MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

III

4—5

BEOGRAD
1969.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. III, broj 4—5 (1968/69)
Izlazi pet puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE

Beograd, p. p. 791, Knez Mihailova 35/IV

Štampa: Beogradski grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

ФИЛИП ФИЛИПОВИЋ — МАТЕМАТИЧАР И РЕВОЛУЦИОНАР

Филип Филиповић, заједно са Димитријем Туцовићем и Душаном Поповићем, убраја се међу најпопуларније и најактивније руководиоце нашег радничког покрета. Четири деценије на почетку овог века он је неуморно радио и борио се за идеале радничке класе. Он је један од оснивача и руководилаца Социјалистичке радничке партије Југославије (комуниста), односно КПЈ и први секретар КПЈ. Међутим, мање је познато да је Ф. Филиповић био и одличан математичар-методичар. Зато ћемо покушати да укратко осветлимо лик овог нашег истакнутог револуционара — математичара.

Филип Филиповић, први секретар СРПЈ (к) изабран на Конгресу уједињења

Филип Филиповић је рођен у Чачку 9. VI 1878. године у породици професора Васе Филиповића, доцније директора гимназије. Био је одличан ђак и истицао се у младости као врстан математичар. У Чачку је учио 7 разреда гимназије и под утицајем идеја Светозара Марковића, Димитрија Туцовића и др. почео да делује у омладинском радничком покрету. Матурирао је у Београду и после једногодишњег студирања на Техничком факултету, године 1898. одлази на студије у Петроград (данас Лењинград), где 1904. године са одличним успехом дипломира на Физичко-математичком факултету и добија диплому I степена. Постаје професор математике у Денисовској трговачкој академији; на Сверуском конгресу наставника математике (1912.), где је прочитано неколико реферата посвећених реформи математичке наставе у средњој школи, био је запажен и реферат Ф. Филиповића у коме се залагао да се кроз цео курс математике проведе и јаче осветли идеја функционалне зависности, да се ученици упознају са неким елементима више математике, уз изостављање из програма неких питања другостепеног значаја. У Петрограду је заједно са В. Мрочеком написао књигу *Педагогија математике*, која је и данас актуелна*.

Рано се упознао са идејама социјализма и почео да изучава марксизам. У Русији се повезао са револуционарним марксистичким кружоком, учествује 1902. године у политичким демонстрацијама, а активно учествује и у Револуцији 1905, бива хапшен, постаје члан Руске социјал-демократске радничке партије (бољшевика).

И поред тога што се одао педагошкој активности, он је и даље врло активан у социјалистичком покрету у Петрограду. Боравећи у Русији, он остаје у блиским везама са вођама социјалистичког покрета у Србији, дописује се са Д. Туцовићем. На позив Д. Туцовића, Филиповић се 1912. године враћа у Србију, где постаје секретар Радничке коморе и неуморно ради. Он је био међу првим нашим социјалистима који је поздравио и прихватио Октобарску револуцију и Лењинове идеје. Примену суштине тих идеја он је сматрао најмоћнијим средством за остваривање историјских циљева наше радничке класе.

За време I светског рата, једно време радио је у руској мисији у Нишу, али је због интернационалистичког и револуционарног става био интерниран у Аустрију. По повратку у земљу, он је сав ангажован у радничком покрету, популаришући идеје Октобра, постаје један од најистакнутијих руководилаца радничког покрета, политичких агитатора и писаца, организатора КПЈ. Због тога је често био хапшен и непрекидно прогањан.

На историјском Конгресу уједињења пре пола столећа (19—23. априла 1919. године) Филип Филиповић је изабран за секретара Социјалистичке радничке партије Југославије (комуниста), а после Вуковарског конгреса, коме је председавао, за секретара Извршног одбора ЦВ КПЈ. Приликом победе комуниста на општинским изборима августа 1920. године, изабран је за председника Београдске општине и народног посланика Ваљевског округа. После Видовданског атентата 1921. године на регента Александра Карађорђевића, ухапшен је (на основу лажне оптужбе) са осталим члановима руководства КПЈ и на великом процесу против комуниста 1922. године због свог комунистичког убеђења и револуционарног држања бива осуђен на 2 године робије, које је провео у Пожаревцу. Његов повратак из Пожаревца у Београд био је тријумфалан. „Пролетерски Београд срдачно је поздрављао свог Филипа..." — сећао се доцније М. Пијаде. Манифестације су се брзо претвориле у демонстрације. Демонстранти су клицали Филипу Филиповићу и комунизму и истицали пароле против владе бесправља и терора.

По повратку са робије ради и даље, у сада илегалној КПЈ; учествује у стварању Независне радничке партије Југославије и постаје председник ње-

* Преведено и на наш језик; издао *Нолит*, Београд 1957.

ног Централног одбора, а 1924. године илегално је отишао у Москву (као делегат) на Конгрес Коминтерне (Комунистичке интернационале), где по налогу руководства остаје и ради као представник КПЈ и функционер Коминтерне. Учествовао је у раду III и IV конгреса КПЈ и неколико конгреса Коминтерне. Ухапшен је 1937. године у периоду злогласних Стаљинових „чистки" и нешто касније убијен заједно са низом револуционарних кадрова КПЈ.

Поред мноштва теоретских и других чланака у партијској штампи, написао је познато дело *Развитак друштва у огледалу историјског материјализма* (1922. на робији у Пожаревцу), *Балкан и међународни империјализам* (1936. у Москви) и стручно дело *Педагогија математике* (1910, са В. Мрочеком у Петрограду).

Педагогија математике представља у педагошкој литератури изузетак своје врсте — то је један снажан и образложен захтев за реформом математичке наставе, за дубоком и сталном везом математике са животом, са другим наукама и потребама друштва; нарочито је у њој наглашена потреба за очигледношћу и конкретном наставом. И што је најважније, за многе ствари је практично показано како их треба спроводити у настави.

Писци су еволуцију наставе математике кроз векове пратили с једне стране у зависности од развитка математике као науке и с друге стране у зависности од друштвених услова. Тако посматрана, еволуција наставе математике врло је интересантна и поучна. И баш у томе и лежи једна од основних вредности ове књиге.

Такво третирање наставе математике било је за оно време револуционарно и ново. И данас би било тешко наћи методике математике које би се у том погледу могле упоређивати са *Педагогијом математике* од Мрочека и Филиповића.

Пошто нам није намера да дајемо детаљан приказ књиге, истакнућемо само то да, посматрана у целини, *Педагогија математике* и данас, после једног релативно дугог периода испуњеног судбоносним догађајима, није изгубила у својој актуелности. То долази делом отуда што су Мрочек и Филиповић ишли у схватању наставних проблема испред свога времена, а делом и од тога што су некада најосетљивији проблеми у настави остали и до данас нерешени, јер су везани за објективне тешкоће које долазе од специфичности саме материје и дечјег реаговања на њу.

Не само политичка, већ и педагошка активност Ф. Филиповића у Русији, запажена је и забележена. У многим часописима, у којима су третирани методика математике и проблеми реформе математичке наставе, писци су често цитирали Ф. Филиповића. Тако, на пример, високе оцене ове активности Филипа Филиповића, давали су чувени руски и совјетски научници и педагози, међу њима професори А. П. Јушкевич и В. Л. Гончаров (дописни члан Академије педагошких наука) и др. У разним књигама и часописима често се помиње или цитира *Педагогија математике* од Мрочека и Филиповића.

Б.

B. Marinković (Beograd)

REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA POMOĆU DETERMINANATA

(Nastavak iz predhodnog broja)

II

4. Determinanta

Kada treba da napišemo zbir dvaju brojeva m i n, onda se koristimo znakom „+" i pišemo $m+n$; za zapisivanje razlike dvaju brojeva koristimo se znakom „—", itd. U matematici se algebarske operacije mogu zapisivati u još jednom obliku (koji možemo koristiti pri rešavanju sistema linearnih jednačina). On izgleda ovako:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{4}$$

Kao što vidite, četiri broja a, b, c i d napisana su u obliku kvadratne tablice koja ima dve vrste ili retka: (a, b) i (c, d) i dve kolone ili stupca: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Sa obe strane postavljene su vertikalne crte. Cela takva shema u obliku koje se piše razlika $ad-bc$ zove *se determinanta drugog reda.* Dakle:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \tag{5}$$

Brojevi a, b, c, d su *elementi* determinante (4). Brojevi a, d čine *prvu*, a brojevi b, c — *drugu dijagonalu* determinante.

Prema tome, na osnovu (5), determinanta je jednaka razlici između proizvoda članova prve dijagonale i proizvoda članova druge dijagonale, tj.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

Primeri. —

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4-5\cdot(-2)=12+10=22.$

2) $\begin{vmatrix} 15 & -7 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 15\cdot(-6)-(-3)\cdot(-7) = -90-21 = -111.$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 2\cdot 15 - 6\cdot 5 = 30-30 = 0.$

4) $\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - a(-a) = 1-a^2+a^2 = 1.$

Ovde ćemo navesti samo neka **svojstva determinanata.** Njih možete proveriti vrlo lako — izračunavanjem determinanata.

1. *Determinanta ne menja svoju vrednost ako vrste zamenimo kolonama ili obratno:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

2. *Ako u determinanti dve vrste (ili kolone) međusobno zamene mesta, onda determinanta menja znak:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}.$$

3. *Zajednički faktor (činilac) za sve elemente jedne vrste (ili kolone) može se staviti pred determinantu:*

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

4. *Ako su vrste (ili kolone) determinante jednake ili proporcionalne, onda je ta determinanta jednaka nuli. Važi i obrnuto.* [Vrste (kolone) determinante drugog reda su proporcionalne ako se jedna od njih dobija kad se oba elementa druge pomnože ili podele nekim brojem različitim od nule]. Zaista, ako je $a/c=b/d=k$, tj. $a=kc$ i $b=kd$, onda je

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix} = kcd-kcd = 0.$$

Obrnuto, ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, tj. $ad-bc=0$ ili $ad=bc$, to je $a/c=b/d$ što znači da su vrste proporcionalne.

Zadatak. — Sva navedena svojstva proveri na konkretnim primerima.

5. Rešavanje sistema od dve linearne jednačine sa dve nepoznate pomoću determinanata.

Neka je dat sistem linearnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Determinanta $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, koja je sastavljena od koeficijenata uz nepoznate x i y u sistemu (6) — i to u istom poretku kako ti koeficijenti stoje u samom sistemu — obično se zove *glavna determinanta sistema* (6); označavamo je sa Δ (delta, grčko slovo), tj.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1. \tag{7}$$

Determinanta $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, koja se dobija iz glavne determinante sistema (6) kad se prva kolona zameni kolonom slobodnih članova, zove se *prva dopunska* ili *pomoćna determinanta sistema* (6). Tu ćemo determinantu označavati sa Δ_x, tj.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_2c_1-b_1c_2. \tag{8}$$

Indeks x uz Δ ukazuje na to da je u glavnoj determinanti Δ kolona $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ — sastavljena od koeficijenata uz x u sistemu (6) — zamenjena kolonom slobodnih članova $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sistema (6).

Determinanta $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, koja se dobija iz glavne determinante sistema (6) kad se druga kolona zameni kolonom slobodnih članova, zove se *druga pomoćna determinanta sistema* (6). Označavaćemo je sa Δ_y, tj.

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1. \tag{9}$$

Prema tome, sistem (2) [vidi »Mat. list« III. 3, str. 70]:

$$\left.\begin{aligned}(a_1b_2-a_2b_1)\,x&=b_2c_1-b_1c_2\\(a_1b_2-a_2b_1)\,y&=a_1c_2-a_2c_1\end{aligned}\right\},$$

koji je ekvivalentan sistemu (6), s obzirom na (7), (8) i (9), sada možemo napisati ovako:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\cdot x&=\Delta_x\\\Delta\cdot y&=\Delta_y.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Ako je $\Delta\neq 0$, onda iz (10) dobijamo sledeće *formule* (*obrasce*) *za rešenje sistema* (6):

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\qquad(11)$$

ili, prema (7), (8) i (9), potpunije:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}},\qquad(11')$$

Ove se formule zovu *Kramerove formule* ili *Kramerovo pravilo* — po švajcarskom matematičaru G. Krameru (1704—1752.) On je među prvima došao do pojma determinante i primenjivao ih za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Pomoću Kramerovog pravila, tj. pomoću formula (11), možemo sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate vrlo brzo rešiti.

P r i m e r 1. — Za sistem

$$\left.\begin{aligned}2x-3y&=12\\5x+4y&=\ \ 7\end{aligned}\right\},\qquad(12)$$

koji smo rešavali u prvom delu ovog članka (ML III. 3, str. 69), determinanta sistema je

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-5\cdot(-3)=8+15=23,$$

a pomoćne determinante su:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}12 & -3\\ 7 & 4\end{vmatrix}=12\cdot 4-7\cdot(-3)=48+21=69,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 12\\ 5 & 7\end{vmatrix}=2\cdot 7-5\cdot 12=14-60=-46$$

te, prema (11), dati sistem (12) kao jedino rešenje imaće par brojeva:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{69}{23}=3,\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-46}{23}=-2.$$

Dakle, rešenje sistema (12) jeste par brojeva $(x;\ y)=(3;\ -2)$. Izvrši probu (pokus)!

P r i m e r 2. — Za sistem

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=5\\ -7x+3y&=-13\end{aligned}\right\}$$

prema obrascima (11′) imamo odmah:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & -2\\ -13 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ -7 & 3\end{vmatrix}}=\frac{15-26}{3-14}=\frac{-11}{-11}=1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ -7 & -13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ -7 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-13+35}{3-14}=\frac{22}{-11}=-2.$$

Dakle, rešenje datog sistema je $(x;y)=(1;\ -2)$.

Z a d a t a k. — Uzmi i sam neke sisteme linearnih jednačina sa dve nepoznate, svedi ih na oblik (6) — ukoliko takav oblik već nemaju — i reši ih pomoću determinanti. Svakako ćeš brzo zapaziti da se takvi sistemi u većini slučajeva lakše rešavaju ovom metodom nego li ostalim metodama. Potrebno je samo vežbanje.

Napomena. — Ako uporedite formule (11′) sa formulama (3), koje su navedene na kraju prvog dela ovog članka (ML III. 3, str. 70), videćete da se ustvari radi o istim formulama, samo su na različite načine napisane.

6. Da li svaki sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate ima rešenje?

Odgovor na to pitanje sledi iz relacija (10) odnosno (11). Moguća su tri slučaja.

Prvi slučaj: $\Delta \neq 0$, tj. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ili $a_1b_2 \neq a_2b_1$, odnosno $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$. Tada mogu postojati relacije (10), odnosno (11). Prema tome, *ako glavna determinanta sistema* (6) *nije jednaka nuli ili, što je isto, ako koeficijenti uz nepoznate x i y u tom sistemu nisu proporcionalni, onda je taj sistem moguć i ima sasvim određeno i to samo jedno rešenje* koje se dobija po formulama (10), tj.: $x = \Delta_x/\Delta$, $y = \Delta_y/\Delta$. Kaže se da je u tom slučaju sistem **određen.** Kao što vidite, ne rešavajući sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate, ukoliko je on doveden na oblik (6), možemo utvrditi da li on ima rešenje: treba samo izračunati Δ, odnosno videti da li su koeficijenti uz nepoznate proporcionalni. A proporcionalnost tih koeficijenata često se i napamet može utvrditi. Na primer, u sistemu kojeg čine jednačine $3x - y = 5$ i $3x - 2y = 7$ koeficijenti nisu proporcionalni, tj. $3 : 3 \neq (-1) : (-2)$. Uverite se da je u ovom slučaju $\Delta = -3 \neq 0$ i da rešenje tog sistema jeste samo par brojeva $(1; -2)$.

Drugi slučaj: $\Delta = 0$ i $\Delta_x \neq 0$ (ili $\Delta_y \neq 0$), tj. $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ i $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ ili $a_1b_2 = a_2b_1$ i $b_2c_1 \neq b_1c_2$, odnosno $a_1/a_2 = b_1/b_2$ i $b_1/b_2 \neq c_1/c_2$, tj. $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$. Tada jednačine sistema (6) postaju: $0 \cdot x = \Delta_x$ i $0 \cdot y = \Delta_y$, što je nemoguće da bude, pošto je bar jedna od determinanti Δ_x i Δ_y različita od nule; naime, nema broja koji pomnožen s nulom daje proizvod različit od nule. Znači, jednačine u sistemu (6) protivrečne su jedna drugoj. Prema tome, ako je *glavna determinanta sistema* (6) *jednaka nuli a bar jedna od pomoćnih determinanti nije jednaka nuli ili, što je isto, ako su koeficijenti uz nepoznate x i y u sistemu* (6) *međusobno proporcionalni, a koeficijenti uz koju bilo od tih nepoznatih nisu proporcionalni sa slobodnim članovima, onda je sistem* (6) **protivrečan** *ili nemoguć* (*nema rešenje*). Takav je, na primer, sistem jednačina : $2x - 3y = 5$ i $4x - 6y = 17$. Zaista, koeficijenti uz nepoznate međusobno su proporcionalni $\left(\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\right)$, ali nisu proporcionalni sa slobodnim članovima $\left(\text{tj. } \frac{2}{4}\neq\frac{5}{17} \text{ i } \frac{-3}{-6}\neq\frac{5}{17}\right)$. Pokušaj da ovaj sistem rešiš pomoću neke od metoda. Šta ćeš dobiti?

Treći slučaj: $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, tj. $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_1c_2-a_2c_1=0$, $b_2c_1-b_1c_2=0$, odnosno $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$ (pri čemu se isključuje slučaj da su svi koeficijenti uz nepoznate jednaki nuli). Tada jednačine (10) postaju $0\cdot x=0$ i $0\cdot y=0$, a pošto svaki broj pomnožen nulom daje za proizvod nulu, to znači da možemo naći koliko god hoćemo parova brojeva $(x;\ y)$ koji zadovoljavaju sistem (6); naime, u ovom slučaju sistem ima *beskonačno mnogo rešenja* (jednačine u sistemu jedna od druge zavise i sistem se ustvari svodi na jednu jednačinu sa dve nepoznate, a takva jednačina ima beskonačno mnogo rešenja). Ako je $a_1=a_2=b_1=b_2=0$, $c_1\neq0$ ili $c_2\neq0$, onda sistem nije moguć, jer se leve strane jednačina u (6) svode na 0. Ako su pak svi koeficijenti koji u sistemu dolaze jednaki nuli, onda svaki par brojeva $(x;\ y)$ jeste rešenje tog sistema. Prema tome, *ako su i glavna i obe pomoćne determinante sistema jednačina* (6) *jednake nuli ili, što je isto, ako su svi koeficijenti uz nepoznate i slobodni članovi u jednoj jednačini proporcionalni odgovarajućim koeficijentima druge jednačine i ako među koeficijentima uz nepoznate ima bar jedan različit od nule, onda sistem jednačina* (6) *ima beskonačno mnogo rešenja.* Sva ova rešenja dobijaju se kao rešenja samo jedne jednačine sistema i to one koja sadrži različit od nule koeficijent uz nepoznatu. Tada kažemo da je sistem **neodređen.** Takav je, na primer, sistem $2x-3y=4$, $8x-12y=16$. Svi koeficijenti u obe jednačine međusobno su proporcionalni $\left(\frac{2}{4}=\frac{-3}{-12}=\frac{4}{16}\text{, a to je } \frac{1}{4}\right)$. Uveri se da je ovde $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$.

* * *

Sve rezultate o sistemu jednačina

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1\\ a_2x+b_2y&=c_2,\end{aligned}\right\}$$

do kojih smo napred došli, navodimo u sledećoj tabeli:

$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$	
	Bar jedna od determinati Δ_x i Δ_y nije jednaka nuli	$\Delta_x = \Delta_y = 0$ i bar jedan od koeficijenata uz nepoznate nije jednak nuli
Sistem je moguć i ima jedino rešenje $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$	Sistem nije moguć, protivrečan je	Sistem je moguć i ima beskonačno mnogo rešenja. Sva ta rešenja dobijamo kao rešenja samo jedne jednačine i to one koja sadrži koeficijent uz nepoznatu različit od 0.

Zadatak. — *Rešiti sistem jednačina:*

$$\left.\begin{aligned} mx - y &= -3 \\ -x + my &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Rešenje. — Imaćemo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = -3m + 3;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3m - 3.$$

Neka je $m^2 - 1 \neq 0$, tj. $m^2 \neq 1$, odnosno $m \neq 1$ i $m \neq -1$. Tada je $\Delta \neq 0$, pa zato sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3m+3}{m^2-1} = \frac{-3(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{-3}{m+1};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3m-3}{m^2-1} = \frac{3(m-1)}{(m+1)(m-1)} = \frac{3}{m+1}.$$

Ako je $m = -1$, onda je $\Delta = 0$, $\Delta_x = 6$, $\Delta_y = -6$. U tom slučaju sistem je protivrečan (svodi se na $-x - y = -3$, $-x - y = 3$, što je nemoguće da bude istovremeno; to pokazuju i jednačine (10), koje za ovaj slučaj glase: $0 \cdot x = 6$ i $0 \cdot y = -6$).

Ako je pak $m=1$, onda je $\Delta=0$, $\Delta_x=0$ i $\Delta_y=0$, pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pri čemu ih sva možemo dobiti rešavanjem samo prve (ili samo druge) jednačine sistema. (U ovom slučaju jednačine iz (10) postaju $0 \cdot x=0$ i $0 \cdot y=0$). Za $m=1$ prva jednačina datog sistema postaje $x-y=-3$, pa sva rešenja ove jednačine (a samim tim i rešenja druge jednačine, jer se ona množenjem sa -1 svodi na prvu) možemo napisati u obliku: $x=k$, $y=k+3$, gde je k koji bilo broj. Prema tome, uređeni par brojeva $(k; k+3)$ za sve moguće vrednosti za k daje skup svih rešenja datog sistema.

7. Geometrijsko tumačenje prethodnog razmatranja

Kao što znate (v. ML II-5, str. 136—137 i ML III-3, str. 68), skup svih tačaka ravni čije koordinate (x; y) zadovoljavaju jednačinu oblika

$$ax+by=c,$$

gde bilo a, bilo b (ili oba) nisu jednaki nuli, predstavlja pravu liniju. Zbog toga, rešiti sistem jednačina oblika (6), u kojem u svakoj od jednačina ima bar jedna od nepoznatih, znači naći *zajedničku tačku* dveju pravih (i to upravo onih koje odgovaraju tim jednačinama). Iz geometrije vam je poznato koje sve međusobne položaje mogu imati prave u ravni. Pri tome važi sledeća zavisnost:

Na geometrijskom jeziku:	*Na algebarskom jeziku*:
1) *prave se seku* (imaju jednu zajedničku tačku)	*sistem je određen* — ima jedno rešenje: $(x; y)$ — koordinate zajedničke tačke (preseka) pravih
2) *prave su paralelne* (nemaju nijednu zajedničku tačku)	*sistem nemoguć* — nema rešenja (jednačine jedna drugoj protivrečne)
3) *prave se poklapaju* (sve tačke su im zajedničke)	*sistem neodređen* — ima beskonačno mnogo rešenja

8. Zadaci za vežbanje

1. Pomoću determinanata reši sisteme jednačina:

a) $5x+8y=10, \quad 3x-7y=6$

b) $x+2y=4, \quad 2x+4y=3.$

c) $x-y+5=0, \quad 3x+3y-15=0$

2. Reši sistem jednačina: $ax+y=2$, $2x+y=2$

Др И. Бандић (Београд)

О ЈЕДНОМ МЕТОДУ ЗА РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Систем линеарних једначина са две непознате може се, осим методама које се уче у основној школи, решити и на неке друге начине. Један такав начин назива се **метод неодређених коефицијената.**

Тим методом решићемо следећи систем једначина:

$$2x+3y=11, \quad 5x-y=2. \tag{1}$$

Ако једну од ових једначина, на пример другу, помножимо једним општим бројем m, чију ћемо бројну вредност одредити накнадно, добићемо

$$2x+3y=11; \quad 5mx-my=2m; \tag{2}$$

одатле, сабирањем левих и десних страна, налазимо

$$(2x+5mx)+(3y-my)=11+2m.$$

Пошто је, даље, на основу дистрибутивног закона множења:

$$2x+5mx=x(2+5m), \quad 3y-my=y(3-m),$$

последњу једначину можемо изразити на овај начин:

$$x(2+5m)+y(3-m)=11+2m \tag{3}$$

Изаберемо ли сада m тако да буде

$$3-m=0, \quad \text{тј.} \quad m=3,$$

једначина (3) ће гласити

$$x(2+15)+0=11+6, \quad \text{тј.} \quad 17x=17,$$

одакле је $x=1$.

Да смо m одредили из услова $2+5m=0$, добили бисмо $m=-\frac{2}{5}$, а једначина (3) би постала

$$y\left(3+\frac{2}{5}\right)=11-\frac{4}{5}, \quad \text{тј.} \quad 17y=51,$$

одакле је $y=3$

Према томе, решење система (1) је $\{x=1,\ y=3\}$.

Напомене. — a) Лако је проверити да ће се исти резултат добити ако се прва једначина система (1) помножи са m и затим примени исти поступак.

b) Пре него што се примени наведени метод, корисно је да се једначине датог система уреде, као што се то чини и при решавању помоћу других, вама познатих, метода.

c) Кад се помоћу метода неодређених коефицијената нађе вредност једне непознате, вредност друге непознате може се одредити из било које једначине датог система.

