$.

266. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m — натуральное число).

Решение. Преобразовывая частичную сумму S_n ряда к виду

$$S_n = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right) = \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right) =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right),$$

получаем: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)$.

267. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\dots$

Решение. Приводя данный ряд к ряду

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\dots\right)=\frac{1}{2}S,$$

где S — сумма ряда, рассмотренного в примере 264, получаем:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\dots=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

268. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Решение. Преобразовывая ряд к виду

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

и используя результат примера 266, находим, что $S=\frac{3}{4}$.

269. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

Решение. Разлагая общий член ряда на простые дроби, находим:

$$\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n(n+1)}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{(n+1)^2},$$

где $A=4$, $B=-1$, $C=-3$. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1,$$

то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}=7-\frac{2}{3}\pi^2$.

270. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

Решение. Представляя частичную сумму S_n ряда в виде

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{2k+1}\right)=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k}\right)\right)=$$

$$=2\left(1-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k}\right)$$

и пользуясь примером 86, гл. I, ч. 1, находим: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$
$=2(1-\ln 2)$.

271. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}$.

Решение. Дифференцируя степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n!} = 2xe^{2x}$ почленно, получаем:

$$(2xe^{2x})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, 2^{n+1} x^n}{n!},$$

откуда, полагая $x = 1$, находим: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!} = 3e^2$.

272. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}$.

Решение. Общий член ряда разлагаем на простые дроби:

$$\frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2} = -\frac{3}{4n} + \frac{3}{4(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2} =$$
$$= \frac{-3}{2n(n+2)} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+2)^2}.$$

Суммируя ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4},$$

окончательно находим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16}$.

273. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

Решение. Замечая, что значение степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x) \quad (|x| < \infty)$$

при $x = 1$ совпадает с данным числовым рядом, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

274. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Решение. Разлагая дробь $\frac{1}{n^2+n-2}$ на простые, можем написать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{3x^3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+2}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{3x^3}\left(-\ln(1+x)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\ (0<|x|<1).$$

Отсюда, применяя теорему Абеля, находим:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^2+n-2}=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}.$$

275. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.

Решение. Имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!}=e^{\frac{x}{2}}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^n=e^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}y^{n-1}\ \left(y=\frac{x}{2}\right). \qquad (1)$$

Интегрируя последний ряд почленно, находим:

$$\int_0^y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2y^{n-1}}{n!}\right)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny^n}{n!}=y\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=ye^y.$$

Отсюда дифференцированием получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2y^{n-1}}{n!}=e^y(y+1). \qquad (2)$$

Наконец, подставляя (2) в (1), имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}\ (|x|<\infty).$$

276. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

Решение. Представляя данный ряд в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n-1)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad(|x|<\infty)$$

и замечая, что сумма второго ряда равна $\cos x$, вычисляем сумму первого ряда. Имеем:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^{2n}}{(2n-1)!}=x\varphi(x),$$

где $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Интегрируя почленно этот ряд, находим:

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx=-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=-\frac{x}{2}\sin x,$$

откуда $\varphi(x)=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{x}{2}\cos x$.

Следовательно, $f(x)=-\frac{x}{2}(\sin x+x\cos x)$, а

$$S(x)=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x\quad(|x|<\infty).$$

277. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

Решение. Пусть $x\geqslant 0$. Полагая $x=y^2$, имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2y^{2n}}{(2n+1)!}=yS_1(y),$$

где $S_1(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2y^{2n-1}}{(2n+1)!}$. Интегрируя этот ряд почленно, получаем:

$$\int_0^y S_1(y)\,dy=\frac{y}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ny^{2n-1}}{(2n+1)!}=\frac{y}{2}S_2(y),\tag{1}$$

где $S_2(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ny^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

Аналогично находим:

$$\int_0^y S_2(y)\,dy=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2y}(\operatorname{sh}y-y)\tag{2}$$

(считаем, что правая часть этого равенства равна нулю при $y=0$).

Дифференцируя обе части равенства (2) по y, находим функцию $S_2(y)$. Точно так же находим функцию $S_1(y)$ из уравнения (1). Окончательно имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=\frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)(x\geqslant 0)$$

(заметим, что в точке $x=0$ правая часть этой формулы, на основании теоремы Абеля (см. п. 2°), равна ее предельному значению при $x\to+0$).

При $x\leqslant 0$ выполняем аналогичные выкладки. В результате приходим к такому ответу:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}=\begin{cases}\frac{1}{4}\left((x+1)\frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}-\cos\sqrt{-x}\right), & x<0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

С помощью почленного дифференцирования найти суммы рядов:

278. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Решение. Дифференцируя данный ряд почленно дважды (в интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз), находим:

$$f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\frac{2}{1+x^2}\ (|x|<1).$$

Отсюда последовательным интегрированием по x дважды получаем:

$$f'(x)=2\operatorname{arctg}x+C_1,\quad f(x)=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

Поскольку $f(0)=f'(0)=0$, то $C_1=C_2=0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2).$$

Так как данный степенной ряд сходится на концах интервала сходимости ($x=\pm1$), то, согласно теореме Абеля и непрерывности правой части, можем утверждать, что последнее соотношение справедливо при $|x|\leqslant 1$.

279. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n\ (d>0)$.

Решение. Заметим прежде всего, что если $a=-Nd$, где $N=0, 1, 2, \ldots$, то данный ряд фактически представляет конечную сумму. Следовательно, в этом случае ряд сходится при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и имеет вид

$$-Nx + \frac{N(N-1)}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^N x^N = (1-x)^N - 1.$$

Далее, если $a \neq -Nd$, то по формуле I, § 5 легко находим интервал сходимости этого степенного ряда: $x \in (-1, 1)$. Поэтому при $|x| < 1$ ряд, сумму которого обозначим через $S(x)$, можно почленно дифференцировать. Имеем:

$$S'(x) = \frac{a}{d} + \frac{a}{d}\frac{a+d}{2d}2x + \frac{a(a+d)(a+2d)}{d \cdot 2d \cdot 3d}3x^2 + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Умножая обе части этого равенства на $(1-x)$, получаем дифференциальное уравнение относительно искомой суммы $S(x)$:

$$(1-x)S'(x) = \frac{a}{d} + \frac{a}{d}S(x).$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$S(x) = -1 + C(|1-x|)^{-\frac{a}{d}} \quad (C = \text{const}).$$

Так как интервал сходимости степенного ряда определяется неравенством $|x| < 1$, то $|1-x| = 1-x$. Кроме того, $S(0) = 0$, поэтому $C = 1$. Следовательно, будем иметь:

$$S(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \quad (|x| < 1).$$

Остается исследовать сходимость ряда в концевых точках интервала сходимости.

Пусть $x = -1$. Тогда получим числовой знакочередующийся ряд, который, как следует из отношения

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{(d-a)}{d}\frac{1}{n} + \frac{a(a-d)}{d(a+nd)n}, \quad a_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+(n-1)d)}{d \cdot 2d \cdots nd}$$

(см. пример 90), сходится, если $d > a$.

Пусть $x = 1$. Тогда получим знакопостоянный числовой ряд, который, как следует из написанного отношения и признака Гаусса, сходится при $a < 0$.

Таким образом, исходя из теоремы Абеля, можем утверждать, что сумма данного степенного ряда в точке $x = -1$ равна $2^{-\frac{a}{d}} - 1$, если $d > a$, а в точке $x = 1$ равна -1, если $a < 0$.

С помощью почленного интегрирования найти суммы рядов:

280. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

Решение. Этот степенной ряд сходится абсолютно при $|x| < 1$, ибо радиус сходимости его $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = 1$. Интегрируем степенной ряд по x дважды (внутри интервала сходимости $|x| < 1$), считая, что $x \neq 0$:

$$\int \left(\frac{1}{x} \int S(x)\, dx \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C_1 \ln|x| + C_2,$$

где $S(x)$ — сумма ряда, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Учитывая равенство $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ $(|x| < 1)$, из предпоследнего соотношения дифференцированием по x находим:

$$S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1).$$

Заметим, что ограничение $x \neq 0$ мы сняли здесь потому, что сумма степенного ряда при $x = 0$ равна единице.

281. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\, x^{2n}}{n!}$.

Решение. Обозначая сумму этого ряда через $S(x)$ $(|x| < \infty)$ и интегрируя ряд почленно, получаем:

$$\int S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} + C = xe^{x^2} + C.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, находим:

$$S(x) = (1 + 2x^2)\, e^{x^2} \quad (|x| < \infty).$$

Используя метод Абеля, найти суммы следующих рядов:

282. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

Решение. Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = S(x).$$

Легко найти, что он сходится абсолютно при $|x| < 1$. Далее, видим, что в точке $x = 1$ степенной ряд совпадает со сходящимся (в силу признака Лейбница) данным числовым рядом. Следовательно, по теореме Абеля, будем иметь:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \lim_{x \to 1-0} S(x).$$

Остается найти $S(x)$. Дифференцируя ряд почленно, получаем:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \quad (|x| < 1),$$

откуда

$$S(x)=\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Поскольку $S(0)=0$, то $C=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$S(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Поэтому окончательно находим: $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\dots=\frac{1}{3}\ln 2+$ $+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

283. $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dots$

Решение. Поскольку при $|x|<1$ справедливо разложение (см. § 5, формулу IV)

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

и данный числовой ряд, в силу признака Лейбница, сходится, то, по теореме Абеля, получаем:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dots=\lim_{x\to 1-0}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

284. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\dots$

Решение. Сходимость этого ряда показана в примере 197. Там же мы получили разложение

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=\arcsin x\quad(|x|\leqslant 1),$$

из которого следует, что $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\dots=\frac{\pi}{2}$.

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

285. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

Решение. Рассматриваем этот ряд как мнимую часть степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\quad(z=e^{ix};\quad 0<|x|<\pi),$$

где под $\ln z$ понимаем ту его ветвь, для которой $\ln 1 = 0$. Тогда будем иметь:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \operatorname{Im} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & \text{если } 0 < x < \pi; \\ \dfrac{-\pi - x}{2}, & \text{если } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Так как функция $S(x)$ 2π-периодична и $S(k\pi) = 0$ (k — целое), то, используя последний результат, можем написать, что

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{(2k+1)\pi - x}{2}, & \text{если } 2k\pi < x < 2(k+1)\pi; \\ 0, & \text{если } x = 2k\pi. \end{cases}$$

286. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Представляя данный ряд в виде суммы трех сходящихся рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{n} \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(2\alpha + x)}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - 2\alpha)}{n}$$

и используя результат предыдущего примера, находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \frac{1}{2} S(x) - \frac{1}{4} S(x + 2\alpha) - \frac{1}{4} S(x - 2\alpha).$$

Например, при $x \in [0, 2\pi)$ имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n} \sin nx = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } 0 < x < 2\alpha; \\ \dfrac{\pi}{8}, & \text{если } x = 2\alpha; \\ 0, & \text{если } 2\alpha < x < 2\pi - 2\alpha; \\ -\dfrac{\pi}{8}, & \text{если } x = 2\pi - 2\alpha; \\ \dfrac{-\pi}{4}, & \text{если } 2\pi - 2\alpha < x < 2\pi. \end{cases}$$

Далее, в силу 2π-периодичности суммы этого ряда, значения его повторяются.

287. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

Решение. Рассматривая ряд как действительную часть суммы ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1} \quad (z = e^{ix}, \ -\pi < x \leqslant \pi),$$

можем написать:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \operatorname{Re} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1}.$$

При условии, что $z \neq -1$, последний ряд представляем в виде суммы двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(z \ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(z \ln(1+z) + 1 - \frac{z}{2} - \frac{\ln(1+z)}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x \sin x\right) \quad (e^{ix} \neq -1).$$

Заметим, что ограничение на ответ $(e^{ix} \neq -1)$ здесь можно снять. Действительно, если $e^{ix} = -1$, то $\cos nx = (-1)^n$. При этом мы получаем числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, равный $\frac{3}{4}$ (см. пример 268). С другой стороны, если $\cos nx = (-1)^n$, то $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x \sin x\right) = \frac{3}{4}$. Итак,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos x - x \sin x\right)$$

при всех $x \in [-\pi, \pi]$. Далее, в силу 2π-периодичности суммы этого ряда, значения ее повторяются.

283. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

Решение. Легко находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \operatorname{Re} e^z = \operatorname{Re} e^{\cos x + i \sin x} =$$

$$= e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < \infty).$$

Найти суммы следующих рядов:

289. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$.

Решение. Дифференцируя этот ряд по x дважды (в интервале сходимости $|x| < 1$) и умножая вторую производную его на $1 - x^2$, после некоторых преобразований рядов получаем дифференциальное уравнение относительно искомой суммы $S(x)$ ряда:

$$(1 - x^2) S''(x) - xS'(x) - 4 = 0.$$

Производя в нем замену независимого переменного x по формуле $t = \arcsin x$, приходим к уравнению $S''(t) = 4$, из которого находим:

$$S(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_1, \ C_2 = \text{const}).$$

Так как $S(0) = S'(0) = 0$, то отсюда получаем:

$$S(x) = 2(\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1).$$

Нетрудно найти, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} 4^n,$$

являющийся значением данного степенного ряда при $x = \pm 1$, в силу признака Гаусса, сходится. А тогда, по теореме Абеля и на основании непрерывности функции $2(\arcsin x)^2$ на сегменте $[-1, 1]$, можем утверждать, что $S(x) = 2(\arcsin x)^2$ при $|x| \leqslant 1$.

290. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$

Решение. Прежде всего устанавливаем область сходимости. Для этого, замечая, что общий член ряда $a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ ($x \neq -k$, k — натуральное) начиная с некоторого достаточно большого номера имеет определенный знак, применяем признак Гаусса. Имеем: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$. Отсюда, в силу приведенного признака, следует, что ряд сходится только при $x > 1$.

Найдем теперь сумму $S(x)$ данного ряда. С этой целью представим общий член ряда в виде

$$a_n = \frac{1}{x-1} \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\cdots(n-1+x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)} \right) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

и вычислим частичную сумму $S_n(x)$ рассматриваемого ряда:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\left(\left(\frac{2!}{1+x} - \frac{3!}{(1+x)(2+x)}\right) + \right.$$
$$+ \left(\frac{3!}{(1+x)(2+x)} - \frac{4!}{(1+x)\cdots(3+x)}\right) +$$
$$\left. + \cdots + \left(\frac{n!}{(1+x)(2+x)\cdots(n-1+x)} - \frac{(n+1)!}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(1+x)(2+x)\cdots(n+x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)\,a_n}{x-1}.$$

Поскольку ряд сходится, а члены ряда положительны и монотонно убывают, то, в силу примера 14, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,a_n = 0$. Принимая его во внимание, из предыдущего получаем:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{x-1} \quad (x > 1).$$

291. $\dfrac{a_1}{a_2+x} + \dfrac{a_1}{a_2+x}\cdot\dfrac{a_2}{a_3+x} + \cdots$ при условии, что $x > 0$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ — расходящийся.

Решение. Представляя общий член $b_n(x)$ ряда в виде

$$b_n(x) = \frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_{n+1}+x)} =$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_n+x)} - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)\ldots(a_{n+1}+x)}\right)(n = 2, 3, \ldots),$$

находим частичную сумму $S_n(x)$ данного ряда:

$$S_n(x) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)}\right) + \left(\frac{a_1a_2a_3}{(a_2+x)(a_3+x)} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{a_1a_2a_3a_4}{(a_2+x)(a_3+x)(a_4+x)}\right) + \cdots + \left(\frac{a_1a_2\ldots a_n}{(a_2+x)(a_3+x)\ldots(a_n+x)} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)\ldots(a_{n+1}+x)}\right)\right) = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{1}{x}\left(\frac{a_1a_2}{a_2+x} - \right.$$
$$\left. - \frac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Так как $$0 < \frac{a_2a_3\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\left(1+\frac{x}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)} \leqslant \frac{1}{1+x\sum\limits_{q=2}^{n}\frac{1}{a_q}}$$ (см. пример 4, гл. I, ч. 1) и ряд с положительными членами может расходиться только к бесконечности, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1a_2\ldots a_{n+1}}{(a_2+x)(a_3+x)\cdots(a_{n+1}+x)} = 0$. Следовательно, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{a_1}{x}$.

292. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots$, если а) $|x|<1$; б) $|x|>1$.

Решение. Представляя частичную сумму ряда в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)+\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1+x^{2^n}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{1-x^4}-\frac{1}{1+x^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1+x^{2^{n-1}}}\right)-\frac{1}{1+x^{2^n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}-\frac{1}{1+x^{2^n}}\right),$$

получаем:

$$S_n(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+S_n(x)-\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}-\frac{1}{1+x^{2^n}}\right),$$

откуда

$$S_n(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x^{2^n}}-\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

Поэтому, если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{x}{1-x}$. Если же $|x|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}$.

Следовательно, сумма ряда $S(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}, & \text{если } |x|<1;\\ \frac{1}{1-x}, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

293. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, если а) $|x|<1$; б) $|x|>1$.

Решение. Рассматривая частичную сумму $S_n(x)$ ряда

$$S_n(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{(1+x)(x^2+x+1)}+\frac{x^2}{(x^2+x+1)(x^3+x^2+x+1)}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(1+x+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^n)}\right)$$

и замечая, что

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+\cdots+x^n)}=-\frac{1+x+\cdots+x^{n-2}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}+$$
$$+\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^n}\quad(n=2,\ 3,\ \ldots),$$

получаем:

$$S_n(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{1+x+\cdots+x^n}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что если $|x|<1$, то $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}$. Если же $|x|>1$, то $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$, где $S(x)$ — сумма ряда.

§ 8. Нахождение определенных интегралов с помощью рядов

С помощью разложения подынтегральной функции в ряд вычислить следующие интегралы:

294. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx.$

Решение. При $|x| \leqslant 1$ справедливо разложение

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, x^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)}$$

(см. пример 198). Разделив почленно этот ряд на x ($x \neq 0$) и проинтегрировав его в пределах от 0 до 1, получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)^2}.$$

295. $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx \qquad (p > 0,\ q > 0).$

Решение. Данный интеграл, вообще говоря, является несобственным; поэтому

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx.$$

Поскольку при $0 < x < 1$ справедливо разложение

$$\ln(1-x^q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{qn}}{n}, \text{ то}$$

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn+p} - (1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn+p}}{n(qn+p)} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{qn+p}}{n(qn+p)} = \varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_1^{qn}}{n(qn+p)} - (1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}.$$

Замечая, что оба степенных ряда сходятся при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, на основании теоремы Абеля, имеем:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \varepsilon_1^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon_1^q)^n}{n(qn+p)} -$$

$$-\lim_{\varepsilon_2 \to +0} (1-\varepsilon_2)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((1-\varepsilon_2)^q)^n}{n(qn+p)}. \qquad (1)$$

В силу равномерной сходимости этих рядов и существования конечных пределов $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \varepsilon_1^q = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to +0} ((1-\varepsilon_2)^q)^n = 1$, из соотношения (1) вытекает, что

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(nq+p)}.$$

296. $\int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx.$

Решение. С помощью однократного применения метода интегрирования по частям приводим данный интеграл к виду:

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = -\int_0^1 \ln(1-x)\,dx - \int_0^1 \ln x dx + \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1-x}. \qquad (1)$$

Считая, что $0 < \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant 1 - \varepsilon_2$, записываем соответствующие разложения в степенные ряды:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \ln x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n},$$

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

Так как

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx,$$

то из (1) почленным интегрированием степенных рядов, на основании теоремы Абеля, получаем:

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_2)^{n+1} - \varepsilon_1^{n+1}}{n(n+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon_1)^{n+1} - \varepsilon_2^{n+1}}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_2^n - (1-\varepsilon_1)^n}{n^2} \right),$$

откуда, как и в предыдущем примере, следует, что

$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

297. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}.$

Решение. Полагая $t = e^{-2\pi x}$, получаем один из интегралов, вычисленных нами в предыдущем примере:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 \frac{\ln t\,dt}{1-t}.$$

Поэтому имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{24}.$$

298. Разложить по целым положительным степеням модуля k $(0 \leqslant k < 1)$ *полный эллиптический интеграл* 1-го *рода*

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Решение. Поскольку $k^2\sin^2\varphi \leqslant k^2 < 1$, то законно разложение (см. формулу IV, § 5):

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi. \tag{1}$$

В силу оценки $k^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sin^{2n}\varphi \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n} \leqslant k^{2n}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k^{2n}$, ряд (1) сходится равномерно (по признаку Вейерштрасса) по φ. Кроме того, члены ряда (1) являются непрерывными функциями, поэтому, по одному из свойств функциональных рядов, рассматриваемый функциональный ряд можно почленно интегрировать. Имеем:

$$F(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда, пользуясь результатом примера 98, гл. IV, ч. 1, окончательно находим:

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right).$$

299. Выразить длину дуги эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ с помощью ряда, расположенного по целым положительным степеням эксцентриситета.

Решение. Длина S указанной дуги выражается интегралом

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Преобразовывая подынтегральную функцию, находим:

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\, dt, \tag{1}$$

где ε — эксцентриситет эллипса ($a \geqslant b$).

Пользуясь разложением

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n}}{(2n)!!\,(2n-1)} \qquad (|x| \leqslant 1),$$

справедливость которого при $|x| < 1$ вытекает из формулы IV, § 5 (законность его при $x = \pm 1$ следует из теоремы Абеля), и полагая в нем $x = \varepsilon \sin t$ ($\varepsilon|\sin t| \leqslant 1$), из (1), учитывая пример 98, гл. IV, ч. 1, окончательно может написать:

$$S = 2\pi a\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n-1)}\right).$$

Доказать равенства:

300. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$

Доказательство. Представляя подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{x^x} = \begin{cases} e^{-x\ln x}, & \text{если } x > 0; \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разлагаем ее в степенной ряд по степеням $x\ln x$ (считаем, что $x \ln x$, при $x = 0$ равняется нулю):

$$\frac{1}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \ln^n x \qquad (x \geqslant 0).$$

Так как этот функциональный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на каждом конечном промежутке $(0, A)$, то его можно почленно интегрировать. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x\, dx,$$

откуда, на основании примера 229 (е), получаем нужную формулу.

301. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\, dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$

Доказательство. Несобственный интеграл $I(a)$ в левой части данного равенства так же, как и производный от него интеграл

$$I'(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} x \cos ax dx,$$

в силу мажорантного признака Вейерштрасса, равномерно (по параметру a) сходится.

Учитывая этот факт и выполняя в последнем интеграле однократное интегрирование по частям, получаем дифференциальное уравнение относительно функции $I(a)$: $2I'(a) + aI(a) - 1 = 0$. Общее решение его имеет вид:

$$I(a) = Ce^{-\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \int\limits_0^a e^{\frac{a^2}{4}} da \qquad (C = \text{const}).$$

Поскольку $I(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно, имеем:

$$I(a) = \frac{1}{2} e^{-\frac{a^2}{4}} \int\limits_0^a e^{\frac{a^2}{4}} da.$$

Разлагая функции $e^{-\frac{a^2}{4}}$ и $e^{\frac{a^2}{4}}$ в степенные ряды, из последнего соотношения получаем:

$$I(a) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{4^n n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{4^n n! (2n+1)}.$$

Перемножая ряды, находим:

$$I(a) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n a^{2n+1}, \tag{1}$$

где

$$b_n = \frac{1}{4^n} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m+1)(n-m)!\, m!}. \tag{2}$$

Поскольку, с одной стороны,

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^1 (1 - y^2)^n dy = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m+1)(n-m)!\, m!}$$

(здесь применена формула бинома Ньютона), а с другой,

$$\frac{1}{n!} \int\limits_0^1 (1 - y^2)^n dy = 4^n \frac{n!}{(2n+1)!}$$

(см. пример 101, гл. IV, ч. 1), то из (1) и (2) следует:

$$I(a)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1},$$

что и требовалось доказать.

302. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{n!}, & \text{если } n=1,\ 2,\ \ldots;\\ 2\pi, & \text{если } n=0.\end{cases}$

Доказательство. Разлагая функцию $e^{\cos x}\cos(\sin x)$ в ряд, получаем:

$$e^{\cos x}\cos(\sin x)=\operatorname{Re}(e^z)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos kx}{k!},\ \text{где } z=e^{ix}=$$
$$=\cos x+i\sin x.$$

Полученный ряд, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно на всей числовой оси, а функции $\cos kx$ непрерывны, поэтому ряд можно почленно интегрировать вместе с функцией $\cos nx$. Имеем:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\cos nx\,dx=\frac{\pi}{n!},$$

если $n=1,\ 2,\ \ldots$, и

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx=2\pi.$$

Найти:

303. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$

Решение. Так как $e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)=\operatorname{Re}(e^{az-inx})$, где $z=e^{ix}$, и $e^{az}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^kz^k}{k!}$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx=\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^ke^{ikx}}{k!}\,dx=\frac{2\pi a^n}{n!}.$$

304. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx.$

Решение. Пусть $|\alpha|<1$. Пользуясь примером 194, находим:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x\sin nx\,dx \qquad (|\alpha|<1).$$

Поскольку функции $x \sin nx$ непрерывны на $[0, \pi]$ и функциональный ряд справа, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, равномерно сходится (здесь $|\alpha^{n-1} x \sin nx| \leqslant \pi |\alpha|^{n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^{n-1}$ сходится), то рассматриваемый ряд можно почленно интегрировать. Имеем:

$$I = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \alpha^{n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha), & \text{если } \alpha \neq 0; \\ \pi, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Пусть $|\alpha| > 1$. Тогда, преобразовывая подынтегральную функцию к виду $\frac{x \sin x}{\alpha^2 (\alpha^{-2} - 2\alpha^{-1} \cos x + 1)}$ и пользуясь полученным выше результатом, можем написать:

$$I = \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad (|\alpha| > 1).$$

Путь $\alpha = 1$. Тогда исходный интеграл имеет вид:

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\operatorname{tg} t}.$$

Функция $f(t) = \frac{t}{\operatorname{tg} t}$ непрерывна и ограничена на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{при } t = 0 \text{ и } t = \frac{\pi}{2} \text{ полагаем } f(0) = 1 \text{ и } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right)$. Следовательно, она интегрируема, т. е. последний интеграл имеет смысл.

С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, в силу признака Лейбница, сходится. Поэтому, по теореме Абеля,

$$I|_{\alpha=1} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \pi \ln 2.$$

Пусть $\alpha = -1$. Тогда интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\, dx$$

расходится, так как $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{2\pi}{\pi - x}$ при $x \to \pi$.

Таким образом, окончательно получаем:

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \ln(1+\alpha), & \text{если } -1 < \alpha < 0 \text{ и } 0 < \alpha \leqslant 1; \\ \pi, & \text{если } \alpha = 0; \\ \frac{\pi}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), & \text{если } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

305. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$.

Решение. Пусть $|\alpha|<1$. Тогда, пользуясь результатом примера 245, получаем:

$$I=\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx=0. \qquad (1)$$

Пусть $|\alpha|>1$. В этом случае, преобразовывая подынтегральную функцию к виду $\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=2\ln|\alpha|+\ln(1-2\alpha^{-1}\cos x+\alpha^{-2})$ и пользуясь равенством (1), находим: $I=2\pi\ln|\alpha|$.

Пусть $\alpha=1$. Тогда, по теореме Абеля, можем написать:

$$\ln[2(1-\cos x)]=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \qquad (x\neq 2k\pi).$$

Следовательно,

$$I|_{\alpha=1}=\int\limits_0^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\ln 2(1-\cos x)\,dx=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\,dx.$$

Замечая, что, по признаку Дирихле, ряд, стоящий под знаком последнего интеграла, равномерно сходится, а функции $\cos nx$ непрерывны, выполняем почленное интегрирование:

$$I|_{\alpha=1}=2\lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varepsilon}{n^2}.$$

Так как $\frac{|\sin n\varepsilon|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{1}{n^2}$ сходится, то, по мажорантному признаку Вейерштрасса, ряд $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{\sin n\varepsilon}{n^2}$ равномерно (по параметру ε) сходится. Кроме того, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\sin n\varepsilon=0$. Следовательно, по одному из свойств равномерно сходящихся рядов, получаем:

$$I|_{\alpha=1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\sin n\varepsilon}{n^2}=0.$$

Аналогично устанавливаем, что $I|_{\alpha=-1}=0$.

Итак, окончательно имеем:

$$I=\begin{cases}0, & \text{если } |\alpha|\leqslant 1;\\ 2\pi\ln|\alpha|, & \text{если } |\alpha|>1.\end{cases}$$

306. Доказать формулу

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \quad (1)$$

где $a > 0$ и $0 < \theta_n < 1$.

С какой точностью выразится интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}\,dx,$$

если в формуле (1) взять два члена?

Доказательство. Интегрируя n-кратно по частям, получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} +$$
$$+ (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{(a+x)^{n+1}}.$$

Так как

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{(a+x)^{n+1}} < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{a^{n+1}} = \frac{1}{a^{n+1}}, \text{ то}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{(a+x)^{n+1}} = \frac{\theta_n}{a^{n+1}}, \qquad \text{где } 0 < \theta_n < 1.$$

Формула доказана.

Если в формуле (1) взять два члена, то получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{100+x} = \frac{1}{100} - \frac{1}{(100)^2} + R,$$

где $|R| = \frac{2\theta_2}{100^3} < 2 \cdot 10^{-6}$.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Доказать признак Бертрана: если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)\ln n\right) = q,$$

то числовой знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при $q > 1$ сходится, а при $q < 1$ — расходится.

Исследовать сходимость рядов $\sum a_n$, если:

2. $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \gamma_k$, где $\gamma_k = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{a}{k\ln k} + \frac{1}{k\ln^2 k}\right)^{-1}$.

3. $a_n = \dfrac{1}{\underbrace{|\ln|\ln|\ln \ldots |\ln n| \ldots |||^{\alpha}}_{n \text{ логарифмов}}}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

4. $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) n^{-\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

5. $a_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-n^2x^2+x}}{x^2 + nx^4 + 1}\, dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

6. $a_n = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t \cos nt}{\sqrt{1 + t^4}}\, dt$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7. $a_n = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-nt} \ln t}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$.

8. $a_n = \frac{1}{n} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, |\sin nx|\, dx,$ $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(0, +\infty)$.

9. $a_n = \left| \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^n} dx - 1 \right|$; $n = 1, 2, \ldots$ 10. $\left| \int\limits_{n}^{+\infty} \sin t^2 dt - \frac{\cos n^2}{2n} \right|$; $n = 1, 2, \ldots$

11. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2 - \sqrt{3};$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Исследовать сходимость знакопеременных рядов с общим членом a_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если:

12. $a_n = (-1)^n \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1 + x^n}{1 + x^{2n}}\, dx.$ 13. $\int\limits_{0}^{1} (1 - x^2)^{n^2} dx \cdot \sin n.$

14. $a_n = \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}.$

15. $(n + 2)\, a_{n+2} + 2\,(n + 1)\, a_{n+1} + na_n = 0,$ $a_1 = -1,$ $a_2 = \frac{1}{2}.$

16. $a_n = n^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^p \cos^3 2n$ (p — натуральное число).

17. $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}} \right).$

18. $a_n = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\,(-1)^n n}{\pi} \right)^{1 + \frac{1}{n}} - 1.$

19. $a_n = \int\limits_{0}^{\frac{\sin n}{n}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$ 20. $a_n = \frac{\sqrt[n^2]{n}}{\ln^{\alpha} n} \sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3 + n^2}\right)$ $(n > 1)$.

21. $a_n = \dfrac{\sin\left(\pi \sqrt[3]{n^3 + n}\right)}{\ln^{\alpha} n}$ $(n > 1)$.

Исследовать на равномерную сходимость следующие функции:

22. а) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +\infty$, $x \in (0, +\infty)$;

б) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$, $x \in (0, +\infty)$;

в) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +\infty$, $x \in (1, A)$;

г) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ при $y \to +0$, $x \in (1, +\infty)$.

23. $f(x, y) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2y}$, $x \in (0, 1)$; а) при $y \to 1$ и б) при $y \to 2$.

24. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}}$, $x \in (1, +\infty)$; а) при $y \to +\infty$; б) при $y \to +0$.

25. $f(x, y) = \dfrac{1}{x}(e^{xy}-1)$, $x \in (0, +\infty)$; а) при $y \to +0$; б) при $y \to -0$; в) при $y \to -\infty$; г) при $y \to 1$.

26. $f(x, y) = \dfrac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y+1}$, $x \in [1, +\infty)$; а) при $y \to +0$; б) при $y \to +\infty$.

27. $f(x, y) = y \ln(x^2+y^2)$, $x \in (0, 1)$; а) при $y \to 0$; б) при $y \to 1$.

Исследовать на равномерную сходимость функциональные последовательности:

28. $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{xy^2}{n}\right) dy$; а) $x \in (0, 1)$; б) $x \in (0, +\infty)$.

29. $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos(xy)\, dy}{y^2+n^2}$; а) $x \in (0, 1)$; б) $x \in (1, +\infty)$.

30. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{k^2 x}{n^3}$, $x \in (0, +\infty)$.

31. $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{xn^2}\right)$, $x \in (0, 1)$.

Предварительно определив область сходимости функционального ряда, исследовать его на равномерную сходимость:

32. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$.

33. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

34. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{\sqrt{n}+x^2}$;

35. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{2n+1}$.

36. Может ли функциональный ряд разрывных функций, сходящийся неравномерно в интервале (a, b), представлять в этом интервале непрерывную функцию? Привести примеры.

37. Пусть $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Доказать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2 x}$ равномерно сходится при $x \geqslant \varepsilon > 0$.

Обосновать законность почленного дифференцирования рядов в указанных областях:

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, \qquad 0 < x < 2\pi.$

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1+nx^{2n}}, \qquad |x| \neq 1.$

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad |x| < 1.$

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n^2+\cos(\sqrt{n}\,x)}, \qquad 0 < x < 2\pi,$

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon x}}, \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0).$

43. Можно ли утверждать: а) Если функция $f(x)$ непрерывна в каждом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то она непрерывна в интервале (a, b)?

б) Если последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на каждом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то она равномерно сходится и на интервале (a, b)?

в) Если последовательность $f_n(x) \in C[\alpha, \beta]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится на каждом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ к функции $f(x)$, то в интервале (a, b) предельная функция непременно непрерывна?

Найти:

44. $\lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-nx})\cos nx}{x^2+n^3}$. 45. $\lim\limits_{x\to+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n\ln(1-e^{-x})}$.

46. $$\lim_{y\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{\arcsin\left(\frac{ny}{ny+1}\right)}{1+n^4x^2+y}\,dx.$$

47. $$\lim_{y\to 1+0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}\,(y-1)}{n}\right)}{\cos\frac{\pi y}{2} \cdot \ln\left(1+\frac{x(y-1)}{n}\right)}\,dx.$$

48. $$\lim_{y\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n \cos ny}{y+n} \cdot \frac{\sin y}{y}\right).$$

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

49. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1}\,((2k-1)!!)^2((2n-2k-3)!!)^2\,\frac{x^n}{(n!)^2}.$$

50. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{tg} x)^{(n)}|_{x=0}}{n!}\,x^n.$$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg}(2\sin x))^{(n)}|_{x=0}}{n!} x^n.$

Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$:

52. $\displaystyle f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a (n+x)^2} \qquad (a > 0).$

53. $f(x) = e^{-\cos x}(\cos(2x - \sin x) + 2\cos x \cdot \cos(\sin x)) - \cos x.$

54. $f(x) = e^{-\cos x}(\sin(2x - \sin x) - 2\cos x \cdot \sin(\sin x)) + \sin x.$

55. $f(x) = \sin x \cdot \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).$ 56. $f(x) = \cos x \cdot \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).$

57. Показать, что так называемое явление Гиббса не является «привилегией» тригонометрических рядов, а присуще всем неравномерно сходящимся функциональным последовательностям и рядам.

58. Можно ли следующие тригонометрические ряды назвать рядами Фурье:

а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{\ln n}}$; в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n - \sqrt{n}}$; г) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin nx}{(n+1)\ln n}$?

Доказать, что

59. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^{j} (-1)^j (k-j)^{n-1}, \qquad |x| < 1 \qquad (n = 1,$ 2, ...).

60. $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x}}\right) \qquad (x > 0).$

Указание. Воспользоваться примером 52.

Найти:

61. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^3 (2 - \sqrt{3})^{2k}.$ 62. $\displaystyle\lim_{x \to 1-0} \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$

Найти суммы следующих тригонометрических рядов:

63. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n}.$ 64. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n(n+1)}.$

65. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} \qquad (|\xi| < 1).$ 66. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!\,\sin(2k+1)x}{(2k)!!\,(2k+1)}.$

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Предел функции. Непрерывность

1°. Предел функции. Пусть функция $f(p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве E с предельной точкой p_0. Число A называется *предельным значением* функции $f(p)$ в точке p_0 (или *пределом* функции при $p \to p_0$), если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, p_0) > 0$ такое, что $|f(p) - A| < \varepsilon$ как только $p \in E$ и $0 < \rho(p, p_0) < \varepsilon$, где $\rho(p, p_0)$ — расстояние между точками p и p_0. Для обозначения предельного значения A функции $f(p)$ в точке p_0 используются записи:

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = A \text{ или } f(p) \to A, \text{ если } p \to p_0.$$

2°. Непрерывность. Пусть точка p_0 принадлежит области E определения функции $f(p)$ и любая ε-окрестность точки p_0 содержит точки, отличные от p_0.

Функция $f(p)$ называется *непрерывной в точке* p_0, если

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0). \qquad (1)$$

Точки, в которых равенство (1) не имеет места, называются *точками разрыва* этой функции.

Функция $f(p)$ называется *непрерывной в данной области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

3°. Равномерная непрерывность. Функция $f(p)$ называется *равномерно непрерывной* в области G, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|f(p') - f(p'')| < \varepsilon \ \forall p', p'' \in G$, удовлетворяющих неравенству $\rho(p', p'') < \delta$.

Функция, непрерывная в замкнутой и ограниченной области, равномерно непрерывна в этой области.

1. Показать, что для функции $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x, y) \right) = -1,$$

в то время как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1;$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Поскольку последовательности $\{x_n, y_n\}=\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$, $\{x'_n, y'_n\}=\left\{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n\to\infty$, а соответствующие последовательности значений функций сходятся к различным пределам:

$$\{f(x_n, y_n)\}=\{0\}\to 0,\ \{f(x'_n, y'_n)\}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}\right\}\to\frac{1}{3}$$

при $n\to\infty$, то предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

2. Показать, что для функции $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y))=\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y))=0,$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

Решение. Равенство повторных пределов следует из того, что $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=0$. То, что двойной предел не существует, следует из того, что последовательности $\{x_n, y_n\}=\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$, $\{x'_n, y'_n\}=\left\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right\}$ сходятся к точке $(0, 0)$, а соответствующие последовательности значений функции сходятся при $n\to\infty$ к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n)=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}\to 1,\quad f(x'_n, y'_n)=\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^2}}\to 0\quad \text{при}\quad n\to\infty.$$

3. Показать, что для функции $f(x, y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ оба повторных предела $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ и $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$ не существуют, но, тем не менее, существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$.

Решение. Пусть $y\neq\frac{1}{n\pi}$ $(n=1, 2, \ldots)$, тогда $y\sin\frac{1}{y}\neq 0$. Очевидно, последовательности $x_n=\frac{1}{n\pi}$, $x'_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходятся к нулю при $n\to\infty$. При этом соответствующие последовательности значений функции $\{f(x_n, y)\} = \{0\}$, $\{f(x_n', y)\} = \left\{y \sin \frac{1}{y}\right\}$ при $n \to \infty$ сходятся к различным предельным значениям. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$ не существует. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ также не существует. Из этого вытекает, что оба повторных предела не существуют. Однако из неравенства $0 \leqslant \left|(x+y) \times \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$, справедливого при любых $x \neq 0$ и $y \neq 0$, следует, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left((x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right) = 0.$$

4. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$?

Решение. Этот предел не существует, так как последовательности $\{x_n, y_n\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$, $\{x_n', y_n'\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}$ сходятся к точке $(0, 0)$ при $n \to \infty$, в то время как соответствующие последовательности значений функции сходятся к различным предельным значениям:

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} \to 1, \quad f(x_n', y_n') = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

5. Чему равен предел функции $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$ вдоль любого луча $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ при $t \to +\infty$? Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$?

Решение. Обозначим $F(t, \alpha) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, тогда

$$F(t, \alpha) = t^2 \cos^2 \alpha e^{-t^2 \cos^2 \alpha + t \sin \alpha} \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi).$$

Если $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, то $F\left(t, \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ и, следовательно, $F\left(t, \pm \frac{\pi}{2}\right) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если же $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2 \alpha \neq 0$ и $t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда, по правилу Лопиталя, получаем:

$$\lim_{t \to +\infty} F(t, \alpha) = \cos^2 \alpha \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} =$$

$$= \cos^2 \alpha \lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{(2t \cos^2 \alpha - \sin \alpha) e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} =$$

$$= \cos^2 \alpha \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\left(\cos^2 \alpha - \frac{\sin \alpha}{2t}\right) e^{t^2 \cos^2 \alpha - t \sin \alpha}} = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t, \alpha) = 0$ при любых α.

Функция $f(x, y)$ не является бесконечно малой при $x \to \infty$ и $y \to \infty$, поскольку при $x_n = n \to +\infty$, $y_n = n^2 \to +\infty$ получаем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 e^{-(n^2-n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, противоречащее определению бесконечно малой величины.

6. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f(x, y)\right)$ и $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x, y)\right)$, если

а) $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

б) $f(x, y) = \dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a = +\infty$, $b = +0$;

в) $f(x, y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a = \infty$, $b = \infty$;

г) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$, $a = 0$, $b = \infty$;

д) $f(x, y) = \log_x(x+y)$, $a = 1$, $b = 0$.

Решение. а) При $x \neq 0$, $y \neq 0$ имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{y^2}+1}{\dfrac{x^2}{y^2}+y^2}\right) = 0;$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1.$$

б) Функция x^y непрерывна при $y > 0$ (x считаем постоянным), поэтому $\lim\limits_{y\to+0} x^y = 1$; при постоянном значении $y > 0$ функция x^y непрерывна при всех $x > 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} x^y = +\infty$.

Пользуясь полученными равенствами, находим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{y\to+0}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = 1.$$

в) При каждом фиксированном x функция непрерывна по y, а при всяком фиксированном y — непрерывна по x. Поэтому

$$\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y} = 0; \quad \lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y} = \lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{2+\dfrac{y}{x}} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = 0; \quad \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = 1.$$

г) При фиксированном $x \neq 0$ $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{xy}{1+xy} = 1$, поэтому, в силу непрерывности тангенса, получаем: $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy} = 0$. Пусть теперь y

фиксированное. Тогда, пользуясь тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1$, имеем:

$$\lim_{x\to 0} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}(1+xy)^{-1}=1.$$

На основании этих равенств, находим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)=0;\ \lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\right)=1.$$

д) Имеем: $f(x,\ y)=\log_x(x+y)=\frac{\ln(x+y)}{\ln x}$, $\quad x>0,\quad x+y>0,$ $x\neq 1$. Из непрерывности логарифмической функции следует, что

$$\lim_{y\to 0} f(x,\ y)=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\frac{\ln x}{\ln x}=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)\right)=1.$

Поскольку

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } -1<y<0;\\ -\infty, & \text{если } 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}-\infty, & \text{если } -1<y<0,\\ +\infty, & \text{если } 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1,\quad \text{если } y=0,$$

то $\lim\limits_{x\to 1} f(x,\ y)$, а вместе с ним и $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 1} f(x,\ y)\right)$ не существуют.

Найти следующие двойные пределы:

7. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

Решение. Пользуясь очевидным неравенством $x^2-xy+y^2\geqslant xy$, получаем (при $x\neq 0,\ y\neq 0$):

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leqslant\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}.$$

Отсюда следует, что

$$0\leqslant\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Решение. Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$, тогда

$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2}{x^4+y^4} + \frac{y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}. \qquad (1)$$

Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = 0$, то, пользуясь неравенством (1), заключаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$.

Решение. Имеем: $\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy} y$. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ $(xy = t,\ a \neq \infty)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \lim\limits_{y\to a} y = a$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$.

Решение. Пользуясь элементарным неравенством

$$(x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} = \frac{x^2}{e^{x+y}} + \frac{y^2}{e^{x+y}} < \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y},$$

справедливым при $x > 0$, $y > 0$, получаем:

$$0 \leqslant \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} \leqslant \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}\right) = 0.$$

Отсюда $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)} = 0$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

Решение. Из очевидного неравенства $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ следует, что $\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому $0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \to 0$ при $x \to +\infty$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Решение. Из неравенств $x^2y^2 \leqslant \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$, $1 \geqslant (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geqslant (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2}$, справедливых при $0 < x^2+y^2 < 1$, и того, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to+0} t^{\frac{1}{4}t^2} = \lim_{t\to+0} e^{\frac{t^2}{4}\ln t} = 1,$$

вытекает равенство $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Решение. В силу непрерывности показательной и логарифмической функций, имеем:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} e^{\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e.$$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и тем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=1\neq 0$, получаем:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2.$$

15. По каким направлениям φ существует конечный предел: а) $\lim\limits_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$; б) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$, если $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$.

Решение. а) Конечный предел

$$\lim_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to+0} e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}$$

существует тогда, когда $\cos\varphi\leqslant 0$, т. е. если $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

б) Имеем:

$$\lim_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy=\lim_{\rho\to+\infty} e^{\rho^2\cos 2\varphi}\sin(\rho^2\sin 2\varphi).$$

Поскольку $\rho^2\to+\infty$, а $\sin(\rho^2\sin 2\varphi)$ — ограниченная функция, то предел будет конечным, если $\cos 2\varphi<0$ или $\sin 2\varphi=0$. В первом случае $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$, во втором $\varphi=0$, $\varphi=\pi$.

Найти точки разрыва следующих функций:

16. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Функция x^2+y^2 непрерывна при всех x и y как многочлен от x и y. По известной теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций, $(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$ — также непрерывная функция при всех x и y, кроме точки $(0, 0)$, где знаменатель $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ обращается в нуль. Следовательно, $(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва.

17. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

Решение. Поскольку числитель и знаменатель — непрерывные функции, то функция может иметь разрыв лишь в точках, где знаменатель x^3+y^3 обращается в нуль. Решая уравнение $x^3+y^3=0$ относительно y, находим: $y=-x$. Следовательно, функция имеет разрывы на прямой $y=-x$.

Пусть $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$ и $x_0+y_0=0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Значит, точки прямой $y=-x$ $(x\neq 0)$ — точки устранимого разрыва функции u. Из соотношения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=+\infty$$

следует, что $(0, 0)$ — точка бесконечного разрыва.

18. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{, если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

Решение. Пусть $y\neq 0$ и x_0 — любые фиксированные числа. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f(x, y)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2x_0y}{x_0^2+y^2}=f(x_0, y)$. Если же $y=0$, то при любом $x_0\neq 0$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x, 0)=0=f(x_0, 0)$. Наконец, если $y=0$ и $x_0=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}f(x, 0)=0=f(0, 0)$.

Таким образом, при каждом фиксированном y функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x. Ввиду симметрии функции относительно x и y, при любом фиксированном x функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной y.

Однако функция $f(x, y)$ не является непрерывной по совокупности переменных в точке $(0, 0)$. Действительно, обе последовательности $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right\}$ сходятся при $n\to\infty$ к точке $(0, 0)$, а соответствующие им последовательности значений функции сходятся при $n\to\infty$ к различным предельным значениям:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\to 1,\quad f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{4}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\to\frac{4}{5}.$$

19. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке (0, 0) непрерывна вдоль каждого луча $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ $(0 \leqslant t < +\infty)$, проходящего через эту точку, т. е. существует $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0, 0)$, однако эта функция не является непрерывной в точке (0, 0).

Решение. Имеем:

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Поскольку $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) \equiv 0$ при $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то при этих значениях α $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0)$.

Если $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha > 0$ и $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha \to \sin^2\alpha > 0$ при $t \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0 = f(0, 0)$. Таким образом, вдоль любого луча, проходящего через точку (0, 0), функция $f(x, y)$ непрерывна в этой точке.

То, что функция $f(x, y)$ имеет разрыв в точке (0, 0), следует из того, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right\}$ сходится к точке (0, 0) при $n \to \infty$, а

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

20. Исследовать на равномерную непрерывность линейную функцию $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ в бесконечной плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$.

Решение. Для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) бесконечной плоскости E^2 имеем:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \leqslant 2|x_1 - x_2| + \\ + 3|y_1 - y_2|.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно заданное число. Тогда при условии, что $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, из которого, по определению, следует равномерная непрерывность функции $f(x, y)$ на E^2.

21. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $E^2 = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ функцию $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^2$ имеем:

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| = \left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| =$$

$$= \frac{|(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant \frac{|x_1 - x_2|\,|x_1 + x_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} +$$

$$+ \frac{|y_1 - y_2|\,|y_1 + y_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \leqslant |x_1 - x_2| \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2}} +$$

$$+ |y_1 - y_2| \frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2} + \sqrt{y_2^2}} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

как только $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$. •

Следовательно, по определению, функция u равномерно непрерывна в плоскости E^2.

22. Будет ли равномерно непрерывной функция $f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}$ в области $x^2 + y^2 < 1$?

Решение. Функция $1 - x^2 - y^2$ непрерывна при всех значениях x и y как многочлен от x и y. По теореме о суперпозиции непрерывных функций, данная функция также непрерывна при всех значениях x и y, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 < 1$.

Покажем, что в этой области данная функция неравномерно непрерывна. С этой целью возьмем две последовательности:

$$M_n(x_n, y_n) = \left\{\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \cos\alpha,\ \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \sin\alpha\right\},$$

$$M'_n(x'_n, y'_n) = \left\{\sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \cos\alpha,\ \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}} \sin\alpha\right\},$$

$(n = 1, 2, \ldots)$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, принадлежащие области определения функции. Поскольку $\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{(x_n - x'_n)^2 + (y_n - y'_n)^2} = \left|\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1 + 4n}}\right| \to 0$ при $n \to \infty$, а $|f(M_n) - f(M'_n)| = \left|\sin 2n\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = 1$ при всех n, то для $\varepsilon \in (0, 1)$ не существует числа δ, участвующего в определении равномерной непрерывности.

23. Дана функция $u(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$. Является ли эта функция непрерывной в своей области определения E? Будет ли функция u равномерно непрерывной в области E?

Решение. Область определения E определяется неравенствами $|x| \leqslant |y|$, $y \neq 0$. В этой области функция $u(x, y)$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

Однако данная функция не является равномерно непрерывной, так как для последовательностей $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $M'_n\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ $(n=1, 2, \ldots)$ справедливо соотношение

$$\rho(M_n, M'_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$, а расстояние между значениями функции в соответствующих точках $|u(M_n) - u(M'_n)| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2\arcsin 1 = \pi$ не может быть меньше числа π.

24. Показать, что множество точек разрыва функции $f(x, y) = x \sin\frac{1}{y}$, если $y \neq 0$ и $f(x, 0) = 0$, не является замкнутым.

Доказательство. Пусть $y_n = \frac{2}{\pi(1+4n)}$, $x_n = \frac{nx_0}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где x_0 — произвольное фиксированное число. Тогда последовательность $\{x_n, y_n\}$ при $n \to \infty$ сходится к точке $(x_0, 0)$. Из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{1+n} \sin\frac{\pi(1+4n)}{2} = x_0 \neq f(x_0, 0) = 0 \quad (x_0 \neq 0)$$

следует, что $(x_0, 0)$ $(x_0 \neq 0)$ — точка разрыва функции $f(x, y)$. А из неравенства $|f(x, y)| = |x\sin\frac{1}{y}| < |x|$ следует непрерывность функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$.

Таким образом, множество точек разрыва функции $f(x, y)$ заполняет сплошь ось Ox, за исключением точки $(0, 0)$, которая является предельной точкой этого множества. Следовательно, множество точек разрыва функции $f(x, y)$ не содержит всех своих предельных точек, а поэтому не является замкнутым.

25. Показать, что если функция $f(x, y)$ в некоторой области G непрерывна по переменной x и равномерно относительно x непрерывна по переменной y, то эта функция непрерывна в рассматриваемой области.

Доказательство. Для произвольных точек (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ из области определения функции $f(x, y)$ имеем:

$$|\Delta f(x_0, y_0)| = |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| + |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1)$$

Согласно равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ относительно x по переменной y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ такое, что как только $|\Delta y| < \delta_1$ неравенство

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

справедливо для любых $x_0 + \Delta x$ из области определения функции $f(x, y)$.

Далее, в силу непрерывности функции $f(x, y)$ по переменной x, для указанного ранее $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

как только $|\Delta x| < \delta_2$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ оба неравенства (2) и (3) будут выполнены. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ из неравенств (2), (3) и (1) следует, что $|\Delta f(x_0, y_0)| < \varepsilon$, а это и означает непрерывность функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

26. Доказать, что если в некоторой области G функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|,$$

где $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G$ и L — постоянная, то эта функция непрерывна в данной области.

Доказательство. Так как функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и любых точек (x_0, y_0) и (x, y) из G имеем:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_0)| + \\ + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant L\,|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \qquad (1)$$

В силу непрерывности функции $f(x, y_0)$ в точке x_0, можно указать такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$, что при $|x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) при условии, что $|x - x_0| < \delta$ и $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2L}\right)$, получаем неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < L\frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

которое доказывает непрерывность функции $f(x, y)$ в любой точке $(x_0, y_0) \in G$.

27. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области G: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, а последовательность функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно на $[a, A]$ и удовлетворяет условию $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что последовательность функций $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ также сходится равномерно на $[a, A]$.

Доказательство. Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области G, то она равномерно непрерывна в этой области. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \qquad (2)$$

справедливо для всех $x \in [a, A]$ и y', $y'' \in [b, B]$, которые удовлетворяют неравенству $|y' - y''| < \delta$. В силу равномерной сходимости на сегменте $[a, A]$ последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $\forall \delta > 0$ (в том числе и для δ, указанного выше) $\exists N = N(\delta)$ такое, что $|\varphi_{n+p}(x) - \varphi_n(x)| < \delta$ $\forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$. Полагая в неравенстве (1) $y' = \varphi_{n+p}(x)$, $y'' = \varphi_n(x)$ $(\varphi_{n+p}(x), \varphi_n(x) \in [b, B])$, получаем неравенство

$$|f(x, \varphi_{n+p}(x)) - f(x, \varphi_n(x))| < \varepsilon,$$

справедливое $\forall n > N$, $\forall p > 0$ и $\forall x \in [a, A]$.

Таким образом, последовательность $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ сходится равномерно на сегменте $[a, A]$.

28. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $R\,(a < x < A;$ $b < y < B)$; 2) функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (a, A) и имеет значения, принадлежащие интервалу (b, B). Доказать, что функция $F(x) = f(x, \varphi(x))$ непрерывна в интервале (a, A).

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из области R. Из непрерывности функции $f(x, y)$ в области R вытекает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

как только $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_1$.

Обозначим $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Из непрерывности функции $y = \varphi(x)$ на интервале (a, A) вытекает, что для указанного выше $\delta_1\ \exists \delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta_1, \tag{2}$$

если $|x - x_0| < \delta_2$. Следовательно, из неравенств (1) и (2) и того, что $y = \varphi(x) \in (b, B)$, если $x \in (a, A)$, вытекает неравенство

$$|f(x, \varphi(x)) - f(x_0, \varphi(x_0))| < \varepsilon,$$

справедливое при $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и доказывающее непрерывность функции $F(x) = f(x, \varphi(x))$ на интервале (a, A).

29. Пусть: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $R\ (a < x < A;$ $b < y < B)$; 2) функции $x = \varphi(u, v)$ и $y = \psi(u, v)$ непрерывны в области $R'\ (a' < u < A';\ b' < v < B')$ и имеют значения, принадлежащие соответственно интервалам (a, A) и (b, B). Доказать, что функция $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ непрерывна в области R'.

Доказательство. Пусть (u_0, v_0) — произвольная фиксированная точка из R', а $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Из условия 1) вытекает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma = \sigma(\varepsilon, x_0, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \tag{1}$$

как только $|x - x_0| < \sigma$, $|y - y_0| < \sigma$. Из условия 2) следует, что для указанного выше $\sigma\ \exists \delta = \delta_1(\sigma) = \delta(\varepsilon, u_0, v_0)$ такое, что при $|u - u_0| < \delta$ и $|v - v_0| < \delta$ справедливы неравенства:

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \sigma; \ |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \sigma. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) непосредственно следует, что

$$|f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) - f(\varphi(u_0, v_0), \ \psi(u_0, v_0))| = |F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon$$

при $|u - u_0| < \delta$, $|v - v_0| < \delta$, т. е. что функция $F(u, v)$ непрерывна в точке (u_0, v_0). Поскольку (u_0, v_0) — произвольная точка из R', заключаем, что функция $F(u, v)$ непрерывна в области R'.

§ 2. Частные производные. Дифференциал функции

1°. Частные производные. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена в некоторой области G и $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ — внутренняя точка этой области. Если существует (конечный или бесконечный) предел отношения частного приращения $\Delta_{x_k}u$ функции u в точке M_0 к соответственному приращению Δx_k переменной x_k:

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_{k-1}, \overset{\circ}{x}_k + \Delta x_k, \overset{\circ}{x}_{k+1}, \ldots, \overset{\circ}{x}_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)}{\Delta x_k}$$

при $\Delta x_k \to 0$, то этот предел называется *частной производной* функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точке M_0 по переменной x_k и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, \ \frac{\partial f}{\partial x_k}, \ u'_{x_k}, \ f'_{x_k}.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$.

2°. Дифференциал функции. Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется *дифференцируемой в точке* M_0, если ее полное приращение $\Delta u = f(\overset{\circ}{x}_1 + \Delta x_1, \overset{\circ}{x}_2 + \Delta x_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m + \Delta x_m) - f(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_m \Delta x_m + o(\rho),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — некоторые не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ постоянные, а $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_m^2}$.

Если хотя бы одно из чисел A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ отлично от нуля, то сумма $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_m \Delta x_m$ представляет собой главную линейную относительно приращений аргументов часть приращения дифференцируемой функции. При определении дифференцируемости функции не исключается возможность обращения в нуль всех чисел $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Если функция u дифференцируема в точке M_0, то в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, причем $\dfrac{\partial u}{\partial x_k} = A_k$. Таким образом, условие дифференцируемости функции u в точке M_0 можно записать в следующей форме:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho),$$

где частные производные вычислены в точке M_0.

Главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения дифференцируемой функции u в точке M_0 называется дифференциалом этой функции в точке M_0 и обозначается символом du. Следовательно, $du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \cdots + A_m \Delta x_m$.

Используя то, что для дифференцируемой функции $A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), а $\Delta x_i = dx_i$, выражение для дифференциала можно переписать следующим образом:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m. \quad (1)$$

Формула (1) справедлива и в том случае, когда аргументы $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ являются дифференцируемыми функциями новых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

Частная производная от $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ по переменной x_n, т. е. выражение $\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$, называется *частной производной второго порядка* и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_n}, \quad u^{(2)}_{x_k x_n}.$$

При этом, если $k \neq n$, то частная производная называется *смешанной*. Аналогично определяются производные порядка выше второго. Если функция n раз дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке любые смешанные производные n-го порядка не зависят от порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

Дифференциал от du, т. е. выражение $d(du)$, называется *дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) и обозначается символом d^2u. Аналогично: $d(d^2u) = d^3u$, $d(d^3u) = d^4u$ и т. д. Для дифференциалов высших порядков имеет место символическая формула

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n u.$$

3°. Производная сложной функции. Если функции

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

дифференцируемы, то

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

4°. Производная по направлению. Градиент. Пусть дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а направление l характеризуется направляющими косинусами $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. Тогда производная по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор, обозначаемый символом $\operatorname{grad} u$ и имеющий координаты, соответственно равные производным $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, взятым в точке M_0. Таким образом,

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\},$$

причем в этом случае можем записать, что $\frac{\partial u}{\partial l} = (\boldsymbol{a}, \operatorname{grad} u)$, где $\boldsymbol{a} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Градиент функции u в точке M_0 характеризует направление и величину максимального роста этой функции в точке M_0. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Вектор $\operatorname{grad} u$ в данной точке M_0 ортогонален к той поверхности уровня функции $u = f(x, y, z)$, которая проходит через точку M_0.

30. Найти $f'_x(x, 1)$, если $f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Решение. Согласно определению частной производной, имеем:

$$f'_x(x, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, 1) - f(x, 1)}{\Delta x}.$$

Так как $f(x+\Delta x, 1) = x + \Delta x$, $f(x, 1) = x$, то

$$f'_x(x, 1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

31. Найти $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, если $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0, 0)$?

Решение. Исходя из определения частных производных имеем:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0} - 0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Для исследования дифференцируемости данной функции в точке $O(0, 0)$ запишем ее приращение в этой точке: $\Delta f(0, 0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$. Поскольку $A_1 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$, $A_2 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$, то для дифференцируемости необходимо, чтобы функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ была бесконечно малой при $\rho \to 0$, т. е. при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Пусть $\Delta x = \frac{1}{n}$, $\Delta y = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; очевидно, $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ при $n \to \infty$. Так как последовательность точек $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ стремится к точке $O(0, 0)$, а соответствующая им последовательность значений функции

$\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$, то функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ не является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Поэтому функция $f(x, y)$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

32. Является ли дифференцируемой в точке $O(0, 0)$ функция $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$?

Решение. Находим производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1.$$

Представляем приращение функции $f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ в виде $\Delta f(0, 0) = \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + \left(\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y\right) = f'_x(0, 0)\,\Delta x + f'_y(0, 0)\,\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$, где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - \Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$.

Замечая, что последовательность

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{2}{n^3}} - \dfrac{2}{n}}{\dfrac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

не является бесконечно малой при $n \to \infty$ $\left(\text{т. е. при } \Delta x = \frac{1}{n} \to 0,\ \Delta y = \frac{1}{n} \to 0\right)$, заключаем, что $\varepsilon\rho \neq o(\rho)$ при $\rho \to 0$ и функция $f(x, y)$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

33. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0, 0)$ функцию $f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$ при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$.

Решение. Как и в предыдущем примере, находим частные производные:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} e^{-\frac{1}{\Delta x^2}} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} e^{-\frac{1}{\Delta y^2}} = 0.$$

Из того, что приращение функции $f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ представимо в виде $\Delta f(0, 0) = e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho$, где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} e^{-\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}} \to 0$ при $\rho \to 0$, непосредственно следует, что функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $O(0, 0)$.

34. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $O(0, 0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$,

однако, не является дифференцируемой в точке $O(0, 0)$. Выяснить поведение производных $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в окрестности точки $O(0, 0)$.

Решение. Пользуясь определением частных производных, находим:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta x|}}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta y \cdot 0|}}{\Delta y} = 0.$$

Так как $\Delta f(0, 0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$,

где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, а $\varepsilon\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, то

функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ не является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Отсюда следует, что функция $f(x, y)$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

Из того, что $f'_x(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|} \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f'_x\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{2} = +\infty$, следует, что производная $f'_x(x, y)$ не ограничена в окрестности точки $O(0, 0)$. Это заключение справедливо и для производной $f'_y(x, y)$.

35. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, разрывна при $x = 0$, $y = 0$, но имеет частные производные в точке $O(0, 0)$.

Доказательство. Из соотношений $M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) \to O(0, 0)$ при $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$$

следует, что функция $f(x, y)$ терпит разрыв в точке $O(0, 0)$.

Пользуясь определением частных производных, находим:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

36. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, в окрестности точки $O(0, 0)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, однако, недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

Доказательство. При $x^2+y^2 \neq 0$ функция $f(x, y)$ непрерывна как элементарная. Из очевидного неравенства $|f(x, y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \leqslant \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}}$ и того, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{2}} = 0$, получаем: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.

Таким образом, функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $O(0, 0)$.

Имеем:

$$f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0;$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0;$$

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Отсюда, пользуясь неравенством $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, убеждаемся, что

$$|f'_x(x, y)| \leqslant \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{|xy|}{x^2+y^2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{3}{2}, \quad |f'_y(x, y)| \leqslant \frac{3}{2},$$

т. е. что указанные производные ограничены.

Запишем приращение функции $f(x, y)$ в точке $O(0, 0)$ в виде $\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Легко убедиться, что функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ не является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а поэтому функция $f(x, y)$ недифференцируема в точке $O(0, 0)$.

37. Показать, что функция $f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$, имеет в окрестности точки $(0, 0)$ производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, которые разрывны в точке $(0, 0)$ и неограничены в любой окрестности ее; тем не менее эта функция дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Решение. Если $x^2+y^2 \neq 0$, то частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ находим, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

$$f'_x(x, y) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Если же $x = 0$ и $y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим, исходя из их определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x} = 0;$$

аналогично находим, что $f'_y(0, 0) = 0$.

Покажем, что частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ разрывны в точке (0, 0) и неограничены в любой ее окрестности. С этой целью выберем последовательность $\{(x_n, y_n)\}$, сходящуюся к точке (0, 0) и такую, что $\cos\frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = 1$, т. е. $\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi$. Пусть, например,

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность точек $\{(x_n, y_n)\}$ попадает в любую окрестность точки (0, 0). При этом соответствующая последовательность значений функции $f'_x(x_n, y_n) = -2\sqrt{n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ стремится к $-\infty$. Следовательно, частная производная $f'_x(x, y)$ разрывна в точке (0, 0) и неограничена в любой ее окрестности. Аналогичные выводы справедливы и относительно $f'_y(x, y)$.

Так как $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, а приращение $\Delta f(0, 0)$ представимо в виде $\Delta f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} = \rho\varepsilon(\rho)$, где $\varepsilon(\rho) = \rho\sin\frac{1}{\rho^2} \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (0, 0).

38. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, если а) $u = x^{y^2}$; б) $u = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Решение. а) Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2 \ln x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2}\ln x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1}(1 + y^2\ln x).$$

Отсюда непосредственно следует равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, справедливое для всех точек (x, y) из области определения смешанных производных: $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

б) Аналогично предыдущему находим смешанные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(xy - x^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{2}(xy^3 - x^2y^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{4}(xy - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

и убеждаемся, что они равны в области их определения: $0 < \frac{x}{y} < 1$.

Эти примеры иллюстрируют утверждение о равенстве непрерывных смешанных производных, отличающихся порядком их вычисления.

39. Пусть $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \neq 0$, и $f(0, 0) = 0$. Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Решение. При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем:

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$f'_y(x, y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Если $x = y = 0$, то производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$ находим непосредственно из их определения:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

Пользуясь этими значениями, находим смешанные производные:

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y^3}{\Delta y^3} = -1;$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x, 0) - f'_y(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1.$$

Отсюда убеждаемся, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

Заметим, что в точке $(0, 0)$ не выполняются достаточные условия непрерывности смешанных производных. В самом деле, при $x^2 + y^2 \neq 0$ находим:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\left(1 + \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

Поскольку последовательность $\left\{M_n\left(\frac{a}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ стремится к $(0, 0)$ при $n \to \infty$, а $\lim\limits_{n \to \infty} f''_{xy}(M_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f''_{yx}(M_n) = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\left(1 + \frac{8a^2}{(a^2 + 1)^2}\right)$, то смешанные производные терпят разрыв в точке $(0, 0)$.

40. Существует ли $f''_{xy}(0, 0)$, если $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ и $f(0, 0) = 0$?

Р е ш е н и е. При $x^2 + y^2 \neq 0$ имеем: $f'_x(x, y) = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Пользуясь определением производной, находим:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Поскольку предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{2\Delta y^3}{\Delta y^4}}{\Delta y}$$

не существует, то производная f''_{xy} в точке $(0, 0)$ также не существует.

41. Доказать, что если дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = pu, \tag{1}$$

то она является однородной функцией степени p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^p}. \tag{2}$$

Она определена, непрерывна и дифференцируема для всех $t > 0$, для которых точка $N(tx_0, ty_0, tz_0) \in G$. Вычисляя производную функции $F(t)$, получаем выражение, числитель которого равен

$$t(x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + \\ + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)) - pf(tx_0, ty_0, tz_0). \quad (3)$$

Заменяя в равенстве (1) x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 соответственно, приходим к выводу, что выражение (3) равно нулю. Следовательно, $F'(t) = 0$ и $F(t) = C = \text{const}$. Для определения константы положим во (2) $t = 1$; таким образом, $C = f(x_0, y_0, z_0)$. Отсюда, пользуясь равенством (2), получаем:

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^p f(x_0, y_0, z_0), \quad (x_0, y_0, z_0) \in G,$$

что и требовалось доказать.

42. Доказать, что если $f(x, y, z)$ — дифференцируемая однородная функция степени p, то ее частные производные $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ — однородные функции $(p-1)$-й степени.

Доказательство. Так как $f(x, y, z)$ — однородная функция степени p, то справедливо равенство $f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$, причем выражение в левой части дифференцируемо. Дифференцируя последнее равенство по x, получаем: $f'_x(tx, ty, tz) \cdot t = t^p f'_x(x, y, z)$, или $f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z)$. Из последнего равенства следует, что $f'_x(x, y, z)$ — однородная функция степени $p-1$. Для производных f'_y и f'_z — доказательство аналогичное.

43. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая однородная функция n-й степени. Доказать, что

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1) u. \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку u — однородная функция, то она удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu. \quad (2)$$

Заменяя в этом равенстве x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0 и дифференцируя его по t, получаем: $x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z + tx_0^2 u''_{x^2} + ty_0^2 u''_{y^2} + tz_0^2 u''_{z^2} + t(2x_0 y_0 u''_{xy} + 2x_0 z_0 u''_{xz} + 2y_0 z_0 u''_{yz}) = n(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z)$, где производные вычислены в точке $M_0(tx_0, ty_0, tz_0)$. Полагая в последнем равенстве $t = 1$, имеем:

$$x_0^2 u''_{x^2} + y_0^2 u''_{y^2} + z_0^2 u''_{z^2} + 2(x_0 y_0 u''_{xy} + x_0 z_0 u''_{xz} + y_0 z_0 u''_{yz}) = \\ = (n-1)(x_0 u'_x + y_0 u'_y + z_0 u'_z).$$

Отсюда и из равенства (2) непосредственно следует, что

$$\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1) u.$$

Так как (x_0, y_0, z_0) — произвольная точка, то равенство (1) доказано.

44. Доказать, что если $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $d^2u \geqslant 0$.

Доказательство. Обозначая $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ и последовательно дифференцируя выражение $u = \sqrt{\varphi}$, имеем:

$$du = \frac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}, \quad d^2u = \frac{\sqrt{\varphi}\, d^2\varphi + d\varphi\, \dfrac{d\varphi}{2\sqrt{\varphi}}}{2\varphi} = \frac{2\varphi d^2\varphi + (d\varphi)^2}{4\sqrt{\varphi^3}}.$$

Так как $d^2\varphi = d(d(x^2 + y^2 + z^2)) = d(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \geqslant 0$, то $d^2u \geqslant 0$.

45. Предполагая, что x, y малы по абсолютной величине, вывести приближенные формулы для следующих выражений:

а) $(1 + x)^m (1 + y)^m$; б) $\ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y)$; в) $\operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

Решение. Пусть функция $f(x, y, \ldots, z)$ дифференцируема в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда

$$\Delta f(0, 0, \ldots, 0) = f(x, y, \ldots, z) - f(0, 0, \ldots, 0) = f'_x(0, 0, \ldots, 0)\,x + f'_y(0, 0, \ldots, 0)\,y + \cdots + f'_z(0, 0, \ldots, 0)\,z + o(\rho),$$

где $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + \cdots + z^2}$. Отбрасывая величину $o(\rho)$ и перенося $f(0, 0, \ldots, 0)$ в правую часть, получаем приближенное равенство:

$$f(x, y, \ldots, z) \approx f(0, 0, \ldots, 0) + f'_x(0, 0, \ldots, 0)\,x + f'_y(0, 0, \ldots, 0)\,y + \cdots + f'_z(0, 0, \ldots, 0)\,z. \qquad (1)$$

Так как предложенные функции дифференцируемы в окрестности точки $M(0, 0)$, то соответствующие приближенные формулы принимают следующий вид:

а) $(1 + x)^m (1 + y)^m \approx 1 + mx + my$;

б) пользуясь приближенным равенством (1), записанным для одного переменного $f(t) \approx f(0) + f'(0)\,t$, получаем: $\ln(1 + x) \approx x$, $\ln(1 + y) \approx y$. Следовательно, $\ln(1 + x) \cdot \ln(1 + y) \approx xy$;

в) $\operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 + xy} \approx x + y$.

46. Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$; б) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \sqrt[4]{1{,}05^3}}}$;

в) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$; г) $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$; д) $0{,}97^{1{,}05}$.

Вычисление. а) Записывая равенство (1) из предыдущего примера для функции $f(x, y, z) = (1 + x)(2 + y)^2(3 + z)^3$, имеем: $(1 + x)(2 + y)^2(3 + z)^3 \approx 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^3 x + 2^2 \cdot 3^3 y + 2^2 \cdot 3^3 z$. Подставляя в это равенство $x = 0{,}002$, $y = 0{,}003$, $z = 0{,}004$, получаем: $1{,}002 \times 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3 \approx 108 + 0{,}216 + 0{,}324 + 0{,}432 = 108{,}972$.

б) Записывая для функции $f(x, y, z) = \dfrac{(1+x)^2}{\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}}$ приближенное равенство $f(x, y, z) \approx 1 + 2x + \frac{y}{3} - \frac{z}{4}$ и полагая $x = 0{,}03$, $y = 0{,}02$, $z = 0{,}05$, получаем:

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}} \approx 1 + 0{,}06 + 0{,}0066 - 0{,}0125 \approx 1{,}054.$$

в) Имеем: $\sqrt{(1+x)^3 + (2-y)^3} \approx 3 + \frac{x}{2} - 2y$. Пусть $x = 0{,}02$, $y = 0{,}03$, тогда

$$\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3} \approx 3 + 0{,}01 - 0{,}06 = 2{,}95.$$

г) В приближенном равенстве (см. предыдущий пример)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \approx \sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \\ -\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot x + \sin\frac{\pi}{6}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot x$$

полагаем $x = 0{,}017$, тогда

$$\sin 29^0 \cdot \operatorname{tg} 46^0 \approx 0{,}5 - 0{,}866 \cdot 0{,}017 + 0{,}017 \approx 0{,}502.$$

д) Записывая для функции $(1-x)^{1+y}$ приближенное равенство $(1-x)^{1+y} \approx 1 - x$ и полагая в нем $x = 0{,}03$, $y = 0{,}05$, получаем: $0{,}97^{1{,}05} \approx 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

47. Доказать, что функция $f(x, y)$, имеющая ограниченные частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в некоторой выпуклой области E, равномерно непрерывна в этой области.

Доказательство. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две произвольные точки из области E. В силу выпуклости области E, точка $(x_2 + t(x_1 - x_2),\ y_2 + t(y_1 - y_2))$ принадлежит области E при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Функция $\varphi(t) = f(x_2 + t(x_1 - x_2),\ y_2 + t(y_1 - y_2))$ имеет при $t \in (0, 1)$ ограниченную производную

$$\varphi'(t) = (x_1 - x_2) f'_x(x_2 + t(x_1 - x_2),\ y_2 + t(y_1 - y_2)) + (y_1 - y_2) f'_y(x_2 + \\ + t(x_1 - x_2),\ y_2 + t(y_1 - y_2)) \quad (1)$$

и $\varphi(0) = f(x_2, y_2)$, $\varphi(1) = f(x_1, y_1)$. Используя формулу Лагранжа и равенство (1), находим:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = \varphi'(\xi) = (x_1 - x_2) f'_x(x_2 + \xi(x_1 - \\ - x_2),\ y_2 + \xi(y_1 - y_2)) + (y_1 - y_2) f'_y(x_2 + \xi(x_1 - x_2),\ y_2 + \xi(y_1 - y_2)), \\ 0 < \xi < 1. \quad (2)$$

Согласно условию существуют такие постоянные L_1 и L_2, что

$$|f'_x| < L_1,\ |f'_y| < L_2 \quad \forall x_1, x_2 \in E. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) вытекает неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant |x_1 - x_2| L_1 + |y_1 - y_2| L_2. \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное. Тогда, выбирая $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2L_1}, \frac{\varepsilon}{2L_2}\right)$, для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, из (4) получаем неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$, доказывающее равномерную непрерывность функции $f(x, y)$ в области E.

48. Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную производную по переменной y, то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y.

Доказательство. Согласно условию, $\exists M > 0$ такое, что

$$|f'_y(x, y)| \leqslant M \tag{1}$$

для всех точек (x, y) из области G определения функции $f(x, y)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное, а (x_0, y_0) — любая точка из G. Тогда

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f'_y(x, y_0 + \theta(y - y_0))|\,|y - y_0| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \tag{2}$$

В силу непрерывности функции $f(x, y)$ по x при $y = y_0$, $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, y_0)$ такое, что

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

если $|x - x_0| < \delta_1$. Из (2), (1) и (3) получаем:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leqslant M|y - y_0| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, где $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \delta_1\right\}$, что и требовалось доказать.

49. Пусть $P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n. Доказать, что $d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz)$.

Доказательство. Пусть (x, y, z) — произвольная точка из области определения функции $P_n(x, y, z)$. Так как $P_n(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n, то для него справедливо равенство

$$P_n(tx, ty, tz) = t^n P_n(x, y, z). \tag{1}$$

Вычислим n-ю производную от обеих частей этого равенства. Очевидно,

$$P_n^{(n)}(tx, ty, tz) = n!\, P_n(x, y, z). \tag{2}$$

Обозначая левую часть равенства (1) через $F(t)$ и последовательно дифференцируя, находим:

$$F'(t) = \frac{\partial P_n}{\partial x}x + \frac{\partial P_n}{\partial y}y + \frac{\partial P_n}{\partial z}z = \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)P_n;$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2}y^2 + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2}z^2 + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial y}xy + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial x \partial z}xz + 2\frac{\partial^2 P_n}{\partial y \partial z}yz =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)^2 P_n.$$

Далее, методом математической индукции легко доказать, что

$$F^{(n)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z\right)^n P_n(tx,\ ty,\ tz).$$

Поскольку P_n — однородный многочлен степени n, то частные производные первого порядка — однородные многочлены степени $n-1$ (см. задачу 42). Отсюда следует, что частные производные n-го порядка являются однородными многочленами нулевого порядка, а следовательно, являются постоянными, т. е. не зависят от t. Поэтому можно записать:

$$F^{(n)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z\right)^n P_n(x,\ y,\ z). \qquad (3)$$

Сравнив (2) и (3) и заменив x, y, z на dx, dy, dz, получим требуемое равенство.

50. Пусть $Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$. Найти Au и $A^2u=A(Au)$, если а) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$; б) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. а) Имеем: $Au=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=$ $=x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+y\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}=-u$. В силу однородности операции A, $A^2u=A(Au)=A(-u)=-Au=-(-u)=u$.

б) Аналогично: $Au=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)=$ $=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1$; $A^2u=A(Au)=A1=0$.

51. Пусть

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Найти $\Delta_1 u$ и $\Delta_2 u$, если $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. Вводя обозначение $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, находим:

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)^2=\left(-\frac{x}{r^3}\right)^2+\left(-\frac{y}{r^3}\right)^2+\left(-\frac{z}{r^3}\right)^2=\frac{1}{r^4},$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поскольку $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$; $\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}$; $\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$, то $\Delta_2 u=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$ $(r\neq 0)$.

52. Доказать, что форма дифференциалов произвольного порядка функции $f(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ сохраняется при замене аргументов ξ, η, ζ линейными функциями: $\xi = a_1x + a_2y + a_3z$; $\eta = b_1x + b_2y + b_3z$; $\zeta = c_1x + c_2y + c_3z$.

Доказательство. Вычисляя второй дифференциал функции: $d^2f = f''_{\xi^2}d\xi^2 + f''_{\eta^2}d\eta^2 + f''_{\zeta^2}d\zeta^2 + 2f''_{\xi\eta}d\xi d\eta + 2f''_{\xi\zeta}d\xi d\zeta + 2f''_{\eta\zeta}d\eta d\zeta + f'_\xi d^2\xi + f'_\eta d^2\eta + f'_\zeta d^2\zeta$ и замечая, что, в силу линейности функций ξ, η, ζ, имеют место равенства $d^2\xi = 0$, $d^2\eta = 0$, $d^2\zeta = 0$, получаем:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,d\zeta\right)^2 f.$$

Методом математической индукции легко доказать, что

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\zeta}\,d\zeta\right)^n f,$$

т. е. что форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется при замене аргументов линейными функциями.

Найти полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y, z — независимые переменные):

53. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение. Дифференцируя u как сложную функцию, получаем:

$$du = f'd(\sqrt{x^2 + y^2}) = f'\,\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$d^2u = d(f')\,\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'd\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Так как

$$d(f') = f''\,\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

то окончательно находим:

$$d^2u = f''\,\frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f'\,\frac{(ydx - xdy)^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

54. $u = f(\xi, \eta)$, где $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Решение. Поскольку аргументы ξ и η являются линейными функциями, то форма дифференциалов произвольного порядка сохраняется (см. пример 52).

Поэтому, вычисляя дифференциалы

$$du = f'_1d\xi + f'_2d\eta;$$
$$d^2u = f''_{11}d\xi^2 + 2f''_{12}d\xi d\eta + f''_{22}d\eta^2$$

и вместо $d\xi$ и $d\eta$ подставляя их значения, найденные из равенств $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, получаем:

$$du = f'_1(dx + dy) + f'_2(dx - dy);$$
$$d^2u = f''_{11}(dx + dy)^2 + 2f''_{12}(dx^2 - dy^2) + f''_{22}(dx - dy)^2.$$

55. $u = f(\xi, \ \eta)$, где $\xi = xy, \ \eta = \dfrac{x}{y}$.

Решение. Дифференцируя u как сложную функцию, получаем:

$$du = f_1'(ydx + xdy) + f_2'\frac{ydx - xdy}{y^2};$$

$$d^2u = f_{11}''(ydx + xdy)^2 + 2f_{12}''\frac{y^2dx^2 - x^2dy^2}{y^2} + f_{22}''\left(\frac{ydx - xdy}{y}\right)^2 + \\ + 2f_1'dxdy - 2f_2'\frac{(ydx - xdy)\,dy}{y^3}.$$

56. $u = f(x, \ y, \ z)$, где $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3$.

Решение. Аналогично предыдущему

$$du = f_1'dt + f_2'2tdt + f_3'3t^2dt = (f_1' + 2tf_2' + 3t^2f_3')\,dt;$$

$$d^2u = f_{11}''dt^2 + f_{22}''4t^2dt^2 + f_{33}''9t^4dt^2 + 4f_{12}''tdt^2 + 6t^2f_{13}''dt^2 + 12t^3f_{23}''dt^2 + \\ + 2f_2'dt^2 + 6tf_3'dt^2 = (f_{11}'' + 4t^2f_{22}'' + 9t^4f_{33}'' + 4tf_{12}'' + 6t^2f_{13}'' + 12t^3f_{23}'' + \\ + 2f_2' + 6tf_3')\,dt^2.$$

57. $u = f(\xi, \ \eta, \ \zeta)$, где $\xi = x^2 + y^2, \ \eta = x^2 - y^2, \ \zeta = 2xy$.

Решение. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, имеем:

$$du = f_1'(2xdx + 2ydy) + f_2'(2xdx - 2ydy) + f_3'(2ydx + 2xdy);$$

$$d^2u = 4f_{11}''(xdx + ydy)^2 + 4f_{22}''(xdx - ydy)^2 + 4f_{33}''(ydx + xdy)^2 + \\ + 8f_{12}''(x^2dx^2 - y^2dy^2) + 8f_{13}''(xdx + ydy)(ydx + xdy) + 8f_{23}''(xdx - \\ - ydy)(ydx + xdy) + 2f_1'(dx^2 + dy^2) + 2f_2'(dx^2 - dy^2) + 4f_3'dxdy.$$

Найти d^nu, если:

58. $u = f(ax + by + cz)$.

Решение. Поскольку в данном случае форма дифференциалов инвариантна (см. пример 52), то

$$d^nu = f^n(d(ax + by + cz))^n = f^{(n)}(adx + bdy + cdz)^n.$$

59. $u = f(ax, \ by, \ cz)$.

Решение. В силу инвариантности формы дифференциалов n-го порядка (см. пример 52), имеем:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial s}adx + \frac{\partial}{\partial t}bdy + \frac{\partial}{\partial r}cdz\right)^n f(s, \ t, \ r),$$

где $s = ax, \ t = by, \ r = cz$.

60. $u = f(s, \ t, \ r)$, где $s = a_1x + b_1y + c_1z, \ t = a_2x + b_2y + c_2z, \ r = \\ = a_3x + b_3y + c_3z$.

Решение. Используем инвариантность формы n-го дифференциала (см. пример 52). Имеем: $d^nu = \left(\dfrac{\partial}{\partial s}ds + \dfrac{\partial}{\partial t}dt + \dfrac{\partial}{\partial r}dr\right)^n f(s, \ t, \ r) =$

$$= \left((a_1dx + b_1dy + c_1dz)\frac{\partial}{\partial s} + (a_2dx + b_2dy + c_2dz)\frac{\partial}{\partial t} + (a_3dx + b_3dy + \\ + c_3dz)\frac{\partial}{\partial r}\right)^n f(s, \ t, \ r).$$

61. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и f — дважды дифференцируемая функция. Показать, что $\Delta u = F(r)$, где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, и найти функцию F.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' \cdot \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' \frac{x^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \frac{y^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{y^2}{r^3}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f'' \frac{z^2}{r^2} + f' \frac{1}{r} - f' \frac{z^2}{r^3}.$$

Таким образом,

$$\Delta u = f'' \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + \frac{3}{r} f' - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} f' = f'' + \frac{3}{r} f' - \frac{1}{r} f' =$$

$$= f'' + \frac{2}{r} f' = F(r).$$

62. Доказать, что если функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то функция $v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Доказательство. Вводя для удобства обозначения $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\psi = \frac{y}{x^2 + y^2}$, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_1' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_2' \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = u_1' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_2' \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u_{11}'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2u_{12}'' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + u_{22}'' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + u_1' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + u_2' \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = u_{11}'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + 2u_{12}'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + u_{22}'' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + u_1' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + u_2' \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Отсюда

$$\Delta v = u_{11}'' \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) + u_{22}'' \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right) + 2u_{12}'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) +$$
$$+ u_1' \Delta \varphi + u_2' \Delta \psi. \tag{1}$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$

убеждаемся, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \Delta\varphi=0,\ \Delta\psi=0. \tag{2}$$

Таким образом, из (1) и (2) и того, что $\Delta u=0$, следует:

$$\Delta v=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Delta u=0.$$

63. Доказать, что если функция $u=u(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то функция $v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\times$ $\times\, u\left(\frac{x}{a^2t},\ -\frac{1}{a^4t}\right)$ $(t>0)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Доказательство. Находим производные

$$v'_t=\left(-\frac{u}{2a\sqrt{t^3}}+\frac{x^2u}{4a^3\sqrt{t^5}}-\frac{xu'_1}{a^3\sqrt{t^5}}+\frac{u'_2}{a^5\sqrt{t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

$$v''_{x^2}=\left(-\frac{u}{2a^3\sqrt{t^3}}+\frac{x^2u}{4a^5\sqrt{t^5}}-\frac{xu'_1}{a^5\sqrt{t^5}}+\frac{u''_{11}}{a^5\sqrt{t^5}}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

и подставляем их в выражение $v'_t-a^2v''_{x^2}$. После упрощений получаем:

$$v'_t-a^2v''_{x^2}=\frac{1}{a^5\sqrt{t^5}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(u'_2-a^2u''_{11}).$$

Согласно условию, $u'_2-a^2u''_{11}=0$. Поэтому $v'_t-a^2v''_{x^2}=0$.

64. Доказать, что функция $u=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, удовлетворяет при $r\neq 0$ уравнению Лапласа $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x-a}{r}=-\frac{x-a}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(y-b)^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

Складывая последние три равенства, получаем:

$$\Delta u=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^5}((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0.$$

65. Пусть функции $u_1=u_1(x,\ y,\ z)$ и $u_2=u_2(x,\ y,\ z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta u=0$. Доказать, что функция $v=u_1(x,y,z)+$ $+(x^2+y^2+z^2)\,u_2(x,\ y,\ z)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta(\Delta v)=0$.

Доказательство. Последовательно дифференцируя, находим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2xu_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2u_2 + 4x\frac{\partial u_2}{\partial x} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2u_2 + 4y\frac{\partial u_2}{\partial y} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_2 + 4z\frac{\partial u_2}{\partial z} + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\Delta v = \Delta u_1 + 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + (x^2 + y^2 + z^2)\Delta u_2.$$

Учитывая, что функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. что $\Delta u_1 = 0$ и $\Delta u_2 = 0$, получаем:

$$\Delta v = 6u_2 + 4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

Находя производные $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \Delta v}{\partial z^2}$ и складывая их, имеем:

$$\Delta(\Delta v) = 14\,\Delta u_2 + 4\left(x\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial x} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} + \right.$$
$$\left. + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^2 \partial z} + x\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial x} + y\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^2 \partial y} + z\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3}\right).$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\Delta(\Delta v) = 14\,\Delta u_2 + 4x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2) + 4y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u_2) + 4z\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u_2)$$

и пользуясь тем, что $\Delta u_2 = 0$, убеждаемся в справедливости равенства $\Delta(\Delta v) = 0$.

66. Пусть $f(x, y, z)$ есть m раз дифференцируемая однородная функция измерения n. Доказать, что

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z) = n(n-1)\ldots(n-m+1)f(x, y, z).$$

Доказательство. Пусть (x, y, z) — произвольная фиксированная точка из области определения функции $f(x, y, z)$, а $m \leqslant n$. В силу однородности, справедливо равенство $t^n f(x, y, z) = f(tx, ty, tz)$. Последовательно дифференцируя его m раз по t:

$$nt^{n-1}f(x, y, z) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \equiv \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(tx, ty, tz),$$

$$n(n-1)t^{n-2}f(x, y, z) = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} +$$

$$+ 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \equiv \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(tx, ty, tz),$$

. . . .

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)t^{n-m}f(x, y, z) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \times$$

$$\times f(tx, ty, tz)$$

и полагая $t = 1$, получаем требуемое равенство.

67. Пусть $x^2 = vw$, $y^2 = uw$, $z^2 = uv$ и $f(x, y, z) = F(u, v, w)$. Доказать, что $xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$.

Доказательство. Согласно условию, имеем:

$$F(u, v, w) = f(\sqrt{vw}, \sqrt{uw}, \sqrt{uv}).$$

Дифференцируя это равенство по u, v и w, находим:

$$\begin{aligned} F'_u &= f'_y\frac{w}{2\sqrt{uw}} + f'_z\frac{v}{2\sqrt{uv}}, \\ F'_v &= f'_x\frac{w}{2\sqrt{vw}} + f'_z\frac{u}{2\sqrt{uv}}, \\ F'_w &= f'_x\frac{v}{2\sqrt{vw}} + f'_y\frac{u}{2\sqrt{uw}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Умножая первое из равенств (1) на u, второе на v, а третье на w и складывая их, получаем:

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = f'_y\frac{uw}{2\sqrt{uw}} + f'_z\frac{uv}{2\sqrt{uv}} + f'_x\frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_z\frac{uv}{2\sqrt{uv}} +$$

$$+ f'_x\frac{vw}{2\sqrt{vw}} + f'_y\frac{uw}{2\sqrt{uw}} = \sqrt{vw}\,f'_x + \sqrt{uw}\,f'_y + \sqrt{uv}\,f'_z.$$

Отсюда, используя условие задачи, окончательно находим:

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = xf'_x + yf'_y + zf'_z.$$

Путем последовательного дифференцирования исключить произвольные функции φ и ψ:

68. $z = x + \varphi(xy)$.

Решение. Найдем частные производные по x и по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$

Сложим полученные равенства, умножив первое из них на x, а второе на $-y$. Тогда получим:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

69. $u = \varphi(x-y, y-z)$.

Решение. Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2$. Складывая эти равенства, получаем: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

70. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

Решение. Имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\psi$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi'$. Отсюда $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi\psi\varphi'\psi'=$ $=z\varphi'\psi'$.

С другой стороны, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi'\psi'$. Следовательно, из последних двух равенств непосредственно вытекает, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

71. $z=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Решение. Используя равенства:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\varphi'+\frac{1}{y}\psi';\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\varphi''+\frac{1}{y^2}\psi'';$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\varphi'-\frac{x}{y^2}\psi';\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\varphi''+\frac{x^2}{y^4}\psi''+\frac{2x}{y^3}\psi',$$

получаем следующие соотношения:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{y}\psi',\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x}{y}\psi',$$

из которых непосредственно вытекает, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

72. Найти производную функции $z=x^2-y^2$ в точке $M(1,\ 1)$ в направлении l, составляющем угол $\alpha=60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. Имеем: $\dfrac{\partial z(M)}{\partial l}=\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta=2\cos\alpha-$ $-2\cos\beta$. Таким образом, $\dfrac{\partial z(M)}{\partial l}=1-\sqrt{3}$.

73. Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(x_0,\ y_0)$ в направлении l, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

Решение. Поскольку вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M ортогонален к линии уровня $c=\ln(x^2+y^2)$, проходящей через точку M, то направляющие косинусы вектора l равны направляющим косинусам $\operatorname{grad} u$ в точке M, т. е.

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}}{|\operatorname{grad} u(M)|},\quad \cos\beta=\frac{\dfrac{\partial z(M)}{\partial y}}{|\operatorname{grad} u(M)|}.$$

Но $\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}=\dfrac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}$, $\dfrac{\partial z(M)}{\partial y}=\dfrac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}$,

$$|\operatorname{grad} u(M)|=\sqrt{\left(\frac{\partial z(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z(M)}{\partial y}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},$$

поэтому $\cos\alpha=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial z(M)}{\partial l}=\frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\left(x_0^2+y_0^2\neq 0\right).$$

74. Найти производную функции $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Тангенс угла наклона нормали к данной кривой определяется формулой $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{y'\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}$, где $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, а направляющие косинусы внутренней нормали выражаются формулами $\cos\alpha=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (мы берем знак минус, поскольку нормаль внутренняя). Воспользуемся формулой производной по направлению $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial n}=\frac{\partial z(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z(M)}{\partial y}\cos\beta.$$

Вычисляя производные $\frac{\partial z(M)}{\partial x}=-\frac{\sqrt{2}}{a}$, $\frac{\partial z(M)}{\partial y}=-\frac{\sqrt{2}}{b}$, находим:
$\frac{\partial z(M)}{\partial n}=\frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$.

75. Найти производную функции $u=xyz$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$ в направлении $\boldsymbol{l}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$. Чему равна величина градиента функции в этой точке?

Решение. Очевидно, $\frac{\partial u(M)}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial y}=1$, $\frac{\partial u(M)}{\partial z}=1$. По формуле производной по направлению, получим: $\frac{\partial u(M)}{\partial l}=\frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$.

Величину градиента определим по формуле:

$$|\operatorname{grad}u(M)|=\sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{3}.$$

76. Определить угол между градиентами функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точках $A(\varepsilon,\ 0,\ 0)$ и $B(0,\ \varepsilon,\ 0)$.

Решение. Имеем:

$$\operatorname{grad}u(A)=\left\{\frac{\partial u(A)}{\partial x},\ \frac{\partial u(A)}{\partial y},\ \frac{\partial u(A)}{\partial z}\right\}=\{2\varepsilon,\ 0,\ 0\},$$

$$\operatorname{grad}u(B)=\left\{\frac{\partial u(B)}{\partial x},\ \frac{\partial u(B)}{\partial y},\ \frac{\partial u(B)}{\partial z}\right\}=\{0,\ 2\varepsilon,\ 0\}.$$

Отсюда $|\operatorname{grad} u(A)| = 2|\varepsilon|$, $|\operatorname{grad} u(B)| = 2|\varepsilon|$. Подставляя эти значения в равенство

$$(\operatorname{grad} u(a),\ \operatorname{grad} u(b)) = |\operatorname{grad} u(A)|\,|\operatorname{grad} u(B)| \cos\varphi,$$

получаем $\cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

77. Показать, что в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ угол между градиентами функций $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, $v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$ (a, b, c, m, n, p — постоянные и $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

Решение. Имеем: $\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} u|\,|\operatorname{grad} v|}$, где

$$\operatorname{grad} u = \{2ax_0,\ 2by_0,\ 2cz_0\},$$

$$\operatorname{grad} v = \{2ax_0 + 2m,\ 2by_0 + 2n,\ 2cz_0 + 2p\},$$

$$|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2},$$

$$|\operatorname{grad} v| = 2\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}.$$

Тогда угол φ определяется из равенства

$$\cos\varphi = \frac{ax_0(ax_0 + m) + by_0(by_0 + n) + cz_0(cz_0 + p)}{\sqrt{((ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2)((ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2)}}.$$

Вычислим $\sin\varphi$ и покажем, что $\sin\varphi \to 0$, если $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \to \infty$:

$$|\sin\varphi| = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{(ax_0n - by_0m)^2 + (ax_0p - cz_0m)^2 + (by_0p - cz_0n)^2}{((ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2)((ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2)}}.$$

Пользуясь неравенствами $2|x_0y_0| \leqslant x_0^2 + y_0^2$, $2|x_0z_0| \leqslant x_0^2 + z_0^2$, $2|y_0z_0| \leqslant y_0^2 + z_0^2$ и обозначая наибольший по абсолютной величине из коэффициентов числителя при x_0^2, y_0^2 и z_0^2 через A^2, получаем оценку

$$(ax_0n - by_0m)^2 + (ax_0p - cz_0m)^2 + (by_0p - cz_0n)^2 \leqslant A^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Пусть $B = \min\{|a|, |b|, |c|\}$, тогда $a^2x_0^2 + b^2y_0^2 + c^2z_0^2 \geqslant B^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$.

Таким образом, имеем оценку

$$0 \leqslant |\sin\varphi| \leqslant \frac{A\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}{B\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}} =$$

$$= \frac{A}{B\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2}}. \tag{1}$$

Очевидно, если $\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \to \infty$, то

$$\sqrt{(ax_0 + m)^2 + (by_0 + n)^2 + (cz_0 + p)^2} \to \infty;$$

поэтому из неравенства (1) следует, что $\sin\varphi$, а вместе с ним и φ стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

78. Пусть $u=f(x, y, z)$ — дважды дифференцируемая функция и $l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$, $l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\}$, $l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$ — три взаимно перпендикулярных направления. Доказать, что

а) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Доказательство. а) Находим производные функции u по направлениям l_1, l_2 и l_3:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l_1}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_1+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_1,\\ \frac{\partial u}{\partial l_2}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_2+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_2+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_2,\\ \frac{\partial u}{\partial l_3}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_3+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_3+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+\\ &+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2(\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3)+\\ &+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3)+\\ &+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cos\gamma_3)+\\ &+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3).\end{aligned}\tag{2}$$

Поскольку матрица

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}\tag{3}$$

является матрицей перехода от ортонормированного базиса $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ к ортонормированному базису $(\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3)$, то она обладает тем свойством, что сумма квадратов элементов любой строки (столбца) равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных строк (столбцов) равна нулю.

Таким образом, в равенстве (2) коэффициенты при квадратах производных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ равны единице, а при произведениях производных $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$ — равны нулю. Учитывая это, из равенств (2) непосредственно получаем равенство а).

б) Находим $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}=\frac{\partial}{\partial l_1}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)$, где $\frac{\partial u}{\partial l_1}$ определено первым из равенств (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta_1+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma_1+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha_1\cos\beta_1+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha_1\cos\gamma_1+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\cos\beta_1\cos\gamma_1.$$

Аналогично вычисляем $\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}$. Складывая полученные равенства, находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3)+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_3\cos\beta_3)+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}(\cos\alpha_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cos\gamma_3)+$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}(\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cos\gamma_3).$$

Отсюда, воспользовавшись свойством матрицы (3), получим равенство б).

79. Пусть $u=u(x,\ y)$ — дифференцируемая функция и при $y=x^2$ имеем: $u(x,\ x^2)=1$ и $\frac{\partial u}{\partial x}=x$. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y=x$.

Решение. Поскольку, по условию, $u(x,\ x^2)=1$, то отсюда, используя дифференцируемость функции u, получаем: $\frac{\partial}{\partial x}u(x,\ x^2)=0$, т. е.

$$\frac{\partial u(x,\ x^2)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,\ x^2)}{\partial y}2x=0. \qquad (1)$$

Но, по условию, $\frac{\partial u(x,\ x^2)}{\partial x}=x$, поэтому из (1) следует, что $\frac{\partial u(x,x^2)}{\partial y}=-\frac{1}{2}$.

80. Пусть функция $u=u(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ и, кроме того, следующим условиям: $u(x,\ 2x)=x$, $u'_x(x,\ 2x)=x^2$. Найти $u''_{xx}(x,\ 2x)$, $u''_{xy}(x,\ 2x)$, $u''_{yy}(x,\ 2x)$.

Решение. Дифференцируя обе части равенства $u(x,\ 2x)=x$ по x: $u'_x(x,\ 2x)+2u'_y(x,\ 2x)=1$ и пользуясь равенством $u'_x(x,\ 2x)=x^2$, получаем: $x^2+2u'_y(x,\ 2x)=1$. Последнее равенство снова дифференцируем по x:

$$2x+2u''_{yx}(x,\ 2x)+4u''_{yy}(x,\ 2x)=0.$$

Отсюда, учитывая уравнение $u''_{xx}=u''_{yy}$ и тождество $u''_{xy}=u''_{yx}$, получаем:

$$2u''_{xx}(x,\ 2x)+u''_{xy}(x,\ 2x)=-x. \qquad (1)$$

Далее, дифференцируя равенство $u'_x(x, 2x) = x^2$ по x, имеем:

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) и (2) относительно u''_{xx}, u''_{yy} и учитывая, что $u''_{xx} = u''_{yy}$, находим:

$$u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4x}{3}, \quad u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5x}{3}.$$

81. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x, x^2) = 1$.

Решение. Интегрируя уравнение по y, находим: $z(x, y) = x^2y + y^2 + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — пока неопределенная функция. Для нахождения неизвестной функции $\varphi(x)$ используем условие $z(x, x^2) = 1$: $z(x, x^2) \equiv x^2x^2 + x^4 + \varphi(x) = 1$. Отсюда $\varphi(x) = -2x^4 + 1$. Таким образом, $z(x, y) = x^2y + y^2 - 2x^4 + 1$.

82. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = x + y$, удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \int_0^x (x + y)\, dx + \varphi_0(y) \equiv \frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y),$$

$$z(x, y) = \int_0^y \left(\frac{x^2}{2} + xy + \varphi_0(y)\right) dy \equiv \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + \psi(x),$$

где $\varphi(y) = \int_0^y \varphi_0(y)\, dy$.

Используя условие $z(x, 0) = x$, находим: $z(x, 0) \equiv \psi(x) = x$; следовательно, $z(x, y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi(y) + x$.

Далее, из условия $z(0, y) = y^2$ следует $z(0, y) \equiv \varphi(y) = y^2$. Таким образом, окончательно имеем: $z(x, y) = \frac{x^2y + xy^2}{2} + y^2 + x$.

83. Найти решение $z = z(x, y)$ уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, удовлетворяющее условиям: $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.

Решение. Аналогично предыдущему $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2y + \varphi(x)$, $z(x, y) = y^2 + y\varphi(x) + \psi(x)$.

Принимая во внимание, что $z(x, 0) \equiv \psi(x) = 1$, $z'_y(x, 0) \equiv \varphi(x) = x$, окончательно находим: $z(x, y) = y^2 + xy + 1$.

§ 3. Метрические пространства

1°. Определение метрического пространства. Множество $X = \{x, y, z, \ldots, u, v\}$ элементов некоторой природы называется *метрическим пространством*, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, называемое *расстоянием* между этими элементами, или *метрикой* пространства X, и удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Элементы метрического пространства X называются также *точками* этого пространства. Всякое множество $Y \subset X$, рассматриваемое с той же метрикой, что и в X, само является метрическим пространством и называется *подпространством* пространства X.

2°. Сходимость в метрическом пространстве. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат метрическому пространству X, сходится, если существует точка $x_0 \in X$ такая, что числовая последовательность $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$; при этом пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$.

3°. Открытые и замкнутые множества. Множество точек x метрического пространства X, все элементы которого удовлетворяют неравенству $\rho(x, a) < r$, где a — фиксированная точка пространства X, а r — фиксированное действительное число, называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке a и обозначается символом $S(a, r)$.

Множество точек метрического пространства, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, a) \leqslant r$, называется *замкнутым шаром* и обозначается символом $\overline{S}(a, r)$.

Окрестностью точки a метрического пространства X называется любой открытый шар с центром в этой точке.

Точка $a \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от точки a. При этом сама точка a может принадлежать множеству M, а может не принадлежать ему.

Если множество $M \subset X$ содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*.

Множество $M \subset X$ называется *открытым*, если для каждой точки $x \in X$ найдется открытый шар $S(x, r)$ такой, что $S(x, r) \subset M$, т. е. всякая точка x принадлежит множеству M вместе с некоторой ее окрестностью.

4°. Полнота метрического пространства. Последовательность $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат метрическому пространству X, называется *сходящейся в себе* или *фундаментальной*, или последовательностью Коши, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ для $\forall n > N$ и произвольных целых $p > 0$.

Если последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к пределу $x_0 \in X$, то она сходящаяся в себе. В самом деле, пусть $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_0, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $\forall n > N$, $\forall p > 0$. Отсюда, используя неравенство треугольника, получаем соотношение:

$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, справедливое для $\forall n > N$, $\forall p > 0$.

Если в метрическом пространстве X справедливо и обратное утверждение, т. е. если любая сходящаяся в себе последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к некоторому пределу $x_0 \in X$, то пространство X называется *полным.*

5°. Отображение. Пусть заданы два множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ произвольной природы. Если для каждого элемента $x \in X$ по определенному правилу или закону ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что *задано отображение* X в Y, или *функция*, определенная на X со значениями в Y. При этом пишут: $y = f(x)$ (или $y = fx$).

Пусть теперь X и Y — метрические пространства, f — отображение $M \subset X$ в Y, а x_0 — предельная точка множества M. Отображение f называется *непрерывным в точке* x_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ как только $\rho_X(x, x_0) < \delta$. Существует и второе определение непрерывности отображения (эквивалентное первому). Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если из того, что любая последовательность $\{x_n\} \subset M$ сходится к точке x_0, вытекает, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

Отображение, непрерывное в каждой точке множества M, называется *непрерывным на* этом *множестве.*

Если отображение f, определенное в метрическом пространстве X, каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие точку $f(x)$ этого же пространства, то говорят, что f отображает пространство X в себя. Если, кроме того, $\forall x', x'' \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant \theta\rho(x', x''), \quad 0 < \theta < 1,$$

то отображение f называется *сжимающим.*

Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если $f(x^*) = x^*$.

84. Пусть $X = E_n$, где E_n — множество всех упорядоченных систем из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Показать, что если расстояние между точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого пространства определить одним из соотношений:

а) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;

б) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

в) $\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$,

то E_n — метрическое пространство.

Решение. Достаточно проверить выполнение аксиом метрики.

а) Выполнение аксиомы тождества вытекает из равенства

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = 0,$$

справедливого тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Аксиома симметрии вытекает из очевидного равенства

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2} = \rho(y, x).$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $z_n = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — произвольные точки E_n. Покажем, что выполняется аксиома треугольника: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, т. е. что справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}. \qquad (1)$$

С этой целью введем обозначения: $x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $x_i - y_i = a_i + b_i$ и неравенство (1) запишется в виде:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \qquad (2)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2} + \sum_{i=1}^{n}b_i^2. \qquad (3)$$

Неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2},$$

справедливому для произвольных вещественных чисел a_i и b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (пример 6, в, гл. I, ч. 1).

Следовательно, справедливо неравенство (3), а вместе с ним и неравенство (1). Таким образом, E_n — метрическое пространство.

Проверить выполнение аксиом для метрик б) и в) предоставляем читателю.

85. Пусть $X = N$, где N — множество всех натуральных чисел. Является ли это множество метрическим пространством, если для любых $k, m \in N$ метрика вводится одним из соотношений:

а) $\rho(k, m) = |k - m|$;

б) $\rho(k, m) = |k^2 - m^2|$;

в) $\rho(k, m) = \begin{cases} 0, & \text{если } k = m; \\ \dfrac{1}{1+\min\{k, m\}}, & \text{если } k \neq m; \end{cases}$

г) $\rho(k, m) = |k - m|^2$.

Решение. В случаях а) и б) выполнение аксиом тождества и симметрии очевидно, а аксиома треугольника следует из свойств абсолютной величины. Действительно, пусть $k, m, r \in N$, тогда

а) $\rho(k, m) = |k - m| = |k - r + r - m| \leqslant |k - r| + |r - m| = \rho(k, r) + \rho(m, r)$.

Аналогично

б) $\rho(k, m) = |k^2 - m^2| = |k^2 - r^2 + r^2 - m^2| \leqslant |k^2 - r^2| + |r^2 - m^2| = \rho(k, r) + \rho(r, m)$.

Следовательно, в случаях а) и б) множество N образует метрическое пространство.

в) Справедливость аксиом тождества и симметрии очевидна, а поскольку $\rho(k, m) = \dfrac{1}{1+\min\{k, m\}} = \max\left\{\dfrac{1}{1+k}, \dfrac{1}{1+m}\right\} \leqslant \dfrac{1}{1+k} + \dfrac{1}{1+m} \leqslant \max\left\{\dfrac{1}{1+k}, \dfrac{1}{1+r}\right\} + \max\left\{\dfrac{1}{1+r}, \dfrac{1}{1+m}\right\} = \dfrac{1}{1+\min\{k, r\}} + \dfrac{1}{1+\min\{r, m\}} = \rho(k, r) + \rho(r, m)$, то множество N с метрикой в) образует метрическое пространство.

г) Очевидно, аксиомы тождества и симметрии выполняются. Однако аксиома треугольника не имеет места; например, для $k = 1$, $m = 3$, $r = 2$ имеем: $\rho(1, 3) = 4 > \rho(1, 2) + \rho(2, 3) = 1 + 1 = 2$.

Таким образом, множество N не образует метрического пространства, поскольку функция $\rho(k, m)$ не удовлетворяет аксиомам метрики.

86. Пусть $X = C[a, b]$, где $C[a, b]$ — множество непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций. Расстояние между любыми функциями $x(t)$ и $y(t)$ из $C[a, b]$ определяется равенством

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|. \tag{1}$$

Показать, что множество $C[a, b]$, в котором метрика вводится равенством (1), является метрическим пространством.

Решение. Достаточно проверить выполнение аксиом метрики. Выполнение аксиом тождества и симметрии очевидно. Покажем, что аксиома треугольника также выполняется. Действительно, для любого $t \in [a, b]$ и любых $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in C[a, b]$ имеем:

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Но тогда $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Следовательно, $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, а поэтому множество $C[a, b]$ образует метрическое пространство.

87. Пусть l_2 — множество последовательностей вещественных чисел $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, а расстояние между точками $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ и $y=\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ определяется равенством $\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$. Показать, что l_2 — метрическое пространство.

Решение. Пусть $x, y \in l_2$, т. е. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$. Тогда из очевидного неравенства $(x_i \pm y_i)^2 \leqslant 2(x_i^2+y_i^2)$ вытекает, что функция $\rho(x, y)$ определена для всех $x, y \in l_2$. Выполнение аксиом тождества и симметрии очевидно, а аксиома треугольника запишется в виде:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i-y_i)^2}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2},$$

справедливом для любых n (см. пример 84, а).

88. Что представляет собой сходимость: 1) в пространстве E_n с метрикой а) (см. пример 84); 2) в пространстве $C[a, b]$ (см. пример 86)?

Решение. 1) Пусть последовательность $x^{(k)}=\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$, $k=1, 2, \dots$, состоящая из точек пространства E_n, сходится к точке $x^{(0)}=\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$, т. е.

$$\rho(x^{(k)}, x^{(0)})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k)}-x_i^{(0)}\right)^2} \to 0$$

при $k \to \infty$. Поскольку сумма $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(k)}-x_i^{(0)}\right)^2$ неотрицательна, то последнее соотношение справедливо тогда и только тогда, когда $x_i^{(k)} \to x_i^{(0)}$ $(i=1, 2, \dots, n)$ при $k \to \infty$.

Таким образом, сходимость в метрическом пространстве E_n представляет собой сходимость координат точек последовательности к соответствующим координатам точки-предела. Такую сходимость принято называть *покоординатной* сходимостью.

2) Пусть последовательность $\{x_n(t)\} \subset C[a, b]$ сходится к точке $x_0(t) \in C[a, b]$, т. е. $\rho(x_n, x_0)=\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b}|x_n(t)-x_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N=N(\varepsilon)$ такое, что неравенство $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b}|x_n(t)-x_0(t)| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что неравенство $|x_n(t)-x_0(t)| < \varepsilon$, $n > N$

справедливо для всех $t \in [a, b]$. А это означает, что сходимость в пространстве $C[a, b]$ является равномерной сходимостью функциональной последовательности на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $x_0(t)$.

89. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ попарно различных элементов метрического пространства X сходится к пределу $a \in X$, то a — предельная точка этой последовательности.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. Так как $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, то $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ для $\forall n > N$, т. е. начиная с номера $N + 1$ все элементы последовательности $\{x_n\}$ принадлежат сфере $S(a, \varepsilon)$. Следовательно, a — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

90. Пусть множество M принадлежит метрическому пространству X, а a — предельная точка этого множества. Доказать, что существует последовательность $\{x_n\} \subset M$, сходящаяся к точке a.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — произвольная последовательность вещественных чисел, сходящаяся к нулю. Выберем произвольное число $r_1 \leqslant |\alpha_1|$ и рассмотрим окрестность $S(a, r_1)$ точки a. Так как a — предельная точка множества M, то существует хотя бы одна точка $x_1 \in M$ $(x_1 \neq a)$, принадлежащая окрестности $S(a, r_1)$. Выберем, далее, произвольное число r_2 такое, чтобы $r_2 < \rho(x_1, a)$ и $r_2 \leqslant |\alpha_2|$. Окрестность $S(a, r_2)$ снова содержит точку $x_2 \in M$ $(x_2 \neq a)$. Продолжая аналогичные рассуждения, убеждаемся в существовании бесконечной последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \neq a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, состоящей из элементов множества M и такой, что $\rho(x_n, a) < r_n \leqslant |\alpha_n|$. Поскольку $|\alpha_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$, что означает сходимость последовательности $\{x_n\}$ к точке a.

91. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что метрика $\rho(x, y)$ этого метрического пространства является непрерывной функцией по совокупности переменных в пространстве X.

Доказательство. Докажем сначала, что для любых трех точек $a, b, c \in X$ справедливо неравенство

$$|\rho(a, b) - \rho(a, c)| \leqslant \rho(c, b). \qquad (1)$$

Действительно, из аксиомы треугольника вытекает неравенство $\rho(a, b) - \rho(a, c) \leqslant \rho(c, b)$. Меняя местами c и b, получаем: $-[\rho(a, b) - \rho(a, c)] \leqslant \rho(c, b)$. Из последних двух неравенств, пользуясь тем, что $\rho(c, b) \geqslant 0$, получаем неравенство (1).

Докажем теперь непрерывность функции $\rho(x, y)$. Пусть $x_0, y_0 \in X$ и $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x_0, y_0)$ при $n \to \infty$. В самом деле, пользуясь неравенством (1), имеем: $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| = |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_n) + \rho(x_0, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_n)| + |\rho(x_0, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда непосредственно следует непрерывность функции $\rho(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

92. Доказать, что в метрическом пространстве всякий замкнутый шар $\overline{S}(a, r)$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная предельная точка множества $\overline{S}(a, r)$. Тогда (см. пример 90) существует последовательность

$\{x_n\} \subset \overline{S}(a, r)$ такая, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Поскольку $\rho(x_n, a) \leqslant r$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то, пользуясь непрерывностью расстояния и переходя к пределу в неравенстве $\rho(x_n, a) \leqslant r$ при $n \to \infty$, получаем: $\rho(x_0, a) \leqslant r$. Отсюда вытекает, что $x_0 \in \overline{S}(a, r)$, т. е. что шар $\overline{S}(a, r)$ содержит все свои предельные точки и, следовательно, является замкнутым множеством.

93. Доказать, что в метрическом пространстве всякий открытый шар $S(a, r)$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка, принадлежащая шару $S(a, r)$. Обозначим $r_1 = \rho(a, x_0)$. Тогда $S(x_0, r - r_1) \subset \subset S(a, r)$. В самом деле, если $x \in S(x_0, r - r_1)$, то, используя неравенство треугольника, получаем: $\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < (r - r_1) + + r_1 = r$. Отсюда следует, что $x \in S(a, r)$ и $S(x_0, r - r_1) \subset S(a, r)$. Таким образом, всякая точка шара $S(a, r)$ принадлежит этому шару вместе с некоторой окрестностью, а поэтому шар $S(a, r)$ — открытое множество.

94. Пусть X — множество рациональных чисел, расстояние между любыми двумя точками которого определяется равенством $\rho(r_1, r_2) = = |r_1 - r_2|$. Показать, что X — метрическое пространство. Является ли это пространство полным?

Решение. Аксиомы тождества и симметрии очевидны. Далее, пользуясь неравенством $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, убеждаемся в выполнении аксиомы треугольника: $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2| \leqslant |r_1 - r_3| + |r_3 - r_2| = = \rho(r_1, r_3) + \rho(r_3, r_2)$. Следовательно, X — метрическое пространство.

Покажем, что метрическое пространство X неполное. С этой целью рассмотрим последовательность рациональных чисел $x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + + \cdots + \frac{1}{n!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $\rho(x_{n+p}, x_n) = |x_{n+p} - x_n| < < \frac{1}{p \cdot n!} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. А поскольку $x_n \to e \overline{\in} X$ при $n \to \infty$, то последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела в пространстве X, что доказывает наше утверждение.

95. Доказать, что метрическое пространство $C[a, b]$ (см. задачу 86) полное.

Доказательство. Пусть $\rho(x_{n+p}, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что существует функция $x(t)$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$ $a \leqslant t \leqslant b$. Покажем, что $x(t)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, т. е. что $x(t) \in C[a, b]$.

Так как сходимость в пространстве $C[a, b]$ равномерная, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n > N$ неравенство

$$|x_n(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

справедливо сразу для всех t из сегмента $[a, b]$. Зафиксируем любой из таких номеров n и оценим приращение $\Delta x(t_0) = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, где

$t_0 \in [a, b]$, а Δt меняется так, что $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Имеем:

$$|\Delta x(t_0)| = |x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)| \leqslant |x(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0 + \Delta t)| + \\ + |x_n(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t)|. \quad (2)$$

Из неравенства (1) следует:

$$|x(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0 + \Delta t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |x_n(t_0) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Поскольку $x_n(t)$ — непрерывная функция, то для указанного $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n(t_0 + \Delta t) - x_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

как только $|\Delta t| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Таким образом, из неравенств (2), (3) и (4) вытекает, что $|\Delta x(t_0)| < \varepsilon$ как только $|\Delta t| < \delta = \delta(\varepsilon)$, т. е. что функция $x(t)$ непрерывна на $[a, b]$.

96. Доказать теорему (принцип неподвижной точки): Всякое сжимающее отображение A, отображающее полное метрическое пространство X в себя, имеет в этом пространстве единственную неподвижную точку. Другими словами, уравнение $x = Ax$ имеет в пространстве X единственное решение.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольный элемент пространства X. Так как отображение A отображает пространство X в себя, то $Ax_0 = x_1 \in X$; $Ax_1 = x_2 \in X$; ...; $Ax_{n-1} = x_n \in X$; ....

Покажем, что так построенная последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ фундаментальна. Действительно, пользуясь тем, что отображение A сжимающее, получаем неравенства:

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax_0, Ax_1) \leqslant \theta\rho(x_0, x_1) = \theta\rho(x_0, Ax_0);$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \theta\rho(x_1, x_2) \leqslant \theta^2\rho(x_0, Ax_0);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \theta^n\rho(x_0, Ax_0);$$
$$0 \leqslant \theta < 1,$$

из которых вытекает, что

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \\ + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p-1})\rho(x_0, Ax_0) = \\ = \frac{\theta^n - \theta^{n+p}}{1-\theta}\rho(x_0, Ax_0).$$

Поскольку $0 \leqslant \theta < 1$, то в итоге получим:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, Ax_0).$$

Учитывая неотрицательность расстояния, а также условие $\theta^n \to 0$ при $n \to \infty$, будем иметь: $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом натуральном p, т. е. последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Поскольку пространство X — полное, то существует элемент $x^* \in X$ такой, что $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Для предельного элемента x^* имеем:

$$\rho(x^*, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \rho(x_n, Ax^*) = \rho(x^*, x_n) + \\ + \rho(Ax_{n-1}, Ax^*) \leqslant \rho(x^*, x_n) + \theta\rho(x_{n-1}, x^*) \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $\rho(x^*, Ax^*) = 0$, т. е. $x^* = Ax^*$. Следовательно, x^* — неподвижная точка.

