MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

III

1

BEOGRAD
1968.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. III, broj 1 (1968/69)

Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA SR SRBIJE

Beograd, p. p. 791, Knez Mihailova 35/IV

Uređuje Redakcioni odbor

Glavni urednik prof. dr M. ILIĆ-DAJOVIĆ

Odgovorni urednik B. MARINKOVIĆ, prof.

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

Dr M. Ilić-Dajović (Beograd)

O NIZOVIMA BROJEVA

I

1. Svima nam je poznato koje brojeve nazivamo **prirodnim brojevima** — to su brojevi

(1) 1, 2, 3, . . . , 10, 11, 12, . . . , 100, 101, 102, . . . ,

to jest brojevi koje izgovaramo ili na koje mislimo kad prebrojavamo predmete (na primer listove u knjizi), životinje (na primer golubove koji su sleteli na bačeno zrnevlje), ljude (na primer učenike u učionici) itd. Svi ti brojevi, poređani po veličini tako da je svaki sledeći veći od prethodnog čine **prirodni brojni niz** ili, kratko, **prirodni niz**; svaki broj u tom nizu nazivamo *članom niza*.

Kakva su svojstva prirodnog brojnog niza?

1) Pre svega, brojevi u tom nizu (tj. članovi tog niza) imaju svaki svoje utvrđeno mesto: broj 1 je na prvom mestu, broj 2 na drugom, broj 3 na trećem, . . . , broj 10 na desetom mestu, itd.

Ako jedno mnoštvo (skup) brojeva ima to svojstvo da svaki broj u tom mnoštvu ima svoje utvrđeno mesto tj. da tačno znamo koji je broj prvi, drugi, treći, . . . , itd., tada kažemo da je to uređeno mnoštvo brojeva. Prirodni niz je, na osnovu toga, **uređeno mnoštvo brojeva.**

2) Prvi član prirodnog niza je broj 1, a sve ostale članove tog niza dobijamo tako što:

najpre broju 1 dodamo 1 — dobijamo broj 2,
zatim broju 2 dodamo 1 — dobijamo broj 3,
zatim broju 3 dodamo 1 — dobijamo broj 4,

i tako dalje, dokle god želimo i dokle god imamo strpljenja i vremena.

Dakle, u prirodnom nizu brojevi su poređani po veličini; razlika između svaka dva uzastopna prirodna broja je uvek jedan isti broj — to je ovde broj 1.

3) U prirodnom nizu postoji najmanji broj — to je broj 1, tj. prvi član tog niza. Ali, da li postoji najveći prirodni broj?

Šta mislite, da li moramo, da bismo odgovorili na to pitanje, neprekidno brojati ko zna koliko dugo?

Na to pitanje se veoma lako može odgovoriti ako se ima u vidu ono svojstvo koje otkriva kako je taj niz obrazovan, a naime, da se svaki sledeći član tog niza dobija tako što se prethodnom članu doda 1. I zato, ako nam neko kaže ili napiše ma koliko veliki prirodni broj — na primer broj 1 000 000 000 000 (jedan bilion) — mi možemo odmah tome broju dodati 1 pa ćemo dobiti opet prirodni broj koji je veći od datog broja.

Prema tome, ma koliko veliki prirodni broj napisali ili zamislili, uvek dodajući jedinicu tome broju dobijamo još veći prirodni broj. I tako možemo nastaviti n e o g r a n i č e n o. Zbog toga je jasno da **ne postoji najveći prirodni broj.**

Pa, koliko ima članova u prirodnom nizu? Broj tih članova veći je od svakog velikog broja koji možemo zamisliti. Zato kažemo da u prirodnom nizu **ima beskonačno mnogo prirodnih brojeva.**

2. Prirodni niz brojeva služi nam za numerisanje, to jest za obeležavanje mesta koje u nizu objekata iste vrste ima svaki pojedini objekat. Na taj način numerišemo, na primer, stranice u knjizi, lozove, spiskove sa imenima lica ili nazivima predmeta, itd.

Međutim, svakako ste zapazili da, obično, kuće u jednoj ulici numerišemo na drugačiji način: na levoj strani kuće su numerisane samo neparnim brojevima, a na desnoj samo parnim. Na taj način dobijamo, na primer,

na levoj brojeve: 1, 3, 5, 7, 9, . . . , 45,
a na desnoj brojeve: 2, 4, 6, 8, . . . , 48,

kojih, u ovom slučaju, za razliku od prirodnog niza ima **konačno mnogo** (jer se obeležavanje kuća u ulici mora završiti nekim brojem).

Međutim, mi možemo, razume se, zamisliti i **sve** neparne brojeve:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 99, 101, \ldots \tag{2}$$

i **sve** parne brojeve:

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 100, 102, \ldots; \tag{3}$$

i jednih i drugih ima beskonačno mnogo. (Zašto?)

Ako sve brojeve nekog mnoštva (skupa) možemo numerisati redom prirodnim brojevima 1, 2, 3, 4, . . . tako da svakom prirodnom broju odgovara na izvestan način jedan član tog mnoštva, tada kažemo da je to mnoštvo **niz brojeva** (brojni niz ili, kratko, niz). Brojeve sadržane u nizu nazivamo č l a n o v i m a n i z a.

Prema tome, svi prirodni brojevi (1) čine niz; svi neparni brojevi (2) čine niz; svi parni brojevi (3) čine niz. Ovi nizovi su beskonačni; ali ima i konačnih nizova (i oni se najčešće javljaju); to su, na primer, nizovi parnih ili neparnih brojeva kojima su numerisane kuće u ulici.

Zadržimo se sada malo na nizu svih neparnih brojeva (2) i nizu svih parnih brojeva (3). Prvi niz počinje brojem 1, a razlika između bilo kojeg drugog člana i njegovog prethodnog člana je stalna i jednaka 2. Drugi niz počinje brojem 2, a razlika između bilo kojeg drugog člana i njegovog prethodnog člana je takođe stalna i jednaka 2.

Na osnovu toga znamo kako, polazeći od prvog člana niza, dobijamo sve ostale:

prvi član:	$1,$	$2,$
drugi član:	$1+2=3,$	$2+2=4,$
treći član:	$3+2=5,$	$4+2=6,$

i tako dalje. Lako je utvrditi da će, na primer, stoti po redu parni broj biti broj 200, a stoti po redu neparni broj biće 199.

Ako prvi član bilo kojeg niza obeležimo sa a_1, drugi član sa a_2, treći član sa $a_3, \dots$, deseti član sa a_{10} i, uopšte, bilo koji član sa a_n (gde je n odgovarajući prirodni broj), tada taj niz pišemo u obliku:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n, \dots$$

U nizu (2) neparnih brojeva je

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7, \dots\dots,$$

a u nizu (3) parnih brojeva je

$$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ a_4=8, \dots$$

Odmah vidimo da između svakog člana niza parnih brojeva i mesta na kojem se on nalazi (a koje je naznačeno odgovarajućim brojem — indeksom uz slovo a) postoji određena veza:

$$a_1=2=2\cdot\mathbf{1},\quad a_2=4=2\cdot\mathbf{2},\quad a_3=6=2\cdot\mathbf{3}, \dots\dots$$

(gde je masnim ciframa obeležen broj jednak indeksu) tako da na osnovu toga možemo odmah napisati da je, na primer,

$$a_{28} = 2 \cdot \mathbf{28} = 56$$

i, uopšte, bilo koji član

$$a_n = 2\,\boldsymbol{n} \qquad (n \text{ je prirodan broj}).$$

Takođe, članove niza neparnih brojeva možemo napisati tako da se odmah vidi na koji su način oni u vezi sa mestom na kojem se nalaze (a kojem odgovara određeni indeks):

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 = 2 \cdot \mathbf{2} - 1, \quad a_3 = 5 = 2 \cdot \mathbf{3} - 1, \quad a_4 = 7 = 2 \cdot \mathbf{4} - 1,$$

pa je, na primer,

$$a_{37} = 2 \cdot \mathbf{37} - 1 = 73$$

i, uopšte, bilo koji član

$$a_n = 2 \cdot \boldsymbol{n} - 1 \qquad (n \text{ je prirodni broj}).$$

3. Napišimo niz od dvadeset brojeva koji počinje brojevima

$$(4) \qquad 5,\ 10,\ 15, \ldots;$$

tu je $a_1 = 5$, $a_2 = 10 = 5 \cdot \mathbf{2}$, $a_3 = 15 = 5 \cdot \mathbf{3}, \ldots$ Očigledno je $a_{11} = 5 \cdot \mathbf{11} = 55$, a bilo koji član je

$$a_n = 5 \cdot \boldsymbol{n}.$$

Kao i u prethodnim primerima, ako je poznato na koji način zavisi član niza od mesta na kojem se nalazi, tada se može neposredno odrediti bilo koji član niza.

4. Za sve nizove koje smo dosad posmatrali karakteristično je to što je, počev od drugog člana, razlika između svaka dva uzastopna člana (tj. između jednog člana i njegovog prethodnog člana) uvek jedan isti broj. Takvi nizovi zovu se **aritmetički nizovi (ili aritmetičke progresije).**

Navedeni nizovi (1)—(4) su aritmetički nizovi, jer je u prirodnom nizu ta razlika 1, u nizu parnih i nizu neparnih brojeva ta razlika je 2, a u nizu (4) ta razlika je 5.

Evo nekoliko primera konačnih nizova:

$$(5) \qquad 1\ \ 4,\ 7,\ 10, \ldots, 91;$$

$$(6) \qquad 100,\ 90,\ 80,\ 70, \ldots, 10;$$

$$(7) \qquad \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots, \frac{101}{2}.$$

U prvom od njih je razlika 3, u drugom je razlika -10, a u trećem je razlika 1.

Ako razliku dva uzastopna člana aritmetičkog niza obeležimo sa d, možemo pisati:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots\ldots=d.$$

Dakle, aritmetički niz

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n,\ldots$$

karakteriše to što je

$$\begin{aligned} a_2-a_1&=d,\\ a_3-a_2&=d,\\ a_4-a_3&=d,\\ \ldots&\ldots \end{aligned}$$

tako da je odatle redom:

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+d,\\ a_3&=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+\mathbf{2}\,d,\\ a_4&=a_3+d=(a_1+2\,d)+d=a_1+\mathbf{3}\,d. \end{aligned}$$

Na osnovu toga je, na primer,

$$a_{11}=a_1+\mathbf{10}\,d,$$

te bilo koji član a_n možemo napisati u obliku

(8) $$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

Pomoću ove formule možemo izračunati bilo koji član aritmetičkog niza ako znamo prvi član a_1 i razliku d. Na primer, u nizu (5) je $a_{17}=1+(17-1)\cdot 3=49$.

U nizu neparnih brojeva je $a_1=1$, $d=2$, pa je

$$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2\,n-1,$$

a u nizu parnih brojeva je $a_1=2$, $d=2$, pa je

$$a_n=2+(n-1)\cdot 2=2\,n.$$

Možemo, sem toga, da odredimo na kojem se mestu u nizu nalazi neki dati član, kao na primer, u nizu (5) broj 91; u tom slučaju je $a_n=91$ (ne znamo mesto tog člana, tj. ne znamo broj n), pa je

$$91=1+(n-1)\cdot 3,$$

a odatle je $n=31$, pa je, dakle, $91=a_{31}$.

5. Posle ovoga možemo odgovoriti na sledeća pitanja:

1) Kako glasi niz od 6 članova čiji je prvi član $a_1=4$, a razlika je $d=9$?

2) Koliko članova ima aritmetički niz

$$1,\ 5,\ 9,\ 13, \ldots, 489?$$

3) Kako glasi sedamdeseti član niza

$$16,\ 10,\ 4,\ -2, \ldots ?$$

4) Kako glase prvi i deseti član aritmetičkog niza čiji je treći član $a_3=8$, a peti član $a_5=14$?

5) Kako glasi niz od 10 članova ako mu je peti član $a_5=-2$, a razlika je $d=7$?

—

М. Космајац (Титоград)

РЈЕШАВАЊЕ КОНСТРУКТИВНИХ ЗАДАТАКА САМО ПОМОЋУ ЛЕЊИРА

При рјешавању конструктивних геометријских задатака служимо се лењиром и шестаром. Рјешавање конструктивног задатка своди се на повлачење правих и кружница и одређивање њихових пресјечних тачака искључиво помоћу лењира и шестара — што, опет, не значи да се неки од тих задатака не могу ријешити и само помоћу лењира или пак само помоћу шестара.

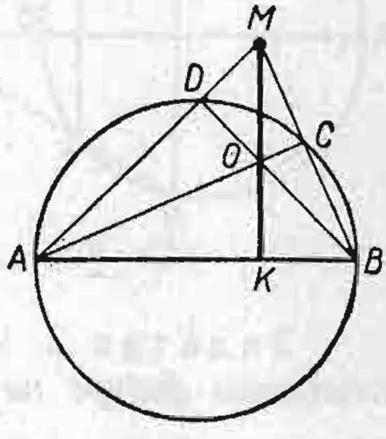
Овде ћемо показати како се неки конструктивни задаци рјешавају само помоћу лењира, а у наредном броју „Математичког листа" показаћемо како се неки конструктивни задаци рјешавају само помоћу шестара.

При рјешавању конструктивног задатка само помоћу једног лењира треба имати на уму да се помоћу лењира могу повлачити само праве. При томе да би се права конструисала потребно је знати положај двеју њених тачака.