Пример. — Решићемо систем једначина:

$$\frac{x-2}{3}+\frac{3y+2}{3}=1, \quad 2(x+1)+3\left(y-\frac{1}{3}\right)=6. \qquad (4)$$

Пошто се овај систем уреди (ослобађање од разломака и заграда; одвајање познатих од непознатих) добије се систем

$$3x+12y=10; \quad 2x+3y=5. \qquad (5)$$

Пошто се прва једначина помножи са m и дате једначине саберу, долази се до једначине

$$(3m+2)x+(12m+3)y=10m+5. \qquad (6)$$

Изједначујући коефицијент уз y са нулом добије се

$$12m+3=0, \quad \text{тј.} \quad m=-\frac{1}{4},$$

па се из (6) налази

$$\left(-\frac{3}{4}+2\right)x=-\frac{5}{2}+5, \quad \text{тј.} \quad \frac{5}{4}x=\frac{5}{2},$$

одакле је $x=2$. Сада се из прве једначине система (5) непосредно добија

$$6+12y=10, \quad \text{тј.} \quad y=\frac{1}{3}.$$

Према томе, решење система (4) је

$$\left\{x=2, \quad y=\frac{1}{3}\right\}.$$

R. Jovanoski (Novi Beograd)

Lj. Vuković (Novi Beograd)

KONSTRUKCIJA DUŽI ČIJI JE MERNI BROJ KVADRATNI KOREN IZ RACIONALNOG BROJA

Kao što znate, kad je data površina kvadrata, onda se lako može izračunati dužina njegove stranice i kvadrat konstruisati.

Ako površina kvadrata iznosi, na primer, $16\,\text{cm}^2$, onda će dužina njegove stranice iznositi $\sqrt{16}\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$. Ova se duž može tačno konstruisati.

Ako bi pak, površina kvadrata iznosila $3\,\text{cm}^2$, onda bi dužina njegove stranice bila $\sqrt{3}$ cm. Ukoliko bismo broj $\sqrt{3}$ želeli da napišemo u decimalnom obliku, onda bismo to mogli učiniti samo približno sa potrebnom tačnošću (na jednu, dve ili više decimala). Takve približne vrednosti broja $\sqrt{3}$ su: 1,7; 1,73; 1,732; itd. Otuda je jasno da su i duži, čiji su ovo merni brojevi, samo približno jednake stranici kvadrata pomenute površine.

Međutim, pokazaćemo jedan način pomoću kojeg se mogu tačno konstruisati i duži čiji su merni brojevi, na primer: $\sqrt{3}$, $\sqrt{19}$ i sl. To se zasniva na sledećoj činjenici:

Ako je dužina hipotenuze pravouglog trougla za 1 *veća od dužine jedne katete, onda je dužina druge katete jednaka kvadratnom korenu iz zbira dužina hipotenuze i prve katete.*

Naime, ako je $c-a=1$, gde je c hipotenuza, a a kateta pravouglog trougla, onda po Pitagorinoj teoremi imamo da je dužina druge katete:

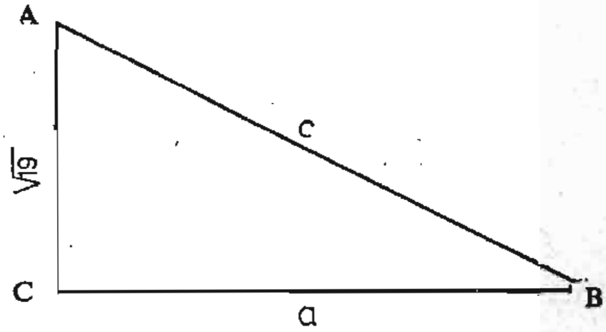
$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c-a)(c+a)}=\sqrt{1\cdot(c+a)}=\sqrt{c+a}.$$

Prema tome, kad je poznat zbir $c+a$ i znamo da je $c-a=1$, onda se c i a mogu lako odrediti, a zatim konstruisati pravougli trougao kome će c biti dužina hipotenuze i a dužina katete. Treća stranica tog trougla predstavljaće tada duž dužine $\sqrt{c+a}$.

Na osnovu toga možemo konstruisati duž čija je dužina $\sqrt{d}$, gde je d proizvoljan racionalan broj. A brojeve a i c uvek možemo odrediti tako da bude: $c-a=1$ i $c+a=d$.

P r i m e r 1. — *Konstruisati duž čiji je merni broj* $\sqrt{19}$.

Prema napred izloženom, stavićemo $c+a=19$ i $c-a=1$, odakle dobijamo $a=9$ (kateta) i $c=10$ (hipotenuza), te nije teško konstruisati trougao ABC kome je hipotenuza $AB=10$ jedinica i kateta $BC=9$ jedinice dužine (sl. 1). Kateta AC tog trougla imaće merni broj $\sqrt{19}$.

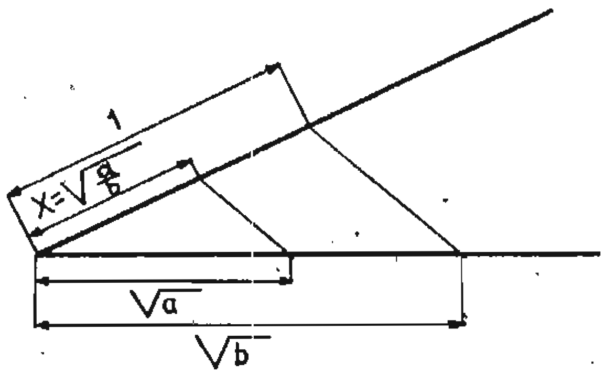


Sl. 1

P r i m e r 2. — *Za duž* $b=\sqrt{9,8}$ cm *elementi za konstrukciju su:* $a=(9,8-1):2=4,4$ (cm) —*kateta* i $c=4,4+1=5,4$ (cm) —*hipotenuza.*

Konstrukciju izvršite sami!

Napomena. — Ako treba konstruisati duž čiji je merni broj $\sqrt{\frac{a}{b}}$, gde su a i b prirodni brojevi, onda se to svodi na konstrukciju četvrte geometrijske proporcionale za duži čiji su merni brojevi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ i 1 (sl. 2), jer ako stavimo $\sqrt{\frac{a}{b}}=x$, onda je $\sqrt{a}:\sqrt{b}=x:1$. Pri tome duži čiji su merni brojevi $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ konstruišemo na pokazani ili na neki drugi način.



Sl. 2

Zadaci za vežbu

1. Konstruisati jednakostranični trougao čija je visina $\sqrt{23}$ cm.
2. Konstruisati mrežu jednakoivične četvorostrane piramide kad je površina njene osnove 10 cm^2.

UNIVERZALNA FORMULA

Ako se prošetate po šumi onda vam neće biti teško da na razne načine odredite visinu nekog drveta. No, možda će vam biti zanimljivo da odredite i njegovu zapreminu, a ukoliko biste hteli da znate da li se ono može prevesti na jednim kolima, onda bi trebalo da mu odredite i težinu. Oba ova zadatka na prvi pogled izgledaju prosta; međutim, tačno ih rešiti nije nimalo prosto.

Stvar je u tome, što stablo drveta, pa čak i sasvim glatko, nije ni valjak, ni kupa, ni zarubljena kupa, niti koje drugo geometrijsko telo, čiju zapreminu znate izračunati po formulama. Zaista, stablo nije valjak, jer se postepeno ka vrhu sužava; ali ono nije ni kupa, jer njegova izvodnica nije prava linija, već jedna specijalna kriva linija. Zato se pomenuta zapremina može dobiti tačno jedino sredstvima više matematike (integralnog računa). Nekim čitaocima će svakako izgledati čudno da se za izračunavanje kod najobičnijeg brvna ili trupca, moramo obraćati za usluge više matematike. Mnogi misle da se viša matematika primenjuje u nekim, »specijalnim« višim problemima, a da je u svakodnevnom životu dovoljna samo elementarna matematika. No to uopšte nije tako: može se dosta tačno izračunavati zapremina zvezda i planeta koristeći se samo elementarnom geometrijom; s druge strane, tačno izračunavanje zapremine stabla u šumi ili pivskog bureta nije moguće bez pomoći više matematike. Međutim, budući da ne pretpostavljamo da naši čitaoci vladaju višom matematikom, to nam ostaje da se zadovoljimo samo približnim izračunavanjem zapremine stabla, bureta i sl.

Pri tome ćemo poći od toga da se stablo mnogo ne razlikuje od zarubljene kupe ili pune kupe ili pak, valjka.

A iz geometrije vam je poznato da za izračunavanje zapremina raznih geometrijskih tela postoje različite formule (obrasci). Svakako su vam poznate formule za izračunavanje zapremine prizme, piramide, valjka, kupe i lopte. Ako tome još dodamo zarubljenu piramidu (nastaje kada se piramida preseče sa ravni paralelno osnovi) i zarubljenu kupu, onda izlazi da morate znati sedam formula da biste mogli izračunati zapreminu pomenutih sedam tela.

Ne čini li vam se da bi sada bilo umesno postaviti pitanje: *Čemu tu pamtiti sedam formula? Ne postoji li možda jedna opšta formula za zapreminu, koja bi važila za svih sedam pomenutih geometrijskih tela?* (Tada bismo mogli računati zapreminu stabla a da nas mnogo ne zanima na šta ono više liči: na valjak, na kupu ili zarubljenu kupu).

Takva formula ipak postoji. Ona je u matematici poznata kao **Simpsonova formula.**

Evo te čarobne formule, koja je, kako ćemo videti, jedinstvena svojom univerzalnošću. Ona glasi:

$$V=\frac{H}{6}(D+4S+G) \qquad (1)$$

gde je:

H — visina tela,
D — površina donje baze (osnove),
S — površina srednjeg preseka (preseka tela kroz sredinu njegove visine),
G — površina gornje baze (osnove).

Kao što vidite, treba uvesti samo pojam *srednjeg preseka* tela i to je sve što je novo. A taj presek dobijamo ako koje bilo od sedam pomenutih geom. tela sečemo sa ravni koja je postavljena kroz sredinu visine paralelno bazama. Površinu takvog preseka lako određujemo.

Dokažimo sada da se po navedenoj formuli (1) zaista može izračunati zapremina sledećih sedam tela: prizme, piramide, piramide zarubljene (krnje), valjka, kupe, kupe zarubljene (krnje) i lopte (kugle). Zbog istovetnosti postupka, pogodno je da ta tela podelimo na ove 4 grupe: 1) prizma i valjak, 2) piramida i kupa, 3) zarubljena (krnja) piramida i zarubljena (krnja) kupa i 4) lopta (kugla).

1. Za *prizmu i valjak* (sl. 1) donja baza D, gornja baza G i srednji presek S jednaki su međusobno, tj. $D = S = G$, te primenom formule (1) dobijamo:

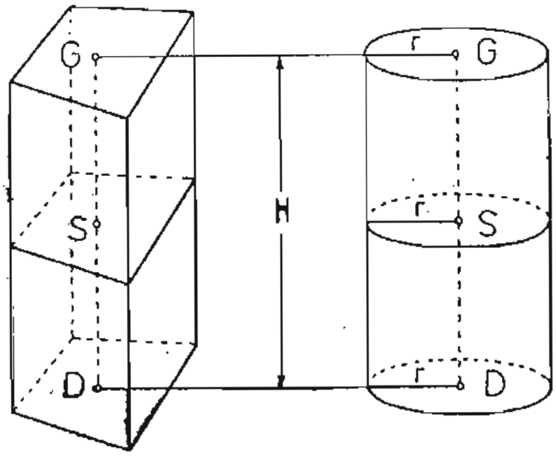
$$V = \frac{H}{6}(D + 4D + D) = \frac{H}{6} \cdot 6D = D \cdot H$$

Ako D označimo kao i obično sa B, imaćemo

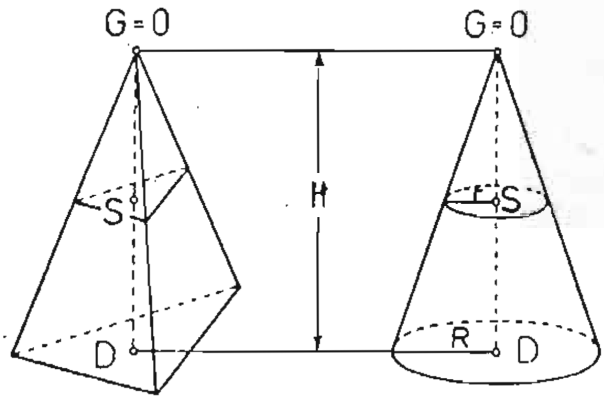
$$V = BH,$$

a to nam je dobro poznata formula. Zavisno od toga kakva je prizma, treba izračunati B, pomnožiti to sa visinom H i tako dobiti zapreminu prizme.

Za valjak, kao što znamo, treba staviti $B = r^2\pi$, gde je r poluprečnik baze valjka.



Sl. 1



Sl. 2

2. Za *piramidu i kupu* (sl. 2) srednji presek je lik sličan s bazom, a dimenzije su mu 2 puta manje nego li kod baze, a to znači da mu je površina 4 puta manja od površine donje baze*), tj. $S = D/4$. No u ovom slučaju gornja baza svodi se na tačku, te je $G = 0$, pa na osnovu (1) za ova dva tela imamo:

$$V = \frac{H}{6}\left(D + 4 \cdot \frac{D}{4} + 0\right) = \frac{H}{6}(D + D) = \frac{H}{6} \cdot 2D = \frac{1}{3} DH,$$

*) Uveri se u to sam. Na primer, kod piramide (sl. 2) stranice lika koji se dobija za srednji presek su ustvari srednje linije trougla, te su jednake polovini odgovarajućih stranica trougla u osnovi. I drugi dužinski elementu, npr. visine, su dva puta manji nego li kod trougla u osnovi. Prema tome, površina preseka je manja 2·2, tj. 4 puta. Dakle, $S = D/4$. Za kupu dobijamo isto: ako je R poluprečnik baze, onda je poluprečnik srednjeg preseka (v. sl. 2) $r = R/2$, pa je $D = R^2\pi$; $S = R^2\pi/4$.

a to vam je dobro poznata formula za zapreminu (volumen) piramide i kupe, jer ako D označimo kao i obično sa B, biće $V=\frac{1}{3}BH$. Za kupu je $D=R^2\pi$, te je $V=\frac{1}{3}R^2\pi H$.

3. Za *zarubljenu piramidu i zarubljenu kupu* (sl. 3) takođe važi formula (1). Uzmimo prvo *zarubljenu kupu*. Za nju je (sl. 3): $r_s=\frac{R+r}{2}$, pa je $S=r_s^2\pi=\left(\frac{R+r}{2}\right)^2\pi=\frac{\pi}{4}(R^2+2Rr+r^2)$ i $D=R^2\pi$, $G=r^2\pi$. Tada je $V=\frac{H}{6}\left[R^2\pi+4\cdot\frac{\pi}{4}(R^2+\right.$ $\left.+2Rr+r^2)+r^2\pi\right]=\frac{\pi H}{6}(R^2+R^2+2Rr+r^2+r^2)=\frac{\pi H}{6}(2R^2+2Rr+2r^2)$

i konačno,
$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2),$$
a to je upravo formula za zapreminu zarubljene kupe.

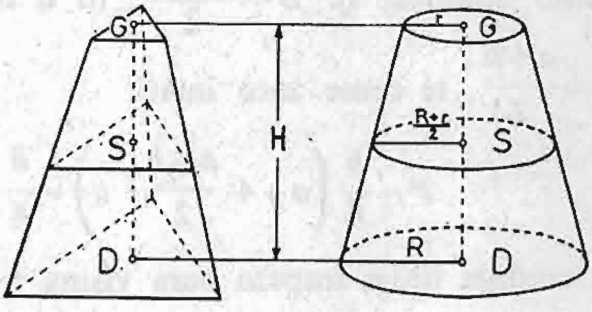
Kod *zarubljene (krnje) piramide* srednji presek nalazi se na sredini između donje i gornje baze, te za njegovu površinu S dobijamo**:

$$\sqrt{S}=\frac{\sqrt{D}+\sqrt{G}}{2},\text{ tj.}$$

$$S=\left(\frac{\sqrt{D}+\sqrt{G}}{2}\right)^2,$$

odnosno,

$$S=\frac{D+2\sqrt{DG}+G}{4}.$$



Sl. 3

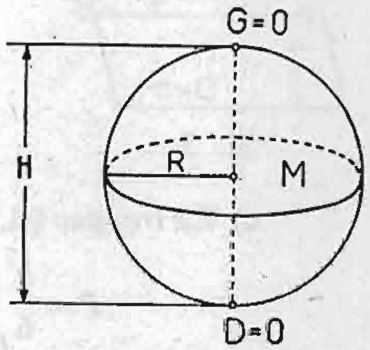
Ako to uvrstimo u (1) i sredimo imaćemo:

$$V=\frac{H}{3}(D+\sqrt{DG}+G),$$

a to je formula za zapreminu zarubljene piramide.

4. Za *loptu* (sl. 4) vidimo da je $H=2R$, dok je $D=0$, $G=0$, $S=R^2\pi$, te primenom formule (1) imamo:

$$V=\frac{H}{6}(0+4R^2\pi+0)=\frac{2R}{6}\cdot 4R^2\pi=\frac{4}{3}R^3\pi.$$



Sl. 4

**) U detaljnije obrazloženje ovde se ne možemo upuštati.

Tako smo pokazali da se iz Simpsonove formule (1) *mogu izvesti formule za zapreminu svih vama poznatih geometrijskih tela.*

Napomena. — *Zanimljivo je da se Simpsonova formula* (1) — *ista po obliku, ali samo s različitim značenjem veličina u njoj — može takođe primeniti i na izračunavanje površina nekih ravnih likova i to: paralelograma, trapeza i trougla. U tom slučaju formula* (1) *će glasati:*

$$P=\frac{h}{6}(D+4S+G),$$

gde ćemo

pod h — kao i dosad — podrazumevati visinu lika,

pod D — dužinu donje osnovice (baze) lika,

pod G — dužinu gornje osnovice (baze) lika,

pod S — dužinu srednje linije (srednjice), tj. dužinu koju dobijemo kad lik presečemo pravom kroz središte visine paralelno osnovici.

Imaćemo:

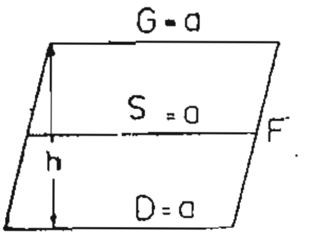
a) Za *paralelogram* (kvadrat, pravougaonik i dr.), sl. 5, je $D=S=G=a$, te je

$$P=\frac{h}{6}(a+4a+a)=a\cdot h, \text{ tj osnovica puta njena visina.}$$

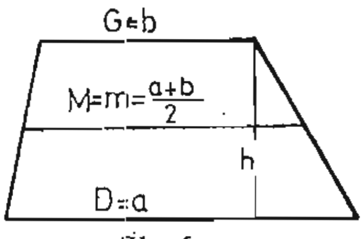
b) Za *trapez* (sl. 6) je, kao što znate, srednja linija jednaka poluzbiru paralelnih stranica, tj. $S=\dfrac{D+G}{2}$, ili u uobičajenim oznakama: $D=a$, $S=m$, $G=b$, $m=\dfrac{a+b}{2}$, te ćemo zato imati:

$$P=\frac{h}{6}\left(a+4\cdot\frac{a+b}{2}+a\right)=\frac{h}{6}(3a+3b)=\frac{h}{2}(a+b)=\frac{a+b}{2}\cdot h,$$

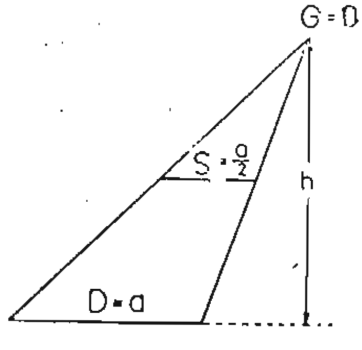
tj. srednja linija trapeza puta visina trapeza.



Sl. 5



Sl. 6



Sl. 7

c) Za *trougao* (sl. 7) je $G=0$, $S=D/2$, pa ako uzmemo da je $D=a$, imaćemo:

$$P=\frac{h}{6}\left(a+4\cdot\frac{D}{2}+0\right)=\frac{h}{6}(a+2a)=\frac{h}{6}\cdot 3a=\frac{1}{2}ah,$$

tj. poluproizvod stranice i njoj odgovarajuće visine.

Na osnovu svega što je napred rečeno i izvedeno, vidimo da je zaista sasvim opravdano da se Simpsonova formula nazove **univerzalnom formulom.** *B.*

NEOBIČNI DOŽIVLJAJI JEDNOG VASIONSKOG PUTNIKA

Uvod

1. U jednom od ranije objavljenih članaka (»O nizovima brojeva«, Mat. list III, 1) govorili smo o prirodnom brojnom nizu 1, 2, 3, ... , koji počinje brojem 1 i u kojem ne postoji najveći prirodni broj. Na pitanje koliko ima članova u prirodnom nizu može se odgovoriti samo da je broj tih članova veći od svakog velikog broja koji možemo napisati ili zamisliti. Zaista, ako navedemo bilo koji vrlo veliki prirodni broj, npr. broj 1000 000 000 000 (jedan bilion), uvek možemo tome broju dodati 1 pa ćemo dobiti još veći prirodan broj, novom broju ponovo dodati 1, i tako nastaviti. Zato kažemo da prirodnih brojeva ima **beskonačno mnogo.**

Među prirodnim brojevima razlikujemo parne i neparne. Paran broj je onaj broj koji se dobija množenjem broja 2 i nekog prirodnog broja. Tako je

$$2 = 2 \cdot 1, \quad 4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad \ldots, \quad 28 = 2 \cdot 14, \quad \ldots$$

Ako bilo koji prirodan broj obeležimo sa n, tada ćemo bilo koji paran broj obeležiti sa $2n$.

Neparan broj je onaj koji se dobija kad se od parnog broja oduzme 1; zato bilo koji neparan prirodan broj obeležavamo sa $2n - 1$. Na osnovu toga, niz neparnih prirodnih brojeva $1, 3, 5, 7, \ldots, 19, \ldots$ možemo napisati u obliku

$$2 \cdot 1 - 1, \quad 2 \cdot 2 - 1, \quad 2 \cdot 3 - 1, \quad 2 \cdot 4 - 1, \quad \ldots, \quad 2 \cdot 10 - 1, \quad \ldots$$

2. Očigledno je da parnih brojeva ima beskonačno mnogo i da, isto tako, i neparnih brojeva ima beskonačno mnogo. Dakle: množtvo (skup) svih prirodnih brojeva je beskonačno (obeležićemo ga sa N), množtvo svih parnih brojeva je beskonačno (obeležićemo ga sa N_2) i množtvo svih neparnih brojeva je beskonačno (obeležićemo ga sa N_1). Pri tome množtvo N svih prirodnih brojeva sadrži u sebi oba množtva N_2 i N_1.

Zamislimo da smo počeli da ispisujemo redom sve prirodne brojeve i da smo, posle toga, precrtali sve parne brojeve. Na taj način smo iz beskonačnog množtva N odstranili beskonačno množtvo N_2 parnih brojeva, a preostalo nam je beskonačno množtvo N_1 svih neparnih brojeva. To nam pokazuje da beskonačna množtva mogu ponekad da se čudno ponašaju: od beskonačnog množtva oduzeli smo beskonačno množtvo i ostalo nam je opet beskonačno množtvo!.

Na nekim svojstvima beskonačnih množtava zasniva se jedna lepa priča o čudnovatim doživljajima neobičnog putnika Jona Tihoga, koji je na svojim putovanjima po vasioni upoznao mnoge nove svetove i njihove stanovnike i svoje doživljaje opisao u svom »Zvezdanom dnevniku«. Donećemo jedan odlomak te priče koja nosi naslov *Neobičan hotel*

Neobičan hotel*

. . . Jednog jutra probudilo me je zvonjenje telefona.

— Dragi Jone, neodložan zadatak! — začuo sam glas svog starog prijatelja i kolege sa međuzvezdanih putovanja profesora Tarantoge. — Astronomi su otkrili u vasioni neki čudni objekat koji se kao tajanstvena crna linija vuče od jedne do druge galaksije**. Niko ne zna šta je to. Najjači teleskopi i radioteleskopi, postavljeni na raketama, ne mogu nam pomoći da otkrijemo tu tajnu. Smesta poleti u pravcu magline ACD-1587!

Sledećeg dana vraćena mi je sa opravke moja stara fotonska raketa (tj. raketa koja se kreće brzinom svetlosti), na kojoj sam odmah montirao ubrzivač vremena i elektronskog robota koji je znao sve jezike kojima se govori u kosmosu i sve priče o posetiocima zvezda (to me je obezbedilo od dosade bar za pet godina putovanja) i poleteo sam u zadatom pravcu.

Kad je robot bio već iscrpeo svu zalihu svojih priča i počeo opet ispočetka (a nema ničeg goreg nego slušati elektronskog robota koji po deseti put ponavlja staru priču), u daljini sam ugledao cilj svog putovanja. Magline koje su zaklanjale tajanstvenu liniju bile su iza mene, a preda mnom je stajao... hotel »Kosmos«, za koji dotle nisam bio čuo. Ubrzo sam saznao da su međuzvezdane lutalice Vigonti, kojima sam ja nekad sagradio neveliku planetu, raskomadali i tu planetu na sitne komadiće i ponovo ostali bez svog staništa. Tada, da ne bi više bili primorani da lutaju po tuđim galaksijama, rešili su da podignu jednu ogromnu zgradu — hotel za sve koji putuju i tumaraju vasionom. Taj se hotel protegao kroz skoro sve galaksije. Kažem »skoro sve« zato što su Vigonti rastavili na delove neke nenastanjene galaksije, a od svake od preostalih galaksija odvukli su po nekoliko loše postavljenih sazvežđa.

No što se tiče tog hotela, svaka im čast! U svakoj sobi bile su česme sa hladnom i vrelom plazmom. Ko je hteo, mogao je uveče da se razaspe u prah; sutradan izjutra portir je sve goste ponovo sastavljao prema atomskoj shemi svakog od njih.

A što je najglavnije, *u hotelu je bilo beskonačno mnogo soba.* Vigonti su se nadali da odsad više niko neće čuti onu rečenicu

---

* Prevedeno iz knjige N.J. Vilenkina: »*Priče o mnoštvima*«. Moskva 1965.