Остается показать, что неподвижная точка (решение уравнения $x = Ax$) единственна. Для доказательства предположим обратное, т. е. предположим существование точки $z \neq x^*$ такой, что $z = Az$. Пользуясь тем, что отображение A — сжимающее, имеем:

$$\rho(z, x^*) = \rho(Az, Ax^*) \leqslant \theta\rho(z, x^*).$$

Отсюда, согласно предположению, что $z \neq x^*$, т. е. что $\rho(z, x^*) > 0$, получим неравенство $1 < \theta$, противоречащее условию теоремы.

Источник противоречия — в предположении, что отображение имеет две неподвижные точки. Теорема доказана.

97. Пусть отображение A метрического пространства E_n в себя задано системой

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

переводящей точку $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из пространства E_n в точку $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ этого же пространства. Найти условие сжатия отображения, если метрика задана одним из равенств а), б) или в), приведенных в задаче 84.

Решение. а) Если в E_n метрика вводится равенством а), то, пользуясь неравенством Коши—Буняковского, имеем:

$$\rho(Ax, Az) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j)\Big)^2} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2\Big)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,\rho(x, z).$$

Отсюда получаем достаточное условие сжатия: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \theta < 1$.

б) Если в E_n метрика вводится равенством б), то тогда

$$\rho(Ax, Az) = \sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_j - z_j| \leqslant \\ \leqslant \Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big)\sum_{j=1}^{n}|x_j - z_j| = \Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\Big)\rho(x, z),$$

и достаточное условие сжатия запишется в виде неравенств: $\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant \theta < 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

в) Пусть теперь в рассматриваемом пространстве метрика задана равенством в). Тогда из неравенства

$$\rho(Ax, Az) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - z_j) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j - z_j| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x, z)$$

получаем достаточное условие сжатия: $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \theta < 1$ $(1 = 1, 2, \ldots, n)$.

§ 4. Неявные функции

1°. Определение неявной функции. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где функция $F(x, y)$ определена на множестве $X \times Y$ (через $X \times Y$ обозначена совокупность упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$). Обозначим через E такое множество значений $x \in X$, что для каждого фиксированного $x \in E$ уравнение (1) имеет хотя бы один вещественный корень $y \in Y$.

Тогда на множестве E можно определить однозначную или многозначную функцию $y = f(x)$, ставя в соответствие каждому фиксированному $x \in E$ то значение y, которое при этом фиксированном x является корнем уравнения (1). Относительно так определенной функции говорят, что она задана *неявно*. В силу определения функции $y = f(x)$ равенство $F(x, f(x)) = 0$ справедливо при всех значениях $x \in E$.

Аналогично посредством системы уравнений

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

определяется такая система неявных функций

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

что

$$F_i(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

2°. Теорема существования. Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных x и y в прямоугольнике $R: |x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ и $F(x_0, y_0) = 0$. Пусть, далее, функция $F(x, y)$ имеет в этом прямоугольнике производную $F'_y(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), причем $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что в прямоугольнике $R_0: |x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \beta$ уравнение (1) определяет единственную непрерывную функцию $y = f(x)$, которая при $x = x_0$ принимает значение y_0.*

3°. Производные неявной функции. Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, в точке (x_0, y_0) сущест-*

вует производная $F'_x(x_0, y_0)$. *Тогда функция* $y = f(x)$, *определяемая уравнением* (1), *имеет в точке* $x = x_0$ *производную, причем*

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

4°. Неявные функции, определяемые системой уравнений. Теорема 3. 1) *Пусть:* 1) *функции* $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *непрерывны по совокупности своих переменных в окрестности точки* $M_0(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_m^\circ, y_1^\circ, y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ)$ и $F_i(M_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; 2) *функции* F_i *в указанной окрестности имеют производные* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, *непрерывные в точке* M_0; 3) *функциональный определитель* $\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0$ *в точке* M_0.

Тогда в некоторой окрестности точки M_0 *существует единственная система непрерывных функций* (3), *которая в этой окрестности удовлетворяет уравнениям* (2) *и начальным условиям*

$$f_i(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_m^\circ) = y_i^\circ \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3 *и, кроме того, в точке* M_0 *существуют производные*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Тогда функции (3), *определяемые системой* (2), *имеют в точке* $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_m^\circ)$ *частные производные* $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$, *причем частные производные по* x_k, *где* k — *одно из чисел* $1, 2, \ldots, m$, *могут быть найдены из системы*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

При формулировке большинства задач этого параграфа предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие существование неявных функций и их соответствующих производных.

98. Показать, что функция Дирихле

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывная в каждой точке, удовлетворяет уравнению $y^2 - y = 0$.

Доказательство. В рациональных точках значение функции y и ее квадрата y^2 равно единице. Поэтому в этих точках выполняется равенство $y^2 - y = 0$. Если x — иррационально, то $y = 0$, $y^2 = 0$, и мы снова убеждаемся в справедливости равенства $y^2 - y = 0$.

Таким образом, при всех вещественных значениях x функция Дирихле удовлетворяет уравнению $y^2 - y = 0$.

99. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). В каком случае уравнение

$$f(x)\,y = 0 \tag{$\ast$}$$

имеет при $a < x < b$ единственное непрерывное решение $y = 0$?

Решение. Очевидно, $y = 0$ $(a < x < b)$ является непрерывным решением уравнения ($\ast$) при любой функции $f(x)$, определенной на интервале (a, b). Пусть $y = y(x)$ $(a < x < b)$ — другая непрерывная функция, являющаяся решением уравнения ($\ast$), и точка $x_0 \in (a, b)$ такая, что $y(x_0) \neq 0$. Из непрерывности $y(x)$ следует, что $y(x) \neq 0$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, содержащем точку x_0. Тогда для выполнения равенства $f(x)\,y(x) \equiv 0$ на интервале (α, β) необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \equiv 0$ для всех x из интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

Таким образом, если множество нулей функции $f(x)$ не заполняет целиком никакой интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, т. е. нигде не плотно на (a, b), то $y = 0$ — единственное непрерывное решение уравнения ($\ast$).

100. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b). В каком случае уравнение

$$f(x)\,y = g(x) \tag{1}$$

имеет на интервале (a, b) единственное непрерывное решение?

Решение. Пусть уравнение (1) имеет два непрерывных решения $y = y(x)$ и $z = z(x)$ $(a < x < b)$, т. е. пусть $f(x)\,y(x) \equiv g(x)$, $f(x)\,z(x) \equiv g(x)$. Отсюда следует, что $f(x)\,(y(x) - z(x)) \equiv 0$ $(a < x < b)$.

Таким образом, решения $y(x)$ и $z(x)$ уравнения (1) совпадают, если однородное уравнение $f(x)\,y = 0$ имеет единственное непрерывное решение $y = 0$ $(a < x < b)$. Это, в свою очередь, возможно лишь тогда, когда множество нулей функции $f(x)$ нигде не плотно на интервале (a, b) (см. задачу 99).

Если $f(x) \neq 0$ $(a < x < b)$, то очевидно, $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ — единственное непрерывное решение уравнения (1). Пусть $f(x)$ обращается в нуль в некотором нигде не плотном множестве точек $\{\xi\} \in (a, b)$. Тогда отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ не определено на множестве $\{\xi\}$, а функция $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ является решением уравнения (1) только на множестве точек интервала (a, b), в которых $f(x) \neq 0$. Если потребовать, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{x \to \xi} \frac{g(x)}{f(x)}, \tag{2}$$

что возможно лишь в случае, когда $g(\xi) = 0$, $\xi \in \{\xi\}$, тогда функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{f(x)}, & x \in (a, b),\ x \neq \xi \in \{\xi\}, \\ \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{g(x)}{f(x)}, & x = \xi \in \{\xi\} \end{cases}$$

будет единственным непрерывным решением уравнения (1).

Итак, уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, если: 1) множество точек $\{\xi\}$, в которых $f(\xi) = 0$, нигде не плотно на (a, b); 2) $g(\xi) = 0$, $\xi \in \{\xi\}$; 3) существует конечный предел (2) для всех точек $\xi \in \{\xi\}$.

101. Пусть дано уравнение

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

и

$$y = y(x) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{2}$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

3) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(0) = 1$; б) $y(1) = 0$?

Решение. 1) Однозначных функций, удовлетворяющих уравнению (1), бесчисленное множество. Например, если $x_k = -1 + \frac{2k}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n = 2, 3, \ldots$), то для любого $n = 2, 3, \ldots$ однозначная функция

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x_{2k} \leqslant x < x_{2k+1}, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } x_{2k+1} \leqslant x < x_{2k+2}, \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяет уравнению.

2) Если x — произвольное фиксированное число из сегмента $[-1, 1]$, то уравнение (1) допускает два решения: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Таким образом, мы можем определить две однозначные непрерывные функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leqslant x \leqslant 1$), удовлетворяющие уравнению (1).

3) Очевидно, только одна из найденных в предыдущем пункте функций $y = \sqrt{1 - x^2}$ удовлетворяет условию $y(0) = 1$. Условию б) удовлетворяют обе функции.

102. Пусть дано уравнение

$$x^2 = y^2 \tag{1}$$

и

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

3) Сколько однозначных дифференцируемых функций (2) удовлетворяет уравнению (1)?

4) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяет уравнению (1), если: а) $y(1) = 1$, б) $y(0) = 0$?

5) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ ($1 - \delta < x < 1 + \delta$) удовлетворяет уравнению (1), если $y(1) = 1$ и δ достаточно мало?

Решение. 1) Покажем, что однозначных функций, удовлетворяющих уравнению (1), бесчисленное множество. Зададим произвольно множество $\{\alpha\}$, элементами которого являются монотонно возрастающие последовательности $x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \ldots, x_{\alpha n}, \ldots$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\alpha n} = +\infty$ при всех α.

Для каждого α однозначная функция

$$y(x) = \begin{cases} -|x|, \text{ если } x < x_{\alpha 1}, \\ \ \ |x|, \text{ если } x_{\alpha 2n-1} \leqslant x < x_{\alpha 2n}, \\ -|x|, \text{ если } x_{\alpha 2n} \leqslant x < x_{\alpha 2n+1}, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \ldots$, определена при всех значениях x и удовлетворяет уравнению (1).

2) Из уравнения (1) находим $|y| = |x|$ $(-\infty < x < +\infty)$. Отсюда, в свою очередь, получаем:

$$y = -x, \ y = x, \ y = |x|, \ y = -|x| \ (|x| < \infty). \tag{3}$$

Эти четыре однозначные непрерывные функции удовлетворяют уравнению (1).

3) Поскольку функции $y = |x|$ и $y = -|x|$ не имеют производной в точке $x = 0$, то из четырех функций (3) только две: $y = x$ и $y = -x$ являются однозначными дифференцируемыми решениями уравнения (1).

4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что среди функций (3) только две: $y = x$ и $y = |x|$ удовлетворяют условию а) и все четыре функции удовлетворяют условию б).

5) Поскольку непрерывные функции $y = x$ и $y = |x|$, проходящие через точку $(1, 1)$, тождественно равны в интервале $(1-\delta, 1+\delta)$ $(0 < \delta < 1)$, то для всех x из этого интервала только одна непрерывная функция $y = x$ удовлетворяет уравнению (1).

103. Уравнение

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4 \tag{1}$$

определяет y как многозначную функцию от x. Для каких множеств точек числовой оси эта функция: 1) однозначна, 2) двузначна, 3) трехзначна, 4) четырехзначна? Определить точки ветвления этой функции и ее однозначные непрерывные ветви.

Решение. Из уравнения (1) находим:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \text{ если } 0 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}; \\ y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \text{ если } 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ и } x=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда непосредственно следует:

1) уравнение (1) ни при каких значениях x не определяет однозначной функции (нет общих точек, в которых совпадали бы все четыре значения y).

2) Уравнение (1) определяет двузначную функцию, если $0<|x|<1$ и $|x|=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

3) Если $x=0$ или $|x|=1$, то равенства (2) дают нам три значения y. Поэтому на множестве $\{-1, 0, 1\}$ уравнение (1) определяет трехзначную функцию.

4) Пересечение множеств, на которых определены две двузначные функции (2), дает нам множество $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$, на котором уравнение (1) определяет четырехзначную функцию. Из (2) убеждаемся, что

$$y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\quad\left(|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

$$y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}\quad\left(1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)\text{ при } \varepsilon=\pm 1$$

являются однозначными непрерывными ветвями.

Точку (x_0, y_0) будем называть *точкой ветвления* для уравнения $F(x, y)=0$, если: а) $F(x_0, y_0)=0$, б) не существует окрестности точки (x_0, y_0), в которой бы данное уравнение удовлетворялось единственной однозначной непрерывной функцией $y=f(x)$ и такой, что $y_0=f(x_0)$. Для нашего случая $(\pm 1, 0)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — точки ветвления.

104. Определить точки ветвления и непрерывные однозначные ветви $y=y(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ многозначной функции, определяемой уравнением

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2. \tag{1}$$

Решение. Пользуясь теоремой 1 пункта 2°, убеждаемся, что $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ в точках $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, где $F(x, y)=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2$. Следовательно, эти точки могут быть точками ветвления.

Из уравнения (1) имеем: $y^2=\frac{-2x^2-1\pm\sqrt{8x^2+1}}{2}$ $(|x|\leqslant 1)$, а так как $y^2\geqslant 0$, то окончательно находим функции

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-1-2x^2}{2}}\quad(|x|\leqslant 1),$$

из которых получаем все однозначные непрерывные ветви:

$$y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-1-2x^2}{2}}\quad(|x|\leqslant 1),$$

где $\varepsilon(x)=-1,\ 1,\ \operatorname{sgn}x$ и $-\operatorname{sgn}x$. Так как через точки $(0, 0)$, $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ проходит более чем одна однозначная непрерывная ветвь, то они являются точками ветвления.

105. Пусть функция $f(x)$ — непрерывна при $a<x<b$ и $\varphi(y)$ — монотонно возрастает и непрерывна при $c<y<d$. В каком случае уравнение $\varphi(y)=f(x)$ определяет однозначную функцию $y=\varphi^{-1}(f(x))$? Рассмотреть примеры: а) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$; б) $e^{-y}=-\sin^2 x$.

Решение. Функция $y=\varphi^{-1}(f(x))$ определяется следующим образом: для любого фиксированного значения $x\in(a, b)$ (т. е. для фиксированного значения $f(x)$) ставится в соответствие то значение y, которое является решением уравнения $\varphi(y)=f(x)$.

Поскольку функция $\varphi(y)$ непрерывна и монотонно возрастает на интервале (c, d), то уравнение $\varphi(y)=A$ имеет единственное решение $y=\varphi^{-1}(A)$, если число A принадлежит множеству значений функции $\varphi(y)$ $(c<y<d)$.

Таким образом, уравнение (1) имеет единственное решение $y=\varphi^{-1}(f(x))$, если множества значений функций $\varphi(y)$ $(c<y<d)$ и $f(x)$ $(a<x<b)$ имеют общие точки.

Рассмотрим примеры. а) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$. Здесь функция $\varphi(y)$ $(-\infty<y<\infty)$ непрерывна. Пользуясь формулой Тейлора, убеждаемся, что производная

$$\varphi'(y)=\cos y+\operatorname{ch} y=\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\right)+$$
$$+\left(1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots\right)=2\left(1+\frac{y^4}{4!}+\ldots\right)\ (-\infty<y<+\infty)$$

положительна. Следовательно, функция $\varphi(y)$ $(-\infty<y<+\infty)$ монотонно возрастает. Поскольку множества значений функций $\varphi(y)\equiv\sin y+\operatorname{sh} y$ $(-\infty<y<+\infty)$ и $f(x)\equiv x$ $(-\infty<x<+\infty)$ совпадают, то уравнение $\sin y+\operatorname{sh} y=x$ определяет единственную однозначную функцию $y=\omega(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, обращающую это уравнение в тождество.

б) $e^{-y}=-\sin^2 x$. В этом случае множеством значений функции $\varphi(y)=e^{-y}$ $(-\infty<y<+\infty)$ является полубесконечный интервал $(0, +\infty)$, а множеством значений функции $f(x)=-\sin^2 x$ $(-\infty<x<+\infty)$ — сегмент $[-1, 0]$. Поскольку эти множества не имеют общих точек, то уравнение $e^{-y}=-\sin^2 x$ не имеет решений.

106. Пусть

$$x=y+\varphi(y), \tag{1}$$

где $\varphi(0)=0$ и $|\varphi'(y)|\leqslant k<1$ при $-a<y<a$. Доказать, что при $-\varepsilon<x<\varepsilon$ существует единственная дифференцируемая функция $y=y(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и такая, что $y(0)=0$.

Доказательство. Из условия следует неравенство $\frac{dx}{dy}=1+\varphi'(y)>0$, $-a<y<a$, обеспечивающее строгую монотонность непрерывной функции $x=y+\varphi(y)$, $-a<y<a$. Пусть $\varepsilon=\min\{|x(-a+0)|, |x(a-0)|\}$. Тогда, в силу строгой монотонности функции $x=y+\varphi(y)$, каждому $x\in(-\varepsilon, \varepsilon)$ соответствует только одно значение $y\in(-a, a)$, для которого $y+\varphi(y)=x$. Поэтому на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ существует функция $y=y(x)$, обратная для функции $x=y+\varphi(y)$ и тоже строго монотонная. А так как уравнение (1) при $y=0$ имеет решение $x=0$, то $y(0)=0$.

Покажем, что функция $y = y(x)$ дифференцируема. Пусть x_0, $x_0 + \Delta x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\Delta x \neq 0$, тогда y_0, $y_0 + \Delta y \in (-a, a)$, где y_0 — корень уравнения $x_0 = y + \varphi(y)$, $\Delta y \neq 0$ и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Поскольку существует предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(1 + \frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y}\right) = 1 + \varphi'(y_0),$$

то из тождества $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ убеждаемся в существовании производной $\dfrac{dy}{dx}$. Следовательно, функция $y = f(x)$ дифференцируема на $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

107. Пусть $y = y(x)$ — неявная функция, определяемая уравнением

$$x = ky + \varphi(y), \tag{1}$$

где постоянная $k \neq 0$, $\varphi(y)$ — дифференцируемая периодическая функция с периодом ω и такая, что $|\varphi'(y)| < |k|$. Доказать, что $y = \dfrac{x}{k} + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k|\,\omega$.

Доказательство. Отображение A, определяемое равенством $Ay = \dfrac{x}{k} - \dfrac{\varphi(y)}{k}$, преобразует множество $C(-\infty, \infty)$ в себя. Покажем, что это отображение сжимающее. Действительно, для любых функций $y(x)$ и $z(x)$ из $C(-\infty, \infty)$, пользуясь теоремой Лагранжа, получаем:

$$\rho(Ay, Az) = \max_{-\infty < x < \infty} |Ay - Az| = \max_{-\infty < x < \infty} \left|\frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{k}\right| =$$

$$= \max_{-\infty < x < \infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} |y - z| \leqslant \max_{-\infty < x < \infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} \max_{-\infty < x < \infty} |y - z| =$$

$$= \max_{-\infty < x < \infty} \frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} \rho(y, z),$$

где ξ находится между y и z. Так как $|\varphi'(y)| < |k|$, то $0 < \theta = \max\limits_{-\infty < x < \infty} \dfrac{|\varphi'(\xi)|}{|k|} < 1$. Следовательно, $\rho(Ay, Az) \leqslant \theta\rho(y, z)$, $0 < \theta < 1$ и сжимаемость отображения A доказана.

Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений (см. задачу 96), существует единственная функция $y(x) \in C(-\infty, \infty)$, удовлетворяющая уравнению $y = Ay$, т. е. уравнению (1). Эта функция является пределом последовательности

$$y_1 = \frac{x}{k} - \frac{\varphi(0)}{k}, \quad y_n = \frac{x}{k} - \frac{\varphi(y_{n-1})}{k} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем: $y = \dfrac{x}{k} + \psi(x)$, где $\psi(x) = -\dfrac{1}{k} \lim\limits_{n \to \infty} \varphi(y_{n-1}(x))$.

Покажем, что функции $\varphi(y_{n-1}(x))$ $(n = 2, 3, \ldots)$ периодические по переменной x с периодом $|k|\,\omega$. Для доказательства применим метод математической индукции. При $n = 2$ функция $\varphi(y_1(x))$ периодическая по x с периодом $|k|\omega$. Действительно, согласно условию, $\varphi(y\pm\omega)=$ $=\varphi(y)$, поэтому

$$\varphi(y_1(x+|k|\omega))=\varphi\left(\frac{x+|k|\omega}{k}-\frac{\varphi(0)}{k}\right)=\varphi(y_1(x)+\omega\operatorname{sgn}k)=\varphi(y_1(x)).$$

Далее, предполагая, что функция $\varphi(y_{n-1}(x))$ имеет период $|k|\omega$, получаем равенство

$$\varphi(y_n(x+|k|\omega))=\varphi\left(\frac{x+|k|\omega}{k}-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x+|k|\omega))\right)=$$
$$=\varphi\left(\frac{x}{k}-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x))+\omega\operatorname{sgn}k\right)=\varphi(y_n(x)+\omega\operatorname{sgn}k)=\varphi(y_n(x)),$$

из которого следует, что $|k|\omega$ — период функции $\varphi(y_n(x))$ по переменной x.

Предельная функция $\psi(x)$ также периодическая с периодом $|k|\omega$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в очевидном равенстве

$$\psi(x+|k|\omega)-\psi(x)=\left(\psi(x+|k|\omega)+\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x+|k|\omega))\right)+$$
$$+\left(-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x))-\psi(x)\right)$$

перейти к пределу при $n\to\infty$. Поскольку каждое из слагаемых равномерно стремится к нулю, то в пределе получаем равенство $\psi(x+$ $+|k|\omega)-\psi(x)\equiv 0$, доказывающее периодичность функции $\psi(x)$.

108. Показать, что при $1+xy=k(x-y)$, где k — постоянная величина, имеет место равенство

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}. \qquad (1)$$

Доказательство. Поскольку $x\neq y$, то $k=\dfrac{1+xy}{x-y}$. Дифференцируя это равенство, получаем:

$$0=\frac{(x-y)(x\,dy+y\,dx)-(1+xy)(dx-dy)}{(x-y)^2}.$$

Отсюда следует соотношение $(1+x^2)\,dy-(1+y^2)\,dx=0$, равносильное равенству (1).

109. Доказать, что если

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0, \qquad (1)$$

то при $xy>0$ справедливо равенство

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0. \qquad (2)$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (1), получаем: $2xy^2\,dx+2x^2y\,dy+2x\,dx+2y\,dy=0$. Отсюда находим:

$$x(1+y^2)\,dx+y(1+x^2)\,dy=0. \qquad (3)$$

Из равенства (1) следует:

$$x^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2},\ y^2 = \frac{1-x^2}{1+x^2};\ x = \pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\ y = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \qquad (4)$$

Если x и y одного знака, т. е. если $xy > 0$, то, заменяя в равенстве (3) x и y их значениями (4), получаем:

$$\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}(1+y^2)\,dx + \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}(1+x^2)\,dy = 0;$$

$$\sqrt{1-y^4}\,dx + \sqrt{1-x^4}\,dy = 0.$$

Отсюда непосредственно следует равенство (2).

110. Доказать, что уравнение

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ a \neq 0 \qquad (1)$$

в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ определяет две дифференцируемые функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Найти $y_1'(0)$ и $y_2'(0)$.

Доказательство. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и любого фиксированного $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ из уравнения (1) находим два значения y: $y = \varphi(x)$ и $y = -\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \sqrt{\sqrt{2a^2x^2 + \frac{a^4}{4}} - x^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Так определенная функция $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $\varphi(0) = 0$. Поэтому можно определить четыре непрерывные функции:

$$y_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } 0 \leqslant x < \varepsilon, \\ -\varphi(x), & \text{если } -\varepsilon < x < 0; \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} -\varphi(x), & \text{если } 0 \leqslant x < \varepsilon, \\ \varphi(x), & \text{если } -\varepsilon < x < 0; \end{cases}$$

$$y_3(x) = \varphi(x)\ (-\varepsilon < x < \varepsilon);\ y_4(x) = -\varphi(x)\ (-\varepsilon < x < \varepsilon),$$

удовлетворяющие уравнению (1).

Исследуем на дифференцируемость эти функции при $x = 0$. С этой целью вычислим $\varphi_-'(0)$. Имеем:

$$\varphi_-'(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2 + \frac{a^4}{4}} - \Delta x^2 - \frac{a^2}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\sqrt{2a^2\Delta x^2 + \frac{a^4}{4} - \Delta x^4 - \Delta x^2 a^2 - \frac{a^4}{4}}}{\Delta x \sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2 + \frac{a^4}{4}} + \Delta x^2 + \frac{a^2}{2}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|\sqrt{a^2 - \Delta x^2}}{\Delta x \sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2 + \frac{a^4}{4}} + \Delta x^2 + \frac{a^2}{2}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sqrt{a^2 - \Delta x^2}}{\sqrt{\sqrt{2a^2\Delta x^2 + \frac{a^4}{4}} + \Delta x^2 + \frac{a^2}{2}}} = -1.$$

Аналогично находим: $\varphi'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\varphi(\Delta x) - \varphi(0)}{\Delta x} = 1$. Отсюда сразу следует, что функции $y_3(x)$ и $y_4(x)$ не имеют производной при $x = 0$. Поскольку $y'_{1-}(0) = -\varphi'_-(0) = 1$, $y'_{1+}(0) = \varphi'_+(0) = 1$, то функция $y_1(x)$ имеет производную при $x = 0$, равную единице. Аналогично из равенств $y'_{2-}(0) = \varphi'_-(0) = -1$, $y'_{2+}(0) = -\varphi'_+(0) = -1$ следует дифференцируемость функции $y_2(x)$ при $x = 0$, причем $y'_2(0) = -1$.

111. Найти y' при $x = 0$ и $y = 0$, если

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3. \tag{1}$$

Решение. Представим кривую, определяемую уравнением (1), в параметрическом виде. С этой целью положим $y = tx$. Тогда из уравнения (1) найдем: $x = \frac{3t - t^3}{(1 + t^2)^2}$. Подставив найденное значение x в равенство $y = tx$, получим: $y = \frac{3t^2 - t^4}{(1 + t^2)^2}$. Заметим, что $x = 0$ и $y = 0$ при трех значениях параметра t: $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$. Остается вычислить производную от параметрически заданной функции при этих значениях параметра, т. е. при $x = 0$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + t^2)(6t - 4t^3) - 4t(3t^2 - t^4)}{(1 + t^2)(3 - 3t^2) - 4t(3t - t^3)}.$$

Отсюда при $t = 0$, $t = \sqrt{3}$ и $t = -\sqrt{3}$ находим: $y'_1(0) = 0$, $y'_2(0) = \sqrt{3}$, $y'_3(0) = -\sqrt{3}$.

112. Найти y', y'' и y''', если $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Решение. Пользуясь формулой $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad (x \neq -2y);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x + 2y)(2 + y') - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2} = -\frac{18}{(x + 2y)^3} \quad (x \neq -2y);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{54}{(x + 2y)^4}(1 + 2y') = \frac{-162x}{(x + 2y)^5} \quad (x \neq -2y).$$

113. Найти y', y'' и y''' при $x = 0$, $y = 1$, если

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0. \tag{1}$$

Решение. Трижды дифференцируя равенство (1):

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0;$$
$$2 - 2y' - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0;$$
$$-3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0$$

и подставляя в результаты значения $x = 0$ и $y = 1$, получаем систему уравнений $3y' = 0$, $2 + 3y'' = 0$, $2 + 3y''' = 0$, из которой находим: $y' = 0$; $y'' = -\frac{2}{3}$; $y''' = -\frac{2}{3}$.

114. Доказать, что для кривой 2-го порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

справедливо равенство

$$\frac{d^3}{dx^3}\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right)=0. \tag{1}$$

Решение. Из уравнения кривой получаем:

$$y=\frac{1}{c}\left(-(bx+e)\pm\sqrt{(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf}\right).$$

Находим вторую производную:

$$y'=\frac{1}{c}\left(-b\pm\frac{(b^2-ac)x+(be-cd)}{\sqrt{(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf}}\right);$$

$$y''=\pm\frac{1}{c}\frac{(b^2-ac)(e^2-cf)-(be-cd)^2}{\sqrt{((b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf)^3}}.$$

Отсюда получаем равенство

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\left(\pm\frac{(b^2-ac)(e^2-cf)-(be-cd)^2}{c}\right)^{-\frac{2}{3}}((b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf),$$

из которого следует равенство (1).

Для функции $z=z(x, y)$ найти частные производные первого и второго порядков, если:

115. $z^3-3xyz=a^3$.

Решение. Частные производные функции $z(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, z)=0$, находим по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Для нашего случая имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}\quad (z^2\neq xy).$$

Учитывая, что $z=z(x, y)$, находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(z^2-xy)\,y\frac{\partial z}{\partial x}-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)}{(z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{(z^2-xy)\,y\frac{yz}{z^2-xy}-yz\left(2z\frac{yz}{z^2-xy}-y\right)}{(z^2-xy)^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2yx^3z}{(z^2-xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(z^2-xy)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=$$

$$=\frac{(z^2-xy)\left(z+\frac{xyz}{z^2-xy}\right)-yz\left(\frac{2xz^2}{z^2-xy}-x\right)}{(z^2-xy)^2}=\frac{z(z^4-2z^2xy-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}\quad (z^2\neq xy).$$

116. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Решение. Аналогично предыдущему имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\operatorname{tg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\sqrt{x^2-y^2}\cos^{-2}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\dfrac{xz}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}}{1-\sqrt{x^2-y^2}\cos^{-2}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}}.$$

Из условия следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \cos^{-2}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{z^2}{x^2-y^2}+1.$$

Используя эти равенства, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\dfrac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{xz}{(x^2-y^2)}\left(\dfrac{z^2}{x^2-y^2}+1\right)}{-\dfrac{z^2}{x^2-y^2}}=\frac{xz}{x^2-y^2}\quad(x^2\neq y^2).$$

Таким же способом находим: $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{yz}{x^2-y^2}\ (x^2\neq y^2)$.

Находим вторые производные, используя найденные первые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2-y^2)\left(z+x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-xz\cdot 2x}{(x^2-y^2)^2}=$$

$$=\frac{(x^2-y^2)\left(z+\dfrac{x^2z}{x^2-y^2}\right)-2zx^2}{(x^2-y^2)^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}\quad(x^2\neq y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x^2-y^2)\,x\dfrac{\partial z}{\partial y}-xz\,(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\,x\dfrac{(-yz)}{x^2-y^2}+2xyz}{(x^2-y^2)^2}=$$

$$=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}\quad(x^2\neq y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{(x^2-y^2)\left(z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\,(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}\quad(x^2\neq y^2).$$

Найти dz и d^2z, если:

117. $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}+1$.

Решение. Считая, что $z=z(x,\ y)$, в результате дифференцирования получаем:

$$\frac{z\,dx-x\,dz}{z^2}=\frac{y}{z}\,\frac{y\,dz-z\,dy}{y^2},$$

$$yz\,dx-xy\,dz-yz\,dz+z^2\,dy=0. \tag{1}$$

Отсюда

$$dz=\frac{z\,(y\,dx+z\,dy)}{y\,(x+z)}\quad(x\neq -z). \tag{2}$$

Дифференцируя равенство (1) и выполняя упрощения, находим:

$$y(x+z)\,d^2z = z\,dx\,dy + (z\,dy - x\,dy)\,dz - y\,dz^2,$$

откуда, на основании равенства (2), окончательно получаем:

$$d^2z = -\frac{z^2(y\,dx - x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3} \quad (x \neq -z).$$

118. $z - x = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x}$.

Решение. Дифференцируя, получаем:

$$d(z-x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{z-x}\right)^2}\cdot\frac{(z-x)\,dy - y\,d(z-x)}{(z-x)^2};$$

отсюда

$$((z-x)^2 + y^2 + y)\,d(z-x) = (z-x)\,dy, \tag{1}$$

или $dz = dx + \dfrac{(z-x)\,dy}{(z-x)^2+y^2+y}$.

Дифференцируя равенство (1): $((z-x)^2+y^2+y)\,d^2(z-x) = -2((z-x)\,d(z-x)+y\,dy)\,d(z-x)$ и подставляя в результат выражение для $d(z-x)$, найденное из (1), получаем:

$$d^2(z-x) = d^2z = -\frac{2(y+1)(z-x)((z-x)^2+y^2)}{((z-x)^2+y^2+y)^3}\,dy^2.$$

119. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2) = 0$.

Решение. Последовательно дифференцируя данное равенство, находим:

$$F'_1(dx+dy+dz) + F'_2(2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz) = 0; \tag{1}$$

$$F''_{11}(dx+dy+dz)^2 + 2F''_{12}(dx+dy+dz)(2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz) + \\ + F'_1 d^2z + F''_{22}(2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz)^2 + 2F'_2(dx^2+dy^2+dz^2+z d^2z) = 0.$$

Найденное из первого равенства выражение $2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = -\dfrac{F'_1}{F'_2}(dx+dy+dz)$ подставляем во второе. В результате после преобразований имеем:

$$(F'_1 + 2zF'_2)\,d^2z = \frac{-F'^2_1F''_{22} + 2F'_1F'_2F''_{12} - F'^2_2F''_{11}}{F'^2_2}(dx+dy+dz)^2 - \\ - 2F'_2(dz^2+dx^2+dy^2). \tag{2}$$

Определив из равенства (1)

$$dz = -\frac{(F'_1+2xF'_2)\,dx + (F'_1+2yF'_2)\,dy}{F'_1+2zF'_2}, \tag{3}$$

вычислим сумму

$$dx + dy + dz = \frac{2F'_2((z-x)\,dx + (z-y)\,dy)}{F'_1+2zF'_2}. \tag{4}$$

Из равенств (2), (3) и (4) находим второй дифференциал

$$d^2z = -\frac{4(F_1'^2F_{22}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_2'^2F_{11}'')}{(F_1' + 2zF_2')^3}((z-x)^2dx^2 + 2(z-x)(z-y)\,dx\,dy +$$
$$+(z-y)^2dy^2) - 2F_2'\frac{(F_1' + 2xF_2')^2dx^2 + 2(F_1' + 2xF_2')(F_1' + 2yF_2')dx\,dy}{(F_1' + 2zF_2')^3} +$$
$$+\frac{(F_1' + 2yF_2')^2dy^2}{(F_1' + 2zF_2')^3} - 2F_2'(dx^2 + dy^2)(F_1' + 2zF_2')^{-1}.$$

Половина коэффициента при $dx\,dy$ равна $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4(z-x)(z-y)}{(F_1' + 2zF_2')^3}(F_1'^2F_{22}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_2'^2F_{11}'') -$$
$$-\frac{2(F_1' + 2xF_2')(F_1' + 2yF_2')}{(F_1' + 2zF_2')^3}F_2', \quad F_1' + 2zF_2' \neq 0.$$

120. Найти d^2z, если а) $F(x+z,\ y+z) = 0$; б) $F\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right) = 0$.

Решение. а) Последовательно дифференцируя, получаем:

$$F_1'(dx+dz) + F_2'(dy+dz) = 0; \qquad (1)$$

$$F_{11}''\cdot(dx+dz)^2 + 2F_{12}''(dx+dz)(dy+dz) +$$
$$+F_{22}''(dy+dz)^2 + (F_1' + F_2')\,d^2z = 0. \qquad (2)$$

Из равенства (1) находим первый дифференциал:

$$dz = -\frac{F_1'\,dx + F_2'\,dy}{F_1' + F_2'}$$

и вычисляем суммы:

$$dx + dz = dx - \frac{F_1'\,dx + F_2'\,dy}{F_1' + F_2'} = \frac{F_2'(dx-dy)}{F_1' + F_2'},$$
$$dy + dz = dy - \frac{F_1'\,dx + F_2'\,dy}{F_1' + F_2'} = -\frac{F_1'(dx-dy)}{F_1' + F_2'}.$$

Используя эти соотношения, из равенства (2) находим второй дифференциал:

$$d^2z = -(F_1' + F_2')^{-3}(F_2'^2F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2F_{22}'')(dx-dy)^2.$$

б) Имеем:

$$F_1'\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2} + F_2'\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} = 0. \qquad (3)$$

Умножая это равенство на z^2 и еще раз дифференцируя, получаем:

$$F_{11}''\frac{(z\,dx - x\,dz)^2}{z^2} + 2F_{12}''\frac{(z\,dx - x\,dz)(z\,dy - y\,dz)}{z^2} +$$
$$+F_{22}''\frac{(z\,dy - y\,dz)^2}{z^2} - (xF_1' + yF_2')\,d^2z = 0. \qquad (4)$$

Из равенства (3) находим первый дифференциал:

$$dz = z\cdot\frac{F_1'\,dx + F_2'\,dy}{xF_1' + yF_2'}$$

и вычисляем суммы:

$$z\,dx - x\,dz = zF'_2 \frac{y\,dx - x\,dy}{xF'_1 + yF'_2}; \quad z\,dy - y\,dz = -zF'_1 \frac{y\,dx - x\,dy}{xF'_1 + yF'_2}. \qquad (5)$$

Решая равенство (4) относительно d^2z и используя равенства (5), находим второй дифференциал:

$$d^2z = (xF'_1 + yF'_2)^{-3} (F'^2_2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + F'^2_1 F''_{22}) (y\,dx - x\,dy)^2.$$

121. Пусть $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$. Доказать, что $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

Доказательство. Предполагая, что $x = x(y, z)$, из тождества $F(x(y, z), y, z) \equiv 0$ находим $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}$. Поступая аналогично и в других случаях, получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}.$$

Из найденных соотношений вытекает равенство:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) = -1.$$

122. Найти $\frac{dx}{dz}$ и $\frac{dy}{dz}$, если

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \qquad (1)$$

Решение. Данная система определяет функции $x = x(z)$ и $y = y(z)$, производные которых находятся по формулам (4) пункта 4°. Дифференцируя равенства (1) по z, получаем систему

$$\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \quad 2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} + 2z = 0,$$

из которой находим: $\frac{dx}{dz} = \frac{y - z}{x - y}$; $\frac{dy}{dz} = \frac{z - x}{x - y}$ $(x \neq y)$.

123. Найти $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, если $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$, $x + y + z = 2$.

Решение. Предполагая, что данная система определяет функции $x = x(z)$ и $y = y(z)$, дифференцированием ее по z получаем:

$$2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} = z, \quad \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1. \qquad (1)$$

Полагая в (1) $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, получаем систему

$$\frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz} = 1, \quad \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1,$$

из которой находим: $\frac{dx}{dz} = 0$, $\frac{dy}{dz} = -1$.

Для нахождения вторых производных продифференцируем равенства (1) по z:

$$2x\frac{d^2x}{dz^2}+2y\frac{d^2y}{dz^2}+2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=1;\ \frac{d^2x}{dz^2}+\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

Полагая в этих равенствах $x=1$, $y=-1$, $\frac{dx}{dz}=0$ и $\frac{dy}{dz}=-1$, получаем систему, решая которую, находим: $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4}$, $\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}$.

124. Найти du, dv, d^2u, d^2v, если $u+v=x+y$, $y\sin u-x\sin v=0$.

Решение. Дифференцируя данные равенства, получаем систему

$$du+dv=dx+dy,\ y\cos u\,du-x\cos v\,dv=\sin v\,dx-\sin u\,dy, \tag{1}$$

решая которую, находим:

$$du=\frac{(x\cos v+\sin v)\,dx+(x\cos v-\sin u)\,dy}{x\cos v+y\cos u},$$
$$dv=\frac{(y\cos u-\sin v)\,dx+(y\cos u+\sin u)\,dy}{x\cos v+y\cos u}.$$

Для нахождения вторых дифференциалов продифференцируем систему (1). После простых преобразований получим:

$$y\cos u\,d^2u-x\cos v\,d^2v=(2\cos v\,dx-x\sin v\,dv)\,dv+$$
$$+(y\sin u\,du-2\cos u\,dy)\,du,$$
$$d^2u+d^2v=0.$$

Отсюда

$$d^2u=-d^2v=\frac{(2\cos v\,dx-x\sin v\,dv)\,dv+(y\sin u\,du-2\cos u\,dy)\,du}{y\cos u+x\cos v}.$$

125. Найти du, dv, d^2u, d^2v при $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, если $e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}$.

Решение. Дифференцируя обе части данной системы, имеем:

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}-e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}=\frac{dx}{\sqrt{2}},$$
$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}+e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}=\frac{dy}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Полагая здесь $x=y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, получаем систему

$$du-dv+\frac{\pi}{4}dy=dx,\ du+dv-\frac{\pi}{4}dy=dy,$$

из которой находим:

$$du=\frac{1}{2}(dx+dy),\ dv=\frac{\pi}{4}dy-\frac{1}{2}(dx-dy). \tag{2}$$

Далее, дифференцируя равенства (1), получаем:

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{x^2\,d^2u-2\,(x\,du-u\,dx)\,dx}{x^3}-e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{y^2\,d^2v-2(y\,dv-v\,dy)dy}{y^3}+$$
$$+e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\left(\left(\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}\right)^2-\left(\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}\right)^2\right)-2e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\times$$
$$\times\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}\cdot\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}=0,$$

$$e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{x^2\,d^2u-2\,(x\,du-u\,dx)\,dx}{x^3}+e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\times$$
$$\times\frac{y^2\,d^2v-2\,(y\,dv-v\,dy)\,dy}{y^3}+e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}\left(\left(\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}\right)^2-\left(\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}\right)^2\right)+$$
$$+2e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{x\,du-u\,dx}{x^2}\cdot\frac{y\,dv-v\,dy}{y^2}=0.$$

Полагая в последних равенствах $x=y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, получаем систему

$$d^2u-2du\,dx-d^2v+2dv\,dy-\frac{\pi}{2}\,dy^2+du^2-$$
$$-\left(dv-\frac{\pi}{4}\,dy\right)^2-2du\left(dv-\frac{\pi}{4}\,dy\right)=0,$$
$$d^2u-2du\,dx+d^2v-2\,dv\,dy+\frac{\pi}{2}\,dy^2+du^2-$$
$$-\left(dv-\frac{\pi}{4}\,dy\right)^2+2du\left(dv-\frac{\pi}{4}\,dy\right)=0. \qquad (3)$$

Из систем (2) и (3) находим: $d^2u=dx^2$, $d^2v=\frac{1}{2}\,(dy-dx)^2$.

126. Пусть $x=t+t^{-1}$, $y=t^2+t^{-2}$, $z=t^3+t^{-3}$. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Р е ш е н и е. Система определяет две параметрически заданные функции:

$$x=t+t^{-1},\quad y=t^2+t^{-2} \qquad \text{и} \qquad x=t+t^{-1},\quad z=t^3+t^{-3}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-2t^{-3}}{1-t^{-2}}=2\left(t+\frac{1}{t}\right)\ (t\neq\pm1);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\,(1-t^{-2})}{1-t^{-2}}=2\ (t\neq\pm1);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3t^{-4}}{1-t^{-2}}=3\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)\ (t\neq\pm1);$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6\,(t-t^{-3})}{1-t^{-2}}=6\left(t+\frac{1}{t}\right)\ (t\neq\pm 1).$$

127. В какой области плоскости Oxy система уравнений

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3, \tag{1}$$

где параметры u и v принимают всевозможные вещественные значения, определяют z как функцию от переменных x и y? Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Система (1) определяет однозначную функцию $z=\varphi(x,\ y)$ для такого множества точек $(x,\ y)$, для которого система

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2 \tag{2}$$

имеет однозначное решение относительно переменных u и v. Система (2) состоит из непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому, если якобиан $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ отличен от нуля в некоторой точке $(u,\ v)$, то в окрестности этой точки система (2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y). \tag{3}$$

Подставляя равенства (3) в третье из уравнений (1), получаем функцию $z=\varphi(x,\ y)$. Функция $\varphi(x,\ y)$ — дифференцируемая (см. теоремы 3, 4, п. 4°).

Якобиан $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=2(v-u)$ отличен от нуля, если $v-u=\sqrt{2(u^2+v^2)-(u+v)^2}=\sqrt{2y-x^2}\neq 0$. Поскольку $2y-x^2=2(u^2+v^2)-(u+v)^2=(u-v)^2\geqslant 0$, то из условия $\sqrt{2y-x^2}\neq 0$ следует, что $y>\frac{x^2}{2}$. Следовательно, для множества точек $(x,\ y)$, для которого выполняется неравенство $y>\frac{x^2}{2}$, существует единственная однозначная непрерывно дифференцируемая функция $z=\varphi(x,\ y)$.

С целью вычисления частных производных находим:

$$dz=3\,(u^2\,du+v^2\,dv), \tag{4}$$

где du и dv определяются системой

$$\begin{aligned}dx&=du+dv,\\ dy&=2u\,du+2v\,dv.\end{aligned} \tag{5}$$

Заменяя в равенстве (4) du и dv их значениями, найденными из системы (5), получаем: $dz=-3uv\,dx+\frac{3}{2}(u+v)\,dy\ (u-v\neq 0)$. Коэффициенты при dx и dy равны $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ соответственно. Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{2}(u+v)\ \ (u\neq v)$.

128. Система уравнений

$$xe^{u+v}+2uv=1,\quad ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$

определяет дифференцируемые функции $u=u(x,\ y)$ и $v=v(x,\ y)$ такие, что $u(1,\ 2)=0$ и $v(1,\ 2)=0$. Найти $du(1,\ 2)$ и $dv(1,\ 2)$.

Решение. Вычисляя дифференциалы от обеих частей данных равенств, имеем:

$$xe^{u+v}(du+dv)+2(u\,dv+v\,du)+e^{u+v}\,dx=0,$$

$$ye^{u-v}(du-dv)-\frac{(1+v)\,du-u\,dv}{(1+v)^2}+e^{u-v}\,dy=2dx.$$

Полагая здесь $x=1,\ y=2,\ u=v=0$, получаем систему

$$du+dv=-dx,\quad du-2dv=2dx-dy,$$

из которой находим: $du=-\frac{1}{3}dy,\ dv=\frac{1}{3}dy-dx.$

129. Пусть

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v). \tag{1}$$

Найти частные производные первого и второго порядков от обратных функций: $u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y)$.

Решение. Дифференцируя равенства (1), получаем систему

$$dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\quad dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv, \tag{2}$$

из которой находим дифференциалы от обратных функций:

$$du=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}dx-\frac{\partial\varphi}{\partial v}dy\right),\quad dv=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}dx-\frac{\partial\varphi}{\partial u}dy\right), \tag{3}$$

где $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}$. Из равенств (3) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}. \tag{4}$$

Дифференцируем систему (2):

$$0=\frac{\partial\varphi}{\partial u}d^2u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}d^2v+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}dv^2,$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}d^2u+\frac{\partial\psi}{\partial v}d^2v+\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}dv^2$$

и находим вторые дифференциалы от обратных функций:

$$d^2u=\frac{1}{I}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)du^2+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)dv^2\right),$$

$$d^2v=\frac{1}{I}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)du^2+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)du\,dv+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)dv^2\right).$$

Подставляя в эти равенства выражения (3) для дифференциалов и собирая коэффициенты при dx^2, $2dx\,dy$ и dy^2, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{I^3}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{I^3}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{I^3}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right)$$

и т. д.

130. Функция $u=u(x)$ определяется системой уравнений:

$$u=f(x,\ y,\ z),\quad g(x,\ y,\ z)=0,\quad h(x,\ y,\ z)=0.$$

Найти $\frac{du}{dx}$ и $\frac{d^2u}{dx^2}$.

Решение. Предполагая, что данная система определяет три дифференцируемые функции $u=u(x)$, $y=y(x)$, $z=z(x)$, дифференцируем систему по x:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx},\\ 0&=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx},\\ 0&=\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dx}.\end{aligned}\tag{1}$$

Из последних двух равенств находим производные:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{I_2}{I_1},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{I_3}{I_1},\tag{2}$$

где $I_1=\frac{D(g,\ h)}{D(y,\ z)}$, $I_2=\frac{D(g,\ h)}{D(z,\ x)}$, $I_3=\frac{D(g,\ h)}{D(x,\ y)}$.

Используя (2), из первого равенства системы (1) получаем:

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_3}{I_1}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{I_1}\left(I_1\frac{\partial f}{\partial x}+I_2\frac{\partial f}{\partial y}+I_3\frac{\partial f}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{1}{I_1}\frac{D(f,\ g,\ h)}{D(x,\ y,\ z)}=\frac{I}{I_1}\quad\left(I=\frac{D(f,\ g,\ h)}{D(x,\ y,\ z)}\right).$$

Для определения $\frac{d^2u}{dx^2}$ дифференцируем систему (1):

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$0=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+$$
$$+2\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2},$$
$$0=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}+$$
$$+2\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dx}+2\frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Использовав формулы (2), последние равенства перепишем в более компактном виде:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g, \tag{3}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial h}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{I_1^2}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h.$$

Из последних двух равенств находим производные:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h-\frac{\partial h}{\partial z}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right),$$
$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g-\frac{\partial g}{\partial y}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right)$$

и вычисляем сумму

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right)\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right)=$$
$$=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h+\frac{D(h,\ f)}{D(y,\ z)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g\right). \tag{4}$$

Наконец, из равенств (3) и (4) окончательно получаем:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left(\frac{D(g,\ h)}{D(y,\ z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\right.$$
$$\left.+\frac{D(h,\ f)}{D(y,\ z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{D(f,\ g)}{D(y,\ z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right).$$

131. Пусть $x=f(u,\ v,\ w)$, $y=g(u,\ v,\ w)$, $z=h(u,\ v,\ w)$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Решение. Дифференцируя данные равенства, получаем систему:

$$dx = f'_u\,du + f'_v\,dv + f'_w\,dw,$$
$$dy = g'_u\,du + g'_v\,dv + g'_w\,dw,$$
$$dz = h'_u\,du + h'_v\,dv + h'_w\,dw.$$

Отсюда вычисляем дифференциал:

$$du = \frac{1}{\dfrac{D(f,\ g,\ h)}{D(u,\ v,\ w)}}\begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w \\ dy & g'_v & g'_w \\ dz & h'_v & h'_w \end{vmatrix} = \frac{1}{\dfrac{D(f,\ g,\ h)}{D(u,\ v,\ w)}} \times$$
$$\times\left(\frac{D(g,\ h)}{D(v,\ w)}dx + \frac{D(h,\ f)}{D(v,\ w)}dy + \frac{D(f,\ g)}{D(v,\ w)}dz\right).$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}$, где $I = \frac{D(f,\ g,\ h)}{D(u,\ v,\ w)}$, $I_1 = \frac{D(g,\ h)}{D(v,\ w)}$, $I_2 = \frac{D(h,\ f)}{D(v,\ w)}$, $I_3 = \frac{D(f,\ g)}{D(v,\ w)}$.

132. Пусть функция $z = z(x,\ y)$ удовлетворяет системе уравнений: $f(x,\ y,\ z,\ t) = 0$, $g(x,\ y,\ z,\ t) = 0$, где t — переменный параметр. Найти dz.

Решение. Имеем систему уравнений:

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz + f'_t\,dt = 0,$$
$$g'_x\,dx + g'_y\,dy + g'_z\,dz + g'_t\,dt = 0.$$

Отсюда

$$dz = -\frac{1}{\dfrac{D(f,\ g)}{D(z,\ t)}}\begin{vmatrix} f'_x\,dx + f'_y\,dy & f'_t \\ g'_x\,dx + g'_y\,dy & g'_t \end{vmatrix} = -\frac{1}{\dfrac{D(f,\ g)}{D(z,\ t)}} \times$$
$$\times\left((f'_x g'_t - f'_t g'_x)\,dx + (f'_y g'_t - f'_t g'_y)\,dy\right) = -\frac{1}{I_3}(I_1\,dx + I_2\,dy),$$

где $I_1 = \frac{D(f,\ g)}{D(x,\ t)}$, $I_2 = \frac{D(f,\ g)}{D(y,\ t)}$, $I_3 = \frac{D(f,\ g)}{D(z,\ t)}$.

133. Пусть $u = f(z)$, где z — неявная функция от переменных x и y, определяемая уравнением $z = x + y\varphi(z)$. Доказать формулу Лагранжа:

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{(\varphi(z))^n \frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Для этого прежде всего покажем, что формула Лагранжа справедлива при $n = 1$. Из уравнения $z = x + y\varphi(z)$ находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\dfrac{d\varphi}{dz}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\dfrac{d\varphi}{dz}}\quad \left(y\frac{d\varphi}{dz} \neq 1\right). \tag{1}$$

Используя эти формулы и равенство $u = f(z)$, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\dfrac{df}{dz}}{1 - y\dfrac{d\varphi}{dz}},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{df}{dz}}{1 - y\dfrac{d\varphi}{dz}}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

и мы убеждаемся в справедливости формулы Лагранжа при $n=1$.

Остается доказать, что из справедливости формулы Лагранжа при некотором $k>1$ вытекает справедливость ее при $k+1$, т. е.

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{(\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}. \tag{3}$$

Дифференцируя формулу Лагранжа при $n=k$, получаем:

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\,\partial y}\left\{(\varphi(z))^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\right). \tag{4}$$

Используя равенство $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$, вытекающее из равенств (1), и формулу (2), преобразуем выражение $\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\varphi(z))^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\} &= k(\varphi(z))^{k-1}\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \\ &= k(\varphi(z))^{k-1}\frac{d\varphi}{dz}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \\ &= k(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \\ &= k(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k\left(\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \\ &= \left\{(k+1)(\varphi(z))^k\frac{d\varphi}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}\right\}\frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (4) непосредственно следует (3).

134. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением

$$F(x + zy^{-1},\ y + zx^{-1}) = 0. \tag{1}$$

Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

Решение. Дифференцируя равенство (1), получаем:

$$F_1'\cdot\left(dx + \frac{y\,dz - z\,dy}{y^2}\right) + F_2'\cdot\left(dy + \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$dz = \frac{y(zF_2' - x^2F_1')}{x(xF_1' + yF_2')}dx + \frac{x(zF_1' - y^2F_2')}{y(xF_1' + yF_2')}dy,\quad xF_1' + yF_2' \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_2' - x^2F_1')}{x(xF_1' + yF_2')};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_1' - y^2F_2')}{y(xF_1' + yF_2')}.$$

Умножая первое равенство на x, второе на y и складывая их, убеждаемся, что

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')+x(zF_1'-y^2F_2')}{xF_1'+yF_2'}=$$
$$=\frac{xF_1'(z-xy)+yF_2'(z-xy)}{xF_1'+yF_2'}=z-xy.$$

135. Показать, что функция $z=z(x, y)$, определяемая системой уравнений:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha),$$
$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha),$$

где $\alpha=\alpha(x, y)$ — переменный параметр и $f(\alpha)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

Решение. Дифференцируя первое равенство системы, получаем: $\cos\alpha\,dx+\sin\alpha\,dy+(-x\sin\alpha+y\cos\alpha-f'(\alpha))\,d\alpha+\frac{dz}{z}=0$. В силу второго равенства системы, коэффициент при $d\alpha$ равен нулю. Поэтому $dz=-z\cos\alpha\,dx-z\sin\alpha\,dy$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}=-z\cos\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\cos^2\alpha+z^2\sin^2\alpha=z^2$.

136. Показать, что функция $z=z(x, y)$, заданная системой уравнений

$$(z-f(\alpha))^2=x^2(y^2-\alpha^2),$$
$$(z-f(\alpha))f'(\alpha)=\alpha x^2,$$

где $\alpha=\alpha(x, y)$ — переменный параметр и $f(\alpha)$ — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

Решение. Дифференцируя первое равенство системы, получаем:

$$2(z-f(\alpha))(dz-f'(\alpha)\,d\alpha)=2x(y^2-\alpha^2)\,dx+2x^2(y\,dy-\alpha\,d\alpha).$$

В силу второго равенства, коэффициент при $d\alpha$ равен нулю, а в силу первого равенства, $y^2-\alpha^2=\frac{1}{x^2}(z-f(\alpha))^2$. Пользуясь этим, получаем:

$$dz=\frac{1}{x}(z-f(\alpha))\,dx+\frac{x^2y\,dy}{z-f(\alpha)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-f(\alpha)}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}\quad (z\neq f(\alpha)).$$

Отсюда вытекает, что $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-f(\alpha)}{x}\cdot\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}=xy$.

137. Показать, что функция $z=z(x, y)$, заданная системой уравнений

$$z=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\quad 0=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),$$

где $\alpha=\alpha(x, y)$ — переменный параметр, а $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ — произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=$ $=0$.

Решение. Из первого равенства имеем: $dz = \alpha dx + \varphi dy + (x + y\varphi' + \psi')\,d\alpha$. Согласно условию, коэффициент при $d\alpha$ равен нулю. Учитывая это, находим второй дифференциал:

$$d^2z = (dx + \varphi' dy)\,d\alpha. \tag{1}$$

Дифференциал $d\alpha$ находим из второго равенства:

$$dx + \varphi' dy + (y\varphi'' + \psi'')\,d\alpha = 0, \quad d\alpha = -\frac{dx + \varphi' dy}{y\varphi'' + \psi''}.$$

Отсюда и из (1) получаем:

$$d^2z = -\frac{(dx + \varphi' dy)^2}{y\varphi'' + \psi''}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{y\varphi'' + \psi''}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\varphi'}{y\varphi'' + \psi''},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(\varphi')^2}{y\varphi'' + \psi''}.$$

Теперь убеждаемся, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{(\varphi')^2}{(y\varphi'' + \psi'')^2} - \frac{(\varphi')^2}{(y\varphi'' + \psi'')^2} = 0 \quad (y\varphi'' + \psi'' \neq 0).$$

§ 5. Замена переменных

1°. Замена переменных в выражениях, содержащих обыкновенные производные. Пусть дано некоторое выражение

$$w = w\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right), \tag{1}$$

содержащее независимую переменную x, функцию от нее y и производные от y по x до некоторого порядка. Требуется перейти к новым переменным — независимой переменной t и функции от нее u. Причем эти переменные связаны с прежними переменными x и y уравнениями:

$$x = f(t,\ u), \quad y = g(t,\ u). \tag{2}$$

Из уравнений (2) находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \ \ldots \tag{3}$$

Используя равенства (1) — (3), получаем

$$w = F\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2},\ \ldots\right).$$

Если старые и новые переменные связаны равенствами:

$$\Phi(x,\ y,\ t,\ u) = 0, \quad \Psi(x,\ y,\ t,\ u) = 0, \tag{4}$$

то, используя правила дифференцирования неявной функции, из (4) находим: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ..., а затем вычисляем производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...

2°. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные. Ограничимся случаем двух независимых переменных. В остальных случаях поступаем аналогично. Предположим, что нам задано выражение

$$A = F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \ldots\right), \tag{5}$$

содержащее независимые переменные x, y, функцию $z = z(x,\ y)$ и ее частные производные. Вместо независимых переменных x, y и функции $z = z(x,\ y)$ требуется ввести новые независимые переменные u, v и новую функцию $w = w(u,\ v)$. Переменные u, v, w выражаются через x, y, z с помощью равенств:

$$u = \varphi(x,\ y,\ z), \quad v = \psi(x,\ y,\ z), \quad w = \chi(x,\ y,\ z), \tag{6}$$

где функции φ, ψ и χ достаточное число раз дифференцируемы и $\frac{D(\varphi,\ \psi,\ \chi)}{D(x,\ y,\ z)} \neq 0$ в интересующей нас области.

Для решения поставленной задачи достаточно выразить аргументы функции F через u, v, w, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, ... С этой целью запишем дифференциалы равенств (6):

$$du = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \tag{7}$$

$$dv = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \tag{8}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv = \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right). \tag{9}$$

Заменяя в последнем равенстве du и dv их выражениями (7) и (8) и приравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем систему:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \\
\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},
\end{gathered} \tag{10}$$

из которой находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \chi}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial z}}. \tag{11}$$

Частные производные второго порядка определяются из равенств, полученных в результате вычисления первого дифференциала от уже найденных производных первого порядка.

Аналогично производится замена переменных и в случае, когда новые переменные связаны с прежними переменными равенствами: $\Phi_1(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z) = 0$, $\Phi_2(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z) = 0$, $\Phi_3(u,\ v,\ w,\ x,\ y,\ z) = 0$.

В частности, если $x=f(u, v, w)$, $y=g(u, v, w)$, $z=h(u, v, w)$, где функции f, g и h достаточное число раз дифференцируемы, поступаем следующим образом. Используя инвариантность формы первого дифференциала в равенствах:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}du+\frac{\partial g}{\partial v}dv+\frac{\partial g}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv\right)\right)=\frac{\partial h}{\partial u}du+\frac{\partial h}{\partial v}dv+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv\right), \qquad (12)$$

сравниваем коэффициенты при du, dv и получаем систему

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

из которой находим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ как функции $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$.

138. Преобразовать уравнения: а) $y'y'''-3y''^2=x$; б) $y'^2y^{\mathrm{IV}}-10y'y''y'''+12y''^3=0$, приняв y за новую независимую переменную.

Решение. Согласно правилу дифференцирования обратной функции, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}};\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)=\frac{-\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{d}{dy}\left(\frac{-\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}+3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{d^4x}{dy^4}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+10\frac{d^3x}{dy^3}\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dx}{dy}-15\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^3}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^7}.$$

Заменяя в равенствах а) и б) производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ и $\frac{d^4y}{dx^4}$ только что вычисленными их значениями, получаем: а) $\frac{d^3x}{dy^3}+x\left(\frac{dx}{dy}\right)^5=0$; б) $\frac{d^5x}{dy^5}=0$.

139. Преобразовать уравнение $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, приняв x за функцию и $t=xy$ — за независимое переменное.

Решение. Дифференцируя равенство $t = xy$, получаем: $dt = xdy + ydx$. Отсюда и из того, что $y = \frac{t}{x}$, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \frac{dx}{dt}} - \frac{t}{x^2}. \qquad (1)$$

Вычисляем вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x\frac{dx}{dt}} - \frac{t}{x^2}\right) = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} - \frac{2}{x^2\frac{dx}{dt}} + \frac{2t}{x^3}. \qquad (2)$$

Из условия задачи и равенств (1), (2) окончательно получаем: $\frac{d^2x}{dt^2} - t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 0$.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

140. $x^2y'' + xy' + y = 0$, если $x = e^t$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Заменяя в данном уравнении x на e^t, производные y' и y'' — вычисленными выше их значениями, получаем: $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

141. $y''' = \frac{6y}{x^3}$, если $t = \ln|x|$.

Решение. При $x \neq 0$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).$$

Таким образом, данное уравнение приобретает вид:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

142. $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$, если $x = \cos t$.

Решение. Вычислим производные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin t}\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sin^2 t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t}\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя их в данное уравнение и заменяя x на $\cos t$, получаем: $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$.

143. $y''+y'\operatorname{th}x+\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=0$, если $x=\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\cdot\frac{dy}{dt}=\sin t\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sin t\frac{d}{dt}\left(\sin t\frac{dy}{dt}\right)=\sin^2 t\frac{d^2y}{dt^2}+\sin t\cos t\frac{dy}{dt}.$$

А так как $\operatorname{th}x=-\cos t$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=\sin^2 t$, то

$$y''+y'\operatorname{th}x+\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2x}y=\sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y\right)=0.$$

Отсюда $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$.

144. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, если $y=ue^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}$.

Решение. Находим производные:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}-\frac{p(x)}{2}ue^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}=\left(\frac{du}{dx}-\frac{p(x)u}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2u}{dx^2}-p(x)\frac{du}{dx}-\frac{u}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{up^2(x)}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}.$$

После подстановки их в уравнение получаем:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\left(q(x)-\frac{p^2(x)}{4}-\frac{1}{2}p'(x)\right)u=0.$$

145. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$, если $x=e^t$ и $y=ue^{2t}$, где $u=u(t)$.

Решение. По формулам (3) п. 1°, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{du}{dt}+2u\right)e^{2t}}{e^t}=\left(\frac{du}{dt}+2u\right)e^t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d^2u}{dt^2}+3\frac{du}{dt}+2u\right)e^t}{e^t}=\frac{d^2u}{dt^2}+3\frac{du}{dt}+2u.$$

Тогда уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0.$$

146. $(1+x^2)^2 y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$ и $y = \dfrac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{u' \cos t + u \sin t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^2 t}} = u' \cos t + u \sin t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{u'' \cos t - u' \sin t + u' \sin t + u \cos t}{\dfrac{1}{\cos^2 t}} = (u'' + u) \cos^3 t,$$

где $u' = \dfrac{du}{dt}$. Следовательно, $\dfrac{1}{\cos^4 t}(u'' + u)\cos^3 t = \dfrac{u}{\cos t}$, или $u'' = 0$.

147. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, если $x = u + t$ и $y = u - t$, где $u = u(t)$.

Решение. По формулам (3) п. 1°, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'-1}{u'+1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{u'+1} \cdot \frac{(u'+1)u'' - (u'-1)u''}{(u'+1)^2} = \frac{2u''}{(u'+1)^3},$$

где $u' = \dfrac{du}{dt}$. Подставляя эти выражения в уравнение и заменяя в нем x и y соответственно на $u + t$ и $u - t$, получаем: $u'' + 8u(u')^3 = 0$.

148. $y''' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, если $x = \dfrac{1}{t}$ и $y = \dfrac{u}{t}$, где $u = u(t)$

Решение. По формулам (3) п. 1°, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{t\dfrac{du}{dt} - u}{t^2}}{-\dfrac{1}{t^2}} = -t\frac{du}{dt} + u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -t^2\left(-t\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt}\right) = t^3\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = -t^2\left(t^3\frac{d^3u}{dt^3} + 3t^2\frac{d^2u}{dt^2}\right).$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид:

$$t^5\frac{d^3u}{dt^3} + (3t^4+1)\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0.$$

149. Преобразовать уравнение Стокса $y'' = \dfrac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}$, полагая $u = \dfrac{y}{x-b}$, $t = \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|$ и считая u функцией переменной t.

Решение. Из формул преобразования при $\dfrac{x-a}{x-b} > 0$ находим:

$$x - a = \frac{(a-b)e^t}{1-e^t}, \quad x - b = \frac{a-b}{1-e^t}, \quad y = \frac{(a-b)u}{1-e^t}.$$

Следовательно,

$$\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{Au(1-e^t)^3}{(a-b)^3e^{2t}}. \qquad (1)$$

Находим производные:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=(e^{-t}-1)\frac{du}{dt}+u, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(1-e^t)^3\left(\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}\right)}{(a-b)e^{2t}}.$$

Сравнивая равенства (1) и (2), после упрощений получаем:

$$\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}=\frac{Au}{(a-b)^2}.$$

Аналогично поступаем, если $\frac{x-a}{x-b}<0$.

150. Преобразовать уравнение $(1-x^2)^2y''+y=0$, полагая $x=\operatorname{th}t$, $y=\frac{u}{\operatorname{ch}t}$, где $u=u(t)$.

Решение. Дифференцируя y как параметрически заданную функцию переменной t, находим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t}{\operatorname{ch}^2t}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2t}}=u'\operatorname{ch}t-u\operatorname{sh}t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{u''\operatorname{ch}t-u\operatorname{ch}t}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2t}}=(u''-u)\operatorname{ch}^3t.$$

Отсюда и из условия следует: $\frac{d^2u}{dt^2}=0$.

151. Доказать, что шварциан $S(x(t))=\frac{x'''(t)}{x''(t)}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''(t)}{x'(t)}\right)^2$ не меняет своего значения при дробно-линейном преобразовании $y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}$ $(ad-bc\neq 0)$.

Решение. Имеем:

$$y'=(ad-bc)\frac{x'}{(cx+d)^2};\quad y''=(ad-bc)\left(\frac{x''}{(cx+d)^2}-\frac{2cx'^2}{(cx+d)^3}\right);$$

$$y'''=(ad-bc)\left(\frac{x'''}{(cx+d)^2}-\frac{6cx'x''}{(cx+d)^3}+\frac{6c^2x'^3}{(cx+d)^4}\right).$$

Отсюда

$$S(y(t))=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\frac{x'''}{x'}-\frac{6cx''}{cx+d}+\frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}-\frac{2cx'}{cx+d}\right)^2=$$

$$= \frac{x'''}{x'} - \frac{6cx''}{cx+d} + \frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{6cx''}{cx+d} - \frac{6c^2x'^2}{(cx+d)^2} =$$

$$= \frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = S(x(t)).$$

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, следующие уравнения:

152. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение. Используя формулы (3) п. 1°, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

После преобразований получаем: $\dfrac{dr}{d\varphi} = r$.

153. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$.

Решение. Используя равенство (1) предыдущего примера, получаем:

$$\left(r\cos\varphi\,\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - r\sin\varphi\right)^2 = 2r^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \left(\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right).$$

Отсюда $r'^2 = \dfrac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}\, r^2$.

154. $(x^2 + y^2)^2\, y'' = (x + yy')^3$.

Решение. Дифференцируя равенство (1) из примера 152, получаем:

$$y'' = \frac{\frac{d}{d\varphi}(y')}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3} \quad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ r' = \frac{dr}{d\varphi}\right).$$

Так как $(x^2 + y^2)^2 = r^4$, а $(x + yy')^3 = \dfrac{r^3 r'^3}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}$, то данное уравнение запишется в следующем виде:

$$\frac{r^4(r^2 + 2r'^2 - rr'')}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3} = \frac{r^3 r'^3}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3},\quad r'\cos\varphi - r\sin\varphi \neq 0,$$

или $r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3$.

155. Кривизну плоской кривой $K = \dfrac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}$ выразить в полярных координатах r и φ.

Решение. Используя выражения для y' и y'', записанные в полярной системе координат (см. примеры 152, 154), находим:

$$K = \frac{\left|\dfrac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}\right|}{\left(1 + \left(\dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (r'\cos\varphi - r\sin\varphi \neq 0).$$

156. В системе уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

перейти к полярной системе координат.

Решение. Дифференцируя равенства $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ по t, получаем систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

из которой находим:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\varphi + \frac{dy}{dt}\sin\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\left(-\frac{dx}{dt}\sin\varphi + \frac{dy}{dt}\cos\varphi\right).$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi$, $\frac{dy}{dt} = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi$, окончательно находим: $\frac{dr}{dt} = kr^3$, $\frac{d\varphi}{dt} = -1$.

157. Преобразовать выражение $w = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}$, вводя новые функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Дифференцируя равенство $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, находим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}.$$

Отсюда $r^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$.

Дифференцируя последнее равенство, окончательно получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = w.$$

158. В преобразовании Лежандра каждой точке (x, y) кривой $y = y(x)$ ставится в соответствие точка (X, Y), где $X = y'$, $Y = xy' - y$. Найти Y', Y'' и Y'''.

Решение. Считая x параметром, находим:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{xy'' + y' - y'}{y''} = x;$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dY}{dX}\right)}{\frac{dX}{dx}}=\frac{1}{y''};\quad \frac{d^3Y}{dX^3}=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2Y}{dX^2}\right)}{\frac{dX}{dx}}=-\frac{y'''}{(y'')^3}\quad (y''\neq 0).$$

Вводя новые независимые переменные ξ и η, решить следующие уравнения:

159. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, если $\xi=x+y$ и $\eta=x-y$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 2\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$. Таким образом, решая уравнение $\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$, находим $z=\varphi(\xi)$, или $z=\varphi(x+y)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

160. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, если $\xi=x$ и $\eta=x^2+y^2$.

Решение. Вычисляя производные $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot 2y$, находим: $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}\equiv y\frac{\partial z}{\partial \xi}=0$. Отсюда $z=\varphi(\eta)$, или $z=\varphi(x^2+y^2)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

161. $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$, если $\xi=x$ и $\eta=y-bz$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^{-1}$. Подставляя найденные производные в данное уравнение, получаем: $\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a}$. Из последнего равенства находим $z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)$, или $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

162. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, если $\xi=x$ и $\eta=\frac{y}{x}$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{1}{x}.$$

Таким образом, уравнение представляется в виде $\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z$. Отсюда $z=\xi\varphi(\eta)$, или $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция.

Принимая u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

163. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, если $u=\ln x$ и $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{x},\qquad (x\neq 0).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}};$$

Используя эти равенства и то, что $x=e^u$, $y=\operatorname{sh}v$, из условия получаем: $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh}v$.

164. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ и $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Решение. Аналогично предыдущему имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, получаем: $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0$.

165. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, если $u=\frac{y}{x}$ и $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\left(\frac{x+z\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\left(\frac{y+z\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{v}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1-\frac{v}{v-z}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Таким образом, данное уравнение представимо в виде $\frac{x^2+y^2+v^2}{v-z}\times\frac{\partial z}{\partial v}=v$, или $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}$.

166. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$, если $u=2x-z^2$ и $v=\frac{y}{z}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial u}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Тогда данное уравнение запишется в виде:

$$\frac{2x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}=\frac{x}{z}.$$

Полагая здесь $2x=u+z^2$, $\frac{y}{z}=v$, $\frac{x}{z}=\frac{u+z^2}{2z}$, после упрощений получаем: $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\frac{u+z^2}{z^2-u}$ $(z^2\neq u)$.

167. Преобразовать выражение

$$A=(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-e^{x+y}),$$

приняв за новые независимые переменные

$$\xi=y+ze^{-x},\quad \eta=x+ze^{-y}. \tag{1}$$

Решение. Из системы

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(e^{-x}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x}z\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(1+e^{-y}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(1+e^{-x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(e^{-y}\frac{\partial z}{\partial y}-e^{-y}z\right),$$

полученной в результате дифференцирования z как сложной функции, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

Далее, путем простых преобразований получаем:

$$A=\frac{(z+e^x)\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}-ze^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+(z+e^y)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}-ze^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}-(z^2-e^{x+y})=$$

$$=\frac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}\quad\left(1-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}\neq 0\right),$$

где x и y определяются системой (1).

168. Преобразовать выражение $A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, полагая $x=uv$, $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$.

Решение. Дифференцируя z как сложную функцию, получаем систему

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}v+\frac{\partial z}{\partial y}u,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}u-\frac{\partial z}{\partial y}v,$$

из которой находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}}{u^2+v^2}\quad (u^2+v^2\neq 0).$$

Следовательно,

$$A=\frac{\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2+\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{(u^2+v^2)^2}=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}.$$

169. Преобразовать уравнение $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а y и z — за независимые переменные.

Решение. Запишем равенство (9) п. 2°, полагая в нем $u=z$, $v=y$, $w=x$. Получим:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial x}{\partial y}dy.$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем систему

$$1=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\quad 0=\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial y},$$

из которой находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

Данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$\frac{x-z}{\frac{\partial x}{\partial z}}-\frac{y\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}=0,\text{ или }\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}\quad (y\neq 0).$$

170. Преобразовать уравнение $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а $u=y-z$, $v=y+z$ — за независимые переменные.

Решение. Полагая в равенстве (9) п. 2° $w=x$, $u=y-z$, $v=y+z$, имеем:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}\left(dy-\frac{\partial z}{\partial x}dx-\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial x}{\partial v}\left(dy+\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем:

$$1=-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x};\quad 0=\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial u}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial u}},$$

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}\equiv\frac{u}{\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial u}}-v\,\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial u}}=0.$$

После упрощений окончательно находим:

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v} \quad \left(v\neq 0, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\neq\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

171. Преобразовать выражение $A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, приняв x за функцию и $u=xz$, $v=yz$ — за независимые переменные.

Решение. Аналогично предыдущему имеем:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}\left(z\,dx+x\frac{\partial z}{\partial x}dx+x\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial x}{\partial v}\left(z\,dy+y\frac{\partial z}{\partial x}dx+y\frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Для определения $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$ получаем систему

$$1=z\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0=x\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial x}{\partial v}+y\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-z\dfrac{\partial x}{\partial u}}{x\dfrac{\partial x}{\partial u}+y\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{xu-u^2\dfrac{\partial x}{\partial u}}{x^2\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-z\dfrac{\partial x}{\partial v}}{x\dfrac{\partial x}{\partial u}+y\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{-u^2\dfrac{\partial x}{\partial v}}{x^2\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)}.$$

Следовательно,

$$A=\frac{x^2u^2-2xu^3+u^4\left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)}{x^4\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \quad \left(x^4\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\neq 0\right).$$

172. Преобразовать уравнение $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$, полагая $\xi=x$, $\eta=y-x$, $\zeta=z-x$.

Решение. Дифференцируя u как сложную функцию, находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \eta},\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$

173. В уравнении

$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+z)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$$

положить: $e^{\xi}=x-u$, $e^{\eta}=y-u$, $e^{\zeta}=z-u$.

Решение. Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$. Отсюда, пользуясь равенствами

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=e^{-\xi}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=-e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}=-e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial x},$$

находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}}{1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}}{1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}};\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}}{1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}}.$$

Используя найденные выражения для $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, а также равенства

$$x+y+z=3u+e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta},\quad y+z+u=3u+e^{\eta}+e^{\zeta},$$
$$x+z+u=3u+e^{\xi}+e^{\zeta},\quad x+y+u=3u+e^{\xi}+e^{\eta},$$

из исходного уравнения получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta}=0$$

$$\left(1+e^{-\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+e^{-\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+e^{-\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\neq 0\right).$$

Перейти к новым переменным u, v, w, где $w=w(u, v)$, в следующих уравнениях:

174. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, если $u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $w=\ln z-(x+y)$.

Решение. Пользуясь формулами (11) п. 2°, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}2x-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x^2}+1}{-\frac{1}{z}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}2y-\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{y^2}+1}{-\frac{1}{z}}.$$

Следовательно, данное уравнение запишется в виде

$$2xyz\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{yz}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+yz-2xyz\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{xz}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}-xz=(y-x)z,$$

или после упрощений $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

175. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, если $u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$, $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

Решение. Применяя формулу (11) п. 2°, находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{z^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{y^2}}{-\frac{1}{z^2}},$$

подставляя которые в данное уравнение, получаем $\frac{\partial w}{\partial u}=0$.

176. $(xy-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, если $u=yz-x$, $v=xz-y$, $w=xy-z$.

Решение. Используя ту же формулу, что и в предыдущем примере, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}z-y}{\frac{\partial w}{\partial u}y+\frac{\partial w}{\partial v}x+1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}z-\frac{\partial w}{\partial v}-x}{\frac{\partial w}{\partial u}y+\frac{\partial w}{\partial v}x+1}.$$

Отсюда и из данного уравнения получаем:

$$\frac{(xy+z)\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}z+y\right)+(1-y^2)\left(-\frac{\partial w}{\partial u}z+\frac{\partial w}{\partial v}+x\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}y+\frac{\partial w}{\partial v}x+1}=x+yz$$

или, после сведения подобных членов, $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

177. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x=ue^w$, $y=ve^w$, $z=we^w$.

Решение. Для определения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ как функций от $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$ запишем систему (13) п. 2°:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}v\frac{\partial w}{\partial u}=(1+w)\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}u\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(1+v\frac{\partial w}{\partial v}\right)=(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}}{1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}+uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}}{1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}+uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Таким образом, в новых переменных u, v и w данное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\left(ue^{w}(1+w)\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(ve^{w}(1+w)\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}{\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}+uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}=\frac{w^2e^{2w}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}(1+w)^2}{\left(1+u\frac{\partial w}{\partial u}+v\frac{\partial w}{\partial v}+uv\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2},$$

или после упрощений $\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$.

178. Преобразовать выражение

$$A=\frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}},\quad x\neq y,$$

полагая $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg} z$, $w=x+y+z$, где $w=w(u,v)$.

Решение. Пользуясь формулами (11) п. 2°, находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{x}{x^2+y^2}-1}{\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{y}{x^2+y^2}-1}{\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}-1}.$$

Подставляя их в данное выражение, получаем:

$$A=\frac{x-y}{\dfrac{1-\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}-1}{\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}-1}}=\frac{1-\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}.$$

Поскольку $x^2+y^2=e^{2u}$, $\frac{1}{1+z^2}=\cos^2 v$, то окончательно имеем:

$$A=\frac{e^{2u}}{\frac{\partial w}{\partial u}}\left(1-\cos^2 v\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

179. В уравнении $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$ положить: $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$, где $w=w(\xi,\eta,\zeta)$.

Решение. Используя свойство инвариантности первого дифференциала, имеем:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial \xi}\left(\frac{dx}{z}-\frac{x\,dz}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \eta}\left(\frac{dy}{z}-\frac{y\,dz}{z^2}\right)+\frac{\partial w}{\partial \zeta}dz=$$

$$=-\frac{u}{z^2}dz+\frac{1}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right).$$

Сравнивая коэффициенты при dx, dy и dz, получаем систему

$$\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial \xi}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$-\frac{x}{z^2}\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{u}{z^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z},$$

из которой находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial \xi},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{u}{z}-\frac{x}{z}\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{y}{z}\frac{\partial w}{\partial \eta}+z\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

Пользуясь найденными производными, данное уравнение преобразуем к виду $\zeta\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}=\xi\eta$.

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следующие выражения:

180. а) $w=x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}$; б) $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$; в) $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1}$$

Производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial r}{\partial y}$ находим из систем, полученных в результате дифференцирования равенств $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ по x и y:

$$1=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x}-r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad 0=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y}-r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$
$$0=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x};\quad 1=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{2}$$

Равенства (1) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{3}$$

Таким образом:

а) $w=r\cos\varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{r}\right)-r\sin\varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)=\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$.

б) $w=r\cos\varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)+r\sin\varphi\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{r}\right)=r\dfrac{\partial u}{\partial r}$;

в) $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{r}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$.

181. а) $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; б) $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; в) $w=$ $=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Решение. Дифференцируя равенства (3) и используя равенства (2) из примера 180, находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}+2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi\sin\varphi-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\times$$
$$\times\frac{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}{r^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r}-2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

На основании этих равенств получаем:

а) $w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$; б) $w=r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$; в) $w=\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$.

182. В выражении $I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$ сделать замену $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Решение. Поскольку (см. пример 180, равенство (3))

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r},$$

то $I=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial v}{\partial r}\right)$.

183. Решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, введя новые независимые переменные $\xi=x-at$, $\eta=x+at$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

Отсюда последовательным интегрированием находим:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi), \quad u = \int f(\xi)\, d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где $\varphi(\xi) = \int f(\xi)\, d\xi$ и $\psi(\eta)$ — произвольные дифференцируемые функции. Возвращаясь к прежним переменным, окончательно получаем: $u(t, x) = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

184. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Аналогично находим остальные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Подставляя вычисленные производные в данное уравнение, после сведения подобных членов, получаем: $3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$.

185. $(1 + x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $u = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $v = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{1}{1 + x^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy} = \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dv}{dy} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{1 + y^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{y}{\sqrt{(1 + y^2)^3}}.$$

Следовательно, уравнение преобразуется к виду $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

186. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{(y^2 - x^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{4xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \times$$
$$\times \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}-\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{4xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^4}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}-$$

$$-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

После этого данное уравнение принимает вид $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, если $u=x-2\sqrt{y}$, $v=x+2\sqrt{y}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{1}{y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\times$$

$$\times\frac{1}{y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{2y\sqrt{y}}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{2y\sqrt{y}}.$$

Заменяя в данном уравнении частные производные их вычисленными значениями, получаем: $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

188. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

Решение. Поступая так же, как и выше, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}y+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}x-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{x^2}{y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{x^2}{y^4}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{2x}{y^3}.$$

Таким образом, уравнение преобразуется к виду $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

189. С помощью линейной замены $\xi=x+\lambda_1 y$, $\eta=x+\lambda_2 y$ преобразовать уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B и C — постоянные и $AC-B^2<0$, к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0. \tag{2}$$

Найти общий вид функции, удовлетворяющей уравнению (1).

Решение. Вычисляя частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\lambda_1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\lambda_2;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\lambda_1^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\lambda_1\lambda_2+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\lambda_2^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\lambda_1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\lambda_2$$

и подставляя их в уравнение (1), получаем:

$$(C\lambda_1^2+2B\lambda_1+A)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2(C\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+A)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+$$
$$+(C\lambda_2^2+2B\lambda_2+A)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \tag{3}$$

Если λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения $C\lambda^2+2B\lambda+A=0$, т. е. $\lambda_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{C}$ $(C\neq 0)$, то в уравнении (3) коэффициенты при $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ обращаются в нуль. Поскольку $AC-B^2<0$, то $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $C\lambda_1\lambda_2+B(\lambda_1+\lambda_2)+A\neq 0$.

Следовательно, уравнение (1) преобразуется к виду (2). Решением его будет функция (см. решение уравнения (1) примера 183): $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем: $u=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y)$.

190. Доказать, что уравнение Лапласа $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ не меняется при любой невырожденной замене переменных $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, удовлетворяющей условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial v},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}=-\frac{\partial \psi}{\partial u}. \tag{1}$$

Решение. Дифференцируя z как сложную функцию и используя условие (1), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Аналогично вычисляем вторые производные $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}.$$

Складывая два последних равенства, получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{2}$$

Далее, дифференцируя первое из равенств (1) по u, второе — по v:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u},\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v},$$

убеждаемся, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=0. \tag{3}$$

Наконец, из того, что замена невырождена, из равенств (1) следует:

$$\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\neq 0.$$

Таким образом, из равенства (2) находим: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$

191. Преобразовать уравнения: а) $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; б) $\Delta(\Delta u)=0$, полагая $u=f(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. а) Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{du}{dr}\frac{x}{r};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

Аналогично находим: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\frac{r^2-y^2}{r^3}$. Следовательно, $\Delta u\equiv$ $\equiv\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$.

б) Поступая, как и выше, получаем:

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}=\frac{d^3u}{dr^3}\frac{x}{r}+\frac{d^2u}{dr^2}\frac{x}{r^2}-\frac{du}{dr}\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial x^2}=\frac{d^4u}{dr^4}\frac{x^2}{r^2}+\frac{d^3u}{dr^3}\frac{1}{r}+\frac{d^2u}{dr^2}\frac{r^2-3x^2}{r^4}-\frac{du}{dr}\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial y^2}=\frac{d^4u}{dr^4}\frac{y^2}{r^2}+\frac{d^3u}{dr^3}\frac{1}{r}+\frac{d^2u}{dr^2}\frac{r^2-3y^2}{r^4}-\frac{du}{dr}\frac{r^2-3y^2}{r^5}.$$

Таким образом, $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$.

192. Преобразовать выражение $A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}$, полагая $x+y=X$, $y=XY$.

Решение. Поскольку здесь $X=x+y$, $Y=\frac{y}{x+y}$, то, дифференцируя u как сложную функцию, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{y}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{y}{(x+y)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{y^2}{(x+y)^4}+\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{2y}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}\frac{x-y}{(x+y)^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\frac{xy}{(x+y)^4}-\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

Следовательно,

$$A=(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-\frac{y}{x+y}\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}.$$

193. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y - y^3)\frac{\partial z}{\partial y} + x^2y^2z = 0$$

не меняет своего вида в результате преобразования переменных:

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{v}. \qquad (1)$$

Решение. Из системы (1) получаем $u = xy$, $v = \frac{1}{y}$. Поступая обычным образом, находим производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} x - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y^2.$$

При этом данное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3)\frac{\partial z}{\partial v} + u^2v^2z = 0,$$

что и требовалось показать.

194. Преобразовать уравнение

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

полагая $x = \eta\zeta$, $y = \xi\zeta$, $z = \xi\eta$.

Решение. Поскольку $u(x, y, z) = u(\eta\zeta, \xi\zeta, \xi\eta)$, то, по правилу дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial y}\zeta + \frac{\partial u}{\partial z}\eta, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\zeta + \frac{\partial u}{\partial z}\xi, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \frac{\partial u}{\partial x}\eta + \frac{\partial u}{\partial y}\xi.$$

Отсюда определяем $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, а затем

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} = -\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$2y\frac{\partial u}{\partial y} = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$2z\frac{\partial u}{\partial z} = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

Теперь вычислим выражение $4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$:

$$4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(2x\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(2x\frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+ \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(2x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Аналогично

$$4yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta},$$

$$4xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \eta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + 2\xi\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta}.$$

Используя последние три равенства, получаем преобразованное уравнение

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\zeta}+\xi\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\zeta}\right).$$

195. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_3}=0,$$

полагая $y_1=x_2+x_3-x_1$, $y_2=x_1+x_3-x_2$, $y_3=x_1+x_2-x_3$.

Решение. Дифференцируя z как сложную функцию

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial z}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\quad (j=1,\ 2,\ 3),$$

находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=-\frac{\partial z}{\partial y_1}+\frac{\partial z}{\partial y_2}+\frac{\partial z}{\partial y_3},\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=\frac{\partial z}{\partial y_1}-\frac{\partial z}{\partial y_2}+\frac{\partial z}{\partial y_3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3}=\frac{\partial z}{\partial y_1}+\frac{\partial z}{\partial y_2}-\frac{\partial z}{\partial y_3}.$$

Далее, вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_3}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y_2\partial y_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=$$

$$=-\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y_1\partial y_2}.$$

Вычислив аналогично остальные производные, запишем преобразованное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0.$$

196. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,$$

полагая $\xi=\frac{y}{x}$; $\eta=\frac{z}{x}$, $\zeta=y-z$.

Решение. Имеем:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=x\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=-\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y}=y\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}+y\frac{\partial u}{\partial\zeta},$$

$$z\frac{\partial u}{\partial z}=z\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}-z\frac{\partial u}{\partial\zeta}.$$

Если оператор A определить равенством

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z},$$

то данное уравнение запишется в виде $A^2u - Au = 0$. Так как для нашего случая $Au = \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, $A^2u = A(Au) = A\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) = \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) = \zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \zeta\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, $A^2u - Au = \zeta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}$, то окончательно получаем: $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0$ $(y \neq z)$.

197. Выражения

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

преобразовать к сферическим координатам, полагая $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Решение. Представим данное преобразование в виде композиции двух преобразований:

$$x = R\cos\varphi,\quad y = R\sin\varphi,\quad z = z; \tag{1}$$

$$R = r\sin\theta,\quad \varphi = \varphi,\quad z = r\cos\theta. \tag{2}$$

При замене (1) имеем (см. пример 180, в):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2.$$

Следовательно, $\Delta_1 u = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$.

Применяя преобразование (2) (см. пример 180, в), получаем:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \quad \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Окончательно находим:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Аналогично, осуществляя преобразование (1), получаем (см. пример 180, а):

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Согласно преобразованию (2) (см. пример 180, а),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Полагая в равенстве (3) из примера 180 $y = R$, $\varphi = \theta$, где $R = r\sin\theta$, получаем:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Из двух последних равенств и того, что $\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$, находим:

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right).$$

198. В уравнении $z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ ввести новую функцию w, полагая $w=z^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2z\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=2z\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2z}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{4w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{4w}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Используя найденные формулы, запишем данное уравнение в виде

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Приняв u и v за новые независимые переменные и $w=w(u,\ v)$ — за новую функцию, преобразовать следующие уравнения:

199. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$, если $u=\frac{x}{y}$, $v=x$, $w=zx-y$.

Решение. Применяя вторую из формул (11) п. 2°, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+1}{-x}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}.$$

Вычисляя вторую производную

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{x}{y^4}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{2}{y^3}\frac{\partial w}{\partial u},$$

убеждаемся, что данное уравнение принимает вид $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

200. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$, $w=\frac{z}{x}$.

Решение. Применяя формулы (11) п. 2°, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{z}{x^2}}{-\frac{1}{x}}=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Продифференцировав полученные равенства, получим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\left(\frac{y}{x}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Заменяя в данном уравнении вторые производные найденными их значениями, после сведения подобных членов, получаем: $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

201. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$.

Решение. Применяя те же формулы, что и в предыдущем примере, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}+x.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Таким образом, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{1}{2}=0$.

202. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=z$, если $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$, $w=ze^y$.

Решение. Согласно формулам (11) п. 2°, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{1}{2}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1}{2}}{-e^y}=\frac{1}{2}e^{-y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Находим нужные нам вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{4}e^{-y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{4}e^{-y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial z}{\partial u}-2\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Записываем теперь преобразованное уравнение: $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=2w$.

203. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $u=x$, $v=x+y$, $w=x+y+z$.

Решение. Применяя формулы (11) п. 2°, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}=-1.$$

Дифференцируя последние равенства, получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

В новых переменных уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\left(1-\frac{v}{u}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

204. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x=\sin u$, $y=$ $=\sin v$, $z=e^w$.

Решение. Составляем систему (см. формулы (13) п. 2°)

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos u=e^w\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}\cos v=e^w\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial w}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Вычисляем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{du}{dx}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{1}{\frac{dx}{du}}=\frac{1}{\cos u}\left(\frac{e^w}{\cos u}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{e^w}{\cos u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\frac{\sin u}{\cos^2 u}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^w\frac{\partial w}{\partial u}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dv}{dy}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{1}{\frac{dy}{dv}}=\frac{1}{\cos v}\left(\frac{e^w}{\cos v}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{e^w}{\cos v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2+\frac{\sin v}{\cos^2 v}e^w\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Подставляя эти производные в данное уравнение и приводя подобные члены, получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0.$$

205. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2-y^2}-\frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ $(|x|>|y|)$, если $u=x+$ $+y$, $v=x-y$, $w=\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Решение. Производные первого порядка находим по формулам (11) п. 2°:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{xz}{x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

Дифференцируя последние равенства, получаем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2-y^2}+z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2-y^2}\right)+\frac{x}{x^2-y^2}\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)+\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{zy^2}{(x^2-y^2)^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sqrt{x^2-y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)-\frac{2y}{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}\right)-\frac{zx^2}{(x^2-y^2)^2}.$$

Заменяя в данном уравнении производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ их вычисленными значениями и приводя подобные члены, получаем: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+$ $+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

206. Доказать, что любое уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

(a, b, c — постоянные) путем замены $z=ue^{\alpha x+\beta y}$, где α и β — постоянные величины и $u=u(x, y)$, можно привести к виду $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c_1u=0$ ($c_1=\text{const}$).

Доказательство. Пусть α и β — постоянные, которые определим ниже. Дифференцируя равенство

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}, \tag{1}$$

находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right)e^{\alpha x+\beta y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\beta u\right)e^{\alpha x+\beta y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\beta u\right)e^{\alpha x+\beta y}. \tag{2}$$

Заменяя в данном уравнении функцию z и ее производные их значениями из (1) и (2), после сокращения на $e^{\alpha x+\beta y}$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(a+\beta)\frac{\partial u}{\partial x}+(b+\alpha)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha\beta+a\alpha+b\beta+c)u=0. \tag{3}$$

Числа α и β определим так, чтобы $a+\beta=0$, $b+\alpha=0$, т. е. $a=-\beta$, $b=-\alpha$. А тогда $\alpha\beta+a\alpha+b\beta+c=c-ab=c_1$ и уравнение (3) принимает вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c_1u=0$.

207. Показать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y} \tag{1}$$

не изменяет своего вида при замене переменных $\xi=\frac{x}{y}$, $\eta=-\frac{1}{y}$, $w=\sqrt{y}\,e^{\frac{x^2}{4y}}z$.

Решение. Воспользовавшись формулами (11) п. 2°, найдем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{zx}{2y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}. \tag{2}$$

Остается вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$!

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{x^2}{4y}}\right)-\frac{z}{2y}-\frac{x}{2y}\frac{\partial z}{\partial x}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) следует, что

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{xe^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}=$$

$$=-\frac{x}{y^2\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^2\sqrt{y}}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{z}{2y}+\frac{zx^2}{4y^2}.$$

Отсюда после сведения подобных членов и сокращения на $\frac{1}{y^2\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}$ получим равенство $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial w}{\partial v}$, что и требовалось показать.

208. В уравнении

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, положить $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$, считая, что $w=w(u,\ v)$.

Решение. Находим производные $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ (см. формулы (11) п. 2°):

$$p=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}-1}{A},\quad q=-\frac{\frac{\partial w}{\partial v}-1}{A},\quad \text{где}\quad A=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1.$$

Отсюда

$$q(1+q)=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)}{A^2},\quad p(1+p)=-\frac{\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)}{A^2}, \qquad (1)$$

$$1+p+q+2pq=\frac{1}{A^2}\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}+2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Замечая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+p=\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{A},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=p=-\frac{\frac{\partial w}{\partial u}-1}{A},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=q=-\frac{\frac{\partial w}{\partial v}-1}{A},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1+q=\frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{A},$$

находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial u}-1}{A}\right)\frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{A}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial u}-1}{A}\right)\frac{\frac{\partial w}{\partial u}-1}{A}=$$

$$=-\frac{1}{A^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{A^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}-1\right)\right); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{A^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial w}{\partial v}-1\right)^2\right).$$

Из равенств (1), (2) и данного уравнения следует, что $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$.

209. В уравнении

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

положить $x=e^\xi$, $y=e^\eta$, $z=e^\zeta$, $u=e^w$, где $w=w(\xi,\ \eta,\ \zeta)$.

Решение. В силу инвариантности первого дифференциала, имеем:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=\frac{du}{dw}dw, \text{ или}$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}e^\xi\,d\xi+\frac{\partial u}{\partial y}e^\eta\,d\eta+\frac{\partial u}{\partial z}e^\zeta\,d\zeta=e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial w}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial w}{\partial \zeta}d\zeta\right).$$

Отсюда

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=e^w\frac{\partial w}{\partial \xi},\quad y\frac{\partial u}{\partial y}=e^w\frac{\partial w}{\partial \eta},\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=e^w\frac{\partial w}{\partial \zeta}. \qquad (1)$$

Дифференцируя первое из этих равенств по x и пользуясь тем, что $\frac{d\xi}{dx}=e^{-\xi}$, получаем:

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=\left(e^w\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+e^w\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)\frac{d\xi}{dx}=e^w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right)e^{-\xi}.$$

Отсюда и из (1) находим:

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=e^w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2-\frac{\partial w}{\partial \xi}\right).$$

Аналогично

$$y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=e^w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2-\frac{\partial w}{\partial \eta}\right),$$

$$z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=e^w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2-\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right).$$

Таким образом, в новых переменных данное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=(e^w-1)\left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right)+\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

210. Показать, что вид уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ не меняется при любом распределении ролей между переменными x, y и z.

Решение. Пусть, например, x — функция, а y и z — независимые переменные. Используя инвариантность формы первого дифференциала, получаем:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right).$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dy, получаем систему

$$1=\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\quad 0=\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

из которой находим: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}$.

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\right)^2\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=0,$$

т. е. $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y}\right)^2=0.$

Аналогично поступаем, считая y функцией, а x и z — независимыми переменными.

211. Решить уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

приняв x за функцию от переменных y и z.

Решение. Подставляя в данное уравнение вместо $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ их вычисленные в предыдущем примере значения и приводя подобные члены, получаем уравнение $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$. Отсюда $\frac{\partial x}{\partial y}=\varphi(z)$ и $x = y\varphi(z)+\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — произвольные и необходимое число раз дифференцируемые функции.

212. Преобразовать уравнение

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

применяя преобразование Лежандра

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\ Y=\frac{\partial z}{\partial y},\ Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z, \tag{1}$$

где $Z=Z(X,\ Y)$.

Решение. Предполагаем, что функция $z=z(x,\ y)$ удовлетворяет условию

$$I=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{D(X,\ Y)}{D(x,\ y)}\neq 0. \tag{2}$$

Дифференцируя третье из равенств (1) по x и по y и учитывая, что $\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, получаем:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial X}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Отсюда, в силу условия (2), находим:

$$x=\frac{\partial Z}{\partial X},\ \ y=\frac{\partial Z}{\partial Y}. \tag{3}$$

Далее, дифференцируя равенства (3) по x и по y, имеем две системы:

$$1=\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$
$$0=\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

и

$$0=\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$1=\frac{\partial^2 Z}{\partial Y\,\partial X}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

с определителем, отличным от нуля: $\frac{D(x,\ y)}{D(X,\ Y)}=\frac{1}{I}\neq 0.$

Поэтому указанные системы однозначно определяют вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}}{I^{-1}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}}{I^{-1}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}}{I^{-1}}. \tag{4}$$

Используя равенства (1) и (4), записываем преобразованное уравнение

$$A(X,\ Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}-2B(X,\ Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}+C(X,\ Y)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}=0.$$

§ 6. Формула Тейлора. Некоторые геометрические приложения дифференциального исчисления

1°. Формула Тейлора. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ задана и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$, то для всех точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ из этой окрестности справедлива формула

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=f(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Big((x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+$$
$$+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^k f(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m)+$$
$$+R_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m), \tag{1}$$

где

$$R_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=\frac{1}{(n+1)!}\Big((x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+$$
$$+\cdots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\Big)^{n+1} f(\overset{\circ}{x}_1+\theta(x_1-\overset{\circ}{x}_1),\ \ \overset{\circ}{x}_2+\theta(x_2-\overset{\circ}{x}_2)+$$
$$+\cdots+\overset{\circ}{x}_m+\theta(x_m-\overset{\circ}{x}_m)),\ \ 0<\theta<1.$$

2°. Ряд Тейлора. Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ бесконечно дифференцируема и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$, то эта функция допускает представление в виде степенного ряда

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=f(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big((x_1-\overset{\circ}{x}_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-\overset{\circ}{x}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+(x_m-\overset{\circ}{x}_m)\frac{1}{\partial x_m}\Big)^k\times$$
$$\times f(\overset{\circ}{x}_1,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ \overset{\circ}{x}_m), \tag{2}$$

который называется *рядом Тейлора* для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в окрестности точки $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$.

Частные случаи формул (1) и (2) при $\overset{\circ}{x}_1=0$, $\overset{\circ}{x}_2=0$, $\overset{\circ}{x}_3=0, \ldots, \overset{\circ}{x}_m=0$ соответственно носят название *формулы Маклорена* и *ряда Маклорена*.

3°. Особые точки плоских кривых. Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, будем называть *кривой*.

Простым отрезком кривой будем называть геометрическое место точек, координаты которых хотя бы в одной прямоугольной системе удовлетворяют уравнению $y = f(x)$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, где x_1 и x_2 — постоянные числа, а $f(x)$ — непрерывная однозначная функция.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *обыкновенной точкой* кривой $F(x, y) = 0$, если существуют такие положительные числа α и β, что попавшая в прямоугольник $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|y - y_0| \leqslant \beta$ часть кривой $F(x, y) = 0$ является простым отрезком. Если же таких чисел α и β не существует, то точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *особой точкой*.

Особыми точками кривой $F(x, y) = 0$ могут быть только те точки, в которых выполняются условия

$$F(x, y) = 0,\ F'_x(x, y) = 0,\ F'_y(x, y) = 0 \tag{3}$$

(здесь и далее мы предполагаем, что функция F имеет достаточное число частных производных).

Если в особой точке M_0 выполняются условия (3), а условия

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0) = 0,\ B = F''_{xy}(x_0, y_0) = 0,\ C = F''_{yy}(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

не выполняются, то точка M_0 называется *двойной особой точкой*. Если же выполняются условия (3) и (4), а среди производных третьего порядка F'''_{xxx}, F'''_{xxy}, F'''_{xyy}, F'''_{yyy} хотя бы одна в точке M_0 отлична от нуля, то точку M_0 называют *тройной особой точкой*. В общем случае, если в точке M_0 все частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю, но среди производных n-го порядка есть хотя бы одна отличная от нуля, то точку M_0 называют *n-кратной особой точкой*.

Для классификации двойных особых точек рассмотрим уравнение

$$F''_{xx} + 2F''_{xy}f'(x_0) + F''_{yy}f'^2(x_0) = 0, \tag{5}$$

полученное в результате дифференцирования тождества $F(x, f(x)) \equiv 0$, где $y = f(x)$ — простой отрезок кривой, и предположения, что функция $F(x, y)$ дважды дифференцируемая.

1) Если корни уравнения (5) комплексные, т. е. если $AC - B^2 > 0$, то простого отрезка, содержащего точку $M_0(x_0, y_0)$, не существует. В этом случае точка M_0 называется *изолированной особой точкой*.

2) Если корни уравнения (5) действительные и разные, т. е. если $AC - B^2 < 0$, то существуют два взаимно пересекающихся простых отрезка. В этом случае имеем *узловую особую точку*.

3) Если же корни уравнения (5) кратные, а в этом случае $AC - B^2 = 0$, то обе ветви кривой имеют в точке M_0 общую касательную. Здесь может быть:

а) точка возврата 1-го рода, когда обе ветви кривой расположены по одну сторону от общей нормали и по разные стороны от общей касательной в точке M_0;

б) точка возврата 2-го рода, когда обе ветви кривой расположены по одну сторону от общей нормали и по одну сторону от общей касательной;

в) точка самоприкосновения, когда обе ветви расположены по обе стороны общей касательной и по обе стороны общей нормали;

г) изолированная особая точка.

В случае $A = B = C = 0$ возможны более сложные типы особых точек.

4°. Касательная прямая и нормальная плоскость. Пусть кривая в трехмерном пространстве задана уравнением

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\quad t \in (a,\ b), \tag{6}$$

где функции φ, ψ и χ имеют производные, не равные нулю одновременно, т. е.

$$(\varphi'(t_0))^2 + (\psi'(t_0))^2 + (\chi'(t_0))^2 > 0,\ t_0 \in (a,\ b).$$

Пусть, далее, $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $z_0 = \chi(t_0)$ и $x_0' = \varphi'(t_0)$, $y_0' = \psi'(t_0)$, $z_0' = \chi'(t_0)$. Тогда уравнение касательной прямой к кривой (6) в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'}. \tag{7}$$

Уравнение нормальной плоскости в этой точке запишется следующим образом:

$$(x - x_0)\,x_0' + (y - y_0)\,y_0' + (z - z_0)\,z_0' = 0. \tag{8}$$

5°. Касательная плоскость и нормаль. Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x,\ y,\ z) = 0,\ (x,\ y,\ z) \in D,$$

где функция F непрерывна вместе со своими производными F_x', F_y', F_z' в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0) \in D$, причем

$$(F_x'(M_0))^2 + (F_y'(M_0))^2 + (F_z'(M_0))^2 > 0.$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$(x - x_0)\,F_x'(M_0) + (y - y_0)\,F_y'(M_0) + (z - z_0)\,F_z'(M_0) = 0, \tag{9}$$

а уравнение нормали в точке M_0

$$\frac{x - x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(M_0)}. \tag{10}$$

В частности, если поверхность задана уравнением $z = f(x,\ y)$, где f — дифференцируемая в точке $(x_0,\ y_0)$ функция и $z_0 = f(x_0,\ y_0)$, то

$$(x - x_0)\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y} = z - z_0 \tag{11}$$

— уравнение касательной плоскости и

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1} \tag{12}$$

— уравнение нормали.

Если поверхность задана уравнениями

$$x = x(u, v),\ \ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v),$$

где функции x, y и z — непрерывно дифференцируемые в некоторой области D и в точке $(x_0, y_0) \in D$ функции x, y и z принимают соответственно значения x_0, y_0 и z_0, то

$$(x - x_0) A + (y - y_0) B + (z - z_0) C = 0 \qquad (13)$$

— уравнение касательной плоскости, а

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \qquad (14)$$

— уравнение нормали, где

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Здесь значения частных производных вычислены в точке касания.

6°. Огибающая семейства плоских кривых. Огибающая кривая однопараметрического семейства кривых $F(x, y, \alpha) = 0$ (α — параметр) удовлетворяет системе уравнений

$$F(x, y, \alpha) = 0,\ \ F'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \qquad (15)$$

Если, например, выполнены условия: 1) в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющей системе (15), производные F'_x, F'_y, $F''_{\alpha x}$, $F''_{\alpha y}$ и $F''_{\alpha\alpha}$ непрерывны; 2) в этой точке $F'^2_x + F'^2_y \neq 0$, $F''_{\alpha\alpha} \neq 0$. Тогда дискриминантная кривая (геометрическое место точек, удовлетворяющих системе (15)), проходящая через точку (x_0, y_0), является в окрестности этой точки огибающей рассматриваемого семейства кривых.

213. Функцию $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, -2)$.

Решение. Данная функция имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поскольку все частные производные порядка, выше второго, равны нулю, то остаточный член R_n $\forall n \geqslant 2$ обращается в нуль, и формула Тейлора принимает следующий вид:

$$f(x, y) = f(1, -2) + \frac{\partial f(1, -2)}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial f(1, -2)}{\partial y}(y + 2) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x^2}(x - 1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x \partial y}(x - 1)(y + 2) + \right. \qquad (1)$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial y^2}(y + 2)^2\right).$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4x - y - 6;\ \ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x - 2y - 3;$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 4;\ \ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -1;\ \ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -2.$$

Вычисляя в точке $A(1, -2)$ значения функции и ее производных

$$f(1, -2)=5;\ \frac{\partial f(1, -2)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial f(1, -2)}{\partial y}=0;\ \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x^2}=4;$$

$$\frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial x \partial y}=-1;\ \frac{\partial^2 f(1, -2)}{\partial y^2}=-2$$

и пользуясь разложением (1), получаем:

$$f(x, y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

214. Функцию $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1, 1)$.

Решение. Поскольку все частные производные порядка выше третьего равны нулю, то остаточный член R_n формулы Тейлора равен нулю для всех $n \geqslant 3$. Следовательно, в данном случае формула Тейлора принимает вид

$$f(x, y, z)=f(A)+df(A)+\frac{1}{2!}d^2f(A)+\frac{1}{3!}d^3f(A), \tag{1}$$

где $dx=x-1$, $dy=y-1$, $dz=z-1$. Вычисляя в точке $A(1, 1, 1)$ значения функции и ее дифференциалов

$$f(A)=0;\ df(A)=0;\ d^2f(A)=6((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-$$
$$-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1));\ d^3f(A)=$$
$$=6((x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-18(x-1)(y-1)(z-1))$$

и пользуясь разложением (1), получаем:

$$f(x, y, z)=3((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-$$
$$-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1))+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-$$
$$-3(x-1)(y-1)(z-1).$$

215. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y)=x^2y+xy^2-2xy$, при переходе от значений $x=1$, $y=-1$ к значениям $x_1=1+h$, $y_1=-1+k$.

Решение. В данном случае разложение функции $f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, -1)$ можно записать в виде

$$\Delta f(1, -1)=f(x, y)-f(1, -1)=\frac{\partial f(1, -1)}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial f(1, -1)}{\partial y}(y+$$
$$+1)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x^2}(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial x \partial y}(x-1)(y+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(1, -1)}{\partial y^2}(y+1)^2\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(1, -1)}{\partial x^3}(x-1)^3+3\frac{\partial^3 f(1, -1)}{\partial x^2 \partial y}(x-1)^2(y+\right.$$
$$\left.+1)+3\frac{\partial^3 f(1, -1)}{\partial x \partial y^2}(x-1)(y+1)^2+\frac{\partial^3 f(1, -1)}{\partial y^3}(y+1)^3\right).$$

Полагая здесь $x=1+h$, $y=-1+k$ и вычисляя указанные производные, получаем: $\Delta f(1, -1)=h-3k-h^2-2hk+k^2+h^2k+hk^2$.

216. В разложении функции $f(x, y)=x^y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1, 1)$ выписать члены до второго порядка включительно.

Решение. Находим сначала частные производные до третьего порядка включительно:

$f'_x(x,\ y) = yx^{y-1},\quad f'_y(x,\ y) = x^y \ln x,$

$f''_{x^2}(x,\ y) = y(y-1)\,x^{y-2},\quad f''_{xy}(x,\ y) = (1 + y\ln x)\,x^{y-1},\quad f''_{y^2}(x,\ y) = x^y \ln^2 x,$

$f'''_{x^3}(x,\ y) = y(y-1)(y-2)\,x^{y-3},\quad f'''_{x^2y}(x,\ y) = (2y - 1 + y(y-1)\ln x)\,x^{y-2},$

$f'''_{xy^2}(x,\ y) = (y\ln^2 x + 2\ln x)\,x^{y-1},\quad f'''_{y^3}(x,\ y) = x^y \ln^3 x.$

Затем вычисляем значения функции и ее производных первого и второго порядков в точке $A(1,\ 1)$: $f(1,\ 1) = 1$, $f'_x(1,\ 1) = 1$, $f'_y(1,\ 1) = 0$, $f''_{x^2}(1,\ 1) = 0$, $f''_{xy}(1,\ 1) = 1$, $f''_{y^2}(1,\ 1) = 0$ и записываем дифференциалы первого и второго порядков в этой точке: $df(1,\ 1) = dx$, $d^2f(1,\ 1) = 2dxdy$.

Искомое разложение запишется в виде

$$f(x,\ y) = f(1,\ 1) + df(1,1) + \frac{1}{2}d^2f(1,\ 1) + R_2(1 + \theta dx,\ 1 + \theta dy) = 1 + dx + dxdy + R_2(1 + \theta dx,\ 1 + \theta dy),$$

где $dx = x - 1$, $dy = y - 1$; $0 < \theta < 1$; $R_2(x,\ y) = \frac{1}{6}d^3f(x,\ y) =$

$$= \frac{x^y}{6}\left(\frac{y(y-1)(y-2)}{x^3}dx^3 + 3\frac{2y - 1 + y(y-1)\ln x}{x^2}dx^2dy + 3\frac{y\ln^2 x + 2\ln x}{x}dxdy^2 + \ln^3 x\,dy^3\right).$$

217. Разложить по формуле Маклорена до членов четвертого порядка включительно функцию $f(x,\ y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Находим дифференциалы функции f до четвертого порядка включительно:

$$f(x,\ y) = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}},\quad df(x,\ y) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2xdx - 2ydy),$$

$$d^2f(x,\ y) = -\frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2dx^2 - 2dy^2),$$

$$d^3f(x,\ y) = \frac{3}{8}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^3 - \frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx - 2ydy)(-2dx^2 - 2dy^2),$$

$$d^4f(x,\ y) = -\frac{15}{16}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{7}{2}}(-2xdx - 2ydy)^4 + \frac{9}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx - 2ydy)^2(-2dx^2 - 2dy^2) - \frac{3}{4}(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} \times (-2dx^2 - 2dy^2)^2.$$

Полагая здесь $x = y = 0$, $dx = x$, $dy = y$, получаем: $f(0,\ 0) = 1$, $df(0,\ 0) = 0$, $d^2f(0,\ 0) = -(x^2 + y^2)$, $d^3f(0,\ 0) = 0$, $d^4f(0,\ 0) = -3(x^2 + y^2)^2$.

Теперь легко записать требуемое разложение:

$$f(0,\ 0)+df(0,\ 0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,\ 0)+\frac{1}{3!}d^3f(0,\ 0)+\frac{1}{4!}d^4f(0,\ 0)=$$
$$=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

218. Вывести приближенные формулы с точностью до членов второго порядка для выражений: а) $\frac{\cos x}{\cos y}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$.

Решение. а) Пользуясь формулами

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\quad \frac{1}{1-q}=1+q+q^2+o(q^2),$$

справедливыми соответственно при $t\to 0$ и $q\to 0$, получаем:

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)}=\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2o(y^2)+y^2o(x^2)\approx 1-\frac{x^2-y^2}{2}.$$

б) Обозначая $f(x,\ y)=\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$, вычисляем $f(0,\ 0)$, $df(0,\ 0)$, $d^2f(0,\ 0)$:

$f(0,\ 0)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

$df(x,\ y)=\frac{2(1+y)\,dx-2x\,dy}{(1-x+y)^2+(1+x+y)^2}$, $df(0,\ 0)=dx$;

$d^2f(x,\ y)=\frac{-(2(1+y)dx-2xdy)\,(2\,(1-x+y)\,(-dx+dy)\,+2(1+x+y)(dx+dy))}{((1-x+y)^2+(1+x+y)^2)^2}$,

$d^2f(0,\ 0)=-2dxdy$.

Далее, пользуясь формулой Маклорена

$$f(x,\ y)=f(0,\ 0)+df(0,\ 0)+\frac{1}{2}d^2f(0,\ 0)+\cdots,$$

где $dx=x$, $dy=y$, получаем искомую приближенную формулу

$$\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

219. Упростить выражение $\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$, считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

Решение. Используя формулу Маклорена для $\cos t$, имеем:

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2};\ \cos y\approx 1-\frac{y^2}{2};\ \cos z\approx 1-\frac{z^2}{2};$$
$$\cos(x+y+z)\approx 1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2.$$

Заменяя в данном выражении косинусы полученными приближениями и отбрасывая величины выше второго порядка малости, находим:

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z\approx 1-\frac{1}{2}(x+y+z)^2-$$

$$-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2}\right)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-(xy+xz+yz)-$$

$$-1+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{4}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+\frac{1}{8}x^2y^2z^2\approx$$

$$\approx -(xy+xz+yz).$$

220. Функцию $F(x, y)=\frac{1}{4}(f(x+h, \ y)+f(x, \ y+h)+f(x-h, \ y)+f(x, \ y-h))-f(x, y)$ разложить по степеням h с точностью до h^4.

Решение. По формуле Маклорена, имеем:

$$F(x, y)=\frac{1}{4}\Big(f+hf'_x+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}+\frac{h^3}{6}f'''_{x^3}+\frac{h^4}{24}f^{\text{IV}}_{x^4}+o(h^4)+f+$$

$$+hf'_y+\frac{h^2}{2}f''_{y^2}+\frac{h^3}{6}f'''_{y^3}+\frac{h^4}{24}f^{\text{IV}}_{y^4}+o(h^4)+f-hf'_x+$$

$$+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}-\frac{h^3}{6}f'''_{x^3}+\frac{h^4}{24}f^{\text{IV}}_{x^4}+o(h^4)+f-hf'_y+$$

$$+\frac{h^2}{2}f''_{y^2}-\frac{h^3}{6}f'''_{y^3}+\frac{h^4}{24}f^{\text{IV}}_{y^4}+o(h^4)\Big)-f,$$

где значение функции f и ее производных $f^{(n)}$ $(n=1, \ 2, 3, 4)$ вычислены в точке (x, y). После приведения подобных получим:

$$F(x, y)=\frac{h^2}{4}(f''_{x^2}+f''_{y^2})+\frac{h^4}{48}(f^{\text{IV}}_{x^4}+f^{\text{IV}}_{y^4})+o(h^4).$$

221. Разложить по степеням h и k функцию

$$\Delta_{xy}f(x, y)=f(x+h, \ y+k)-f(x+h, \ y)-f(x, \ y+k)+f(x, y).$$

Решение. Сначала запишем разложение функции $f(x+h, \ y+k)$ по формуле Маклорена:

$$f(x+h, \ y+k)=f(x, y)+h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}+$$

$$+hk\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y). \quad (1)$$

Представляя символическую запись n-го дифференциала в следующей форме:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n!}{m!\,(n-m)!}h^m k^{n-m}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}+h^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n}+k^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n},$$

разложение (1) запишем в виде:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} +$$

$$+ hk\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} + k^n\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n}\right).$$

Далее, используя это равенство и разложения функций $f(x+h, y)$ и $f(x, y+k)$:

$$f(x+h, y) = f(x, y) + h\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n},$$

$$f(x, y+k) = f(x, y) + k\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n},$$

записываем разложение функции $\Delta_{xy} f(x, y)$:

$$\Delta_{xy} f(x, y) = hk\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

222. Разложить по степеням ρ функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\,d\varphi,$$

где $f(x, y)$ дифференцируема любое число раз и разлагается по степеням ρ в степенной ряд.

Решение. Запишем разложение функции $f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)$ по формуле Маклорена:

$$f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y).$$

Предполагая почленное интегрирование этого степенного ряда возможным, получаем разложение функции $F(\rho)$ по степеням ρ:

$$F(\rho) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y)\,d\varphi.$$

Так как

$$\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x, y) = \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^j \partial y^{k-j}}\cos^j\varphi\sin^{k-j}\varphi,$$

то разложение функции $F(\rho)$ можно записать в виде:

$$F(\rho) = f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^j\varphi \sin^{k-j}\varphi\, d\varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим интеграл

$$I(j, k-j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^j\varphi \sin^{k-j}\varphi\, d\varphi. \quad (2)$$

Если $j = 2m-1$, то $\cos^j\varphi \sin^{k-j}\varphi\, d\varphi = P_{k-1}(\sin\varphi)\, d(\sin\varphi)$, где $P_{k-1}(\sin\varphi)$ — многочлен степени $k-1$. Отсюда следует, что

$$I(2m-1, k-2m+1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{k-1}(\sin\varphi)\, d(\sin\varphi) = 0.$$

Аналогично, если $k = 2n-1$, то $I(j, 2n-1-j) = 0$.

Следовательно, интеграл (2) отличен от нуля только в том случае, если $k = 2n$, $j = 2m$:

$$I(2m, 2n-2m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m}\varphi \sin^{2n-2m}\varphi\, d\varphi.$$

Вычисляя этот интеграл интегрированием по частям, получаем:

$$I(2m, 2n-2m) = \frac{2m-1}{2n-2m+1} I(2m-2, 2n-2m+2).$$

Отсюда следует, что

$$I(2m, 2n-2m) = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n-2m+1)(2n-2m+3)\cdots(2n-3)(2n-1)} I(0, 2n) = \frac{(2m-1)!!\,(2n-2m-1)!!}{(2n-1)!!} I(0, 2n).$$

Пользуясь тем, что (см. пример 99, гл. IV, ч. 1)

$$I(0, 2n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

получаем:

$$I(2m, 2n-2m) = \frac{(2m-1)!!(2n-2m-1)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2m-1)!!(2n-2m-1)!!}{(2n)!!}.$$

Далее, учитывая, что $(2k-1)!! = \frac{(2k-1)!!\,(2k)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, окончательно имеем:

$$I(2m, 2n-2m) = \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{2^{2n} n!\, m!\, (n-m)!}. \quad (3)$$

Заменяя в разложении (1) k на $2n$, j — на $2m$ и используя равенство (3), получаем:

$$F(\rho) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2m)!(2n-2m)!} \frac{(2m)!\,(2n-2m)!}{2^{2n} n!\, m!\,(n-m)!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} =$$

$$= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} =$$

$$= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \Delta^n f(x, y),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

223. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f(x, y) = f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0, 0) + \cdots \qquad (1)$$

Вычислим в точке (0, 0) значения функции и ее дифференциалов:

$f(0, 0) = 1;$
$df(0, 0) = m\Delta x + n\Delta y;$
$d^2 f(0, 0) = m(m-1)\Delta x^2 + 2mn\Delta x \Delta y + n(n-1)\Delta y;$
. . . .