Задатак 1. — *Из тачке М, која лежи ван или унутар кружнице чији центар није означен, спустити нормалу на пречник АВ или на његов продужетак.*

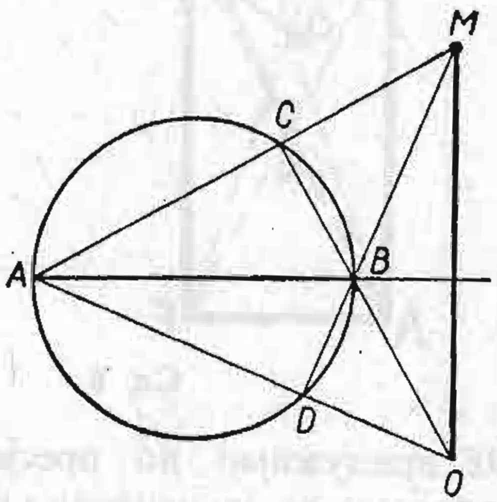
Р ј е ш е њ е. — Размотрићемо три случаја.

а) Тачка M лежи ван кружнице, а нормала из M на AB сече кружницу (сл. 1). Спојимо тачку M са тачкама A и B. Права AM сече кружницу у тачки D, а права BM у тачки C. Повуцимо дужи AC и BD. Тада ће AC и BD бити висине троугла ABM (јер су углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ прави — као периферијски углови над пречником AB кружнице, дакле: $AC \perp BM$ и $BD \perp AM$). Пошто знамо да се све три висине троугла ABM морају сећи у једној тачки (овде је то тачка O-пресек висина AC и BD), то и трећа висина MK троугла ABM мора проћи кроз ту тачку O. Према томе, права кроз тачке M и O биће тражена нормала на пречник AB.

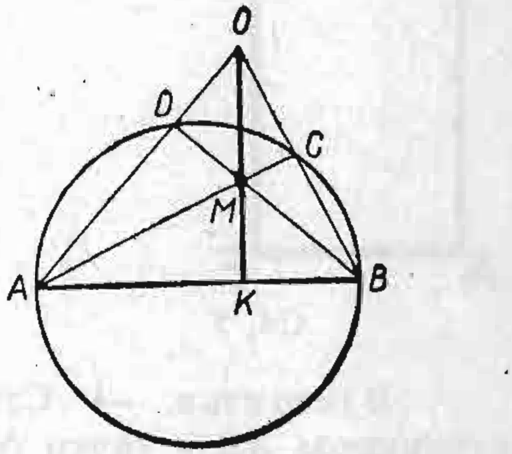


Сл. 1

b) Тачка M лежи ван кружнице, а нормала из M на AB не сече кружницу. Конструкција је приказана на сл. 2, а изводи се на сличан начин као у претходном случају. Сам дај образложење!



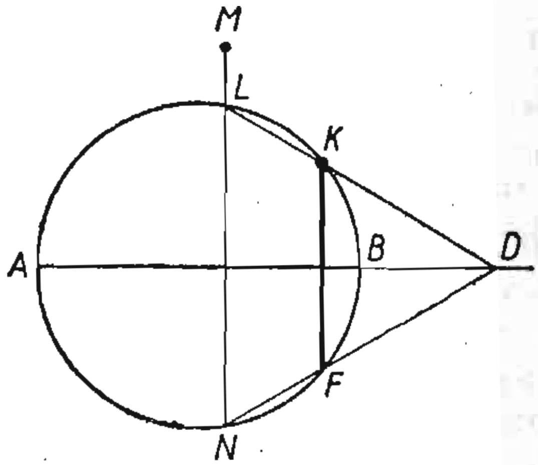
Сл. 2



Сл. 3

c) Тачка M је у кружници (сл. 3). Редослед у конструкцији правих је следећи: AMC, BMD, ADO, BCO и, на крају, OMK (тражена нормала). Објашњење дајте сами!

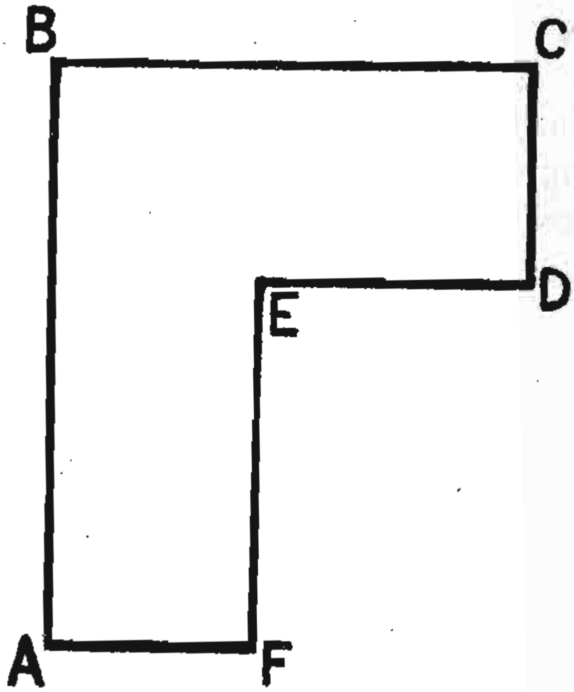
З а д а т а к. 2. — *Из тачке K, која лежи на датој кружници, спустити нормалу на пречник AB те кружнице* (*сл. 4*).



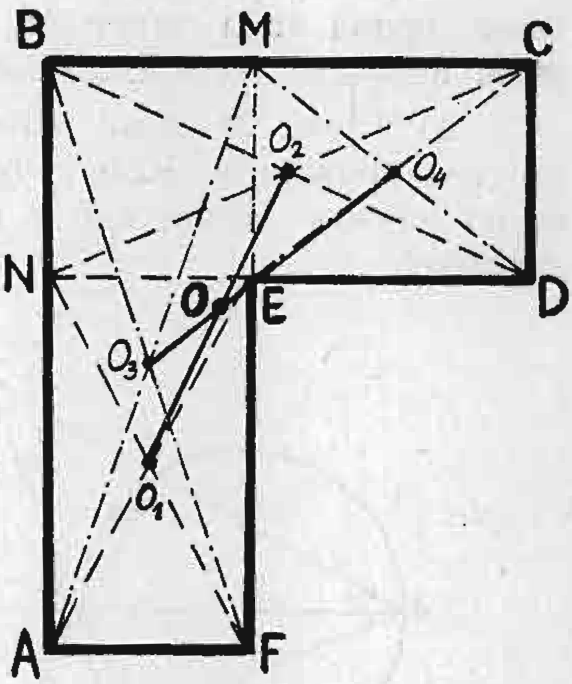
Сл. 4

Рјешење. — Узмимо коју било тачку M и из ње спустимо нормалу MN на AB (задатак 1). Повлачимо праву кроз тачке K и L. Нека је D тачка у којој та права сече праву AB. Спојимо тачку D са N. Нека DN сече кружницу у тачки F. Најзад, спојимо тачке K и F. Дуж KF биће нормална на AB. Докажите то сами.

Задатак 3. — *Само помоћи лењира одредити положај тежишта фигуре на сл. 5.*



Сл. 5



Сл. 6

Рјешење. — Страницу DE продужимо до пресјека са страницом AB у тачки N. Тада уочавамо да је нацртана фигура састављена од правоугаоника $AFEN$ и $NDCB$. Тежиште сваког од ових правоугаоника налази се у пресјеку њихових дијагонала, тј. у тачкама O_1 и O_2. Помоћу лењира ћемо ове тачке лако одредити. Дакле, тежиште цијеле фигуре лежи негдје на $O_1 O_2$.

Продужимо сада FE до пресјека са BC у тачки M, па сада дату фигуру прикажимо као фигуру која је образована од правоугаоника $AFMB$ и $EDCM$. Тежишта O_3 и O_4 тих правоугаоника одредићемо помоћу лењира, повлачењем њихових дијагонала. Тежиште цијеле фигуре лежи негдје на правој O_3O_4.

Према томе, тежиште цијеле фигуре налази се у пресјеку правих O_1O_2 и O_3O_4, тј. у тачки O.

Напомена. — Само помоћу лењира ријешите и задатке 359—362 из рубрике „Одабрани задаци" (стр. 22).

B. Marinković (Beograd)

NEOBIČNA POVRŠ

Mnoge stvari imaju bar dve strane — prednju i zadnju, spoljašnju i unutrašnju, odnosno lice i naličje. Prednja je ona strana koja je okrenuta posmatraču, a ona koju on ne vidi je zadnja. No i bez obzira na položaj posmatrača obično se zna šta je prednja strana (spoljašnja strana, lice i sl.) a šta zadnja (unutrašnja strana, naličje i sl.), na primer: spomenika, krova, kape, tkanine i sl. Čak i površ lopte ima dve strane (spoljašnju i unutrašnju), jer možete zamisliti da je lopta šuplja i da gledate iznutra. Slično je sa mehurom od sapunice. I svaki list hartije ima dve strane — prednju i zadnju, odnosno gornju i donju (zavisi kako je postavljen): jednu stranu možemo obojiti jednom, a drugu drugom bojom. U vezi s tim, svakako ćete se setiti i ravni: ma kako je postavili, ona uvek ima dve strane.

Na taj način, izgleda da svaka površ mora imati dve strane. Zaista, kako drugačije i može biti?

Postavimo, međutim, pitanje: **postoji li neka površ koja ima samo jednu stranu** — ni spoljašnju ni unutrašnju, ni prednju ni zadnju, ni lice ni naličje, ni levu ni desnu?

Šta, niste u stanju da odgovorite na to pitanje? Neka vas to mnogo ne brine. Nećete biti ni prvi ni poslednji kome to nije pošlo za rukom.

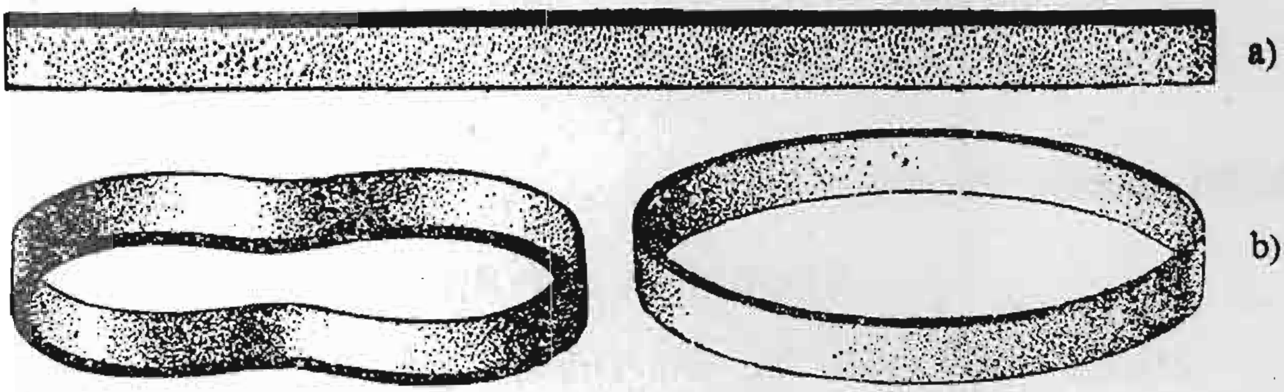
Ipak, takva površ postoji.

Da biste se u to svojim očima uverili i da biste i sami načinili model takve površi, pripremite: makaze, veći list belog papira, lepak, vodene bojice, četkicu i olovku.

A sada na posao! Čitajte polako ovo što sledi i radite sve što se zahteva.

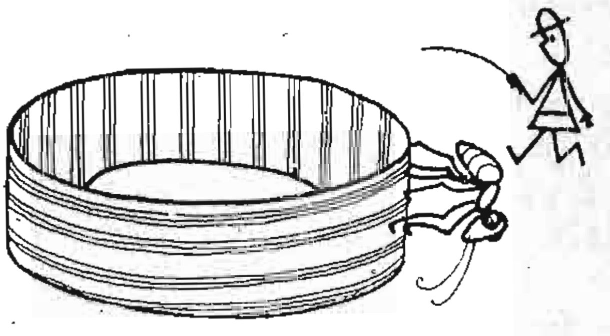
1. Od lista bele čvršće pisaće hartije isecite dve pravougaone trake tako da svaka bude široka 3—4 cm, a dugačka koliko i list, tj. oko 30 cm. Naravno, možete imati i dužu traku.

Uzmite jednu takvu traku (sl. 1 a), spojte jedan njen kraj s drugim i zalepite ih (sl. 1 b). Dobićete jedan cilindrični pojas, tj.



Sl. 1

površ koja vas podseća na omotač valjka. Ovaj pojas očigledno ima dve strane — jednu spoljašnju i jednu unutrašnju; jednu od njih možete obojiti jednom bojom (npr. crvenom), a drugu-drugom (npr. plavom). Učinite to. Ta površ ima i dve ivice (dva kraja, ruba) koje je ograničavaju. Ako bi, recimo, neki mrav hteo da pređe s jedne strane (spoljašnje) ovog cilindričnog pojasa-našeg prstena od hartije na drugu (unutrašnju), onda bi on svakako morao preći preko jedne od ivica. Ukoliko bi se on kretao samo po spoljašnjoj strani (sl. 2), onda bi se posle izvesnog vremena vratio u polaznu tačku (slično Magelanovim brodovima koji su obišli Zemljinu kuglu); on pri tome može „posetiti“ svaku tačku na toj strani, čak i više puta!

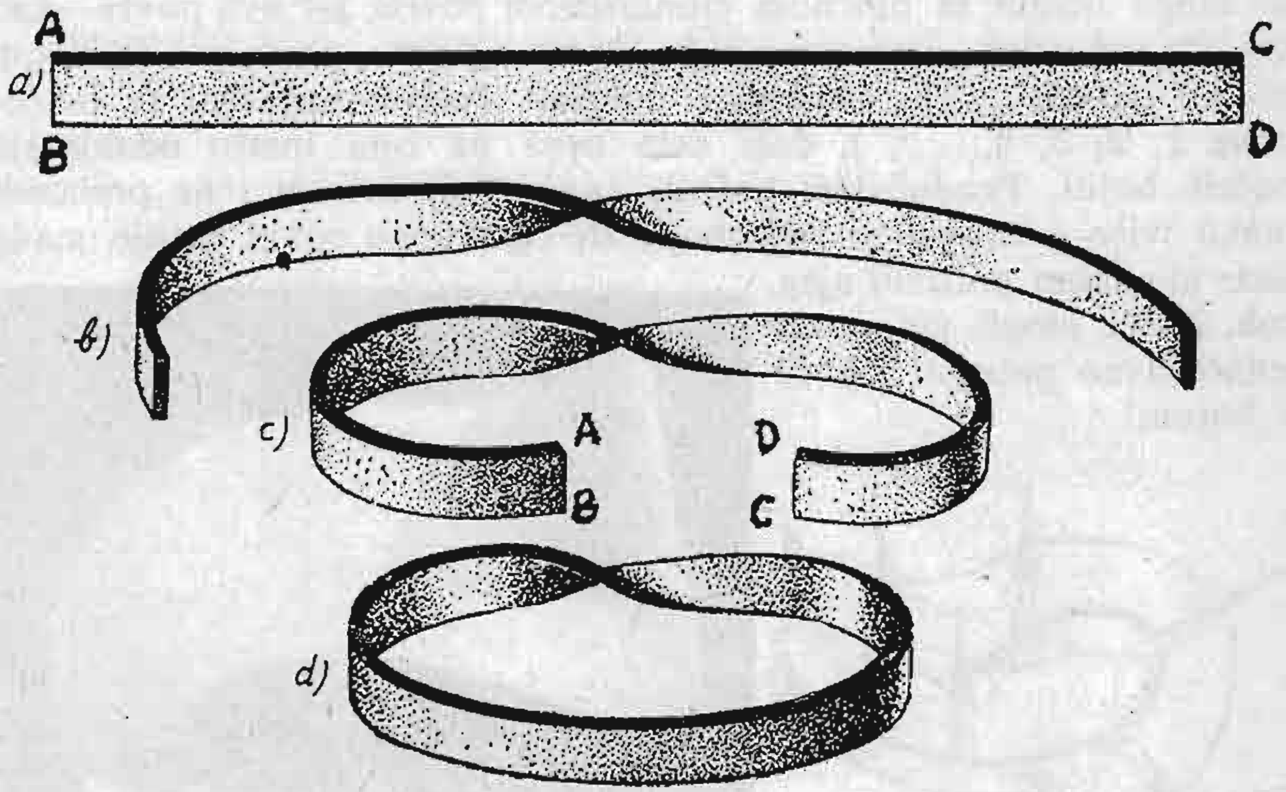


Sl. 2

To je sve u redu, reći ćete.

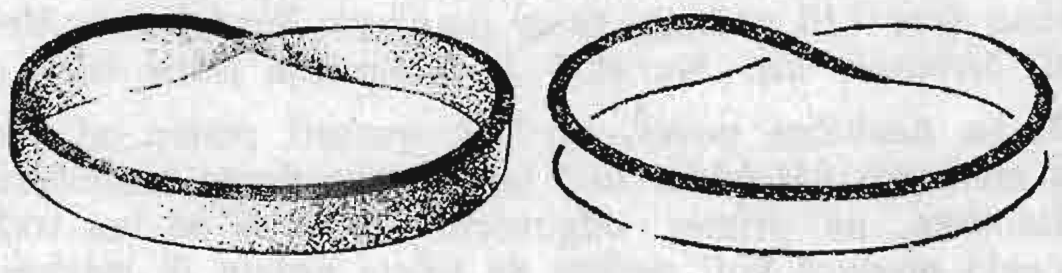
Ostavite sada taj cilindrični pojas.

2. Uzmite onu drugu pravougaonu traku od hartije (označimo je sa *ABCD*; vi to ne morate činiti; sl. 3 *a*) i uvrnite jedan njen kraj za 180° tako da na zaokrenutom kraju donja ivica dođe gore, a gornja dole (sl. 3 *b*); zatim, ne ispuštajući tako uvrnutu traku iz ruku, približite njene krajeve (sl. 3 *c*), spojte ih (*A* sa *D* i *B* sa *C*) i zalepite. Opet ste dobili jedan pojas, ali pomalo neobičan — malo je uvrnut i isktivljen (sl. 3 *d*, 4 i 6) i podseća vas na uvrnuti kaiš kojim se opasujete.



Sl. 3

Pred vama je sada neobičan neki pojas — površ koja ima *samo jednu stranu i samo jednu ivicu* koja je ograničava (sl. 4 i 6). Da je to zaista tako uverićete se ako stavite vrh olovke na bilo koje mesto te površi i krećete je polako duž hartije. Doći ćete na mesto

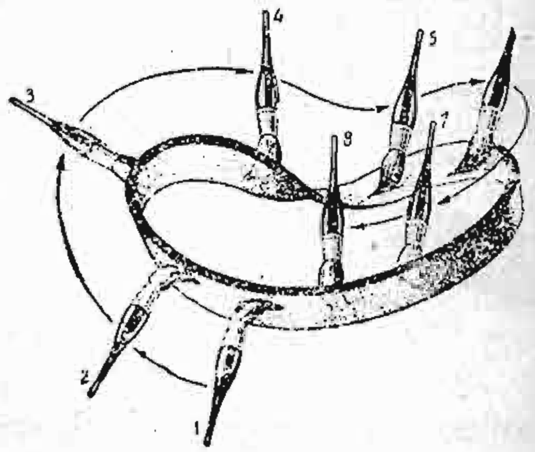


Sl. 4

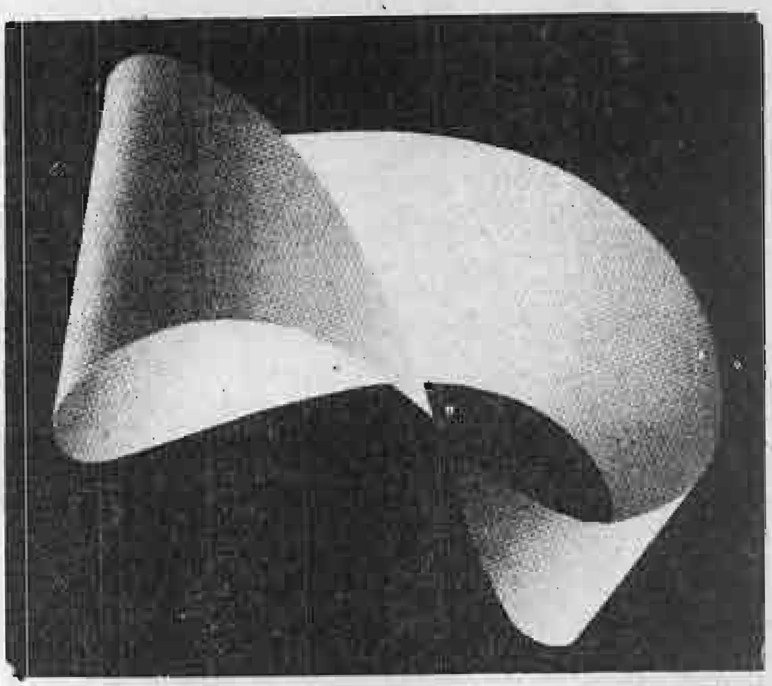
odakle ste i počeli a da olovku uopšte ne podižete sa hartije i ne prelazite preko ivice (kraja, ruba) površi. Olovka će ostaviti trag „s obe strane" hartije. Ako bi onaj naš mrav krenuo duž tog traga, svakako biste se začudili kada bi on stigao na polaznu tačku, ali s nogama gore. Štaviše, ne prelazeći ivicu (rub), on ovog puta može da „poseti" svaku tačku na ovoj neobičnoj površi.

Lako se proverava da ta površ ima *samo jednu ivicu*, jedan rub (sl. 4) — to je jedna zatvorena kriva linija.

Ovu neobičnu površ ne možete obojiti u dve boje kao što ste to mogli učiniti sa običnom cilindričnom površi, jer ova površ—kao što ste već videli—ima *samo jednu stranu*. Naime, povlačeći četkicom po toj površi (sl. 5, uzastopni položaji četkice označeni su brojevima 1, 2, 3, 4, . . . ,), doći ćete opet na ono mesto odakle ste počeli bojiti. Produžujući bojenje (ne dižući četkicu i ne prelazeći preko ivice — ruba površi) obojili ste celokupnu površ hartije, mada niste nijednom prelazili njen rub. Znači, mogli ste površ jednostavno potopiti u kofu s bojom!



Sl. 5



Sl. 6

Ovu interesantnu površ prvi je izučavao nemački matematičar *A. Mebius* (pre 110 godina), te se po njemu ona i naziva *Mebiusova površ ili Mebiusov list*. Na sl. 6 je fotografija jedne takve površi.

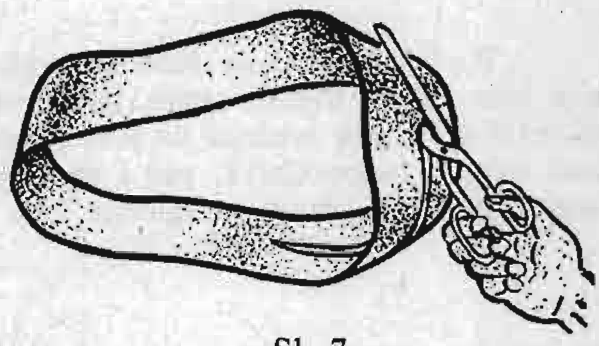
3. Ta neobična površ, taj naš uvrnuti prsten od hartije ili drugog matirijala (*Mebiusov list*) ima i neka druga zanimljiva svojstva. Šta biste, na primer, odgovorili kad bi se od vas tražilo da nađete neki predmet koji možete da sečete nožem ili makazama po sredini i skroz da ga razrežete, a da opet dobijete celo? Čudno, zar ne? Sečeš nešto, a ono opet ostaje celo!

Uzmite makaze u ruke i pokušajte da se uverite da je i to moguće.

Ako običnu cilindričnu površ, onu koju ste prvo napravili (sl. 1 b), razrežete duž njene srednje linije (ili duž bilo koje linije paralelne sa rubom trake), očigledno je da ćete dobiti dve takve cilindrične površi (dva prstena od hartije), pri čemu će dužina ruba i kod njih biti ista.

A šta će se dobiti ako Mebiusovu površ razrežete duž srednje linije trake od koje je načinjena?

Zabodite vrh makaza ili oštrog noža na bilo koje mesto Mebiusove površi — one koju ste sami napravili — i secite traku po sredini sve do mesta od kojeg ste počeli da sečete (sl. 7). Svakako očekujete da ćete dobiti dva upola uža pojasa. Ali prevarili ste se. Dobićete samo jedan pojas (prsten), dvaput uži ali i dvaput duži. Lako ćete se uveriti da je ova nova traka uvrnuta ne za 180°, već za 360°. Možete tu novu traku opet razrezivati na isti način (tj. duž trake tačno po sredini). Opet nešto neočekivano! Traka se raspala na dve trake, koje su zakačene jedna za drugu.



Sl. 7

4. Predlažemo vam sledeće zanimljive zadatke koje možete postaviti svojim drugovima ili ukućanima (naravno, pošto ih prethodno sami rešite).

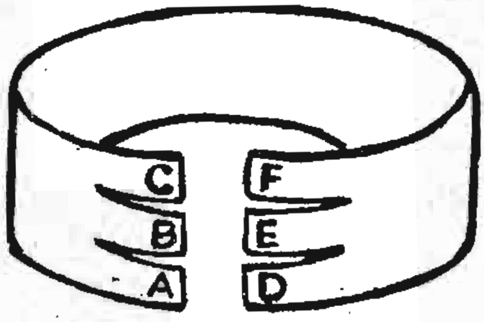
1) Napravite Mebiusov list i predložite nekome da ga makazama raseče po sredini na dve uže trake. On će se svakako tog posla prihvatiti uveren da je to veoma jednostavno, ali će se začuditi kada mu u ruci ostane cela traka.

2) Od nešto veće i šire trake napravite Mebiusovu površ i razrežite je makazama tako da linija razreza stalno ide dvaput bliže levom rubu prvobitne trake (linija razrezivanja obići će Mebiusovu površ dvaput). Šta će se pri tome dobiti? (Dva prstena, ali su jedan za drugi zakačeni).

3) Šta će se desiti, ako se uzme traka od hartije pa se jedan njen kraj uvrne za $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ (ili za $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$), zalepi za drugi kraj i dobijeni model raseče po srednjoj liniji trake?

4) Uzmite opet onu Mebiusovu površ dobijenu uvrtanjem pravougaone trake za 180° Makazama napravite ne jedan već dva razreza duž trake kao da hoćete da je delite na tri uže trake. Šta ćete dobiti?

5) Uzmite nešto veću traku od hartije i zasecite je kao na sl. 8, ali nešto više. Zalepite krajeve *A* i *D*. Provucite kraj *B* ispod



A i zalepite ga sa E. Provucite zatim kraj *C* između *A* i *B*, a kraj F između *D* i *E*, pa onda spojte i zalepite krajeve *C* i *F*. Sva spajanja i lepljenja vršite bez uvrtanja krajeva.

Zatim svaki započeti razrez produžite duž celog modela. Šta ste dobili?

Primedba. — Kao što vidite, tvrđenje da svaka površ ima dve strane nije bilo tačno. Prema tome, kada matematičari zahtevaju da se dokazuje (obrazlaže) ova ili ona tvrdnja, na prvi pogled možda i jasna, onda oni to ne čine samo radi svoga zadovoljstva, već i radi proveravanja činjenica; neke od tih činjenica izgledaju nam sasvim očigledne, ali se proveravanjem utvrdi da su pogrešne.

П. Танчева (Скопје) и **Б. Галић** (Осијек)

РАЗЛИЧИТИ БРОЈНИ СИСТЕМИ

Необична аутобиографија

1. Прича се да је у списима једног математичара била нађена аутобиографија следеће садржине*:

„Завршио сам средњу школу као 33-годишњи младић и исте године сам се уписао на факултет, који сам завршио у 42. години живота. Заједно са својом млађом сестром, која је била у III разреду основне школе и имала је 20 година, отишао сам у један град да радим као професор. Школа је била удаљена 10 km од железничке станице. Ово сам растојање прелазио полако: пешице за сат, а бициклом за непуних 100 минута. Посао у школи сам доста лако обављао, нисам био много оптерећен: имао сам само 100 часова недељно. Моја сестра учила је врло добро — за 13 година завршила је осмољетку, као прилично млада девојка од 30 година“.

Заиста је ово чудна и необична „аутобиографија“. На први поглед изгледа као да је реч о некој шали. Поставља се питање како да се објасне очите противречности у наведеном тексту. Међутим, ако се текст пажљиво размотри до краја, видеће се да у њему нема ничег чудног и необичног. Математичар, наиме, није користио декадни (десетични) бројни (бројевни) систем, већ неки други. Дешифровање правог смисла наведене „аутобиографије“ лакше ћемо моћи да обавимо уколико се претходно упознамо са недесетичним бројним системима и с прелазом из једног система у други.

2. Одређени начин састављања нових јединица и бројева и писање и читање тих бројева уз употребу одређеног броја знакова, назива се *бројни (бројевни) систем*. Ви се свакодневно служите тзв. *декадним (десетичним)* бројним системом.

---

* Садржина ове „Необичне аутобиографије“ узета је из „Занимљиве аритметике“ И. Ј. Перељмана.

Као што вам је познато, да би се написао било који број у декадном систему довољно је десет знакова-цифара: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Више их није потребно захваљујући коришћењу позиционог принципа. Наиме, *декадни бројни систем је позициони, а то значи да свака цифра у било којем природном броју има поред бројне и своју месну (позициону) вредност, односно, једна иста цифра има различито значење зависно од тога на којем се месту у броју налази.* На пример, свака тројка у броју 5333 има различиту месну вредност: прва сдесна означава 3 јединице, друга означава 3 десетице, а трећа — 3 стотине (стотице); тај се број може написати као збир:

$$5333 = 5\,\text{Х} + 3\,\text{С} + 3\,\text{Д} + 3\,\text{Ј} = 5000 + 300 + 30 + 3 =$$

$$= 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 3.$$

У декадном бројном систему сваких *десет јединица* којег било реда (нижих јединица) узима се као једна јединица следећег вишег реда (виша дек. јединица). Тако, 10 простих јединица (јединица I реда) = 1 десетица (јединица II реда), 10 десетица (јединица II реда) = 1 стотица (јединица III реда), итд. Овај се систем и зове декадни зато што се за његову основу (базу) узима број *десет* (толико знакова-цифара треба за писање бројева у том систему).

3. За базу бројног система може се узети било који природни број, почев од 2. Дакле, могући су разни позициони бројни системи, али се употребљавају или су били у употреби само неки од њих. Нема сумње да је проналазак позиционих бројних система један од најважнијих производа људског ума. У историји људске културе били су у разним епохама, поред декадног, у употреби и други системи, на пример са базама: 5 (петични), 12 (дванаестични), 20 (двадесетични), 40 (четрдесетични), 60 (шездесетични) и др. Тако, на пример, код Вавилонаца основа бројног система био је број 60; дељење круга на 360 делова, 1 часа на 60 минута, а 1 минута на 60 секунди — остаци су вавилонског бројног система. Двадесетични систем био је распрострањен код индијанских племена Северне и Јужне Америке, као и код домородаца у Централној и Јужној Америци. Афрички народи употребљавали су петични и двадесетични систем, итд. Доста погодан био је дванаестични систем, јер његова основа (број 12) има више делилаца: 2, 3, 4 и 6, док нпр. основа декадног система (број 10) има само два делиоца: 2 и 5 (зато дељење бројева у систему базе 12 не доводи често до остатака и разломака, као што је то чест случај у декадном систему). Овај је систем био у употреби код старих Римљана. Остатке овог система сусрећемо и данас: 12 јединица (комада) = 1 туце; 12 туц. = 1 грос.

Неки недесетични системи користе се и данас, на пример, широку примену у електронским рачунским машинама имају системи с базом 2 (дијадни: за писање бројева користе се само две цифре: 0 и 1), 3 и 8.

Сваки од поменутих система у односу на остале има извесне предности или недостатке.

Најраспрострањенији је декадни бројни систем, што се тумачи с једне стране тиме што је у основи првобитно било рачунање помоћу прстију на обема рукама, а с друге стране — једноставношћу и удобношћу рачунања у том систему.

4. *Увек се може извршити прелаз из једног система у други.*

Сваки број написан у декадном систему може се исто тако написати и у систему с неком другом базом. За означавање бројева у новом систему ако је нова база (основа) мања од 10, користимо се истим цифрама као и у декадном систему (наравно, не увек свим); на пример, за записивање било којег броја у петичном систему довољно је пет знакова и то: 0, 1, 2, 3, 4. У овом систему број „пет" записао би се овако: 10; то показује да имамо једну јединицу другог реда (њу чини пет обичних јединица), а да немамо ниједну јединицу првог реда; број „седам" записао би се као 12 (Образложи зашто?). Ако је, пак, база система већа од 10, онда је потребно да се број цифара допуни уводећи нове знаке, нпр, у дванаестичном систему поред уобичајених десет цифара потребно је увести нове знаке за цифре „10" и „11", на пример, знаке a и b или ꞁ и ꝣ и сл.

Пример 1. — *Број 974 написати у осмичном систему.*

Да би се то учинило потребно је да се прво одреди колико се у броју 974 садржи осмица (јединица II реда, тј. „десетица") и колико преостаје простих јединица. Ради тога ћемо број 974 поделити са 8, тј. са основом система.

$$
\begin{array}{l}
974:8=121 \rightarrow \text{јединице II реда} \\
17 \\
\;14 \\
\;\;\mathbf{6} \rightarrow \text{јединице I реда}
\end{array}
$$

Значи, у нашем броју има 121 јединица II реда (количник 121) и 6 јединица I реда (остатак 6).

Сваких 8 јединица II реда чини једну јединицу III реда („стотину"). Да би се видело колико јединица III реда има у јединицама II реда, тј. у 121, треба 121 поделити са 8 (база система).

$$
\begin{array}{l}
121:8=15 \rightarrow \text{јединице III реда} \\
\;41 \\
\;\;\mathbf{1} \rightarrow \text{јединице II реда}
\end{array}
$$

Остатак 1 даје број јединица II реда, а количник 1 — број јединица III реда. Тражимо сада колико се јединица IV реда садржи у 15 јединица III реда. Ради тога делимо 15 са 8.

$$
\begin{array}{l}
15:8=\mathbf{1} \rightarrow \text{јединице IV реда} \\
\;\;\;\mathbf{7} \rightarrow \text{јединице III реда.}
\end{array}
$$

Остатак 7 даје јединице III реда, а количник 1 — јединице IV реда („хиљаде").

Према томе, број 974 дат у декадном систему, у осмичном систему садржи: 1 јединицу IV реда, 7 јединица III реда, 1 јединицу II реда и 6 јединица I реда, па можемо написати:

$$\mathbf{974_{10}=1716_8}.$$

Основа система пише се ситно доле поред броја, понекад и у загради: $1716_{(8)}$.

Ради једноставнијег писања, а с обзиром да данас углавном употребљавамо декадни бројни систем, обично не пишемо индекс уз бројеве у том систему. Према томе, кад напишемо 375, онда то значи 375_{10}.

Ради боље прегледности, све извршене операције могу се груписати на следећи начин:

$$
\begin{array}{lll}
974:8=121; & 121:8=15; & 15:8=\boxed{1} \\
17 & 41 & \boxed{7} \\
\ 14 & \boxed{1} & \\
\ \boxed{6} & &
\end{array}
$$

Уоквирене бројеве (остаци при дељењу и последњи количник) треба написати у обрнутом редоследу. Дакле:

$$\mathbf{974_{10}=1716_8}.$$

Пример 2. — *Решити обрнути задатак, тј. број* 1716_8 *написати у декадном систему.*

Поступак је сада обрнут у односу на претходни, наиме, сваку цифру (број јединица одређеног реда) треба помножити одговарајућом месном вредношћу и добијене производе сабрати:

$$1716_8=1\cdot 8^3+7\cdot 8^2+1\cdot 8+6=512+448+8+6=974.$$

У пракси се то ради тако да се јединице највишег реда (1) множе основом система (8) и добијеном производу (8) додају се јединице следећег реда (7); добијени збир (15) множи се поново основом система (8) и добијеном производу (120) додају се јединице следећег реда (1), добијени збир се множи са основом система и тако до краја, тј. док се не додају и јединице I реда. Тада добијени број представља тражени број у декадном систему. Прегледно исписано, то у нашем случају изгледа овако: ⟶

$$
\begin{array}{r}
1 \\
\times\ 8 \\ \hline
8 \\
+\ 7 \\ \hline
15 \\
\times\ 8 \\ \hline
120 \\
+\ 1 \\ \hline
121 \\
\times\ 8 \\ \hline
968 \\
+\ 6 \\ \hline
974
\end{array}
$$

Пример 3. — *Број 1654, написан у декадном систему треба, написати у дванаестичном систему.* Поред цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, морамо увести још два нова знака за 10 и 11. Нека су то знаци-цифре ꞁ, ↊, Применимо ли познату схему, имаћемо:

$$
\begin{array}{ll}
1654:12=137; & 137:12=\boxed{11}=↊ \\
\ 45 & 17 \\
\ 94 & \boxed{5} \\
\boxed{10}=ꞁ &
\end{array}
$$

Значи, $\mathbf{1654_{10}=\overline{(11)\,5\,(10)}=\overline{↊5ꞁ}_{12}}$.

Проверавање: $\overline{↊5ꞁ}_{12}=↊\cdot 12^2+5\cdot 12+ꞁ=11\cdot 144+5\cdot 12+10=1654.$

5. Уколико је основа бројног система мања, утолико ће записивање бројева бити „дуже". На пример, да се број „двадесет седам" напише у декадном систему потребне су две цифре: 27; у петичном систему тај се број записује са три цифре: 102; тај исти број написан у дијадном систему (база је 2, а за записивање бројева користе се само два знака: 0 и 1) биће петоцифрен: 11011.

Значи, $\mathbf{27_{10}=102_5=11011_2}.$

Уколико је основа бројног система већа утолико ће број бити „краћи", али се мора памтити већи број знакова (цифара); нпр. за систем базе 60 потребно је 60 знакова (цифара).

Међутим, у сваком систему број 10 представља јединице II реда, број $10^2 = 100$ значи јединице III реда итд.

6. Сада сами можете да дешифрујете напред наведену „Необичну аутобиографију". Лако закључујете да су у њој бројеви записани у петичном бројном систему, те ће бити: $33_5 = 18$; $42_5 = 22$; $20_5 = 10$; $10_5 = 5$; $100_5 = 25$; $13_5 = 8$; $30_5 = 15$. Дакле, математичар је завршио средњу школу не у 33. години већ у 18. години, факултет је завршио не у 42. години већ у 22. години, итд.

7. *Рачунске операције* са бројевима написаним у којем било бројном систему, врши се по истим правилима као и са бројевима у декадном систему, само при претварању јединица једног реда у јединице вишег реда, треба имати на уму базу (основу) система. На пример, за базу 6 имаћемо:

1) $\begin{array}{r} 453 \\ +\ 443 \\ \hline 1340 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 3021 \\ -\ 425 \\ \hline 2152 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 3045 \cdot 24 \\ \hline 20312 \\ 10134 \\ \hline 122052 \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} 502 : 21 = 22 \\ -42 \\ \hline 42 \\ -42 \\ \hline = 0 \end{array}$

Извршити контролу преводећи све бројеве у декадни систем.

8. Задаци за вежбу

1) Све природне бројеве од 1 до 20 написати у двоичном систему (база 2).

2) Бројеве 253_{10}, 1000_{10}, 423_8 написати у петичном систему (база 5).

3) У којем бројном систему ће бити:

$$2 + 3 = 11; \quad 2 \cdot 3 = 12; \quad 3^2 = 21? \qquad \text{[База 4]}$$

4) Ако је $4 \cdot 4 = 20$, чему ће онда бити једнак производ $5 \cdot 5$ (у том истом бројном систему)? ($5 \cdot 5 = 31$; база је број 8)

5) Напишите датум свог рођења у бројном систему с базом: a) два, b) пет, c) дванаест.

6) Дешифрујте следећи текст: Овај часопис покренут је школске 13034/35. године. Тада је имао тираж 544200 примерака, а већ следеће школске 13035/40. године, тираж му је био 2050544 примерака по броју.

7) У којем бројном систему је извршено следеће множење?

$$\begin{array}{r} 213 \cdot 22 \\ \hline 431 \\ +431 \\ \hline 10241 \end{array}$$

Упутство. — Множењем 3 са 2 добија се јединица I реда, значи, цифре 6 у том систему нема, те се може претпоставити да је систем петични (база 5). У то се и уверавамо сабирањем бројева 4 и 3.

ZADACI

Naloge za preizkus znanja matematike za vpis v srednje šole

Vse šole v Sloveniji, 25. VI 1968.

1. Koliko metrov je 3 km 17 m 5 cm? [3017,05 m; *1 točka*]

2. Izračunaj: $\left(2\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right):\left(4\frac{2}{9}-\frac{5}{6}\right)=$ $\left[1\frac{1}{5};\ 1\ \textit{točka}\right]$

3. Načrtaj romboid s podatki: $a=6$ cm, $\alpha=60°$, $v_a=4$ cm!
[tačna konstukcija; *2 točki*]

4. Vrtnar je sadil sadike. Posušilo se jih je 51 ali 12%. Koliko sadik je posadil? [425; *2 točki*]

5. Obseg enakokrakega trikotnika s krakom 10 cm je 36 cm. Kolika je ploščina? [48 cm²; *3 točke*]

6. Izračunaj vrednost številskega izraza in napravi preizkus za $a=-3$ in $b=0$:

$(2a-b)^2+(a+2b)^2-(2a+b)(2a-b)$ [a^2+6b^2; *3 točke*]

7. Ploščina kroga, ki je včrtan rombu, meri 16π, stranica romba meri 10. Izračunaj ploščino romba! [$r=4$, $P=80$; *2 točki*]

8. Osnovna ploskev pokončne piramide je pravokotnik s stranicama 6 cm in 8 cm, stranski robovi merijo po 13 cm. Izračunaj prostornino!
[192 cm³; *3 točke*]

9. Reši enačbo $\frac{x+2}{3}-\frac{2x-3}{5}+1=\frac{x}{2}$. [$x=4$; *2 točki*]

10. Dano daljico razdeli na pet enakih delov! [*1 točka*]

11. Tretjina nosilca mostu je v zemlji, polovica v vodi, del nad vodo pa meri 1,5 m. Koliko meri nosilec? [9 m; *2 točki*]

12. Načrtaj funkcijo $4x+3y=12$. Določi ploščino nastalega trikotnika!
[6; *2 točki*]

Napomena. – Rešite i vi ove zadatke i uporedite svoje odgovore sa ovde navedenim. Zadaci su bodovani. Ukupan broj bodova je 25. Po našem mišljenju „položili ste prijemni ispit", ako ste sakupili više od 10 bodova.

Evo i prevoda manje poznatih reči.

naloga	– zadatak	stranski robovi	– bočne ivice
preizkuz	– proba, proveravanje	prostornino	– zapremina, volumen
ali	– ili, odnosno	enačba	– jednačina
trikotnik	– trougao, trokut	daljica	– duž
ploščina	– površina	nosilec	– stub
številka	– broj	del	– deo, dio
točka	– bod, poen	določi	– odredi, nađi
včrtan	– upisan		

Одабрани задаци

Ови задаци (а има их за сваки разред) треба да вам послуже за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати, упутства и решења нека вам служе за контролу.

Аритметика

337. Сви природни бројеви, почев од 1 написани су редом један иза другог: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, итд. Која цифра у том записивању стоји на стотом месту, а која на хиљадитом?

[На стотом месту је цифра 5 у броју 55]

338. Колико откуцаја учини срце човека за 75 година ако за 1 минут оно учини просечно 75 откуцаја? [Око 3000000000]

339. Које ће растојање прећи човек учинивши милион корака ако му је просечна дужина корака 75 cm? [750 km]

340. Милан и Марко су имали једнак број свески. Милан је дао Марку две своје свеске. Колико сада свески Марко има више од Милана? [4].

341. Не вршећи дељење утврдити да ли је број 9432 дељив са 36.
Решење. — Број 9432 дељив је и са 9 и са 4, па је зато дељив и са 36.

342. Уместо звездица ставите одговарајуће цифре:

$$1)\quad \begin{array}{r} 6*4* \\ -\,*8*3 \\ \hline 2847 \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{r} *9* \;\; 11 \\ \hline *9* \\ *9*\;\; \\ \hline ***1* \end{array}$$

Упутство. — Цифра јединица у другом делимичном производу је 2. Зашто? [Рез.: $912\cdot 11$]

343. Дешифрујте сабирање: $\overline{abc}+\overline{ba}=\overline{dcca}$. ($a$, b, c, d — цифре)

Упутство. — Мора бити $c=0$; $a=9$; јер се једино у том случају добија четвороцифрени збир, тада $d=1$ итд.

344. (Математички мозаик). — Дешифрујте овде приказани мозаик слова и математичких знакова. Цифре су замењене словима. Уместо слова ставите одговарајуће цифре тако да буду тачне све овде наведене операције (и по хоризонталама и по вертикалама). Пошто утврдите бројну вредност сваког слова, поређајте та слова према њиховој бројној вредности (од 0 до 9). Добићете реч — познати математички термин. [HIPOTENUZA]

$$\begin{array}{ccccc} ZIH & + & IOE & = & ATE \\ - & & + & & : \\ NOH & : & IZ & = & OE \\ \hline IZH & - & IEO & = & PU \end{array}$$

345. Израчунај на најједноставнији начин:

а) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}-7:21\right)$; б) $0{,}2\cdot\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}-0{,}15:0{,}3\right)$.

c) $333\cdot\left(\dfrac{17}{111111}+\dfrac{967}{222222}-\dfrac{2}{777}\right)$ [9/14]

346. Број A је за 25 % већи од броја B. За колико процената је број B мањи од броја A? [20 %]

347. За колико процената је број A већи од броја B, ако је A веће од B 7 пута? [600 %]

348. Шта је веће: a или $-a$?

Одговор. — Ако је $a>0$, онда је $a>-a$; ако је $a<0$, онда је $a<-a$; ако је $a=0$, онда је $a=-a$. (Неједнакост $a>0$ значи да је a позитиван број; неједнакост $a<0$ значи да је a негативан број).

Важна примедба. — Израз $+a$ или просто a може имати позитивну или нагативну вредност или бити једнак 0. На пример, за $a=-3$, израз $+a$ има негативну вредност -3. Израз $-a$ такође може имати позитивну или негативну вредност, као и вредност 0. На пример, за $a=-3$, израз $-a$ има позитивну вредност 3. Нека је $a=2xy^3+1$. За $x=1$ и $y=-2$ добићемо да је $a=-15$; тада је $-a= =-(-15)=15$.

349. Може ли се тврдити да је увек $2a>a$?

Одговор. — Не може. Ако је $a>0$, онда је $2a>a$; ако је $a<0$, онда је $2a<a$; ако је $a=0$, онда је $2a=0$. На пример, за $a=3$ имамо $6>3$, а за $a=-3$ имамо: $-6<-3$, за $a=0$ биће $2\cdot 0=0$; $0=0$.

350. Шта је веће: a или a^2? Образложи!

Одговор. — Ако је a између бројева 0 и 1 (то се записује овако: $0<a<1$), онда је $a>a^2$. За $a=0$ и $a=1$ је $a=a^2$. У осталим случајевима, тј. кад је $a<0$ и $a>1$, биће $a<a^2$. Провери ово на примерима.

351. Дат је израз $A=(M-N)-(P-Q)$. Одредити A ако је $M=2x^2-$ $-5x-3$; $N=-x^2-4x-1$; $P=2x^2+x-7$; $Q=4x^2+5x+1$.

Израчунати нумеричку вредност израза A за $x=-2$ на два начина:

1) замењивањем вредности за M, N, P, Q и упрошћавањем израза A;

2) израчунавајући најпре бројне (нумеричке) вредности за M, N, P, Q а онда их замењујући у израз A. [$5x^2+3x+6$; 20]

352. Попуните таблицу:

x	$-2{,}5$	-2	$-1/3$	0	$1\frac{1}{2}$	2	5
$2x-1$							
$x-3$							

За које вредности x је исправна једнакост $2x-1=x-3$? Напишите решење (корен) те једначине!

353. Решити једначину: $\frac{9h+7}{2}-\left(h-\frac{h-2}{7}\right)=27$ [$h=9$]

354. Разлика квадрата двају узастопних непарних бројева је 576. Који су то бројеви? [143 и 145]

355. Познато је да је 1 инч $=2{,}54$ cm. Нацртај график за претварање инча у центиметре. Помоћу тог графика утврди: a) колико инча има у: 6 cm; 4,5 cm; 1 cm и b) колико cm има у: 2,4 инча; 3,5 инча.

356. Од тачке A узете на некој правој, одмерене су дужи AB и AC тако да је $AB = 30$ mm, $AC = 50$ mm. Израчунати: a) дужину дужи BC; b) растојање од тачке A до средишта K дужи BC; c) растојање између средишта дужи AB и AC (нека су то тачке M и N).

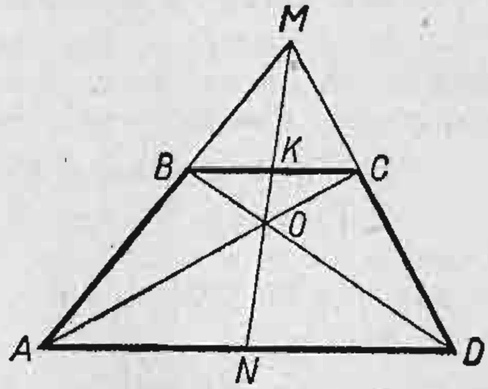
Размотрити два случаја: 1) кад су тачке B и C са исте стране тачке A; 2) кад су тачке B и C са разних страна од тачке A.

357. Две паралелне праве AB и CD пресечене су трећом правом EF. Један од добијених углова износи 55°. Колики су осталих седам углова?

358. Постоје ли линије (различите од кружнице), чије су све тачке једнако удаљене од једне сталне тачке?

Одговор. — То својство има било која линија на површи лопте.

359. Права која пролази кроз тачку пресека продужења кракова и пресечну тачку дијагонала, полови основице трапеза. Докажите да је та тврдња тачна. (Ову чињеницу можете искористити у решавању неких констриктивних задатака уз ограничење у погледу употребе средстава — на пример, за конструкције само помоћу лењира).



360. Дата је дуж и једна њој паралелна права. Користећи само лењир, наћи средиште дате дужи.

Упутство. — На датој правој узмите произвољну дуж; она и дата дуж су паралелне странице трапеза. Обе те дужи (основице трапеза) лако ћете само помоћу лењира располовити (в. зад. 359.).

361. Дате су две паралелне праве и произвољна тачка ван тих правих. Повући кроз ту тачку праву паралелну датим правим.

362. У троуглу је повучена једна средња линија. Повући и друге две средње линије користећи само лењир (без поделе).

Упутство. — Треба одредити средиште супротне странице. Повуците две тежишне линије троугла; а затим и трећу

363. Наћи непознате елементе правоуглог паралелепипеда према подацима наведеним у следећој таблици, где су a и b—дужина и ширина основе, h—висина паралелепипеда, B—површина основе, P—површина целог паралелепипеда, V—запремина:

	1	2	3	4
a	20 cm	0,32 m	20 cm	?
b	1,5 dm	0,21 m	?	0,3 m
h	30 dm	?	10 cm	20 cm
B	?	?	0,06 m²	?
P	?	?	?	?
V	?	6720 cm³	?	0,06 m³

Konkursni zadaci*

49. Dva su ribara pošla zajedno u ribolov. Jedan je ulovio 5 riba, a drugi 3 ribe. Kada su počeli da ih peku, naiđe neki putnik i upita ih da li može da doručkuje s njima zajedno, pa će im za to platiti. Ribari su na to pristali, te sva trojica sedoše da doručkuju, podelivši ribu na tri jednake porcije. Posle doručka putnik dade ribarima 8 dinara. Kako će ribari međusobno (ali pravedno) da podale taj novac?

50. U levom i desnom džepu kaputa imam ukupno 35 dinara. Ako iz desnog džepa prebacim u levi onoliko dinara koliko ih je bilo u levom, onda ću u desnom džepu imati 3 dinara više nego u levom.

Koliko sam dinara prvobitno imao u svakom džepu?

51. Dešifrujte ovaj mozaik, tj. umesto slova stavite odgovavajuće cifre tako da budu tačne sve navedene operacije (i po horizontalama i po vertikalama). Pošto utvrdite brojnu vrednost svakog slova, poređajte ta slova prema njihovoj vrednosti (od 0 do 9). Treba da dobijete reč koja na srpskohrvatskom jeziku znači jedan poznati matematički termin.

$$\begin{array}{ccccc} ATU & + & IAZ & = & IITE \\ - & & - & & : \\ NEH & : & IOH & = & E \\ \hline PAU & - & NZ & = & PPA \end{array}$$

52. U magacinu je bilo 100 kilograma jagoda. Izvršena analiza je pokazala da te jagode sadrže 99% vode. Posle izvesnog vremena analiza je ponovo izvršena i tada je utvrđeno da se sadržina vode u jagodama smanjila na 98%. Koliko su sada teške jagode? (Pod „jagodama" podrazumevamo jagode kao plod, dakle sve sastojke zajedno).

53. Dat je trougao ABC s uglom od 15° kod temena B i uglom od 30° kod temena C. U tački A povučemo normalu (okomicu) na pravu AB. Ona seče BC u tački D. Dokazati da je $BD = 2 \cdot AC$.

54. Dat je prečnik kruga $AB = 2R$. Poluprečnik OC čini sa poluprečnikom OB ugao od 45° (O je centar kruga). Tangenta na krug u tački C seče pravu AB u tački D. Izračunati: a) površinu trougla ODC; b) površinu i obim figure (lika) BCD koja je omeđena tangentom CD, duži BD i lukom BC.

Napomena. — Učenici V razreda mogu rešavati zadatke 49—51, učenici VI i VII razreda zadatke 49—53, a učenici VIII razreda — sve zadatke.

---

* Rešite ove zadatke i rešenja pošaljite uredništvu „Matematičkog lista". Najbolja rešenja, a takođe i imena svih učenika koji su sve zadatke ili neke od njih sasvim tačno rešili, objaviće se u ovom časopisu.

Najboljim rešavateljima za svaki razred dodeliće se *nagrade* na kraju školske godine.

Svako rešenje (s tekstom i rednim brojem zadatka) treba pisati na jednoj strani papira. Svako rešenje treba čitljivo potpisati punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu i mesto, na primer: *Ivan Radović*, uč. $VIII_3$ raz. Osnovne škole „Učitelj Tasa", Niš.

Zadatke rešavajte s a m o s t a l n o ne tražeći pomoć ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite o b r a z l o ž e n o i č i t k o. Neuredna, načitljiva rešenja i rešenja (rezultati, odgovori) bez obrazloženja neće se uopšte uzimati u obzir.

Rešenja zadataka iz ovog broja poslati do 2. XII 1968. godine.

Adresa: „Matematički list", Beograd, p.p. 728

Na koverti naznačiti: *Konkursni zadaci.*

Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista" II. 5

43. *Zadruga je za setvu uzorala 300 ha. Da je bilo još 3 traktora rad bi bio završen za 6 dana ranije. Koliko je bilo traktora u zadruzi, ako 1 traktor dnevno uzore 15 ha?*

Prvi način (zaključivanjem). — Kada bi bilo još 3 traktora rad bi svršili 6 dana pre. Pošto 1 traktor dnevno uzore 15 ha, to bi 3 traktora dnevno uzorala $3 \cdot 15$ ha $= 45$ ha. Pošto za dan uzoru toliko (45 ha), za 6 dana bi uzorali $6 \cdot 45$ ha $= 270$ ha. Ostaje još 300 ha$-$270 ha $= 30$ ha, što oni ne bi mogli uzorati. Taj ostatak bi za 1 dan uzorala 2 traktora. Prema tome, u zadruzi je bilo 2 traktora.

Nebojša Jovanić, V_3, OŠ „M. Kosovac", Šabac

Drugi način (pomoću jednačina). — Označimo sa x broj traktora, a sa y broj dana. Tada, prema uslovima zadatka, imamo jednačine:

$$\begin{aligned} 15xy &= 300 \\ 15(x+3)(y-6) &= 300 \end{aligned} \quad \text{ili} \quad \begin{aligned} xy &= 20 \\ (x+3)(y-6) &= 20. \end{aligned}$$

Posle množenja u drugoj jednačini, dobićemo sistem:

$$\begin{aligned} xy &= 20 \\ xy + 3y - 6x - 18 &= 20. \end{aligned}$$

S obzirom na prvu jednačinu, druga jednačina postaje $3y-6x=18$, tj. $y-2x=6$, tako da poslednji sistem postaje: $xy=20, y=2x+6$ ili

$$xy=20,\ y=2(x+3). \text{ Odavde je } x \cdot 2(x+3)=20 \text{ ili } x(x+3)=10,$$

tj. proizvod dva prirodna broja koji se razlikuju za 3 je 10. Jedini činioci broja 10 koji zadovoljavaju taj uslov su 2 i 5, što znači da je $x=2$. Tada $y=10$.

Dakle, zadruga je imala 2 traktora. Ta 2 traktora. će za 10 dana uzorati 300 ha, a 5 traktora za 4 dana uzorali bi takođe 300 ha.

Velibor Dimitrijević, $VIII_2$, OŠ „M. Mijalković", Svetozarevo

44. *Lice A ima dva deteta; jedno dete je sin. Kolika je verovatnoća da je i drugo dete—sin? I lice B ima dva deteta; starije dete je sin. Kolika je verovatnoća da je i drugo dete takođe sin? (Verovatnoća nekog događaja jeste količnik broja povoljnih slučajeva i broja svih mogućih slučajeva. Vidi o tome članak u „Mat. listu" II-4, str. 101-105.).*

Za lice *A* moguća su ova 3 slučaja:

starije dete	s	s	ć
mlađe dete	s	ć	s

, Oznake: s-sin
ć-ćerka

Znači, tražena verovatnoća je 1/3, jer je povoljan samo 1. slučaj.

Za porodicu lica B moguća su samo ova 2 slučaja:

starije dete	s	s
mlađe dete	s	ć

Znači, povoljan je samo 1. slučaj, pa je tražena verovatnoća 1/2 ili 50%.

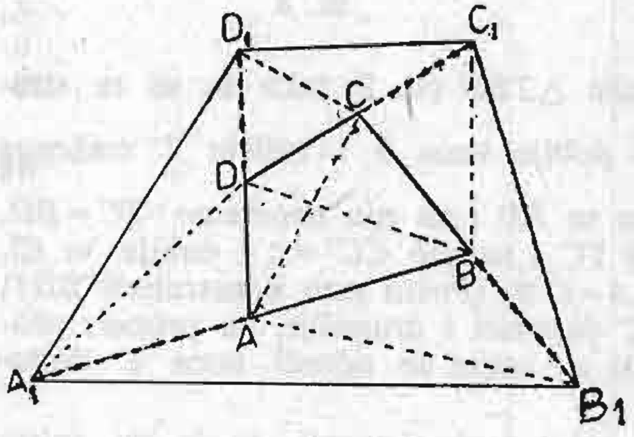
Davor Novak, VII_a, OŠ „Bratstvo-Jedinstvo", Križevci

45. *Deljenik (dividend) je smanjen za 10%, a delilac (divizor) je povećan za 10%. Šta je bilo sa količnikom (kvocijentom)? Da li se promenio i za koliko?*

Neka je deljenik a, delilac b. Njihov količnik je $\frac{a}{b}$. Novi deljenik a_1 iznosi 90% odnosno $\frac{9}{10}$ pređašnjeg, tj. $a_1 = \frac{9}{10}a$. Novi delilac b_1 iznosi 110% odnosno $\frac{11}{10}$ pređašnjeg, tj. $b_1 = \frac{11}{10}b$. Prema tome, novi količnik će biti $\frac{a_1}{b_1} = \frac{9}{10}a : \frac{11}{10}b = \frac{9}{11}\cdot\frac{a}{b}$. Dakle, količnik se smanjio i to za svoje $\frac{2}{11}$, što u procentima iznosi $18\frac{2}{11}\% \approx 18{,}18\%$.

Slobodan Jakšić, VIII₃. OŠ „J. Četković", Beograd
Svetlana Cvetković, VIII₅, OŠ „V. Pelagić", Leskovac

46. *Ako svaku stranicu konveksnog četvorougla ABCD produžimo u istom smislu za njenu sopstvenu dužinu, dobićemo četvorougao $A_1B_1C_1D_1$ čija je površina put puta veća od površine datog četvorougla ABCD. Dokazati to.*



Označimo površine pojedinih likova ovako: površinu datog četvorougla $ABCD$ sa P, a površinu novog četvorougla $A_1B_1C_1D_1$ sa P_1. Površine trouglova A_1B_1B, B_1C_1C, C_1D_1D i D_1A_1A označimo redom sa p_1, p_2, p_3 i p_4.

Tada je: $P_1 = P + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

Znamo: ako dva trougla imaju jednake po jednu stranicu i odgovarajuće visine, onda su im i površine jednake. Imajući to u vidu, imaćemo dalje:

$$p_1 = 2\cdot AB_1B = 2\cdot ABC$$

$$p_2 = 2\cdot BC_1C = 2\cdot BCD$$

$$p_3 = 2\cdot CD_1D = 2\cdot ACD$$

$$p_4 = 2\cdot ADA_1 = 2\cdot ABD.$$

(Ovde smo, kratkoće radi, umesto „površina trougla ABC" pisali samo ABC. Slično za ostale). Odatle sabiranjem dobijamo:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2(ABC + ACD + BCE + ABD) \text{ ili}$$

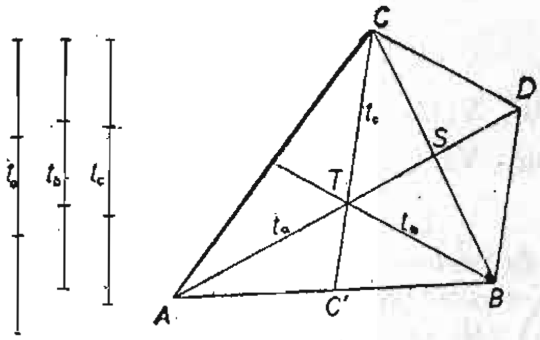
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 2\cdot 2P = 4P,$$

tako da je celokupna tražena površina $P_1 = P + 4P = 5P$

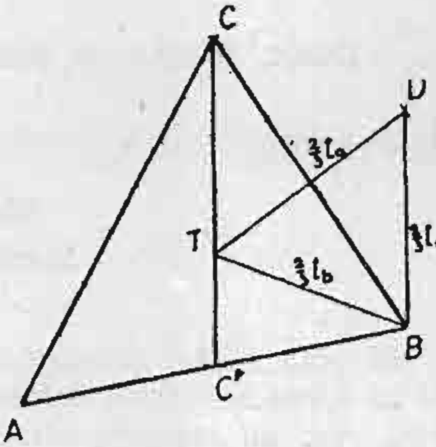
Nevenka Cucić, VII₃, IV OŠ, Titovo Užice

47. Konstruisati trougao kome su zadane sve tri težišne linije.

Analiza. — Pretpostavimo da je zadatak rešen i da je ABC traženi trougao (sl. 1). Ako povučemo paralele sa t_b i t_c kroz temena C i B, dobijamo paralelogram $BDCT$, kojem su zadane stranice $TB=\frac{2}{3}t_b$ i $TC=\frac{2}{3}t_c$ i dijagonala $TD=\frac{2}{3}t_a$. Prema tome, možemo konstruisati trougao TBD odnosno paralelogram $TBDC$.



Sl. 1



Sl. 2

Konstrukcija. — Najpre se konstruiše $\triangle TBD$ (sl. 2) tako da se za stranice uzmu duži $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ i $\frac{2}{3}t_c$. Tako se dobije teme B i težište T traženog trougla. Kroz težište T povučemo paralelu sa BD i na nju nanesemo $TC=BD$. Tako se dobije teme C. Zatim se produži TC i nanese $CC'=t_c$ i dobije se C'. Povlačimo polupravu BC' i prenosimo $C'A=C'B$. (Pošto smo konstruisali BDT, mogli smo sliku do traženog trougla ABC dopuniti i drugačije, na primer: produži se DT za $TA=TD$ i tako dobije teme A; zatim se odredi teme C dopunivši $\triangle BDT$ do paralelograma $BDCT$).

Dokaz. — U trouglu ABC dolaze svi zadani elementi, te je on zaista traženi trougao.

Diskusija.—Zadatak je moguć, ako je moguće konstruisati $\triangle BDT$, tj. ako je $TB+TD>DB$, $TD-TB<BD$ ili

$$\frac{2}{3}t_a-\frac{2}{3}t_b<\frac{2}{3}t_c<\frac{2}{3}t_a+\frac{2}{3}t_b \text{ ili } t_a-t_b<t_c<t_a+t_b,$$

tj. bilo koja težišna linija mora biti veća od raklike drugih dveju, a manja od njihovog zbira.

Dušan Babić, VII₁, OŠ „D. O." Putinci

48. *Iz pravog valjka (kome je poluprečnik baze r, a visina H) isečena je najveća pravilna trostrana piramida. Koliko iznose otpaci (u procentima)?*

Osnovna ivica u valjak upisane pravilne trostrane piramide jeste stranica a u krug poluprečnika r upisanog jednakostraničnog trougla. Znamo da je

$r=\frac{a}{3}\sqrt{3}$, tj. $a=r\sqrt{3}$, pa je zapremina pravilne trostrane piramide

$$V_p=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{r^2H\sqrt{3}}{4},$$

a zapremina valjka je $V_v=r^2\pi h$. Zato otpaci iznose:

$V_o=V_v-V_p=r^2\pi H-\frac{r^2H\sqrt{3}}{4}=\frac{r^2H}{4}(4\pi-\sqrt{3})$. Odnos zapremine otpadaka prema zapremini valjka je

$$\frac{V_o}{V_v}=\frac{r^2H(4\pi-\sqrt{3})/4}{r^2\pi H}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{4\pi}=1-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\approx 1-0{,}138=0{,}862.$$

Prema tome, otpaci iznose približno 86,2%.

Milan Merkle $VIII_3$, OŠ. "Sv. Sava", Beograd

Rešili konkursne zadatke iz „Matematičkog lista" II. 5

Aleksić Dragica, VII_4 r. OŠ „M. Blagojević" Lučani kod Čačka, 43; *Barać Dušan*, VII_1 r. OŠ „D. Obradović„ Putinci, 43, 44) (del.), 45, **47**; *Berdović Danica*, VIII r. OŠ Ljubomir kod Trebinja, **43, 45**, 46; *Bokalović Gordana*, VI_2 r. OŠ „V. Milićević" Grocka, 44 (del.); *Cucić Nevenka*, VII_3 r. IV OŠ Titovo Užice, 44 (del.), 45, **46**, 47; *Cvetković Svetlana*, VII_5 r. OŠ „V. Pelagić" Leskovac, 43, 45; *Čerović Slavka*, VIII r. OŠ Ljubomir kod Trebinja, 43, 45, 46, 47, **48**; *Dimitrijević Velibor*, $VIII_2$ r. OŠ „M. Mijalković" Svetozarevo, **43**, 45, 46, **47**; *Đokić Bosa*, VII_3 r. OŠ „Ž. Zrenjanin" Vršac, 43; *Golubović Vera*, $VIII_4$ r. OŠ „Oslobodioci Beograda" Beograd, 43, 44 (del.); *Ivković Milojka*, V_b r. OŠ „A. Šantić" Sečanj, 43; *Jakšić Slobodan*, $VIII_3$ r. OŠ „J. Ćetković" Beograd, **43, 45**, 46, 47, **48**; *Jančić Mirjana*, VI_3 r. OŠ „Olga Petrov" Vršac, 44 (del.); *Jevremović Vesna*, VI_1 r. OŠ „J. Veselinović" Šabac, 46; *Jovanić Nebojša*, V_3 r. OŠ „. Kosovac" Šabac, **43**; *Jovanović Jelica*, VI_3 r. OŠ „Meto Barjaktari" Priština, 43; *Jovanović Vesna*, VII_4 r. OŠ „D. Davidović" Smederevo, 44 (del.), 46; *Kokotović Miodrag*, VI r. OŠ „A. Šantić" Sečanj, 43, 44 (del.); *Kovačev Ljubomir*, V_2 r. OŠ „S. Marinković" Zrenjanin, 43, 45; *Kuželički Staša*, VII_2 r. OŠ „R. Vukićević" Niš, 43, 44 (del.); *Letić Milena*, VI_1 r. OŠ „Pinki" Futog, 44 (del.); *Merkle Milan*, $VIII_3$ r. OŠ „Sv. Sava" Beograd, 43, 44 (del.), 45, **46, 48**; *Milin Milan*, VIII r. OŠ „V. Karadžić" Srbobran, 43, **45**, 46, 47, 48; *Mihailović Živan*, VI_1 r. OŠ „S. Sremac" Borča, 43; *Milivojević Dragan*, VI_3 r. OŠ „Olga Petrov" Vršac, 44 (del.); *Milošević Dragica*, $VIII_2$ r. OŠ „I. L. Ribar" Raška, 44 (del.); *Novak Davor*, VII r. OŠ „Bratstvo-Jedinstvo" Križevci, **43, 44 (del.), 45, 46, 47**; *Perišić Stanislav*, V_1 r. OŠ „J. Pančić" Boljevac, 44 (del.); *Petrović Darko*, V_1 r. OŠ „S. Marković" Kraljevo, 43; *Prvulović Radomir*, VI r. OŠ „S. M." Brza Palanka, 44 (del.); *Radovanović Nela*, V_1 r. OŠ „B. Radičević" Beograd, 43, 44 (del.); *Radović Ivan*, VII_3 r. OŠ „Učitelj Tasa" Niš, **45**; *Rajčić Gorica*, VI_4 r. OŠ „M. Pijade" Velika Plana, 43; *Rajčić Zorica*, VII_1 r. OŠ „M. Pijade" Velika Plana, 43, 45, 47; *Rogović Milić*, V_3 r. OŠ „7. oktobar" Čačak, **43**; *Samardžić Miroslav*, V_b r. OŠ „A. Šantić" Sečanj, 43; *Savić Miloš*, V_3 r. OŠ „V. Milićević" Grocka, 44 (del.), 45 (del.); *Spahić Miodrag*, VII_3 r. OŠ „N. Jeličić" Šabac, 43, 44, **45**, 47; *Stojiljković Snežana*, VII_1 r. OŠ „V. Pelagić" Leskovac, 43, 45; *Širetić Dragan*, V_3 r. OŠ „7. oktobar" Čačak, 44 (del.); *Tišler Žaromil*, VII_1 r. OŠ „S. Miletić" Zemun, 43, 44 (del.); *Tomić Draga*, VII_1 r. OŠ „S. Jovanović" Šabac, 44 (del.,) 45; *Vučković Mira*, VI_b r. OŠ „L. Tihomirović" Grubišno Polje, 43; *Vujičić Božidar*, VII_1 r. OŠ Viča kod Čačka, **43**; *Zeković Petar*, VII_1 r. OŠ „M. Hadžić" Vojka, 43, 45; *Zorić Milan*, I_b r. ŠUP Sanski Most, 45.

NAPOMENA. – Redni brojevi zadataka čija su rešenja kod pojedinih učenika bila naročito uspela štampani su masno. Neki učenici nisu svoje radove potpisali te njihova imena nismo mogli objaviti. Molimo rešavatelje konkursnih zadataka da se u svemu pridržavaju uputstva koje je navedeno u fusnoti ispod teksta konkursnih zadataka (str. 24).

Nagrade rešavateljima konkursnih zadataka

Za uspešno rešavanje konkursnih zadataka objavljivanih u „Matematičkom listu“ tokom školske 1967/68. godine nagrađeni su sledeći čitaoci — rešavatelji zadataka:

1) *Merkle Milan*, VIII$_3$ r. OŠ „Sveti Sava“, Beograd .... N.d. 150
2) *Dimitrijević Velibor*, VIII$_2$ r. OŠ „M. Mijalković“, Svetozarevo .... „ 120
3) *Jakšić Slobodan*, VIII$_3$ r. OŠ „Jelena Ćetković“, Beograd .... „ 120
5) *Mesaroš Arpad*, VIII r. OŠ „Petar Kočić“, Temerin .... „ 120
6) *Vlašković Božin*, VII$_1$ r. OŠ „Svetozar Marković“, Rekovac .... „ 120
7) *Radosavkić Radivoj*, VIII r. OŠ „Branko Radičević“, Šid .... „ 100
8) *Pagon Dušan*, VII$_b$ r. OŠ Cerkno, SR Slovenija .... „ 100
9) *Bećarević Zagorka*, VIII$_2$ r. OŠ „V. Milićević“, Grocka .... „ 80
10) *Milosavljević Mirjana*, VIII$_3$ r. OŠ „R. Miljković“, Svetozarevo .... „ 80
11) *Stefanović Anka*, VIII$_1$ r. OŠ „J. J. Zmaj“, Pančevo .... „ 80
12) *Založnik Aleš*, VIII$_3$ r. OŠ „P. Voranc“, Maribor .... „ 80
13) *Dedić Snežana*, VIII$_2$ r. OŠ Vrčin kod Beograda .... „ 80
14) *Liščević Vladimir*, VI$_5$ r. OŠ „Ž. J. Španac“, Novi Beograd .... „ 80
15) *Berdović Danica*, VIII raz. OŠ Ljubomir kod Trebinja .... „ 50
16) *Čerović Slavka*, VIII raz. OŠ Ljubomir kod Trebinja .... „ 50
17) *Milosavljević Mileta*, VIII$_2$ r. OŠ „S. Jovanović“, Šabac .... „ 50
18) *Omerbegović Jasmina*, VIII$_1$ r. OŠ „Kidinjača“, Loznica .... „ 50
19) *Kokotović Miodrag*, VI raz. OŠ „Aleksa Šantić“, Sečanj .... „ 50
20) *Milin Milan*, VIII$_b$ r. OŠ „Vuk Karadžić“, Srbobran .... „ 50
21) *Matović Jelena*, VIII$_2$ r. OŠ „Stevan Dukić“, Beograd .... „ 50
22) *Ivljanin Predrag*, VII$_3$ r. OŠ „Sveti Sava“, Beograd .... „ 50
23) *Janković Savo*, VIII$_2$ r. OŠ „Aleksa Šantić“, Beograd .... „ 50
24) *Kočović Milka*, VIII$_4$ r. OŠ „Dr D. Mišović“, Čačak .... „ 50
25) *Babić Dušan*, VII$_1$ r. OŠ „D. Obradović“, Putinci .... „ 50

Nagrade su poslate poštom 14. VI 1968. godine.

Napomena. — Za uspešno rešavanje konkursnih zadataka „Matematički list“ će i ove školske godine dodeliti nagrade rešavateljima (za svaki razred).

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА СР СРБИЈЕ У 1967/68. ГОДИНИ

Одржана су четири ступња такмичења: I-*школска* (V — VIII раз.), 7. IV 1968. год.; II-*општинска* (VI — VIII р., учествовало око 10000 ученика, одржана су 21. IV 1968. год.); III-*међуопштинска* (VII и VIII р., учествовало 1500 ученика, одржана су свуда истог дана: 5. V 1968. год.); VI-*републичко такмичење* (учествовало 105 ученика VIII разреда који су на предходним такмичењима постигли најбољи успех). Задатке за све ступњеве такмичења, изузев школског, доставила је Републичка комисија за младе математичаре.

Сваки такмичар на било коме ступњу могао је освојити највише 25 бодова (јер се за решење сваког од 5 задатака додељивало до 5 бодова).

Републичко такмичење је одржано 2. VI 1968. године у Београду.

Резултати републичког такмичења:

I награда (за освојених 25 бодова)

Ацкета Драган, ОШ ,,И. Л. Рибар“, Нови Сад; *Трајковић Миодраг*, ОШ ,,Сава Ковачевић“, Београд.

II награда (за освојених 24 бода)

Исаков Љиљана, ОШ ,,Ђура Даничић“, Нови Сад; *Милосављевић Милета*, ОШ ,,Селе Јовановић“, Шабац.

III награда (за освојених 19 — 22 бода)

Меркле Милан, ОШ ,,Св. Сава“, Београд; *Витошевић Мирјана*, ОШ ,,Ј. Веселиновић“, Београд; *Јакшић Слободан*, ОШ ,,Ј. Ћетковић“, Београд;

Четровић Драгана, ОШ Адрани код Краљева; *Јокановић Бранка*, ОШ „А. Ђуровић", Титово Ужице; *Костић Владимир*, ОШ „Св. Сава", Београд.

Похвале (за 17 бодова)

Вучић Драган, ОШ „Маршал Тито", Ниш; *Милосављевић Мирјана*, ОШ „Р. Миљковић", Светозарево; *Обреновић Биљана*, ОШ „В. Караџић", Чачак; *Грбић Даница*, ОШ „25. мај", Нови Београд; *Милојковић Миодраг*, ОШ „IV краљ. батаљон", Краљево; *Савић Бранка*, ОШ „Д. Обрадовић", Пожаревац; *Милин Милан*. ОШ „В. Караџић", Србобран; *Кочовић Милка*, ОШ „Др. Д. Мишовић", Чачак; *Димитријевић Зоран*, ОШ „Његош", Ниш; *Стојановић Бранислав*, ОШ „Вожд Карађорђе", Ниш.

Задаци на републичком такмичењу

Београд, 2. VI 1968.

1. Питали продавца јабука колико има јабука у корпи. Он је одговорио: „Ако их бројим по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, увек ми једна јабука претекне (остане); ако их бројим по седам, не остаје ми ниједна". Колико је било јабука у корпи? (Одредити најмањи број јабука који задовољава наведене услове).

2. Један угао троугла је за 20% мањи од другога, а за $33\frac{1}{3}\%$ већи од трећега. Израчунати углове тог троугла.

3. Израз $2x^3-\frac{k+2}{3}x^2+\frac{11-3k}{3}x+30$ има вредност 6 за $x=-2$. Колика је нумеричка вредност тог израза за $x=-1\frac{1}{2}$?

4. На дужи $AB=3a$ узми тачку M тако да је $AM=a$ и над дужи AM конструиши једнакостранични троугао AMC; затим над MB конструиши једнакостранични троугао MBD. (Оба конструисана троугла треба да су са исте стране дужи AB). Повуци CD.

a) Изразити обим и површину четвороугла $ABDC$ у функцији од a.

b) Израчунај обим и површину тог четвороугла за $a=2$ cm.

(Узми $\sqrt{3}\approx 1{,}732$, а резултате дај на 2 децимале!)

5. Дат је квадар (правоугли паралелепипед) са основама $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и ивицмма $AB=a$, $BC=b$ и $AA'=c$. На бочној ивици AA' налази се тачка A_1 тако да је $AA_1=\frac{1}{3}c$, на бочној ивици CC' налази се тачка C_2 тако да је $CC_2=\frac{2}{3}c$; права повучена кроз тачку C_2 паралелно са BC сече праву B_1C' у тачки S.

Поставите најпре раван кроз тачке A_1, B_1, C', D', а затим другу раван кроз тачке D', C_2 и S.

a) Одредити који део запремине датог квадра износи запремина V_1 тела $B_1C'B'A_1D'A'$ које одсеца прва постављена раван.

b) Одредити запремину V_2 тела $ABCDA_1B_1SC_2D'$.

c) Израчунати колико процената од запремине V датог квадра износи запремина V_2.

НАПОМЕНА. — Препоручујемо вам да самостално решите наведене задатке. Да бисте свој рад могли проверити, наводимо резултате (одговоре) за те задатке.

1. 301 јабука (в. решење конкурсног задатка 28. у „МЛ“ II-4). 2. Ако су углови означени са α, β и γ, онда је $\alpha=\frac{4}{5}\beta$ и $\alpha=\frac{4}{3}\gamma$, одакле $\beta=\frac{5}{4}\alpha$ и $\gamma=\frac{3}{4}\alpha$; тада из $\alpha+\frac{5}{4}\alpha+$ $+\frac{3}{4}\alpha=180^0$, добијамо $\alpha=60^0$, па је $\beta=75^0$, $\gamma=45^0$. 3. $k=1$; полином $2x^3-x^2+2x+30$ за $x=-3/2$ има вредност 18. 4. а) $O=a(6+\sqrt{3})$, $P=\frac{7}{4}a^2\sqrt{3}$, b) $O\approx 15{,}46$ cm и $P\approx 12{,}12$ cm^2. 5. a) $V_1=\frac{1}{3}abc=\frac{1}{3}V$; b) $V_2=V-\left(\frac{1}{3}V+\frac{1}{36}V\right)=\frac{23}{36}V$: c) $\approx 63{,}9\%$.

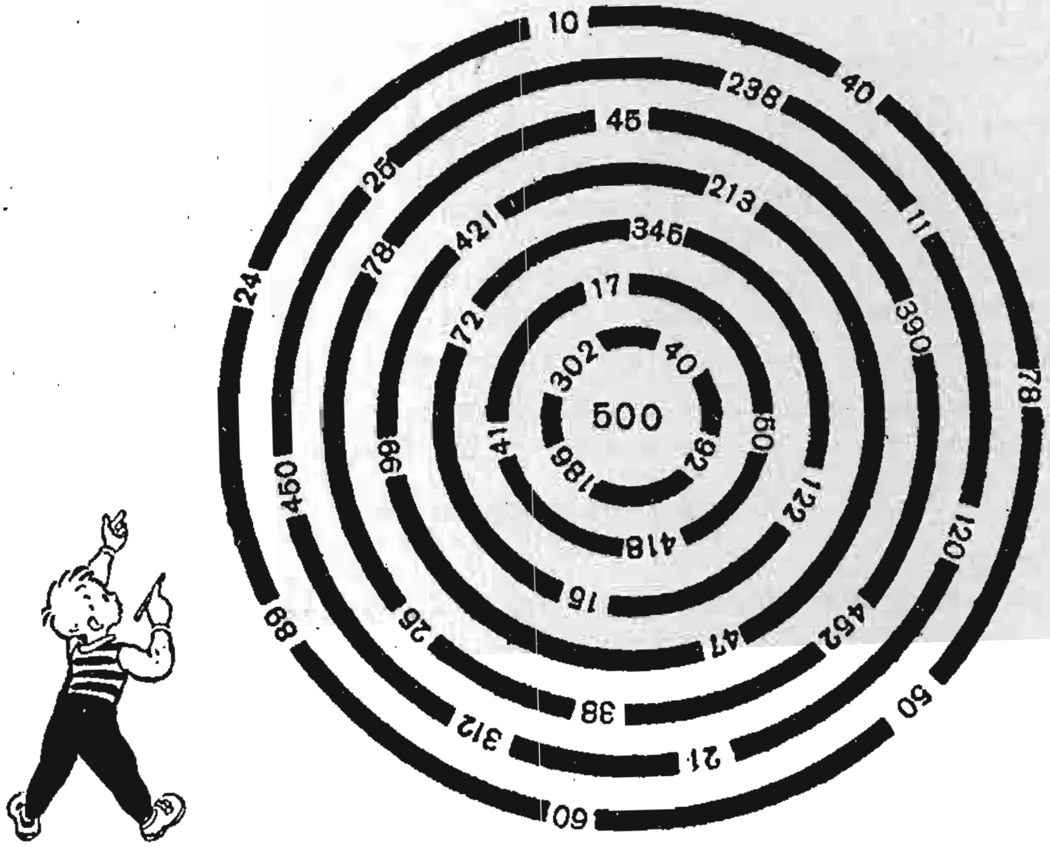
MATEMATIČKA RAZONODA

MATEMATIČKE IGRE

Aritmetički lavirint

Aritmetički lavirinti imaju oblik koncentričnih krugova sa otvorima („vratima“). Na svakim vratima stoji broj. Da bi se stiglo u centar treba sabrati brojeve sa svih vrata kroz koja se prođe i za zbir dobiti upravo broj koji stoji u centru.

Evo jednog takvog lavirinta. Svuda su vrata, mnogo vrata! Doći u centar nije tako lako, jer na svakim vratima stoji kao „stražar“ neki broj. Prošavši kroz 7 vrata, moraš sakupiti zbir 500. Ko brže pronađe takav put, on je pobednik. Jedan, dva, tri, . . . Počinji! U igri može učestvovati više učenika.



O d g o v o r i. — Evo nekih mogućnosti: 1) 24, 312, 45, 47, 15, 17, 40; 2) 50, 21, 38, 47, 15, 17, 302; 3) 89, 25, 45, 99, 15, 41, 186, i dr.

ЗАНИМЉИВОСТИ О БРОЈЕВИМА

Необичне једнакости

Ево неколико исправних једнакости у којима су и на левој и на десној страни употребљене исте цифре, али се ниједна цифра на истој страни не понавља; штавише, у већини тих једнакости цифре долазе истим редом:

1) $42:3=4\cdot 3+2$,
2) $63:3=6\cdot 3+4$,
3) $95:5=9+5+5$,
4) $85-63=8+5+6+3$,
5) $123+45-67-89=987-654-321$,
6) $(2+7)\cdot 2\cdot 16=272+16$,
7) $(8+9)^2=289$,
8) $4\cdot 2^3=34-2$,
9) $4^3:2=34-2$,
10) $5^{6-2}=625$,
11) $2^{10}-2=1022$,
12) $2^{8-1}=128$,
13) $95-4^2=9\,(5+4)-2$,
14) $37\cdot(5-2)=5^3-7\cdot 2$,
15) $\sqrt{121}=12-1$,
16) $\sqrt{64}=6+\sqrt{4}$,
17) $\sqrt{49}=4+\sqrt{9}=9-\sqrt{4}$,
18) $\sqrt{169}=16-\sqrt{9}=\sqrt{16}+9$,
19) $\sqrt{256}=2\cdot 5+6$,
20) $\sqrt{324}=3\cdot(2+4)$,
21) $\sqrt{1936}=-1+9+36$,
22) $\sqrt{11881}=118-8-1$,
23) $\sqrt{6724}=6+72+4$,
24) $14+3\cdot\sqrt{625}=123-4-5:6$,
25) $\sqrt[3]{1331}=3+1+3+3+1$,

Нађите још таквих једнакости! Настојте да употребите што више цифара и разноврсних операција, не задовољавајући се напр. са $25+13=23+15$.

DA LI STE DOSETLJIVI?

Neki Amerikanac je rekao da je računanje — samo odelo nabačeno na telo misli. Na to ne treba zaboravljati pri rešavanju sledećih zadataka.

1. (Lukavko kupuje). Ulazi kupac u radnju da bi kupio nož. Naročito su mu se svidela dva noža: jedan od 1,50 dinara, drugi od 3 dinara. Zbog cene bira onaj jeftiniji, plaća i odlazi. Sutradan se predomislio: trebalo je da kupi bolji nož. On se vraća u radnju, traži od prodavca onaj bolji, vrši zamenu i polazi prema izlazu. Prodavac ga zadržava, jer treba da doplati. Kupac se buni: „Juče sam Vam dao 1,50 dinara, a danas Vam dajem nož koji vredi 1,50 dinara i, prema tome, mi smo sada kvit!“ I posle toga je izašao. Da li je on u pravu?

2. Nekoliko gostiju pojeli su u restoranu za 80 dinara. Kad je trebalo platiti, ispostavilo se da dvojica nemaju novca kod sebe. Tada je svaki od ostalih doplatio još po 2 dinara. Koliko je bilo gostiju na ručku (onih koji su jeli)? [10].

3. Iz mesta A i B pošla su istovremeno dva voza jedan drugom u susret: jedan je išao brzinom 60 km/h, a drugi brzinom 40 km/h. Koliko će oni međusobno biti udaljeni na 1 sat do susreta? [100 km]

ЗРНЦА

Брзо одговорите

1. Напиши 11 хиљада 11 стотина и 11

2. Који бројеви записани двема цифрама постају већи када им се уклони (изостави) лева цифра?

3. Који разломак кад се „преврне“ опет даје себи једнак разломак?

Прецизност

1. Један ученик је написао: „Прстију имам двадесет пет на једној руци, исто толико на другој и на обема ногама десет“. Како је то могуће?

О д г о в о р. — Заборавио је да стави две тачке после речи „двадесет“.

2. Четири зеца треба разделити трима лицима тако да нико не добије више од осталих. Како?

[Један ће добити 2 зеца, а остала двојица по једног. Нико није добио више од осталих (заједно!). Ма колико да је пример тривијалан, он показује да треба пазити на формулацију питања!]

3. Колико ће бити трипут четрдесет и пет?

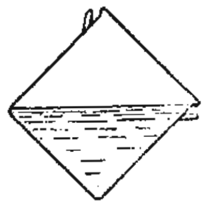
[Погодно је кад се питање поставља усмено, и можете се увек позвати на ону другу од двеју могућности ако онај који одговара каже једну од њих: $3 \cdot 40 + 5$ или $3 \cdot 45$]

Мало хумора

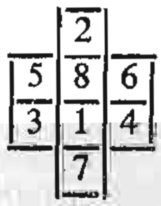
— Општеприхваћено је да се једначине решавају помоћу **непознате x.** „Што се мене тиче — признао ми је један пријатељ — ја сам једначине увек решавао помоћу мени добро **познате** (особе), која се звала Ана“.

ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА ИЗ РУБРИКЕ „ЗРНЦА“ У „МАТЕМАТИЧКОМ ЛИСТУ“ II. 5

Брзо одговорите. — **1.** 9 динара. **2.** 3 ђака. **3.** Канту нагнути као што показује слика десно. **4.** Не, јер ће након 72 часа, тј. кроз 3 дана, опет бити 12 часова ноћу, а сунце ноћу не сија (осим ако није реч о „поларном дану“ у местима иза поларног круга).

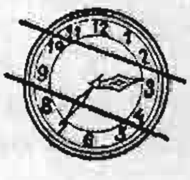


За веште комбинаторе. — Да не би било суседних ни хоризонтално, ни вертикално, ни дијагонално, цифре треба распоредити као на слици десно.



Јесте ли радознали? — Био је тежак 72 килограма.

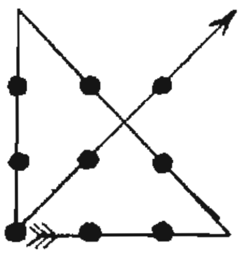
Бројчаник. — Решење је дато на слици десно.



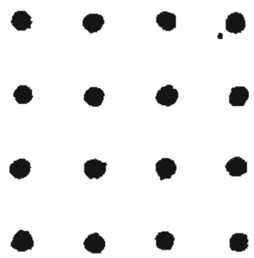
NAGRADNI ZADATAK BR. 6

Verovatno znate rešenje zadatka da se 9 tačaka precrta povlačeći samo 4 duži, ne odvajajući pritom olovku od hartije i ne prelazeći istom linijom dvaput (sl. 1).

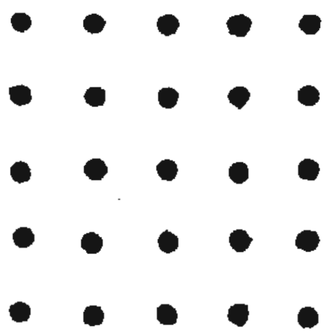
Pokušajte da pri istim uslovima spojite (precrtate): a) 16 tačaka povlačeći 6 duži (sl. 2) i b) 25 tačaka povlačeći 8 duži (sl. 3).



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

Za pravilno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 10 učenika. Po potrebi odlučiće žreb. Rešenje treba poslati najkasnije do **23. XI 1968. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p. p. 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred, školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti obavezno naznačite: „Nagradni zadatak br. 6“. Rešenja i imena nagrađenih objavićemo u „Matematičkom listu“ III. 2.

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 5

Zadatak je bio: „*Datum 6. juna 1966. godine može se zapisati ovako: 6. 6. 66. U ovom zapisivanju pojavljuje se samo jedna cifra. Koliko se puta u toku jednog veka redni broj dana u mesecu, mesec i poslednje dve cifre godine, mogu zapisati samo pomoću jedne cifre? Ispišite sve te datume!*“

O d g o v o r. — Trinaest puta u toku svakog veka:

1. 1. 11.	2. 2. 22.	6. 6. 66.
11. 1. 11.	22. 2. 22.	7. 7. 77.
1. 11. 11.	3. 3. 33.	8. 8. 88.
11. 11. 11.	4. 4. 44.	9. 9. 99.
	5. 5. 55.	

Primljeno je 338 odgovora, od toga 138 potpuno tačnih.

Žrebom je odlučeno da se između onih koji su poslali tačne odgovore nagrade sa *po 20 novih dinara* sledeći učenici:

1. *Ahel Jadranka*, VII_d r. OŠ Križ, SRH
2. *Bakalova Lidija*, VI_b r. OU „K. Ohridski“, Ohrid
3. *Evtimovski Milorad*, $VIII_a$ r. OU „29. noemvri“, Skopje
4. *Jamaković Munira*, VII r. OŠ „M.S.“ Mesići kod Rogatice
5. *Jovanović Jelica*, VI_3 r. OŠ „M. Bajraktari“, Priština
6. *Jovanović Vesna*, V_1 r. OŠ „Dragomir Marković“, Kruševac
7. *Milošević Dragica*, $VIII_2$ r. OŠ „I. L. Ribar“, Raška
8. *Rokvić Ivica*, V_1 r. OŠ „J. B. Tito“, Novi Beograd
9. *Tufegdžić Miša*, VII_2 r OŠ „Sele Jovanović“, Šabac
10. *Vidas Jovan*, V r. OŠ „I. L. Ribar“, Novalja (Otok Pag).

Nagrade su poslate poštom 14. VI 1968. godine.

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. „Matematički list" izlazi 5 puta u toku školske godine i to u: oktobru, decembru, februaru, martu i maju. List je namenjen *svim učenicima* V-VIII razreda osnovne škole.

3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 6 n. dinara. Van pretplate prodajna cena lista je 1,50 n. dinara po primerku. Obračun po pretplatnoj ceni vrši se samo kad su naručeni *svi brojevi lista* (1—5). Isto važi i za naknadne narudžbe (u toku godine). Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 608-8-1433-10** sa naznakom na šta se narudžba odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i koliko primeraka od svakog broja). Obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba slati. Plaćanje se može vršiti i u ratama, ali tako da za svaki primljeni broj dug bude odmah izmiren.

4. Raspolažemo još izvesnim količinama svih brojeva lista iz školske 1967/68. godine (brojevi II. 1—5), tako da ih možete naknadno naručiti. Isporučujemo ih pod istim uslovima.

5. Molimo poverenike „Mat. lista" iz školske 1967/68. godine da odmah izmire sva zaostala dugovanja.

6. „Matematički list" će i ove godine dodeliti *nagrade školama* koje budu imale procentualno najviše pretplatnika (u odnosu na ukupan broj učenika V—VIII razreda). Detaljna obaveštenja o tome (i uopšte o „Mat. listu") data su u našim raspisima koji su svim školama dostavljeni u septembru 1968. godine.

7. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Beograd, p.p. 728.

S A D R Ž A J