** Galaksije su zvezdani sistemi koji sadrže ogroman broj zvezda. Jedna od Galaksija je i Mlečni put, u čijem je sastavu i Sunce. Maglice su veliki oblaci razređenih gasova i prašine u sastavu Mlečnog puta i drugih galaksija.

koja im je tokom dugih lutanja bila mnogo dojadila: »nema slobodnih soba«.

Pa i pored svega toga, ja nisam imao sreće. Kad sam ušao u prijemno odeljenje, prvo što sam spazio bio je plakat: »Delegati kongresa kosmozoologa treba da se prijave na 127. spratu.« Kako su kosmozoolozi došli iz svih galaksija, a ovih ima beskonačno mnogo, sve sobe su već bile zauzete i za mene nije više bilo mesta. Doduše, šef prijemne kancelarije pokušavao je da neke kosmozoologe malo stesni i da mene smesti kod njih, ali kad sam saznao da jedan od njih smatra da je za njega normalna sobna temperatura 860°, najučtivije sam se odrekao tako »prijatnog« susedstva.

Srećom, direktor hotela bio je jedan Vigont koji je dobro pamtio usluge koje sam ja nekad učinio tome plemenu. On se zauzeo da dobijem smeštaj u hotelu, jer bih, da sam ostao da prenoćim u međuzvezdanom prostoru, mogao dobiti zapaljenje pluća. Pošto je malo razmislio, on je rekao šefu prijemne kancelarije:

— Smestite ga u sobu broj 1.

— A gde da preselim gosta koji je sada tamo? — začuđeno je upitao šef.

— Njega preselite u sobu broj 2. Gosta iz broja 2 otpremite u broj 3, onog iz broja 3 u broj 4, i tako dalje.

Tek tada sam shvatio šta znače neobična svojstva tog hotela. Kad bi u njemu bilo samo konačno mnogo soba, tada bi se gost iz poslednje sobe morao prebaciti u međuzvezdani prostor. A kako je hotel imao beskonačno mnogo soba, bilo je mesta za sve, te sam ja tako uspeo da se smestim a da nijedan kosmozoolog nije izgubio svoje mesto.

Sledećeg jutra nisam se nimalo začudio kad su me zamolili da se preselim u sobu br. 1 000 000. Do toga je moralo doći jer su sa zadocnjenjem pristigli kosmozoolozi iz galaksije BCK-3472, te je trebao smestiti još 999 999 gostiju. Ali, kad sam trećeg dana boravka pošao u administraciju da platim sobu, sve mi se smrklo pred očima. Pred šalterom se otegao red čiji se kraj gubio negde oko Magelanovih oblaka.

— Menjam dve marke magline Andromede za marku Sirijusa!

— Ko ima marku Erpeje iz 57. godine kosmičke ere?

U nedoumici obratio sam se šefu administracije:

— Ko su ovi?

— Međugalaktički kongres filatelista.

— Ima li ih mnogo?

— Beskonačno mnogo — po jedan predstavnik svake galaksije.

— Pa, kako ćete ih smestiti kad kosmozoolozi odlaze tek sutra?

— Ne znam; to ću sada izneti na kratkom sastanku kod direktora.

Ali, ispostavilo se da je taj problem veoma komplikovan i kratki sastanak odužio se čitav sat. Najzad, šef administracije izašao je iz direktorove kancelarije i počeo je da preseljava goste. Prvo je naredio da se gost iz sobe broj 1 preseli u sobu broj 2. Mene je to začudilo, jer sam iz iskustva stečenog prethodnog dana znao da takvo preseljavanje oslobađa samo jednu sobu, a sada je trebalo smestiti ni manje ni više nego beskonačno mnoštvo filatelista! Međutim, šef administracije je nastavio da komanduje:

— A gosta iz broja 2 preselite u broj 4, onog iz broja 3 u broj 6, i uopšte gosta iz broja n u broj $2n$.

Sada mi je njegov plan postao jasan: na taj način on je oslobodio beskonačno mnoštvo soba s neparnim brojevima tako da je mogao u te sobe smestiti sve filateliste. I tako su u svim sobama s parnim brojevima bili kosmozoolozi, a sve sobe s neparnim brojevima zauzeli su filatelisti (što se mene tiče, ja sam se za tri dana toliko sprijateljio s kosmozoolozima, da su me izabrali za počasnog predsednika svog kongresa; zajedno sa svim kosmozoolozima morao sam da napustim sobu broj 1 000 000 u kojoj sam dotle bio i da se preselim u sobu broj 2 000 000). A jedan moj poznanik filatelist koji je u redu pred šalterom bio 574. dobio je sobu broj 1147. Uopšte filatelist koji je u redu zauzimao n-to mesto dobio je sobu s brojem $2n—1$.

Sledećeg dana situacija sa sobama postala je lakša — kongres kosmozoologa je bio završen i oni su otputovali. Ja sam prešao u direktorov stan, gde je bila jedna slobodna soba. Ali, ono što je dobro za goste, nije uvek dobro i za administraciju. Posle nekoliko dana primetio sam da je moj gostoljubivi domaćin neraspoložen.

— Šta Vam je? — upitao sam.

— Polovina soba su prazne. Finansijski plan podbacuje.

Istina, ja nisam odmah razumeo o kakvom je finansijskom planu reč, jer su preostali gosti plaćali za beskonačno mnogo soba, ali sam ipak dao jedan savet:

— A Vi preselite goste tako da sve sobe budu zauzete.

Ispostavilo se da je to sasvim prosto učiniti. Filatelisti su zauzimali samo sobe s neparnim brojevima: 1, 3, 5, 7, 9, itd. Gosta iz sobe broj 1 ostavili su na miru. Gosta iz broja 3 preselili su u broj 2, gosta iz broja 5 u broj 3, gosta iz broja 7 u broj 4, itd. Uopšte, gost iz sobe broj $2n-1$ preseljava se u sobu broj n. Pošto je to završeno, sve sobe su opet bile popunjene iako nije došao nijedan novi gost.

Ali, direktorove brige nisu se time završile, a evo zašto. Vigonti se nisu zadovoljili time da sagrade hotel »Kosmos«. Neumorni graditelji sagradili su još beskonačno mnogo hotela od kojih je svaki imao po beskonačno mnogo soba. Pri tome oni su rastavili na delove toliko mnogo galaksija da se narušila međugalaktička ravnoteža, a to je moglo da izazove veoma teške posledice. Zato im je bilo predloženo da zatvore sve hotele osim našeg i da korišćeni građevinski materijal vrate odakle su ga uzeli. Ali, izvršenje tog zadatka nije bilo nimalo lako, jer su svi hoteli — a među njima i naš — bili puni gostiju, a trebalo je goste iz beskonačno mnogo hotela, od kojih svaki ima beskonačno mnogo gostiju, preseliti u jedan hotel koji je već bio pun!

— Ja više ne mogu! — povikao je direktor. — Najpre sam u pun hotel smestio jednog gosta, zatim sam smestio još 999 999 gostiju, posle toga još beskonačno mnogo gostiju, a sada od mene traže da u taj hotel smestim još beskonačno mnogo beskonačnih mnoštava gostiju. Ne, hotel nije od gume, neka smeste goste gde god hoće, ovde za njih nema mesta!

No, naredba je naredba i kroz pet dana trebalo je sve pripremiti za prijem novih gostiju. Tih dana niko u hotelu nije radio; svi su mislili kako da reše taj problem. Bio je objavljen i nagradni konkurs — s turističkim putovanjem po jednoj galaksiji kao nagradom. Bilo je predloženo nekoliko na prvi pogled dobrih rešenja, ali se ubrzo proveravanjem otkrilo da ti predlozi ne rešavaju postavljeni problem. Došao je red i na mene da pokažem da nisam uzalud pet godina učio matematiku u Zvezdanoj akademiji.

— Treba iskoristiti proste brojeve kojih, kako znate, ima beskonačno mnogo! Smestite goste prvog hotela u sobe koje redom imaju brojeve: 2, 4, 8, 16, . . . , goste drugog hotela u sobe koje redom imaju brojeve 3, 9, 27, 81, . . . , goste trećeg hotela u sobe koje redom imaju brojeve 5, 25, 125, 625, . . . , goste četvrtog hotela u sobe koje redom imaju brojeve 7, 49, 343, . . . , i tako dalje.

[Kao što se vidi, svi hoteli osim hotela »Kosmos« označeni su brojevima 1, 2, 3, 4, . . . ; svi gosti iz svakog od tih hotela smeštaju se u hotel »Kosmos«. Najpre se smešta po **jedan** gost iz svakog hotela; oni dobijaju sobe čiji su brojevi prosti brojevi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Zatim se opet smešta po jedan (sledeći na redu) gost iz svakog hotela; oni dobijaju sobe koje redom nose brojeve: $2^2=4$, $3^2=9$, $5^2=25$, $7^2=49$, $11^2=121$, itd. Taj se postupak nastavlja: po jedan gost (treći na redu) iz svakog hotela smešta se u sobu koja nosi broj 3, odnosno $3^2=9$, $3^3=27$, ... i tako dalje. Kako su svi prosti brojevi različiti među sobom, to su i njihovi kvadrati različiti među sobom, njihovi kubovi su takođe različiti među sobom, itd.]

— A da ne ispadne na taj način da jednu istu sobu dobiju dva gosta? — upita direktor.

— Ne, to je isključeno! Jer, ako uzmemo bilo koja dva prosta broja, tada su i njihovi kvadrati, i njihovi kubovi, i njihovi četvrti stepeni, ... različiti među sobom. Zato će na taj način svaki gost dobiti zasebnu sobu.

Direktor je prihvatio moje rešenje i odmah je uspeo da ga još više uprosti koristeći kao polazne brojeve ne sve proste brojeve, kako sam ja predložio, već samo brojeve 2 i 3. Naime, on je rešio da goste iz prvog hotela smesti redom u sobe s brojem: $2 \cdot 3$ (za prvog gosta), $2^2 \cdot 3$ (za drugog gosta), $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3$, itd.; goste iz drugog hotela smestio je redom u sobe s brojem: $2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3^2$, $2^4 \cdot 3^2$, ..., goste iz desetog hotela redom u sobe s brojem: $2 \cdot 3^{10}$, $2^2 \cdot 3^{10}$, $2^3 \cdot 3^{10}$, ... Pri tome je svaki gost dobio zasebnu sobu.

Ovakvo rešenje je sve oduševilo jer je bio rešen problem koji je svima izgledao nerešiv. Ali, nagradu nismo dobili ni ja ni direktor, jer je i moje i direktorovo rešenje ostavljalo mnogo praznih soba. Po mome predlogu, ostajale bi prazne sobe čiji broj nije stepen nekog prostog broja, a direktorovo rešenje ostavilo je prazne sve sobe čiji broj ne može da se napiše u obliku proizvoda $2^m \cdot 3^n$.

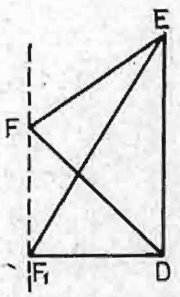
Najbolje rešenje, koje je omogućilo da se svi stanovnici kosmičkih hotela smeste u hotelu »Kosmos« i da pri tome nijedna soba u ovom hotelu ne bude prazna, a svaki gost da dobije zasebnu sobu, našao je jedan od filatelista, predsednik Matematičke akademije galaksije Labuda. O tome rešenju govorićemo drugom prilikom. A sada mi preostaje samo da se oprostim sa svojim domaćinima i da se svojom fotonskom raketom vratim na Zemlju, gde treba da svim kosmonautima ispričam o novom pristaništu u kosmosu. Osim toga, želim da se sa najistaknutijim matematičarima Zemlje i sa svojim prijateljem profesorom Tarantogom porazgovaram o svojstvima beskonačnih mnoštava.

К. Костић (Београд)

ЈЕДНАКЕ СЛИКЕ

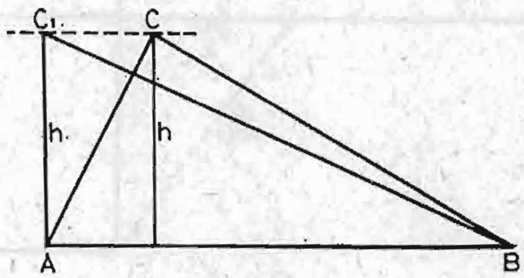
Мој уважени професор, највећи српски математичар, *Михаило Петровић*,* после писменог излагања на табли, често би рекао: „Није потребно да објашњавам, еспап говори!“ Млади наши математичари, и ви се у нашем случају с овим, свакако, слажете. Према томе, пажљиво посматрајте следеће слике (1—6), повезујте њихове елементе и закључујте! А потом, претварајте произвољан многоугао у квадрат (сл. 7).

1. Једнаки троугли



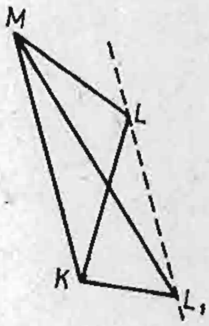
$\triangle DEF = \triangle DEF_1$

Сл.



$\triangle ABC = \triangle ABC_1$

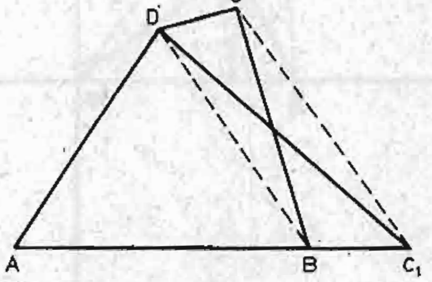
Сл. 2



$\triangle MKL = \triangle MKL_1$

Сл. 3

2. Четвороугао једнак троуглу

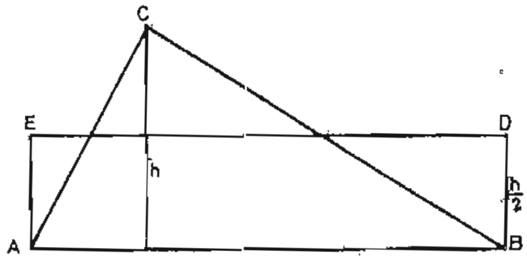


Четв. $ABCD = \triangle AC_1D$

Сл. 4

*) О Михаилу Петровићу прочитајте чланак у „Математичком листу“ II. 5, стр. 129—130.

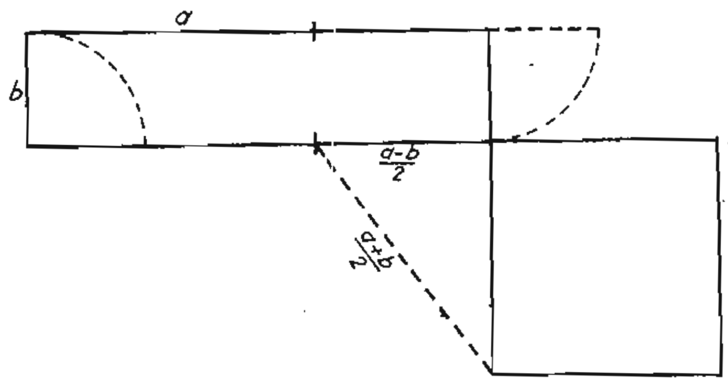
3. Троугао једнак правоугаонику



$\square ABDE = \triangle ABC$

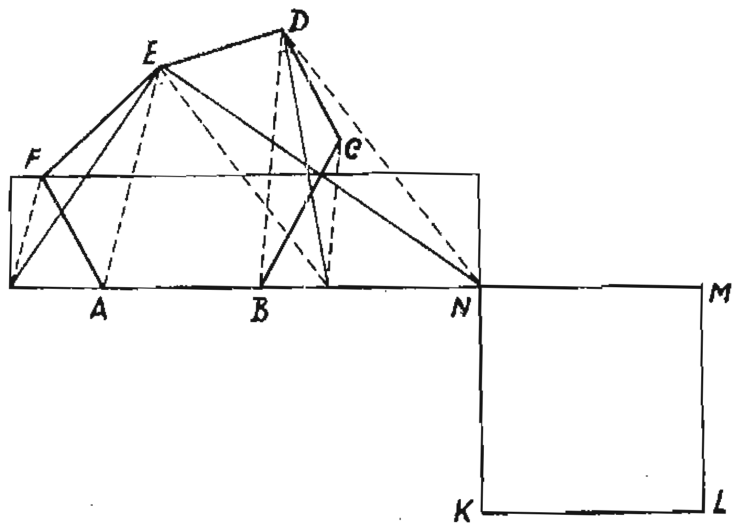
Сл. 5

4. Правоугаоник једнак квадрату*)



Сл. 6

5. Многоугао једнак квадрату



$ABCDEF = KLMN$

Сл. 7

*) Види „Математичко-физички лист“ за ученике средњих школа, год. II, број 1, страна 23.

ОДГОВОР НА ЈЕДНО ПИСМО

Друг Живота Деспотовић, професор у Основној школи „Светозар Марковић“ у Рековцу (СР Србија) упозорио нас је да се у разним уџбеницима и настави изрази

$$a : b \cdot c \quad \text{и} \quad a : bc$$

различито тумаче: негде се схвата да је

$$a : b \cdot c = a : (b \cdot c), \quad \text{односно} \quad a : bc = a : (bc),$$

док се негде схвата да је

$$a : b \cdot c = (a : b) \cdot c, \quad \text{односно} \quad a : bc = (a : b)c,$$

при чему заграда означава која се рачунска радња има прво извршити.

Проф. Деспотовић нам је предложио да, ради избегавања недоумице и неспоразума, читаоцима „Математичког листа“ изложимо како се наведени изрази имају схватити. Сматрајући да то наизглед ситно а уствари важно питање заслужује да буде расветљено, прихватамо предлог проф. Деспотовића.

1. Као што је познато, ако се у једном изразу без заграда јављају само рачунске радње I реда (сабирање и одузимање):

$$a - b - c + d,$$

онда ту не може бити никакве недоумице: ма којим редом изводили ове рачунске радње, увек ћемо добити исти резултат:

$$a-b-c+d=[(a+d)-c]+d+[a-b]+[d-c]=(a-c)+(d-c), \text{ итд.};$$

при томе смо заградама назначили поредак извођења рачунских радњи.

2. Исто тако, израз

$$a \cdot b \cdot c$$

не може изазвати никакав неспоразум; за множење важи закон асоцијације, па је

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

а како чиниоце можемо и премештати, постоји још неколико (израчунајте колико!) могућности да се израчуна производ abc.

3. Не можемо доћи у забуну ни кад је дат израз облика

$$a \cdot b + c : d - \mathrm{m} \cdot \mathrm{n};$$

познато правило утврђује да се најпре имају извршити рачунске радње II реда (множење и дељење), а затим рачунске радње I реда (сабирање и одузимање), тако да је

$$a \cdot b + c : d - \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} = (a \cdot b) + (c : d) - (\mathrm{m} \cdot \mathrm{n}),$$

и другог значења дати израз нема.

4. Исто тако, израз

$$a \cdot b : c,$$

било да се израчунава тако што се $(a \cdot b)$ дели са c ,било тако што се a множи са $(b : c)$, увек даје исти резултат:

$$a \cdot b : c = (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c),$$

јер поделити производ (умножак) два броја трећим бројем исто је што и поделити само један од чинилаца (фактора) тог производа тим трећим бројем. Због тога је у изразу $a \cdot b : c$ непотребно стављати заграде.

5. Другачије стоји ствар са изразом

$$a : b : c,$$

који се, ако заградама није назначен поредак извођења рачунских радњи, може различито схватити — било као $(a : b) : c$, било као $a : (b : c)$. У сваком од ова два случаја добија се различит резултат. Показаћемо то најпре на једном простом примеру:

$$(144 : 8) : 2 = 18 : 2 = 9,$$

$$144 : (8 : 2) = 144 : 4 = 36.$$

Зато израз $144 : 8 : 2$, без заграда, није исправно написан. Дакле, није исто да ли количник бројева a и b делимо бројем c или број a делимо количником бројевима b и c:

$$(a : b) : c \neq a : (b : c).$$

Због тога, *у исправно написаном изразу мора се заградама назначити редослед извођења рачунских радњи.*

6. Сада смо дошли до изразâ

$$a : b \cdot c, \quad \text{односно} \quad a : bc,$$

о којима пише проф. Деспотовић.

Одмах треба нагласити да производ bc сматрамо **једним бројем**, резултатом множења бројева b и c. Због тога израз $a : bc$ има само једно значење:

$$a : bc = a : (bc).$$

На пример, из познате формуле за обим круга $O = 2\pi r$ имамо

$$r = O : 2\pi,$$

а из формуле за запремину квадра $V = abc$ добијамо формулу за ивицу a:

$$a = V : bc.$$

Јасно је да у првом примеру обим круга делимо двоструким бројем π, а у другом запремину квадра делимо производом других двеју ивица (што значи да можемо најпре V поделити са b, а затим добијени количник поделити са c).

Дакле,

$$a : bc = a : (bc) = (a : b) : c.$$

Међутим, другачије стоји ствар са изразом

$$a : b \cdot c,$$

где је множење назначено, па не знамо да ли бројем c треба помножити b па затим a поделити тим производом или бројем c треба помножити количник $(a : b)$. На пример, ако је дат израз $7 : 3 \cdot 4$, ми — све док нам се накнадно не каже редослед извођења наведених операција — не знамо да ли треба најпре помножити 3 и 4 па онда производом 12 поделити 72, или треба најпре 72 поделити са 3 па затим добијени количник 24 помножити са 4. Очигледно, резултати су различити:

$$72 : (3 \cdot 4) = 72 : 12 = 6,$$

$$(72 : 3) \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96.$$

Закључак се сам собом намеће: **израз $a : b \cdot c$ је неисправно написан; у таквом изразу увек треба заградом означити поредак извођења назначених операција.**

Напомена. На основу претходних разматрања лако је увидети неопходност стављања заграда у сложенијим изразима, као што су: $a : b \; c : d : e$, $a \cdot b : c : d \cdot e \cdot f$ и сл.

Задатак. — Да ли су изрази $a : b \cdot c : d : e$, $a \cdot b : c : d \cdot r \cdot f$, $a : b : c \cdot d \cdot e$ исправно написани? Ако нису, на колико се начина може схватити сваки од њих?

Ур.

* * *

Z A D A C I

Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole

Škola za KV radnike, Vlasotince, juni 1968.

1. Izračunaj:

$$\left(\frac{3}{4}\cdot 2\frac{2}{3}+2{,}50:2\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}5-\left(1{,}75-2\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{21}\right):2\frac{1}{2}. \qquad [1]$$

2. Rešiti sistem jednačina:

$$\left.\begin{aligned} x : y &= 3 : 4 \\ (x-1) : (y+2) &= 1 : 2 \end{aligned}\right\} \qquad [x=6,\ y=8]$$

3. U jednoj leguri bakar i aluminijum zastupljeni su u razmeri 47 : 3. Koliko ima svakog od tih metala u takvoj leguri kojoj je težina 1200 kilograma?

[1128 kg i 72 kg]

4. Jedna kateta pravouglog trougla je 15 cm, druga je za 5 cm manja od hipotenuze. Kolika je visina nad hipotenuzom? [12 cm]

5. Da bi se elektrificiralo jedno selo potrebno je 20 km bakarne žice debljine 4 mm. Kolika je težina te žice ako je specifična težina bakra 8,9? [Oko 4236 kilograma]

Zadaci sa prijemnih ispita za upis u srednje škole

Beograd, 26. VI 1968.

1. Učenik je prvog dana pročitao 40% cele knjige, drugog dana je pročitao 60% ostatka, a preostali deo knjige pročitao je trećeg dana. Koliko je stranica imala ta knjiga, ako je učenik drugog dana pročitao 30 stranica više nego li trećeg dana? [250]

2. Jedna funkcija zadana je jednačinom $y=2x+1$.

a) Nacrtaj grafik te funkcije pa odredi koordinate onih tačaka u kojima taj grafik seče koordinatne ose. [$(-1/2;\ 0)$ i $(0;\ 1)$]

b) Računski odredi, a onda na grafiku proveri, za koju vrednost promenljive x je $y=-1$. [$x=-1$]

3. Neka je: $A=(a-2)^2-(a+2)^2$ i $B=(b+3)^2-(b-3)^2$.

Kako se odnose numeričke (brojne) vrednosti izraza A i B, ako je $a=2\frac{1}{2}$ i $b=-1\frac{1}{4}$? [4 : 3]

4. Neka je dat jednakostranični trougao ABC stranice a. Nad stranicom AB kao nad prečnikom konstruiši polukrug (i to sa iste strane sa koje je i trougao).

a) Izraziti u funkciji od a površinu onog dela polukruga koji je izvan $\triangle ABC$.

$$\left[\frac{a^2}{24}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)\right]$$

b) Izračunaj površinu onog dela trougla ABC koji je izvan nacrtanog polukruga ako je $a=6$ cm. (Računaj na 2 decimale i uzmi $\sqrt{3}\approx 1{,}7\ 2$ i $\pi\approx 3{,}1416$!)

[$P\approx 3{,}08$ cm^2

5. Čaša ima oblik valjka visine 7 cm i unutrašnjeg prečnika 8 cm. Koliko centilitara vode može stati u tu čašu? Koliko se takvih čaša može napuniti iz 1 litra vode i koliko vode ostane za onu poslednju, nenapunjenu čašu? (Visina unutrašnjosti, odnosno dubina čaše je 7 cm — a ne čaše sa dnom!).

[$\approx 35{,}2$ cl; 2 čaše i ostane 0,296 l]

Napomena. — Svaki je zadatak ocenjivan sa 0 do 5 bodova; za sasvim tačno izrađeni zadatak davano je 5 bodova, što znači da je maksimalni broj bodova 25.

Preporučujemo vam da samostalno rešite navedene zadatke. Da biste svoj rad mogli kontrolisati, za svaki zadatak naveli smo i rezultat.

Одабрани задаци

Ови задаци (а има их за сваки разред) треба да вам послуже за вежбу, припремање за пријемне испите и математичка такмичења. Задатке треба самостално да решите, а наведени резултати, упутства и решења нека вам служе за контролу.