Полагая здесь $\Delta x = x$, $\Delta y = y$ и подставляя результат в равенство (1), получаем разложение функции $f(x, y)$ в ряд Маклорена:

$$f(x, y) = 1 + mx + nx + \frac{1}{2}(m(m-1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2) + \cdots$$

224. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.

Р е ш е н и е. Поскольку аргумент логарифма $1 + x + y$ — линейная функция, то форма дифференциала любого порядка обладает свойством инвариантности. Поэтому

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} x^m y^{n-m} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{m!\,(n-m)!} x^m y^{n-m} \qquad (|x+y| < 1).$$

225. $f(x, y) = e^x \sin y$.

Р е ш е н и е. Ряд Маклорена для функции

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0)$$

преобразуем следующим образом:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,x^m y^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m y^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}.$$

Полагая $n-m=k$, получаем:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m y^k}{m!\,k!}\frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k}. \qquad (1)$$

Для нашего случая

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(e^x \sin y)}{\partial x^m \partial y^k} = e^x \sin\left(y + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases}(-1)^n, & \text{если } k = 2n+1;\\ 0, & \text{если } k = 2n.\end{cases}$$

Подставляя последнее выражение в формулу (1), получаем:

$$e^x \sin y = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!} \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty).$$

226. $f(x, y) = e^x \cos y$.

Решение. Используем формулу (1) из предыдущего примера. Для этого находим производные:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(e^x \cos y)}{\partial x^m \partial y^k} = e^x \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right)$$

и вычисляем их значения в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^{m+k} f(0, 0)}{\partial x^m \partial y^k} = \cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases}(-1)^n, & \text{если } k = 2n,\\ 0, & \text{если } k = 2n+1.\end{cases}$$

Пользуясь формулой (1) из предыдущего примера, окончательно получаем:

$$e^x \cos y = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!} \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty).$$

227. а) $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$; б) $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

Решение. а) Находим производные:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}(\sin x \operatorname{sh} y)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases}\sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)\operatorname{sh} y, & \text{если } k = 2n;\\ \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right)\operatorname{ch} y, & \text{если } k = 2n+1.\end{cases}$$

Полагая здесь $x=0$, $y=0$, имеем:

$$\frac{\partial^{m+k} f(0,\ 0)}{\partial x^m \partial y^k} = (-1)^s, \text{ если } m = 2s+1,\ k = 2n+1;$$

$$\frac{\partial^{m+k} f(0,\ 0)}{\partial x^m \partial y^k} = 0 \text{ — в остальных случаях.}$$

Используя формулу (1) из примера 225, получаем:

$$\sin x \operatorname{sh} y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1} y^{2n+1}}{(2s+1)!\,(2n+1)!} \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty).$$

б) Аналогично предыдущему случаю находим:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x,\ y)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k} (\cos x \operatorname{ch} y)}{\partial x^m \partial y^k} = \begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{m\pi}{2}\right) \operatorname{ch} y, & \text{если } k = 2n; \\ \cos\left(x + \dfrac{m\pi}{2}\right) \operatorname{sh} y, & \text{если } k = 2n+1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^{m+k} f(0,\ 0)}{\partial x^m \partial y^k} = (-1)^s, \text{ если } m = 2s,\ k = 2n,$$

$$\frac{\partial^{m+k} f(0,\ 0)}{\partial x^m \partial y^k} = 0 \text{ — в остальных случаях.}$$

Подставляя найденные значения производных в формулу (1) из примера 225, получаем:

$$\cos x \operatorname{ch} y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s} y^{2n}}{(2s)!\,(2n)!} \quad (|x| < \infty,\ |y| < \infty).$$

228. $f(x,\ y) = \sin(x^2 + y^2)$.

Решение. Используя известное разложение

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} u^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

справедливое при $|u| < \infty$, получаем при $u = x^2 + y^2$ формулу Маклорена для $\sin(x^2 + y^2)$:

$$\sin(x^2 + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x^2 + y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

229. Написать три члена разложения в ряд Маклорена функции

$$f(x,\ y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2 y} dt.$$

Решение. При $|x| < 1$, $|y| < 1$ имеем:

$$f(x,\ y) = \int_0^1 \left(1 + t^2 xy + \frac{1}{2} t^2 y (t^2 y - 1) x^2 + \cdots\right) dt.$$

После интегрирования находим: $f(x,\ y) = 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) y + \cdots$

230. Функцию e^{x+y} разложить в степенной ряд по целым положительным степеням биномов $x-1$ и $y-1$.

Решение. Поскольку степенной ряд является рядом Тейлора для функции $f(x, y)$, то для получения требуемого разложения применим формулу (2) п. 2°, которая для нашего случая запишется в виде:

$$f(x, y)=f(1, 1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1, 1). \qquad (1)$$

Преобразуя данную формулу следующим образом:

$$f(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1, 1)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,(x-1)^m(y-1)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\frac{\partial^n f(1, 1)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

и обозначая $n-m=k$, получаем:

$$f(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!k!}\frac{\partial^{m+k}f(1, 1)}{\partial x^m\partial y^k}. \qquad (2)$$

Находим производные

$$\frac{\partial^{m+k}f(x, y)}{\partial x^m\partial y^k}=\frac{\partial^{m+k}(e^{x+y})}{\partial x^m\partial y^k}=\frac{\partial^m e^x}{\partial x^m}\frac{\partial^k e^y}{\partial y^k}=e^x\cdot e^y=e^{x+y};$$

затем вычисляем их значения в точке (1, 1): $\dfrac{\partial^{m+k}f(1, 1)}{\partial x^m\partial y^k}=e^2$ и, подставляя в формулу (2), получаем:

$$f(x, y)=e^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!k!} \quad (|x|<\infty,\ |y|<\infty).$$

231. Пусть z — та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3-2xz+y=0$, которая при $x=1$ и $y=1$ принимает значение $z=1$. Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням биномов $x-1$ и $y-1$.

Решение. Из условия задачи следует, что $z(1, 1)=1$. Находим частные производные от z как от неявно заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2z}{3z^2-2x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{3z^2-2x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(3z^2-2x)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\left(6z\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\right)z}{(3z^2-2x)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial x}-2}{(3z^2-2x)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2-2x)^2};\ \ldots$$

В точке $(1, 1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;\ \ldots$$

Используя формулу (2) предыдущей задачи, получаем:

$$z(x, y)=1+(2(x-1)-(y-1))-(8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+ \\ +3(y-1)^2)+\cdots$$

232. Написать разложение в ряд Тейлора функции $f(x, y)=\frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

Решение. Представляя функцию f в виде $f(x, y)=\frac{1+(x-1)}{1+(y-1)}$, замечаем, что числитель уже является разложением по формуле Тейлора. Используя формулу Тейлора для функции $(1+(y-1))^{-1}$:

$$(1+(y-1))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n\quad (|y-1|<1),$$

получаем:

$$f(x, y)=(1+(x-1))\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n\quad (|x|<\infty,\ 0<y<2).$$

Изучить типы особых точек следующих кривых:

233. $y^2=ax^2+x^3$.

Решение. Обозначим $F(x, y)\equiv y^2-ax^2-x^3$. Составим систему уравнений

$$F(x, y)\equiv y^2-ax^2-x^3=0,$$
$$F'_x(x, y)\equiv -ax-3x^2=0,$$
$$F'_y(x, y)\equiv 2y=0,$$

решив которую, найдем: $x_0=0$, $y_0=0$.

Найдя вторые производные $F''_{xx}(x, y)=-2a-6x$, $F''_{xy}(x, y)=0$, $F''_{yy}(x, y)=2$, вычислим их значения в точке (x_0, y_0):

$$A=F''_{xx}(0, 0)=-2a,\quad B=F''_{xy}(0, 0)=0,\quad C=F''_{yy}(0, 0)=2.$$

Поскольку $\Delta=AC-B^2=-2a$, то при $a<0$ $M(0, 0)$ — изолированная особая точка, а при $a>0$ $M(0, 0)$ — узловая особая точка (см. п. 3°). Если же $a=0$, то из условия следует, что $y=\pm x^{\frac{3}{2}}$. Следовательно, $M(0, 0)$ — точка возврата.

234. а) $x^3+y^3-3xy=0$; б) $x^2+y^2=x^4+y^4$; в) $x^2+y^4=x^6$; г) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a\neq 0)$.

Решение. а) Обозначая $F(x, y)\equiv x^3+y^3-3xy$ и решая систему

$$F(x, y)\equiv x^3+y^3-3xy=0,$$
$$F'_x(x, y)\equiv 3x^2-3y=0,$$
$$F'_y(x, y)\equiv 3y^2-3x=0,$$

получаем $x_0=0$, $y_0=0$.

Находим вторые производные: $F''_{xx}(x, y) = 6x$, $F''_{xy}(x, y) = -3$, $F''_{yy}(x, y) = 6y$; в точке $(0, 0)$ получаем:

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 0,\ B = F''_{xy}(0, 0) = -3,\ C = F''_{yy}(0, 0) = 0.$$

Поскольку $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$, то $(0, 0)$ — узловая особая точка.

б) Аналогично предыдущему пункту составляем систему

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0,$$
$$F'_x(x, y) \equiv 2x - 4x^3 = 0,$$
$$F'_y(x, y) \equiv 2y - 4y^3 = 0,$$

решая которую, получаем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Далее, вычисляем вторые производные: $F''_{xx}(x, y) = 2 - 12x^2$, $F''_{xy}(x, y) = 0$, $F''_{yy}(x, y) = 2 - 12y^2$, а затем находим числа

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 2,\ B = F''_{xy}(0, 0) = 0,\ C = F''_{yy}(0, 0) = 2.$$

Из того что $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, следует, что $(0, 0)$ — изолированная особая точка.

в) Из системы

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^4 - x^6 = 0,\ F'_x(x, y) \equiv 2x - 6x^5 = 0,$$
$$F'_y(x, y) \equiv 4y^3 = 0$$

находим, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Поскольку $F''_{xx}(0, 0)\, F''_{yy}(0, 0) - F''^2_{xy}(0, 0) = 0$, то $(0, 0)$ является или точкой возврата, или изолированной особой точкой, или точкой соприкосновения. Для дальнейших исследований представим уравнение кривой в виде $y^4 = x^2(x^4 - 1)$. Так как при $|x| < 1$ правая часть этого равенства неположительна, а левая часть — неотрицательна, то $(0, 0)$ — единственная точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению и абсцисса которой принадлежит интервалу $(-1, 1)$. А это означает, что $(0, 0)$ — изолированная особая точка.

г) Решая систему

$$F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$
$$F'_x(x, y) \equiv 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x = 0,$$
$$F'_y(x, y) \equiv 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y = 0,$$

находим $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Поскольку $F''_{xx}(0, 0) \cdot F''_{yy}(0, 0) - F''^2_{xy}(0, 0) = -4a^4 < 0$, то $(0, 0)$ — узловая особая точка.

235. Исследовать особые точки следующих кривых: а) $y^2 - 1 + e^{-x^2} = 0$; б) $y^2 - 1 + e^{-x^3} = 0$; в) $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$.

Решение. а) Пусть $F(x, y) \equiv y^2 - 1 + e^{-x^2}$. Легко проверить, что в точке $(0, 0)$

$$F = F'_x = F'_y = F''_{xx} = F''_{xy} = 0,\ F''_{yy} = 2.$$

Таким образом, $F''_{xx}F''_{yy} - F''^2_{xy} = 0$. Из данного уравнения находим: $y = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}}$. Отсюда непосредственно заключаем, что $(0, 0)$ — точка самоприкосновения.

б) Значения производных первого и второго порядков такие же, как и в предыдущем примере. Из данного уравнения находим: $y = \pm\sqrt{1-e^{-x^3}}$, $x \geqslant 0$. На основании графика функции нетрудно заключить, что $(0,\ 0)$ — точка возврата 1-го рода.

в) Легко убедиться, что $(0,\ 0)$ — особая точка. Значения производных первого и второго порядков в этой точке такие же, как и в предыдущих двух примерах. Поскольку обе ветви $y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}\ (x \geqslant 0)$ данной кривой расположены по одну сторону общей касательной и по одну сторону общей нормали, то $(0,\ 0)$ является точкой возврата 2-го рода.

236. Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей в данных точках к следующим кривым: а) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$; б) $y = x$, $z = x^2$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$; в) $x^2+y^2+z^2 = 6$, $x+y+z = 0$ в точке $M(1,\ -2,\ 1)$.

Решение. а) Находим производные: $x' = 2a\sin t\cos t$, $y' = b(\cos^2 t - \sin^2 t)$, $z' = -2c\cos t\sin t$, затем вычисляем $x_0 = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{2}$, $y_0 = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{2}$, $z_0 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{2}$; $x_0' = x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$, $y_0' = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $z_0' = z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -c$ и используем формулы (7) и (8) п. 4°.

В результате получаем: $\dfrac{x-\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{y-\frac{b}{2}}{0} = \dfrac{z-\frac{c}{2}}{-c}$, или $\frac{x}{a}+\frac{z}{c} = 1$, $y = \frac{b}{2}$ — уравнение касательной прямой; $ax - cz = \frac{1}{2}(a^2-c^2)$ — уравнение нормальной плоскости.

б) Задача приводится к предыдущей, если x принять за параметр. Тогда уравнение кривой имеет вид: $x = x$, $y = x$, $z = x^2$. Отсюда находим: $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $x_0' = 1$, $y_0' = 1$, $z_0' = 2$. Используя те же формулы, что и в предыдущем пункте, получаем: $x-1 = y-1 = \frac{z-1}{2}$ — уравнение касательной прямой; $x+y+2z = 4$ — уравнение нормальной плоскости.

в) Считаем, что прямая задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда

$$x^2(t)+y^2(t)+z^2(t) = 6, \qquad x(t)+y(t)+z(t) = 0.$$

Дифференцируя эти равенства по t, получаем систему

$$2xx'+2yy'+2zz' = 0,$$
$$x'+y'+z' = 0,$$

из которой при $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = 1$ находим: $x_0' = 1$, $y_0' = 0$, $z_0' = -1$. Используя формулы (7) и (8) п. 4°, получаем: $x+z = 2$, $y+2 = 0$ — уравнение касательной прямой; $x-z = 0$ — уравнение нормальной плоскости.

237. Написать уравнения касательной плоскости и нормали в указанных точках к следующим поверхностям: а) $z = x^2+y^2$ в точке

$M_0(1,\ 2,\ 5)$; б) $x^2+y^2+z^2=169$ в точке $M_0(3,\ 4,\ 12)$; в) $2^{\frac{x}{z}}+$ $+2^{\frac{y}{z}}=8$ в точке $M_0(2,\ 2,\ 1)$.

Решение. а) Имеем: $f'_x(1,\ 2)=2$, $f'_y(1,\ 2)=4$. Используя формулы (11) и (12) п. 5°, получаем: $2x+4y-z-5=0$ — уравнение касательной плоскости; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}$ — уравнение нормали.

б) В этом случае $F(x,\ y,\ z)\equiv x^2+y^2+z^2-169$. Вычисляя значения производных $F'_x(M_0)=F'_x(3,\ 4,\ 12)=6$, $F'_y(M_0)=8$, $F'_z(M_0)=$ $=24$ и применяя формулы (9) и (10) п. 5°, получаем: $3x+4y+$ $+12z=169$ — уравнение касательной плоскости; $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ — уравнение нормали.

Уравнение нормали можно представить в следующем виде: $\frac{x}{3}=$ $=\frac{y}{4}=\frac{z}{12}$.

в) Находим производные функции $f(x,\ y,\ z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8$:

$$f'_x(x,\ y,\ z)=2^{\frac{x}{z}}\frac{\ln 2}{z},\ f'_y(x,\ y,\ z)=2^{\frac{y}{z}}\frac{\ln 2}{z},\ f'_z(x,\ y,\ z)=$$
$$=-\left(x2^{\frac{x}{z}}+y2^{\frac{y}{z}}\right)\frac{\ln 2}{z^2}$$

и вычисляем их значения в точке $M_0(2,\ 2,\ 1)$:

$$f'_x(M_0)=4\ln 2,\ f'_y(M_0)=4\ln 2,\ f'_z(M_0)=-16\ln 2.$$

По тем же формулам, что и в пункте б), находим: $x+y-4z=0$ — уравнение касательной плоскости; $x-2=y-2=\frac{z-1}{-4}$ — уравнение нормали.

238. Написать уравнения касательной плоскости и уравнение нормали в указанных точках к поверхностям: а) $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=$ $=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$ в точке $M_0(\varphi_0,\ \psi_0)$; б) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$ в точке $M_0(\varphi_0,\ r_0)$.

Решение. а) Находим производные в точке M_0:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=b\cos\psi_0\cos\varphi_0,\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}=0;$$
$$\frac{\partial x}{\partial\psi}=-a\sin\psi_0\cos\varphi_0,\ \frac{\partial y}{\partial\psi}=-b\sin\psi_0\sin\varphi_0,\ \frac{\partial z}{\partial\psi}=c\cos\psi_0$$

и вычисляем A, B, C: $A=bc\cos^2\psi_0\cos\varphi_0$, $B=ac\cos^2\psi_0\sin\varphi_0$, $C=$ $=ab\sin\psi_0\cos\psi_0$. Используя формулы (13) и (14) п. 5°, получаем: $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1$ — уравнение касательной плоскости; $\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\operatorname{cosec}\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\operatorname{cosec}\psi_0-c}{ab}$ — уравнение нормали.

б) Аналогично предыдущему пункту находим в точке M_0 производные

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r_0 \sin\varphi_0,\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r_0\cos\varphi_0,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi_0,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi_0,\ \frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

а также значения A, B, C: $A = r_0\cos\varphi_0 \operatorname{ctg}\alpha$, $B = r_0 \sin\varphi_0 \operatorname{ctg}\alpha$, $C = -r_0$.

Составляем уравнение касательной плоскости:

$$x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0$$

и уравнение нормали:

$$\frac{x - r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y - r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z - r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}.$$

239. Найти предельное положение касательной плоскости к поверхности $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, когда точка касания $M(u, v)$ $(u \neq v)$ неограниченно приближается к точке $M_0(u_0, v_0)$ линии края $u = v$ поверхности.

Решение. Вычисляем величины, пропорциональные направляющим косинусам нормали к данной поверхности в точке $M(u, v)$:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 6uv(v-u), \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = -3(v^2 - u^2),$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 2(v-u)$$

и записываем уравнение касательной плоскости в точке $M(u, v)$:

$$(x - u - v)\,6uv - (y - u^2 - v^2)\,3(u+v) + (z - u^3 - v^3)\,2 = 0.$$

Если точка $M(u, v)$ неограниченно приближается к точке $M_0(u_0, v_0)$ линии края $u = v$ поверхности, то, как следует из последнего равенства (при $u \to u_0$, $v \to v_0$, $u_0 = v_0$), касательная плоскость занимает предельное положение: $3xu_0^2 - 3yu_0 + z - 2u_0^3 = 0$.

Найти огибающие однопараметрических семейств плоских кривых:

240. $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ $(p = \text{const})$.

Решение. Пусть $F(x, y, \alpha) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$. Тогда $F'_\alpha(x, y, \alpha) \equiv -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ и система (15) п. 6° принимает вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0.$$

Исключая из этой системы параметр α, получаем уравнение дискриминантной кривой $x^2 + y^2 = p^2$. Далее, находим:

$$F'_x(x, y, \alpha) \equiv \cos\alpha,\ F'_y(x, y, \alpha) \equiv \sin\alpha.$$

В точках дискриминантной кривой $F_x'^2 + F_y'^2 \equiv \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$ и в этих же точках

$$\cos\alpha = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad F''_{\alpha\alpha}(x, y, \alpha) \equiv$$
$$\equiv -x\cos\alpha - y\sin\alpha = \mp\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \mp \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mp p \neq 0,$$

если $p \neq 0$. Таким образом, дискриминантная кривая $x^2+y^2=p^2$ является огибающей.

241. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

Решение. Имеем: $F(x, y, a) = (x-a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2}$. Следовательно, система (15) п. 6° имеет вид:

$$(x-a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \quad -2(x-a) - a = 0.$$

Отсюда получаем уравнение дискриминантной кривой в параметрическом виде: $x = \frac{a}{2}$, $y^2 = \frac{a^2}{4}$ или в явном виде $y = \pm x$. Имеем, далее, $F'_x = 2(x-a)$, $F'_y = 2y$, $F''_{aa} = 1$. В точках дискриминантной кривой

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \equiv 4(x-a)^2 + 4y^2 = 2a^2 \neq 0, \quad F''_{aa} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, дискриминантная кривая $y = \pm x$ является огибающей.

242. $y = kx + \frac{a}{k}$ $(a = \mathrm{const})$.

Решение. Из системы

$$F(x, y, k) \equiv y - kx - \frac{a}{k} = 0, \quad F'_k \equiv -x + \frac{a}{k^2} = 0$$

находим уравнение дискриминантной кривой $y^2 = 4ax$. То, что эта кривая является огибающей, следует из соотношений $F_x'^2 + F_y'^2 = k^2 + 1 \neq 0$, $F''_{kk} \equiv -\frac{2a}{k^3} \neq 0$, справедливых для всех ее точек.

243. $y^2 = 2px + p^2$.

Решение. Обозначая $F(x, y, p) \equiv y^2 - 2px - p^2$ и записывая систему (15) п. 6° $y^2 - 2px - p^2 = 0$, $-2x - 2p = 0$, находим, что этой системе удовлетворяют координаты единственной точки: $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$. Следовательно, огибающих нет.

§ 7. Экстремумы функций нескольких переменных

1°. Определение локального экстремума. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена на множестве $E \subset E_n$ и точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in E$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность $S(x^{(0)}, \delta) = \{x\colon 0 < \rho(x, x^{(0)}) < \delta\}$ точки $x^{(0)}$, что для всех точек $x \in S(x^{(0)}, \delta) \cap E$ выполняется неравенство

$$f(x^{(0)}) \geqslant f(x) \quad (f(x^{(0)}) \leqslant f(x)). \tag{1}$$

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *локальный экстремум*, а точки, в которых он достигается, называются *экстремальными точками*.

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ локальный экстремум, то полное приращение $\Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)})$ $(x \in S(x^{(0)}, \delta) \cap E)$ этой функции в точке $x^{(0)}$ удовлетворяет одному из следующих условий: $\Delta f(x^{(0)}) \leqslant 0$ (в случае локального максимума), $\Delta f(x^{(0)}) \geqslant 0$ (в случае локального минимума).

2°. Необходимое условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ локальный экстремум. Тогда, если в этой точке существуют частные производные первого порядка по всем переменным, то все эти частные производные равны нулю. Таким образом, в этом случае экстремальные точки функции $f(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$f'_{x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Если же функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то соотношение

$$df(x^{(0)}) = 0 \tag{3}$$

является необходимым условием локального экстремума. Точки, в которых выполняется условие (2) или (3), называют *стационарными точками*. Функция $f(x)$ может принимать локальный экстремум только в стационарных точках или в точках, в которых частные производные первого порядка не существуют. Все эти точки называют *точками возможного экстремума*.

3°. Знакоопределенные квадратичные формы. Функция

$$A(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k \quad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{4}$$

переменных $h_1, h_2, \ldots, h_n$ называется *квадратичной формой*. Числа a_{ik} называются *коэффициентами* квадратичной формы.

Квадратичная форма (4) называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений переменных $h_1, h_2, \ldots, h_n$, для которых выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2 > 0$, эта форма имеет положительные (отрицательные) значения. Положительно определенные и отрицательно определенные формы объединяются общим названием — *знакоопределенные формы*.

Сформулируем критерий знакоопределенности квадратичной формы — *критерий Сильвестра*. Для того чтобы квадратичная форма (4) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма (4) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots,$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

4°. Достаточные условия локального экстремума. Пусть в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)}$ функция $f(x)$ дважды дифференцируема и все частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в точке $x^{(0)}$. Если в этой точке второй дифференциал $d^2 f(x^{(0)}) = \sum\limits_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} dx_i\,dx_j$ представляет собой знакоопределенную квадратичную форму от дифференциалов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ независимых переменных, то в точке $x^{(0)}$ функция $f(x)$ принимает локальный экстремум. При этом, если $d^2 f(x^{(0)}) < 0$, то в точке $x^{(0)}$ функция $f(x)$ принимает локальный максимум, а если $d^2 f(x^{(0)}) > 0$, то локальный минимум.

Случай функции двух переменных. Пусть в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ дважды дифференцируема и все частные производные второго порядка $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ непрерывны в этой точке. Тогда, если в точке M_0

$$\Delta(M_0) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

то функция $f(x, y)$ имеет в этой точке локальный экстремум, а именно максимум при $a_{11} < 0$ и минимум при $a_{11} > 0$. Если же в точке M_0

$$\Delta(M_0) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0,$$

то функция $f(x, y)$ не имеет локального экстремума в этой точке.

Случай, когда $\Delta(M_0) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, требует дополнительных исследований.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ m раз дифференцируема и все частные производные m-го порядка непрерывны в этой точке, причем

$$df(x^{(0)}) = 0, \quad d^2 f(x^{(0)}) \equiv d^3 f(x^{(0)}) \equiv \cdots \equiv d^{m-1} f(x^{(0)}) \equiv 0, \quad d^m f(x^{(0)}) \gtreqless 0.$$

Тогда, если m — нечетное, то точка $x^{(0)}$ не является экстремальной, если же m — четное, то в точке $x^{(0)}$ функция $f(x)$ имеет экстремум: локальный максимум, если $d^m f(x^{(0)}) < 0$, и локальный минимум, если $d^m f(x^{(0)}) > 0$.

Если в соотношениях (1) имеет место равенство для любого малого $\delta > 0$ и некоторых значений x, отличных от $x^{(0)}$, то локальный экстремум называют *нестрогим* (соответственно, нестрогим локальным минимумом и нестрогим локальным максимумом). В этом случае локальный экстремум достигается на некотором множестве точек.

Если экстремальная точка $x^{(0)}$ принадлежит границе области E определения функции $f(x)$, то экстремум называют *краевым* (соответственно краевым максимумом и краевым минимумом).

5°. Экстремум неявно заданной функции. Если неявная функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \subset E_n$ определяется уравнением

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \text{ то}$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv 0, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E.$$

Пусть функция u дважды непрерывно дифференцируема в E. Тогда в стационарной точке $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ справедливы равенства:

$$du = -\frac{1}{F'_u}(F'_{x_1}dx_1 + F'_{x_2}dx_2 + \cdots + F'_{x_n}dx_n) = 0, \tag{5}$$

$$F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) = 0,$$

где $u^{(0)} = u(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Поскольку справедливо и обратное утверждение, то стационарные точки могут быть найдены из системы

$$F'_{x_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \ F = 0. \tag{6}$$

Еще раз дифференцируя первое из равенств (5) и учитывая, что в стационарной точке $du = 0$, получаем:

$$d^2u = -\frac{1}{F'_u}\sum_{i,\, j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j. \tag{7}$$

Если $d^2u > 0$ в точке M_0, то функция u имеет минимум; если же в этой точке $d^2u < 0$, то максимум.

6° Условный экстремум. Пусть функция $f(x, y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ определена в некоторой области $E \subset E_{n+m}$. Пусть, кроме того, на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ наложено m дополнительных условий ($m < n$):

$$\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{array} \tag{8}$$

которые называются *уравнениями связи*.

Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ *условный максимум (условный минимум)*, если неравенство $f(x, y) \leqslant f(x^{(0)}, y^{(0)})$ $(f(x, y) \geqslant f(x^{(0)}, y^{(0)}))$ выполняется в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ при условии, что точки (x, y) и $(x^{(0)}, y^{(0)})$ удовлетворяют уравнениям связи (8).

Исследование функции $f(x, y)$ на условный экстремум при наличии уравнений связи $F_j(x, y)=0$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ $(m<n)$ сводится к исследованию на обычный экстремум функции

$$\Phi(x, y)=f(x, y)+\sum_{j=1}^{m} \lambda_j F_j(x, y), \tag{9}$$

называемой *функцией Лагранжа*, где λ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ — постоянные множители. При этом знак второго дифференциала $d^2\Phi(x^{(0)}, y^{(0)})$ в стационарной точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ определяет характер экстремума при условии, что переменные $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, dy_1, dy_2, \ldots, dy_m$ связаны соотношениями

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k} dx_k+\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_s} dy_s=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

7°. Абсолютный экстремум. Если функция $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в области $E \subset E_n$ и непрерывна на замыкании $\overline{E}$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений на множестве $\overline{E}$ или в стационарной точке, или в точке, принадлежащей границе области E.

Для определения абсолютного экстремума функции $f(x)$ на множестве $\overline{E}$ сравниваем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ в стационарных точках области E с наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на границе области E.

Исследовать на локальный экстремум следующие функции:

244. $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

Решение. Вычислим частные производные: $z'_x=4x^3-2x-2y$, $z'_y=4y^3-2x-2y$. Стационарные точки найдем из системы

$$4x^3-2x-2y=0, \quad 4y^3-2x-2y=0.$$

Она имеет три решения: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=-1$, $y_2=-1$; $x_3=1$, $y_3=1$. Для проверки достаточных условий локального экстремума вычислим вторые производные: $a_{11}=z''_{x^2}=12x^2-2$, $a_{12}=z''_{xy}=-2$, $a_{22}=z''_{y^2}=12y^2-2$ и составим выражение

$$\Delta(x, y)=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=(12x^2-2)(12y^2-2)-4.$$

Поскольку $\Delta(0, 0)=0$, то для выяснения вопроса о существовании экстремума рассмотрим приращение функции z в точке $O(0, 0)$: $\Delta z(0, 0)=z(h, k)-z(0, 0)$. Если $k=h$, где $0<h<\sqrt{\frac{3}{2}}$, то $\Delta z(0, 0)=2h^2\left(h^2-\frac{3}{2}\right)<0$. Если же $k=-h$, где $h>0$, то $\Delta z(0, 0)=2h^4>0$.

Следовательно, приращение $\Delta z(0, 0)$ принимает значения разных знаков, а поэтому при $x_1=0$, $y_1=0$ экстремума нет.

В точках $(-1, -1)$ и $(+1, +1)$ $\Delta=96>0$, а так как $a_{11}=10>0$, то в этих точках функция имеет минимум, причем $z_{\min}=-2$.

245. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Решение. Из системы

$$z'_x = 8x^3 - 2x = 0,\ z'_y = 4y^3 - 4y = 0$$

находим стационарные точки: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(0,\ 1)$, $M_3(0,\ -1)$, $M_4\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $M_5\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $M_7\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$, $M_9\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$.

Вычисляя вторые производные $z''_{x^2} = 24x^2 - 2$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{y^2} = 12y^2 - 4$ и составляя выражение

$$\Delta(x,\ y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 8(12x^2 - 1)(3y^2 - 1),$$

находим, что $\Delta(0,\ 0) = 8 > 0$; $\Delta(0,\ 1) = -16 < 0$; $\Delta(0,\ -1) = -16 < 0$; $\Delta\left(\frac{1}{2},\ 0\right) = -16 < 0$; $\Delta\left(\frac{1}{2},\ 1\right) = 32 > 0$; $\Delta\left(\frac{1}{2},\ -1\right) = 32 > 0$; $\Delta\left(-\frac{1}{2},\ 0\right) = -16 < 0$; $\Delta\left(-\frac{1}{2},\ 1\right) = 32 > 0$; $\Delta\left(-\frac{1}{2},\ -1\right) = 32 > 0$.

Следовательно, точки M_2, M_3, M_4 и M_7 не являются экстремальными. Точки M_1, M_5, M_6, M_8 и M_9 — экстремальные, причем: в точке $M_1(0,\ 0)$ — максимум (поскольку $z''_{x^2}(0,\ 0) = -2 < 0$) и $z_{\max} = 0$; в точках $M_5\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ и $M_9\left(-\frac{1}{2},\ -1\right)$ — минимум $\left(\text{поскольку } z''_{x^2}\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm 1\right) = 4 > 0\right)$ и $z_{\min} = -\frac{9}{8}$.

246. $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

Решение. Составляя систему

$$z'_x = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0, \quad z'_y = x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0,$$

а затем решая ее, находим стационарные точки: $M_1(2,\ 3)$; $M_2(0,\ y)$, где $-\infty < y < \infty$; $M_3(x,\ 0)$, где $-\infty < x < \infty$.

Для проверки достаточных условий локального экстремума находим вторые производные:

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= 12y^3 - 6xy^3 - 2y^4, \\ z''_{xy} &= 36xy^2 - 9x^2y^2 - 8xy^3, \\ z''_{y^2} &= 36x^2y - 6x^3y - 12x^2y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку $z''_{x^2}(2,\ 3) = -162$, $z''_{xy}(2,\ 3) = -108$, $z''_{y^2}(2,\ 3) = -144$, а $\Delta(2,\ 3) = 144 \cdot 162 - 108^2 > 0$, то в точке $M_1(2,\ 3)$ функция z имеет максимум, причем $z_{\max} = 108$. В точках M_2 и M_3 выражение $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ обращается в нуль, а это ничего не говорит о наличии экстремума в этих точках.

Для дальнейших исследований вычислим приращение функции в точке $M_2(0,\ y)$, $-\infty < y < \infty$:

$$\Delta z(0,\ y) = \Delta x^2(y + \Delta y)^2((6 - \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2).$$

Легко убедиться, что при достаточно малых Δx и Δy $\Delta z(0, y) \leqslant 0$, если $-\infty < y < 0$ или $6 < y < +\infty$; $\Delta z(0, y) \geqslant 0$, если $0 < y < 6$. Причем в обоих случаях достигается знак равенства при $|\Delta x| > 0$ и $|\Delta y| > 0$ (например, если $y + \Delta y = 0$). Следовательно, в точках $M_2(0, y)$, где $-\infty < y < 0$ или $6 < y < +\infty$, функция z имеет нестрогий максимум, а в точках $M_2(0, y)$, где $0 < y < 6$, — нестрогий минимум. В точках $M_2(0, 0)$ и $M_2(0, 6)$ функция z экстремума не имеет, так как при $x = 0$ приращение $\Delta z(0, y)$ меняет знак при переходе переменной y через точки $y = 0$ и $y = 6$.

Далее, из равенств (1) следует, что второй дифференциал равен нулю в точках $M_3(x, 0)$, $-\infty < x < \infty$. Поэтому для дальнейшего исследования вычислим дифференциал третьего порядка. Дифференцируя равенства (1), находим производные третьего порядка

$$z'''_{x^3} = -6y^3; \quad z'''_{x^2y} = 36y^2 - 18xy^2 - 8y^3; \quad z'''_{xy^2} = 72xy - 18x^2y - 24xy^2$$

$$z'''_{y^3} = 36x^2 - 6x^3 - 24x^2y$$

и вычисляем их значения в точках $M_3(x, 0)$:

$$z'''_{x^3}(x, 0) = 0, \ z'''_{x^2y}(x, 0) = 0, \quad z'''_{xy^2}(x, 0) = 0, \quad z'''_{y^3}(x, 0) = 36x^2 - 6x^3.$$

Таким образом, $d^3z(x, 0) = (36x^2 - 6x^3)\,dy^3 \not\equiv 0$ на множестве точек $M_3(x, 0)$, $-\infty < x < \infty$, поэтому в точках $M_3(x, 0)$, $-\infty < x < \infty$ функция z экстремума не имеет.

247. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение. Вычислив частные производные и приравняв их нулю, получим систему

$$z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad z'_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Решив эту систему, найдем стационарные точки $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1)$. Затем запишем частные производные второго порядка: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$ и составим выражение $\Delta(x, y) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36xy - 9$. В точке M_1 имеем $\Delta = -9 < 0$, так что эта точка не является экстремальной. В точке M_2 имеем $\Delta = 27 > 0$, $a_{11} > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет минимум, причем $z_{\min} = -1$.

248. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $\quad (x > 0, \quad y > 0)$.

Решение. Из системы

$$z'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0, \quad z'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$$

находим единственную стационарную точку $x = 5$, $y = 2$, принадлежащую области определения функции. Вычислив производные $z''_{x^2} = \frac{100}{x^3}$, $z''_{xy} = 1$, $z''_{y^2} = \frac{40}{y^3}$ и составив выражение $\Delta(x, y) = \frac{4000}{x^3y^3} - 1$, найдем, что $\Delta(5, 2) = 3 > 0$, $a_{11}(5, 2) = \frac{4}{5} > 0$. Следовательно, в точке $(5, 2)$ функция имеет минимум: $z_{\min} = 30$.

249. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $\quad (a > 0,\ b > 0)$.

Решение. Из системы

$$z'_x = \frac{y\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad z'_y = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

находим стационарные точки: $M_1(0,\ 0)$; $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$; $M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

Для проверки достаточных условий запишем вторые производные:

$$z''_{x^2} = \frac{-\frac{xy}{a^2}\left(3 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad z''_{y^2} = \frac{-\frac{xy}{b^2}\left(3 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$z''_{xy} = \frac{1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2x^4}{a^4} + \frac{3x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{2y^4}{b^4}}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

а затем вычислим значение Δ в стационарных точках. Имеем: $\Delta(M_1) = -1 < 0$, поэтому эта точка не является экстремальной.

Поскольку $\Delta\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}},\ \pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right) = 4 > 0$, то точки M_2, M_3, M_4 и M_5 — экстремальные. А так как

$$z''_{x^2}(M_2) = z''_{x^2}(M_3) = -\frac{4ab}{9} < 0, \quad z''_{x^2}(M_4) = z''_{x^2}(M_5) = \frac{4ab}{9} > 0,$$

то в точках M_2 и M_3 функция z имеет максимум, а в точках M_4 и M_5 — минимум. Непосредственным вычислением находим: $z_{\max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$, $z_{\min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

250. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ $\quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Решение. Находим частные производные и приравниваем их нулю. В результате получаем систему

$$z'_x = \frac{a(x^2 + y^2 + 1) - x(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$z'_y = \frac{b(x^2 + y^2 + 1) - y(ax + by + c)}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0. \qquad (1)$$

Умножая первое равенство этой системы на $-b(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}$, второе — на $a(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}$ и складывая их, получаем уравнение $(bx - ay)(ax+by+c)=0$, из которого следует, что $bx=ay$, $ax+by+c=0$. Отсюда и из (1) находим стационарную точку: $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, $c \neq 0$ (если $c=0$, то при $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ функция z не имеет стационарных точек).

Для частных производных второго порядка имеем выражения:

$$z''_{x^2} = -\frac{by+c}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x(a(x^2+y^2+1)-x(ax+by+c))}{(x^2+y^2+1)^{\frac{5}{2}}},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{ax+c}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y(b(x^2+y^2+1)-y(ax+by+c))}{(x^2+y^2+1)^{\frac{5}{2}}},$$

$$z''_{xy} = -\frac{ay+bx}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3xy(ax+by+c)}{(x^2+y^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Вычисляя значения вторых производных в стационарной точке

$$z''_{x^2}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = -\frac{b^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad z''_{y^2}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = -\frac{a^2+c^2}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$z''_{xy}\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}},$$

находим, что

$$\Delta\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{-3}\left(\frac{b^2+c^2}{c}\cdot\frac{a^2+c^2}{c}-\frac{a^2b^2}{c^2}\right) > 0,$$

т. е. экстремум существует.

Поскольку вторая производная z''_{x^2} в стационарной точке отрицательна при $c>0$ и положительна при $c<0$, то в первом случае функция z имеет максимум: $z_{\max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, а во втором — минимум: $z_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

251. $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Легко убедиться, что данная функция не имеет стационарных точек. Но в точке $M(0, 0)$ частные производные первого порядка не существуют, так как разностные отношения

$$\frac{z(\Delta x, 0)-z(0, 0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \qquad \frac{z(0, \Delta y)-z(0, 0)}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

не имеют пределов. Следовательно, точка $M(0, 0)$ является точкой возможного экстремума. Из того, что приращение $z(x, y)-z(0, 0)=$

$= -\sqrt{x^2+y^2}$ отрицательно, заключаем, что в этой точке функция имеет максимум, причем $z_{\max} = 1$.

252. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

Решение. Для определения стационарных точек получаем систему

$$z'_x = 1 + 4\cos x \sin y = 0, \quad z'_y = 1 + 4\sin x \cos y = 0,$$

преобразуя которую к виду

$$1 - 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0,$$
$$1 + 2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) = 0,$$

находим:

$$\sin(x-y) = 0, \quad \sin(x+y) = -\frac{1}{2};$$

отсюда

$$x + y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$
$$x - y = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

или $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m+n)\frac{\pi}{2}$, $\quad y = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m-n)\frac{\pi}{2}$,

$$m,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Находим вторые производные: $z''_{x^2} = -4\sin x \sin y$; $z''_{y^2} = -4\sin x \sin y$, $z''_{xy} = 4\cos x \cos y$ и составляем выражение

$$\Delta(x, y) = 16\sin^2 x \sin^2 y - 16\cos^2 x \cos^2 y = -16\cos(x-y)\cos(x+y).$$

Для вычисления значений выражения $\Delta(x, y)$ в стационарных точках используем формулы (1). В результате получаем:

$$\Delta = -16\cos n\pi \cos\left((-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + m\pi\right) = (-1)^{m+n+1}16\cos\frac{\pi}{6},$$
$$m,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отсюда следует, что при $m+n+1$ четном $\Delta > 0$ и экстремум существует, а при $m+n+1$ нечетном экстремума нет. Таким образом, функция имеет экстремум при $m+n$ нечетном. В этом случае числа m и n различной четности.

Для выяснения характера экстремума преобразуем вторую производную z''_{x^2} к виду $z''_{x^2} = 2\cos(x+y) - 2\cos(x-y)$ и вычислим ее значения в экстремальных точках (тогда $m+n$ — нечетное):

$$z''_{x^2} = 2\left(\cos\left((-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{6} + m\pi\right) - \cos n\pi\right) = (-1)^m\cdot\sqrt{3} - (-1)^n\cdot 2.$$

Если $m = 2k$ — четное, а $n = 2r - 1$ — нечетное, то $z''_{x^2} = \sqrt{3} + 2 > 0$ и функция имеет минимум; если же $m = 2k - 1$ — нечетное, а $n = 2r$ — четное, то $z''_{x^2} = -\sqrt{3} - 2 < 0$ и функция имеет максимум.

Вычислив экстремальные значения функции, получим:

$$z_{\min} = 2k\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$z_{\max} = (2k-1)\pi + 2 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

253. $z = (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)}$.

Решение. Решив систему

$$z'_x = (2x - 2x(x^2 + y^2)) e^{-(x^2+y^2)} = 0,$$
$$z'_y = (2y - 2y(x^2 + y^2)) e^{-(x^2+y^2)} = 0,$$

получим множество стационарных точек, состоящее из точки (0, 0) и точек окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Находим вторые производные:

$$z''_{x^2} = (4x^2(x^2 + y^2) - 12x^2 + 2) e^{-(x^2+y^2)},$$
$$z''_{y^2} = (4y^2(x^2 + y^2) - 12y^2 + 2) e^{-(x^2+y^2)},$$
$$z''_{xy} = (4xy(x^2 + y^2) - 8xy) e^{-(x^2+y^2)}.$$

Поскольку в точке (0, 0) $z''_{x^2} = 2$, $z''_{y^2} = 2$, $z''_{xy} = 0$, $\Delta(0, 0) = 4 > 0$, то в ней функция имеет минимум: $z_{\min} = 0$.

Для проверки достаточных условий в точках, принадлежащих окружности $x^2 + y^2 = 1$, функцию z будем рассматривать как функцию одной переменной $t = x^2 + y^2$: $z = te^{-t}$, для которой $t = 1$ является стационарной точкой. Поскольку вторая производная $z'' = (t - 2) e^{-t}$ отрицательна при $t = 1$, то функция z имеет максимум. Таким образом, данная функция $z(x, y)$ имеет нестрогий максимум $z_{\max} = e^{-1}$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$.

254. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

Решение. Из системы

$$u'_x = 2x + 2 = 0, \quad u'_y = 2y + 4 = 0, \quad u'_z = 2z - 6 = 0$$

определяем единственную стационарную точку: $x = -1$, $y = -2$, $z = 3$.

Находим вторые производные: $u''_{x^2} = 2$, $u''_{y^2} = 2$, $u''_{z^2} = 2$, $u''_{xy} = u''_{xz} = u''_{yz} = 0$. Таким образом,

$$u''_{x^2} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

т. е. второй дифференциал d^2u, согласно критерию Сильвестра, представляет собой положительно определенную квадратичную форму. Следовательно, в точке (—1, —2, 3) функция имеет минимум ($u_{\min} = -14$).

255. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Решение. Имеем:

$$u'_x = 3x^2 + 12y = 0, \quad u'_y = 2y + 12x = 0, \quad u'_z = 2z + 2 = 0.$$

Отсюда находим стационарные точки: $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=-1$; $x_2=24$, $y_2=-144$, $z_2=-1$. Далее, находим вторые производные: $u''_{x^2}=6x$, $u''_{xy}=12$, $u''_{xz}=0$, $u''_{y^2}=2$, $u''_{yz}=0$, $u''_{z^2}=2$ и вычисляем в стационарных точках значения определителей

$$A_1=u''_{x^2},\quad A_2=\begin{vmatrix} u''_{x^2} & u'_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix},\quad A_3=\begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

В точке $M_1(0,\ 0,\ -1)$ первый из этих определителей обращается в нуль, поэтому вопрос о существовании экстремума в этой точке требует дальнейших исследований. С этой целью находим третий дифференциал в точке M_1 и убеждаемся в том, что $d^3u(0,\ 0,\ -1)=$ $=6dx^3\not\equiv 0$. Следовательно, точка $M_1(0,\ 0,\ -1)$ не является экстремальной.

В точке $M_2(24,\ -144,\ -1)$ $A_1=144>0$, $A_2=144>0$, $A_3=283>$ >0, поэтому функция в этой точке имеет минимум: $z_{\min}=-6913$.

256. $u=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}\qquad (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Решение. Из системы

$$u'_x=1-\frac{y^2}{4x^2}=0,\quad u'_y=\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0,\quad u'_z=\frac{2z}{y}-\frac{2}{z^2}=0$$

находим единственную стационарную точку: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$.

Затем находим вторые производные: $u''_{x^2}=\dfrac{y^2}{2x^3}$, $u''_{xy}=-\dfrac{y}{2x^2}$, $u''_{xz}=0$, $u''_{y^2}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2z^2}{y^3}$, $u''_{zy}=-\dfrac{2z}{y^2}$, $u''_{z^2}=\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z^3}$ и вычисляем их значения в стационарной точке: $u''_{x^2}=4$, $u''_{xy}=-2$, $u''_{xz}=0$, $u''_{y^2}=3$, $u''_{yz}=-2$, $u''_{z^2}=6$.

Вычисляя определители (см. пример 255) $A_1=4$, $A_2=8$, $A_3=32$, заключаем, что в точке $\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ функция u имеет минимум: $z_{\min}=4$.

257. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)\qquad (a>0)$.

Решение. Решив систему

$$\begin{aligned} u'_x&=y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0,\\ u'_y&=2xyz^3(a-x-3y-3z)=0,\\ u'_z&=3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0, \end{aligned}$$

получим следующие стационарные точки: точку $M_1\left(\dfrac{a}{7},\ \dfrac{a}{7},\ \dfrac{a}{7}\right)$; точки $M_2(0,\ y,\ z)$, принадлежащие прямой $x=0$, $2y+3z=a$; точки $M_3(x,\ 0,\ z)$, принадлежащие плоскости $y=0$; точки $M_4(x,\ y,\ 0)$, принадлежащие плоскости $z=0$.

Проверим, выполняются ли достаточные условия локального экстремума. С этой целью найдем производные второго порядка:

$$\begin{gathered}u''_{x^2} = -2y^2z^3; \quad u''_{xy} = 2yz^3(a-2x-3y-3z);\\ u''_{xz} = 3y^2z^2(a-2x-2y-4z); \quad u''_{y^2} = 2xz^3(a-x-6y-3z); \qquad (1)\\ u''_{yz} = 6xyz^2(a-x-3y-4z); \quad u''_{z^2} = 6xy^2z(a-x-2y-8z).\end{gathered}$$

В точке $M_1\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ имеем: $u''_{x^2} = -\frac{2a^5}{7^5}$; $u''_{xy} = -\frac{2a^5}{7^5}$; $u''_{xz} = -\frac{3a^5}{7^5}$; $u''_{y^2} = -\frac{6a^5}{7^5}$; $u''_{yz} = -\frac{6a^5}{7^5}$; $u''_{z^2} = -\frac{24a^5}{7^5}$; $A_1 < 0$; $A_2 > 0$; $A_3 < 0$, где A_1, A_2 и A_3 — определители (8) п. 3° при $n = 3$. Отсюда заключаем, что в этой точке функция имеет максимум: $u_{\max} = \frac{a^7}{7^7}$.

Пользуясь равенствами (1), записываем второй дифференциал функции u в точках M_2: $d^2u = -2y^2z^3dx^2 + 2yz^3(a-3y-3z) \times \times dxdy + 3y^2z^2(a-2y-4z)\,dxdz$. По виду дифференциала легко убедиться, что он может иметь различные знаки, т. е. не является знакоопределенной формой от переменных dx, dy и dz, а поэтому в точках M_2 экстремума нет.

Записывая второй дифференциал в точках M_3: $d^2u = 2xz^3(a-x-3z)\,dy^2$, убеждаемся, что при $a-x-3z \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$ он представляет собой знакоопределенную форму. Следовательно, в точках M_3 при условии, что $a-x-3z \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, функция u имеет нестрогий экстремум, равный нулю.

В точках M_4 второй дифференциал тождественно равен нулю, однако $d^3u = 6xy^2(a-x-2y)\,dz^3 \neq 0$, поэтому эти точки не являются экстремальными.

258. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,$ $0 \leqslant y \leqslant \pi,$ $0 \leqslant z \leqslant \pi)$.

Решение. Имеем:

$$\begin{gathered}u'_x = \cos x - \cos(x+y+z) = 0,\\ u'_y = \cos y - \cos(x+y+z) = 0,\\ u'_z = \cos z - \cos(x+y+z) = 0.\end{gathered}$$

Решив эту систему, получим три стационарные точки: $M_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(0, 0, 0)$, $M_3(\pi, \pi, \pi)$.

Проверим, существует ли экстремум в каждой из этих точек. Вычисляя значения вторых производных:

$$\begin{gathered}u''_{x^2} = -\sin x + \sin(x+y+z), \quad u''_{xy} = \sin(x+y+z),\\ u''_{y^2} = -\sin y + \sin(x+y+z), \quad u''_{yz} = \sin(x+y+z),\\ u''_{z^2} = -\sin z + \sin(x+y+z), \quad u''_{zx} = \sin(x+y+z)\end{gathered}$$

в точке M_1, получаем: $u''_{x^2} = -2$, $u''_{xy} = -1$, $u''_{zx} = -1$, $u''_{y^2} = -2$, $u''_{yz} = -1$, $u''_{z^2} = -2$. Отсюда следует, что

$$A_1 = u''_{x^2} < 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} \end{vmatrix} > 0, \quad A_3 = \begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} < 0.$$

Таким образом, в точке M_1 функция имеет локальный максимум: $z_{\max} = 4$.

В точках M_2 и M_3 функция имеет краевой минимум, равный нулю. Это следует из того, что при любых приращениях Δx, Δy, Δz независимых переменных из области $0 \leqslant \Delta x \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Delta y \leqslant \pi$, $0 \leqslant \Delta z \leqslant \pi$, но таких, что $0 < \Delta x + \Delta y + \Delta z < \pi$, справедливы неравенства (см. пример 8, в, гл. I, ч. 1):

$$\Delta u(0, 0, 0) = u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) - u(0, 0, 0) = u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) =$$
$$= \sin\Delta x + \sin\Delta y + \sin\Delta z - \sin(\Delta x + \Delta y + \Delta z) \geqslant 0,$$
$$\Delta u(\pi, \pi, \pi) = u(\pi - \Delta x, \pi - \Delta y, \pi - \Delta z) - u(\pi, \pi, \pi) =$$
$$= u(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \geqslant 0.$$

259. $u = x_1 x_2^2 \ldots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)$ $(x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots; x_n > 0)$.

Решение. Приравнивая нулю частные производные первого порядка, получаем систему для определения стационарных точек:

$$u'_{x_1} = x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n (\varphi - x_1) = 0,$$
$$u'_{x_2} = 2x_1 x_2^{2-1} x_3^3 \ldots x_n^n (\varphi - x_2) = 0,$$
$$u'_{x_3} = 3x_1 x_2^2 x_3^{3-1} \ldots x_n^n (\varphi - x_3) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u'_{x_n} = nx_1 x_2^2 x_3^3 \ldots x_{n-1}^{n-1} x_n^{n-1} (\varphi - x_n) = 0,$$

где $\varphi = 1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n$. Так как $x_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то стационарные точки должны удовлетворять следующей системе:

$$\varphi - x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

В системе (1) из первого уравнения вычтем второе, из второго — третье и т. д. В результате получим систему

$$-x_j + x_{j+1} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

из которой следует, что $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Пользуясь этим, из первого уравнения системы (1), которое в этом случае запишется в виде $1 - x_1(1 + 2 + \cdots + n) - x_1 = 0$, находим стационарную точку $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}$.

Найдем производные второго порядка:

$$u''_{x_1^2} = -2x_2^2 x_3^3 \ldots x_n^n,$$
$$u''_{x_k^2} = k(k-1) x_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-2} \ldots x_n^n (\varphi - x_k) -$$
$$- k(k+1) x_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-1} \ldots x_n^n, \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$
$$u''_{x_k x_m} = kmx_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-1} \ldots x_m^{m-1} \ldots x_n^n (\varphi - x_k) -$$
$$- kmx_1 x_2^2 \ldots x_k^{k-1} \ldots x_n^n \quad (k, m = 1, 2, \ldots, n, k \neq m).$$

Обозначив через x общее значение координат стационарной точки $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2}$, а через a_{ij} — значения производных

$u''_{x_i x_j}$ в стационарной точке и заметив, что в стационарной точке $\varphi - x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, получим:

$$a_{11} = u''_{x_1^2} = -2 \cdot x^{\frac{n^2+n-2}{2}}, \quad a_{kk} = u''_{x_k^2} = -k(k+1)\, x^{\frac{n^2+n-2}{2}},$$

$$a_{km} = u''_{x_k x_m} = -kmx^{\frac{n^2+n-2}{2}}. \qquad (2)$$

Для исследования знакоопределенности квадратичной формы

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j \quad (a_{ij} = u''_{x_i x_j}) \qquad (3)$$

вычислим определитель

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Согласно (2), из k-й строки определителя (4) выносится сомножитель $(-1) \cdot kx^{\frac{n^2+n-2}{2}}$, поэтому

$$A_m = (-1)^m m!\, x^{\frac{n^2+n-2}{2}m} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \ldots & m \\ 1 & 3 & 3 & 4 \ldots & m \\ 1 & 2 & 4 & 4 \ldots & m \\ 1 & 2 & 3 & 5 \ldots & m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots & m+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m m!\, x^{\frac{n^2+n-2}{2}m} \left(1 + \frac{m^2+m}{2}\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $A_4 > 0, \ldots$, т. е. что форма (3) отрицательно определенная. Таким образом, в стационарной точке функция имеет максимум. Вычисляя экстремальное значение функции, имеем:

$$u_{\max} = \left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}.$$

260. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}$ $(x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$.

Решение. Приравняв нулю частные производные первого порядка, получим систему для определения стационарных точек:

$$u'_{x_1} = 1 - \frac{x_2}{x_1^2} = 0;$$

$$u'_{x_k} = \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{x_{k+1}}{x_k^2} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, (n-1));$$

$$u'_{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{2}{x_n^2} = 0.$$

Отсюда находим стационарную точку $x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3,\ \ldots,\ x_n = x_1^n,$ $x_1 = 2^{\frac{1}{n+1}}$.

С целью проверки достаточных условий экстремума находим вторые производные. Обозначая $a_{ij} = u''_{x_i x_j}$, получаем:

$$a_{11} = \frac{2}{x_1},\ a_{12} = -\frac{1}{x_1^2},\ a_{1j} = 0 \quad (j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n);$$

$$a_{k\,k-1} = -\frac{1}{x_1^{2k-2}},\ a_{kk} = \frac{2}{x_1^{2k-1}},\ a_{k\,k+1} = -\frac{1}{x_1^{2k}};$$

$$a_{kj} = 0\ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2;\ j = k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n; \\ k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1); \tag{1}$$

$$a_{n\,n-1} = -\frac{1}{x_1^{2n-2}},\ a_{nn} = \frac{4}{x_1^{3n}} = \frac{2}{x_1^{2n-1}},$$

$$a_{nj} = 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2.$$

Для исследования знакоопределенности квадратичной формы

$$d^2u = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j, \tag{2}$$

где коэффициенты определяются формулами (1), рассмотрим определитель, образованный из коэффициентов формы (2):

$$A_m = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0\ \ldots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_1^2} & \frac{2}{x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & 0\ \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_1^4} & \frac{2}{x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6}\ \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0\ \ldots & -\frac{1}{x_1^{2m-2}} & \frac{2}{x_1^{2m-1}} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Преобразуя определитель (3) к виду

$$A_m = \begin{vmatrix} \frac{2}{x_1} & -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2x_1^3} & -\frac{1}{x_1^4} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3x_1^5} & -\frac{1}{x_1^6} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{m+1}{mx_1^{2m-1}} \end{vmatrix},$$

замечаем, что $A_m > 0$ при $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Таким образом, квадратичная форма (2) положительно определенная и, следовательно, функция u имеет минимум: $u_{\min} = (n+1)\,2^{\frac{1}{n+1}}$.

261. *Задача Гюйгенса.* Между двумя положительными числами a и b вставить n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы величина дроби $u = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$ была наибольшей.

Решение. Логарифмируя функцию u и обозначая $v = \ln u$, имеем:

$$v = \ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n - \ln(a+x_1) - \ln(x_1+x_2) - \\ - \cdots - \ln(x_{n-1}+x_n) - \ln(x_n+b).$$

Очевидно, экстремальные точки функций u и v совпадают и, следовательно, определяются из системы

$$\begin{aligned}
v'_{x_1} &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{a+x_1} - \frac{1}{x_1+x_2} = 0,\\
v'_{x_2} &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2} - \frac{1}{x_2+x_3} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v'_{x_n} &= \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}+x_n} - \frac{1}{x_n+b} = 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения этой системы находим $x_2 = \frac{1}{a}x_1^2$; из второго $x_3 = \frac{1}{x_1}\cdot x_2^2 = \frac{1}{a^2}\cdot x_1^3$ и т. д. Из последнего уравнения находим $b = \dfrac{x_n^2}{x_{n-1}} = \dfrac{x_1^{n+1}}{a^n}$. Отсюда вычисляем $x_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Таким образом, координаты стационарной точки M можно записать в виде геометрической прогрессии $x_1 = aq$, $x_2 = aq^2$, $\ldots$, $x_n = aq^n$, знаменатель которой $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

Находим вторые производные:

$$v''_{x_1^2} = -\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{(a+x_1)^2} + \frac{1}{(x_1+x_2)^2}, \quad v''_{x_1x_2} = \frac{1}{(x_1+x_2)^2},$$

$$v''_{x_1x_j} = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots, n);$$

$$v''_{x_kx_{k-1}} = \frac{1}{(x_{k-1}+x_k)^2}, \quad v''_{x_k^2} = -\frac{1}{x_k^2} + \frac{1}{(x_{k-1}+x_k)^2} + \frac{1}{(x_k+x_{k+1})^2},$$

$$v''_{x_kx_{k+1}} = \frac{1}{(x_k+x_{k+1})^2}, \quad v''_{x_kx_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$j = k+2, k+3, \ldots, n; \quad k = 2, 3, \ldots, n-1);$$

$$v''_{x_nx_{n-1}} = \frac{1}{(x_{n-1}+x_n)^2}, \quad v''_{x_n^2} = -\frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{(x_{n-1}+x_n)^2} + \frac{1}{(x_n+b)^2},$$

$$v''_{x_nx_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2)$$

и вычисляем их значения в стационарной точке $(a_{ij} = v''_{x_i x_j})$:

$$a_{11} = \frac{-2}{a^2 q (1+q)^2},\ a_{12} = \frac{1}{a^2 q^2 (1+q)^2},\ a_{1j} = 0 \quad (j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n);$$

$$a_{k\,k-1} = \frac{1}{a^2 q^{2k-2} (1+q)^2},\ a_{kk} = \frac{-2}{a^2 q^{2k-1} (1+q)^2},\ a_{k\,k+1} = \frac{1}{a^2 q^{2k} (1+q)^2},$$

$$a_{kj} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1; \quad j = k+2,\ k+3,\ \ldots,\ n,$$

$$k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1);$$

$$a_{n\,n-1} = \frac{1}{a^2 q^{2n-2} (1+q)^2},\ a_{nn} = \frac{-2}{a^2 q^{2n-1} (1+q)^2}; \tag{1}$$

$$a_{nj} = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2).$$

Как и в предыдущих примерах, вычисляем определители A_m, образованные из коэффициентов квадратичной формы

$$d^2 v(M) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j. \tag{2}$$

Поскольку числа a_{ij} в равенствах (1) имеют общий множитель $\frac{1}{a^2 (1+q)^2}$, то, вынося его за знак определителя, получаем:

$$A_m = \frac{1}{(a(1+q))^{2m}} \begin{vmatrix} \frac{-2}{q} & \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{q^2} & \frac{-2}{q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q^4} & \frac{-2}{q^5} & \frac{1}{q^6} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{q^{2m-2}} & \frac{-2}{q^{2m-1}} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Преобразуя определитель (3) к треугольной форме

$$A_m = \frac{1}{[a(1+q)]^{2m}} \begin{vmatrix} -\frac{2}{q} & \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3q^5} & \frac{1}{q^6} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{m+1}{mq^{2m-1}} \end{vmatrix},$$

а затем вычисляя его, имеем: $A_m = \frac{(-1)^m (m+1)}{(a(1+q))^{2m} q^{m^2}}$. Отсюда следует, что $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,\ \ldots$, т. е. что квадратичная форма (2) отрицательно определенная. Поэтому функция v, а вместе с ней и функция u в точке M имеет максимум.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

262. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

Решение. Для определения стационарных точек составляем систему (см. формулы (6) п. 5°):

$$F'_x\equiv 2x-2=0,\ F'_y\equiv 2y+2=0,\ F\equiv x^2+y^2+z^2-2x+2y-\\-4z-10=0,$$

решая которую, получаем: $x_1=1,\ y_1=-1,\ z_1=-2;\ x_2=1,\ y_2=-1,\ z_2=6$.

Для проверки достаточных условий находим производные $F'_z=2z-4,\ F''_{x^2}=2,\ F''_{y^2}=2,\ F''_{xy}=0$ и вычисляем второй дифференциал в стационарных точках. Поскольку (см. формулы (7) п. 5°)

$$d^2F(1,\ -1,\ -2)=\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)>0;$$

$$d^2F(1,\ -1,\ 6)=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0,$$

то $z_{\min}=-2,\ z_{\max}=6$ при $x=1,\ y=-1$.

263. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

Решение. Из системы

$$F'_x\equiv 2x-z+2=0,\ F'_y\equiv 2y-z+2=0,$$
$$F\equiv x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$$

находим стационарные точки

$$M_1:\ x=-3+\sqrt{6},\ y=-3+\sqrt{6},\ z=-4+2\sqrt{6};$$
$$M_2:\ x=-3-\sqrt{6},\ y=-3-\sqrt{6},\ z=-4-2\sqrt{6}.$$

Находим производные: $F'_z=2z-x-y+2,\ F''_{x^2}=2,\ F''_{y^2}=2,\ F''_{xy}=0$ и вычисляем второй дифференциал d^2z в стационарных точках:

$$d^2z(M_1)=-\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dy^2);\qquad d^2z(M_2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2+dy^2).$$

Следовательно, $z_{\max}=-4+2\sqrt{6}$ при $x=-3+\sqrt{6},\ y=-3+\sqrt{6}$; $z_{\min}=-4-2\sqrt{6}$ при $x=-3-\sqrt{6},\ y=-3-\sqrt{6}$.

264. $x^4+y^4+z^4-2a^2(x^2+y^2+z^2)=0\quad (a>0)$.

Решение. Для определения точек возможного экстремума решаем систему

$$F\equiv x^4+y^4+z^4-2a^2(x^2+y^2+z^2)=0,$$
$$F'_x\equiv 4x^3-4a^2x=0,\ F'_y\equiv 4y^3-4a^2y=0,$$

из которой получаем особую точку $x=y=z=0$ и шесть стационарных точек — M_1: $x=0,\ y=0,\ z=a\sqrt{2}$; M_2: $x=0,\ y=0,\ z=-a\sqrt{2}$; $M_{3,4}$: $x=\pm a,\ y=\pm a,\ z=a\sqrt{1+\sqrt{3}}$; $M_{5,6}$: $x=\pm a,\ y=\pm a,\ z=-a\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

Далее, находим производные:

$$F'_z=4z^3-4a^2z,\ F''_{x^2}=12x^2-4a^2,\ F''_{y^2}=12y^2-4a^2,\ F''_{xy}=0$$

и вычисляем в точках M_i $(i=\overline{1,\ 6})$ второй дифференциал d^2z:

$$d^2z(M_1)=\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{2}\,a};\quad d^2z(M_2)=-\frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{2}\,a};$$

$$d^2z(M_{3,\,4})=\frac{-2\,(dx^2+dy^2)}{a\sqrt{3+3\sqrt{3}}};\quad d^2z(M_{5,\,6})=\frac{2\,(dx^2+dy^2)}{a\sqrt{3+3\sqrt{3}}}.$$

Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный минимум $z_{\min}=a\sqrt{2}$, в точке M_2 — максимум $z_{\max}=-a\sqrt{2}$, в точках $M_{3,\,4}$ — максимум $z_{\max}=a\sqrt{1+\sqrt{3}}$, в точках $M_{5,\,6}$ — минимум $z_{\min}=$ $=-a\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

Исследовать на условный экстремум следующие функции:

265. $z=x_1^m+x_2^m+\dots+x_n^m$, если $x_1+x_2+\dots+x_n=na$, $a>0$, $m>1$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа (см. формулы (9) п. 6°)

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}x_i^m+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-na\right)$$

и записываем систему

$$\Phi'_{x_i}=mx_i^{m-1}+\lambda=0\quad(i=1,\ 2,\ \dots,\ n),\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=na,$$

из которой находим $\lambda=-ma^{m-1}$ и координаты $x_i=a$ точки M возможного экстремума $(a,\ a,\ \dots,\ a)$. Далее, находим второй дифференциал $d^2\Phi=m(m-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{m-2}dx_i^2$ и вычисляем его значение в точке $(M,\ \lambda)$: $d^2\Phi(M,\ \lambda)=m(m-1)\,a^{m-2}\sum\limits_{i=1}^{n}dx_i^2$. Так как $d^2\Phi(M,\ \lambda)>0$, то в точке M функция z имеет минимум: $z_{\min}=na^n$.

266. $u=xyz$, если $x^2+y^2+z^2=3$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру составляем функцию Лагранжа $\Phi=xyz+\lambda\,(x^2+y^2+z^2-3)$ и записываем систему для определения λ и координат точки возможного экстремума:

$$\Phi'_x=yz+2\lambda x=0,\ \Phi'_y=xz+2\lambda y=0,\ \Phi'_z=xy+2\lambda z=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=3.$$

Из этой системы находим восемь стационарных точек: $M_1(1,\ 1,\ 1)$, $M_2(1,\ -1,\ -1)$, $M_3(-1,\ 1,\ -1)$, $M_4(-1,\ -1,\ 1)$ для $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ и $M_5(-1,\ -1,\ -1)$, $M_6(-1,\ 1,\ 1)$, $M_7(1,\ -1,\ 1)$, $M_8(1,\ 1,\ -1)$ для $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2\Phi=2\lambda\,(dx^2+dy^2+dz^2)+2zdx\,dy+2ydx\,dz+2xdy\,dz. \qquad (1)$$

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и точки M_1 имеем:

$$d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dx\,dy + 2dx\,dz + 2dy\,dz = \\ = -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)\,dz.$$

Заменяя в последнем слагаемом дифференциал dz его значением, найденным из уравнения связи в точке M_1 $dz = -(dx + dy)$, получаем неравенство $d^2\Phi(M_1, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0$, из которого следует, что в точке M_1 функция u имеет максимум.

Для $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и точки M_2 из (1) и уравнения связи получаем: $d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dx\,dy - 2dx\,dz + 2dy\,dz$, $dx = dy + dz$, и, следовательно, $d^2\Phi(M_2, \lambda_1) = -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0$, поэтому функция u в точке M_2 имеет максимум. Аналогично устанавливаем, что функция u имеет максимум в точках M_3 и M_4. Во всех этих точках $u_{\max} = 1$.

Для $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ и точки M_5 из (1) и уравнения связи получаем: $d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dx\,dy - 2dx\,dz - 2dy\,dz$, $dx + dy + dz = 0$. Отсюда следует неравенство $d^2\Phi(M_5, \lambda_2) = (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0$, из которого заключаем, что в точке M_5 функция u имеет минимум.

Легко убедиться, что в точках M_6, M_7 и M_8 функция u также имеет минимум, причем $u_{\min} = -1$.

267. $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + z = a$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$).

Решение. Очевидно, экстремальные точки функций u и $v = \ln u$ совпадают. Поэтому будем исследовать на условный экстремум функцию $v = \ln u \equiv m \ln x + n \ln y + p \ln z$ при условии $x + y + z = a$.

Составляя функцию Лагранжа $\Phi = m \ln x + n \ln y + p \ln z + \lambda(x + y + z - a)$ и систему

$$\Phi'_x = \frac{m}{x} + \lambda = 0, \quad \Phi'_y = \frac{n}{y} + \lambda = 0, \quad \Phi'_z = \frac{p}{z} + \lambda = 0, \quad x + y + z = a,$$

находим координаты точки возможного экстремума: $x = mt$, $y = nt$, $z = pt$, где $t = \frac{a}{m + n + p}$. Поскольку второй дифференциал функции Φ $d^2\Phi = -\frac{m\,dx^2}{x^2} - \frac{n\,dy^2}{y^2} - \frac{p\,dz^2}{z^2}$ в точке (mt, nt, pt) удовлетворяет неравенству $d^2\Phi = -\left(\frac{dx^2}{mt^2} + \frac{dy^2}{nt^2} + \frac{dz^2}{pt^2}\right) < 0$, то функция v, а вместе с ней и u имеют в точке (mt, nt, pt) максимум: $u_{\max} = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m + n + p)^{m+n+p}}$.

268. $u = x^2 + y^2 + z^2$, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c > 0$).

Решение. Дифференцируя функцию Лагранжа $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ по всем переменным и присоединяя уравнение связи, получаем систему

$$\Phi'_x = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0,\ \Phi'_y = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0,\ \Phi'_z = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

из которой находим λ и точки возможного экстремума: $\lambda_{1,\,2} = -c^2$, $M_{1,\,2}(0,\ 0,\ \pm c)$; $\lambda_{3,\,4} = -a^2$, $M_{3,\,4}(\pm a,\ 0,\ 0)$; $\lambda_{5,\,6} = -b^2$, $M_{5,\,6}(0,\ \pm b,\ 0)$.

Для проверки достаточных условий находим второй дифференциал: $d^2\Phi = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2$. Из неравенств

$$d^2\Phi(M_{1,\,2},\ \lambda_{1,\,2}) = 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)dy^2 > 0,$$

$$d^2\Phi(M_{3,\,4},\ \lambda_{3,\,4}) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)dz^2 < 0$$

следует, что в точках $M_{1,\,2}$ функция u имеет минимум $u_{\min} = c^2$, а в точках $M_{3,\,4}$ — максимум $u_{\max} = a^2$.

В точках $M_{5,\,6}$ при $dx = 0$, $dz \neq 0$ $d^2\Phi(M_{5,\,6},\ \lambda_{5,\,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) \times$ $\times\, dz^2 < 0$, а при $dx \neq 0$, $dz = 0$ $d^2\Phi(M_{5,\,6},\ \lambda_{5,\,6}) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 > 0$. Поэтому точки $M_{5,\,6}$ не являются экстремальными.

269. $u = xy^2z^3$, если $x + 2y + 3z = a$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0)$.

Решение. Составив функцию Лагранжа для вспомогательной функции $v = \ln u$

$$\Phi = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda(x + 2y + 3z - a)$$

и образовав систему

$$\Phi'_x = \frac{1}{x} + \lambda = 0,\ \Phi'_y = \frac{2}{y} + 2\lambda = 0,\ \Phi'_z = \frac{3}{z} + 3\lambda = 0,$$

$$x + 2y + 3z = a,$$

получим λ и координаты стационарной точки: $\lambda = -\frac{6}{a}$, $x = y = z = \frac{a}{6}$. А так как второй дифференциал $d^2\Phi = -\frac{dx^2}{x^2} - \frac{dy^2}{y^2} - \frac{dz^2}{z^2}$ в стационарной точке удовлетворяет условию

$$d^2\Phi\left(\frac{a}{6},\ \frac{a}{6},\ \frac{a}{6},\ -\frac{6}{a}\right) = -\frac{36}{a^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0,$$

то функция v, а вместе с ней и функция u имеет в этой точке максимум: $u_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^6$.

270. $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Решение. Приравнивая нулю производные функции Лагранжа $\Phi = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$ по x, y и z, получаем систему

$$\Phi'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0,\ \Phi'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0,\ \Phi'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0,$$

решая которую совместно с уравнениями связи $x^2+y^2+z^2=1$, $x+$ $+y+z=0$, находим шесть точек возможного экстремума:

$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ при $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{6}}$; $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ при $\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Далее, находим второй дифференциал:

$$d^2\Phi = 2\lambda\,(dx^2+dy^2+dz^2)+2z\,dx\,dy+2y\,dx\,dz+2x\,dy\,dz, \tag{1}$$

а из уравнений связи получаем соотношения:

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,\ dx+dy+dz=0. \tag{2}$$

Проверим выполнение достаточных условий для точек M_1 и M_4. Для этих точек

$$x=y=2\lambda,\ z=-4\lambda. \tag{3}$$

Тогда из (1), (2) и (3) получим равенство

$$d^2\Phi = 2\lambda\,((dx-dy)^2+dz^2+dx^2+dy^2).$$

Отсюда следует, что при $\lambda<0$ (т. е. в точке M_4) $d^2\Phi<0$, и в этой точке функция u имеет максимум $\left(u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$. При $\lambda>0$ (т. е. в точке M_1) $d^2\Phi>0$, поэтому в этой точке функция u имеет минимум $\left(u_{\min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$.

Аналогично устанавливаем, что в точках M_5 и M_6 функция u имеет максимум $\left(u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$, а в точках M_2 и M_3 — минимум $\left(u_{\min}=\right.$ $\left.=-\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$.

271. $u=xy+yz$, если $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0,\ y>0,$ $z>0)$.

Решение. Образовав функцию Лагранжа $\Phi=xy+yz+\lambda(x^2+$ $+y^2-2)+\mu(y+z-2)$ и составив систему

$$\Phi'_x=y+2\lambda x=0,\quad \Phi'_y=x+z+2\lambda y+\mu=0,\quad \Phi'_z=y+\mu=0,\quad x^2+y^2=2,\quad y+z=2,$$

найдем числа λ, μ и координаты стационарной точки $x=y=z=1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\mu=-1$.

Запишем второй дифференциал $d^2\Phi=2\lambda\,(dx^2+dy^2)+2dx\,dy+$ $+2dy\,dz$ и положим в нем $\lambda=-\frac{1}{2}$. Тогда получим: $d^2\Phi=-dx^2-$ $-dy^2+2dx\,dy+2dy\,dz$. Из уравнения связи следует, что $dy=$ $=-dz=-dx$, поэтому $d^2\Phi=-dx^2-3dy^2-2dz^2<0$. Таким образом, в точке (1, 1, 1) функция u имеет максимум, равный 2.

272. $u=\sin x\sin y\sin z$, если $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Решение. Составляем вспомогательную функцию $\Phi=\ln\sin x+$ $+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$ и систему

$\Phi'_x=\operatorname{ctg}x+\lambda=0, \Phi'_y=\operatorname{ctg}y+\lambda=0, \Phi'_z=\operatorname{ctg}z+\lambda=0, x+y+z=\frac{\pi}{2}$;

получаем точку возможного экстремума $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. Так как $d^2\Phi=$ $=-\left(\frac{dx^2}{\sin^2 x}+\frac{dy^2}{\sin^2 y}+\frac{dz^2}{\sin^2 z}\right)<0$, то в точке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{8}$.

273. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, если $x^2+y^2+z^2=1$, $x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $+z\cos\gamma=0$ $(a>b>c>0,\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$.

Решение. Составив функцию Лагранжа $\Phi=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-$ $-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$ и приравняв нулю ее производные по x, y и z, получим систему

$$\begin{aligned}\Phi'_x&=\frac{2x}{a^2}-2\lambda x+\mu\cos\alpha=0,\\ \Phi'_y&=\frac{2y}{b^2}-2\lambda y+\mu\cos\beta=0,\\ \Phi'_z&=\frac{2z}{c^2}-2\lambda z+\mu\cos\gamma=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Умножая первое равенство системы (1) на x, второе — на y, третье — на z и складывая их, получаем равенство

$$2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-2\lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)=0,$$

из которого с учетом уравнений связи вытекает, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0$, т. е. что $\lambda=u$. Таким образом, $u_{\max}=\max\lambda$, $u_{\min}=\min\lambda$.

Решая уравнение (1) относительно x, y и z и умножая левые и правые части полученных равенств на $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ соответственно, находим (с учетом уравнения связи $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$):

$$\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1}{a^2}-\lambda}+\frac{\cos^2\beta}{\frac{1}{b^2}-\lambda}+\frac{\cos^2\gamma}{\frac{1}{c^2}-\lambda}=0,\ \text{или}$$

$$\lambda^2-\lambda\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)+\frac{\cos^2\alpha}{c^2b^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}=0.$$

Если λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения, причем $\lambda_1<\lambda_2$, то $u_{\max}=$ $=\lambda_2$, $u_{\min}=\lambda_1$.

274. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, если $\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0; i=$ $=1, 2, \ldots, n)$.

Решение. Имеем: $\Phi=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}-1\right)$. Из системы $\Phi'_{x_j}=$ $=2x_j+\lambda\frac{1}{a_j}=0$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ находим

$$x_j=-\frac{\lambda}{2a_j}\quad (j=1,\ 2,\ \dots,\ n), \tag{1}$$

а из уравнения связи и равенств (1) получаем:

$$\lambda=-\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}},\quad x_j=\frac{1}{a_j\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}}\ (j=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{2}$$

Поскольку $d^2\Phi=2\sum_{j=1}^{n} dx_j^2>0$, то в стационарной точке (2) функция u имеет минимум: $u_{\min}=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}}$.

275. $u=x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p$ $(p>1)$, если $x_1+x_2+\dots+x_n=a$ $(a>0)$.

Решение. Составляя функцию Лагранжа $\Phi=\sum_{j=1}^{n} x_j^p+\lambda\left(a-\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$, а затем систему

$$\Phi'_{x_k}=px_k^{p-1}-\lambda=0\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n),\quad \sum_{j=1}^{n} x_j=a,$$

получаем: $\lambda=p\left(\frac{a}{n}\right)^{p-1}$, $x_k=\frac{a}{n}$.

Находим второй дифференциал $d^2\Phi=p(p-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^{p-2}dx_k^2$ и, вычисляя его значение в стационарной точке, убеждаемся, что $d^2\Phi=p(p-1)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^{p-2}dx_k^2>0$. Следовательно, в стационарной точке функция u имеет минимум: $u_{\min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$.

276. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$, если $x_i>0$, $x_1+x_2+\dots+x_n=a$ $(a>0$, $\alpha_i>1$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Решение. Заметив, что экстремальные точки функций u и $v=\ln u$ совпадают, будем исследовать на локальный экстремум функцию v. Образовав функцию Лагранжа $\Phi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\ln x_j+\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} x_j-a\right)$ и решив систему

$$\Phi'_{x_k}=\frac{\alpha_k}{x_k}+\lambda=0\ (k=1,\ 2,\ \dots,\ n),\ \sum_{j=1}^{n} x_j=a,$$

получим значение λ и координаты точки M возможного экстремума:

$$\lambda = -\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \quad x_k = \frac{a\alpha_k}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j} \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n).$$

Найдем второй дифференциал: $d^2\Phi = -\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x_k^2}dx_k^2$. Заметив, что $d^2\Phi(M) = -\frac{1}{a^2}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{dx_k^2}{\alpha_k} < 0$, заключаем, что в точке M функция u имеет максимум:

$$u_{\max} = \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}\left(\frac{a}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}.$$

277. Найти экстремум квадратичной формы $u = \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$ — действительные числа) при условии: $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 = 1$.

Решение. Образуем функцию Лагранжа $\Phi = \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j + \lambda\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)$ и составим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Phi'_{x_1} = (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
&\frac{1}{2}\Phi'_{x_2} = a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{2}\Phi'_{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n = 0.
\end{aligned}$$

Система (1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда число λ является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Покажем сначала, что корни λ уравнения (2) действительные. Для этого обозначим через A симметричную матрицу $\{a_{ij}\}$ заданной квадратичной формы u. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$Ax = \lambda x, \qquad (3)$$

где $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$. Предположим, что λ комплексное, т. е. что $\lambda = \alpha + i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$. Поскольку a_{ij} — действительные числа, то $x = u + iv$. Тогда из (3) следует

$$Au = \alpha u - \beta v; \tag{4}$$

$$Av = \beta u + \alpha v. \tag{5}$$

Умножая скалярно обе части равенства (4) на v, а (5) — на u и вычитая результаты, получаем:

$$(Au,\ v) - (Av,\ u) = -\beta((u,\ u) + (v,\ v)). \tag{6}$$

Так как $(Au,\ v) = (u,\ A^{\mathrm{T}}v) = (u,\ Av)$, где A^{T} — транспонированная матрица, то из (6) находим: $\beta((u,\ u) + (v,\ v)) = 0$. Поскольку $(u,\ u) + (v,\ v) \neq 0$, то $\beta = 0$, т. е. λ — действительное число.

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ — корни уравнения (2). Тогда для каждого $\lambda_i\,(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ из системы (1) при условии, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, находим точки возможного экстремума $(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \ldots,\ x_n^{(i)})\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Далее, умножая равенства (1) на $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ соответственно и складывая их, имеем: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Учитывая уравнение связи, получаем равенство $u(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \lambda$, которое в точках возможного экстремума запишется в виде $u(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \ldots,\ x_n^{(i)}) = \lambda_i\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Отсюда следует, что $u_{\max} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$, $u_{\min} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$.

278. Доказать неравенство $\dfrac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, если $n \geqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Доказательство. Исследуем на условный экстремум функцию $u = \dfrac{x^n + y^n}{2}$, если $x + y = s$. Составив функцию Лагранжа $\Phi = \dfrac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(s - x - y)$ и систему

$$\Phi'_x = \frac{nx^{n-1}}{2} - \lambda = 0,\ \Phi'_y = \frac{ny^{n-1}}{2} - \lambda = 0,\ x + y = s,$$

найдем число λ, а также координаты стационарной точки функции u: $\lambda = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^{n-1}$, $x = y = \dfrac{s}{2}$.

Так как второй дифференциал $d^2\Phi = \dfrac{n(n-1)}{2}(x^{n-2}dx^2 + y^{n-2}dy^2)$ в точке $x = y = \dfrac{s}{2}$ удовлетворяет условию $d^2\Phi\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right) = \dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^{n-2} \times (dx^2 + dy^2) > 0$, то функция u имеет минимум в точке $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$, т. е. $u_{\min} = \left(\dfrac{s}{2}\right)^n \leqslant u(x,\ y)$, если $x + y = s$, или $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{x^n + y^n}{2}$.

279. Доказать неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\left(a_i \geqslant 0,\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Доказательство. Исследуем на условный экстремум функцию

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

при условии, что $A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, где $A = \text{const}$. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + \lambda\left(A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

и образуем систему

$$\Phi'_{x_j} = x_j^{q-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-1} - \lambda a_j = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $x_i > 0$, $a_i > 0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Разделив j-е равенство системы (1) на m-е равенство той же системы, получим:

$$\left(\frac{x_j}{x_m}\right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}.$$

Отсюда при фиксированном m находим:

$$x_j = x_m \left(\frac{a_j}{a_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j \neq m). \qquad (2)$$

Подставив (2) в уравнение связи, имеем:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} a_i x_m \left(\frac{a_i}{a_m}\right)^{\frac{1}{q-1}} + a_m x_m = A, \text{ или}$$

$$\frac{x_m}{a_m^{\frac{1}{q-1}}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{q}{q-1}} = A. \qquad (3)$$

Используя то, что $\frac{q}{q-1} = p$, $\frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$, из (3) получаем координаты точки возможного экстремума:

$$x_m = \frac{A a_m^{\frac{p}{q}}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для проверки достаточных условий находим второй дифференциал функции Φ:

$$d\Phi=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}dx_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_idx_i;$$

$$d^2\Phi=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left((q-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-2}dx_i^2+\right.$$

$$\left.+(1-q)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{\frac{1}{q}-2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}dx_i\right)^2\right).$$

В силу уравнений связи, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_idx_i=0$; поэтому в стационарной точке

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}dx_i\right)^2=\left(\frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}\right)^{2(q-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_idx_i=0,$$

и, следовательно, $d^2\Phi>0$.

Таким образом, в стационарной точке функция u имеет минимум $u_{\min}=A$, поэтому $u\geqslant A$, что равносильно неравенству Гельдера.

280. Доказать неравенство Адамара для определителя $\Delta=|a_{ij}|$ порядка n:

$$\Delta^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

Доказательство. Обозначая через A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($i, j=1,2,\ldots,n$), исследуем на экстремум определитель $\Delta=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\ldots+a_{kn}A_{kn}$, разложенный по элементам k-й строки, при наличии k уравнений связи:

$$a_{k1}^2+a_{k2}^2+\ldots+a_{kn}^2=s_k\ (k=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{1}$$

В этом случае функция Лагранжа запишется в виде $\Phi=\Delta+$ $+\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k(a_{k1}^2+a_{k2}^2+\ldots+a_{kn}^2-s_k)$ (предполагаем, что $s_k\neq0$, так как при $s_k=0$ $\Delta=0$).

Найдем частные производные от функции Φ по a_{kj}. Приравняв их нулю, получим n^2 равенств:

$$\left.\begin{aligned}\Phi'_{a_{k1}}&=A_{k1}+2\lambda_k a_{k1}=0,\\ \Phi'_{a_{k2}}&=A_{k2}+2\lambda_k a_{k2}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Phi'_{a_{kn}}&=A_{kn}+2\lambda_k a_{kn}=0\end{aligned}\right\}\ (k=1,\ 2,\ldots,n). \tag{2}$$

Так как функция Δ непрерывна на замкнутом множестве (1), то экстремум существует. Из (2) следует, что в стационарных точках справедливы соотношения: $a_{k1}=-\dfrac{A_{k1}}{2\lambda_k}$, $a_{k2}=-\dfrac{A_{k2}}{2\lambda_k}$, $\ldots$, $a_{kn}=$

$= -\frac{A_{kn}}{2\lambda_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, используя которые, из уравнений связи (1) находим:

$$\frac{A_{k1}^2}{4\lambda_k^2} + \frac{A_{k2}^2}{4\lambda_k^2} + \cdots + \frac{A_{kn}^2}{4\lambda_k^2} = s_k \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда получаем два значения λ_k:

$$\lambda_{k1} = \sqrt{\frac{A_{k1}^2 + A_{k2}^2 + \cdots + A_{kn}^2}{4 s_k}}, \ \lambda_{k2} = -\sqrt{\frac{A_{k1}^2 + A_{k2}^2 + \cdots + A_{kn}^2}{4 s_k}}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, для двух точек возможного экстремума справедливы соотношения:

$$a_{ij} = -\frac{A_{ij}}{2\lambda_{i1}} \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \text{ для точки } M_1; \tag{3}$$

$$a_{ij} = -\frac{A_{ij}}{2\lambda_{i2}} \ (i, j = 1, 2, \ldots, n) \text{ для точки } M_2. \tag{4}$$

Находим второй дифференциал функции Φ:

$$d^2\Phi = 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (da_{k1}^2 + da_{k2}^2 + \ldots + da_{kn}^2).$$

Отсюда и из (4) следуют неравенства: $d^2\Phi(M_1) > 0$, $d^2\Phi(M_2) < 0$.

Таким образом, в точке M_1 реализуется минимум, а в точке M_2 — максимум, причем максимум и минимум равны по абсолютной величине.

Вычислим экстремальные значения функции Δ. В экстремальной точке, как следует из (3) или (4), выполняются равенства:

$$\frac{a_{k1}}{A_{k1}} = \frac{a_{k2}}{A_{k2}} = \cdots = \frac{a_{kn}}{A_{kn}} \ (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Из свойств определителей вытекает, что

$$a_{j1}A_{k1} + a_{j2}A_{k2} + \cdots + a_{jn}A_{kn} = 0 \quad j \neq k. \tag{6}$$

Поэтому из (5), (6) и (1) получаем:

$$a_{j1}a_{k1} + a_{j2}a_{k2} + \cdots + a_{jn}a_{kn} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ s_k, & j = k. \end{cases}$$

Следовательно, в стационарной точке M_1 или M_2 матрица

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{s_1}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{s_1}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{s_1}} \\ \frac{a_{21}}{\sqrt{s_2}} & \frac{a_{22}}{\sqrt{s_2}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{\sqrt{s_2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{s_n}} & \frac{a_{n2}}{\sqrt{s_n}} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\sqrt{s_n}} \end{pmatrix}$$

ортогональна, т. е. $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$. Поскольку $D_A^2 = 1$, где D_A — определитель матрицы A, и $D_A^2 = \frac{\Delta^2}{s_1 s_2 \cdots s_n}$, то $\Delta_{\min} = -\sqrt{\prod_{i=1}^{n} s_i}$, $\Delta_{\max} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} s_i}$. Отсюда и из (1) непосредственно следует неравенство Адамара.

Определить наибольшее (sup) и наименьшее (inf) значения функций в указанных областях:

281. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

Решение. Функция z непрерывна в замкнутом ограниченном множестве $\{x^2 + y^2 \leqslant 25\}$. Поэтому, согласно известной теореме Вейерштрасса, она на этом множестве достигает своих точных верхней и нижней граней. Очевидно, $\sup z$ ($\inf z$) равен наибольшему (наименьшему) из значений функции z в точках возможного экстремума на множестве $\{x^2 + y^2 < 25\}$ или в точках возможного условного экстремума, если $x^2 + y^2 = 25$.

Поскольку система $z'_x = 2x - 12 = 0$, $z'_y = 2y + 16 = 0$ не имеет решений, принадлежащих множеству $\{x^2 + y^2 < 25\}$, то $\sup z$ и $\inf z$ достигаются на окружности $x^2 + y^2 = 25$.

Составляя функцию Лагранжа $\Phi = x^2 + y^2 - 12x + 16y + \lambda(25 - x^2 - y^2)$ и решая систему

$$\Phi'_x = 2x - 12 - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 2y + 16 - 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 25,$$

находим две точки возможного условного экстремума $M_1(3, -4)$ и $M_2(-3, 4)$. Вычисляя значения функции z в этих точках $z(M_1) = -75$, $z(M_2) = 125$, заключаем, что $\sup z = 125$, $\inf z = -75$.

282. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру из системы

$$u'_x = 2x = 0,\ u'_y = 4y = 0,\ u'_z = 6z = 0$$

находим стационарную точку $M_1(0, 0, 0)$, принадлежащую множеству $\{x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$.

Составляя функцию Лагранжа $\Phi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(100 - x^2 - y^2 - z^2)$, из системы

$$\Phi'_x = 2x - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 4y - 2\lambda y = 0,\ \Phi'_z = 6z - 2\lambda z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

находим три точки возможного условного экстремума: $M_2(10, 0, 0)$, $\lambda_1 = 1$; $M_3(0, 10, 0)$, $\lambda_2 = 2$; $M_4(0, 0, 10)$, $\lambda_3 = 3$. Из равенств $u(M_1) = 0$, $u(M_2) = 100$, $u(M_3) = 200$, $u(M_4) = 300$ вытекает, что $\sup u = 300$, $\inf u = 0$.

283. $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

Решение. Легко убедиться, что функция u не может иметь экстремума во внутренних точках области определения, поэтому $\sup u$ и $\inf u$ достигаются или на основании конуса $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$, или на боковой поверхности конуса $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z < 1$.

Пусть $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$. Составляя функцию Лагранжа $\Phi = x + y + 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$, из системы

$$\Phi'_x = 1 - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = 1 - 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 1$$

находим четыре точки возможного экстремума: $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $M_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $M_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Теперь находим точки возможного экстремума функции $u = x + y + x^2 + y^2$, если $0 \leqslant x^2 + y^2 < 1$. Имеем: $u'_x = 1 + 2x = 0$, $u'_y = 1 + 2y = 0$. Отсюда и из условия $z = x^2 + y^2$ получаем еще одну точку возможного экстремума $M_5\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Вычисляя значения функции u в точках M_i $(i = \overline{1,5})$, заключаем, что $\sup u = 1 + \sqrt{2}$, $\inf u = -\frac{1}{2}$.

284. Найти нижнюю грань и верхнюю грань функции $u = (x + y + z)\, e^{-(x + 2y + 3z)}$ на множестве $E = \{M(x, y, z)\}$, где $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $0 < z < \infty$.

Решение. Функция u определена, непрерывна и дифференцируема в открытом множестве E. Поскольку система

$$u'_x = (1 - x - y - z)\, e^{-(x + 2y + 3z)} = 0,$$
$$u'_y = (1 - 2x - 2y - 2z)\, e^{-(x + 2y + 3z)} = 0,$$
$$u'_z = (1 - 3x - 3y - 3z)\, e^{-(x + 2y + 3z)} = 0$$

не имеет решений, принадлежащих множеству E, и $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty \\ z \to +\infty}} u = 0$, то $\sup u$ и $\inf u$ не достигаются во внутренних точках множества E. Поэтому $\sup u = \lim\limits_{M \to M'_1} u$, $\inf u = \lim\limits_{M \to M'_2} u$, где точки M'_1 и M'_2 принадлежат множеству $\bar{E} \setminus E$ ($\bar{E} = E + E'$ — замыкание множества E, E' — множество предельных точек множества E).

Определим вспомогательную функцию v на замыкании $\bar{E}$, положив

$$v = \begin{cases} u, & \text{если } M \in E, \\ \lim\limits_{M \to M'} u, & \text{если } M' \in \bar{E} \setminus E. \end{cases}$$

Очевидно, в этом случае, в силу непрерывности функции u, имеем: $v = (x + y + z)\, e^{-(x + 2y + 3z)}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ и $\sup u = \sup v$, $\inf u = \inf v$, причем $\sup v$ и $\inf v$ достигаются на $\bar{E} \setminus E$. На каждом из множеств

$$E_1:\ x = 0,\ 0 < y < \infty,\ 0 < z < \infty;$$
$$E_2:\ 0 < x < \infty,\ y = 0,\ 0 < z < \infty;$$
$$E_3:\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty,\ z = 0$$

функция v не имеет точек возможного экстремума, а поэтому она не достигает $\sup v$ и $\inf v$ на этих множествах.

Остается исследовать функцию v на полупрямых:

$$E_4:\ 0 \leqslant x < \infty,\ y = 0,\ z = 0;$$
$$E_5:\ x = 0,\ 0 \leqslant y < \infty,\ z = 0;$$
$$E_6:\ x = 0,\ y = 0,\ 0 \leqslant z < \infty.$$

На E_4 функция $v(x, 0, 0) = xe^{-x}$ имеет стационарную точку $x = 1$ и $v(1, 0, 0) = e^{-1}$, $v(0, 0, 0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x, 0, 0) = 0$. На E_5 функция $v(0, y, 0) = ye^{-2y}$ имеет стационарную точку $y = \frac{1}{2}$ и $v\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}e^{-1}$, $\lim\limits_{y \to +\infty} v = 0$. Наконец, на E_6 функция $v(0, 0, z) = ze^{-3z}$ имеет стационарную точку $z = \frac{1}{3}$ и $v\left(0, 0, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{-1}$, $\lim\limits_{z \to \infty} v = 0$.

Отсюда вытекает, что $\sup v = \sup u = e^{-1}$, $\inf v = \inf u = 0$.

285. Показать, что функция $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ имеет бесконечное множество максимумов и ни одного минимума.

Решение. Решив систему

$$z'_x = -(1 + e^y)\sin x = 0, \quad z'_y = (\cos x - y - 1)\, e_y = 0,$$

находим два бесконечных множества стационарных точек $M_n(2n\pi, 0)$ и $M'_n = ((2n - 1)\pi, -2)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Проверим выполнение достаточных условий. С этой целью найдем вторые производные $z''_{x^2} = -(1 + e^y)\cos x$, $z''_{xy} = -\sin xe^y$, $z''_{y^2} = (\cos x - y - 2)\, e^y$ и вычислим в точках M_n и M'_n определители

$$\Delta(M_n) = z''_{x^2}(M_n)\, z''_{y^2}(M_n) - z''^2_{xy}(M_n) = 2,$$
$$\Delta(M'_n) = z''_{x^2}(M'_n)\, z''_{y^2}(M'_n) - z''^2_{xy}(M'_n) = -e^{-2}(1 + e^{-2}).$$

Поскольку $\Delta(M_n) > 0$ и $z''_{x^2}(M_n) = -2 < 0$, то функция z имеет максимум в бесконечном числе точек $M_n(2n\pi, 0)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. А так как $\Delta(M'_n) < 0$, то в точках M'_n функция z не имеет экстремума. Других точек возможного экстремума нет.

Следовательно, функция z имеет бесконечное множество максимумов и ни одного минимума.

286. Является ли достаточным для минимума функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, чтобы эта функция имела минимум вдоль каждой прямой, проходящей через точку M_0?

Решение. Нет. Например, функция $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ в точке $(0, 0)$ вдоль любой прямой, проходящей через эту точку, имеет минимум, равный нулю (в этом легко убедиться). Однако как функция двух переменных она не имеет экстремума в точке $(0, 0)$. Это следует из того, что приращение

$$\Delta f(0, 0) = 2\Delta x^2 - 3\Delta x \Delta y^2 + \Delta y^4 = \left(\Delta y^2 - \frac{3\Delta x}{2}\right)^2 - \frac{\Delta x^2}{4}$$

при $\Delta x = 6t^2$, $\Delta y = 3t$ $(t > 0)$ и при $\Delta x = 0$, $|\Delta y| > 0$ имеет разные знаки.

287. Данное положительное число a разложить на n положительных множителей так, чтобы сумма заданных положительных степеней их была наименьшей.

Решение. Достаточно найти точки, в которых функция $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ $(x_i > 0,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$ достигает минимума при условии, что $a = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

Запишем функцию Лагранжа $\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda\left(\ln a - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$ и составим систему

$$\Phi'_{x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} - \frac{\lambda}{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad a = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Из первых n равенств этой системы найдем

$$x_i = \left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и подставим в последнее равенство системы. В результате получим:

$$a = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}} \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{-1}.$$

Отсюда найдем λ:

$$\lambda = \left(a \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}}}, \tag{2}$$

а затем из (1) определим координаты стационарной точки

$$x_i = \left(\frac{1}{\alpha_i}\left(a \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}}}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Убедимся, что при этих значениях x_i функция u имеет минимум. Найдем вторые производные:

$$\Phi''_{x_i x_j} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\Phi''_{x_i^2} = \alpha_i(\alpha_i - 1)\, x_i^{\alpha_i - 2} + \frac{\lambda}{x_i^2} = \frac{\alpha_i^2 x_i^{\alpha_i} - \alpha_i x_i^{\alpha_i} + \lambda}{x_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из равенств (1) следует, что $-\alpha_i x_i^{\alpha_i} + \lambda = -\lambda + \lambda = 0$. Поэтому в стационарной точке $d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 x_i^{\alpha_i - 2}\, dx_i^2 > 0$, т. е. функция u имеет минимум.

288. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$. При

каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно этой точки будет наименьшим?

Решение. Исследуем на экстремум момент инерции

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^{n} m_i((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2).$$

Из системы

$$I'_x = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(x - x_i) = 0, \quad I'_y = 2\sum_{i=1}^{n} m_i(y - y_i) = 0$$

находим единственную стационарную точку

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Определяем вторые производные $I''_{x^2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $I''_{y^2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $I_x = 0$ и убеждаемся, что в стационарной точке

$$I''_{x^2} I''_{y^2} - I''_{xy} = 4\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2 > 0, \quad I''_{x^2} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i > 0.$$

Следовательно, в точке (x_0, y_0) функция $I(x, y)$ имеет минимум.

289. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от n данных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ была бы минимальной.

Решение. Из условия задачи следует, что требуется найти минимум функции

$$u = \sum_{i=1}^{n} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2),$$

если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Составив функцию Лагранжа $\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2) + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ и решив систему

$$\Phi'_x = 2\sum_{i=1}^{n}(x - x_i) - 2\lambda x = 0,$$

$$\Phi'_y = 2\sum_{i=1}^{n}(y - y_i) - 2\lambda y = 0,$$

$$\Phi'_z = 2\sum_{i=1}^{n}(z - z_i) - 2\lambda z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

получим две стационарные точки

$$\lambda_1 = n + N,\ x_1' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y_1' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_1' = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i;$$

$$\lambda_2 = n - N,\ x_2' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y_2' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_2' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} z_i,$$

где $N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}$.

Вычисляя второй дифференциал $d^2\Phi = 2(n-\lambda)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ и замечая, что

$$d^2\Phi(x_1', y_1', z_1'; \lambda_1) = -2N(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0,$$
$$d^2\Phi(x_2', y_2', z_2'; \lambda_2) = 2N(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

заключаем, что в точке (x_1', y_1', z_1') функция u имеет максимум, а в точке (x_2', y_2', z_2') — минимум: $u_{\min} = n - 2N + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$.

290. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q, определить его измерения так, чтобы объем тела был наибольшим.

Решение. Пусть r — радиус цилиндра, h — его высота, а α — угол между образующей конуса и его основанием. Тогда полная поверхность Q тела и его объем V выражаются равенствами:

$$Q = \pi r^2 + 2\pi rh + \frac{\pi r^2}{\cos\alpha},\quad V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Исключая из этих равенств h, получаем функцию

$$V(\alpha) = \frac{Qr}{2} - \frac{\pi r^3}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) + \frac{\pi r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

которую и исследуем на экстремум. Из равенства $V'(\alpha) = \frac{\pi r^3}{2\cos^2\alpha}\left(\frac{2}{3} - \sin\alpha\right) = 0$ находим стационарную точку $\alpha_0 = \arcsin\frac{2}{3}$ $\left(\text{по смыслу задачи } \alpha \text{ не может равняться } \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } \cos\alpha \neq 0\right)$.

Из соотношений $V'(\alpha_0 - \varepsilon) > 0$, $V'(\alpha_0 + \varepsilon) < 0$, справедливых при достаточно малых $\varepsilon > 0$, следует, что при $\alpha_0 = \arcsin\frac{2}{3}$ объем тела достигает максимума.

291. Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Решение. Пусть x и y — длины сторон прямоугольника, который вращается вокруг стороны с длиной y. Тогда задача сводится к исследованию на экстремум функции $V = \pi x^2 y$, если $x + y = p$. Исключая из этих равенств y, получаем $V = \pi(px^2 - x^3)$. Из равенства

$V' = \pi(2px - 3x^2) = 0$ находим $x = \frac{2p}{3}$ ($x = 0$ не подходит по смыслу задачи). А из неравенства $V''\left(\frac{2p}{3}\right) = -2\pi p < 0$ следует, что $V = V_{max}$, если $x = \frac{2p}{3}$.

Таким образом, стороны искомого прямоугольника равны $\frac{2p}{3}$ и $\frac{p}{3}$.

292. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

Решение. Задача сводится к определению минимума функции $\delta = \frac{x - y - 2}{-\sqrt{2}}$, если $y = x^2$.

Составим функцию Лагранжа $\Phi = -\frac{x - y - 2}{\sqrt{2}} + \lambda(y - x^2)$. Решая систему

$$\Phi'_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\lambda x = 0,\ \Phi'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda = 0,\ y = x^2,$$

находим: $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$. Поскольку в этой точке $d^2\Phi = \frac{1}{2}dx^2 > 0$, то функция δ имеет минимум: $\delta_{min} = \frac{7}{4\sqrt{2}}$.

293. Найти полуоси центральной поверхности второго порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1. \qquad (1)$$

Решение. Квадраты полуосей центральной поверхности равны экстремальным значениям функции $u = x^2 + y^2 + z^2$, если x, y и z связаны соотношением (1), т. е. задача сводится к исследованию на экстремум функции u при наличии уравнения связи (1).

Записав функцию Лагранжа $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(1 - Ax^2 - By^2 - Cz^2 - 2Dxy - 2Eyz - 2Fxz)$ и приравняв нулю ее частные производные, получим:

$$\begin{aligned} \Phi'_x &= 2x - \lambda(2Ax + 2Dy + 2Fz) = 0,\\ \Phi'_y &= 2y - \lambda(2By + 2Dx + 2Ez) = 0,\\ \Phi'_z &= 2z - \lambda(2Cz + 2Ey + 2Fx) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Умножив первое равенство этой системы на x, второе — на y, третье — на z и сложив их, придем к равенству $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2\lambda(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz) = 0$ или, в силу (1), $u \equiv x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$.

Следовательно, экстремальные значения функции u равны числам λ. По смыслу задачи система (2) имеет нетривиальное решение, поэтому ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda A & -\lambda D & -\lambda F \\ -\lambda D & 1 - \lambda B & -\lambda E \\ -\lambda F & -\lambda E & 1 - \lambda C \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого уравнения находим три значения λ, равные квадратам полуосей центральной поверхности (1).

294. Согласно принципу Ферма, свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B, распространяется по кривой, для прохождения которой требуется минимум времени. Предполагая, что точки A и B расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью, причем скорость распространения света в первой среде равна v_1, а во второй v_2, вывести закон преломления света.

Решение. Пусть t_1 — время прохождения света в первой среде, t_2 — во второй. Тогда (рис. 1) $t_1 = \frac{a}{v_1 \cos \alpha_1}$, $t_2 = \frac{b}{v_2 \cos \alpha_2}$. Требуется исследовать на экстремум функцию $T = t_1 + t_2 = \frac{a}{v_1 \cos \alpha_1} + \frac{b}{v_2 \cos \alpha_2}$ при условии, что $l = a \operatorname{tg} \alpha_1 + b \operatorname{tg} \alpha_2$.

Записав функцию Лагранжа $\Phi = \frac{a}{v_1 \cos \alpha_1} + \frac{b}{v_2 \cos \alpha_2} + \lambda (l - a \operatorname{tg} \alpha_1 - b \operatorname{tg} \alpha_2)$, из системы

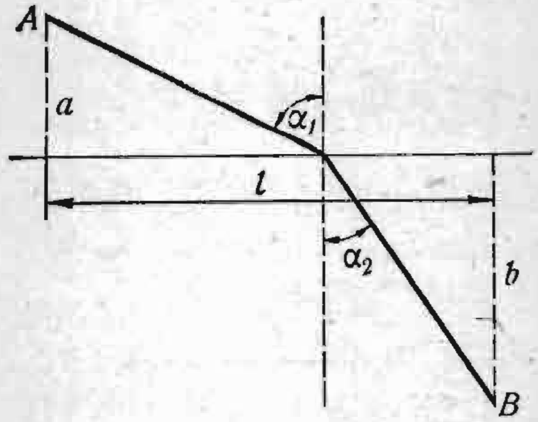

Рис. 1

$$\Phi'_{\alpha_1} = \frac{a \sin \alpha_1}{v_1 \cos^2 \alpha_1} - \frac{\lambda a}{\cos^2 \alpha_1} = 0,$$

$$\Phi'_{\alpha_2} = \frac{b \sin \alpha_2}{v_2 \cos^2 \alpha_2} - \frac{\lambda b}{\cos^2 \alpha_2} = 0,$$

$$l = a \operatorname{tg} \alpha_1 + b \operatorname{tg} \alpha_2$$

найдем, что в стационарной точке выполняется условие

$$\lambda = \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}. \qquad (1)$$

Отсюда и из последнего уравнения системы можно найти число λ, а затем и углы α_1 и α_2. Но мы так поступать не будем, так как в дальнейшем конкретные значения этих величин нам не понадобятся.

Для проверки выполнения достаточных условий находим второй дифференциал

$$d^2 \Phi = \left(\frac{a}{v_1 \cos \alpha_1} + 2a \frac{\sin \alpha_1}{\cos^3 \alpha_1} \left(\frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \lambda \right) \right) d\alpha_1^2 + \left(\frac{b}{v_2 \cos \alpha_2} + 2b \frac{\sin \alpha_2}{\cos^3 \alpha_2} \left(\frac{\sin \alpha_2}{v_2} - \lambda \right) \right) d\alpha_2^2.$$

В силу условия (1), в стационарной точке

$$d^2 \Phi = \frac{a}{v_1 \cos \alpha_1} d\alpha_1^2 + \frac{b}{v_2 \cos \alpha_2} d\alpha_2^2 > 0.$$

Следовательно, функция T имеет минимум, если выполняется равенство $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$, которое дает нам закон преломления света.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Доказать, что функция $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$ имеет в точке $(0, 0)$ по меньшей мере тот же порядок малости, что и $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$.

2. Показать, что для последовательности $a_{nm}=\dfrac{1}{n-m+\dfrac{1}{2}}$ имеем: $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}a_{nm})=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}a_{nm})$, тем не менее $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}a_{nm}$ не существует.

3. Доказать, что для последовательности $a_{nm}=\dfrac{\sin n}{m}$ двойной предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}a_{nm}$ существует, в то время как $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty}a_{nm})\neq\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty}a_{nm})$.

Выяснить, существуют ли следующие двойные пределы:

4. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\dfrac{(\ln n)^2-(\ln m)^2}{(\ln n^2)+(\ln m)^2}$.

5. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\dfrac{\operatorname{tg} n+\operatorname{tg} m}{1-\operatorname{tg} n\operatorname{tg} m}$. 6. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\dfrac{1}{m^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{m}$.

7. Показать, что функции $f(x, y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$, $g(x, y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ стремятся к нулю, когда точка (x, y) стремится к точке $(0, 0)$ вдоль любой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$, но эти функции не имеют предела в точке $(0, 0)$.

С помощью «ε-δ»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций:

8. $f(x, y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$. 9. $f(x, y)=\sqrt{1+e^{xy}}$.

10. Доказать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности и монотонна по одной из них, то она непрерывна по совокупности переменных.

11. Исследовать на равномерную непрерывность в плоскости $E_2=\{|x|<+\infty, |y|<+\infty\}$ функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2>0$, $f(0, 0)=0$.

12. Доказать, что функция $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$ не является равномерно непрерывной во всем пространстве $E_3=\{|x|<+\infty, |y|<+\infty, |z|<+\infty\}$.

13. Вычислить $z'_x(0, 0)$ и $z'_y(0, 0)$, если $z=|x|+|y|-|x+y|$.

14. Вычислить $z'_x(0, 0)$ и $z'_y(0, 0)$, если $z=(|x|+|y|)\sin(|x|+|y|)$.

Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ следующие функции:

15. $f(x, y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2>0$ и $f(0, 0)=0$.

16. $f(x, y)=\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если $x^2+y^2>0$ и $f(0, 0)=0$.

17. $f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если $x^2+y^2>0$ и $f(0, 0)=0$.

18. Показать, что $f''_{xy}(0, 0)\neq f''_{yx}(0, 0)$, если $f(x, y)=x^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, при $x\neq 0$, $y\neq 0$ и $f=0$; при $x=0$ или $y=0$.

19. Доказать, что функция

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $f''_{x_1x_1}+f''_{x_2x_2}+\ldots+f''_{x_nx_n}=0$.

20. Доказать, что однородная функция f первой степени удовлетворяет дифференциальному уравнению $f''_{xx}+f''_{yy}+\ldots+2f''_{xy}+2f''_{xz}+\ldots=0$.

Проверить следующие равенства (относительно функций, встречающихся в примерах 23—30, предполагаем, что они имеют нужные в этой задаче производные):

21. $\dfrac{D(u_1,\ u_2,\ u_3)}{D(x,\ y,\ z)} = (1-r^2)^{-\frac{5}{2}}$, если $u_1 = \dfrac{x}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_2 = \dfrac{y}{\sqrt{1-r^2}}$, $u_3 = \dfrac{z}{\sqrt{1-r^2}}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

22. $\dfrac{D\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial v}{\partial x_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v}{\partial x_n}\right)}{D(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)} = \dfrac{D\left(\dfrac{\partial v}{\partial y_1},\ \dfrac{\partial v}{\partial y_2},\ \ldots,\ \dfrac{\partial v}{\partial y_n}\right)}{D(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$, если $v = v(x_1\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ — функция с непрерывными вторыми производными.

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u$, если $u = e^{-\alpha x}\varphi(x-y)$.

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\varphi''$, если $u = \varphi(y-x) - x\varphi'(y-x)$.

25. $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$, если $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

26. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

27. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$, если $u = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$.

28. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, если $u = x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

30. $a^2\left(u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = b^2\left(u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)$, где $u = \varphi(ay+bx)\,\psi(bx-ay)$.

31. Пусть дано уравнение

$$y^2 - (x^2-1)^2 = 0 \tag{1}$$

и

$$y = y(x)\quad(-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

— однозначная функция, удовлетворяющая уравнению (1).

1) Сколько однозначных функций (2) удовлетворяют уравнению (1)?

2) Сколько однозначных непрерывных функций (2) удовлетворяют уравнению (1)?

3) Сколько однозначных дифференцируемых функций (2) удовлетворяют уравнению (1)?

4) Сколько однозначных непрерывных функций $y = y(x)$ $(-\delta < x < \delta)$ удовлетворяют уравнению (1), если $y(0) = 1$ и $0 < \delta < 1$?

32. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Найти y' при $x = y$.

33. $x = y - \alpha\sin y$. Найти y' и y''.

34. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

35. Найти d^2z в точке $x = a$, $y = a$, $z = 0$, если $x^3 + z^3 - 3axz = y^3$.

36. Даны уравнения $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$. Найти y' и z'' при $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

37. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = a^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$ Найти y' и z'.

38. Из уравнений $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ найти d^2y и d^2z, если x — независимая переменная.

39. В точке $(1,\ 1,\ -2)$ найти первые и вторые производные от y и z, если $x + y + z = 0$, $x^3 + y^3 - z^3 = 10$.

40. $x = a\cos u \sin v$, $y = b\cos u \sin v$, $z = c\sin u$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

41. Показать, что функция z, определенная как функция от x и y уравнением $x - az = \varphi(y - bz)$, где φ — любая функция, имеющая производную, удовлетворяет уравнению $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

42. Показать, что при соблюдении условий $z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$, $0 = x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)$ z удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$.

43. В уравнении $(x+a)^3 y''' + 3(x+a)^2 y'' + (x+a)y' + b = 0$ положить $\ln(x+a) = t$.

44. В уравнении $2y'' + (x+y)(1-y')^3 = 0$ положить $x - y = u$, $x + y = v$ и принять u за аргумент, а v — за функцию.

45. Преобразовать уравнение $xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$, взяв за аргумент y и за новую функцию $z = \ln\frac{y}{x}$.

46. Преобразовать выражение $A = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$, полагая $x = c\alpha\beta\cos\psi$, $y = c\alpha\beta\sin\psi$, $z = \frac{c}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$.

Преобразовать оператор Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, полагая:

47. $x = c\alpha\beta$, $y = \frac{c}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$, $z = z$.

48. $x = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi$, $z = z$.

49. $x = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\sin\psi$, $y = a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi\cos\psi$, $z = a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\varphi$.

50. $x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\psi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$, $y = \frac{a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\psi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$, $z = -\frac{a\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\xi + \cos\varphi}$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

51. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

52. $u = xyz(4a - x - y - z)$.

53. Вычислить максимум функции $f(x, y) = \frac{x^2 + 6xy + 3y^2}{x^2 - xy + y^2}$.

54. Определить стационарные точки функции $f(x, y) = y^2\left(\sin x - \frac{x}{2}\right)$ и выяснить их характер.

Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций, если переменные связаны условиями:

55. $u = xyz$; $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

56. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$; $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = p$, α_i, β_i, x_i — положительны.

57. Доказать неравенства:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \leqslant \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$$

и т. д., если $x_1x_2\ldots x_n \geqslant 0$ и $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = na$.

Глава III

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1°. Непрерывность интеграла. Интеграл

$$F(y)=\int_a^A f(x, y)\,dx \qquad (1)$$

представляет собой непрерывную функцию параметра y на сегменте $[b, B]$, если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B]$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в указанном прямоугольнике, а кривые $x=\varphi(y)$, $x=\psi(y)$, $y \in [b, B]$ непрерывны и не выходят за его пределы, то интеграл

$$I(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \qquad (2)$$

является непрерывной функцией на сегменте $[b, B]$.

2°. Предельный переход под знаком интеграла. При условиях предыдущего пункта справедливы формулы:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x, y)\,dx=\int_a^A \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx,$$

$$\lim_{y\to y_0}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx=\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\,dx.$$

Если функция $f(x, y)$ при фиксированном y непрерывна по $x \in [a, A]$ и при $y \to y_0 \in (b, B)$ стремится к предельной функции $g(x)$ равномерно относительно x, то

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x, y)\,dx=\int_a^A g(x)\,dx$$

(заметим, что y_0 может быть числом или символом).

Если y_0 — конечное, то равномерное стремление функции $f(x, y)$ к $g(x)$ при $y \to y_0$ означает, что

1) существует конечная предельная функция $g(x)$:

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y)=g(x);$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ будет $|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$ для всех x, для которых функция $f(x, y)$ определена.

В случае, когда $y_0 = \infty$, например $+\infty$, в данном определении неравенство $|y - y_0| < \delta$ следует заменить неравенством $y > \delta(\varepsilon) > 0$.

3°. Дифференцирование под знаком интеграла. Если, кроме условий, указанных в п. 1°, частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B]$, то интеграл (1) является дифференцируемой на сегменте $[b, B]$ функцией и для него справедлива *формула Лейбница*

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A f'_y(x, y)\,dx.$$

В более общем случае, когда пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и $a < \varphi(y) < A$, $a < \psi(y) < A$ при $b < y < B$, то

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx = f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx$$

$(b < y < B)$.

4°. Интегрирование под знаком интеграла. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a \leqslant x \leqslant A;\ b \leqslant y \leqslant B]$, то

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\,dy.$$

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\,dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на сегменте $[0, 1]$.

Решение. Функции $\varphi(x) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ и $f(x)$ собственно интегрируемы по x на $[0, 1]$ и не меняют знака при $0 < x < 1$. Кроме того, функция $f(x)$ непрерывна; следовательно, все условия первой теоремы о среднем выполнены, и мы можем написать:

$$F(y) = f(c(y))\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y} \quad (0 \leqslant c(y) \leqslant 1).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left|F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)\right| = \left|(f(c(\varepsilon)) + f(c(-\varepsilon)))\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\varepsilon}\right| \geqslant$$

$$\geqslant 2 \min_{x \in [0, 1]} f(x) \cdot \left|\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\varepsilon}\right| \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \pi \min_{x \in [0, 1]} f(x) > 0.$$

Таким образом, функция $F(y)$ разрывна в нуле.

Далее, так как функция $\varphi(x, y) = \dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ непрерывна в каждом из прямоугольников $[0 \leqslant x \leqslant 1;\ \delta \leqslant y \leqslant A]$, $[0 \leqslant x \leqslant 1;\ -A \leqslant y \leqslant -\delta]$, где $\delta > 0$, $A > 0$, то, согласно п. 1°, функция $F(y)$ непрерывна в каждом из указанных прямоугольников. Поскольку она непрерывна при любых $\delta > 0$ и $A > 0$, то отсюда следует, что она непрерывна при $|y| > 0$.

2. Найти: а) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$; г) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx$.

Решение. Так как функции $\sqrt{x^2+\alpha^2}$, $1+\alpha$, α и $\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывны (при всех x и α), то, согласно п. 2°, возможен предельный переход по α под знаком интеграла, когда $\alpha \to \alpha_0$ и α_0 — конечное. Имеем:

$$\text{а) } \lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{+1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = \int_{-1}^{+1}|x|\,dx = 1;$$

$$\text{б) } \lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad (\alpha_0 = 0).$$

Поскольку функции $\dfrac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ и $\dfrac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ при фиксированных $n\ (n \geqslant 1)$ и $\alpha\ (|\alpha| > 1)$ непрерывны по x ($0 \leqslant x \leqslant 1$ и $1 \leqslant x \leqslant 2$ соответственно) и $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \rightrightarrows \dfrac{1}{1+e^x}$, когда $n\to\infty$; $f(x, \alpha) = \dfrac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} \rightrightarrows \dfrac{1}{2}$, когда $\alpha\to\infty$ (см. ниже), то, согласно п. 2°, получаем:

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1\frac{dx}{1+e^x} = \ln\frac{2e}{e+1};$$

$$\text{г) } \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^2\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx = \int_1^2\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Равномерная сходимость последовательности $f_n(x)$ и функции $f(x, \alpha)$ вытекает из следующих оценок:

$$\left|\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1+e^x}\right| = \frac{\left|e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|}{(1+e^x)\left(1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} < \left|e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| <$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\leqslant \max\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}<\frac{3}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0 \text{ независимо от } x\in[0,\ 1].$$

$$\left|\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln(x^2+\alpha^2)}\right|\leqslant\frac{x|\alpha|}{(x^2+\alpha^2)\ln(x^2+\alpha^2)}\leqslant$$

$\leqslant \dfrac{2|\alpha|}{(1+\alpha^2)\ln(1+\alpha^2)}\leqslant\dfrac{1}{\ln(1+\alpha^2)}<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ сразу для всех $x\in[1,\ 2]$, как только $|\alpha|>(e^{\frac{1}{\varepsilon}}-1)^{\frac{1}{2}}$.

