# MATEMATIČKI LIST

## ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

III

3

BEOGRAD
1969.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

# MATEMATIČKI LIST

## za učenike osnovne škole

God. III, broj 3 (1968/69.)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE
**Beograd, p. p. 791, Knez Mihailova 35/IV**





Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

B. Marinković (Beograd)

# REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA POMOĆU DETERMINANTI

## I

U ovom ćemo članku izložiti jedan za vas novi način rešavanja sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Međutim, da biste to bolje razumeli, prethodno ćemo se podsetiti, ne upuštajući se u detalje, nekih važnijih činjenica o jednačinama.

### 1. Linearne jednačine sa jednom nepoznatom

Kao što vam je poznato, za rešavanje takvih jednačina, u najopštijem slučaju, primenjuje se sledeći postupak:

1) oslobađanje od razlomaka—ukoliko ih ima (množenje jednačine najmanjim zajedničkim imeniocem tih razlomaka),

2) uklanjanje zagrada (izvođenje naznačenih množenja i stepenovanja),

3) razdvajanje „poznatih" i „nepoznatih" članova,

4) svođenje sličnih članova na obema stranama jednačine, tj. dovođenje jednačine na oblik $Ax=B$ ($A$ i $B$ su brojevi koji ne zavise od $x$),

5) deljenje obeju strana jednačine koeficijentom uz nepoznatu da bi se dobila vrednost nepoznate — rešenje jednačine,

6) proveravanje rešenja.

P r i m e r. — Primenjujući navedeni postupak na jednačinu

$$\frac{6x-5}{6}-\frac{8x-1}{10}=\frac{2x-3}{15},$$

pošto je NZS (6, 10 15) = 30, posle množenja obeju strana jednačine sa 30, imaćemo redom:

$$5(6x-5)-3(8x-1)=2(2x-3)$$
$$30x-25-24x+3=4x-6$$
$$30x-24x-4x=-6+25-3$$
$$2x=16 \mid :2$$
$$x=8$$

Proveravanjem se uveravamo da $x=8$ zadovoljava datu jednačinu: dobija se da je vrednost leve strane $13/15$, a desne takođe $13/15$.

N a p o m e n a. — Prilikom deljenja (množenja) jednačine nekim izrazom treba imati na umu, kao što već znate, da taj izraz za traženu vrednost nepoznate ne bude jednak nuli.

Svaka linearna jednačina sa jednom nepoznatom, ma kako bila komplikovana na prvi pogled, zamenjivanjem ekvivalentnim jednačinama (koraci 1—5), tj. pri rešavanju, na kraju se svodi na jednačinu oblika

$$Ax=B, \qquad (*)$$

gde su $A$ i $B$ brojevi (izrazi) koji ne zavise od $x$.

To je **opšti oblik** linearne jednačine sa jednom nepoznatom. Pri njenom rešavanju moguća su sledeća tri slučaju:

1° Ako je $A \neq 0$, jednačina $(*)$ ima za *rešenje* broj $B/A$.

2° Ako je $A=0$ i $B \neq 0$, onda se jednačina $(*)$ svodi na $0 \cdot x = B$ i *nema rešenje*, jer je nemoguće da bude $0=B$.

3° Ako je i $A=0$ i $B=0$, onda jednačina $(*)$ postaje $0 \cdot x=0$ (to je identitet) i svaki broj je njeno rešenje. Kaže se da je tada jednačina *neodređena*.

## 2. Jedna linearna jednačina sa dve nepoznate

Opšti oblik takve jednačine je $ax+by=c$, gde su $a$, $b$ i $c$ neki poznati brojevi.

Postavlja se pitanje da li jedna jednačina sa dve nepoznate ima rešenja i kako se ona nalaze.

P r i m e r. — U jednačini $2x+y=8$ možemo za $y$ staviti bilo koji broj, na primer, $y=2$; tada je $2x+2=8$ (sad je to jednačina sa jednom nepoznatom); odatle je $x=3$. Znači, možemo reći: $x=3$, $y=2$ ili još bolje, par brojeva $(3; 2)$ je jedno rešenje date jednačine sa dve nepoznate. Na sličan način bismo se uverili da je i par $(x; y)=(4; 0)$ opet jedno rešenje te jednačine. Naprotiv, par $(4; 5)$ nije rešenje te jednačine. Lako je videti da jednačina $2x+y=8$ ima *beskonačno mnogo rešenja*. Ta jednačina izražava određenu zavisnost između $x$ i $y$. Radi toga vrednosti jedne od promenljivih $x$ i $y$ možemo zadavati proizvoljno. Ali, ako damo neku vrednost za $x$, onda ćemo odgovarajuću vrednost za $y$ odrediti zavisno od date vrednosti za $x$. Da bi se ovo određivanje odgovarajućih vrednosti što lakše vršilo, može se data jednačina „rešiti" po $y$ (pri tome za momenat smatramo $x$ poznatim brojem), tj.

$$y=8-2x.$$

Možemo praviti i poznatu tablicu:

| $x$ | 3 | 1 | 4 | $-1$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 6 | 0 | 10 | $\ldots$ |

Uopšte, za $x=k$ dobijamo da je $y=8-2k$, te je skup od beskonačno mnogo rešenja jednačine $2x+y=8$ dat formulama:

$$x=k,\ y=8-2k \quad \text{ili} \quad (x;\ y)=(k;\ 8-2k).$$

Naravno, mogli smo početi da dajemo vrednosti za $y$, na primer $y=m$, a da za $x$ određujemo odgovarajuće vrednosti, pa bismo imali:

$$x=\frac{8-m}{2},\ y=m.$$

Z a d a t a k 1. — *Napisati nekoliko rešenja jednačine*

$$\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y-2=0.$$

R e š e n j e. — Jednačinu ćemo najpre svesti na oblik $ax+by=c$ (množenjem sa 12 i prebacivanjem „poznatog" člana na drugu stranu). Dobija se jednačina $3x+8y=24$. Evo nekoliko njenih rešenja: (0; 3), (4; 3/2); (−8; 6) itd.

Z a d a t a k 2. — *Koliko treba da bude m u jednačini* $(m+5)\,x+$ $+\,my=7$ *da bi ta jednačina kao rešenje imala par brojeva* $x=3,\ y=-4$?

R e š e n j e. — Mora biti $(m+5)\cdot 3-m\cdot 4=7$, odakle $m=8$.

Z a d a t a k 3. — *Obim jednakokrakog trougla je 10. Kolike su mu stranice?*

R e š e n j e. — Neka $x$ bude dužina osnovice, a $y$ — dužina kraka trougla. Tada je $x+2y=10$. Imamo, znači, jednu jednačinu sa dve nepoznate. Ova jednačina, shodno onome što smo napred rekli, ima beskonačno mnogo rešenja. Međutim, sva ta rešenja ne zadovoljavaju uslove zadatka; treba odabrati samo ona koja su pozitivna i takva da je $x<2y$ i $y<5$. (Zašto?). Zadovoljavaju, na primer, parovi (2; 4) i (3; 3,5), a ne zadovoljavaju, recimo, (6; 2) i (−2; 5).

Kakav geometrijski smisao ima jedna linearna jednačina sa dve nepoznate i njeno rešenje?

Uzmimo jednačinu $2x+y=4$. Iz nje imamo $y=-2x+4$.

Ovde je $y$ linearna funkcija argumenta $x$ (i obrnuto). Grafik linearne funkcije, kao što znate, jeste prava linija. Odatle sledi da jednačina prvog stepena sa dve nepoznate geometrijski predstavlja pravu liniju, tj. geometrijski lik koji odgovara takvoj jednačini jeste prava linija. (V. članak „O linearnoj funkciji" u ML II—5). Položaj prave određen je sa ma koje dve njene tačke. Znači, da bi se prava nacrtala dovoljno je naći koje bilo dve njene tačke. Na primer, za $y=0$ iz $2x+y=4$ dobijamo $x=2$. Našli smo jednu tačku $A(2; 0)$. Stavimo li $x=0$ dobićemo $y=4$, te smo tako našli još jednu tačku $B(0; 4)$ koja pripada traženoj pravoj. Ostaje da se u koordinatnom sistemu nacrtaju te tačke $A$ i $B$ i da se povuče prava $AB$. (Učinite to!). Na pravoj ima beskonačno mnogo tačaka. Otuda je jasno zašto jednačina $2x+y=4$ ima beskonačno mnogo rešenja.

### 3. Sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

Neka je dat jedan takav sistem:

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=12 \\ 5x+4y&=7 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Prva jednačina ovog sistema ima beskonačno mnogo rešenja, druga takođe ima beskonačno mnogo rešenja. Rešiti sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate znači naći ono od svih tih rešenja koje je *zajedničko* obema jednačinama sistema. Na primer, jedno od mnogih rešenja prve jednačine datog sistema je $x=3$, $y=-2$; jedno od rešenja druge. jednačine je takođe $x=3$, $y=-2$. Dakle; $x=3$, $y=-2$, tj. par $(3; -2)$ jeste zajedničko rešenje tih jednačina: taj par brojeva istovremeno zadovoljava obe jednačine sistema.

Često, naročito u novije vreme, kaže se da rešenje sistema jednačina jeste *presek* svih rešenja prve jednačine i svih rešenja druge jednačine sistema.

Međutim, par brojeva $(10; 15)$ ne zadovoljava nijedanu jednačinu sistema (1), par $(6; 0)$ zadovoljava prvu jednačinu ali ne zadovoljava drugu jednačinu tog sistema. U oba ova slučaja sistem (1) nema rešenja.

A kako se dolazi do zajedničkog rešenja?

Ima za to više metoda. Vama su svakako poznate ove tri: a) metoda komparacije, b) metoda supstitucije ili zamene i c) metoda suprotnih koeficijenata. Te metode ćemo ilustrovati na primerima.

a) *Metoda komparacije.* — Rešimo sistem

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=12 \\ 5x+4y&=7 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Iz prve jednačine imamo da je $x=\frac{12+3y}{2}$, a iz druge $x=\frac{7-4y}{5}$, pa je $\frac{12+3y}{2}=\frac{7-4y}{5}$ (linearna jednačina sa 1 nepoznatom), ili $5(12+3y)=2(7-4y)$ i dalje: $60+15y=14-8y$, $23y=-46$, $y=-2$; tada je $x=3$. Prema tome, rešenje sistema (1) jeste par brojeva $(x;\ y)=(3;-2)$.

b) *Metoda zamene (supstitucije).* — Rešimo sistem

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y&=13 \\ 2x-\ \ y&=3 \end{aligned}\right\}$$

Iz druge jednačine izlazi $y=2x-3$; ako to zamenimo u prvoj, imaćemo: $5x+3(2x-3)=13$ ili $5x+6x-9=13$, $11x=22$, $x=2$, te je $y=2\cdot 2-3=1$. Znači, rešenje je (2; 1).

c) *Metoda suprotnih koeficijenata.* — Rešićemo po toj metodi sistem (1).

Pomnožimo prvu jednačinu sa 4, drugu sa 3 i saberimo tako dobijene jednačine:

$$\left.\begin{array}{r|l} 2x-3y=12 & \cdot 4 \\ 5x+4y=7 & \cdot 3 \end{array}\right\}+$$

Dobićemo (proveri):

$$23x=69, \text{ odakle je } x=3.$$

Slično, ako pomnožimo prvu jednačinu sa $-5$, drugu sa 2, dobili bismo da je $y=-2$. Prema tome, metod suprotnih koeficijenata sastoji se u tome da se obe jednačine pomnože tako odabranim brojevima da posle toga koeficijenti uz istu nepoznatu u obe jednačine budu suprotni brojevi. Zatim se obe tako dobijene jednačine saberu. Time se dobija jednačina koja sadrži samo jednu nepoznatu. Ova se jednačina onda reši po toj nepoznatoj. Vrednost druge nepoznate može se dobiti bilo na isti način, bilo da se nađena vrednost za prvu nepoznatu zameni (uvrsti) u jednu od zadanih jednačina (obično onu koja je jednostavnija).

Kao što znate, sistem od dve jednačine prvog stepena sa dve nepoznate u opštem obliku izgleda ovako:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

gde su $x$ i $y$ nepoznate veličine, a $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, su neki poznati brojevi.

Pre nego što se sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate počne rešavati po bilo kojoj metodi, treba ga (ako to već nije) svesti na oblik (1).

Primenimo metod suprotnih koeficijenata na sistem (1): ako prvu jednačinu pomnožimo sa $b_2$, a drugu sa $-b_1$, dobićemo:

$$a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1$$
$$-a_2b_1x-b_1b_2y=-b_1c_2,$$

odakle, posle sabiranja ovih jednačina, sledi:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=b_2c_1-b_1c_2 \tag{2'}$$

Na sličan način, ako prvu jednačinu u (1) pomnožimo sa $-a_2$, a drugu sa $a_1$, a onda dobijene jednačine saberemo, dobićemo:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{2''}$$

Prema tome, dati sistem (1) sveli smo na ekvivalentni mu sistem:

$$\left.\begin{aligned} (a_1b_2-a_2b_1)\,x&=b_2c_1-b_1c_2 \\ (a_1b_2-a_2b_1)\,y&=a_1c_2-a_2c_1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

iz kojeg se neposredno dobija za rešenje ovoj par brojeva:

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{3}$$

Jasno je da pri tome izraz $a_1b_2-a_2b_1$ ne sme biti jednak nuli, tj. treba da je $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ (zašto?).

Prema tome, sistem jednačina (1) možemo rešavati koristeći se gotovim formulama (3) za rešenje. Na prvi pogled izgleda da se te formule teško pamte. Međutim, njih možemo napisati i drugačije, u formi pogodnoj za pamćenje i praktičnu primenu. Radi toga će biti potrebno da se upoznamo sa jednim za vas novim pojmom. O tome će biti reči u nastavku ovog članka (v. ML III. 4).

*(Nastaviće se)*

Milenko Sevdić (Zagreb)

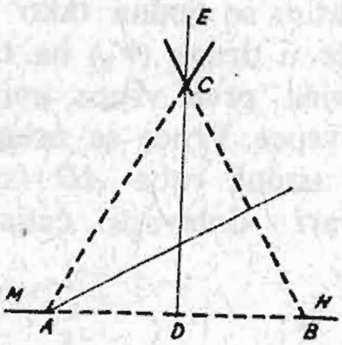
## DOBIVANJE PRAVILNIH POLIGONA PRESAVIJANJEM PAPIRA

U „Matematičkom listu" II. 3 pokazali smo kako se neke osnovne geometrijske konstrukcije izvode pomoću presavijanja papira (umjesto šestara i lenjira). Ovdje ćemo pokazati kako se presavijanjem papira mogu dobiti (konstruisati) neki pravilni poligoni. Da biste to bolje razumjeli bit će dobro da uzmete papir i da uporedo s čitanjem sve praktično izvodite.

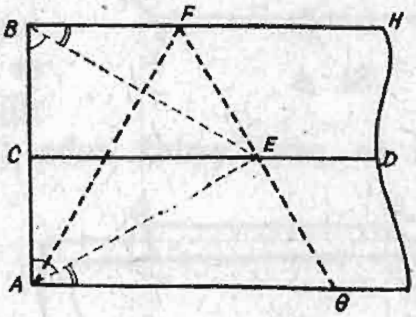
Primjer 1. — *Načiniti jednakostraničan trokut.*

Rješenje — *a*) Presavije se papir po nekom pravcu $MN$ (sl. 1). Na taj rub se nanese zadana stranica $AB$ trokuta. Presavijajući papir tako da tačka $A$ padne u tačku $B$, dobiva se okomica $ED$ u sredini $D$ dužine $AB$. Preklopimo li $AB$ oko $A$ tako da $B$ padne u tačku $C$ na $ED$, tada je trokut $ABC$ traženi jednakostranični trokut.

b) Jednakostranični trokut možemo dobiti i iz papira u obliku vrpce. Neka je vrpca na samom početku odsječena po rubu $AB$ koji je okomit na dužinu vrpce (sl. 2). Inače tu okomicu možemo dobiti ako rub duž vrpce presavijemo tako da se presavijanjem rubovi podudare.




Sl. 1



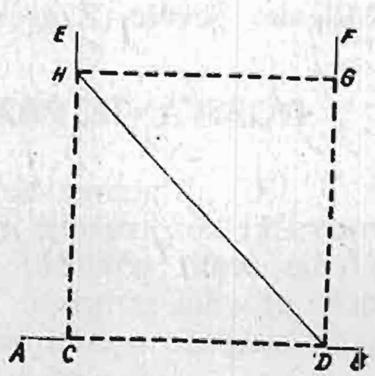

Sl. 2

Presavit ćemo zatim vrpcu na taj način da se njen gornji rub podudari s donjim rubom. Tada dobivamo rub $CD$. Poslije toga ćemo presaviti vrpcu oko $A$ tako da $B$ padne u tačku $E$ na $CD$ (presavijen rub je $AF$). Dio ruba $BF$ pri presavijanju oko $AC$ pada u $EF$. Treba konačno načiniti presavijanje oko $EF$, tj. dobiti rub $FEG$. — Kao kontrola može poslužiti i to što $AF$ mora pasti u tome momentu na rub $FH$. — Dobiveni trokut $AFG$ je traženi jednakostranični trokut.

Da je trokut $AFG$ jednakostraničan pokazat ćemo ovako: ponajprije ćemo utvrditi da je trokut $ABE$ jednakokračan s bazom $AB$. To slijedi iz izvedene konstrukcije. Nadalje se dobiva da je $AB = AE$. Iz toga svega zaista slijedi da je trokut $ABE$ jednakostraničan. Prema tome imamo da je: $\sphericalangle ABE = 60°$, $\sphericalangle EBF = 30°$, $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AFE = 60°$, $\sphericalangle BAF = 30°$ i $\sphericalangle FAG = 60°$. Dakle trokut $AGF$ ima tri jednaka kuta od $60°$.