Аритметика

406. Израчунај вредност израза:

1) $46\,368 - 13\,248 : 276 + 92$ [46 412]

2) $46\,368 - 13\,248 : (276 + 92)$ [46 332]

3) $(46\,368 - 13\,248) : 276 + 92$ [212]

4) $(46\,368 - 13\,248) : (276 + 92)$ [90]

407. Израчунај напамет:

$$1000000-(1000000-\{1000000-[1000000-(100000-999999)]\}).$$ [1]

408. Израчунај:

a) $$\left[5\frac{1}{4}-\left(\frac{17}{30}:\frac{5}{6}+\frac{5}{12}:\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{7}{48}-4\frac{1}{9}\right]\cdot 100$$

b) $$\left[\left(3\frac{1}{2}-2:1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\right)\cdot 10-6\frac{1}{3}\right]:2-2$$ $\left[16\frac{1}{3}\right]$

409. Израчунај: $\dfrac{74\cdot 147-73}{73\cdot 147+74}$

Решење. — $\dfrac{74\cdot 147-73}{73\cdot 147+74}=\dfrac{(73+1)\cdot 147-73}{73\cdot 147+74}=\dfrac{73\cdot 147+147-73}{73\cdot 147+74}=1.$

410. Од којег броја 0,36% износи $\dfrac{(4\cdot 0{,}72):0{,}002-0{,}108:0{,}0001}{(2:0{,}04-0{,}7^2:0{,}01)\cdot 0{,}01}$?

Решење. — Бројилац датог израза једнак је $2{,}88:0{,}002-1\,080=1\,440-1\,080=360$, а именилац $(50-49)\cdot 0{,}01=0{,}01$, па је израз једнак $360:0{,}01=36\,000$. Пошто 0,36 делова отпада на 100 делова, онда 1 део отпада на $\dfrac{100}{0{,}36}$, 36 000 отпада на $\dfrac{100\cdot 36\,000}{0{,}36}=10\,000\,000$. (Наравно, до истог резултата можемо доћи користећи основну формулу процентног рачуна, при чему је процентни износ 36 000, проценат 0,36 а основна вредност се тражи).

411. Три броја су пропорционална бројевима 0,2, $\dfrac{2}{3}$ и 0,5 Нађи те бројеве, ако се зна да је први мањи од половине другога за 32.

[48; 160; 120]

412. Награду од 9 800 динара треба поделити тројици радника и то обрнуто пропоционално изостанцима са посла у току године. Први је радник изостао 24, други 26, трећи 20, радних сати. Колико ће динара добити сваки?

Р е ш е њ е. — Износи које ће радници примити стоје у размери (омјеру) $\frac{1}{24}:\frac{1}{16}:\frac{1}{10}$ или 10:15:24 (после проширивања са 240). Значи, своту од 9 800 динара треба поделити у односу 10:15:24. Када би требало $10+15+24=49$ динара поделити у том односу, онда би очигледно први радник добио 10 динара, други 15 динара, а трећи 24 динара; значи, први добија $\frac{10}{49}$, други $\frac{15}{49}$, трећи $\frac{24}{49}$ своте која се дели. Према томе, од своте 9 800 динара први ће радник добити $\frac{10}{49}\cdot 9\,800$ дин. $=2\,000$ дин., други $\frac{15}{49}\cdot 9\,800$ дин. $=300$ дин., трећи $\frac{24}{49}\cdot 9\,800$ дин. $=4\,800$ дин. Заиста, $2\,000+3\,000+4\,800=9\,800$ и $2\,000:3\,000:4\,800=10:15:24$ (после скраћивања са 200). (Видите зад. 71 у рубрици „Одабрани задаци“, „Мат. лист“ I. 2).

413. На неком послу радило је 15 радника. Они сврше половину посла за 20 дана. После тога тројица напусте посао. За које ће време остали радници довршити посао? [25 дана]

414. Килограм телетине с костима стаје 9,50 динара, а без костију 13,50 динара. У телетини има око 30% костију. Шта је боље купити: телетину (месо) с костима или без костију?

415. Миша хоће да купи фото-апарат. Али он има уштеђених само 52 динара. Остали новац дали су му отац и два брата. Отац му је дао 50% суме скупљене без њега, један брат је дао 25% суме скупљене без њега, а други брат је дао $33\frac{1}{3}\%$ суме скупљене без њега. Колико је динара стајао фото-апарат? [240]

416. Домаћица пође у продавницу и рачуна да потроши 3/4 новца који је понела. При куповини сазна да је роба појефтинила за 10%. После куповине остало јој је 65 динара. Колико новаца је била понела? [200 дин.]

417. Сељанка је на пијац донела јабуке (мање од 500 ком.). Када их је разврстала у парове, преостала је једна јабука. Када је јабуке груписала по 3, остала јој је опет једна јабука. Сељанка је затим груписала (разврставала) јабуке по 4, по 5, по 6, али јој је увек преостајала по једна јабука. Када их је груписала по 7, није више преостала ниједна јабука. Колико је јабука сељанка донела?

Н а п о м е н а. — Овај се задатак само формулацијом разликује од 28. конкурсног задатка (в. решење у МЛ II.4, стр. 118)

418. Одред пионира засадио је укупно 6 006 садница багрема, храста и бора, тако да на сваких 40 садница багрема долази 25 садница храста и 12 садница бора. Колико је укупно радних часова имао одред у овој акцији, ако је за засађивање багремове саднице потребно 15 минута, храстове 18 минута, а борове саднице 20 минута?

Упутство: Израчунај прво број снопића у којима је запаковано по 40 садница багрема, 25 садница храста и 12 садница бора.

[Резултат: 1 677 радних часова]

Алгебра

419. Запремина бурета може се рачунати по формули

$$V=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2D+d}{3}\right)^2\cdot H,$$

где је V—запремина бурета, $\pi\approx3{,}14$, D—пречник бурета на најширем месту („трбуху" бурета), d—пречник сваког дна бурета, H—висина бурета.

Наћи запремину бурета ако је $D=9$ dm, $d=6$ dm, $H=11$ dm.

420. Израчунај: $-x\{-x[-x(-x)-x]-x\}-x$ и изврши пробу за $x=1$. Добијени израз растави на просте факторе.

421. Нумеричку вредност разломка $\frac{a^2x-ax^2}{a-x}$ (где је $a\neq x$) за $a=4{,}4$ и $x=0{,}75$ наћи ћемо тако што ћемо покушати да разломак поједноставимо (скраћивањем), па тек онда да извршимо замену променљивих њиховим вредностима. Раставимо ли бројилац на чиниоце, имаћемо:

$\frac{ax(a-x)}{a-x}$ што је идентички једнако са ax (за $a\neq x$).

Вредност последњег, па према томе и датог израза, јесте

$$0{,}75\cdot4{,}4=3{,}3.$$

422. $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}:\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)=\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}:\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{(x^4+2x^2y^2+y^4)-(x^4-2x^2y^2+y^4)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}:\frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^4+2x^2y^2-y^4}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}:\frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{x^2-y^2}=$$

$$=\frac{4x^2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}:\frac{4xy}{x^2-y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2},$$ при чему је $x\neq\pm y$. (Зашто?)

На основу својстава рач. операција решити једначине (423—427):

423. a) $(4284+x)-1000=3784$; b) $(720+x)\cdot 501=365830$;

424. $(10000-3333x)\cdot 10000-9999=1$ $[x=3]$

425. $(13-8:x):5=2{,}2.$ $[x=4]$

426. $$\frac{\dfrac{3x-8}{5}+1}{6}=5$$ [51]

427. $$1\frac{5}{28}\cdot\left(x:3\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)=2\frac{5}{14}$$ $\left[7\dfrac{5}{7}\right]$

428. $$\frac{0{,}56\,x-2{,}05}{x}-\frac{1}{40}=0{,}125$$ [5]

Упутство. — Шта треба да учините да би се x појавило само на једном месту? Примените: $(A-B):C=A/C-B/C$, за $C\neq 0$.

429. *Бронзани делфин.* На бронзаној статуи делфина у фонтани на тргу стајао је овакав натпис: Ја могу да избацујем воду кроз очи, кроз ноздрве и на уста. Ако отворим само очи, базен ће се напунити за $2\frac{2}{5}$ сати; ако отворим само ноздрве, базен ће се напунити за $3\frac{3}{4}$ сати, а ако отворим само уста, базен ће се напунити за $4\frac{1}{2}$ сата. Ако истовремено отворим очи, ноздрве и уста, реци посматрачу, за колико сати ће се базен напунити?

430. Аутобус крене с почетне станице с одређеним бројем путника. На првој станици изађе 1/7 путника, а на другој станици уђе нових 15 путника. На трећој станици изађе 3/5 путника који су стигли на ту станицу и на крајњу станицу се довезе 18 путника. Колико путника је на почетку ушло у аутобус?

Решење. — Ако је број путника при поласку био x, онда их је код прве станице било $x-\frac{x}{7}=\frac{6}{7}x$, код друге станице $\frac{6}{7}x+15$, а код треће станице $\frac{2}{5}\left(\frac{6}{7}x+15\right)$, а то мора бити једнако 18. Дакле је

$$\frac{2}{5}\left(\frac{6}{7}x+15\right)=18,$$

$$x=35.$$

На почетку је ушло 35 путника.

431. Ако Милан да̂ Осману 1 дин. онда ће обојица имати једнако. Ако би, пак, Осман дао Милану 1 динар, онда би Милан имао 9 пута више новца него ли Осман. Колико је новца имао сваки дечак?

[3 дин. 50 п.; 1 дин. 50 п.]

Решење. — a) Аритметички: 1 дин. + 1 дин. = 2 дин.; 2 дин + 2 дин. = 4 дин.; 9 делова — 1 део = 8 дел.; 4 дин. : 8 = 50 пара; 50 пара + 1 дин. = 1 дин. 50 пара; 1 дин. 50 пара + 2 дин. = 3 дин. 50 пара.

Дајте образложење!

b) Алгебарски: Нека је Милан имао x, а Осман y динара. Тада је:

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= y+1 \\ x+1 &= 9\,(y-1). \end{aligned}\right\}$$

Одатле се лако добија $x = 3{,}5$ и $y = 1{,}5$. Значи, Милан је имао 3,5 дин., а Осман 1,5 дин. Извршите пробу!

432. На овој слици графички је приказано кретање трију возова.

На основу тог графика одговори на следећа питања:

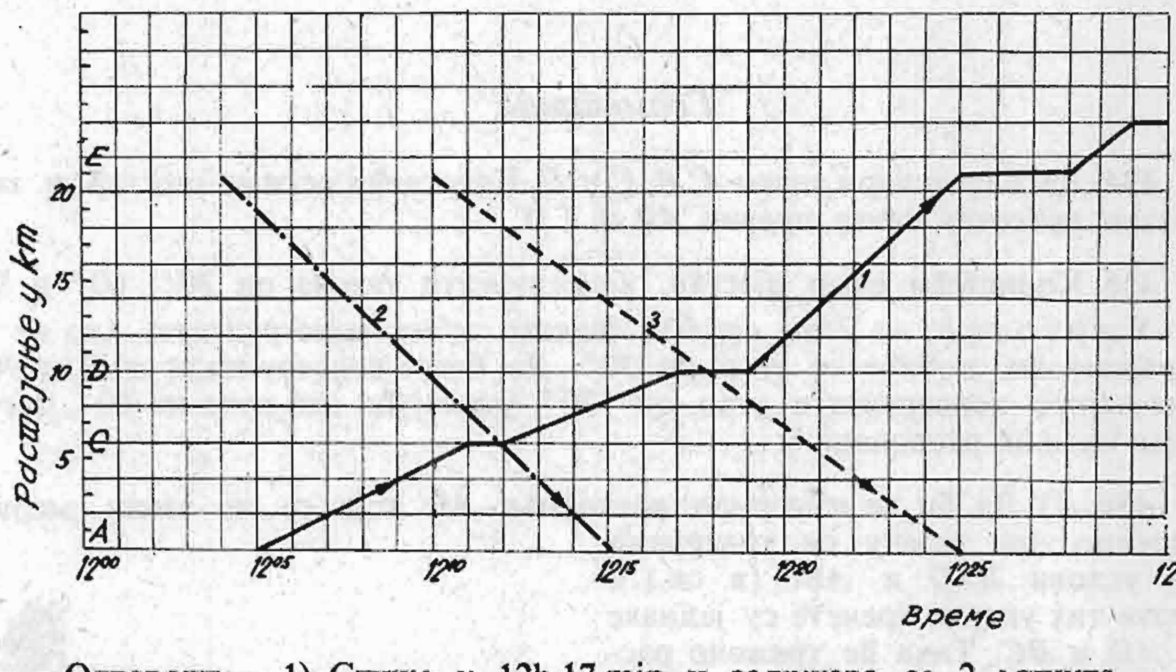
1) Када воз бр. 1 стиже на станицу D и колико се дуго задржава на тој станици?

2) Где и када се укрштају возови бр. 1 и бр. 2?

3) На којем делу пута је брзина воза 1 највећа? Израчунај ту брзину!

4) Који се од два воза, бр. 2 или бр. 3, креће већом брзином?

5) Колико минута воз бр. 1 иде од станице B до станице E?



Одговори.— 1) Стиже у 12h 17 min и задржава се 2 минута.

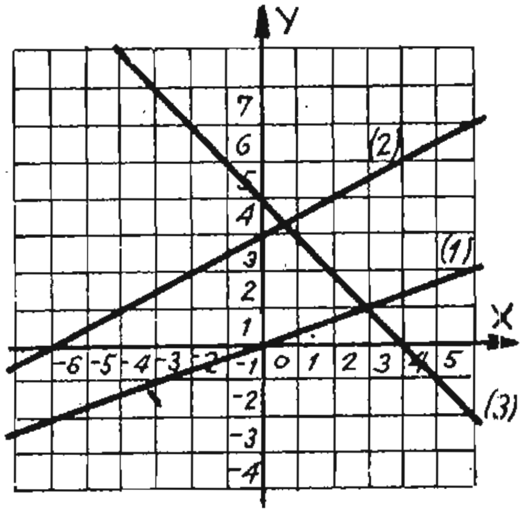
2) У станици C (на 6 km од A) у 12h 12 min.

3) На прузи између станица D и E. На том делу пруге брзина воза је 11 km: 6 min. = 11 km: 0,1 h = 110 km/h.

4) Већом брзином креће се воз бр. 2.

5) Од B до E воз иде 20 минута.

433. На овој слици дати су графици трију зависности између промењљивих x и y. Изразите те зависности формулама (аналитички).



Одговор. — Тражене функције су:

1) $y = \frac{1}{3}x;$

2) $y = \frac{1}{2}x + 3;$

3) $y = -x + 4$

Упутство. — Трећу зависност можемо изразити на следећи начин. Општи облик тражене функционалне зависности је $y = ax + b$, јер је график те зависности права линија (в. чланак „О линеарној функцији" у МЛ II.5, стр. 135—140). Да бисмо израчунали a и b, узећемо две које било тачке кроз које пролази график те зависности (функције), например: $A(0; 4)$ и $B(4; 0)$ и њихове координате замениђемо у једначину $y = ax + b$. Добићемо: $4 = b$ и $0 = 4a + b$. Из овог система једначина добијамо: $b = 4$ и $a = -1$. Према томе, једначина праве (3) гласиће $y = -x + 4$. Слично поступамо и у остала два случаја.

Геометрија

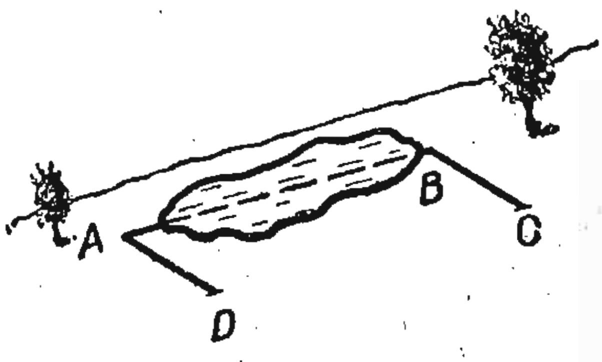
434. Дате су четири тачке A, B, C и D. Користећи се само шестаром, конструисати пресечну тачку правих AB и CD.

435. Користећи само шестар, конструисати углове од 30°, 60° и 90°

Упутство. — Угао од 60° свакако знате конструисати. Ако се тај угао располови, добиће се угао од 30°. Да бисте конструисали угао од 90°, морате најпре конструисати угао од 120°, узимајући два пута по 60°. Затим се један од њих располови и . . .

436. 1) Да би се измерило растојање AB које се не може мерити непосредно, на терену су трасирани прави углови BAD и ABC (в. сл.) и на краке тих углова пренете су једнаке дужи AD и BC. Тада ће тражено растојање AB бити једнако растојању DC, које се може измерити. Објасните зашто?

2) Како бисте на терену измерили растојање између тачака A и B користећи својство страница паралелограма? Наведите пример.



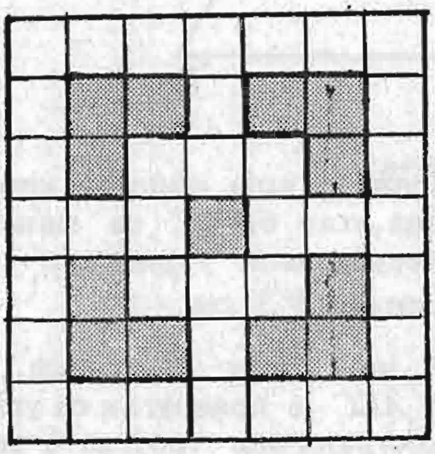
437. Које су цифре на овом цртежу централносиметричне?

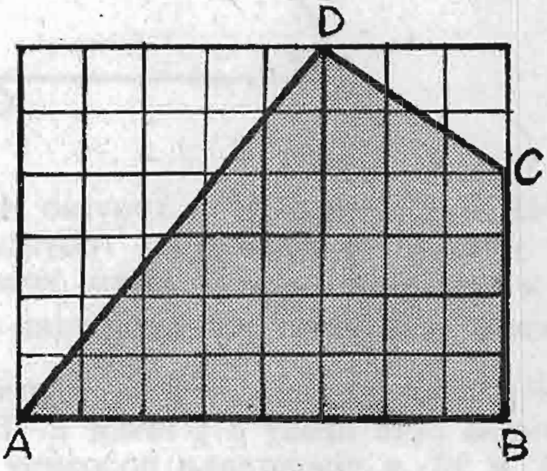
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Напишите неколико бројева, чији запис у декадном систему представља централно-симетричну фигуру.

[0, 8, 888, 69, 609, 8698, 90806 итд.]

438. На најприкладнији начин наћи проценат осенчене површине на следећим сликама:

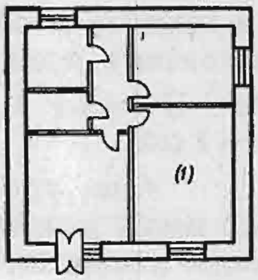




439. Унутрашњи угао једног правилног многоугла два пута је већи од спољашњег угла тог многоугла. Који је то многоугао?

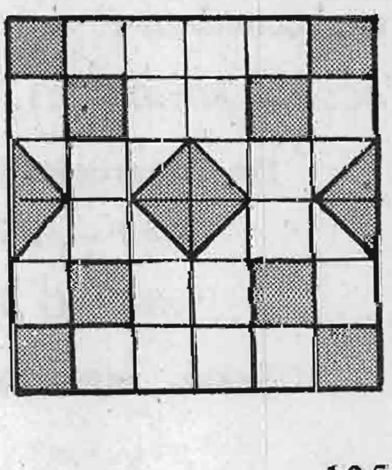
Р е ш е њ е. — Унутрашњи угао правилног n-тоугла износи $\frac{180°(n-2)}{n}$, а спољашњи $\frac{360°}{n}$. Из $\frac{180°\,(n-2)}{n} = 2 \cdot \frac{360°}{n}$ добијамо $n = 6$.

440. Према плану зграде, који је рађен у размери 1:200 (в. сл.), одредити: а) дужину и ширину зграде b) дужину и ширину собе (1).



441. Како се односи површина осенченог дела квадрата према површини целог квадрата на слици десно?

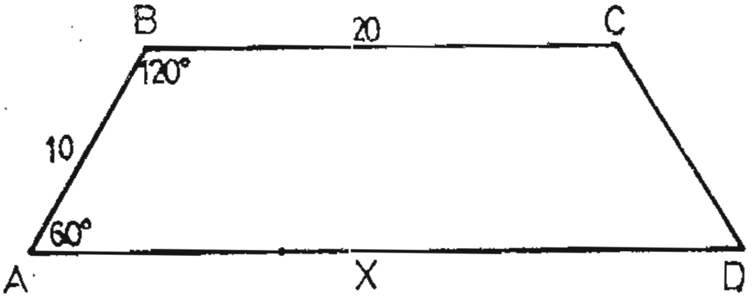
О д г о в о р. — Тражени однос је 1:3.



442. На слици доле убележени су потребни подаци.

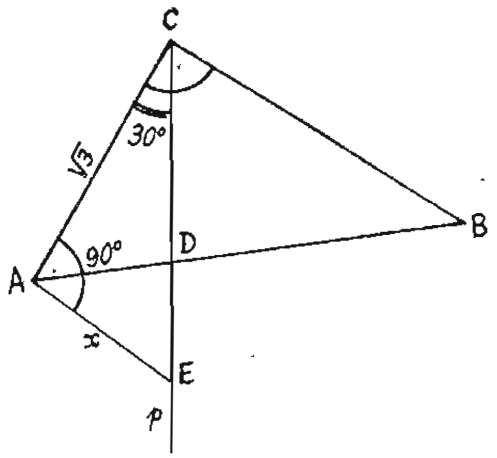
a) Како се назива четвороугао $ABCD$? Образложи!

b) Одреди дужину странице AD и површину четвороугла $ABCD$. [$P = 25\sqrt{3}$]



443. Дат је правоугли троугао ABC. Права p која пролази кроз теме правог угла датог правоуглог троугла заклапа угао од 30° са мањом катетом и сече хипотенузу у тачки која хипотенузу дели у размери 1:2 Наћи дужину хипотенузе ако је дужина мање катете $\sqrt{3}$ cm.

Решење. — Повуцимо нормалу AE на катету AC (в. сл.). Нека та нормала сече праву p у тачки E. Троугао AEC је правоугли са угловима 30°, 60° и 90° и представља половину једнакостраничног троугла с висином $AC = \sqrt{3}$ cm. Према томе, катета AE која лежи насупрот угла од 30° једнака је половини хипотенузе CE, то јест $CE = 2x$, где смо ставили $AE = x$ Тада је



$$CE^2 = AE^2 + AC^2, \quad \text{тј.} \quad (2x)^2 = x^2 + (\sqrt{3})^2,$$

$$\text{одакле } x^2 = 1, \quad \text{па је } x = 1.$$

(x можемо израчунати и на темељу обрасца за висину једнакостраничног троугла, наиме, из $AC = x\sqrt{3}$, тј. $\sqrt{3} = x\sqrt{3}$ добијамо $x = 1$ cm).

Али, троугли ADE и BCD су слични, јер имају једнаке одговарајуће углове (углови код D унакрсни, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ABC$ као наизменични, $\sphericalangle AED = \sphericalangle BCD = 60°$). Зато су одговарајуће странице тих троуглова пропорционалне:

$$BC : AE = BD : AD = 2:1, \text{ тј. } BC : x = 2:1, \text{ односно } BC : 1 = 2:1, \text{ одакле } BC = 2 \text{ cm}.$$

По Питагориној теореми је онда

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

$$AB^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7, \qquad AB = \sqrt{7}.$$

Дакле, хипотенуза је $\sqrt{7}$ cm.

444. Дијагонале трапеза су 20 cm и 15 cm, а висина му је 12 cm. Колика је површина тог трапеза? [150 cm^2]

Упутство. — Помоћу Питагор. теор. нађи дужине пројекција дијагонала на већу основицу; одатле се лако добија збир основица. Итд.

445. Над страницама једнакокрако-правоуглог троугла, чија је хипотенуза c, конструисани су квадрати. Центри тих квадрата спојени су међусобно. Колика је површина добијеног троугла? $\left[P=\frac{1}{2}c^2\right]$

446. Од коцки ивице 1 cm сложена је већа ивице 3 cm, па је ова већа коцка обојена споља црвено.

а) Од колико малих коцки је сложена већа коцка?

б) Колико од тих мањих коцки имају: 1) три стране обојене црвено; 2) две стране обојене црвено; 3) једну страну обојену црвено; 4) ниједну страну обојену црвено?

447. Прав ваљак и купа имају једнаку базу—круг полупречника $r=7$ cm и једнаку висину H = 24 cm. У којој размери стоје њихове површине? [31:16]

448. Основа купе има површину 22 cm^2, а када се развије њен омотач, добије се осмина круга. Израчунати запремину те купе! [V = 154 cm^3]

449. Ромб, чија је површина S, обрће се око једне своје странице. Колика је површина добијеног обртног тела? [$4\pi S$]

450. Колики су површина и запремина тела које настаје кад се једнакостранични троугао обрће: a) око своје висине, b) око своје странице, c) око праве која је повучена кроз једно теме троугла паралелно са наспрамном страницом? У којој размери стоје запремине сва три ротациона тела?

$[V_1:V_2:V_3=\sqrt{3}:\ 3:12]$

Разни задаци

451. Упишите одговарајуће бројеве у празна поља ове таблице тако да све назначене рачунске радње, како по хоризонталама тако и по вертикалама, буду тачно извршене,

Уколико у томе нисте успели погледајте на следећу страницу!