3. Найти $A=\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta.$

Решение. Так как $\sin\theta\geqslant\dfrac{2}{\pi}\theta$ при $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ (см. пример 188, гл. II, ч. 1), то $e^{-R\sin\theta}\leqslant e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta=\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$$

и $0\leqslant A\leqslant\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{\pi}{2R}(1-e^{-R})=0$, т. е. $A=0$.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A,\ B]$. Доказать, что

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x(f(t+h)-f(t))\,dt=f(x)-f(a)\quad(A<a<x<B).$$

Доказательство. Вводя в рассмотрение первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем:

$$\int_a^x(F'(t+h)-F'(t))\,dt=(F(t+h)-F(t))\Big|_a^x=$$

$$=F(x+h)-F(x)-(F(a+h)-F(a)).$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x(f(t+h)-f(t))\,dt=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=$$

$$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

5. Пусть 1) $\varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$, если $0 < \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1$; 3) $\int\limits_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,dx \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что если $f(x) \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\varphi_n(x)\,dx = f(0).$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ задано. Рассмотрим неравенство

$$\left|\int\limits_{-1}^{+1} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| \leqslant \left|\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right|. \tag{1}$$

Первое слагаемое в правой части (1) оценивается следующим образом:

$$\left|\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{1} f(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant 2M \sup_{0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \varphi_n(x), \tag{2}$$

где $M = \max\limits_{|x|\leqslant 1} |f(x)| \neq 0$ (заметим, что при $f \equiv 0$ на $[-1, 1]$ утверждение теоремы становится тривиальным).

Пользуясь первой теоремой о среднем, а также условием 1), оцениваем второе слагаемое в правой части неравенства (1):

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| = \left|f(\xi_n)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx - f(0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f(\xi_n) - f(0)\right| \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx + M\left|1 - \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|f(\xi_n) - f(0)\right| \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx + M\left|1 - \int\limits_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx\right| +$$

$$+ 2M \sup_{0<\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \varphi_n(x), \tag{3}$$

где $|\xi_n| < \varepsilon$.

В силу непрерывности функции $f(x)$, всегда можно выбрать число ε так, что будет выполняться неравенство

$$|f(\xi_n) - f(0)| < \frac{\delta M}{4M + \delta}. \tag{4}$$

После того как число ε уже выбрано, из условий 2) и 3) находим:

$$0 < \sup_{0<\varepsilon\leq|x|\leq 1} \varphi_n(x) < \frac{\delta}{8M}, \quad \left| \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx - 1 \right| < \frac{\delta}{4M},$$

$$0 < \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx < 1 + \frac{\delta}{4M}, \tag{5}$$

если n достаточно велико.

Используя теперь оценки (2)—(5), из (1) окончательно получаем:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx - f(0) \right| < \delta$$

при всех достаточно больших n, что и требовалось доказать.

6. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx?$$

Решение. Нет, нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим:

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}}\,d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в точке $(0,\ 0)$ функция $f(x,\ y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв.

7. Найти $F'(\alpha)$, если

а) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx$; б) $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$.

Решение. а) Допуская существование непрерывных частных производных функции $f(u,\ v)$, где $u = x+\alpha$, $v = x-\alpha$, согласно формуле Лейбница, имеем:

$$F'(\alpha) = f(2\alpha,\ 0) + \int_0^{\alpha} (f'_u(u,\ v) - f'_v(u,\ v))\,dx.$$

Замечая, что $\frac{df}{dx} = f'_u + f'_v$, можем написать:

$$\int_0^{\alpha} (f'_u - f'_v)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f'_u\,dx - f(2\alpha,\ 0) + f(\alpha,\ -\alpha).$$

Следовательно,

$$F'(\alpha) = f(\alpha, \ -\alpha) + 2\int_0^\alpha f'_u dx.$$

б) Обозначим: $f(x, \alpha) = \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$. Тогда

$$F'(\alpha) = 2f(\alpha^2, \alpha)\,\alpha + \int_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx,$$

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \sin(x^2 + (x+\alpha)^2 - \alpha^2) + \sin(x^2 + (x-\alpha)^2 - \alpha^2) - $$
$$- 2\alpha \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy.$$

Таким образом, получаем:

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2)\, dy + 2\int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx -$$
$$- 2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy.$$

8. Найти $F''(x)$, если $F(x) = \int_a^b f(y)\,|x - y|\, dy$, где $a < b$ и $f(y)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция.

Решение. Представляя данный интеграл в виде

$$F(x) = \begin{cases} -x\int_a^b f(y)\, dy + \int_a^b yf(y)\, dy, & \text{если } -\infty < x \leqslant a; \\ \int_a^x (x-y) f(y)\, dy - \int_x^b (x-y) f(y)\, dy, & \text{если } a < x < b; \\ x\int_a^b f(y)\, dy - \int_a^b yf(y)\, dy, & \text{если } b \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

и пользуясь формулой Лейбница, получаем:

$$F'(x) = \begin{cases} -\int_a^b f(y)\, dy, & \text{если } -\infty < x \leqslant a; \\ \int_a^x f(y)\, dy - \int_x^b f(y)\, dy, & \text{если } a < x < b; \\ \int_a^b f(y)\, dy, & \text{если } b \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Заметим, что в точках $x = a$ и $x = b$ производная $F'(x)$ существует.

Далее, применяя указанную формулу еще раз, находим:

$$F''(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } -\infty < x < a; \; b < x < +\infty; \\ 2f(x), \text{ если } a < x < b. \end{cases}$$

В точках $x = a$ и $x = b$ существуют только односторонние производные $F''(x)$, если $f(x) \neq 0$ в этих точках. Если же $f(a) = f(b) = 0$, то числа $F''(a)$, $F''(b)$ существуют и равны нулю.

9. Найти $F''(x)$, если $F(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(x + \xi + \eta)\,d\eta \quad (h > 0)$, где $f(x)$ — непрерывная функция.

Решение. Очевидно, если функция $f(x)$ непрерывна, то справедливо равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t + \omega)\,dt = \int\limits_{\alpha+\omega}^{\beta+\omega} f(t)\,dt.$$

Пользуясь этим равенством и возможностью дифференцирования по параметру, получаем:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta)\,d\eta\right) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h (f(h + x + \xi) -$$

$$- f(x + \xi))\,d\xi = \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_{x+h}^{2h+x} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi\right);$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}(f(2h + x) - 2f(h + x) + f(x)).$$

10. Доказать формулу

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int\limits_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right)dy, & \text{если } x \neq 0; \\ \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}, & \text{если } x = 0; \; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку: $\left|\frac{d^n f}{dx^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$ при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Справедливость формулы (1) при $x \neq 0$ устанавливается методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$ соотношение (1) очевидно. Предполагая, что формула (1) правильна при некотором $n = k$, дифференцированием обеих ее частей по x с последующим применением интегрирования по частям получаем:

$$I_{k+1} = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x y^k \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{x}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right)\Big|_0^x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k+1}\int\limits_0^x y^{k+1}\sin\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy\right) = -\frac{1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x y^{k+1}\sin\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{x^{k+2}}\int\limits_0^x y^{k+1}\cos\left(y + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) dy \quad (x \neq 0).$$

Покажем теперь справедливость формулы (1) при $x = 0$. Используя разложение $\sin x$ в ряд Маклорена, получаем: $\frac{\sin x}{x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$, если $x \neq 0$. Очевидно, сумма этого ряда при $x = 0$ равна единице. Поэтому $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ (при всех x). Отсюда находим: $f^{(n)}(0) = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку при $x \neq 0$

$$\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int\limits_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy\right| \leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}}\int\limits_0^{|x|} y^n\, dy = \frac{1}{n+1},$$

а при $x = 0$ $|f^{(n)}(0)| = \frac{\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$, то при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ $\left|\frac{d^n f}{dx^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

11. Функцию $f(x) = x^2$ на промежутке $1 \leqslant x \leqslant 3$ приближенно заменить линейной функцией $a + bx$ так, чтобы

$$I(a, b) = \int\limits_1^3 (a + bx - x^2)^2\, dx = \min.$$

Решение. Так как подынтегральная функция имеет непрерывные частные производные (при любых a и b), то можно применять формулу Лейбница. Дифференцируя под знаком интеграла по a и по b и учитывая необходимое условие экстремума функции $I(a, b)$, получаем:

$$I'_a = 2\int\limits_1^3 (a + bx - x^2)\, dx = 0; \quad I'_b = 2\int\limits_1^3 (a + bx - x^2)\, x\, dx = 0.$$

Отсюда находим: $a = -\frac{11}{3}$; $b = 4$. Легко убедиться, что $I''_{a^2} = 4$; $I''_{b^2} = \frac{52}{3}$; $I''_{ab} = 8$. Таким образом,

$$d^2I = 4dx^2 + 16dx\,dy + \frac{52}{3}dy^2 = 4(dx + 2dy)^2 + \frac{4}{3}dy^2 > 0,$$

т. е. при $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ функция $I(a, b)$ принимает минимальное значение. Следовательно, линейная функция $y = 4x - \frac{11}{3}$ удовлетворяет поставленной задаче.

12. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

Решение. Будем считать, что $k \in [k_0, k_1] \subset (0, 1)$. Тогда функции $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$, $\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$ непрерывны в прямоугольнике $\left[0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};\ k_0 \leqslant k \leqslant k_1\right]$. Следовательно, к интегралу применима формула Лейбница. Имеем:

$$E'(k) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{1}$$

Умножая обе части этого равенства на k и пользуясь выражениями для $E(k)$ и $F(k)$, находим:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - F}{k}. \tag{2}$$

Интегрируя в (1) по частям, получаем:

$$E'(k) = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\,d(\cos\varphi)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\cos^2\varphi\,d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но поскольку

$$F'(k) = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}; \quad (kF)' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

(дифференцирование здесь законно по причине, аналогичной изложенной выше), то $E'(k) = F'(k) - k(kF)'$. Пользуясь формулой (2), из последнего соотношения находим:

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}. \tag{3}$$

Из (2) следует, что $F = E - kE'$, $F' = -kE''$. Подставляя F и F' в (3), приходим к указанному дифференциальному уравнению.

Наконец, так как числа k_0 и k_1 могут быть как угодно близкими к нулю и единице соответственно, то отсюда следует, что все полученные выше результаты справедливы при $0 < k < 1$.

13. Доказать, что функция Бесселя целого индекса n

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + xI_n'(x) + (x^2 - n^2)\, I_n(x) = 0.$$

Доказательство. Вычисляя производную от данного интеграла и интегрируя по частям, находим:

$$I_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\, d(\cos\varphi) = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi -$$

$$- \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} (1-\sin^2\varphi)\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi -$$

$$- xI_n(x) - xI_n''(x). \tag{1}$$

Поскольку $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)\, d\varphi = 0$, то

$$\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\cdot\cos\varphi\, d\varphi = nI_n(x). \tag{2}$$

Умножая обе части соотношения (1) на x и учитывая тождество (2), получаем уравнение Бесселя.

14. Пусть $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}}$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant a$. Доказать, что при $0 < \alpha < a$ имеем:

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha - x}}\, dx.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$V(\alpha, \varepsilon) = \int_0^{\alpha-\varepsilon} \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}} \quad (0 < \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant a).$$

Очевидно, он является собственным интегралом и

$$V(\alpha, 0) = I(\alpha). \tag{1}$$

Полагая в нем $\alpha - x = t$, получаем:

$$V(\alpha, \varepsilon) = \int_\varepsilon^\alpha \frac{\varphi(\alpha - t)}{\sqrt{t}}\, dt.$$

В силу непрерывности функций $\frac{\varphi(\alpha - t)}{\sqrt{t}}$ и $\frac{\varphi'_\alpha(\alpha - t)}{\sqrt{t}}$ в треугольнике $[\varepsilon \leqslant t \leqslant \alpha;\ \ \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant a]$, согласно формуле Лейбница, справедливо равенство:

$$V'_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_\varepsilon^\alpha \frac{\varphi'_\alpha(\alpha - t)}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\alpha-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}}. \tag{2}$$

Так как несобственный интеграл $A(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}}$ $(0 < \alpha < a)$ сходится, то из (2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} V'_\alpha(\alpha, \varepsilon) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + A(\alpha) = V'_\alpha(\alpha, 0) \quad (0 < \alpha < a). \tag{3}$$

С другой стороны, дифференцируя (1), имеем:

$$V'_\alpha(\alpha, 0) = I'(\alpha) \quad (0 < \alpha < a). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), окончательно находим:

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)\, dx}{\sqrt{\alpha - x}} \quad (0 < \alpha < a).$$

15. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ — дифференцируемая функция. Показать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z)\, dz$$

удовлетворяет уравнению колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(a \neq 0)$ и начальным условиям: $u(x, 0) = f(x)$, $u'_t(x, 0) = F(x)$.

Решение. Вычисляя нужные производные, получаем:

$$u'_x = \frac{1}{2}(f'(x-at)+f'(x+at)) + \frac{1}{2a}(F(x+at)-F(x-at)),$$

$$u'_t = \frac{a}{2}(f'(x+at)-f'(x-at)) + \frac{1}{2}(F(x+at)+F(x-at)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(f''(x-at)+f''(x+at)) + \frac{1}{2a}(F'(x+at)-F'(x-at)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}(f''(x+at)+f''(x-at)) + \frac{a}{2}(F'(x+at)-F'(x-at)).$$

Легко теперь видеть, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению колебания струны, а также начальным условиям.

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

16. $$I(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\,dx. \tag{1}$$

Решение. Пусть $|a| \geqslant a_0 > 0$, $|b| \geqslant b_0 > 0$. Тогда подынтегральная функция $f(a, x)$ и ее производная $f'_a(a, x)$ непрерывны в $R\left\{|a| \geqslant a_0 > 0;\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Следовательно, в соответствии с п. 3°, дифференцирование по параметру a под знаком интеграла законно. Имеем:

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2|a|\operatorname{sgn} a \cdot \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\,dx.$$

Полагая здесь $t = \operatorname{ctg} x$, получаем:

$$I'(a) = 2|a|\operatorname{sgn} a \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{|a| + |b|}.$$

Отсюда интегрированием по a находим:

$$I(a) = \pi \ln(|a| + |b|) + C. \tag{2}$$

Используя очевидное равенство

$$I(b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(b^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)\,dx = \pi \ln|b|$$

и полагая в (1) $a = b$, из (2) получаем: $C = -\pi \ln 2$. Таким образом,

$$I(a) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}. \tag{3}$$

Поскольку числа a_0 и b_0 могут быть как угодно малыми, то полученный результат справедлив при любых $ab \neq 0$. Если же один из параметров равен нулю (например, $b=0$), то данный интеграл существует лишь как несобственный (см. пример 167, гл. IV, ч. 1), и у нас нет оснований считать, что формула (3) верна и в этом случае. Поэтому, пользуясь упомянутым примером, находим:

$$I(a, 0) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|a|\sin x)\,dx = \pi\ln|a| + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \pi\ln\frac{|a|}{2}.$$

После этого видим, что ответ (3) пригоден при любых a и b, если только $a^2+b^2 \neq 0$.

17. $I(a) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x + a^2)\,dx.$

Решение. Пусть $||a|-1| \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функции $f(a, x) = \ln(1-2a\cos x+a^2)$, $f'_a(a, x) = \frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}$ непрерывны в прямоугольнике $R\,[||a|-1| \geqslant \varepsilon > 0;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi]$ и, в соответствии с п. 3°, возможно дифференцирование по параметру a под знаком интеграла. Имеем:

$$I'(a) = 2\int_0^{\pi} \frac{a-\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx.$$

В результате подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ находим:

$$I'(a) = 4\int_0^{+\infty} \frac{a-1+(a+1)t^2}{(1+t^2)((1-a)^2+(1+a)^2t^2)}\,dt;$$

применяя метод неопределенных коэффициентов и формулу Ньютона — Лейбница, получаем:

$$I'(a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{a}, & \text{если } |a| \geqslant 1+\varepsilon; \\ 0, & \text{если } |a| \leqslant 1-\varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда интегрированием легко находим:

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1, & \text{если } |a| \geqslant 1+\varepsilon; \\ C_2, & \text{если } |a| \leqslant 1-\varepsilon, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Так как полученный результат справедлив при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, то можно написать:

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi\ln|a| + C_1, & \text{если } |a| > 1; \\ C_2, & \text{если } |a| < 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Для вычисления $I(\pm 1)$ обратимся к исходному интегралу:

$$I(\pm 1) = \int_0^{\pi} \ln(2(1\pm\cos x))\,dx = 2\pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = 0 \qquad (2)$$

(см. пример 167, гл. IV, ч. 1).

Поскольку $I(0)=0$, то $C_2=0$. Кроме того, как видим из (1), $\lim\limits_{|a|\to 1-0} I(a)=0$. Следовательно, с учетом (2) находим, что функция $I(a)$ непрерывна в точках $a=1$, $a=-1$ соответственно слева и справа.

Замечая, что

$$I\left(\frac{1}{a}\right)=\int\limits_0^{\pi}\ln\left(\frac{1}{a^2}(a^2-2a\cos x+1)\right)dx=-2\pi\ln|a|+I(a)\ (a\neq 0), \quad (3)$$

приходим к выводу, что функция $I(a)$ непрерывна в указанных точках также справа и слева. Действительно, в этом случае из (3) находим:

$$\lim_{|a|\to 1+0} I(a)=2\pi\lim_{|a|\to 1+0}\ln|a|+\lim_{|a|\to 1+0} I\left(\frac{1}{a}\right)=\lim_{|a|\to 1-0} I(a)=0.$$

Таким образом, функция $I(a)$ непрерывна при всех a. В связи с этим, полагая $C_1=0$, записываем ответ в таком виде:

$$I(a)=\begin{cases}2\pi\ln|a|, & \text{если } |a|>1;\\ 0, & \text{если } |a|\leqslant 1.\end{cases}$$

18. $I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$

Решение. Пусть $a\geqslant\varepsilon>0$. Тогда функции

$$f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}, & x\neq 0,\ x\neq\dfrac{\pi}{2};\\ a, & x=0;\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}\qquad f'_a(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $R\left[0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2};\ a\geqslant\varepsilon>0\right]$. Поэтому, согласно п. 3°, при $a\geqslant\varepsilon>0$ справедливо равенство

$$I'(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\frac{\pi}{2(1+a)},$$

из которого интегрированием находим:

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная.

Поскольку $\varepsilon>0$ может быть произвольно мало, то полученный результат верен при всяком $a>0$. А тогда из (1) следует, что

$$C=\lim_{a\to+0} I(a). \quad (2)$$

Таким образом, если исходный интеграл представляет собой непрерывную функцию параметра a, то с учетом (2) имеем: $C=I(0)$. Но интеграл действительно непрерывен по a в силу п. 1°. Следовательно, $C=0$ и $I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$ при $a\geqslant 0$.

Учитывая еще очевидное равенство $I(a)=I(|a|)\operatorname{sgn} a$, окончательно можем написать: $I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$ при всех a.

19. $I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}\ (|a|<1)$.

Решение. Функции

$$f(x, a)=\begin{cases}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}, & x\neq\frac{\pi}{2};\\ 2a, & x=\frac{\pi}{2},\end{cases}\qquad f'_a(x, a)=\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике $R\left[|a|\leqslant 1-\varepsilon<1;\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому, в соответствии с п. 3°,

$$I'(a)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

откуда $I(a)=\pi\arcsin a+C$.

Устремляя ε к нулю, замечаем, что этот ответ правилен при $|a|<1$. Так как $I(0)=0$, то $C=0$. Таким образом, $I(a)=\pi\arcsin a$.

20. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int\limits_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\ (x\neq 0), \tag{1}$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2}$$

Решение. Интеграл (2) является несобственным, поэтому его следует понимать как предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя сюда интеграл (1), получаем:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}. \tag{3}$$

Так как функция $f(x, y)=\frac{1}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}$ является непрерывной в прямоугольнике $R[0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon;\ 0\leqslant y\leqslant 1]$, то из (3), используя п. 4°, находим:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Применяя к интегралу $A = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)}$ $(|x| < 1)$ подстановку $t = \arcsin x$, получаем:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg}\left(z\sqrt{1+y^2}\right), \quad z = \operatorname{tg}(\arcsin x).$$

Следовательно,

$$B(\varepsilon, y) = A\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+y^2}\operatorname{tg}(\arcsin(1-\varepsilon))\right).$$

Поскольку функция $B(\varepsilon, y)$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1$ является непрерывной (при $\varepsilon = 0$ полагаем $B(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} B(\varepsilon, y)$), то, в соответствии с п. 2°, имеем:

$$I = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \to +0} B(\varepsilon, y)\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

21. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Решение. Поскольку

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\, dy, \tag{1}$$

то $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y\, dy$.

Функция $f(x, y) = x^y$ непрерывна в прямоугольнике $R\,[0 \leqslant x \leqslant 1;$ $a \leqslant y \leqslant b]$, поэтому, согласно п. 4°, получаем:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\, dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

22. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$; б) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Решение. Используя представление (1) из предыдущего примера, вместо данных интегралов получаем:

а) $I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy$; б) $I_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy$.

Функции $f_1(x, y) = x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ и $f_2(x, y) = x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ непрерывны в прямоугольнике $R\,[0 \leqslant x \leqslant 1; a \leqslant y \leqslant b]$ (при $x = 0$ полагаем $f_1(0, y) =$

$= f_2(0, y) = 0)$, поэтому можно выполнить перестановку интегралов:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx; \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx.$$

Производя подстановку $x = e^{-t}$, получаем:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t\, dt; \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t\, dt.$$

Выполняя внутреннее интегрирование, находим:

$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1}; \quad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1)dy}{(y+1)^2+1}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$I_1 = \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}; \quad I_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

23. Пусть $F(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. пример 12). Доказать формулы:

а) $\int\limits_0^k F(k)\, k\, dk = E(k) - k_1^2 F(k)$;

б) $\int\limits_0^k E(k)\, k\, dk = \frac{1}{3}((1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k))$, где $k_1^2 = 1 - k^2$.

Доказательство. Из выражений для производных от полных эллиптических интегралов (см. указанный пример) легко найти, что $kF = (1-k^2)F' - E'$, $kE = (1-k^2)(F' - E')$.

Интегрируя почленно по k в пределах от 0 до k первое из этих соотношений и пользуясь при этом методом интегрирования по частям, получаем формулу а). Производя аналогичные выкладки со вторым из указанных соотношений и используя формулу а), получаем формулу б).

24. Доказать формулу

$$\int_0^x xI_0(x)\, dx = xI_1(x),$$

где $I_0(x)$ и $I_1(x)$ — функции Бесселя индексов 0 и 1.

Решение. Положим в уравнении Бесселя (см. пример 13) $n = 0$. Тогда получим:

$$(xI_0')' + xI_0 = 0. \quad (1)$$

Так как $\int\limits_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cdot\cos\varphi\, d\varphi = 0$, то

$$I_0'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\cdot\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi = -I_1(x).$$

Подставляя значение $I_0'(x)$ в (1) и интегрируя обе части соотношения (1) по x в пределах от 0 до x, находим:

$$xI_1(x)\Big|_0^x = \int_0^x xI_0(x)\,dx.$$

Но так как $I_1(0)=0$, то из этого соотношения и следует нужная формула.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

1°. Определение равномерной сходимости. Пусть несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \qquad (1)$$

где функция $f(x, y)$ определена в области $R\,[a \leqslant x < +\infty;\ y_1 < y < y_2]$, сходится на интервале $y_1 < y < y_2$. Говорят, что интеграл (1) *равномерно сходится на интервале* $y_1 < y < y_2$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b \geqslant B$ выполняется неравенство

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

$\forall y \in (y_1, y_2)$ сразу.

2°. Критерий Коши. Для того чтобы интеграл (1) сходился равномерно на интервале (y_1, y_2), необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon)$ такое, чтобы сразу для всех $y \in (y_1, y_2)$ выполнялось неравенство $\left|\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$, как только $\beta > \alpha > A(\varepsilon)$.

3°. Признак Вейерштрасса. Несобственный интеграл (1) сходится абсолютно и равномерно на интервале (y_1, y_2), если существует функция $F(x)$ такая, что $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x < +\infty$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится. Функция $F(x)$ называется *мажорирующей* по отношению к функции $f(x, y)$.

4°. Предельный переход под знаком интеграла. Если: 1) функция $f(x, y)$, определенная в области R, непрерывна по x и при $y \to y_0 \in (y_1, y_2)$ равномерно относительно x стремится к предельной функции $g(x)$ в каждом конечном промежутке $[a, A]$; 2) интеграл (1) сходится равномерно на интервале (y_1, y_2), то

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ и интеграл (1) сходится равномерно при $y \in [y_1, y_2]$, то

$$\lim_{y \to y_0 \in [y_1, y_2]} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\, dx.$$

5°. **Непрерывность несобственного интеграла.** Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ и интеграл (1) сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой равномерно непрерывную функцию на этом отрезке.

Если: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена в указанной области; 2) функция $\varphi(x)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant A$; 3) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx$ сходится, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, \varphi(x)\, dx$$

сходится равномерно и является равномерно непрерывной функцией параметра y на отрезке $[y_1, y_2]$.

Аналогичные теоремы справедливы и для интегралов от неограниченных функций.

Определить области сходимости интегралов:

25. $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx$.

Решение. Положим для определенности, что $p \geqslant q$. Функция

$$\int_{\pi}^{x} \cos t\, dt = \sin x$$

ограничена. Функция $\frac{1}{x^{p-1}}$ монотонно стремится к нулю при $p > 1$. Следовательно, интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}}\, dx,$$

в силу признака Дирихле, сходится при $p > 1$. Так как функция $\frac{1}{1 + x^{q-p}}$ монотонна и ограничена при $x > \pi$, то интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1 + x^{q-p}},$$

по признаку Абеля, сходится при $p > 1$, т. е. при $\max(p, q) > 1$.

Это условие является и необходимым. Действительно, представляя интеграл в виде ряда и пользуясь теоремой о среднем, получаем:

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}+x^{q-1}}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)} \frac{\cos x\,dx}{x^{p-1}+x^{q-1}} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1}+\xi_n^{q-1}}, \quad \frac{\pi}{2}(2n+1) \leqslant \xi_n \leqslant \frac{\pi}{2}(2n+3).$$

Из необходимого условия сходимости ряда вытекает неравенство $\max(p, q) > 1$, что и требовалось доказать.

26. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

Решение. Произведем замену переменной x по формуле $x = t^{\frac{1}{q}}$ $(t > 0,\ q > 0)$ и разобьем полученный интеграл на два интеграла. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx = \frac{1}{q}\int\limits_0^{a} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt + \frac{1}{q}\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt \left(\alpha = \frac{p-1}{q}+1,\ a > 0\right).$$

Так как $\dfrac{\sin t}{t^\alpha} = O^*\left(\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$ при $t \to +0$, то первый интеграл, в силу признака сравнения, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geqslant 2$. Второй интеграл, в силу признака Дирихле, сходится при $\alpha > 0$. При $\alpha \leqslant 0$ этот интеграл расходится, так как при этом условии расходится соответствующий числовой ряд. Действительно, поскольку

$$\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi_n^\alpha} \quad (\pi n \leqslant \xi_n \leqslant \pi(n+1)),$$

то это утверждение становится очевидным.

Итак, теперь можно сказать, что если $q > 0$, то исходный интеграл сходится при условии $0 < \dfrac{p+q-1}{q} < 2$, или, что то же самое, при $|p-1| < q$.

Если $q < 0$, то, полагая $q = -q_1$ $(q_1 > 0)$ и производя аналогичные выкладки и рассуждения, приходим к такому условию сходимости данного интеграла: $|p-1| < q_1$, или $|p-1| < -q$. Объединяя оба случая и учитывая, что при $q = 0$ интеграл расходится, получаем окончательный ответ: данный интеграл может сходиться только при условии $\left|\dfrac{p-1}{q}\right| < 1$.

27. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$.

Решение. Положим $x = e^{-t}$. Тогда получим:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int\limits_{-\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{|t|^p} = \int\limits_{-\ln 2}^{1} \frac{e^{-t}\,dt}{|t|^p} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t^p}.$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{|t|^p} = O^*\left(\frac{1}{|t|^p}\right)$ при $t \to 0$, то первый интеграл, в силу признака сравнения, сходится лишь при $p < 1$. Второй интеграл сходится при всяком p, так как $e^t > t^{2-p}$ при достаточно большом t. Последнее вытекает из того, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^{2-p}}{e^t} = 0$. Следовательно, данный интеграл сходится лишь при $p < 1$.

28. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx$.

Решение. Положим $t = (1-x)^{-1}$ $(x \neq 1)$. Тогда получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{t^{2-\frac{1}{n}}\left(2-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку функция $f(t) = \frac{1}{\left(2-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}$ $(t > 1)$ монотонна и ограничена, а интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{t^{2-\frac{1}{n}}},$$

в силу признака Дирихле, сходится при $n < 0$ или при $n > \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл сходится, в силу признака Дирихле, при этом же условии. Пользуясь приемом, примененным в примере 25, можно показать, что это условие является и необходимым.

29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx$ $(p > 0)$.

Решение. Разобьем данный интеграл на два:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx. \quad (1)$$

Так как

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\sim\frac{1}{x^{p-1}+1} \text{ при } x\to+0,$$

то первый интеграл сходится при любом p (точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва функции $f(x)$). Поскольку

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)=$$

$$=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+\frac{\cos 2x}{2x^{2p}}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) \text{ при } x\to+\infty$$

и интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx,\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^{2p}}\,dx,$$

в силу признака Дирихле, сходятся ($p>0$), а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2p}}$ сходится лишь при $p>\frac{1}{2}$, то второй интеграл из (1) сходится лишь при $p>\frac{1}{2}$.

Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии.

Исследовать сходимость интегралов (в примерах 30—32 путем сравнения их с рядами):

30. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}$ $(n>0)$.

Решение. Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^n\sin^2 x}=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{(k\pi+t)\,dt}{1+(k\pi+t)^n\sin^2 t},$$

то будем исследовать сходимость последнего ряда.

Легко видеть, что

$$I_1=\int\limits_0^{\pi}\frac{k\pi\,dt}{1+(k+1)^n\pi^n\sin^2 t}<\int\limits_0^{\pi}\frac{(k\pi+t)\,dt}{1+(k\pi+t)^n\sin^2 t}<\int\limits_0^{\pi}\frac{(k+1)\pi\,dt}{1+k^n\pi^n\sin^2 t}=I_2,$$

где $I_1=\frac{k\pi^2}{\sqrt{1+(k+1)^n\pi^n}}$, $I_2=\frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+k^n\pi^2}}$. Так как $I_1=O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$, $I_2=O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$ при $k\to\infty$, то, по признаку сравнения, ряд, а значит, и интеграл, сходится лишь при $n>4$.

31. $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Решение. Представив данный интеграл в виде

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}},$$

будем рассматривать последний ряд. Полагая $x = n\pi + t$, имеем:

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}}.$$

Заметим попутно, что этот интеграл является несобственным и сходится по признаку сравнения $\left(\frac{1}{(n\pi + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \right) \text{ при } t \to +0, \right.$ $\left. \frac{1}{(n\pi + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{(\pi - t)^{\frac{2}{3}}} \right) \text{ при } t \to \pi - 0 \right)$.

В силу оценок

$$\frac{1}{\pi^p (n+1)^p} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi + t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p n^r} \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}},$$

исследуемый ряд (интеграл) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который, как известно, сходится только при $p > 1$. Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии.

32. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^n} dx$.

Решение. Разбивая данный интеграл на два:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^n} dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin(x + x^2)}{x^n} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^n} dx$$

и применяя к первому интегралу подстановку $x = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$, а ко второму — подстановку $x = \sqrt{t + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ $(t > 0)$, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^n} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt}{t^{2-n}} + \frac{1}{2} \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t + \frac{1}{4}} \left(\sqrt{t + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^n}.$$

Поскольку

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt}{t^{2-n}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k; \quad \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t + \frac{1}{4}} \left(\sqrt{t + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k,$$

где

$$a_k = \int\limits_k^{k+1} \frac{\sin\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt}{t^{2-n}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{\xi_k} + \frac{1}{\xi_k^2}\right)}{\xi_k^{2-n}} \quad (k \leqslant \xi_k \leqslant k+1),$$

$$b_k = \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|\, dt}{\sqrt{t+\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^n} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{t+k\pi+\frac{1}{4}}\left(\sqrt{t+k\pi+\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^n} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\gamma_k + k\pi + \frac{1}{4}}\left(\sqrt{\gamma_k + k\pi + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^n} \quad (0 \leqslant \gamma_k \leqslant \pi)$$

(здесь к соответствующим интегралам применена первая теорема о среднем), то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, в силу признака сравнения $\left(a_k = O^*\left(\frac{1}{\xi_k^{3-n}}\right)\right)$, только при $n < 2$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \tag{*}$$

сходится, по признаку Лейбница, при $n > -1$. Замечая еще, что при $n \leqslant -1$ общий член ряда (*) не стремится к нулю, приходим к выводу: данный интеграл сходится только при условии $-1 < n < 2$.

33. Сформулировать в положительном смысле, что означает неравномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ в заданном интервале (y_1, y_2).

Решение. Неравномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра, означает следующее:

1) Интеграл сходится при каждом фиксированном $y \in (y_1, y_2)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B(\varepsilon, y) > 0$ такое, что при $\forall b \geqslant B$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$.

2) $\forall B > 0$ и $\forall \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ $\exists y \in (y_1, y_2)$ и $\exists b \geqslant B$ такие, что $\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| \geqslant \varepsilon$.

34. Доказать, что если 1) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно в (y_1, y_2) и 2) функция $\varphi(x, y)$ ограничена и монотонна по x, то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx \tag{1}$$

сходится равномерно в (y_1, y_2).

Доказательство. Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 1), согласно критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b'$, ξ, $b'' > B(\varepsilon)$ независимо от $y \in (y_1, y_2)$ выполняются неравенства:

$$\left|\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left|\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{2}$$

где $M = \sup\limits_{x,\,y} |\varphi(x, y)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема, очевидно, справедлива).

Далее, поскольку функция $\varphi(x, y)$ монотонна по x, а функция $f(x, y)$ интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем:

$$\int_{b'}^{b''} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx = \varphi(b'+0, y)\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx + \varphi(b''-0, y) \times$$
$$\times \int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx,$$

где $b' \leqslant \xi \leqslant b''$. Отсюда, учитывая неравенства (2), получаем оценку

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x, y)\varphi(x, y)\,dx\right| \leqslant |\varphi(b'+0, y)|\left|\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx\right| +$$
$$+ |\varphi(b''-0, y)|\left|\int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех $y \in (y_1, y_2)$ сразу. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл (1) сходится равномерно в указанной области.

35. Доказать, что если 1) функция $\varphi(x, y) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$, $y \in (y_1, y_2)$ и монотонна по x $(a < x < +\infty)$; 2) первообразная $\int_a^x f(t, y)\,dt$ $(y_1 < y < y_2)$ ограничена абсолютной постоянной M, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx \tag{1}$$

равномерно сходится в области (y_1, y_2).

Доказательство. К интегралу

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx \quad (b', b'' \in (a, +\infty))$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда

$$\left|\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\right| = \left|\varphi(b'+0, y)\int_{b'}^{\xi} f(x, y)\,dx + \varphi(b''-0, y) \times\right.$$
$$\left.\times \int_{\xi}^{b''} f(x, y)\,dx\right| \leqslant M(|\varphi(b'+0, y)| + |\varphi(b''-0, y)|).$$

Так как $\varphi(x, y)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$ равномерно по параметру $y \in (y_1, y_2)$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдется число $B(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi(b'+0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|\varphi(b''-0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ при $y_1 < y < y_2$, если только $b' > B$ и $b'' > B$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ найдется число $B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \text{ при } y_1 < y < y_2,$$

если только $b' > B$ и $b'' > B$. В силу критерия Коши, интеграл (1) сходится равномерно в области (y_1, y_2), что и требовалось доказать.

36. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \quad (0 < y < 1)$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

Доказательство. Интеграл $L = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ сходится, а поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_B^{+\infty} e^{-t^2} dt < \varepsilon. \tag{1}$$

Выберем число A так, чтобы

$$A > \frac{2L}{\varepsilon} + B. \tag{2}$$

Производя в интеграле $\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx$ замену $t = \frac{1}{y}\left(x - \frac{1}{y}\right)$ и используя неравенства (1) и (2), получаем оценку:

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx = y \int_{\frac{1}{y}\left(A - \frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt <$$

$$< \begin{cases} y \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2Ly < \varepsilon, \text{ если } 0 < y < \frac{\varepsilon}{2L}; \\ \displaystyle\int_{\frac{1}{y}\left(A - \frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_{A - \frac{2L}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_B^{+\infty} e^{-t^2} dt < \varepsilon, \text{ если } \frac{\varepsilon}{2L} \leqslant y < 1, \end{cases}$$

из которой непосредственно следует равномерная сходимость интеграла на $(0, 1)$.

Что же касается мажорирования, то здесь можно привести следующие соображения. Предположим, что такая мажорантная функция $F(x)$ существует. Тогда должно быть

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2} \leqslant F(x).$$

Легко видеть, что благодаря конструкции области определения функции $f(x, y)$ $(1 < x < +\infty;\ 0 < y < 1)$, $\forall x$ существует $y = \frac{1}{x}$ такое, что $f(x, y) = 1$. Таким образом, $F(x) \geqslant 1$ для всех x. Очевидно, соответствующий несобственный интеграл от $F(x)$ расходится.

37. Показать, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ и 2) сходится неравномерно в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

Решение. В первом случае легко построить мажорирующую функцию $F(x) = be^{-ax}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

Во втором случае, произведя замену $t = \alpha x$ $(x > 0,\ \alpha > 0)$, получим:

$$\int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^{-\alpha B}.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было $B > 0$, всегда найдется α $(0 < \alpha \leqslant b)$ такое, что $e^{-\alpha B} > \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0 < \alpha < \frac{1}{B} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно.

38. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

1) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$, и 2) сходится неравномерно на каждом сегменте $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

Доказательство. В первом случае воспользуемся примером 34. Здесь функция $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ монотонно стремится к нулю (и равномерно относительно параметра α). Первообразная

$$\int_a^x \sin \alpha t\, dt = \frac{\cos \alpha a - \cos \alpha x}{\alpha}$$

ограничена числом $\frac{2}{\min(|a|,\ |b|)}$. Следовательно, согласно примеру 34, данный интеграл сходится равномерно.

Во втором случае положим $x = \alpha t$ $(\alpha > 0,\ t > 0)$. Тогда получим:

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int\limits_{B\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0$ всегда найдется $\alpha \in [a,\ b]$ такое, что

$$\left|\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx\right| > \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \int\limits_{0,1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right).$$

Действительно, для этого достаточно положить $\alpha \leqslant \frac{0{,}1}{B}$.

При $\alpha < 0$ применяем подстановку $x = -\alpha t$ и, проводя аналогичные рассуждения, приходим к такому же выводу.

Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно.

39. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ в следующих промежутках: а) $1 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$; б) $1 < \alpha < +\infty$.

Решение. а) Легко видеть, что $\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ при $1 \leqslant x < +\infty$; $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

б) Так как $\int\limits_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ и $\lim\limits_{\alpha \to 1+0} \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = +\infty$, то для любого $B > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha > 1$ такое, что $\int\limits_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} > \varepsilon$. Следовательно, интеграл в этом случае сходится неравномерно.

40. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$.

Решение. Положив $x = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$, получим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha}}$, исследованный в предыдущем примере. Следовательно, интеграл сходится неравномерно.

41. Показать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно в интервале $1 < \alpha < +\infty$.

Решение. Легко видеть (см. также пример 39), что при $B > 1$ справедлива оценка

$$\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} > \frac{1}{2} \int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} > \varepsilon,$$

указывающая на неравномерную сходимость интеграла.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

42. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \ (-\infty < \alpha < +\infty)$.

Решение. Поскольку $\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} (-\infty < \alpha < +\infty)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

43. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \ (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Решение. В интеграле

$$I(B, \alpha) = \int_B^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$$

произведем замену переменной $x = \alpha + t$. Тогда

$$I(B, \alpha) = \int_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$$

Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B $I(B, \alpha) > \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, данный интеграл сходится неравномерно. Заметим, что сходимость рассматриваемого интеграла при фиксированном α $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$ следует из признака сравнения.

44. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx \ (0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Решение. Воспользуемся примером 34. Здесь $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, согласно признаку Дирихле, сходится, а функция $e^{-\alpha x}$ монотонна по x $((e^{-\alpha x})'_x = -\alpha e^{-\alpha x} \leqslant 0)$ и ограничена единицей. Следовательно, согласно указанному примеру, данный интеграл сходится равномерно.

45. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx \ (0 \leqslant p \leqslant 10)$.

Решение. Так как $\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leqslant \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ при $x \geqslant 1$, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

46. $\int\limits_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$, где $p > 0$ фиксировано.

Решение. В силу того, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ при $p > 0$ сходится (по признаку Дирихле), а функция $e^{-\alpha x}$ монотонна по x и ограничена единицей, то, согласно примеру 34, данный интеграл сходится равномерно.

47. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$ $(0 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Решение. Полагая в интеграле $\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$ $\sqrt{\alpha} x = t$, имеем:

$$\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int\limits_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Взяв $\alpha = \frac{1}{B^2}$ $(B > 0)$, отсюда получаем неравенство

$$\int\limits_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx > \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2} dt\right),$$

справедливое при любом B. Следовательно, интеграл сходится неравномерно.

Следует заметить, что данный интеграл при $\alpha \geqslant 0$ сходится по признаку сравнения.

48. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$; а) $a < \alpha < b$; б) $-\infty < \alpha < +\infty$.

Решение. а) Замечая, что $e^{-(x-\alpha)^2} \leqslant e^{-(x+m)^2}$ при $x \leqslant -m$ и $e^{-(x-\alpha)^2} \leqslant e^{-(x-m)^2}$ при $x \geqslant m$, где $m = \max(|a|, |b|)$, и, принимая во внимание, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{-m} e^{-(x+m)^2} dx + \int\limits_m^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx,$$

согласно признаку Вейерштрасса, сходится, заключаем, что данный интеграл сходится равномерно.

б) Производя замену переменной x в интеграле

$$I(B, \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{-B} e^{-(x-\alpha)^2} dx + \int\limits_B^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \quad (B > 0)$$

по формуле $x = \alpha + t$, получаем:

$$I(B, \alpha) = \int_{-\infty}^{-B-\alpha} e^{-t^2}\, dt + \int_{B-\alpha}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Отсюда следует, что если $\alpha = B$ или $\alpha = -B$, то

$$I(B, \alpha) \geqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt > \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt\right)$$

при любом $B > 0$. Поэтому в этом случае данный интеграл сходится неравномерно.

49. $I(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy \; (-\infty < x < +\infty).$

Решение. Очевидно, $I(0) = 0$. Полагая в данном интеграле $t = |x|\, y \; (x \neq 0)$, получаем: $I(x) = c\dfrac{\sin x}{|x|} e^{-x^2} \left(c = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \neq 0\right)$. Так как $\lim\limits_{x \to -0} I(x) = -c$, $\lim\limits_{x \to +0} I(x) = c$, то функция $I(x)$ разрывна в нуле. А тогда, согласно п. 5°, интеграл сходится неравномерно (если бы он сходился равномерно, то, в силу непрерывности подынтегральной функции, представлял бы собой непрерывную функцию).

50. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{1 + x^p}\, dx \; (p \geqslant 0).$

Решение. Произведя замену $x = \sqrt{t}$, получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{2\left(1 + t^{\frac{p}{2}}\right)\sqrt{t}}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, в силу признака Дирихле, сходится, а функция $\dfrac{1}{2\left(1 + t^{\frac{p}{2}}\right)}$ $(p \geqslant 0)$ монотонна по t и ограничена числом 0,5, то, согласно примеру 34, данный интеграл сходится равномерно.

51. Подобрать число $b > 0$ так, чтобы $0 < \int\limits_b^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^n} < \varepsilon$ при $1{,}1 \leqslant n \leqslant 10$, где $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение. Так как $\dfrac{1}{1 + x^n} \leqslant \dfrac{1}{1 + x^{1,1}} \leqslant \dfrac{1}{x^{1,1}}$ (последняя оценка не будет грубой, если $x > b$, а b — достаточно велико), то

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}} = \frac{10}{b^{0,1}} < 10^{-6}.$$

Таким образом, решая последнее неравенство, находим, что если $b > 10^{70}$, то указанное в условии примера неравенство будет обеспечено.

52. $\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx$; а) $p \geqslant p_0 > 0$; б) $p > 0$ $(q > -1)$.

Решение. Произведем замену переменной x по формуле $x = e^{-t}$ $(t > 0)$. Тогда получим:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} t^q e^{-pt}\, dt.$$

а) Поскольку $t^q e^{-pt} \leqslant t^q e^{-p_0 t}$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^q e^{-p_0 t}\, dt$, в силу признака сравнения, сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

б) В интеграле $I(B, p) = \int\limits_B^{+\infty} t^q e^{-pt}\, dt$ $(B > 0)$ положим $z = pt$. Тогда получим:

$$I(B, p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\, dz.$$

Пусть числа $B > 0$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Тогда, в силу того, что

$$\lim_{p \to +0} \frac{1}{p^{q+1}} \int\limits_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z}\, dz = +\infty,$$

всегда можно выбрать число $p > 0$ так, что $I(B, p) > \varepsilon$.

Итак, данный интеграл сходится неравномерно.

53. $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ $(0 \leqslant n < +\infty)$.

Решение. Так как $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

54. $\int\limits_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}$ $(0 < n < 2)$.

Решение. Положим $x = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$. Тогда

$$\int\limits_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}}\, dt.$$

Далее, интегрированием по частям находим:

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}}\, dt = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (n-2) \int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}}\, dt. \qquad (1)$$

Последний интеграл, в силу примера 35, сходится равномерно (здесь функция $\varphi = \frac{1}{t^{3-n}} \leqslant \frac{1}{t} \to 0$ при $t \to \infty$ и монотонна по t, первообразная $\int\limits_a^x \cos t\, dt = \sin x - \sin a$ ограничена числом 2). Поэтому при достаточно большом $B(\varepsilon_1)$ справедлива оценка

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}}\, dt \right| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — наперед заданное число.

Что же касается слагаемого в (1) $\frac{\cos B}{B^{2-n}}$, то оно не может быть сделано как угодно малым при всех достаточно больших $b \geqslant B$ равномерно относительно параметра n. Действительно, пусть $B > 0$ задано. Пусть, кроме этого, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда, выбирая число $b = 2k\pi > B$ (k — целое положительное и фиксированное число) и значение параметра n из неравенства $0 < 2 - n < \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon_2}}{\ln 2k\pi}$ $(n > 0)$, получаем: $\left| \frac{\cos b}{b^{2-n}} \right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-n}} > \varepsilon_2$. Следовательно, исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость данного интеграла при $0 < n < 2$ вытекает из признака Дирихле.

55. $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $\left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Так как

$$0 \leqslant \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} & \text{при } 0 < x < 1; \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} & \text{при } 1 < x < 2, \end{cases}$$

то $\int\limits_0^2 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} + \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$.

В силу оценок

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ при } x \to +0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) \text{ при } x \to 1;$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^*\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right) \text{ при } x \to 2$$

и признака сравнения два последних интеграла сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно.

56. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx \quad (c < y < d) \tag{1}$$

является несобственным сходящимся интегралом и $x = \varphi(y) \in (a, b)$ есть кривая бесконечного разрыва функции $f(x, y)$ (подвижная особенность). Интеграл (1) будем называть равномерно сходящимся на интервале (a, b), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех δ_1 и δ_2 $(0 < \delta_1 < \Delta(\varepsilon),\ 0 < \delta_2 < \Delta(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\varphi(y)-\delta_1}^{\varphi(y)+\delta_2} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon$$

для всех $y \in (c, d)$ одновременно.

Показать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|x-y|}}\,dx \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$$

сходится равномерно.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|x-y|}}\,dx \right| < \varepsilon \text{ для всех } y \in [0, 1] \tag{2}$$

в смысле данного выше определения.

Имеем:

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{|x-y|}}\,dx \right| \leqslant \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}} = \int_{y-\delta_1}^{y} \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int_{y}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} =$$
$$= 2\left(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}\right) < 4\sqrt{\Delta} \tag{3}$$

для любых δ_1 и δ_2 таких, что $0 < \delta_1 < \Delta$ и $0 < \delta_2 < \Delta$.

Если теперь $\forall \varepsilon > 0$ взять $\Delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{16}$, то из (3) получим неравенство (2). Следовательно, данный интеграл сходится равномерно.

57. Интеграл называется равномерно сходящимся при данном значении параметра, если он равномерно сходится в некоторой окрестности этого значения.

Доказать, что интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2 x^2}$ сходится равномерно при каждом значении $\alpha \neq 0$ и не сходится равномерно при $\alpha = 0$.

Доказательство. Пусть отрезок $[\alpha_1, \alpha_2]$ не содержит значения $\alpha = 0$. Тогда из оценки $\frac{|\alpha|}{1+\alpha^2x^2} \leqslant \frac{M}{1+m^2x^2}$, где $M = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$, $m = \min(|\alpha_1|, |\alpha_2|) > 0$, и признака Вейерштрасса следует, что данный интеграл сходится равномерно.

Пусть теперь $\alpha_1\alpha_2 < 0$. Выполнив в интеграле

$$I(B, \alpha) = \left|\int_B^{+\infty} \frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2}\right| (B > 0)$$

замену $y = |\alpha|\,x$ $\quad (x > 0,\ \alpha \neq 0)$, получим:

$$I(B, \alpha) = \int_{|\alpha|B}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}.$$

Отсюда видим, что $\forall B > 0$ и любого ε $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}\right)$ $\exists\alpha$ такое, что

$$\int_{|\alpha|B}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} > \varepsilon.$$

Действительно, такое α существует и его можно определить из неравенства $|\alpha|\,B \leqslant 1$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно.

58. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$?

Решение. Нет, не законен, так как дает в результате нуль. В действительности же предел равен единице. Это обстоятельство можно объяснить неравномерной сходимостью данного интеграла (см. пример 37) при $\alpha = 0$ (см. определение в предыдущем примере).

59. Функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $(0, +\infty)$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Оценим разность

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{B} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)\,dx + \int_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, замечая, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} (e^{-\alpha x}-1) f(x)\,dx$, согласно примеру 34, сходится равномерно при $\alpha \geqslant 0$ (здесь функция $e^{-\alpha x} - 1$ ограничена единицей и монотонна по $x \geqslant 0$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$, по условию, сходится), при достаточно большом фиксированном $B(\varepsilon)$ можем написать:

$$\left|\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

(независимо от α). По данному ε и фиксированному $B(\varepsilon)$ найдем α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{0}^{B}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3)$$

Имеем:

$$\left|\int\limits_{0}^{B}(e^{-\alpha x}-1)f(x)\,dx\right|\leqslant(1-e^{-\alpha B})MB<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{B}\ln\frac{2MB}{2MB-\varepsilon}\quad(0<\varepsilon<2MB), \qquad (4)$$

где $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant B}|f(x)|\neq 0$ (при $M=0$ теорема тривиальна).

Тогда из (1) с учетом неравенств (2), (3) находим

$$\left|\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx-\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

как только B достаточно велико, а число α удовлетворяет условию (4). Формула доказана.

60. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0,$$

если $f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $(0,+\infty)$.

Доказательство. Данный интеграл, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно относительно параметра n. Поэтому для заданного $\varepsilon>0$ $\exists A(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\int\limits_{A}^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Промежуток $[0, A]$ разобъем на k частей точками $0=x_0<x_1<x_2<$ $<\dots<x_{k+1}=A$ и представим интеграл $\int\limits_0^A f(x)\sin nx\,dx$ в виде

$$\int\limits_{0}^{A}f(x)\sin nx\,dx=\sum_{l=0}^{k}\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}}(f(x)-m_l)\sin nx\,dx+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{k}m_l\int\limits_{x_l}^{x_{l+1}}\sin nx\,dx,\quad m_l=\inf_{x_l\leqslant x\leqslant x_{l+1}}\{f(x)\}. \qquad (2)$$

Поскольку $f(x) - m_l \leqslant \omega_l$, где ω_l — колебание функции $f(x)$ на промежутке $[x_l, x_{l+1}]$, то из (2) получаем оценку:

$$\left|\sum_{l=0}^{k} \int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x) \sin nx\, dx\right| \leqslant \sum_{l=0}^{k} \omega_l \Delta x_l + \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{k} |m_l|. \tag{3}$$

В силу интегрируемости функции $f(x)$, для ранее заданного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение сегмента $[0, A]$, для которого

$$\sum_{l=0}^{k} \omega_l \Delta x_l < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

При выбранном разбиении числа m_l фиксированы; поэтому, если возьмем $n > \frac{6}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{k} |m_l|$, то из (3), (4) и (1) получим окончательно: $\left|\int_0^{+\infty} f(x) \times \sin nx\, dx\right| < \varepsilon$.

61. Доказать, что если 1) $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ в каждом интервале (a, b); 2) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

Доказательство. Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\, dx = \int_a^{b} (f(x, y) - f(x, y_0))\, dx +$$
$$+ \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx - \int_b^{+\infty} f(x, y_0)\, dx \quad (b > a). \tag{1}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 2), при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} F(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\int_b^{+\infty} f(x, y_0)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

а в силу условия 1), — оценка

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \tag{3}$$

для всех $x \in (a, b)$ одновременно, как только разность $|y - y_0|$ достаточно мала.

Таким образом, из (1) с учетом оценок (2) и (3) получаем:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\,dx\right| < \varepsilon$$

при достаточной близости y к y_0.

62. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)dx.$

Решение. Пользуемся утверждением предыдущего примера. Здесь $f(x, n) = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Кроме того, функциональная последовательность $f(x, n)$ в каждом интервале $(0, b)$ сходится равномерно к e^{-x^2} (см. пример 129, гл. 1). Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}. \tag{1}$$

Применяя к последнему интегралу подстановку $x = \sqrt{n}\operatorname{ctg} z$, приходим к интегралу

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} z\,dz = \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

(см. пример 98, гл. IV, ч. 1).

Из формулы Валлиса

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

следует, что $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{2n} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ при $n\to\infty$. Используя это соотношение, из (1) и (2) находим:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

63. Пусть $f(x)$ — непрерывна и ограничена на $[0, +\infty)$. Доказать, что

$$I = \lim_{y\to\pm 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx = \pm f(0).$$

Доказательство. Положим $x = ty$ $(t>0,\ y>0)$. Тогда

$$I = \lim_{y\to+0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt.$$

Так как $\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \leqslant \frac{M}{t^2+1}$, где $|f(ty)| \leqslant M = \text{const}$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (сходится), а в силу непрерывности функции $f(x)$ $\frac{f(ty)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \to +0$ в каждом конечном интервале $t \in (a, b)$, то, согласно примеру 61, получаем:

$$\lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \lim_{y\to+0} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = f(0).$$

В силу нечетности интеграла по переменной y, имеем:

$$\lim_{y\to-0} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ty)\,dt}{t^2+1} = -f(0).$$

64. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$.

Решение. Представив данный интеграл в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{x^n+1} + \int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{dx}{x^n+1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1},$$

оценим разность:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} - 1\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{x^n+1} - 1\right| + \int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{dx}{x^n+1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}, \qquad (1)$$

где $0 < \delta < 1$.

Нетрудно получить следующие оценки:

$$1 - \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{x^n+1} < 1 - \int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{(1-\delta)^n+1} = \frac{(1-\delta)^n+\delta}{1+(1-\delta)^n} < (1-\delta)^n + \delta, \qquad (2)$$

$$\int\limits_{1-\delta}^{1} \frac{dx}{x^n+1} \leqslant \delta, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}. \qquad (3)$$

Учитывая оценки (2), (3), из неравенства (1) получаем:

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} - 1\right| < 2\delta + \frac{1}{n-1} + (1-\delta)^n. \qquad (4)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, выбирая номер n и число δ таким образом, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\frac{1}{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}$, $1 - \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{n}} <$

$< \delta < \frac{\varepsilon}{6}$, из (4) находим:

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1.$

65. Доказать, что интеграл $F(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx$ является непрерывной функцией параметра a.

Доказательство. Выполняя замену $x = a + t$, получаем:

$$F(a) = \int_{-a}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_0^a e^{-t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Так как функция e^{-t^2} непрерывна (как элементарная), то функция $\int\limits_0^a e^{-t^2}\,dt$ также непрерывна. А тогда и функция $F(a)$ непрерывна, что и требовалось доказать.

66. Показать, что $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx$ есть непрерывная функция в интервале $-\infty < \alpha < 2$.

Решение. Выполняя замену $x = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$, получаем:

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}\,dt.$$

Пусть $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда, в силу оценки $\frac{|\sin\alpha t|}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ и признака Вейерштрасса, рассматриваемый интеграл сходится равномерно. Если учесть еще, что функция $\frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}$ при $-\infty < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $t \geqslant 1$ непрерывна, то можно утверждать, что функция $F(\alpha)$ непрерывна в указанном промежутке.

Пусть $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $\left|\int\limits_1^x \sin\alpha t\,dt\right| < \frac{2}{\alpha} \leqslant 4$; функция $\frac{1}{t^{2-\alpha}}$ при фиксированном α монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$. Это стремление, как показывает оценка $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \leqslant \frac{1}{t^\varepsilon}$, равномерно по α. Поэтому, в соответствии с утверждением примера 35, данный интеграл сходится равномерно. Принимая еще во внимание непрерывность подынтегральной функции при $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2-\varepsilon$, устанавливаем, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на рассматриваемом сегменте.

Таким образом, функция $F(\alpha)$ непрерывна при $-\infty < \alpha \leqslant 2-\varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то требуемое доказано.

67. Определить точки разрыва функции

$$F(a)=\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin((1-a^2)x)}{x}\,dx.$$

Решение. Полагая $t=(1-a^2)x$ $(a \neq \pm 1)$, получаем:

$$F(a)=\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \cdot \operatorname{sgn}(1-a^2).$$

Очевидно, это выражение справедливо и при $|a|=1$. Точки $a=1$ и $a=-1$ являются точками разрыва первого рода функции $F(a)$.

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

68. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^{\alpha}}$ при $\alpha > 2$.

Решение. Можно показать (см. аналогичный пример 41), что этот интеграл сходится неравномерно в указанной области (сходимость его вытекает из признака сравнения). Поэтому о непрерывности функции $F(\alpha)$ сказать пока ничего нельзя.

Пусть $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда при $x \geqslant 1$

$$\frac{x}{2+x^{\alpha}} \leqslant \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = O^*\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right) \quad \text{при } x \to +\infty,$$

и, на основании признака Вейерштрасса, интеграл

$$\Phi(\alpha)=\int_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^{\alpha}}$$

сходится равномерно. Учитывая еще непрерывность подынтегральной функции, согласно п. 5°, устанавливаем непрерывность функции $\Phi(\alpha)$ при $\alpha \geqslant 2+\varepsilon$, т. е. при $\alpha > 2$.

Принимая во внимание, что интеграл

$$\Psi(\alpha)=\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{2+x^{\alpha}},$$

в силу п. 1°, § 1, непрерывен при $\alpha > 2$, приходим к выводу, что функция $F(\alpha)=\Psi(\alpha)+\Phi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$.

69. $F(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ при $\alpha > 0$.

Решение. При $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$ данный интеграл, согласно примеру 35, сходится равномерно. В силу п. 5°, функция $F(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, т. е. при $\alpha > 0$.

70. $F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx \quad (0<\alpha<2).$

Решение. Пусть $0<\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon<2$. Тогда, разбивая данный интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получаем:

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx<\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^{\alpha-1}(\pi-x)^{\alpha}}+\int\limits_1^{\pi-1}\frac{dx}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}+$$

$$+\int\limits_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha-1}}\leqslant\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}+\pi-2+\int\limits_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}.$$

Так как последние интегралы, в силу признака сравнения, являются сходящимися, то, согласно признаку Вейерштрасса, исходный интеграл равномерно сходится при $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon$. Учитывая еще непрерывность функции

$$f(x,\ \alpha)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}$$

в области $0<x<\pi$, $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon$, в соответствии с п. 5°, заключаем, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на каждом отрезке $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon$. Следовательно, она непрерывна в интервале $0<\alpha<2$.

71. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{|\sin x|^{\alpha}}$ при $0<\alpha<1$.

Решение. Замена переменной x по формуле $x=k\pi+t$ в интеграле под знаком суммы

$$F(\alpha)=\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{e^{-x}\,dx}{|\sin x|^{\alpha}}$$

преобразует данный интеграл к такому:

$$F(\alpha)=\frac{1}{1-e^{-\pi}}\int\limits_0^{\pi}\frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha}t}.$$

Поскольку

$$\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\leqslant\left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\alpha}\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon}\frac{1}{t^{1-\varepsilon}},\quad 0<t\leqslant 1,$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл

$$\int\limits_0^{1}\frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha}t}$$

равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$.

Аналогично можно показать, что интеграл

$$\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{e^{-t}\,dt}{\sin^{\alpha} t}$$

также равномерно сходится на этом отрезке. Так как, кроме того, функция $\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}$ непрерывна в области $0 < t < \pi$, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то, согласно п. 5°, функция $F(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, эта функция непрерывна при $\alpha \in (0, 1)$.

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

1°. Дифференцирование по параметру. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция $f'_y(x, y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$; 2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится; 3) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$$

на отрезке $[y_1, y_2]$.

Если функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны и ограничены в указанной области, а интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\varphi(x)\,dx$ представляет собой дифференцируемую функцию на отрезке $[y_1, y_2]$ и

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,\varphi(x)\,dx.$$

2°. Интегрирование по параметру. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ равномерно сходится при $y \in [y_1, y_2]$, то справедлива формула

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy.$$

Эта формула справедлива также и в том случае, когда $y_1 = -\infty$, $y_2 = +\infty$, если $f(x, y) \geqslant 0$, интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$ непрерывны и один из повторных интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx \text{ или } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

сходится.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y < +\infty$, а интегралы

$$\int\limits_{c}^{+\infty} f(x, y)\,dx \text{ и } \int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

сходятся равномерно: первый — на каждом сегменте $[a, A]$, а второй — на каждом сегменте $[c, C]$ и если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_{a}^{+\infty} dx \int\limits_{c}^{+\infty} |f(x, y)|\,dy, \quad \int\limits_{c}^{+\infty} dy \int\limits_{a}^{+\infty} |f(x, y)|\,dx$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int\limits_{a}^{+\infty} dx \int\limits_{c}^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad \int\limits_{c}^{+\infty} dy \int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx.$$

Если $f(x, y)$ непрерывна и ограничена при $a \leqslant x < +\infty$, $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$ сходится, то

$$\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\,dy.$$

72. Пользуясь формулой $\int\limits_{0}^{1} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ $(n > 0)$, вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{1} x^{n-1} \ln^m x\,dx,$$

где m — натуральное число.

Решение. Формально дифференцируя m раз по параметру n обе части указанной формулы, получаем:

$$I = \int\limits_{0}^{1} x^{n-1} \ln^m x\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{(m)} = (-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}.$$

Покажем, что m-кратное дифференцирование под знаком интеграла законно. Для этого, полагая $x = \frac{1}{t}$ $(t > 0)$, преобразуем данные в условии интегралы к таким:

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad I = (-1)^m \int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\,dt.$$

Так как функции t^{-n-1} и $t^{-n-1}\ln^m t$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leqslant \leqslant n < +\infty, 1 \leqslant t < +\infty$ и интеграл $\int_0^1 x^{n-1}\,dx$ сходится, то, в силу п. 1°, остается показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\,dt$ сходится равномерно на полуинтервале $0 < \varepsilon \leqslant n < +\infty$. Действительно, поскольку

$$\frac{|\ln^m t|}{t^{n+1}} \leqslant \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leqslant \left(\frac{2m}{e^{\varepsilon}}\right)^m \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл I равномерно сходится на указанном полуинтервале. Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, согласно п. 1°, дифференцирование по параметру $n \geqslant \varepsilon$ справедливо, т. е. справедливо при $n > 0$.

73. Пользуясь формулой $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a > 0)$, вычислить интеграл

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}},$$

где n — натуральное число.

Решение. Формально дифференцируя n раз по a левую и правую части данной в условии формулы, имеем:

$$(-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\,(2n-1)!!}{(2n)!!\,a^n\,2\sqrt{a}}\,\pi,$$

откуда следует значение интеграла I_{n+1}.

Законность n-кратного дифференцирования вытекает из п. 1°. Действительно, функции $\frac{1}{x^2 + a}$ и $\frac{1}{(x^2 + a)^{n+1}}$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leqslant \leqslant a < +\infty, 0 \leqslant x < +\infty$. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a}$ сходится при $a > 0$. Интеграл I_{n+1} сходится равномерно по признаку Вейерштрасса $\left(\frac{1}{(x^2 + a)^{n+1}} \leqslant \leqslant \frac{1}{(x^2 + \varepsilon)^{n+1}} \text{ при } x \geqslant 0\right)$ на полуинтервале $\varepsilon \leqslant a < +\infty$. Поэтому на этом полуинтервале, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и на интервале $0 < a < +\infty$ дифференцирование законно.

74. Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

Доказательство. Положим $\alpha x = t$. Тогда $I(\alpha) = \text{const}$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ имеем $I'(\alpha) = 0$. Если же формально продифференцировать по α под знаком интеграла, то получим расходящийся интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x \, dx$.

75. Показать, что функция $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$ непрерывно дифференцируема в области $-\infty < \alpha < +\infty$.

Решение. Полагая $x + \alpha = t$, получаем:

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos (t - \alpha)}{1 + t^2} dt - \int\limits_0^{\alpha} \frac{\cos (t - \alpha)}{1 + t^2} dt. \tag{1}$$

Формально взяв производную, будем иметь:

$$F'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin (t - \alpha)}{1 + t^2} dt - \frac{1}{1 + \alpha^2} - \int\limits_0^{\alpha} \frac{\sin (t - \alpha)}{1 + t^2} dt. \tag{2}$$

Так как функция $f(t, \alpha) = \frac{\sin (t - \alpha)}{1 + t^2}$, $0 \leqslant t < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$ непрерывна и первый интеграл в (1) также, как и первый интеграл во (2), по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно при $|\alpha| < \infty$, то дифференцирование по параметру под знаком интеграла законно. В силу этих же причин, производная $F'(\alpha)$ — непрерывная функция при $-\infty < \alpha < +\infty$.

76. Доказать формулу Фруллани

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, \ b > 0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ имеет смысл при любом $A > 0$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx$. Тогда

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int\limits_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)\, dt}{t} = F(+\infty) - F(Aa),$$

а также

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = F(+\infty) - F(Ab).$$

Следовательно,

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = F(Ab) - F(Aa) = \int\limits_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем и устремляя A к нулю, с учетом непрерывности функции $f(x)$ получаем:

$$\lim_{A\to+0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{A\to+0}\left(f(\xi)\ln\frac{b}{a}\right) = f(0)\ln\frac{b}{a},$$

где $Aa \leqslant \xi \leqslant Ab$ $(a < b)$, что и требовалось доказать.

Примечание. Может случиться, что интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ расходится, но существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$, а также сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx$. Тогда, вводя функцию $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$ и повторяя предыдущие рассуждения и выкладки (с функцией $f^*(x)$), приходим к формуле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f^*(0)\ln\frac{b}{a} = (f(0) - f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

Вычислить интегралы:

77. $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Решение. Пусть $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $\beta \geqslant \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad f'_\alpha(x, \alpha) = -xe^{-\alpha x^2}$$

непрерывны в области $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $x \geqslant 0$; интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx,$$

в силу признака сравнения, сходится, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx$, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно (здесь $xe^{-\varepsilon x^2}$ — мажорантная функция) на полуинтервале $\alpha \geqslant \varepsilon$. Поэтому дифференцирование по α под знаком интеграла законно. Имеем:

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx = -\frac{1}{2\alpha} \quad (\alpha \geqslant \varepsilon > 0).$$

Отсюда находим: $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi$. Очевидно, $I(\beta) = 0$, поэтому $\varphi = \frac{1}{2}\ln\beta$ $(\beta \geqslant \varepsilon > 0)$.

Итак, $I = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$ $(\alpha \geqslant \varepsilon > 0,\ \beta \geqslant \varepsilon > 0)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот ответ справедлив при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

78. $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, легко показать, что дифференцирование по α законно (полагаем сначала, что $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $\beta \geqslant \varepsilon > 0$). Тогда имеем:

$$I'(\alpha) = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-2\alpha x}}{x}\,dx.$$

Применяя формулу Фруллани (см. пример 76), находим: $I'(\alpha) = 2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. Отсюда интегрированием по α получаем:

$$I(\alpha) = -2(\alpha+\beta)(\ln(\alpha+\beta) - 1) + 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) + \varphi.$$

Из условия $I(\beta) = 0$ следует, что $\varphi = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$. Поэтому

$$I = \ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}} \quad (\alpha \geqslant \varepsilon > 0,\ \beta \geqslant \varepsilon > 0).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

79. $I(m) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Решение. Дифференцируя по параметру m, получаем:

$$I'_m = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos mx\,dx. \tag{1}$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как функции

$$f(m, x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad f'_m(m, x) = (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos mx$$

непрерывны в области $-\infty < m < +\infty$, $0 \leqslant x < +\infty$; интеграл (1), в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно, а данный интеграл, очевидно, сходится.

Выполняя интегрирование в (1), находим: $I'_m = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + m^2}$, откуда $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{m}{\beta} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно, $I(m) = \operatorname{arctg}\frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + m^2}$.

80. $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

Решение. Пусть $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1)$. Тогда при фиксированном ε функции

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}, & x \neq 0; \\ -\alpha^2, & x = 0; \end{cases} \quad f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

непрерывны в области $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$, $|x| < 1$. Интеграл $I(\alpha)$ сходится по признаку сравнения, а интеграл

$$I'(\alpha) = -2\int\limits_0^1 \frac{\alpha\, dx}{(1 - \alpha^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \tag{1}$$

в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно $\left(|f'_\alpha(x, \alpha)| \leqslant \frac{2}{(1 - (1 - \varepsilon)^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}}\right)$ на сегменте $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$. Следовательно, дифференцирование по параметру α под знаком интеграла законно при $|\alpha| \leqslant 1 - \varepsilon$.

Полагая в (1) $x = \sin t$, получаем:

$$I'(\alpha) = -2\alpha\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - \alpha^2 \sin^2 t} = -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Отсюда находим: $I(\alpha) = \pi\sqrt{1 - \alpha^2} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = -\pi$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \pi\left(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1\right). \tag{2}$$

В силу произвольности ε, заключаем, что этот ответ пригоден при $|\alpha| < 1$.

Нетрудно видеть, что функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в области $|\alpha| \leqslant 1$, $|x| < 1$. В силу признака Вейерштрасса, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на сегменте $|\alpha| \leqslant 1 \left(|f(x, \alpha)| \leqslant \frac{|\ln(1 - x^2)|}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\right)$. Следовательно, функция $I(\alpha)$ непрерывна при $|\alpha| \leqslant 1$. Поэтому $I(\pm 1) = \lim\limits_{|\alpha| \to 1 - 0} I(\alpha)$, т. е. формула (2) справедлива и при $\alpha = \pm 1$.

81. $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

Решение. Аналогично предыдущему (см. пример 80) получаем:

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), & 0<|\alpha|<1; \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $I(\alpha) = -\pi \ln\left(1+\sqrt{1-\alpha^2}\right) + C$ $(|\alpha|<1)$. Поскольку $I(0)=0$, то $C=\pi\ln 2$. Следовательно, $I(\alpha) = -\pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

В силу непрерывности исходного интеграла при $|\alpha| \leqslant 1$, это выражение справедливо также при $|\alpha| \leqslant 1$.

82. $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

Решение. Функции

$$f(x, \alpha) = \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

непрерывны в области $1 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x\,dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

равномерно сходятся по признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{|\operatorname{arctg} \alpha x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

и соответствующие интегралы от мажорирующих функций сходятся. Следовательно, функции $I(\alpha)$ и $I'(\alpha)$ непрерывны при всех α и дифференцирование под знаком данного интеграла возможно. Имеем:

$$I'(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}.$$

Полагая здесь $x = \operatorname{ch} t$, получаем: $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}\right) + C$ $(\alpha \geqslant 0)$. Поскольку $I(0)=0$, то $C = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$ $(\alpha \geqslant 0)$.

Аналогично при $\alpha \leqslant 0$ получаем: $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. Окончательно имеем: $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right)\operatorname{sgn}\alpha$ $(-\infty < \alpha < +\infty)$.

83. $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\,dx.$

Решение. Пусть $\beta \neq 0$. Тогда функции

$$f(x, \alpha) = \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}, \quad f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}$$

непрерывны при $0 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно, в силу признака Вейерштрасса, на любом сегменте $|\alpha| \leqslant A \left(\frac{|\ln(\alpha^2 + x^2)|}{\beta^2 + x^2} \leqslant \frac{\varphi(x)}{\beta^2 + x^2},\ \varphi(x) = \max\{|\ln(A^2 + x^2)|, |\ln x^2|\}\right)$.

Интеграл

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha\, dx}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \tag{1}$$

также сходится равномерно, но только на сегменте $0 < \varepsilon \leqslant |\alpha| \leqslant A$. Действительно, в этом случае

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \leqslant \frac{2A}{(\varepsilon^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \equiv \psi(x)$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$ сходится.

Таким образом, функция $I(\alpha)$ непрерывна при любом $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, а функция $I'(\alpha)$ непрерывна при $|\alpha| > 0$.

Выполняя интегрирование в (1), получаем: $I'(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{|\alpha||\beta|(|\alpha| + |\beta|)}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) + C$.

Поскольку

$$I(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2}\, dx = \frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{\ln|\beta|\, dt}{1 + t^2} + \frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t\, dt}{1 + t^2} =$$

$$= \frac{2\ln|\beta|}{|\beta|}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi \frac{\ln|\beta|}{|\beta|},$$

то $C = 0$. Окончательно имеем: $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$ $(\beta \neq 0)$.

Примечание. Если $\beta = 0$, то данный интеграл сходится только при $|\alpha| = 1$. В этом случае интегрированием по частям легко установить, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}\, dx = \pi$.

84. $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\, dx.$

Решение. Здесь подынтегральная функция $f(x, \alpha, \beta)$ непрерывна в области $0 \leqslant x < +\infty$ при конечных α, β (при $x = 0$ полагаем $f(0, \alpha, \beta) = \alpha\beta$), и данный интеграл, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно $\left(\text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1\ |f(x, \alpha, \beta)| \leqslant |\alpha\beta|, \text{ а при } x \geqslant 1 \text{ имеем: } |f(x, \alpha, \beta)| \leqslant \frac{\pi^2}{4x^2}\right)$. Следовательно, функция $I(\alpha, \beta)$ непрерывна при любых α и β.

Далее, пусть $0 < \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant A < +\infty$ и $0 < \delta \leqslant \beta \leqslant B < +\infty$. Тогда, как нетрудно проверить, справедливы формулы

$$I'_{\alpha}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \beta x \, dx}{x(1+\alpha^2x^2)}, \quad I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)},$$

откуда находим: $I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}$. Интегрируя по β, а затем по α, получаем:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)(\ln(\alpha+\beta) - 1) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

где $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ — функции, подлежащие определению. В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $A > 0$, $B > 0$, последнее соотношение справедливо при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Для определения функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\beta)$ воспользуемся непрерывностью функции $I(\alpha, \beta)$ и тем очевидным фактом, что $I(0, \beta) = I(\alpha, 0) = I(0, 0) = 0$. Тогда получим:

$$\varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \frac{\pi}{2}(\beta(1-\ln\beta) + \alpha(1-\ln\alpha)).$$

Таким образом, учитывая равенство $I(\alpha, \beta) = I(|\alpha|, |\beta|)\operatorname{sgn}(\alpha\beta)$, окончательно можем написать:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\alpha\beta)\ln\frac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|}\,|\beta|^{|\beta|}}, & \text{если } \alpha\beta \neq 0; \\ 0, & \text{если } \alpha\beta = 0. \end{cases}$$

85. $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx.$

Решение. Аналогично предыдущему (см. пример 84) придем к интегралу

$$I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta\,dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)} \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0).$$

Интегрируя правильную дробь, получаем: $I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\pi$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. Интегрируя последовательно по α и по β, находим:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{3}(\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta - (\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

где φ и ψ — пока неопределенные функции. Поскольку $I(0, \beta) = I(\alpha, 0) = I(0, 0) = 0$, то, в силу непрерывности функции $I(\alpha, \beta)$,

$$\varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \frac{2\pi}{3}(\alpha^3\ln\alpha + \beta^3\ln\beta).$$

Учитывая, кроме этого, что $I(\alpha,\ \beta)=I(|\alpha|,\ |\beta|)$, окончательно имеем:

$$I(\alpha,\ \beta)=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}(|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha|^3\ln|\alpha|+|\beta|^3\ln|\beta|- \\ \quad -(|\alpha|^3+|\beta|^3)\ln(|\alpha|+|\beta|)), & \text{если } \alpha\beta\neq 0; \\ 0, & \text{если } \alpha\beta=0.\end{cases}$$

При решении следующих примеров считается известным значение интеграла Эйлера—Пуассона: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

86. $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(a_1x^2+2b_1x+c_1)\,e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx\ \ (a>0)$.

Решение. Приводя трехчлен $ax^2+2bx+c$ к виду $\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+$ $+c-\frac{b^2}{a}$ и полагая $\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}=t$, получаем:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(At^2+2Bt+C)\,e^{-t^2}\,dt,$$

где $A=\frac{a_1}{a\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$, $B=\frac{b_1a-a_1b}{a^2}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$, $C=\frac{a^2c_1-2abb_1+a_1b^2}{a^2\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi},\quad 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}\,dt=0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}te^{-t^2}\,d(t^2)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то $I=\sqrt{\pi}\left(\frac{A}{2}+C\right)=\frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,((a+2b^2)\,a_1-4abb_1+2a^2c_1)\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$.

87. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx\,dx\ \ (a>0)$.

Решение. Имеем:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}\operatorname{ch}bx\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2+bx}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2-bx}\,dx.$$

Замечая, что оба эти интеграла можно найти как частные случаи общего интеграла из предыдущего примера, получаем: $I=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}}$.

88. $I(a)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx$.

Решение. Представляя данный интеграл в виде

$$\left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx$$

и производя замену $y=\frac{1}{x}$ в первом интеграле, получаем:

$$I(a)=\int_1^{+\infty} e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}+\int_1^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\,dy.$$

Так как подынтегральные функции $f_1(a, y)$ и $f_2(a, y)$ здесь непрерывны при всех a и $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно ($|f_1| \leqslant \frac{1}{y^2}$, $|f_2| \leqslant e^{-y^2}$ и интегралы $\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$ сходятся), то функция $I(a)$ непрерывна при всех a.

Пусть $|a| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ непрерывны в области $|a| \geqslant \varepsilon$, $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно на каждом сегменте $A \geqslant |a| \geqslant \varepsilon$, то функция $I'(a)$ непрерывна при $|a| > 0$. Следовательно,

$$\frac{dI}{d|a|}=-2|a|\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\frac{dx}{x^2}. \tag{1}$$

С другой стороны, положив в исходном интеграле $x=\frac{|a|}{y}$ $(y>0)$, можем написать

$$I=|a|\int_0^{+\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\frac{dy}{y^2}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение $I'+2I=0$, решая которое, находим: $I=Ce^{-2|a|}$ $(|a|>0)$.

Но функция $I(a)$ непрерывна, поэтому должно быть $I(0)=\lim\limits_{a\to 0}(Ce^{-2|a|})$. Учитывая, что $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, отсюда находим $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Итак, окончательно получаем: $I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$ $(-\infty<a<+\infty)$.

89. $I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$ $(a>0)$.

Решение. Функции $f(b, x)=e^{-ax^2}\cos bx$ и $f'_b(b, x)$ непрерывны в области $0 \leqslant x < +\infty$, $-\infty < b < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра b. Следовательно, функции $I(b)$ и $I'(b)$ непрерывны при всех b и

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\,dx = \frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty} -$$

$$-\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}I(b).$$

Отсюда $I'(b) + \frac{b}{2a}I(b) = 0$. Решая это уравнение, находим: $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. Поскольку $I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, то $I(b) = \frac{1}{2}\times$ $\times\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ $(a > 0)$.

90. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$ (n — натуральное число).

Решение. Дифференцируя $2n$ раз интеграл из предыдущего примера и полагая $a = 1$, получаем:

$$\frac{d^{2n}}{db^{2n}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = (-1)^n 2^{2n}\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}\right)^{(2n)},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = (-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}(e^{-b^2})^{(2n)}.$$

91. Исходя из интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha \geqslant 0),$$

вычислить интеграл Дирихле

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx.$$

Решение. Так как функция

$$f(\alpha, x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin\beta x}{x}, & x \neq 0; \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна при каждом конечном $\alpha \geqslant 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(\alpha, x)\,dx$, в силу примера 34, сходится равномерно по $\alpha \geqslant 0$, то функция $I(\alpha, \beta)$ непрерывна при $\alpha \geqslant 0$ и поэтому $I(+0, \beta) = D(\beta)$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда функция $f'_\beta(\alpha, x) = e^{-\alpha x}\cos\beta x$ $(x \geqslant 0, -\infty < < \beta < +\infty)$ непрерывна и интеграл

$$I'_\beta = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx, \tag{1}$$

в силу мажорантного признака, сходится равномерно относительно параметра β $(|e^{-\alpha x}\cos\beta x| \leqslant e^{-\alpha x})$. Следовательно, дифференцирование по β законно, и после выполнения интегрирования в (1) получаем: $I'_\beta = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$ $(\alpha > 0)$. Отсюда находим: $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$. Так как $I(\alpha, 0) = 0$, то $C(\alpha) \equiv 0$ и $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$D(\beta) = I(+0, \beta) = \lim_{\alpha\to+0}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

Используя интеграл Дирихле и формулу Фруллани, найти величины интегралов:

92. $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,dx \quad (\alpha > 0).$

Решение. При $\alpha \geqslant \varepsilon > 0$, $|\beta| \geqslant \varepsilon > 0$ и $0 \leqslant x < +\infty$ функции

$$f(\alpha, \beta, x) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_\alpha = -e^{-\alpha x^2};$$

$$f'_\beta = \begin{cases} \frac{\sin\beta x}{x}, & x \neq 0; \\ \beta, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывны. Данный интеграл, а также интегралы $I'_\alpha = \int_0^{+\infty} f'_\alpha\,dx$, $I'_\beta = \int_0^{+\infty} f'_\beta\,dx$ сходятся равномерно (первый — в силу признака Вейерштрасса, второй — в силу примера 35). Следовательно, функции $I(\alpha, \beta)$, $I'_\alpha(\alpha, \beta)$, $I'_\beta(\alpha, \beta)$ непрерывны и существует дифференциал

$$dI = \left(-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx\right)d\alpha + \left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx\right)d\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,d\alpha + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta\,d\beta$$

(см. интегралы Дирихле и Эйлера — Пуассона), откуда интегрированием находим:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C. \tag{1}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $|\beta| > 0$. Покажем, что он справедлив также и при $\alpha \geqslant 0$, $-\infty < \beta < +\infty$.

Разбив исходный интеграл на два интеграла:

$$I(\alpha, \beta) = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) f(\alpha, \beta, x)\, dx,$$

видим, что первый интеграл — непрерывная функция α и β при любых α и β. Второй интеграл равномерно сходится при $\alpha \geqslant 0$ и любом β, так как $|f(\alpha, \beta, x)| \leqslant \frac{2}{x^2}$. Кроме того, функция $f(\alpha, \beta, x)$ непрерывна, поэтому и второй интеграл — также непрерывная функция при $\alpha \geqslant 0$, β — любое.

Используя непрерывность функции $I(\alpha, \beta)$, находим постоянную C из соотношения

$$I(0, 0) = \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +0}} \left(\frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C\right) = 0.$$

Таким образом, из (1) окончательно имеем: $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha}$ ($\alpha \geqslant 0$, β — любое).

93. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx.$

Решение. Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x}\, dx$$

и пользуясь интегралом Дирихле, получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}(\operatorname{sgn}(\alpha + \beta) + \operatorname{sgn}(\alpha - \beta)).$$

94. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx.$

Решение. Пользуясь формулой Фруллани, находим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos|\alpha - \beta|x - \cos|\alpha + \beta|x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right| \quad (\alpha \neq \pm\beta).$$

95. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx.$

Решение. Используя тождество $\sin^3 \alpha x = \frac{3}{4}\sin \alpha x - \frac{1}{4}\sin 3\alpha x$, а также интеграл Дирихле, имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x}\, dx = \frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn}\alpha - \frac{\pi}{8}\operatorname{sgn} 3\alpha = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

96. $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2 dx.$

Решение. Функция $f(x, \alpha)=\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2$ при $x\neq 0$ и $f(0, \alpha)=\alpha^2$ непрерывна в области $-\infty<\alpha<+\infty$, $0\leqslant x<+\infty$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$ равномерно сходится по мажорантному признаку; интеграл $\int\limits_0^1 f(x, \alpha)\,dx$ — непрерывная функция. А тогда и функция $I(\alpha)$ также непрерывна при всех α.

Далее, пусть $|\alpha|\geqslant\varepsilon>0$. Тогда интеграл

$$I'(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x}\,dx \tag{1}$$

равномерно сходится в силу примера 35. Кроме того, поскольку функция $\frac{\sin 2\alpha x}{x}$ при $x\neq 0$ непрерывна, то дифференцирование здесь законно и из (1) имеем:

$$I'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha. \tag{2}$$

Так как число $\varepsilon>0$ может быть произвольно малым, то формула (2) справедлива при всех $\alpha\neq 0$. Интегрируя во (2), получаем: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|+C$, $\alpha\neq 0$.

Из непрерывности функции $I(\alpha)$, показанной выше, следует: $I(0)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\pi}{2}|\alpha|+C\right)=C$. С другой стороны, $I(0)=0$, поэтому $C=0$. Таким образом, окончательно можем написать: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}|\alpha|$, $-\infty<\alpha<+\infty$.

97. $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx.$

Решение. Обосновывая дифференцирование по параметру α аналогично тому, как это было проделано в предыдущем примере, и пользуясь интегралом Дирихле, имеем:

$$I'(\alpha)=\frac{3}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2\alpha x}{x^2}\cos\alpha x\,dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos 3\alpha x}{x^2}\,dx,$$

$$I''(\alpha)=-\frac{3}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx+\frac{9}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 3\alpha x}{x}\,dx=\frac{3\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha\quad(\alpha\neq 0).$$

Интегрируя дважды по α и учитывая, что $I(0)=I'(0)=0$, находим: $I(\alpha)=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$, $-\infty<\alpha<+\infty$.

98. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx$.

Решение. Вводя параметр α по формуле $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2}\, dx$ и замечая, что дифференцирование по α под знаком этого интеграла возможно (см. аналогичный пример 96), имеем:

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{x}\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 4\alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

Отсюда интегрированием по α получаем: $I(\alpha) = \frac{\pi}{4} |\alpha| + C \quad (\alpha \neq 0)$. Пользуясь непрерывностью функции $I(\alpha)$ и тем, что $I(0) = 0$, находим $C = 0$. Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx = I(1) = \frac{\pi}{4}$.

99. $I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx$.

Решение. Преобразовывая разность $\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x$ к виду $\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x = \frac{1}{4}((1 - \cos 2\alpha x)^2 - (1 - \cos 2\beta x)^2) = \frac{1}{4}(f(|\beta| x) - f(|\alpha| x))$, где $f(x) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x$, можем написать:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(|\beta| x) - f(|\alpha| x)}{x}\, dx.$$

Теперь применяем формулу Фруллани, так как функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$, по признаку Дирихле, сходится при $A > 0$. Следовательно, по указанной формуле, имеем: $I(\alpha, \beta) = \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$.

100. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\, dx$.

Решение. После замены переменной x по формуле $x = \sqrt{t}\ (t > 0)$ получаем интеграл Дирихле:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

101. $I(k) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, dx \quad (k \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$.

Решение. Функции

$$f(k, x) = \begin{cases} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_k(k, x),\ f''_k(k, x)$$

непрерывны при $k \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$. Интеграл

$$I(k) = \int_0^1 f(k, x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(k, x)\,dx$$

сходится равномерно по мажорантному признаку $\left(|f(k, x)| \leqslant \frac{1}{x^2}\right)$ относительно $k \geqslant 0$, а интегралы

$$I'(k) = -\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}\,dx,\quad I''_{k^2} = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$$

сходятся равномерно при всех $k \geqslant \varepsilon > 0$. Следовательно, дифференцирование по параметру $k > 0$ законно.

Вычисляя последний интеграл, находим:

$$I''_{k^2} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{(\alpha-\beta)^2+k^2} - \frac{1}{(\alpha+\beta)^2+k^2}\right)\ (k > 0).$$

Интегрируя I''_{k^2} два раза по k, последовательно получаем:

$$I'_k = \frac{1}{4}\left(\ln\left((\alpha-\beta)^2+k^2\right) - \ln\left((\alpha+\beta)^2+k^2\right)\right) + C_1,$$

$$I(k) = \begin{cases} \frac{k}{4}\ln\frac{(\alpha-\beta)^2+k^2}{(\alpha+\beta)^2+k^2} + \frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)\operatorname{arctg}\frac{k}{\alpha-\beta} - (\alpha+\right. \\ \left.+\beta)\operatorname{arctg}\frac{k}{\alpha+\beta}\right) + C_1k + C_2, \text{ если } \alpha \neq \beta; \\ \frac{k}{4}\ln\frac{k^2}{4\alpha^2+k^2} - \alpha\operatorname{arctg}\frac{k}{2\alpha} + C_1k + C_2, \text{ если } \alpha = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

где C_1, C_2 — постоянные, подлежащие определению; $k > 0$.

Поскольку функция $I(k)$ непрерывна при $k \geqslant 0$, то

$$\lim_{k\to+0} I(k) = I(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,dx\ (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{2}$$

Дифференцируя этот интеграл по параметру β под знаком интеграла, получаем равномерно по β сходящийся интеграл (см. пример 93):

$$I'_\beta(\alpha, \beta, 0) = \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}(\alpha+\beta) + \operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\right),$$

откуда

$$I(\alpha, \beta, 0) = I(0) = \frac{\pi}{4}\left(|\alpha+\beta| - |\alpha-\beta|\right) + A. \tag{3}$$

Так как $I(\alpha, 0, 0) = 0$, то $A = 0$. Таким образом, учитывая (2), (3), из (1) находим: $C_2 = \frac{\pi}{4}(\alpha+\beta-|\alpha-\beta|)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Если теперь $\alpha \neq \beta$, то интеграл $I'(k)$, в силу примера 34, сходится равномерно по $k \geqslant 0$. Следовательно,

$$I'_k(+0) = -\lim_{k \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx = \\ = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right|$$

(см. пример 94). Это позволяет найти постоянную $C_1 = 0$ $(\alpha \neq \beta)$. Если $\alpha = \beta$, то постоянную C_1 находим из условия $\lim\limits_{k \to +\infty} I'_k = 0$. Это дает $C_1 = 0$. Поэтому $C_1 = 0$ при всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Таким образом, окончательно имеем:

$$I(k) = \begin{cases} \frac{k}{4} \ln \frac{(\alpha - \beta)^2 + k^2}{(\alpha + \beta)^2 + k^2} + \frac{1}{2}\left((\alpha - \beta) \operatorname{arctg} \frac{k}{\alpha - \beta} - (\alpha + \beta) \operatorname{arctg} \frac{k}{\alpha + \beta}\right) + \\ + \frac{\pi}{4}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|), \text{ если } k > 0 \text{ и } \alpha \neq \beta > 0; \\ \frac{k}{4} \ln \frac{k^2}{4\alpha^2 + k^2} - \alpha \operatorname{arctg} \frac{k}{2\alpha} + \frac{\pi}{4}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|), \text{ если } k > 0 \\ \text{и } \alpha = \beta > 0; \\ \frac{\pi}{4}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|), \text{ если } k = 0 \text{ и } \alpha > 0,\ \beta > 0. \end{cases}$$

102. Найти разрывной множитель Дирихле $D(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$ для различных значений x.

Решение. Полагая в примере 93 $x = \lambda$, $\alpha = 1$, $\beta = x$, получаем:

$$D(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1 + x) + \operatorname{sgn}(1 - x)),$$

откуда

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| < 1; \\ \frac{1}{2}, \text{ если } x = \pm 1; \\ 0, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

103. Вычислить интеграл $I = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x + b} dx$.

Решение. Положим $t = x + b$. Тогда

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos(ab)\, dt - \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t} dt \sin ab = \\ = 2\cos(ab) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \pi \cos(ab) \cdot \operatorname{sgn} a,$$

так как

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos at}{t}\,dt=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\A\to+\infty}}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right)=0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, а

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\A\to+\infty}}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{A}\right)=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\,dt$$

в силу четности подынтегральной функции.

104. Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\,dy$, вычислить интеграл Лапласа

$$L=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx.$$

Решение. Имеем:

$$L=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\cos\alpha x\,dy.$$

Вводя множитель e^{-kx^2} $(k>0)$, рассмотрим интеграл

$$L^*(k)=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dy. \qquad (1)$$

Функция $e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x$ непрерывна в области $0\leqslant x<+\infty$, $0\leqslant y<+\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dy \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dx$$

сходятся равномерно в силу мажорантного признака ($|e^{-y-(k+y)x^2}\times\cos\alpha x|\leqslant e^{-y}$, $|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x|\leqslant e^{-kx^2}$); интеграл (1), как следует из оценки

$$\left|\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dy\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy\int_0^{+\infty}e^{-kx^2}\,dx,$$

сходится. Следовательно, по известной теореме (см. п. 2°), можно в (1) изменить порядок интегрирования. Имеем:

$$L^*(k)=\int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy\int_0^{+\infty}e^{-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,dx.$$

Используя пример 89, находим:

$$L^*(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)}+y\right)}\, dy = e^k\sqrt{\pi}\int\limits_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)}\, dt. \quad (2)$$

Так как интеграл $L^*(k) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx^2}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$ равномерно сходится при $k \geqslant 0$ и подынтегральная функция непрерывна, то функция $L^*(k)$ непрерывна при $k \geqslant 0$. Поэтому

$$L = \lim_{k\to+0} L^*(k) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)}\,dt.$$

Последний интеграл был вычислен в примере 88. Следовательно, окончательно имеем: $L = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$.

105. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx.$

Решение. Используя тождество $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и интеграл Лапласа, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2}).$$

106. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Решение. Вводя функцию $f(y)$ по формуле

$$f(y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{y^2+x^2}\,dx, \quad |y-1| < \frac{1}{2},$$

замечаем (после замены $x = yt$), что $f(y) = \frac{1}{y}L(|\alpha| y)$, а также $f'_y(1) = -2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx$, где L — интеграл Лапласа. Следовательно (см. пример 104), имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}f'(1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}L(|\alpha| y)\right)'_{y=1} = \frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)\,e^{-|\alpha|}.$$

107. $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x\,dx}{ax^2+2bx+c} \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

Решение. Выделяя полный квадрат в знаменателе и производя замену по формуле $\sqrt{a}\,x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, имеем:

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2}\, dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \sin \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2}\, dt,$$

где $y^2 = c - \frac{b^2}{a}$.

Замечая, что, в силу нечетности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю, а первый легко вычисляется через интеграл Лапласа, получаем:

$$I(\alpha) = \frac{2}{|y|\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a} \cdot L\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}} |y|\right) = \frac{\pi \cos \frac{\alpha b}{a}}{\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}.$$

С помощью интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

вычислить следующие интегралы:

108. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\, dx \quad (a \neq 0)$.

Решение. Приводя квадратный трехчлен к каноническому виду и производя затем замену переменной по формуле $\sqrt{a}\,x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$ $(a > 0)$, имеем:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c)\, dx = \frac{\cos y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2\, dt +$$
$$+ \frac{\sin y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $y = c - \frac{b^2}{a}$.

При $a < 0$ следует положить $a = -a_1$ $(a_1 > 0)$ и провести аналогичные выкладки. В общем случае получаем:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a + \frac{ac - b^2}{a}\right) \quad (a \neq 0).$$

109. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\, dx$.

Решение. Приводя произведение под знаком интеграла к сумме, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 + 2ax)\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2 - 2ax)\, dx.$$

Используя результат предыдущего примера, легко находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax\, dx = \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - a^2\right).$$

110. Доказать формулы:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \sin(|\alpha| a); \quad 2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos(\alpha a) \cdot \operatorname{sgn} \alpha,$$

где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

Доказательство. 1) Легко видеть, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a + x}\, dx + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a - x}\, dx.$$

Вычисляя эти интегралы способом, изложенным в примере 103, получаем формулу 1).

2) Представляя подынтегральную функцию в виде $\frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \times$ $\times \frac{\sin \alpha x}{-a + x} - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{a + x}$ и используя указанный пример, получаем формулу 2).

111. Найти преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \quad (p > 0)$$

для функции $f(t)$, если: а) $f(t) = t^n$ (n — натуральное число); б) $f(t) = \sqrt{t}$; в) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$; г) $f(t) = \sin(\alpha \sqrt{t})$.

Решение. а) Функция $e^{-pt} t^n$ непрерывна при $p > 0$, $0 \leqslant t < +\infty$ и при любом $n > 0$. Данный интеграл равномерно сходится при $p \geqslant \varepsilon > 0$ и при любой интегрируемой функции, для которой справедлива оценка $|f(t)| e^{-\varepsilon t} \leqslant \text{const}$. В нашем случае $t^n e^{-\varepsilon t} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^n e^{-n}$. Следовательно, дифференцирование под знаком интеграла по параметру $p > 0$ законно.

Пусть $f \equiv 1$. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$ и

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\, dt,$$

откуда $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n\, dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

б) Выполняя замену $\sqrt{t}=x$, находим:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sqrt{t}\,dt=2\int_0^{+\infty} e^{-px^2}x^2\,dx,$$

откуда интегрированием по частям получаем:

$$F(p)=-\frac{x}{p}e^{-px^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px^2}\,dx=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

в) В этом случае воспользуемся формулой Фруллани. Имеем:

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}-e^{-(p+1)t}}{t}\,dt=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

г) После замены $\sqrt{t}=z$ приходим сначала к интегралу

$$F(p)=2\int_0^{+\infty} ze^{-pz^2}\sin\alpha z\,dz,$$

а после интегрирования по частям — к интегралу

$$F(p)=\frac{\alpha}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pz^2}\cos\alpha z\,dz,$$

который вычислен в примере 89. Окончательно имеем:

$$F(p)=\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}.$$

112. Доказать формулу (интеграл Липшица)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at}I_0(bt)\,dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad(a>0),$$

где $I_0(x)$ — функция Бесселя 0-го индекса (см. пример 13).

Доказательство. Функция $\cos(bt\sin\varphi)$ непрерывна и ограничена при $0\leqslant t<+\infty$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ сходится. Следовательно, по известной теореме (см. п. 2°), справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt\int_0^{\pi}\cos(bt\sin\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt\sin\varphi)\,dt,$$

откуда $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}I_0(bt)\,dt=\frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2+b^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

113. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\, dy,$$

если $f(y) = \cos ay$.

Решение. Полагая $x - y = t$, получаем:

$$F(x) = \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos at\, dt + \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin at\, dt.$$

В силу нечетности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю, а первый вычислен в примере 89. Таким образом, имеем: $F(x) = e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax$.

§ 4. Эйлеровы интегралы

1°. Гамма-функция. Интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx,$$

сходящийся при $0 < p < +\infty$, называется *гамма-функцией* от p. Он имеет непрерывные производные любого порядка при $p > 0$, и для них справедлива формула

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x}\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

2°. Основные формулы. Если $p > 0$, то

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{1}$$

(формула понижения). Если n — целое положительное, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \tag{2}$$

а также

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \tag{3}$$

Если $0 < p < 1$, то

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \tag{4}$$

(формула дополнения).

3°. Бета-функция. Так называется интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx,$$

сходящийся при $p > 0$ и $q > 0$, или интеграл

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz, \tag{5}$$

сходящийся при тех же условиях.

Бета-функция непрерывна в указанной области и обладает непрерывными производными всех порядков, которые можно найти путем дифференцирования по переменным p, q под знаком интеграла (5).

Связь между B- и Г-функциями выражается формулой

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{6}$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

114. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Решение. Полагая $x = a\sqrt{t}$ $(t > 0)$ и пользуясь формулами (6), (2), (3), получаем:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

115. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

Решение. Используя представление (5) и формулу (6), имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Далее, применяя формулы понижения (1) и дополнения (4), находим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2} = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

116. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Решение. Замена $x^3 = t$ приводит к интегралу

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}\,dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

117. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x\, dx.$

Решение. Полагая $\sin x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$, получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{5}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}$$

$\left(\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right) = \frac{3!!}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi};\right.$ аналогично находим, что $\left.\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}\right)$.

118. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ $(n > 1)$.

Решение. Произведя замену переменной по формуле $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$ и пользуясь формулой дополнения, получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\, dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

119. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx$ (n — целое положительное).

Решение. Полагая $x = \sqrt{t}$ $(t > 0)$, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Выразить через эйлеровы интегралы:

120. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\, dx$ $(n > 0)$.

Решение. Замена $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$ приводит к интегралу

$$\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\, dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},\ 1-\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}.$$

Этот результат справедлив при $0 < m < n$.

121. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

Решение. Полагая $x=\left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$ $(t>0)$, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}\,dt = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{na^p}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},\,p-\frac{m+1}{n}\right).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0<\frac{m+1}{n}<p$.

122. $I=\int\limits_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx$ $(0<a<b,\ c>0)$.

Решение. Выполняя замену $\frac{x-a}{x+c}=\frac{b-a}{b+c}t$, получаем:

$$I=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}\int\limits_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \frac{(b-a)^{m+n+1}\mathrm{B}(m+1,n+1)}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что данный интеграл сходится, если $m>-1$, $n>-1$.

123. $I_{mn}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx$.

Решение. Положим $\sin x=\sqrt{t}$ $(t>0)$. Тогда

$$I_{mn}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right).$$

Очевидно, интеграл сходится, если $m>-1$, $n>-1$.

124. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\,dx$.

Решение. Производя замену $\operatorname{tg} x=\sqrt{t}$ $(t>0)$, получаем:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\ 1-\frac{n+1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi n}{2}}.$$

Из неравенств $n+1>0$ и $1-\frac{n+1}{2}>0$ находим область сходимости данного интеграла: $|n|<1$.

125. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\,dx \quad (0<|k|<1).$

Решение. Вводя новую переменную по формуле $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, имеем:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}x}{(1+k\cos x)^n}\,dx = \frac{2^n}{(1+k)^n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}\,dt}{(1+\alpha^2t^2)^n} \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right).$$

Полагая, далее, $\alpha t = \sqrt{z}$, получаем:

$$I = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}\right) \quad (n>0).$$

126. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n}\,dx.$

Решение. Пусть $n>0$. Производя замену переменной x по формуле $x=\sqrt[n]{t}$ $(t>0)$, получаем:

$$I = \frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}\,dt = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad \left(\frac{m+1}{n}>0\right).$$

При $n<0$ положим $n=-n_1\,(n_1>0)$ и применим подстановку $x = t^{-\frac{1}{n_1}}$ $(t>0)$. Тогда найдем:

$$I = \frac{1}{n_1}\int\limits_0^{+\infty} t^{-1-\frac{m+1}{n_1}}e^{-t}\,dt = -\frac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} t^{-1+\frac{m+1}{n}}e^{-t}\,dt = -\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).$$

Объединяя оба ответа, окончательно имеем:

$$I = \frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad \left(\frac{m+1}{n}>0\right).$$

127. $\int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx.$

Решение. Применяя подстановку $\ln\frac{1}{x}=t$, получаем:

$$\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt = \Gamma(p+1) \quad (p>-1).$$

128. $I = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x\,dx \quad (a>0).$

Решение. После замены $x=\frac{t}{a}$ получаем:

$$I = \frac{1}{a^{p+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\ln t\,dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}}\int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt.$$

Легко видеть, что первый интеграл есть производная от гамма-функции аргумента $(p+1)$ $(p+1>0)$, а второй $\Gamma(p+1)$. Следовательно,

$$I=\frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}}-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)=\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right).$$

129. $I(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx.$

Решение. Очевидно, функция $I(p)$ является производной от бета-функции (см. п. 3°). Поэтому

$$I(p)=\frac{d}{dp}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\frac{d}{dp}\mathrm{B}(p,\ 1-p)=$$

$$=\frac{d}{dp}(\Gamma(p)\Gamma(1-p))=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)=-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}\quad(0<p<1).$$

130. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx.$

Решение. Полагая $x=t^{\frac{1}{3}}$ и используя результат предыдущего примера, получаем:

$$I=\frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2}{3}-1}\ln t}{1+t}\,dt=-\frac{1}{9}\frac{\pi^2\cos\frac{2\pi}{3}}{\sin^2\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\pi^2}{27}.$$

131. $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx.$

Решение. Применяя подстановку $x=t^{\frac{1}{4}}$ $(t>0)$, приходим к интегралу

$$I=\frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}\ln^2 t}{1+t}\,dt,$$

являющемуся второй производной от бета-функции

$$\frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+(1-p)}},$$

вычисленной в точке $p=\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$I=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}(\mathrm{B}(p,\ 1-p))\Big|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin\pi p}\right)\Big|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi^3.$$

132. $I(p,\ q)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}\,dx.$

Решение. Очевидно, если $p=q$, то интеграл равен нулю. Используя признак сравнения, нетрудно установить, что данный интеграл сходится, если $0<p<1$, $0<q<1$.

Далее, замечая, что

$$I(p,\ q)=\int \mathrm{B}(p,\ 1-p)\,dp-\int \mathrm{B}(q,\ 1-q)\,dq+C,$$

где C — постоянная, имеем:

$$I(p,\ q)=\pi\int\frac{dp}{\sin\pi p}-\pi\int\frac{dq}{\sin\pi q}+C=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|+C.$$

Полагая здесь $p=q$, находим, что $C=0$.

Таким образом, имеем:

$$I(p,\ q)=\pi\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2}}\right|\ (0<p<1;\ 0<q<1).$$

133. $I=\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx\ (0<p<1).$

Решение. Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon)=\int\limits_0^1(x^{p-1}-x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon}\,dx\ (\varepsilon\geqslant 0). \qquad (1)$$

Так как функция $f(x,\ \varepsilon)=\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}$ при $0<x<1$ и $\varepsilon\geqslant 0$ непрерывна, а интеграл (1) сходится равномерно при $\varepsilon\geqslant 0$, в силу признака Вейерштрасса

$$\left(|f(x,\ \varepsilon)|\leqslant\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x},\ \int\limits_0^1\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}\,dx\ \text{сходится}\right),$$

то функция $F(\varepsilon)$ непрерывна и возможен предельный переход под знаком интеграла (1) при $\varepsilon\to+0$. Имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F(\varepsilon)=\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx. \qquad (2)$$

Принимая во внимание, что $F(\varepsilon)=\mathrm{B}(p,\ \varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\ \varepsilon)$, из (2) находим:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}(\mathrm{B}(p,\ \varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\ \varepsilon))=\lim_{\varepsilon\to+0}\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right).$$

Отсюда, используя формулу $\Gamma(\varepsilon)=\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применяя правило Лопиталя, получаем:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma(1-p)}-\frac{\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma(p)}\right)=(\ln(\Gamma(1-p)\Gamma(p)))'_p=\pi\operatorname{ctg}\pi p.$$

134. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx\quad(0<\alpha<\beta).$

Решение. Полагая $e^{-2\beta x}=t$, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx=\frac{1}{2\beta}\int\limits_0^1\frac{t^{p-1}-t^{-p}}{1-t}\,dt,$$

где $p=\frac{\beta-\alpha}{2\beta}$. Поскольку $0<p<\frac{1}{2}$, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера. Имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx=\frac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2\beta}.$$

135. $I=\int\limits_0^1\ln\Gamma(x)\,dx.$

Решение. Замечая, что $I=\int\limits_0^1\ln\Gamma(1-x)\,dx$ (в данном интеграле следует положить $1-x=t$), можем написать:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x))\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(\ln\pi-\ln\sin\pi x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\pi-\ln 2-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx\right).$$

Последние интегралы можно найти, если воспользоваться результатом примера 16. Имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Таким образом, окончательно получаем: $I=\ln\sqrt{2\pi}$.

136. $I(a) = \int\limits_a^{a+1} \ln \Gamma(x)\, dx \quad (a > 0)$.

Решение. Дифференцируя данный интеграл по параметру, получаем: $I'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a)$. Заметим, что дифференцирование здесь законно, так как подынтегральная функция непрерывна при $x \geqslant a > 0$, а функции a, $a+1$ и $\ln \Gamma(x)$ непрерывно дифференцируемы по a.

Используя, далее, формулу понижения, имеем: $I'(a) = \ln a$, откуда интегрированием находим:

$$I(a) = a(\ln a - 1) + C, \tag{1}$$

где C — постоянная.

При $a > 0$ функция $I(a)$ непрерывна и существует

$$\lim_{a \to +0} I(a) = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx = \ln \sqrt{2\pi} \tag{2}$$

(см. пример 135). Переходя к пределу в (1), когда $a \to +0$, и учитывая соотношения (2), определяем постоянную C: $C = \ln \sqrt{2\pi}$.

Таким образом, окончательно имеем: $I(a) = \ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$.

137. $I = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) \cdot \sin \pi x\, dx$.

Решение. Производя замену $x = 1 - t$, получаем интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(1-x) \cdot \sin \pi x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \ln(\Gamma(x)\, \Gamma(1-x)) \cdot \sin \pi x\, dx,$$

откуда с помощью формулы дополнения находим:

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x) \sin \pi x\, dx = \frac{1}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \ln \sin \pi x \cdot \sin \pi x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \pi + \frac{1}{2\pi} (\cos \pi x + (1 - \cos \pi x) \ln \sin \pi x -$$

$$- \ln(1 + \cos \pi x)) \Big|_{+0}^{1-0} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right).$$

138. $I = \int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) \cdot \cos 2n\pi x\, dx$ (n — натуральное число).

Решение. Полагая $x = 1 - t$, как и в предыдущем примере, получаем:

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \ln(\Gamma(x)\, \Gamma(1-x)) \cdot \cos 2n\pi x\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \ln \sin \pi x \cdot \cos 2n\pi x\, dx.$$

Представляя полученный интеграл в виде

$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \ln\sin\pi x \cdot \cos 2n\pi x\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \ln\sin\pi x \cdot \cos 2n\pi x\, dx$$

и производя в первом интеграле замену $\frac{\pi}{2} - \pi x = y$, а во втором $\pi\left(x - \frac{1}{2}\right) = y$, находим:

$$I = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y \cdot \cos 2ny\, dy.$$

Используя результат примера 114, гл. IV, ч. 1, окончательно получаем: $I = \frac{1}{4n}$.

Доказать равенства:

139. $\prod\limits_{m=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

Решение. Полагая $x = t^{\frac{1}{n}}$ $(t > 0)$, получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right),$$

откуда

$$\prod_{m=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty} x^{m-1}e^{-x^n}\,dx = \frac{1}{n^n}\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right). \qquad (1)$$

При $n = 1$ равенство (1), очевидно, справедливо. Поэтому далее считаем, что $n \geqslant 2$. Записывая произведение (1) в прямом и обратном порядке, замечаем, что

$$\left(\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2 = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)\left(\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right)\ldots\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Отсюда, используя формулу дополнения, находим:

$$\prod_{m=1}^{n}\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}}}. \qquad (2)$$

Для вычисления произведения синусов разложим двучлен $z^n - 1$ на множители. Имеем: $z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$, где z_n — корни этого двучлена, т. е. $\sqrt[n]{1} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $i = \sqrt{-1}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Следовательно,

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right),$$

откуда

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = n = \lim_{z \to 1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right). \tag{3}$$

Так как $\left|1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$, то из (3) получаем формулу

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots). \tag{4}$$

Наконец, подставляя (4) во (2), а затем (2) в (1), получаем доказываемое тождество.

140. $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = 1.$

Решение. Применяя подстановку $x = t^{\frac{1}{n}}$, приходим к равенству

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{n} - 1}\, dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Используя формулу $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, находим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

В силу непрерывности функции $\Gamma(x)$ при $x > 0$, имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\, dx = \lim_{n \to \infty} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Используя равенство $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\, dt$ $(x > 0)$, найти интегралы:

141. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m}\, dx$ $(0 < m < 1,\ a \neq 0)$.

Решение. Имеем:

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} \cos ax\,dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \int_\delta^A \cos ax\,dx \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt}\,dt. \qquad (1)$$

Функция $f(x, t) = t^{m-1} e^{-xt} \cos ax$ непрерывна при $0 < t < +\infty$, $\delta \leqslant x \leqslant A$. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{m-1} \cos ax\,dt,$$

в силу мажорантного признака $(|f(x, t)| \leqslant t^{m-1} e^{-\delta t})$, сходится равномерно относительно $x \in [\delta, A]$. А тогда, по известной теореме, в (1) можно выполнить перестановку интегралов:

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \int_0^{+\infty} t^{m-1}\,dt \int_\delta^A e^{-xt} \cos ax\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} e^{-tA}\,dt + \right.$$

$$\left. + \cos a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-\delta t}\,dt}{a^2 + t^2} - a \sin a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} e^{-\delta t}}{a^2 + t^2}\,dt \right). \qquad (2)$$

Первый интеграл во (2), как следует из оценки

$$\left| \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right| < \frac{1 + |a|}{a^2} \int_0^1 e^{-tA}\,dt + e^{-A} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(|a| + t)}{a^2 + t^2}\,dt,$$

стремится к нулю при $A \to +\infty$. Второй интеграл, в силу равномерной сходимости его относительно $\delta \geqslant \delta_0 > 0$, при $\delta \to +0$ стремится к интегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m\,dt}{a^2 + t^2} = \frac{|a|^{m-1}}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\ 1 - \frac{m+1}{2} \right) = \frac{\pi}{2\,|a|^{1-m} \cos \frac{\pi m}{2}}.$$

По этой же причине третий интеграл стремится к нулю при $\delta \to +0$.

Таким образом, окончательно получаем: $I = \dfrac{\pi\,|a|^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{\pi m}{2}}$ $(a \neq 0)$.

142. $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m}\,dx \quad (0 < m < 2).$

Решение. Аналогично проделанному в предыдущем примере имеем:

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \delta \to +0}} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} a e^{-t\delta} \cos a\delta}{a^2 + t^2}\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-t\delta} \sin a\delta}{a^2 + t^2}\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} (a \cos aA + t \sin aA)}{a^2 + t^2} e^{-tA}\,dt \right). \tag{1}$$

Последний интеграл в (1) оценивается следующим образом:

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \right| = \left| \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \right| \leqslant \left| \int\limits_0^1 \right| + \left| \int\limits_1^{+\infty} \right| < \frac{|a| + 1}{a^2} \int\limits_0^1 e^{-tA}\,dt + \int\limits_1^{+\infty} \frac{te^{-tA}}{\sqrt{a^2 + t^2}}\,dt <$$

$$< \frac{|a| + a^2 + 1}{a^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tA}\,dt = \frac{a^2 + |a| + 1}{a^2 A} \to 0 \tag{2}$$

при $A \to +\infty$ $(a \neq 0;\ 0 < m < 2)$.

Первый интеграл в (1) сходится равномерно по $\delta \geqslant \delta_0 > 0$, поэтому при $\delta \to +0$ он стремится к интегралу

$$a \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}\,dt}{a^2 + t^2} = \frac{a\,|a|^{m-2}}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\ 1 - \frac{m}{2}\right) = \frac{\pi a\,|a|^{m-2}}{2 \sin \frac{\pi m}{2}} \quad (a \neq 0;\ 0 < m < 2). \tag{3}$$

Оценим второй интеграл в (1). Имеем:

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} \right| \leqslant \left| \int\limits_0^1 \right| + \left| \int\limits_1^{+\infty} \right| < \int\limits_0^1 \frac{t^m\,dt}{a^2 + t^2} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^m e^{-t\delta}}{a^2 + t^2}\,dt \quad (a \neq 0). \tag{4}$$

Далее,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{t^m e^{-t\delta}}{a^2 + t^2}\,dt < \int\limits_1^{+\infty} t^{m-2} e^{-t\delta}\,dt = \frac{1}{\delta^{m-1}} \int\limits_\delta^{+\infty} x^{m-2} e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\delta^{m-1}} \left(\int\limits_\delta^1 + \int\limits_1^{+\infty} \right) < \frac{1}{\delta^{m-1}} \left(\int\limits_\delta^1 x^{m-2}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{m-2} e^{-x}\,dx \right). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $\sin a\delta \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-t\delta}}{a^2 + t^2}\,dt \to 0$ при $\delta \to +0$ $(0 < m < 2)$.

Таким образом, учитывая полученные оценки, из (1) окончательно находим:

$$I = \begin{cases} \dfrac{\pi a}{2\,|a|^{2-m}\,\Gamma(m) \sin \frac{\pi m}{2}}, & \text{если } a \neq 0; \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

143. Доказать формулы Эйлера:

а) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$ $\left(\lambda > 0,\ x > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что подынтегральные функции в а) и б) и их производные по α непрерывны при $0 < t < +\infty$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, данные интегралы (обозначим их через $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ соответственно) при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ сходятся по признаку сравнения. Интегралы

$$F'(\alpha) = -\lambda\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt, \tag{1}$$

$$\Phi'(\alpha) = \lambda\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt, \tag{2}$$

по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно на каждом отрезке $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$. Действительно, функция $t^x e^{-\lambda t\sin\varepsilon}$ является мажорирующей для подынтегральных функций в (1) и (2), а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t\sin\varepsilon}\,dt$ сходится по признаку сравнения. Следовательно, дифференцирование в (1), (2) законно при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Выполняя в (1) и (2) интегрирование по частям (приняв $t^x = u$, $e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt = dv$ и $t^x = u$, $e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha - \alpha)\,dt = dv$ соответственно), получаем систему дифференциальных уравнений

$$F'(\alpha) = -x\Phi(\alpha),\quad \Phi'(\alpha) = xF(\alpha).$$

Решая эту систему, находим:

$$F(\alpha) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x,\quad \Phi(\alpha) = -A\cos\alpha x + B\sin\alpha x, \tag{3}$$

где A, B — постоянные; $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$. Замечая, что

$$F(0) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x},\quad \Phi(0) = 0,$$

из (3) определяем эти постоянные: $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$.

Подставляя найденные значения постоянных в (3), получаем:

$$F(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x,\quad \Phi(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x,$$

что и требовалось доказать.

144. Найти длину дуги кривой $r^n = a^n \cos n\varphi$ $(a > 0,\ n$ — натуральное).

Решение. Вследствие того, что функция $r = a(\cos n\varphi)^{\frac{1}{n}}$ неотрицательна, должно быть $\left|\varphi - \frac{2\pi}{n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}$. Так как, кроме того, она и $\frac{2\pi}{n}$-периодична, то данная кривая представляет собой n-лепестковую розу. Вычисляя по известной формуле длину дуги l одного лепестка, расположенного, например, в секторе с углом $\alpha \left(-\frac{\pi}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2n}\right)$, имеем:

$$l = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\varphi)^{\frac{1-n}{n}} d\varphi = \frac{2a}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1-n}{n}} dx = \frac{a}{n} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$$

(см. пример 123). Таким образом, длина дуги всей кривой $L = nl = a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$.

145. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $|x|^n + |y|^n = a^n$ $(n > 0,\ a > 0)$.

Решение. Ввиду центральной симметрии кривой относительно начала координат будем рассматривать только четвертую ее часть, расположенную в первом квадранте $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$. Имеем: $y = (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Площадь S части фигуры, находящейся в первом квадранте, вычисляем по известной формуле:

$$S = \int_0^a y\, dx = \int_0^a (a^n - x^n)^{\frac{1}{n}} dx.$$

Полагая в интеграле $x = at^{\frac{1}{n}}$, находим:

$$S = \frac{a^2}{n} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}} t^{-1+\frac{1}{n}} dt = \frac{a^2}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

Очевидно, площадь всей фигуры равна $4S = \frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$.

§ 5. Интегральная формула Фурье

1°. Если функция $f(x)$, кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке числовой оси, абсолютно интегрируема на всей оси, то

$$\lim_{l \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x)\, d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

или $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int\limits_{0}^{+\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda,$

где $a(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\ b(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$

Если функция $f(x)$ — четная, то

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \tag{1}$$

где $a(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi$ (косинус-преобразование Фурье). Если функция $f(x)$ — нечетная, то

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \tag{2}$$

где $b(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$ (синус-преобразование Фурье).