Primjer 2. — *Načiniti kvadrat iz komada papira.*

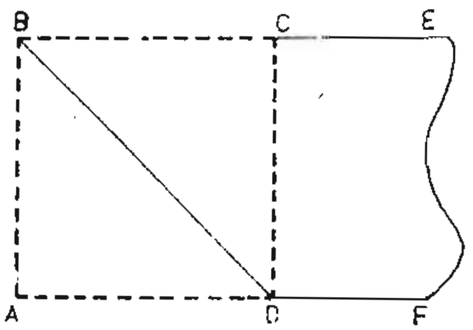
Rješenje — *a*) Presavit ćemo papir da dobijemo rub $AB$ (sl. 3). Po njemu presiječemo parir. Na $AB$ nanesemo dužinu stranice kvadrata $CD$. U tačkama $C$ i $D$ presavijanjem uzdignemo okomice $CE$ i $DF$. Uzduž njih opet škarama (makazama) presiječemo papir. Presavijemo sada papir da $CD$ padne na $DF$ i načinimo rub kroz $D$. Tačka $C$ će pasti u tačku $G$. Dobit ćemo rub $DH$, koji je upravo dijagonala kvadrata. Prema tome je $H$ četvrti vrh kvadrata. Presjekavši papir škarama uzduž $GH$ dobivamo traženi kvadrat.



Sl. 3

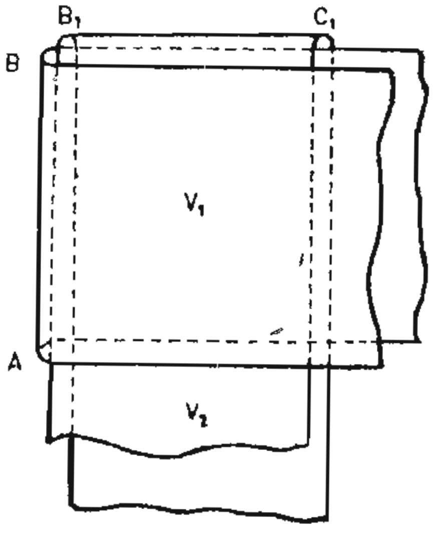
b) *Načiniti kvadrat iz papira u obliku vrpce.*

**1.** Vrpca je presječena po okomici $AB$. Sada presavijemo vrpcu tako da $AB$ padne u $BC$. Time je dobivena tačka $C$ (presavijeni rub $BD$). Zatim ćemo $BC$ presaviti oko $C$ tako da padne u rub $CE$ (presavijeni rub $CD$). Tako se dobiva kvadrat $ABCD$ (sl. 4).

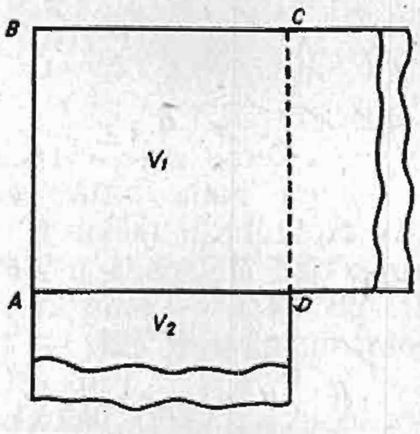


Sl. 4

**2.** Možemo koristiti i dvije vrpce $V_1$ i $V_2$ iste širine (sl. 5). Treba svaku od njih presaviti po širini tako da se na njima dobivaju okomice $AB$ i $B_1C_1$. Zatim se jedna tako presavijena vrpce ($V_1$) uvuče u drugu ($V_2$) na taj način da se donja polovina prve vrpce uvuče između dijelova druge vrpce. Vrpce se zategnu i zatim presaviju i to prva uzduž ruba $CD$, a druga uzduž ruba $AD$ (sl. 6). Tako se ustvari dobivaju četiri jednaka kvadrata.



Sl. 5

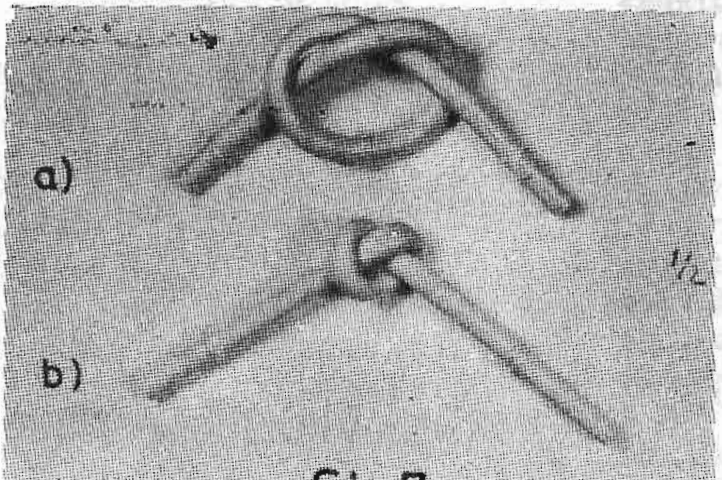


Sl. 6

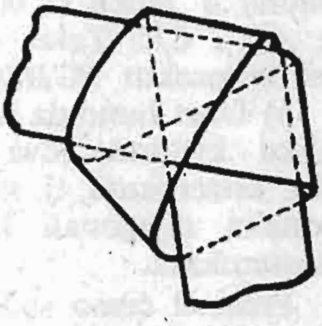
P r i m j e r 3. — *Konstrukcija pravilnog peterokuta.*

N a p o m e n a. Konstrukcija i obrazloženje pomoću izvođenja na ma kakovome komadu papira ponešto su poduže i složenije i zahtijevalo bi to već nešto više znanja iz geometrije, pa ćemo se stoga samo zadržati na konstrukciji pomoću papirne vrpce.

R j e š e n j e. — Prije nego što provedemo samu konstrukciju pozvat ćemo se na jedan postupak iz svakidašnjeg života. Mislimo na pravljenje čvora (uzla) pomoću komada špage (kanapa) (sl. 7 a i 7 b). Kada načinimo čvor, zaista nitko ne bi u prvi mah u tom čvoru viđio pravilan peterokut. O tom ćemo se uvjeriti ako mjesto špage uzmemo jeđnu vrpcu papira paralelnih rubova, pa pomoću nje načinimo čvor na isti način kao što smo načinili čvor pomoću




Sl. 7.

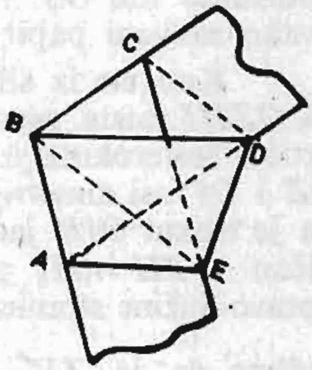


Sl. 8

špage (sl. 8). Poravnamo zatežući krajeve i pazeći da ne poderemo gdjegod na rubu taj papir. Tako dobivamo lik kao što je prikazan na sl. 9.

Treba sada pokazati da smo tu zaista đobili pravilan peterokut.

Ako razvijemo vrpcu, đobivamo četiri trapeza predočena na sl. 10, gdje isto slovo različitih indeksa označuje tačke koje se podudaraju.



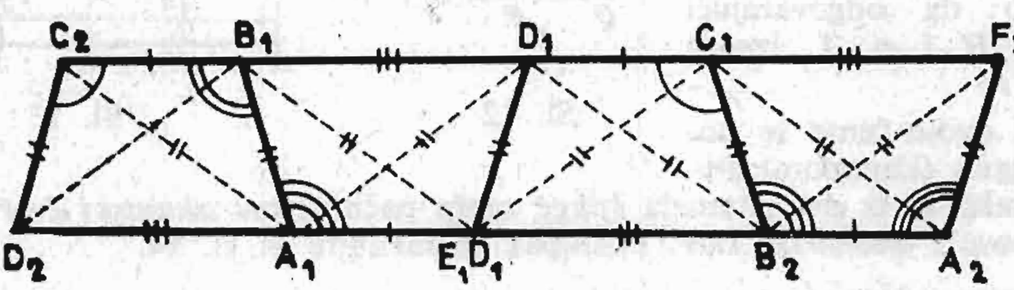

Sl. 9

Tako imamo:

$$\sphericalangle D_2C_2B_1 = \sphericalangle D_1C_1B_2 \quad \text{ili} \quad C_2D_2 = C_1B_2$$

$$\sphericalangle C_2B_1A_1 = \sphericalangle C_1B_2C_2 \quad \text{,,} \quad B_1A_1 = C_1B_2$$

$$\sphericalangle B_1A_1E_1 = \sphericalangle B_2A_2E_2 \quad \text{,,} \quad B_1A_1 = A_2E_2$$

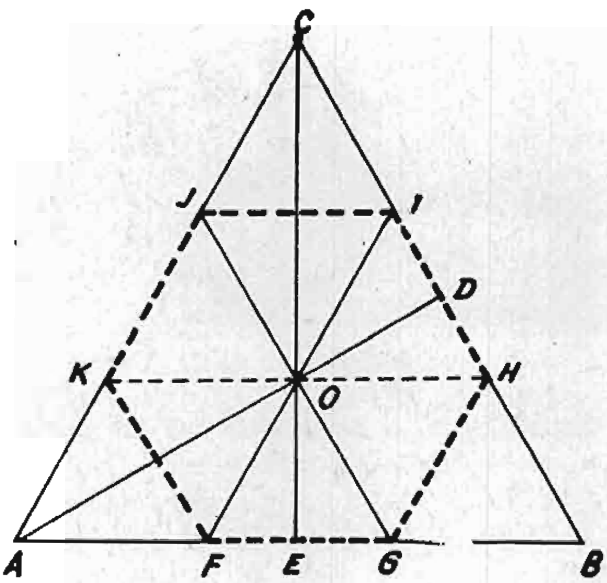



Sl. 10

Odatle slijedi: $C_2D_2 = C_2B_1 = B_1A_1 = A_1E_1 = D_1C_1 = C_1B_2 = B_2A_2 = A_2E_2$. Prema tome su dva krajnja trapeza jednakokračna i jednaka. Slično bi se pokazalo, da su sva četiri trapeza jednaka. Odatle se lako izvodi zaključak, da peterokut *ABCDE* na sl. 9 ima jednake stranice i kutove, pa je prema tome pravilan.

P r i m j e r 4.: *Dobivanje pravilnog šesterokuta (heksagona): a) pomoću komada papira u obliku jednakostraničnog trokuta; b) pomoću papira u obliku kvadrata; c) pomoću dvije papirne vrpce (jednakih širina).*

R j e š e n j e: *a*) Stranica heksagona je trećina stranice jednakostraničnog trokuta. Konstruiraju se dvije visine $AD$ i $CE$ jednakostraničnog trokuta $ABC$ (sl. 11.). Presaviju se vrhovi $A$, $B$, $C$ da padnu u tačku $O$ u kojoj se sijeku visine $AD$ i $CE$. Tako dobiveni lik je traženi šesterokut $FGHIJK$.

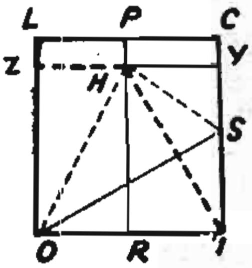


Sl. 11

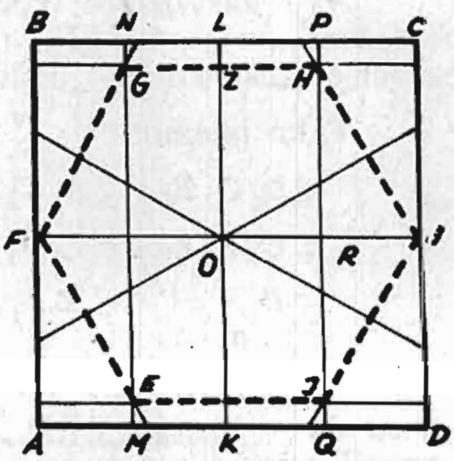
*b*) Uzet ćemo da je stranica papira u obliku kvadrata dva puta veća od stranice šesterokuta, tj. stranica kvadrata je jednaka dijagonali kružnice opisane oko šesterokuta.

Presavit ćemo sada četverokut, da dobijamo kvadrat $OLCI$ (sl. 12.), koji je četvrtina velikog zadanog kvadrata. Ponajprije odredimo raspolovnicu $PR$, a zatim preložimo $OI$ oko $O$ tako da tačka $I$ padne na rub $PR$ u tačku $H$. Time dobivamo rub $OS$. Načinimo i rub $HI$ i još okomicu $ZY$ na $CL$. Razvijemo li ovako savijeni papir dobivamo traženi pravilni šesterokut $EFGHIJ$ (Sl. 13).

Kao što iz slike vidimo lik $OZHI$ zaista predočuje četvrtinu šesterokuta u kome su $OZ$ i $OI$ osi simetrije. Budući da je trokut $OIH$ jednakostraničan i $HI = OI$, pa su to upravo dužine stranica. Nadalje vidimo da je $ZH = OR = \frac{OI}{2}$, tj. polovina stranice. Konačno razabiramo da odgovarajući kutovi u $H$ i u $I$ iznose 120° i 60°.

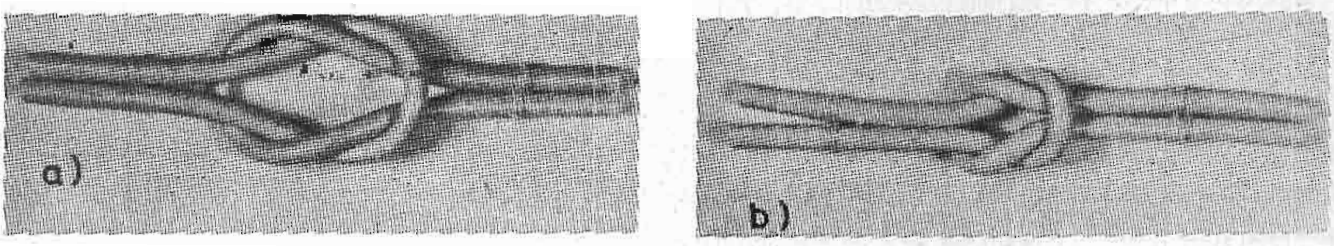


Sl. 12



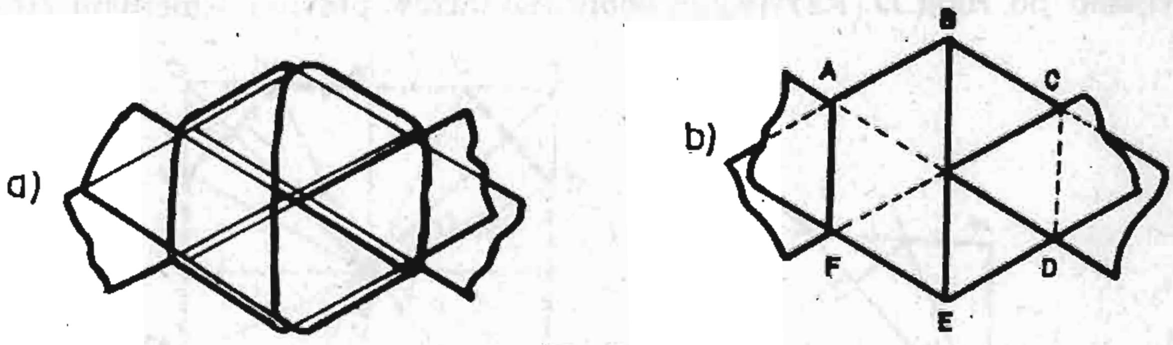
Sl. 13

*c*) I ovdje ćemo se poslužiti špagom (kanapom). Poznato je kako se iz dva komada špage može načiniti tzv. *skautski čvor* koji se ponekad zove i *mornarski čvor*. Postupak se razabire iz sl. 14.



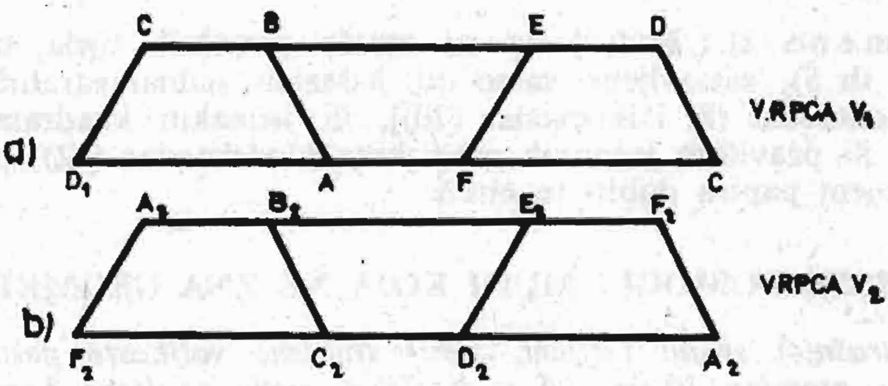
Sl. 14

Ako sada mjesto špage uzmemo dvije papirne vrpce, pa ih složimo kao što je to učinjeno sa špagom dobivamo sl. 15. *a*. — Ako opet vrpce zategnemo i poravnamo pazeći da ih ne zaderemo jednu u drugu, dobit ćemo sl. 15. *b*. —




Sl. 15

Pokušajte sami pokazati da su jednake stranice $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ i da su međusobno jednaka tri jednakokračna trapeza vrpce $V_1$ koji su predočeni na sl. 16. *a*. Isto tako pokažite da su jednaka i tri trapeza na drugoj vrpci $V_2$ (sl. 16. *b*). Budući da šes'erokut *ABCDEF* ima sve stranice jednake i sve kutove jednake, prema tome je on pravilan.



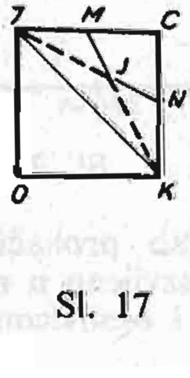

Sl. 16

P r i m j e r 5.: *Načiniti pravilan osmerokut.*

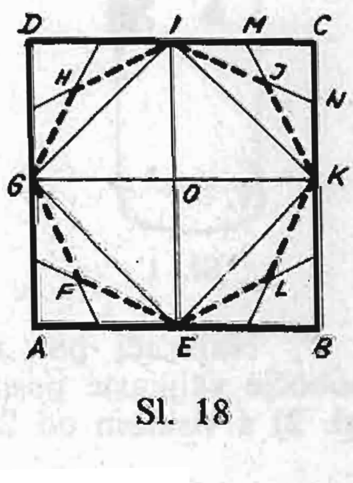
R j e š e n j e: *a*) *Pomoću papira u obliku kvadrata.* — Ponajprije ćemo uzeti da je stranica kvadrata jednaka *promjeru opisane kružnice*, tj. jednaka dijagonali osmerokuta.

Presavit ćemo papir tako da dobijemo kvadrat *OICK* (sl. 17.) koji je upravo četvrtina datoga kvadrata. Načinimo rub presavijajući kvadrat po dijagonali *IK*, a zatim načinimo raspolovnice *IN* i *KM*. Razvijemo li papir poslije savijanja dobivamo pravilni osmerokut *EFGHIJKLE* (sl. 18.).

*b*) Pretpostavit ćemo sada da je stranica datoga kvadrata jednaka *promjeru (prečniku) upisane kružnice* u osmerokut.

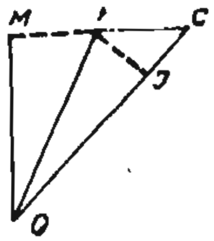



Sl. 17

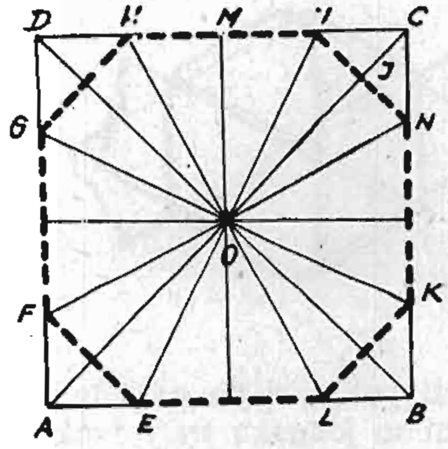



Sl. 18

Savit ćemo papir tako da se dobije pravokutan trokut $OMC$ (sl. 19.) koji je osmina zadanog kvadrata. Da bismo dobili raspolovnicu $OI$ kuta u $O$ presavit ćemo trokut tako da $OM$ padne u $OC$. Tačka $M$ pada u tačku $J$ na $OC$. Zatim presavijemo po rubu $IJ$. Razvijajući dobivamo traženi pravilni osmerokut (sl. 20.).




Sl. 19




Sl. 20

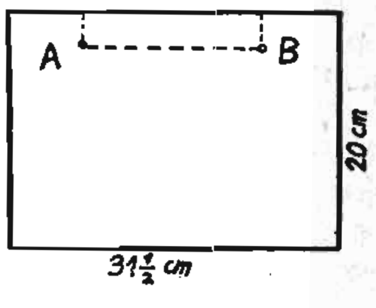
Napomena I.: Pokušajte načiniti pravilan deseterokut ako je zadan pravilan peterokut.

Napomena II.: Budući da su mreže pravilnih tijela, tzv. pravilnih poliedara (ima ih 5), sastavljene samo od jednakih jednakostraničnih trokuta [tetraedar (4), oktaedar (8) i ikozaedar (20)], ili jednakih kvadrata [kocka, tj. heksaedar (6)], ili pravilnih jednakih peterokuta [dodekaedar (12)], to pokušajte sami presavijanjem papira dobiti te mreže.

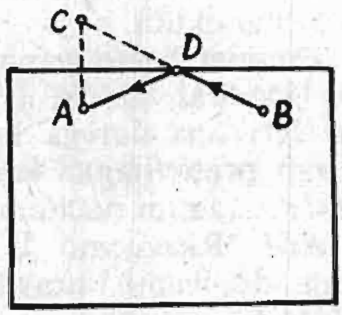
## KAKO BISTE POMOGLI MUHI KOJA NE ZNA GEOMETRIJU?

*Na unutrašnjoj strani (stijeni, zidu) staklene valjkaste posude kojoj je visina 20 cm a promjer 10 cm vidi se kapljica meda udaljena 3 cm od gornjeg ruba posude (sl. 1). Na vanjskoj strani u tački koja se nalazi upravo nasuprot kapljice sjedila je muha. Muha do meda sigurno ne bi došla najkraćim putem, jer ne poznaje geometriju i jer bi se pouzdala u svoja krila, pa bi odletjela do kapljice. Taj slučaj letenja ćemo isključiti. Da li biste vi pomogli muhi i pokazali joj kojim bi najkraćim putem stigla do kapljice meda?*

Sl. 1




Sl. 2




Sl. 3

Najkraći put možemo pronaći na sledeći način. Ako zamislimo da je pobočje valjkaste posude razvijeno u ravan lik, dobio bi se jedan pravokutnik (sl. 2) s visinom od 20 cm i osnovicom jednakom opsegu posude, tj. približno

$10\,\text{cm} \cdot 3\frac{1}{7} \approx 31\frac{1}{2}\,\text{cm}$ $\left(\text{gdje smo uzeli da je } \pi \approx 3\frac{1}{7} \approx 3{,}14\right)$. U tom pravokutniku označimo položaj kapljice i muhe: neka se u tački $A$ nalazi kapljica meda (udaljena prema zadatku 17 cm od osnovice), a na istoj visini u tački $B$ neka se nalazi muha. Udaljenost $AB$ kapljice i muhe iznosit će polovinu opsega posude, tj. $15\frac{3}{4}$ cm.

Da bismo sada našli tačku u kojoj muha mora prijeći rub posude, postupiti ćemo ovako: kroz tačku $A$ povučemo okomicu (normalu) na gornji rub pravokutnika i na njoj odredimo tačku $C$ (s gornje strane ruba) udaljenu od ruba 3 cm (tačke $A$ i $C$ su simetrične u odnosu na gornji rub; sl. 3). Spojivši tačku $B$ s tačkom $C$ dobit ćemo na gornjem rubu pravokutnika tačku $D$. Ta tačka $D$ bit će upravo ona tačka u kojoj muha mora prijeći na drugu stranu posude. Kako je $DC = AD$, i kako je $BC$ kao pravac upravo najkraća spojnica tačaka $B$ i $C$, to je i put $BDA$ onda najkraći put muhe do kapljice meda.

Našavši ovako u ravni na pravokutniku najkraći put treba samo pravokutnik ponovo saviti u valjak, pa ćemo na stijeni (zidu) posude vidjeti kuda mora ići muha da što prije dospe do kapljice meda. Nije sigurno, a i malo je vjerojatno ne bi li možda muhu pri tome vodio njen njuh, pa bi ona stvarno išla najkraćim putem.

Proverite da li je duljina tog najkraćeg puta u ovom slučaju jednaka 15,92 cm (približno)!

Uporedite ovaj zadatak sa zadatkom 103. u „Matematičkom listu" I. 2 (str. 57).

*M. S.*

* * *

# Z A D A C I

## Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole

*Hemijsko tehnološka škola u Leskovcu, juni 1968.*

**1.** Rešiti jednačinu

$$(x-1)(x-2)+x-(x+1)^2=(x-1)+2 \qquad [x=-1/5]$$

**2.** Rešiti sistem jednačina sa dve nepoznate pogodnom metodom:

$$\left.\begin{aligned}4x+3y&=2\\6x+5y&=4\end{aligned}\right\} \qquad [-1;\ 2]$$

**3.** Tri jednake pumpe mogu za 10 sati da isprazne bazen pun vode. Za koliko treba povećati broj pumpi da bi se bazen ispraznio za 6 sati? [2]

**4.** Izračunati zapreminu valjka ako je data visina $H=20$ cm i obim osnove $O=25{,}12$ cm. [$V \approx 1005\ \text{cm}^3$]

# Одабрани задаци

**Ови задаци (а има их за сваки разред) треба да вам послуже за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати, упутства и решења нека вам служе за контролу.**

## *Аритметика*

**390.** Израчунати, не тражећи сваки количник посебно:

$948:12-804:12$ [$144:12=12$]

**391.** Колико би био висок стуб састављен од свих милиметарских коцкица садржаних у једном кубном метру ако бисмо их све ставили једну на другу?

Одговор. — Стуб висок 1000 km. У 1 $m^3$ садржано је 1000 000 000 $mm^3$, а једна милијарда милиметара износи милион метара, тј. 1000 km.

**392.** Колико има природних бројева дељивих са 11 који су мањи од 1000? [90]

**393.** При дељењу једног природног броја другим добијен је количник 18 и остатак 24. Како ће се променити количник, а како остатак ако и дељеник и делилац смањимо 7 пута? Навести бар два примера!

**394.** Кад се бројеви 100 и 90 деле истим бројем, онда ће у првом случају остатак бити 4, а у другом 18. Којим је бројем дељено? [24]

**395.** Шта ће бити са количником ако се дељеник помножи са 4, а делилац умањи за своју петину?

Решење. — Множењем дељеника са 4 количник ће се повећати 4 пута. Кад се делилац умањи за своју 1/5 нови делилац ће износити 4/5 првобитног, те ће се количник повећати 5/4 пута. Према томе, кад се изврше обе промене количник ће се повећати $4\cdot\frac{5}{4}=5$ пута.

Провери то на примерима!

**396.** Колико је сати? — пита Мича оца. — Ево па израчунај: до краја овога дана преостало је трипут мање времена него што је већ прошло?

Колико је тада било сати? [6 сати увече]

**397.** Аутомобилист и бициклист пошли су у 5 часова из два различита места $A$ и $B$ један другоме у сусрет. У 7 часова они су се сусрели и продужили су путовање истом брзином којом су и до тада ишли. Аутомобилист је у $B$ стигао у 7 час. 30 min. Када је бициклист стигао у $A$ ако је на одмор утрошио 1 час 45 min.?

Решење. — До сусрета аутомобилист је возио 2 часа, а после сусрета још 30 минута. Значи, пут од $A$ до места сусрета $S$ био је 4 пута дужи него ли пут од места сусрета $S$ до $B$. Осим тога, пут од $S$ до $A$ бициклист је прешао за 2 часа·4 + + 1 час 45 min. = 9 час. 45 min. и стигао је $A$ у 16 час. 45 min.


**398.** Израчунај $$1:\left(1:2\frac{1}{2}+1:3\frac{3}{4}\right)$$ $\left[1\frac{1}{2}\right]$

**399.** Помоћу цифара $X$, $Y$ и $Z$ можемо написати 6 различитих бројева.

1) Напиши ових шест бројева.
2) Ако је $X<Y<Z$ поређај написане бројеве по величини.
3) Који су од шест написаних бројева једнаки ако је $X=Z$?
4) Покажи да је збир тих 6 бројева дељив са 222.

**400.** Дата је једначина $\frac{1}{4}(7x+3):\frac{2}{3}=m:2$.

1) Решити ову једначину по $x$ сматрајући $m$ познатим бројем.
2) Одредити вредност за $m$ тако да је $x=\frac{1}{7}$.
3) За које целобројне вредности променљиве $m$ ће бити $0<x<1$?

Решење. — 1) Када се дата једначина (пропорција!) реши по $x$, добиће се $x=\frac{4m-9}{21}$.

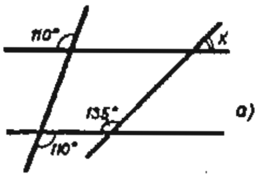
2) Из $\frac{1}{7}=\frac{4m-9}{21}$ лако добијамо $m=3$.

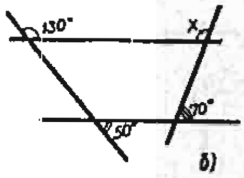
3) Потребно је да буде $0<\frac{4m-9}{21}<1$. Посматрајмо прво $0<\frac{4m-9}{21}$. Овај разломак ће бити позитиван када је $4m-9$ позитивно, тј. $4m-9>0$, што ће бити када је $4m>9$ (умањеник мора бити већи од умањиоца), тј. кад је $m>2\frac{1}{4}$. Међутим, истовремено мара бити и $\frac{4m-9}{21}<1$. Но ово ће бити испуњено за оне вредности променљиве $m$ за које је бројилац $4m-9$ мањи од имениоца 21, тј. $4m-9<21$. Ова последња неједнакост биће ваљана само онда када је у разлици на левој страни умањеник $4m$ мањи од 30, тј. $4m<30$, а ово ће бити могуће само кад је $m<7\frac{1}{2}$.

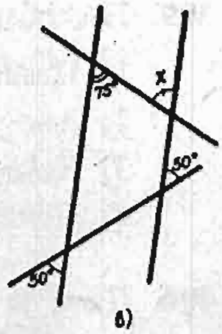
Према томе, утврдили смо да истовремено мора бити $m>2\frac{1}{4}$ и $m<7\frac{1}{2}$, а то се краће пише: $2\frac{1}{4}<m<7\frac{1}{2}$. Дакле, $m$ се налази између бројева $2\frac{1}{4}$ и $7\frac{1}{2}$; (скуп свих бројева који се налазе између та два броја често називамо *интервалом*), а у том интервалу цели бројеви су само 3, 4, 5, 6

**401.** У истом координатном систему нацртај праве дате једначинама $x-y-1=0$ и $2x+y-8=0$ па израчунај површину троугла који те праве образују са $x$-осом. Јединична дуж нека буде 1 cm. [3 cm²]

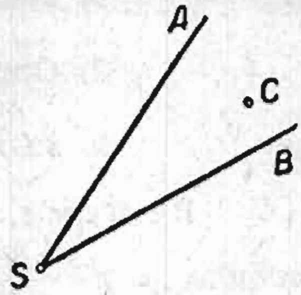
**402.** Одредити величину угла $x$ на свакој од следеће три слике.




**403.** Пут $SA$ сече реку $SB$ под оштрим углом (b. сл.). Курир из тачке $C$, која је у углу $ASB$, треба што је могуће пре да дође до пута $SA$ (да би предао писмо), али мора успут напојити коња на реци $SB$. Куда он треба да иде? Нацртајте тај пут!

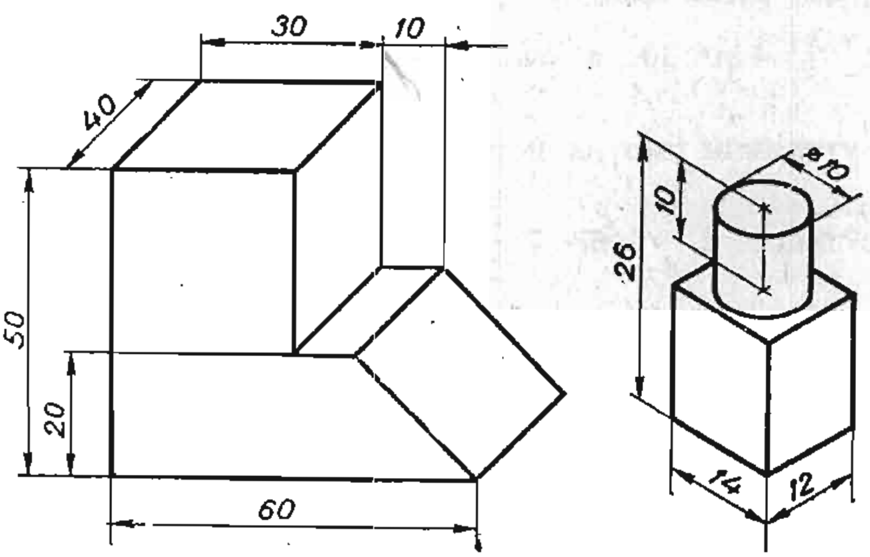



Упутство. — Искористити идеју у 60. конкурсном задатку — симетрија!

**404.** Како би нацртао квадрат који је по површини: 1) два пута, 2) три 3) четири пута, 4) пет пута толики као задани квадрат странице $a$?

Решење. — Нацртај квадрат $ABCD$ странице $a$. Повуци му дијагоналу $BD$. Тада је $BD^2 = 2\,a^2$ (тј. $BD = d = a\sqrt{2}$), одакле је квадрат над дијагоналом два пута толики као задани квадрат. Нанеси сада на $AB$ почевши од $A$ дуж $AE = BD = a\sqrt{2}$ и споји $E$ са $D$; у правоуглом троуглу $AED$ је $DE^2 = AD^2 + AE^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = a^2 + 2\,a^2 = 3\,a^2$; дакле, квадрат над страницом $DE$ три пута је по површини већи од датог квадрата. Узмимо сада $AF = a\sqrt{3}$ и нанесимо на $AE$ почевши од $A$ тако да је $AF = DE = a\sqrt{3}$; тада је $AF^2 = AD^2 + AF^2 = a^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4\,a^2$ итд.

**405.** Израчунати површине и запремине комбинованих тела приказаних на овој слици. Све призме и ваљак на слици су прави.



## Konkursni zadaci*

**62.** Od 8 kuglica, na izgled sasvim jednakih, jedna je nešto lakša od ostalih. Koliko merenja najmanje treba izvršiti na terazijama sa dva tasa (bez tegova) da bi se izdvojila ta kuglica? Objasniti postupak!

**63.** Dešifrujte množenje $\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}$.

Ovde slova označavaju nepoznate cifre, a $\overline{abcd}$ znači broj napisan ciframa $a, b, c, d$. Treba pronaći te cifre. Postupak objasniti!

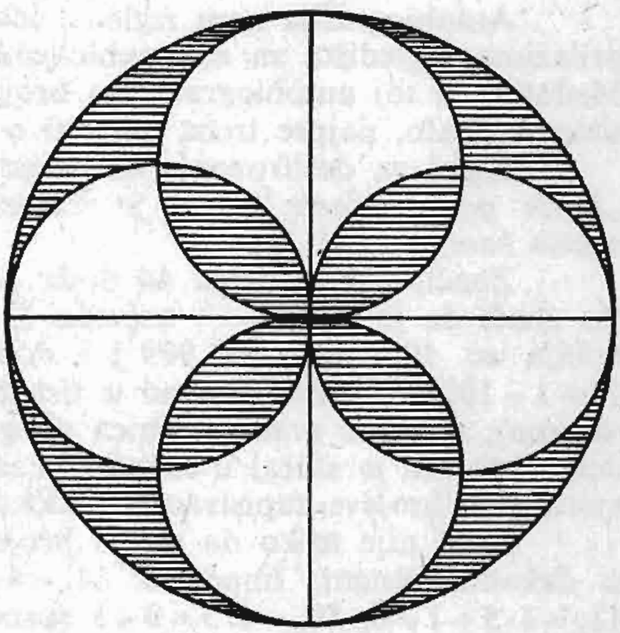
**64.** Dvanaest hlebova podeljeno je na dvanaest lica. Svaki čovek dobio je po dva hleba, žena — po pola hleba, a dete — po četvrtinu hleba. Koliko je bilo ljudi, koliko žena, a koliko dece?

**65.** Naći dvocifreni broj koji je jednak dvostrukom proizvodu svojih cifara.

**66.** U trouglu $ABC$ zadane su sve tri stranice: $a=87$ mm, $b=65$ mm i $c=88$ mm. Kolika je površina tog trougla?

**67.** Izračunati površinu četvorougla $ABCD$ ako je: $AB+DA=10$ cm, $BC=CD$, $\sphericalangle DAB=\sphericalangle BCD=90°$.

**68.** Prečnik (promjer) velikog kruga na ovoj slici (vidi desno) je $2R$. Kolika je površina osenčene figure na toj slici (u funkciji od $R$)? Koji deo velikog kruga, izraženo u procentima, zauzima ta figura? Na slici su nacrtani prečnici međusobno normalni (okomiti).



**Napomena.** — Učenici V i VI razreda mogu rešavati zadatke 62—64, a učenici VII i VIII — sve zadatke: 62—68.

---

* Rešite ove zadatke i rešenja pošaljite uredništvu „Matematičkog lista". Najbolja rešenja, a takođe i imena svih učenika koji su sve zadatke ili neke od njih sasvim tačno rešili, objaviće se u listu.

Najboljim rešavateljima za svaki razred dodeliće se *nagrade* na kraju školske godine.

Fond za nagrade rešavateljima konkursnih zadataka ove godine je povećan.

Svako rešenje (s tekstom i rednim brojem zadatka) treba pisati na jednoj strani papira. Svako rešenje treba čitljivo potpisati punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu i mesto, na primer: *Ivan Radović*, uč. $VIII_3$ raz. Osnovne škole „Učitelj Tasa", Niš.

Zadatke rešavajte samostalno ne tražeći pomoć ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite obrazloženo i čitko. Neuredna, nečitljiva rešenja i rešenja (rezultati, odgovori) bez obrazloženja neće se uopšte uzimati u obzir.

**Rešenja zadataka iz ovog broja poslati najkasnije do 10. IV 1969. godine.**

**Adresa: „Matematički list", Beograd, p.p. 728**

**Na koverti naznačiti:** ***Konkursni zadaci.***

## Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista“ III.2

**55.** *U spisima jednog matematičara-zanesenjaka bila je nađena njegova autobiografiju u kojoj on, između ostalog, piše sledeće:*

*„Završio sam fakultet kad sam imao 44 godine. Posle godinu dana, kao mladić od 100 godina oženio sam se 34-godišnjom devojkom. Neznatna razlika u godinama, svega 11 godina, doprinela je da smo živeli srećno i složno. Posle nekoliko godina imao sam već i malu porodicu od 10-oro dece. Plata mi je bila 13 000 n. dinara mesečno, ali sam od toga 1/10 davao sestri (na studijama), tako da mi je za izdržavanje porodice ostajalo samo 11 200 n. dinara mesečno . . .“*

*Neobična autobiografija, zar ne? Kako ćete objasniti očigledne „nelogičnosti“ u toj autobiografiji? Kako ustvari navedeni odlomak iz autobiografije treba da glasi?*

Autobiografija nam izgleda nelogična zato što brojevima navedenim u njoj prilazimo s gledišta za nas uobičajenog dekadnog (desetičnog) brojnog sistema. Međutim, u toj autobiografiji su brojevi pisani u nekom drugom, nedesetičnom sistemu. Zato, najpre treba utvrditi o kojem brojnom sistemu se ovde radi.

Ključ za dešifrovanje navedenog odlomka iz autobiografije jeste rečenica: „*Posle godinu dana (pošto je već imao 44 godine), kao mladić od 100 godina oženio sam se . . . .*“.

Znači, kad se broju 44 doda jedna jedinica dobija se 100, tj. $44+1=100$, što znači da je cifra 4 — najveća. (U dekadnom sistemu, dodajući 1 broju 99 dobija se 100; sabravši 999 i 1 dobija se 1000, itd.). Prema tome, jednakost $44+1=100$ ispravna je samo u sistemu s bazom (osnovom) *pet* (i samo u tom sistemu), u kome svaka jedinica višeg reda sadrži pet jedinica nižeg reda (a ne deset kao što je slučaj u dekadnom sistemu). Dakle, u svojoj autobiografiji matematičar je brojeve zapisivao u petičnom brojnom sistemu.

Sada nije teško da se svi brojevi navedeni u gornjem odlomku prevedu u dekadni sistem. Imaćemo: $44_5=4\cdot5+4=24$, $100_5=5^2=25$, $34_5=3\cdot5+4=19$, $11_5=1\cdot5+1=6$, $10_5=1\cdot5+0=5$ (osnova sistema), $13\,000_5=1\cdot5^4+3\cdot5^3+0\cdot5^2+$ $+0\cdot5+0=1\,000$, $11\,200_5=1\cdot5^4+1\cdot5^3+2\cdot5^2+0\cdot5+0=800$.

Prema tome, navedeni odlomak iz autobiografije ustvari glasi (u ubičajenom, dekadnom sistemu):

„Završio sam fakultet kad sam imao 24 godine. Posle godinu dana kao mladić od 25 godina oženio sam se 19-godišnjom devojkom. Neznatna razlika u godinama, svega 6 godina, doprinela je da smo živeli srećno i složno. Posle nekoliko godina imao sam već i malu porodicu od 5-oro dece. Plata mi je bila 1 000 n. dinara mesečno, ali sam od toga 1/5 davao sestri (na studijama), tako da mi je za izdržavanje porodice ostajalo samo 800 n. dinara mesečno . . .“.

*Vladimir Liščević*, VII$_5$, OŠ „Ž. J. Španac“, N. Beograd

**56.** *Sam lav može da pojede ovcu za 2 sata, vuk za 3 sata, a pas za 6 sati. Za koje vreme bi oni zajedno pojeli ovcu?*

Lav za 2 sata može pojesti 1 ovcu, a za 6 sati 3 ovce. Vuk za 3 sata može pojesti 1 ovcu, a za 6 sati — 2 ovce. Pas za 6 sati može da pojede 1 ovcu. Znači, lav, vuk i pas, kada bi jeli zajedno, za 6 sati mogli bi pojesti $(3+2+1)$ ovaca, tj. 6 ovaca, a za 1 sat — 1 ovcu.

Prema tome, kad bi jeli zajedno, lav, vuk i pas bi jednu ovcu pojeli za 1 sat.

*Milina Todorović*, V$_1$ r. OŠ „M. Stojković“, Umčari

**57.** *Neki čovek ide uz brdo iz A u B brzinom 2 km na sat, a zatim, ne zadržavajući se u B (na vrhu brda), vraća se (niz brdo) istim putem u A brzinom 6 km na sat.*

*Odrediti njegovu srednju brzinu na celom putu (tamo i nazad).*

Neka je $AB = s$. Tada je vreme u odlasku $s/2$ sati, a u povratku $s/6$ sati. Ukupno utrošeno vreme je $s/2 + s/6 = 2s/3$ (sati). Srednju brzinu dobićemo kada ceo pređeni put u odlasku i povratku (tj. $2s$) podelimo sa ukupno utrošenim vremenom da se taj put pređe:

$$v_{sr} = 2s : 2s/3 = 3 \text{ (km/h)}.$$

Prema tome, srednja brzina iznosila je 3 km na sat.

*Slavomir Biserčić*, $VII_4$ r. OŠ „O. Petrov-Radišić", Vršac

**58.** *Naći sve razlomke s jednocifrenim imeniocem od kojih je svaki veći od 7/9 a manji od 8/9.*

Ako svaki od datih razlomaka proširimo (pomnožimo i brojilac i imenilac) redom sa 2, 3, 4, . . . . , 8 — umesto para razlomaka 7/9 i 8/9 dobićemo nove parove razlomaka: 14/18 i 16/18, 21/27 i 24/27, 28/36 i 32/36, . . . , 56/72 i 64/72. Očigledno, svaki razlomak koji se nalazi između razlomaka u svakom od navedenih parova, zadovoljavaće jedan od uslova zadatka: biće veći od 7/9, a manji od 8/9; da bi bio zadovoljen i drugi uslov, izabraćemo od tih razlomaka takve, ukoliko ih ima, koji posle skraćivanja postaju razlomci s jednocifrenim imeniocem:

1) Par 14/18 i 16/18. Između je razlomak $15/18 = 5/6$.

2) Par 21/27 i 24/27. Između su dva razlomka (22/27, 23/27), ali se nijedan ne može skratiti.

3) Par 28/36 i 32/36. Između ova dva razlomka postoje još tri razlomka s imeniocem 36 (29/36, 30/36, 31/36), ali se samo jedan od njih može skratiti: $30/36 = 5/6$ (već je nađen).

4) Par 35/45 i 40/45. Skratiti se mogu samo dva od četiri razlomka koji su između posmatrana dva; to su 36/45 i 39/45. Međutim, samo $36/45 = 4/5$ zadovoljava uslove zadatka.

5) Par 42/54 i 48/54. Između ovih razlomaka samo je jedan s imeniocem 54 koji se može skratiti: $45/54 = 5/6$ (koji je napred već nađen).

6) Par 49/63 i 56/63. Jedini razlomak (s imeniocem 63) između ova dva, koji zadovoljava uslove, jeste $54/63 = 6/7$.

7) Par 56/72 i 64/72. Od 7 razlomaka između ova dva, samo se dva mogu skratiti. To su: $60/72 = 5/6$ (tj. razlomak koji smo već našli ranije) i $63/72 = 7/8$ — novi razlomak koji zadovoljava uslove zadataka.

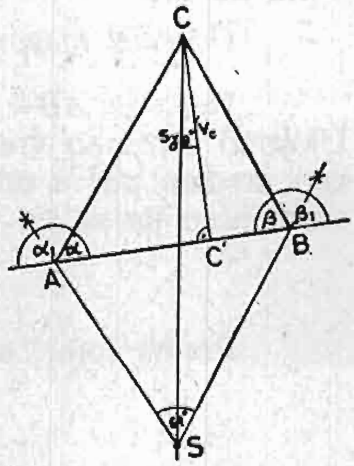
Proširavanje dvaju datih razlomaka sa 9, 10 itd. ne bi dalo nove razlomke koji bi zadovoljili uslove zadatka.

Prema tome, uslove zadatka zadovoljavaće samo 4 razlomka:

$$4/5,\ 5/6,\ 6/7 \text{ i } 7/8.$$

*Vojislav Maksimović*, $VIII_3$ r. OŠ „S. Nikolajević", Beograd

**59.** *Izračunati uglove trougla ABC ako ugao između visine povučene iz temena C i simetrale ugla ACB iznosi 9°, a ugao između simetrala spoljašnih uglova trougla kod temena A i B iznosi 61°.*




Iz $\triangle ACC'$ imamo: $\sphericalangle ACC' = 90° - \alpha$. (vidi sl.)

Dalje je $\sphericalangle ACS = \sphericalangle ACC' - \sphericalangle SCC' = (90° - \alpha) - 9°$.

S druge strane,

$$\sphericalangle ACS = \frac{\gamma}{2} = \frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} = 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Odatle sledi: $90° - \alpha - 9° = 90° - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, tj.

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha + 9°. \qquad (1)$$

Imamo dalje: $\sphericalangle ABS = \dfrac{\beta_1}{2}$ (kao unakrsni uglovi), tj. $\sphericalangle ABS = \dfrac{180° - \beta}{2}$.

Isto tako, $\sphericalangle BAS = \dfrac{\alpha_1}{2}$ (unakrsni uglovi), tj. $\sphericalangle BAS = \dfrac{180° - \alpha}{2}$. Kako je $\sphericalangle ASB +$ $+ \sphericalangle ABS + \sphericalangle BAS = 180°$, to je $61° + \dfrac{180° - \beta}{2} + \dfrac{180° - \alpha}{2} = 180°$, odakle

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 61°. \qquad (2)$$

S obzirom na (1) i (2) imamo:

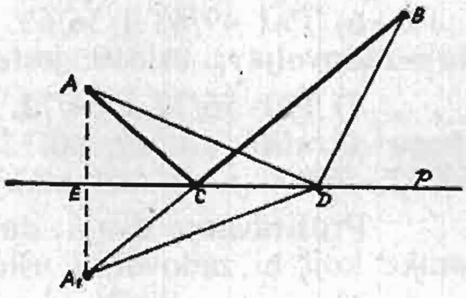
$$\alpha + 9° = 61, \text{ odakle } \alpha = \mathbf{52°}.$$

Na osnovu (2) je tada $\dfrac{52° + \beta}{2} = 61$, odakle je $\beta = \mathbf{70°}$. Treći ugao je tada

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 122°, \text{ tj. } \gamma = \mathbf{58°}.$$

*Rade Plaćaš*, VIII r. OŠ Mikleuš

**60.** *Na datoj pravoj p (v. sliku!) naći tačku C takvu da zbir rastojanja od nje do datih tačaka A i B bude najmanji. Dati obrazloženje konstrukcije.*




Konstruišimo tačku $A_1$ simetričnu datoj tački $A$ u odnosu na datu pravu $p$ (v. sliku!: $AA_1 \perp p$, $AE = EA_1$). Presečena tačka duži $A_1B$ i prave $p$ jeste tražena tačka $C$.

Dokažimo to. Uzmimo na pravoj $p$ koju bilo tačku $D$ i uporedimo zbir rastojanja od nje do datih tačaka $A$ i $B$, tj. zbir $AD + DB$ sa zbirom $AC + CB$. Pošto je $AC = A_1C$, to je $AC + CB =$ $= A_1C + CB = A_1B$. Zbog $AD = A_1D$ imamo da je $AD + BD = A_1D + DB$. Međutim, za stranice trougla $A_1DB$ važi relacija $A_1B <$ $< A_1D + DB$, te će biti: $AC + CB < AD + DB$.

*Aleksandar Martić*, $\mathrm{VII}_1$ r. OŠ „Čibukov. part.“, Kraljevo

**61.** *Koji celi brojevi postaju 14 puta manji kada im se izostavi (precrta) poslednja cifra?*

Neka je traženi broj $10x+y$, gde je $x$ — broj desetica, a $y$ — cifra jedinica. Ako se tom broju precrta (izostavi) cifra $y$, dobiće se broj $x$ koji će, prema uslovu zadatka, biti 14 puta manji od traženog broja, tj. mora biti $10x+y=14x$, odakle je $y=4x$. Međutim, $y$ je jednocifren broj ($y$ može biti najviše 9), što znači da $x$ mora biti manje od 3. Prema tome, ili je $x=2$, ili $x=1$. Pošto je $y=4x$, to će odgovarajuće vrednosti za $y$ biti 8 i 4, te će traženi brojevi biti: $10\cdot 2+8=28$ i $10\cdot 1+4=14$.

Lako se uveravamo da oba broja 28 i 14 zadovoljavaju uslove zadatka.

*Dušan Pagon*, $VIII_b$ r. OŠ „F. Močnik", Cerkno

## Rešili konkursne zadatke iz „Matematičkog lista" III. 2

*Aleksić Ljubina*, $VIII_3$ r.OŠ »V. Karadžić« Ripanj: 56; *Aleksić Nenad*, $VII_2$ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd; 55, 56, 58; *Aleksić Slađana*, $V_2$ r.OŠ »V. Karadžić« Ripanj: 56; *Aleksić Zlatica*, $V_4$ r.OŠ »V. Radosavljević« Negotin: 56; *Aleksov Jagoda*, $VIII_3$ r.OŠ »R. Vukićević« Niš: 56; *Alić Ferid*, $VII_3$ r.OŠ »V. Perić-Valter« Sarajevo: 56, 57; *Anđelić Klarisa*, OŠ »V. Karadžić« Čačak: 55, 56, 59; *Anđelković Lana*, $VII_4$ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: 56, 58; *Antalj Stoja*, VIII r.OŠ »A. Šantić« Sečanj: 56; *Antić Zoran*, $VIII_1$ r.OŠ »B.Stanković« Vučje: 55, 56; *Apić Mihailo*, $VII_2$ r.OŠ »M. Kosovac« Šabac: 56; *Aziraj Jasmina*, $VII_4$ r.OŠ »V.P. Valter« Sarajevo: 57; *Ažarov Emin*, V r.OŠ »K. Josifoski-Pitu« Skopje: 56, 57;

*Babić Dana*, $VII_1$ r. OŠ »S. Marković« Sjenica: 56, 59, 60; *Babić Veljo*, OŠ »F. Filipović« Čačak: 56; *Bajović Vera*, VII r.OŠ »A.Š.« Sečanj: 56; *Belančić Mirjana*, VII r.OŠ »10. okt.« Subotica: 56, 58; *Bertran Cica*, $V_5$ r.OŠ »Braća Jerković« Železnik: 56; *Bežanov Danica*, $V_1$ r.OŠ »V.D.« Beograd: 56; *Biserčić Slavica*, $VIII_1$ r. OŠ »O. Petrov-Radišić« Vršac: 56, 57; *Biserčić Slavomir*, $VII_4$ r.OŠ »O.P. Radišić« Vršac: 56, 57, 58; *Blagojević Milkica*, $VI_1$ r. OŠ »Braća Jerković« Železnik: 56, 60; *Blagojević Zagorka*, $VI_2$ r.OŠ »Vožd Karađorđe« Niš: 59; *Bogdanović Đurđevka*, $VIII_1$ r.OŠ »V. Milićević« Grocka: 56, 57, 60, 61; *Bogdanović Ljubiša*, $VIII_2$ r.OŠ »T. Rajić« Čačak: 56; *Bogunović Sofija*, VII r. OŠ »M. Tomić« Dobrinci: 56, 57, 58; *Bojanović Zoran*, $VI_1$ r. OŠ »Dr. D. Mišović« Čačak: 56; *Bojović Rada*, $VI_1$ r.OŠ »Dr D.M.« Čačak: 56; *Bokalović Gordana*, $VII_1$ r.OŠ »V.M.« Grocka: 56; *Bošković Dragan*, $VI_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 58; *Bošković Joviša*, $VIII_2$ r.OŠ »M. Mitrović« Velika Plana: 56, 57, 58, 60; *Bošković Mirjana*, $VIII_3$ r.OŠ »M.T.« Medveđa kod Trstenika: 55, 56, 57, 58, 59, 61; *Bošković Uroš*, $VII_1$ r.OŠ »V.K.« Čačak: 56, 57, 58, 59; *Božičković Goran*, $VII_4$ r.OŠ »M. Bursać« Beograd: 56; *Božinović Radmilo*, $VI_1$ r.OŠ »Braća Ribar« Beograd: 55, 56; *Brajević Jelisaveta*, $VIII_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56; *Brković Radojica*, $VIII_4$ r.OŠ »T. Rajić« Čačak: 56; *Bubanja Radovanka*, $VIII_3$ r.OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 56; *Bugarčić Milka*, OŠ »Dr D.M.« Čačak: 56; *Bugarski Gordana*, $V_1$ r.OŠ »V.D.« Beograd: 56; *Bugarski Snežana*, $VI_5$ r.OŠ »Dr D.M.« Čačak: 55, 56;

*Carević Stanimir*, $V_2$ r.OŠ »7. oktobar« Čačak: 55; *Cerović Uroš*, $VI_4$ r.OŠ »N. Jeličić« Šabac: 56; *Conić Dragica*, $VIII_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56; *Cvetićanin Milan*, VII r.OŠ »Ž. Z.« Boka: 56; *Cvetković Ivan*, $V_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Cvetković Miodrag*, $VIII_1$ r.OŠ »B. S.« Vučje: 55, 56; *Cvetković Slobodan*, $VIII_2$ r.OŠ »V.M.« Grocka: 56; *Cvijetić Ljubiša*, $V_3$ r.OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik: 56; *Cvijetić Miodrag*, $V_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56;

*Čampar Rade*, VIII r.OŠ Viča kod Čačka: 56, 57; *Čarnojević Vlastimir*, $VII_2$ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: 55, 56, 58; *Čelebić Branislav*, OŠ »Ž. A.« Trstenik: 59; *Černalogar Zora*, VIII r.OŠ »J. Mihevca« Idrija: 56; *Čkonjević Gordana*, VI r.OŠ »Dr D.M.« Čačak: 66, 56; *Čubrilo Gordana*, $VIII_1$, r.OŠ »O. Petrov« Vršac: 56, 57; *Ćirić Zorica*, $VII_2$ r.OŠ »M. T.« Medveđa k/T: 56, 57; *Ćirin Ljiljana*, $VI_2$ r.OŠ »N. Grulović« N. Pazova: 56; *Ćirković Radovan*, $VIII_2$ r.OŠ »M. B.« Natalinci: 56, 58; *Ćosić Ankica*, $VIII_3$ r.OŠ »S. Jovanović« Pančevo: 56, 58; *Ćosić Miodrag*, $V_4$ r.OŠ »F. Višnjić« Šid: 56; *Ćujić Slavica*, $V_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Ćurčić Bratislav*, $VIII_1$ r.OŠ »T. R.« Čačak: 56.

*Davidović Dragica*, VI r.OŠ »B. R.« Mihajlovac (Krajina): 56; *Davor Novak*, $VIII_a$ r. OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Križevci: 56, 57, 58, 59; *Despijić Slavica*, VIII r.OŠ »Ž. Z.« Boka: 55, 56, 58; *Dević Božica*, VII r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 56, 57, 58; *Dimitrijević Ljiljana*, $VIII_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56; *Dimitrijević Ljubiša*, $VIII_1$ r.OŠ »V. Savić« Lazarevac: 56; *Dobrosavljević Biljana*, $VIII_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 55, 56; *Dimović Petar*, VIII r.OŠ »M. Pijade« Kostolac: 56; *Dragić Branislava*, $VII_2$ r.OŠ »O. Petrov-Radišić« Vršac: 56; *Dragić Žika*, VII r.OŠ »S. M.« Brza Palanka: 55, 56; *Dramlić Jadranka*, VII r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 56; *Drobnjak Milutin*, $VIII_2$ r.OŠ »Đ. J.« Konarevo kod Kraljeva: 56, 57; *Drobnjak Zoran*, $VI_5$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 56; *Dukanac Milun*, $VI_1$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56; *Dulović Sekule*, $V_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56.

*Đokić Dušan*, VIII₁ r OŠ »S. Jovanović« Šabac: **56**; *Đonin Miljana*, VII₂ r.OŠ »O.P.R.« Vršac: 56; *Đonovoć Biljana*, V₁ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; *Đorđević Dragan*, VIII r.OŠ Viča k/Č: **56**; *Đorđević Snežana*, VII₃ r.OŠ »M. Bursać« Beograd: 56; *Đorđijev Biljana*, VI₂ r.OŠ »V. Pelagić« Leskovac: 56; *Đurić Milan*, VI₃ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 58; *Džigal Mustafa*, VIII₅ r.OŠ »S. M.« Sjenica: **56, 57**, 58, **59**, 60, **61**; *Džigal Osmau*, VIII₅ r. OŠ „S. M." Sjenica: 56, 57, 58, 59, 60, **61**; *Džodić Dragan*, VIII₃ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57.

*Ercegovac Bratislav*, VI r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 56, 58; *Ercegovac Zorica*, VII r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 56, **57**, 58; *Fiksman Beatriks*, VII₃ r.OŠ »O.P.R.« Vršac: 56; *Filipović Zlatiborka*, VIII₂ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Fišer Miroslav*, VII₂ r.OŠ »M. Stanojlović« Kragujevac: 56, 58; *Flora Silvija*, VII₂ r.OŠ »O.P.R.« Vršac: 56; *Franjić Biljana*, VII₁ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: **59**.

*Gajić Boško*, VII₃ r.OŠ »A. Savčić« Valjevo: 56; *Gavrić Branko*, VIII₄ r.OŠ »IV kralj. bat.« Kraljevo: 55, 56; *Gavrilović Ljubica*, VII₂ r.OŠ »O.P.R.« Vršac: 56, **57, 58**; *Gegić Radovan*, V₄ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Gemaljević Radoljub*, VIII₅ r.OŠ »S. M.« Sjenica: **56**; *Glušac Miloš*, VIII₁ r.OŠ »V. K.« Žitni Potok k/P: 56, 57; *Gojković Branislav*, VI₃ r.OŠ Kumodraž kod Beograda: 56; *Golubović Milica*, VII₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Gradištanac Dragana*, VII₃ r.OŠ »M. T.« Medveđa k/T: 55, 56, 58, 59; *Grbić Verica*, VII₃ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Grebović Dragoje*, VIII₅ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, **57**, 58, 59, 60, **61**; *Grebović Stanislava*, VI₁ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, 58; *Grujičić Miroslav*, VII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Grujić Miroslav*, VII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: **56**; *Handanagić Suad*, VII₃ r.OŠ »V. Perić-Valter« Sarajevo: 56; *Horvat Marija*, OŠ »Ž. Z.« Boka (Banat): 56, 58; *Hovan Miluška*, V₄ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Hrkman Slavica*, VI₄ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56.

*Ignjatović Zorka*, VII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Ilić Gordana*, VI₄ r.OŠ »O. P. R.« Vršac:56; 58; *Ilić Mikica*, VII₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57, 60, **61**; *Ilić Milina*, VI₃ r.OŠ Kumodraž: 56; *Ivančević Srđan*, VIII₄ r.OŠ »J. Cvijić« Beograd: **59**; *Ivanović Slobodan*, VII₂ r.OŠ »V. M.« Grocka: **56** (2 načina), **57**, 58, **59**, 60; *Ivković Ljubica*, VII₂ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Ivković Milojka*, VI₂ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56; *Jagličić Stojanka*, VIII₂ r.OŠ »M. Stanojlović« Kragujevac: 56, **59, 61**; *Jakšić Marija*, V₂ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Jančić Mirjana*, VII₃ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Janković Dušan*, VII₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Janković Ljubiša*, VIII₇ r.OŠ »Njegoš« Niš: **56**; *Jevremović Ljiljana*, VII₃ r.OŠ, »M. T.« Medveđa k/T: 56, **59**; *Jevremović Vesna*, VIII₁ r. »J. Veselinović« Šabac: 49, 50, 53, 54 (del.«) **55, 56**, 58, **59, 60**; *Jocić Hristina*, VI₁ r.OŠ »M. Pijade« V. Plana: 56, 57; *Josić Gordana*, VI₂ r.OŠ »N. G., N. Pazova: 56; *Jokanović Dušan*, VIII₂ r.OŠ »Sv. Sava« Beograd: 55, **56, 57, 58**, 59, **61**; *Josimov Milan* VI₁ r.OŠ »Ž. Z.« Gospođinci: 56, 58; *Jovanović Jovica*, V₃ r.OŠ »I.G.K.« Niška Banja: 56; *Jovanović Miroslav*, VII₁ r.OŠ »Sv. Sava« Beograd: **55, 56**, 59; *Jovanović Miroslav*, VIII r.OŠ »S. M.« Krušćica: 57; *Jovanović Nevena*, VII₃ r.OŠ »M. Bursać« Beograd: 56; *Jovanović Svetlana*, VI₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Jovanović Svetlana*, VIII₃ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56; *Jović Branislav*, V r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Jurišin Snežana*, VIII r.OŠ »Ž. Z.« Boka: 56.

*Kaldesić Rade*, VII₂ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Kamenjašević Anto*, VIII r.OŠ »M. P.« Tramošnica Donja: 56; *Karađenov Martin*, VIII r.OŠ »V. K.« Konak: 56; *Karajović Željko*, VII₂ r.OŠ »25. maj« N. Beograd— 56; *Kasunić Marica*, VII r.OŠ Generalski Stol: **55**; *Kašlik Antal*, VII r.OŠ »Ž. Z.« Boka: 56; *Katanić Svetlana*, VI₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Klaić Zoran*, V r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Klisurić Ljiljana*, V r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Knežev Božica*, VI₃ r.OŠ »J. Pančić« Beograd: 56, 57, 59; *Knežev Verica*, V₁ r.OŠ »J. M.« Novi Bečej: 56; *Knežević Vladimir*, V₃ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: 56; *Knežević Vladimir*, VI₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Knežević Ljiljana*, VIII₁ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 55; *Kokošar Majda*, VII r.OŠ »J. M.« Idrija: 56; *Kokotović Miodrag*, VII r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 55, 56, 57, 59; *Korošec Mira*, VII₄ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56, **61**; *Kovačević Ljiljana*, V₃ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Kovačević Stevan*, VII r.OŠ »S. B. Paja« Pećinci: 56; *Kovačević Vladan*, VIII r. OŠ Viča k/Č: **56**, 57, 59, **61**; *Kovačević Željko*, VII₁ r.OŠ »Zmaj J.J.« Ruma: 56, 58; *Krantić Olivera*, V₁ r. »M. J. Cerovac« Vrčin k/B: **56**; *Krnjajski Ksenija*, VI₂ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Kujović Novica*, VII₂ r.OŠ »Čib. part.« Kraljevo: 58; *Kurbalija Radojka*, VIII₂ r.OŠ »D. Vukasović« N. Pazova: **55**, 56, **57, 58**; *Kuzmanović Mladen*, VI₁ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57, 58.

*Labanji Livia*, IV r.OŠ »J. J. Zmaj« ? : 55; *Laličanin Miodrag*, VII₁ r.OŠ »Dr. Mišović« Čačak: 56; *Lazarević Zora*, V₃ r.OŠ »F. Filipović« Čačak: 56; *Lazić Zorica*, VIII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Lazović Boža*, V₁ r.OŠ »F. Prešern« Beograd: **56**; *Lazović Pero*, V₃ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56; *Lepojević Zorica*, VI₃ r.OŠ »V. R.« Negotin: 56; *Leposavić Gordana*, VI₄ r.OŠ »N. H. Čajka« Trstenik: 56; *Leto Amira*, VII₃ r.OŠ »V. P. Valter« Sarajevo: 56, 60; *Likar Boris*, VIII r.OŠ »J. M.« Idrija: 56; *Liščević Vladimir*, VII₅ r.OŠ »Ž. J. Španac« N. Beograd: **49, 50, 52**, 54 (del.), **55**, 56, **57, 59, 60**; *Litajkovski Ljupče*, VII₂ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: **56**; *Ljajić Nermin*, VIII₅ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56.

*Mahmutović Alija*, VIII₄ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, 57, 58, **59, 61**; *Mahmutović Rušid*, VIII₁ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, 59, 60, 61; *Maksić Ljiljana*, VII₄ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Maksimović Velizar*, VII₂ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Maksimović Vojislav*, VIII₃ r.OŠ »S. Nikolajević« Beograd: 56, 57, **58, 69**; *Malčić Ddragiša*, VII₁ r.OŠ »V. Dug.« Požarevac: 55, 56; *Maljković Ivanka*, VI₃ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56; *Mandić Miroslav*, VII₃ r.OŠ »V. P. Valetr« Sarajevo: 60; *Manojlović Dobrila*, VI₄ r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 55, 56, 57, 58, 59; *Marčeta Jelena*, VII₃ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 55; *Marić Zlata*, VIII₁ r.OŠ »B.J.« Kusadak: 56, **60**; *Marić Zoran*, V₁ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; *Marinković Dimitrije*, VI r.OŠ »B. R.« Mihajlovac: 58; *Marinović Budimir*, VIII₃ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57, 58, 60, 61; *Marković Jelena*, VII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Marković Rada*, VII₁ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Marković Siniša*, VIII₁ r. »V. Masleša« Sarajevo: 55, 56, **59, 61**; *Marković Svetlana*, V₃ r.OŠ »V. D.« Beograd: 56; *Martić Aleksandar*, VII$_1$ r.OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 60; *Matematička grupa* VI r.OŠ »J. M.« Novi Bečej: 56, 57, 58, 59, 60; *Matematička sekcija* VII$_2$ r.OŠ »V. Karadžić« Čačak: 56, 57, 59, 60; *Matić Luca*, VI r.OŠ »M. P.« Tramošnica Donja: 56; *Matović Danica*, VI$_1$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 56; *Matović Milenko*, VI r.OŠ »S. V. Čiča« Vitkovići - Goražde: 56; *Matvejev Ivan*, V$_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Mihailović Branko*, VIII$_3$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Mijović Vesna*, VI$_1$ r.OŠ »M. Pavlović« Čačak: 57; *Mijušković Veljko*, VI$_2$ r.OŠ »M. Gorki« Beograd: 56, 58, 59; *Mikić Marija*, VI$_2$ r.OŠ »M. Pavlović« Čačak: 56; *Miladinović Dobrila*, OŠ »J. M.« u Miloševu k/B: 56; *Milanović Zorica*, V$_2$ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56; *Milaš Stevan*, VIII$_3$ r.OŠ »D. V.« N. Pazova: 58; *Milekić Dragana*, VI$_1$ r.OŠ Viča k/Č: 56; *Milekić Nikola*, V$_3$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; *Milekić Radomir*, VII r.OŠ Viča k/Č: 56, 59; *Milenkov Boris*, VIII$_5$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56, 58; *Milenković Dragoslav*, VII$_2$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56, 58; *Milidragović Miodrag*, VII$_a$ r.OŠ »A. S.« Sečanj: 56; *Milić Biljana*, VII$_3$ r.OŠ »M. T.« Medveđa k/T: 55, 56, 57, 58, 59; *Milićević Jasmina*, VII$_1$ r.OŠ »J. Ćetković« Beograd: 56; *Milićević Svetlana*, VII$_1$ r.OŠ »J. Ć.« Beograd: 56; *Milivojević Dragana*, VII$_3$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Milivojević Mirjana*, VI$_1$ r.OŠ »M. P.« Vel. Plana: 56; *Milojević Mirjana*, V$_4$ r.OŠ »D. Jerković« Ruma: 55, 56, 57; *Milivojević Jasminka*, VII$_4$ r.OŠ »V. D.« Beograd: 56; 58; *Milosavljević Miladin*, VII$_3$ r.OŠ »T.R.« Čačak: 56; *Milosavljević Miroslava*, VII r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56, 57; *Milošević Bogdan*, VII$_1$ r.OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 56; *Milošević Gorica*, VII$_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 57; *Milošević Željko*, VI$_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Milovanović Miroslav*, V$_3$ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56; *Milovanović Radovan*, VIII$_5$ r.OŠ »P. B.« Vrnjačka Banja: 55, 56; *Milunov Milutin*, VII$_4$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Miljković Dragan*, VI$_3$ r.OŠ »J. J. Zmaj« Svilajnac: 56; *Minić Predrag*, VI$_4$ r.OŠ »N. Jeličić« Šabac: 59; *Mišić Aleksandra*, VII$_3$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56; *Mitrović Vesna*, V$_3$ r.OŠ »F. F.« Čačak: 56; *Morina Suzana*, VI$_3$ r.OŠ »Braća Jerković« Železnik: 56, 60; *Mozetić Siniša*, VII$_4$ r.OŠ »N. Jeličić« Šabac: 56, 57, 58, 59; *Munćan Mile*, VII r.OŠ »V. K.« Konak: 56; *Mutavdžić Nadica*, V$_1$ r.OŠ »M. T.« Medveđa k/T: 55, 56.

*Nedeljković Nebojša*, VI$_1$ r.OŠ »B. Parać« Beograd: 56; *Nedeljkov Radinka*, VIII$_1$ r.OŠ »M.P.« Opovo: 55, 56; *Nedović Snežana*, VI r. OŠ »M. P.« Vel. Plana: 56; *Nenadović Zoran*, V$_2$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Nenadović Zorica*, VIII$_3$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Nestorović Milanka*, VIII$_2$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Nešović Zorica*, VIII$_2$ r.OŠ »V. Karadžić« Čačak: 55, 56, 58; *Nikić Milorad*, VIII r.OŠ Boka: 55, 56, 58, 59; *Nikitović Jasmina*, VI$_1$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 55, 56, 57; *Nikolić Georgina*, VII$_2$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 55, 56; *Nikolić Dragan*, VIII$_3$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56, 59; *Nikolić Ljiljana*, VI$_5$ r.OŠ »M. M.« Veliko Orašje: 56; *Nikolić Milunka*, VII$_1$ r.OŠ »T. R.« Čačak: 56; *Nikolić Slobodanka*, VII$_1$ r.OŠ »V.K.« Ripanj: 56; *Nikolić Predrag*, VIII$_5$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 56, 57, 59; 60, 61; *Nikolić Snežana*, VII$_3$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56; *Nikolić Vesna*, VII$_4$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 55; *Nižić Nives*, VIII r.OŠ »V. Nazor« Slav. Požega: 56; *Novak Marica*, V$_d$ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Novakov Zorica*, VI$_4$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56, 58; *Novković Petar*, VII$_2$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; 58; *Njagojević Ljubica*, VI r.OŠ »B. R.« Mihajlovac: 56.

*Obradović Milka*, VII$_4$ r.OŠ »Ž. Zrenjanin« Vršac: 58; *Obradović Nada*, VI$_1$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 56; *Obradović Verica*, VII r.OŠ »J. M.« u Miloševu kod Bagrdana: 56; *Obradović Zorica*, VIII$_3$ r.OŠ »Ž. Z.« Vršac: 58, 60; *Odry Peter*, VII$_2$ r.OŠ »B. J.« Svetozar Miletić: 56; *Opačić Filip*, VII$_b$ r.OŠ Popinci: 56.

*Pagon Dušan*, VIII r.OŠ »F. M.« Cerkno: 55, 56, 57, 61; *Pahor Maja*, VII r.OŠ »J. M.« Idrija: 56, 58; *Pajić Vojkan*, VI r.OŠ »Ž. Z.« Boka: 55, 56; *Panić Ljiljana*, VI$_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Pantelić Branka*, VIII$_1$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 56; *Pantelić Snežana*, VII$_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 55; *Pantić Biljana*, VIII$_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 59; *Papić Zeno*, VIII$_5$ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, 61; *Paskulj Ivica*, VI$_2$ r.OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 56; *Paunić Milica*, VII$_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Paunić Pavle*, V$_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Pavlović Julija*, VII$_3$ r.OŠ »M. P.« Erdevik: 56, 58; *Pavlović Ljiljana*, VI$_2$ r.OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 56; *Pavlović Zorana*, VI$_1$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56; *Perić Momčilo*, OŠ »M. Kosovac« Šabac: 56; *Perišić Radislav*, VI r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56; *Petković Biljana*, VI$_3$ r.OŠ »V. R.« Negotin: 58, 59; *Petković Branislava*, VII$_2$ r.OŠ »V. K.« Čačak: 56, 60; *Petković Slađana*, V$_2$ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56; *Petrašinović Zorica*, VII$_3$ r.OŠ »M. T.« Medveđa k/T: 56, 58, 59; *Petronijević Zoran*, V$_3$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Petrović Biljana*, VII$_3$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Petrović Gordana*, V$_2$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Petrović Dragan*, VII$_2$ r.OŠ Viča k/Č: 57; *Petrović Vesna*, V$_3$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Petrović Zoran*, VI$_4$ r.OŠ »M. Kosovac« Šabac: 56; *Petrović Zorica*, V$_1$ r.OŠ »J. M.« N. Bečej: 55, 56; *Pilić Aleksandar*, VI$_1$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 59, 60; *Pilić Mile*, VII$_5$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 55, 56, 58; *Plećaš Rade*, VIII r.OŠ Mikleuš: 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61; *Poljak Josip*, VIII r.OŠ »J. M.« Idrija: 56; *Popara Dragan*, VI$_6$ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56; *Pop-Lazić Jelica*, V$_1$ r.OŠ Kumodraž: 56; *Popović Gordana*, V$_1$ r.OŠ »J. M.« N. Bečej: 55, 56; *Popović Miodrag*, VIII$_2$ r.OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 56, 59; *Popov Mirjana*, VII$_2$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56, 58; *Popović Nenad*, VII$_4$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 55, 56; *Prokić Snežana*, VIII$_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Protić Vesna*, V$_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Pulević Olivera*, VI$_2$ r.OŠ »M. Gorki« Titograd: 56, 59; *Purhmajer Zoran*, VIII$_3$ r.OŠ »S. Jov.« Šabac: 61; *Puzović Nataša*, VI$_1$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 55, 56.

*Radaković Željko*, V$_1$ r.OŠ Kumodraž: 56; *Radivojević Ljiljana*, VII$_1$ r.OŠ »B. Nušić« Beograd: 56; *Radosavac Blagoje*, VII$_1$ r.OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 56; *Radosavljević Milijana*, VI$_1$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56; *Radovac Ljiljana*, VIII r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 55, 57, 58, 59; *Radović Radmila*, VII$_2$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56; *Rađenović Slavko*, VIII$_1$ r.OŠ »B. K.« Lovćenac: 56; *Rafailović Zorica*, VI$_3$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 56; *Rajc Jože*, VII r.OŠ Cerkno: 56, 58; *Rajčić Gorica*, VII$_4$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56, 57; *Rajčić Zorica*, VIII$_1$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56, 57; *Rajković Ružica*, VII$_3$ r.OŠ »V. Dug.«

Beograd: 58, 59; *Ranđelović Ljubiša*, $VII_4$ r.OŠ »B. S.« Vučje: 56, 57; *Redžepović Diana*, $VI_2$ r.OŠ »M Gorki« Titograd: 56, **59**; *Ristović Mirjana*, $V_1$ r.OŠ »J. Pančić« Beograd: 55, 56; *Rodić Radmila*, $VIII_3$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Rogović Milić*, $VI_3$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 55, 56; *Roković Dušica*, $V_3$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Rupnik Neva*, $VII_d$ r.OŠ »J. M.« Idrija: 56, 58; *Ružesković Perica*, $VIII_3$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57.

*Samardžić Miroslav*, $VI_b$ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56, 57; *Sandić Radovan*, $VIII_3$ r.OŠ »V. V. Savić« Lazarevac: 56, 61; *Savić Miloš*, $VII_2$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Sedej Andrej*, $VIII_b$ r.OŠ »F. M.« Cerkno: 56, 58; *Sedmak Aleksandar*, $VIII_1$ r.OŠ »Sv. Sava« Beograd: 56, 57, 58; *Sibinovski Zoran*, $VIII_2$ r.OŠ »J. Cvijić« Beograd: 56, 57; *Simić Ljiljana*, $VIII_1$ r.OŠ »V. K.« Ripanj: 56; *Simović Vladana*, $V_1$ r.OŠ »V. D.« Beograd: 56; *Slavnić Mirjana*, $VII_3$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56; *Slijepčević Milorad*, $VII_b$ r.OŠ Brezičani k/P: 55; *Smajević Aleksandar*, $VI_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 59; *Smukov Branko*, VIII r.OŠ »M. T.« Dobrinci: 56, **57**, **58**, **59**; *Solatić Nada*, $V_a$ r.OŠ Sečanj: 56; *Spahić Miodrag*, $VII_3$ r.OŠ »N. J.« Šabac: 56, 58; *Spasojević Milutin*, $VII_2$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 56, 57; *Sporin Stanko*, $V_1$ r.OŠ »S. Marinković« Zrenjanin: 56; *Sredojević Dejan*, $VIII_1$ r.OŠ »Sv. Sava« Beograd: 56, 57, **59**; *Stamenković Dušan*, $VII_1$ r.OŠ »Vožd Karađorđe« Niš: 56; *Stanković Dragan*, $VIII_1$ r.OŠ »B. S.« Vučje: 55, 56; *Stamenković Snežana*, $V_1$ r.OŠ »V. D.« Beograd: 56; *Stefanović Milenko*, $VIII_1$ r.OŠ »Đ. J.« Konarevo k/K: 56, 57; *Stevanović Mica*, $VIII_1$ r.OŠ »V. K.« Stubal k/V: **55**; *Stevanović Prvoslav*, $VI_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56, 57; *Stevanović Slađana*, $VIII_3$ r.OŠ »Njegoš« Niš: 55, 56; *Stevanović Slobodan*, $VIII_1$ r.OŠ »T. Rajić« Čačak: **55**, 56, 57, 58, **59**; *Stojanović Dušan*, $V_2$ r.OŠ »J. K.« Varvarin: 55, 56; *Subotić Ljiljana*, $VIII_1$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 55, 56; *Stojanović Slađana*, $V_1$ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56.

*Šain Marino*, VIII r.OŠ »N. Kirac« Pula: **55**, 56, 59, 61; *Šajder Milan*, $VIII_1$ r.OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 56; *Šimšić Nada*, $VI_1$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 55, 56; *Šipetić Dragan*, $VI_3$ r.OŠ »7. okt.« Čačak: 56; *Šoštarić Davor*, $VIII_b$ r.OŠ »Bratov Polančičev« Maribor: 56, **57**; *Štavljanin Zorica*, $VIII_2$ r.OŠ »IV kralj. bat.« Kraljevo: **55**, 56, **58**; *Štrbević Vesna*, $V_1$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; *Štraus Silvij*, $VIII_a$ r.OŠ »J. M.« Idrija: 56; *Štucin Jožek*, $VII_b$ r.OŠ »F. M.« Cerkno: 56, **58**; *Šušulić Živan*, $VI_3$ r.OŠ »S. J.« Vlasotince: 56.

*Taleva Elizabeta*, $VII_3$ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: 55, 56, 58, 59; *Tamindžić Slobodan*, $VI_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 59; *Tasić Zorica*, $V_3$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Tišler Žaromil*, $VIII_a$ r.OŠ »V. Nazor« Zagreb: 56, 57, **58**, 60; *Todorović Milena*, $VIII_1$ r.OŠ »M. S.« Umčari: 56; *Todorović Milina*, $VIII_2$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Todorović Milina*, $V_1$ r.OŠ »M. S.« Umčari: **56**; *Todorović Stanislav*, $VII_2$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 55, 56, 58; *Tomaš Zoran*, $VIII_1$ r.OŠ »25. maj« N. Beograd: 56; *Tomić Mirjana*, $V_3$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 57; *Tončić Slavko*, OŠ »G. D.« Bosilegrad: 56; *Topalović Ljiljana*, $V_2$ r.OŠ »V. M.« Grocka: **56**; *Topalović Ruža*, $VII_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: 56; *Tošić Zoran*, $VIII_1$ r.OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 56; *Tošović Marija*, $V_1$ r.OŠ »Ž. A.« Trstenik: 56; *Tot Rudi*, $VI_2$ r.OŠ Jarkovac: 56; *Trajković Vesna*, $V_3$ r.OŠ »B. S.« Vučje: 56; *Trifunović Nenad*, $VIII_2$ r.OŠ »Sv. Sava« Beograd: **56**, 57, 61; *Urošević Miroslav*, $VIII_1$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: **55**, **56**, **58**, 58, 60, **61**; *Urošević Slavica*, $VI_2$ r.OŠ »O. P. R.« Vršac: 56, 57.

*Varadi Vesna*, $VII_3$ r.OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 56, 57; *Veličković Rajka*, $VII_1$ r.OŠ »S. M.« Sjenica: 56, 60; *Veljović Radomir*, $VII_3$ r.OŠ »M. P.« Opovo: 56; *Vesić Željko*, $VII_4$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 56; *Vešić Miomir*, $VI_4$ r.OŠ »M. Jeličić« Šabac: 56; *Virovac Darko*, $V_1$ r.OŠ Kumodraž: 56; *Višnjić Ružica*, $VI_1$ r.OŠ »Braća Jerković« Železnik: 56, 60; *Vranešević Veljko*, $V_d$ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Vranić Milojko*, ? r.OŠ »V. Karadžić« Čačak: 55, 56, 59, 60; *Vrećica Siniša*, VIII r.OŠ Generalski Stol: **55, 56, 57, 58, 59, 60**, 61; *Vučković Brankica*, $VII_3$ r.OŠ »M. P.« V. Plana: 56; *Vučković Dušica*, VII r.OŠ »J. M.« u Miloševu: 56; *Vučković Milorad*, $VII_2$ r.OŠ »NH Čajka« Trstenik: 55; *Vučković Slavica*, VIII, r.OŠ »M. M. Čopo« Mrčajevci: 61; *Vujanović Slobodan*, $VI_b$ r.OŠ »F. Rozman-Stane« Maribor: 56; *Vujević Antun*, $VIII_1$ r.OŠ »B. J.« Svetozar Miletić: 56, 58, 59; *Vujičić Božidar*, VIII r.OŠ Viča kod Čačka: **56**, 57, 58; *Vujović Miroslav*, $VI_1$ r.OŠ »B. Božović« Titograd: 56, 57, **58**; *Vujović Nada*, $V_a$ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56; *Vukelić Milan*, $V_4$ r.OŠ »D. Jerković« Ruma: 55; *Vukićević Dragoslav*, $VI_5$ r.OŠ »Dr D. M.« Čačak: 56; *Vukoje Mira*, $VI_a$ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 56; *Vukoje Radoslava*, $VII_a$ r.OŠ »A. Š.« Sečanj: 55, 56, 57, 58; *Vuksanović Branislava*, $V_3$ r.OŠ »V. Dug.« Beograd: 56; *Vuleta Darinka*, $VI_2$ r.OŠ »F. V.« Šid: 56.

*Zdravković Milica*, $V_2$ r.OŠ »V. Dugošević« Beograd: 56; *Zlatić Dragica*, $VII_2$ r.OŠ »Đ. J.« Konarevo kod Kraljeva: 56; *Zobnenica Nebojša*, $VIII_2$ r.OŠ »IV kralj. bat.« Kraljevo: 55, 58; *Zorić Vlada*, $VII_b$ r.OŠ »S. B. Paja« Pećinci: 56; *Žabarac Gordana*, $VI_5$ r.OŠ »V. K.« Veliko Orašje: 56; *Žeravić Željko*, $V_d$ r.OŠ »F. V.« Šid: 56; *Živanović Vladimir*, $VI_4$ r.OŠ »M. Kosovac« Šabac: 56; *Živković Branislav*, $VII_3$ r.OŠ »M. Bursać« Beograd: 56, 58; *Živković Svetolik*, $VIII_1$ r.OŠ »V. M.« Grocka: **56, 61**.

Napomena. — U rešavanju konkursnih zadataka 55—61. učestvovalo je preko 700 učenika. Bilo je i pogrešnih rešenja, naročito u zadacima 55, 57, 60. Komisija za pregled konkursnih zadataka nije priznavala neobrazložene odgovore i rezultate. Redni brojevi zadataka čija su rešenja kod pojedinih učenika naročito uspela štampani su masno.

Molimo rešavatelje konkursnih zadataka da se u svemu pridržavaju uputstva koje je navedeno u fusnoti ispod tekstova konkursnih zadataka (str. 81.). Rešenja šaljite običnom poštom (a ne preporučeno) kako se ne biste izlagali nepotrebnim troškovima!

## МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

### Задаци на међуопштинским такмичењима у СР Србији, 5. V 1968.

*VII разред*

**1.** Ако се множеник повећа за 20%, а множилац смањи за 20%, шта ће бити са производом?

**2.** Отац има 41 годину, старији син 13 година, ћерка 10 година, а млађи син 6 година. Кроз колико година ће отац имати онолико година колико сва његова деца заједно?

**3.** Израчунај:

$$\frac{\left\{\left[-2+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]:\left(-\frac{5}{16}\right)-3\cdot\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{4}+2}\right\}(-3)+15}{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^3\left(-\frac{45}{16}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{16}{15}\right)+2\frac{11}{75}\right](-2)+\left(\frac{1}{3}-2\right)^2}.$$

**4.** Површина троугла $ABC$ износи 18 cm². Тачка $D$ узета је на страници $AC$ тако да је $DC=2\cdot AD$. Наћи површине троуглова $ABD$ и $DBC$.

**5.** Дужина кружног лука једнака је полупречнику кружнице. Колики је одговарајући централни угао? (Узми да је $\pi\approx3{,}1416$).

*Резултати и упутства.* — **1.** Нови множеник је $1{,}20=6/5$ старог, а нови множилац $0{,}80=4/5$ ранијег; нови производ је $(6/5)\cdot(4/5)=24/25$ првобитног, тј. смањио се за своју $1/25$ или за 4%. **2.** *I начин:* $41-(13+10+6)=12$. Сваке године разлика између очевих година и укуп. броја год. деце смањује се за $3-1=2$. Кроз $12:2=6$ година отац ће имати онолико година колико сва његова деца заједно. *II начин:* Нека то буде након $x$ година; тада $41+x=(13+x)+(10+x)+(6+x)$, одакле $x=6$. **3.** Бројилац је једнак $-2/3$, а именилац је једнак $-76/45$; зато је дати разломак једнак $-2/3:(-76/45)=15/38$. **4.** Троугли $ABD$ и $DBC$ имају исту висину $h$, а основице им се односе као $1:2$, тј. основица првог је 2 пута мања од основице другог. Значи, у том односу су и њихове површине; кад се 18 cm² подели у односу $1:2$ добија се да су тражене површине: 6 cm² и 12 cm². **5.** Дужина лука $l=\frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$, али због $d=r$, имамо $r=\frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ одакле се добија да је угао $\alpha=180^\circ/\pi\approx57^\circ\,17'45''$ (угао од 1 радиана).

*VIII разред*

**1.** Израчунај на најједноставнији начин нумеричку (бројну) вредност израза $2a^2-2b^2$ ако је $a=777\,778$ и $b=222\,223$.

**2.** Нађите тежину рибе ако је њен реп тежак 2 килограма, њена глава има тежину колико реп и половина трупа, а труп има тежину килико глава и реп заједно.

3. У једначини $(k-5)x-(2k-1)(x-2)=k-50$ одредити $k$ тако да та једначина буде еквивалентна са једначином:

$$\frac{\frac{3}{4}x-1}{2}-\frac{\frac{2}{3}x+4}{6}=\frac{\frac{5}{6}x-1}{3}-\frac{\frac{x}{2}+6}{12}.$$

4. Над страницама $AC$ и $BC$ правоуглог троугла $ABC$ ($C$ — је теме правог угла) конструисани су квадрати $ACDE$ и $CBFG$ (са спољне стране). a) Показати да је дуж $DG$ два пута дужа од тежишне линије троугла $ABC$ која одговара страници $AB$. b) Израчунати дужину обима и површину фигуре $ABFGDEA$.

5. Коцка је пресечена једном равни која је постављена кроз крајње тачке трију ивица које се састају у истом темену коцке.

a) Која фигура је пресек? Објасни!

b) Изрази површину добијеног пресека у функцији од дужине ивице коцке $a$. Колика је та површина, ако је $a=4$ cm?

c) Пресеком је коцка подељена на два дела. У којем односу стоје запремине тих делова?

*Резултати и упутства.* — 1. $I=2(a^2-b^2)=2(a+b)(a-b)=2\cdot1000001\cdot555555=$ $=2\cdot555555555555=1\,111\,111\,111\,110$. 2. Ако је тежина трупа $x$, онда је тежина главе $\frac{x}{2}+2$; тежина репа је 2 kp. Имамо једначину $x=(x/2+2)+2$, одакле је $x=8$ (теж. трупа). Риба је била тешка 16 килограма. Напомена. — Може и без једначина, закључивањем: Половина трупа тешка је колико два репа (4); цео труп је значи тежак 8, а глава $4+2=6$. Итд. 3. Дате једначине морају имати заједничко решење. Друга једначина има решење $x=12$, а то мора бити и решење прве једначине, те је задовољава: $(k-5)\cdot12-(2k-1)\cdot10=k-50$, што се своди на $-9k=0$, тј. $k=0$. 4. Цртај слику! a) Троугли $CGD$ и $ABC$ су подударни, те је $x=DG=AB$. Теж. линија која одговара хипотенузи $AB$ је $CC_1=AC_1=BC_1=\frac{1}{2}AB$, јер је $C_1$ истовремено и центар описане кружнице око троугла $ABC$ (зашто?). Значи, $x=AB=2\,CC_1\cdot b)$ $AB=13$ (по П.Т.). Обим је $O=2(13+12+$ $+5)=30$. Површина $P=ABC+CGD+ACDE+BEGC=2\cdot\frac{ab}{2}+b^2+a^2=a^2+ab+b^2=25+$ $+60+144=229\,(\text{cm}^2)$. 5. a) Пресек је једнакостранични троугао странице $a\sqrt{2}$ (дијагонала стране коцке). b) Површина тог пресека је: $P=\frac{a^2}{2}\sqrt{3}$; за $a=4$ cm је $P=8\sqrt{3}$ cm$^2\approx13{,}85$ cm$^2$. c) Постављена раван одсеца од коцке тространу пирамиду (с базом површине $a^2/2$ и висином $a$) којој је запремина $a^3/6$. Значи, пирамида заузима $1/6$ коцке. Одстрањивањем те приамиде, преостаје $5/6$ коцке. Према томе запремине делова стоје у односу $1:5$.

## КАЛЕНДАР МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА У СР СРБИЈИ ЗА ШКОЛСКУ 1968/69. ГОДИНУ

I ступањ такмичења *(школска такмичења)* одржати у школама до **30.III 1969. године.** Такмиче се ученици свих разреда.

II ступањ такмичења *(општинска такмичења)* одржаће се **13. IV 1969. године.** Почетак у 9 часова. Учествују ученици VI, VII и VIII разреда.

III ступањ такмичења *(међуопштинска такмичења)* одржаће се **4.V 1969. године.** Почетак у 9 часова. Учествују ученици VII и VIII разреда.

IV ступањ такмичења *(III републичко такмичење)* одржаће се у Београду **1. VI 1969. године.** Почетак у 9 часова. Учествују ученици VIII разреда.

Задатке за ова такмичења (изузев школских) саставља Републичка комисија за младе математичаре.

# MATEMATIČKA RAZONODA

## RAZGOVOR DVAJU BROJEVA

Sastao se jednom broj 12345679 s brojem 142857 i među njima se raspreo slijedeći razgovor:

**12345679:** Baš mi je drago da sam upoznao broj koji nastaje dijeljenjem 1 000 000 : 7?

**142857:** A meni je osobita čast biti u društvu s brojem koji ima toliko smisla za poredak. Šteta što ti još nedostaje 8.

**12345679:** Meni to ništa ne smeta. Ni ti se mnogo ne brineš za ostatak dijeljenja 1 000 000 : 7. Nego znaš šta! Hajde da ti nešto pričam. Zamisli, ima još tako mnogo ljudi koji ne znaju šta se u meni sve krije! Eto, na primjer, pomnoži me sa 36 ($=4\cdot9$), dobićeš 444 444 444 (cifra 4 ponavlja se 9 puta); pomnoži me sa 54 ($=6\cdot9$), dobićeš 666 666 666 (cifra 6 ponavlja se 9 puta), a ako me pomnožiš sa 63 ($=7\cdot9$) dobićeš 777 777 777, itd.

**142857:** To nije ništa! Ja imam mnogo boljih svojstava. Meni ne može niko ništa! Pomnoži me sa 2, 3, 4, 5 ili 6, pa ćeš uvijek dobiti broj koji se sastoji od svih mojih cifara u istom poretku samo što počinje svaki put drugom cifrom:

$$\begin{aligned}142857\cdot2&=285714\\142857\cdot3&=428571\\142857\cdot4&=571428\\142857\cdot5&=714285\\142857\cdot6&=857142\end{aligned}$$

(Prve cifre su poređane po veličini!)

**12345679:** A pomnoži mene sa 5! Dobićeš 61728395, dakle sve moje cifre, samo se namjesto 4 javlja 8.

**142857:** E pa dobro! Onda ću i ja tebi otkriti jednu svoju tajnu. Ako ti imaš mojih svojstava, imam i ja tvojih. Ako mene pomnožiš sa 7, iznenadićeš se, jer ćeš dobiti 999 999.

**12345679:** Gle čuda! Ala mi je i to nešto! Nisi li ti kadgod pokušao izračunati umnožak (proizvod) $12345679\cdot78$? Naravno da nisi! A znaš šta bi dobio da si to učinio? 962 962 962!

**142857:** Zaista, mora ti se priznati da si momak od oka. No, poslušaj ti sad ovo: Ti, bez sumnje, misliš da nije lako pomnožiti dva šestocifrena broja. I nije baš lako! Ali ako sam jedan od tih upravo ja, onda . . . , eh, onda vidi pa sudi! Uzmi, naprimer, $142857\cdot367894$.

Podijeli drugi faktor sa 7. Rezultatu dijeljenja 52556 pripiši moj produkt sa 2, jer je kod dijeljenja sa 7 ostalo 2. (Da je ostatak dijeljenja bio 3, uzeo bi moj produkt sa 3, itd.). Od tako dobivenog broja $52556\underbrace{285714}_{=142857\cdot2}$ oduzmi količnik 52556, pa ćeš dobiti da je $142857\cdot357894=52556285714-52556=52556233158$.

**12345679:** Vidim da me nadmašuješ. Pa . . . oprosti, ako sam te svojom hvalisavošću uvrijedio. Nego što misliš, kako bi bilo da nas učenici bolje upoznaju?

**142857:** To je dobra ideja! Zašto da je ne ostvarimo. Hajdemo do urednika pa da ga zamolimo da naš razgovor uvrsti u „Matematički list".

I pođoše zajedno do urednika.

# ЗРНЦА

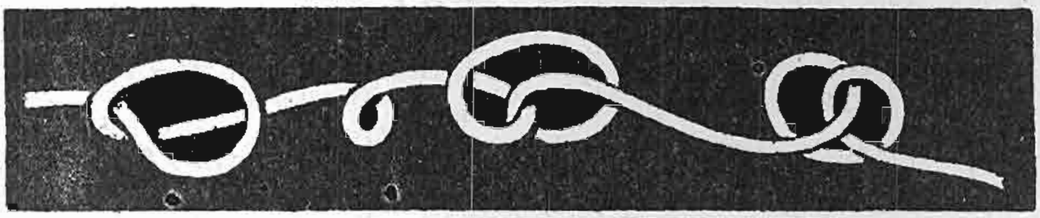
## За досетљиве

**1.** Флаша са запушачем стаје 1 динар и 10 пара. Сама флаша је за 10 пара скупља од запушача. Колико стаје запушач?

**2.** Од комада тканине дугог 36 m продавац сваком купцу одсече по 3 m. Колико пута ће продавац морати да сече тканину да би све продао.

**3.** Може ли разломак код кога је бројилац мањи од имениоца бити једнак разломку код кога је бројилац већи од имениоца?

**4.** Колико чворова ће се завезати ако канап затегнемо (в. слику)

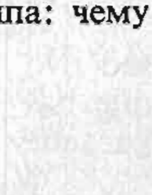


## Питагора, у помоћ!

Долази математичар, кажу зли језици, а био је мало повисок, у хотел да преноћи. Кревет, који му је био одређен, био је прекратак за његову висину. И шта ће? Позваће у помоћ математику. — Измери дужину $a$ и ширину $b$ кревета, утврди рачуном на толико и толико децимала тачно да је његова властита висина мања од $\sqrt{a^2+b^2}$, то ће рећи од дијагонале кревета. Задовољно је констатовао ту чињеницу и сав весео легао уздуж дијагонале потврдивши ето, и овом приликом, како је математика уопште корисна у својој примени, а нарочито како је корисна Питагорина теорема. — Заиста, он није могао без рачуна и без Питагорине теореме практично само лећи у кревет у правцу дијагонале и видети да се може испружити, него се и он, како се каже за неке математичаре, држао принципа: чему једноставно кад може и компликовано!

## ОДГОВОРИ НА ПИТАЊА ИЗ РУБРИКЕ „ЗРНЦА" У „МАТЕМАТИЧКОМ ЛИСТУ" III. 2

**За досетљиве.** — **1.** Трећина ипо $= 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, трећина ипо од $100 = \frac{1}{2}$ од $100 = 50$. **2.** За 9 дана. **3.** 8. **4.** 4 часа. **5.** Једноме дати корпу с јабуком. **6.** Лист хартије на коме је написан број 666 треба окренути за 180°; онда ћемо имати написан број 999. **7.** Две (остале три свеће ће сагорети). **8.** 3 килограма. **9.** Решење је дато на слици десно.



# REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 7

(Specijalni novogodišnji nagradni zadatak)

Zadatak je bio: *Rekonstruisati sledeće deljenje, tj. umesto zvezdica staviti odgovarajuće cifre. Postupak detaljno obrazložiti.*

$$
\begin{array}{l}
\ast\ast7\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast : \ast\ast\ast\ast7\ast = \ast\ast7\ast\ast \\
\underline{\ast\ast\ast\ast\ast\ast} \\
\ast\ast\ast\ast\ast7\ast \\
\underline{\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast} \\
\quad\ast7\ast\ast\ast\ast \\
\quad\underline{\ast7\ast\ast\ast\ast} \\
\quad\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast \\
\quad\underline{\ast\ast\ast\ast7\ast\ast} \\
\qquad\ast\ast\ast\ast\ast\ast \\
\qquad\underline{\ast\ast\ast\ast\ast\ast} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Navodimo detaljno rešenje tog zadatka.

Ako cifre koje nedostaju označimo slovima, onda će gornje deljenje izgledati ovako:

$$
\begin{array}{rl}
\text{I} & A\,B\,7\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J : \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,7\,\varepsilon = \lambda\,\mu\,7\,\varphi\,\omega \\
\text{II} & \underline{a\,b\,c\,d\,e\,f} \\
\text{III} & K\,L\,M\,N\,P\,7\,G \\
\text{IV} & \underline{k\,l\,m\,n\,p\,o\,g} \\
\text{V} & \quad Q\,7\,R\,S\,T\,H \\
\text{VI} & \quad \underline{q\,7\,r\,s\,t\,h} \\
\text{VII} & \quad U\,V\,W\,X\,Y\,Z\,I \\
\text{VIII} & \quad \underline{u\,v\,w\,x\,7\,z\,i} \\
\text{IX} & \qquad Б\,Г\,Д\,Л\,Ф\,J \\
\text{X} & \qquad \underline{б\,\text{ī}\,g\,л\,ф\,j} \\
\text{XI} & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Radi bolje preglednosti, redove smo numerisali rednim brojevima od I do XI.

Logički rasuđujući sada ćemo postepeno odrediti jednu po jednu od cifara koje nedostaju, tj. utvrdićemo koju cifru zamenjuje svako od napisanih slova.

Odmah vidimo da prva cifra ($\alpha$) delioca (divizora) mora biti 1, pošto delimični proizvod (produkt) koji stoji u VI redu — a to je rezultat množenja $7\cdot\alpha\beta\gamma\delta7\varepsilon$ — ima samo 6 cifara, jer kad bi bilo $\alpha=2$, onda bi taj broj bio sedmocifren; dakle je $\alpha=\mathbf{1}$

Delimični ostaci deljenja koji stoje u III i VII redu su šestocifreni brojevi, pa pošto svaki od njih mora biti manji od delioca $\alpha\beta\gamma\delta7\varepsilon$ odnosno $1\beta\gamma\delta7\varepsilon$, to je onda očigledno da mora biti $\boldsymbol{K}=\mathbf{1}$ i $\boldsymbol{U}=\mathbf{1}$. No tada je takođe i $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{u}=\mathbf{1}$.

Delilac $\alpha\beta\gamma\delta7\varepsilon$ najviše je jednak 199979, a pošto $\varphi$ može biti najviše 9, to onda delimični (parcijalni) proizvod u VIII redu može biti jednak najviše $199979\cdot9=1799811$, što znači da je sigurno $v<8$. Međutim, vidimo da se $V$ dobija kao razlika (diferencija) dvaju stubaca iznad $V$ u kojima stoji ista cifra (ovde 7), te je jasno da $V$ ne može biti nijedna druga cifra osim 0 ili 9. Ali u IX redu vidimo da su prve dve cifre ostatka jednake nuli, tj. $U-u=0$ i $V-v=0$, pa mora biti $V=\mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}$, jer smo već napred zaključili da je $\nu<8$. Pošto je $V=0$ i $U=1$, to za V, VI i VII red mora biti $Q-q=U$, odnosno $Q-q=1$ ili $Q=q+1$, što znači da $q$ može biti najviše jednako 8 (tj. $q$ je manje od 8 ili najviše jednako 8; to se zapisuje ovako: $q\leqslant 8$). To međutim, znači da delimični proizvod $7\cdot 1\beta\gamma\delta 7\varepsilon$ u VI redu može biti najviše $87rsth$.

Opet pogleđajmo delilac $1\beta\gamma\delta 7\varepsilon$. Njegova druga cifra ($\beta$) može biti samo ili 0 ili 1 ili 2, jer kad bi bila 3 ili više od 3, onda bi delilac bio najmanje 130070, pa bi proizvod $7\cdot 130070$ premašio broj $87rsth$. Uzmimo da je $\beta=0$; tada je delilac najviše jednak 109979, pa bismo množenjem tog broja s najvećom mogućom cifrom količnika, tj. sa 9, dobili delimični proizvod od 6 cifara, dok vidimo da u VIII redu delimični proizvod ima 7 cifara; dakle, $\beta$ je veće od 0, tj. $\beta=1$ ili $\beta=2$.

Ako uzmemo da je $\beta=1$, tada $\gamma$ može biti jedino 0 ili 1, jer kad bi bilo $\gamma>1$, tj. $\gamma=2$ ili više od 2, onda bi delimični proizvod $7\cdot 11\gamma\delta 7\varepsilon$ koji stoji u VI redu ($q7rsth$) na drugom mestu sleva imao cifru veću od 7, što ne može biti; znači, za $\beta=1$ nije $\gamma>1$. Lako ćemo videti da ne može biti ni $\gamma=0$, jer tada čak ni delimični proizvod $110979\cdot 9$ ne bi imao 7 cifara kao što to mora biti u VIII redu. Uzmimo $\gamma=1$; tada treba odrediti $\delta$, $\varepsilon$, $\varphi$ tako da delimični proizvod $\varphi\cdot 111\delta 7\varepsilon$ bude broj sa 7 cifara (sedmocifreni broj, VIII red), u kojem će treća cifra sdesna biti 7. Za $\varphi=8$ i $\varphi<8$ dobio bi se šestocifreni broj; znači, moramo uzeti $\varphi=9$. Tada izlazi da bismo morali uzeti da je $\delta=0$ ili $\delta=9$. No, u prvom od ova dva slučaja delilac bi najviše bio jednak 111079 i njegov proizvod (umnožak) s najvećom cifrom 9 ne bi dao sedmocifren broj, kako bi trebalo (VIII red); u drugom slučaju delilac bi bio $11197\varepsilon$, pa bi tada njegov delimični proizvod sa 7 (onaj koji stoji u VI redu) bio $783sth$, što biti ne može, jer druga cifra sleva mora biti 7. To znači da ne može biti $\beta=1$. Prema tome mora biti $\beta=\mathbf{2}$. U tom slučaju (vidi VI red) izlazi da mora biti: $\boldsymbol{q}=\mathbf{8}$ i $\boldsymbol{Q}=\mathbf{9}$.

Sada vidimo da množenjem $7\cdot 12\gamma\delta 7\varepsilon$ dobijamo u VI redu delimični proizvod $87rsth$; odatle sledi da mora biti ili $\gamma=4$ ili $\gamma=5$, jer bi već za $\gamma=6$ proizvod $7\cdot 126\delta 7\varepsilon$ bio veći od $87rsth$, a za $\gamma=3$ čak bi i proizvod $7\cdot 123979$ bio manji od $87rsth$ (a proizvod $7\cdot 123\delta 7\varepsilon$ tim pre). Proizvod $\varphi\cdot 12\gamma\delta 7\varepsilon$ mora biti sedmocifren broj ($10wx7zi$, VIII red). Pošto je $7\cdot 126979$ šestocifren broj, a $9\cdot 123979$ bi bilo veće od $10wx7zi$, to izlazi da mora biti $\varphi=\mathbf{8}$. Tada bi delimični proizvod $10wx7zi$ u VIII redu za $\gamma=4$ bio najviše jednak $8\cdot 124979$, što je manje od $10wx7zi$. Prema tome, ostaje da mora biti $\gamma=\mathbf{5}$.

Međutim, delimični proizvod $8\cdot 125\delta 7\varepsilon$, tj. $10wx7zi$, koji stoji u VIII redu, ima na trećem mestu sdesna cifru 7, što može biti jedino kad je $\delta=4$ ili $\delta=9$. (Naime, iz desetica proizvoda $125\delta 7\varepsilon\cdot 8$ za „prenos" imamo 5 ili 6, što zavisi od $\varepsilon$; budući da $8\cdot\delta+$„prenos" mora biti neparan broj koji se ovde završava sa 7, to „prenos" može biti samo 5; to uslovljava da mora biti $\delta=4$ ili $\delta=9$). Istovremeno to znači da je $\varepsilon<5$. Međutim, za $\delta=9$ delimični proizvod $7\cdot 12597\varepsilon$, tj. broj koji stoji u VI redu, bio bi sigurno veći od $87rsth$, što ne može biti; dakle, preostaje da je $\delta=\mathbf{4}$. Tada u VI redu dobijamo $7\cdot 12547\varepsilon=878sth$, te izlazi da je $\boldsymbol{r}=\mathbf{8}$; ali tada delimični proizvod ($10wx7zi$) u VIII redu jeste $8\cdot 12547\varepsilon$ ili $10037zi$; dakle je $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$ i $\boldsymbol{x}=\mathbf{3}$.

Jasno je dalje da $Б$ može biti najmanje jednako 1 (tj. ili je $Б=1$ ili $Б>1$). Tada iz VII, VIII i IX reda sledi da ni $W$ nije manje od 1, tj. ili je $W=1$ ili $W>1$. S druge strane, pošto je $r=8$ i $R\leqslant 9$, to V, VI i VII red daju da mora biti ili $W=1$ ili $W<1$. Vidimo da istovremeno mora biti i $W\leqslant 1$ i $W\geqslant 1$, odakle izlazi da može biti jedino $\boldsymbol{W}=\mathbf{1}$. No tada je $R=9$ (V, VI, VII red) i $Б=1$

(VII, VIII, IX red). Delimični proizvod u X redu, tj. $\omega \cdot 12547\varepsilon$ počinje jedinicom ($1\bar{i}g$*лфj*, jer $\delta = Б = 1$), što je moguće samo kad je $\omega = \mathbf{1}$; no, tada je $\mathbf{Г = i = 2}$, $\mathbf{Л = л = 4}$, $\mathbf{\Phi = ф = 7}$, $J = j = \varepsilon$.

Prema tome, za sada imamo:

| | |
|---|---|
| I | $A\,B\,7\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,\varepsilon : 12547\varepsilon = \lambda\mu 781$ |
| II | $a\,b\,c\,d\,e\,f$ |
| III | $1\,L\,M\,N\,P\,7\,G$ |
| IV | $1\,l\,m\,n\,p\,o\,g$ |
| V | $9\,7\,9\,S\,T\,H$ |
| VI | $8\,7\,8\,s\,t\,h$ |
| VII | $1\,0\,1\,X\,Y\,Z\,I$ |
| VIII | $1\,0\,0\,3\,7\,z\,i$ |
| IX | $1\,2\,5\,4\,7\,\varepsilon$ |
| X | $1\,2\,5\,4\,7\,\varepsilon$ |
| XI | $0$ |

Delimični proizvod $\mu \cdot 12547\varepsilon$ daje sedmocifren broj koji stoji u IV redu; to može biti samo kad je $\mu = 8$ ili $\mu = 9$.

Već smo napred utvrdili da $\varepsilon$ može biti jednako najviše 4. Uzimajući da je $\varepsilon$ jednako redom 0, 1, 2, 3 (pri $\mu = 8$, a zatim i pri $\mu = 9$) nalazimo postepeno delimične (parcijalne) proizvode u IV, VI i VIII redu i idući dalje unatrag utvrdićemo da se u III redu kao druga cifra sdesna ni u jednom od tih slučajeva neće dobiti 7 (a vidimo da tu mora biti 7). Međutim, samo kad je $\mu = \mathbf{8}$ i $\varepsilon = \mathbf{3}$ to uspeva. Zamenivši $\mu$ sa 8 i $\varepsilon$ sa 3 lako pronalazimo i sve ostale cifre u brojevima od III do XI reda. Nalazimo da je: $\mathbf{J = j = \varepsilon = 3}$, $\mathbf{zi = 84}$, $\mathbf{sth = 311}$, $\mathbf{lmnpog = 003784}$, a onda $\mathbf{XYZI = 6331}$, $\mathbf{STH = 944}$ i $\mathbf{LMNP7G = 101778}$.

Ostalo je još da rekonstruišemo I i II red i odredimo $\lambda$. Kako to učiniti? Jasno je da će nam u tome pomoći sedmica na trećem mestu sleva u deljeniku. Naime, prvi delimični proizvod $\lambda \cdot 125473$, tj. broj koji stoji u II redu, mora biti takav da sabran sa 110177 daje u deljeniku cifru 7 na trećem mestu sleva (dakle, i u II redu treća cifra sleva mora biti 7). To je moguće samo kad je $\lambda = 5$.

Sada su nam količnik i delilac potpuno poznati, te nije teško da deljenje rekonstruišemo do kraja. Dobijamo da je $\mathbf{abcdef = 627365}$ i $\mathbf{AB7DEF = 737542}$.

Prema tome, posle rekonstruisanja celo deljenje izgleda ovako (vidi desno):

```
7375428413 : 125473 = 58781
627365
-------
1101778
1003784
-------
  979944
  878311
  -------
 1016331
 1003784
 -------
   125473
   125473
   ------
        0
```

* * *

Primljeno je ukupno 43 rešenja: 16 tačnih i obrazloženih, 10 tačnih i neobrazloženih ili nedovoljno obrazloženih i 17 pogrešnih.

Nagrađena su sva tačna i obrazložena rešenja.

Pošto je iz nekih škola odnosno mesta (Brčko, Sjenica, Subotica, Vukovar) bilo po nekoliko istovetnih rešenja (zajednički dogovor grupe čitalaca-pretplatnika), to su takva rešenja tretirana kao jedno rešenje. Nepotpisana rešenja nisu mogla biti uzeta u obzir (Brčko, Dimitrovgrad).

Nagrade su zaokružene na cele u novim dinarima. Zbog toga je nagradni fond povećan na 1120,00 n. dinara.

Dodeljeno je *16 nagrada po 70,00 n. dinara*. Nagrađeni su:

1. *Barbirović Dušanka*, uč. $VII_5$ r. OŠ „O. Petrov-Radišić", Vršac
2. *Đorić Dragan*, uč. VIII r. OŠ „M. Pijade", Vranić kod Beograda
3. *Ignjatović Dragoljub*, uč. $VIII_1$ r. OŠ „S. Jovanović", Šabac
4. *Jasak Mirko*, nast. OŠ „Novo Brčko", Brčko
5. *Jovičić Goran*, uč. $VIII_1$ r. OŠ „Đ. Jovanović", Selevac
6. *Liščević Vladimir*, uč. $VII_5$ r. OŠ „Ž. J. Španac", N. Beograd
7. *Mačak Munir*, nast. OŠ „Foč. oml. čete", Brod kod Foče
8. *Marić Zlata*, uč $VIII_3$ r. OŠ „B. Jevtić" Kusadak
9. *Rudolf Janez*, OŠ „Dr V. Kraigherja", Ljubljana
10. *Trlek Želimir*, OŠ Strošinci (SRH)
11. *Vrećica Siniša*, uč. VIII r. OŠ Generalski Stol (SRH)
12. *Zdravković Jasmina*, uč. VII r. OŠ „Lj. Nešić", Zaječar
13. Nagradu dele: *Avdić Sead, Alibegović Fahira, Bebić Zvonko, Husović Zineta, Karanović Dragan, Kovačević Mehdija* i *Omerhodžić Fadila*, učenici VIII r. OŠ „Novo Brčko", Brčko
14. Nagradu dele: *Džigal Mustafa, Džigal Osman, Filipović Dragiša, Grebović Dragoje* — učenici VIII r. OŠ „S. Marković" u Sjenici i *Šoljanin Sabahudin*, uč. I raz. gimnazije „29. novembar" u Sjenici
15. Nagradu dele: *Đurica Mirko* i *Prihačka Aleksandar*, učenici $VII_c$ r. OŠ „I. G. Kovačić", Subotica i *Tumbas Pajo*, uč. $VII_a$ r. OŠ „10. oktobar", Subotica
16. Nagradu dele: *Bilić Ljiljana, Nogić Vladimir, Petrović Marija i Zlatko Ivan* — učenici VII r. OŠ „V. Nazor", Vukovar.

Kao što ste videli, zadatak je bio u znaku broja 7! To se može reći čak i za nagrade.

Dobitnicima nagrada čestitamo!

Nagrade su poslate poštom.

## NAGRADNI ZADATAK BR. 9

*Nedaleko jedno od drugog nalaze se dva sela **A** i **B**. Svi stanovnici sela **A** govore samo istinu, a svi stanovnici sela **B** lažu. Stanovnici ovih sela međusobno se posećuju. Pretpostavimo da se ti nalaziš u nekom od tih sela (a ne znaš u kojem).*

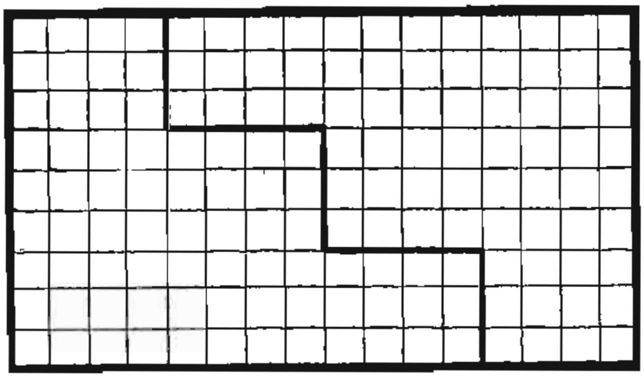
*Koje pitanje (ali samo jedno) treba da postaviš prvom čoveku kojeg susretteš u tom mestu (naravno, ne znaš iz kojeg je on mesta), da bi na osnovu njegovog odgovora utvrdio da li si u selu **A** ili **B**? (Pretpostavljamo da u to vreme ni u jednom od ovih sela nije bilo stanovnika iz drugih mesta).*

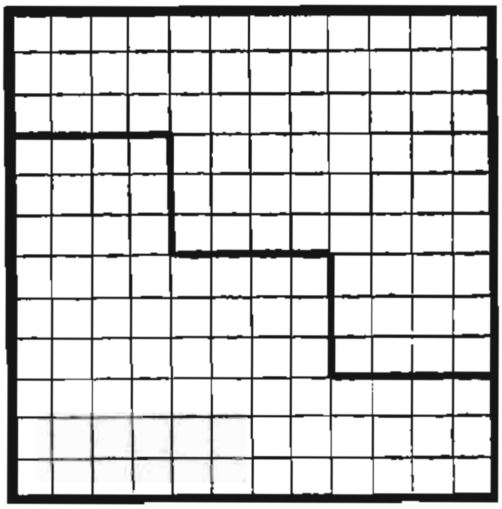
Za pravilno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 20 učenika. Po potrebi odlučiće žreb. Rešenje treba poslati najkasnije **do 10. IV 1969. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p. p. 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred, školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti obavezno naznačite: „Nagradni zadatak br. 9". Rešenja i imena nagrađenih objavićemo u „Matematičkom listu" III. 5.

## REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 8

Zadatak je bio: *Pravougaonik sa stranicama 16 cm i 9 cm podeliti (razrezati) na dva dela od kojih se može sastaviti kvadrat.*

Rešenje je dato na sledećoj slici (umanjeno).





Primljeno je više od 600 rešenja, od toga 480 tačnih.

Žrebom je odlučeno da se između onih koji su poslali tačna rešenja nagrade sa *po 20 n. dinara* sledeći učenici:

1. *Babić Dana*, $VII_1$ r. OŠ „S. Marković", Sjenica
2. *Babić Veljo*, $V_3$ r. OŠ „F. Filipović", Čačak
3. *Borjanac Neda*, $VIII_d$ r. OŠ „S. Šabić", Bjelovar
4. *Ćirković Radovan*, $VIII_2$ r. OŠ „M. Blagojević", Natalinci
5. *Jovanović Milena*, $V_2$ r. OŠ „V. Dugošević", Beograd
6. *Jovanović Velimir*, $V_2$ r. Desete OŠ, Mostar
7. *Jović Ivan*, VI r. OŠ „V. Karadžić", Vel. Grabovnica
8. *Mišić Dragana*, $V_2$ r. OŠ „V. Karadžić", Požarevac
9. *Pajić Vojkan*, $VI_a$ r. OŠ „Ž. Zrenjanin", Boka (Banat)
10. *Perković Josip*, VII r. OŠ, Krišpolje (SRH)
11. *Petrov Aleksandar*, $VIII_2$ r. OŠ „V. Aksentijević", Beograd
12. *Petrović Miodrag*, $VII_6$ r. OŠ „Njegoš", Niš
13. *Petykó Ilona*, $VII_b$ r. Vežbaonica Učit. škole, Subotica
14. *Šalinger Ljiljana*, $V_6$ r. OŠ „J. Kostić", Leskovac
15. *Šumkova Sonja*, $VIII_b$ r. OU „Karpoš", Skopje
16. *Tamindžić Slobodan*, $VI_3$ r. OŠ „Đ. Salaj", Beograd
17. *Tonić Biljana*, $VII_1$ r. OŠ „V. Milićević", Grocka
18. *Veljović Dragan*, $VI_1$ r. OŠ „D. Lalović", G. Koritnica
19. *Vučković Milisav*, $VIII_1$ r. OŠ „G. Marković", Lopaš (Počekovina)
20. *Vujović Dragan*, $VI_2$ r. OŠ „Brčko Novo", Brčko.

Nagrade su poslate poštom.

## VAŽNA OBAVEŠTENJA

**1.** Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvršćoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

**2.** **„Matematički list"** izlazi 5 puta u toku školske godine i to u: oktobru, decembru, februaru, martu i maju. List je namenjen *svim učenicima* V—VIII razreda osnovne škole.

**3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 6 n. dinara. Van pretplate prodajna cena lista je 1,50 n. dinara po primerku.** Obračun po pretplatnoj ceni vrši se samo kad su naručeni *svi brojevi lista* (1—5). Isto važi i za naknadne narudžbe (u toku godine). Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" broj 608-8-1433-10 sa naznakom** na šta se narudžba odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i koliko primeraka od svakog broja). Obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba slati. Plaćanje se može vršiti i u ratama, ali tako da za svaki primljeni broj dug bude odmah izmiren.

**4.** Raspolažemo još izvesnim količinama svih brojeva lista iz školske 1967/68. godine (brojevi II. 1—5), tako da ih možete naknadno naručiti. Isporučujemo ih pod istim uslovima.

**5.** Molimo poverenike „Mat. lista" iz školske 1967/68. godine da odmah izmire sva zaostala dugovanja.

**6.** „Matematički list" će i ove godine dodeliti *nagrade školama* koje budu imale procentualno najviše pretplatnika (u odnosu na ukupan broj učenika V—VIII razreda). Detaljna obaveštenja o tome (i uopšte o „Mat. listu") data su u našim raspisima koji su svim školama dostavljeni u septembru 1968. godine.

**7.** Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

**Matematički list, Beograd, p.p. 728.**

## S A D R Ž A J