7	+		−		=	5
+	■	−	■	+	■	+
	−	2	+		=	
−	■	+	■	−	■	−
	+		−	6	=	6
=	■	=	■	=	■	=
5	+	5	−		=	7

7	+	3	−	5	=	5
+		−		+		+
6	−	2	+	4	=	8
−		+		−		−
8	+	4	−	6	=	6
=		=		=		=
5	+	5	−	3	=	7

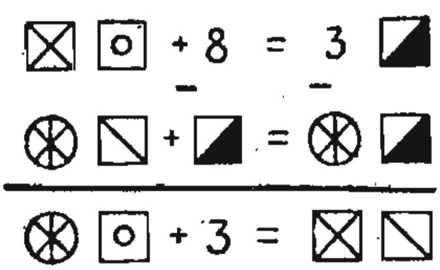
452. У следећим примерима цифре су замењене словима, при чему различитим словима одговарају различите цифре, а истим словима исте цифре. Дешифрујте те рачунске операције.

a) $\begin{array}{r} B \\ AAAA \\ + \; AAAA \\ \hline BAAA \end{array}$ b) $\begin{array}{r} ABCD \\ + \; CBCA \\ \hline DCEAE \end{array}$ c) $\begin{array}{l} \underline{ABC \cdot DE} \\ FEC \\ \underline{DEC} \\ HGBC \end{array}$

Решења:

a) $A=9$, $B=2$; b) $9541+4549=14090$; c) $125 \cdot 37 = 4625$

453. Дешифрујте овај ребус (исти знак значи свуда исту цифру).



Решење:

$$\begin{array}{ccc} 27+8=35 \\ - \quad - \quad - \\ 10+5=15 \\ \hline 17+3=20 \end{array}$$

454. Помогните овом неуредном ученику да утврди које се цифре не виде од мрља мастила. Први пример је сабирање, а други одузимање.

455. (*Један занимљив задатак*) — Напишите крупним словима реч **ПЕТ**. Сви углови на добијеној фигури нека буду прави, а линије нешто дебље (в. слику!). Нека је ширина сваког слова a mm, висина слова нека је h mm, а дебљина сваке црте (дела слова) b mm.

1) Наћи у општем облику формулу за израчунавање површине коју заузимају сва слова у тако написаној речи

2) Колика је површина свих слова у тој речи ако је ширина слова $a=6$ mm, висина слова $h=8$ mm и дебљина сваке црте у словима $b=2$ mm? Колика би била површина квадрата који би имао исто толику површину као сва три слова?

3) Колико процената од укупне површине свих слова у речи заузима свако појединa слово?

Решење. — 1) Укупна површина P коју заузимају сва три слова у речи **ПЕТ** биће

$$P=P_{\text{П}}+P_{\text{Е}}+P_{\text{Т}}, \tag{1}$$

где су са $P_{\text{П}}$, $P_{\text{Е}}$ и $P_{\text{Т}}$ означене површине слова П, Е, Т. Ако површи слова поделимо на правоугаонике, као што је то танким линијама назначено на горњој слици, имаћемо

$$P_{\text{П}}=ab+2\cdot b\,(h-b),\quad P_{\text{Е}}=bh+3\cdot b\,(a-b),\quad P_{\text{Т}}=ab+b\,(h-b), \tag{2}$$

те је

$$P=ab+2\,b\,(h-b)+bh+3\,b\,(a-b)+ab+b\,(h-b),\ \text{односно}$$

$$P=5\,ab+4\,bh-6\,b^2,$$

или кад извучемо заједнички фактор испред заграде,

$$P=b\,(6\,a+4\,h-6\,b). \tag{3}$$

2) За $a=6$ mm $b=2$ mm и $h=8$ mm површина сваког појединог слова [према (2)] била би

$$P_{\text{П}}=6\cdot 2+2\cdot 2\cdot(8-2)=36\ (\text{mm}^2)$$

$$P_{\text{Е}}=2\cdot 8+3\cdot 2\cdot(6-2)=40\ (\text{mm}^2)$$

$$P_{\text{Т}}=6\cdot 2+2\cdot(8-2)\quad=24\ (\text{mm}^2)$$

а површина свих слова

$$P=36\ \text{mm}^2+40\ \text{mm}^2+24\ \text{mm}^2=100\ \text{mm}^2=1\ \text{cm}^2.$$

Ову смо површину могли добити и по изведеној формули (3). Учинимо то (ради провере добијеног резултата).

$$P = 2\,(5\cdot 6 + 4\cdot 8 - 6\cdot 2) = 2\,(30 + 32 - 12) = 2\cdot 50 = 100.$$

Према томе, површина свих слова износи

$$P = 100\ \text{mm}^2\ \text{или}\ 1\ \text{cm}^2,$$

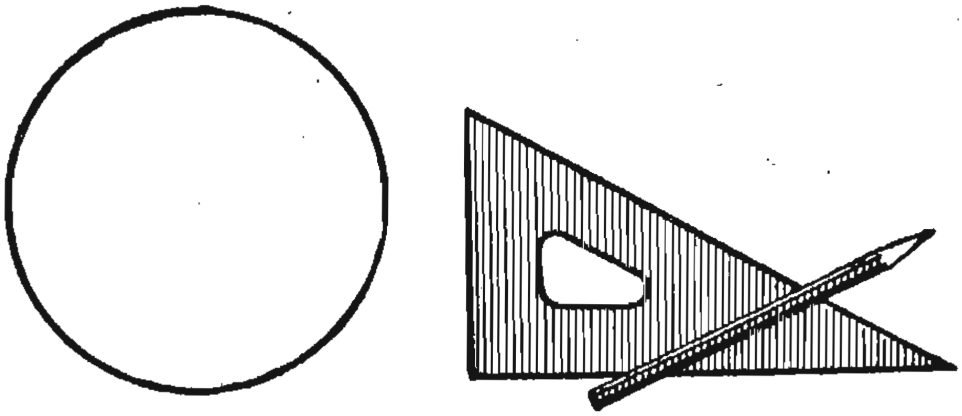
то јест једнака је површини квадрата чија је страница 1 cm.

3) На ово питање можемо одмах напамет одговорити. Укупна површина сва три слова је 100 mm². Површине слова П, Е и Т су редом 36 mm², 40 mm² и 24 mm², што у односу на укупну површину у процентима износи редом 36%, 40% и 24%.

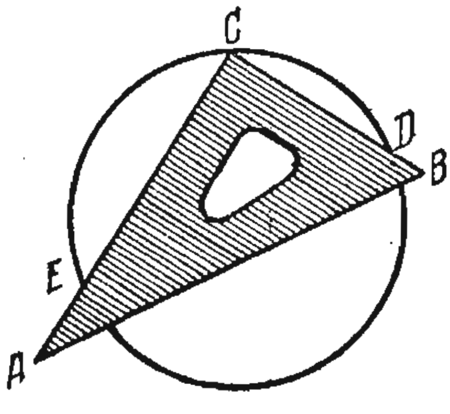
456. a) Одговорите на питања постављена у претходном задатку у односу на слова у речи **ТЕН**. Димензије слова нека такође буду исте.

b) Напишите крупним штампаним словима реч **МАТЕМАТИКА**, извршите потребна мерења и израчунајте површину коју заузимају сва слова у тој речи.

457. Како се може наћи центар нацртане кружнице (в. цртеж!) само помоћу оловке и троугаоника за цртање без поделе на њему (при чему се оловка сме употребити само за повлачење потребних линија)?



Решење. — Стави се троугаоник на круг тако да му врх правог угла (C) буде на кружници и одреде се тачке D и E у којима његове катете секу кружницу. Дуж DE биће пречник кружнице. Образложи зашто! (в. слику десно!) На исти начин се нацрта још један пречник. Пресечна тачка нацртаних пречника биће центар кружнице.



Konkursni zadaci*

69. Dešifrovati oduzimanje: $\overline{money} - \overline{more} = \overline{send}$.

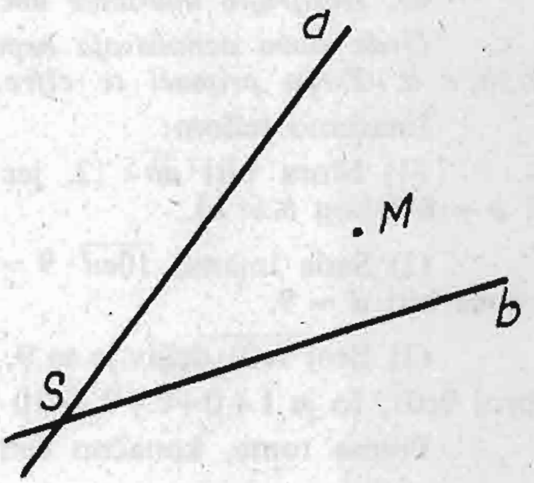
Ovde slova označavaju nepoznate cifre. Treba pronaći te cifre. Postupak objasniti!

70. Sa koliko nula se završava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 100 zaključno?

71. Saobraćajući između mesta A i B, autobus prelazi preko jednog brda. Na uzbrdicama (kada ide uz brdo) brzina autobusa je 25 km na čas, a na nizbrdicama (kada ide niz brdo) brzina mu je 50 km na čas. Na putu od A do B autobus provede 3,5 časa, a na putu od B do A provede 4 časa. Koliko je dug put između mesta A i B?

72. Zbir recipročnih vrednosti triju celih pozitivnih brojeva je 1. Nađite sve takve brojeve.

73. Put a preseca reku b pod oštrim uglom. Kurir iz mesta M, koje je u tom uglu, treba što je moguće pre da dođe do puta a (da bi predao pismo), da usput napoji konja na reci b i zatim da se vrati u M. Kuda on treba da ide da bi utrošio što manje vremena? Nacrtajte taj put i pokažite da je on najkraći! (V. sl. desno!)



74. U paralelogramu $ABCD$ tačke P, Q, R, S su središta stranica AB, BC, CD, DA. Prave AQ, BR, CS, DP seku se i obrazuju četvorougao. Dokazati da je ovaj četvorougao paralelogram. Naći površinu ovog paralelograma znajući da je površina datog paralelograma a^2.

75. U pravouglom trouglu jedna kateta je 7 cm. Odrediti druge dve stranice ako je poznato da su njihove dužine izražene prirodnim brojevima.

N a p o m e n a. — Učenici V razreda mogu rešavati zadatke 69—71, učenici VI razreda zadatke 69—74, a učenici VII i VIII — sve zadatke: 69—75.

---

* Rešite ove zadatke i rešenja pošaljite uredništvu „Matematičkog lista". Najbolja rešenja, a takođe i imena svih učenika koji su sve zadatke ili neke od njih sasvim tačno rešili, objaviće se u listu.

Najboljim rešavateljima za svaki razred dodeliće se ***nagrade*** na kraju školske godine.

Fond za nagrade rešavateljima konkursnih zadataka ove godine je povećan.

Svako rešenje (s tekstom i rednim brojem zadatka) treba pisati na jednoj strani papira. Svako rešenje treba čitljivo potpisati punim imenom i prezimenom, navodeći razred i odeljenje, školu i mesto, na primer: *Ivan Radović*, uč. $VIII_3$-raz. Osnovne škole „Učitelj Tasa", Niš.

Zadatke rešavajte s a m o s t a l n o ne tražeći pomoć ni od koga. Slike crtajte precizno, a rešenja pišite o b r a z l o ž e n o i č i t k o. Neuredna, nečitljiva rešenja i rešenja (rezultati, odgovori) bez obrazloženja neće se uopšte uzimati u obzir.

Rešenja zadataka iz ovog broja poslati najkasnije do 15. VI 1969. godine.

Adresa: Matematički list, Beograd, p.p. 728

Na koverti naznačiti: *Konkursni zadaci.*

Rešenja konkursnih zadataka iz „Matematičkog lista“ III. 3

62. *Od 8 kuglica na izgled sasvim jednakih, jedna je nešto lakša od ostalih. Koliko merenja najmanje treba izvršiti na terazijama sa dva tasa (bez tegova) da bi se izdvojila ta kuglica? Objasniti postupak!*

Ako bi bilo 3 kuglice, onda stavljajući na tasove po jednu kuglicu, u slučaju ravnoteže ustanovićemo da je preostala kuglica ona lakša. Ako ravnoteže nema, odmah će se videti koja je od uzetih kuglica lakša (ona će biti na izdignutom tasu).

S obzirom da imamo 8 kuglica, razdelićemo ih na grupe: 3, 3 i 2 kuglice, pa ćemo na tasove vage staviti po 3 kuglice i tako ustanoviti u kojoj se grupi (od pomenute tri) nalazi ona lakša kuglica (I merenje). Još jednim merenjem utvrdićemo (na gore navedeni način) koja je to kuglica.

Prema tome, lakša kuglica može se izdvojiti sa 2 merenja.

Vesna Protić, V_1 r. OŠ „V. Milićević“, Grocka

63. *Dešifrujte množenje* $\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}$.

Ovde slova označavaju nepoznate cifre, a $\overline{abcd}$ *znači broj napisan ciframa* a, b, c, d. *Treba pronaći te cifre. Postupak objasniti!*

Imaćemo redom:

(1) Mora biti $\overline{ab} < 12$, jer već $\overline{12cd} \cdot 9$ jeste petocifren broj. Znači: $\boldsymbol{a = 1}$ i $\boldsymbol{b = 0}$ (zbog $b \neq a$).

(2) Sada imamo $\overline{10cd} \cdot 9 = \overline{dc01}$, tj. $d \cdot 9$ završava se sa 1, što znači da mora biti $\boldsymbol{d = 9}$.

(3) Broj $\overline{9c01}$ deljiv je sa 9, a budući da se i $\overline{10c9}$ sastoji od istih cifara kao i broj $\overline{9c01}$, to je $1+0+c+9 = 10+c$ deljivo sa 9, a to je moguće jedino za $\boldsymbol{c = 8}$.

Prema tome, konačno ćemo imati: $\mathbf{1089 \cdot 9 = 9801}$.

Cvetko Krstić, VI_2 r. OŠ u Bojniku k/L.

64. *Dvanaest hlebova podeljeno je na dvanaest lica. Svaki čovek dobio je po dva hleba, žena — po pola hleba, a dete — po četvrtinu hleba. Koliko je bilo ljudi, koliko žena, a koliko dece?*

(1) Ljudi je bilo manje od 6, jer da ih je bilo 7 ili više, ne bi za sve bilo hlebova; da ih je 6, oni bi uzeli svih 12 hlebova, pa za decu i žene ne bi preostao nijedan hleb.

(2) Ljudi je bilo više od 3. Da ih je bilo 3, oni bi uzeli 6 hlebova, pa za ostalih devetoro (žene i decu) ne bi ostalo više od 4,5 hleba od preostalih 6 hlebova. Tim pre je onda nemoguće da je ljudi bilo 1 ili 2.

(3) Ljudi je bilo 5. Ako bi ih bilo 4, onda bi za ostalih osmoro (žene i decu) ostalo 4 hleba, a to bi bilo moguće jedino u slučaju da nema dece, što protivreči uslovu zadatka.

(4) Prema tome, ljudi je bio 5 i oni su dobili 10 hlebova. Na sedmoro ostalih (žene i decu) dolazi 2 hleba. Ako bi svih sedmoro bili samo deca, onda bi ona dobila $1^3/_4$ hleba. Nedostatak od $1/4$ hleba »nadoknadiće« se ako se uzme da je umesto jednog deteta hleb dobila jedna žena.

Prema tome, bilo je: 5 ljudi, 1 žena i 6 dece.

Dragoje Grebović, $VIII_5$ r. OŠ „S. Marković“, Sjenica

65. *Naći dvocifreni broj koji je jednak dvostrukom proizvodu svojih cifara.*

Ako sa a označimo cifru desetica, a sa b cifru jedinica, onda će traženi broj biti $10a+b$. Prema uslovu zadatka mora biti:

$$10a+b = 2ab. \qquad (*)$$

Odatle je jasno da je traženi broj $(10a+b)$ deljiv sa 2, što znači da je b parno. Ako obe strane u $(*)$ podelimo sa $2a$, dobićemo:

$$5+\frac{b}{2a}=b, \qquad (**)$$

odakle sledi da je b veće od 5. Međutim, b je paran jednocifren broj. Znači, ili je $b=6$ ili $b=8$.

Ako je $b=8$ onda iz $(**)$ imamo $\frac{8}{2a}=3$, tj. $8=2a \cdot 3$, što je nemoguće, jer 8 nije deljivo sa 3.

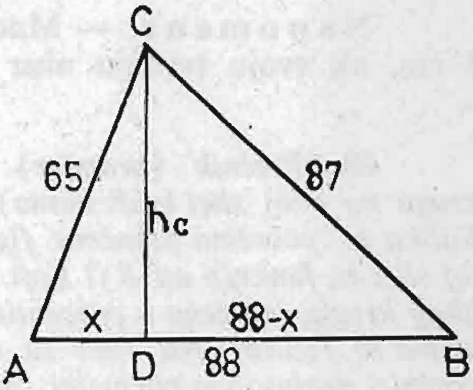
Znači, ako zadatak ima rešenje mora biti $b=6$. No tada je $a=3$.

Prema tome, traženi broj je $10 \cdot 3+6 = 36$. Taj broj zaista zadovoljava uslove zadatka: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 6$.

Marino Šain, VIII$_d$ r. OŠ „Neven Kirac“, Pula

66. *U trouglu ABC zadane su sve tri stranice: $a=87$ mm, $b=65$ mm i $c=88$ mm. Kolika je površina tog trougla?*

Neka je $CD=h_c$ i $AD=x$ (v. sliku!). Tada iz $\triangle ADC$ imamo (po Pitagorinom poučku): $h_c^2=65^2-x^2$, a iz $\triangle BCD$ imamo $h_c^2=87^2-(88-x)^2$, pa mora biti:



$$65^2-x^2=87^2-(88-x)^2 \text{ i odatle}$$

$$4225-x^2=7569-(7744-176x+x^2), \text{ tj.}$$

$$4400=176x, \text{ odakle je}$$

$$x=25 \text{ (mm)}.$$

Zato je $h_c^2=65^2-25^2=(65+25)(65-25)=90 \cdot 40=3600$, odakle je

$$h_c=60 \text{ (mm)} \text{ — visina.}$$

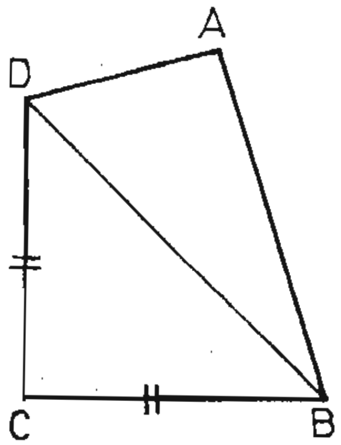
Površinu trougla sad nije teško izračunati; imaćemo:

$$P=\frac{88 \cdot 60}{2}=2640 \text{ (mm}^2\text{), tj. } P=26{,}40 \text{ cm}^2.$$

Vida Kampuš, VIII$_a$ r. OŠ Šmarje pri Jelšah

67. *Izračunati površinu četvorougla ABCD ako je*: $AB+DA=10$ *cm*, $BC=CD$, $\sphericalangle DAB=\sphericalangle BCD=90°$

Površina četvorougla $ABCD$ (v. sliku) je:



$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BDC}, \text{ tj.}$$

$P=\dfrac{AB\cdot AD}{2}+\dfrac{BC\cdot CD}{2}$, a kako je $CD=BC$, imaćemo:

$P=\dfrac{AB\cdot AD}{2}+\dfrac{BC\cdot BC}{2}=\dfrac{AB\cdot AD}{2}+\dfrac{BC^2}{2}$. No kako je s jedne strane $BC^2+CD^2=BD^2$ (iz $\triangle BDC$), tj. $BC^2+BC^2=BD^2$ ili $2\cdot BC^2=BD^2$, a s druge strane $BD^2=AB^2+AD^2$ (iz $\triangle ADB$), to ćemo imati:

$2\cdot BC^2=AB^2+AD^2$, odakle deljenjem sa 4 dobijamo:

$\dfrac{BC^2}{2}=\dfrac{AB^2+AD^2}{4}$, tako da ćemo za P dalje imati:

$$P=\frac{AB\cdot AD}{2}+\frac{AB^2+AD^2}{4}=\frac{AB^2+2\cdot AB\cdot AD+AD^2}{4}=\left(\frac{AB+AD}{2}\right)^2.$$

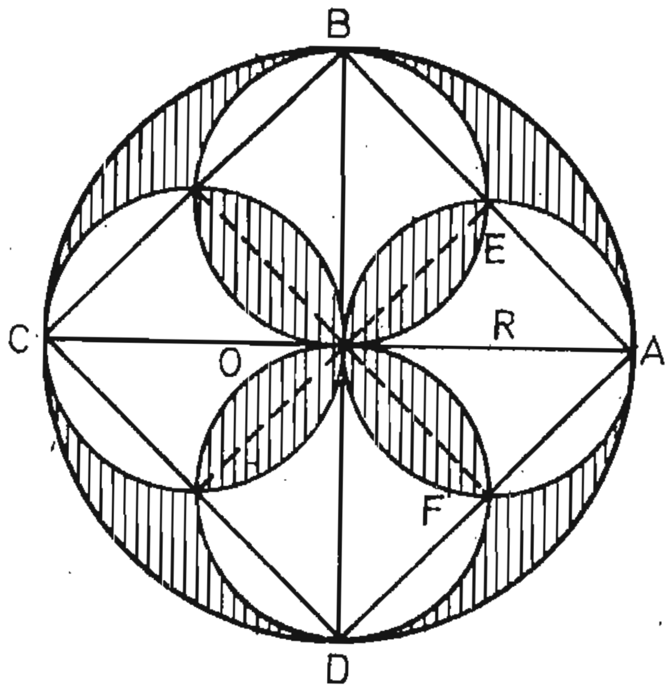
Pošto je $AB+AD=10$ cm, posle zamenjivanja imaćemo:

$$P=(10/2)^2=5^2=25\ (\text{cm}^2).$$

Siniša Vrećica, VIII r. OŠ Generalski Stol

Napomena. — Mnogi rešavatelji su uzeli da se radi o kvadratu stranice 5 cm, ali svoju tvrdnju nisu obrazložili.

68. *Prečnik (promjer) velikog kruga na ovoj slici (vidi desno) je $2R$. Kolika je površina osenčene figure na toj slici (u funkciji od R)? Koji deo velikog kruga, izraženo u procentima, zauzima ta figura? Na slici su nacrtani prečnici medusobno normalni (okomiti).*



Prvi način. — Ako spojimo krajnje tačke nacrtanih prečnika, dobiće se kvadrat $ABCD$. Lako je pokazati da se manje kružnice seku upravo u središtima stranica tog kvadrata (Pokažite to! Trougli OAE i OEB su podudarni jednakokrako-pravougli trougli). Kružni odsečci koji su van manjih kvadrata podudarni su međusobno. Zato je šrafirana površina (»cvet«), koja je unutar kvadrata $ABCD$, jednaka s površinom svih osam neosenčenih odsečaka koji su van tog kvadrata. Prema tome, tražena površina ustvari je jednaka površini onog dela velikog kruga koji je van kvadrata $ABCD$ upisanog u taj krug. Znači, ta se površina dobija kad se od površine velikog kruga (čiji je prečnik $2R$) oduzme površina kvadrata $ABCD$ upisanog u taj krug (dijagonala tog kvadrata je $2R$, a površina $(2R)^2/2 = 2R^2$). Dakle: $P = R^2\pi - 2R^2$

ili
$$P = R^2(\pi - 2) \text{ ili } P \approx 1{,}14\, R^2$$

U odnosu na površinu velikog kruga ova površina iznosi

$$\frac{R^2(\pi-2)}{R^2\pi} = \frac{\pi-2}{\pi} \approx \frac{1{,}1416}{3{,}1416} = 0{,}363,$$

što u procentima iznosi 36,3%.

Vladimir Leščević, VII_5 r. OŠ „Ž. J. Španac“, N. Beograd

Drugi način. — Traženu površinu možemo dobiti i tako da od površine velikog kruga ($R^2\pi$) oduzmemo površinu sva četiri manja kruga $[4(R/2)^2\pi]$ i tome dodamo površinu četvorolisnog »cveta« $[4(R^2\pi/4 - R^2/2]$. Dakle:

$$P = R^2\pi - 4\left(\frac{R}{2}\right)^2\pi + 4\left(\frac{R^2\pi}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = R^2\pi - R^2\pi + R^2\pi - 2R^2, \quad \text{ili}$$

$$P = R^2(\pi - 2).$$

Ova površina u odnosu na površinu velikog kruga, izraženo u procentima, iznosi

$$\frac{R^2(\pi-2)\cdot 100}{R^2\pi} = \frac{(\pi-2)\cdot 100}{\pi} \approx 36{,}3\%.$$

Biljana Milić, VIII_3 r. OŠ „M. Tito“, Medveđa k/T.

Rešili konkursne zadatke iz „Matematičkog lista“ III. 3

Ahlin Marina, VII_1 r. OŠ »Ž.J. Španac« N. Beograd: 63; *Ajdanić Milutin*, VI_1 r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 63; *Aleksić Nenad*, VII_2 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd: 62, 63, 65; *Aleksić Vera*, OŠ »V. Karadžić« Stubal; *Alihodžić Fadil*, VIb r. OŠ Donja Orahovica (kod Bos. Petrovog Sela): 63; *Alimpić Rade*, V_4 r. OŠ »S. Novaković« Šabac: 64; *Andrejević Dragan*, VIII_1 r. OŠ »V. Karadžić«, Negotin: 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Andonov Ljupče*, VIII_2 r. OŠ »V. Dugošević« Beograd: 62, 63, 66, 68; *Antanasijević Dragan*, VII_2 r. OŠ »V.K.« Stubal: 64, 65; *Antić Gordana*, VIII_4 r. OŠ »Ž. Apostolović« Trstenik: 62, 63, 64, 65, 66, 68; *Antić Lalica*, VII_3 r. OŠ »D. Stambolić« Svrljig: 63, 64; *Antić Mihajlo*, VII_3 r. OŠ »S. Jovanović« Šabac: 66; *Arsenović Milan*, VIII r. OŠ Vrelo kod Uba: 63; *Atanasković Zorica*, VIII_3 r. OŠ »Ž. Zrenjanin« Vršac: 62, 63; *Avdić Esad*, VI_5 r. OŠ »Brčko Novo« Brčko: 62; *Avdić Sead*, VIII_2 r. OŠ »Brčko Novo« Brčko: 62, 64; *Avramović Vladimir*, VIII_5 r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63; *Azanjac Mirjana*, VIII_1 r. OŠ »F. Filipović« Čačak: 62, 63, 66, 67, 68.

Babić Vladislav, VI_2 r. OŠ Viča kod Čačka: 63; *Bajić Duško*, VIII_5 r. OŠ »V. Dugošević«, Beograd: 63, 66; *Bahen Marko*, V_2 r. OŠ »H. Kikić« Sanski Most: 64; *Baja Nada*, VII_3 r. OŠ Nova Bila: 63; 66, 68 (del.); *Barbirović Dušanka*, VII_5 r. OŠ »O. Petrov-Radišić« Vršac: 62, 63; *Barešić Pero*, VII_3 r. OŠ Nova Bila: 63; *Begenišić Slavko*, VII_2 r. OŠ Brod kod Foče: 62; *Belančić Mirjana*, VIIa r. OŠ »10. oktobar« Subotica: 63; *Bertran Cica*, OŠ »Braća Jerković« Železnik: 64; *Bijelić Dragana*, VI_3 r. OŠ »V.D.« Beograd: 62; *Bilušić Jadranka*, OŠ »Bratstvo-Jedinstvo« Vinkovci: 63, 64, 65; *Boljić Jasna*, OŠ »V. Karadžić« Sanski Most: 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Boljić Snežana*, VII_2 r. OŠ »V.K.« Sanski Most: 64, 65; *Bogdanović Đurđevka*, VIII_1 r. OŠ »V. M.« Grocka: 62, 65; *Biserčić Slavica*, VIII_1 r, OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 63; *Bogunović Sofija*, VII r. OŠ »M. T.« Dobrinci: 63, 65, 66; *Bodar Andraš*.

VIII r. OŠ Konak: 63; *Bohačev Zoran*, OŠ Križanićeva ul. Zagreb: 62, 63, 64, **68**; *Bojanić Violeta*, VI$_1$ r. OŠ »Vožd Karađorđe« Niš: 63; *Bojanić Gordana*, VI$_4$ r. OŠ »Dr D. Mišović« Čačak: 63,64; *Bošković Marina*, VII$_3$ r. OŠ »M. Gorki« Titograd: 64, 66; *Bošković Mirjana*, VIII$_3$ r. OŠ »M. T.« Medveđa kod Trstenika: 63, **64, 65, 66, 67, 68**; *Bošković Uroš*, VII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Čačak: 68; *Bubanja Radovanka*, VIII$_3$ r. OŠ »Čibukovački partizani« Kraljevo: 68; *Bundalo Drena*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Sanski Most: 64, 65, 66; *Bursać Predrag*, VI r. OŠ »V. D.« Beograd: 63; *Bušbaher Svetlana*, VIII$_5$ r. OŠ »V. D.« Beograd: 62, 66; *Božilović Đurica*, OŠ »V. Pelagić« Leskovac: 64; *Božinović Radmilo*, VI$_1$ r. OŠ »Braća Ribar« Beograd: 63.

Cenić Aleksandar, VIII$_2$ r. OŠ »V. D.« Beograd: 62, 66; *Cepenjaj Leposava*, OŠ »V. Markićević« Majdanpek: 62; *Conić Dragica*, VIII$_3$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 63; *Crnić Zdravko*, VIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Crnjanski Nada*, VII r. OŠ Konak: 63; *Cvetković Vujica*, OŠ »V. K.« Stubal: 64, 65; *Cvijetić Ljiljana*, VII$_4$ r. OŠ »Ž. A.« Trstenik: 66; *Cvijić Miodrag*, V$_3$ OŠ r. »25. maj« N. Beograd: 64; *Čukerevac Vera*, OŠ »V. Karadžić« Čačak: **64**, 65; *Čelegić Branislav*, VI$_4$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 62, 63; *Ćerčuković Dragiša*, VII$_1$ r. OŠ »B.R.« Mihajlovac: 62, 63; *Čičuk Milorad*, V$_1$ r. OŠ »M. Pijade« Velika Plana: 62; *Čolaković Ćazim*, OŠ »S. Marković«, Sjenica: **62**, 63, 64, 65; *Čubrilo Gordana*, OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 63; *Čučuković Mirjana*, VI$_4$ r. OŠ »V. Savić« Lazarevac: 63, 64; *Ćirković Radovan*, VIII$_2$ r. OŠ »M.B.« Natalinci: **63**, 64, 65, 66, **68**; *Ćosić Milan*, VIII$_2$ r. OŠ »V.D.« Beograd: 62.

Dajić Miloš, VII$_1$ r. OŠ »B.R.« Mihajlovac: 62, 63; *Damnjanović Jasna*, VIII$_4$ r. OŠ »D. Obradović« Požarevac: **67**; *Davidović Zagorka*, V$_1$ r. OŠ »Ž.J. Španac« N. Beograd: 63; *Davinić Biljana*, VI$_2$ r. OŠ »V. Đuričin«, Jarkovac: 62, 63, 64; *Yavor Novak*, VIIIa r. OŠ »B.J.« Križevci: 63, 65; **67**; *Despić Radenko*, VII$_1$ r. OŠ Klupci kod Loznice: 63, 68; *Dević Božica*, VII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 68; *Dimić Milena*, VIII$_1$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62; *Dobrak Milutin*, VIII$_2$ r. OŠ »Đ. Jakšić« Kanarevo kod Kraljeva: 63, 64, 66; *Dobrosavljević Branislav*, VIII$_1$ r. OŠ »NH Čajka« Trstenik: **62, 63, 64, 68**; *Dodić Nikola*, VI$_3$ r. »V.D.« Beograd: 62, 63, 64; *Dragičević Vesna*, V$_1$ r. OŠ »F. Filipović« Čačak: 62; *Dragić Branislava*, VII$_2$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 68; *Drakul Toma*, VIIb r. OŠ Brod kod Foče: 62, 63; *Drobnjaković Milan*, V$_1$ r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62, 63, 64; *Dupor Mira*, V r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 64; *Dušić Biljana*, VI$_3$ r. OŠ »V.D.« Beograd: 62.

Đaković Jovanka, VII r. OŠ »N. Demonja« Glina: **64**; *Đido Vinko*, VIIIn r. OŠ Nova Bila: 63, 66, 68 (del.); *Đokić Vlastimir*, VIII$_1$ r. OŠ »M. Pavlović« Čačak: 66; *Đorđević Dragan*, OŠ »V. Karadžić« (?): 64, 65; *Đorđević Olgica*, VII$_1$ r. OŠ »B. Stanković« Vučje: 63; *Đurić Jovica*, VIII$_4$ r. OŠ »S. V. Jojko« Blace: **68**; *Đurić Zoran*, V$_1$ r. OŠ »D. Davidović« Smederevo: 62, 63; *Đurišić Ružica*, VIII$_4$ r. OŠ Golubovci kod Titograda: 62; *Džepina Dragica*, VIIIb r. OŠ Nova Bila: 63; *Džigal Mustafa* i *Džigal Osman*, VIII$_5$ VIII$_5$ r. OŠ »S. Marković« Sjenica: 62, 63, 64, 65, 66; *Džiknić Ivan*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Surčin: 62, 63, 64, 68.

Elez Mirjana, VIIIb r. OŠ »I.L. Ribar« Briješće: 64; *Ercegovac Bratislav*, VI r. OŠ »M.T. Dobrinci: 63; *Ercegovac Zorica*, VII r. OŠ» M.T.« Dobrinci: 63, 65, 66, 68; *Eržen Ervin*, VIIa r. OŠ »F. Močnik« Cerkno: 62; *Ferjančić Vlasta*, VIIIa r. OŠ Idrija: 64; *Filipović Dragica*, VIII$_4$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 65; *Filipović Katica*, VIIIb r. OŠ Nova Bila: 63. 66; *Fišić Mirko*, VIa r. Nova Bila: 63; *Forst Branko*, OŠ Šmarje pri Jelšah: **66**.

Gabona Janoš, VIII r. OŠ Konak-Banat: 63; *Gačić Vladan*, VI$_2$ r. OŠ »Đ. Daničić« Novi Sad: 63; *Gavrilović Ljubica*, VII$_2$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 63, 64, 68; *Gazibarić Lucija*, VIIIb r. OŠ Nova Bila: 63, 64; *Gazibarić Ljubica*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Gegić Sadija*, VII$_1$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62, 63, 64, 65; *Gemaljević Rodoljub*, VIII$_5$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62, 64; *Gemaljević Zorica*, VII$_1$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62, 63; *Glišić Mira* VI$_4$ r. OŠ »V.D.« Beograd: 62, 64; *Glogić Emin*, VIII$_5$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62, 63, 64; *Golob Bojana*, VIIIa r. OŠ »F. Močnik« Cerkno: **66, 67**; *Gradištanac Dragana*, VII$_3$ r. OŠ »M.T.« Medveđa kod Trstenika: 63, 64, 65, 66, 68; *Grčić Miodrag*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63, 66; *Grahovac Jelica*, OŠ »I. Gundulić« N. Beograd: 62, 66, 67, 78; *Grebović Dragoje*, VIII$_5$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: **62, 63, 64, 65, 66, 67, 68**; *Grebović Stanislava*, VI$_1$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62, 63, 64, 65; *Grujić Gordana*, OŠ »V. Dug.« Beograd: 68; *Grulović Vlastislav*, VI$_3$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62; *Gašić Vesna*, V$_2$ r. OŠ »V. Đuričin« Jarkovac: 63; *Gojković Miodrag*, VIII$_1$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 63, 65; *Gostović Dragan*, VIb r. OŠ »Z. Gložanski« Bečej: 63, 64; *Hajrić Foriz*, OŠ Nova Bila: 63, 66.

Ignjatović Zorka, VII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Ripanj: 64, 68 (del.); *Ilić Mikica*, VII$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 64; *Iričanin Zoran*, VI$_1$ r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62; *Isailović Milina*, VII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Ripanj: 64; *Ivanović Ljubiša*, VIII$_5$ r. OŠ »D. Obradodvić« Požarevac: 62, 63, 64, 65, **66, 67, 68**; *Ivanović Slobodan*, VII$_2$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62, 63, 64, **65, 66, 67, 68**; *Ivanović Verica*, VIII$_1$ r. OŠ. OŠ »V. V. Savić« Lazarevac: 62, 63; *Jacić Ljubomir*, VIII$_2$ r. OŠ »D. Obradović« Požarevac: 63, 65; *Jakovljević Dragan*, VII$_4$ r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62, 63, 66; *Jakubov Snežana*, VI$_2$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62; *Janđević Franjo*, VIII$_4$ r. OŠ »H.K.« Sanski Most: **66, 67**; *Janić Dragan*, OŠ Nova Bila: 66; *Janković Dejan*, VIII$_2$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 66; *Jauković Miloš*, VI$_3$ r. OŠ »Đ. Salaj« Beograd: **62**, 63, 64; *Jesenko Cvetka*, OŠ Šmarje pri Jelšah: 65, 68; *Ješić Mirjana*, VI$_3$ r. OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 63; *Jevremović Ljiljana*, VII$_3$ r. OŠ »M.T.« Medveđa kod Trstenika: 63, 64, 66, 68; *Jevremović Ljiljana*, VII$_3$ r. OŠ »M.T.« Medveđa kod Trstenika: 63, 64, 66. 68; *Jevremović Vesna*, VIII$_1$ r. OŠ »J. Veselinović« Šabac: **63, 64, 65**, 66, **67**; *Jezdić Željko*, OŠ »B.J.« Slunj: 63; *Jokanović Dušan*, VIII$_2$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd: 62, 63, 64, 68; *Jovanović Dušica*, VII$_2$ r. OŠ »V.K.« Ripanj: 64; *Jovanović Lozica*, VIII r. OŠ Beli Potok kod Knjaževca: 66; *Jovanović Miroslav*, VII$_1$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd: 62, 63, 65, 68; *Jo-*

vanović *Mirjana*, VIII$_7$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 65, 66; *Jovanović Vele*, OŠ »Braća Ribar« Beograd: 63, 64, 68; *Jovanovska Penka*, VIII$_5$ r. OŠ Kisela voda-Skopje: 66; *Jovela Veselinka*, VII r. OŠ »B. Kirkov« Titov Veles: 63, 64, 65, 66; *Jović Zorica*, VII$_1$ r. OŠ »V.K.« Stubal: 64, 65; *Jovanović Jelisaveta*, VIII r. OŠ Senjski Rudnik: 66; *Juroš Zoran*, OŠ »Dr D. Mišović« Čačak: 62.

Kamenjašević Anto, VIII r. OŠ Tramošnica Donja: 62; *Kampuš Vida*, OŠ Šmarje pri Jelšah: 66, 68; *Karanović Vlada*, V$_5$ r. OŠ »D. Davidović« Smederevo: 62, 63; *Kapor Gojko*, VIII r. OŠ »A. Šantić« Sečanj: 63, 64; *Kesić Mirko*, VIII$_3$ r. OŠ »H. Kikić« Sanski Most: 64, 66, 67; *Kokotović Miodrag*, VIIb r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 63, 64; *Kosmač Lidija*, VIIIa r. OŠ »F.M.« Cerkno: 66, 67; *Kostić Dragan*, VII$_1$ r. OŠ »B.R.« Mihajlovac: 62, 64; *Kostić Novica*, VIII$_4$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63, 64, 65; *Kovač Svetislav*, VIc r. OŠ Nova Bila: 63; *Kovačević Petko*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63, 64; *Kovačević Željko*, VII$_1$ r. OŠ »J.J. Zmaj« Ruma: 63, 67; *Križan Ljubomir*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 63; *Krišpa Ankica*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Krstić Cvetko*, VI$_2$ r. OŠ »S.V. Zele« Bojnik k/L: 62, 63; *Krstić Milorad*, OŠ »V.K.« Stubal: 64, 65; *Kukić Gordana*, VI$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63; *Kušar Jože*, VII$_6$ r. OŠ »I. Gundulić« N. Beograd: 62, 63, 68.

Lahajman Eva, VIIIa r. OŠ »F. M.« Cerkno: 65, 66, 67; *Lazarev Anka*, VII$_1$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 64; *Lazarević Milan*, VI r. OŠ »B. Perić« Rudna Glava: 63; *Lazić Branislav*, VII$_4$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 66; *Lazić Miroslav*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63; *Lazić Zorica*, VIII$_1$ r. OŠ »V.K.« Ripanj: 66; *Lazović Božo*, V$_1$ r. OŠ »F. Prešern« Beograd: 62, 64; *Lazović Pero*, V$_3$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 62; *Letunica Gordana*, VIII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 65, 66, 68; *Likar Boris*, VIII r. OŠ »J.M.« Idrija: 66; *Liščević Vladimir*, VII$_5$ r. OŠ »Z.J. Španac« N. Beograd: 62, 63, 65, 66, 68; *Lončar Nada*, OŠ »J. D.« Glamoč: 64, 66; *Lukić Marina*, VIII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 66; *Ljubinković Dušan*, VII$_2$ r. OŠ »S. Stevo Filipović« Beograd: 68.

Magajna Zlatan, VIII r. OŠ »P. Tomažič« Koper: 62, 63, 64, 66, 68; *Mahić Mira*, VIIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Mandić Miroslav*, VII$_3$ r. OŠ »V. Parić-Valter« Sarajevo: 63, 64, 68; *Maksimović Vojislav*, VIII$_3$ r. OŠ »S. Nikolajević« Beograd: 62, 63, 65, 66, 68; *Manojlović Dogrila*, VIII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 64, 65, 66, 68; *Marčev Emilija*, VI$_2$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62; *Marić Selimir*, OŠ »S.M.« Sjenica: 63; *Maričić Marina*, VI$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Marić Zlata*, VIII$_1$ r. OŠ »B.J.« Kusadak: 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Marinković Dimitrije*, VI r. OŠ »B.R.« Mihajlovac: 62, 63; *Marinković Ljiljana*, VI$_1$ r. OŠ »M.J. Cerovac« Vrčin: 62, 63, 64; *Marinković Budimir*, VIII r. OŠ »V.M.« Grocka: 62, 63, 64, 66, 67; *Marjanović Boro*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Marjanović Ljiljana*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Marković Svetozar*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Martinović Danica*, VI$_1$ r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 63; *Martinović Radoje*, VIII$_1$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 63; *Martinović Slobodan*, VIII$_3$ r. OŠ »Đ. Jakšić« Ćuprija: 63; *Marić Dušan*, VI$_4$ r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62, 64; *Matević Danica*, VI$_1$ r. OŠ »7. oktobar« Čačak: 63; *Matić Luca*, VI r. OŠ Tramošnica Donja: 62, 64; *Matić Mirjana*, VIII$_2$ r. OŠ »B. Stanković« Vučje k/L: 63, 66, 67; *Matošević Mira*, VIc OŠ Nova Bila: 63; *Matošević Milena*, VIIIb r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Matović Milenko*, VI r. O »S.V.Č.« Vitkovići k/Goražde: 63; *Mihailović Branka*, VIII$_3$ r. OŠ »V. Karadžić« Ripanj: 66; *Mihajlović Jovica*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63; *Mihaljević Ljiljana*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Milanković Ljiljana*, V$_2$ r. OŠ »F. Višnjić« Šid: 63; *Milanović Radenko*, VIIIb r. OŠ »F.O.Č.« Brod na Drini: 62, 63, 66, 68; *Mijanović Zorica*, V$_2$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 62; *Mijušković Veljko*, VI$_1$ r. OŠ »M. Gorki« Titograd: 62, 63; *Milašinović Nada*, V$_2$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 62, 63, 64; *Milekić Radomir*, VII$_2$ r. OŠ Viča kod Čačka: 63, 64, 68; *Milenkov Boris*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63, 64, 65, 66; *Miletić Toplica*, VI$_3$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 64; *Miličić Dragiša*, OŠ »V. Dug.« Požarevac: 66, 68; *Milić Biljana*, VIII$_3$ r. OŠ »M.T.« Medveđa k/T: 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Milićević Jasmina* i *Milićević Svetlana*, VII$_1$ r. OŠ »J. Ćetković« Beograd: 63; *Milidragović Miodrag*, VIIa r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 62; *Milijašević Z.*, OŠ Nova Bila: 63; *Milikić Ljugiša*, VIII$_5$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 62; *Milinović Zorica*, VI r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 63, 64; *Milojević Mirjana*, V$_4$ r. OŠ »D. Jerković« Ruma: 63; *Milović Zoran*, VI$_3$ r. OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 62, 63, 64; *Milosavljević Jovica*, VIII$_2$ r. OŠ »D. Obradović« Požarevac: 63, 65, 67; *Milosavljević Miroslava*, VIII$_3$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62, 64, 65, 66; *Milošević Bogdan*, VII$_1$ r. OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 65; *Milošević Zorica*, OŠ »V.K.« Stubal: 64, 65; *Milovanović Majina*, VI$_1$ r. OŠ »B.J.« Železnik: 62, 64; *Milošević Mirjana*, OŠ »M. P.« Velika Plana: 63; *Milutinović Dragan*, V$_3$ r. OŠ »F. Filipović« Čačak: 62, 63, 65; *Miltenović Vladislav*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Mitić Bratislav*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63, 65, 66; *Mišić Zlata*, VIII r. OŠ »V.D.« Beograd: 66; *Mišković Jana*, VII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 65, 66, 68; *Momčilović Dragana*, VI$_3$ r. OŠ »V. Dug.« Požarevac: 63, 64; *Mozetić Siniša*, VII$_4$ r. OŠ »N. Jeličić« Šabac: 63, 64, 65, 66, 68; *Mraz Marica*, VIII r. OŠ Šmarje pri Jelšah: 66, 67, 68; *Mujagić Senka*, VIII$_5$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 63, 66; *Muslimović Enver*, VIb r. OŠ Nova Bila: 63; *Mutavdžić Nadica*, V$_1$ r. OŠ »M.T.« Medveđa k/T: 64.

Najdanović Vera, VII$_6$ r. OŠ »Lj. Nešić« Zaječar: 63, 66, 68; *Nedić Mile*, VII$_3$ r. OŠ »S.M.« Sjenica: 66; *Neimarević Marija*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 66; *Nenadić Blagomir*, VIII$_5$ r. OŠ »V.Dug.« Beograd: 62, 63, 64, 66; *Nenadov Zorica*, VIIb r. OŠ »S.M.« Padej: 63; *Nikić Aleksandar*, VIII$_2$ r. OŠ »V. Nazor« Zemun: 67; *Nikić Milorad*, VIII r. OŠ »Ž.Z.« Boka: 63, 66, 67, 68; *Nikolić Dragan*, VIII$_3$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63, 64, 65, 66; *Nikolić Georgina*, VII$_2$ r. OŠ »7. okt.« Čačak: 62; *Nikolić Miroslava*, Va r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 64; *Nikolić Predrag*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Nikolić Zoran*, V$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62, 63; *Ninković Milan*, VI$_2$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62; *Novaković Dragica*, OŠ Nova Bila: 63.

Obradović Nada, VI$_1$ r. OŠ »7. okt.« Čačak: 63; *Obradović Nedeljko*, VIII r. OŠ »J.D.« Glamoč: 65, 66; *Obradović Slobodan*, VIII$_2$ r. OŠ »S. Jovanović« Šabac: 63, 64, 75, 66, 67, 68; *Obradović Zo-*

rica, VIII$_3$ r. OŠ »Ž. Zrenjanin« Vršac: 62, 63, 65; *Ostojić Snežana*, VIII$_2$ r. OŠ »D. Obradović« Požarevac: 65.

Pagon Dušan, VIIIb r. OŠ »F. Močnik« Cerkno: 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68; *Panić Zorka*, VI r. OŠ »R.K.« Popina (Vrnjci): 64; *Pantelić Milan*, VI$_4$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62; *Pantić Branislav*, VII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63, 66; *Paskulj Ivica*, OŠ »V.D.« Jarkovac: 62; *Paunić Milica*, VII$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 63, 64; *Paunić Pavle*, V$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 63, 64; *Pantović Dragan*, VI$_1$ r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62; *Pavičić Marija*, VI r. OŠ »I. Kozarac« Vinkovci: 64; *Pavković Nikola*, VIa r. OŠ »S.B. Paja« Pećinci: 63; *Pavlović Biljana*, VIb r. OŠ Brod kod Foče: 63; *Pavlović Dragan*, VIII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63, 66, 68; *Pavlović Čedomir*, OŠ »T. Rajić« Čačak: 66; *Pavlović Kosovka*, VI$_4$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Pavlović Julija*, VIII$_3$ r. OŠ »M. Pijade« 63, 64; *Pavlović Ljiljana*, VI$_2$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 63; *Pavlović Zdravko*, VIII r. OŠ »F.O.Č.« Brod kod Foče: 63, 68; *Pavlov Željko*, VII$_1$ r. OŠ »B. Parać« Beograd: 63; *Pejica Ljubica*, VI$_5$ r. OŠ »Dr D. Mišović« Čačak: 62, 64; *Perić Božana*, VIIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Perić Momčilo*, OŠ »M. Kosovac« Šabac: 64; *Perišić Radislav*, VII r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 66, 67; *Petek Branko*, VIIIa r. OŠ »F.R. Stane« Maribor: 66; *Peternek Marija* i *Peternek Valerija*, VIIIa r. OŠ »F.M.« Cerkno: 66, 67; *Petković Branislava*, VIII$_2$ r. OŠ »V. Karadžić« Čačak: 64, 65, 66, 67; *Petković Marija*, VII r. OŠ »V. Nazor« Vukovar: 62, 63; *Petrašinović Zorica*, VII$_3$ r. OŠ »M.T.« Medveđa k/T: 63, 64, 65, 66, 68; *Petronijević Dejan*, VI$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Petrović Biljana*, VIII$_3$ r. OŠ »V.K.« Ripanj: 66; *Petrović Božana*, VII$_1$ r. OŠ »B.S.« Vel Grabovnica: 62; *Petrović Brankica*, OŠ »V. Dug.« Beograd: 64; *Petrović Gordana*, V$_2$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62; *Petrović Mirjana*, VIII$_3$ r. OŠ Kumodraž k/B: 62; *Petrović Ružica*, V$_3$ r. OŠ »V. Karadžić« Kruševac: 62; *Petrović Slobodan*, VI$_4$ r. OŠ »B.S.« Vučje: 63; *Petrović Slobodanka*, VII$_1$ r. OŠ »V.K.« Lipnica: 67; *Petrović Snežana*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 63; *Petrović Zoran*, VIII$_4$ r. OŠ »M. Stanojlović« Kragujevac: 62; *Petrović Zorana*, VI$_1$ r. OŠ »Đ. Đaković« Beograd: 63; *Petrović Zorica*, VI$_4$ r. OŠ »Dr. D.M.« Čačak: 62; *Petrović Verica*, VIII$_5$ r. OŠ »D. Obradović« Požarevac: 65; *Pešić Vvidoje*, OŠ »M.M.« Brešjak: 64; *Plećaš Rade*, VIII r. OŠ Mikleuš: 62, 63, 64, 65, 67, 68; *Poljak Josip*, VIIIb r. OŠ »L.T. Baja« Podr. Slatina: 63; *Poljanac Sonja*, VIIIa r. OŠ »J.M.« Idrija: 65; *Popović Anto*, VIIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Popović Miodrag*, VIII$_2$ r. OŠ »Čibuk. part.« Kraljevo: 63, 68; *Popović Slavica*, VI$_1$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62; *Popović Zyravko*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Pop-Lazić Jelica*, V$_1$ r. OŠ »V.S.S.« Kumodraž k/B: 62, 63; *Popov Mirjana*, VII$_2$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 68, 68; *Prelo Dragan*, VIII$_2$ r. OŠ »IV kralj. bat.« Kraljevo: 66; *Protić Milutin*, VII$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62; *Protić Vesna*, V$_1$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 63, 64; *Primožić Milan*, VIIIb r. OŠ »F.M.« Cerkno: 64, 65, 68; *Purhmajer Zoran*, VIII$_3$ r. OŠ »S. Jovanović« Šabac: 63, 65, 68; *Pršić Tomislav*, VI r. OŠ »V. Karadžić« Kruševac: 62, 64; *Putić Lliljana*, VII$_1$ r. OŠ »F. Fil.« Čačak: 63.

Radosavac Blagoje, VII$_1$ r. OŠ »V. Đuričin« Jarkovac: 63, 65; *Radovac Biljana i Radovac Ljiljana*, VIII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 64, 65, 66, 68; *Radovac Dušica*, VII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 65, 66; *Radovanović Evica*, V$_3$ r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 62; *Radović Ivan*, VIII$_3$ r. OŠ »Učitelj Tasa« Niš: 62, 66, 67; *Radović Radomir*, VIIIa r. OŠ »F.O.Č.« Brod kod Foče: 68; *Rajc Jože*, VIIb r. OŠ »F. M.« Cerkno: 62, 63, 64, 66; *Rajić Marica*, VIIIb r. OŠ Nova Bila: 66; *Rajin Živanka*, VII r. OŠ »V. Đ.« Jarkovac: 62; *Rajković Žika*, VIII r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63, 66, 68; *Rakić Mirjana*, V$_1$ r. OŠ »F. Filip.« Čačak: 62, 63, 64; *Rakočević Blagomir*, VIII$_1$ r. OŠ »7. okt.« Čačak: 66, 68; *Ranđelović Ljubiša*, VII$_4$ r. OŠ »B.S.« Vučje: 64; *Ratković Tatjana*, VIII$_3$ r. OŠ »V.V. Savić« Lazarevac: 62; *Ranđić Borislav*, VII$_2$ r. OŠ »V.K.« Ripanj: 64; *Ristić Miodrag*, VI$_3$ r. OŠ »V. Radosavljević« Negotin: 62; *Ristanović Milena*, VIII$_1$ r. OŠ Belanovica: 63, 68; *Rogović Mile*, VI$_3$ r. OŠ »7. okt.« Čačak: 63; *Rudinac Duško*, VIIIa r. OŠ »D. Obrad.« Ban. Plandište: 63; *Ružesković Perica*, VIII$_3$ r. OŠ »V.M.« Grocka: 62, 64.

Sabljak Vjekoslav, VIIc r. OŠ »M. Križan« Osijek: 63; *Salatić Nada*, Va r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 63; *Samardžić Miroslav*, VIb r. OŠ »A.Š.« Sečanj: 63; *Sarić Milivoje*, VIII$_1$ r. OŠ »S. Nikolajević« Beograd: 62, 63, 66; *Savić Dragan*, VIII$_2$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62; *Savić Marta*, VII$_3$ r. OŠ »Đ. Salaj« Beograd: 64; 65; *Sedej Andrej*, VIIIb r. OŠ »F.M.« Cerkno: 62, 63, 64, 65, 66; *Sedmak Aleksandar*, VIII$_1$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd: 64; *Seke Nenad*, VIII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63, 66; *Shrobo Hamid*, VIc r. OŠ Nova Bila: 63; *Sibinovski Zoran*, VIII$_2$ r. OŠ »J. Cvijić« Beograd: 62, 63, 66, 68; *Simić Jasmina*, VIII$_3$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 68; *Simir Vesna*, VII$_1$ r. OŠ »B. Parać« Beograd: 62; *Simić Vladimir*, VIII$_5$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62; *Simović Vladana*, V$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63; *Sitarski Tatjana*, VI$_3$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Skenderlija Dragan*, VIII$_1$ r. OŠ »»22. decembar« Beograd: 62, 63, 65, 67, 68; *Slamnig Nela*, VI$_6$ r. OŠ »M.I. Čiča« Aranđelovac: 63; *Smiljanić Miroslav*, VII$_2$ r. OŠ »V.K.« Ripanj: 68; *Spasojević Milutin*, VII$_2$ r. OŠ »7. okt.« Čačak: 63; *Sredojević Dejan* VIII$_1$ r. OŠ »Sv. Sava« Beograd: 62, 63, 64; *Sretenović Zoran*, VIII$_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63, 64; *Sretović Gorjan*, VIII$_2$ r. OŠ »NH Čajka«: 62, 63, 64; *Stamenković Božidar*, V$_1$ r. OŠ »B.S.« Guberevac: 62; *Stanaćev Predrag*, VI$_2$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Stanić Josip*, VId OŠ Križanićeva-Zagreb: 62, 63, 66; *Stanisavljević Nikola*, VI$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Stanisavljević Zoran*, OŠ »V.K.« Stubal: 65; *Stanković Dragan*, VIII$_2$ r. OŠ »B.S.« Vučje: 64, 65; *Stanković Laza*, VIII r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 65; *Stanković Miroslav*, VIII r. OŠ »J.J. Zmaj« Svilajnac: 62, 63, 65, 68; *Stanković Slavica*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 643, 64, 65, 66; *Stanković Zoran*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63; *Starčević Vesna*, VIc r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Stanojević Mirjana*, VI$_2$ OŠ »V. Karadžić« Kruševac: 63, 64; *Stanojević Zoran*, VIII$_2$ r. OŠ »D. Obrad.« Požarevac: 63, 65, 67; *Stošić Verica*, VIII$_1$ r. OŠ »V. Karadžić« Priboj n/L: 64, 65; *Stepanović Mica*, VIII$_1$ r. OŠ »V.K.« Stubal 64, 65, 66; *Stojanović Srđan*, VIII$_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63; *Stojićević Slobodan*, VIII$_3$ r. OŠ »D.

Obrad.« Požarevac: 62, 66; *Stojković Milanko*, VII_1 r. OŠ Viča k/Č: 65; *Stošić Stamen*, OŠ »V.K.« Stubal: 64, **65**; *Subić Zoran*, VIIIa r. OŠ »Ž.Z.« Boka: 63; *Sulić Vjekoslav*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Sulić Vlado*, VIIb r. OŠ Nova Bila: 66.

Šain Marino, VIIId r. OŠ »N. Kirac« Pula: 63, 64, **65**, **66**, 68; *Šajber Milan*, VIII r. OŠ »V.D.« Jarkovac: 62, 63, 65, 66; *Šandor Irena*, VII r. OŠ »V.K.« Konak (Banat): 64, 66; *Šiljak Jasna*, VIb r. OŠ Nova Bila: 63; *Šimšić Nada*, VI_1 r. OŠ »7. okt.« Čačak: 63; *Šmigić Branko*, $VIII_4$ r. OŠ »D. Davidović« Smederevo: 66; *Šoć Jadranko*, $VIII_2$ r. OŠ »B. Božović« Titograd: 63, 64, 66; *Štravs Silvij*, VIIIa r. OŠ »J.M.« Idrija: 63, 64, 66; *Štucin Jožek*, VIIb r. OŠ «F.M.« Cerkno: 62, **63**, 65, 66; *Šulc Ivica*, OŠ »J.M.« Slav. Požega: 62, 68: *Šutić Snežana*, VI_3 r. OŠ »V. Dug.« Požarevac: 63, 64.

Tasić Saša, $VIII_1$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 65; *Tešamen Ines*, $VIII_1$ r. OŠ »V.Dug.« Beograd: 63, 66; *Tišler Žaromil*, VIIIa r. OŠ »V. Nazor« Zagreb: 63, 64, 66, **68**; *Todorović Milena*, $VIII_1$ r. OŠ »M.S.« Umčari: 63; *Tomić Ružica*, V r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63; *Tomić Vera*, $VIII_4$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63, 66; *Tomić Zoran*, $VIII_1$ r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 65, 66; *Topalović Vlado*, VIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Tošović Marija*, V_1 r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 64; *Trajčevski Đorđe*, $VIII_1$ r. OŠ »O.P.R.« Vršac: 62, 63; *Tripković Ljubomir*, VII_7 r. OŠ »S.M.« Sjenica: 66; *Trišić Slavka*, VII_2 r. OŠ »M.P.« Vranić k/B: 62; *Trstenjak Danica*, VIId r. I OŠ Čakovec: **62**; *Trudić Živan*, VIIIb r. OŠ »S.B. Paja« Pećinci: 63; *Tufegdžić Miša*, VI Š»II_2 r. OŠ »S. Jovanovićabac: 67, 67; *Turkalj Radosna*, VII_1 r. OŠ »V.Đ.« Jarkovac: 62, 63; *Turković Goran*, VIII r. OŠ »R. Dizdar« Stolac: 66, 68; *Tušar Anica*, VIIIa r. OŠ »F.M.« Cerkno: 64, 66; *Urošević Stanko*, OŠ »B.S.« »Vučje: 63, 64.

Večanski Jovanka, VIIa r. OŠ »Ž.Z.« Boka (Banat): 62, **64**, 65, **66**; *Veličković Snežana*, VII_1 r. OŠ »M.T.« Medveđa k/T: 66; *Veljković Vladan*, $VIII_5$ r. OŠ »D. Obrad.« Požarevac: 62, 63; *Veselinović Milanka*, VIII r. OŠ Lipnički Šor (kod Loznice): 63, 66; *Vesić Dragan*, V_3 r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62, 63, 64; *Vesić Željko*, VII_4 r. OŠ »Dr D.M.« Čačak: 62, 63; *Vidović Slavica*, VIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Virijević Bojan*, VII r. OŠ »J.M.« Miloševo: 63, 66; *Vlahović Dragica*, VII_2 r. OŠ »M. J. Cerovac« Vrčin: 63; *Vlajković Miljana*, $VIII_4$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63; *Vračarević Milena*, VI_2 r. OŠ »M. Kosovac« Šabac: 63, 64; *Vranac Persa*, VIc r. OŠ Nova Bila: 63; *Vrećica Siniša*, VIII r. OŠ Generalski Stol: 62, **63**, **64**, **65**, **66**, **67**, **68**; *Vrmačić Dušan*, VII r. OŠ »B.R.« Mihajlovac: 62, 63; *Vučić Dragan*, VI_2 r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 64; *Vučinić Jasna*, VI_3 r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62; *Vučković Dušica*, VII r. OŠ »J.M.« Miloševo: 63, 64, 65, 66; *Vujičić Mile*, VIb r. OŠ Brod kod Foče: 63; *Vujović Božidar*, VIII r. OŠ Viča kod Čačka: 63, 65, 66, 68; *Vujović Miroslav*, VI_1 r. OŠ »B. Božović« Titograd: 63, 64; *Vukelić Jelena*, VI_1 r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62; *Vukojević Dragica*, $VIII_4$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 62, 63, 66; *Vukmanović Vesela*, V r. OŠ »M.T.« Dobrinci: 63; *Vukomanović Radoš*, VI_1 r. OŠ »Ž.A.« Trstenik: 63; *Vulić Milomir*, $VIII_5$ r. OŠ »Njegoš« Niš: 62, 63, **64**, **65**, **66**.

Zlatko Ivan, VIId r. OŠ »V. Nazor« Vukovar: 62; *Zoran Branislav*, VI_2 r. OŠ »G. Delčev« Zemun: 62, 63, 64; *Zovko Ankica*, VIIIa r. OŠ Nova Bila: 63, 66; *Zovko Mišo*, VIa r. OŠ Nova Bila: 63; *Zrakić Veljko*, VI r. OŠ »4. maj« Kutina: 62; *Žiher Ivan*, $VIII_5$ r. OŠ »V. Dug.« Beograd: 63, 65, 66; *Živadinović Nikola*, VIIb r. OŠ »Đ.J.« Međa (Banat): 63; *Živanović Ljubinka*, VIII r. OŠ Lipnički Šor (Loznica): 63, 66; *Živanović Radmila*, VI r. OŠ »Đ.J.« Međa (Banat): 63; *Živanović Radovan*, VIII r. OŠ »Đ.J.« Međa: 63; *Živković Dobrivoje*, OŠ »J.M.« Bagrdan: 63, 66; *Živković Gospava*, OŠ »B.S.« Guberevac k/L: 62; *Živković Tihomir*, VIII r. OŠ »Narodnih heroja« Knin: 63.

Napomena. — U rešavanju konkursnih zadataka 62—68. učestvovalo je preko 700 učenika. Bilo je i pogrešnih rešenja, naročito u zadacima 62, 64, 67. Komisija za pregled konukursnih zadataka nije priznavala neobrazložene odgovore i rezultate. Redni brojevi zadataka čija su rešenja kod pojedinih učenika naročito uspela štampani su masno.

Molimo rešavatelje konukrsnih zadataka da se u svemu pridržavaju uputstva koje je navđeno u fusnoti ispod tekstova konkursnih zadataka (str. 141.). Rešenja šaljite običnom poštom (a ne preporučeno) kako se ne biste izlagali nepotrebnim trošvkovima!

Nagrade »Mat. lista« rešavateljima konkursnih zadataka

»Matematički list« će i ove školske godine dodeliti **nagrade** u novcu za uspešno rešavanje konkursnih zadataka. Nagrade su predviđene za rešavatelje iz svih razreda (V, VI, VII i VIII), a u obzir će se uzeti konkursni zadaci iz svih brojeva »Matematičkog lista« izašlih u ovoj školskoj godini (dakle, i zadaci iz ovog dvobroja). Ove će nagrade biti poslate do 25. VI 1969. godine. Imena nagrađenih uz naznaku visine nagrade biće štampana u »Matematičkom listu« IV. 1, koji će izaći početkom sledeće školske godine.

U odnosu na prethodnu godinu, fond za nagrade rešavateljima konkursnih zadataka ove godine je povećan.

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

Задаци на општинским такмичењима у СР Србији, 13.IV 1969.

VI *разред*

1. У једној кутији има 15 куглица: црних, белих и црвених. Црвених куглица има 7 пута мање од белих. Колико у тој кутији има црних куглица? Одговор образложи!

2. Лонац заједно са поклопцем стаје 12 динара. Лонац је за 10 динара скупљи од поклопца. Колико стаје лонац?

3. Пут између два града ауто је прешао за три дана. Првог дана је прешао 3/8, а другог 5/12 целог пута; трећег дана ауто је прешао 45 km више од 1/6 целог пута. Колика је дужина пута између тих градова?

4. У троуглу ABC дати су углови: $\alpha = 67^\circ\, 32'\, 15''$ и $\beta = 37^\circ\, 24'\, 45''$. Одредити угао између симетрале унутрашњег угла γ и висине троугла која полази из темена угла γ.

5. Кроз тачку P ван датог угла AOB повући праву p тако да она од кракова тог угла одсеца једнаке одсечке: $OM = ON$, где су M и N тачке у којима права p сече кракове угла AOB.

Резултати и упутства. — 1. Црвених к. не може бити више од 1, јер кад би их било већ 2, онда би белих било $2 \cdot 7 = 14$ и укупно би их било више од 15. Значи, била је само 1 црвена куглица, а белих и црних по 7. *(5 поена).*

2. Лонац 11 динара, поклопац 1 динар. *(5 поена).*

3. 1080 km. *(5 поена)*; 4. Тражени угао износи $15^\circ 3' 45''$. *(5 поена)*

5. Прво се повуче симетрала s угао AOB, а затим права p нормално на s. То је тражена права *(5 поена).*

VII *разред*

1. Производ четири узастопна природна броја износи 3024. Који су то бројеви? Образложи!

2. Израчунај:

$$\frac{\left[4{,}07 : \dfrac{1}{20} + 23{,}01 \cdot (-0{,}06)\right] : 4 + 0{,}0703 \cdot \dfrac{1}{2}}{\left[\left(7{,}3745 : 3{,}01 - 1\,\dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(-1\,\dfrac{1}{50}\right) - 13 \cdot \dfrac{3}{50}\right] : (-0{,}1)} =$$

3. Правоугаоно спортско игралиште повећано је на тај начин што му је дужина повећана за 20%, а ширина за 30%. За колико процената се повећала површина игралишта?

4. У тачки M кружнице полупречника $r=4$ cm повучене су тетиве MA и MB једнаке полупречнику те кружнице. Наћи: а) угао између повучених тетива и b) површину троугла MAB.

5. У трапезу $ABCD$ крак BC тачком M подељен је на отсечке $BM = 4$ cm и $MC = 2$ cm. Кроз тачку M повучена је права паралелна основицама трапеза до пресека N с другим краком AD. Наћи AD ако је $DN = 1{,}4$ cm.

Резултати и упутства. **— 1. 6, 7, 8 и 9. Међу тим бројевима не може бити 10; не могу бити ни већи од 10, јер $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$. Сви су мањи од 10, али међу њима нема 5, јер би онда на крају била 0; отпада могућност $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ *(5 поена)*.**

2. Резултат је 1. *(5 поена)*.

3. $P=ab$ – првобитна површина; нова површина $P_1 = 1{,}2a \cdot 1{,}3b = 1{,}56ab = 1{,}56P$, тј. већа је за 56% *(5 поена)*.

4. Угао 120° (повучене тетиве су странице правилног шестоугла уписаног у кружницу); O-центар, $OBMA$-ромб. Тражена површина $4\sqrt{3}$ cm^2=површини једнакостр. троугла AOM. *(5 поена)*.

5. Повући кроз C паралелу са DA. Из сличности троуглова следи пропорција $x : (4+2) = 1{,}5 : 2$ одакле $x=4{,}5$ (cm) *(5 поена)*.

VIII *разред*

1. Реши једначину:

$$3+\frac{\frac{x}{2}-\frac{x+3}{4}}{2}=3-\frac{\left(1-\frac{6-x}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}{2}.$$

2. Цена кошуљи била је 50 динара. Ова цена је прво снижена за 20%, а након извесног времена цена је повећана за 20%. Колика је садашња цена тој кошуљи?

3. У истом координатном систему нацртати праве дате једначинама: $x-y-1=0$ и $2x+y-8=0$ па израчунати површину троугла који те праве образују са x-осом. Јединична дуж је 1 cm.

4. Један угао правоуглог троугла је 7°30′30″. Под којим углом се види свака катета из центра описане кружнице око тог трогула?

5. Од коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице 24 cm одсечена је пирамида $PBQB_1$ (P је на AB, Q на BC) тако да је $PB=BQ=12$ cm. Како се односи запремина одсеченог дела коцке према запремини преосталог дела коцке?

Резултати. 1. — Решење је $x=3$. (*5 поена*).

2. Садашња цена је 48 динара (*5 поена*).

3. Површина троуглића је 3 cm^2; пресек правих је (3; 2) (*5 поена*).

4. Углови су: 15°1′ и 164°59′ (*5 поена*).

5. Тражени однос је 1 : 23 (*5 поена*).

MATEMATIČKA RAZONODA

ZANIMLJIVOSTI O BROJEVIMA

Recept za uspeh u životu

Jedan radnik, koji se nije mogao snaći u svom poslu, ode kod lekara da traži pomoć. Potuži mu se na svoju nevolju. Lekar ga pregleda pa mu reče: »Kao što je lav car među životinjama, tako je i lek, kojeg ću Vam prepisati, car među lekovima. Vrlo je efikasan, ali i čudan«. Zatim sede za sto i napisa recept: CAR JE ČUDAN. Dajući taj recept radniku, lekar mu objasni u koju apoteku treba da ide da bi mu na osnovu tog recepta sastavili lek.

Radnik je tu apoteku lako pronašao. Apotekar kome se obratio pogleda recept i reče radniku: »U svaki lek ulaze pojedini sastojci u potrebnoj količini. Zato uzmite olovku pa ispod svakog slova u Vašem receptu (CAR JE ČUDAN) napišite cifre redom od 1 do 9 i nulu. (Učinite i vi sve što apotekar kaže!). Sada odaberite koja bilo tri slova iz recepta pa ih zamenite odgovarajućim ciframa. Svaki lek mora da se meša. Zato dobijenom trocifrenom broju obrnite redosled cifara, pa od većeg broja oduzmite manji. Dobijenoj razlici ponovo obrnite redosled cifara pa je saberite s novodobijenim brojem. Tako ste dobili dozu leka za jedan dan. Pošto mesec ima 30 dana, pomnožite dobijeni broj sa 30. Eto, to Vam je lek i on će Vam jedini pomoći u životu!«

»Ja Vas ništa ne razumem« — odgovori radnik.

»Zamenite cifre u dobijenom broju odgovarajućim slovima, pa će Vam sve biti jasno« — završi apotekar.

Dragi čitaoče, jesi li uradio sve ono što je apotekar rekao? Ako jesi, onda znaš koji je dobar lek za uspeh u životu. Vakciniši se njime dok si mlad, da ne prođeš kao ovaj radnik!

T.P.

DA LI STE DOSETLJIVI?

Vuk, koza i kupus

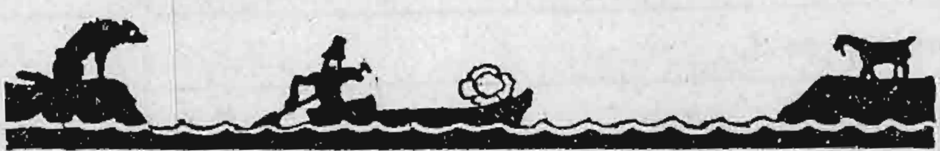
(*stari zadatak*)

Trebalo je da neki čovek čamcem preveze preko reke vuka, kozu i kupus. Ali evo nevolje: čamac je bio tako mali da je u njega mogao da se smesti samo čovek, a s njim još ili vuk, ili koza, ili kupus. Ali ako na obali ostavi vuka i kozu, onda će vuk pojesti kozu; ako ostavi kozu i kupus, onda će koza pojesti kupus. Međutim, u prisustvu čoveka »niko nikoga neće pojesti«. Mada je situacija izgledala bezizlazna, ipak je čovek našao izlaz iz nje, tj. uspeo je da na tom čamcu sve preveze na drugu obalu reke. Kako je on to učinio?

Rešenje ovog zadatka verovatno vam je poznato. Nadamo se da će vam rešenje biti još jasnije ako ga damo u vidu stripa. Pogledajte!

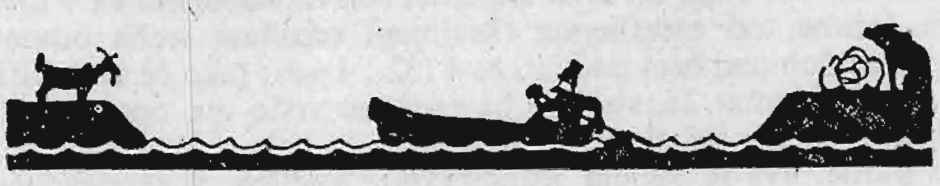
Vuk ne jede kupus, te prevoženje treba početi s kozom, jer vuka i kupus možemo ostaviti na obali i bez čoveka.

Pošto je prevezao kozu na drugu obalu, čovek se vraća, stavlja u čamac kupus i prevozi ga na drugu obalu, gde ga ostavlja,



ali zato u čamac uzima kozu i vraća se nazad — na prvu obalu.

Ovde, na prvoj obali ostavlja kozu i prevozi vuka.



Vuka ostavlja kod kupusa, a sam se vraća na prvu obalu po kozu,

prevozi je na drugu obalu, čime je prevoženje uspešno završeno.

O veštini pogađanja zamišljenih brojeva

Verovatno ste imali priliku da posmatrate »trikove« u vezi sa pogađanjem brojeva. Voditelj igre (»mađioničar«) obično zahteva da se izvrše računske operacije otprilike na sledeći način: zamisli broj, dodaj mu 2, ono što si dobio pomnoži sa 2, zatim od toga oduzmi 5, a onda oduzmi zamišljeni broj itd. — svega pet, pa i više operacija. Zatim on pita šta se dobili kao rezultat i kada mu to kažete, on vam momentalno kaže koji ste broj bili zamislili.

Tajna tog i sličnih »trikova« je ustvari u poznavanju jednostavnijih jednačina.

Neka je, na primer, voditelj tražio da izvršite sa zamišljenim brojem operacije navedene u levoj koloni sledeće tablice:

Zamisli broj,	x
dodaj mu 2,	$x+2$
rezultat pomnoži sa 3,	$3x+6$
oduzmi od toga 5,	$3x+1$
oduzmi zamišljeni broj,	$2x+1$
dobijeni broj pomnoži sa 2,	$4x+2$
onda oduzmi 1	$4x+1$

Zatim vas voditelj zamoli da kažete krajnji rezultat i, pošto ga čuje, odmah kaže koji ste broj zamislili. Kako on to čini?

Da biste to razumeli, dovoljno je da pogledate desnu kolonu prethodne tablice u kojoj su »naredbe« voditelja prevedene na algebarski jezik. Ako ste zamislili broj x, onda se iz te tabele vidi da ste nakon svih navedenih operacija morali dobiti $4x+1$. Znajući to, nije teško pogoditi zamišljeni broj. Neka ste, na primer, voditeljiu rekli da ste dobili rezultat 33. Tada on brzo napamet rešava jednačinu $4x+1=33$ i dobija $x=8$. Drugim rečima, od saopštenog (krajnjeg) rezultata treba oduzeti jedinicu (33—1=32) i zatim dobijeni broj podeliti sa 4 (32 : 4=8); tako će se dobiti zamišljeni broj. (Da ste dobili rezultat 25, voditelj bi napamet vršio ove operacije: 25—1=24, 24:4=6 i saopštio bi da ste zamislili broj 6).

Kao što vidite, sve je veoma jednostavno: voditelj, tj. »pogađač«, unapred zna šta treba da učini sa rezultatom da bi dobio zamišljeni broj .

Ako ste to razumeli, moći ćete još bolje da zadivite i iznenadite svoje drugove i prijatelje, predloživši im da oni **sami**, po svome nahođenju, izaberu koje će operacije vršiti sa zamišljenim brojem. Od svoga druga zatražite da zamisli broj i da s njim ma kojim redom vrši operacije ove vrste: da dodaje ili oduzima neki broj (recimo, da doda 2, oduzme 5 itd.), da množi nekim poznatim brojem (sa 2, sa 3 i sl.), da dodaje ili oduzima zamišljeni broj. (Ne preporučuje se deljenje, jer to komplikuje „trik"). Vaš drug, da bi vas zbunio, »izmišlja« niz operaracija. Na primer, on je zamislio broj 5 (on vam to ne govori) i, vršeći operacije, govori:

— Zamislio sam broj, pomnožio ga sa 2, rezultatu sam dodao 3, zatim sam tako dobijenom broju dodao zamišljeni broj; zatim dodajem 1, sve to množim sa 2, od dobijenog rezultata oduzimam zamišljeni broj, zatim oduzmem još 3, pa još jednom oduzmem zamišljeni broj, pa od dobijene razlike oduzmem 2. Na kraju, rezultat množim sa 2 i svemu tome dodajem 3.

Misleći da vas je sasvim zbunio, on vam odvažno saopštava:

— Dobio sam 49.

Na njegovo veliko iznenađenje vi mu odmah kažete da je bio zamislio broj 5.

Kako ste to uspeli? Sada je to prilično jasno. Kada vam vaš drug saopštava koje operacije vrši sa zamišljenim brojem, vi onda istovremeno u svojim mislima vršite iste te operacije s nepoznatom x. On govori: »Zamislio sam broj . . . .«, a vi odmah u sebi zaključujete: »Znači, ja imam x«. On nastavlja:«. . . pomnožio sam ga sa 2 . . .« (i on ustvari i vrši množenje brojeva), a vi u sebi produžavate: »sada je to $2x$«. On dalje kaže: ». . . rezultatu sam dodao 3 . . .«, a vi ga sledite: »znači, sada imam $2x+3$«, itd. Kada vas je konačno »zbunio« i »zapetljao« i izvršio sve operacije, vi ste morali dobiti ono što je navedeno u sledećoj tablici (u levoj koloni je ono što naglas govori vaš drug, a u desnoj su one operacije koji vi u sebi vršite):

Zamislio sam broj,	x
pomnožio sam ga sa 2,	$2x$
rezultatu sam dodao 3,	$2x+3$
zatim sam dodao zamišljeni broj,	$3x+3$
onda sam tome dodao 1,	$3x+4$
sve to sam pomnožio sa 2,	$6x+8$
zatim sam oduzeo zamišljeni broj,	$5x+8$
od toga sam oduzeo 3,	$5x+5$
opet sam oduzeo zamišljeni broj,	$4x+5$
oduzeo sam 2,	$4x+3$
na kraju, rezultat sam pomnožio sa 2,	$8x+6$
i svemu tome dodao 3	$8x+9$

Na kraju ste u mislima zaključili: konačni rezultat je $8x+9$. Tada on kaže: »Dobio sam 49«. A kod vas je već gotova jednačina: $8x+9=49$. Rešiti tu jednačinu nije teško i vi odmah saopštavate da je on zamislio broj 5.

Ovakvo pogađanje je efektno zbog toga što vi ne govorite koje ćete operacije vršiti sa zamišljenim brojem, već njih vaš drug sam »izmišlja«.

Istina, ima jedan slučaj, kada trik ne mora uspeti. Ako ste, na primer, posle niza operacija (računajući u sebi) dobili $x+18$, a zatim vaš drug kaže: ». . . a sada ću oduzeti zamišljeni broj; dobijam 18«, tada vi u mislima računate: $(x+18)-x=18$ — ustvari dobija se 18 i nema nikakve jednačine, te niste u stanju da pogodite zamišljeni broj. Šta u takvom slučaju treba da radite? Postupite ovako: Čim dobijete rezultat koji više ne sadrži nepoznatu x, prekinite svoga druga rečima: »Stop! Mogu, ne pitajući te ništa, da pogodim koliko si sada dobio: dobio si 18!«. To će vašeg druga prilično iznenaditi, jer vam on ustvari ništa, nijedan podatak nije saobpštio! I mada tako niste doznali koji je broj bio zamišljen (a mogao je biti zamišljen koji bilo broj), trik je ipak uspeo!

Evo još jednog primera te vrste (kao i napred — u levoj koloni stoji ono što govori vaš drug):

Zamislio sam broj,	x
dodao sam mu 2,	$x + 2$
i rezultat pomnožio sa 2,	$2x + 4$
tome sam dodao 3,	$2x + 7$
pa onda oduzeo zamišljeni broj,	$x + 7$
i tome dodao 6,	$x + 13$
a zatim sam oduzeo zamišljeni broj . . .	13

U momentu kada (računajući u sebi) dobijete 13, tj. izraz koji više ne sadrži nepoznatu x, vi ćete prekinuti svog druga, rekavši da je sada on dobio rezultat 13.

Ako budete malo vežbali moći ćete i sami sa svojim drugovima da izvodite takve »trikove«.

Igra „Ko će prvi reći 40"

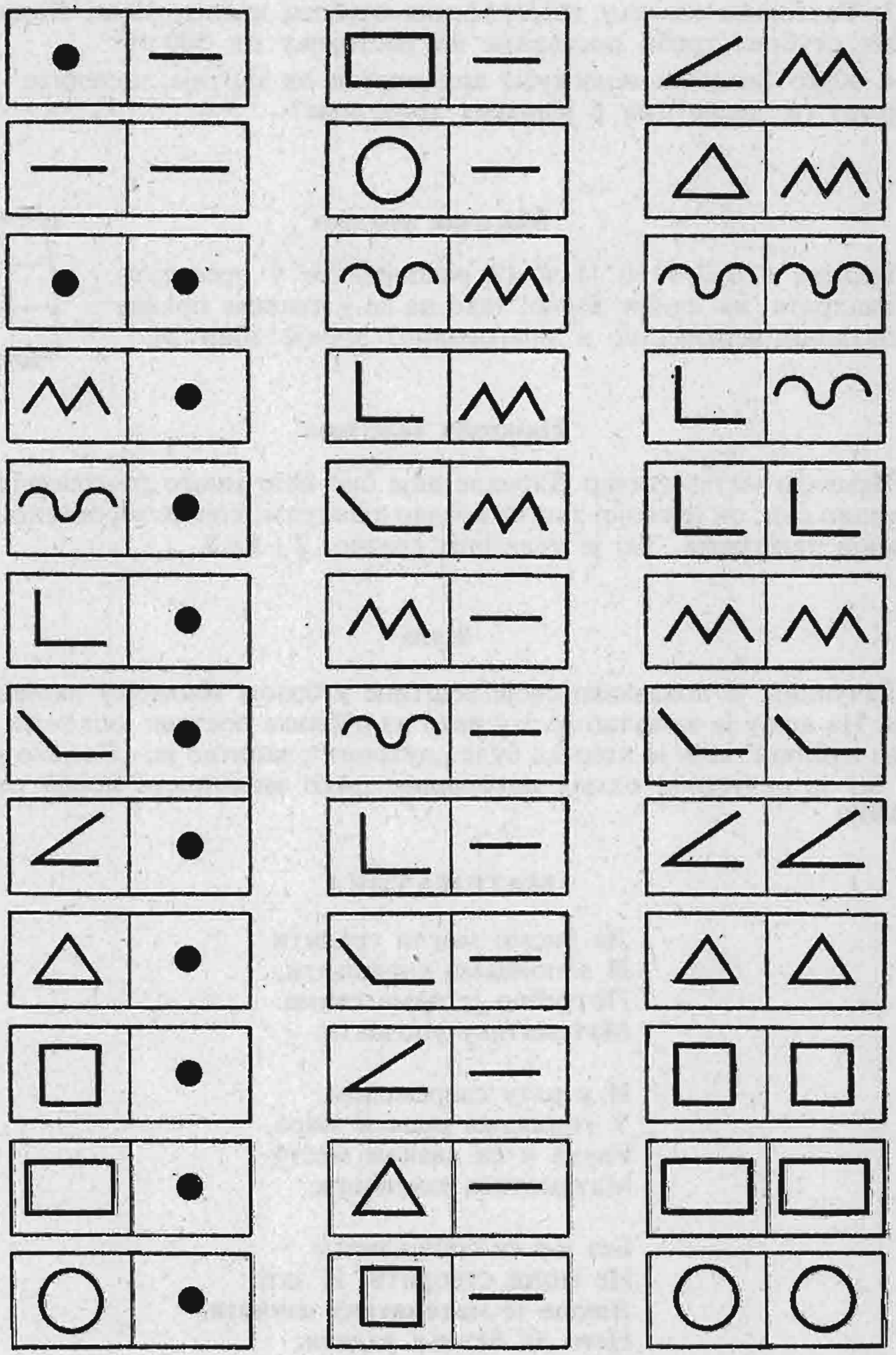
Igraju dvoje. Prvi igrač izgovara neki prirodni broj manji od 5, tj. jedan od brojeva: 1, 2, 3, 4. Drugi igrač tom broju dodaje jedan od tih istih brojeva: 1, 2. 3, 4 i naglas izgovara dobijeni zbir. To isto zatim učini prvi igrač itd. Pobednikom se smatra onaj igrač koji prvi izgovori broj 40.

Može li drugi igrač obezbediti sebi pobedu nezavisno od toga koji će broj izgovoriti prvi igrač počinjući igru?

Odgovor. — Igrač kome bude uspelo da izgovori broj 35, u sledećem svom „potezu", ma koji broj da je izgovorio njegov partner, moći će da izgovori i 40 i da tako pobedi. Međutim, da bi izgovorio 35, on mora prethodno izgovoriti 30, a pre toga 25, itd. Na taj način, *pobediće onaj igrač koji prvi bude izgovorio 5.* Ali, prvi igrač, počinjući igru, ne može izgovoriti broj veći od 4 i, ma koji broj on izgovorio, drugi igrač uvek će imati mogućnost da izgovori 5, a zatim redom sve brojeve deljive sa 5, zaključno sa 40.

Geometrijsko domino

Nacrtajte na čvršćoj hartiji, kartonu ili šper ploči ovakve figure (v. sl.) i organizujte igru *domino*. Cilj igre je da naučite raspoznavati i imenovati razne geometrijske figure.



ЗРНЦА

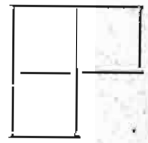
За досетљиве

1. Који број при дељењу својом петином даје тачно 5?

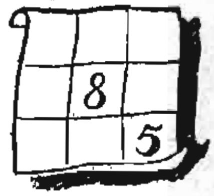
2. Тројица шахиста одиграли су на турниру свега 6 партија. Колико партија је одиграо сваки?

3. Растојање између телеграфских стубова износи 50 m. Колико телеграфских стубова треба поставити на растојању од 500 m?

4. Како ћете, не подижући врх оловке од хартије, поделити ову фигуру (в. десно!) на 6 једнаких троуглова?



Магични квадрат



Бројеве 4, 6, 7, 9, 10, 11 и 12 распоредите у преостала поља квадрата на слици десно, тако да се у сваком правцу (хоризонтално, вертикално и дијагонално) добије збир 24.

Најкраћи телеграм

Немачки математичар Дирихле није био баш много разговорљив. Када му се родио син, он је својој ташти послао телеграм, који је вероватно најкраћи у историји телеграфа. Тај је телеграм гласио: **2+1=3**.

Нула

Рачунџија је показивао своје вештине у брзом множењу вишецифрених бројева. На крају је замолио да му неко из публике постави још тежи задатак. Један из публике, који је хтео да буде „духовит“, запитао је: „Колико је 7 · 5?“. На то му је рачунџија одмах одговорио: „Ако ви станете поред резултата, биће 350!“

МАТЕМАТИКА

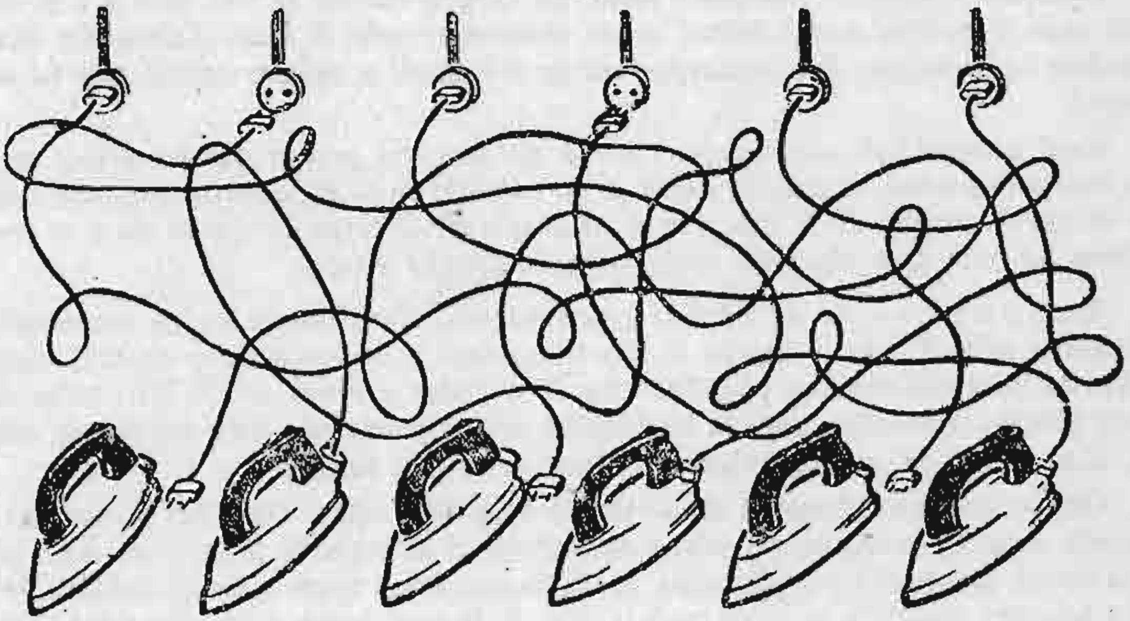
Да бисмо могли градити
И машинама управљати,
Потребно је нама свима
Математику упознати.

И у рату савременом,
У годинама реда и мира,
Свуда и на сваком месту
Математика доминира.

Без ње се социјализам
Не може створити. И зато:
Лакше је математику научити,
Него ли без ње радити.

Тренинг пажње и посматрачког дара

Које пегле су укључене?



ОДГОВОР НА ПИТАЊА ИЗ РУБРИКЕ „ЗРНЦА“ У „МАТЕМАТИЧКОМ ЛИСТУ“ III. 3

За досетљиве. — **1.** Запушач стаје 5 пара, а флаша 1,05 динара. **2.** 11 пута. **3.** Може, на пример: $\frac{2}{3}=\frac{3}{6}$ 4 · **4.** Завезаће се један чвор.

NAGRADNI ZADATAK BR. 10

Kako ćete rasporediti 12 *sijalica u* 6 *redova tako da u svakom redu budu po* 4 *sijalice*? (*Označite sijalice tačkama, a redove pravim linijama, pa nacrtajte traženi raspored tačaka*).

Za pravilno rešenje ovog zadatka biće nagrađeno 20 učenika. Po potrebi odlučiće žreb. Rešenja treba poslati najkasnije **do 15. VI 1969. godine** na adresu: **Matematički list, Beograd, p.p. 728.** Ne zaboravite da na samom radu navedete svoje ime i prezime, razred, školu i mesto (za manja mesta i poštu). Na koverti obavezno naznačite: »Nagradni zadatak br. 10«. Rešenja i imena nagrađenih objavićemo u »Matematičkom listu« br. IV.1.

NAGRADNI ZADATAK BR. 11

Popunite ovaj kvadrat brojevima od 4 *do* 19 *tako da zbir brojeva u svakom pravcu, tj. po horizontalama, vertikalama i dijagonalama, bude jednak* 46. *Da biste zadatak lakše rešili, sedam brojeva je već napisano.*

8	13		
	18	17	
		5	16
			15

Uslovi za dodelu nagrada i slanje rešenja za ovaj nagradni zadatak su isti kao i za nagradni zadatak br. 10. (v. napred!)

REZULTATI KONKURSA ZA NAGRADNI ZADATAK BR. 9

Zadatak je glasio: *Nedaleko jedno od drugog nalaze se dva sela A i B. Svi stanovnici sela A govore samo istinu, a svi stanovnici sela B lažu. Stanovnici ovih sela međusobno se posećuju. Pretpostavimo da se ti nalaziš u nekom od tih sela (a ne znaš u kojem).*

Koje pitanje (ali samo jedno) treba da postaviš prvom čoveku kojeg susretneš u tom mestu (naravno, ne znaš iz kojeg je on mesta), da bi na osnovu njegovog odgovora (»da« ili »ne«) utvrdio da li si u selu A ili u selu B? (Pretpostavljamo da u to vreme ni u jednom od ovih sela nije bilo stanovnika iz drugih mesta).

Rešenje. — Ti ne znaš u kojem si selu. Prvi čovek kojeg susretneš može biti kako iz sela A tako i iz sela B. Da bi saznao u kojem selu se nalaziš treba tom čoveku da postaviš sledeće pitanje: »*Da li vi živite u ovom selu*?« (Ili: »Da li ste vi iz ovog sela?«, »Izvinite, jeste li vi odavde, iz ovog sela?«). Ako taj čovek odgovori »da«, ti si u selu A, a ako odgovori »ne« — ti si u selu B.

Objasnimo to. Uzmimo da si dobio odgovor »da«. Ukoliko je upitani čovek stanovnik sela A, onda je on rekao istinu, tj. ti se nalaziš u selu A. Ako je, pak, upitani čovek stanovnik sela B, onda je on slagao i na tvoje pitanje takođe je rekao »da«, a to opet znači da se ti nalaziš u selu A. Prema tome, odgovor »da« u svakom slučaju značiće da se ti nalaziš u selu A.

Analogno, odgovor »ne« u svakom slučaju značio bi da se ti nalaziš u selu B.

* * *

Primljeno je više od 500 rešenja, od toga samo 50 tačnih.

Žrebom je odlučeno da se između onih koji su poslali tačno rešenje nagrade sa po **20 n. dinara** sledeći učenici:

1. *Bjelogrlić Zaviša*, VI_1 r. OŠ »Neven Kirac«, Pula
2. *Čičigolj Zlatko*, $VIII_c$ r. OŠ »P. Tomažiča«, Koper
3. *Dodig Gordana*, VII_a r. OŠ »4. maj«, Kutina
4. *Dugić Redžo*, VI_a r. OŠ D. Orahovica kod Bos. Petrovog Sela
5. *Janković Nada*, VI_1 r. OŠ »Radojka Lakić«, Beograd
6. *Matić Branka*, $VIII_1$ r. OŠ »Karađorđe«, Beograd
7. *Milošević Dušan*, $VIII_1$ r. OŠ »D. Zelenović«, Sirig kod N.S.
8. *Milošević Vera*, V_4 r. OŠ »Vlado Tomanović«, Bileća
9. *Mirković Biljana*, V r. OŠ »Moša Pijade«, Beograd
10. *Nikolić Olga*, VII_2 r. OŠ »Vožd Karađorđe«, Niš
11. *Novaković Radovan*, VII_2 r. OŠ »Sveti Sava«, Beograd
12. *Petkovšek Marko*, $VIII_a$ r. OŠ »Prežihovega Voranca«, Ljubljana
13. *Radovac Dušica*, VII_r OŠ »Mitar Tomić«, Dobrinci
14. *Radović Ivan*, $VIII_3$ r. OŠ »Učitelj Tasa«, Niš
15. *Rebuša Snežana*, VI_2 r. OŠ »Filip Filipović«, Čačak
16. *Sučić Mariagrazia*, VII_c r. OŠ »Vladimir Gortan«, Rijeka
17. *Svrzić Bratislav*, $VIII_2$ r. OŠ »Vučko Milićević«, Grocka
18. *Telečki Radivoj*, VI_c r. OŠ »Servo Mihalj«, Padej (Banat)
19. *Tomažič Sašo*, VI_b r. OŠ Vič — Ljubljana
20. *Ušan Ljiljana*, VI_3 r. OŠ »2. oktobar«, Zrenjanin.

Nagrade su poslate poštom.

Dobitnicima nagrada čestitamo!

PRETPLATNICI »MATEMATIČKOG LISTA« U ŠKOLSKOJ 1968/69. GODINI

»Matematički list« je i ove školske godine štampan u tiražu od 100 000 primeraka po broju. List se distribuira putem pretplate. List se šalje na preko 2000 adresa širom SFRJ. Najbrojniji čitaoci lista su učenici osnovne škole.

Ovde navodimo samo škole sa više od 200 pretplatnika.

Osnovna škola »J. Pančić« Beograd (712); OŠ »R. Vukićević« Niš (565); OŠ »Vožd Karađorđe« Niš (500); OŠ »S. Nikolajević« Beograd (481); OŠ »Braća Jerković« Železnik (400); OŠ »Veljko Dugošević« Beograd (400); OŠ »Dr D. Mišović« Čačak (400); OŠ »M. Pijade« Niš (390); OŠ »J. Popović« Beograd (387); OŠ »Novo Brčko« Brčko (370); OŠ »Lj. Nešić« Zaječar (355); OŠ »M. Štrukelj« Nova Gorica (350); OŠ »D. Jerković« Titovo Užice (350); OŠ »M. Pavlović« Čačak (350); OŠ »V. Karadžić« Čačak (350); OŠ »I. Gundulić« N. Beograd (350); OŠ »M. Vuković—Seljak« Barajevo (295); OŠ »S. Marković« Kragujevac (280); OŠ »M. Filipović« Bijeljina (279); OŠ »I. L. Ribar« Sombor (271); OŠ »V. Karadžić« Ripanj (267); OŠ »D. Todorović-Kaplar« Knjaževac (267); OŠ »S. Stevo Filipović« Beograd (265); OŠ »B. Božović« Titograd (261); OŠ »Goce Delčev« Zemun (260) OŠ »D. Davidović« Smederevo (256); OŠ »D. Jerković« Inđija (250); OŠ »V. Dugošević« Požarevac (250); OŠ »N. Purić« Valjevo (247); OŠ »J. J. Zmaj« Pančevo (245); OŠ »Zmaj J.J.« Beograd (243); OŠ »Narodnih heroja« Knin (241); OŠ »Njegoš« Niš (241); OŠ »V. Milićević« Grocka (240); OŠ »N. Jeličić« Šabac (234); OŠ »Isa Bajić« Kula (233); OŠ »P. Kočić« Zemun (233); OŠ »A. Đurović« Titovo Užice (230); OŠ »Đ. Đaković« Beograd (230); OŠ »M. Pećanin« Rožaje (230); OŠ »S. Bajić-Paja« Pećinci (227); OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Sisak (223); OŠ »D. Obradović« Beograd (222); OŠ »H. Kikić« Zenica (220); OŠ »V. Nazor« Železnik (220); OŠ »M. Gorki« Titograd (217); OŠ »Bratstvo-jedinstvo« Čonoplja (210); OŠ »IV kraljev. bataljon« Kraljevo (211); OŠ »Đ. Salaj« Beograd (209); OŠ Križanićeva — Zagreb (206); OŠ »Đ. Jakšić« Ćuprija (200); OŠ »F. Filipović« Čačak (200); OŠ »F. Višnjić« Beograd (200); OŠ »G. Dimitrov« Bosilegrad (200); OŠ »B.P. Pinki« Stara Pazova (200); »J.J. Zmaj« Obrenovac (200); OŠ »S. Jovanović« Šabac (200); OŠ »S. Radovanović — Cana« Novi Pazar (200); OŠ »Sutjeska« Zavidovići (200). Itd.

NAGRAĐENE ŠKOLE — NAJBOLJI PRETPLATNICI

Konkurs »Matematičkog lista« za nagrade školama sa procentualno najviše pretplatnika je zaključen. Škola-kandidata za nagrade bilo je više, ali nisu sve ispunile predviđene propozicije (nisu izmirile pretplatu ili nisu dostavile potvrdu o ukupnom broju učenika V—VIII razreda). Prema predviđenim propozicijama (u raspisu br. 3585/68.) **nagrađene** su sledeće škole:

a) novčanim nagradama za nabavku matematičkih učila:

1. *OŠ »Josif Pančić«, Beograd,* (712 pretplatnika, 100%), 2 500 novih dinara; 2. *OŠ »Veljko Đuričin« u Jarkovcu* (160 pret., 100%), 1 000 n. din.; 3. *OŠ »Goce Delčev«, Zemun* (260 pret.) 500 n. din.; 4. *OŠ »Veljko Dugošević«, Beograd* (400 pret.), 500 n. din.; 5. *OŠ »Ratko Vukićević« Niš* (565 pret.), 500 n. din.

b) jednogodišnjom pretplatom na »Matematički list«:

1. *OŠ »Žarko Zrenjanin«, Boka* (196 pret., 100%); 2. *OŠ Braćevac*, 109 pret., 100%); 3. *OŠ Grimalda, p. Cerovlje—SRH* (100%).

Izvesnom broju škola dodeljuju se **diplome,** odnosno **pohvalnice** u znak priznanja za rad njihovih nastavnika matematike na popularisanju »Matematičkog lista«. Njihov spisak objavićemo u »Matematičkom listu« br. IV-1.

VAŽNA OBAVEŠTENJA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom s proredom, a crteži izrađeni na posebnoj čvrstoj hartiji. Rukopisi se ne vraćaju.

2. „Matematički list" je namenjen *svim učenicima* V—VIII razreda osnovne škole, a izlazi 5 puta u toku školske godine i to u: oktobru, decembru, februaru, martu i maju.

3. Godišnja pretplata (za svih 5 brojeva) iznosi 6. n. dinara. Van pretplate prodajna cena lista je 1,50 n. dinara po primerku. Obračun po pretplatnoj ceni vrši se samo kad su naručeni *svi brojevi lista* (1—5). Isto važi i za naknadne narudžbe (u toku godine). Narudžbe se šalju na adresu lista, a novac na **žiro-račun „Matematičkog lista" br. 608-8-1433-10** sa naznakom na šta se narudžba odnosno uplata odnosi (na koje brojeve i koliko primeraka od svakog broja). Obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba slati. Plaćanje se može vršiti i u ratama, ali tako da za svaki primljeni broj dug bude odmah izmiren.

4. Raspolažemo još izvesnim količinama svih brojeva lista iz šk. 1967/68. godine (brojevi II. 1—5), kao i svim brojevima iz ove šk. godine, tako da ih možete naknadno naručiti. Isporučujemo ih pod istim uslovima.

5. Molimo poverenike „Matemat. lista" da odmah izmire sva zaostala dugovanja.

6. Detaljna obaveštenja o novim uslovima pretplate na „Mat. list" objavićemo u raspisima koji će svim školama biti dostavljeni u septembru 1969. godine.

7. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Beograd, p.p. 728.

S A D R Ž A J