2°. Если функция $f(x)$, $x\in(0,+\infty)$ является кусочно-гладкой и абсолютно интегрируемой на $(0,+\infty)$, то она может быть представлена в данном интервале или формулой (1) (четное продолжение), или формулой (2) (нечетное продолжение).

3°. При условиях, указанных в п. 1°, справедлива формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{i\lambda(x-\xi)}\,d\xi$$

(комплексная форма интеграла Фурье), из которой следует прямое преобразование Фурье:

$$\bar{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$$

и обратное преобразование Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda.$$

Представить интегралом Фурье следующие функции:

146. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|<1;\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

Решение. Данная функция удовлетворяет всем условиям, перечисленным в п. 1°, и, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье. Легко видеть, что $b(\lambda)=0$ (в силу четности функции $f(x)$), а $a(\lambda)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\cos\lambda x\,dx=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}.$

Таким образом,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda,\quad |x|\neq 1,$$

что и требовалось.

Следует заметить, что в точках $x=\pm 1$ разрыва функции $f(x)$ интеграл Фурье, согласно теории, равен $\frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\cos\lambda x}{\lambda}\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(1+x)}{\lambda}\,d\lambda+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(1-x)}{\lambda}\,d\lambda\right),$$

то применение формулы Дирихле (см. пример 91) дает:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1+x)+\operatorname{sgn}(1-x)),$$

откуда и следует указанный результат.

147. $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)\ \ (b>a)$.

Решение. Замечая, что

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<a;\\ 1, & \text{если } x=a;\\ 2, & \text{если } a<x<b;\\ 1, & \text{если } x=b;\\ 0, & \text{если } x>b,\end{cases}$$

имеем:

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b\cos\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi\lambda}(\sin\lambda b-\sin\lambda a),$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b\sin\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi\lambda}(\cos\lambda a-\cos\lambda b).$$

Следовательно, интеграл Фурье имеет вид:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}((\sin\lambda b-\sin\lambda a)\cos\lambda x+(\cos\lambda a-\cos\lambda b)\sin\lambda x)\,d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda(b-x)+\sin\lambda(x-a)}{\lambda}\,d\lambda.$$

В данном примере функция $f(x)$ совпадает с ее интегралом Фурье во всех точках числовой оси.

148. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$.

Решение. Функция $f(x)$ при $a\neq 0$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Имеем: $b(\lambda)=0$ (в силу четности функции $f(x)$),

$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x\,dx}{a^2+x^2}\,(x=|a|t)=\frac{2}{\pi|a|}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\lambda|a|t)\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{|a|}e^{-\lambda|a|}$, $a\neq$ $\neq 0$ (см. пример 104).

Запишем теперь интеграл Фурье данной функции:

$$f(x)=\frac{1}{|a|}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda|a|}\cos\lambda x\,d\lambda,\ \text{если}\ a\neq 0.$$

149. $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2}\ (a\neq 0)$.

Решение. Функция $f(x)$ дифференцируема и не является абсолютно интегрируемой на интервале $(-\infty, +\infty)$, однако она интегрируема на нем в смысле главного значения Коши. Как показал Коши (см., например: Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т. 2, М., «Наука», 1968), такая функция также может быть представлена интегралом Фурье.

Легко видеть, что $a(\lambda)=0$, а $b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\lambda x}{a^2+x^2}dx.$

Этот интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ в силу примера 35 $\left(\text{здесь } \frac{x}{a^2+x^2}\text{ монотонно стремится к нулю при } x\to+\infty,\right.$ $\left.\text{а } \left|\int\limits_0^x\sin\lambda t\,dt\right|\leqslant\frac{2}{\lambda_0}\right)$. Следовательно, его можно рассматривать как производную (с точностью до знака) от функции $a(\lambda)$ предыдущего примера, т. е.

$$b(\lambda)=-\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x\,dx}{a^2+x^2}\right)'_\lambda=e^{-\lambda|a|}.$$

Интеграл Фурье функции $\frac{x}{a^2+x^2}$ имеет вид: $\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda|a|}\sin\lambda x\,d\lambda$ $(a\neq 0)$.

150. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } |x|\leqslant\pi;\\ 0, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$

Решение. Эта функция непрерывна, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Кроме того, она нечетна; поэтому $a(\lambda)=0$,

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\sin\lambda x\,dx=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}, & \lambda\neq 1;\\ 1, & \lambda=1.\end{cases}$$

Итак, $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\pi\lambda}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\,d\lambda.$

151. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\ (\alpha>0)$.

Решение. Рассматриваемая функция непрерывна, дифференцируема всюду, за исключением точки $x=0$, и абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Поскольку функция $f(x)$ — четная, то $b(\lambda)=0$, а

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\lambda x\,dx=\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}.$$

Таким образом, искомое представление данной функции интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-\alpha|x|}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\alpha^2+\lambda^2}d\lambda\ (\alpha>0).$$

152. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x\ (\alpha>0)$.

Решение. Нетрудно проверить, что эта функция дифференцируема всюду и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$ $\left(|e^{-\alpha|x|}\sin\beta x|\leqslant e^{-\alpha|x|};\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}dx \text{ сходится}\right)$. Поэтому ее можно представить интегралом Фурье.

Учитывая нечетность $f(x)$, имеем:

$$a(\lambda)=0,\quad b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\sin\lambda x\,dx.$$

Переходя под интегралом от произведения синусов к разности косинусов, получаем:

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta-\lambda)x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta+\lambda)x\,dx=$$

$$=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)}-\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}=\frac{4\alpha\beta\lambda}{\pi(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}.$$

Следовательно,

$$e^{-\alpha|x|}\sin\beta x=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x\,d\lambda}{(\alpha^2+(\beta-\lambda)^2)(\alpha^2+(\beta+\lambda)^2)}\ (\alpha>0).$$

153. $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение. Замечая, что все условия теоремы о представимости функции интегралом Фурье здесь выполняются, имеем:

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\ \text{(см. пример 89);}$$

$b(\lambda)=0$ (в силу четности функции e^{-x^2}).

Таким образом, представление интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

154. Функцию $f(x)=e^{-x}$ $(0<x<+\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом; б) нечетным образом.

Решение. В случае а) в выражении для функции $f(x)$ вместо x подставим $|x|$; в случае б) будем рассматривать функцию $F(x) = f(|x|)\operatorname{sgn} x$. Очевидно, при $x > 0$ функции $\Phi(x) = e^{-|x|}$ и $F(x) = e^{-|x|}\operatorname{sgn} x$ совпадают с данной функцией, а при $x < 0$ первая из них является четным продолжением, вторая же — нечетным продолжением функции $f(x)$, т. е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

Так как функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям представимости их интегралом Фурье, то, по соответствующим формулам, можем написать:

$$a_\Phi(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2+1)},\quad b_\Phi(\lambda) = 0;$$

$$a_F(\lambda) = 0,\quad b_F(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\lambda x\,dx = \frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2+1)}.$$

Таким образом, в первом случае

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x\,d\lambda}{\lambda^2+1},$$

а во втором

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x\,d\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Найти преобразование Фурье $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}dt$ для функции $f(t)$, если:

155. $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Подставляя данную функцию в указанную формулу преобразования, получаем:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|-itx}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\cos tx\,dt -$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\sin tx\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos tx\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\quad(\alpha > 0).$$

156. $f(x) = xe^{-\alpha|x|}$ $(\alpha > 0)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, находим:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|-itx}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|}\cos tx\,dt -$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|}\sin tx\,dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t}\sin tx\,dt =$$

$$= -i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}\quad(\alpha > 0).$$

Заметим, что последний интеграл можно получить дифференцированием интеграла из предыдущего примера по параметру x (дифференцирование под знаком интеграла справедливо в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} te^{-\alpha t}\sin tx\,dt$ относительно x).

157. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Решение. Учитывая четность данной функции, находим:

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos tx\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ (см. пример 89).}$$

158. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - itx} \cos \alpha t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \alpha t \cos tx\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(\alpha - x)t\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(\alpha + x)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}} + e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}}\right) = e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha x.$$

159. Найти функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, если:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy\,dy = \frac{1}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \psi(y) \sin xy\,dy = e^{-x}$ $(x > 0)$.

Решение. Функции $\frac{1}{1+x^2}$ и e^{-x} удовлетворяют условиям, перечисленным в п. 1°, поэтому для определения функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ можно воспользоваться формулами (1) и (2) этого пункта. Имеем:

а) $\varphi(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos y\xi}{1+\xi^2} d\xi = e^{-y}$ (см. пример 104);

б) $\psi(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\xi} \sin y\xi\,d\xi = \frac{2y}{\pi(1+y^2)}$, где $y \geqslant 0$.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Доказать, что интеграл $F(y) = \int\limits_a^b \varphi(x) f(x, y)\,dx$ является непрерывной функцией от $y \in [c, d]$, если выполнены условия: 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b; c, d]$; 2) функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема в интервале (a, b).

Исследовать на непрерывность следующие функции:

2. $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{x^{-\frac{\pi}{4}}}{x^2+y^2+1}\,dx.$

3. $F(y)=\begin{cases}\int\limits_0^{\pi} \dfrac{y^2dx}{(x+|y|)\sqrt{\left|\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\right|}}, & \text{если } y\neq 0;\\ 0, & \text{если } y=0.\end{cases}$

4. $F(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\operatorname{arctg}(x^2+y^2)\cdot\sin x}, & \text{если } y\neq 0;\\ 0, & \text{если } y=0.\end{cases}$

5. Пусть: 1) функция $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant \leqslant y\leqslant d$; 2) функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема в интервале (a, b). Тогда интеграл

$$F(y)=\int\limits_a^b \varphi(x)\,f(x, y)\,dx$$

представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию от $y\in(c, d)$ и

$$F'(y)=\int\limits_a^b \varphi(x)\,f'_y(x, y)\,dx.$$

Доказать это.

Исследовать на непрерывную дифференцируемость функцию $F(y)$ и возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла, если:

6. $F(y)=\int\limits_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx.$ 7. $F(y)=\int\limits_{-1}^{+1} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3+|y|+2}.$

8. $F(y)=\begin{cases}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\dfrac{x}{y}\,dx, & \text{если } y\neq 0;\\ 0, & \text{если } y=0.\end{cases}$

Доказать, что в следующих случаях возможен предельный переход под знаком интеграла:

9. $\int\limits_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x+y^2}}\,dx$ при $y\to+\infty$. 10. $\int\limits_{-1}^{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+y}\right)dx$ при $y\to 0$.

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x}\sin\frac{x^2}{y}\,dx$ при $y\to\infty$.

В каких случаях законна перестановка интегралов:

12. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{\cos xy}{x+y}\,dx.$ 13. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$

14. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx$. 15. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{y} \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx$

Исследовать на равномерную сходимость в указанных интервалах следующие несобственные интегралы:

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{R(x+y)}{x+y+1}\,dx$, $0<y<+\infty$, где $R(x)$ — функция Римана (см. пример 24, гл. IV, ч. 1).

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}}\,dx$, $0<y\leqslant A$.

Показать, что признак, рассмотренный в примере 35 настоящей главы, здесь применить невозможно.

18. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\frac{y}{y+1} \operatorname{arctg}(xy)\,dx$, $0<y<+\infty$.

19. $\int\limits_1^{+\infty} x\,\frac{\cos(x^2+y)}{x+y}\,dx$, $0<y<+\infty$.

20. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{yx^y}\,dx$, $1<y<+\infty$.

21. $\int\limits_0^1 x^{y-1}\ln(1-x)\,dx$, $0<y<+\infty$.

22. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^y}\,dx$, $-\infty<y<2$.

23. $\int\limits_0^1 y\cos\frac{1}{x^2}\,dx$, $-\infty<y<+\infty$.

Найти:

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$, где

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{n}{x^3}\,e^{-\frac{n}{2x^2}}, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{\sin 2tx}{t}\,dt$.

26. $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$. 27. $\lim\limits_{a\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+a}\,dx$.

28. $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$. 29. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-|a|x^2} \sin^2 bx\,\frac{dx}{x}$.

30. Показать, что

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A du\int_0^A ue^{-u^2(t^2+1)}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда (не пользуясь равномерной сходимостью) вывести формулу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(интеграл Эйлера — Пуассона).

Вычислить:

31. $\text{v. p.}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a-b\cos x},\ 0<a<b.$

32. $\text{v. p.}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^3}.$

33. $\text{v. p.}\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx}{1-a\cos x},\ a>1.$

34. $\lim\limits_{a\to b}\left(\text{v. p.}\int_a^b\frac{\varphi(s)\,ds}{x-s}\right)$, $a<x<b$, где $\varphi(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера: $\forall x_1,\ x_2\in(a,\,b)\ \exists\alpha,\ L>0$ $(L=\text{const};\ 0<\alpha\leqslant 1)$ такие, что $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<L\,|x_1-x_2|^{\alpha}$.

Применяя метод дифференцирования и интегрирования по параметру под знаком интеграла, вычислить интегралы:

35. $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx\ (\alpha\geqslant 0).$

36. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 ax}{x^4}\,dx.$

37. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cdot\sin^2 x}{x^3}\,dx.$

38. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\,dx.$

Указание. Ввести параметр.

39. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx}{\operatorname{ch}x}\,dx.$ *Указание.* Воспользоваться равенством $\cos mx=\operatorname{Re}(e^{imx})$.

40. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx.$

41. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}(1-\cos ax)}{x}\,dx.$

42. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^a x\cdot\ln(\sin x)\,dx.$

43. $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^a\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx.$

Глава IV

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Интеграл Римана на компакте. Двойные интегралы

1°. Пусть на замкнутом компактном множестве (компакте) G задана функция f и пусть Π — произвольное разбиение компакта G на ячейки G_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) без общих внутренних точек с мерой mG_i. Диаметром ячейки будем называть точную верхнюю грань множества расстояний между ее точками. Обозначим через $d(\Pi)$ максимальный диаметр ячеек G_i. Выберем в каждой ячейке G_i произвольную точку ξ_i и составим интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, mG_i. \tag{1}$$

Рассмотрим такую последовательность разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \ldots$ компакта G, чтобы $d(\Pi) \to 0$. Если для любой такой последовательности Π_k числа $S_{\Pi_k}(f)$ имеют конечный предел I, не зависящий от выбора последовательности Π_k и точек ξ_i, то число I называют *интегралом Римана* от функции f по множеству G с мерой m и обозначают так:

$$I = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, mG_i = \int_G f(x)\, dG. \tag{2}$$

Если функция f непрерывна на компакте G, то на нем она интегрируема по Риману.

2°. Некоторые конкретные реализации интеграла Римана на компакте. а) Если компакт G — замкнутая квадрируемая область D в плоскости (x, y) с мерами ячеек mD_i, равными площадям ячеек, а f — непрерывная в области D функция, то интеграл Римана от этой функции по области D называется *двойным интегралом* и обозначается так:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Двойной интеграл можно вычислить с помощью повторного. Если замкнутая область D задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где y_1 и y_2 — непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции, то интеграл (3) можно вычислить по формуле:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{4}$$

Если компакт D задан неравенствами $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$, где x_1 и x_2 — непрерывные на сегменте $[c, d]$ функции, то интеграл (3) можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (4')$$

б) Если компакт G — замкнутая кубируемая область V пространства (x, y, z) с мерами ячеек mV_i, равными объемам ячеек, а f — непрерывная в области V функция, то интеграл Римана от функции f по области V называют *тройным интегралом* и обозначают так:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (5)$$

Тройной интеграл также можно вычислить с помощью повторного. Допустим, что замкнутая область V задана неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, где y_j, z_j $(j = 1, 2)$ — непрерывные в соответствующих областях функции. Тогда интеграл (5) можно вычислить по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (6)$$

При вычислении тройных интегралов с помощью повторных пользуются, если это возможно и целесообразно, и такими представлениями области интегрирования: $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant$ $\leqslant z_2(x, y)$; $p \leqslant z \leqslant q$, $y_1(z) \leqslant y \leqslant y_2(z)$, $x_1(y, z) \leqslant x \leqslant x_2(y, z)$ и т. д.

3°. Теорема о среднем. Если функция f непрерывна на компакте G, то

$$\int\limits_G f(x)\,dG = f(\overline{M})\,mG,$$

где $\overline{M} \in G$.

4°. Замена переменных в интеграле Римана. Рассмотрим компакт G с мерой ячеек mG_i и компакт T с мерой ячеек mT_i, и пусть по некоторому правилу установлено взаимно однозначное соответствие между точками $M \in G$ и $P \in T$: $M = \varphi(P)$, $P = \psi(M)$. Допустим, что при неограниченном измельчении ячеек T_i (так, что ячейка T_i стягивается в точку P) отношение $\dfrac{mG_i}{mT_i}$ имеет конечный предел $\tau(P)$ (называемый коэффициентом искажения меры). Если функция $\tau(P)$ непрерывна на компакте T, то справедлива формула замены переменных в интеграле Римана (2):

$$\int\limits_G f(M)\,dG = \int\limits_T f(\varphi(P))\,\tau(P)\,dT. \qquad (7)$$

Рассмотрим замену переменных в двойном и тройном интегралах.

а) Если замкнутая область D' плоскости (u, v) отображается в замкнутую область D плоскости (x, y) с помощью формул $x = x(u, v)$, $y =$ $= y(u, v)$, где $x(u, v)$ и $y(u, v)$ — непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан преобразования $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$, то $\tau(P) = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|$ и формула (7) для двойного интеграла (3) имеет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv. \qquad (8)$$

При переходе к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ якобиан преобразования равен ρ. Тогда получаем:

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (9)$$

б) Если замкнутая область V' пространства (u, v, w) отображается в замкнутую область V пространства (x, y, z) с помощью непрерывно дифференцируемых функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, причем якобиан преобразования $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$, то $\tau(P) = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right|$ и формула (7) для тройного интеграла (5) имеет вид:

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times$$
$$\times \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw. \qquad (10)$$

Переходя к цилиндрическим координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, имеем: $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$,

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz. \qquad (11)$$

Переходя к сферическим координатам по формулам $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\varphi$ и учитывая, что $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2\sin\varphi$, получаем:

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi) \times$$
$$\times\ \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta. \qquad (12)$$

При решении некоторых примеров полезно пользоваться обобщенными сферическими координатами, переход к которым осуществляется по формулам

$$x = a\rho\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\theta,\ y = b\rho\sin^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,\ z = c\rho\cos^{\alpha}\varphi\ (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \rho \geqslant 0). \qquad (13)$$

Тогда

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(a\rho\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\theta,\ b\rho\sin^{\alpha}\varphi\sin^{\beta}\theta,\ c\rho\cos^{\alpha}\varphi) \times$$
$$\times \left|\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)}\right| d\rho\,d\varphi\,d\theta, \qquad (14)$$

где $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = abc\alpha\beta\rho^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{2\alpha-1}\varphi\sin^{\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta$.

Иногда переходят к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам

$$x = a\rho\cos^{\alpha}\varphi,\ y = b\rho\sin^{\alpha}\varphi,\ z = z\ \ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ \rho \geqslant 0). \tag{15}$$

Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(a\rho\cos^{\alpha}\varphi,\ b\rho\sin^{\alpha}\varphi, z) \times$$
$$\times \left|\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)}\right| d\rho\,d\varphi\,dz, \tag{16}$$

где $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = ab\alpha\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$.

Обращаем внимание читателя на то, что кратный интеграл от функции может существовать, а повторные интегралы от этой функции могут не существовать. Может случиться также, что повторные интегралы от функции существуют, а кратный интеграл от этой же функции не существует. Если функция f непрерывна в замкнутой области G, то повторные интегралы от этой функции существуют, равны между собой и равны каждый кратному интегралу от f по области G.

1. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы. Разбить для этого область интегрирования на квадраты прямыми $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{j}{n}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ и выбрать значения подынтегральной функции в правых вершинах этих квадратов.

Решение. Площадь каждой ячейки разбиения $\left(\text{квадрата с длиной стороны } \frac{1}{n}\right)$ равна $\frac{1}{n^2}$, а значение функции $f(x, y) = xy$ в каждой правой вершине квадрата равно $\frac{ij}{n^2}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$; следовательно,

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}.$$

2. Составить нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ в замкнутой области $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми $x = 1 + \frac{i}{n}$, $y = 1 + \frac{2j}{n}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Чему равны пределы сумм при $n \to \infty$?

Решение. Ячейки разбиения — прямоугольники с длинами сторон $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$, поэтому площадь элементарной ячейки равна $\frac{2}{n^2}$.

Рассмотрим ячейку $S_{ij} = \left\{1 + \frac{i}{n} \leqslant x \leqslant 1 + \frac{i+1}{n},\ 1 + \frac{2j}{n} \leqslant y \leqslant 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right\}$. Так как $f(x, y)$ — квадрат расстояния точки (x, y) от начала координат, то $f_{\min}(x, y)=f\left(1+\frac{i}{n}, 1+\frac{2j}{n}\right)$, $f_{\max}(x, y)=$ $=f\left(1+\frac{i+1}{n}, 1+\frac{2(j+1)}{n}\right)$ при $(x, y)\in S_{ij}$, поэтому

$$\underline{S}_n=\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(1+\frac{i}{n}, 1+\frac{2j}{n}\right),$$

$$\overline{S}_n=\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(1+\frac{i+1}{n}, 1+\frac{2(j+1)}{n}\right).$$

После элементарных подсчетов находим:

$$\underline{S}_n=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},\ \overline{S}_n=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

Переходя к пределу, получаем: $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}_n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_n=13\frac{1}{3}$.

3. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dx\,dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

аппроксимируя область интегрирования системой вписанных квадратов, вершины которых A_{ij} находятся в целочисленных точках. Значения подынтегральной функции взять в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

Р е ш е н и е. Обозначая подынтегральную функцию через f, очевидно, имеем:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} f(x, y)\,dx\,dy=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 25\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} f(x, y)\,dx\,dy$$

(так как область интегрирования симметрична относительно осей координат и $f(x, y)=f(x, -y)=f(-x, -y)=f(-x, y)$).

Вершины квадратов, в которых берутся значения подынтегральной функции,— точки $(x_i, y_j)=(i, j)$. Рассмотрим те точки (i, j), которые принадлежат замкнутой области $\{x^2+y^2\leqslant 25,\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. При $j=0$ получаем точку $(5, 0)$, при $j=1$ — точки $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, при $j=2$ — точки $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, при $j=3$ — точки $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, при $j=4$ — точки $(1, 4)$, $(2, 4)$, при $j=5$ — точку $(0, 5)$. Принимая во внимание, что площадь элементарной ячейки равна единице, получаем:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} f(x, y)\,dx\,dy\approx 4\left(\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{\sqrt{25+i^2}}+\frac{1}{\sqrt{28+i^2}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{33+i^2}}+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{40+i^2}}+\frac{2}{7}\Bigg)\approx 4\,(0{,}1961+0{,}3714+0{,}1768+$$
$$+0{,}3430+0{,}3286+0{,}3122+0{,}1543+0{,}3016+0{,}2857)=$$
$$=9{,}8788\approx 9{,}88.$$

Вычислим точное значение интеграла. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, имеем (см. формулы (4) и (9)):

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} f(x,\ y)\,dx\,dy=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^5\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{24+\rho^2}}=2\pi\sqrt{24+\rho^2}\Big|_0^5=$$
$$=2\pi\left(7-\sqrt{24}\right)=13{,}2\ldots$$

4. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_D\sqrt{x+y}\,dx\,dy,$$

где D — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, разбив область интегрирования D прямыми $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$ на четыре равных треугольника и выбрав значения подынтегральной функции в центрах тяжести этих треугольников. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

Решение. Ячейками разбиения являются треугольники с вершинами в точках $(0,\ 0)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ и $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ и $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $(0,\ 1)$ и $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$ и $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. Принимая во внимание, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, получаем соответственно координаты центров тяжести ячеек: $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}\right)$. Поскольку площадь ячейки разбиения равна $\frac{1}{8}$, то

$$\iint\limits_D\sqrt{x+y}\,dx\,dy\approx\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{24}\times$$
$$\times\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\approx\frac{1{,}733}{24}(1+1{,}415+3{,}162)\approx\frac{9{,}664}{24}\approx 0{,}402.$$

Вычислим точное значение данного интеграла:

$$\iint\limits_D\sqrt{x+y}\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy=\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\right)dx=$$
$$=\frac{2}{3}\int\limits_0^1\left(1-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=0{,}4.$$

5. Замкнутая область $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ разбита на конечное число квадрируемых частей $D_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ диаметра, меньшего чем δ. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left|\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i)\,\Delta D_i\right| < 0{,}001,$$

где ΔD_i — площадь ячейки D_i, $(x_i, y_i) \in D_i$?

Решение. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем:

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} \sin(x+y)\,dx\,dy.$$

Так как $\sin(x_i + y_i)\,\Delta D_i = \iint\limits_{D_i} \sin(x_i + y_i)\,dx\,dy$, то

$$\left|\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i)\,\Delta D_i\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} (|x - x_i| + |y - y_i|)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,\delta \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} dx\,dy = \sqrt{2}\,\delta \sum_{i=1}^{n} \Delta D_i = \sqrt{2}\,\pi\delta,$$

поскольку площадь области интегрирования равна π. Требуемое неравенство будет выполнено, если $\sqrt{2}\pi\delta < 0{,}001$, т. е. $\delta < \dfrac{0{,}001}{\sqrt{2}\pi} \approx 0{,}00022$.

При решении задачи мы воспользовались известным неравенством $|x - x_i| + |y - y_i| \leqslant \sqrt{2\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)} \leqslant \sqrt{2\delta^2} = \sqrt{2}\delta$.

6. Доказать равенство

$$\iint\limits_D X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy,$$

если D — прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$.

Доказательство. Будем считать, что написанные в доказываемом равенстве интегралы существуют. С помощью отрезков прямых $x = x_i\ (i = 0, 1, \ldots, m-1)$ и $y = y_j\ (j = 0, 1, \ldots, n-1)$ разобьем прямоугольник D на ячейки — прямоугольники с вершинами в точках (x_i, y_j). Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $f(x, y) = X(x)Y(y)$. Поскольку $f(x_i, y_j) = X(x_i)Y(y_j)$, то справедливо равенство

$$\sigma = \left(\sum_{i=0}^{m-1} X(x_i)\,\Delta x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} Y(y_j)\,\Delta y_j\right).$$

При неограниченном измельчении ячеек разбиения $\sigma \to \iint\limits_D X(x)Y(y)\,dx\,dy$, $\sum\limits_{i=0}^{m-1} X(x_i)\,\Delta x_i \to \int\limits_a^A X(x)\,dx$, $\sum\limits_{j=0}^{n-1} Y(y_j)\,\Delta y_j \to \int\limits_b^B Y(y)\,dy$, поэтому

$$\iint\limits_D X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^A X(x)\,dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\,dy.$$

При доказательстве формулы принято во внимание, что двойной интеграл от интегрируемой функции не зависит от способа разбиения области интегрирования и способа выбора точек, в которых берутся значения подынтегральной функции.

7. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Доказать неравенство

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

где знак равенства имеет место лишь при $f(x) = \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b (f(x) - f(y))^2\,dy \geqslant 0.$$

Интегрируя (и принимая во внимание формулу, доказанную в примере 6), получаем

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_a^b (f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y))\,dy =$$

$$= (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx - 2\int\limits_a^b f(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b f(y)\,dy + (b-a)\int\limits_a^b f^2(y)\,dy =$$

$$= 2\left((b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2\right)$$

(так как значение интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования).

Учитывая, что $I \geqslant 0$, получаем неравенство

$$(b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

Знак равенства в доказанной формуле возможен лишь в том случае, когда $I=0$, т. е. $f(x)\equiv f(y)$, где $y\in[a, b]$, а $x\in[a, b]$ — любое фиксированное. Но это справедливо лишь тогда, когда $f(x)=\text{const}$.

8. Какой знак имеют интегралы:

а) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$; б) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$;

в) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$?

Исследование. а) Функция $\ln(x^2+y^2)$ обращается в нуль в четырех точках: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$; во всех же остальных точках области интегрирования (за исключением точки $(0, 0)$, в которой она не определена) имеем $\ln(x^2+y^2)<0$. Таким образом, если интеграл существует, то он отрицателен. Существование интеграла (в несобственном смысле) легко доказать, рассмотрев интеграл по области $|x|+|y|\leqslant 1$ с выброшенным кругом радиуса $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\to 0)$, имеющим центр в начале координат.

б) Представим интеграл по указанному множеству в виде суммы двух интегралов:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy + \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy.$$

В точках квадрата $\{0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 0\}$, симметричных относительно диагонали этого квадрата $y=-x$, функция $f(x, y)=\arcsin(x+y)$ принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения. Разбивая этот квадрат на симметричные относительно указанной диагонали ячейки с одинаковыми площадями и выбирая в каждой паре симметричных ячеек точки (ξ_i, η_i) и (ξ_i', η_i') такие, что $f(\xi_i, \eta_i)+f(\xi_i', \eta_i')=0$, получаем интегральную сумму для двойного интеграла функции $f(x, y)$, равную нулю. В силу интегрируемости функции f, имеем:

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy = 0, \text{ поэтому}$$

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, положителен, так как подынтегральная функция положительна во всех точках треугольника $\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$, за исключением точки $(0, 0)$, в которой она равна нулю. Таким образом, исследуемый интеграл положителен.

в) В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy + $$
$$+ \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy + \iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Для каждой точки (x, y) из круга $x^2+y^2\leqslant 1$ найдется точка $(\bar{x}, \bar{y})$ из кольца $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$ такая, что $\sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}+\sqrt[3]{1-(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}= =0$, поэтому (на основании рассуждений, аналогичных приведенным в решении примера б)) приходим к выводу, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy + \iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 0,$$
$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Так как $\sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}<0$, когда $(x, y)\in\{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$, то (принимая во внимание последнее равенство) исследуемый интеграл отрицателен.

При решении примеров б) и в) мы воспользовались тем, что интеграл Римана интегрируемой функции f не зависит от способа разбиения области интегрирования и выбора точек ξ_i в каждой из ячеек разбиения.

9. Найти среднее значение функции $f(x, y)=\sin^2 x\sin^2 y$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

Решение. По определению,

$$f_{\text{ср}}(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0\leqslant y\leqslant\pi}} \sin^2 x\sin^2 y\,dx\,dy=\frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\right)^2=\frac{1}{4}.$$

10. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

Решение. На основании теоремы о среднем (п. 3°) и того, что площадь области интегрирования равна 200, имеем:

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\text{ где } (\xi, \eta)\in\{|x|+|y|\leqslant 10\},$$

откуда получаем оценку $1{,}96<I<2$.

11. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ от начала координат.

Решение. Обозначив через $\rho(x, y)$ расстояние точки круга от начала координат, получим:

$$\rho^2(x, y)=x^2+y^2;\ (x, y)\in\{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2\}.$$

Согласно определению среднего значения, имеем:

$$\rho_{\text{ср}}^2(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2} \rho^2(x, y)\, dx\, dy.$$

Перейдя к полярным координатам по формулам $x-a=\bar{\rho}\cos\varphi$, $y-b=\bar{\rho}\sin\varphi$, получим:

$$\rho_{\text{ср}}^2(x, y) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R ((a^2+b^2)\bar{\rho} + 2\bar{\rho}^2(a\cos\varphi + b\sin\varphi) + \bar{\rho}^3)\, d\bar{\rho} =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2}\left(\pi R^2(a^2+b^2) + \frac{\pi R^4}{2}\right) = a^2+b^2+\frac{R^2}{2}.$$

В задачах 12—14 в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке для указанных областей интегрирования D.

12. D — замкнутый треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

Решение. Применив формулы (4) и (4′), получим:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_1^y f(x, y)\, dx.$$

13. D — замкнутый треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$.

Решение. При внешнем интегрировании по x область интегрирования необходимо разбить на две области, в каждой из которых применима формула (4). Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y)\, dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y)\, dx.$$

14. D — круг $x^2+y^2 \leqslant y$.

Решение. Применив формулы (4) и (4′), получим:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y)\, dx.$$

15. Доказать формулу Дирихле:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx \quad (a > 0).$$

Доказательство. Пусть функция f определена и ограничена в замкнутой области $D_1 = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ y = x,\ x = a\}$ и может иметь в D_1 разрывы лишь на конечном числе гладких кривых; тогда повторные интегралы, записанные в условии задачи, существуют. Обозначим через D_2 дополнение области D_1 до квадрата $D = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant \leqslant y \leqslant a\}$ и определим в D функцию F следующим образом:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in D_2, \\ f(x, y), & (x, y) \in D_1. \end{cases}$$

Для функции F существуют повторные интегралы

$$I_1 = \int_0^a dx \int_0^a F(x, y)\, dy, \quad I_2 = \int_0^a dy \int_0^a F(x, y)\, dx.$$

Разобьем замкнутую область D с помощью прямых $x = x_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), $y = y_j$ ($j = 0, 1, \ldots, m$) на ячейки-прямоугольники S_{ij}, выберем произвольно точки $(\xi_i, \eta_j) \in S_{ij}$ и составим интегральные суммы:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)\, \Delta y_j \right) \Delta x_i, \quad S_2 = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i, \eta_j)\, \Delta x_i \right) \Delta y_j.$$

При достаточно мелком разбиении квадрата D справедливы оценки $|I_1 - S_1| < \varepsilon$, $|I_2 - S_2| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное, наперед заданное. Поскольку $S_1 = S_2$ (в этом легко убедиться непосредственно), то $I_1 = I_2$. Далее, в силу того, что при любом фиксированном $x \in (0, a)$ справедливо равенство

$$\int_0^a F(x, y)\, dy = \int_0^x F(x, y)\, dy + \int_x^a F(x, y)\, dy = \int_0^x f(x, y)\, dy$$

и при любом фиксированном $y \in (0, a)$ выполняется равенство

$$\int_0^a F(x, y)\, dx = \int_0^y F(x, y)\, dx + \int_y^a F(x, y)\, dx = \int_y^a f(x, y)\, dx,$$

из условия $I_1 = I_2$ получим:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx, \quad a > 0,$$

что и требовалось доказать.

Для ограниченной функции f, заданной в замкнутой выпуклой области G более сложной структуры и имеющей в этой области разрывы на конечном числе гладких кривых, также можно доказать равенство повторных интегралов. Для этого нужно вписать область G

в прямоугольник и образовать функцию F, равную f в G и тождественно равную нулю на дополнении к множеству всех точек прямоугольника.

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

16. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy.$

Решение. При изменении y от 0 до 1 x изменяется в области интегрирования от $2-y$ до $1+\sqrt{1-y^2}$, следовательно, получим повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

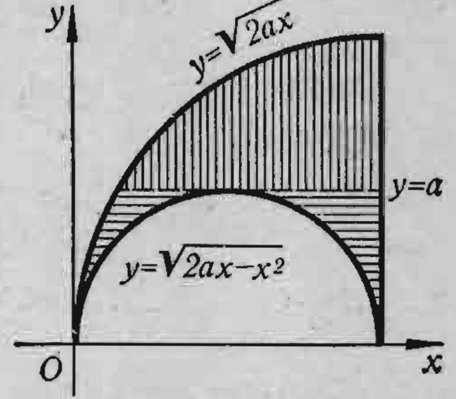

Рис. 2

17. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy \quad (a>0).$

Решение. Разобьем замкнутую область $\{0 \leqslant x \leqslant 2a, \sqrt{2ax-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax}\}$ с помощью прямой $y=a$ на три области (рис. 2). Получим сумму повторных интегралов:

$$\int\limits_0^a dy \left(\int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx \right) +$$

$$+ \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\,dx.$$

18. $\int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} f(x, y)\,dy.$

Решение. При изменении y от 0 до 1 x изменяется от e^y до e, следовательно, изменив порядок интегрирования, получим интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\,dx.$$

19. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy.$

Решение. Запишем сначала интеграл в виде:

$$\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x, y)\,dy - \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{0} f(x, y)\,dy,$$

а затем в каждом из интегралов поменяем порядок интегрирования. При изменении y от 0 до 1 x изменяется от $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$, а при изменении y от -1 до 0 x изменяется от $\pi - \arcsin y$ до $2\pi +$ $+ \arcsin y$, поэтому получим разность интегралов:

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\, dx - \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y)\, dx.$$

20. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2\, dx\, dy$, если область интегрирования D ограничена осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. Перейдем от двойного интеграла к повторному по формуле (4):

$$\iint\limits_D y^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y} y^2\, dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3\, dx.$$

В последнем интеграле перейдем к переменной t. Тогда получим:

$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3\, dx = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4\, dt = \frac{16a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{32a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u\, du = \frac{64a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u\, du = \frac{64a^4}{3} \cdot \frac{7!!}{8!!} \frac{\pi}{2} = \frac{35\pi a^4}{12}.$$

В двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования, если:

21. D — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

Решение. При изменении φ от 0 до 2π ρ изменяется от 0 до a. По формуле (9), получим:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} \rho f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\, d\rho.$$

22. D — круг $x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(a > 0)$.

Решение. При переходе к полярным координатам φ изменяется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до $a \cos\varphi$; таким образом,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)\, d\rho.$$

23. D — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1-x$.

Решение. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до $\rho = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$. Таким образом,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho.$$

24. D — параболический сегмент $-a \leqslant x \leqslant a$, $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant a$.

Решение. Область интегрирования разобьем с помощью отрезков лучей $y = x$ и $y = -x$ $(y \geqslant 0)$ на три замкнутые области (рис. 3): два параболических сегмента $D_1 = \left\{0 \leqslant x \leqslant a,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant x\right\}$, $D_2 = \left\{-a \leqslant x \leqslant 0,\ \frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant -x\right\}$ и треугольник $D_3 = \{-a \leqslant x \leqslant a, |x| \leqslant y \leqslant a\}$. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем:

$$I = \sum_{i=1}^{3} \iint_{D_i} f(x,\ y)\, dx\, dy.$$

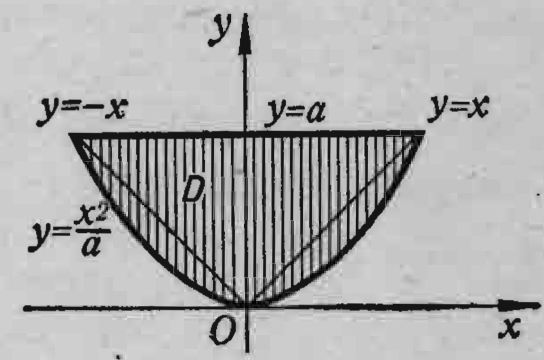

Рис. 3

В D_1 φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $\rho = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. В D_2 имеем $\frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, а в D_3, очевидно, $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\operatorname{cosec}\varphi$.

Переходя в двойных интегралах к повторным, окончательно получаем:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\operatorname{cosec}\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\, d\rho.$$

25. В каком случае после перехода к полярным координатам пределы интегрирования будут постоянные?

Решение. Допустим, что при переходе к полярным координатам после замены переменных в двойном интеграле получим:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{r_0}^{r_1} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

Мы видим, что в самом общем случае область интегрирования ограничена двумя лучами $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ и двумя концентрическими окружностями $\rho = r_0$ и $\rho = r_1$.

Перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования в том и в другом порядке в следующих интегралах:

26. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$

Решение. Если после замены внешнее интегрирование производить по φ, то квадрат $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ следует представить как объединение двух замкнутых областей с общей частью границы: $D_1 = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$ и $D_2 = \{0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$. В D_1 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\cos\varphi}$, а в D_2 $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sin\varphi}$. Записав исходный интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^x f(x, y)\,dy + \int\limits_x^1 f(x, y)\,dy\right)$$

и перейдя к полярным координатам, получим:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

Заменим теперь переменные так, чтобы внешнее интегрирование производилось по ρ. Для этого разобьем квадрат D на две замкнутые области D_1^* и D_2^* с общей частью границы: $D_1^* = \{x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, $D_2^* = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant 1\}$. В D_1^* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, а в D_2^* $1 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$, $\arccos\frac{1}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \arcsin\frac{1}{\rho}$. Записывая исходный интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y)\,dy\right)$$

и переходя к полярным координатам ρ и φ, находим:

$$I = \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho \int\limits_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{1}{\rho}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

27. $I=\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

Решение. Функция f задана в круговом сегменте (рис. 4). После замены переменных внешнее интегрирование произведем по φ. Для этого область интегрирования запишем неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1$; тогда получим:

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

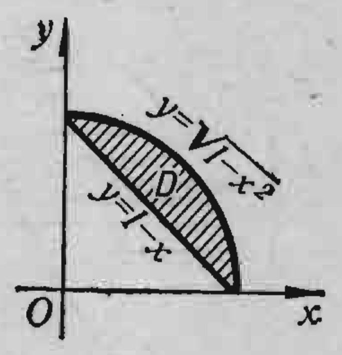

Рис. 4

Теперь произведем внешнее интегрирование по ρ. Записав область интегрирования с помощью неравенств $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \rho \leqslant 1, \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, где $\varphi_1=\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}-\varphi_1$, после замены переменных получим:

$$I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \rho\,d\rho \int\limits_{\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{\rho\sqrt{2}}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

28. $I=\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

Решение. Внешнее интегрирование после замены переменных произведем по φ. Задавая область интегрирования неравенствами $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{\cos\varphi}$, получаем:

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} \rho f(\rho)\,d\rho.$$

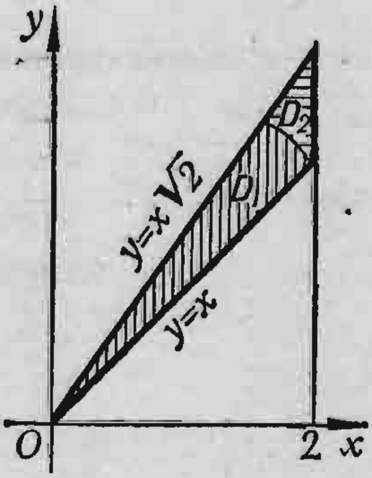

Рис. 5

Теперь разобьем область интегрирования на две замкнутые области (рис. 5) с общей частью границы: $D_1=\left\{0 \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right\}$, $D_2=\left\{2\sqrt{2} \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{3};\ \arccos\frac{2}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right\}$. После замены переменных найдем:

$$I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho)\,d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\varphi + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho f(\rho)\,d\rho \int\limits_{\arccos\frac{2}{\rho}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\rho f(\rho)\,d\rho+\int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}-\arccos\frac{2}{\rho}\right)\rho f(\rho)\,d\rho.$$

29. $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,\ y)\,dy.$

Решение. Область интегрирования в новых переменных зададим с помощью неравенств $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\cos\varphi}$. Тогда получим:

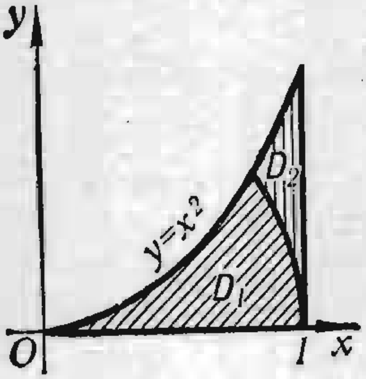

Рис. 6

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}}\rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

С помощью дуги окружности единичного радиуса разобьем область интегрирования на две замкнутые области D_1 и D_2 с общей частью границы (рис. 6). В области D_1 ρ изменяется от 0 до 1, а для определения пределов изменения φ необходимо решить уравнение $\rho\sin\varphi=\rho^2\cos^2\varphi$. В области D_2 ρ изменяется от 1 до $\sqrt{2}$, а для определения пределов изменения φ, кроме упомянутого уравнения, необходимо решить уравнение $\rho\cos\varphi=1$. Решая эти уравнения относительно φ, находим соответственно $\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}$, $\varphi=\arccos\frac{1}{\rho}$. Таким образом,

$$D_1=\left\{0\leqslant\rho\leqslant1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right\},$$

$$D_2=\left\{1\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2},\ \arccos\frac{1}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant\arcsin\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}\right\}.$$

Отсюда получаем:

$$I=\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\varphi+$$

$$+\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4\rho^2}-1}{2\rho}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

30. $I=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$, где область D ограничена кривой $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant0)$.

Решение. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получаем уравнение границы области интегрирования в виде $\rho=a\sqrt{\cos2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Производя внешнее интегрирование по φ, имеем:

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\rho.$$

Для осуществления внешнего интегрирования по ρ запишем область интегрирования с помощью неравенств $0\leqslant\rho\leqslant a$, $-\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}\leqslant\varphi\leqslant\leqslant\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}$. Таким образом, после замены переменных получим:

$$I=\int\limits_{0}^{a}\rho\,d\rho \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{\rho^2}{a^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Считая, что ρ и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

31. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} f(\varphi,\ \rho)\,d\rho\ \ (a>0).$

Решение. Функция f задана в круге $0\leqslant\rho\leqslant a\cos\varphi$ $(a>0)$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. Представим область определения функции f с помощью неравенств $0\leqslant\rho\leqslant a$, $-\arccos\frac{\rho}{a}\leqslant\varphi\leqslant\arccos\frac{\rho}{a}$. Изменив порядок интегрирования, получим интеграл

$$\int\limits_{0}^{a} d\rho \int\limits_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}} f(\varphi,\ \rho)\,d\varphi\ \ (a>0).$$

32. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi,\ \rho)\,d\rho\ \ (a>0).$

Решение. Зададим множество, на котором определена функция f, с помощью неравенств $0\leqslant\rho\leqslant a$, $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}$. Тогда после изменения порядка интегрирования получим интеграл

$$\int\limits_{0}^{a} d\rho \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\rho^2}{a^2}} f(\varphi,\ \rho)\,d\varphi\ \ (a>0).$$

33. $\int\limits_0^a d\varphi \int\limits_0^\varphi f(\varphi,\ \rho)\, d\rho\ \ (0 < a < 2\pi)$.

Решение. Если переменная ρ изменяется от 0 до a, то переменная φ изменяется от ρ до a, поэтому после изменения порядка интегрирования получим интеграл

$$\int\limits_0^a d\rho \int\limits_\rho^a f(\varphi,\ \rho)\, d\varphi.$$

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными:

34. $I = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$.

Решение. По формуле (9) получим:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho f(\rho)\, d\rho = 2\pi \int\limits_0^1 \rho f(\rho)\, d\rho$$

(так как внутренний интеграл от φ не зависит).

35. $I = \iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$, где $D = \{\,|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}$.

Решение. В силу симметрии области D относительно осей координат, а также симметрии подынтегральной функции, имеем: $I = 4\iint\limits_{D_1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$, где $D_1 = \{0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

Перейдем к полярным координатам и внешнее интегрирование произведем по ρ (в случае внешнего интегрирования по φ мы не получим однократного интеграла, так как внутренний интеграл будет зависеть от φ).

Разобьем область интегрирования D_1 на две замкнутые области D_1^* и D_2^* с общей частью границы: $D_1^* = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$, $D_2^* = \left\{1 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2},\ \arccos\frac{1}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$. После замены по формулам (9), используя свойство аддитивности двойного интеграла, получаем:

$$I = 4\left(\int\limits_0^1 \rho f(\rho)\, d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho f(\rho)\, d\rho \int\limits_{\arccos\frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 \rho f(\rho)\, d\rho + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\rho}\right) \rho f(\rho)\, d\rho\right) =$$

$$= \pi \int\limits_0^1 \rho f(\rho)\, d\rho + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4\arccos\frac{1}{\rho}\right) \rho f(\rho)\, d\rho.$$

36. $I = \iint\limits_{x^2+y^2<x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy.$

Решение. Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получаем: $I = \iint\limits_{D_1} \rho f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi\, d\rho$, где $D_1 = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant \cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$. Переходя от двойного интеграла к повторному, имеем:

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,\rho\, d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} \rho\, d\rho =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi) \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot f(\operatorname{tg}\varphi)\, d\varphi.$$

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

37. $I = \iint\limits_{x^2+y^2<a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

Решение. Используя результат решения примера 34, имеем:

$$I = 2\pi \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

38. $I = \iint\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

Решение. Используя результат решения примера 34 (и принимая во внимание, что область интегрирования — кольцо), имеем:

$$I = 2\pi \int\limits_{\pi}^{2\pi} \rho\sin\rho\, d\rho = 2\pi\left(\rho\cos\rho\,\Big|_{2\pi}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos\rho\, d\rho\right) = -6\pi^2.$$

39. Квадрат $D = \{a < x < a+h,\ b < y < b+h\}$ $(a > 0,\ b > 0)$ с помощью системы функций $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \sqrt{xy}$ преобразуется в область D'. Найти отношение площади области D' к площади области D. Чему равен предел этого отношения при $h \to 0$?

Решение. Обозначим через $P_{D'}$ площадь замкнутой области D', а через P_D — площадь квадрата D. По формуле (8), имеем:

$$P_{D'} = \iint\limits_{D'} du\, dv = \iint\limits_{D} \left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right| dx\, dy, \text{ где}$$

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}.$$

Переходя от двойного интеграла $\iint\limits_D \left|\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right| dx\,dy$ к повторному, получаем:

$$P_{D'} = \frac{3}{2}\int\limits_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}}\,dx \int\limits_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}}\,dy = \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\Bigg|_{x=a+h}^{x=a}\right)\left(\frac{2}{5}\,y^{\frac{5}{2}}\Bigg|_{y=b}^{y=b+h}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}\right)\left((b+h)^2\sqrt{b+h} - b^2\sqrt{b}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\frac{h^2}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})\sqrt{a(a+h)}}\left(\frac{b^2}{\sqrt{b}+\sqrt{b+h}} + (2b+h)\sqrt{b+h}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\cdot\frac{h^2\left(b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}\right)}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Поскольку $P_D = h^2$, то

$$\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})(\sqrt{b+h}+\sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, находим:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

40. Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в двойном интеграле $I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, где область интегрирования D ограничена кривыми $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$, если $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

Решение. При заданном отображении имеем:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v \end{vmatrix} = 4u\sin^3 v\cos^3 v,$$

и по формуле (8) получаем:

$$I = 4\iint\limits_{D'} f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\,|u|\cdot|\sin^3 v\cos^3 v|\,du\,dv,$$

где D' — замкнутая область в плоскости (u, v), отображаемая с помощью преобразования $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

Чтобы перейти от двойного интеграла к повторному, найдем пределы изменения переменных u и v. Кривая $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ переходит в отрезок прямой $u = a$. Если $(0, y)$ — любая точка, лежащая на отрезке $x=0$, $0<y\leqslant a$, то, очевидно, $v = \frac{\pi}{2}$; если точка $(x, 0)$ лежит на отрезке $y=0$, $0<x\leqslant a$, то $v=0$. Началу координат в плоскости

(x, y) соответствует множество точек $u=0$. Таким образом, переходя к повторному интегралу, получаем:

$$I = 4\int\limits_0^a u\,du \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\sin^3 v\cos^3 v\,dv.$$

41. Показать, что замена переменных $x+y=\xi$, $y=\xi\eta$ переводит треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1-x$ в единичный квадрат $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Доказательство. Началу координат в плоскости (x, y) соответствует, очевидно, множество точек $\xi=0$. При $y=1-x$ $\xi=1$, $\eta=1-x$. Таким образом, отрезок $y=1-x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ переходит в отрезок $\xi=1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, причем при возрастании x от 0 до 1 переменная η убывает от 1 до 0.

Посмотрим теперь, во что переходит отрезок $x=0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. В плоскости (ξ, η) имеем: $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\eta=1$, т. е. получили отрезок прямой $\eta=1$, длина которого равна 1. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что отрезок $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ переходит в отрезок $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\eta=0$.

Мы показали, что граница треугольника и его вершина с координатами $(0, 0)$ перешли в границу единичного квадрата в плоскости (ξ, η). Осталось показать, что любой внутренней точке треугольника в плоскости (x, y) соответствует внутренняя точка квадрата в плоскости (ξ, η). Если $0 < x < 1$, $0 < y < 1-x$, то $0 < \xi < 1$, $0 < \xi(1-\eta) < 1$, откуда следует, что $0 < \eta < 1$, т. е. точка (ξ, η) является внутренней точкой квадрата.

Произведя соответствующие замены переменных, свести двойные интегралы к однократным:

42. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$

Решение. Произведем замену переменных в интеграле по формулам $x = \dfrac{au}{\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \dfrac{bu}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = 1$, $ax+by+c = \sqrt{a^2+b^2}\,u + c$, $u^2+v^2 \leqslant 1$, следовательно,

$$I = \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c\right) du\,dv =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c\right) dv = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c\right) du.$$

43. $I = \iint\limits_D f(xy)\,dx\,dy$, где область D ограничена кривыми $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ $(x>0,\ y>0)$.

Решение. В двойном интеграле произведем замену переменных по формулам $xy=u$, $y=vx$. Тогда $1 \leqslant u \leqslant 2$, $1 \leqslant v \leqslant 4$, $x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$,

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v},$$

$$I = \iint\limits_{\substack{1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 4}} f(u) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du\, dv = \frac{1}{2} \int\limits_1^4 \frac{dv}{v} \int\limits_1^2 f(u)\, du = \ln 2 \int\limits_1^2 f(u)\, du.$$

Значение якобиана можно было бы вычислить, используя следующее его свойство: $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}}$. В нашем случае $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} =$

$$= \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}, \text{ откуда } \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}.$$

Вычислить двойные интегралы:

44. $I = \iint\limits_{x^4+y^4 \leqslant 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$

Решение. Переходя к полярным координатам ρ и φ, получаем уравнение границы области интегрирования в виде $\rho^4 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1$, откуда $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Заменяя двойной интеграл повторным, находим:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} \rho^3\, d\rho = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}.$$

Полагая в интеграле $\operatorname{tg} \varphi = t$, получаем:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 + t^2}{1 + t^4} dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2 - 1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \operatorname{sgn} t \right) \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

45. $I = \iint\limits_D (x + y)\, dx\, dy$, где область D ограничена кривыми $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

Решение. Прямая $x + y = 4$ и парабола $y^2 = 2x$ пересекаются в точках с абсциссами $x = 2$ и $x = 8$, а прямая $x + y = 12$ и парабола $y^2 = 2x$ пересекаются в точках с абсциссами $x = 8$ и $x = 18$, поэтому область интегрирования можно представить в виде объединения замкнутых областей $D_1 = \{2 \leqslant x \leqslant 8,\ 4 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}\}$, $D_2 = \{8 \leqslant x \leqslant 18,\ -\sqrt{2x} \leqslant y \leqslant 12 - x\}$.

Переходя от двойного интеграла к повторному, получаем:

$$I=\int\limits_{2}^{8}dx\int\limits_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\,dy+\int\limits_{8}^{18}dx\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{2}^{8}\left(\frac{(x+y)^2}{2}\Bigg|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}}\right)dx+\int\limits_{8}^{18}\left(\frac{(x+y)^2}{2}\Bigg|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{2}^{8}\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}+x-8\right)dx+\int\limits_{8}^{18}\left(72-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}-x\right)dx=543\frac{11}{15}.$$

46. $I=\iint\limits_{D}xy\,dx\,dy$, где область D ограничена кривыми $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$.

Решение. Для определения пределов изменения переменной x найдем абсциссы точек пересечения гиперболы $xy=1$ и прямой $x+y=\frac{5}{2}$ из квадратного уравнения $2x^2-5x+2=0$, решая которое, получаем: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=2$. Таким образом, имеем:

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}x\,dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}x\left(\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{25x}{4}-5x^2+x^3-\frac{1}{x}\right)dx=1\frac{37}{128}-\ln 2.$$

47. $I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

Решение. В точках квадрата $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$, симметричных относительно его диагонали $x+y=\pi$, функция f принимает равные значения, поэтому справедливо равенство:

$$I=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi-x}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy.$$

Разобьем область интегрирования отрезком прямой $x+y=\frac{\pi}{2}$ на две области, в одной из которых $\cos(x+y)$ положителен, а в другой — отрицателен. Тогда, представляя интеграл по области в виде суммы интегралов по указанным областям и переходя от двойных интегралов к повторным, получаем:

$$I = 2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi-x} \cos(x+y)\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_0^{\pi-x} \cos(x+y)\,dy\right) = 2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx\right) = 2\pi.$$

Рекомендуем читателю для наглядности воспроизвести область интегрирования на рисунке.

48. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy.$

Решение. Переходя в интеграле к полярным координатам ρ и φ, находим:

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} \rho^2 \left|\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \rho\right| d\rho\,d\varphi.$$

Поскольку множество точек замкнутой области $\left\{0 \leqslant \rho \leqslant \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$ принадлежит множеству $D = \{0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, то интеграл по области D можно представить в виде суммы интегралов по множествам $D_1 = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$, $D_2 = \left\{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \rho \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$, $D_3 = \left\{0 \leqslant \rho \leqslant \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),\ -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Внутри областей D_1 и D_2 функция $\alpha(\varphi, \rho) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \rho$ — отрицательна, а внутри замкнутой области D_3 — положительна. Таким образом, переходя от двойных интегралов к повторным, получаем:

$$I = \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho^3 - \rho^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) d\rho + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}^{1} \left(\rho^3 - \right.$$

$$\left. - \rho^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) d\rho + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} \left(\rho^2 \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \rho^3\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} - \frac{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}{3}\right) d\varphi + \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{6}\sin^4\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)d\varphi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2\varphi-\frac{1}{2}\sin 4\varphi\right)d\varphi=\frac{9}{16}\pi.$$

Читателю будет полезно воспроизвести на чертеже области интегрирования D_1, D_2, D_3.

49. $I=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy.$

Решение. Внутри замкнутой области $D_1=\{|x|\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^2\}$ выражение $y-x^2$ отрицательно, а внутри замкнутой области $D_2=$ $=\{|x|\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 2\}$ — положительно, поэтому имеем:

$$I=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy.$$

Заменяя двойные интегралы повторными, находим:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,dy+\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left((x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=x^2}^{y=0}+(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=x^2}^{y=2}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2|x|+(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Полагая в последнем интеграле $x=\sqrt{2}\sin t$, окончательно получаем:

$$I=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}.$$

Вычислить интегралы от разрывных функций:

50. $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy.$

Решение. Область интегрирования симметрична, а в симметричных относительно осей координат точках подынтегральная функция принимает равные значения, поэтому можем написать:

$$I=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 4\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy.$$

Решая в области интегрирования неравенство $x^2-y^2+2\geqslant 0$, получаем $y\leqslant\sqrt{x^2+2}$. При $y\geqslant\sqrt{x^2+2}$, очевидно, $x^2-y^2+2\leqslant 0$. Представляя область интегрирования как объединение замкнутых областей

$D_1 = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x^2+2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$ и $D_2 = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \ \sqrt{x^2+2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}$, видим, что внутри D_1 подынтегральная функция равна 1, а внутри D_2 — равна -1. Следовательно, записав интеграл по заданной области интегрирования как сумму интегралов по множествам D_1 и D_2 и перейдя от двойных интегралов к повторным, получим:

$$I = 4\left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right) =$$

$$= 4\left(\int_0^1 (2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x^2})\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right) =$$

$$= 4\left((x\sqrt{x^2+2} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+2}))\Big|_0^1 - 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,dt + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\right) =$$

$$= 4\left(\sqrt{3} + 2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{3}.$$

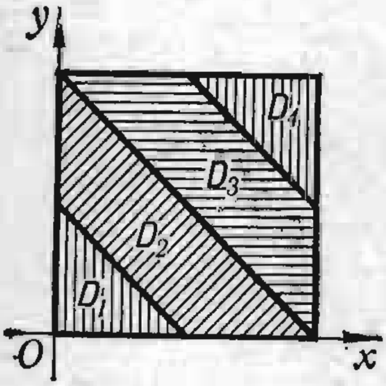

Рис. 7

51. $I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2}} [x+y]\,dxdy.$

Решение. Разобьем область интегрирования — замкнутый квадрат, длина стороны которого равна 2, — на четыре замкнутые области с помощью отрезков прямых $x + y = j$ ($j = 1, 2, 3$) (рис. 7) и обозначим эти области соответственно через D_k ($k = 1, 2, 3, 4$).

Обозначим подынтегральную функцию через f, тогда $f(x, y) = k - 1$ ($k = 1, 2, 3$), если $(x, y) \in D_k$ — внутренняя точка замкнутой области D_k. Обозначая через S_k ($k = 1, 2, 3, 4$) площади областей D_k, имеем: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{3}{2}$, $S_3 = S_2 = \frac{3}{2}$, $S_4 = S_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, получаем:

$$I = \sum_{k=1}^{4} \iint\limits_{D_k} f(x, y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{4} (k-1) S_k = S_2 + 2S_3 + 3S_4 = 6.$$

52. $I = \iint\limits_{x^2 \leqslant y \leqslant 4} \sqrt{[y - x^2]}\,dxdy.$

Решение. Из соображений симметрии заключаем, что интеграл можно написать в виде:

$$I = 2\iint\limits_{\substack{x^2 \leqslant y \leqslant 4 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2}} \sqrt{[y - x^2]}\,dxdy.$$

С помощью кривых $y_j = x^2 + j$ $(j = 1, 2, 3)$ разобьем область интегрирования на четыре замкнутые области D_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ (рис. 8). Если $(x, y) \in D_k$, то $\sqrt{[y - x^2]} = \sqrt{k-1}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Таким образом, можем написать:

$$I = 2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\iint\limits_{D_k} dx\,dy.$$

Интеграл по множеству D_k представим в виде суммы интегралов по множествам $D_k^{(1)} = \{0 \leqslant x \leqslant \sqrt{5-(k+1)},\ x^2 + k - 1 \leqslant y \leqslant x^2 + k\}$ и $D_k^{(2)} = \{\sqrt{5-(k+1)} \leqslant x \leqslant \sqrt{5-k},\ x^2 + k - 1 \leqslant y \leqslant 4\}$ и перейдем к повторным интегралам:

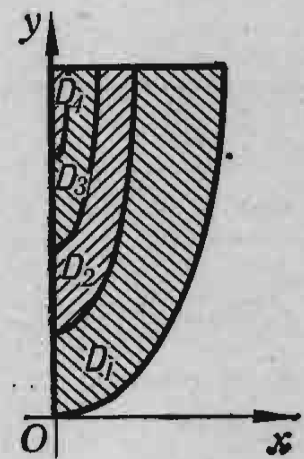

Рис. 8

$$\iint\limits_{D_k} dx\,dy = \iint\limits_{D_k^{(1)}} dx\,dy + \iint\limits_{D_k^{(2)}} dx\,dy = \sqrt{5-(k+1)} +$$
$$+ (5-k)\left(\sqrt{5-k} - \sqrt{5-(k+1)}\right) -$$
$$- \frac{1}{3}\left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (5-(k+1))^{\frac{3}{2}}\right).$$

Окончательно находим:

$$I = 2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\left(\sqrt{5-(k+1)} + (5-k)\left(\sqrt{5-k} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{5-(k+1)}\right) - \frac{1}{3}\left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (5-(k+1))^{\frac{3}{2}}\right)\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\left(4 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\right).$$

53. Доказать, что

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} x^k y^n\,dx\,dy = 0,$$

если k и n — целые положительные числа и, по меньшей мере, одно из них нечетно.

Доказательство. Заменив двойной интеграл повторным, получим:

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} x^k y^n\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} x^k dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy.$$

Если k — нечетное, а n — четное, то функция

$$\varphi(x) = x^k \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy$$

является нечетной на сегменте $[-a, a]$, в силу чего

$$I = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Если же n — нечетное, то справедливо равенство

$$\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^n dy = 0,$$

в силу которого $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [-a, a]$ при любом натуральном k и $I = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\,dx = 0$.

54. Найти $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x, y)\,dxdy$, где f — непрерывная функция.

Решение. Переходя к полярным координатам r и φ и применяя теорему о среднем, получаем:

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant\rho \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = f(\bar{r}\cos\bar{\varphi}, \bar{r}\sin\bar{\varphi}),$$

где $(\bar{r}, \bar{\varphi})$ — некоторая точка круга $0 \leqslant r \leqslant \rho$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Когда $\rho \to 0$, то и $\bar{r} \to 0$, поэтому, в силу непрерывности подынтегральной функции, имеем:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} f(x, y)\,dxdy = f(0, 0).$$

55. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t \\ 0\leqslant y\leqslant t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}\,dxdy$.

Решение. Полагая в интеграле $x = tu$, $y = tv$ $(t > 0)$, получаем $F(t) = ct^2$, где $c = \iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1 \\ 0\leqslant v\leqslant 1}} e^{-\frac{u}{v^2}}\,dudv$. Дифференцируя по t, имеем: $F'(t) = 2ct = \frac{2}{t}ct^2 = \frac{2F(t)}{t}$ $(t > 0)$.

56. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

Решение. Произведя в интеграле замену по формулам $x - t = \rho\cos\varphi$, $y - t = \rho\sin\varphi$, получим:

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant 1 \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2+(t+\rho\sin\varphi)^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2+(t+\rho\sin\varphi)^2}\,\rho\,d\rho.$$

Записав повторный интеграл в виде

$$F(t) = \int_0^{2\pi} \Phi(t, \varphi)\,d\varphi, \text{ где } \Phi(t, \varphi) = \int_0^1 \sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2+(t+\rho\sin\varphi)^2}\,\rho\,d\rho$$

и применив формулу Лейбница дифференцирования по параметру, найдем:

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi(t,\varphi)}{\partial t}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{(t+\rho\cos\varphi)+(t+\rho\sin\varphi)}{\sqrt{(t+\rho\cos\varphi)^2+(t+\rho\sin\varphi)^2}}\,\rho d\rho=$$

$$=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leq 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

57. Найти $F'(t)$, если $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2<t^2} f(x,\ y)\,dxdy \quad (t>0)$.

Решение. Перейдя в интеграле к полярным координатам ρ и φ и заменив двойной интеграл повторным, получим: $F(t)=\int\limits_0^{2\pi}\Phi(t,\ \varphi)\,d\varphi$,

где $\quad \Phi(t,\ \varphi)=\int\limits_0^t \rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\rho.$

Применяя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получаем:

$$F'(t)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi(t,\varphi)}{\partial t}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\rho f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}tf(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi)\,d\varphi.$$

58. Доказать, что если функция f непрерывна, то функция

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi}f(\xi,\ \eta)\,d\eta$$

удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,\ y)$.

Доказательство. Возьмем частные производные от функции u, применив правило Лейбница дифференцирования по параметру:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x(f(\xi,\ x+y-\xi)+f(\xi,\ \xi-x+y))\,d\xi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x(f(\xi,\ x+y-\xi)-f(\xi,\ \xi-x+y))\,d\xi.$$

Введем в рассмотрение функции:

$$F(\xi,\ x+y-\xi)=\int f(\xi,\ x+y-\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi(\xi,\ \xi-x+y)=\int f(\xi,\ \xi-x+y)\,d\xi.$$

В силу непрерывности f, функции F и Φ имеют непрерывные частные производные по переменным ξ, $x+y-\xi$ и ξ, $\xi-x+y$ соответственно. Записав частные производные функции u в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)d\xi=\frac{1}{2}(F(x, y)+\Phi(x, y)-F(0, x+y)-\\ -\Phi(0, -x+y)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)d\xi=\frac{1}{2}(F(x, y)-\Phi(x, y)-F(0, x+y)+\\ +\Phi(0, -x+y)),$$

видим, что существуют производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, причем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x, y)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(0, x+y)}{\partial(x+y)}-\frac{\partial \Phi(0, -x+y)}{\partial(-x+y)}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(0, x+y)}{\partial(x+y)}-\frac{\partial \Phi(0, -x+y)}{\partial(-x+y)}\right).$$

Отсюда получаем: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y)$, что и требовалось доказать.

59. Пусть линии уровня функции f — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y)=v_1$ и $f(x, y)=v_2$. Доказать, что

$$\iint\limits_{S(v_1,\ v_2)} f(x, y)\,dxdy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y)=v_1$ и $f(x, y)=v$.

Доказательство. Предположим, что функция F дифференцируема на сегменте $[v_1, v_2]$. В силу ее возрастания, на этом сегменте $F'(v)>0$ при $v\in(v_1, v_2)$. Разобьем теперь сегмент $[v_1, v_2]$ на n частей точками $\bar{v}_0=v_1<\bar{v}_1<\cdots<\bar{v}_n=v_2$ и представим двойной интеграл в виде:

$$\iint\limits_{S(v_1,\ v_2)} f(x, y)\,dx\,dy=\sum_{j=0}^{n-1}\ \iint\limits_{S(\bar{v}_j,\ \bar{v}_{j+1})} f(x, y)\,dx\,dy,$$

где $S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1})$ — замкнутая область, ограниченная кривыми $f(x, y)=\bar{v}_j$ и $f(x, y)=\bar{v}_{j+1}$. В силу неравенств $\bar{v}_j\leqslant f(x, y)\leqslant\bar{v}_{j+1}$, если $(x, y)\in S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1})$, имеем:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\bar{v}_j\,\Delta S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1})\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\ \iint\limits_{S(\bar{v}_j,\ \bar{v}_{j+1})} f(x, y)\,dx\,dy\leqslant\\ \leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\bar{v}_{j+1}\,\Delta S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1}), \quad (1)$$

где $\Delta S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1})$ — площадь замкнутой области $S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1})$.

С помощью функции F можем написать равенство $\Delta S(\bar{v}_j, \bar{v}_{j+1}) = F(\bar{v}_{j+1}) - F(\bar{v}_j) = F'(\tilde{v}_j)\Delta\bar{v}_j$, где $\bar{v}_j < \tilde{v}_j < \bar{v}_{j+1}$ (в силу дифференцируемости F).

Записав $\bar{v}_j = \tilde{v}_j + \beta_1(\Delta\bar{v}_j)$, $\bar{v}_{j+1} = \tilde{v}_j + \beta_2(\Delta\bar{v}_j)$, где β_1 и β_2 — бесконечно малые при $\Delta\bar{v}_j \to 0$ функции, неравенство (1) приведем к виду:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta_1 F'(\tilde{v}_j)\Delta\bar{v}_j + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{v}_j F'(\tilde{v}_j)\Delta\bar{v}_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \iint\limits_{S(\bar{v}_j,\ \bar{v}_{j+1})} f(x, y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{v}_j F'(\tilde{v}_j)\Delta\bar{v}_j + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_2 F'(\tilde{v}_j)\Delta\bar{v}_j.$$

Перейдя к пределу в этих неравенствах при $\Delta\bar{v}_j \to 0$, получим:

$$\iint\limits_{S(v_1,\ v_2)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Вычисление площадей с помощью двойных интегралов

Площадь S плоской области D, ограниченной простой замкнутой кривой, можно найти по формуле

$$S = \iint\limits_D dx\,dy.$$

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми:

60. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(x^2 + y^2 \geqslant a^2)$.

Решение. Перейдя к полярным координатам ρ и φ, получим уравнения границы области в виде $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ и $\rho^2 = a^2$. Требуется найти численное значение площади плоской фигуры, ограниченной частью лемнискаты Бернулли $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ и частью окружности $\rho = a$ (и лежащей вне этой окружности) (рис. 9). Легко убедиться, что точка $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$ является одной из четырех точек пересечения лемнискаты с окружностью.

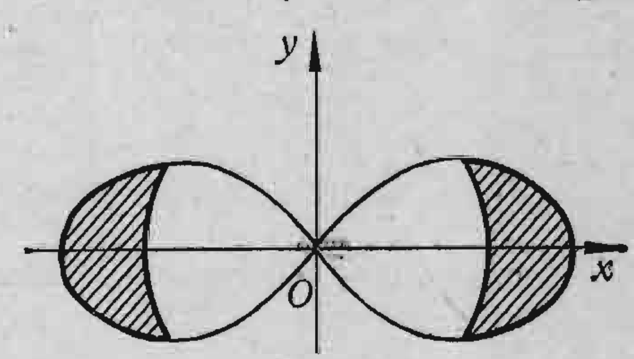

Рис. 9

На основании симметрии замкнутой области, площадь которой требуется вычислить, приходим к выводу, что искомая площадь равна учетверенной площади замкнутой области, определяемой неравенствами $a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$. Поэтому имеем:

$$S=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\, d\varphi =$$

$$= 2a^2(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

61. $(x^3+y^3)^2 = x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$ $(x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0)$.

Решение. Замкнутая область D, площадь которой мы вычисляем, лежит в первом квадранте, и частью ее границы являются отрезки осей координат, причем начало координат принадлежит границе. Поэтому при переходе к полярным координатам величина полярного угла изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Уравнение части границы области, не являющейся отрезком какой-либо из осей, в полярной системе координат имеет вид $\rho = \frac{1}{\sqrt{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}}$. Нам остается лишь воспользоваться готовой формулой для нахождения площади замкнутой области D:

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}}} \rho d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

Вычислим неопределенный интеграл $I(\varphi)=\int\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$. Записывая его в виде

$$I(\varphi)=\frac{1}{3}\int\frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2+2(1-\sin\varphi\cos\varphi)}{(\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin\varphi-\cos\varphi)}{1+(\sin\varphi-\cos\varphi)^2}+\frac{2}{3}\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi},$$

получаем:

$$I(\varphi)=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{2}{3\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

По формуле Ньютона—Лейбница находим:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}\right).$$

Полагая в формуле $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\alpha = \frac{\pi}{8}$, получаем: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. Окончательно имеем: $S = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2})$.

62. $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2 = a^2$ $(a>0$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant a^2)$.

Решение. Множество точек, ограниченное окружностью $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, лежит в первом квадранте, а множество точек, ограниченное замкнутой кривой $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$, лежит в первом и третьем квадрантах, поэтому замкнутая область, площадь которой требуется найти, лежит в первом квадранте. Перейдем к полярным координатам. Принимая во внимание симметрию точек области относительно отрезка луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (рис. 10), достаточно вычислить площадь S' замкнутой области, определяемой неравенствами $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $a((\sin\varphi + \cos\varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi}) \leqslant \rho \leqslant 2a\sqrt{\sin 2\varphi}$, и полученный результат удвоить.

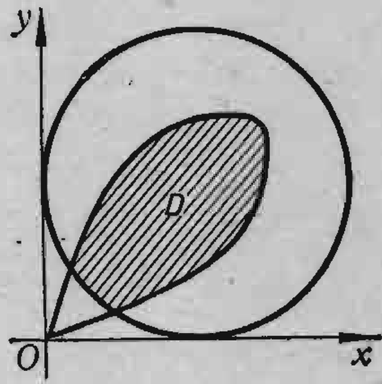

Рис. 10

Поэтому

$$S = 2S' = 2\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{a((\sin\varphi+\cos\varphi)-\sqrt{\sin 2\varphi})}^{2a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho =$$

$$= a^2 \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin 2\varphi + 2(\sin\varphi+\cos\varphi)\sqrt{\sin 2\varphi} - 1)\, d\varphi =$$

$$= a^2\left(\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{2}\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin 2\varphi}\, d\varphi\right) = a^2\left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8} + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{2}\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin 2\varphi}\, d\varphi\right).$$

Вычислим интеграл

$$I = \sqrt{2}\int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin 2\varphi}\, d\varphi.$$

Произведя в нем замену $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, получим:

$$I = \sqrt{2} \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8} + \frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{-\cos 2t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)} \sqrt{1 - (\sqrt{2}\cos t)^2}\, d(\sqrt{2}\cos t).$$

Замена $\sqrt{2}\cos t = z$ в последнем интеграле приводит к интегралу

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \sqrt{1 - z^2}\, dz.$$

Полагая, наконец, $z = \sin\theta$, получаем:

$$I = \int\limits_{0}^{\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8}\right).$$

Подставляя найденное значение I в выражение для величины площади S, находим: $S = a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$. Обозначив $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8} = \alpha$, будем иметь: $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}$, откуда $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}$. Окончательно получим: $S = a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}\right)$.

При решении примеров 63—68 вводятся обобщенные полярные координаты ρ и φ по формулам $x = a\rho\cos^\alpha\varphi$, $y = b\rho\sin^\alpha\varphi$ $(\rho \geqslant 0)$, где a, b и α — постоянные, специально подобранные. При такой замене, как легко убедиться,

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми (параметры считаются положительными):

63. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$.

Решение. Запишем уравнение границы области в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}$$

и перейдем в соответствующем двойном интеграле к обобщенным полярным координатам по формулам $\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=\rho\cos\varphi$, $\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=\rho\sin\varphi$. Тогда $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}=ab\rho$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$; следовательно,

$$S=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\rho\,d\rho=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

64. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

Решение. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам $x=a\rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$, $y=b\rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$. Тогда уравнение кривой (части границы области) примет вид: $\rho=\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, а якобиан преобразования будет равен выражению $\frac{2}{3}ab\rho\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\times$ $\times\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi$.

Пределы изменения угла φ очевидны, так как отрезки осей координат, имеющие общие концы в начале координат, являются частью границы области. Таким образом, имеем:

$$S=\frac{2}{3}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi}\rho\,d\rho=$$

$$=\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^{\frac{4}{3}}\varphi+\frac{b^2}{k^2}\sin^{\frac{4}{3}}\varphi\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^4}{h^4}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi+\frac{b^4}{k^4}\sin^{\frac{7}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi+\right.$$

$$\left.+\frac{2a^2b^2}{h^2k^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=\frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^4}{h^4}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi+\frac{b^4}{k^4}\sin^{\frac{7}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\right)d\varphi\right).$$

Поскольку справедливо равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{\frac{7}{3}}\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\sin^{\frac{7}{3}}\varphi\,d\varphi$$

(в чем легко убедиться, применив, например, в одном из интегралов подстановку $\frac{\pi}{2} - \varphi = t$), можем написать:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right)$$

(на основании формулы $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin^m x \, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$, доказанной при решении примера 123, гл. III).

Окончательно находим: $S = \frac{ab}{3}\left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right)\right)$.

65. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$ $(x > 0, \ y > 0)$.

Решение. Произведем замену переменных по формулам $x = a\rho \cos^2 \varphi$, $y = b\rho \sin^2 \varphi$. Тогда уравнение кривой, являющейся частью границы области, в полярной системе координат примет вид:

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а якобиан преобразования $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}$ будет равен выражению $2ab\rho \cos \varphi \times \times \sin \varphi$.

Заменив переменные в двойном интеграле $S = \iint\limits_D dx\,dy$, получим:

$$S = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}} \rho \, d\rho =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 \cos^5 \varphi \sin \varphi}{h^2} + \frac{b^2 \sin^5 \varphi \cos \varphi}{k^2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} \cos^6 \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

66. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Решение. Произведем замену переменных по тем же формулам, что и при решении задачи 65. Тогда уравнение кривой, являющейся частью границы области, примет вид:

$$\rho=\sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}.$$

Пределы изменения угла φ найдем, потребовав, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным: $\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}\geqslant 0$; отсюда получим неравенства: $\operatorname{tg}^4\varphi\leqslant\frac{a^2k^2}{b^2h^2}$, $|\operatorname{tg}\varphi|\leqslant\sqrt{\frac{ak}{bh}}$.

Из условия задачи $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ окончательно находим пределы изменения φ: $0\leqslant\operatorname{tg}\varphi\leqslant\sqrt{\frac{ak}{bh}}$, откуда $0\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных в интеграле $S=\iint\limits_D dx\,dy$ получаем:

$$S=2ab\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2\cos^4\varphi}{h^2}-\frac{b^2\sin^4\varphi}{k^2}}}\rho\,d\rho=$$

$$=ab\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^5\varphi\sin\varphi-\frac{b^2}{k^2}\sin^5\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2\cos^6\varphi}{h^2}+\frac{b^2\sin^6\varphi}{k^2}\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0}=$$

$$=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}\left(1-\cos^6\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)\right)-\frac{b^2}{k^2}\sin^6\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)\right).$$

Воспользовавшись формулами $\cos(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin(\operatorname{arctg}\alpha)=$ $=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, окончательно найдем: $S=\frac{a^4bk\,(ak+2bh)}{6h^2\,(ak+bh)^2}$.

67. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$.

Решение. Переходя к полярным координатам по формулам $x=$ $=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, получаем уравнение данной кривой в виде

$$\rho=\frac{a^2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{c^4\,(\sin\varphi+\cos\varphi)^5}.$$

Из этого представления кривой видим, что она пересекает сама себя в начале координат. Приходим к выводу, что фигура, площадь которой требуется вычислить, ограничена замкнутой кривой, лежащей в первом квадранте. В силу этих замечаний, в интеграле $S = \iint\limits_D dx\,dy$ можем произвести замену переменных по формулам $x = a\rho\cos^2\varphi$, $y = b\rho\sin^2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Такую же замену мы производили при решении задач 65 и 66, поэтому сразу напишем:

$$S = 2ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{\frac{a^2b^2\sin^4\varphi\cos^4\varphi}{c^4}} \rho\,d\rho =$$

$$= \frac{(ab)^5}{c^8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\varphi\cos^9\varphi\,d\varphi = \frac{(ab)^5}{2c^8} \mathrm{B}(5,\ 5) =$$

$$= \frac{(ab)^5}{2c^8} \cdot \frac{\Gamma^2(5)}{\Gamma(10)} = \frac{(ab)^5}{1260c^8}.$$

68. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1;\ x = 0,\ y = 0.$

Решение. Область ограничена кривой $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$ и отрезками осей координат $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

В интеграле $S = \iint\limits_D dx\,dy$ произведем замену по формулам $x = a\rho\cos^8\varphi$, $y = b\rho\sin^8\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Якобиан преобразования $\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)}$ в этом случае равен выражению $8ab\rho\sin^7\varphi\cos^7\varphi$. После замены переменных и перехода от двойного интеграла к повторному получим:

$$S = 8ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho = 4ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2ab\mathrm{B}(4,\ 4) = \frac{2ab\Gamma^2(4)}{\Gamma(8)} = \frac{ab}{70}.$$

В примерах 69, 70 границы областей, площади которых следует вычислить, заданы уравнениями вида: $f(x,\ y,\ a) = 0$, $f(x,\ y,\ b) = 0$, $g(x,\ y,\ \alpha) = 0$, $g(x,\ y,\ \beta) = 0$. При решении этих примеров удобнее всего производить замену переменных в интеграле $S = \iint\limits_D dx\,dy$ по формулам $f(x,\ y,\ u) = 0$, $g(x,\ y,\ v) = 0$.

69. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$ $(0 < a < b;\ 0 < c < d)$.

Решение. Из уравнений границы области видно, что она лежит в первом квадранте. Заменяя в интеграле $S = \iint\limits_D dx\,dy$ переменные по формулам $x^2 = uy$, $x^3 = vy^2$, видим, что замкнутый криволинейный четырехугольник отображается в прямоугольник $a \leqslant u \leqslant b$, $c \leqslant v \leqslant d$, а переменные x и y как функции u и v выражаются формулами $x =$

$= u^2v^{-1}$, $y = u^3v^{-2}$, из которых находим: $x'_u = 2uv^{-1}$, $x'_v = -u^2v^{-2}$, $y'_u = 3u^2v^{-2}$, $y'_v = -2u^3v^{-3}$, $\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = u^4v^{-4}$. Следовательно,

$$S = \int_a^b u^4\, du \int_c^d v^{-4}\, dv = \frac{1}{15}(b^5 - a^5)(c^{-3} - d^{-3}).$$

70. $y = ax^p$, $y = bx^p$, $y = cx^q$, $y = dx^q$ $(0 < p < q;\ 0 < a < b;\ 0 < c < d)$.

Решение. Запишем уравнения границы области в виде $y = ax^p$, $y = bx^p$, $x = c^{-\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{q}}$, $x = d^{-\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{q}}$ и в интеграле $S = \iint\limits_D dx\, dy$ произведем замену переменных по формулам $y = ux^p$, $x = vy^{\frac{1}{q}}$, которые отображают криволинейный замкнутый четырехугольник в прямоугольник $a \leqslant u \leqslant b$, $d^{-\frac{1}{q}} \leqslant v \leqslant c^{-\frac{1}{q}}$.

Поскольку $x = u^{\frac{1}{q-p}}v^{\frac{q}{q-p}}$, $y = u^{\frac{q}{q-p}}v^{\frac{pq}{q-p}}$, то $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = -\frac{q}{q-p} \times \times u^{\frac{p+1}{q-p}}v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}$, следовательно,

$$S = \frac{q}{q-p}\int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}}\, du \int_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}\, dv =$$

$$= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\, u^{\frac{q+1}{q-p}}\Big|_a^b \cdot v^{\frac{q(p+1)}{q-p}}\Big|_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} =$$

$$= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-p}} - d^{-\frac{p+1}{q-p}}\right).$$

71. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Решение. *Способ* I. Перейдем в двойном интеграле $S = \iint\limits_D dx\, dy$ к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho\cos^4\varphi$, $y = b\rho\sin^4\varphi$, которые отображают четырехугольник, ограниченный отрезками кривых в плоскости Oxy, в часть кольца $\{1 \leqslant \rho \leqslant 4,\ \operatorname{arctg} 1 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg}\sqrt[4]{4}\}$. При такой замене имеем:

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)} = 4ab\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi;$$

$$S = 4ab\int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{4}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi \int_1^4 \rho\, d\rho = 30ab\int_{\operatorname{arctg} 1}^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{4}} (\sin^3\varphi -$$

$$-\sin^5\varphi)\,d(\sin\varphi)=30ab\left(\frac{\sin^4\varphi}{4}-\frac{\sin^6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{4}}=$$

$$=\frac{5}{2}ab\sin^4\varphi\,(1+2\cos^2\varphi)\Bigg|_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}\sqrt[4]{4}}=\frac{5}{2}ab\left(\frac{4}{9}\left(1+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

(Мы воспользовались известными формулами $\sin(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\cos(\operatorname{arctg}\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$).

Способ II. Замена по формулам $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$, $\frac{y}{b}=v\frac{x}{a}$ приводит к интегралу

$$S=2ab\int_1^2 u^3\,du\int_1^4\frac{dv}{(1+\sqrt{v})^4}=\frac{15}{2}ab\int_1^4\frac{dv}{(1+\sqrt{v})^4}.$$

Положив в нем $\sqrt{v}=t$, получим:

$$S=15ab\int_1^2\frac{t\,dt}{(1+t)^4}=15ab\int_1^2\left(\frac{1}{(1+t)^3}-\frac{1}{(1+t)^4}\right)dt=$$

$$=15ab\left(\frac{1}{2(1+t)^2}-\frac{1}{3(1+t)^3}\right)\Bigg|_2^1=\frac{65ab}{108}.$$

72. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.

Решение. *Способ* I. В интеграле $S=\iint\limits_D dx\,dy$ заменим переменные согласно формулам $x=a\rho\cos^3\varphi$, $y=b\rho\sin^3\varphi$. Тогда $\frac{D(x,\,y)}{D(\rho,\,\varphi)}=3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi$, $1\leqslant\rho\leqslant 8$, $\operatorname{arctg}1\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg}2$,

$$S=3ab\int_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_1^8\rho\,d\rho=\frac{189}{2}ab\int_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{189}{8}ab\int_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}2}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{189ab}{16}\int_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1-(\sin\varphi\cos\varphi\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi))\Bigg|_{\operatorname{arctg}1}^{\operatorname{arctg}2}\right)=$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{6}{25}\right).$$

Способ II. Замена $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=u$, $\frac{y}{b}=v\frac{x}{a}$ приводит к интегралу

$$S=\frac{3ab}{2}\int_1^4 u^2\,du\int_1^8\frac{dv}{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}=\frac{63}{2}ab\int_1^8\frac{dv}{\left(1+v^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

Полагая в последнем интеграле $t=\sqrt[3]{v}$, получаем:

$$S=\frac{189}{2}ab\int_1^2\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^3}=\frac{189}{8}ab\left(\frac{t}{(1+t^2)^2}\bigg|_2^1+\int_1^2\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{189}{8}ab\left(0{,}17+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg}t\right)\bigg|_1^2\right)=$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\frac{6}{25}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

73. Найти площадь области, ограниченной эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u}=c^2$, $u=u_1$, u_2 и гиперболами $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$, $v=v_1$, v_2 $(0<u_1<u_2;\ 0<v_1<v_2;\ x>0,\ y>0)$.

Решение. Замена в двойном интеграле $S=\iint\limits_D dx\,dy$, произведенная по формулам $x=c\operatorname{ch}u\cos v$, $y=c\operatorname{sh}u\sin v$, приводит к интегралу

$$S=\iint\limits_{\substack{u_1\leqslant u\leqslant u_2\\ v_1\leqslant v\leqslant v_2}}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|du\,dv,$$

где $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v\\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=c^2(\operatorname{sh}^2 u\cos^2 v+\operatorname{ch}^2 u\sin^2 v)=\frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}2u-\cos 2v)$.

Таким образом, находим:

$$S=\frac{c^2}{2}\int_{u_1}^{u_2}du\int_{v_1}^{v_2}(\operatorname{ch}2u-\cos 2v)\,dv=$$

$$=\frac{c^2}{2}\int_{u_1}^{u_2}\left((v_2-v_1)\operatorname{ch}2u-\frac{1}{2}(\sin 2v_2-\sin 2v_1)\right)du=$$

$$=\frac{c^2}{4}\left((v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)\right).$$

74. Найти площадь области D, ограниченной кривыми $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, где λ принимает следующие значения: $\frac{c^2}{3}$, $\frac{2c^2}{3}$, $\frac{4c^2}{3}$, $\frac{5c^2}{3}$ $(x>0,\ y>0)$.

Решение. Легко видеть, что область D ограничена эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u}=c^2$, где u принимает два значения: $u_1=\operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $u_2=$ $=\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2}{3}}$, и гиперболами $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$, где v принимает два значения: $v_1=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $v_2=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Применяя результат, полученный при решении предыдущей задачи, можем сразу написать:

$$S=\frac{c^2}{4}\left(\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\operatorname{sh}2\left(\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\operatorname{sh}2\left(\operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)-\left(\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2}{3}}-\operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sin\left(2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right).$$

Пользуясь формулами $\arcsin\alpha-\arcsin\beta=\arcsin(\alpha\sqrt{1-\beta^2}-$ $-\beta\sqrt{1-\alpha^2})$, $\operatorname{sh}2(\operatorname{Arsh}\alpha)=2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ и принимая во внимание равенство $\sin 2\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\sin 2\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\right.$ $\left.\times\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=0$, окончательно получаем: $S=\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$.

75. Найти площадь области D, ограниченной эллипсом $(a_1x+$ $+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, где $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Решение. В интеграле $S=\iint\limits_D dx\,dy$ произведем замену переменных по формулам $a_1x+b_1y+c_1=u$, $a_2x+b_2y+c_2=v$. При такой замене область D отображается в круг D' с границей, уравнение которой $u^2+v^2=1$.

Используя известное свойство якобиана, выраженное формулой

$$\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}=\frac{1}{\frac{D(u,\ v)}{D(x,\ y)}},$$

получаем: $\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right|=\frac{1}{|\delta|}$. Таким образом,

$$S=\frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}du\,dv=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

76. Найти площадь сечения поверхности $x^2+y^2+z^2-xy-xz-$ $-yz=a^2$ плоскостью $x+y+z=0$.

Решение. Если S — площадь сечения поверхности плоскостью, а S' — площадь проекции этого сечения на плоскость Oxy, то справедлива формула $S=S'\sec\alpha$, где α — угол между плоскостью $x+$ $+y+z=0$ и плоскостью Oxy. Поскольку $\cos\alpha=\cos\gamma$, где γ — угол между вектором единичной нормали к плоскости $x+y+z=0$

и положительным направлением оси Oz, то $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{3}$ (так как $z = -(x+y)$, $z_x' = -1$, $z_y' = -1$ и единичная нормаль к плоскости $x + y + z = 0$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол). Для вычисления значения S осталось найти значение S'. Найдем уравнение границы области D', площадь которой равна S', подставив значение $z = -(x + y)$ в уравнение поверхности. В результате получим уравнение $x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{3}$.

В интеграле $S' = \iint\limits_{D'} dx\,dy$ перейдем к полярным координатам. При этом найдем:

$$S' = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{3(1+\sin\varphi\cos\varphi)}}} \rho\,d\rho = \frac{a^2}{6}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Подынтегральная функция является периодической функцией с периодом π, поэтому можем написать:

$$S' = \frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{a^2}{3}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\sin\varphi\cos\varphi} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{1+\sin\varphi\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{3}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi + 1} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi + 1}\right) =$$

$$= \frac{2a^2}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi + 1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\varphi + 1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{2\pi a^2}{3\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $S = S'\sec\alpha = \frac{2\pi a^2}{3}$.

77. Найти площадь сечения поверхности $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ плоскостью $z = 1 - 2(x + y)$.

Решение. Действуем по той же схеме, что и при решении предыдущей задачи, используя те же обозначения. Поскольку $z_x' = -2$, $z_y' = -2$, то $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = 3$. Подставляя $z = 1 - 2(x + y)$ в уравнение поверхности, получаем уравнение границы области D': $2(x^2 + y^2) - (x + y) + 3xy = 0$, которое в полярной системе координат принимает вид: $\rho = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2 + 3\sin\varphi\cos\varphi}$. Из условия $\rho \geqslant 0$ находим пределы изменения φ: $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$. Переходя к полярным координатам в интеграле $S' = \iint\limits_{D'} dx\,dy$, получаем:

$$S' = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2 + 3\sin\varphi\cos\varphi}} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2 + 3\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 d\varphi.$$

Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\left(\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{2 + 3\sin\varphi\cos\varphi}\right)^2 = \frac{8\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}{(4 + 3\sin 2\varphi)^2},$$

а затем произведем замену в интеграле, полагая $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$:

$$S' = 4\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{(4 - 3\cos 2t)^2} = 4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 t\,d(\operatorname{tg} t)}{(1 + 7\operatorname{tg}^2 t)^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\operatorname{tg}^2 t d(\operatorname{tg} t)}{(1 + 7\operatorname{tg}^2 t)^2}\right) = 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2\,dz}{(1 + 7z^2)^2} =$$

$$= 8\int\limits_0^{+\infty} \frac{z^2\,dz}{(1 + 7z^2)^2}$$

(после замены $\operatorname{tg} t = z$). Интегрируя по частям, находим:

$$S' = 8\left(\frac{z}{14\,(1+7z^2)} - \frac{1}{14\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\sqrt{7}\,z)\right)\Bigg|_{+\infty}^{0} = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}.$$

Таким образом, $S = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$.

§ 3. Вычисление объемов с помощью двойных интегралов

Пусть цилиндрический брус ограничен сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу — плоскостью $z = 0$, с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Если указанная цилиндрическая поверхность вырезает из плоскости Oxy квадрируемую замкнутую область D, то объем V бруса вычисляется по формуле:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

78. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

Решение. Тело ограничено сверху параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, снизу — плоскостью Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью $y=x^2$ и плоскостью $y=1$, вырезающими из плоскости Oxy квадрируемую замкнутую область $D=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\quad x^2\leqslant y\leqslant 1\}$. В точках множества D, симметричных относительно оси Oy, функция $z=x^2+y^2$ принимает равные значения, поэтому

$$V=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant 1}}(x^2+y^2)\,dx\,dy=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^1(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x^2-x^4+\frac{1}{3}-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{88}{105}.$$

79. $z=\cos x\cos y,\quad z=0,\quad |x+y|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad |x-y|\leqslant\frac{\pi}{2}.$

Решение. Тело ограничено сверху поверхностью $z=\cos x\cos y$, снизу — плоскостью Oxy, с боков — плоскостями $|x+y|=\frac{\pi}{2}$, $|x-y|=\frac{\pi}{2}$, вырезающими из плоскости Oxy квадрат D с границами $|x+y|=\frac{\pi}{2}$, $|x-y|=\frac{\pi}{2}$, $z=0$. Переходя в формуле (1) от двойного интеграла по множеству D к повторному, получаем:

$$V=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\,dx\int\limits_{-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}^{x+\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\int\limits_{x-\frac{\pi}{2}}^{-x+\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy=$$

$$=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 x\,dx+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\pi.$$

80. $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\quad z=0,\quad y=x,\quad y=0,\quad x=\pi.$

Решение. Плоскости $y=x$, $y=0$ и $x=\pi$ вырезают из плоскости $z=0$ замкнутый треугольник $D=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\quad 0\leqslant y\leqslant x\}$, а сверху тело ограничено поверхностью $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$, поэтому

$$V=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^\pi dx\int\limits_0^x\sin\frac{\pi y}{2x}\,dy=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{2}{\pi}\int\limits_\varepsilon^\pi x\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{x^2}{\pi}\right|_\varepsilon^\pi=\pi.$$

81. $z=xy,\quad x+y+z=1,\quad z=0.$

Решение. Поверхность $z=xy$ пересекается с плоскостью $x+y+z=1$ по кривой, уравнение проекции которой на плоскость Oxy имеет вид $y=\frac{1-x}{1+x}$. Следовательно, в нашем случае область интегрирования D (см. формулу (1)) — замкнутый треугольник $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$. Представим его как объединение множеств $D_1 = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1-x}{1+x}\right\}$, $D_2 = \left\{0 \leqslant x \leqslant 1, \frac{1-x}{1+x} \leqslant y \leqslant 1-x\right\}$. На множестве D_1 подынтегральная функция f имеет вид $f(x, y) = xy$, а на множестве D_2 $f(x, y) = 1-(x+y)$.

Представив интеграл (1) по замкнутой области D в виде суммы интегралов по множествам D_1 и D_2 и перейдя от двойных интегралов к повторным, получим:

$$V = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y\,dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x}\right)dx =$$

$$= \frac{17}{12} - 2\ln 2.$$

82. $z^2 = xy,\ x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Тело ограничено сверху и снизу конической поверхностью $z^2 = xy$, а с боков — цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$. В силу симметрии точек тела относительно плоскостей $z = 0$ и $x + y = 0$, можем вычислить значение $\frac{1}{4}$ части объема V и умножить полученный результат на 4. При этом в формуле для вычисления $\frac{1}{4}$ части объема областью интегрирования D в плоскости Oxy служит $\frac{1}{4}$ часть круга, ограниченная отрезками осей координат и дугой окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Таким образом, имеем:

$$V = 4\iint_D \sqrt{xy}\,dx\,dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, находим:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi \int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \mathrm{B}\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2a^3\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4a^3\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3\sqrt{\pi}}.$$

83. $z = x + y,\ (x^2 + y^2)^2 = 2xy,\ z = 0\ (x > 0,\ y > 0)$.

Решение. Тело ограничено сверху плоскостью $z = x + y$, снизу — плоскостью $z = 0$, с боков — цилиндрической поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x > 0,\ y > 0)$.

В интеграле

$$V = \iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$$

перейдем к полярным координатам. Принимая во внимание, что область интегрирования D ограничена кривой $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получаем:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho^2\,d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi\,(\sin\varphi +$$

$$+ \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(\sin\varphi - \cos\varphi)^2)^{\frac{3}{2}}\,d(\sin\varphi - \cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \frac{2}{3}\int_0^1 (1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz.$$

Полагая $z = \sin t$, находим:

$$V = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

84. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Решение. Тело ограничено сверху параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, снизу — плоскостью $z = 0$, извне — цилиндрической поверхностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и изнутри — цилиндрической поверхностью $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Эти цилиндры вырезают из плоскости Oxy замкнутую область D, которая в полярной системе координат определяется неравенствами $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi$. Перейдя в интеграле $V = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ к полярным координатам, получим:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^3\,d\rho = \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{45}{32}\pi.$$

85. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \geqslant a|x|$ $(a > 0)$.

Решение. Если из замкнутого шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ изъять множество точек $M = \{x^2 + y^2 < a|x|, \quad -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant$

$\leqslant \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$, то образуется тело, объем которого требуется найти. Принимая во внимание симметрию тела относительно координатных плоскостей, вычислим $\frac{1}{8}$ часть объема, а затем полученный результат увеличим в 8 раз. При этом область интегрирования D определяется неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $\sqrt{ax-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}$.

В интеграле $V = 8\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$ удобно перейти к полярным координатам. После замены находим:

$$V = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a} \rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left((a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\rho=a}^{\rho=a\cos\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{16}{9}a^3.$$

86. $x^2+y^2-az=0$, $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $z=0$ $(a>0)$.

Решение. Тело ограничено сверху параболоидом $z = \frac{x^2+y^2}{a}$, снизу — плоскостью Oxy, с боков — цилиндрической поверхностью $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, вырезающей из плоскости Oxy область, ограниченную лемнискатой Бернулли. Принимая во внимание симметрию области интегрирования относительно осей координат Ox и Oy, симметрию тела относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz и переходя к полярным координатам в интеграле $V = \frac{1}{a}\iint\limits_D (x^2+y^2)dx\,dy$, получаем:

$$V = \frac{4}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3\,d\rho = a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

87. $z = c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z=0$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $y = x\operatorname{tg}\beta$ $(a>0,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$.

Решение. Поверхность $z = c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$ пересекается с плоскостью Oxy по окружности $x^2+y^2=a^2$, а плоскости, ограничивающие тело с боков, — по прямым $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $y = x\operatorname{tg}\beta$ $(z=0)$, поэтому мы можем представить проекцию тела на плоскость Oxy в виде объединения замкнутых областей $D_1 = \{\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ 0\leqslant\rho\leqslant a\}$ и $D_2 = \{\pi+\alpha\leqslant\varphi\leqslant\pi+\beta,\ 0\leqslant\rho\leqslant a\}$, записав их в полярных координатах. Принимая во внимание симметрию точек области относительно начала координат и симметрию тела относительно плоскости $x+y=0$, после перехода к полярным координатам в интеграле (1), где $f(x,y) = c\cos\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, получаем:

$$V = 2c\int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^a \rho\cos\frac{\pi\rho}{2a}\,d\rho = 2c(\beta-\alpha)\left(\frac{2a}{\pi}\rho\sin\frac{\pi\rho}{2a}\Big|_0^a -\right.$$

$$\left.-\frac{2a}{\pi}\int_0^a \sin\frac{\pi\rho}{2a}\,d\rho\right) = 2c(\beta-\alpha)\left(\frac{2a^2}{\pi}-\frac{4a^2}{\pi^2}\right) = \frac{4a^2c}{\pi^2}(\beta-\alpha)(\pi-2).$$

88. $z = x^2+y^2$, $z = x+y$.

Решение. Параболоид вращения $z = x^2+y^2$ и плоскость $z = x+y$ пересекаются по кривой, причем уравнение проекции этой кривой на плоскость Oxy имеет вид $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$V = \iint\limits_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}} (x+y-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Заменяя в интеграле переменные по формулам $x-\frac{1}{2} = \rho\cos\varphi$, $y-\frac{1}{2} = \rho\sin\varphi$, получаем:

$$V = \iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \rho\left(\frac{1}{2}-\rho^2\right)d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\rho}{2}-\rho^3\right)d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}(\rho^2-\rho^4)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8}.$$

При решении примеров 89—98 мы будем в двойных интегралах переходить к обобщенным полярным или произвольным криволинейным координатам. Параметры, входящие в уравнения поверхностей, предполагаются положительными.

89. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

Решение. Тело ограничено частью конической поверхности и частью эллипсоида. Коническая поверхность вырезает из эллипсоида кусок поверхности, проекция которой на плоскость Oxy ограничена замкнутой кривой (эллипсом) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$. Из геометрических соображений заключаем, что искомый объем тела может быть найден с помощью интеграла

$$V = \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\frac{1}{2}} (z_1(x, y)-z_2(x, y))\,dx\,dy,$$

где $z_1(x, y) = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $z_2(x, y) = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$.

Переходя в интеграле к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, получаем:

$$V = abc \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} (\sqrt{1-\rho^2} - \rho)\,\rho\,d\rho = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\rho\sqrt{1-\rho^2} -$$

$$- \rho^2)\,d\rho = \frac{2}{3}\pi abc \left((1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \rho^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{3} abc\,(2-\sqrt{2}).$$

90. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Тело лежит в первом октанте и ограничено кусками координатных плоскостей, а также куском поверхности $z = c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}$, и проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D = \left\{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right\}$. В интеграле

$$V = c\iint\limits_D \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,dx\,dy$$

произведем замену переменных по формулам $x = a\rho\cos^2\varphi$, $y = b\rho\sin^2\varphi$. Принимая во внимание равенство $\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)} = 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$, а также пределы изменения φ и ρ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1\right)$, получаем:

$$V = 2abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{abc}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = \frac{abc}{3}.$$

91. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Решение. Тело ограничено частью поверхности эллипсоида и частью цилиндра, который вырезает из плоскости Oxy область, ограниченную замкнутой кривой $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z = 0$. Принимая во внимание симметрию тела относительно координатных плоскостей, а также симметрию точек области и ее границы относительно осей Ox и Oy, можем вычислить величину V объема тела по формуле

$$V = 8c \iint\limits_{\substack{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqslant \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Производя замену переменных в интеграле по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, находим:

$$V = 8abc \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{\cos 2\varphi} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\,d\varphi = 8abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{8}{3}abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^{0}\right)d\varphi = \frac{8}{3}abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sqrt{2}\sin^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}abc\left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\varphi - 1)\,d(\cos\varphi)\right) =$$

$$= \frac{8}{3}abc\left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\left(\frac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{2}{9}abc\,(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}).$$

92. $z = x^2 + y^2,\ xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = \frac{x}{2},\ y = 2x,\ z = 0.$

Решение. Тело ограничено сверху параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, снизу — плоскостью Oxy, с боков — цилиндрическими поверхностями $xy = a^2$, $xy = 2a^2$ и плоскостями $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$. В силу симметрии тела относительно плоскости $x + y = 0$, рассмотрим одну его часть (половину), лежащую в первом октанте. Эта часть проектируется на плоскость Oxy в криволинейный четырехугольник D, ограниченный частями кривых $xy = a^2$, $xy = 2a^2$ и отрезками прямых $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ $(z = 0)$.

В интеграле

$$V = 2\iint\limits_{D'} (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

где D' — множество всех точек области D и ее границы, произведем замену переменных по формулам $xy = u_1$, $y = v_1 x$, которые отображают область D и ее границу в прямоугольник $a^2 \leqslant u_1 \leqslant 2a^2$, $\frac{1}{2} \leqslant v_1 \leqslant 2$.

Якобиан преобразования, как это следует из решения примера 43, равен выражению $\frac{1}{2v_1}$. После замены переменных находим:

$$V = \int\limits_{a^2}^{2a^2} u_1 du_1 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{v_1^2}\right) dv_1 = \frac{9}{2}a^4.$$

93. $z = xy,\ x^2 = y,\ x^2 = 2y,\ y^2 = x,\ y^2 = 2x,\ z = 0.$

Решение. Тело ограничено сверху гиперболическим параболоидом $z = xy$, снизу — плоскостью Oxy и проектируется на эту плоскость в криволинейный четырехугольник D, ограниченный частями кривых $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$ $(z = 0)$. В интеграле

$$V = \iint\limits_{D'} xy\,dx\,dy,$$

где D' — множество всех точек области D и ее границы, заменим переменные по формулам $x^2 = u_1 y$, $y^2 = v_1 x$, отображающим область D и ее границу в квадрат $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$, $1 \leqslant v_1 \leqslant 2$. Тогда $\frac{D(x, y)}{D(u_1, v_1)} = \frac{1}{3}$,

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 u_1\,du_1 \int\limits_1^2 v_1\,dv_1 = \frac{3}{4}.$$

94. $z = c \sin\frac{\pi xy}{a^2}$, $z = 0$, $xy = a^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta;\ x > 0)$.

Решение. Поверхность $z = c\sin\frac{\pi xy}{a^2}$ пересекается с плоскостью Oxy по кривой $xy = a^2$; тело, объем которого мы вычисляем, проектируется на эту плоскость в область D — криволинейный треугольник, ограниченный отрезками лучей $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(x > 0)$ и частью кривой $xy = a^2$. В интеграле

$$V = c\iint\limits_{D'} \sin\frac{\pi xy}{a^2}\,dx\,dy,$$

где D' — множество всех точек области D и ее границы, перейдем к полярным координатам. Тогда получим:

$$V = c\int\limits_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}} \rho\sin\frac{\pi\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{a^2c}{2\pi}\int\limits_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta}\left(\cos\frac{\pi\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{a^2}\Bigg|_{\rho=\frac{a}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}^{\rho=0}\right)\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} =$$

$$= \frac{a^2c}{\pi}\int\limits_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta}\frac{d(2\varphi)}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2c}{\pi}\ln|\operatorname{tg}\varphi|\,\Big|_{\operatorname{arctg}\alpha}^{\operatorname{arctg}\beta} = \frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

95. $z = c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} = a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(y \geqslant 0)$.

Решение. Из условия $y \geqslant 0$ следует, что $x > 0$, поэтому тело ограничено сверху частью поверхности $z = c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, снизу — частью плоскости Oxy, с боков — частью цилиндрической поверхности $\sqrt{x^2 + y^2} = a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и частью плоскости $x = 0$. Цилиндрическая поверхность пересекается с плоскостью Oxy по части спирали Архимеда (т. е. по кривой, полярное уравнение которой $\rho = a\varphi$). Проекция тела на плоскость Oxy — замкнутая область, определяемая в полярных координатах неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant a\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$; следовательно,

$$V = c\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\, d\varphi \int_0^{a\varphi} \rho\, d\rho = \frac{a^2c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3\, d\varphi = \frac{a^2c\pi^4}{128}.$$

96. $z = ye^{-\frac{xy}{a^2}}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$ $(0 < m < n)$.

Решение. В интеграле

$$V = \iint_D ye^{-\frac{xy}{a^2}}\, dx\, dy,$$

где D — множество точек плоскости Oxy, ограниченное отрезками прямых $y = m$, $y = n$ и частями кривых $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, произведем замену переменных по формулам $xy = u_1$, $y = v_1$. Тогда получим:

$$V = \int_{a^2}^{2a^2} e^{-\frac{u_1}{a^2}}\, du_1 \int_m^n dv_1 = (n - m)\, a^2 e^{-\frac{u_1}{a^2}}\Big|_{2a^2}^{a^2} = a^2(n - m)(e^{-1} - e^{-2}).$$

97. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0)$.

Решение. Тело находится в первом октанте и ограничено частью поверхности $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, а также частями координатных плоскостей, и проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область, определяемую неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b\sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}$. Таким образом, имеем:

$$V = c \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b\sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}}} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n}\right)}\, dx\, dy.$$

Заменим в интеграле переменные по формулам $x = a\rho\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$; тогда $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \frac{2}{n}ab\rho\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi$, и мы получим:

$$V = \frac{2}{n}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt[n]{1 - \rho^n}\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{n}abc\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

(В интеграле $\int_0^1 \rho\sqrt[n]{1 - \rho^n}\, d\rho$ произведена замена $\rho^n = t$).

98. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\quad (n>0,\ m>0).$

Решение. Тело находится в первом октанте, а части координатных плоскостей вместе с частью поверхности $z=c\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n}$ являются его границей. Заменим в интеграле

$$V=c\iint\limits_{\substack{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}\sqrt[m]{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n}\,dx\,dy$$

переменные по формулам $x=a\rho\cos^2\varphi$, $y=b\rho\sin^2\varphi$. Тогда получим:

$$V=2abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho\sqrt[m]{1-\rho^n}\,d\rho=abc\int\limits_0^1\rho\sqrt[m]{1-\rho^n}\,d\rho=$$

$$=\frac{abc}{n}\,\mathrm{B}\left(\frac{2}{n},\ 1+\frac{1}{m}\right)=\frac{abc}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{m}\right)}=\frac{abc}{2m+n}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{m}\right)}.$$

§ 4. Вычисление площадей поверхностей с помощью двойных интегралов

1°. Случай явного задания поверхности. Численное значение площади гладкой поверхности (или ее куска), заданной уравнением $z=z(x,\ y)$, можно найти по формуле

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy,\tag{1}$$

где D — проекция этой поверхности (или ее куска) на плоскость Oxy.

2°. Случай параметрического задания поверхности. Если уравнение поверхности (или ее куска) задано параметрически: $x=x(u,\ v)$, $y=y(u,\ v)$, $z=z(u,\ v)$, $(u,\ v)\in T$, где T — ограниченная замкнутая квадрируемая область и функции x, y и z непрерывно дифференцируемы в T, то численное значение S площади поверхности (или ее куска) можно найти по формуле

$$S=\iint\limits_T\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,\tag{2}$$

где E, G, F — гауссовы коэффициенты данной поверхности:

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

99. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Подставив выражение $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2}}$ в интеграл (1), получим:

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2}}\, dx\, dy.$$

Заменяя в интеграле переменные по формулам $x = a\rho\cos\varphi$, $y = a\rho\sin\varphi$, находим:

$$S = a^2 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho\, d\varphi = a^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^2 (1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi a^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

100. Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

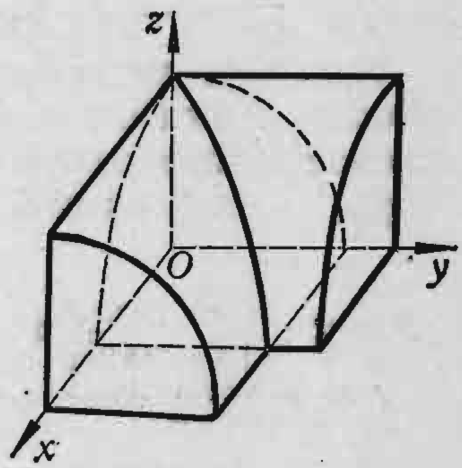

Рис. 11

Решение. Из рисунка 11 видно, что $\frac{1}{16}$ часть поверхности тела, образованного в результате пересечения цилиндров (с образующими, параллельными осям Ox и Oy), проектируется на плоскость Oxy в треугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x$, поэтому численное значение S площади поверхности тела можем найти по формуле

$$S = 16 \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant x}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy,$$

где $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Поскольку $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, то

$$S = 16a \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_0^x dy = 16a \int\limits_0^a \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 16a\sqrt{a^2-x^2}\,\Big|_a^0 = 16a^2.$$

101. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

Решение. Цилиндр, пересекаясь со сферой, вырезает из нее симметричные относительно плоскости Oxy куски, каждый из которых рассекается координатными плоскостями на четыре равные части. При $z \geqslant 0$ имеем: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $1 + z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$. Таким образом,

$$S = 8a \iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = 8a\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= 8a\int_0^a \left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)dx = 8a^2\arcsin\frac{b}{a}.$$

102. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

Решение. Дифференцируя левую и правую части уравнения $z^2 = 2xy$, получаем $z\,dz = y\,dx + x\,dy$, откуда $z'_x = \frac{y}{z}$, $z'_y = \frac{x}{z}$, $1 + z'^2_x + z'^2_y = \frac{(x+y)^2}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy}$.

Принимая во внимание, что точки поверхности симметричны относительно плоскости Oxy и что верхняя ее часть (относительно этой плоскости) проектируется в замкнутый треугольник $\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$, находим:

$$S = 2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} \left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 2\sqrt{2}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)dx = 2\sqrt{2}\left(\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} + \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

103. Найти площадь части поверхности $x^2+y^2+z^2=a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2+y^2=\pm ax$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется вычислить, состоит из двух симметричных относительно плоскости $z=0$ частей, каждая из которых разрезается плоскостью Ozy на две равные части. Для решения задачи достаточно вычислить $\frac{1}{8}$ часть площади поверхности и результат увеличить в 8 раз. Рассмотрим часть поверхности, находящуюся в первом октанте. Она проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область D, определяемую неравенствами $0\leqslant x\leqslant a$, $\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}$.

Принимая во внимание равенства $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $1+z_x'^2+z_y'^2=$ $=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$, получаем:

$$S=8a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, находим:

$$S=8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=8a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-\rho^2}\Big|_a^{a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=8a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi=8a^2.$$

104. Найти площадь части поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

Решение. Поверхность, площадь которой требуется определить, вырезается цилиндром из конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Цилиндр пересекается с плоскостью Oxy по окружности $(x-1)^2+y^2=1$ $(z=0)$, которая является границей области интегрирования в двойном интеграле, равном численному значению площади поверхности.

Для функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$ имеем: $1+z_x'^2+z_y'^2=2$; поэтому

$$S=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy=\pi\sqrt{2},$$

поскольку интеграл $\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy$ равен по величине площади круга единичного радиуса.

105. Найти площадь части поверхности $z=\sqrt{x^2-y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Решение. Цилиндр вырезает из конической поверхности $z=$ $=\sqrt{x^2-y^2}$ симметричные относительно плоскости Ozy и равные между собой куски. Легко видеть, что $\frac{1}{4}$ часть поверхности, площадь которой требуется вычислить, проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область $D=\{(x^2+y^2)^2\leqslant a^2(x^2-y^2),\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$. Поскольку для нашего случая $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\frac{\sqrt{2}\,|x|}{\sqrt{x^2-y^2}}$, то

$$S=4\sqrt{2}\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, получаем:

$$S = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 2\sqrt{2}\, a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-(\sqrt{2}\sin\varphi)^2}\, d(\sqrt{2}\sin\varphi).$$

Полагая в интеграле $\sqrt{2}\sin\varphi = t$, находим:

$$S = 2a^2 \int\limits_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi a^2}{2}.$$

106. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезанной плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

Решение. $\frac{1}{4}$ часть поверхности, площадь которой требуется вычислить, проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\}$. Следовательно, поскольку $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, искомую площадь находим по формуле:

$$S = 4\iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам:

$$S = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \rho\sqrt{1+\rho^2}\, d\rho = \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg)^{\frac{3}{2}} d\varphi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + \operatorname{ctg}^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{3}{2}} d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(3+t^2)^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}\, dt = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} I_1$$

$\left(\text{после замены } \operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = t\right)$. Вычислим интеграл I_1:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(3+t^2)^{\frac{3}{2}}}{1+t^2}\, dt = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \frac{2}{1+t^2}\right)\sqrt{3+t^2}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{3+t^2}\,dt + 2\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3+t^2}}{1+t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{3+t^2}\,dt + 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{3+t^2}} +$$

$$+ 4\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} = \left(\frac{t}{2}\sqrt{3+t^2} + \frac{7}{2}\ln\left(t+\sqrt{3+t^2}\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+ 4\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} = 2 + \frac{7}{2}\ln 3 + 4\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}} =$$

$$= 2 + \frac{7}{2}\ln 3 + 4I_2.$$

Осталось вычислить интеграл I_2. Произведя в нем замену по формуле $t = \sqrt{3}\operatorname{tg} z$, получим:

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z\,dz}{\cos^2 z + 3\sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sqrt{2}\sin z)}{1+(\sqrt{2}\sin z)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin z)\Bigg|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно находим: $S = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 + \frac{7}{4}\ln 3\right) + \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

107. Найти площадь части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

Решение. Из условия задачи заключаем, что поверхность $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ симметрична относительно оси Oz (поскольку ее сечения $z = \text{const}$ являются окружностями с центрами, лежащими на оси Oz) и что $z \geqslant 0$. Цилиндрическая поверхность симметрична относительно плоскости $y = x$ и пересекается с плоскостью Oxy по кривой, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$. Четвертая часть куска поверхности, вырезанного из параболоида цилиндром, проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область D, ограниченную отрезком луча $y = x$ $(x \geqslant 0)$ и частью кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$. Поскольку $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}$, то, принимая во внимание приведенные выше рассуждения, имеем:

$$S = \frac{4}{a}\iint_D \sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Перейдя в двойном интеграле к полярным координатам, получим:

$$S=\frac{4}{a}\iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant a\sqrt{\sin 2\varphi}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}}}\rho\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho\,d\varphi=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho\sqrt{a^2+\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(a^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}}\right)d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left((1+\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}-1\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\varphi+\cos\varphi)^3\,d\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)d\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

108. Найти площадь части поверхности $\sin z=\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$, отсекаемой плоскостями $x=1$ и $x=2$ $(y\geqslant 0)$.

Решение. Из условия следует, что $\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y\leqslant 1$, откуда $0\leqslant y\leqslant\operatorname{Arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\right)$.

Дифференцируя равенство $\sin z=\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$, получаем: $\cos z\,dz=\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y\,dx+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\,dy$, откуда $z'_x=\frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y}{\cos z}$, $z'_y=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y}{\cos z}$; следовательно,

$$1+z_x'^2+z_y'^2=1+\frac{\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y+\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2y}{\cos^2z}=1+\frac{\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y+\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y+\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y+\operatorname{sh}^2x\operatorname{ch}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}=\frac{1+\operatorname{sh}^2x\,(\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y)+\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}=$$

$$=\frac{1+\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}=\frac{\operatorname{ch}^2x\,(1+\operatorname{sh}^2y)}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}=\frac{\operatorname{ch}^2x\operatorname{ch}^2y}{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}.$$

По формуле (1) имеем:

$$S=\int_1^2\operatorname{ch}x\,dx\int_0^{\operatorname{Arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\right)}\frac{\operatorname{ch}y\,dy}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}^2y}}=$$

$$=\int_1^2\operatorname{ch}x\,dx\int_0^{\operatorname{Arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\right)}\frac{d(\operatorname{sh}y)}{\sqrt{1-(\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y)^2}}=$$

$$= \int_1^2 \operatorname{cth} x \left(\arcsin (\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y) \Big|_{y=0}^{y=\operatorname{Arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \arcsin 1 \operatorname{cth} x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \ln (\operatorname{sh} x) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}} = \frac{\pi}{2} \ln \left(e + \frac{1}{e} \right).$$

109. Найти площадь поверхности и объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$, $x + y + z = 2a$ $(a > 0)$.

Решение. Прежде всего напишем уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой пересекаются коническая поверхность и плоскость. Для этого подставим $z = 2a - x - y$ в уравнение конической поверхности $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$. Получим уравнение кривой в виде $2a - (x + y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. Эта кривая — граница области, являющейся проекцией на плоскость Oxy куска плоскости $z = 2a - (x + y)$, вырезанного конической поверхностью. Обозначим указанную область вместе с ее границей через D. Тогда, очевидно, можем написать:

$$V = \iint_D \left(2a - (x + y) - \sqrt{3(x^2 + y^2)}\right) dx\, dy, \tag{α}$$

$$S = S_1 + S_2,$$

где S_1 — численное значение площади куска конической поверхности, проектирующейся в D, а S_2 — значение площади части плоскости, проектирующейся в D. Для конической поверхности $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = 2$, а для плоскости $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{3}$, поэтому

$$S = (2 + \sqrt{3}) \iint_D dx\, dy. \tag{β}$$

Перейдем в интегралах (α) и (β) к полярным координатам. Учитывая, что уравнение границы области интегрирования примет вид $\rho(\sqrt{3} + \sin\varphi + \cos\varphi) = 2a$, откуда $0 \leqslant \rho \leqslant \dfrac{2a}{\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$, получаем:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}} \left(2a - \rho\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{4}{3} a^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}\sin t)^2} = \frac{4}{3} a^3 I,$$

$$S=(2+\sqrt{3})\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{2a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}}\rho\,d\rho=$$

$$=2a^2(2+\sqrt{3})\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}=$$

$$=2a^2(2+\sqrt{3})\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin t)^2}=2a^2(2+\sqrt{3})\,I.$$

Вычислим интеграл I:

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+2\pi}\frac{dt}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin t)^2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi-\frac{\pi}{4}}\frac{dz}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos z)^2}$$

$\left(\text{после замены } t-\frac{\pi}{2}=z\right)$. В последнем интеграле можно взять пределы интегрирования от 0 до 2π, так как подынтегральная функция периодическая с периодом 2π. Записав I в виде

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\cos z\right)^2}$$

и приняв во внимание решение примера 207, гл. III, ч. 1, получим:

$$I=\left(-\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\sin z}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}\cos z}+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}}+\right.$$

$$\left.\left.+2\sqrt{3}\pi\left[\frac{z+\pi}{2\pi}\right]\right)\right|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$V=\frac{4}{3}a^3\,2\sqrt{3}\pi=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3,$$

$$S=2a^2(2+\sqrt{3})\,2\sqrt{3}\,\pi=4\pi a^2(3+2\sqrt{3}).$$

110. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

Решение. Пусть φ_1, φ_2 — долготы меридианов ($\varphi_2 > \varphi_1$), а ψ_1, ψ_2 — широты параллелей ($\psi_2 > \psi_1$). Тогда координаты любой точки части сферы радиуса R, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами, можно записать в параметрической форме:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\sin\varphi\cos\psi, \quad z = R\sin\psi,$$
$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \quad \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2.$$

Вычислим частные производные функций x, y, z по переменным φ и ψ:

$$x'_\varphi = -R\sin\varphi\cos\psi, \quad y'_\varphi = R\cos\varphi\cos\psi, \quad z'_\varphi = 0,$$
$$x'_\psi = -R\cos\varphi\sin\psi, \quad y'_\psi = -R\sin\varphi\sin\psi, \quad z'_\psi = R\cos\psi$$

и найдем гауссовы коэффициенты данной поверхности:

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = R^2\cos^2\psi, \quad G = (x'_\psi)^2 + (y'_\psi)^2 + (z'_\psi)^2 = R^2,$$
$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = 0.$$

Тогда по формуле (2) получим:

$$S = \iint\limits_{\substack{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \\ \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2}} R^2\cos\psi\, d\varphi\, d\psi = R^2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} \cos\psi\, d\psi =$$
$$= R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1).$$

111. Найти площадь части геликоида $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = h\varphi$, где $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

Решение. Искомую площадь найдем по формуле (2) (роль переменных u и v здесь выполняют переменные ρ и φ). Имеем:

$$x'_\rho = \cos\varphi, \quad y'_\rho = \sin\varphi, \; z'_\rho = 0, \quad x'_\varphi = -\rho\sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho\cos\varphi, \quad z'_\varphi = h,$$
$$E = (x'_\rho)^2 + (y'_\rho)^2 + (z'_\rho)^2 = 1, \quad G = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = \rho^2 + h^2,$$
$$F = x'_\rho x'_\varphi + y'_\rho y'_\varphi + z'_\rho z'_\varphi = -\rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{\rho^2 + h^2}\, d\rho = \pi\left(\rho\sqrt{\rho^2 + h^2} + h^2\ln(\rho + \sqrt{\rho^2 + h^2})\right)\Big|_0^a =$$
$$= \pi\left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\right).$$

112. Найти площадь части поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leqslant b)$, ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$. Чему равна площадь поверхности всего тора?

Решение. Для нахождения искомой площади достаточно формально применить формулу (2). Вычислим гауссовы коэффициенты E, G, F данной поверхности:

$$x'_\varphi = -(b + a\cos\psi)\sin\varphi, \quad y'_\varphi = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \quad z'_\varphi = 0,$$
$$x'_\psi = -a\cos\varphi\sin\psi, \quad y'_\psi = -a\sin\varphi\sin\psi, \quad z'_\psi = a\cos\psi,$$
$$E = (b + a\cos\psi)^2, \quad G = a^2, \quad F = 0.$$

По формуле (2) имеем:

$$S = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} (b + a\cos\psi)\,d\psi = a(\varphi_2 - \varphi_1)(b(\psi_2 - \psi_1) + $$
$$+ a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)).$$

Чтобы найти площадь всей поверхности тора, подставим в полученную формулу $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$ и $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 2\pi$. Таким образом, $S_{\text{полн}} = 4\pi^2 ab$.

113. Найти телесный угол ω, под которым виден из начала координат прямоугольник $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Вывести приближенную формулу для ω, если a велико.

Решение. Телесным углом называют часть пространства, ограниченную конической поверхностью. Вершина угла совпадает с вершиной конуса. Мерой телесного угла служит площадь куска единичной сферы с центром в вершине телесного угла, вырезаемого из нее конической поверхностью.

Из условия задачи следует, что коническая поверхность состоит из частей плоскостей $z = \frac{c}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$, $y = \frac{b}{a}x$, причем вершина конуса находится в начале координат.

Рассмотрим грань конической поверхности $y = 0$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$. Единичная сфера пересекается с этой гранью по кривой, проектирующейся на плоскость Oxy в отрезок луча $x \geqslant 0$ $(y = 0)$. Грань $z = \frac{c}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$, $z = 0$ пересекается с единичной сферой по кривой, проектирующейся на плоскость Oxy в отрезок луча $y = \frac{b}{a}x$ $(x \geqslant 0)$. С гранью $y = 0$, $z = 0$, $y = \frac{b}{a}x$ единичная сфера пересекается по кривой $x^2 + y^2 = 1$, лежащей внутри угла, образованного лучами $y = \frac{b}{a}x$, $x \geqslant 0$, и на его границах, а с гранью $y = 0$, $z = \frac{c}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$ — по кривой, уравнение проекции которой на плоскость Oxy имеет вид $x^2\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = 1$, причем эта проекция также лежит внутри упомянутого угла и на его границах.

Таким образом, кусок единичной сферы, вырезаемый заданной конической поверхностью, проектируется на плоскость Oxy в замкнутую область D, ограниченную частями кривых $x^2 + y^2 = 1$, $x^2\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = 1$ и отрезками лучей $x \geqslant 0$ $(y = 0)$, $y = \frac{b}{a}x$ $(x \geqslant 0)$. Для нахождения искомого телесного угла воспользуемся формулой (1). Уравнение единичной сферической поверхности имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, поэтому $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Перейдем в интеграле $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ к полярным координатам.

Тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi}} \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$S = \int\limits_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi}}}^{1} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{c}{a} \int\limits_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi}} =$$

$$= \int\limits_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d\left(\frac{c}{a}\sin\varphi\right)}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}-\left(\frac{c}{a}\sin\varphi\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{\frac{c}{a}\sin\varphi}{\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}}}\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} =$$

$$= \arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \text{ кв. ед.}$$

Теперь легко найти телесный угол ω:

$$\omega = \frac{S \text{ кв. ед.}}{1 \text{ кв. ед.}} = \arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}.$$

Если a велико, то $\omega \approx \frac{bc}{a^2\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)}} \approx \frac{bc}{a^2}$.

§ 5. Приложения двойных интегралов к решению задач механики

1°. Центр тяжести плоской пластинки. Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки D, лежащей в плоскости Oxy, и $\mu = \mu(x, y)$ — плотность вещества пластинки, то x_0 и y_0 можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_D x\mu(x, y)\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_D y\mu(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $M = \iint\limits_D \mu(x, y)\,dx\,dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, то $\mu(x, y)$ является константой, которую принимают равной единице.

2°. Моменты инерции. Если I_x и I_y — моменты инерции пластинки D, лежащей в плоскости Oxy, относительно координатных осей Ox и Oy, то их можно вычислить по формулам:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y)\, dx\, dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

где $\mu(x, y)$ — плотность вещества пластинки.

Центробежный момент инерции I_{xy} вычисляется по формуле

$$I_{xy} = \iint_D xy\mu(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Положив в формулах (2) и (3) $\mu = 1$, получим геометрические моменты инерции плоской фигуры — замкнутой области D.

114. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность вещества пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна μ_0 в центре квадрата.

Решение. Предположим, что стороны пластинки являются отрезками осей координат $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$. Из условия задачи следует, что плотность вещества пластинки изменяется по формуле $\mu(x, y) = c\sqrt{x^2+y^2}$, где c — постоянная, подлежащая определению. Из условия $\mu\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \mu_0$ находим, что $c = \frac{\sqrt{2}}{a}\mu_0$.

Значение M массы получим с помощью формулы

$$M = \frac{\sqrt{2}}{a}\mu_0 \int_0^a dx \int_0^a \sqrt{x^2+y^2}\, dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{a}\mu_0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} \rho^2\, d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} \rho^2\, d\rho \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\mu_0 a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} \right) = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\mu_0 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\mu_0 a^2 \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} + \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{3} a^2 (2 + \sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})).$$

Найти координаты центров тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими кривыми:

115. $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

Решение. Прямая $x + y = 2a$ и парабола $y = \frac{x^2}{a}$ пересекаются в точках с абсциссами $x = -2a$ и $x = a$. Однородная пластинка представляет собой плоскую замкнутую область $D = \left\{-2a \leqslant x \leqslant a,\ \frac{x^2}{a} \leqslant \right.$ $\left. \leqslant y \leqslant 2a - x\right\}$, а ее масса численно равна интегралу

$$M = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{9}{2} a^2.$$

По формулам (1) имеем:

$$x_0 = \frac{2}{9a^2} \int_{-2a}^{a} x\, dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{2}{9a^2} \int_{-2a}^{a} \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a}\right) dx = -\frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{2}{9a^2} \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y\, dy = \frac{1}{9a^2} \int_{-2a}^{a} \left((2a - x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx = \frac{8}{5} a.$$

116. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x = 0$, $y = 0$.

Решение. Кривая $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ вместе с отрезками осей координат $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ ограничивает плоскую однородную пластинку. Масса пластинки численно равна ее площади, т. е. интегралу

$$M = \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2} dy = \int_0^a (a - 2\sqrt{ax} + x)\, dx = \frac{a^2}{6}.$$

Применяя формулы (1), получаем:

$$x_0 = \frac{6}{a^2} \int_0^a x\, dx \int_0^{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2} dy = \frac{6}{a^2} \int_0^a \left(ax - 2\sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} + x^2\right) dx = \frac{a}{5},$$

$$y_0 = \frac{6}{a^2} \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2} y\, dy = \frac{3}{a^2} \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^4\, dx = \frac{a}{5}.$$

117. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Решение. Пластинка ограничена отрезками осей координат $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ и частью астроиды. Вычислим интеграл

$$M = \iint\limits_{\substack{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqslant a^{\frac{2}{3}} \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0}} dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^y dy = \int_0^a y\, dx.$$

В последнем интеграле произведем замену переменных по формулам $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда получим:

$$M = \int_0^a y\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2 \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!}\right) = \frac{3}{32}\pi a^2$$

(знак «—» взят перед интегралом вследствие того, что возрастанию параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует убывание переменной x от a до 0).

По формулам (1) имеем:

$$x_0 = \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a x\,dx \int_0^y dy = \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a xy\,dx =$$

$$= \frac{32a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\sin^4 t\,dt = \frac{16}{\pi} a\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ 3\right) = \frac{256a}{315\pi};$$

$$y_0 = \frac{32}{3\pi a^2} \int_0^a dx \int_0^y y\,dy = \frac{16}{3\pi a^2} \int_0^a y^2\,dx =$$

$$= \frac{16}{\pi} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t\,dt = \frac{8}{\pi} a\mathrm{B}\left(4,\ \frac{3}{2}\right) = \frac{256a}{315\pi}.$$

118. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (петля).

Решение. Все точки области, ограниченной петлей, лежат в первом квадранте, поэтому при вычислении площади этой области можно произвести замену переменных в соответствующем двойном интеграле по формулам $x = a\rho\cos^2\varphi,\ y = b\rho\sin^2\varphi\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда уравнение границы области будет иметь вид $\rho = \frac{ab}{c^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ и мы получим:

$$M = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \rho\,d\rho = \frac{a^3b^3}{c^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^3b^3}{2c^4}\mathrm{B}\,(3,\ 3) = \frac{2a^3b^3}{5!\,c^4} = \frac{a^3b^3}{60c^4}.$$

По формулам (1) после замены переменных в интегралах находим:

$$x_0 = \frac{120c^4}{ab^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^3\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{40}{c^2} a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi \cos^9\varphi \, d\varphi = \frac{20}{c^2} a^2 b \mathrm{B}(4,\ 5) = \frac{20}{c^2} a^2 b \cdot \frac{(3!)\,(4!)}{8!} = \frac{a^2 b}{14c^2},$$

$$y_0 = \frac{120c^4}{a^2 b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{ab}{c^2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{40}{c^2} ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\varphi \cos^7\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{20}{c^2} ab^2 \mathrm{B}(5,\ 4) = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

119. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Решение. Однородная пластинка представляет собой область, лежащую в первом квадранте и ограниченную замкнутой кривой, полярное уравнение которой имеет вид $\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Масса пластинки равна численному значению ее площади, следовательно,

$$M = \iint\limits_{\substack{(x^2+y^2)^2 \leqslant 2a^2xy \\ x\geqslant 0,\ y \geqslant 0}} dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho \, d\rho = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}.$$

Применив формулы (1), получим:

$$x_0 = \frac{2}{a^2} \iint\limits_{(x^2+y^2)^2 \leqslant 2a^2xy} x \, dx\, dy = \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3}\sqrt{2}\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\varphi \cos^{\frac{5}{2}}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\, a \mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\right) = \frac{\pi}{8} a.$$

Аналогично находим:

$$y_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\sqrt{2}\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}}\varphi \cos^{\frac{3}{2}}\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\, a \mathrm{B}\left(\frac{7}{4},\ \frac{5}{4}\right) = \frac{\pi}{8} a.$$

120. $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi = 0$.

Решение. Обозначив через D множество точек (x, y), принадлежащих пластинке и ее границе, получим:

$$M = \iint_D dx\,dy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^2,$$

$$x_0 = \frac{4}{3\pi a^2}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{4}{3\pi a^2}\int_0^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4a}{9\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)^3\, d\varphi = \frac{4a}{9\pi}\int_0^{\pi}(3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{8a}{9\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\, d\varphi = \frac{5}{6}a,$$

$$y_0 = \frac{4}{3\pi a^2}\iint_D y\,dx\,dy = \frac{4}{3\pi a^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4a}{9\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi = \frac{4a}{9\pi}\int_{\pi}^{0}(1+\cos\varphi)^3\, d(\cos\varphi) = \frac{16a}{9\pi}.$$

121. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$.

Решение. Пластинка ограничена аркой циклоиды и отрезком оси Ox, поэтому можем написать:

$$M = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y} dy = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)(a(t-\sin t))'\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2;$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_D x\,dx\,dy = \frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi a} x\,dx\int_0^{y} dy = \frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi a} xy\,dx =$$

$$= \frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\,a(1-\cos t)\,(a(t-\sin t))'\,dt = \frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,d(t-$$

$$-\sin t)^2 = \frac{a}{6\pi}\left((1-\cos t)(t-\sin t)^2\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\,dt\right) =$$

$$= -\frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(t^2\sin t - 2t\sin^2 t + \sin^3 t)\,dt = \frac{a}{6\pi}\left(\int_0^{2\pi}(t - t\cos 2t)\,dt -\right.$$

$$-\int_0^{2\pi} t^2 \sin t\, dt\Big) = \frac{a}{6\pi}\Big(2\pi^2 - \frac{t}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t\, dt + t^2\cos t\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-2\int_0^{2\pi} t\cos t\, dt\Big) = \frac{a}{6\pi}\Big(6\pi^2 - 2t\sin t\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\sin t\, dt\Big) = a\pi,$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\iint_D y\, dx\, dy = \frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi a} dx\int_0^{y} y\, dy = \frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi a} y^2\, dx =$$

$$= \frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\, dt = \frac{4a}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\, dt = \frac{8a}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin^6 u\, du =$$

$$= \frac{16a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\, du = \frac{16a}{3\pi}\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}a.$$

122. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, если плотность ее вещества в точке $M'(x, y)$ пропорциональна расстоянию от точки M' до точки $A(a, 0)$.

Решение. Из условия задачи следует, что плотность вещества пластинки выражается формулой $\mu(x, y) = c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, где $c > 0$ — постоянная.

По формулам (1) имеем:

$$M = c\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mu(x, y)\, dx\, dy,\quad x_0 = \frac{c}{M}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} x\mu(x, y)\, dx\, dy,$$

$$y_0 = \frac{c}{M}\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} y\mu(x, y)\, dx\, dy.$$

Перейдя к полярным координатам по формулам $x - a = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, получим:

$$M = c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}\rho^2\, d\rho = \frac{8}{3}ca^3\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}ca^3\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) = \frac{32}{9}ca^3;$$

$$x_0 = \frac{9}{32a^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}(a + \rho\cos\varphi)\rho^2\, d\rho = \frac{9}{32a^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\Big(-\frac{8}{3}a^4\cos^3\varphi +$$

$$+ 4a^4\cos^5\varphi\Big)\,d\varphi = \frac{3a}{8}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(3\cos^5\varphi - 2\cos^3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8}a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(1 - 4\sin^2\varphi + 3\sin^4\varphi)\,d(\sin\varphi) = -\frac{a}{5},$$

$$y_0 = \frac{9}{32a^3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{-2a\cos\varphi}\rho^3\,d\rho = \frac{9}{8}a\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^4\varphi\sin\varphi\,d\varphi = 0.$$

123. Определить кривую, описываемую центром тяжести плоской фигуры с переменной площадью, ограниченной кривыми: $y = \sqrt{2px}$, $y = 0$, $x = X$.

Решение. Посредством формул (1) находим:

$$M = \int\limits_0^X dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}} dy = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,X^{\frac{3}{2}};$$

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_0^X x\,dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}} dy = \frac{3}{5}X, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_0^X dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}} y\,dy = \frac{3\sqrt{p}}{4\sqrt{2}}\sqrt{X}.$$

Теперь легко написать формулу зависимости y_0 от x_0:

$$y_0 = \frac{3\sqrt{p}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x_0} = \frac{\sqrt{30px_0}}{8}.$$

Найти моменты инерции относительно осей координат Ox и Oy однородных пластинок, ограниченных следующими кривыми:

124. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1$, $\frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1$, $y = 0$ $(b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ h > 0)$.

Решение. По формулам (2) имеем:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^h y^2\,dy\int\limits_{b_1\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{b_2\left(1-\frac{y}{h}\right)} dx, & \text{если } b_1 < b_2,\\ \displaystyle\int\limits_0^h y^2\,dy\int\limits_{b_2\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{b_1\left(1-\frac{y}{h}\right)} dx, & \text{если } b_1 > b_2,\end{cases} =$$

$$= \begin{cases}(b_2 - b_1)\dfrac{h^3}{12}, & \text{если } b_1 < b_2,\\ (b_1 - b_2)\dfrac{h^3}{12}, & \text{если } b_1 > b_2.\end{cases}$$

Таким образом, $I_x = |b_1 - b_2|\frac{h^3}{12}$. Далее,

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy = \begin{cases} \int_0^h dy \int_{b_1\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{b_2\left(1-\frac{y}{h}\right)} x^2\,dx, & \text{если } b_1 < b_2, \\ \int_0^h dy \int_{b_2\left(1-\frac{y}{h}\right)}^{b_1\left(1-\frac{y}{h}\right)} x^2\,dx, & \text{если } b_1 > b_2, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (b_2^3 - b_1^3)\frac{h}{12}, & \text{если } b_1 < b_2, \\ (b_1^3 - b_2^3)\frac{h}{12}, & \text{если } b_1 > b_2. \end{cases}$$

Объединяя найденные результаты, получаем:

$$I_y = \frac{h\,|b_1 - b_2|\,(b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2)}{12}.$$

125. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$.

Решение. Из условия задачи следует, что однородная пластинка представляет собой замкнутую область D, определяемую неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a - \sqrt{2ax - x^2}$. Заменяя в формуле $I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy$ двойной интеграл повторным, получаем:

$$I_x = \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2\,dy = \frac{1}{3}\int_0^a (a - \sqrt{2ax - x^2})^3\,dx.$$

Полагая $x = 2a\sin^2 t$, находим:

$$I_x = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,(1 - \sin 2t)^3\,d(2t) = \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,(1 - \sin u)^3\,du =$$

$$= \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

Задавая множество D посредством неравенств $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant a - \sqrt{2ay - y^2}$, получаем:

$$I_y = \int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{2ay-y^2}} x^2\,dx = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

126. $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Решение. Полагая в интегралах (2) $\mu(x, y) = 1$ и переходя к полярным координатам ρ и φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi))$, получаем:

$$I_x = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^3\, d\rho = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\,(1+\cos\varphi)^4\, d\varphi =$$

$$= 16a^4 \int_0^{2\pi} \cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 32a^4 \int_0^{\pi} \cos^{10} t \sin^2 t\, dt =$$

$$= 64a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \sin^2 t\, dt = 64a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10} t - \cos^{12} t)\, dt =$$

$$= 64a^4 \cdot \left(\frac{9!!}{10!!} - \frac{11!!}{12!!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{21}{32}\pi a^4,$$

$$I_x + I_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^3\, d\rho = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^4\, d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int_0^{2\pi} \cos^8\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a^4 \int_0^{\pi} \cos^8 t\, dt = 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t\, dt =$$

$$= 16a^4 \cdot \frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{16}\pi a^4,$$

$$I_y = \frac{35}{16}\pi a^4 - I_x = \frac{49}{32}\pi a^4.$$

127. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной фигуры, ограниченной кривыми $ay = x^2$, $ax = y^2$ $(a > 0)$.

Решение. Кривые, ограничивающие фигуру, пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = a$, поэтому множество D точек фигуры и ее границы определяется неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $\frac{x^2}{a} \leqslant y \leqslant \sqrt{ax}$. По формуле (3) получаем:

$$I_{xy} = \iint_D xy\, dx\, dy = \int_0^a x\, dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{ax}} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^a x\left(ax - \frac{x^4}{a^2}\right) dx = \frac{a^4}{12}.$$

128. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + Md^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции плоской пластинки D относительно параллельных осей l и l_0, из которых l_0 проходит через центр тяжести пластинки, d — расстояние между осями, M — масса пластинки.

Решение. Выберем систему координат Oxy так, чтобы начало координат $O(0, 0)$ совпало с центром тяжести пластинки $M_0(x_0, y_0)$, а ось Ox — с прямой l_0. Очевидно, что тогда $y_0 = 0$. Пусть $\mu(x, y)$ —

плотность вещества пластинки. Расстояние точки пластинки $P(x, y)$ от прямой l равно $d-y$, следовательно, можем написать:

$$I_l = \iint_D (d-y)^2 \mu(x, y)\,dx\,dy = d^2 \iint_D \mu(x, y)\,dx\,dy - \\ - 2d \iint_D y\mu(x, y)\,dx\,dy + \iint_D y^2\mu(x, y)\,dx\,dy.$$

В силу равенств

$$\iint_D \mu(x, y)\,dx\,dy = M, \quad \iint_D y\mu(x, y)\,dx\,dy = My_0 = 0,$$

$$\iint_D y^2\mu(x, y)\,dx\,dy = I_x = I_{l_0},$$

получаем: $I_l = I_{l_0} + Md^2$, что и требовалось доказать.

129. Доказать, что момент инерции I плоской области D относительно прямой, проходящей через центр тяжести $O(0, 0)$ области и составляющей угол α с осью Ox, определяется формулой

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + I_y \sin^2\alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции области D относительно осей Ox и Oy, I_{xy} — центробежный момент инерции.

Решение. По условию, центр тяжести области находится в начале координат. Фиксируем точку (x, y). Ее расстояние до заданной прямой,

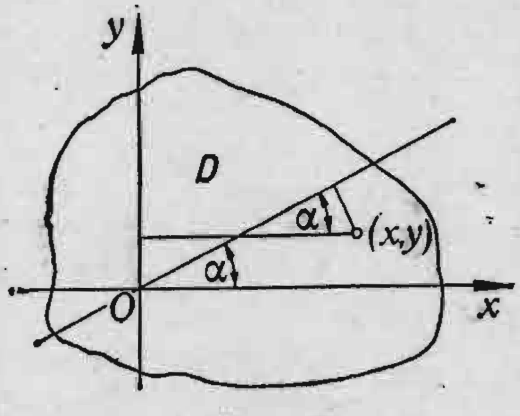

Рис. 12

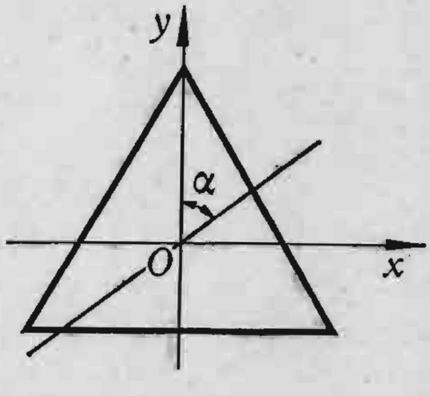

Рис. 13

как видно из рис. 12, равно $(x - y\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha = x\sin\alpha - y\cos\alpha$, поэтому можем написать:

$$I = \iint_D (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 \mu(x, y)\,dx\,dy = \sin^2\alpha \iint_D \mu(x, y)\,x^2\,dx\,dy - \\ - 2\sin\alpha\cos\alpha \iint_D \mu(x, y)\,xy\,dx\,dy + \cos^2\alpha \iint_D \mu(x, y)\,y^2\,dx\,dy = \\ = I_y \sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_x\cos^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

130. Найти момент инерции однородной пластинки, имеющей форму правильного треугольника со стороной a, относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

Решение. Выберем систему координат Oxy так, чтобы центр тяжести треугольника совпал с началом координат, а высота треугольника была отрезком оси Oy (рис. 13). Тогда можно воспользоваться формулой, полученной при решении предыдущей задачи, заменив в ней значение угла α значением $\frac{\pi}{2}-\alpha$:

$$I = I_x \sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_y\cos^2\alpha.$$

Вычислим моменты инерции I_x, I_y и I_{xy} по формулам (2) и (3), принимая во внимание, что замкнутая область D — равносторонний треугольник со стороной a, точка пересечения медиан которого находится в начале координат.

Запишем область интегрирования D с помощью неравенств $-\frac{a}{2\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3} \leqslant x \leqslant \frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}$. Заменив соответствующие двойные интегралы повторными, получим:

$$I_x = \int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} y^2\,dy \int\limits_{\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3}}^{\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}} dx = 2\int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} y^2\left(\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)dy = \frac{a^4}{32\sqrt{3}},$$

$$I_{xy} = \int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} y\,dy \int\limits_{\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3}}^{\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \left(\left(\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3}\right)^2\right)y\,dy=0,$$

$$I_y = \int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} dy \int\limits_{\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{a}{3}}^{\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}} x^2\,dx = \frac{2}{3}\int\limits_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \left(\frac{a}{3}-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^3 dy = \frac{a^4}{32\sqrt{3}},$$

$$I = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}.$$

131. Определить силу давления воды на боковую стенку $x \geqslant 0$ цилиндрического сосуда $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, если уровень воды $z=h$.

Решение. Согласно основному закону гидростатики, на элемент $d\sigma(M)$ площади $dS(M)$ цилиндрической поверхности действует сила давления $d\boldsymbol{P}(M)$, равная по величине произведению площади этого элемента, расстояния его от свободной поверхности жидкости и плотности жидкости. Направлена эта сила в сторону внешней единичной нормали к боковой поверхности цилиндра. Следовательно,

$$d\boldsymbol{P}(M) = dS(M)\,\mu(M)\,(h-z)\,\boldsymbol{n}(M), \quad M \in d\sigma.$$

Поскольку образующая цилиндра параллельна оси Oz, можем написать: $d\boldsymbol{P}(M) = \boldsymbol{i}\,dX(M) + \boldsymbol{j}\,dY(M)$, где

$$dX(M) = dS\,(h-z)\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}})\,\mu(M),$$

$$dY(M) = dS\,(h-z)\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}})\,\mu(M).$$

Суммируя по всем элементам $d\sigma$ и принимая во внимание равенства

$$dS = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\, dy\, dz,$$

$$\cos(\widehat{n, i}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \cos(\widehat{n, j}) = -\frac{x_y'}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \mu(M) = 1,$$

получаем следующие значения компонент X и Y вектора $\boldsymbol{P}$ суммарного давления на стенку цилиндрического сосуда при $x \geqslant 0$:

$$X = \iint\limits_{\substack{-a \leqslant y \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,(h - z) \cos(\widehat{n, i})\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-a}^{a} dy \int_0^h (h - z)\, dz = a(h - z)^2 \Big|_h^0 = ah^2,$$

$$Y = \iint\limits_{\substack{-a \leqslant y \leqslant a \\ 0 \leqslant z \leqslant h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,(h - z) \cos(\widehat{n, j})\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-a}^{a} y\, dy \int_0^h (h - z)\, dz = 0.$$

132. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности δ на глубину h (считая от центра шара), где $h \geqslant a$. Найти силу давления жидкости на верхнюю и нижнюю части шаровой поверхности.

Решение. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы ее начало совпало с центром шара, и выделим элемент поверхности $d\sigma(M)$ верхней части шара (рис. 14), имеющий площадь $dS(M)$. Тогда, используя обозначения предыдущей задачи и принимая во внимание, что сила давления $d\boldsymbol{P}$ направлена в сторону, противоположную направлению внешней нормали, получаем:

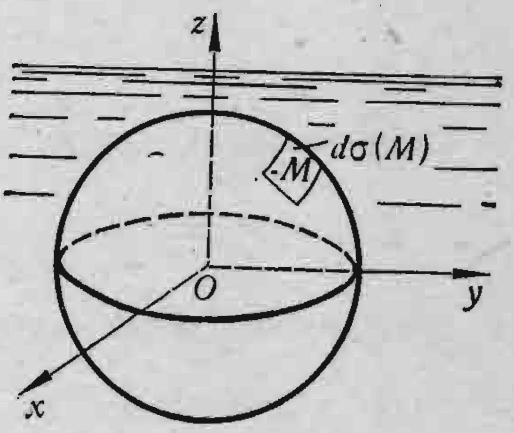

Рис. 14

$$d\boldsymbol{P} = -\delta\, dS(M)(h - z)\, \boldsymbol{n}(M), \text{ где}$$

$$\boldsymbol{n}(M) = \left\{ \frac{-z_x'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \frac{-z_y'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} \right\} =$$

$$= \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\, dy.$$

Верхняя полусфера проектируется на плоскость Oxy в круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, поэтому, суммируя все элементы $d\boldsymbol{P}(M)$, находим:

$$\boldsymbol{P} = -\delta \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant a^2} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\left(h - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) \boldsymbol{n}(M)\, dx\, dy =$$

$$= \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z, \text{ где}$$

$$X=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cos\alpha\,dx\,dy=$$

$$=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{x\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=0.$$

$$Y=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cos\beta\,dx\,dy=$$

$$=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{y\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=0.$$

$$Z=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cos\gamma\,dx\,dy=$$

$$=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(h-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy=-\pi a^2\delta h+$$

$$+\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

Следовательно, для верхней части шара

$$|\boldsymbol{P}|=|Z|=\left|-\pi a^2\delta h+\frac{2\pi a^3\delta}{3}\right|=\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right).$$

Для нижней части поверхности шара имеем:

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad \cos\alpha=\frac{-z_x'}{-\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$$

$$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\ d\boldsymbol{P}(M)=-\delta\,dS(M)\,(h-z)\,\boldsymbol{n}(M)=$$

$$=-\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\left(h+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\delta\boldsymbol{n}(M)\,dx\,dy,\quad X=0,\quad Y=0,$$

$$Z=-\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\left(h+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\cos\gamma\,dx\,dy=$$

$$=\delta\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(h+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right),$$

$$|\boldsymbol{P}|=Z=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right).$$

133. Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен a, а высота b, целиком погружен в жидкость плотности δ так, что центр цилиндра находится на глубине h под поверхностью жидкости, а его ось составляет угол α с нормалью к этой поверхности. Определить силу давления жидкости на нижнее и верхнее основания цилиндра.

Решение. Выберем системы координат $Ox'yz'$ и $Oxyz$ так, как показано на рис. 15. Найдем теперь расстояние $\tilde{h}$ точки M верхнего основания цилиндра от поверхности жидкости. Очевидно, имеем:

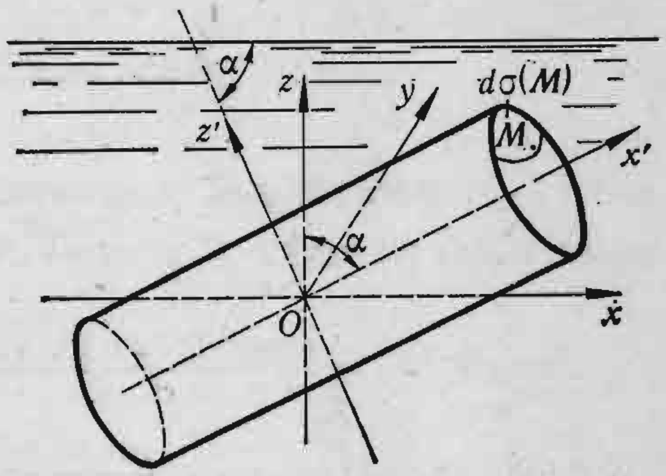

Рис. 15

$$\tilde{h} = \left(\frac{h}{\sin\alpha} - \frac{b \operatorname{ctg}\alpha}{2} - z'\right)\sin\alpha = h - \frac{b\cos\alpha}{2} - z'\sin\alpha.$$

Давление $d\boldsymbol{P}$ жидкости на элемент $d\sigma(M)$ площади $dS(M)$ верхнего основания цилиндра, содержащий точку M, действует в сторону, противоположную направлению внешней единичной нормали $\boldsymbol{n}$ в этой точке, поэтому можем написать: $d\boldsymbol{P} = -\delta\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2} - z'\sin\alpha\right)\boldsymbol{n}\,dS$. Суммируя по всем элементам $d\boldsymbol{P}$ и принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{n}$ постоянен в плоскости верхнего основания цилиндра, получаем:

$$\boldsymbol{P} = -\delta\boldsymbol{n}\iint\limits_D\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2} - z'\sin\alpha\right)dx'\,dz',$$

где D — верхнее основание цилиндра.

Переходя к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, находим:

$$\boldsymbol{P} = -\delta\boldsymbol{n}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2} - \rho\sin\alpha\sin\varphi\right)\rho\,d\rho = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2}\right)\boldsymbol{n}.$$

В системе координат $Oxyz$ вектор $\boldsymbol{n} = \{\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha\}$, следовательно, проекции вектора $\boldsymbol{P}$ на оси Ox и Oz будут выражаться следующими формулами:

$$P_x = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2}\right)\sin\alpha, \quad P_z = -\pi a^2\delta\left(h - \frac{b\cos\alpha}{2}\right)\cos\alpha.$$

Давление жидкости на элемент $d\sigma$ нижнего основания цилиндра направлено в сторону внутренней единичной нормали, поэтому можем написать: $d\boldsymbol{P} = \delta\boldsymbol{n}\left(h + \frac{b\cos\alpha}{2} - z'\sin\alpha\right)dS$, откуда в прежних обозначениях имеем:

$$P_x = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b\cos\alpha}{2}\right)\sin\alpha, \quad P_z = \pi a^2\delta\left(h + \frac{b\cos\alpha}{2}\right)\cos\alpha.$$

134. Определить силу притяжения однородным цилиндром $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ материальной точки $P(0, 0, b)$, если масса цилиндра равна M, а масса точки равна m.

Решение. Выделим элемент объема цилиндра $dV = dx\,dy\,dz$, содержащий точку $N(x, y, z)$, и проведем из точки $P(0, 0, b)$ радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \{x, y, z-b\}$ в точку N. Найдем теперь силу $d\boldsymbol{F}$ притяжения материальной точки $P(0, 0, b)$ массы m элементом dV. Согласно закону Ньютона,

$$d\boldsymbol{F}(N) = \frac{\gamma m\,dx\,dy\,dz}{r^2}\,\boldsymbol{e}(P, N),$$

где γ — гравитационная постоянная, $\boldsymbol{e}(P, N)$ — единичный вектор, направленный из точки P в точку N. Поскольку $\boldsymbol{e}(P, N) = \frac{\boldsymbol{r}(P, N)}{r}$, то

$$d\boldsymbol{F}(N) = \frac{\gamma m\,dx\,dy\,dz\,\boldsymbol{r}(P, N)}{r^3} = \left\{\frac{\gamma mx\,dx\,dy\,dz}{r^3}, \frac{\gamma my\,dx\,dy\,dz}{r^3}, \frac{\gamma m(z-b)\,dx\,dy\,dz}{r^3}\right\}.$$

Для определения силы притяжения $\boldsymbol{F}$ необходимо просуммировать все элементарные силы $d\boldsymbol{F}(N)$, т. е. вычислить некоторый двойной интеграл. Фиксируя элемент площади $dx\,dy$ и интегрируя по z в пределах $0 \leqslant z \leqslant h$, получаем силу $d\boldsymbol{F}_{xy}(N)$ притяжения материальной точки P с массой m цилиндрическим столбиком с площадью основания $dx\,dy$ и высотой h:

$$d\boldsymbol{F}_{xy}(N) = \gamma m\,dx\,dy\left\{\int_0^h \frac{x\,dz}{r^3}, \int_0^h \frac{y\,dz}{r^3}, \int_0^h \frac{z-b}{r^3}\,dz\right\}.$$

Принимая во внимание равенство $r^3 = (x^2+y^2+(z-b)^2)^{\frac{3}{2}}$, получаем:

$$d\boldsymbol{F}_{xy}(N) = \gamma m\,dx\,dy\left\{x\int_0^h \frac{dz}{r^3}, y\int_0^h \frac{dz}{r^3}, \left.\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\right|_{z=h}^{z=0}\right\} =$$

$$= \gamma m\,dx\,dy\left\{x\int_0^h \frac{dz}{r^3}, y\int_0^h \frac{dz}{r^3}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(h-b)^2}}\right\}.$$

Суммируя по всем площадям $dx\,dy$, имеем:

$$\boldsymbol{F} = \gamma m\left\{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(x\int_0^h \frac{dz}{r^3}\right)dx\,dy, \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(y\int_0^h \frac{dz}{r^3}\right)dx\,dy,\right.$$

$$\left.\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(h-b)^2}}\right)dx\,dy\right\}.$$

Переходя в двойных интегралах к полярным координатам, находим:

$$F = \gamma m \left\{0,\ 0,\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (h-b)^2}}\right) \rho\, d\rho \right\} =$$

$$= \left\{0,\ 0,\ 2\pi m\gamma \left(\sqrt{\rho^2 + b^2} - \sqrt{\rho^2 + (h-b)^2}\right)\Big|_0^a \right\} =$$

$$= \{0,\ 0,\ 2\pi m\gamma \left(\sqrt{a^2 + b^2} - |b| - \sqrt{a^2 + (h-b)^2} + |h-b|\right)\} =$$

$$= \left\{0,\ 0,\ -\frac{2\pi m\gamma h a^2}{h a^2} \left(|b| - |h-b| + \sqrt{a^2 + (h-b)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\right\} =$$

$$= \left\{0,\ 0,\ -\frac{2Mm\gamma}{a^2 h} \left(|b| - |h-b| + \sqrt{a^2 + (h-b)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right)\right\}.$$

135. Луг, имеющий форму прямоугольника со сторонами a и b, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью, равной $p\,\frac{кГ}{м^2}$. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центр луга, если работа по транспортировке груза P $кГ$ на расстояние r равна kPr $(0 < k < 1)$?

Решение. Поместим начало координат системы Oxy в центр данного прямоугольника так, чтобы оси Ox и Oy были параллельны соответственно его сторонам a и b. Рассмотрим прямоугольник со сторонами dx и dy, содержащий точку $M(x, y)$ исходного прямоугольника. Тогда минимальная работа, затраченная на транспортировку в центр луга сена, убранного с площади $dx\,dy$, будет равна $pkr\,dx\,dy$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно, вся минимальная работа A, затраченная на доставку сена в центр луга, выразится интегралом

$$A = \iint_D pkr\, dx\, dy,$$

где D — прямоугольник $-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}$.

В силу симметрии области интегрирования D и подынтегральной функции, можем написать:

$$A = 4pk \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}}} r\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, получаем:

$$A = 4pk \left(\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{2\cos\varphi}} \rho^2\, d\rho + \int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{b}{2\sin\varphi}} \rho^2\, d\rho \right) =$$

$$= \frac{pk}{6}\left(a^3 \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + b^3 \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}\right) =$$

$$= \frac{pk}{12}\left(a^3\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} + \right.$$

$$\left. + b^3\left(-\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{pk}{12}\left(2ab\sqrt{a^2+b^2} + \right.$$

$$\left. + a^3 \ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a} + b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)$$

(мы воспользовались известными формулами $\cos(\operatorname{arctg}\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin(\operatorname{arctg}\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{1+\sqrt{1+\alpha^2}}$).

§ 6. Тройные интегралы

Вычислить следующие тройные интегралы:

136. $I = \iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, где область интегрирования V — замкнутое множество с границей $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам $x = a\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\rho\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, получаем:

$$I = abc\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho^4\, d\rho = \frac{2\pi abc}{5}\cos\varphi\Big|_{\pi}^{0} = \frac{4\pi abc}{5}.$$

137. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz$, где область интегрирования ограничена поверхностями $x^2+y^2 = z^2$, $z = 1$.

Решение. Тело V ограничено частью конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и частью плоскости $z = 1$, причем оно проектируется на плоскость Oxy в круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Перейдем в интеграле к цилиндрическим координатам. Тогда $V = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ \rho \leqslant z \leqslant 1\}$,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho \int\limits_{\rho}^1 dz = 2\pi\int\limits_0^1 \rho^2(1-\rho)\, d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Расставить различными способами пределы интегрирования в следующих тройных интегралах, считая, что f — непрерывная функция:

138. $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

Решение. Здесь $V=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant z\leqslant x+y\}$. Тогда написанный повторный интеграл совпадает с тройным интегралом от этой функции, взятым по множеству V.

Представим множество V как объединение множеств $V_1=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant x,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$, $V_2=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant z\leqslant 1,\ z-x\leqslant y\leqslant 1-x\}$.

В силу свойства аддитивности тройного интеграла, имеем:

$$I=\iiint\limits_{V_1} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz+\iiint\limits_{V_2} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dz\int\limits_0^{1-x} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,\ y,\ z)\,dy.$$

Представив множество V в виде объединения замкнутых областей $\overline{V}_1=\{0\leqslant z\leqslant 1,\ z\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1-y\}$, $\overline{V}_2=\{0\leqslant z\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant z,\ z-y\leqslant x\leqslant 1-y\}$, получим:

$$I=\int\limits_0^1 dz\int\limits_z^1 dy\int\limits_0^{1-y} f(x,\ y,\ z)\,dx+\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^z dy\int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

139. $I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,\ y,\ z)\,dz.$

Решение. Функция $f(x,\ y,\ z)$ определена на множестве $V=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ (в замкнутом конусе с вершиной в начале координат $O(0,\ 0,\ 0)$). Записав множество V в виде $V=\{-1\leqslant x\leqslant 1,\ |x|\leqslant z\leqslant 1,\ -\sqrt{z^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{z^2-x^2}\}$, получим:

$$I=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{|x|}^1 dz\int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy.$$

Множество V можно представить и в таком виде: $V=\{0\leqslant z\leqslant 1,\ -z\leqslant y\leqslant z,\ -\sqrt{z^2-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{z^2-y^2}\}$. Тогда, очевидно, можем написать:

$$I=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{-z}^z dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

Вычислить интегралы:

140. $I=\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где V — замкнутое множество $x^2+y^2+z^2\leqslant z$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам, приняв во внимание пределы изменения φ и θ: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Тогда (см. формулу (12), § 1) получим:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\cos\varphi} \rho^3\, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{10} \cos^5\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{10}.$$

141. $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, где область интегрирования V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

Решение. Перейдем к цилиндрическим координатам. Параболоид $x^2 + y^2 = 2z$, пересекаясь с плоскостью $z = 2$, вырезает из нее окружность $x^2 + y^2 = 4$, поэтому $0 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\frac{\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant 2$. После замены переменных получим:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3\, d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2} dz = 2\pi \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = \frac{16}{3}\pi.$$

142. $I = \iiint\limits_V x^2\, dx\, dy\, dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

Решение. Представив множество V в виде $V = \left\{0 \leqslant z \leqslant h,\ \sqrt{\frac{z}{b}} \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{z}{a}},\ \frac{z}{\beta} \leqslant x \leqslant \frac{z}{\alpha}\right\}$, получим:

$$I = \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2\, dx = \frac{1}{3} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right) \int_0^h z^{\frac{7}{2}}\, dz =$$

$$= \frac{2}{27} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right) h^{\frac{9}{2}}.$$

143. $I = \iiint\limits_V xyz\, dx\, dy\, dz$, где область интегрирования расположена в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и ограничена поверхностями $z = \frac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \frac{x^2 + y^2}{n}$, $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta,\ 0 < m < n)$.

Решение. Заменим переменные в интеграле по формулам $xy = u$, $y = vx$, $z = z$; тогда

$$I = \iiint\limits_{V'} x(u, v)\, y(u, v)\, z \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, z)} \right| du\, dv\, dz,$$

причем $a^2 \leqslant u \leqslant b^2$, $\alpha \leqslant v \leqslant \beta$, $\frac{u(v+v^{-1})}{n} \leqslant z \leqslant \frac{u(v+v^{-1})}{m}$, $x = u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, z)} = \frac{1}{2v}$. После замены получим:

$$I = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} u\,du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v} \int_{\frac{u(v+v^{-1})}{n}}^{\frac{u(v+v^{-1})}{m}} z\,dz = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\int_{a^2}^{b^2} u^3\,du \int_\alpha^\beta \left(v + \frac{1}{v}\right)^2 \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)(b^8 - a^8)\int_\alpha^\beta \left(v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3}\right) dv =$$

$$= \frac{1}{16}(m^{-2} - n^{-2})(b^8 - a^8)\left(\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2\ln\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^{-2}}{2} - \frac{\beta^{-2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{32}(m^{-2} - n^{-2})(b^8 - a^8)\left((\beta^2 - \alpha^2)(1 + \alpha^{-2}\beta^{-2}) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

144. Найти среднее значение функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ в замкнутой области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$.

Решение. Обозначим через V замкнутую область $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$, которая является замкнутым шаром $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}$. Объем этого шара численно равен $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, поэтому можем написать:

$$f_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам по формулам $x = \rho\sin\varphi\cos\theta + \frac{1}{2}$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta + \frac{1}{2}$, $z = \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Уравнение границы области интегрирования при этом будет иметь вид $\rho^2 = \frac{3}{4}$, следовательно, получим:

$$f_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rho^2\left(\frac{3}{4} + \rho^2 + \rho(\sin\varphi(\sin\theta + \cos\theta) + \right.$$

$$\left. + \cos\varphi)\right) d\rho = \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \left(\frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^5}{5} + \frac{\rho^4}{4}\cos\varphi\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{160}\right)\sin\varphi\,d\varphi = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{32}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

145. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$U = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \text{ где } a^2 + b^2 + c^2 > R^2.$$

Решение. Обозначив подынтегральную функцию буквой f и применив теорему о среднем, получим: $U = f(M)V$, где V — объем тела $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, а $M(\xi, \eta, \zeta)$ — некоторая внутренняя точка области интегрирования. Объем тела V известен — он равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. Требуется оценить функцию f в замкнутом шаре $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$. Внутри шара функция

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{f(x, y, z)} = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = \rho(P, A),$$

где $P=(x, y, z)$, $A=(a, b, c)$, не принимает экстремальных значений (в силу условия $a^2+b^2+c^2 > R^2$), поэтому наибольшее и наименьшее значения она принимает на границе области интегрирования — сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$$

и найдем экстремальные точки этой функции. Имеем:

$$F'_x = \frac{x-a}{\rho} + 2\lambda x, \quad F'_y = \frac{y-b}{\rho} + 2\lambda y, \quad F'_z = \frac{z-c}{\rho} + 2\lambda z.$$

Из условий $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$ и уравнения связи $x^2+y^2+z^2 = R^2$ найдем λ и экстремальные точки M_1 и M_2:

$$\lambda = \pm\frac{1}{2R}, \quad M_1 = \left(\frac{Ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{Rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{Rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

$$M_2 = \left(-\frac{Ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\frac{Rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\frac{Rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

Поскольку

$$\varphi(M_1) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+R^2-2R\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}-R,$$

$$\varphi(M_2) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2R\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}+R,$$

то справедливы неравенства $\varphi(M_1) < \varphi(\xi, \eta, \zeta) < \varphi(M_2)$, которые можно представить в виде $\left|\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right| < R$. Обозначив $\theta = \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \sqrt{a^2+b^2+c^2}}{R}$, получим: $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{a^2+b^2+c^2} + R\theta$, где $|\theta| < 1$, откуда $f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\varphi(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R\theta}$,

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \frac{4\pi R^3}{3}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R\theta}.$$

146. Доказать, что если функция f непрерывна в замкнутой области V и $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = 0$ для любой области $\omega \subset V$, то $f(x, y, z) \equiv 0$ при $(x, y, z) \in V$.

Доказательство. Пусть P — произвольная внутренняя точка множества V и U_ε — шар радиуса ε с центром в точке P. По теореме о среднем и из условия задачи имеем:

$$0 = \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \iiint\limits_{U_\varepsilon} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = f(\overline{P}), \text{ где } \overline{P} \in U_\varepsilon.$$

Стягивая шар U_ε к точке P, получаем: $f(P) = 0$.

Таким образом, функция f равна нулю в каждой внутренней точке множества V. В силу ее непрерывности в замкнутой области V, она будет равна нулю и на границе области, а значит, и в каждой точке множества V.

147. Найти $F'(t)$, если

а) $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, где f — непрерывная функция;

б) $F(t) = \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant t \\ 0 \leqslant y \leqslant t \\ 0 \leqslant z \leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$, где f — дифференцируемая функция.

Решение. а) Перейдем в интеграле к сферическим координатам. Тогда, учитывая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant t$ $(t > 0)$, получаем:

$$F(t) = \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho = 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,d\rho.$$

Дифференцируя по t, находим: $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

б) Запишем функцию $F(t)$ в виде повторного интеграла:

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t f(xyz)\,dz$$

и вычислим производную этой функции:

$$F'(t) = \int_0^t dy \int_0^t f(tyz)\,dz + \int_0^t dx \left(\int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t f(xyt)\,dy \right) =$$

$$= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz)\,dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xtz)\,dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xyt)\,dy. \qquad (1)$$

Используя дифференцируемость функции f, можем применить к внутреннему интегралу формулу интегрирования по частям, полагая $dv = dz$, $u = f(xyz)$:

$$\int_0^t f(xyz)\,dz = tf(xyt) - \int_0^t z\,d_z(f(xyz)) = tf(xyt) - \int_0^t xyzf'(xyz)\,dz.$$

Таким образом, функцию F можем представить в виде

$$F(t) = t\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)\,dy - \int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyz\,f'(xyz)\,dz. \qquad (2)$$

Перейдя к повторным интегралам:

$$F(t) = \int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t f(xyz)\,dy = \int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t f(xyz)\,dx$$

и применив к внутренним интегралам формулу интегрирования по частям, получим:

$$F(t) = t\int_0^t dx\int_0^t f(xtz)\,dz - \int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t xyz\,f'(xyz)\,dy, \qquad (3)$$

$$F(t) = t\int_0^t dy\int_0^t f(tyz)\,dz - \int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t xyz\,f'(xyz)\,dx. \qquad (4)$$

Складывая левые и правые части равенств (2), (3), (4) и принимая во внимание (1), имеем:

$$\frac{3}{t}\left(F(t) + \int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyz\,f'(xyz)\,dz\right) = F'(t).$$

Обозначая $V = \{0 \leqslant x \leqslant t,\ 0 \leqslant y \leqslant t,\ 0 \leqslant z \leqslant t\}$, при $t > 0$ окончательно получаем:

$$F'(t) = \frac{3}{t}\left(F(t) + \iiint\limits_V xyz\,f'(xyz)\,dx\,dy\,dz\right).$$

148. Найти $I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz$, где m, n и p — целые неотрицательные числа.

Решение. Перейдем к сферическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Тогда получим:

$$I = \int_0^{\pi} \sin^{m+n+1}\varphi\cos^p\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^m\theta\sin^n\theta\,d\theta\int_0^1 \rho^{m+n+p+2}\,d\rho.$$

Пусть $p = 2k + 1$, тогда

$$\int_0^{\pi}\sin^{m+n+1}\varphi\cos^p\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi}\sin^{m+n+1}\varphi\cos^{2k}\varphi\,d(\sin\varphi) =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin^{m+n+1}\varphi\,(1-\sin^2\varphi)^k\,d(\sin\varphi) = 0,$$

а значит, и $I = 0$.

Если $n = 2n' + 1$ (n' — натуральное), то

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta = -\int_0^{2\pi} \cos^m \theta (1 - \cos^2 \theta)^{n'} d(\cos \theta) = 0 \text{ и } I = 0.$$

Аналогично доказываем, что при нечетном m $I = 0$.

Итак, если хотя бы одно из чисел m, n, p — нечетное, то $I = 0$. Пусть теперь каждое из этих чисел четное. Тогда

$$\int_0^{\pi} \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi \, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi \, d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta,$$

$$I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta \int_0^1 \rho^{m+n+p+2} d\rho =$$

$$= \frac{8}{m+n+p+3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+n+1} \varphi \cos^p \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{2}{m+n+p+3} \mathrm{B}\left(1 + \frac{m+n}{2}, \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{B}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{m+n+p+3} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{m+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p}{2} + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{m+n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4\pi (p-1)!! (n-1)!! (m-1)!!}{(m+n+p+3)(m+n+p+1)!!}.$$

149. Вычислить интеграл Дирихле

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s \, dx \, dy \, dz$$

($p > 0$, $q > 0$, $r > 0$, $s > 0$), где V — замкнутое множество точек $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$, полагая $x + y + z = \xi$, $y + z = \xi\eta$, $z = \xi\eta\zeta$.

Решение. При указанной замене получим:

$$x = \xi(1 - \eta), \quad y = \xi\eta(1 - \zeta), \quad z = \xi\eta\zeta,$$

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} 1 - \eta & -\xi & 0 \\ \eta(1 - \zeta) & \xi(1 - \zeta) & -\xi\eta \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} = \xi^2\eta,$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s\,d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p\,d\eta \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q\,d\zeta =$$

$$= \mathrm{B}(p+q+r+3,\ s+1)\,\mathrm{B}(q+r+2,\ p+1)\,\mathrm{B}(r+1,\ q+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов

Численное значение V объма замкнутой ограниченной области V' можно получить посредством формулы

$$V = \iiint\limits_{V'} dx\,dy\,dz. \tag{1}$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры считаются положительными):

150. $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = x^2.$

Решение. Тело ограничено частями поверхностей параболоидов вращения $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, частью плоскости $y = x$ и частью цилиндрической поверхности $y = x^2$, поэтому область V' можем представить в виде: $V' = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2(x^2 + y^2)\}$. Теперь найдем по формуле (1) объем тела V':

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{3}{35}.$$

151. $z = x + y,\ z = xy,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0.$

Решение. Множество точек тела V' можно представить в виде $V' = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ \ xy \leqslant z \leqslant x + y\}$, поэтому по формуле (1)

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^3}{2}\right) dx = \frac{7}{24}.$$

152. $x^2 + z^2 = a^2,\ x + y = \pm a,\ x - y = \pm a.$

Решение. Тело ограничено частью цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = a^2$ (образующие этой поверхности параллельны оси Oy) и кусками плоскостей $x + y = \pm a$, $x - y = \pm a$. Учитывая, что точки тела симметричны относительно координатных плоскостей, и используя формулу (1), можем написать:

$$V = 8 \iiint\limits_{V''} dx\, dy\, dz,$$

где V'' — замкнутое множество точек, которое можно представить в виде: $V'' = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a - x,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}\}$. В силу сказанного, имеем:

$$V = 8 \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8 \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,(a - x)\, dx =$$

$$= 8 \left(a \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \int\limits_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \right) =$$

$$= 8 \left(a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt + \left. \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^a \right) = \frac{2a^3}{3} (3\pi - 4).$$

153. $az = x^2 + y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Решение. Тело V' ограничено частью поверхности параболоида вращения и частью конической поверхности, пересекающихся по кривой, проектирующейся на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = a^2$. Поэтому замкнутую область V' можно представить в виде: $V' = \left\{-a \leqslant x \leqslant a,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2},\ \frac{x^2 + y^2}{a} \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

Точки тела симметричны относительно плоскостей Oxz и Oyz. Поэтому, на основании формулы (1), имеем:

$$V = 4 \iiint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2} \\ \frac{x^2+y^2}{a} \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}}} dx\, dy\, dz.$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, получим:

$$V = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^a \rho\, d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz = 2\pi \int\limits_0^a \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{a} \right) d\rho = \frac{\pi a^3}{6}.$$

154. $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Решение. Тело V' лежит в первом октанте и ограничено частью поверхности параболоида вращения $az = a^2 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, a)$) и частью плоскости $x + y + z = a$, поэтому его можно представить в виде объединения замкнутых множеств V_1' и V_2',

где $V_1' = \left\{0 \leqslant x \leqslant a, \quad a - x \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant z \leqslant a - \frac{x^2 + y^2}{a}\right\}$,
$V_2' = \left\{0 \leqslant x \leqslant a, \; 0 \leqslant y \leqslant a - x, \; a - x - y \leqslant z \leqslant a - \frac{x^2 + y^2}{a}\right\}$.

Таким образом, по формуле (1) имеем:

$$V = \iiint\limits_{V_1'} dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{V_2'} dx\,dy\,dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{a} \rho\,d\rho \int\limits_0^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}} \rho\,d\rho \int\limits_{a - \rho(\sin\varphi + \cos\varphi)}^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{a} \rho\left(a - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho + \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}} \rho\left(\rho(\sin\varphi + \cos\varphi) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho\right) d\varphi = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6(\sin\varphi + \cos\varphi)^2}\right) d\varphi =$$

$$= a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}\right) d\varphi = \frac{a^3}{24}\left(6\varphi + 2\operatorname{ctg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^3}{24}(3\pi - 4).$$

Рекомендуем читателю для наглядности изобразить тело V' на чертеже.

155. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Тело V' ограничено частью конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и частью поверхности параболоида вращения $z = 6 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, 6)$).

Решая уравнение $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ относительно $\sqrt{x^2 + y^2}$, получаем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, откуда следует, что конус и параболоид пересекаются по кривой, проекцией которой на плоскость Oxy является окружность $x^2 + y^2 = 4$. Теперь можем представить замкнутое множество V' в виде $V' = \{x^2 + y^2 \leqslant 4, \; \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - x^2 - y^2\}$.

В интеграле (1) перейдем к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Приняв во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz, получим:

$$V = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\,d\rho \int\limits_\rho^{6 - \rho^2} dz = 2\pi \int\limits_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho)\,d\rho = \frac{32\pi}{3}.$$

156. $x^2+y^2+z^2=2az,\ x^2+y^2=z^2\ (x^2+y^2\leqslant z^2)$.

Решение. Замкнутый шар $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$ лежит в полупространстве $z\geqslant 0$, поэтому рассматриваем только то множество точек, ограниченное конической поверхностью, которое определяется неравенством $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$. Подставляя в уравнение сферы вместо z значение $z=\sqrt{x^2+y^2}$, получаем уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой пересекаются сфера и конус: $\sqrt{x^2+y^2}=a$.

Переходя к цилиндрическим координатам, представляем область V' в интеграле (1) следующим образом: $V'=\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant a,\ \rho\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-\rho^2}\}$ и находим численное значение V искомого объема:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho\,d\rho\int_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}dz=2\pi\int_0^a\rho\left(a+\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho\right)d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{a\rho^2}{2}-\frac{(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

157. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

Решение. Тело V', объем которого требуется найти, симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому в первом октанте лежит $\frac{1}{8}$ его часть. Переходя в интеграле (1) к сферическим координатам, получаем:

$$V=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{-\cos2\varphi}}\rho^2\,d\rho=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\left(\sqrt{-\cos 2\varphi}\right)^3d\varphi.$$

Полагая $\frac{\pi}{2}-\varphi=t$, находим:

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\cos^{\frac{3}{2}}2t\,dt=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^2t)^{\frac{3}{2}}\,d(\sin t)=$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}(1-2u^2)^{\frac{3}{2}}\,du\quad(u=\sin t).$$

Замена $\sqrt{2}\,u=\sin z$ приводит к интегралу

$$V=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,dz=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt2}\,\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt2}.$$

158. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z \geqslant 0;\ 0 < a < b)$.

Решение. В интеграле (1) перейдем к сферическим координатам. При этом, очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $a \leqslant \rho \leqslant b$. Следовательно, получим:

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho^2\, d\rho = \frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{\pi}{3}(b^3-a^3)(2-\sqrt{2}).$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

159. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

Решение. Для вычисления объема тела, ограниченного данной поверхностью, удобно перейти к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (13), § 1 $\alpha=\beta=1$. Тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{так как } x \geqslant 0, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

По формуле (1) $\left(\text{принимая во внимание неравенства } 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt[3]{\frac{a\sin\varphi\cos\theta}{h}}\right)$ имеем:

$$V=abc\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a\sin\varphi\cos\theta}{h}}} \rho^2\, d\rho = \frac{a^2bc}{3h}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi a^2bc}{3h}.$$

160. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

Решение. Перейдем к обобщенным сферическим координатам (по формулам (13), § 1), полагая $\alpha=\beta=1$. Тогда уравнение поверхности примет вид $\rho=\sin\varphi$ и по формуле (1) получим:

$$V=abc\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sin\varphi}\rho^2\, d\rho = \frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\pi}\sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi abc}{3}\cdot\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2abc}{4}.$$

161. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

Решение. Тело симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V=8\iiint\limits_{V''} dx\,dy\,dz,$$

где V'' — восьмая часть тела V', лежащая в первом октанте. Перейдем в интеграле к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha = \beta = 1$. Тогда

$$V = 8abc \iiint\limits_{T''} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta,$$

где T'' — замкнутая область, отображающаяся во множество V''.

В сферических координатах уравнение поверхности принимает вид $\rho^2 = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi$, откуда заключаем, что $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим:

$$V = 8abc \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{4\pi abc}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \, (1 - 2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \, d\varphi = \frac{4\pi abc}{3} \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \, d(\cos\varphi).$$

Произведем в интеграле замену $\sqrt{2}\cos\varphi = t$; тогда $d(\cos\varphi) = \frac{dt}{\sqrt{2}}$,

$$V = \frac{4\pi abc}{3\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{8\pi abc}{3\sqrt{2}} \int\limits_0^1 (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} \, dt.$$

Замена $t = \sin u$ позволяет легко вычислить значение объема V:

$$V = \frac{8\pi abc}{3\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \, du = \frac{8\pi abc}{3\sqrt{2}} \, \frac{3!!}{4!!} \, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 abc}{2\sqrt{2}}.$$

162. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

Решение. Тело V', объем которого требуется вычислить, лежит в полупространстве $z \geqslant 0$ и симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 4 \iiint\limits_{V''} dx \, dy \, dz,$$

где V'' — вся часть тела, лежащая в первом октанте. Переходя в интеграле к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (15), § 1, при $\alpha = 1$ получаем:

$$V = 4ab \iiint\limits_{T''} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

где T'' — область изменения φ, ρ и z, причем $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $c\rho^2 \leqslant z \leqslant \leqslant c\sqrt{1-\rho^2}$.

Для определения пределов изменения ρ найдем уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой пересекаются данные параболоид и эллипсоид. Для этого подставим $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ в уравнение эллипсоида и выполним замену переменных. Получив уравнение $\rho^4 + \rho^2 - 1 = 0$, найдем необходимые неравенства: $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Переходя от тройного интеграла к повторному, получаем:

$$V = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \rho d\rho \int_{c\rho^2}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\pi\, abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} (\rho\sqrt{1-\rho^2} -$$

$$- \rho^3)\, d\rho = 2\pi\, abc \left(\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}^{0} =$$

$$= 2\pi\, abc \left(\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} \right).$$

Принимая во внимание равенство $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2$, окончательно находим:

$$V = 2\pi\, abc \left(\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right) - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8} \right) = \frac{5\pi\, abc}{12} (3 - \sqrt{5}).$$

163. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

Решение. Координатные плоскости рассекают тело на 8 равных частей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{V''} dx\, dy\, dz,$$

где V'' — вся часть тела, лежащая в первом октанте.

Перейдем в интеграле к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (15), § 1, полагая $\alpha = 1$. Тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant c\sqrt[4]{1-\rho^2}$,

$$V = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{c\sqrt[4]{1-\rho^2}} dz = 4\pi\, abc \int_0^1 \rho \sqrt[4]{1-\rho^2}\, d\rho =$$

$$= \frac{8\pi\, abc}{5} (1-\rho^2)^{\frac{5}{4}} \Bigg|_1^0 = \frac{8\pi\, abc}{5}.$$

164. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

Решение. Поступаем так же, как и при решении предыдущего примера: в интеграле $V=8\iiint\limits_{V''} dx\,dy\,dz$ переходим к обобщенным цилиндрическим координатам (при $\alpha=1$). Переменные φ и ρ изменяются в тех же пределах, а z удовлетворяет неравенствам $0\leqslant z\leqslant c\sqrt[4]{1-\rho^4}$.

Таким образом, имеем:

$$V=8ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1 \rho d\rho\int\limits_0^{c\sqrt[4]{1-\rho^4}} dz=4\pi\, abc\int\limits_0^1 \rho\,(1-\rho^4)^{\frac{1}{4}}\,d\rho.$$

Произведем замену переменных, полагая $\rho=t^{\frac{1}{4}}$. Тогда получим:

$$V=\pi abc\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{4}}\,dt=\pi\, abc\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)=\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

165. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0).$

Решение. В интеграле (1) перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha=\beta=2$. Тогда получим: $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$; $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\varphi\sin^2\theta}{k}$,

$$V=4abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\varphi\sin^2\theta}{k}}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\left(\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\varphi\sin^2\theta}{k}\right)^3 d\theta=$$

$$=\frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\,d(\sin\varphi)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)^3 d\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)=$$

$$=\frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}-\frac{a}{h}\right)}\cdot\frac{\sin^{10}\varphi}{10}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}+\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)^4}{4}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{abc}{60}\left(\frac{b^2}{k^2}+\frac{a^2}{h^2}\right)\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right).$$

166. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0).$

Решение. Этот пример решается точно так же, как и предыдущий, только здесь необходимо дополнительное исследование для определения пределов изменения переменной θ. Из условия $\frac{x}{h}-\frac{y}{k}\geqslant 0$ получаем неравенство $\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\theta}{h}-\frac{b\sin^2\varphi\sin^2\theta}{k}\geqslant 0$, откуда $|\operatorname{tg}\theta|\leqslant\leqslant\sqrt{\frac{ak}{bh}}$, $0\leqslant\theta\leqslant\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}$. Таким образом, имеем:

$$V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\frac{a\sin^2\varphi\cos^2\theta}{h}-\frac{b\sin^2\varphi\sin^2\theta}{k}}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\,d(\sin\varphi)\int_{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{0}\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}-\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)^3\times$$

$$\times d\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}-\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)=\frac{2abc}{3\left(\frac{b}{k}+\frac{a}{h}\right)}\cdot\frac{\sin^{10}\varphi}{10}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\times$$

$$\times\frac{\left(\frac{a\cos^2\theta}{h}-\frac{b\sin^2\theta}{k}\right)^4}{4}\Bigg|_{\theta=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}}^{\theta=0}=\frac{abc}{60\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)}\left(\frac{a^4}{h^4}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a\cos^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)}{h}-\frac{b\sin^2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ak}{bh}}\right)}{k}\right)^4\right)=\frac{abc}{60}\,\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}.$$

167. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}\quad(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

Решение. В соответствующем интеграле производим такую же замену переменных, как и при решении двух предыдущих примеров. Находим:

$$V=4abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\sin^4\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{15}\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cos^7\theta\,d\theta=\frac{abc}{3}\,\mathrm{B}(8,4)\,\mathrm{B}(4,4)=\frac{abc}{554400}.$$

168. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

Решение. В интеграле (1) перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая в формулах (15), § 1 $\alpha=2$. Тогда получим:

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\rho^2},$$

$$V = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d(\sin\varphi)\int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz = \frac{abc}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0 = \frac{abc}{3}.$$

169. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0).$

Решение. В интеграле (1) перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha = \beta = 4$. Тогда получим: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$V = 16abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin^7\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{4abc}{3}\,\mathrm{B}(4,\ 2)\,\mathrm{B}(2,\ 2) = \frac{abc}{90}.$$

170. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0).$

Решение. Перейдем в интеграле (1) к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (13), § 1 $\alpha = \beta = 6$; тогда получим: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$V = 36abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \sin^{11}\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^5\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

$$= 3abc\,\mathrm{B}(6,\ 3)\,\mathrm{B}(3,\ 3) = \frac{abc}{1680}.$$

171. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

Решение. Тело симметрично относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8\iiint_{V''} dx\, dy\, dz,$$

где V'' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Перейдем к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (13), § 1 $\alpha = \beta = 3$. Тогда получим: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$V = 72abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^5\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

$$= 6abc\,\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \frac{6abc\,\Gamma(3)\,\Gamma^3\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4\pi abc}{35}.$$

172. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$.

Решение. Тело V', объем которого требуется вычислить, симметрично относительно плоскости $y=-x$, поэтому найдем численное значение объема части его V'', лежащей в первом октанте, и результат удвоим:

$$V=\iiint\limits_{V'} dx\,dy\,dz=2\iiint\limits_{V''} dx\,dy\,dz.$$

В последнем интеграле произведем замену переменных по формулам $xy=u_1$, $y_1=v_1x$, $z=z$. Тогда получим:

$$\frac{D(x,\,y,\,z)}{D(u_1,\,v_1,\,z)}=\frac{1}{2v_1},\quad a^2\leqslant u_1\leqslant 2a^2,\quad \frac{1}{2}\leqslant v_1\leqslant 2,\quad u_1\left(v_1+\frac{1}{v_1}\right)\leqslant z\leqslant$$
$$\leqslant 2u_1\left(v_1+\frac{1}{v_1}\right),$$

$$V=\int\limits_{a^2}^{2a^2} du_1\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dv_1}{v_1}\int\limits_{u_1\left(v_1+\frac{1}{v_1}\right)}^{2u_1\left(v_1+\frac{1}{v_1}\right)} dz=\int\limits_{a^2}^{2a^2} u_1\,du_1\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{v_1^2}\right)dv_1=$$
$$=\frac{3a^4}{2}\left(v_1-\frac{1}{v_1}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{9a^4}{2}.$$

173. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x>0,\ a<b)$.

Решение. Тело, объем которого требуется вычислить, симметрично относительно плоскостей Oxz и Oxy, разделяющих его на четыре равные части (оно лежит в полупространстве $x\geqslant 0$ и ограничено кусками конической поверхности и кусками цилиндрических поверхностей). В силу сказанного выше,

$$V=4\iiint\limits_{V''} dx\,dy\,dz,$$

где V'' — вся часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменим в интеграле переменные по формулам $z=\rho\cos\varphi$, $x=\rho\sin\varphi$, $y=y$. При такой замене, как легко убедиться, переменные изменяются в пределах $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $a\leqslant\rho\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant\rho\sqrt{-\cos 2\varphi}$. Следовательно, получим:

$$V=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_{a}^{b}\rho\,d\rho\int\limits_{0}^{\rho\sqrt{-\cos 2\varphi}} dy=4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-\cos 2\varphi}\,d\varphi\int\limits_{a}^{b}\rho^2\,d\rho=$$
$$=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-\cos 2\varphi}\,d\varphi.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменного, положив $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Тогда найдем:

$$V = \frac{4}{3}(b^3 - a^3)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2t}\, dt.$$

Наконец, полагая $\sin 2t = u^{\frac{1}{2}}$, откуда $dt = \frac{u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\, du}{4}$, получаем:

$$V = \frac{b^3 - a^3}{3}\int\limits_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{4}}\, du = \frac{b^3 - a^3}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}(b^3 - a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).$$

174. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}$.

Решение. Из уравнения поверхности, ограничивающей тело, видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей. Поэтому справедливо равенство

$$V = 8\iiint\limits_{V''} dx\, dy\, dz,$$

где V'' — вся та часть тела, которая лежит в первом октанте. Перейдем в интеграле к сферическим координатам. При этом $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а уравнение поверхности приобретает вид $\rho^6 = a^6 \operatorname{ctg}^2 \varphi$, откуда $0 \leqslant \rho \leqslant a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\varphi}$. После замены переменных получим:

$$V = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\varphi}} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \operatorname{ctg}\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

175. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{z}{h} e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}$.

Решение. Из уравнения поверхности, ограничивающей тело, видно, что оно лежит в полупространстве $z \geqslant 0$ и симметрично относительно плоскостей Ozx и Ozy, поэтому

$$V = 4\iiint\limits_{V''} dx\, dy\, dz,$$

г е V'' — вся часть тела, лежащая в первом октанте.

Перейдем в интеграле к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (13), § 1 $\alpha = \beta = 1$. Тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и уравнение поверхности, ограничивающей тело, примет вид $\rho^3 = \frac{c\cos\varphi}{h} e^{-\cos^2\varphi}$, откуда $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt[3]{\frac{c\cos\varphi}{h} e^{-\cos^2\varphi}}$.

Следовательно, получим:

$$V = 4abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{\frac{c\cos\varphi}{h} e^{-\cos^2\varphi}}} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{2\pi abc^2}{3h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, e^{-\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\cos^2\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h}(1 - e^{-1}).$$

176. $\dfrac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0,$ $x = a$.

Решение. Полагая в уравнении поверхности $z = 0$, получаем уравнение прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, по которой поверхность пересекается с плоскостью Oxy. Произведем в интеграле (1) замену переменных по формулам $\frac{x}{a} = u_1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u_2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = u_3$; при этом получим: $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, $\frac{2u_3}{\pi}\arcsin u_3 \leqslant u_2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant u_3 \leqslant 1$, $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{a}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{a}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1}{b}$, $\frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{1}{a}$, $\frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{1}{b}$, $\frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{c}$,

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{\frac{D(x, y, z)}{D(u_1, u_2, u_3)}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

$$V = abc\int\limits_0^1 du_1 \int\limits_{-1}^1 du_3 \int\limits_{\frac{2u_3}{\pi}\arcsin u_3}^1 du_2 =$$

$$= abc\int\limits_{-1}^1 \left(1 - \frac{2}{\pi}u_3\arcsin u_3\right) du_3 =$$

$$= 2abc\left(1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} u_3 \arcsin u_3\, du_3\right) =$$

$$= 2abc\left(1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{u_3^2}{2}\arcsin u_3\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u_3^2\, du_3}{\sqrt{1-u_3^2}}\right)\right) =$$

$$= abc\left(1 + \frac{\sqrt{1-u_3^2}}{\pi}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-u_3^2}\, du_3\right) = \frac{3}{2}\, abc.$$

177. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $\quad x = 0, \quad z = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Решение. В интеграле (1), как и при решении предыдущего примера, заменим переменные по формулам $\frac{x}{a} = u_1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u_2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = u_3$. Тогда $\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u_1,\ u_2,\ u_3)} = abc$, $\quad 0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, $\quad u_3 e^{-u_3} \leqslant u_2 \leqslant u_3$, $u_1 \leqslant u_3 \leqslant 1$; после замены получим:

$$V = abc\int\limits_0^1 du_1 \int\limits_{u_1}^1 du_3 \int\limits_{u_3 e^{-u_3}}^{u_3} du_2 = abc\int\limits_0^1 du_1\int\limits_{u_1}^1 u_3\left(1 - e^{-u_3}\right) du_3 =$$

$$= abc\int\limits_0^1\left(\frac{u_3^2}{2} + u_3 e^{-u_3} + e^{-u_3}\right)\Bigg|_{u_3=u_1}^{u_3=1} du_1 =$$

$$= abc\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{u_1^2}{2} + 2e^{-1} - u_1 e^{-u_1} - e^{-u_1}\right) du_1 = 5abc\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right).$$

178. В каком отношении делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4az$ поверхность $x^2 + y^2 + az = 4a^2$?

Решение. Объем шара с границей $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$, очевидно, численно равен $\frac{32}{3}\pi a^3$. Решив относительно z уравнения заданных поверхностей и приравняв полученные значения z друг другу, найдем уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой поверхности пересекаются: $2a - \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)} = 4a - \frac{x^2 + y^2}{a}$. Решив это уравнение относительно $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим уравнение $\rho = a\sqrt{3}$, то есть проекцией на плоскость Oxy линии пересечения поверхностей является окружность радиуса $a\sqrt{3}$.

Теперь найдем численное значение V_1 объема тела, ограниченного нижней частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ и куском поверхности $x^2 + y^2 + az = 4a^2$. Переходя в соответствующем тройном интеграле к цилиндрическим координатам и принимая во внимание, что область интегрирования определяется неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{3}$, $2a - \sqrt{4a^2 - \rho^2} \leqslant z \leqslant 4a - \frac{\rho^2}{a}$, находим:

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{3}} \rho d\rho \int_{2a-\sqrt{4a^2-\rho^2}}^{4a-\frac{\rho^2}{a}} dz = 2\pi \int_0^{a\sqrt{3}} \rho\left(2a + \sqrt{4a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi\left(3a^3 + \frac{(4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{a\sqrt{3}}^{0} - \frac{\rho^4}{4a}\Bigg|_0^{a\sqrt{3}}\right) = \frac{37}{6}\pi a^3.$$

Вычтя из объема шара полученный объем V_1, найдем объем V_2 тела, ограниченного заданной поверхностью и верхней частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$: $V_2 = \frac{32}{3}\pi a^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{9}{2}\pi a^3$. Таким образом, имеем: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}$.

179. Найти объем и площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = az$, $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

Решение. Тело ограничено снизу (относительно плоскости $z = a$) параболоидом $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ и сверху (относительно той же плоскости) — конической поверхностью $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$, причем эти поверхности пересекаются по кривой, проектирующейся на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Для нахождения искомого объема перейдем в интеграле (1) к цилиндрическим координатам. Тогда область интегрирования V' будет определяться неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $\frac{\rho^2}{a} \leqslant z \leqslant 2a - \rho$ и мы получим:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{a}}^{2a-\rho} dz = 2\pi \int_0^a \rho\left(2a - \rho - \frac{\rho^2}{a}\right) d\rho = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

Найдем теперь площадь S поверхности заданного тела. Для поверхностей $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ и $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ соответственно получаем:

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}(x^2 + y^2)} \quad \text{и} \quad \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{2}.$$

Переходя в соответствующих двойных интегралах к полярным координатам, находим:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \sqrt{1 + \frac{4\rho^2}{a^2}}\, d\rho + \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{a^2}{12}\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a + \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\right) = \frac{\pi}{6}a^2(6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1).$$

180. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями $a_ix + b_iy + c_iz = \pm h_i$ $(i = 1, 2, 3)$, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение. Заменяя в интеграле (1) переменные по формулам $a_ix + b_iy + c_iz = u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, получаем: $\frac{\partial u_i}{\partial x} = a_i$, $\frac{\partial u_i}{\partial y} = b_i$, $\frac{\partial u_i}{\partial z} = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\frac{D(x, y, z)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\Delta}$, $|u_i| \leqslant h_i$,

$$V = \frac{8}{|\Delta|} \int\limits_0^{h_1} du_1 \int\limits_0^{h_2} du_2 \int\limits_0^{h_3} du_3 = \frac{8}{|\Delta|} h_1h_2h_3.$$

181. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение. Замена переменных в интеграле (1) по формулам $a_ix + b_iy + c_iz = u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, отображающим замкнутую область V' в замкнутый шар $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant h^2$, приводит нас к следующему результату: $V = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}$.

182. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \qquad (n > 1).$$

Решение. Тело лежит в полупространстве $z \geqslant 0$, и его точки симметричны относительно плоскостей Oxz и Oyz, поэтому можем написать: $V = 4 \iiint\limits_{V''} dx\,dy\,dz$, где V'' — вся та часть тела V', которая лежит в первом октанте.

Перейдем в интеграле к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha = \beta = 1$. Тогда

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt[3]{\frac{c \cos\varphi \sin^{2n-4}\varphi}{h(\sin^{2n}\varphi + \cos^{2n}\varphi)}} = \rho(\varphi),$$

$$V = 4abc \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho^2\, d\rho = \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi \sin^{2n-3}\varphi\, d\varphi}{\sin^{2n}\varphi + \cos^{2n}\varphi} =$$

$$= \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2n-3}\varphi\, d(\operatorname{tg}\varphi)}{1 + \operatorname{tg}^{2n}\varphi}.$$

Полагая $\operatorname{tg}^{2n}\varphi = t$, получаем: $d(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{2n} t^{\frac{1}{2n}-1}\,dt$,

$$V = \frac{\pi abc^2}{3nh}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt = \frac{\pi abc^2}{3nh}\,\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi abc^2}{3nh}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi^2 abc^2}{3nh\sin\frac{\pi}{n}}.$$

183. Найти объем тела, расположенного в первом октанте пространства $Oxyz$ $(x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0)$ и ограниченного поверхностями $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1$ $(m > 0,\ n > 0,\ p > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$V = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt[n]{1-\frac{x^m}{a^m}}} dy \int_0^{c\sqrt[p]{1-\frac{x^m}{a^m}-\frac{y^n}{b^n}}} dz =$$

$$= c\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt[n]{1-\frac{x^m}{a^m}}} \sqrt[p]{1-\frac{x^m}{a^m}-\frac{y^n}{b^n}}\,dy.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменных, положив $y = \sqrt[n]{1-\frac{x^m}{a^m}}\, b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$. Имеем: $dy = \frac{2b}{n}\sqrt[n]{1-\frac{x^m}{a^m}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos\varphi\,d\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$V = \frac{2bc}{n}\int_0^a dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{x^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2bc}{n}\int_0^a\left(1-\frac{x^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}+1}\varphi\,d\varphi.$$

Полагая в интеграле $x = a\sin^{\frac{2}{m}}\theta$, получаем: $dx = \frac{2a}{m}\sin^{\frac{2}{m}-1}\theta\times$ $\times\cos\theta\,d\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$V = \frac{4abc}{mn}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{m}-1}\theta\cos^{\frac{2}{n}+\frac{2}{p}+1}\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{abc}{mn} \mathrm{B}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + 1\right) \cdot \mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{p} + 1\right) =$$

$$= \frac{abc}{mn + mp + np} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}.$$

§ 8. Приложения тройных интегралов к решению задач механики

1°. Масса тела. Численное значение M массы тела V', плотность которого в точке (x, y, z) равна $\mu(x, y, z)$, можно найти по формуле

$$M = \iiint\limits_{V'} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{1}$$

2°. Центр тяжести тела. Координаты центра тяжести $M_0(x_0, y_0, z_0)$ тела V' можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{V'} x\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{V'} y\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{V'} z\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{2}$$

Если тело однородно, то в формулах (1), (2) полагаем $\mu = 1$.

3°. Моменты инерции. Моментами инерции тела V' относительно координатных плоскостей называются, соответственно, интегралы

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint\limits_{V'} z^2\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ I_{yz} &= \iiint\limits_{V'} x^2\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\ I_{zx} &= \iiint\limits_{V'} y^2\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Моментом инерции тела V' относительно некоторой прямой l называется интеграл

$$I_l = \iiint\limits_{V'} r^2\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

где r — расстояние от переменной точки тела (x, y, z) до прямой l. Для координатных осей имеем:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}. \tag{5}$$

Моментом инерции тела V' относительно начала координат называется интеграл

$$I_0 = \iiint\limits_{V'} (x^2 + y^2 + z^2)\, \mu(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz. \tag{6}$$

Из формул (3) получаем:

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \tag{7}$$

4°. Потенциал поля тяготения. Ньютоновым потенциалом, или потенциалом поля тяготения тела V' в точке $P(x,\ y,\ z)$ называют интеграл

$$u(x,\ y,\ z) = \iiint\limits_{V'} \mu(\xi,\ \eta,\ \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}, \tag{8}$$

где $\mu(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ — плотность тела, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Материальная точка массы m притягивается телом V' с силой, проекции которой X, Y, Z на оси координат Ox, Oy и Oz выражаются формулами:

$$\begin{aligned} X &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \iiint\limits_{V'} \mu(\xi,\ \eta,\ \zeta) \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ Y &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma m \iiint\limits_{V'} \mu(\xi,\ \eta,\ \zeta) \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\ Z &= \gamma m \frac{\partial u}{dz} = \gamma m \iiint\limits_{V'} \mu(\xi,\ \eta,\ \zeta) \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \end{aligned} \tag{9}$$

где γ — гравитационная постоянная.

184. Найти массу тела, заполняющего бесконечную область $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, если плотность тела меняется по закону $\mu(x,\ y,\ z) = \mu_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\mu_0 > 0$ и $k > 0$ — постоянны.

Решение. Найдем сначала численное значение массы тела V', заполняющего объем $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$. По формуле (1) получим:

$$M_{V'} = \iiint\limits_{V'} \mu(x,\ y,\ z)\, dx\, dy\, dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам; тогда

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant R,$$

$$M_{V'} = \mu_0 \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_1^R e^{-k\rho}\rho^2\, d\rho = 4\pi\mu_0 \int\limits_1^R \rho^2 e^{-k\rho}\, d\rho =$$

$$= 4\pi\mu_0 \left(\rho^2 \frac{e^{-k\rho}}{k} \Big|_R^1 + \frac{2}{k} \int\limits_1^R \rho e^{-k\rho}\, d\rho \right) =$$

$$= 4\pi\mu_0 \left(\frac{e^{-k}}{k} - \frac{R^2 e^{-kR}}{k} + \left(\frac{2}{k^2} \rho e^{-k\rho} + \frac{2}{k^3} e^{-k\rho} \right) \Big|_R^1 \right) =$$

$$= 4\pi\mu_0 \left(\frac{e^{-k} - R^2 e^{-kR}}{k} + \frac{2(e^{-k} - Re^{-kR})}{k^2} + \frac{2(e^{-k} - e^{-kR})}{k^3} \right).$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$, находим:

$$M = 4\pi\mu_0 e^{-k}\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right).$$

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями:

185. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

Решение. Тело однородно, ограничено частью конической поверхности $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, частью плоскости $z = c$ и симметрично относительно оси Oz. Следовательно, его центр тяжести $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой оси и $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. По формуле (2) имеем:

$$z_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V'} z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — численное значение объема тела V'.

В интеграле $V = \iiint\limits_{V'} dx\,dy\,dz$ перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (15), § 1, полагая $\alpha = 1$. После замены получим:

$$V = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{c\rho}^{c} dz = 2\pi abc\int_0^1 \rho(1-\rho)\,d\rho = \frac{\pi}{3}abc.$$

Таким образом, имеем:

$$z_0 = \frac{3}{\pi c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_{c\rho}^{c} z\,dz = 3c\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{3}{4}c;$$

следовательно, $M_0 = \left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}c\right)$.

186. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Тело лежит в первом октанте. Для нахождения координат центра тяжести M_0 вычислим объем тела по формуле

$$V = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3}\right)dx = \frac{a^4}{6}.$$

Применяя формулы (2), находим:

$$x_0 = \frac{6}{a^4}\int_0^a x\,dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{6}{a^4}\int_0^a \left(x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3}\right)dx = \frac{2}{5}a,$$

$$y_0=\frac{6}{a^4}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x} y\,dy\int\limits_0^{x^2+y^2} dz=\frac{6}{a^4}\int\limits_0^a\left(\frac{x^2(a-x)^2}{2}+\frac{(a-x)^4}{4}\right)dx=\frac{2}{5}a,$$

$$z_0=\frac{6}{a^4}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x} dy\int\limits_0^{x^2+y^2} z\,dz=\frac{6}{a^4}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}\frac{(x^2+y^2)^2}{2}dy=$$

$$=\frac{3}{a^4}\int\limits_0^a\left(x^4(a-x)+\frac{2}{3}x^2(a-x)^3+\frac{(a-x)^5}{5}\right)dx=\frac{7}{30}a^2.$$

Следовательно, $M_0=\left(\frac{2}{5}a,\ \frac{2}{5}a,\ \frac{7}{30}a^2\right)$.

187. $x^2=2pz,\quad y^2=2px,\quad x=\frac{p}{2},\quad z=0.$

Решение. Точки тела симметричны относительно плоскости Oxz, поэтому $V=2\iiint\limits_{V'}dx\,dy\,dz$, где $V'=\left\{0\leqslant x\leqslant\frac{p}{2},\quad 0\leqslant y\leqslant\sqrt{2px},\right.$ $\left.0\leqslant z\leqslant\frac{x^2}{2p}\right\}$.

Переходя от тройного интеграла к повторному, получаем:

$$V=2\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}}dy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{1}{p}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}}x^2\,dy=\frac{1}{p}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}x^2\sqrt{2px}\,dx=\frac{p^3}{28}.$$

Применяя формулы (2), находим:

$$x_0=\frac{2}{V}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}x\,dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}}dy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{28}{p^4}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}x^3\sqrt{2px}\,dx=\frac{7}{18}p,$$

$$y_0=\frac{1}{V}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dx\int\limits_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}}y\,dy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}}dz=\frac{7}{p^4}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\left(x^2y^2\Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}}\right)dx=0,$$

$$z_0=\frac{2}{V}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}dx\int\limits_0^{\sqrt{2px}}dy\int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}}z\,dz=\frac{7}{p^5}\int\limits_0^{\frac{p}{2}}x^4\sqrt{2px}\,dx=\frac{7}{176}p.$$

Следовательно, центр тяжести тела $M_0=\left(\frac{7}{18}p,\ 0,\ \frac{7}{176}p\right)$.

188. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

Решение. Заданное тело V' представляет собой восьмую часть эллипсоида с полуосями a, b и c, поэтому его объем (масса) численно равен $\frac{\pi}{6}abc$. По формулам (2) получим:

$$x_0=\frac{6}{\pi abc}\iiint\limits_{V'}x\,dx\,dy\,dz,\quad y_0=\frac{6}{\pi abc}\iiint\limits_{V'}y\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_0=\frac{6}{\pi abc}\iiint\limits_{V'}z\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя в интегралах к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1 и представляя область интегрирования V' с помощью неравенств $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, находим координаты центра тяжести M_0:

$$x_0 = \frac{6a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{3}{8}a,$$

$$y_0 = \frac{6b}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{3}{8}b,$$

$$z_0 = \frac{6c}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \frac{3}{8}c.$$

189. $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2 \qquad (z \geqslant 0).$

Решение. Четвертая часть заданного тела изображена на рис. 11 (стр. 483). Его центр тяжести M_0 лежит на оси Oz, поскольку точки тела симметричны относительно этой оси; поэтому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Восьмая часть тела проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$, следовательно, можем написать:

$$V = 8\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 8\int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dy =$$

$$= \frac{8}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{8}{3}a^3;$$

$$z_0 = \frac{8}{V}\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} z\,dz = \frac{3}{2a^3}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx = \frac{3}{8}a.$$

Таким образом, $M_0 = \left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$.

190. $x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y = z.$

Решение. Подставив $z = x + y$ в уравнение поверхности $x^2 + y^2 = 2z$, получим уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой пересекаются данные поверхность и плоскость: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$.

В интеграле $V = \iiint\limits_{V'} dx\,dy\,dz$ произведем замену переменных по формулам $x - 1 = \rho\cos\varphi$, $y - 1 = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$, $1 + \rho(\sin\varphi + \cos\varphi) + \frac{\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant 2 + \rho(\sin\varphi + \cos\varphi)$,

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho \int_{1+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\frac{\rho^2}{2}}^{2+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(1 - \frac{\rho^2}{2}\right) d\rho = \pi;$$

$$x_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{1+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\frac{\rho^2}{2}}^{2+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)}(1+\rho\cos\varphi)\,dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho(1+\rho\cos\varphi)\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho-\frac{\rho^3}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{2}\right)\cos\varphi\right)d\rho=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho-\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho=1,$$

$$y_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{1+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\frac{\rho^2}{2}}^{2+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)}(1+\rho\sin\varphi)\,dz=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho-\frac{\rho^3}{2}+\sin\varphi\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{2}\right)\right)d\rho=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho-\frac{\rho^3}{2}\right)d\rho=1,$$

$$z_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{1+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\frac{\rho^2}{2}}^{2+\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)}z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left(3+2\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)+\frac{\rho^2}{2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\rho\left(3+\frac{\rho^2}{2}\right)\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=\int_0^{\sqrt{2}}\left(3\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{4}\right)d\rho=\frac{5}{3}.$$

191. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{abc}\quad(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0).$

Решение. В интеграле $V=\iiint\limits_{V'}dx\,dy\,dz$ перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha=\beta=1$. После замены получим:

$$V=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{abc}{12}\mathrm{B}(4,\ 2)\cdot\mathrm{B}(2,\ 2)=\frac{abc}{5!\ 12}.$$

По формулам (2) имеем:

$$x_0=5!\ 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}\rho^3d\rho=$$

$$=5!\,3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}\varphi\cos^4\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta=$$

$$=\frac{5!\,3a}{4}\mathrm{B}\left(\frac{11}{2},\ \frac{5}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ 3\right)=\frac{9}{448}\pi a,$$

$$y_0=5!\,12b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}\rho^3 d\rho=$$

$$=5!\,3b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}\varphi\cos^4\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos^4\theta d\theta=$$

$$=\frac{5!\,3b}{4}\mathrm{B}\left(\frac{11}{2},\ \frac{5}{2}\right)\mathrm{B}\left(3,\ \frac{5}{2}\right)=\frac{9}{448}\pi b,$$

$$z_0=5!\,12c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}\rho^3 d\rho=$$

$$=5!\,3c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\varphi\cos^5\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^4\theta d\theta=$$

$$=\frac{5!\,3c}{4}\mathrm{B}(5,\ 3)\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)=\frac{9}{448}\pi c.$$

192. $z=x^2+y^2,\quad z=\frac{1}{2}(x^2+y^2),\quad x+y=\pm 1,\quad x-y=\pm 1.$

Решение. Заданное тело V' симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz, а четвертая его часть проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$, поэтому можно написать:

$$V=4\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x^2+y^2}dz=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx=\frac{1}{3}.$$

Функция $f(x,\ y,\ z)=x$ в точках тела V', симметричных относительно плоскости Oyz, принимает значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, поэтому имеем:

$$x_0=\frac{1}{V}\iiint\limits_{V'}x\,dx\,dy\,dz=0.$$

Функция $\varphi(x,\ y,\ z)=y$ в точках тела V', симметричных относительно плоскости Oxz, также принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения, в силу чего получаем:

$$y_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V'} y\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Для вычисления координаты центра тяжести z_0 применяем соответствующую из формул (2). Принимая во внимание равенства $z(x, y) = z(-x, y) = z(x, -y) = z(-x, -y)$, находим:

$$z_0 = \frac{4}{V}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x^2+y^2} z\,dz = 6\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{3}{4}(x^2+y^2)^2\,dy =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^1 \left(x^4(1-x) + \frac{2}{3}x^2(1-x)^3 + \frac{(1-x)^5}{5}\right)dx = \frac{7}{20}.$$

193. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

Решение. Заданное тело V' лежит в первом октанте. В интеграле $V = \iiint\limits_{V'} dx\,dy\,dz$ перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1 при $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$. Тогда получим: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$,

$$V = \frac{4}{n^2}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi \sin^{\frac{4}{n}-1}\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\theta \cos^{\frac{2}{n}-1}\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^2\,d\rho =$$

$$= \frac{abc}{3n^2}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2}\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

По формулам (2) имеем:

$$x_0 = \frac{1}{V}\iiint\limits_{V'} x\,dx\,dy\,dz = \frac{4a^2bc}{Vn^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{6}{n}-1}\varphi \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\,d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\theta \cos^{\frac{4}{n}-1}\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho = \frac{1}{V}\frac{a^2bc}{4n^2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) =$$

$$= \frac{3a}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}.$$

Аналогично находим:

$$y_0 = \frac{3}{4} b \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}, \quad z_0 = \frac{3}{4} c \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}.$$

194. Определить координаты центра тяжести тела V', имеющего форму куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке (x, y, z) определяется формулой $\mu(x, y, z) = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}$, где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Решение. Найдем численное значение массы тела V' по формуле (1):

$$M = \iiint_{V'} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}.$$

С помощью формул (2) получаем:

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_{V'} x\mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz = \frac{1}{M} \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha.$$

Аналогично находим: $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры считать положительными):

195. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Заданное тело V' является замкнутым множеством точек, определяющимся неравенствами $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $0 \leqslant z \leqslant c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$. Таким образом, с помощью одной из формул (3) находим:

$$I_{xy} = \iiint_{V'} z^2 dx\, dy\, dz = \int_0^a dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} z^2 dz.$$

Вид повторного интеграла убеждает нас в необходимости произвести замену переменных по формулам (15), § 1, полагая $\alpha = 2$. Тогда получим: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant c(1-\rho)$,

$$I_{xy} = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{c(1-\rho)} z^2 dz = \frac{2}{3} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \times$$

$$\times \int_0^1 \rho (1-\rho)^3 \, d\rho = \frac{1}{3} abc^3 \int_0^1 \rho (1 - 3\rho + 3\rho^2 - \rho^3) \, d\rho = \frac{abc^3}{60}.$$

Аналогично находим: $I_{yz} = \frac{a^3bc}{60}$, $I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}$.

196. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. В интеграле $I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2 dx\, dy\, dz$ перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1, полагая $\alpha = \beta = 1$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей и равенство $z^2 = (-z)^2$, получаем:

$$I_{xy} = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^2 (c \rho \cos\varphi)^2 \, d\rho =$$

$$= 8abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{4}{5} \pi abc^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\varphi d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{4}{15} \pi abc^3.$$

Аналогично находим моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz и Ozx:

$$I_{yz} = \frac{4}{15} \pi a^3 bc, \quad I_{zx} = \frac{4}{15} \pi ab^3 c.$$

197. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

Решение. Тело V' ограничено частью конической поверхности $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ и куском плоскости $z = c$, причем его точки проектируются на плоскость Oxy во множество $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ (замкнутый эллипс).

В интеграле $I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2 dx\, dy\, dz$ заменяем переменные по формулам (15), § 1, полагая $\alpha = 1$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей Ozx и Oyz, получаем:

$$I_{xy} = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho}^{c} z^2 dz = \frac{2}{3} \pi abc^3 \int_0^1 \rho (1 - \rho^3) \, d\rho = \frac{\pi}{5} abc^3.$$

Аналогично находим: $I_{yz} = \frac{\pi}{20} a^3bc$, $I_{zx} = \frac{\pi}{20} ab^3c$.

198. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}.$

Решение. Из условия задачи следует, что заданное тело V' лежит в полупространстве $x \geqslant 0$ и что с боков оно ограничено частью поверхности цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}$, а сверху и снизу — кусками поверхности эллипсоида.

В интеграле $I_{xy}=\iiint\limits_{V'} z^2 dx\,dy\,dz$ заменим переменные по формулам (15), § 1 при $\alpha=1$. Тогда получим:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant\rho\leqslant\cos\varphi, \quad -c\sqrt{1-\rho^2}\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\rho^2},$$

$$I_{xy}=ab\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\rho d\rho\int\limits_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}}z^2dz=\frac{2}{3}abc^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\rho(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}d\rho=$$

$$=\frac{2}{3}abc^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-\rho^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_{\rho=\cos\varphi}^{\rho=0}\right)d\varphi=\frac{2}{15}abc^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin^5\varphi|)\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{15}abc^3\left(\pi-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi\right)=\frac{2}{15}abc^3\left(\pi-\frac{4!!\,2}{5!!}\right)=\frac{2}{225}abc^3(15\pi-16),$$

$$I_{yz}=\iiint\limits_{V'}x^2dx\,dy\,dz=a^3b\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\rho^3d\rho\int\limits_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}}dz=$$

$$=2a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\rho^3\sqrt{1-\rho^2}d\rho=$$

$$=2a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\left(\frac{\rho^2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2(1-\rho^2)^{\frac{5}{2}}}{15}\right)\Bigg|_{\rho=\cos\varphi}^{\rho=0}d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}a^3bc\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{5}\cos^2\varphi-\cos^4\varphi|\sin^3\varphi|-\frac{2}{5}\cos^2\varphi|\sin^5\varphi|\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2}{3}a^3bc\left(\frac{\pi}{5}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^4\varphi d\varphi-\frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos^2\varphi d\varphi\right)=$$

$$= \frac{2}{3} a^3bc\left(\frac{\pi}{5} - \mathrm{B}\left(2,\ \frac{5}{2}\right) - \frac{2}{5}\,\mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3} a^3bc\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} - \frac{2}{5}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} a^3bc\left(\frac{\pi}{5} - \frac{3\sqrt{\pi}\cdot 2^4}{7!!\sqrt{\pi}\cdot 2^2} - \frac{2}{5}\,\frac{2\sqrt{\pi}\cdot 2^4}{7!!\sqrt{\pi}\cdot 2}\right) = \frac{2a^3bc}{1575}(105\pi - 92),$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_{V'} y^2\,dx\,dy\,dz = ab^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} \rho^3\,d\rho \int\limits_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz =$$

$$= \frac{2}{3}\,ab^3c \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{5}\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,|\sin^3\varphi| - \frac{2}{5}\sin^2\varphi\,|\sin^5\varphi|\right) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\,ab^3c\left(\frac{\pi}{5} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{4}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\,ab^3c\left(\frac{\pi}{5} - \mathrm{B}\left(3,\ \frac{3}{2}\right) - \frac{4}{5}\cdot\frac{6!!}{7!!}\right) = \frac{2ab^3c}{1575}(105\pi - 272).$$

199. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

Р е ш е н и е. Найдем уравнение проекции на плоскость Oxy кривой, по которой пересекаются эллиптический параболоид и плоскость. Подставив $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ в уравнение параболоида, получим искомое уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

Таким образом, множество всех внутренних точек заданного тела V' проектируется на плоскость Oxy в область D, ограниченную замкнутой кривой $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 = 2$.

В интеграле $I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2\,dx\,dy\,dz$ заменим переменные по формулам (15), § 1, полагая $\alpha = 1$. Подставив значения $x = a\rho\cos\varphi$ и $y = b\rho\sin\varphi$ в уравнение границы области D, получим уравнение $\rho = 2(\sin\varphi + \cos\varphi)$, из которого найдем пределы изменения переменной ρ: $0 \leqslant \rho \leqslant 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$. Из условия $\rho \geqslant 0$ получим пределы изменения переменной φ: $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$. Следовательно, множество точек тела V' с помощью произведенной замены отображается во множество T', заданное неравенствами: $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho \leqslant$ $\leqslant 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{c\rho^2}{2} \leqslant z \leqslant c\rho\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.

После замены переменных находим:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2 dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{T'} \left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ z)}\right| d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= ab \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} \rho d\rho \int\limits_{\frac{c\rho^2}{2}}^{c\rho\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} z^2 dz =$$

$$= \frac{abc^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} \left(2\sqrt{2}\rho^4 \sin^3\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\rho^7}{8}\right) d\rho =$$

$$= \frac{abc^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{(2\sqrt{2})^6}{5} \sin^8\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{(2\sqrt{2})^8}{64} \sin^8\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right) d\varphi =$$

$$= \frac{64abc^3}{5} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^8\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi.$$

Полагая в интеграле $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, получаем:

$$I_{xy} = \frac{64abc^3}{5} \int\limits_{0}^{\pi} \sin^8 t dt = \frac{128abc^3}{5} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 t dt = \frac{128abc^3}{5} \cdot \frac{7!!}{8!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi abc^3}{2}.$$

Аналогично находим: $I_{yz} = \frac{4\pi a^3 bc}{3}$, $I_{zx} = \frac{4\pi ab^3 c}{3}$.

200. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

Решение. В интеграле $I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2 dx\, dy\, dz$ перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (13), § 1 при $\alpha = \beta = 1$. Тогда уравнение границы тела в сферических координатах примет вид $\rho^2 = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi$, откуда следует: $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

Множество точек тела V' отображается во множество $T' = \left\{\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4},\quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{-\cos 2\varphi},\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$, и после замены переменных получим:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{T'} \left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ \theta)}\right| c^2\rho^2 \cos^2\varphi d\rho\, d\varphi\, d\theta,$$

где
$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ \theta)} = abc\rho^2 \sin\varphi.$$

Переходя от тройного интеграла к повторному, находим:

$$I_{xy} = abc^3 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{-\cos 2\varphi}} \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{2\pi abc^3}{5} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \cos^2\varphi (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}} d\varphi.$$

Полагая в интеграле $\sqrt{2}\cos\varphi = t$, получаем:

$$I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} \int\limits_{-1}^{1} t^2 (1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{2\pi abc^3}{5\sqrt{2}} \int\limits_0^1 t^2 (1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt.$$

Наконец, полагая $t^2 = u$, находим:

$$I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} \mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right) = \frac{\pi^2 abc^3}{128\sqrt{2}}.$$

Действуя по той же схеме, получаем:

$$I_{yz} = \frac{15\pi^2 a^3 bc}{256\sqrt{2}}, \quad I_{zx} = \frac{15\pi^2 ab^3 c}{256\sqrt{2}}.$$

201. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($n > 0$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0, z \geqslant 0$).

Решение. Заданное тело V' лежит в первом октанте. Произведем в интеграле $I_{xy} = \iiint\limits_{V'} z^2 dx\, dy\, dz$ замену переменных по формулам (13), § 1, полагая $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$. Тогда, учитывая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, получаем:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{T'} \left|\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\rho,\ \varphi,\ \theta)}\right| c^2 \rho^2 \cos^{\frac{4}{n}} \varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{4abc^3}{n^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{6}{n} - 1} \varphi \sin^{\frac{4}{n} - 1} \varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{n} - 1} \theta d\theta \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{abc^3}{5n^2} \mathrm{B}\left(\frac{3}{n},\ \frac{2}{n}\right) \mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right) = \frac{abc^3}{5n^2} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}.$$

Аналогично находим:

$$I_{yz}=\frac{a^3bc\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{5n^2\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}, \quad I_{zx}=\frac{ab^3c\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{5n^2\Gamma\left(\frac{5}{n}\right)}.$$

Определить моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

202. $z=x^2+y^2, \quad x+y=\pm 1, \quad x-y=\pm 1, \quad z=0.$

Решение. Согласно формуле (5), имеем:

$$I_z=\iiint\limits_{V'}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Точки тела V' симметричны относительно плоскостей Oxz и Oyz, и его четвертая часть проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D=\{0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$. Кроме этого, функция $\varphi(x, y)=x^2+y^2$ принимает равные значения в точках, симметричных относительно осей Oy и Ox. Поэтому можем написать:

$$I_z=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\,dz=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)^2\,dy=$$

$$=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^4+2x^2y^2+y^4)\,dy=4\int_0^1\left(x^4(1-x)+\frac{2x^2}{3}(1-x)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-x)^5}{5}\right)dx=\frac{14}{45}.$$

203. $x^2+y^2+z^2=2, \quad x^2+y^2=z^2 \qquad (z>0).$

Решение. Заданное тело V' ограничено частью конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и куском сферы $x^2+y^2+z^2=2$, причем сфера и конус пересекаются по кривой, проекцией которой на плоскость Oxy является окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей Oxz и Oyz, а также то обстоятельство, что функция $\varphi(x, y)=x^2+y^2$ в точках единичного круга, симметричных относительно осей координат, принимает равные значения, можем написать:

$$I_z=\iiint\limits_{V'}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(x^2+y^2)\,dz.$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, получим:

$$I_z=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^3d\rho\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}}dz=2\pi\int_0^1\rho^3(\sqrt{2-\rho^2}-\rho)\,d\rho=$$

$$=2\pi\left(\frac{(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\rho^2\Big|_1^0+\frac{2}{3}\int_0^1\rho(2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}d\rho-\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1\right)=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5).$$

204. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^5 z$.

Решение. Из условия задачи следует, что $z \geqslant 0$. Перейдем в интеграле

$$I_z = \iiint_{V'} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

к сферическим координатам. После замены переменных и перехода от тройного интеграла к повторному получим:

$$I_z^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt[5]{\cos\varphi}} \rho^4 d\rho = \frac{2\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{\pi a^5}{5}.$$

205. Найти момент инерции неоднородного шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ массы M относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $P(x, y, z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

Решение. По условию задачи имеем: $\mu(x, y, z) = \gamma\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\gamma = \text{const}$, $\gamma > 0$. Постоянную γ определим из условия

$$M = \gamma \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдя в интеграле к сферическим координатам, получим:

$$M = \gamma\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi\gamma R^4,$$

откуда $\gamma = \frac{M}{\pi R^4}$.

Считая, что диаметр шара является отрезком оси Oz и применяя формулу (5), получаем:

$$I_z = \frac{M}{\pi R^4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к сферическим координатам, находим:

$$I_z = \frac{M}{\pi R^4}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{M}{\pi R^4}\,\frac{2R^6\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{9}MR^2.$$

206. Доказать равенство $I_l = I_{l_0} + Md^2$, где I_l — момент инерции тела V' относительно некоторой оси l, I_{l_0} — момент инерции относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр тяжести тела, d — расстояние между осями и M — масса тела.

Доказательство. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы начало координат совпало с центром тяжести тела V', а ось Oz — с прямой l_0. Тогда $I_{l_0} = I_z$. Прямая l параллельна оси Oz. Фиксируя эту прямую, мы фиксируем на плоскости Oxy некоторую точку (ξ, η), причем, очевидно, $\xi^2+\eta^2 = d^2$. Возьмем любую точку (x, y, z) тела и обозначим через r^2 квадрат расстояния от этой точки до прямой l. Тогда $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Пусть $\mu(x, y, z)$ — плотность вещества тела. Применив формулу (4) для вычисления момента инерции тела относительно некоторой сси, получим:

$$I_l=\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\times$$
$$\times(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz-2\Big(\xi\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz+$$
$$+\eta\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz\Big)+(\xi^2+\eta^2)\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

В силу равенств

$$\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=I_z=I_{l_0},$$
$$(\xi^2+\eta^2)\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=d^2M,\quad \iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz=$$
$$=Mx_0=0,\quad \iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz=My_0=0$$

(так как центр тяжести (x_0, y_0, z_0) совпадает с началом координат), имеем: $I_l=I_{l_0}+Md^2$, что и требовалось доказать.

207. Доказать, что момент инерции тела V' относительно оси l, проходящей через его центр тяжести $O(0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, определяется по формуле:

$$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-$$
$$-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma-$$
$$-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат и

$$K_{xy}=\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,xy\,dx\,dy\,dz,$$
$$K_{xz}=\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,xz\,dx\,dy\,dz,$$
$$K_{yz}=\iiint\limits_{V'}\mu(x, y, z)\,yz\,dx\,dy\,dz$$

— центробежные моменты.

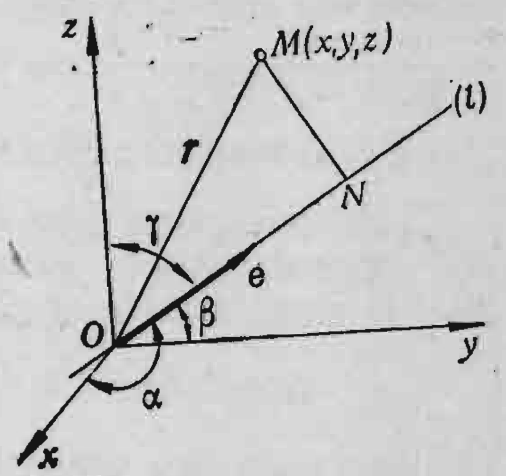

Рис. 16

Доказательство. Найдем квадрат расстояния d^2 от точки тела $M(x, y, z)$ до прямой l (то есть до точки N — проекции точки M на прямую, рис. 16). Пусть $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$ — радиус-вектор точки M, а $\boldsymbol{e}$ — орт прямой l. Очевидно, $\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$d^2 = |\boldsymbol{r}|^2 - (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e})^2$, где $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{e}$. Принимая во внимание равенства $|\boldsymbol{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, имеем:

$$d^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (x^2 + z^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma.$$

Пусть $\mu(x, y, z)$ — плотность вещества тела V'. Из определения момента инерции тела относительно некоторой оси следует равенство

$$I_l = \iiint\limits_{V'} \mu(x, y, z)\, d^2 dx\, dy\, dz.$$

Подставляя в интеграл найденное значение d^2 и пользуясь свойством аддитивности тройного интеграла, получаем:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

208. Найти момент инерции однородного цилиндра V' $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = \pm h$ плотности μ_0 относительно прямой $x = y = z$.

Решение. Центр тяжести $M_0(x_0, y_0, z_0)$ данного цилиндра находится в начале координат, причем

$$z_0 = \frac{1}{2\pi\mu_0 a^2 h}\iiint\limits_{V'} z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2\pi\mu_0 a^2 h}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\,d\rho \int\limits_{-h}^{h} z\,dz = 0$$

(мы перешли от тройного интеграла к повторному, применив цилиндрические координаты).

Вычислим косинусы углов, образуемых прямой $x = y = z$ (проходящей через начало координат) с осями координат. Из условий $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $x = y = z$ находим: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Для вычисления момента инерции цилиндра V' относительно заданной прямой можем воспользоваться формулой, доказанной в примере 207. В силу очевидных равенств $K_{xy} = K_{xz} = K_{yz} = 0$, имеем:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma = \frac{1}{3}(I_x + I_y + I_z).$$

По известным нам формулам, переходя к цилиндрическим координатам, получаем:

$$I_x = I_y = \mu_0 \iiint\limits_{V'} (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\,d\rho \int\limits_{-h}^{h} (\rho^2\sin^2\varphi + z^2)\,dz =$$

$$= 2\mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho\left(\rho^2 h\sin^2\varphi + \frac{h^3}{3}\right) d\rho = 2\pi\mu_0 a^2 h\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right),$$

где M — масса цилиндра.

Аналогично находим:

$$I_z = \mu_0 \iiint\limits_{V'} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 d\rho \int\limits_{-h}^{h} dz = \frac{Ma^2}{2}.$$

Подставляя полученные значения I_x, I_y и I_z в формулу для I_l, окончательно имеем:

$$I_l = \frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2h^2}{3}\right).$$

209. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела V' плотности μ_0, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

Решение. Применяя формулу (6), получаем:

$$I_0 = \mu_0 \iiint\limits_{V'} (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Перейдем в тройном интеграле к сферическим координатам. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a \sin \varphi$. Принимая во внимание симметрию области интегрирования и равенства $\varphi(-x, y) = \varphi(x, -y) = \varphi(-x, -y) = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$, после замены тройного интеграла повторным получаем:

$$I_0 = 8\mu_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sin\varphi} \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi\mu_0 a^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi d\varphi = \frac{4}{5}\pi\mu_0 a^5 \frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2\mu_0 a^5}{8}.$$

210. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ однородного шара $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ плотности μ_0.

Решение. Перейдем от системы координат $O\xi\eta\zeta$ к новой системе $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, совершив поворот осей так, чтобы точка P попала на положительную полуось $O\zeta_1$. В системе $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ точка P имеет координаты $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а однородный замкнутый шар является множеством точек $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leqslant R^2$.

Формула (8) для вычисления ньютонового потенциала принимает вид:

$$u(x, y, z) = u_1(0, 0, r) = \mu_0 \iiint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2 \leqslant R^2} \frac{d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - r)^2}}.$$

От тройного интеграла перейдем к повторному, произведя внешнее интегрирование по ζ_1. Записав область интегрирования V' в виде $V' = \{-R \leqslant \zeta_1 \leqslant R,\ \ \xi_1^2 + \eta_1^2 \leqslant R^2 - \zeta_1^2\}$, найдем:

$$u(x, y, z) = \mu_0 \int\limits_{-R}^{R} d\zeta_1 \iint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2 \leqslant R^2-\zeta_1^2} \frac{d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - r)^2}}.$$

В интеграле

$$I(\zeta_1, r) = \iint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2 \leqslant R^2-\zeta_1^2} \frac{d\xi_1 d\eta_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+(\zeta_1-r)^2}}$$

перейдем к полярным координатам. Интегрируя, получаем:

$$I(\zeta_1, r) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\zeta_1^2}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+(\zeta_1-r)^2}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\rho^2+(\zeta_1-r)^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{R^2-\zeta_1^2}} = 2\pi\left(\sqrt{R^2-2\zeta_1 r+r^2} - |\zeta_1-r|\right).$$

Интегрируя по ζ_1 выражение $\mu_0 I(\zeta_1, r)$ в пределах $[-R, R]$, находим:

$$u(x, y, z) = 2\pi\mu_0 \int\limits_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-2\zeta_1 r+r^2} - |\zeta_1-r|\right) d\zeta_1 =$$

$$= 2\pi\mu_0\left(\frac{(R^2-2\zeta_1 r+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3r}\Bigg|_R^{-R} - \operatorname{sgn}(\zeta_1-r)\frac{(\zeta_1-r)^2}{2}\Bigg|_{-R}^{R}\right) =$$

$$= 2\pi\mu_0\left(\frac{(R+r)^3-|R-r|^3}{3r} - \operatorname{sgn}(R-r)\frac{(R-r)^2}{2} +\right.$$

$$\left.+\operatorname{sgn}(-R-r)\frac{(R+r)^2}{2}\right) = \begin{cases} 2\pi\mu_0\left(R^2-\dfrac{r^2}{3}\right), & \text{если } R > r, \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R^3\mu_0}{r}, & \text{если } R < r. \end{cases}$$

211. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ сферического слоя $R_1^2 \leqslant \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leqslant R_2^2$, если плотность $\mu = f(R)$, где f — известная функция, и $R = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

Решение. Как и при решении предыдущего примера, повернем систему координат так, чтобы ось $O\zeta_1$ системы $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ проходила через точку P. В новых координатах сферический слой является множеством точек $R_1^2 \leqslant \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2 \leqslant R_2^2$, по которому будем интегрировать, применяя формулу (8). В обозначениях предыдущей задачи имеем:

$$u(x, y, z) = u_1(0, 0, r) = \iiint\limits_{R_1^2 \leqslant \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2 \leqslant R_2^2} \frac{f\left(\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}\right) d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+(\zeta_1-r)^2}}.$$

Перейдем к сферическим координатам. Легко убедиться, что $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$. Принимая это во внимание и переходя к повторному интегралу, получаем:

$$u(x, y, z) = \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho)\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2-2\rho r\cos\varphi+r^2}} =$$

$$= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos\varphi + r^2}}{\rho r} \right) \Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\rho = \frac{2\pi}{r} \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) ((\rho + r) -$$

$$- |\rho - r|)\, d\rho = \begin{cases} 4\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho)\, d\rho, & \text{если } \rho > r; \\ \dfrac{4\pi}{r} \int\limits_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho)\, d\rho, & \text{если } \rho < r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ можно записать в более компактной форме. Если $\rho > r$, то $\frac{\rho^2}{r} > \rho$; если $\rho < r$, то $\frac{\rho^2}{r} < \rho$. Поэтому

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right) f(\rho)\, d\rho.$$

212. Найти ньютонов потенциал в точке $P(0, 0, z)$ цилиндра $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$ постоянной плотности μ_0.

Решение. Применим формулу (8). Перейдя в тройном интеграле к цилиндрическим координатам и заменив его повторным, получим:

$$u(0, 0, z) = \mu_0 \int_0^h d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + (\zeta - z)^2}} = 2\pi\mu_0 \int_0^h \sqrt{\rho^2 + (\zeta - z)^2} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a} d\zeta =$$

$$= 2\pi\mu_0 \int_0^h \left(\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - |\zeta - z| \right) d\zeta =$$

$$= \pi\mu_0 \Big((\zeta - z)\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} + a^2 \ln\left|\zeta - z + \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}\right| -$$

$$- (\zeta - z)\operatorname{sgn}(\zeta - z) \Big) \Big|_0^h = \pi\mu_0 \Big((h - z)\sqrt{a^2 + (h - z)^2} +$$

$$+ a^2 \ln\left| \frac{h - z + \sqrt{a^2 + (h - z)^2}}{\sqrt{a^2 + z^2} - z} \right| - ((h - z)|h - z| + z|z|) \Big).$$

213. С какой силой притягивает однородный шар $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ массы M материальную точку $P(0, 0, a)$ массы m?

Решение. Применяя формулы (9), найдем компоненты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{F}(P)$ — силы, с которой материальная точка массы m притягивается однородным шаром радиуса R:

$$X = \gamma m \iiint\limits_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2} \frac{\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \gamma m \iiint\limits_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2} \frac{\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = \gamma m \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2 < R^2} \frac{(\zeta - a)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где γ — гравитационная постоянная. Переходя к сферическим координатам, сразу же убеждаемся в том, что $X = 0$, $Y = 0$. Остается найти координату Z. Соответствующий интеграл запишем в виде:

$$Z = \gamma m \int\limits_{-R}^{R} (\zeta - a)\, d\zeta \iint\limits_{\xi^2+\eta^2 < R^2-\zeta^2} \frac{d\xi\, d\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Перейдем во внутреннем двойном интеграле к полярным координатам. Тогда, приняв во внимание, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho < \sqrt{R^2 - \zeta^2}$, получим:

$$Z = \gamma m \int\limits_{-R}^{R} (\zeta - a)\, d\zeta \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-\zeta^2}} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + (\zeta - a)^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi\gamma m \int\limits_{-R}^{R} (\zeta - a) \left(\frac{1}{|\zeta - a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \right) d\zeta =$$

$$= 2\pi\gamma m \int\limits_{-R}^{R} \left(\operatorname{sgn}(\zeta - a) - \frac{\zeta - a}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \right) d\zeta.$$

Вычислим $\int\limits_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(\zeta - a)\, d\zeta$. Если $|a| \geqslant R$, то при всех $\zeta \in [-R, R]$ имеем $\operatorname{sgn}(\zeta - a) = -\operatorname{sgn} a$; следовательно, $\int\limits_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(\zeta - a)\, d\zeta = -2R \operatorname{sgn} a$. Если же $|a| < R$, то $\operatorname{sgn}(\zeta - a) = -1$ при $\zeta \in (-R, a]$ и $\operatorname{sgn}(\zeta - a) = 1$ при $\zeta \in [a, R)$; следовательно,

$$\int\limits_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(\zeta - a)\, d\zeta = -\int\limits_{-R}^{a} d\zeta + \int\limits_{a}^{R} d\zeta = -R - a + R - a = -2a.$$

Теперь вычислим интеграл

$$I(R, a) = \int\limits_{-R}^{R} \frac{(\zeta - a)\, d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}}.$$

Полагая $\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2} = t$, получаем:

$$I(R, a) = \frac{1}{2a^2} \int\limits_{|R-a|}^{|R+a|} (R^2 - a^2 - t^2)\, dt = \frac{1}{2a^2} \Big((R^2 - a^2)(|R + a| -$$

$$-|R-a|)-\frac{1}{3}(|R+a|^3-|R-a|^3)\Big)=$$

$$=\begin{cases} \operatorname{sgn} a\left(\frac{2R^3}{3a^2}-2R\right), & \text{если } |a|\geqslant R; \\ -\frac{4a}{3}, & \text{если } |a|<R. \end{cases}$$

Используя полученные результаты, окончательно находим:

$$Z=\begin{cases} \operatorname{sgn} a\,\frac{4\pi R^3\gamma m}{3a^2}=-\frac{\gamma Mm}{a|a|}, & \text{если } |a|\geqslant R; \\ -\frac{4\pi\gamma ma}{3}=-\frac{\gamma Mma}{R^3}, & \text{если } |a|<R. \end{cases}$$

214. Найти силу притяжения однородным цилиндром $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$, $0\leqslant\zeta\leqslant h$ плотности μ_0 точки $P(0,\ 0,\ z)$ с единичной массой.

Решение. Найдем проекции X, Y, Z искомого вектора-силы на оси координат. Обозначив через V' множество всех точек данного замкнутого цилиндра и применив формулы (9), получим:

$$X=\mu_0\gamma\iiint\limits_{V'}\frac{\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y=\mu_0\gamma\iiint\limits_{V'}\frac{\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z=\mu_0\gamma\iiint\limits_{V'}\frac{(\zeta-z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Перейдем в тройных интегралах к цилиндрическим координатам $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant a,\ 0\leqslant\zeta\leqslant h)$. После замены переменных легко видеть, что $X=0$, $Y=0$. Остается вычислить координату Z. Заменив соответствующий тройной интеграл повторным, получим:

$$Z=\mu_0\gamma\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho\,d\rho\int_0^h\frac{(\zeta-z)\,d\zeta}{(\rho^2+(\zeta-z)^2)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=2\pi\mu_0\gamma\int_0^a\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-z)^2}}\Bigg|_{\zeta=h}^{\zeta=0}d\rho=$$

$$=2\pi\mu_0\gamma\int_0^a\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}}\right)d\rho=$$

$$=2\pi\mu_0\gamma\left(\sqrt{\rho^2+z^2}-\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=a}=$$

$$=2\pi\mu_0\gamma\left(\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\right).$$

215. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности μ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если шаровая поверхность имеет радиус R, а угол осевого сечения сектора равен 2α.

Решение. Обозначив через V' множество всех точек замкнутого шарового сектора с вершиной в начале координат системы $O\xi\eta\zeta$ и применив формулы (9), получим:

$$X = \mu_0\gamma \iiint\limits_{V'} \frac{\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = \mu_0\gamma \iiint\limits_{V'} \frac{\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Z = \mu_0\gamma \iiint\limits_{V'} \frac{\zeta\, d\xi\, d\eta d\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Перейдем в тройных интегралах к сферическим координатам, принимая во внимание, что $\pi-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$. После замены переменных получим: $X=0$, $Y=0$. Следовательно, остается вычислить составляющую силы Z. Имеем:

$$Z = \mu_0\gamma \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^R d\rho = \pi R\mu_0\gamma \sin^2\varphi \Big|_{\pi-\alpha}^{\pi} = -\pi R\mu_0\gamma\sin^2\alpha.$$

§ 9. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть на некоторой плоской гладкой или кусочно-гладкой кривой $C = AB$ задана функция $f(M) = f(x,\ y)$ и пусть Π — произвольное разбиение этой кривой на части A_iA_{i+1} точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.

Обозначим $d(\Pi) = \max\Delta l_i$, где Δl_i — длина дуги A_iA_{i+1}, выберем на каждой из дуг A_iA_{i+1} произвольную точку $M_i = (x_i,\ y_i)$ и составим интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta l_i.$$

Рассмотрим такую последовательность разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \ldots$ кривой AB, чтобы $d(\Pi)\to 0$. Если для любой такой последовательности разбиений Π_k числа $S_{\Pi_k}(f)$ имеют конечный предел I, не зависящий от выбора последовательности Π_k и точек M_i, то число I называют *криволинейным интегралом* 1-го *рода* от функции $f(M)$ по кривой AB и обозначают так:

$$I = \int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl \text{ или } I = \int\limits_{C} f(x,\ y)\,dl. \tag{1}$$

Интеграл (1) не зависит от выбора направления на кривой:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x, y)\,dl.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода сводится к интегралу Римана. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, а $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ — кусочно-непрерывные и $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt, \tag{2}$$

причем стоящий слева криволинейный интеграл существует в том и только в том случае, когда существует определенный интеграл, стоящий справа.

Если кривая AB задана явно уравнением $y = g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то формула (2) сведения криволинейного интеграла к определенному принимает вид:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx. \tag{3}$$

Если AB — пространственная кривая, заданная параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, то криволинейный интеграл 1-го рода, взятый по этой кривой, сводится к определенному интегралу по формуле

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt. \tag{4}$$

2°. Приложения криволинейного интеграла 1-го рода к решению некоторых задач механики. Если $\mu = \mu(x, y)$ — линейная плотность плоской материальной кривой AB, то численное значение M массы кривой AB равно интегралу:

$$M = \int\limits_{AB} \mu(x, y)\,dl. \tag{5}$$

Для случая пространственной кривой AB имеем формулу:

$$M = \int\limits_{AB} \mu(x, y, z)\,dl, \tag{6}$$

где $\mu(x, y, z)$ — линейная плотность кривой AB.

Координаты центра тяжести (x_0, y_0) плоской кривой вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} x\mu(x, y)\,dl, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} y\mu(x, y)\,dl. \tag{7}$$

Для случая пространственной кривой AB координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} x\mu(x, y, z)\,dl,\ y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} y\mu(x, y, z)\,dl,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} z\mu(x, y, z)\,dl. \tag{8}$$

3°. **Криволинейный интеграл 2-го рода.** Пусть на гладкой плоской кривой $C = AB$ заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и пусть Π — произвольное разбиение этой кривой на части A_iA_{i+1} точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$.

Обозначим $d(\Pi) = \max \Delta l_i$, выберем на каждой дуге A_iA_{i+1} произвольную точку $M_i = (x_i, y_i)$ и составим две интегральные суммы:

$$S_\Pi(P) = \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,\Delta x_i;\quad S_\Pi(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i, y_i)\,\Delta y_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Рассмотрим такую последовательность разбиений $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \ldots$ кривой AB, чтобы $d(\Pi) \to 0$. Если для произвольной такой последовательности разбиений Π_k числа $S_{\Pi_k}(P)$ и $S_{\Pi_k}(Q)$ имеют конечные пределы, не зависящие от выбора последовательности Π_k и точек M_i, то их называют *криволинейными интегралами* 2-го *рода* от функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и обозначают соответственно:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx,\ \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy \ \text{или}\ \int\limits_{C} P(x, y)\,dx,\ \int\limits_{C} Q(x, y)\,dy.$$

Сумму

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$

принято называть *общим криволинейным интегралом* 2-го *рода* и обозначать так:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{9}$$

Если $\boldsymbol{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ — силовое векторное поле, то криволинейный интеграл 2-го рода (9) имеет физический смысл работы этого поля по перемещению материальной точки из A в B вдоль кривой C.

Для случая пространственной кривой по аналогии с предыдущим вводятся три криволинейных интеграла 2-го рода:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx,\ \int\limits_{AB} Q(x, y, z)\,dy,\ \int\limits_{AB} R(x, y, z)\,dz,$$

сумму которых принято называть общим криволинейным интегралом 2-го рода и обозначать так:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{10}$$

При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет свой знак на противоположный.

Криволинейные интегралы 2-го рода сводятся к определенным интегралам. Если гладкая кривая $C = AB$ задана уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, то справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t))\,dt. \tag{11}$$

Если кривая задана явно уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то формула (11) принимает вид:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\,f'(x))\,dx. \tag{12}$$

Для случая пространственной гладкой кривой AB, заданной уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, имеем формулу:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} (P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\psi'(t) +$$
$$+ R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,\chi'(t))\,dt. \tag{13}$$

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода связаны между собой формулой

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)\,dl, \tag{13'}$$

где $\alpha = \alpha(M)$ — угол между касательной к гладкой кривой в точке M и положительным направлением оси Ox.

4°. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Если дифференциальная форма $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u (т. е. в некоторой области, содержащей кривую AB, выполняется равенство $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du(x, y)$), то интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(B) - u(A) \tag{14}$$

не зависит от выбора пути из точки A в точку B.

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой односвязной области D, в которой выполняется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{15}$$

то дифференциальная форма $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции и криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

не зависит от выбора пути из точки A в точку B, лежащего в D. Равенство (15) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла от пути, лежащего в односвязной области.

Для того чтобы дифференциальная форма

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

была полным дифференциалом в замкнутой односвязной области V, необходимо и достаточно, чтобы в V выполнялись следующие условия:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{16}$$

В этом случае криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

не зависит от пути интегрирования, если кривая AB лежит в V.

Если в односвязных замкнутых областях D и V выполняются условия (15) и (16), то в этих областях имеем:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du,$$
$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = dw,$$

и функции $u(x, y)$ и $w(x, y, z)$ можно найти по формулам:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt + C, \tag{17}$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt + C, \tag{18}$$

где (x_0, y_0) и (x_0, y_0, z_0) — фиксированные точки областей D и V, C — произвольная постоянная.

Иногда удобнее идти из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) сначала по отрезку прямой, параллельной оси Oy, а затем по отрезку прямой, параллельной оси Ox. В этом случае имеем:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt + C. \tag{19}$$

Возможны также следующие видоизменения формулы (18):

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt + C, \tag{20}$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)\,dt + C. \tag{21}$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

216. $I = \int_C (x+y)\,dl$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (3). Интеграл 1-го рода по кривой не зависит от выбора направления интегрирования, поэтому можем написать (используя свойство аддитивности интеграла):

$$I = \int_{OB} (x+y)\,dl + \int_{OA} (x+y)\,dl + \int_{BA} (x+y)\,dl.$$

На отрезке OB $x = 0$, $dl = dy$, $0 \leqslant y \leqslant 1$; следовательно, $\int_{OB} (x+y)\,dl = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$. На отрезке OA, очевидно, $y = 0$, $dl = dx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, поэтому $\int_{OA} (x+y)\,dl = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. Отрезок BA лежит на прямой $x + y = 1$; в связи с этим $dl = \sqrt{2}\,dx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, поэтому $\int_{BA} (x+y)\,dl = \sqrt{2}\int_0^1 dx = \sqrt{2}$. Складывая полученные значения, находим: $I = 1 + \sqrt{2}$.

217. $I=\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right) dl$, где C — дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Параметрические уравнения астроиды имеют вид $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, поэтому справедливы равенства $dl=\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=3a\,|\sin t\cos t\,|\,dt$, $x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}=a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)$ (на кривой C). Применяя формулу (2), находим:

$$I=3a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t+\sin^4 t)\,|\sin t\cdot\cos t\,|\,dt=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\times$$

$$\times\cos t\,dt=2a^{\frac{7}{3}}(\cos^6 t-\sin^6 t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=4a^{\frac{7}{3}}.$$

При решении примера мы воспользовались следующим свойством функции $f(t)=(\cos^4 t+\sin^4 t)\,|\sin t\cos t\,|$: $f(t)=f(2\pi-t)$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, в силу чего $\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt=2\int\limits_0^{\pi} f(t)\,dt$.

Далее, из равенства $f(t)=f(\pi-t)$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, следует, что

$$\int\limits_0^{\pi} f(t)\,dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt.$$

Окончательно имеем: $\int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$.

218. $I=\int\limits_C |\,y\,|\,dl$, где C — дуга лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Решение. Напишем параметрические уравнения лемнискаты, взяв в качестве параметра полярный угол φ. В полярной системе координат лемниската задана уравнением $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, вследствие чего ее параметрические уравнения имеют вид: $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$, $y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$, $|\varphi-k\pi\,|\leqslant\frac{\pi}{4}$; $k=0,\ 1$.

Подставив в известную формулу $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$ значение $\rho'=-\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, получим: $dl=\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

Из условия примера следует равенство $I=2\int\limits_{C_1}|\,y\,|\,dl$, где C_1 — часть лемнискаты $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. Приводя с помощью формулы (2) криволинейный интеграл к определенному, находим:

$$I = 2a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}\,|\sin\varphi|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,d\varphi = 2a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

219. $I = \int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где C — окружность $x^2+y^2=ax$.

Решение. Перейдя к полярным координатам, получим уравнение окружности C в виде $\rho = a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Взяв в качестве параметра полярный угол φ, напишем параметрические уравнения окружности C: $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. На этой окружности подынтегральная функция $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ принимает значения $a\cos\varphi$, а элемент дуги dl выражается формулой $dl = \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi = a\,d\varphi$.

Применив теперь формулу (2), получим интеграл

$$I = a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = a^2 \sin\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.$$

Найти длины дуг пространственных кривых (параметры считать положительными):

220. $y = a\arcsin\frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Взяв переменную x в качестве параметра, получим (при $0 \leqslant |x| \leqslant |x_0|$ и $|x_0| < a$): $dl = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, где $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $dz = -\frac{a^2dx}{2(a^2-x^2)}$. Подставив значения dx, dy и dz в выражение для dl, найдем: $dl = \frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}|dx|$.

Применив формулу для вычисления значения длины дуги L, получим:

$$L = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{x_0} \dfrac{3a^2-2x^2}{a^2-x^2}\,dx, & \text{если } x_0 > 0; \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{x_0} \dfrac{3a^2-2x^2}{a^2-x^2}\,dx, & \text{если } x_0 < 0, \end{cases}$$

вследствие того, что $\frac{3a^2-2x^2}{a^2-x^2} > 0$ при $|x_0| < a$, и в силу равенств $|dx| = dx$, если $x_0 > 0$, и $|dx| = -dx$, если $x_0 < 0$. Замена $x = -t$

приводит (в случае $x_0 < 0$) к интегралу

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_0^{-x_0} \frac{3a^2 - 2t^2}{a^2 - t^2}\, dt;$$

объединив оба случая, окончательно получим:

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_0^{|x_0|} \frac{3a^2 - 2x^2}{a^2 - x^2}\, dx = \int\limits_0^{|x_0|} dx + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{|x_0|} \frac{dx}{a^2 - x^2} =$$

$$= |x_0| + \frac{a}{4} \ln \frac{a + x}{a - x}\bigg|_0^{|x_0|} = |x_0| + \frac{a}{4} \ln \frac{a + |x_0|}{a - |x_0|}.$$

Если $x_0 < 0$, то $\frac{a}{4} \ln \frac{a + |x_0|}{a - |x_0|} = \frac{a}{4} \ln \frac{a - x_0}{a + x_0} = z_0$; если же $x_0 > 0$, то $\frac{a}{4} \ln \frac{a + |x_0|}{a - |x_0|} = \frac{a}{4} \ln \frac{a + x_0}{a - x_0} = -z_0$, т. е. $\frac{a}{4} \ln \frac{a + |x_0|}{a - |x_0|} = |z_0|$.

В итоге имеем: $L = |x_0| + |z_0|$, $|x_0| < a$.

221. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8} z^2$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Параметризуем кривую, взяв в качестве параметра переменную z. Подставляя в равенство $(x - y)(x + y) = \frac{9}{8} z^2$ вместо $x + y$ выражение $\frac{(x - y)^2}{a}$, находим:

$$x - y = \frac{3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{2}, \quad x + y = \frac{3^{\frac{4}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{4}{3}}}{4}.$$

Таким образом, переменные x и y выражаются через z с помощью формул:

$$x = \frac{1}{4}\left(3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + \frac{3^{\frac{4}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{4}{3}}}{2}\right), \quad y = \frac{1}{4}\left(\frac{3^{\frac{4}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{4}{3}}}{2} - 3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}\right).$$

Дифференцируя переменные x и y по параметру z, имеем:

$$dx = \frac{1}{2}\left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right) dz,$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}}\right) dz,$$

откуда получаем:

$$dl^2 = \left(\frac{1}{4}\left(\left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}}\right)^2\right) + 1\right) dz^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right)^2 dz^2,$$

$$dl = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right) dz\right| \quad (0 \leqslant |z| \leqslant |z_0|).$$

Если $z_0 > 0$, то при $0 \leqslant z \leqslant z_0$ выражение $3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$ положительно, $dz > 0$; следовательно,

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{z_0} \left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right) dz.$$

Если $z_0 < 0$, то при изменении z от 0 до z_0 выражение $3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}$ отрицательно, $dz < 0$, а все выражение для dl, стоящее под знаком абсолютной величины, положительно. Таким образом, мы опять приходим к той же формуле, что и при $z_0 > 0$. Окончательно получаем:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{z_0} \left(3^{-\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{4}{3}} a^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^{z_0} =$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(2 \sqrt[3]{\frac{a z_0^2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{3 z_0^4}{a}}\right).$$

222. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ от точки $O(0,\ 0,\ 0)$ до точки $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Решение. Параметризуем кривую, взяв в качестве параметра полярный угол φ. Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем: $\rho^2 = cz$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$, откуда $z = c\varphi$, $\rho^2 = c^2 \varphi$. Параметрические уравнения кривой принимают вид:

$$x = c\sqrt{\varphi} \cos \varphi,\ y = c\sqrt{\varphi} \sin \varphi,\ z = c\varphi \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{z_0}{c}\right).$$

Вычисляя дифференциал дуги $dl = c\left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\right) d\varphi$, а затем интегрируя его в пределах от 0 до $\frac{z_0}{c}$, находим:

$$L = \sqrt{c z_0} \left(\frac{2 z_0}{3c} + 1\right).$$

223. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = a$ от точки $A(a,\ 0,\ 0)$ до точки $B(x,\ y,\ z)$.

Решение. Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ $\left(\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$, получаем уравнение кривой в виде $\rho^2 + z^2 = a^2$, $\rho \operatorname{ch} \varphi = a$, откуда находим: $\rho = \frac{a}{\operatorname{ch} \varphi}$, $z^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}\right) = a^2 \operatorname{th}^2 \varphi$.

Теперь можем написать параметрические уравнения кривой, выбрав в качестве параметра угол φ: $x = \frac{a\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}$, $y = \frac{a\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}$, $z = \pm a \operatorname{th}\varphi$.

Дифференцируя функции x, y, z по φ, получаем:

$$x'_\varphi = -a\frac{\sin\varphi\operatorname{ch}\varphi + \cos\varphi\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi},\quad y'_\varphi = a\,\frac{\cos\varphi\operatorname{ch}\varphi - \sin\varphi\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi},$$

$$z'_\varphi = \pm\,\frac{a}{\operatorname{ch}^2\varphi},$$

$$dl^2 = (x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi)\,d\varphi^2 = \frac{a^2(1+\operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi)\,d\varphi^2}{\operatorname{ch}^4\varphi} = \frac{2a^2\,d\varphi^2}{\operatorname{ch}^2\varphi},$$

откуда находим: $dl = \frac{a\sqrt{2}\,|d\varphi|}{\operatorname{ch}\varphi}$. Интегрируя выражение $dl(t) = \frac{a\sqrt{2}\,dt}{\operatorname{ch} t}$ в пределах $[0, |\varphi|]$, получаем:

$$L = a\sqrt{2}\int\limits_0^{|\varphi|}\frac{dt}{\operatorname{ch} t} = a\sqrt{2}\int\limits_0^{|\varphi|}\frac{d\,|\operatorname{sh} t|}{1+\operatorname{sh}^2 t} = a\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}|\varphi|) =$$

$$= a\sqrt{2}\operatorname{arctg}|\operatorname{sh}\varphi|,$$

поскольку $\operatorname{sh}|\varphi| = |\operatorname{sh}\varphi|$. Используя равенство $z = \pm a\operatorname{th}\varphi$, находим: $\operatorname{sh}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \pm\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$, $L = a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}$.

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

224. $I = \int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,dl$, где C — часть винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. На кривой C подынтегральная функция принимает значения, зависящие от параметра t и равные выражению $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2t^2$. Вычисляя дифференциалы переменных x, y и z, находим: $dl = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$.

Применяя формулу (4), получаем: $I = \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t + \frac{b^2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2b^2\right).$$

225. $I = \int\limits_C x^2\,dl$, где C — окружность $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$.

Решение. Плоскость $x+y+z=0$ проходит через начало координат и пересекается со сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ по окружности радиуса a, длина которой равна $2\pi a$. С помощью циклических перестановок легко убедиться, что справедливы равенства

$$\int\limits_C x^2\,dl = \int\limits_C y^2\,dl = \int\limits_C z^2\,dl,$$

из которых следует очевидное равенство

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)\,dl.$$

На кривой C (окружности радиуса a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, в силу чего получаем $I = \frac{a^2}{3}\int\limits_C dl$. Интеграл $\int\limits_C dl$ равен численному значению длины окружности C, $L = 2\pi a$. Следовательно, $I = \frac{2\pi a^3}{3}$.

226. $I = \int\limits_C z\,dl$, где C — коническая винтовая линия $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

Решение. Интеграл вычисляется с помощью формулы (4). Имеем: $dx = (\cos t - t\sin t)\,dt$, $dy = (\sin t + t\cos t)\,dt$, $dz = dt$, $dl = \sqrt{t^2 + 2}\,dt$,

$$I = \int\limits_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,dt = \left.\frac{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left((t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right).$$

227. $I = \int\limits_C z\,dl$, где C — дуга кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A\left(a, a, a\sqrt{2}\right)$.

Решение. В качестве параметра возьмем переменную x и напишем параметрические уравнения кривой C в виде $z = \sqrt{x^2 + ax}$, $y = \sqrt{ax}$, $x = x$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$, после чего, применив формулу (4), получим: $dz = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax}}\,dx$, $dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}}{2\sqrt{x^2 + ax}}\,dx$,

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{17a^2}{32}\ln\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\right)\right)\right|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\left(\frac{25\sqrt{38} - 18}{8} - \frac{17}{32}\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right).$$

228. Найти массу кривой $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, если ее линейная плотность в точке (x, y) равна $\mu = |y|$.

Решение. Применим формулу (5) для отыскания численного значения массы:

$$M = \int\limits_C \mu(x, y)\, dl = \int\limits_C |y|\, dl.$$

Для решения задачи необходимо вычислить криволинейный интеграл 1-го рода, который сводится с помощью формулы (2) к определенному интегралу. Имеем (считая, что $a > b$): $dx = -a \sin t\, dt$, $dy = b \cos t\, dt$, $dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$, $|y| = b\,|\sin t|$,

$$M = b \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, |\sin t|\, dt =$$

$$= 4b \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, \sin t\, dt = 4b \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t}\, \times$$

$$\times\, d(\cos t) =$$

$$= 4ab \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\, d(\cos t) = \frac{4ab}{\varepsilon} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - (\varepsilon \cos t)^2}\, d(\varepsilon \cos t),$$

где $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

Полагая в интеграле $\varepsilon \cos t = \sin u$, получаем: $d(\varepsilon \cos t) = \cos u\, du$,

$$M = \frac{4ab}{\varepsilon} \int\limits_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 u\, du = \frac{2ab}{\varepsilon} \int\limits_0^{\arcsin \varepsilon} (1 + \cos 2u)\, du =$$

$$= \frac{2ab}{\varepsilon} (u + \sin u \cos u) \Big|_0^{\arcsin \varepsilon} =$$

$$= \frac{2ab}{\varepsilon} \left(\arcsin \varepsilon + \varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right) = 2b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon\right).$$

229. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right)$, если линейная плотность параболы $\mu(x, y)$ в текущей точке (x, y) равна $|y|$.

Решение. Вычислим дифференциал дуги dl по формуле $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$. Имеем: $2yy' = 2p$, откуда $y' = \frac{p}{y}$, $(y')^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p}{2x}$, $dl = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx$.

Принимая во внимание равенство $\mu(x, y) = |y| = \sqrt{2px}$, которое выполняется на рассматриваемой кривой, и симметрию точек параболы относительно оси Ox, находим:

$$M = \int\limits_C \mu(x, y)\, dl = 2 \int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px+p^2}\,dx = \frac{2(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{3p}\Bigg|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Задачу можно решить и следующим образом. Запишем дифференциал дуги в виде: $dl = \sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}\,dy$. Тогда получим:

$$M = \frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p} |y|\sqrt{y^2+p^2}\,dy = \frac{2}{p}\int\limits_0^p y\sqrt{y^2+p^2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^p = \frac{2p^2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

230. Найти массу дуги кривой $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \frac{at^3}{3}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, плотность которой меняется по закону $\mu(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

Решение. Применив формально формулу (5) для вычисления массы дуги и сведя криволинейный интеграл к определенному, получим:

$$M = \int\limits_C \mu(x, y, z)\,dl = \int\limits_0^1 \mu(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt.$$

Из условия примера следуют равенства: $\mu(x(t), y(t), z(t)) = t$, $x_t' = a$: $y_t' = at$, $z_t' = at^2$, $dl = a\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$, используя которые, находим численное значение массы:

$$M = a\int\limits_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt = \frac{a}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{a}{4}\left(\left(t^2+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+t^2+t^4}+\frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t^2+t^4}\right)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{a}{8}\left((3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

231. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(b, h)$.

Решение. Воспользуемся формулами (7). Для этого найдем сначала численное значение массы кривой. Поскольку $y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, то

$1 + (y'(x))^2 = 1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a} = \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}$, $\quad dl = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx$, $\quad M = \int\limits_0^b \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx =$

$= a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1} = \sqrt{h^2-a^2}.$

Кривая однородна, поэтому в формулах (7) следует положить $\mu(x, y) = 1$. Применяя эти формулы, получаем:

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_C x\,dl = \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\int\limits_0^b x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(ax \operatorname{sh}\frac{x}{a} - a^2 \operatorname{ch}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^b = \frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(b \operatorname{sh}\frac{b}{a} - a \operatorname{ch}\frac{b}{a} + a\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(b\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a} - 1} - h + a\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{a}\sqrt{h^2-a^2} - h + a\right) = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}},$$

$$y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_C y\,dl = \frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\int\limits_0^b y \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\int\limits_0^b \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{h^2-a^2}}\int\limits_0^b \left(1 + \operatorname{ch}\frac{2x}{a}\right)dx = \frac{a}{2\sqrt{h^2-a^2}}\left(x + \frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{h^2-a^2}}\left(b + a \operatorname{sh}\frac{b}{a}\operatorname{ch}\frac{b}{a}\right) = \frac{a}{2\sqrt{h^2-a^2}}\left(b + \frac{h\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right) =$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

232. Определить центр тяжести дуги однородной циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

Решение. Решаем пример по той же схеме, что и предыдущий. Для вычисления значения массы кривой нам потребуется дифференциал ее дуги. Легко вычислить дифференциал дуги циклоиды. Он равен $dl = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$. Принимая во внимание однородность кривой, вычисляем значение ее массы:

$$M = 2a\int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\cos\frac{t}{2}\Big|_\pi^0 = 4a,$$

а затем и координаты центра тяжести x_0 и y_0:

$$x_0 = \frac{1}{4a}\int\limits_0^\pi a(t - \sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{2}\int\limits_0^\pi (t - \sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2t\cos\frac{t}{2}\Big|_\pi^0 + 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(4 - 4\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\,d\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right) = 2a\left(1 - \frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Big|_0^\pi\right) = \frac{4a}{3},$$

$$y_0=\frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{0}-2\int_{\pi}^{0}\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2-\left(\frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2}-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_{\pi}^{0}\right)=\frac{4a}{3}.$$

При решении примера мы не записывали криволинейных интегралов, а брали соответствующие им определенные интегралы.

233. Найти статические моменты дуги C однородной астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ относительно осей координат.

Решение. По определению, статические моменты M_x и M_y однородной кривой C выражаются формулами:

$$M_x=\int_C y\,dl,\quad M_y=\int_C x\,dl.$$

Для решения примера воспользуемся параметрическими уравнениями астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, учитывая, что по условию $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. При решении примера 217 мы вычислили дифференциал дуги астроиды: $dl=3a|\sin t\cos t|\,dt$. Поскольку $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, то в dl знак абсолютной величины следует опустить. Применим приведенные формулы, заменив криволинейный интеграл определенным. Тогда, приняв во внимание, что на кривой C функции x и y соответственно равны $a\cos^3 t$ и $a\sin^3 t$, найдем:

$$M_x=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{3a^2}{5},\quad M_y=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t\,dt=\frac{3a^2}{5}.$$

234. Найти момент инерции однородной окружности $x^2+y^2=a^2$ относительно ее диаметра.

Решение. Момент инерции dI элемента дуги dl однородной окружности относительно ее диаметра равен приближенно выражению $(a\sin\varphi)^2\,dl$, где φ — угол, образованный прямой, которая соединяет центр окружности с произвольной точкой M, принадлежащей дуге dl, с диаметром окружности. Суммируя по всем элементам dl, приходим к формуле

$$I=a^2\int_C\sin^2\varphi\,dl,$$

где C — окружность $x^2+y^2=a^2$.

Поскольку $dl = a\,d\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то, сведя криволинейный интеграл к определенному, получим:

$$I = a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi a^3.$$

235. Найти полярные моменты инерции $I_0 = \int_C (x^2 + y^2)\,dl$ относительно точки $O(0, 0)$ следующих однородных кривых: а) контура C квадрата $\max\{|x|, |y|\} = a$; б) контура C правильного треугольника с вершинами в полярных координатах $P(a, 0)$, $Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right)$ $R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. а) Контур квадрата $\max\{|x|, |y|\} = a$ образован отрезками прямых $y = \pm a$ и $x = \pm a$. На отрезках прямых $x = \pm a$ справедливо равенство $x^2 + y^2 = a^2 + y^2$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $dl = dy$, а на отрезках прямых $y = \pm a$ — равенство $x^2 + y^2 = x^2 + a^2$, $-a \leqslant x \leqslant a$, $dl = dx$.

Заменив криволинейный интеграл определенным, получим:

$$I_0 = 2\left(\int_{-a}^{a} (a^2 + y^2)\,dy + \int_{-a}^{a} (a^2 + x^2)\,dx\right) = \frac{32}{3}a^3.$$

б) Пусть начало декартовой системы координат Oxy совпадает с полюсом полярной системы, причем полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox. Стороны треугольника являются отрезками прямых, проходящих через точки Q и P, Q и R, R и P. В декартовой системе, о которой мы говорили выше, координаты точек P, Q и R следующие: $P(a, 0)$, $Q\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $R\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Отрезок QP лежит на прямой $y = -\frac{x-a}{\sqrt{3}}$, на которой выполняются равенства $dl = \frac{2\,dx}{\sqrt{3}}$, $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{(x-a)^2}{3}$, в силу чего получим:

$$\int_{QP} (x^2 + y^2)\,dl = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{a}{2}}^{a} \left(x^2 + \frac{(x-a)^2}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{(x-a)^3}{9}\right)\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{a} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Точки отрезка RP и точки отрезка QP симметричны друг другу относительно оси Ox, поэтому можем сразу написать:

$$\int_{RP} (x^2 + y^2)\,dl = \int_{QP} (x^2 + y^2)\,dl = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

На отрезке RQ имеем: $x=-\frac{a}{2}$, $dl=dy$, $-\frac{a\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{a\sqrt{3}}{2}$, в силу чего

$$\int\limits_{RQ}(x^2+y^2)\,dl=\int\limits_{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)dy=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Пользуясь аддитивностью криволинейного интеграла и складывая левые и правые части найденных равенств, получаем:

$$I_0=\int\limits_{QP}(x^2+y^2)\,dl+\int\limits_{RQ}(x^2+y^2)\,dl+\int\limits_{RP}(x^2+y^2)\,dl=\frac{3\sqrt{3}\,a^3}{2}.$$

236. Найти средний полярный радиус однородной астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, т. е. число $r_0\,(r_0>0)$, определяемое формулой $I_0=lr_0^2$, где I_0 — полярный момент инерции астроиды относительно начала координат (см. предыдущую задачу) и l — длина дуги астроиды.

Решение. Средний полярный радиус астроиды вычислим по формуле $r_0=\sqrt{\frac{I_0}{l}}$. Зная дифференциал дуги астроиды $dl=3a\,|\sin t\times\cos t|\,dt$ (пример 217), можем вычислить длину ее дуги:

$$l=\int\limits_C dl=3a\int\limits_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\,dt=12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=$$

$$=12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d(\sin t)=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.$$

Теперь вычислим полярный момент астроиды относительно начала координат, применив формулу $I_0=\int\limits_C(x^2+y^2)\,dl$, где C — дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

На кривой C имеем: $x^2+y^2=a^2(\cos^6 t+\sin^6 t)$; поэтому криволинейный интеграл приводится к следующему определенному:

$$I_0=3a^3\int\limits_0^{2\pi}(\cos^6 t+\sin^6 t)|\sin t\cos t|\,dt=$$

$$=12a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6 t+\sin^6 t)\sin t\cos t\,dt=$$

$$=\frac{3a^3}{2}(\sin^8 t-\cos^8 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=3a^3.$$

Вычисляем r_0: $r_0=\sqrt{\frac{3a^3}{6a}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

237. Вычислить координаты центра тяжести контура однородного сферического треугольника $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Решение. Сферический треугольник однороден, в связи с чем в нашем случае формулы (8) принимают вид:

$$x_0=\frac{1}{M}\int\limits_C x\,dl,\quad y_0=\frac{1}{M}\int\limits_C y\,dl,\quad z_0=\frac{1}{M}\int\limits_C z\,dl,$$

где C — контур треугольника.

В плоскости Oyz выполняется тождество $x\equiv 0$, поэтому можем написать формулу $x_0=\frac{1}{M}\left(\int\limits_{C_1}x\,dl+\int\limits_{C_2}x\,dl\right)$, где C_1 — вся часть контура C, лежащая в плоскости Oxy, C_2 — вся часть контура C, лежащая в плоскости Oxz, M — численное значение массы всей кривой C. Контуры C_1 и C_2 можно задать соответственно параметрическими уравнениями $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; $x=a\cos\psi$, $y=a\sin\psi$ $\left(0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, причем $dl=a\,d\varphi$ на C_1 и $dl=a\,d\psi$ на C_2. В силу всего сказанного, имеем:

$$x_0=\frac{a^2}{M}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\right)=\frac{2a^2}{M}.$$

Масса кривой C численно равна $\frac{3}{4}$ частям длины окружности радиуса a, т. е. $M=\frac{3\pi a}{2}$. Подставив полученное значение M в формулу для определения x_0, найдем: $x_0=\frac{4a}{3\pi}$.

Координаты y_0 и z_0 вычислять не нужно, поскольку $y_0=z_0=x_0$ (это очевидно).

238. Найти координаты центра тяжести однородной кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty<t\leqslant 0)$.

Решение. Прежде чем применить формулы (8), найдем численное значение массы данной кривой. Для этого нам придется вычислить несобственный интеграл, к которому сводится соответствующий криволинейный. Дифференцируя функции x, y и z по t, получаем:

$$x'_t=e^t(\cos t-\sin t),\quad y'_t=e^t(\sin t+\cos t),\quad z'_t=e^t,$$

откуда

$$dl=\sqrt{2}\,e^t\,dt,\quad M=\int\limits_C dl=\sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{0}e^t\,dt=\sqrt{2}\,e^t\Big|_{-\infty}^{0}=\sqrt{2}.$$

Теперь применим формулы (8):

$$x_0=\frac{1}{M}\int\limits_C x\,dl=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^t\cos t\sqrt{2}\,e^t\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0}e^{2t}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{e^{2t}}{5}(\sin t+2\cos t)\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{2}{5},$$

$$y_0=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\sin t\,dt=\frac{e^{2t}}{5}(2\sin t-\cos t)\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{5},$$

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t}\sqrt{2}\,e^{t}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\,dt=\frac{e^{2t}}{2}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2}.$$

239. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка однородной винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{ht}{2\pi}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Решение. Обозначив через r_x, r_y и r_z расстояния от точки $M(x, y, z)$, лежащей на однородной кривой C, до соответствующих осей координат, можем написать формулы для вычисления моментов инерции:

$$I_x=\int\limits_C r_x^2\,dl,\quad I_y=\int\limits_C r_y^2\,dl,\quad I_z=\int\limits_C r_z^2\,dl.$$

Используя очевидные формулы $r_x^2=y^2+z^2$, $r_y^2=x^2+z^2$, $r_z^2=x^2+y^2$, получаем: $r_x^2=a^2\sin^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}$, $r_y^2=a^2\cos^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}$, $r_z^2=a^2$.

Вычислим дифференциал дуги винтовой линии: $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=a\cos t\,dt$, $dz=\frac{h\,dt}{2\pi}$,

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}\,dt=\frac{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\,dt.$$

Используя формулы для вычисления моментов инерции, получаем:

$$I_x=\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\left(a^2\pi+\frac{2\pi h^2}{3}\right)=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2+4\pi^2a^2},$$

$$I_y=\frac{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)dt=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{h^2+4\pi^2a^2},$$

$$I_z=\frac{a^2\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}dt=a^2\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}.$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

240. $I=\int\limits_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, где C — парабола $y=x^2$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

Решение. Криволинейный интеграл сводится к определенному с помощью формулы (12). Подставляя в подынтегральное выражение $y=x^2$ и $dy=2x\,dx$, получаем:

$$I=\int_{-1}^{1}(x^2-2x^3+(x^4-2x^3)\,2x)\,dx=-\frac{14}{15}.$$

241. $I=\int_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, где C — кривая $y=1-|1-x|$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

Решение. Уравнение кривой C запишем следующим образом:

$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

и представим интеграл по кривой C в виде суммы интегралов по кривым C_1 и C_2, где C_1 — отрезок прямой $y=x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, а C_2 — отрезок прямой $y=2-x$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$. Каждый из интегралов сведем к определенному по формуле (12).

На C_1 справедливо равенство $(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=2x^2\,dx$; на C_2 имеем: $(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=(x^2+(2-x)^2)\,dx+(x^2-(2-x)^2)(-dx)=2\,(2-x)^2\,dx$, в силу чего получаем:

$$I=2\int_0^1 x^2\,dx+2\int_1^2(2-x)^2\,dx=\frac{4}{3}.$$

242. $I=\oint_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Решение. Напишем параметрические уравнения эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ и применим формулу (11). На кривой C выполняется равенство $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=(a\cos t+b\sin t)\times d\,(a\cos t)+(a\cos t-b\sin t)\,d\,(b\sin t)=\left(ab\cos 2t-\frac{(a^2+b^2)}{2}\sin 2t\right)dt$, поэтому получаем:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(ab\cos 2t-\frac{(a^2+b^2)}{2}\sin 2t\right)dt=0.$$

243. $I=\int_C (2a-y)\,dx+x\,dy$, где C — арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Решение. Напишем, чему равно подынтегральное выражение на кривой C. Имеем: $(2a-y)\,dx+x\,dy=(2a-a\,(1-\cos t))\,d\,(a\,(t-\sin t))+a\,(t-\sin t)\,d\,(a\,(1-\cos t))=a^2t\sin t\,dt$.

Применив формулу (11), получим:

$$I=a^2\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt=a^2\left(t\cos t\Big|_{2\pi}^{0}+\sin t\Big|_0^{2\pi}\right)=-2\pi a^2.$$

244. $I = \oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, где C — окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Решение. Параметрические уравнения окружности C, пробегаемой против хода часовой стрелки при возрастании аргумента φ, следующие: $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Применим для вычисления интеграла формулу (11), выразив подынтегральное выражение через φ. На C имеем: $\frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2} = -d\varphi$, откуда получаем: $I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi$.

245. $I = \oint\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, где $ABCDA$ — контур квадрата с вершинами $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-1,\ 0)$, $D(0,\ -1)$.

Решение. Используя свойство аддитивности интеграла, представим его в виде суммы интегралов: $I = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$.

Отрезок AB лежит на прямой $x+y=1$, в силу чего на AB $dx+dy=0$, следовательно, интеграл по этому отрезку равен нулю. Отрезок BC лежит на прямой $y-x=1$, поэтому на нем выполняется равенство $dy=dx$. Далее, на этом отрезке имеем равенства: $y=x+1$, $|y|=x+1$, $|x|=-x$, $|x|+|y|=1$. При движении из точки B в точку C переменная x изменяется от 0 до -1. Принимая во внимание сказанное выше и заменяя по формуле (12) криволинейный интеграл определенным, получаем:

$$\int\limits_{BC} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 2\int\limits_0^{-1} dx = -2.$$

На отрезке CD, лежащем на прямой $x+y=-1$, выполняется равенство $dx+dy=0$, поэтому и интеграл, взятый по CD, равен нулю. Осталось вычислить интеграл по отрезку DA. Поскольку этот отрезок лежит на прямой $y-x=-1$, то на нем выполняются равенства: $dx=dy$, $|y|=1-x$, $|x|=x$, $|x|+|y|=1$. При движении из точки D в точку A переменная x изменяется от 0 до 1. Таким образом, имеем:

$$\int\limits_{DA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 2\int\limits_0^1 dx = 2.$$

Складывая полученные результаты, находим: $I = -2+2=0$.

246. $I = \int\limits_{AB} dx\sin y + dy\sin x$, где AB — отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,\ \pi)$ и $B(\pi,\ 0)$.

Решение. Отрезок AB лежит на прямой $x+y=\pi$, поэтому на нем выполняются равенства: $y=\pi-x$, $dy=-dx$, $\sin y=\sin(\pi-x)=\sin x$. При движении по отрезку AB из точки A в точку B

переменная x принимает все значения от 0 до π. Применяя формулу (12), получаем:

$$I = \int_0^\pi (\sin x - \sin x)\, dx = 0.$$

247. $I = \oint\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, где OmA — дуга параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

Решение. Парабола и прямая пересекаются в точке с абсциссой, равной 1. На кривой OmA имеем равенства: $dy = 2x\, dx$, $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, в силу чего получаем:

$$\int\limits_{OmA} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx = \int_0^1 (2x \operatorname{arctg} x - 1)\, dx =$$
$$= ((x^2+1)\operatorname{arctg} x - 2x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 2.$$

На отрезке прямой OnA выполняются равенства $dy = dx$, $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4}$. При движении по отрезку из точки A в точку O переменная x изменяется от 1 до 0. Поэтому

$$\int\limits_{AnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx = \int_1^0 \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Складывая левые и правые части полученных равенств, находим: $I = \frac{\pi}{4} - 1$.

При решении примеров 248—258 будем пользоваться независимостью криволинейного интеграла от пути, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции в односвязной области D, содержащей кривую, по которой берется интеграл. Если нам известна функция $u(x, y)$ такая, что $du(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$, то сразу можно написать:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Если же вид функции $u(x, y)$ нам неизвестен, то, пользуясь свойством независимости криволинейного интеграла от выбора пути из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_1), лежащего в D, мы будем в качестве пути брать ломаную, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям и не пересекающих границу области D. Тогда, в силу того, что $dy = 0$ на прямой $y = y_0$ и $dx = 0$ на прямой $x = x_1$, получим формулу:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)\, dy. \qquad (\alpha)$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

248. $I = \int\limits_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} x\,dy + y\,dx.$

Решение. Так как $x\,dy + y\,dx = d(xy)$ в любой области D, содержащей точки $(-1,\ 2)$ и $(2,\ 3)$, то

$$I = \int\limits_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} d(xy) = xy\Big|_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} = 6 + 2 = 8.$$

249. $I = \int\limits_{(0,\ 1)}^{(3,\ -4)} x\,dx + y\,dy.$

Решение. Очевидно, $x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2)$, поэтому имеем:

$$I = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\Big|_{(0,\ 1)}^{(3,\ -4)} = 12.$$

250. $I = \int\limits_{(1,\ -1)}^{(1,\ 1)} (x - y)(dx - dy).$

Решение. В силу равенства $(x - y)(dx - dy) = (x - y)\,d(x - y) = \frac{1}{2}d(x - y)^2$, получаем:

$$I = \frac{(x - y)^2}{2}\Big|_{(1,\ -1)}^{(1,\ 1)} = -2.$$

251. $I = \int\limits_{(0,\ 0)}^{(a,\ b)} f(x + y)(dx + dy)$, где $f(u)$ непрерывна.

Решение. Замена переменных $x + y = u$ приводит к интегралу Римана

$$I = \int\limits_0^{a+b} f(u)\,du.$$

252. $I = \int\limits_{(2,\ 1)}^{(1,\ 2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

Решение. Здесь $P(x,\ y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x,\ y) = -\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, поэтому $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$; следовательно, в любой односвязной области, не содержащей точек оси Oy, подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. По формуле (α) получаем:

$$I = \int\limits_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int\limits_1^2 dy = -\frac{3}{2}.$$

253. $I = \int\limits_{(1,\ 0)}^{(6,\ 8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

Решение. Поскольку $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, то

$$I = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,\,0)}^{(6,\,8)} = 9.$$

254. $I = \int\limits_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, где φ и ψ — непрерывные функции.

Решение. Интеграл не зависит от пути в силу равенства $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, где $P = \varphi(x)$, $Q = \psi(y)$; поэтому можем применить формулу (α):

$$I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy.$$

255. $I = \int\limits_{(-2,\,-1)}^{(3,\,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy.$

Решение. Поскольку в плоскости Oxy выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4 + 4xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2 - 5y^4),$$

то подынтегральное выражение является полным дифференциалом и мы можем применить формулу (α):

$$I = \int\limits_{-2}^{3} (x^4 - 4x)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} (54y^2 - 5y^4)\,dy = 62.$$

256. $I = \int\limits_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y = x$.

Решение. Здесь $P(x,\,y) = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x,\,y) = \frac{x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$, и мы убеждаемся в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом во всякой односвязной области, содержащей точки $(0,\,-1)$, $(1,\,0)$ и не содержащей точек прямой $y = x$. С помощью формулы (α) находим:

$$I = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2} + \int\limits_{-1}^{0} \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{x+1}\Bigg|_{1}^{0} + \frac{1}{1-y}\Bigg|_{-1}^{0} = 1.$$

257. $I = \int\limits_{(1,\,\pi)}^{(2,\,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ вдоль путей, не пересекающих сси Oy.

Решение. В силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) = -\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x};$$

мы имеем право применить формулу (α), в которой интеграл по y равен нулю (так как путь интегрирования параллелен оси Ox):

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=\left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Bigg|_1^2=1+\pi.$$

258. $I=\int\limits_{(0,\ 0)}^{(a,\ b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$.

Решение. Здесь $P(x,\ y)=e^x\cos y$, $Q(x,\ y)=-e^x\sin y$, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-e^x\sin y$, и, в силу независимости интеграла от выбора пути интегрирования, имеем:

$$I=\int_0^a e^x\,dx-\int_0^b e^a\sin y\,dy=e^x\Bigg|_0^a+e^a\cos y\Bigg|_0^b=e^a\cos b-1.$$

259. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция и C — кусочно-гладкий контур, то

$$I=\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Доказательство. Запишем интеграл в виде

$$I=\frac{1}{2}\oint_C f(x^2+y^2)\,d(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\oint_C f(u)\,du.$$

Рассмотрим функцию $u=x^2+y^2$ — квадрат расстояния от точки $(x,\ y)$, лежащей на кривой C, до начала координат. Поскольку кривая C — кусочно-гладкая, то функция $u(x,\ y)$ непрерывна, принимает все промежуточные значения между числами $m^*=\inf\limits_{(x,\ y)\in C} u(x,\ y)$, $M^*=\sup\limits_{(x,\ y)\in C} u(x,\ y)$ и множеством ее значений является множество всех точек сегмента $[m^*,\ M^*]$. Если подвижная точка $M(x,\ y)$ пробегает всю кривую C в любом направлении и возвращается в первоначальное свое положение, то переменная u пробегает множество всех значений сегмента $[m^*,\ M^*]$, по меньшей мере, два раза в разных направлениях и обязательно возвращается к своему исходному значению. Таким образом, криволинейный интеграл сводится к определенному интегралу от непрерывной функции $\frac{1}{2}f(u)$ на сегменте $m^*\leqslant u\leqslant M^*$, когда переменная пробегает весь сегмент одинаковое число раз как в одном, так и в противоположном направлениях, в силу чего $I=0$.

Следовательно, интеграл не зависит от выбора начальной точки пути интегрирования и от направления движения по кривой C и равен нулю.

В примерах 260—265 мы будем находить первообразную функцию $z(x,\ y)$ по известному ее дифференциалу $dz(x,\ y)$, пользуясь при этом формулами (17) и (19).

260. $dz = (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy.$

Решение. Применим формулу (17), взяв $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Получим:

$$z(x, y) = \int_0^x t^2\,dt + \int_0^y (x^2 - 2xt - t^2)\,dt + C =$$
$$= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

261. $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$

Решение. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2},\quad Q(x, y) = -\frac{x}{3x^2 - 2xy + 3y^2},$$

и, по формуле (19), получаем:

$$z(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{y\,dt}{3t^2 - 2yt + 3y^2} - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0\,dt}{3x_0 - 2x_0t + 3t^2} + C.$$

Взяв $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ — любое фиксированное, имеем:

$$z(x, y) = y\int_0^x \frac{dt}{3t^2 - 2yt + 3y^2} + C = \frac{y}{3}\int_0^x \frac{dt}{\left(t - \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x - y}{2\sqrt{2}y} + C_1,$$

где $C_1 = C + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}.$

262. $dz = \dfrac{(x^2 + 2xy + 5y^2)\,dx + (x^2 - 2xy + y^2)\,dy}{(x + y)^3}.$

Решение. Применим формулу (19), считая, что $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$ — любое фиксированное. Приняв во внимание равенства

$$P(x, y) = \frac{1}{x + y} + \frac{4y^2}{(x + y)^3},\quad Q(x, y) = \frac{(x - y)^2}{(x + y)^3},$$

получим:

$$z(x, y) = \int_0^x \left(\frac{1}{y - t} + \frac{4y^2}{(t + y)^3}\right)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} + C =$$
$$= \ln|x + y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x + y)^2} + 2 + \ln|y| - \ln|y_0| + C =$$
$$= \ln|x + y| - \frac{2y^2}{(x + y)^2} + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

263. $dz = e^x(e^y(x-y+2)+y)\,dx + e^x(e^y(x-y)+1)\,dy$.

Решение. По формуле (19), полагая $x_0=0$, $y_0=0$, находим:

$$z(x,\ y) = \int_0^x e^t(t+2)\,dt + e^x\int_0^y (e^t(x-t)+1)\,dt + C =$$

$$= (t+1)e^t\Big|_0^x - 1 + e^xy + e^{x+y}(x-y+1) - (x+1)e^x + C =$$

$$= (x+1)e^x - 1 + e^xy + e^{x+y}(x-y+1) - (x+1)e^x + C =$$

$$= e^{x+y}(x-y+1) + e^xy + C_1,$$

где $C_1 = C - 1$.

264. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\,\partial y^m}\,dx + \dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\,\partial y^{m+1}}\,dy$.

Решение. Применив формулу (17), получим:

$$z(x,\ y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial^{n+m+1}u(t,\ y)}{\partial t^{n+1}\,\partial y^m}\bigg|_{y=y_0} dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial^{n+m+1}u(x,\ t)}{\partial x^n\,\partial t^{m+1}}\,dt + C =$$

$$= \frac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\,\partial y^m}\bigg|_{y=y_0} - \frac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\,\partial y^m}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} + \frac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\,\partial y^m} -$$

$$- \frac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\partial y^m}\bigg|_{y=y_0} + C = \frac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\,\partial y^m} + C_1,$$

где $C_1 = C - \dfrac{\partial^{n+m}u(x,\ y)}{\partial x^n\,\partial y^m}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.

265. $dz = \dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\,\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx - \dfrac{\partial^{n+m+1}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+2}}\,dy$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Применяя, как и в предыдущем примере, формулу (17), находим:

$$z(x,\ y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial t^{n+2}\,\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r(t,\ y)}\right)\bigg|_{y=y_0} dt -$$

$$-\int_{y_0}^y \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\,\partial t^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r(x,\ t)}\right)dt + C = \frac{\partial^{n+m}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)}{\partial x^{n+1}\,\partial y^{m-1}}\Bigg|_{y=y_0} -$$

$$- \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\,\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} - \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\bigg|_{y=y_0} + C = \frac{\partial^{n+m-2}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ln\frac{1}{r}\right)\bigg|_{y=y_0} -$$

$$- \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + C_1, \text{ где } C_1 = C - \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n+1}\,\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

В силу равенства $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2x^2}{r^4} - \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2y^2}{r^4} =$
$= -\dfrac{2}{r^2} + \dfrac{2r^2}{r^4} = 0$ $(r \neq 0)$, получаем:

$$z(x, y) = -\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right) + C_1 =$$
$$= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m+1}}(\ln r) + C_1 = \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln r\right) + C_1 =$$
$$= \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m}}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + C_1 = \frac{\partial^{n+m-1}}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{m}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) + C_1 =$$
$$= \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^{n}\,\partial y^{m}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) + C_1.$$

266. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива оценка $\left|\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\right| \leqslant LM$, где L — длина дуги кривой C и $M = \max\limits_{(x, y)\in C}\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать кривую C гладкой (если C — кусочно-гладкая кривая, то интеграл можно представить в виде суммы интегралов по гладким кривым). С помощью формулы (13), устанавливающей связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода, можем написать равенство

$$\left|\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\right| = \left|\int\limits_C (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)\,dl\right|,$$

где $\alpha = \alpha(M)$ — угол между касательной к гладкой кривой C в точке M и положительным направлением оси Ox. Выражение $P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha$ можно представить в виде скалярного произведения векторов $\boldsymbol{R}(M) = \{P(x, y),\ Q(x, y)\}$ и $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$. Пользуясь неравенством

$$\left|\int\limits_C (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha)\,dl\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_C |P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\sin\alpha|\,dl =$$
$$= \int\limits_C |(\boldsymbol{R}(M),\ \boldsymbol{\tau}(M))|\,dl \leqslant \int\limits_C |\boldsymbol{R}(M)|\,|\boldsymbol{\tau}(M)|\,dl \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(x, y)\in C}\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}\int\limits_C dl = LM,$$

получаем неравенство $\left|\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\right| \leqslant LM$, что и требовалось доказать.

267. Оценить интеграл $I_R = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}$. Доказать, что $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

Решение. Для оценки интеграла воспользуемся неравенством, доказанным в предыдущей задаче. Здесь $P(x, y) = \frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}$,

$$Q(x,\ y) = -\frac{x}{(x^2+xy+y^2)^2},\quad \sqrt{P^2(x,\ y)+Q^2(x,\ y)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

На основании оценки, полученной в задаче 266, имеем:

$$|I_R| \leqslant 2\pi R \max_{(x,\ y)\in C} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

где C — окружность $x^2+y^2=R^2$.

Записав параметрические уравнения окружности в виде $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, получим оценку:

$$\max_{(x,\ y)\in C} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2} = \max_{(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)\in C} \frac{1}{R^3(1+\sin\varphi\cos\varphi)^2} = \frac{4}{R^3}$$

в силу неравенства $\frac{1}{(1+\sin\varphi\cos\varphi)^2} = \frac{4}{(2+\sin 2\varphi)^2} \leqslant 4$, если $\varphi \in [0,\ 2\pi]$.

Окончательно имеем оценку $|I_R| \leqslant \frac{8\pi}{R^2}$, из которой следует равенство $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых (координатная система предполагается правой).

268. $I = \int\limits_C (y^2-z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2dz$, где C — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, пробегаемая в направлении возрастания параметра.

Решение. С помощью формулы (13) приведем криволинейный интеграл к определенному. На кривой C имеем: $(y^2-z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz = (t^4-t^6)\,dt + 4t^6\,dt - 3t^4\,dt = (3t^6-2t^4)\,dt$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; следовательно, получаем: $I = \int\limits_0^1 (3t^6-2t^4)\,dt = \frac{1}{35}$.

269. $I = \int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, пробегаемой в направлении возрастания параметра.

Решение. Как и в предыдущем примере, криволинейный интеграл приводится к определенному:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} a\sin t\,d(a\cos t) + bt\,d(a\sin t) + a\cos t\,d(bt) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-a^2\sin^2 t + ab(1+t)\cos t)\,dt = -\pi a^2 + ab((1+t)\sin t + \cos t)\Big|_0^{2\pi} = -\pi a^2.$$

270. $I = \int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, пробегаемая в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

Решение. Окружность C лежит в плоскости $y = x \operatorname{tg} \alpha$, и ее радиус равен a. Параметрические уравнения окружности можно написать в виде $z = a \sin \varphi$, $\bar{y} = a \cos \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где $\bar{y} = x \operatorname{tg} \alpha$, φ — угол образованный радиусом окружности с прямой и отсчитываемый в направлении движения против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x. В системе координат $Oxyz$ параметрические уравнения окружности имеют вид $x = a \cos \alpha \cos \varphi$, $y = a \sin \alpha \cos \varphi$, $z = a \sin \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Приводя криволинейный интеграл к определенному, получаем:

$$I = \int_0^{2\pi} a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha)\, d\varphi = 2\sqrt{2}\, \pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

в силу равенства $(y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha)\, d\varphi$ на кривой C.

271. $I = \int\limits_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$, где C — часть кривой Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ $(z \geqslant 0,\ a > 0)$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части $(x > a)$ оси Ox.

Решение. Переходя к полярным координатам, получаем уравнения кривой Вивиани в виде $\rho = a \cos \varphi$, $z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. С их помощью приходим к параметрическим уравнениям этой кривой: $x = a \cos^2 \varphi$, $y = a \sin \varphi \cos \varphi$, $z = a |\sin \varphi|$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Для вычисления криволинейного интеграла нам осталось привести его к определенному. На кривой C имеем: $dx = -2a \sin \varphi \cos \varphi\, d\varphi$, $dy = a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\, d\varphi$, $dz = a \cos \varphi \operatorname{sgn} \varphi\, d\varphi$ $(\varphi \neq 0)$, $y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz = a^3 (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi + \cos^5 \varphi \operatorname{sgn} \varphi)\, d\varphi$ $(\varphi \neq 0)$. В силу равенства

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \cos^5 \varphi \operatorname{sgn} \varphi)\, d\varphi = 0,$$

получаем:

$$I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi)\, d\varphi = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2a^3 \left(\frac{\pi}{4} - 2 \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi a^3}{4}.$$

272. $I = \int\limits_C (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz$, где C — контур, который ограничивает часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

Решение. Представим интеграл по кривой C в виде суммы интегралов по кривым C_j ($j = 1, 2, 3$), лежащим в координатных плоскостях (каждая кривая C_j представляет собой четверть окружности радиуса 1 с центром в начале координат). В плоскости Oxy выполняется равенство $z = 0$ ($dz = 0$), в силу чего на кривой C_1 подынтегральное выражение имеет вид $y^2\,dx - x^2\,dy$. Записав параметрические уравнения четверти окружности в виде $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим:

$$I_1 = \int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\,d\varphi = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Легко видеть, что интегралы по кривым C_2 и C_3 равны каждый интегралу по кривой C_1, поэтому сразу можем написать: $I = -\frac{4}{3} \times 3 = -4$.

Найти следующие криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

273. $I = \int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,3,\,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz.$

Решение. В силу очевидного равенства $d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right) = x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$, получаем:

$$I = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,3,\,-4)} = -53\frac{7}{12}.$$

274. $I = \int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(6,\,1,\,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$

Решение. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом функции $u = xyz$, в силу чего имеем:

$$I = xyz\Big|_{(1,\,2,\,3)}^{(6,\,1,\,1)} = 0.$$

275. $I = \int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где точка (x_1, y_1, z_1) расположена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а точка (x_2, y_2, z_2) — на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($a > 0$, $b > 0$).

Решение. Подынтегральное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, поэтому получаем:

$$I = u(x, y, z)\Big|_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} = b - a.$$

276. $I = \int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$, где φ, ψ, χ — непрерывные функции.

Решение. По условию подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции в области, содержащей точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), поэтому интеграл не зависит от выбора пути интегрирования (легко также убедиться, что выполнены условия (16), необходимые и достаточные, чтобы выражение $\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$ было полным дифференциалом). Выбирая путь из точки (x_1, y_1, z_1) в точку (x_2, y_2, z_2) в виде ломаной, звенья которой параллельны осям координат, получаем:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\cdot dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} \chi(z)\,dz$$

в силу того, что на пути из точки (x_1, y_1, z_1) в точку (x_2, y_1, z_1) имеем $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $dy = dz = 0$; на пути из точки (x_2, y_1, z_1) в точку (x_2, y_2, z_1) имеем $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $dx = dz = 0$; на пути из точки (x_2, y_2, z_1) в точку (x_2, y_2, z_2) имеем $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, $dx = dy = 0$.

277. $I = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, где f — непрерывная функция.

Решение. Криволинейный интеграл легко свести к определенному с помощью замены $x+y+z=t$, в результате которой получаем:

$$I = \int\limits_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(t)\,dt.$$

278. $I = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, где f — непрерывная функция.

Решение. Записывая интеграл в виде

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) d(x^2+y^2+z^2)$$

и полагая $x^2+y^2+z^2=t^2$, получаем интеграл Римана

$$I = \int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} t f(t)\,dt.$$

Найти первообразную функцию $w(x, y, z)$, если:

279. $dw = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

Решение. Записав dw в виде

$$dw = x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz - 2(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) = d\left(\frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3}\right) - 2d(xyz) = d\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3} - 2xyz\right),$$

получим: $w(x, y, z) = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 2xyz + C$, где C — произвольная постоянная.

280. $dw = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$.

Решение. Выражение dw является полным дифференциалом в любой области, не содержащей начала координат и точек плоскостей Oxy, Oxz. С помощью формулы (18) получаем:

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2}\right) dt - \int_{z_0}^{z} \frac{xy}{t^2} dt + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка, $C = \text{const}$. Интегрируя, находим: $w(x, y, z) = x\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) - x_0\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y} - \frac{xy_0}{z_0} + \frac{x}{y_0} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} + C$. Взяв, например, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, получим: $w(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

281. $dw = \frac{(x + y - z)\, dx + (x + y - z)\, dy + (x + y + z)\, dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.

Решение. Применяя формулу (18), имеем (взяв $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$):

$$w(x, y, z) = \int_{0}^{x} \frac{t - z_0}{t^2 + z_0^2} dt + \int_{0}^{y} \frac{(x + t - z_0)\, dt}{x^2 + t^2 + z_0^2 + 2tx} + \int_{z_0}^{z} \frac{x + y + t}{(x + y)^2 + t^2} dt + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (t^2 + z_0^2) \Big|_0^x - \operatorname{arctg} \frac{t}{z_0} \Big|_0^x + \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + t^2 + z_0^2 + 2tx\right) \Big|_0^y -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{t + x}{z_0} \Big|_0^y + \operatorname{arctg} \frac{t}{x + y} \Big|_{z_0}^z + \frac{1}{2} \ln (t^2 + (x + y)^2) \Big|_{z_0}^z + C =$$

$$= \ln \sqrt{(x + y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{z}{x + y} + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

282. Найти работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) (ось Oz направлена вертикально вверх).

Решение. Сила тяжести есть вектор-функция

$$\boldsymbol{F} = \{P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)\} = \{0, 0, -mg\},$$

где g — ускорение свободного падения, а выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -mg\,dz$ является полным дифференциалом функции $u = -mg\,z$; поэтому работа силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению материальной точки из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) не зависит от формы траектории и равна величине

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) =$$

$$= -mg(z_2 - z_1).$$

283. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, лежащая на кривой C — четверти эллипса, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от этой точки до начала координат. Тогда упругая сила $\boldsymbol{F}$, направленная из точки M в начало координат, имеет вид: $\boldsymbol{F}(x, y)=\gamma r \boldsymbol{e}(M, O)$, где γ — некоторая постоянная, $\boldsymbol{e}(M, O)$ — единичный вектор, направленный из точки M в начало координат. Записывая вектор $\boldsymbol{e}(M, O)$ в виде $\boldsymbol{e}(M, O)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M, получаем: $\boldsymbol{F}(x, y)= =-\gamma \boldsymbol{r}=-\gamma\{x, y\}$, поскольку $\boldsymbol{r}=\{x, y\}$.

Значение работы найдем, вычислив интеграл

$$A=-\gamma \int\limits_C x\,dx+y\,dy=-\frac{\gamma}{2}\int\limits_C d(x^2+y^2).$$

Как и в предыдущей задаче, работа A не зависит от формы траектории точки и равна разности значений силовой функции $u=-\frac{\gamma}{2}(x^2+ +y^2)$ в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$: $A=-\frac{\gamma}{2}(b^2-a^2)$.

284. Найти работу силы тяготения $|\boldsymbol{F}|=\frac{k}{r^2}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Сила тяготения $\boldsymbol{F}$ является центральной силой, поскольку ее линия действия проходит через начало координат; поэтому можем ее представить в виде $\boldsymbol{F}=\frac{k}{r^2}\boldsymbol{e}(M, O)=-\frac{k}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}(O, M)}{r}=-\frac{k\,\boldsymbol{r}(O,M)}{r^3}= =-k\left\{\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right\}$, где $M(x, y, z)$ — произвольная точка, $\boldsymbol{r}(O, M)= =\{x, y, z\}$ — радиус-вектор этой точки. Значение работы A получим с помощью интеграла, взятого вдоль любой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2:

$$A=-k\int\limits_{M_1}^{M_2}\frac{x\,dx}{r^3}+\frac{y\,dy}{r^3}+\frac{z\,dz}{r^3}=k\int\limits_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{k}{r}\Bigg|_{M_1}^{M_2}=k\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right),$$

где $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1, 2)$ (и в этом случае, как и в двух предыдущих, работа не зависит от формы траектории).

§ 10. Формула Грина

1°. Связь криволинейного интеграла с двойным. Пусть D — конечная, вообще говоря, многосвязная область на плоскости Oxy с кусочно-гладкой границей L, а $\overline{D}$ — область с присоединенной границей L, и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в $\overline{D}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D. Если существуют несобственные интегралы по области D от каждой из частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то справедливо соотношение:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy, \tag{1}$$

называемое *формулой Грина*. Стоящий справа в этой формуле интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы L, на которых указано такое направление обхода, при котором область D остается слева.

2°. Вычисление площади с помощью формулы Грина. Численное значение S площади плоской квадрируемой фигуры, ограниченной простым кусочно-гладким контуром C, определяется по формуле:

$$S = \oint\limits_C x\,dy = -\oint\limits_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx. \tag{2}$$

Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

285. $I = \oint\limits_C xy^2\,dy - x^2y\,dx$, где C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Обозначив через $\overline{D}$ замкнутую область $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, с помощью формулы Грина получим:

$$I = \iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right) dx\,dy = \iint\limits_{\overline{D}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{2}.$$

286. $I = \oint\limits_C (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$, где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Здесь $P = x + y$, $Q = -(x - y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$, поэтому, применив формулу Грина, получим:

$$I = -2 \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1} dx\,dy = -2\pi ab,$$

поскольку интеграл дает значение площади эллипса, равное πab.

287. $I = \oint\limits_C e^x ((1 - \cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy)$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

Решение. По формуле Грина имеем:

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (e^x (\sin y - y)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x (1 - \cos y)) \right\} dx\, dy =$$

$$= - \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x}} y e^x\, dx\, dy = - \int_0^{\pi} e^x\, dx \int_0^{\sin x} y\, dy = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x (1 - \cos 2x)\, dx = -\frac{1}{4} \left(e^x \left(1 - \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) \right) \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{5} (e^{\pi} - 1).$$

288. $I = \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy).$

Решение. В силу равенств

$$P = e^{-(x^2+y^2)} \cos 2xy, \quad Q = e^{-(x^2+y^2)} \sin 2xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2e^{-(x^2+y^2)} (y \cos 2xy - x \sin 2xy),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2e^{-(x^2+y^2)} (y \cos 2xy - x \sin 2xy), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

с помощью формулы Грина получаем: $I = 0$.

289. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2\, dx - (x - y)^2\, dy, \quad I_2 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2\, dx - (x - y)^2\, dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,\ 1)$ и $B(2,\ 6)$, и AnB — дуга параболы с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

Решение. Уравнение параболы, проходящей через начало координат и точки A, B, имеет вид $y = 2x^2 - x$, а разность интегралов $I_2 - I_1$ является криволинейным интегралом по замкнутому контуру $AnBmA$, пробегаемому в положительном направлении; поэтому можем применить формулу Грина, с помощью которой получим:

$$I_2 - I_1 = \oint\limits_{AnBmA} (x + y)^2\, dx - (x - y)^2\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x^2 - x \leqslant y \leqslant 5x - 4}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (-(x - y)^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x + y)^2 \right\} dx\, dy =$$

$$= -4 \iint\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x^2 - x \leqslant y \leqslant 5x - 4}} x\, dx\, dy = -4 \int_1^2 x\, dx \int_{2x^2 - x}^{5x - 4} dy = -4 \int_1^2 (6x^2 - 4x -$$

$$- 2x^3)\, dx = (2x^4 + 8x^2 - 8x^3) \Big|_1^2 = -2,$$

откуда $I_1 - I_2 = 2$.

290. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A(a, 0)$ до точки $O(0, 0)$.

Решение. На сегменте $[0, a]$ подынтегральное выражение равно нулю, поэтому интеграл по кривой AmO равен интегралу по замкнутому контуру $AmOA$, состоящему из кривой AmO и сегмента $[0, a]$, и мы можем, применив формулу Грина, написать:

$$I = \int\limits_{AmOA} (e^x \sin y - my)\, dx + (e^x \cos y - m)\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}}} \left(\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y - my) \right) dx\, dy =$$

$$= m \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}}} dx\, dy = \frac{m\pi a^2}{8},$$

так как интеграл $\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{ax - x^2}}} dx\, dy$ равен половине величины площади круга радиуса $\frac{a}{2}$.

291. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AmB} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy,$$

где $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — непрерывные функции, AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB фигуру $AmBA$, площадь которой равна данной величине S.

Решение. Интеграл по кривой AmB представим в виде суммы интегралов по замкнутому контуру $AmBA$ и по отрезку AB:

$$I = \oint\limits_{AmBA} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{AB} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy.$$

Обозначим через D замкнутую область, площадь которой S. Интеграл по замкнутому контуру вычислим с помощью формулы Грина:

$$\oint\limits_{AmBA} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy =$$

$$= \pm \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(y) e^x - m) - \frac{\partial}{\partial y} (\varphi(y) e^x - my) \right\} dx\, dy =$$

$$= \pm m \iint_D dx\, dy = \pm mS$$

(знак «+» соответствует обходу контура в положительном направлении, а знак «—» — обходу контура в направлении, противоположном положительному).

Теперь вычислим криволинейный интеграл

$$\alpha = \int_{AB} (\varphi(y) e^x - my)\, dx + (\varphi'(y) e^x - m)\, dy,$$

приведя его к определенному. Отрезок AB лежит на прямой $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, в силу чего получим:

$$\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \varphi(y) e^x - m\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \right) + (\varphi'(y) e^x - m) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right\} dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(y) e^x\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(y) e^x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} dx - m \int_{x_1}^{x_2} \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) dx = \varphi(y) e^x \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(y) e^x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(y) e^x \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} dx - m\left(y_1 (x_2 - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} (x - x_1)^2 \Big|_{x_1}^{x_2} + \right.$$

$$\left. + y_2 - y_1 \right) = \varphi(y_2) e^{x_2} - \varphi(y_1) e^{x_1} - my_1 (x_2 - x_1) - m(y_2 - y_1) -$$

$$- \frac{m}{2} (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) = \varphi(y_2) e^{x_2} - \varphi(y_1) e^{x_1} -$$

$$- m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).$$

Окончательно имеем:

$$I = \pm mS + \varphi(y_2) e^{x_2} - \varphi(y_1) e^{x_1} - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).$$

292. Определить две дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint_C P(x + \alpha,\ y + \beta)\, dx + Q(x + \alpha,\ y + \beta)\, dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянных α и β.

Решение. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют поставленному условию, то должно выполняться равенство

$$\oint_C P(x+\alpha,\ y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha,\ y+\beta)\,dy =$$
$$= \oint_C P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$$

для любого замкнутого контура C, в силу чего имеем:

$$I_1 = \oint_C \overline{P}\,dx + \overline{Q}\,dy = 0,$$

где $\overline{P} = P(x+\alpha,\ y+\beta) - P(x,\ y)$, $\overline{Q} = Q(x+\alpha,\ y+\beta) - Q(x,\ y)$.

Для того чтобы криволинейный интеграл I_1 по любому замкнутому контуру был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в области, ограниченной этим контуром, и на самом контуре выполнялось равенство $\frac{\partial\overline{Q}}{\partial x} = \frac{\partial\overline{P}}{\partial y}$ $\left(\text{которое следует из формулы Грина } \oint_C \overline{P}\,dx + \overline{Q}\,dy = \right.$ $\left. = \iint_D \left(\frac{\partial\overline{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{P}}{\partial y}\right) dx\,dy\right)$.

Обозначив $x+\alpha = \xi$, $y+\beta = \eta$, получим написанное условие в виде

$$\frac{\partial Q(\xi,\ \eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial Q(x,\ y)}{\partial x} = \frac{\partial P(\xi,\ \eta)}{\partial\eta} - \frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial Q(\xi,\ \eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial P(\xi,\ \eta)}{\partial\eta} = \frac{\partial Q(x,\ y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,\ y)}{\partial y}.$$

Левая часть полученного равенства не зависит от ξ и η, поскольку правая его часть зависит только от x и y, следовательно, можем написать: $\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$, где $C = \text{const}$. Из условия $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$ получаем равенство $\frac{\partial}{\partial x}(Q(x,\ y) - Cx) = \frac{\partial}{\partial y}P(x,\ y)$, справедливое лишь в том случае, когда $Q(x,\ y) - Cx = \frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y} + \psi(y)$, $P(x,\ y) = \frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x} + \varphi(x)$, где $u(x,\ y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Окончательно находим: $P = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x)$, $Q = Cx + \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y)$.

293. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x,\ y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AmB} F(x,\ y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

Решение. Из условия

$$\int_{AmB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy) = \int_{AnB} F(x, y)(y\,dx + x\,dy),$$

где AnB — любой путь из точки A в точку B, не совпадающий с кривой AmB, получаем равенство

$$\oint_{AmBnA} F(x, y)(y\,dx + x\,dy) = 0,$$

для выполнения которого необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом некоторой функции, т. е. чтобы в области, ограниченной контуром $AmBnA$, и на самом контуре было справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}(xF(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(yF(x, y)).$$

При выполнении этого равенства по формуле Грина получим:

$$\oint_{AmBnA} F(x, y)(y\,dx + x\,dy) =$$

$$= \iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial x}(xF(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y}(yF(x, y))\right\} dx\,dy = 0.$$

294. Вычислить интеграл $I = \oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, где C — простой, не проходящий через начало координат замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении.

Решение. Переходя к полярным координатам ρ и φ, находим:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{\rho\cos\varphi(\sin\varphi\,d\rho + \rho\cos\varphi\,d\varphi) - \rho\sin\varphi(\cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi)}{\rho^2} = d\varphi.$$

Если контур C окружает начало координат, то при полном его обходе в положительном направлении угол φ получит приращение, равное 2π: $I = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi = 2\pi$, где φ_0 — полярный угол точки на контуре C, соответствующей началу обхода.

Если начало координат лежит вне контура C, то, по формуле Грина,

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy = 0.$$

Обращаем внимание читателя на то, что в первом случае воспользоваться формулой Грина нельзя, поскольку в точке $(0, 0)$ функции $\frac{x}{x^2 + y^2}$ и $\frac{y}{x^2 + y^2}$ разрывны.

295. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$ и осями координат.

Решение. Полагая $x = a\rho\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем уравнение заданной кривой в полярных координатах, используя которое, находим ее параметрические уравнения в виде:

$$x = a\left(\cos^2\varphi + \cos^{\frac{2}{n}}\varphi\sin^{2-\frac{2}{n}}\varphi\right) = \frac{a\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\sin^{\frac{2}{n}}\varphi},$$

$$y = b\left(\sin^2\varphi + \sin^{\frac{2}{n}}\varphi\cos^{2-\frac{2}{n}}\varphi\right) = \frac{b\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\cos^{\frac{2}{n}}\varphi}.$$

Из равенства $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}^{\frac{2}{n}}\varphi$, $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, получаем: $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{na} \times$ $\times \frac{\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}\,d\varphi$, $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ab}{n}\Big(\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi +$ $+ 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\Big)\,d\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

В силу равенства

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi,$$

применив формулу (2) и заменив криволинейный интеграл определенным, получим:

$$S = \frac{2ab}{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{ab}{n}\left(\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\ 2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{ab}{n}\left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right).$$

296. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0)$.

Решение. Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho\cos^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$, находим уравнение кривой в виде $\rho = c\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi$, из которого заключаем, что при изменении φ

от 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривая выходит из начала координат и возвращается в него, т. е. описывает петлю. Используя полученное уравнение, напишем параметрические уравнения заданной кривой в виде:

$$x = ac\cos^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi\,\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi,$$

$$y = bc\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\,\sin^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Дальше действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера: $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg}^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$, $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$, $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{a(2n+1)} \times$ $\times \frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}+1}\varphi}\,d\varphi$, $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{abc^2}{2n+1}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi,$

$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$S = \frac{abc^2}{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

297. Эпициклоидой называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся вне нее. Найти площадь фигуры, ограниченной эпициклоидой, считая что отношение $\frac{R}{r} = n$ — целое число ($n \geqslant 1$). Разобрать частный случай, когда $r = R$ (кордиоида).

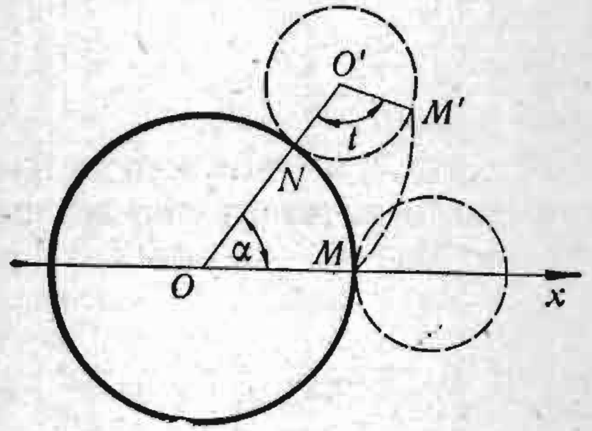

Рис. 17

Решение. Выведем параметрические уравнения эпициклоиды. Возьмем начало координат в центре O неподвижного круга, а ось Ox проведем через точку M касания неподвижной и подвижной окружностей, когда последняя находится в состоянии покоя. Пусть M' — положение точки M, когда подвижный круг, повернувшись на угол t, занял новое положение (рис. 17). Обозначая через α угол между отрезком OO' и осью Ox, легко находим координаты точки $M'(x, y)$:

$$x = (R+r)\cos\alpha + r\sin\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = r((n+1)\cos\alpha - \cos(t+\alpha)),$$

$$y = (R+r)\sin\alpha - r\cos\left(t - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = r((n+1)\sin\alpha - \sin(t+\alpha)).$$

Поскольку подвижная окружность катится без скольжения, то дуги MN и NM' имеют одинаковую длину: $R\alpha = rt$, откуда находим

$\alpha = \frac{t}{n}$. Таким образом, параметрические уравнения эпициклоиды имеют вид:

$$x = r\left((n+1)\cos\frac{t}{n} - \cos\frac{n+1}{n}t\right), \quad y = r\left((n+1)\sin\frac{t}{n} - \sin\frac{n+1}{n}t\right).$$

Точка M' опишет замкнутую кривую при возрастании угла α от 0 до 2π, откуда находим пределы изменения параметра t: $0 \leqslant t \leqslant 2\pi n$. Дифференцируя x и y, получаем:

$$dx = \frac{r(n+1)}{n}\left(\sin\frac{n+1}{n}t - \sin\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$dy = \frac{r(n+1)}{n}\left(\cos\frac{t}{n} - \cos\frac{n+1}{n}t\right)dt,$$

после чего находим: $x\,dy - y\,dx = \frac{r^2(n+1)(n+2)}{n}(1-\cos t)\,dt$,

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx = \frac{r^2(n+1)(n+2)}{2n}\int\limits_0^{2\pi n}(1-\cos t)\,dt = \pi r^2(n+1)(n+2).$$

При $R = r$ имеем: $n = 1$, $S = 6\pi r^2$.

298. Гипоциклоидой называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся внутри нее. Найти площадь, ограниченную гипоциклоидой, считая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ — целое число ($n \geqslant 2$). Разобрать частный случай, когда $r = \frac{R}{4}$ (астроида).

Решение. В рассматриваемом случае подвижная окружность поворачивается по ходу движения часовой стрелки, а параметрические уравнения гипоциклоиды имеют вид (читателю полезно убедиться в этом самостоятельно):

$$x = r\left((n-1)\cos\frac{t}{n} + \cos\frac{n-1}{n}t\right), \quad y = r\left(-(n-1)\sin\frac{t}{n} + \sin\frac{n-1}{n}t\right).$$

Значения параметра t убывают от 0 до $-2\pi n$, когда подвижная точка описывает замкнутую кривую. В силу равенства $x\,dy - y\,dx = \frac{r^2(n-1)(n-2)}{n}(\cos t - 1)\,dt$, получаем:

$$S = \frac{r^2(n-1)(n-2)}{2n}\int\limits_0^{-2\pi n}(\cos t - 1)\,dt = \pi r^2(n-1)(n-2).$$

При $n = 4$ имеем: $S = 6\pi r^2$.

299. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Рассмотрим четвертую часть поверхности, площадь которой требуется вычислить (рис. 18), и выделим элемент ΔS поверхности, ограниченный дугами dl, dl_1 и отрезками z_1, z_2. Площадь dS этого элемента приближенно равна выражению $z(M)\,dl$, где $z = \sqrt{a^2 - ax}$, $dl = a\,d\varphi$, откуда получаем равенство

$$S = 4\int\limits_L z(M)\,dl = 4a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = 4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi = 4a^2$$

(мы воспользовались параметрическими уравнениями кривой L: $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\sin\varphi\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$).

300. Вычислить $I = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_C \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$, если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ и простой замкнутый контур C окружает начало координат ($ad - bc \neq 0$).

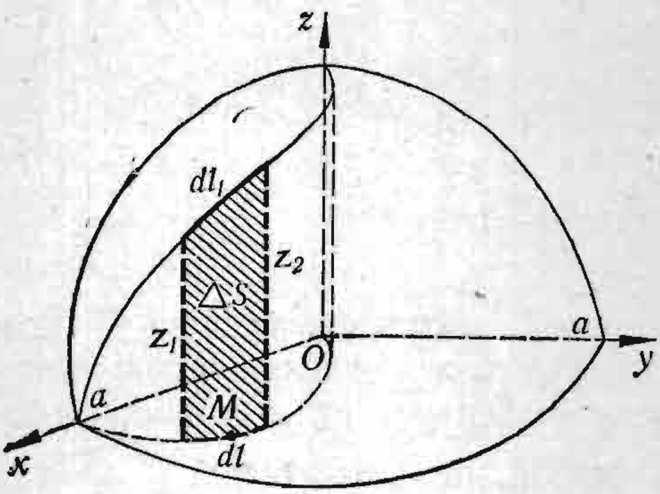

Рис. 18

Решение. Заданное линейное преобразование координат, якобиан которого равен $\frac{1}{ad - bc}$, отображает область в плоскости (x, y), ограниченную контуром C, в некоторую область плоскости (X, Y), ограниченную контуром C_1, причем точки контура C переходят в точки контура C_1 и начало координат переходит в начало координат. Если $ad - bc > 0$, то положительному обходу контура C соответствует положительный обход контура C_1; если $ad - bc < 0$, то положительному обходу контура C соответствует отрицательный обход контура C_1. В силу всего сказанного, имеем:

$$I = \pm\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_1} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}.$$

Рассмотрим в плоскости (X, Y) круг радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в начале координат и обозначим через C_2 его границу. Рассмотрим также двусвязную область D_1, ограниченную кривыми C_1 и C_2, границу которой обозначим буквой Γ. По формуле Грина имеем:

$$\int\limits_\Gamma \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = \iint\limits_{D+\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{X}{X^2+Y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)\right)dX\,dY = 0.$$

Проведем разрез L в замкнутой области $D + \Gamma$, как показано на рис. 19. Стрелки показывают положительное направление обхода (при положительном обходе область D остается слева). При полном обходе границы замкнутой области $D + \Gamma$ с разрезом L обход последнего совершается дважды в противоположных направлениях, в силу чего получаем равенство $0 = \int\limits_{\Gamma} = \oint\limits_{C_1} + \oint\limits_{C_2}$, откуда находим: $\oint\limits_{C_1} = \oint\limits_{C_2}$.

Таким образом, можем написать равенство

$$I = \pm \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_2} \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}.$$

Параметрические уравнения контура имеют вид

$$X = \varepsilon \cos \varphi, \quad Y = \varepsilon \sin \varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Приведя криволинейный интеграл к определенному, получим:

$$I = \pm \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \pm 1 = \operatorname{sgn}(ad - bc).$$

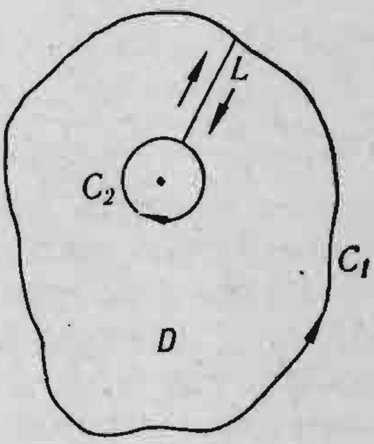

Рис. 19

301. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ и простой контур C окружает начало координат, причем кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C.

Решение. Из условия примера следует, что в окрестности каждой точки (x_i, y_i), в которой пересекаются кривые $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, выполнены условия теоремы Остроградского о неявной функции ($\varphi(x_i, y_i) = 0$, $\psi(x_i, y_i) = 0$ и ранг матрицы Якоби $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{pmatrix}$ равен 2).

Окружим каждую точку (x_i, y_i), в которой выполняются равенства $\varphi(x_i, y_i) = 0$, $\psi(x_i, y_i) = 0$, замкнутым контуром C_i. Тогда можем написать (по аналогии с решением предыдущего примера): $\oint\limits_{C} = \sum\limits_i \oint\limits_{C_i}$.

В силу непрерывности частных производных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ (это предположение вытекает из условия примера), якобиан $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$ сохраняет знак числа $\left.\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}}$ в некоторой окрестности точки (x_i, y_i). Можем считать, что контур C_i принадлежит этой окрестности. Отображение $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ переводит область, ограниченную контуром C_i, и сам контур в некоторую область в плоскости переменных X и Y, ограниченную контуром C_i' и содержащую начало координат, причем положительному обходу контура C_i соответствует положительный обход контура C_i', если $\left.\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} > 0$, и отрицательный обход контура C_i', если $\left.\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} < 0$.

Таким образом, используя результат решения предыдущего примера, можем написать:

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C_i}\frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}=\operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(x,\ y)}\bigg|_{\substack{x=x_i\\ y=y_i}},$$

$$I=\sum_i \operatorname{sgn}\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(x,\ y)}\bigg|_{\substack{x=x_i\\ y=y_i}}.$$

302. Показать, что если C — замкнутый контур и $\boldsymbol{e}$ — произвольное направление, то $\oint\limits_C \cos(\widehat{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n}})\,dl=0$, где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к контуру C.

Решение. Пусть $\boldsymbol{e}$ — произвольное направление, $\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha_0,\ \cos\beta_0\}$ $(\sqrt{\cos^2\alpha_0+\cos^2\beta_0}=1)$. Так как $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичные векторы, то можем написать равенство $\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n}})=(\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n})$, где $(\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{n}$.

Рассмотрим единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ на кривой C в точке $M(x,\ y)$ и вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{\tau}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$, $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha',\ \cos\beta'\}$, где α, β и α', β' — углы, образуемые векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{n}$ соответственно с положительными направлениями осей Ox, Oy. Подынтегральное выражение принимает вид: $\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n}})\,dl=(\cos\alpha_0\cos\alpha'+\cos\beta_0\times$ $\times\cos\beta')\,dl$.

Поскольку обход контура C совершается в положительном направлении, то в каждой его точке $M(x,\ y)$ выполняются равенства $\alpha'=$ $=\alpha-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$, $\beta'=\beta-\frac{\pi}{2}=\alpha-\pi$, поэтому подынтегральное выражение можем преобразовать к виду: $\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n}})\,dl=\Big(\cos\alpha_0\cos\Big(\alpha-$ $-\frac{\pi}{2}\Big)+\cos\beta_0\cos(\alpha-\pi)\Big)dl=(\cos\alpha_0\sin\alpha-\cos\beta_0\cos\alpha)\,dl=-\cos\beta_0 dx+$ $+\cos\alpha_0\,dy$ (так как $dl\cos\alpha=dx$, $dl\sin\alpha=dy$). Подставляя в интеграл полученное выражение и применяя формулу Грина, находим:

$$\oint\limits_C\cos(\widehat{\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{n}})\,dl=\oint\limits_C-\cos\beta_0\,dx+\cos\alpha_0\,dy=$$

$$=\iint\limits_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0\right)dxdy=0.$$

303. Найти значение интеграла

$$I=\oint\limits_C(x\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{i}})+y\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{j}}))\,dl,$$

где C — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D, и $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к ней ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — орты осей).

Решение. Используя преобразования, применявшиеся при решении предыдущего примера, находим:

$$I = \oint_C -ydx + xdy = 2 \cdot \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = 2S,$$

где S — численное значение площади замкнутой области $D + C$.

304. Найти $\lim\limits_{d(D)\to 0} \frac{1}{S} \oint\limits_C (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, dl$, где S — площадь области D, ограниченной контуром C, окружающим точку (x_0, y_0), $d(D)$ — диаметр области D, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали контура C и $\boldsymbol{F} = \{X, Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $D + C$.

Решение. По аналогии с решением двух предыдущих примеров напишем равенство

$$\oint_C (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, dl = \oint_C -Ydx + Xdy,$$

а затем применим формулу Грина:

$$\oint_C -Ydx + Xdy = \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy.$$

При стягивании контура C в точку (x_0, y_0), в силу непрерывности функции $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$, по теореме о среднем имеем:

$$\lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{n})\, dl = \lim_{d(D)\to 0} \frac{1}{S} \iint_D \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \frac{\partial X(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

§ 11. Физические приложения криволинейных интегралов

305. С какой силой притягивает масса M_0, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0, 0)$?

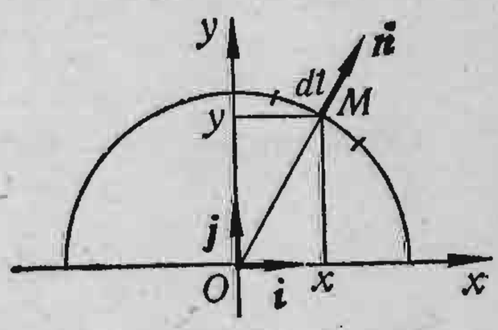

Рис. 20

Решение. Выделив элемент дуги окружности длиной dl (рис. 20), получим приближенное значение силы $d\boldsymbol{F}$, с которой масса, распределенная по этой дуге, действует на материальную точку массы m: $d\boldsymbol{F} = \frac{\gamma\mu_0 m \boldsymbol{n}(M)\, dl}{a^2}$, где μ_0 — плотность вещества дуги, $\boldsymbol{n}(M)$ — вектор единичной нормали к дуге в произвольной ее точке M, γ — гравитационная постоянная. В точке $M(x, y)$ имеем равенство $\boldsymbol{n}(M) = \left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right\}$, поэтому можем написать: $d\boldsymbol{F} = \frac{\gamma\mu_0 m\, dl}{a^3} \{x, y\}$.

Суммируя по всем элементам dl, находим искомую силу:

$$\boldsymbol{F}=\frac{\gamma\mu_0 m}{a^3}\left(\boldsymbol{i}\int\limits_C x\,dl+\boldsymbol{j}\int\limits_C y\,dl\right),$$

где C — верхняя полуокружность $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$. Записав параметрические уравнения этой полуокружности в виде $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и приняв во внимание равенство $dl=a\,d\varphi$, получим:

$$\boldsymbol{F}=\frac{\gamma\mu_0 m}{a}\left(\boldsymbol{i}\int\limits_0^\pi\cos\varphi\,d\varphi+\boldsymbol{j}\int\limits_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\right)=\frac{2\gamma\mu_0 m}{a}\boldsymbol{j}=\frac{2\gamma M_0 m}{\pi a^2}\boldsymbol{j}.$$

306. Вычислить логарифмический потенциал простого слоя $u(x,y)=\oint\limits_C \varkappa\ln\frac{1}{r}\,dl$, где $\varkappa=\mathrm{const}$ — плотность, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ и контур C является окружностью $\xi^2+\eta^2=R^2$.

Решение. Перейдем к новой системе координат $O\xi'\eta'$, выбрав последнюю так, чтобы ее начало совпадало с началом координат системы $O\xi\eta$ и чтобы точка $M(x,y)$ находилась на оси $O\xi'$. Тогда получим:

$$u(x,y)=u_1(\rho,0)=\oint\limits_{C'}\varkappa\ln\frac{1}{r'}\,dl',$$

где C' — окружность $(\xi')^2+(\eta')^2=R^2$, $r'=\sqrt{(\xi'-\rho)^2+(\eta')^2}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Написав параметрические уравнения окружности C' в виде $\xi'=R\cos\varphi$, $\eta'=R\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, находим (принимая во внимание равенство $dl'=R\,d\varphi$):

$$u(x,y)=-\frac{R\varkappa}{2}\int\limits_0^{2\pi}\ln(R^2-2R\rho\cos\varphi+\rho^2)\,d\varphi=-2\pi R\varkappa\ln R-$$
$$-\frac{R\varkappa}{2}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{2\rho\cos\varphi}{R}+\frac{\rho^2}{R^2}\right)d\varphi.$$

Обозначив $\frac{\rho}{R}=\alpha$, вычислим интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{2\pi}\ln(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)\,d\varphi.$$

Дифференцируя по параметру α, получаем:

$$I'(\alpha)=2\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\alpha-\cos\varphi)\,d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2z\bar z-(z+\bar z)}{(1-z)(1-\bar z)}\,d\varphi,$$

где $z=\alpha e^{ix}$, $\bar z=\alpha e^{-ix}$.

Если $\alpha < 1$, то имеем:

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z}{1-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)d\varphi = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}(z+z^2+\dots+z^n+\dots$$

$$+\bar{z}+\bar{z}^2+\dots+\bar{z}^n+\dots)\,d\varphi = -\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}(\alpha\cos\varphi+\alpha^2\cos 2\varphi+$$

$$+\dots+\alpha^n\cos n\varphi+\dots)\,d\varphi = 0$$

(почленное интегрирование ряда законно, поскольку он сходится равномерно). Далее, получаем: $I(\alpha)=C$, $C=I(0)=0$, в силу чего имеем: $u(x,\ y) = -2\pi R\varkappa\ln R = 2\pi R\varkappa\ln\frac{1}{R}$, если $\rho < R$. Если $\rho > R$, то $\alpha > 1$ и мы получим:

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{\bar{z}}}\right)d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{\bar{z}^2}+\dots\right)d\varphi = \frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\cos\varphi}{\alpha}+\frac{\cos 2\varphi}{\alpha^2}+\dots\right)d\varphi = \frac{4\pi}{\alpha},$$

$$I(\alpha) = 4\pi\ln\alpha + C,\quad C = I(1) = 0,\quad I(\alpha) = 4\pi\ln\alpha,$$

$$u(x,\ y) = -2\pi R\varkappa\ln R - 2\pi R\varkappa\ln\frac{\rho}{R} = -2\pi R\varkappa\ln\rho = 2\pi R\varkappa\ln\frac{1}{\rho}.$$

307. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}\,d\psi \quad\text{и}\quad I_2 = \int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}\,d\psi,$$

где r — расстояние между точкой $(\rho,\ \varphi)$ и переменной точкой $(1,\ \psi)$, а m — натуральное число.

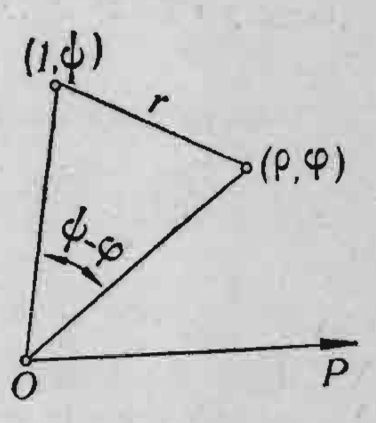

Рис. 21

Решение. Вычислим расстояние между точками $(\rho,\ \varphi)$ и $(1,\ \psi)$ (рис. 21). Применив теорему косинусов, получим $r = \sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}$. Умножая I_2 на мнимую единицу i и складывая полученный результат с I_1, находим:

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} e^{im\psi}\ln\frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}}\,d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\ln(1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2)\,d\psi.$$

Дифференцируя по параметру ρ под знаком интеграла, получаем равенство:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} + i\frac{\partial I_2}{\partial \rho} = -\int_0^{2\pi} \frac{(\rho + \cos(\psi - \varphi))\, e^{im\psi}}{1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2}\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(\frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) d\psi,$$

где $z = \rho e^{i(\psi-\varphi)}$, $\bar{z} = \rho e^{-i(\psi-\varphi)}$.

Пусть $\rho < 1$. В этом случае находим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} + i\frac{\partial I_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2\rho}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}(z + z^2 + \cdots + z^k + \cdots + \bar{z} +$$
$$+ \bar{z}^2 + \cdots + \bar{z}^k + \cdots)\, d\psi.$$

Полученный ряд можно почленно интегрировать. При $k \neq m$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\psi}(z^k + \bar{z}^k)\, d\psi = \rho^k \int_0^{2\pi} \left(e^{i((m+k)\psi - k\varphi)} + e^{i((m-k)\psi + k\varphi)}\right) d\psi =$$

$$= \rho^k\left(\left.\frac{e^{i((m+k)\psi-k\varphi)}}{i(m+k)}\right|_0^{2\pi} + \left.\frac{e^{i((m-k)\psi+k\varphi)}}{i(m-k)}\right|_0^{2\pi}\right) = 0.$$

Если $k = m$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{im\psi}(z^m + \bar{z}^m)\, d\psi = \rho^m \int_0^{2\pi} \left(e^{i(2m\psi - m\varphi)} + e^{im\varphi}\right) d\psi = 2\pi\rho^m e^{im\varphi},$$

и окончательно имеем:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} + i\frac{\partial I_2}{\partial \rho} = \pi\rho^{m-1}e^{im\varphi}, \quad I_1 + iI_2 = \frac{\pi}{m}\rho^m e^{im\varphi} + C_1 + iC_2,$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi + C_1, \quad I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^m \sin m\varphi + C_2.$$

При $\rho = 0$ имеем $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, следовательно, $C_1 = C_2 = 0$,

$$I_1 = \frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi.$$

Пусть $\rho > 1$, тогда получим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} + i\frac{\partial I_2}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\rho}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{z}}}\right) d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2\rho}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^2} + \cdots\right) d\psi = -\frac{\pi e^{im\varphi}}{\rho^{m+1}},$$

$$I_1 + iI_2 = -\pi e^{im\varphi} \int \frac{d\rho}{\rho^{m+1}} + C_1 + iC_2 =$$

$$= \frac{\pi}{m} \frac{\cos m\varphi}{\rho^m} + C_1 + i\left(\frac{\pi}{m} \frac{\sin m\varphi}{\rho^m} + C_2\right),$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \frac{\cos m\varphi}{\rho^m}, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \frac{\sin m\varphi}{\rho^m},$$

так как $C_1 = C_2 = 0$.

При $\rho = 1$, в силу непрерывности функций $I_1(\rho)$ и $I_2(\rho)$, имеем:

$$I_1 = \frac{\pi \cos m\varphi}{m}, \quad I_2 = \frac{\pi \sin m\varphi}{m}.$$

Окончательно находим:

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \quad \text{если } 0 \leqslant \rho \leqslant 1;$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m\rho^m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m\rho^m} \sin m\varphi, \quad \text{если } \rho > 1.$$

308. Вычислить интеграл Гаусса

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{r}\, dl,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего точку $A(x, y)$ с переменной точкой $M(\xi, \eta)$ простого замкнутого гладкого контура C, $(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})$ — угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой C в ее точке M.

Решение. В силу равенства $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}}) = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}$, где $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$, имеем:

$$u(x, y) = \oint_C \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dl}{r^2} = \oint_C \frac{(\xi - x)\cos\alpha' + (\eta - y)\cos\beta'}{r^2}\, dl,$$

где $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ — направляющие косинусы единичной нормали. Используя равенства $dl\cos\alpha' = d\eta$, $dl\cos\beta' = -d\xi$, полученные при решении примера 302, находим:

$$u(x, y) = \oint_C \frac{(\xi - x)\, d\eta - (\eta - y)\, d\xi}{r^2}.$$

Если точка A лежит вне контура C, то, записав функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\partial}{\partial\xi}(\ln r)\, d\eta - \frac{\partial}{\partial\eta}(\ln r)\, d\xi$$

и применив формулу Грина, получим:

$$u(x, y) = \iint_D \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\ln r) + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(\ln r)\right) d\xi d\eta = 0.$$

Если точка A лежит внутри контура C, то, как мы знаем (см. пример 300), интеграл не зависит от вида замкнутой кривой, окружающей эту точку, и потому интеграл по контуру C можно заменить интегралом по контуру C_1 — окружности радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке A:

$$u(x, y) = \oint_{C_1} \frac{(\xi - x)\, d\eta - (\eta - y)\, d\xi}{r^2}.$$

Записав параметрические уравнения окружности C в виде $\xi - x = \varepsilon \cos\varphi$, $\eta - y = \varepsilon \sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, находим:

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В рассмотренном случае можно рассуждать и следующим образом: поскольку $\cos(\widehat{r, n}) = 1$, $r = \varepsilon$, $dl = \varepsilon d\varphi$, то

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon d\varphi}{\varepsilon} = 2\pi.$$

Осталось рассмотреть случай, когда точка A лежит на контуре C. Тогда криволинейный интеграл будет несобственным интегралом (сходящимся, как легко установить). Для его вычисления выделим на контуре C окрестность точки A (дугу M_1M_2) и рассмотрим интеграл

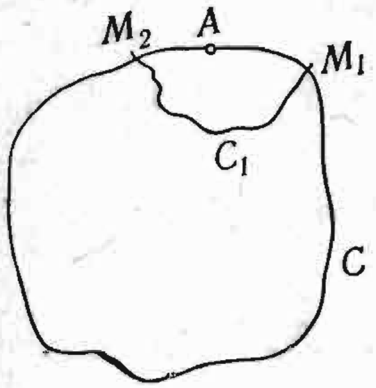

Рис. 22

$$\int_{C - \smile{M_1M_2}} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl,$$

где $C - \overset{\smile}{M_1M_2}$ — множество всех точек контура C, за исключением точек дуги M_1M_2. Положим по определению:

$$u(x, y) = \lim_{\substack{M_1 \to A \\ M_2 \to A}} \int_{C - \overset{\smile}{M_1M_2}} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl.$$

Соединим точки M_1 и M_2 произвольной гладкой кривой C_1, целиком лежащей в области, ограниченной контуром C (рис. 22), и обозначим через γ замкнутый контур, состоящий из дуги $C - \overset{\smile}{M_1M_2}$ и дуги C_1. Тогда, очевидно, можем написать равенство

$$\int_{C - \overset{\smile}{M_1M_2}} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl = \oint_{\gamma} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl + \int_{C_1} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl,$$

где контур γ пробегается в положительном направлении, а контур C_1 — от точки M_2 к точке M_1. Поскольку подынтегральное выражение является полным дифференциалом в области, ограниченной контуром γ, то справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r}\, dl = 0,$$

и мы приходим к формуле

$$u(x, y)=\lim_{\substack{M_1\to A\\ M_2\to A}}\int_{C_1}\frac{(\xi-x)\,d\eta-(\eta-y)\,d\xi}{r^2}.$$

Интеграл по кривой C_1 не зависит от вида кривой, соединяющей точки M_1 и M_2, поэтому в качестве этой кривой возьмем дугу окружности радиуса ε с центром в точке A. Записав параметрические уравнения дуги окружности в виде $\xi-x=\varepsilon\cos\varphi$, $\eta-y=\varepsilon\sin\varphi$, замечаем (рис. 23), что переменная φ изменяется в пределах $(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{e}})+\alpha_2\leqslant\varphi\leqslant\leqslant(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{e}})+\pi-\alpha_1$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор в точке A, коллинеарный орту $\boldsymbol{i}$. Если $\varepsilon\to 0$, то $M_1\to A$, $M_2\to A$. Поскольку в точке A

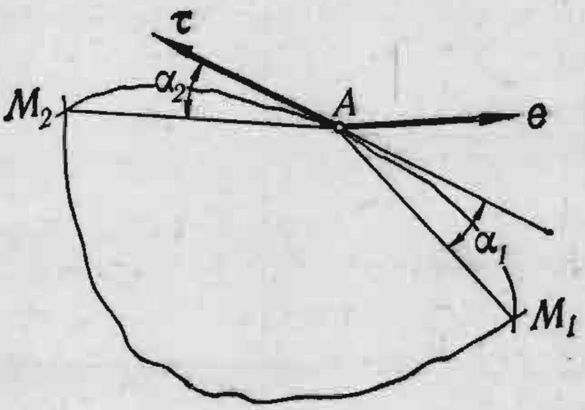

Рис. 23

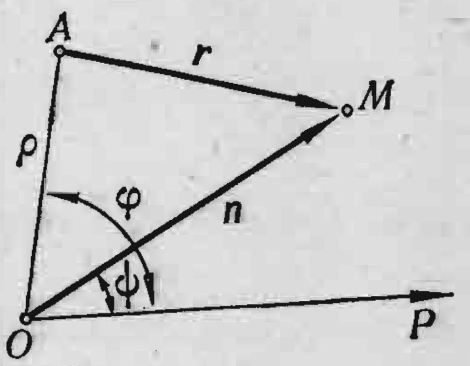

Рис. 24

кривая C имеет касательную, то при стремлении точек M_1 и M_2 к точке A углы α_1 и α_2 стремятся к нулю. В результате получаем:

$$u(x, y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(\widehat{\tau, e})+\alpha_2}^{(\widehat{\tau, e})+\pi-\alpha_1}d\varphi=\lim_{\substack{M_1\to A\\ M_2\to A}}(\pi-\alpha_1-\alpha_2)=\pi.$$

В заключение отметим, что интеграл Гаусса имеет вполне определенный геометрический смысл: функция $u(x, y)$ является мерой угла, под которым кривая C видна из точки A.

309. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы двойного слоя

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{r}\,d\psi \quad\text{и}\quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{r}\,d\psi,$$

где r — расстояние между точкой $A(\rho, \varphi)$ и переменной точкой $M(1, \psi)$, $(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})$ — угол между направлением $\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{r}$ и радиусом $\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{n}$, проведенным из точки $(0, 0)$, и m — натуральное число.

Решение. Вычислим расстояние r между точками A и M (рис. 24) с помощью теоремы косинусов: $r=\sqrt{1-2\rho\cos(\psi-\varphi)+\rho^2}$. Записав

$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}}) = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}$, где $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$, получим:

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} d\psi, \quad K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} d\psi.$$

Умножая K_2 на мнимую единицу i и складывая полученное выражение с K_1, находим:

$$K_1 + iK_2 = \int_0^{2\pi} e^{im\psi} \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} d\psi.$$

Поскольку $\boldsymbol{r} = \{\cos\psi - \rho\cos\varphi, \ \sin\psi - \rho\sin\varphi\}$, $\boldsymbol{n} = \{\cos\psi, \sin\psi\}$, то $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = 1 - \rho\cos(\psi - \varphi)$, и задача свелась к вычислению интеграла

$$K_1 + iK_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{im\psi}(1 - \rho\cos(\psi - \varphi))\, d\psi}{1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2}.$$

Полагая $z = \rho e^{i(\psi - \varphi)}$, $\bar{z} = \rho e^{-i(\psi - \varphi)}$, получаем:

$$K_1 + iK_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{im\psi}(2 + (z + \bar{z}))\, d\psi}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \bar{z}}\right) d\psi.$$

Пусть $0 < \rho < 1$; тогда $K_1 + iK_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}(2 + z + z^2 + \cdots + \bar{z} + \bar{z}^2 + \cdots)\, d\psi = \pi\rho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$ (см. пример 307), откуда $K_1 = \pi\rho^m \cos m\varphi$, $K_2 = \pi\rho^m \sin m\varphi$.

Если $\rho = 1$, то непосредственным вычислением интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{im\psi}(1 - \rho\cos(\psi - \varphi))\, d\psi}{1 - 2\rho\cos(\psi - \varphi) + \rho^2}$$

убеждаемся в том, что $K_1 = 0$, $K_2 = 0$.

Если $\rho > 1$, то получаем:

$$K_1 + iK_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1} + \frac{\frac{1}{\bar{z}}}{\frac{1}{\bar{z}} - 1}\right) d\psi =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{im\psi}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{\bar{z}^2} + \cdots\right) d\psi = -\frac{\pi}{\rho^m} e^{im\varphi}$$

(см. пример 307), откуда $K_1 = -\frac{\pi\cos m\varphi}{\rho^m}$, $K_2 = -\frac{\pi\sin m\varphi}{\rho^m}$.

310. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — компоненты скорости установившегося движения жидкости. Определить количество жидкости, вытекшее за единицу времени из ограниченной контуром C области D (т. е. разность между количествами вытекшей и втекшей жидкости). Какому уравнению удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и в области отсутствуют источники и стоки?

Решение. Предположим, что компоненты вектора $\boldsymbol{F}=\{u(x, y), v(x, y)\}$ — непрерывно дифференцируемые функции в области $D+C$. Выделим элемент дуги контура длиной dl, содержащей точку M (рис. 25). Тогда количество dQ жидкости, вытекшей за единицу времени через элемент длины dl, приближенно равно выражению $dQ = (\boldsymbol{F}(M), \boldsymbol{n}(M))\,dl$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к кривой C в точке M, так как поток стационарен (т. е. не зависит от времени). Суммируя по всем элементам контура C, получаем:

$$Q=\oint_C (\boldsymbol{F}(M), \boldsymbol{n}(M))\,dl.$$

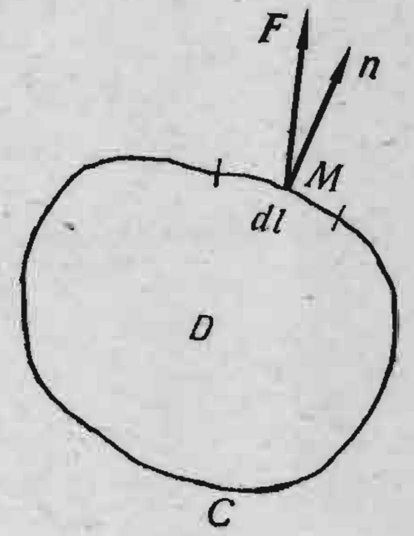

Рис. 25

С помощью формул преобразования интегралов такого вида (см. примеры 302—304) находим:

$$Q=\oint_C -v(x, y)\,dx+u(x, y)\,dy.$$

Используя формулу Грина, имеем:

$$Q=\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Если $Q>0$, то это означает, что из области, ограниченной контуром C, вытекает больше жидкости, чем втекает в нее за единицу времени, т. е. в области D есть источники образования жидкости. Если $Q<0$, то в область D втекает больше жидкости, чем вытекает из нее, т. е. в области D имеются стоки (места, где жидкость исчезает, например, испаряется). Если же жидкость несжимаема и в области отсутствуют источники и стоки, то за единицу времени в область втекает жидкости столько же, сколько вытекает из нее, и в этом случае имеем:

$$Q=\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy=0,$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$, поскольку двойной интеграл равен нулю по любой области, являющейся частью области D.

311. Согласно закону Био — Савара электрический ток i, протекающий по элементу проводника $d\boldsymbol{l}$, создает в точке пространства $M(x, y, z)$ магнитное поле с напряжением

$$d\boldsymbol{H}=ki\frac{[\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{l}]}{r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий элемент $d\boldsymbol{l}$ с точкой M, и k — коэффициент пропорциональности. Найти проекции H_ξ, H_η, H_ζ напряжения магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в точке M для случая замкнутого проводника C.

Решение. Суммируя по всем элементам dl, получаем:

$$H = ki \oint\limits_C \frac{[r, dl]}{r^3}$$

(интегрирование вектор-функции сводится к ее покомпонентному интегрированию, т. е. к интегрированию трех скалярных функций).

Запишем векторы r и dl в явном виде и найдем их векторнсе произведение:

$$r = \{x - \xi,\ y - \eta,\ z - \zeta\},\quad dl = \{d\xi,\ d\eta,\ d\zeta\},$$

$$[r,\ dl] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} = i\,((y - \eta)\,d\zeta - (z - \zeta)\,d\eta) +$$

$$+ j\,((z - \zeta)\,d\xi - (x - \xi)\,d\zeta) + k\,((x - \xi)\,d\eta - (y - \eta)\,d\xi).$$

Таким образом, имеем:

$$H_\xi = ki \oint\limits_C \frac{(y - \eta)\,d\zeta - (z - \zeta)\,d\eta}{r^3},$$

$$H_\eta = ki \oint\limits_C \frac{(z - \zeta)\,d\xi - (x - \xi)\,d\zeta}{r^3},$$

$$H_\zeta = ki \oint\limits_C \frac{(x - \xi)\,d\eta - (y - \eta)\,d\xi}{r^3}.$$

§ 12. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл 1-го рода. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности S с кусочно-гладкой границей L определена ограниченная функция $f(M) = f(x,\ y,\ z)$. Произведем разбиение Π поверхности S на части $S_1, S_2, \ldots, S_n$ с помощью кусочно-гладких кривых, выберем в каждой из этих частей произвольную точку M_i и составим сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i,$$

где ΔS_i — величина площади i-й ячейки разбиения S_i. Пусть $d(\Pi)$ — наибольший диаметр ячеек S_i. Рассмотрим последовательность разбиений Π_k такую, чтобы $d(\Pi) \to 0$. Если при $d(\Pi) \to 0$ последовательность $S_{\Pi_k}(f)$ стремится к конечному пределу I, не зависящему от способа дробления поверхности S и выбора точек M_i, то число I называют *поверхностным интегралом* 1-го *рода* от функции $f(M)$ по поверхности S и обозначают так:

$$I = \iint\limits_S f(x,\ y,\ z)\,dS.$$

Понятие поверхностного интеграла 1-го рода распространяется и на замкнутые поверхности.

2°. Сведение поверхностного интеграла к двойному интегралу. Случай явного задания поверхности. Если S — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D — замкнутая ограниченная область, а $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная на поверхности S, то справедливо равенство

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dx\,dy, \qquad (1)$$

причем поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если существует двойной интеграл, стоящий справа.

Если поверхность S — гладкая, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на ней, то интеграл $\iint\limits_S (x, y, z)\,dS$ существует.

Формулу (1) можно записать также в виде

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}, \qquad (2)$$

где γ — угол между единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}$ в точке M и положительным направлением оси Oz.

В случае поверхности, заданной уравнением $x = x(y, z)$ или $y = y(z, x)$, получаем соответственно равенства:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x(y, z), y, z)\frac{dy\,dz}{\cos\alpha}, \qquad (3)$$

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{D_2} f(x, y(z, x), z)\frac{dz\,dx}{\cos\beta}, \qquad (4)$$

где α и β — углы, образованные единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}$ в точке M с положительными направлениями осей Ox и Oy.

Если поверхность S состоит из нескольких частей, каждая из которых может быть представлена уравнением вида $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$, то для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности, к двойному можно воспользоваться свойством аддитивности этого интеграла и представить его в виде суммы интегралов (2), (3) и (4).

3°. Случай, когда поверхность задана параметрическим уравнением. Если гладкая поверхность S в пространстве (x, y, z) задана векторным двухпараметрическим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, то это равносильно заданию ее тремя скалярными уравнениями с двумя параметрами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Пусть $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная на этой поверхности. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \qquad (5)$$

где D — область изменения параметров, E, G, F — коэффициенты Гаусса: $E = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u)$, $G = (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v)$, $F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, причем поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если только существует двойной интеграл в правой части равенства.

4°. Некоторые применения поверхностных интегралов 1-го рода к решению задач механики. Пусть по гладкой или кусочно-гладкой поверхности S распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\mu(x, y, z)$, причем эта плотность является непрерывной функцией на S. Такую поверхность называют материальной. Справедливы формулы:

$$M = \iint\limits_S \mu(x, y, z)\, dS, \tag{6}$$

$$x_c = \frac{1}{M}\iint\limits_S x\mu(x, y, z)\, dS, \quad y_c = \frac{1}{M}\iint\limits_S y\mu(x, y, z)\, dS,$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iint\limits_S z\mu(x, y, z)\, dS, \tag{7}$$

$$I_z = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,\mu(x, y, z)\, dS, \tag{8}$$

где M — масса поверхности S, x_c, y_c, z_c — координаты ее центра тяжести, I_z — момент инерции поверхности S относительно оси Oz.

Пусть m — масса, сосредоточенная в некоторой точке (x_0, y_0, z_0), не лежащей на поверхности S. Тогда сила $\boldsymbol{F}$, с которой материальная поверхность S притягивает материальную точку с массой m, может быть вычислена по формуле

$$\boldsymbol{F} = \gamma m \iint\limits_S \mu(x, y, z)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\, dS, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{r} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$, γ — гравитационная постоянная.

5°. Понятие ориентированной поверхности. Гладкая поверхность S называется *двусторонней*, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности. Если же на поверхности S существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется *односторонней*. Выбор на поверхности S определенного непрерывного поля нормалей $\boldsymbol{n}(M)$ называют *выбором стороны* этой поверхности. Любая гладкая поверхность, определенная уравнением $z = f(x, y)$, является двусторонней. Выбрав в каждой ее точке вектор нормали так, чтобы он составлял с положительным направлением оси Oz острый угол, мы получим верхнюю сторону поверхности, а при противоположной ориентации нормали — ее нижнюю сторону.

Всякая замкнутая поверхность, не имеющая самопересечений (например, сфера, эллипсоид), — двусторонняя. Направив в каждой точке такой поверхности нормаль внутрь области, ею ограниченной, мы получим внутреннюю сторону поверхности, а направив нормаль в противоположную сторону, получим ее внешнюю сторону.

Двустороннюю поверхность называют *ориентируемой*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией поверхности*. Односторонние поверхности называют *неориентируемыми*. С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы.

Пусть S — ориентированная поверхность, ограниченная одним или несколькими контурами. Направление обхода контура L считается *положительным* (согласованным с ориентацией поверхности), если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление вектора нормали совпадает с направлением от его ног к голове, обходя контур L, оставляет поверхность S все время слева от себя. Обход в противоположном направлении называется *отрицательным*.

6°. Поверхностный интеграл 2-го рода. Пусть S — гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем одну из сторон этой поверхности и рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{F} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, заданную на S. Обозначим через F_n проекцию вектора $\boldsymbol{F}$ на направление нормали $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ в точке $M(x, y, z)$: $F_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$. Интеграл

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$$

называют *поверхностным интегралом* 2-го *рода* от вектор-функции $\boldsymbol{F}$ по выбранной стороне поверхности и записывают его так:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

Следовательно, по определению:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \quad (10)$$

При переходе к другой стороне поверхности, интеграл (10) меняет свой знак на противоположный.

7°. Сведение поверхностного интеграла 2-го рода к двойному интегралу. Случай явного задания поверхности. Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$ и взята верхняя часть этой поверхности, а $R(x, y, z)$ — ограниченная на S функция. Тогда справедливо равенство

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint_D R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy, \quad (11)$$

где D — проекция поверхности S на плоскость Oxy. Стоящий слева интеграл существует, если существует двойной интеграл, стоящий справа. Если интеграл берется по нижней стороне поверхности, то справедлива формула

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy. \quad (12)$$

Аналогично получаем формулы:

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\,dy\,dz = \pm \iint\limits_{D_1} P(x(y, z), y, z)\,dydz, \tag{13}$$

$$\iint\limits_S Q(x, y\ z)\,dz\,dx = \pm \iint\limits_{D_2} Q(x, y(z, x), z)\,dz\,dx. \tag{14}$$

8°. Случай, когда поверхность задана параметрическим уравнением. Если гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность задана параметрическим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ и $\boldsymbol{F}_1 = \{P, Q, R\}$ — ограниченная вектор-функция, заданная на S, то справедливо равенство

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \tag{15}$$

где D—область изменения параметров u и v; E, F, G—коэффициенты Гаусса, $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $Q = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $R = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, причем стоящий слева поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл. Формулу (15) можно записать в ином виде. Поскольку $\cos\alpha = \pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos\beta = \pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos\gamma = \pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где $A = \dfrac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $B = \dfrac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $C = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$, причем $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$, то

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \pm \iint\limits_D (PA + QB + RC)\,du\,dv, \tag{16}$$

где $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $Q = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $R = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ и знак перед интегралом выбирается надлежащим образом.

312. Вычислить $I = \iint\limits_S z\,dS$, где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Поверхность S проектируется на плоскость Oxy в область D, ограниченную замкнутой кривой $2x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, симметричной относительно осей координат. Коническая поверхность $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ пересекается с верхней (относительно плоскости $z = a$) частью цилиндрической поверхности $x^2 + z^2 = 2az$, уравнение которой $z = a + \sqrt{a^2 - x^2}$. На поверхности S имеем: $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$, $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Используя формулу (1), получаем:

$$I = a\iint\limits_D \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx\,dy = a\iint\limits_D \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 1\right)dx\,dy.$$

В полярной системе координат уравнение границы области D имеет вид: $\rho = \dfrac{2a}{1+\cos^2\varphi}$. Переходя к полярным координатам в двойном интеграле и принимая во внимание симметрию области D, а также то, что в симметричных относительно осей координат точках подынтегральное выражение принимает равные значения, имеем:

$$I = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\varphi}} + 1\right)\rho\, d\rho = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\varphi}}{\cos^2\varphi} - \right.$$

$$\left.-\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{\rho=\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}}^{\rho=0} d\varphi = 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\cos^2\varphi} + \frac{1}{(1+\cos^2\varphi)^2}\right)d\varphi =$$

$$= 8a^3\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{2+\operatorname{tg}^2\varphi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{(2+\operatorname{tg}^2\varphi)^2}\right) = 8a^3\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2}} - \right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{4(2+\operatorname{tg}^2\varphi)}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi a^3\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{7\pi\sqrt{2}a^3}{2}.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

313. $I = \iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где S — поверхность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$.

Решение. Интегрирование производится по верхней полусфере $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Поскольку в нашем случае $dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy = \dfrac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, то по формуле (1) находим:

$$I = a\iint\limits_D \left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + 1\right)dx\,dy,$$

где D — круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$. Переходя в интеграле к полярным координатам, получаем:

$$I = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + 1\right)\rho\,d\rho = \pi a^3,$$

так как $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi\int_0^a \frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 0.$

314. $I = \iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — граница тела $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

Решение. Интегрирование производится по боковой поверхности и основанию конуса, в силу чего можем написать:

$$I = \iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)\,dS,$$

где S_1 — боковая поверхность конуса, S_2 — его основание. На основании конуса $dS = dx\,dy$, поэтому получаем:

$$\iint\limits_{S_2} (x^2+y^2)\,dS = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

На боковой поверхности конуса $dS = \sqrt{2}\,dx\,dy$. Следовательно, находим:

$$\iint\limits_{S_1} (x^2+y^2)\,dS = \sqrt{2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

В результате получаем: $I = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

315. $I = \iint\limits_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

Решение. Расстояние h определяется формулой $h = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали к поверхности в точке (x, y, z). Напишем параметрические уравнения поверхности эллипсоида в виде $x = a\sin\varphi\cos\theta$, $y = b\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Наша задача заключается в том, чтобы привести поверхностный интеграл к повторному с помощью формулы (5) (положив там $u = \varphi$, $v = \theta$). Из соображений симметрии можем написать равенство

$$I = 8\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{h},$$

где S_1 — восьмая часть поверхности эллипсоида, лежащая в первом октанте. Поскольку вектор единичной нормали во всех внутренних точках поверхности S_1 образует с положительным направлением оси Oz острый угол, можем написать формулы

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(выбрав перед радикалом знак «+»), где

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\varphi, \theta)},\quad B = \frac{D(z, x)}{D(\varphi, \theta)},\quad C = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Так как $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\varphi\,d\theta$, то, принимая во внимание формулу для расстояния h, имеем:

$$\frac{dS}{h} = \frac{A^2+B^2+C^2}{Ax+By+Cz}\,d\varphi\,d\theta.$$

Вычислим значения A, B, C:

$$A = \begin{vmatrix} b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \\ -c\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = bc\sin^2\varphi\cos\theta$$

$$B = \begin{vmatrix} -c\sin\varphi & 0 \\ a\cos\varphi\cos\theta & -a\sin\varphi\sin\theta \end{vmatrix} = ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$C = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\theta & -a\sin\varphi\sin\theta \\ b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = ab\sin\varphi\cos\varphi.$$

Подставляя в выражение $Ax+By+Cz$ значения x, y, z, зависящие от φ и θ, получаем:

$$Ax+By+Cz = abc(\sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi) = abc\sin\varphi.$$

Далее находим:

$$A^2+B^2+C^2 = b^2c^2\sin^4\varphi\cos^2\theta + a^2c^2\sin^4\varphi\sin^2\theta + \\ + a^2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = a^2b^2c^2\sin^2\varphi\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right).$$

Заменяя поверхностный интеграл соответствующим двойным, получаем:

$$I = 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right) d\theta =$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin^2\varphi + \frac{\pi}{2c^2}\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\sin^3\varphi + \frac{1}{c^2}\cos^2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

316. $I = \iint\limits_S z\,dS$, где S — часть поверхности геликоида $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$ $(0 < u < a;\ 0 < v < 2\pi)$.

Решение. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{r}(u, v) = \{u\cos v, u\sin v, v\}$ и вычислим коэффициенты Гаусса E, F, G (см. формулу (5)): $E = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u) = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$, $G = (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v) = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$, $F = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v) = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$, откуда $EG - F^2 = 1 + u^2$. Применяя формулу (5), находим:

$$I = \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du\int_0^{2\pi} v\,dv = 2\pi^2\int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = \pi^2(u\sqrt{1+u^2} + \ln(u + \\ + \sqrt{1+u^2}))\Big|_0^a = \pi^2(a\sqrt{1+a^2} + \ln(a+\sqrt{1+a^2})).$$

317. $I=\iint\limits_S z^2\,dS$, где S — часть поверхности конуса $x=\rho\cos\varphi\sin\alpha$, $y=\rho\sin\varphi\sin\alpha$, $z=\rho\cos\alpha\,(0\leqslant\rho\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ и α — постоянная $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера:

$$\boldsymbol{r}(\rho,\ \varphi)=\{\rho\cos\varphi\sin\alpha,\ \rho\sin\varphi\sin\alpha,\ \rho\cos\alpha\},$$
$$E=(\boldsymbol{r}_\rho,\ \boldsymbol{r}_\rho)=\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$
$$G=(\boldsymbol{r}_\varphi,\ \boldsymbol{r}_\varphi)=\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha+\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\alpha=\rho^2\sin^2\alpha,$$
$$F=(\boldsymbol{r}_\rho,\ \boldsymbol{r}_\varphi)=-\rho\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha+\rho\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\alpha=0,$$
$$EG-F^2=\rho^2\sin^2\alpha,$$
$$I=\sin\alpha\cos^2\alpha\int\limits_0^a\rho^3d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{2}a^4\sin\alpha\cos^2\alpha.$$

318. $I=\iint\limits_S(xy+yz+zx)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Поверхность, по которой мы интегрируем, проектируется на плоскость Oxy в круг $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$, а площадь элемента конической поверхности dS равна $\sqrt{2}\,dx\,dy$ (см. пример 314), поэтому, применив формулу (1), получим:

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_{(x-a)^2+y^2\leqslant a^2}(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам ρ, φ. Тогда область интегрирования будет определяться с помощью неравенств $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\varphi$, и после замены переменных найдем:

$$I=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^3\,d\rho=$$
$$=4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\cos^5\varphi+\cos^4\varphi)\sin\varphi+\cos^5\varphi)\,d\varphi=$$
$$=4\sqrt{2}a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.$$

319. Доказать формулу Пуассона

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du,$$

где S — поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

Доказательство. Запишем подынтегральную функцию в виде

$$f(ax+by+cz) = f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

и перейдем к новым переменным u, v, w, выбрав плоскость $ax+by+cz=0$ в качестве плоскости (u, v) и положив $w=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. При таком выборе новой прямоугольной системы координат единичная сфера S перейдет в единичную сферу S', причем площадь элемента поверхности dS будет равна площади элемента поверхности dS'. В связи с этим можем написать равенство

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS = \iint\limits_{S'} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)dS'.$$

Из уравнения $u^2+v^2+w^2=1$ находим $u^2+v^2=1-w^2$ и, полагая $\dfrac{u}{\sqrt{1-w^2}}=\cos\omega$, $\dfrac{v}{\sqrt{1-w^2}}=\sin\omega$, получаем параметрические уравнения сферы S' в виде $w=w$, $u=\sqrt{1-w^2}\cos\omega$, $v=\sqrt{1-w^2}\sin\omega$, $-1\leqslant w\leqslant 1$, $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$. Эти параметрические уравнения можно написать в векторной форме: $\boldsymbol{r}(w, \omega)=\{\sqrt{1-w^2}\cos\omega, \sqrt{1-w^2}\sin\omega, w\}$.

Вычислим коэффициенты Гаусса: $E=(\boldsymbol{r}_w, \boldsymbol{r}_w)=\dfrac{w^2}{1-w^2}+1=\dfrac{1}{1-w^2}$, $G=(\boldsymbol{r}_\omega, \boldsymbol{r}_\omega)=1-w^2$, $F=(\boldsymbol{r}_w, \boldsymbol{r}_\omega)=w\sin\omega\cos\omega-w\sin\omega\cos\omega=0$. Теперь найдем площадь элемента поверхности $dS'=\sqrt{EG-F^2}\,dw\,d\omega=dw\,d\omega$ и перейдем от поверхностного интеграла к двойному:

$$\iint\limits_{S'} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)dS' = \int\limits_{-1}^{1}dw\int\limits_{0}^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)d\omega =$$

$$= 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)dw,$$

что и требовалось доказать.

320. Найти массу параболической оболочки $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$, плотность которой меняется по закону $\mu=z$.

Решение. Применив формулу (6), получим: $M=\iint\limits_S z\,dS$. На поверхности S выполняется равенство $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, и множество точек поверхности, по которому производится интегрирование, проектируется на плоскость Oxy в круг радиуса $\sqrt{2}$. Принимая это во внимание, а также учитывая, что $dS = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$, заменим поверхностный интеграл соответствующим двойным и перейдем в последнем к полярным координатам. В результате найдем:

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho.$$

Произведя замену $1 + \rho^2 = t^2$, окончательно получим:

$$M = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^2 (t^2 - 1)\,dt = \pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\,(6\sqrt{3} + 1)}{15}.$$

321. Найти массу полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,(z \geqslant 0)$, плотность которой в каждой ее точке $M(x, y, z)$ равна $\frac{z}{a}$.

Решение. По формуле (6) имеем:

$$M = \frac{1}{a}\iint\limits_S z\,dS,$$

где S — заданная полусфера. На полусфере выполняются равенства $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $dS = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, и она проектируется на плоскость Oxy в круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. В связи с этим, приведя поверхностный интеграл к двойному, получим:

$$M = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} dx\,dy = \pi a^2.$$

322. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x + y + z = a\,(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ относительно координатных плоскостей.

Решение. Выделим элемент пластинки, площадь которого равна dS, и найдем приближенно статический момент этого элемента относительно плоскости Oxy. Расстояние элемента пластинки от этой плоскости приближенно равно $z = a - x - y$, поэтому можем написать приближенное равенство

$$dM_{Oxy} = z\,dS = (a - x - y)\,dS = (a - x - y)\sqrt{3}\,dx\,dy,$$

так как $dS = \sqrt{3}\,dx\,dy$. Суммируя по всем элементам пластинки, приходим к формуле

$$M_{Oxy} = \iint\limits_S (a - x - y)\,dS = \sqrt{3}\iint\limits_D (a - x - y)\,dx\,dy,$$

где $D = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ \ 0 \leqslant y \leqslant a - x\}$ — проекция пластинки на плоскость Oxy. Вычисляя двойной интеграл, находим:

$$M_{Oxy} = \sqrt{3}\int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y)\,dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^a (a - x)^2\,dx = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Из соображений симметрии заключаем, что справедливы равенства: $M_{Oyz} = M_{Oxz} = M_{Oxy} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

323. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,(z \geqslant 0)$ плотности μ_0.

Решение. По формуле (8) имеем: $I_z = \mu_0 \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dS$, где S — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,(z \geqslant 0)$.

В силу равенства $dS = \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, приводя поверхностный интеграл к двойному, получаем:

$$I_z = \mu_0 a \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$I_z = \mu_0 a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi\mu_0 a \left(\rho^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}\,\Big|_a^0 + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\,d\rho\right) = \frac{4}{3}\pi\mu_0 a\,(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\mu_0 a^4.$$

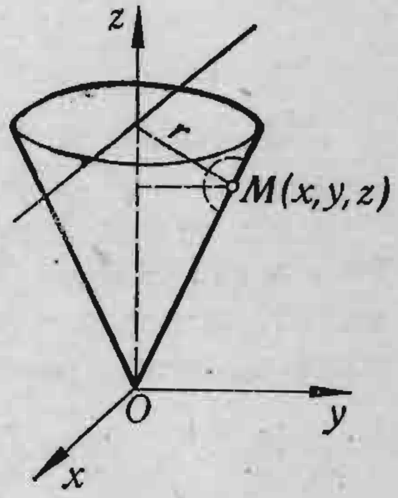

Рис. 26

324. Вычислить момент инерции однородной конической оболочки $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0\,(0 \leqslant z \leqslant b)$ плотности μ_0 относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$.

Решение. Заданная прямая параллельна оси Ox, лежит в плоскости Oxz и отсекает на оси Oz отрезок длины b. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит элементу поверхности конической оболочки, площадь которого dS (рис. 26). Тогда квадрат расстояния r^2 от точки M до заданной прямой определяется по формуле $r^2 = x^2 + y^2 + (b - z)^2$, а момент инерции выделенного элемента относительно этой прямой приближенно равен выражению $\mu_0 r^2 dS$. Суммируя по всем элементам и обозначая искомый момент инерции через I, приходим к формуле

$$I = \mu_0 \iint\limits_S (x^2 + y^2 + (b - z)^2)\,dS.$$

Принимая во внимание равенства

$$z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2},\quad dS = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\,dx\,dy,$$

которые выполняются на конической оболочке, и приводя поверхностный интеграл к соответствующему двойному интегралу, получаем:

$$I = \frac{\mu_0\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \left(x^2 + y^2 + b^2\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)^2\right) dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, окончательно находим:

$$I = \mu_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^2 + b^2\left(1-\frac{\rho}{a}\right)^2\right)\rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi\mu_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \int_0^a \left(\rho^3\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) + b^2\rho - \frac{2b^2\rho^2}{a}\right) d\rho =$$

$$= 2\pi\mu_0 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \left(\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{a^2b^2}{2} - \frac{2a^2b^2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi\mu_0}{6} a\sqrt{a^2+b^2}\,(3a^2+b^2).$$

325. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax$.

Решение. Для вычисления координат центра тяжести воспользуемся формулами (7), положив в них $\mu(x, y, z)=1$, так как поверхность однородна. Масса рассматриваемого куска конической поверхности численно равна его площади. Следовательно,

$$M = \iint_S dS = \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\, dx\, dy,$$

где $z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Подставляя эти значения в интеграл, получаем:

$$M = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} dx\, dy = \frac{\pi\sqrt{2}a^2}{4}.$$

Применяя формулы (7), находим:

$$x_c = \frac{1}{M}\iint_S x\, dS = \frac{4}{\pi a^2} \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} x\, dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{4a}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{8a}{3\pi}\cdot\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2},$$

$$y_c = \frac{1}{M}\iint_S y\, dS = \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4a}{3\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$z_c=\frac{1}{M}\iint\limits_S z\,dS=\frac{4}{\pi a^2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4a}{3\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{8a}{3\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{16a}{9\pi}.$$

326. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant a)$.

Решение. Рассматриваемый кусок однородной поверхности (сферы), координаты центра тяжести которого требуется найти, проектируется на плоскость Oxy в замкнутый треугольник $D=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant \leqslant a-x\}$; поэтому масса этого куска численно равна интегралу

$$M=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dx\,dy=a\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\int\limits_0^a\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=a-x}\right)dx=$$

$$=a\int\limits_0^a\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx.$$

Полагая в нем $\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=t$, получаем:

$$M=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\,\frac{2\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}\,dt=2a^2\left(\frac{t}{1+\sin^2 t}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}\right)=$$

$$=2a^2\left(-\frac{\pi}{4}+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d(\operatorname{ctg}t)}{2+\operatorname{ctg}^2 t}\right)=2a^2\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}t}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Теперь вычислим координаты центра тяжести x_c, y_c, z_c; имеем:

$$x_c=\frac{a}{M}\int\limits_0^a dy\int\limits_0^{a-y}\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{M}\left(\int\limits_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,dy-\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}\int\limits_0^a\sqrt{y}\sqrt{a-y}\,dy\right).$$

Полагая в первом интеграле $y = a\sin\varphi$, а во втором $y = a\sin^2\theta$, получаем:

$$x_c = \frac{a^3}{M}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta\right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}M}(\sqrt{2}-1) = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$y_c = \frac{a}{M}\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = x_c = \frac{a}{2\sqrt{2}},$$

$$z_c = \frac{a}{M}\iint\limits_D dx\,dy = \frac{a^3}{2M} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\pi}.$$

327. Найти полярные моменты инерции $I_0 = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$ следующих поверхностей S: а) поверхности куба $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$; б) полной поверхности цилиндра $x^2+y^2 \leqslant R^2$; $0 \leqslant z \leqslant H$.

Решение. а) I_0 можем представить в виде

$$I_0 = \sum_{i=1}^{6}\iint\limits_{S_i}(x^2+y^2+z^2)\,dS,$$

где S_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ — грани куба. Рассмотрим грань $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $z = a$. На этой грани $dS = dx\,dy$, в силу чего, обозначив ее через S_1, получим:

$$\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2+z^2)\,dS = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a}(x^2+y^2+a^2)\,dy =$$

$$= 4\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a (x^2+y^2+a^2)\,dy = 4\int\limits_0^a \left(ax^2+\frac{4}{3}a^3\right)dx = \frac{20a^4}{3}.$$

Интегралы, находящиеся под знаком суммы в формуле для I_0, равны между собой, поэтому окончательно находим: $I_0 = 6\cdot\frac{20}{3}a^4 = 40a^4$.

б) Представим I_0 в виде:

$$I_0 = \iint\limits_{S_н}(x^2+y^2+z^2)\,dS + \iint\limits_{S_в}(x^2+y^2+z^2)\,dS + \iint\limits_{S_б}(x^2+y^2+z^2)\,dS,$$

где $S_н$ — нижнее основание цилиндра, $S_в$ — верхнее основание, $S_б$ — боковая поверхность.

На нижнем и верхнем основаниях справедливо равенство $dS = dx\,dy$, в силу чего интегралы, взятые по этим основаниям, являются двойными интегралами. Они берутся по одной и той же области — замкнутому кругу $D = \{-R \leqslant x \leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}\}$.

На верхнем основании цилиндра выполняется равенство $z = H$, а на нижнем его основании $z = 0$. Таким образом, можем написать:

$$\iint\limits_{S_н} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS + \iint\limits_{S_в} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS = \iint\limits_{D} (2(x^2+y^2)+H^2)\, dx\, dy =$$

$$= \pi R^2 H^2 + 2 \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$2 \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho^3\, d\rho = \pi R^4.$$

На боковой поверхности цилиндра выполняются равенства $x^2 + y^2 = R^2$, $dS = \dfrac{R\, dx\, dz}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, причем точки боковой поверхности проектируются в прямоугольник $-R \leqslant x \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant H$, поэтому имеем:

$$\iint\limits_{S_б} (x^2 + y^2 + z^2)\, dS = 2R \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int\limits_0^{H} (R^2 + z^2)\, dz =$$

$$= 4RH\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right) \int\limits_0^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi RH\left(R^2 + \frac{H^2}{3}\right).$$

Складывая полученные равенства, находим: $I_0 = \pi R\left(R(R+H)^2 + \frac{2}{3}H^3\right)$.

328. Найти моменты инерции треугольной пластинки $x + y + z = 1$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) относительно координатных плоскостей.

Решение. Вычислим момент инерции пластинки I_{xy} относительно плоскости Oxy. Он равен по величине интегралу

$$I_{xy} = \iint\limits_{S} z^2 dS,$$

где S — поверхность пластинки. Принимая во внимание равенства $z = 1 - x - y$, $dS = \sqrt{3}\, dx\, dy$, получаем:

$$I_{xy} = \sqrt{3} \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x}} (1 - x - y)^2\, dx\, dy = \sqrt{3} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy =$$

$$= \sqrt{3} \int\limits_0^1 \frac{(1 - x - y)^3}{3}\Bigg|_{y=1-x}^{y=0} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_0^1 (1 - x)^3\, dx = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Очевидно, что $I_{zx} = I_{yz} = I_{xy} = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$.

329. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = \rho$ ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant b \leqslant \rho \leqslant a$) плотности μ_0 материальную точку массы m, помещенную в вершине этой поверхности?

Решение. Материальная точка массы m находится в начале координат системы $Oxyz$. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит элементу поверхности $d\sigma$, площадь которого dS. Тогда можем написать равенство (приближенное) для силы, с которой этот элемент действует на материальную точку:

$$dF(M) = \frac{\gamma\mu_0 m\,dS}{r^2(O,M)}\,e(O, M),$$

где $r(O, M)$ — расстояние от начала координат до точки M, $e(O, M)$ — единичный вектор, направленный из точки O в точку M, γ — гравитационная постоянная. Поскольку $e(O, M) = \frac{r(O, M)}{r} = \left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\}$, то можно написать равенство

$$dF(M) = \frac{\gamma\mu_0 m\,dS}{r^3(O, M)}\{x, y, z\}.$$

Суммируя по всем элементам $d\sigma$, приходим к формулам:

$$F_x = \gamma\mu_0 m \iint\limits_S \frac{x\,dS}{r^3(O, M)}, \quad F_y = \gamma\mu_0 m \iint\limits_S \frac{y\,dS}{r^3(O, M)},$$

$$F_z = \gamma\mu_0 m \iint\limits_S \frac{z\,dS}{r^3(O, M)},$$

где F_x, F_y, F_z — координаты искомой силы F.

Запишем уравнение поверхности в виде $r(r, \varphi) = \left\{\frac{r}{\sqrt{2}}\cos\varphi, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \frac{r}{\sqrt{2}}\right\}$, $b\sqrt{2} \leqslant r \leqslant a\sqrt{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и вычислим коэффициенты Гаусса: $E = 1$, $G = \frac{r^2}{2}$, $F = 0$. Отсюда находим: $dS = \frac{r}{\sqrt{2}}\,dr\,d\varphi$.

Заменяя поверхностные интегралы соответствующими двойными, получаем:

$$F_x = \frac{1}{2}\gamma\mu_0 m \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2}\gamma\mu_0 m \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_z = \frac{1}{2}\gamma\mu_0 m \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \pi\mu_0 m\gamma \ln\frac{a}{b}.$$

Заметим, что из физических соображений можно было сразу сделать вывод о том, что $F_x = 0$, $F_y = 0$, так как однородная поверхность имеет ось симметрии (ось Oz), на которой находится ее центр тяжести, в силу чего вектор F направлен вдоль оси Oz (в положительном направлении).

330. Найти потенциал однородной сферической поверхности S $x^2+y^2+z^2=a^2$ плотности μ_0 в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е. вычислить интеграл $u=\iint\limits_S \frac{\mu_0\,dS}{r}$, где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Решение. Как и в примере 210, перейдем от системы координат $Oxyz$ к системе $O\xi\eta\zeta$, совершив поворот осей так, чтобы точка M находилась на положительной полуоси $O\zeta$. В системе $O\xi\eta\zeta$ точка M_0 имеет координаты $\xi_0=0$, $\eta_0=0$, $\zeta_0=r_0$, где $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. При указанном переходе к новой системе координат сфера S перейдет в сферу S', уравнение которой $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$.

Таким образом, требуется вычислить интеграл

$$u=\mu_0\iint\limits_{S'}\frac{dS'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r_0)^2}}.$$

Записав уравнение сферы S' в виде $\boldsymbol{r}(\varphi, \theta)=\{a\sin\varphi\cos\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, легко найдем коэффициенты Гаусса $E=a^2$, $G=a^2\sin^2\varphi$, $F=0$ и значение $dS'=a^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$. Принимая во внимание равенство $\xi^2+\eta^2+(\zeta-r_0)^2=a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2$, получаем:

$$u=a^2\mu_0\iint\limits_{D'}\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}=a^2\mu_0\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}=$$

$$=2\pi a^2\mu_0\left.\frac{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}{ar_0}\right|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}=\frac{2\pi a\mu_0}{r_0}(a+r_0-|a-r_0|).$$

Если $a<r_0$, то $u=\frac{4\pi a^2\mu_0}{r_0}$; если $a>r_0$, то $u=4\pi a\mu_0$. Оба случая легко объединить одной формулой. Действительно, неравенство $a<r_0$ эквивалентно неравенству $\frac{a^2}{r_0}<a$, а неравенство $a>r_0$ — неравенству $\frac{a^2}{r_0}>a$. Следовательно, $u=4\pi\mu_0\min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$.

331. Вычислить $F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x, y, z)\,dS$, где

$$f(x, y, z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & \text{если } x^2+y^2+z^2\leqslant 1;\\ 0, & \text{если } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

Построить график функции $u=F(t)$.

Решение. Перейдем к новой системе координат $Ox_1y_1z_1$, повернув систему $Oxyz$ так, чтобы направление оси Oz_1 совпало с направлением нормали к плоскости $x+y+z=t$. В новой системе координат уравнение этой плоскости примет вид $z_1=T=\frac{t}{\sqrt{3}}$, поскольку ее расстояние $r(t)$ от начала координат равно $r(t)=|T|=\frac{|t|}{\sqrt{3}}$. Если $r(t)>1$, т. е. $|t|>\sqrt{3}$, то единичный замкнутый шар $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant 1$

и плоскость $z_1 = T$ не имеют общих точек, в силу чего $F(t) = 0$ (это следует из условия задачи).

Осталось вычислить $F(t)$ при $|t| \leqslant \sqrt{3}$. Задача свелась к вычислению интеграла

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant 1 \\ z_1 = T}} f(x_1, y_1, z_1)\, dS_1 = \iint\limits_{x_1^2+y_1^2 \leqslant 1-T^2} (1 - x_1^2 - y_1^2 - T^2)\, dx_1 dy_1.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-T^2}} \rho(1 - \rho^2 - T^2)\, d\rho =$$

$$= 2\pi \left((1 - T^2)\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-T^2}} = \frac{\pi}{2}(1 - T^2)^2 = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

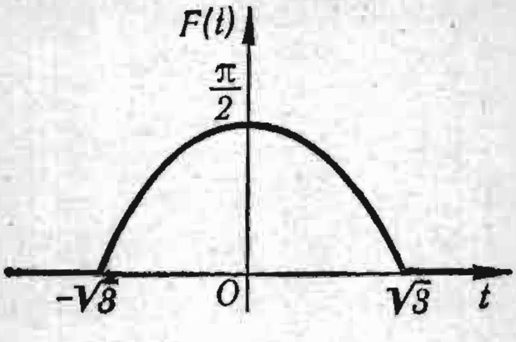

Рис. 27

Окончательно имеем:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2, & \text{если } |t| \leqslant \sqrt{3}; \\ 0, & \text{если } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 27.

332. Вычислить интеграл $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\, dS$, где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Решение. Из условия примера следует, что функция $f(x, y, z)$ отлична от нуля на той части поверхности (сферы радиуса $|t|$), которая находится внутри области, ограниченной конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому имеем:

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=t^2 \\ z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}}} (x^2 + y^2)\, dS = |t| \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{t^2}{2}} \frac{(x^2 + y^2)\, dx\, dy}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдя в двойном интеграле к полярным координатам, получим:

$$F(t) = 4|t| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^3\, d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \pi|t| \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^2\, d(\rho^2)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}|t| \left(\sqrt{t^2 - \rho^2}(\rho^2 + 2t^2)\right)\Bigg|_{\rho=\frac{|t|}{\sqrt{2}}}^{\rho=0} = \frac{\pi}{6} t^4 (8 - 5\sqrt{2}).$$

333. Вычислить интеграл $F(x, y, z, t)=\iint\limits_S f(\xi, \eta, \zeta)\,dS$, где S — переменная сфера $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ и

$$f(\xi, \eta, \zeta)=\begin{cases} 1, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2; \\ 0, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

считая, что $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$.

Решение. Перейдем к новой системе координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, совершив поворот осей системы $O\xi\eta\zeta$ так, чтобы точка $M(x, y, z)$ находилась на оси $O\zeta_1$. В новой системе точка $M(x, y, z)$ имеет координаты $\xi_1=0$, $\eta_1=0$, $\zeta_1=r$ и переменная сфера S переходит в переменную сферу S', уравнение которой $\xi_1^2+\eta_1^2+(\zeta_1-r)^2=t^2$.

Поставленную задачу теперь можно сформулировать следующим образом: вычислить интеграл $F(x, y, z, t)=\iint\limits_{S'} f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,dS'$, где

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)=\begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2<a^2; \\ 0, & \text{если } \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2 \geqslant a^2, \end{cases}$$

считая, что $r>a>0$.

Ясно, что при условии $|r-|t|| \geqslant a$ имеем $f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)=0$ и $F(x, y, z, t)=0$. Если же $|r-|t||<a$, то $f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)=1$.

Пусть выполняется неравенство $|r-|t||<a$. Требуется вычислить поверхностный интеграл $F(x, y, z, t)=\iint\limits_{S'} dS'$. Исключая ζ_1 из уравнений $\xi_1^2+\eta_1^2+(\zeta_1-r)^2=t^2$, $\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=a^2$, приходим к выводу, что обе сферы пересекаются по кривой, проекцией которой на плоскость $O\xi_1\eta_1$ является окружность $\xi_1^2+\eta_1^2=t^2-\left(\frac{a^2-t^2}{2r}-\frac{r}{2}\right)^2$.

Принимая во внимание равенство $dS'=\frac{|t|\,d\xi_1\,d\eta_1}{\sqrt{t^2-\xi_1^2-\eta_1^2}}$, заменяем поверхностный интеграл двойным:

$$F(x, y, z, t)=|t| \iint\limits_{\xi_1^2+\eta_1^2<t^2-\left(\frac{a^2-t^2}{2r}-\frac{r}{2}\right)^2} \frac{d\xi_1\,d\eta_1}{\sqrt{t^2-\xi_1^2-\eta_1^2}}.$$

Переходя в этом интеграле к полярным координатам, получаем:

$$F(x, y, z, t)=|t|\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{t^2-\left(\frac{a^2-t^2}{2r}-\frac{r}{2}\right)^2}} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}=$$

$$=2\pi|t|\sqrt{t^2-\rho^2}\,\Bigg|_{\rho=\sqrt{t^2-\left(\frac{a^2-t^2}{2r}-\frac{r}{2}\right)^2}}^{\rho=0}=2\pi|t|\left(|t|-\left|\frac{a^2-r^2-t^2}{2r}\right|\right)=$$

$$=2\pi|t|\left(\frac{2r|t|-|a^2-r^2-t^2|}{2r}\right).$$

В силу условия $a^2-r^2<0$, имеем: $|a^2-r^2-t^2|=r^2+t^2-a^2$,

$$F(x, y, z, t)=\frac{\pi}{r}|t|(a^2-r^2-t^2+2r|t|)=\frac{\pi}{r}|t|(a^2-(r-|t|)^2).$$

Окончательно находим:

$$F(x, y, z, t)=\begin{cases}\frac{\pi}{r}|t|(a^2-(r-|t|)^2), & \text{если } ||t|-r|<a;\\ 0, & \text{если } ||t|-r|\geqslant a.\end{cases}$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 2-го рода:

334. $I=\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. Рассмотрим интеграл $I_1=\iint\limits_S z\,dx\,dy$; его можно представить в виде суммы интегралов по верхней и нижней внешним сторонам сферы, которые обозначим соответственно S_+ и S_-: $I_1=\iint\limits_{S_+} z\,dx\,dy+\iint\limits_{S_-} z\,dx\,dy$.

На поверхности S_+ выполняется равенство $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, а на поверхности S_- — равенство $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Пусть D — проекция поверхности S_+ на плоскость Oxy. Поверхность S_- проектируется на D со стороны внешней нормали, образовывающей с положительным направлением оси Oz тупой угол, поэтому при замене интеграла по этой поверхности двойным по области D следует перед последним взять знак «—». В итоге получаем:

$$I_1=2\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}\pi(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

Из очевидных равенств $\iint\limits_S x\,dy\,dz=\iint\limits_S y\,dz\,dx=I_1$ окончательно находим: $I=4\pi a^3$.

335. $I=\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$.

Решение. По формуле (10) имеем:

$$I=\iint\limits_S((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma)\,dS. \qquad \text{(A)}$$

Внешняя единичная нормаль к выбранной стороне конической поверхности образует с осью Oz тупой угол, поэтому в каждой из формул

$$\cos\alpha=\frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},\quad \cos\beta=\frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

перед радикалом возьмем знак «—». Принимая во внимание, что $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z'_x=\frac{x}{z}$, $z'_y=\frac{y}{z}$ $(z\neq 0)$, $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{2}$, находим: $\cos\alpha=\frac{x}{z\sqrt{2}}$, $\cos\beta=\frac{y}{z\sqrt{2}}$ $(z\neq 0)$, $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Подставим полученные значения косинусов в (А) и, использовав равенство $dS=\sqrt{2}\,dx\,dy$, перейдем от поверхностного интеграла к двойному. В результате получим:

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}\frac{(y-z)x+(z-x)y+(y-x)z}{z}\,dx\,dy=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}(y-x)\,dx\,dy=$$
$$=2\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi\int\limits_0^h\rho^2\,d\rho=\frac{2}{3}h^3\int\limits_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\,d\varphi=0$$

(все точки рассматриваемой поверхности проектируются в замкнутый круг $x^2+y^2\leqslant h^2$).

336. $I=\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Решение. Рассмотрим интеграл $I_1=\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$. Его можно представить в виде суммы двух интегралов: $I_1=\iint\limits_{S_+}z_{\text{в}}^2\,dx\,dy+\iint\limits_{S_-}z_{\text{н}}^2\,dx\,dy$, где S_+ и S_- — соответственно верхняя и нижняя (относительно плоскости $z=c$) стороны поверхности S,

$$z_{\text{в}}=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2},\quad z_{\text{н}}=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

Поверхности S_+ и S_- проектируются на плоскость Oxy в замкнутую область D — круг $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$, причем в точках (x, y, z), лежащих на S_-, внешняя нормаль $\boldsymbol{n}$ образует с положительным направлением оси Oz тупой угол. Поэтому при переходе от интеграла по поверхности S_- к двойному интегралу по области D перед ним следует взять знак минус. Таким образом, справедливо равенство

$$I_1=\iint\limits_D z_{\text{в}}^2\,dx\,dy-\iint\limits_D z_{\text{н}}^2\,dx\,dy=\iint\limits_D(z_{\text{в}}^2-z_{\text{н}}^2)\,dx\,dy=$$
$$=4c\iint\limits_D\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dx\,dy.$$

В полученном интеграле перейдем к полярным координатам по формулам $x-a=\rho\cos\varphi$, $y-b=\rho\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. После замены найдем:

$$I_1=4c\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=\frac{8}{3}\pi c\,(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_R^0=\frac{8}{3}\pi c R^3.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$I_2 = \iint\limits_S y^2\,dz\,dx = \frac{8}{3}\pi b R^3,\quad I_3 = \iint\limits_S x^2\,dy\,dz = \frac{8}{3}\pi a R^3.$$

Окончательно имеем: $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{3}\pi R^3 (a + b + c)$.

§ 13. Формула Стокса

Пусть S — ограниченная кусочно-гладкая двухсторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей Γ и пусть в некоторой окрестности[1] поверхности S функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива *формула Стокса*

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \oint\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

При этом стоящий в правой части интеграл представляет собой сумму интегралов по связным компонентам границы Γ, на которых указано такое направление обхода, при котором, с учетом выбора стороны поверхности, поверхность S остается слева.

337. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к плоскости) и ограничивающий площадку S. Найти

$$I = \oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

Р е ш е н и е. В обозначениях формулы Стокса имеем: $P = z\cos\beta - y\cos\gamma$, $Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha$, $R = y\cos\alpha - x\cos\beta$. Применив формулу Стокса, получим:

$$I = 2\iint\limits_S \cos\alpha\,dy\,dz + \cos\beta\,dz\,dx + \cos\gamma\,dx\,dy.$$

Принимая во внимание равенства $dy\,dz = dS\cos\alpha$, $dz\,dx = dS\cos\beta$, $dx\,dy = dS\cos\gamma$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, находим: $I = 2\iint\limits_S dS = 2B$, где B — численное значение площади поверхности S.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

338. $I = \oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

---

[1] Окрестностью поверхности S называют любое открытое множество S', содержащее S.

Решение. Применив формулу Стокса и взяв в ней в качестве поверхности S круг радиуса a, лежащий в плоскости $x+y+z=0$, получим:

$$I = -\iint_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S — плоскости $x+y+z=0$. Так как нормаль к этой плоскости образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ (см. пример 335) перед радикалом возьмем знак «+».

Очевидно, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, в силу чего имеем:

$$I = -\sqrt{3}\iint_S dS = -\sqrt{3}\,\pi a^2.$$

339. $I = \oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C — кривая $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение. По формуле Стокса имеем:

$$I = -2\iint_S dy\,dz + dz\,dx + dx\,dy = -2\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,dS,$$

где S — множество всех точек эллипса $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к плоскости $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$. Множество точек S проектируется на плоскость Oxy в замкнутый круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$. Поскольку нормаль к плоскости $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ образует острый угол с положительным направлением оси Oz, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед радикалом следует взять знак «+». Переходя от поверхностного интеграла к двойному и принимая во внимание равенства $dS\cos\alpha = -z'_x\,dx\,dy = \frac{h}{a}\,dx\,dy$, $dS\cos\beta = -z'_y\,dx\,dy = 0$, $dS\cos\gamma = dx\,dy$, получаем: $I = -2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\left(1+\frac{h}{a}\right)dx\,dy = -2\left(1+\frac{h}{a}\right)\pi a^2 = -2\pi a(a+h)$.

340. $I = \oint\limits_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, где C — кривая $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,\ z>0)$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$ наименьшая область остается слева.

Решение. Применив формулу Стокса, получим поверхностный интеграл

$$I=2\iint_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy=$$

$$=2\iint_S ((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma)\,dS,$$

где S — кусок сферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$, вырезанный из нее цилиндром $x^2+y^2=2rx$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S. Вычислим направляющие косинусы, принимая во внимание, что нормаль образует с положительным направлением оси Oz острый угол и что $z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$. Имеем: $\cos\alpha=$ $=\dfrac{x-R}{z\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{z\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$. Так как поверхность S проектируется на плоскость Oxy в замкнутый круг $x^2+y^2\leqslant 2rx$, то поверхностный интеграл приводится к двойному интегралу, взятому по этому кругу:

$$I=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\left(\frac{(y-z)(x-R)+(z-x)y}{z}+x-y\right)dx\,dy=2R\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{y}{z}\right)dx\,dy=2\pi Rr^2,\text{ так как }\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\frac{y}{z}\,dx\,dy=0.$$

341. $I=\oint_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, где C — сечение поверхности куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ плоскостью $x+y+z=\frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение. С помощью формулы Стокса получаем поверхностный интеграл

$$I=-2\iint_S (y+z)\,dy\,dz+(z+x)\,dz\,dx+(x+y)\,dx\,dy=$$

$$=-2\iint_S ((y+z)\cos\alpha+(z+x)\cos\beta+(x+y)\cos\gamma)\,dS,$$

где S — множество точек плоскости $x+y+z=\frac{3}{2}a$, ограниченное замкнутой кривой C, причем $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Нам остается лишь привести поверхностный интеграл к двойному. Проекция D поверхности S на плоскость Oxy является объединением множеств $D_1=$ $=\left\{0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}-x\leqslant y\leqslant a\right\}$ и $D_2=\left\{\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}a-x\right\}$. Таким образом, принимая во внимание равенство $z=\frac{3}{2}a-x-y$, выполняющееся на поверхности S, и равенство $dS=\sqrt{3}\,dx\,dy$, получаем: $I=-6a\iint_D dx\,dy=-6aB$, где B — значение площади замкнутой области D.

Окончательно имеем:

$$B=\iint\limits_{D_1} dx\,dy+\iint\limits_{D_2} dx\,dy=\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dx\int\limits_{\frac{a}{2}-x}^{a} dy+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx\int\limits_0^{\frac{3}{2}a-x} dy=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{a}{2}}\left(x+\frac{a}{2}\right)dx+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a}\left(\frac{3}{2}a-x\right)dx=\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2}-x\right)^2\Bigg|_a^{\frac{a}{2}}=$$

$$=\frac{3}{4}a^2,\quad I=-\frac{9}{2}a^3.$$

342. $I=\oint\limits_C y^2z^2\,dx+x^2z^2\,dy+x^2y^2\,dz$, где C — замкнутая кривая $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

Решение. При изменении t от 0 до π подвижная точка $M(x, y, z)$ пробегает кривую C от точки $M_0(a, a, a)$ до точки $M_1(-a, a, -a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой C в противоположном направлении — от точки M_1 до точки M_0. Таким образом, точки замкнутой кривой C взаимно накладываются и кривая C не ограничивает никакой поверхности, вследствие чего $I=0$.

343. Доказать, что функция $w(x, y, z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r^2}dS$ ($k=$ $=\text{const}$), где S — кусок поверхности, ограниченный контуром C, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к S и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку пространства $M(x, y, z)$ с текущей точкой $A(\xi, \eta, \zeta)$ контура C, является потенциалом магнитного поля $\boldsymbol{H}$, созданного током i, протекающим по контуру C (см. пример 311).

Доказательство. Применяя формулу Стокса к функции

$$H_\xi=ki\oint\limits_C\frac{(y-\eta)\,d\zeta-(z-\zeta)\,d\eta}{r^3},$$

полученной при решении примера 311, находим:

$$H_\xi=ki\iint\limits_S\left(\frac{\cos\alpha}{r^3}-\frac{3(x-\xi)}{r^5}((x-\xi)\cos\alpha+(y-\eta)\cos\beta+\right.$$

$$\left.+(z-\zeta)\cos\gamma)\right)dS,$$

где S — поверхность, ограниченная контуром C.

Записав $w(x, y, z)$ в виде

$$w(x, y, z)=ki\iint\limits_S\frac{(\xi-x)\cos\alpha+(\eta-y)\cos\beta+(\zeta-z)\cos\gamma}{r^3}dS$$

и продифференцировав по переменной x, получим:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = ki \iint_S \left(-\frac{\cos\alpha}{r^3} + \frac{3(x-\xi)}{r^5} ((x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + (z-\zeta)\cos\gamma) \right) dS,$$

откуда вытекает равенство $H_\xi = -\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x}$. Аналогично $H_\eta = -\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y}$, $H_\zeta = -\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z}$. Вектор $\boldsymbol{H}(x, y, z)$ из примера 311 можно представить в виде

$$\boldsymbol{H}(x, y, z) = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} \right).$$

В этом случае функцию $w(x, y, z)$ называют потенциалом поля $\boldsymbol{H}$.

Так как точка $M(x, y, z)$ лежит вне контура C, то операция дифференцирования по параметрам x, y, z была законной.

§ 14. Формула Остроградского

1°. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область V', и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в $V' + S$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в V'. Если существуют тройные интегралы (быть может, как несобственные) по области $V' + S$ от каждой из частных производных функций P, Q и R, то справедлива *формула Остроградского*

$$\iiint_{V'+S} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

2°. Положив в формуле Остроградского $P = x$, $Q = y$, $R = z$, получим формулу для вычисления объема V области $V' + S$:

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS. \tag{1}$$

344. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и $\boldsymbol{e}$ — любое постоянное направление, то $\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}})\,dS = 0$, где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0\}$ — единичный фиксированный вектор. Тогда можно написать равенство $\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}) = \cos\alpha\cos\alpha_0 + \cos\beta\cos\beta_0 + \cos\gamma\cos\gamma_0$. Применив формулу Остроградского, получим:

$$\iint_S \cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}})\,dS = \iiint_{V'+S} \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0 + \frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma_0 \right) dx\,dy\,dz = 0.$$

345. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен $V = \frac{SH}{3}$, где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, H — его высота.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что вершина конуса находится в начале координат, а плоскость, в которой лежит основание конуса, пересекает положительную полуось Oz (этого всегда можно добиться путем линейного преобразования координат). Воспользуемся для вычисления объема конуса формулой (1), записав ее в виде

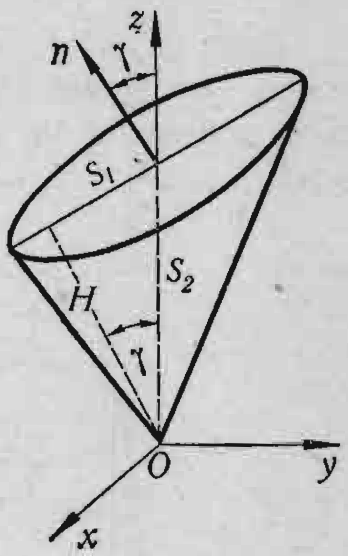

Рис. 28

$$V = \frac{1}{3}\iint_{S_1} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS + \frac{1}{3}\iint_{S_2} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS,$$

где S_1 — основание конуса, S_2 — его боковая поверхность, $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ на поверхности конуса, $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке $M(x, y, z)$. Поскольку на боковой поверхности конуса в каждой ее точке векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$ ортогональны, то $(\boldsymbol{r}(M), \boldsymbol{n}(M)) = 0$, вследствие чего получаем равенство $\iint_{S_2} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS = 0$.

Таким образом, имеем формулу $V = \frac{1}{3}\iint_{S_1} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS$. На поверхности S_1 выполняется равенство $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$, поэтому получаем:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$V = -\frac{D}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\iint_{S_1} dS = -\frac{DS}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где S — площадь основания конуса. Как видно из рисунка 28, справедливо равенство $H = -\frac{D}{C}\cos\gamma = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где H — высота конуса. Таким образом, окончательно получаем: $V = \frac{SH}{3}$, что и требовалось доказать.

346. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \pm c$, $x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v$, $y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v$, $z = c\sin u$.

Решение. Прежде всего найдем все те значения параметров u и v, принимая которые, подвижная точка $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ описывает всю боковую поверхность тела. Рассмотрим сначала случай, когда $c > 0$. В сечении тела плоскостью $z = 0$ получаем круг $x^2 + y^2 \leqslant$

$\leqslant a^2$ (при этом $u=0$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$). Если $z = \pm c$, то $u = \pm \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 \leqslant b^2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, т. е. верхним и нижним основаниями тела являются круги радиуса b. Обозначив через D искомое множество значений параметров u и v, будем иметь: $D = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \right\}$.

Если $a^2 > b^2$, то при $z > 0$ единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$ в каждой точке соответствующей части (верхней половины) боковой поверхности тела образует с положительным направлением оси Oz острый угол; если же $a^2 < b^2$, — то тупой угол (рис. 29, 30).

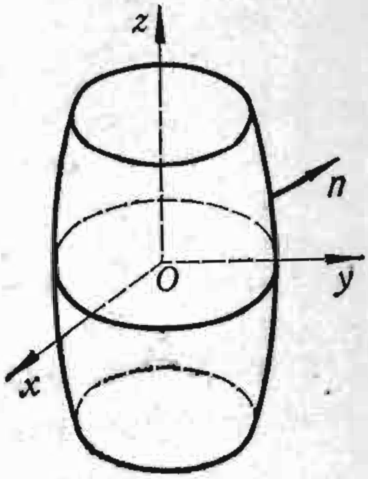

Рис. 29

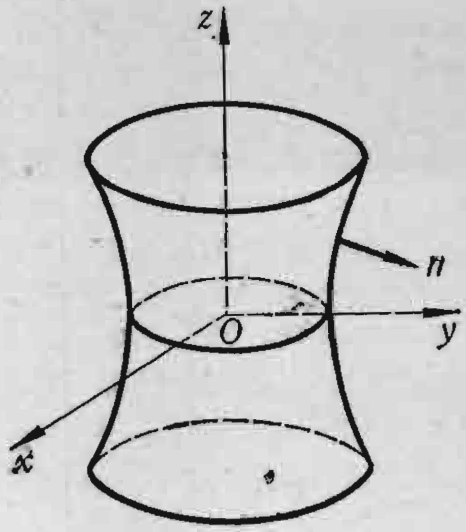

Рис. 30

Для вычисления значения объема воспользуемся формулой (1), записав ее в виде (см. пример 345) $V = \frac{1}{3} \oiint\limits_S (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS$, где символом $\oiint\limits_S$ обозначено интегрирование по всей поверхности тела. Интеграл по замкнутой поверхности S представим в виде суммы интегралов по верхнему основанию тела S_1, нижнему его основанию S_2 и его боковой поверхности S_3:

$$V = \frac{1}{3}\left(\iint\limits_{S_1} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS + \iint\limits_{S_2} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS + \iint\limits_{S_3} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS \right).$$

На поверхности S_1 выполняются равенства $\boldsymbol{n} = \{0, 0, 1\}$, $\boldsymbol{r} = \{x, y, c\}$, в силу чего $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = c$, а на поверхности S_2 имеем $\boldsymbol{n} = \{0, 0, -1\}$, $\boldsymbol{r} = \{x, y, -c\}$, поэтому $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = c$. Учитывая, кроме того, что в каждой из плоскостей $z = \pm c$ справедливо равенство $dS = dx\, dy$, получаем:

$$\iint\limits_{S_1} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS = \iint\limits_{S_2} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\, dS = c \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant b^2} dx\, dy = \pi b^2 c.$$

Для вычисления значений $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ на боковой поверхности тела рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin u\cos v + b\cos u\sin v & -a\cos u\sin v + b\sin u\cos v \\ -a\sin u\sin v - b\cos u\cos v & a\cos u\cos v + b\sin u\sin v \\ c\cos u & 0 \end{pmatrix}$$

и ее миноры $A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = -c\,x(u, v)\cos u$, $B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = -c\,y(u, v)\cos u$, $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = (b^2 - a^2)\sin u\cos u$. Исходя из формулы $\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (см. п. 8°) и принимая во внимание замечание о направлении вектора единичной нормали в каждой точке боковой поверхности тела при $z > 0$, а также неравенства $C < 0$ при $a^2 > b^2$, $C > 0$ при $a^2 < b^2$, приходим к выводу, что в обоих случаях перед радикалом $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ следует взять знак «—». Интеграл по поверхности S_3 заменим соответствующим двойным, приняв во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$. При этом получим:

$$\iint\limits_{S_3} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,dS = -\iint\limits_{D} (Ax(u, v) + By(u, v) + Cz(u, v))\,du\,dv =$$

$$= -\iint\limits_{D} (-c(x^2(u, v) + y^2(u, v))\cos u + (b^2 - a^2)z(u, v)\sin u\cos u)\,du\,dv =$$

$$= a^2c\iint\limits_{D} \cos u\,du\,dv = a^2c\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du\int\limits_{0}^{2\pi} dv = 4\pi a^2 c.$$

Складывая найденные значения, при $c > 0$ имеем:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c + \frac{2}{3}\pi b^2 c = \frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Если $c < 0$, то, как легко убедиться, получим равенство

$$V = -\frac{4}{3}\pi c\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Объединяя оба случая, можем написать окончательный результат:

$$V = \frac{4}{3}\pi|c|\left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

С помощью формулы Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы:

347. $I = \iint\limits_{S} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона границы куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

Решение. Применяя формулу Остроградского, получаем:

$$I=2\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant a\\0\leqslant z\leqslant a}}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a(x+y+z)\,dz=$$

$$=2\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a\left(a(x+y)+\frac{a^2}{2}\right)dy=2\int\limits_0^a(a^2x+a^3)\,dx=3a^4.$$

348. $I=\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. Используя формулу Остроградского, находим:

$$I=3\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где V — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$. Перейдя к сферическим координатам, получим:

$$I=3\int\limits_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^a\rho^4\,d\rho=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

349. $I=\iint\limits_S(x-y+z)\,dy\,dz+(y-z+x)\,dz\,dx+(z-x+y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

Решение. Обозначим через V' тело, ограниченное поверхностью S. Применив формулу Остроградского, получим:

$$I=\iiint\limits_{V'}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y+z)+\frac{\partial}{\partial y}(y-z+x)+\frac{\partial}{\partial z}(z-x+y)\right)dx\,dy\,dz=$$

$$=3\iiint\limits_{V'}dx\,dy\,dz.$$

Произведем в интеграле замену переменных, положив $u=x-y+z$, $v=y-z+x$, $w=z-x+y$. Учитывая, что

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{4},$$

находим:

$$I=\frac{3}{4}\iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}du\,dv\,dw=6\iiint\limits_{\substack{u+v+w\leqslant 1\\u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ w\geqslant 0}}du\,dv\,dw=6\int\limits_0^1 du\int\limits_0^{1-u}dv\int\limits_0^{1-u-v}dw=$$

$$=6\int\limits_0^1 du\int\limits_0^{1-u}(1-u-v)\,dv=6\int\limits_0^1\frac{(1-u)^2}{2}\,du=(1-u)^3\Big|_1^0=1.$$

350. $I=\iint\limits_S (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Решение. Мы не можем воспользоваться формулой Остроградского, поскольку поверхность незамкнута. Рассмотрим замкнутую поверхность S_1, которую получим, присоединив ко всем точкам поверхности S множество точек S_2 круга $x^2+y^2\leqslant h^2$, лежащего в плоскости $z=h$. Тогда можем написать равенство

$$I=\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS-\iint\limits_{S_2}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,dS.$$

К интегралу, взятому по поверхности S_1, можем применить формулу Остроградского, а на поверхности S_2 имеем: $\cos\alpha=\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, $z^2=h^2$, $dS=dx\,dy$, поэтому получаем:

$$I=2\iiint\limits_{V_1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz-h^2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant h^2}dx\,dy=$$
$$=2\iiint\limits_{V_1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz-\pi h^4,$$

где V_1 — множество точек $\{x^2+y^2\leqslant h^2,\ \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant h\}$.

В тройном интеграле переходим к цилиндрическим координатам. Находим:

$$\iiint\limits_{V_1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h\rho\,d\rho\int\limits_\rho^h(\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)+z)\,dz=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h\left(\rho(h-\rho)(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho\,d\rho=\frac{\pi}{4}h^4.$$

Окончательно имеем: $I=\frac{\pi}{2}h^4-\pi h^4=-\frac{\pi}{2}h^4$.

351. Доказать формулу

$$\iiint\limits_V\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\frac{1}{2}\iint\limits_S\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в текущей ее точке (ξ,η,ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, идущий от точки (x,y,z) к точке (ξ,η,ζ).

Доказательство. Пользуясь равенством $\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})=\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}$ и применяя к поверхностному интегралу формулу Остроградского, получаем:

$$\frac{1}{2}\iint\limits_S\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}})\,dS=\frac{1}{2}\iint\limits_S\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,dS=$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)dS=$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V \left(\frac{3}{r}-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{r^3}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_V \frac{2}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \iiint\limits_V \frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

что и требовалось доказать.

352. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{r^2}\,dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке (ξ, η, ζ), $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ), и $r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Решение. Рассмотрим два случая: а) поверхность S не окружает точку (x, y, z); б) поверхность S окружает точку (x, y, z).

В случае а) можем применить к поверхностному интегралу формулу Остроградского. Используя равенство $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}}) = \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}$, получаем:

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \left(\frac{\xi-x}{r^3}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r^3}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r^3}\cos\gamma\right)dS =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r^3}\right)\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{3}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2+3(\eta-y)^2+3(\zeta-z)^2}{r^5}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0.$$

В случае б) рассмотрим произвольный объем $V_1 \subset V$, ограниченный простой замкнутой поверхностью S_1 такой, чтобы эта поверхность окружала точку (x, y, z) и чтобы каждая точка этой поверхности была внутренней точкой объема V. Обозначим через V_2 множество точек $V - V_1$, а границу этого множества — через S_2. Множеству S_2 принадлежат все точки поверхностей S и S_1. Рассмотрим интеграл

$$I_1(x, y, z) = \iint\limits_{S_2} \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3}\,dS = \iint\limits_S \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3}\,dS + \iint\limits_{S_1} \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3}\,dS.$$

Здесь при обходе поверхности S_1 вектор единичной нормали $\boldsymbol{n}$ направлен во внешнюю по отношению к V_2 часть пространства.

Рассмотрим также интеграл по поверхности S_1, ограничивающей объем V_1: $I_2(x, y, z) = \iint\limits_{S_1} \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3}\,dS$. Здесь вектор единичной нормали направлен внутрь объема V_2. Если рассмотреть сумму интегралов I_1 и I_2, то в правой ее части интегралы по поверхности S_1 взаимно уничтожаются (вследствие противоположного направления единичных векторов нормалей в каждой точке), и мы получаем равенство $I = I_1 + I_2$.

Поверхность S_2 не окружает точку (x, y, z), поэтому к интегралу I_1 применима формула Остроградского, а на основании результата, полученного в случае а), можно написать равенство $I_1 = 0$. Таким образом, имеем равенство $I = I_2$, причем интеграл I_2 можно взять по любой простой замкнутой поверхности S_1, окружающей точку (x, y, z). В качестве поверхности S_1 возьмем сферу достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. При этом получим:

$$I(x, y, z) = \iint\limits_{S_1} \frac{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3}\, dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint\limits_{S_1} dS = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 4\pi,$$

так как на поверхности S_1 векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$ коллинеарны и выполняется равенство $r = \varepsilon$.

353. Тело V' целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

Доказательство. Согласно закону Паскаля, погруженная в жидкость площадка испытывает давление, направленное по нормали к ней и равное весу столбика жидкости, основанием которого служит площадка, а высота столбика равна глубине погружения.

Пусть тело V' ограничено гладкой (или кусочно-гладкой) поверхностью S и μ — удельный вес жидкости. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с плоскостью Oxy, а ось Oz была направлена вверх. Рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$, площадь которого dS, и пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, принадлежащая этому элементу. Согласно закону Паскаля, можем написать приближенное равенство $d\boldsymbol{F}(M) = \mu z \boldsymbol{n}(M)\, dS$, где $\boldsymbol{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке M, z — аппликата этой точки.

Суммируя по всем бесконечно малым элементам $d\sigma$, приходим к формуле $\boldsymbol{F} = \mu \iint\limits_{S} z\boldsymbol{n}(M)\, dS = \boldsymbol{i}\mu \iint\limits_{S} z\cos\alpha\, dS + \boldsymbol{j}\mu \iint\limits_{S} z\cos\beta\, dS +$
$+ \boldsymbol{k}\mu \iint\limits_{S} z\cos\gamma\, dS.$

Применив к каждому поверхностному интегралу формулу Остроградского, убеждаемся, что

$$\iint\limits_{S} z\cos\alpha\, dS = \iint\limits_{S} z\cos\beta\, dS = 0, \quad \iint\limits_{S} z\cos\gamma\, dS = \iiint\limits_{V'} dx\, dy\, dz = V,$$

где V — значение объема тела V'.

Окончательно получаем: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k}\mu V = \boldsymbol{k}P$, где P — численное значение веса тела V'.

§ 15. Элементы векторного анализа

1°. Скалярные и векторные поля. Говорят, что задано скалярное поле, если каждой точке M пространства (или некоторой области пространства) поставлено в соответствие некоторое число $f(M)$ (например, поле давления в атмосфере, поле плотности сплошного распределения массы в объеме V и т. д.).

Если каждой точке M пространства (или области пространства) поставлен в соответствие некоторый вектор $\boldsymbol{R}(M)$, то говорят, что задано *векторное поле* (например, поле тяготения системы масс или сплошного распределения массы в ограниченном объеме, поле плотности импульса, поле плотности тока, поле магнитной силы и т. д.).

2°. Плотность аддитивной функции областей. Восстановление аддитивной функции по ее плотности. Пусть $\Phi(G)$ — аддитивная функция компакта G, то есть функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi(G_1 + G_2) = \Phi(G_1) + \Phi(G_2)$$

для любых двух компактов без общих внутренних точек. Число

$$\varphi(M) = \lim_{G \to M} \frac{\Phi(G)}{mG},$$

где mG — мера G, называется *истинной плотностью функции* $\Phi(G)$ *в точке* $M \in G$.

Если плотность $\varphi(M)$ аддитивной функции областей $\Phi(G)$ непрерывна или кусочно-непрерывна, то для всякого компакта G справедлива формула

$$\Phi(G) = \int_G \varphi(M)\, dG. \tag{1}$$

3°. Дифференциальный оператор Гамильтона. Пусть $\varphi(M)$, $\boldsymbol{R}(M)$, ... — множество скалярных и векторных полей, имеющих непрерывные производные по всем координатам, и пусть $T(\boldsymbol{p}) = T(\boldsymbol{p}; \varphi(M), \boldsymbol{R}(M), \ldots)$ — некоторое выражение, имеющее смысл скаляра или вектора, линейное относительно произвольного вектора $\boldsymbol{p}$:

$$T(\alpha_1 \boldsymbol{p}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{p}_2) = \alpha_1 T(\boldsymbol{p}_1) + \alpha_2 T(\boldsymbol{p}_2),$$

где α_1, α_2 — произвольные вещественные числа.

Пусть $\boldsymbol{p} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$; тогда, в силу линейности T, имеем:

$$T(\boldsymbol{p}) = aT(\boldsymbol{i}) + bT(\boldsymbol{j}) + cT(\boldsymbol{k}). \tag{2}$$

Положим по определению

$$T(\nabla) = \frac{\partial}{\partial x} T(\boldsymbol{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\boldsymbol{k}), \tag{3}$$

заменив во (2) компоненты вектора $\boldsymbol{p}$ символами дифференцирования по x, y и z соответственно.

Символ ∇ (набла) называется *дифференциальным оператором Гамильтона.*

В векторном анализе наиболее важными выражениями T, о которых упоминалось выше, являются:

а) $T(\boldsymbol{p}; \varphi) = \boldsymbol{p}\varphi(M)$ (φ — скалярная функция);

б) $T(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{R}(M)) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}(M))$ (скалярное произведение);

в) $T(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{R}(M)) = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}(M)]$ (векторное произведение).

На основании (3) получаем:

а) $T(\nabla) = \boldsymbol{i}\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial z}$;

б) $T(\nabla) = \dfrac{\partial X(M)}{\partial x} + \dfrac{\partial Y(M)}{\partial y} + \dfrac{\partial Z(M)}{\partial z}$, если $\boldsymbol{R}(M) = \{X(M), Y(M), Z(M)\}$;

в) $$T(\nabla) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Вектор, стоящий в правой части а), называется градиентом скалярного поля $\varphi(M)$; выражение, стоящее в правой части б), называют расходимостью (или дивергенцией) поля $\boldsymbol{R}(M)$; вектор, стоящий в правой части в), называется вихрем (или ротором) поля $\boldsymbol{R}(M)$.

Строгие определения градиента, дивергенции и ротора будут даны ниже.

4°. Производная поля $\varphi(M)$ по направлению. Градиент скалярного поля. Пусть $\varphi(M)$ — скалярное поле, определенное в области V пространства (x, y, z), (l) — произвольная кривая, лежащая в V и проходящая через фиксированную точку $M_0 \in V$, Δl — длина дуги кривой (l) от точки M_0 до точки M. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{\Delta\varphi(M_0)}{\Delta l} = \dfrac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}$ при $M \to M_0$, то он называется *производной поля $\varphi(M)$ в точке M_0 вдоль линии* (l) и обозначается символом $\dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l}$:

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}.$$

Если функция $\varphi(M)$ дифференцируема в точке M_0, то ее производная вдоль линии (l) существует, и для всех линий, выходящих из точки M_0, с одной и той же касательной $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$ величина этой производной одна и та же, а сама производная называется *производной по данному направлению* $\boldsymbol{\tau}$ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l} = (\operatorname{grad}\varphi(M_0), \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y}\cos\beta_1 + \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial z}\cos\gamma_1. \quad (4)$$

Вектор $\operatorname{grad}\varphi(M_0) = \left\{\dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial z}\right\}$ направлен из точки M_0 в сторону наискорейшего возрастания функции $\varphi(M)$, а по абсолютной величине равен производной поля $\varphi(M)$ в этом направлении.

На гладкой поверхности уровня $\varphi(M) = C$ ($C = \text{const}$) касательная плоскость в точке M_0 ортогональна к вектору $\operatorname{grad}\varphi(M_0)$.

5°. Потенциальные векторные поля. Работа силового поля. Циркуляция поля. Любое векторное поле $\boldsymbol{R}(M)$, совпадающее с полем градиента некоторого скалярного поля $\varphi(M)$, называют *потенциальным векторным полем*, а функцию $\varphi(M)$ называют *потенциальной функцией*, или *потенциалом поля* $\boldsymbol{R}(M)$.

Если вектор поля $\boldsymbol{R}(M)$ имеет физический смысл силы, то потенциальная функция $\varphi(M)$ имеет физический смысл работы. Работа A силы $\boldsymbol{R}(M)$ на пути L из точки M_0 в точку M_1 вычисляется по формуле

$$A=\int_{M_0M_1}(\boldsymbol{R}(M),\ \boldsymbol{\tau}(M))\,dl, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\tau}(M)$ — единичный вектор касательной к кривой L в точке M.

В силу условия $\boldsymbol{R}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$, из (5) получаем:

$$A=\varphi(M_1)-\varphi(M_0), \tag{6}$$

т. е. работа силы $\boldsymbol{R}(M)$ на пути M_0M_1 равна разности значений потенциальной функции $\varphi(M)$.

Если $\boldsymbol{R}(M)$ — произвольное непрерывное векторное поле, то интеграл по замкнутому контуру L

$$\oint_L(\boldsymbol{R}(M),\ \boldsymbol{\tau}(M))\,dl \tag{7}$$

называется *циркуляцией поля* $\boldsymbol{R}(M)$ *по контуру* L.

Циркуляция потенциального векторного поля по всякому замкнутому контуру равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если циркуляция непрерывного векторного поля $\boldsymbol{R}(M)$ по любому замкнутому контуру равна нулю, то поле потенциально.

6°. Поток и расходимость векторного поля. Пусть S — конечная гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность, а $\boldsymbol{R}(M)$ — произвольное векторное поле, заданное в некоторой области V, содержащей все точки поверхности S. Выражение

$$w(\boldsymbol{R};S)=\iint_S(\boldsymbol{R}(M),\boldsymbol{n}(M))\,dS, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{n}(M)$ — единичный вектор нормали, характеризующий сторону поверхности, называется *потоком поля* $\boldsymbol{R}(M)$ *через поверхность* S. Вычисление потока является линейной операцией. Если поверхность S, ограничивающая объем V, замкнута и существует предел при стягивании объема V в точку P,

$$\lim_{V\to P}\frac{w(\boldsymbol{R};\ S)}{\Delta V},$$

то мы называем его *расходимостью*, или *дивергенцией поля* $\boldsymbol{R}$ *в точке* $P\in V$ и обозначаем символом $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(P)$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{R}(P)=\lim_{V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{R}(M),\boldsymbol{n}(M))\,dS. \tag{9}$$

Таким образом, по определению, $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(P)$ есть *плотность аддитивной функции областей — потока векторного поля* $\boldsymbol{R}$ *через замкнутую поверхность* S.

В случае, когда компоненты поля $\boldsymbol{R}(M)=\{X(M), Y(M), Z(M)\}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ и $\frac{\partial Z}{\partial z}$ в объеме V, справедлива формула

$$\operatorname{div}\boldsymbol{R}(P)=\frac{\partial X(P)}{\partial x}+\frac{\partial Y(P)}{\partial y}+\frac{\partial Z(P)}{\partial z}, \tag{10}$$

получаемая на основании определения (9), формулы Остроградского и теоремы о среднем.

С помощью оператора Гамильтона ∇ можно написать: $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(P)=(\nabla, \boldsymbol{R}(P))$.

7°. Вихрь векторного поля. Пусть $\boldsymbol{R}(M)$ — произвольное векторное поле, заданное в конечной области V с гладкой (или кусочно-гладкой) границей S, $\boldsymbol{n}(M)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке M. Вектор-функция

$$\boldsymbol{Q}(V)=\oint\!\!\oint_S [\boldsymbol{n}(M), \boldsymbol{R}(M)]\, dS \tag{11}$$

называется *циркуляцией поля* $\boldsymbol{R}(M)$ *по границе области* V. Если существует предел при стягивании объема V в точку P

$$\boldsymbol{q}(P)=\lim_{V\to P}\frac{\boldsymbol{Q}(V)}{\Delta V}, \tag{12}$$

то вектор $\boldsymbol{q}(P)$ называется *вихрем*, или *ротором поля* $\boldsymbol{R}(M)$ *в точке* $P\in V$ и обозначается символом $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P)$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P)=\lim_{V\to P}\frac{1}{\Delta V}\oint\!\!\oint_S [\boldsymbol{n}(M), \boldsymbol{R}(M)]\, dS. \tag{13}$$

Таким образом, по определению, $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P)$ есть *плотность аддитивной функции областей — циркуляции векторного поля по границе области.*

Если компоненты X, Y и Z поля $\boldsymbol{R}$ имеют непрерывные частные производные по x, y и z, то вектор вихря поля $\boldsymbol{R}(M)$ в точке $P\in V$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P)=\left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}\right|_{M=P} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Z(P)}{\partial y}-\frac{\partial Y(P)}{\partial z}\right)+$$

$$+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial X(P)}{\partial z}-\frac{\partial Z(P)}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Y(P)}{\partial x}-\frac{\partial X(P)}{\partial y}\right). \tag{14}$$

С помощью оператора Гамильтона можно написать равенство

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P)=[\nabla, \boldsymbol{R}(P)].$$

Если область S на некоторой кусочно-гладкой поверхности ограничена кусочно-гладким контуром L, а компоненты поля $\boldsymbol{R}(M)$ имеют непрерывные частные производные в $S+L$, то справедлива формула

$$\oint_L (\boldsymbol{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))\,dl = \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(P), \boldsymbol{n}(P))\,dS, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к контуру L и направленный в положительную сторону относительно вектора $\boldsymbol{n}$. Формулу (15) называют *формулой Стокса*.

Определение. *Если в каждой точке M области V выполняется равенство* $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}(M)=0$, *то поле* $\boldsymbol{R}(M)$ *называют безвихревым.*

Теорема 1. *В односвязной области всякое безвихревое поле потенциально.*

8°. Дифференциальные операции первого порядка. В выражениях $T(\nabla; \varphi(M), \boldsymbol{R}(M), \ldots)$, рассмотренных в п. 3°, можно производить любые тождественные преобразования, допускаемые правилами линейной алгебры, считая при этом символ ∇ вектором, например:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi_1+\varphi_2) &= \nabla\varphi_1+\nabla\varphi_2, \\ (\nabla, \boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2) &= (\nabla, \boldsymbol{R}_1)+(\nabla, \boldsymbol{R}_2), \\ [\nabla, \boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2] &= [\nabla, \boldsymbol{R}_1]+[\nabla, \boldsymbol{R}_2]. \end{aligned} \tag{16}$$

Теорема 2. *Если символ ∇ действует на произведение* (численное, скалярное, векторное) *двух величин, то результат можно представить как сумму двух слагаемых, в каждом из которых ∇ действует на один из сомножителей и не действует на другой аналогично правилу обычного дифференцирования произведения.*

354. Пусть $u=xy-z^2$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M(-9, 12, 10)$. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?

Решение. Используя определение градиента, получаем: $\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\} = \{12, -9, -20\}$, $|\operatorname{grad} u(M)| = 25$. Направление $\operatorname{grad} u(M)$ определяется вектором

$$\boldsymbol{e}(M) = \frac{\operatorname{grad} u(M)}{|\operatorname{grad} u(M)|} = \left\{\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5}\right\} = \{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}.$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, выходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид: $\boldsymbol{\tau} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$. По формуле (4) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M), \boldsymbol{\tau}) = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

355. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$: а) перпендикулярен к оси Oz; б) параллелен оси Oz; в) равен нулю?

Решение. Согласно определению, имеем: $\operatorname{grad} u(x, y, z) = i3(x^2 - yz) + j3(y^2 - xz) + k3(z^2 - xy)$. В случае а) должно выполняться равенство $z^2 - xy = 0$, откуда получаем $z^2 = xy$.

В случае б) вектор $\operatorname{grad} u(x, y, z)$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{k}$, вследствие чего в каждой точке искомого множества должны одновременно выполняться равенства: $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$. Исключая из них z, находим: $x^3 - y^3 = 0$, откуда $x = y$ и $x^2 + xy + y^2 = 0$; второе равенство выполняется лишь в том случае, когда $x = y = 0$. Подставляя $x = y$ в любое из исходных равенств, получаем: $x = y = z$.

Таким образом, градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ параллелен оси Oz в точках $x = y = 0$ и в точках $x = y = z$.

В случае в) получаем равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$, $y^2 - xy = 0$, которые должны выполняться одновременно. Используя результат, полученный при рассмотрении случая б), находим: $x = y = z$.

356. Дано скалярное поле $u = \ln \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ выполняется равенство $|\operatorname{grad} u| = 1$?

Решение. Принимая во внимание равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$, получаем $|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{r}$. Равенство $|\operatorname{grad} u| = 1$ выполняется на сфере единичного радиуса с центром в точке $M(a, b, c)$, т. е. на множестве точек $r = 1$.

357. Найти угол φ между градиентами поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

Решение. Косинус угла φ вычислим по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\operatorname{grad} u(A),\ \operatorname{grad} u(B))}{|\operatorname{grad} u(A)|\,|\operatorname{grad} u(B)|}.$$

Обозначив $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, последовательно получим: $u = \frac{x}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{r^4}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{r^4}$, $r(A) = 3$, $r(B) = \sqrt{10}$, $\frac{\partial u(A)}{\partial x} = \frac{7}{81}$, $\frac{\partial u(A)}{\partial y} = -\frac{4}{81}$, $\frac{\partial u(A)}{\partial z} = -\frac{4}{81}$, $\frac{\partial u(B)}{\partial x} = -\frac{2}{25}$, $\frac{\partial u(B)}{\partial y} = \frac{3}{50}$, $\frac{\partial u(B)}{\partial z} = 0$, $(\operatorname{grad} u(A),\ \operatorname{grad} u(B)) = -\frac{4}{405}$, $|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)| = \frac{1}{90}$, $\cos\varphi = -\frac{4}{405} : \frac{1}{90} = -\frac{8}{9}$.

358. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение. Рассмотрим скалярное поле $\varphi(M) = f(r)$, где $f(r)$ — дифференцируемая функция. Ее поверхности уровня — сферы с центром в начале координат O. Градиент поля $\varphi(M)$ направлен по нормали к сфере, то есть по радиусу OM. Функция $f(r)$ возрастает, если $f'(r) > 0$, и убывает, если $f'(r) < 0$, поэтому вектор $\operatorname{grad} f(r)$ направлен в сторону возрастания r, если $f'(r) > 0$, и в сторону убывания r, если $f'(r) < 0$, причем $|\operatorname{grad} f(r)| = |f'(r)|$. В силу сказанного выше, имеем: $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$.

В случае а) $f'(r)=1$, поэтому $\operatorname{grad} r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$; в случае б) $f'(r)=2r$, поэтому $\operatorname{grad} r^2=2\boldsymbol{r}$; в случае в) $f'(r)=-\frac{1}{r^2}$, поэтому $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

359. Доказать формулу $\nabla^2(uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2(\nabla u,\ \nabla v)$, где $\nabla^2=(\nabla,\ \nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Доказательство. Напишем $\nabla^2(uv)=(\nabla,\ \nabla(uv))$ и воспользуемся правилами действий с помощью оператора Гамильтона. Получим: $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$, $(\nabla,\ \nabla(uv))=(\nabla,\ v\nabla u)+(\nabla,\ u\nabla v)=v\nabla^2 u+(\nabla u,\ \nabla v)+u\nabla^2 v+(\nabla v,\ \nabla u)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2(\nabla u,\ \nabla v)$, что и требовалось доказать.

360. Доказать, что если функция $u=u(x,\ y,\ z)$ дифференцируема в выпуклой области V и $|\operatorname{grad} u|\leqslant M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из V имеем: $|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,\ B)$, где $\rho(A,\ B)$ — расстояние между точками A и B.

Доказательство. Обозначая $A=(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $B=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{p}=\{x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1\}$ и используя свойство дифференцируемости функции u, получаем: $|u(A)-u(B)|=|du(C)|$, где $C\in V$ — некоторая точка. Поскольку $du(C)=\frac{\partial u(C)}{\partial x}(x_0-x_1)+\frac{\partial u(C)}{\partial y}(y_0-y_1)+\frac{\partial u(C)}{\partial z}(z_0-z_1)=(\operatorname{grad} u(C),\ \boldsymbol{p})=|\operatorname{grad} u(C)|\cdot|\boldsymbol{p}|\cos(\widehat{\operatorname{grad} u(C),\ \boldsymbol{p}})$, то справедлива оценка $|u(A)-u(B)|\leqslant|\operatorname{grad} u(C)|\cdot|\boldsymbol{p}|=|\operatorname{grad} u(C)|\times\rho(A,\ B)\leqslant M\rho(A,\ B)$, что и требовалось доказать.

361. Найти производную поля $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x,\ y,\ z)$ в направлении радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

Решение. По определению, имеем: $\frac{\partial u(M)}{\partial r}=\left(\operatorname{grad} u(M),\ \frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{1}{r}(\operatorname{grad} u(M),\boldsymbol{r})=\frac{1}{r}\left(\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}+\frac{2z^2}{c^2}\right)=\frac{2}{r}u(M)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Из условия $\frac{\partial u(M)}{\partial r}=|\operatorname{grad} u(M)|$ получаем: $\frac{\operatorname{grad} u(M)}{|\operatorname{grad} u(M)|}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Последнее равенство, как легко проверить, выполняется, если $a=b=c$.

362. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{R}=\frac{-\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M(3,\ 4,\ 5)$. Чему приближенно равен поток вектора $\boldsymbol{R}$ через бесконечно малую сферу $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$?

Решение. С помощью формулы (10) получаем: $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(x,\ y,\ z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\operatorname{div}\boldsymbol{R}(M)=\frac{18}{125}$.

Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{R}(x,\ y,\ z)$ является плотностью потока w, то для вычисления точного его значения можно воспользоваться формулой (1), взяв в качестве компакта замкнутый шар $V = \{(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \leqslant \varepsilon^2\}$. Так как шар бесконечно мал, то можно положить $\operatorname{div} \boldsymbol{R}(x, y, z) \approx \operatorname{div} \boldsymbol{R}(M)$, $(x, y, z) \in V$, и тогда легко найти приближенное значение потока w:

$$w \approx \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{R}(M)\, dx\, dy\, dz = \frac{18}{125} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = \frac{24}{125} \pi \varepsilon^3.$$

363. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$?

Решение. В примере 358 мы получили формулу $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \cdot \boldsymbol{r}$, предположив, что функция $f(r)$ дифференцируема. Здесь будем считать, что она дважды дифференцируема. Написав для удобства $\operatorname{grad} f(r) = \varphi(r) \cdot \boldsymbol{r}$, где $\varphi(r) = \frac{f'(r)}{r}$, и воспользовавшись оператором ∇, а также правилами действий с этим оператором, получим: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = (\nabla, \varphi(r)\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, \nabla\varphi(r)) + \varphi(r)(\nabla, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, \operatorname{grad}\varphi(r)) + \varphi(r) \operatorname{div} \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}, \operatorname{grad}\varphi(r)) + 3\varphi(r)$, так как $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$.

Принимая во внимание равенства $\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} \cdot \boldsymbol{r}$, $(\boldsymbol{r}, \operatorname{grad}\varphi(r)) = r\varphi'(r)$, находим: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) = f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, так как $\varphi'(r) = \frac{f''(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^2}$. Приравнивая $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$ нулю, получаем дифференциальное уравнение $(rf'(r))' + f'(r) = 0$, решая которое, находим: $rf'(r) + f(r) = C_1$.

Применяя метод вариации произвольной постоянной, получаем: $f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

364. Найти: а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

Решение. С помощью оператора ∇ имеем:

а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = (\nabla, u \operatorname{grad} u) = (\operatorname{grad} u, \nabla u) + u(\nabla, \operatorname{grad} u) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = |\operatorname{grad} u|^2 + u\Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\nabla, u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} v, \nabla u) + u(\nabla, \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.

365. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти расходимость вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и вектора ускорения $\boldsymbol{w}$ в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

Решение. Линейная скорость $\boldsymbol{v}$ частицы жидкости в точке M равна вектору $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$, где $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$, поэтому получаем: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}\omega x - \boldsymbol{i}\omega y$, $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0$.

Ускорение $\boldsymbol{w}(x, y, z)$ выражается формулой $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]] = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{k}\omega^2 z - \omega^2 \boldsymbol{r} = -\omega^2(\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y)$

С помощью формулы (10) находим: $\operatorname{div} \boldsymbol{w}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2 x) + $
$+ \frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2 y) = -2\omega^2.$

366. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

Решение. Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{F}(P)$, создаваемое системой материальных точек $m_1, m_2, \cdots, m_N$, помещенных в точках $M_1, M_2, \ldots, M_N$. Это поле задано формулой

$$\boldsymbol{F}(P) = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{r^3(P, M_j)} \cdot \boldsymbol{r}(P, M_j),$$

где $\boldsymbol{r}(P, M_j)$ — радиус-вектор, проведенный из точки P в точку M_j, $r(P, M_j)$ — его длина. Операция вычисления расходимости — линейная, поэтому можем написать:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(P) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{div}\left(\frac{m_j}{r^3(P, M_j)} \cdot \boldsymbol{r}(P, M_j)\right).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению расходимости поля $\boldsymbol{F}_j(P) = \varphi_j(r)\boldsymbol{r}$, где $\varphi_j(r) = \frac{m_j}{r^3(P, M_j)}$, рассмотренного в примере 363. Мы показали там, что справедливо равенство

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_j(P) = r\varphi_j'(r) + 3\varphi_j(r).$$

Подставив в него значение $r\varphi_j'(r) = -\frac{3m_j}{r^3}$, получим:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}_j(P) = -\frac{3m_j}{r^3} + \frac{3m_j}{r^3} = 0, \ \operatorname{div} \boldsymbol{F}(P) = 0.$$

Результат объясняется тем, что поле тяготения не имеет источников вне масс m_j, в силу чего мощность источников этого поля, характеризуемая расходимостью, равна нулю.

367. Доказать формулу $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{R}) = u \operatorname{rot} \boldsymbol{R} + [\operatorname{grad} u, \boldsymbol{R}]$.

Доказательство. С помощью оператора ∇ можно написать: $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{R}) = [\nabla, u\boldsymbol{R}] = [\nabla, u\boldsymbol{R}_c] + [\nabla, u_c\boldsymbol{R}]$ (здесь значок «c» указывает, что оператор набла на данный объект не действует). Если объект, на который оператор ∇ не действует, находится перед ∇, мы будем индекс «c» опускать. Получаем: $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{R}) = -[\boldsymbol{R}, \nabla u] + u[\nabla, \boldsymbol{R}] = -[\boldsymbol{R}, \operatorname{grad} u] + u \operatorname{rot} \boldsymbol{R} = u \operatorname{rot} \boldsymbol{R} + [\operatorname{grad} u, \boldsymbol{R}]$, что и требовалось доказать.

368. Найти $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$.

Решение. На основании формулы, доказанной в примере 367, имеем: $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = [\nabla, f(r)\boldsymbol{r}] = f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{r} + [\operatorname{grad} f(r), \boldsymbol{r}]$. С помощью формулы (14) находим:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Решая пример 358, мы нашли, что $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}$. Таким образом, окончательно имеем: $\operatorname{rot}(f(r)\boldsymbol{r}) = \left[\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}\right] = 0$.

369. Найти: а) $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} f(r)$; б) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c},\ f(r)\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

Р е ш е н и е. а) Пользуясь обозначениями и правилами, которые были применены при решении примера 367, получаем: $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} f(r) = [\nabla,\ \boldsymbol{c} f(r)] = [\nabla,\ \boldsymbol{c} f_c(r)] + [\nabla,\ \boldsymbol{c}_c f(r)] = f(r)[\nabla,\ \boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{c},\ \nabla f(r)] = f(r) \operatorname{rot} \boldsymbol{c} + [\operatorname{grad} f(r),\ \boldsymbol{c}] = \left[\frac{f'(r)}{r}\cdot\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c}\right] = \frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c}]$.

б) При решении примера воспользуемся известной формулой векторной алгебры: $[\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$. Действуя оператором ∇ на вектор $[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{R}]$, где $\boldsymbol{R} = f(r)\boldsymbol{r}$, находим: $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{R}] = [\nabla,\ [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{R}]] = [\nabla,[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{R}_c]] + [\nabla,[\boldsymbol{c}_c,\ \boldsymbol{R}]] = \boldsymbol{c}(\nabla,\ \boldsymbol{R}_c) - \boldsymbol{R}(\nabla,\ \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}(\nabla,\ \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}(\nabla,\ \boldsymbol{c}_c) = (\boldsymbol{R},\ \nabla)\boldsymbol{c} - \boldsymbol{R}(\nabla,\ \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c}(\nabla,\ \boldsymbol{R}) - (\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R},\ \nabla)\boldsymbol{c} - \boldsymbol{R}\operatorname{div}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{R}$.

Так как $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, то справедливы равенства $(\boldsymbol{R},\ \nabla)\boldsymbol{c} = f(r)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{c} = f(r)\left(x\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial y} + z\frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial z}\right) = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{c} = 0$, в силу которых

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{R}] = \boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{R} - (\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{R}. \qquad (\divideontimes)$$

При решении примера 363 мы нашли: $\operatorname{div}\boldsymbol{R} = rf'(r) + 3f(r)$; чтобы решить задачу до конца, нам требуется вычислить $(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{R}$. Пусть вектор $\boldsymbol{c}$ имеет вид $\boldsymbol{c} = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$, тогда получим: $(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{R} = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f(r)\boldsymbol{r} = \alpha\left(\frac{f'(r)}{r}x\boldsymbol{r} + \boldsymbol{i}f(r)\right) + \beta\left(\frac{f'(r)}{r}y\boldsymbol{r} + \boldsymbol{j}f(r)\right) + \gamma\left(\frac{f'(r)}{r}z\boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}f(r)\right) = f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r})$.

Подставляя полученные выражения в $(\divideontimes)$, находим: $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c},\ f(r)\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{c}(rf'(r) + 3f(r)) - f(r)\boldsymbol{c} - \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}) = 2f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}) - \frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}) = 2f(r)\boldsymbol{c} + \frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c},\ (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}))$.

370. Доказать формулу $\operatorname{div}[\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2] = (\boldsymbol{R}_2, \operatorname{rot}\boldsymbol{R}_1) - (\boldsymbol{R}_1,\ \operatorname{rot}\boldsymbol{R}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действуя по той же схеме, что и при решении примеров 367—369, получаем: $\operatorname{div}[\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2] = (\nabla,\ [\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2]) = (\nabla,\ [\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2^c]) + (\nabla,\ [\boldsymbol{R}_1^c,\ \boldsymbol{R}_2]) = (\boldsymbol{R}_2,\ [\nabla,\ \boldsymbol{R}_1]) - (\boldsymbol{R}_1,\ [\nabla,\ \boldsymbol{R}_2]) = (\boldsymbol{R}_2, \operatorname{rot}\boldsymbol{R}_1) - (\boldsymbol{R}_1, \operatorname{rot}\boldsymbol{R}_2)$ (мы воспользовались известным правилом векторной алгебры для смешанного произведения: $(\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{b},\ [\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{c},\ [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}])$).

371. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\boldsymbol{e} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти вихрь вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}$ в точке пространства $M(x,\ y,\ z)$ в данный момент времени.

Р е ш е н и е. Направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{e}$, поэтому $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}$. Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}$

частицы жидкости в точке M определяется формулой $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$, где $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$.

Для вычисления вихря векторного поля скоростей $\boldsymbol{v}$ воспользуемся формулой, полученной при решении примера 369, полагая в ней $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\omega}$, $f(r) = 1$. Находим: $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

372. Найти поток вектора $\boldsymbol{r}$: а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$; б) через основание этого конуса.

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой (8), которая в данном случае принимает вид $w(\boldsymbol{r};\ S) = \iint\limits_S (\boldsymbol{n}(M), \boldsymbol{r}(M))\, dS$. В случае а) единичный вектор нормали в каждой точке на боковой поверхности $S_б$ конуса ортогонален к вектору $\boldsymbol{r}$, вследствие чего $w(\boldsymbol{r};\ S_б) = 0$.

В случае б) единичный вектор нормали коллинеарен вектору $\boldsymbol{k}$ (единичному вектору оси Oz) в каждой точке основания S_0 конуса, поэтому получаем:

$$w(\boldsymbol{r};\ S_0) = \iint\limits_{S_0} z dS = h \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant h^2} dx\, dy = \pi h^3.$$

373. Найти поток радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

Решение. Поверхность S (конуса) — замкнута, поэтому здесь проще всего воспользоваться формулой восстановления аддитивной функции областей (в данном случае потока) с помощью формулы (1)

$$w(\boldsymbol{r};\ S) = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{r}\, dx\, dy\, dz.$$

Очевидно, $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$, в силу чего имеем:

$$w(\boldsymbol{r};\ S) = 3 \iiint\limits_V dx\, dy\, dz = 3Q,$$

где Q — численное значение объема тела V. Тело V — прямой круговой конус, высота которого и радиус основания равны 1, поэтому $Q = \frac{\pi}{3}$. Окончательно получаем: $w(\boldsymbol{r};\ S) = \pi$.

374. Найти поток вектора $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}x^3 + \boldsymbol{j}y^3 + \boldsymbol{k}z^3$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Решение. Как и при решении предыдущего примера, воспользуемся формулой $w(\boldsymbol{R};\ S) = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{R}\, dx\, dy\, dz$, где V — замкнутый шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x$.

Подставив в интеграл значение $\operatorname{div} \boldsymbol{R} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, получим:

$$w(\boldsymbol{R};\ S) = 3 \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам. После замены найдем:

$$w(\boldsymbol{R}; S) = 3\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\varphi\cos\theta} \rho^4\, d\rho = \frac{3}{5}\int_0^{\pi} \sin^6\varphi\, d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta = \frac{12}{5}\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4!!}{5!!} = \frac{\pi}{5}.$$

375. Найти поток вектора $\boldsymbol{u} = \frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.

Решение. По определению потока, имеем (считая поверхность гладкой или кусочно-гладкой):

$$w(\boldsymbol{u};\ S) = \iint_S (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{n})\, dS = m \iint_S \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right) dS.$$

Решение примера свелось к вычислению интеграла Гаусса (см. пример 352), когда замкнутая поверхность окружает фиксированную точку (в данном случае начало координат). На основании решения примера 352 получаем: $w(\boldsymbol{u};\ S) = 4\pi m$.

376. Найти поток вектора $\boldsymbol{F}(r) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$, где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (источников) от переменной точки $M(\boldsymbol{r})$, через замкнутую поверхность S, окружающую точки M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Решение. Векторное поле $\boldsymbol{u}(r)$, рассмотренное в предыдущем примере, можно представить в виде $\boldsymbol{u}(r) = \operatorname{grad}\left(-\frac{m}{r}\right)$, вследствие чего приходим к выводу, что рассматриваемое поле $\boldsymbol{F}(r)$ является суммой полей вида $\boldsymbol{u}(r)$, для которых $m = \frac{e_i}{4\pi}$. На основании решения предыдущего примера можно сразу написать:

$$w(F;\ S) = \sum_{i=1}^{n} 4\pi\cdot\frac{e_i}{4\pi} = \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

377. Найти работу вектора $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Решение. Работу поля $\boldsymbol{F}$ вычислим с помощью формулы (5). Найдем единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ в каждой точке кривой:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}.$$

Таким образом, получим:

$$A = b^2 \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2 b^2$$

(приняв во внимание равенства $(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{\tau}) = \dfrac{b^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt).$$

378. Найти работу поля $\boldsymbol{R} = \dfrac{\boldsymbol{i}}{y} + \dfrac{\boldsymbol{j}}{z} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{x}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M(1,\ 1,\ 1)$ и $N(2,\ 4,\ 8)$.

Решение. Очевидно, $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{MN}|}\{1, 3, 7\} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{59}},\ \dfrac{3}{\sqrt{59}},\ \dfrac{7}{\sqrt{59}}\right\}$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\boldsymbol{MN}$, в силу чего имеем: $(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{\tau}) = \dfrac{1}{\sqrt{59}}\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z} + \dfrac{7}{x}\right)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N, имеет вид $x - 1 = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{7}$, и мы можем параметризовать эту прямую, выбрав в качестве параметра переменную x. При этом получим: $x = x$, $y = 3x - 2$, $z = 7x - 6$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{59}\,dx$,

$$A = \int_{MN} (\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{\tau})\,dl = \int_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln(3x-2) + \frac{3}{7}\ln(7x-6) + 7\ln x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{188}{21}\ln 2.$$

379. Найти работу поля $\boldsymbol{R} = (y+z)\,\boldsymbol{i} + (z+x)\,\boldsymbol{j} + (x+y)\,\boldsymbol{k}$ вдоль меньшей дуги окружности большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, если эта дуга соединяет точки $M(3,\ 4,\ 0)$ и $N(0,\ 0,\ 5)$.

Решение. Рассматриваемая дуга лежит в плоскости $y = \dfrac{4}{3}x$ и представляет собой четверть окружности радиуса 5. Параметризуем эту кривую, выбрав в качестве параметра угол φ, образованный радиусом-вектором точки кривой, лежащим в плоскости $y = \dfrac{4}{3}x$, с его проекцией на плоскость Oxy. Тогда параметрические уравнения данной дуги будут иметь вид $x = 3\cos\varphi$, $y = 4\cos\varphi$, $z = 5\sin\varphi$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, а единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$ в каждой ее точке будет выражаться формулой $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2}}\{x'(\varphi),\ y'(\varphi),\ z'(\varphi)\} = \left\{-\dfrac{3}{5}\sin\varphi,\ -\dfrac{4}{5}\sin\varphi,\ \cos\varphi\right\}$.

Вектор $\boldsymbol{R}$ на данной дуге принимает вид $\boldsymbol{R} = (4\cos\varphi + 5\sin\varphi)\,\boldsymbol{i} + (5\sin\varphi + 3\cos\varphi)\,\boldsymbol{j} + 7\cos\varphi\,\boldsymbol{k}$, поэтому имеем: $(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{\tau}) = 7\cos 2\varphi - \dfrac{12}{5}\sin 2\varphi$.

Применяя формулу (5) и принимая во внимание равенство $dl = 5\,d\varphi$, получаем:

$$A = \int\limits_{MN} (\boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{\tau})\,dl = 5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 5\left(\frac{7}{2}\sin 2\varphi + \frac{6}{5}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12.$$

380. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{R} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Решение. Циркуляция поля $\boldsymbol{R}$ вдоль замкнутого контура C равна, по определению, интегралу

$$\Gamma = \oint\limits_C (\boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{\tau})\,dl.$$

В случае а) возьмем параметрические уравнения окружности в виде $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Тогда получим: $\boldsymbol{\tau} = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\}$, $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}\cos\varphi + \boldsymbol{k}c$, $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\tau}) = 1$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \oint\limits_C (\boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{\tau})\,dl = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В случае б) параметрические уравнения окружности берем в виде $x = 2 + \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. При этом получаем:

$$\boldsymbol{\tau} = \{-\sin\varphi, \ \cos\varphi, \ 0\}, \ \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{i}\sin\varphi + \boldsymbol{j}(2 + \cos\varphi) + \boldsymbol{k}c,$$

$$(\boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{\tau}) = 1 + 2\cos\varphi, \ dl = d\varphi, \ \ \Gamma = \int\limits_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi.$$

381. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$ вдоль контура C в двух случаях: а) C не окружает оси Oz; б) C окружает ось Oz.

Решение. Поле $\boldsymbol{R}$ — потенциальное, поэтому в случае а) его циркуляция Γ вдоль любого контура, не содержащего особых точек функции $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, равна нулю.

В случае б) имеем: $\Gamma = \oint\limits_C (\boldsymbol{R}, \ \boldsymbol{\tau})\,dl = \oint\limits_C \left(\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \ \boldsymbol{\tau}\right)dl =$
$= \oint\limits_C \frac{\partial}{\partial l}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)dl = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_C$ (напомним читателю, что выражение $(\operatorname{grad}\varphi, \ \boldsymbol{\tau})$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к некоторой кривой, равно производной скалярного поля φ вдоль этой кривой).

Обозначив $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$, получим, что циркуляция поля $\boldsymbol{R}$ по замкнутому контуру C равна приращению угла φ при его обходе. При каждом полном обходе угол φ получает приращение 2π (так как контур окружает ось Oz и его проекция на плоскость Oxy окружает начало координат), поэтому в общем случае $\Gamma = 2\pi n$, где n — число полных обходов контура C вокруг оси Oz.

382. Дано векторное поле $\boldsymbol{R} = \frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}$. Вычислить $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}$ в точке $M(1,\ 1,\ 1)$ и найти приближенно циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2$, $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Решение. Применив формулу (14), получим:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x}{\sqrt{z}}\right)\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{xy})\right) +$$
$$+ \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{\sqrt{z}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{z}}\right)\right) = \frac{\boldsymbol{i}}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{z\sqrt{z}}\right) -$$
$$- \frac{\boldsymbol{j}}{2}\left(\frac{y}{z\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) - \boldsymbol{k}\,\frac{2}{\sqrt{z}},\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{R}(M) = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Циркуляцию Γ поля вдоль заданной окружности вычислим с помощью формулы Стокса $\Gamma = \iint\limits_S (\boldsymbol{n},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{R})\,dS$, где S — кусок плоскости $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, ограниченный окружностью радиуса ε с центром в точке M. На плоскости S имеем: $z = 1 - \frac{1}{\cos\gamma}((x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta)$, $z'_x = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z'_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$, $(\boldsymbol{n},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{R}(M)) = -\cos\beta - 2\cos\gamma$.

Подставив скалярное произведение под знак интеграла, найдем:

$$\Gamma \approx -\iint\limits_S (\cos\beta + 2\cos\gamma)\,dS = -(\cos\beta + 2\cos\gamma)\,\pi\varepsilon^2,$$

так как S — круг радиуса ε, лежащий в рассматриваемой плоскости.

383. Показать, что поле $\boldsymbol{R} = yz(2x + y + z)\,\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\,\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\,\boldsymbol{k}$ потенциальное и найти его потенциал.

Решение. Поле потенциально, поскольку его вихрь равен нулю (убедиться в этом предоставляем читателю). В силу потенциальности поля, имеем: $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\varphi = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Из равенств $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz(2x + y + z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x + 2y + z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x + y + 2z)$ находим: $\varphi(x,\ y,\ z) = xyz(x + y + z) + \psi(y,\ z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x + 2y + z) = xz(x + 2y + z) + \frac{\partial\psi}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, $\psi = \Phi(z)$.

Из равенства $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x + y + 2z) = xy(x + y + 2z) + \Phi'(z)$ получим: $\Phi'(z) = 0$, $\Phi(z) = C$, где $C = \text{const}$.

Окончательно имеем: $\varphi(x,\ y,\ z) = xyz(x + y + z) + C$, где C — произвольная постоянная.

384. Найти потенциал гравитационного поля $\boldsymbol{R} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$, создаваемого массой m, находящейся в начале координат.

Решение. Принимая во внимание равенство $\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\frac{m}{r}$, находим потенциал φ поля $\boldsymbol{R}$: $\varphi = \frac{m}{r}$.

Задачи и примеры для самостоятельного решения

Вычислить площади плоских фигур, ограниченных кривыми:

1. Кардиоидой $(x^2+y^2-ax)^2 = a^2(x^2+y^2)$ и окружностью $x^2+y^2 = a\sqrt{3}y$ (внутри каждой из этих кривых).

2. $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$. 3. $x^4+y^4 = 2a^2xy$. 4. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.

5. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}-\frac{y}{b}$; $y>0$. 6. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$; $y>0$; $a>0$, $b>0$.

7. $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$. 8. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x>0$, $y>0$.

9. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y = m$, $y = n$; $0<a<b$, $0<m<n$.

10. $y^2 = a^2-2ax$, $y^2 = b^2-2bx$, $y^2 = m^2+2mx$, $y^2 = n^2+2nx$; $0<m<n$, $0<a<b$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

11. $x+y+z = a$, $x^2+y^2 = b^2$, $z = 0$; $a>b\sqrt{2}$.

12. $x^2z^2+a^2y^2 = c^2x^2$; $0<x<a$.

13. $y^2+z^2 = x$, $x = y$; $z>0$.

14. $z = \sin(x^2+y^2)$, $z = 0$; $n\pi<x^2+y^2<(n+1)\pi$.

15. $x^2+y^2 = az^2$, $x^2+y^2 = ax$; $z>0$.

16. $z(x+y) = ax+by$, $z = 0$; $1<x^2+y^2<4$, $x>0$, $y>0$, $a>0$, $b>0$.

17. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k+\frac{z}{c} = 1$; $z>0$.

18. $z^2 = 2xy$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{2xy}{c^2}$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

19. $z = x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$, $x+y = 1$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

20. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a}$; $y>0$, $z>0$.

21. $z = x^2y$, $y^2 = a^2-2ax$, $y^2 = m^2+2mx$, $y = 0$, $z = 0$.

22. Доказать, что объем, ограниченный плоскостью $z = mx+ny+p$ и параболоидом $z = x^2+y^2$, равен половине площади круга $x^2+y^2 \leqslant mx+ny+p$, умноженной на разность величин x^2+y^2 и $mx+ny+p$, взятую в центре этого круга.

Вычислить площади поверхностей, указанных в следующих задачах:

23. $z^2 = 2xy$; $z>0$, $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$.

24. Части поверхности $z^2 = 2px$, вырезанной поверхностями $y^2 = 2qx$, $x = a$.

25. Части цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2} = 1$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2} = 1$; $a>b$.

26. $2cz = y^2-x^2+2xy\operatorname{ctg}\alpha$; $z\geqslant 0$, $x^2+y^2<a^2$.

27. $(x^2+y^2)z = x+y$; $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, $x>0$, $y>0$.

28. Части поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 2z$, заключенной внутри цилиндра $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$.

Найти координаты центров тяжести однородных пластинок, ограниченных кривыми:

29. $x^4+y^4=x^2y$. 30. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab}$.

31. Доказать, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан.

32. Доказать, что объем прямого цилиндра, срезанного плоскостью (не обязательно параллельной основанию), равен площади основания, умноженной на длину отрезка, соединяющего центр основания с центром фигуры, образованной в результате сечения цилиндра плоскостью.

33. Кольцо между концентрическими кругами с радиусами 13 и 12 имеет ту же площадь, что и круг радиуса 5. Во сколько раз момент инерции кольца больше, чем момент инерции круга, если оба момента вычисляются относительно диаметра?

34. На каждой из осей, проходящих через центр тяжести плоской фигуры D, площадь которой S, отложен отрезок, равный $\frac{n}{\sqrt{I}}$, где I — момент инерции фигуры относительно этой оси, n — некоторая постоянная. Доказать, что концы этих отрезков лежат на эллипсе (этот эллипс называется эллипсом инерции фигуры D, если $nS=I_xI_y-I_{xy}^2$).

С помощью тройных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

35. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3+z^3)$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

36. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3(x-y)$. 37. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^8=\frac{z^4}{h^4}$.

38. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$; $\alpha^2<1$.

39. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{h}$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

40. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=1$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h$, где $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$.

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

41. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$; $0<z<h$. 42. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

43. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm 1$, $z=0$.

Найти моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

44. $x+y+z=a\sqrt{2}$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

45. $h^2(x^2+y^2)=a^2z^2$; $0<z<h$.

46. На каждой прямой l, проходящей через центр тяжести тела, отложен отрезок длиной $\frac{1}{\sqrt{I_l}}$. Доказать, что концы этих отрезков лежат на эллипсоиде $Ax^2+By^2+Cz^2-2Dxy-2Exz-2Fyz=1$, где $A=I_x$, $B=I_y$, $C=I_z$, $D=I_{xy}$, $E=I_{xz}$, $F=I_{yz}$. (Этот эллипсоид называется эллипсоидом инерции данного тела).

Указание. Воспользоваться решением задачи 207.

47. Определить высоту h и радиус основания a однородного цилиндра так, чтобы эллипсоид инерции для этого цилиндра обратился в шар.

48. Доказать, что у однородных правильных многогранников эллипсоидом инерции является шар.

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

49. $\int\limits_C \frac{dl}{x-y}$, где C — отрезок прямой $y=\frac{x}{2}-2$, заключенный между точками $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

50. $\int\limits_C y\,dl$, где C — дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная параболой $x^2 = 2py$.

51. $\int\limits_C xyz\,dl$, где C — четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, лежащая в первом октанте.

52. $\int\limits_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,dl$, где C — первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

53. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ между точками с абсциссами x_1 и x_2, если плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

54. Найти массу кривой $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ от точки, соответствующей $t = 0$, до произвольной точки, если плотность кривой обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1, 0, 1)$ равна единице.

55. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ относительно плоскости Oxy, считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости: $\mu = kz^2$.

56. Вычислить площадь части данной цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью Oxy и поверхностями $y = \sqrt{2px}$, $z = y$, $x = \frac{8}{9}p$.

Вычислить криволинейные интегралы:

57. $\int\limits_C x\,dy$, где C — контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, пробегаемый в положительном направлении.

58. $\int\limits_C \frac{x^2\,dy - y^2\,dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, где C — четвертая часть астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ — от точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$.

59. $\int\limits_C x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, где C — отрезок прямой от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

60. Доказать, что величина интеграла $\int\limits_C (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, где C — замкнутый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром.

61. Доказать, что интеграл $\int\limits_C \varphi(y)\,dx + (x\varphi'(y) + x^3)\,dy$ равен утроенному моменту инерции однородной плоской фигуры, ограниченной контуром C, относительно оси ординат.

Найти функции по данным полным дифференциалам:

62. $du = \left(\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x\right)dx + \left(\frac{y}{(y - x)^2} - y^2\right)dy$.

63. $du = \frac{2\,(zx\,dy + xy\,dz - yz\,dx)}{(x - yz)^2}$.

При помощи криволинейного интеграла вычислить площади плоских фигур, ограниченных данными замкнутыми кривыми:

64. Петлей кривой $(x + y)^4 = x^2y$.

65. Петлей кривой $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

Вычислить поверхностные интегралы:

66. $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$, где S — цилиндр $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

67. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho^n}$, где S — сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$, а ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне сферы.

68. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + xy\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2+y^2=R^2$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $z=H$.

69. $\iint\limits_S y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z=x^2+y^2$, цилиндра $x^2+y^2=1$ и координатных плоскостей.

70. Найти массу сферы, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна квадрату расстояния этой точки от некоторого фиксированного диаметра сферы.

71. Вычислить интеграл $\iint\limits_S ((z^n-y^n)\cos\alpha + (x^n-z^n)\cos\beta + (y^n-x^n)\cos\gamma)\,dS$, взятый по верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$; α, β, γ — углы, образованные внешней нормалью к сфере с осями координат.

72. Вычислить интеграл $\int\limits_C x^2y^3\,dx + dy + z\,dz$, где контур C — окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$: а) непосредственно; б) используя формулу Стокса (в качестве поверхности взять полусферу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$). Интегрирование по окружности в плоскости Oxy вести в положительном направлении.

73. Доказать формулу $\boldsymbol{n}\,(\operatorname{grad}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n})) - \operatorname{rot}[\boldsymbol{R}, \boldsymbol{n}] = \operatorname{div}\boldsymbol{R}$, если $\boldsymbol{n}$ — единичный постоянный вектор.

74. Доказать формулу $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{R} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{R} - \Delta\boldsymbol{R}$, где Δ — оператор Лапласа.

75. Найти поток вектора $\boldsymbol{R} = xy\,\boldsymbol{i} + yz\,\boldsymbol{j} + xz\,\boldsymbol{k}$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, лежащую в первом октанте.

76. Найти поток вектора $\boldsymbol{R} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $S\,(0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O\,(0, 0, 0)$, $A\,(2, 0, 0)$, $B\,(0, 1, 0)$.

Глава I

2. При $\alpha > 1$ сходится. 3. Расходится. 4. При $\alpha < -1$ сходится. 5. Расходится. 6. Сходится. 7. Расходится. 8. Расходится. 9. Расходится. 10. Сходится. 11. Сходится. 12. Расходится. 13. Сходится условно. 14. При $\alpha > 0$ сходится; при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно. 15. Сходится условно. 16. При $\alpha > p + 2$ сходится абсолютно; при $p + 1 < \alpha \leqslant p + 2$ сходится условно. 17. Сходится условно. 18. Сходится условно. 19. Сходится условно. 20. Сходится условно при $\alpha > 0$. 21. Сходится при любом α; абсолютно сходится при $\alpha > 1$. 22. а) Неравномерно; б) неравномерно; в) равномерно; г) равномерно. 23. а) Неравномерно; б) равномерно. 24. а) Неравномерно; б) равномерно. 25. Во всех случаях сходится неравномерно. 26. а) Равномерно; б) неравномерно. 27. а) Равномерно; б) равномерно. 28. а) Равномерно; б) неравномерно. 29. а) Равномерно; б) неравномерно. 30. Неравномерно. 31. Неравномерно. 32. $|x| < 1$; неравномерно. 33. $(-\infty, +\infty)$; неравномерно. 34. $(-\infty, +\infty)$; неравномерно. 35. $(-\infty, +\infty)$; неравномерно. 36. Может. 43. а) Да; б) нет; в) да. 44. $\frac{\pi^2}{6}$. 45. 1. 46. 0. 47. $\ln 2$. 48. $\ln\frac{1}{2}$. 49. $\frac{1}{4}$. 50. $\frac{\pi}{2}$. 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a}n^2}\cos 2n\pi x$. 53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}\cos nx$. 54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} \times$ $\times \sin nx$. 55. $\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx \quad (|x| < \pi)$. 56. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos x +$ $+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\cos nx \ (|x| < \pi)$. 58. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. 61. 1. 62. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. 63. $(1-\cos x)\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi - x}{2}\sin x + \cos x, \quad 0 < x < 2\pi$. 64. $(1-\cos x)\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}$. 65. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}$. 66. $-\sin x + \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left(\sqrt{1+|\sin x|} + \sqrt{|\sin x|}\right),\ |x| \leqslant \pi$.

Глава II

4. Нет. 5. Нет. 6. Да. 11. Равномерно непрерывна. 13. $z'_x(0, 0) = 0$, $z'_y(0, 0) = 0$. 15. Не дифференцируемая. 16. Не дифференцируемая. 17. Дифференцируемая. 31. 1) Бесчисленное множество; 2) восемь; 3) четыре; 4) одна. 32. $y' = -1$. 33. $y' = \frac{1}{1-\alpha\cos y}$, $y'' = \frac{-\alpha\sin y}{(1-\alpha\cos y)^3}$. 34. $(z^2-1)^3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -2zx^2y^2$. 35. $d^2z(a, a) = \frac{1}{a}(dx^2 + dy^2)$. 36. $y' = 1$, $y'' = -\frac{2}{3}$. 37. $y(y-z)y' = x(z-x)$, $z(z-y)z' = x(y-x)$. 38. $25y^3\,d^2y = -(20y^2 + 16x^2)\,dx^2$, $25z^3\,d^2z = (5z^2 - x^2)dx^2$.

39. $y' = -1$, $z' = 0$, $5y'' = -4$, $5z'' = 4$. 40. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\sin v \operatorname{ctg} u$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b} \times$ $\times \cos v \operatorname{ctg} u$. 43. $\frac{d^3y}{dt^3} + by = 0$. 44. $v'' + v = 0$. 45. $y\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{dz}{dy} = 0$. 46. $A = \frac{1}{c\delta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{c\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial \psi}$, где $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. 47. $\Delta u = \frac{1}{c^2\delta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$. 48. $\Delta u = \frac{1}{a^2\delta^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где $\delta^2 = \operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi$. 49. $\Delta u = \frac{1}{a^2\delta^2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{1}{a^2\operatorname{sh}^2\xi\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}$, где $\delta^2 = \operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\varphi$. 50. $\Delta u = \frac{\lambda(1 + \cos\varphi\operatorname{ch}\xi)}{a^2\operatorname{sh}\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\lambda\sin\varphi}{a^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}\right)$, где $\lambda = \operatorname{ch}\xi + \cos\varphi$. 51. Минимум при $x = \sigma\sqrt{2}$, $y = -\sigma\sqrt{2}$, $\sigma = \pm 1$; при $x = 0$, $y = 0$ нет экстремального значения. 52. Максимум при $x = y = z = a$. При $x = y = z = 0$ нет экстремального значения. 53. $\frac{14 + 2\sqrt{67}}{3}$. 54. Седловины: $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \ldots$; минимумы: $y = 0$, $x = \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}, \ldots$. 55. Наибольшее значение $\frac{112}{27}$, наименьшее 4. 56. Минимум $\frac{1}{p}(\sqrt{\alpha_1\beta_1} + \sqrt{\alpha_2\beta_2} + \cdots + \sqrt{\alpha_n\beta_n})^2$.

Глава III

2. Непрерывна. 3. Непрерывна. 4. Непрерывна при $y \neq 0$. 6. Да. 7. Непрерывно дифференцируема при $y \neq 0$. 8. То же самое. 12. Да. 13. Нет. 14. Да. 15. Нет. 16. Равномерно. 17. Равномерно. 18. Равномерно. 19. Равномерно. 20. Неравномерно. 21. Неравномерно. 22. Неравномерно. 23. Неравномерно. 24. 1. 25. $\frac{\pi}{2}$. 26. 0. 27. 0. 28. $\sqrt{\pi}(b - a)$. 29. $\frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{4b^2}{a^2}\right)$, $a \neq 0$. 31. $\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$.

32. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 33. 0. 34. 0. 35. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x + \alpha}\,dx$. 36. $\frac{\pi}{3}|a|^3$. 37. $\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8}$ при $0 \leqslant a < 2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a \geqslant 2$. 38. $\frac{\pi}{4}$. 39. $\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}$. 40. $\pi\left(e^{-|a|} - \frac{1}{2}\right)$. 41. $\frac{1}{2}\ln(1 + a^2)$.

42. $\sqrt{\pi}\frac{d}{da}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\right)$. 43. $\frac{d}{da}(\Gamma(a + 1))$.

Глава IV

1. $\frac{3}{16}a^2(4\pi - 1 - 3\sqrt{3})$. 2. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$. 3. $\frac{\pi}{2}a^2$. 4. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}ab\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 5. $\frac{ab}{12}$. 6. $\frac{a^5b}{10h^4}$. 7. $\frac{21}{256}\pi ab\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 8. $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 9. $\frac{2}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{n^3} - \sqrt{m^3})$. 10. $\frac{1}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{n} - \sqrt{m})p$, где $p = a + b + m + n + \sqrt{ab} + \sqrt{mn}$.

11. πab^2. 12. $\frac{\pi}{2}ac^2$. 13. $\frac{\pi}{32}$. 14. 2π. 15. $\frac{4a^3}{9\sqrt{a}}$. 16. $\frac{3}{8}\pi(a+b)$. 17. $\frac{\pi k}{k+1}abc$.
18. $\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$. 19. $\frac{8}{35}$. 20. $\left(\frac{\pi}{8}-\frac{4}{15}\right)abc$. 21. $\frac{am}{192}(a+m)(3a^2-5am+3m^2)$.
23. $\frac{2\sqrt{2}}{3}(a+b)\sqrt{ab}$. 24. $\frac{4}{3}\sqrt{q}\left((p+2a)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right)$. 25. $4c\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\times\right.$
$\left.\times\arccos\frac{b}{a}\right)$. 26. $\frac{\pi}{3c\sin\alpha}((c^2\sin^2\alpha+a^2)-c^3\sin^3\alpha)$. 27. $\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{18}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\right.$
$\left.\times\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\right)$. 28. $\frac{5}{9}ab$. 29. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi},\ \frac{1}{4}\right)$. 30. $\left(\frac{3}{64}\pi a,\ \frac{3}{64}\pi b\right)$.
33. В $\frac{313}{25}$ раз. 35. $\frac{\pi}{8}a^3$. 36. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 37. $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. 38. $2\pi^2(1-\alpha^2)abc$.
39. $\frac{abch(5c+4h)}{60(c+h)^2}$. 40. $\frac{2\pi h}{|\Delta|}$. 41. $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}h\right)$. 42. $\left(\frac{9\pi a}{8(3\pi-4)},\ 0,\ 0\right)$. 43. $\left(0,\ 0,\right.$
$\left.\frac{7}{30}c\right)$. 44. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^5$. 45. $\frac{\pi}{10}a^4h$. 47. $h=a\sqrt{3}$. 49. $\sqrt{5}\ln 2$. 50. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$.
51. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. 52. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right)$. 53. $\frac{1}{3}\left((x_2^2+1)^{\frac{3}{2}}-(x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$. 54. $(1+$
$+e^{-t})\sqrt{3}$. 55. $\frac{8}{15}k\sqrt{2}\left((3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}}+1\right)$. 56. $\frac{98}{81}p^2$. 57. 3. 58. $\frac{3}{16}\pi a\sqrt[3]{a}$.
59. 13. 62. $u=\ln|x-y|+\frac{y}{x-y}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3}+C$. 63. $u=\frac{2x}{x-yz}+C$. 64. $\frac{1}{210}$.
65. $\frac{1}{30}$. 66. $2\pi\operatorname{arctg}\frac{H}{R}$. 67. $\frac{2\pi a}{c(n-2)}\left(\frac{1}{(c-a)^{n-2}}-\frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right)$; $n\neq 2$. 68. $R^2H\times$
$\times\left(\frac{2R}{3}+\frac{\pi H}{8}\right)$. 69. $\frac{\pi}{8}$. 70. $\frac{8}{3}\pi R^4$. 71. 0. 72. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 75. $\frac{3}{16}\pi$. 76. $\frac{1}{6}$.

Содержание

Глава I

Ряды

Глава II

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Глава III

Интегралы, зависящие от параметра

Глава IV

Кратные и криволинейные интегралы

Ответы

Иван Иванович Ляшко,
Алексей Климентьевич Боярчук,
Яков Гаврилович Гай,
Григорий Петрович Головач

Математический анализ в примерах и задачах, ч. 2

Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов университетов и технических высших учебных заведений

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство
Киев — 1977

Редакторы *Г. Д. Шиманская, О. С. Дзюба.* Обложка художника *В. П. Кузя.* Художественный редактор *И. Р. Ойхман.* Технический редактор *Л. И. Швец.* Корректор *Ф. И. Слободская*

ИБ № 2465.

Сдано в набор 4.05.1976 г. Подписано к печати 29.10.1976 г. Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$. Бум. тип. № 3. Печ. л. 42. Уч.-изд. л. 43,48. Тираж 33000. Изд. № 2804. Цена 1 руб. 65 коп. Зак. № 6-171

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев, 54, Гоголевская, 7.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР,