UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Jelena V. Manojlović

OSCILATORNOST NELINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA DRUGOG REDA

Doktorska disertacija

Beograd, 1999.

Predgovor

Ova doktorska disertacija posvećena je izučavanju *Oscilatornosti nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda*, a zasnovana je na originalnim rezultatima. Ona je rezultat nastavka istraživanja započetog na magistraskim studijama (*"Asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina*, Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu, 1996.). Osnovna oblast kojoj ova disertacija pripada je *Kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina.*

Kako su mnogi fizički problemi modelirani diferencijalnim jednačinama drugog reda, to kvalitativna analiza ovih jednačina privlači veliku pažnju autora koji se bave teorijom običnih diferencijalnih jednačina. U ranijem periodu razvoja teorije diferencijalnih jednačina preovladalo je rešavanje jednačina pomoću kvadratura. Jednačina $x' = f(t, x)$ se smatrala rešenom kada se dobije opšti integral $\psi(t, x, C) = 0$. Ali radovima Lia (Sophus Lie, 1842–1899) završen je, uglavnom, period traženja rešenja diferencijalnih jednačina preko kvadratura, budući da je zadatak svođenja na kvadrature nerešiv za opštije tipove jednačina. Kada su ustanovljeni fundamentalni stavovi o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja, stvoreni su uslovi za razvoj kvalitativne analize rešenja diferencijalnih jednačina, čijim se osnivačem smatra veliki francuski matematičar Poenkare (Henri Poincareé, 1854–1912.)

Do zaključaka u kvalitativnoj analizi dolazi se, u opštem slučaju na osnovu analiza funkcija koje figurišu u samoj diferencijalnoj jednačini. Kvalitativa analiza nam daje informacije o nizu osobina integralnih krivih kao što su ograničenost, broj i položaj nula i polova, asimptote, ponašanje u okolini singularnih tačaka i u beskonačnosti, oscilatornost, monotonost, itd. Drugim rečima, u najjednostavinijim slučajevima, ona nam omogućava da nacrtamo približan grafik rešenja, ne znajući analitički izraz. Ova problematika je od posebnog interesa kada jednačinu ne možemo rešiti pomoću kvadratura, a sem toga često je izraz za opšti integral toliko složen da se mora pristupiti posebnim metodama kvalitativne analiza.

Oblast kvalitativne analize diferencijalnih jednačina se posebno intenzivno razvija poslednjih tridesetak godina. Za to vreme razradjeni su novi metodi ispitivanja i dobijeni važni i korisni rezultati. Ustanovljeni su kriterijumi oscilatornosti rešenja linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina, dokazane teoreme o klasifikaciji jednačina po oscilatornim svojstvima njihovih rešenja, pronadjeni uslovi za postojanje ili odsustvo singularnih, pravilnih, oscilatornih, ograničenih i monotonih rešenja, date ocene pravilnih rešenja u okolini beskonačno dalekih tačaka, asimptotske formule za rešenja dosta široke klase linearnih i nelinearnih jednačina itd.

Od posebnog interesa u oblasti kvalitativne analize diferencijalnih jednačina je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti i neoscilatornosti linearnih i nelinearnih jednačina, o čemu svedoči i veliki broj radova iz ove oblasti. Verovatno najviše proučavana diferencijalna jednačina drugog reda je linearna diferencijalna jednačina

$$(L) \qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

i nelinearna diferencijalna jednačina oblika

$$(EF) \qquad x''(t) + q(t)|x(t)|^{\lambda} \operatorname{sgn} x(t) = 0, \quad \lambda \neq 1,$$

koja je u literaturi poznata kao *diferencijalna jednačina Emden–Fowlera.* Jednačina ovog oblika je po prvi put privukla pažnju R. Emdena, krajem XIX veka, u prvim teorijama dinamike gasova u astrofizici, dok se tridesetih godina ovog veka pojavljuje u radovima E. Fermia i L.H. Thomasa u proučavanju distribucije elektrona u teškom atomu. Jednačina tipa Emden–Fowler se takođe pojavljuje u proučavanju mehanike fluida, relativističke mehanike, nuklearne fizike, kao i u proučavanju hemiskih reakcija sistema.

Kako su linearne diferencijalne jednačine drugog reda najčešći modeli oscilatornih fizičkih sistema, razvoj teorije oscilatornosti je upravo krenuo od proučavanja oscilatornosti linearnih jednačina. Šezdesetih godina, veliki broj autora je učinio napredak pokazavši da veliki broj kriterijuma oscilatornosti za linearnu diferencijalnu jednačinu važe i za jednačinu Emden-Fowlera, kao i pod odgovarajućim pretpostavkama za funkciju f za diferencijalnu jednačinu oblika

$$(GEF) \qquad x''(t) + q(t)f(x(t)) = 0,$$

gde je $q \in C([0,\infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, neprekidno diferencijabilina na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i zadovoljava uslove $xf(x) > 0$, $f'(x) \geq 0$ za svako $x \neq 0$. Jednačina ovog oblika se u literaturi često naziva *uopštena diferencijalna jednačina Emden–Fowlera.* Pokazani kriterijumi oscilatornosti mogu se klasifikovati u dve grupe, prema tipu jednačine na koji se odnose. Naime, diferencijalna jednačina (EF) je sublinearna ako je $\gamma \in (0,1)$, a superlinearna za $\gamma > 1$. Analogno, diferencijalna jednačina (GEF) je sublinearna ako je funkcija f takva da je

$$0 < \int_{0+}^{\varepsilon} \frac{du}{f(u)}, \int_{0-}^{-\varepsilon} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{za svako} \quad \varepsilon > 0,$$

a ako funkcija f zadovoljava uslov

$$0 < \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{f(u)}, \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{za svako} \quad \varepsilon > 0.$$

diferencijalna jednačina (GEF) je superlinearna.

Oscilatorna svojstva rešenja nelinearnih diferencijalnih jednačina (EF) i (GEF) razmatrao je zaista impozantan broj autora, [2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 37, 44, 48, 53, 59, 61, 66, 67, 72, 74, 76, 78, 88, 100, 101, 102, 103, 104, 119, 120, 142, 147] itd., među kojima su najveći doprinos sasvim sigurno dali Ch.G. Philos [105], [107]–[110], [112]–[118], J.S.W. Wong [19], [20], [73], [77], [123]–[134], [137], [138] i C.C. Yeh. [135, 136, 138, 146].

Kao prirodno uopštenje jednačine (GEF) osamdesetih godina pojavila se u literaturi nelinearna diferencijalna jednačina oblika

$$(NL) \qquad (a(t)\psi(x(t))x'(t))' + q(t)f(x(t)) = 0,$$

gde je $a \in C^1([0,\infty);(0,\infty))$, $q \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, $\psi, f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $xf(x) > 0$, $f'(x) \geq 0$, $\psi(x) > 0$ za svako $x \neq 0$. Među velikim brojem autora koji su ispitivali oscilatornost ove jednačine treba istaći S.R. Gracea, B.S. Lallia [27]–[43] i J.R. Graef, P.W. Spikes [44]–[47].

Dobro je poznato da linearna diferencijalna jednačina (L) i *polulinearna diferencijalna jednačina*

$$\left[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \quad \alpha > 0$$

imaju veliki broj sličnih svojstava koja opisuju karakter oscilatornosti rešenja. Svoj doprinos u ispitivanju oscilatornosti nelinearne jednačine drugog reda ovakvog oblika dali su A. Elbert [21], H.L. Hong, W.C. Lian, C.C. Yeh [54, 58], H.B. Hsu, C.C. Yeh [57], H.B. Hsu, W.C. Lian, C.C. Yeh [58], T. Kusano, A. Ogata, H. Usami [68], T. Kusano, A. Ogata [69], T. Kusano, N. Yoshida [70], T. Kusano, J. Wang [71], H.J. Li, C.C. Yeh [80]–[85], W.C. Lian, C.C. Yeh, H.J. Li [89], itd.

Nelinerna diferencijalna jednačina oblika

$$\left[a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad \alpha > 0,$$

se pojavila u literaturi tek nedavno 1996. u radovima P.J.Y. Wong, R.P. Agarwal [139] (za slučaj kada je $\psi(x) \equiv 1$) i R.P. Agarwal, W.C. Lian, C.C. Yeh [1]. Oscilatornost ove jednačine razmatrao je još H.L. Hong [56] uopštivši kriterijume oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine koje su pokazali H.B. Hsu, C.C Yeh [57]. Diferencijalnu jednačinu ovog oblika nazvaćemo *uopštena polulinearna diferencijalna jednačina.*

Najvažniji i najkorisniji kriterijumi oscilatornosti navedenih nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenta $a(t)$, $q(t)$ ovih jednačina. Ti kriterijumi su motivisani dobro poznatim Wintnerovim kriterijumom oscilatornosti linearne diferencijalne jednačine iz 1949. godine, da je uslov

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s q(u)\,du\,ds = \infty,$$

dovoljan za oscilatornost jednačine (L). Poslednjih dvadesetak godina, od posebnog interesa je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju težinsko usrednjenje koeficijenata tih jednačina i koji su inspirisani kriterijumom Kameneva iz 1978. za linearnu diferencijalnu jednačinu, da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta}\int_0^t (t-s)^\beta q(s)\,ds = \infty \quad \text{za neko } \beta > 1,$$

dovoljan za oscilatornost jednačine (L).

Istraživanje obavljeno prilikom izrade ove disertacije je inspirisano najnovijim dostignućima iz oblasti *težinskog usrednjenja.* Korišćeno je težinsko usrednjenje opštom klasom parametarskih funkcija

$$H : \mathcal{D} = \{(t,s)\ : t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$$

motivisano inicijalnim radom sa ovakovim pristupom Ch.G. Philosa [111] [Arch. Math. (Basel), **53** (1989), 482–492]. Naime, među velikim brojem kriterijuma oscilatornosti pokazanih korišćenjem težinskog usrednjenja, može se primetiti da je kao težinska funkcija najčešće korišćena pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija ϱ takva da je ϱ' nenegativna i opadajuća funkcija i funkcija $(t-s)^\alpha$ za α prirodan ili realan broj veći od jedinice ili proizvod ovih funkcija. Pomenutim radom Ch.G. Philosa [111] o oscilatornosti linearne diferencijalne jednačine dat je pozitivan odgovor na pitanje koje se nametnulo - da li se kao težinska funkcija može koristiti šira familija funkcija? Ovakvu metodologiju ispitivanja u teoriji oscilatornosti koristili su još samo S.R. Grace [41] 1992., H.J. Li, C.C. Yeh [87] 1997. i pod dodatnim pretpostavkama za funkciju $H(t,s)$ uopštili Philosov rezultat na jednačinu (NL).

Dakle, osnovni metod ispitivanja u ovoj disertaciji je metod težinskog usrednjenja opštom klasom parametarskih funkcija, što predstavlja novi pristup u ispitivanju oscilatornosti polulinearnih diferencijalnih jednačina i nastavak istraživanja S.R. Gracea i H.J. Lia, C.C. Yeha za nelinearnu jednačinu (NL).

Svi rezultati izloženi su u tri glave.

U prvoj glavi, **Uvodu**, uvedeni su osnovni pojmovi i dati neki rezultati koji su korišćeni u daljem toku rada.

Druga glava je posvećenja **oscilatornosti polulinearnih diferencijalnih jednačina**. Iako je veliki broj pokazanih kriterijuma oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine podrazumeva integralno usrednjenje koeficijenata jednačine, ni jedan od autora nije kao težinsku funkciju u težinskom usrednjenjenju koristio parametarsku funkciju iz opšte klase funkcija $H(t,s)$. Iz tog razloga, u Poglavlju 2.1. biće pokazani kriterijumi oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine, koristeći težinsko usrednjenje familijom parametarskih funkcija $H(t,s)$. Ti kriterijumi su generalizacija kriterijuma oscilatornosti Lia i Yeha [87] za jednačinu (NL).

Kako postoji skroman broj rezultata o oscilatornosti uopštene polulinearne diferencijalne jednačine, to je u Poglavlju 2.2. učinjen značajan doprinos u pokazivanju kriterijuma oscilatornosti ovog tipa nelinearne jednačine. Tako su najpre prošireni kriterijumi oscilatornosti polulinearne jednačine pokazani u Poglavlju 2.1. na uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu, a zatim proširen i generalizovan dobro poznati rezultat Philosa [113] za (GEF). Sem toga, pokazani su i kvalitativno novi kriterijumi oscilatornosti za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu, koji specijalno predstavljaju i originalne rezultate za polulinearnu jednačinu, kao i za jednačinu (NL).

Od posebnog interesa u teoriji oscilatornosti diferencijalnih jednačina je formulisanje komparativnih teorema koje omogućavaju da se o oscilatornim svojstvima rešenja diferencijalnih jednačina zaključi na osnovu ponašanja rešenja jednostavnijih diferencijalnih jednačina. Kako je oscilatornost polulinearne diferencijalne jednačine mnogo detaljnije proučena u odnosu na oscilatornost uopštene polulinearne diferencijalne jednačine, u Poglavlju 2.3. će biti pokazane komparativne teoreme za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu u odnosu na odgovarajuću polulinearnu jednačinu.

U Glavi 3. izučava se **oscilatornost jednačine** (NL) koju smo nazvali **generalizovana diferencijalna jednačina tipa Emden–Fowlera**. Uopšteni su i prošireni mnogi kriterijumi oscilatornosti uopštene diferencijalne jednačine Emden–Fowlera navedeni u Poglavlju 1.3. Klasifikaciju rezultata izvršena je u odnosu na sublinearnost odnosno superlinearnost jednačine.

U Poglavlju 3.1. ćemo posmatrati sublinearnu jednačinu (NL) i pokazati da se rezultati Ch.G. Philosa [110], [115], Ch.G. Philosa, I.K. Purnaras [116], J.S.W. Wonga [134] za sublinearnu uopštenu jednačinu Emden–Fowlera, pod dodatnim pretpostavkama za funkcije a, f i ψ, mogu proširiti i na jednačinu (NL). Kako u svim do sada utrđenim kriterijumima oscilatornosti jednačine (NL), figuriše pretpostavka da je funkcija ψ pozitivna, nameće se prirodno pitanje - da li je moguće utvrditi oscilatornost jednačine (NL) i u slučajevima kada je funkcija ψ negativna ili menja znak? U drugom delu Poglavlja 3.1. dat je pozitivan odgovor na to pitanje i pokazani kriterijumi oscilatornosti jednačine (NL) pri sledećim pretpostavkama za funkcije f i ψ:

$$\psi(x) \neq 0,\ x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0,\ \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \geq 0,\ \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \geq \frac{1}{k} > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Ti kriterijumi su u Poglavlju 3.2. prošireni na jednačinu

$$[a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0$$

bez ograničenja o znaku funkcije p, što je od takođe posebnog interesa. Diferencijalna jednačina ovog oblika naziva se *diferencijalna jednačina sa prigušenjem* ("with a damping term").

U Poglavlju 3.3. posmatrana je superlinearna jednačina (NL). Generalizovani su rezultati u radovima Ch.G. Philosa [112], [113] i Ch.G. Philosa, I.K. Purnarasa [116], [117]. Kao i u prethodna dva poglavlja svi pokazani kriterijumi oscilatornosti superlinearne jednačine (NL) predstavljaju, specijalno, poboljšanje navedenih kriterijuma oscilatornosti superlinearne uopštene jednačine Emden–Fowlera, u smislu korišćenja težinske funkcije $H(t,s)$.

Na kraju, koristim priliku da se zahvalim svojim roditeljima Vasiliju i Ljiljani koji su bili dovoljno tolerantni prema meni i imali razumevanja za sve vreme koje sam uložila u ovaj rad. Bez njihove podrške i strpljenja, u svakom slučaju, ne bi ni bilo ovog rada. Takođe želim da se zahvalim tetka Vidi na pomoći i strpljenju prilikom mnogobrojnih gostovanja u Beogradu tokom mog usavršavanja. Posebnu zahvalnost dugujem i sestri Mimi na moralnoj i finansiskoj pomoći prilikom izrade i odbrane kako magistarske teze tako i ove disertacije.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi biće uvedeni neki osnovni pojmovi i dati neki poznati rezultati. Pojmovi kao što su neprodužívo, pravilno, singularno, oscilatorno i neoscilatorno rešenje biće definisani u Poglavlju 1.1. Kako je jedna od najefektivnijih i samim tim najzastupljenijih metoda ispitivanja nelinearnih oscilacija metoda integralnog usrednjenja, opštu šemu ove metode izložićemo u Poglavlju 1.2. Poslednjih dvadesetak godina, od posebnog interesa je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju težinsko usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Zato ćemo osnovne principe i rezultate metode težinskog usrednjenja u ispitivanju linearnih i nelinearnih oscilacija izložiti u Poglavlju 1.4. U Poglavlju 1.3. navešćemo najznačajnije kriterijume oscilatornosti uopštene diferencijalne jednačine Emden–Fowlera, nelinearne diferencijalne jednačine koja je sa aspekta kvalitativne analize, a posebno sa aspekta teorije oscilatornosti, verovatno najviše proučavana jednačina. Većina navedenih kriterijuma će biti uopštena u naredne dve glave, na širu klasu nelinearnih diferencijalnih jednačina ili su ti kriterijumi poslužili kao motivacija za dobijanje novih kriterijuma za oscilatornost rešenja posmatranih nelinearnih diferencijalnih jednačina u narednim glavama.

1.1. Elementi teorije oscilatornosti

Kako su mnogi fizički problemi modelirani nelinearnim diferencijalnim jednačinama drugog reda, to kvalitativna analiza ovih jednačina privlači veliku pažnju autora koji se bave teorijom običnih diferencijalnih jednačina. Posmatrajmo *opštu nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda* nepoznate funkcije x nezavisno promenljive t oblika

$$\Phi\left[t, x(t), x'(t), x''(t)\right] = 0, \tag{1.1}$$

gde je Φ data funkcija definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^4$. Kako u fizičkim problemima nezavisno promenljiva t ima ulogu vremena, to ćemo pretpostaviti da je $t \in [0, \infty)$.

Definicija 1.1.1. Funkcija $\chi(t)$ definisana na intervalu $(t_0, t_1) \subset (0, \infty)$ je **rešenje** jednačine (1.1) ako za svako $t \in (t_0, t_1)$ važi:

(i) postoji $\chi''(t)$,

(ii) $(t, \chi(t), \chi'(t), \chi''(t)) \in D$,

(iii) $\Phi\left[t, \chi(t), \chi'(t), \chi''(t)\right] = 0$.

Geometrijsko mesto tačaka $\{(t, \chi(t)) : t \in (t_0, t_1)\}$ naziva se *integralna kriva rešenja* $\chi(t)$ diferencijalne jednačine (1.1).

Da bi uopšte imalo svrhe ispitivati kvalitativna svojstva rešenja nelinearnih diferencijalnih jednačina, odnosno da bismo mogli rasuđivati o osobinama integralnih krivih, moramo najpre biti sigurni da one postoje. Zbog toga je potrebno formulisati teoremu egzistencije i jedinstvenosti rešenja tih jednačina.

Teorema 1.1.1. *Ako su funkcije* $\Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial x'}, \frac{\partial\Phi}{\partial x''}$ *definisane i neprekidne u nekoj okolini tačke* $(t^*, x_0, x_0', x_0'') \in D$ *i*

$$\Phi\,[t^*, x_0, x_0', x_0''] = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x''}[t^*, x_0, x_0', x_0''] \neq 0,$$

tada DJ (1.1) *ima jedinstveno rešenje* $\chi(t)$*, definisano i dva puta neprekidno diferencijabilno u nekoj okolini tačke* t^**, koje zadovoljava početne uslove* $\chi(t^*) = x_0,\ \chi'(t^*) = x_0',\ \chi''(t^*) = x_0''$.

Za ostale teoreme koje daju potrebne i dovoljne uslove egzistencije i egzistencije i jedinstvenosti rešenja nelinearnih jednačina upućujemo na knjige I.T Kiguradze [63] i P. Hartman [51].

Može se primetiti da je Teorema 1.1.1. lokalnog karaktera, odnosno da dokazuje egzistenciju i jedinstvenost rešenja u nekoj okolini tačke t^*. Zato se nameće pitanje dokle se može proširiti interval definisanosti rešenja. U tom smislu se uvodi pojam neprodu živog rešenja.

Definicija 1.1.2. Rešenje $x(t)$ jednačine (1.1) definisano na intervalu $(t_0, t_1) \subset (0, \infty)$ naziva se **neproduživo** ako je $t_1 = \infty$ ili $t_1 < \infty$ i

$$\limsup_{t \to t_1 -}(|x(t)| + |x'(t)|) = +\infty.$$

Kako ćemo se u daljem radu baviti ispitivanjem broja nula rešenja nelinearnih jednačina, od interesa su samo rešenja koja nemaju vrednost nula počev od neke vrednosti promenljive t. U tom smislu uvodimo pojam pravilnog i singularnog rešenja.

Definicija 1.1.3. Neproduživo rešenje $x(t)$ jednačine (1.1) definisano na $[t_0, \infty)$ naziva se **pravilno**, ako za svako $t \in [t_0, \infty)$ važi $\sup\{|u(s)| : s \geq t\} > 0$.

Definicija 1.1.4. Netrivijalno, neproduživo rešenje $x(t)$ jednačine (1.1) definisano na intervalu $(t_1, t_2) \subset (0, \infty)$ naziva se **singularno** ako je $t_2 < \infty$ ili $t_2 = \infty$ i postoji $t_0 \in [t_1, \infty)$ tako da je $u(t) = 0$ za svako $t \geq t_0$.

Teorema Uintnera nam daje uslove pod kojima nelinearna diferencijalna jednačina

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big) \tag{1.2}$$

nema singularnih rešenja, odnosno pod kojima je svako rešenje te jednačine pravilno.

Teorema 1.1.2. (Teorema Uintnera) *Neka u oblasti* $\mathcal{Q} = \{(t, x) : 0 < t < \infty, x \in \mathbb{R}^2\}$ *važi nejednakost*

$$\big|f(t, x_1, x_2)\big| \leq h(t) w\left(|x_1| + |x_2|\right),$$

gde je $h \in C(\mathbb{R})$*, a funkcija* $w \in C([0, \infty))$ *pozitivna, neopadajuća i*

$$\int_0^\infty \frac{dr}{w(t)} = \infty.$$

Neka je sem toga za svako $t_0 \in [0, \infty)$ *trivijalno rešenje jedino rešenje jednačine* (1.2) *koje zadovoljava početne uslove* $x(t_0) = x'(t_0) = 0$*. Tada je svako rešenje jednačine* (1.2) *pravilno.*

Bez daljeg naglašavanja, mi ćemo u daljem radu pod rešenjem jednačine podrazumevati neproduživo, pravilno rešenje.

Pojam oscilatornog i neoscilatornog rešenja definisaćemo za opštu diferencijalnu jednačinu drugog reda, s obzirom da se ovi pojmovi u klasi linearnih i nelinearnih jednačina isto definišu.

Definicija 1.1.5. Pravilno rešenje $x(t)$ diferencijalne jednačine drugog reda definisano na $[t_0, \infty)$ naziva se **oscilatorno** ako za svako $T \geq t_0$ postoje t_1 i t_2 takvi da je $T < t_1 < t_2$ i $x(t_1)x(t_2) < 0$. Za samu jednačinu kažemo da je oscilatorna, ako su sva njena rešenja oscilatorna.

Definicija 1.1.6. Pravilno rešenje $x(t)$ diferencijalne jednačine drugog reda naziva se **neoscilatorno** ako postoji T_0 takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$. Ako je svako rešenje jednačine neoscilatorno, jednačinu nazivamo neoscilatornom.

Kako su linearne diferencijalne jednačine drugog reda najčešći modeli oscilatornih fizičkih sistema, razvoj teorije oscilatornosti je upravo krenuo od proučavanja oscilatornosti linearnih jednačina. Jedni od najpoznatijih rezultata su Šturmove [1] teoreme upoređenja i o razdvajanju nula.

Teorema 1.1.3. (Šturmova teorema upoređenja) *Neka su koeficijenti jednačina*

$$\big(p_1(t)x'\big)' + q_1(t)x = 0, \tag{1.3}$$

$$\big(p_2(t)x'\big)' + q_2(t)x = 0, \tag{1.4}$$

neprekidne funkcije na $J = [t_0, t^0]$ *i neka je*

$$p_1(t) \geq p_2(t) > 0, \quad q_1(t) \leq q_2(t), \quad t \in J. \tag{1.5}$$

Pretpostavimo da pravilno rešenje $x = x_1(t)$ *jednačine* (1.3) *ima tačno* $n\,(\geq 1\,)$ *nula* $t = t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *za* $t_0 < t \leq t^0$, *a pravilno rešenje* $x = x_2(t)$ *jednačine* (1.4) *zadovoljava uslov*

$$\frac{p_1(t)x_1'(t)}{x_1(t)} \geq \frac{p_2(t)x_2'(t)}{x_2(t)}, \quad t \in J.$$

Tada rešenje $x_2(t)$ *ima na* $(t_0, t_n]$ *najviše* n *nula.*

Napomenimo da ako koeficijenti jednačine (1.3) i (1.4) zadovoljavaju uslov (1.5), tada se jednačina (1.4) naziva *majorantom Šturma* jednačine (1.3), a jednačina (1.3) *minorantom Šturma* jednačine (1.4).

Teorema 1.1.4. (Šturmova teorema o razdvajanju nula) *Neka je jednačina* (1.4) *majoranta Šturma jednačine* (1.3). *Tada se između svake dve susedne nule proizvoljnog rešenja* $x = x_1(t)$ *jednačine* (1.3) *nalazi najmanje jedna nula bilo kog rešenja* $x = x_2(t)$ *jednačine* (1.4).

Korišćenjem Šturmove teoreme o razdvajanju nula moguće je pokazati izvestan broj korisnih svojstava, kao na primer da ako je q neprekidna funkcija na (a, b) i $0 < m \leq q(t) \leq M$, za svako $t \in (a, b)$, tada za ma koje dve susedne nule $t_1 < t_2$ rešenja $x(t)$ jednačine

$$x'' + q(t)x = 0 \tag{1.6}$$

[1] J.Ch F. Sturm, nemački matematičar, 1803–1855

važi da je $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Sem toga, ako je q neopadajuća (nerastuća) pozitivna funkcija, tada rastojanje između susednih nula proizvoljnog rešenja jednačine (1.6) ne raste (ne opada).

Od velikog praktičnog značaja je i nejednakost Ljapunova, na osnovu koje je moguće oceniti broj nula bilo kog rešenja na proizvoljnom konačnom intervalu.

Teorema 1.1.5. (Ljapunov) *Ako je funkcija* $q \in C((a,b))$, *tada je nejednakost*

$$\int_a^b q_+(t)\,dt < \frac{4}{b-a}, \quad q_+(t) = \max\{q(t), 0\}$$

potreban uslov da jednačina (1.6) *ima rešenje koje na* (a,b) *ima dve nule.*

Teorema 1.1.6. *Neka je funkcija* $q \in C([0,T])$, $x(t)$ *rešenje jednačine* (1.6) *i* N *broj njegovih nula na poluintervalu* $(0,T]$. *Tada je*

$$N < \frac{1}{2}\left(\int_0^T q_+(t)\,dt\right)^{1/2} + 1.$$

Napomenimo da je dokaze svih navedenih teorema, kao i ostale rezultate iz teorije oscilatornosti linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, moguće naći u knjizi P. Hartmana [51].

1.2. Integralno usrednjenje u oscilatornosti diferencijalnih jednačina drugog reda

U proučavanju oscilatornosti linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, mnogi kriterijumi obuhvataju uslove koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina. Ti kriterijumi su motivisani klasičnim, dobro poznatim Wintnerovim kriterijumom oscilatornosti linearne diferencijalne jednačine iz 1949. godine, da je uslov

$$(A_1) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s q(u)\,du\,ds = \infty,$$

dovoljan za oscilatornost linearne diferencijalne jednačine

$$(L) \qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0.$$

Wintnerov rezultat je nešto kasnije 1952. poboljšao Hartman, pokazavši da se uslov (A_1) može zameniti sa sledeća dva slabija uslova

$$(A_2) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau)\,d\tau\,ds > -\infty,$$

$$(A_3) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau)\,d\tau\,ds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(\tau)\,d\tau\,ds.$$

Da bi pojasnili pojam integralnog usrednjenja u teoriji oscilatornosti diferencijalnih jednačina izložićemo najpre opštu šemu metode integralnog usrednjenja za sistem diferencijalnih jednačina. Taj metod je razvijen početkom šezdesetih godina ovog veka i našao je široku primenu ne samo u teoriji oscilacija, već i u mnogim granama fizike, a posebno u oblasti nebeske mehanike i automatske regulacije. Osnovna ideja metode usrednjenja je da rešenje polaznog sistema aproksimiramo rešenjem sistema za koji već imamo poznate metode rešavanja ili rešenjem sistema koje možemo kvalitativno lakše analizirati.

Opšta šema metode usrednjenja za sistem diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo sistem

$$x' = \varepsilon\, X(t,x), \tag{2.1}$$

gde je $x - n$-dimenzionalni vektor, $\varepsilon > 0$ mali parametar i funkcija $X(t,s)$ definisana u oblasti $\mathcal{Q} = \{(t,x)\,|\,t \geq 0,\ x \in Q,\ Q \subset \mathbb{R}^n\}$. Sistemu (2.1) pridružujemo sistem

$$\xi' = \varepsilon\, X_0(\xi) \tag{2.2}$$

gde je

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt. \tag{2.3}$$

Sistem (2.2) se naziva odgovarajući usrednjeni sistem polaznog sistema (2.1). Važi sledeća teorema o bliskosti rešenja sistema (2.1) i (2.2) na konačnom intervalu:

Teorema 1.2.1. (Larionov, Filatov) *Ako važi:*

1) *funkcija $X(t,x)$ je neprekidna po t u oblasti $\mathcal{Q}$ i zadovoljava Lipšicov*[2] *uslov po promenljivoj x u toj oblasti;*

2) *u svakoj tački oblasti Q postoji granična vrednost* (2.3)*;*

3) *rešenje $\xi = \xi(t), \xi(0) = x(0) \in Q$ sistema* (2.2) *je definisano za svako $t \geq 0$ i leži u nekoj okolini $K(0,\delta) \subset Q$;*

4) *funkcija $X_0(x)$ zadovoljava Lipšicov uslov na Q, pri čemu na svakom konačnom segmentu $[t_1, t_2]$ duž integralne krive $\xi(t)$ važi nejednakost*

$$\left|\left|\int_{t_1}^{t_2} X_0(\xi(t))\,dt\right|\right| \leq M(t_2 - t_1), \quad M = const.$$

Tada za svako $\nu > 0$ i $L > 0$ postoji ε_0, tako da za $\varepsilon < \varepsilon_0$ na segmentu $[0, L\varepsilon^{-1}]$ važi nejednakost

$$||x(t) - \xi(t)|| < \nu.$$

Očigledno da su ovde nađeni uslovi pod kojima je razlika između tačnog rešenja i njegovog asimptotski približnog, pri dovoljno malim vrednostima parametra dovoljno mala na koliko hoćemo velikom, ali konačnom intervalu.

U monografiji A.N.Filatova [26] sistematski su izložene metode usrednjenja u diferencijalnim, integro-diferencijalnim i integralnim jednačinama i naznačene su različite oblasti primene tih metoda pri izučavanju nelinearnih oscilacija, tako da ova monografija sigurno može poslužiti kao polazna osnova u razumevanju i savladavanju ove metode.

Sada primećujemo da u Wintnerovom uslovu (A_1) izraz na levoj strani jednakosti zapravo podrazumeva integralno usrednjenje funkcije $Q(s) = \int_0^s q(u)\,du$. Problem nalaženja kriterijuma oscilatornosti nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju integralno usrednjenje koeficijenata tih jednačina, je privukao pažnu velikog broja autora. O tome

[2] R.Lipschitz, nemački matematičar, 1832–1903

svedoči veliki broj radova sa ovakvom problematikom, a u šta ćemo se uveriti u narednom poglavlju za dva konkretna tipa nelinearnih jednačina.

Kamenev [62] je 1978. koristivši po prvi put težinsko usrednjenje, uopštio Winterov kriterijum, pokazavši da je linearna diferencijalna jednačina (L) oscilatorna ako važi

$$(A_4) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta}\int_0^t (t-s)^\beta q(s)\,ds = \infty \quad \text{za neko } \beta > 1$$

i taj kriterijum je kao i Wintnerov poslužio kao temelj u procesu dobijanja kriterijuma oscilatornosti raznih tipova nelinearnih diferencijalnih jednačina. Philos [106] je generalizovao taj rezultat Kameneva uvodeći težinsku funkciju $\varrho \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$ i pokazavši da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}}\int_0^t (t-s)^{n-3}\left[(t-s)^2\varrho(s)q(s) - \frac{[(n-1)\varrho(s)-(t-s)\varrho'(s)]^2}{4\,\varrho(s)}\right] ds = \infty,$$

za neki prirodan broj $n \geq 3$ dovoljan za oscilatornost linearne jednačine (L). Težinsko usrednjenjenje ćemo detaljnije obrazložiti u Poglavlju 1.4.

1.3. Oscilatornost uopštene diferencijalne jednačine Emden–Fowlera

Verovatno najviše proučavana nelinerna diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina oblika

$$(EF) \qquad x''(t) = q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t)$$

gde je $\lambda \neq 1$, koja je u literaturi poznata kao *diferencijalna jednačina tipa Emden–Fowler*. Jednačina ovog oblika je po prvi put privukla pažnju R. Emdena, krajem XIX veka, u prvim teorijama dinamike gasova u astrofizici, dok se tridesetih godina ovog veka pojavljuje u radovima E. Fermia i L.H. Thomasa u proučavanju distribucije elektrona u teškom atomu. Jednačina tipa Emden–Fowler se takođe pojavljuje u proučavanju mehanike fluida, relativističke mehanike, nuklearne fizike, kao i u proučavanju hemiskih reakcija sistema.

Do sada su za jednačinu ovog oblika dokazane teoreme o egzistenciji pravilnih i singularnih rešenja, teoreme o jedinstvenosti i produživosti rešenja, ustanovljeni su brojni kriterijumi za oscilatornost i neoscilatornost pravilnih rešenja, dovoljni uslovi da sva rešenja budu ograničena, kao i uslovi koji obezbeđuju da sva rešenja zadovoljavaju uslov

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

date su ocene rešenja u okolini beskonačno dalekih tačaka i asimptotske formule rešenja. Takođe je ocenjena i brzina rasta neoscilatornih rešenja, odnosno od posebnog fizičkog interesa su rešenja koja zadovoljavaju jedan od sledeća dva uslova

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \beta \neq 0,$$

ili

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = 0,$$

tako da su utvrđeni potrebni i dovoljni uslovi da jednačina (EF) ima rešenja koja zadovoljavaju jedan od ova dva uslova. Prvim uslovom su određena ograničena neoscilatorna rešenja, dok su drugim uslovom određena asimptotski linearna rešenja.

Kao prirodno uopštenje jednačine Emden–Fowlera, u teoriji kvalitativne analize diferencijalnih jednačina, pojavila se diferencijalna jednačina oblika

$$(GEF) \qquad x''(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0$$

gde je $q \in C([t_0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, neprekidno diferencijabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i zadovoljava uslove

$$xf(x) > 0 \quad \text{i} \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{za svako} \quad x \neq 0.$$

Jednačina ovog oblika se u literaturi često naziva *uopštena diferencijalna jednačina Emden–Fowlera.*

Diferencijalna jednačina (GEF) je **sublinearna** ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sublinearna tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$0 < \int_{0+}^{\varepsilon} \frac{du}{f(u)}, \int_{0-}^{-\varepsilon} \frac{du}{f(u)} < \infty.$$

Diferencijalna jednačina (GEF) je **superlinearna** ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ superlinearna tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$0 < \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{f(u)}, \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty.$$

Specijalno, jednačina (EF) je sublinearna ako je $\gamma \in (0, 1)$, a superlinearna za $\gamma > 1$.

Osamdesetih godina, veliki broj autora je učinio napredak pokazavši da veliki broj kriterijuma oscilatornosti za jednačinu Emden–Fowlera, pod dodatnim pretpostavkama za funkciju f, važi i za uopštenu jednačinu Emden–Fowlera. Ti kriterijumi se mogu klasifikovati u dve grupe, u odnosu na sublinearnost odnosno superlinearnost jednačine.

1.3.1. Oscilatornost superlinearne uopštene jednačine Emden–Fowlera

Butler [6] je 1980. pokazao da Wintnerova i Hartmanova teorema za linearnu diferencijalnu jednačinu važe i za superlinearnu jednačinu (EF). Kako je Kamenev [61] pokazao da se u sublinearnom slučaju jednačine (EF) uslov (A_1) može oslabiti sledećim uslovom

$$(A_5) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} (t-s)q(s)\, ds = \infty,$$

postavio se isti problem i za superlinearnu jednačinu. Međutim, Willett [121] je pokazao da uslov (A_5) sam nije dovoljan za oscilatornost kako linearne jednačine tako i superlinearne jednačine Emden–Fowlera. Zato je Wong [125] 1973. pokazao da ako se uz uslov (A_5) pretpostavi da je

$$(A_6) \qquad \liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds = -\nu > -\infty, \quad \nu > 0$$

superlinearna jednačina (EF) je oscilatorna. Philos je 1984. ovaj rezultat uopštio na jednačinu (GEF), pokazavši da su ova dva uslova dovoljna i za oscilatornost superlinearne jednačine (GEF), pod dodatnim pretpostavkama za funkciju f. On je naime pokazao sledeći kriterijum:

(I) Philos [108]: *Ako je funkcija f takva da je*

$$(*)\qquad \int^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du < \infty \quad i \quad \int^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du < \infty$$

i

$$(F_1)\qquad \min\left\{ \inf_{x>0} \frac{\left(\int_x^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du\right)^2}{\int_x^{\infty} \frac{du}{f(u)}},\ \inf_{x<0} \frac{\left(\int_x^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du\right)^2}{\int_x^{-\infty} \frac{du}{f(u)}} \right\} > 0,$$

tada je superlinearna jednačina (GEF) oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi (A_5) i (A_6).

Onose [104] je pokazao da su uslovi (A_5) i (A_6) dovoljni za oscilatornost superlinearne jednačine (GEF) i ako funkcija f zadovoljava uslov

(F) postoji pozitivna konstanta k takva da je $f'(x) \geq k$ za svako $x \neq 0$.

Postoje funkcije koje zadovoljavaju uslov (F_1), a ne zadovoljavaju uslov (F), na primer funkcija $f(x) = |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x$, $\lambda > 1$. Važi i obrnuto, da se na izvesne tipove jednačine (GEF) može primeniti teorema Onosea, ali ne i kriterijum (I). Dakle, ova dva kriterijuma su međusobno nezavisna. Philos je uopštio ovaj rezultat Onosea pokazavši sledeći kriterijum:

(II) Philos [109]: *Pretpostavimo da važi (F) i neka je ϱ pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na intervalu $[t_0, \infty)$, takva da je ϱ' nenegativna i opadajuća funkcija na $[t_0, \infty)$. Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako*

$$(A_7)\qquad \liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \varrho(s)q(s)\,ds > -\infty,$$

$$(A_8)\qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \varrho(\tau)q(\tau)\,d\tau\,ds = \infty$$

Treba naglasiti da je uslov (A_6) stroži od uslova (A_7) za $\varrho(t) \equiv 1$ na $\mathbb{R}_+$.

Wong i Yeh su pokazali da ako funkcija f zadovoljava uslov (F) važe i sledeća dva kriterijuma:

(III) Wong, Yeh [135]: *Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važi (F), (A_7) i*

$$(A_9)\qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\beta}} \int_0^t (t-s)^{\beta} \varrho(s)q(s)\,ds = \infty \quad za\ neko\ \beta \geq 1,$$

gde je ϱ pozitivna, konkavna funkcija.

(IV) Wong, Yeh [135]: *Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važi (F), (A_4) i*

$$(A_{10})\qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(s)\,ds > -\infty.$$

Premetimo da su prethodna dva kriterijuma jedan vid generalizacije teoreme Kameneva za linearnu jednačinu na jednačinu (GEF), ali se ne mogu primeniti na jednačinu (EF), jer funkcija $f(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x,\ \lambda > 1$ ne zadovoljava uslov (F). Tek je 1986. Wong rešio problem uopštenja teoreme Kameneva za linearnu jednačinu na jednačinu (EF) i pokazao u [128] da uslovi (A_4) i (A_6) povlače oscilatornost jednačine (EF) za svako $\gamma > 0$, odnosno da su ova dva uslova dovoljna za oscilatornost kako superlinearne tako i sublinearne jednačine (EF). U [113], Philos je dao uopštenje ovog kriterijuma na jednačinu (GEF).

(V) Philos [113]: *Ako funkcija f zadovoljava $(*)$ i*

$$(F_2)\qquad \min\left\{\inf_{x>0}\sqrt{f'(u)}\int_x^{\infty}\frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du\,,\ \inf_{x<0}\sqrt{f'(u)}\int_x^{-\infty}\frac{\sqrt{f'(u)}}{f(u)}\,du\right\} > 0$$

tada je superlinearna jednačina (GEF) oscilatorna ako važe uslovi (A_6) i

$$(A_{11})\qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}q(s)\,ds = \infty \text{ za neki prirodan broj } n > 2.$$

Kako je u [108] pokazano da uslov (F_2) povlači (F_1), iz kriterijuma (I) i (V) sledi da je superlinearna jednačina (GEF) oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi (F_2), (A_6) i

$$(A_{12})\qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}q(s)\,ds = \infty \text{ za neki prirodan broj } n \geq 2.$$

Treba napomenuti da su uslovi (F_1) i (F_2) zadovoljeni za funkciju $f(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x,\ \lambda > 1$, što njihovu formulaciju čini sasvim prirodnom.

U [112] Philos je dalje proširio i poboljšao kriterijume (I) i (V).

(VI) Philos [112]: *Pretpostavimo da važi (F_1) i neka je ϱ pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na intervalu $[t_0,\infty)$, takva da je ϱ' nenegativna i opadajuća funkcija na $[t_0,\infty)$. Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važi (A_7) i*

$$(A_{13})\qquad \limsup_{t\to\infty}\Big(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\varrho(s)}\Big)^{-1}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varrho(s)}\int_{t_0}^{s}\varrho(\tau)q(\tau)\,d\tau\,ds = \infty.$$

(VII) Philos [112]: *Pretpostavimo da važi (F_2). Ako funkcija ϱ zadovoljava uslove prethodnog kriterijuma i*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t}\varrho(s)\left(\int_{t_0}^{s}\frac{d\tau}{\varrho(\tau)}\right)ds < \infty,$$

superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važe uslovi (A_7) i

$$(A_{14})\qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}\varrho(s)q(s)\,ds = \infty \text{ za neki prirodan broj } n > 2.$$

Wong je 1989. u [132] pokazao da je superlinearna jednačina (EF) oscilatorna ako važi (A_2) i

$$(A_{15})\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}q(\tau)\,d\tau\,ds \text{ ne postoji u } \mathbb{R}.$$

Kako je uslov (A_2) slabiji od (A_6) i svaki od uslova (A_5) i (A_{11}) povlači (A_{15}), ovaj kriterijum uključuje dva prethodno spomenuta kriterijuma istog autora u [125, 128]. Philos i Purnaras su 1992. u [117] proširili ovaj kriterijum na jednačinu (GEF):

(VIII) Philos i Purnaras [117]: *Pretpostavimo da*

$$(F_3) \qquad \min\left\{\inf_{x>0} f'(x)\int_x^{\infty}\frac{du}{f(u)}\,,\ \inf_{x<0} f'(x)\int_x^{-\infty}\frac{du}{f(u)}\right\} > 1.$$

Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važe uslovi (A_{15}) i

$$(A_{16}) \qquad \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}q(s)\,ds > -\infty \text{ za neki prirodan broj } n \geq 1.$$

Primetimo da uslov (F_3) povlači (F_2), kao i da je za superlinearnu jednačinu (EF) pretpostavka (F_3) zadovoljena. Štaviše, uslov (A_{16}) je zadovoljen ako važe (A_6) ili (A_2). Dakle, kriterijum (VIII) uključuje kriterijume (I) i (V).

Iz kriterijuma (VIII) sledi da su uslovi (A_5) i (A_{16}) dovoljni za oscilatornost superlinearne jednačine (GEF). Ovaj kriterijum su 1992. Philos i Purnaras poboljšali, pokazavši sledeći kriterijum:

(IX) Philos i Purnaras [116]: *Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važe uslovi (F_3), (A_{16}) i*

$$(A_{17}) \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s}q(\tau)\,d\tau\right]^2 ds = \infty.$$

Zapravo, primenom Švarcove[3] nejednakosti nije teško zaključiti da $(A_5) \Rightarrow (A_{17})$.

Li i Yan [88] su 1997. dali još jednu generalizaciju kriterijuma (V), pokazavši da u uslovu (A_{11}) nije neophodno da n bude prirodan broj, dok su umesto uslova (A_6) koristili slabiji uslov

$$(A_{18}) \qquad \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\alpha}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha}q(s)\,ds > -\infty \text{ za neko } \alpha \geq 1.$$

Konkretno, važi sledeći kriterijum:

(X) Li, Yan [88]: *Superlinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako važe uslovi (F_3), (A_4) i (A_{18}).*

1.3.2. Oscilatornost sublinearne uopštene jednačine Emden–Fowlera

U sublinearnom slučaju jednačine (EF) Butler [6] je pokazao da se u Hartmanovoj teoremi uslov (A_2) može zanemariti, odnosno da je uslov (A_3) dovoljan za oscilatornost. Kamenev [61] je pokazao da se uslov (A_1) Wintnerove teoreme može oslabiti uslovom (A_5), a Philos je 1984. koristeći težinsko usrednjenje taj rezultat dalje uopštio na sublinearnu jednačinu (GEF). Zatim je u nekoliko svojih narednih radova pokazao i izvesna poboljšanja tog kriterijuma. Naime, on je u [107] definisao konstantu

$$I_f = \min\left\{\frac{\inf_{x>0} f'(x)F(x)}{1+\inf_{x>0} f'(x)F(x)}\,,\ \frac{\inf_{x<0} f'(x)F(x)}{1+\inf_{x<0} f'(x)F(x)}\right\}, \quad 0 \leq I_f < 1,$$

[3]Schwarc H.A., nemački matematičar, 1843–1921

gde je

$$F(x) = \int_{0+}^{x} \frac{du}{f(u)} \quad \text{za} \quad x > 0, \quad F(x) = \int_{0-}^{x} \frac{du}{f(u)} \quad \text{za} \quad x < 0$$

i pokazao sledeći kriterijum:

(XI) Philos [107]: *Sublinearna jednačina* (GEF) *je oscilatorna ako postoji pozitivna, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija* ϱ *na* $[t_0, \infty)$*, takva da je* $\varrho' \geq 0$*,* $\varrho'' \leq 0$ *na* $[t_0, \infty)$ *i da zadovoljava uslov*

$$(A_{19}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} \varrho^{\beta}(\tau) q(\tau)\, d\tau\, ds = \infty,$$

za $\beta = I_f$*.*

Za sublinearnu jednačinu (EF) se lako zaključuje da je $I_f = \lambda$, a odgovarajući kriterijum za tu jednačinu koji je uopštio Philos, pokazali su Kwong i Wong [76]. Uzimajuću u Philosovom kriterijumu $\varrho(t) = 1,\ t \geq t_0$ ako je $I_f = 0$ ili $\varrho(t) = t^{\gamma/\beta},\ t \geq t_0,\ 0 \leq \gamma \leq I_f$ ako je $I_f > 0$, dobija se raniji rezultat Philosa u [105] za jednačinu (GEF), odnosno rezultat Kure u [67] za jednačinu (EF).

Philos je zatim 1991. poboljšao svoj rezultat iz [107], pokazavši sledeća dva kriterijuma:

(XII) Philos [115]: *Sublinearna jednačina* (GEF) *je oscilatorna ako postoji pozitivna, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija* ϱ *na* $[t_0, \infty)$*, takva da je* $\varrho' \geq 0$*,* $\varrho'' \leq 0$ *na* $[t_0, \infty)$ *i da zadovoljava uslov*

$$(A_{20}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \varrho^{I_f}(s) q(s)\, ds = \infty \quad \textit{za neki prirodan broj } n \geq 2.$$

(XIII) Philos [115]: *Neka je* $n \geq 2$ *prirodan broj i* ϱ *pozitivna, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na* $[t_0, \infty)$ *takva da za neku pozitivnu konstanu* c *zadovoljava uslov*

$$[\varrho'(t)]^2 \leq -c\, \varrho(t) \varrho''(t) \quad \textit{za svako } t \geq t_0,$$

Sublinearna jednačina (GEF) *je oscilatorna ako postoji neprekidna funkcija* φ *na* $[t_0, \infty)$ *takva da je*

$$(*) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds = \infty, \quad s \geq t_0,$$

i

$$(A_{21}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{T}^{t} (t-s)^{n-1} \varrho^{I_f}(s) q(s)\, ds \geq \varphi(T) \quad \textit{za svako} \quad T \geq t_0.$$

Za $n = 2$ iz uslova (A_{20}) se dobija uslov (A_{19}), odnosno kriterijum (XI) je direktna posledica kriterijuma (XII). Takođe, iz kriterijuma (XIII) za $n = 2$ dobija se rezultat istog autora - Teorema 1. u [110]. U tom radu Philos je pokazao i sledeći kriterijum:

(XIV) Philos [110]: *Neka je* ϱ *pozitivna, dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija na* $[t_0, \infty)$ *takva da je*

$$\varrho' > 0 \quad i \quad \varrho'' \leq 0 \quad na\ [t_0, \infty)$$

i neka je φ neprekidna funkcija na $[t_0, \infty)$ takva da je

$$(A_{22}) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_T^t \int_T^s \varrho^{I_f}(\tau) q(\tau)\, d\tau\, ds \geq \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq t_0.$$

Tada je sublinearna jednačina (GEF) oscilatorna ako je

$$(A_{23}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)} \right)^2 s\, ds \right]^{-1} \int_{t_0}^t \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds = \infty.$$

Wong i Yeh su 1992. dali još jednu generalizaciju teoreme Kameneva o oscilatornosti linearne jednačine, pokazavši da u uslovu (A_{20}) nije neophodno da n bude prirodan broj. Zapravo pokazan je sledeći kriterijum:

(XV) Wong, Yeh [136]: *Sublinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako postoji $\alpha > 1$ i $\beta \in [0, I_f]$ tako da je*

$$(A_{24}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \varrho^\beta(s) q(s)\, ds = \infty,$$

gde je $\varrho \in C^2([t_0, \infty))$ pozitivna, konkavna funkcija.

Primetimo da, kako je Wong pokazao u [128] da uslovi (A_4) i (A_6) povlače oscilatornost jednačine (EF) za svako $\gamma > 0$, iz prethodnog kriterijuma se može zaključiti da je uslov (A_6) u slučaju sublinearne jednačine suvišan.

Wong je koristeći sublinearan uslov

$$(F_4) \qquad f'(x)F(x) \geq \frac{1}{c} > 0 \quad \text{za svako} \quad x \neq 0$$

za funkciju f pokazao i sledeći kriterijum:

(XVI) Wong [134]: *Sublinearna jednačina (GEF) je oscilatorna ako postoji pozitivna konkavna funkcija ϱ na $[t_0, \infty)$ i $q(t)$ zadovoljava uslov*

$$(A_{25}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \left(\int_{t_0}^t \frac{A_+^2(s)}{s}\, ds \right) \left(\int_{t_0}^t \frac{s\varrho'^2(s)}{\varrho^2(s)}\, ds \right)^{-1} = \infty,$$

gde je za svako $s \geq t_0$ funkcija $A(s)$ definisana sa

$$A(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^T \int_s^t \varrho^\beta(\tau) q(\tau)\, d\tau\, dt, \quad \beta = \frac{1}{1+c}.$$

Odgovarajući rezultat za jednačinu (EF) pokazali su Kwong i Wong [74].

Wong je 1993. uopštio Hartmanovu teoremu na jednačinu (GEF) sa sublinearnim uslovom (F_4) za funkciju f.

(XVII) Wong [138]: *Uslovi (F_4), (A_2) i (A_3) povlače oscilatornost sublinearne jednačine (GEF).*

Wong je u [133] pokazao da su uslovi (A_2) i (A_{17}) dovoljni za oscilatornost sublinearne jednačine (EF), tako da se prirodno nametnulo pitanje kada su ova dva uslova dovoljna za oscilatornost sublinearne jednačine (GEF). Isti autor je par godina kasnije dao odgovor na to pitanje, pokazavši sledeće:

(XVIII) Wong [138]: *Uslovi* (F_4), (A_2) *i* (A_{17}) *povlače oscilatornost sublinearne jednačine* (GEF).

Kako uslov (A_5) povlači uslov (A_{17}), zaključujemo da su uslovi (F_4), (A_5) i (A_2) dovoljni za oscilatornost jednačine (GEF). Štaviše iz dokaza Wongove teoreme u [138] može se zaključiti da rezultat važi i pod slabijom pretpostavkom

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds > -\infty,$$

umesto (A_2). Zato su Philos i Purnaras umesto pretpostavke (A_2) koristili slabiji uslov

$$(A_{26}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} q(s)\, ds > -\infty \text{ za neki prirodan broj } n \geq 2$$

i pokazali da važi sledeći kriterijum oscilatornosti:

(XIX) Philos i Purnaras [116]: *Ako funkcija* f *zadovoljava uslov*

$$(F_5) \qquad \min\left\{ \inf_{x>0} f'(x) \int_{0+}^{x} \frac{du}{f(u)}\,,\ \inf_{x<0} f'(x) \int_{0-}^{x} \frac{du}{f(u)} \right\} > 0,$$

sublinearna jednačina (GEF) *je oscilatorna ako važe uslovi* (A_{17}) *i* (A_{26}).

1.4. Težinsko usrednjenje i oscilatornost

Poslednjih dvadesetak godina, od posebnog interesa je utvrđivanje kriterijuma oscilatornosti linearnih i nelinearnih diferencijalnih jednačina koji podrazumevaju težinsko usrednjenje koeficijenata tih jednačina i koji su motivisani kriterijumom Kameneva za linearnu diferencijalnu jednačinu, da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\beta}} \int_{0}^{t} (t-s)^{\beta} q(s)\, ds = \infty \quad \text{za neko } \beta > 1$$

dovoljan za oscilatornost jednačine

$$(L) \qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Među kriterijumima oscilatornosti uopštene diferencijalne jednačine Emden–Fowlera navedenim u prethodnom poglavlju, uslovi koji uključuju težinsko usrednjenje koeficijenta $q(t)$ su na primer uslovi (A_4), (A_5), (A_8), (A_9), (A_{12}), (A_{14}), (A_{19}), (A_{20}), (A_{24}). Može se primetiti da je kao težinska funkcija najčešće korišćena pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija ϱ takva da je ϱ' nenegativna i opadajuća funkcija i funkcija $(t-s)^{\beta}$ za β prirodan ili realan broj veći od jedinice ili proizvod ovih funkcija. Na primer svaka od sledećih funkcija ϱ zadovoljava navedene uslove:

(i) $\varrho(t) = t^{\beta}, t \geq t_0$ za $\beta \in [0,1]$;
(ii) $\varrho(t) = \log^{\beta} t, t \geq t_0$ za $\beta > 0$, gde je $t_0 > \max\{1, e^{\beta-1}\}$;
(iii) $\varrho(t) = t^{\beta} \log t, t \geq t_0$ za $\beta \in (0,1)$, gde je $t_0 > \max\Big\{1, \exp\big(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{\beta}\big)\Big\}$;

(iv) $\varrho(t) = t/\log t, t \geq t_0$, gde je $t_0 \geq e^2$;
(v) $\varrho(t) = \sqrt{t}\,[5 + \sin(\log t)], t \geq t_0$.

Nameće se pitanje da li se kao težinska funkcija može koristiti funkcija iz šire familije funkcija. Philos je 1989. prvi put koristeći familiju parametarskih funkcija $H(t,s)$ u metodi integralnog usrednjenja, pokazao sledeća tri kriterijuma za oscilatornost linearne diferencijalne jednačine:

Teorema 1.4.1. (Philos [111]) *Neka je*

$$H : \mathcal{D} = \{\, (t,s) \,|\, t \geq s \geq t_0 \,\} \to \mathbb{R},$$

neprekidna funkcija koja zadovoljava uslov

$$(H_1) \qquad H(t,t) = 0 \quad za \quad t \geq t_0, \quad H(t,s) > 0 \quad za \quad t > s \geq t_0,$$

i ima neprekidan i nepozitivan parcijalni izvod po promenljivoj s na $\mathcal{D}$. Ako je $\chi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija određena sa

$$(4.4) \qquad -\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \quad za\ svako\ (t,s) \in \mathcal{D},$$

tada je jednačina (L) oscilatorna ako

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \Big[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}\chi^2(t,s) \Big]\, ds = \infty.$$

Teorema 1.4.2. (Philos [111]) *Neka su funkcije H i χ određene kao u Teoremi* 1.4.1., *uz dodatne pretpostavke*

$$(H_2) \qquad 0 < \inf_{s\geq t_0} \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] \leq \infty,$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \chi^2(t,s)\, ds < \infty.$$

Tada je jednačina (L) oscilatorna ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0,\infty)$ takva da je

$$(4.5) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \varphi_+^2(s)\, ds = \infty$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \Big[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}\chi^2(t,s) \Big]\, ds \geq \varphi(T), \quad za\ svako \ \ T \geq t_0.$$

Teorema 1.4.3. (Philos [111]) *Neka su funkcije H i χ određene kao u Teoremi* 1.4.1. *i pretpostavimo da važi (H_2). Tada je jednačina (L) oscilatorna ako*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)q(s)\, ds < \infty.$$

i postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0,\infty)$ koja zadovoljava uslove (4.5) *i*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \Big[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}\chi^2(t,s) \Big]\, ds \geq \varphi(T), \quad za\ svako \ \ T \geq t_0.$$

Koristeći generalizovanu Rikatijevu[4] transformaciju linearne diferencijalne jednačine, Li [79] je dao proširenja ovih Philosovih kriterijuma na linearnu jednačinu oblika $[p(t)x'(t)]' + q(t)x(t) = 0$.

Pored Philosa još su samo tri autora koristila klasu parametarskih funkcija $H(t,s)$ kao težinskih funkcija u metodi usrednjenja. To su Li i Yeh 1997. u ispitivanju oscilatornosti nelinearne jednačine oblika

$$(E) \qquad \big[a(t)\psi(x(t))x'(t)\big]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

gde je $a \in C^1([t_0,\infty);[0,\infty))$, $q \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$, $\psi, f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $xf(x) > 0$ i $\psi(x) > 0$ za $x \neq 0$ i Grace 1992. u ispitivanju oscilatornosti odgovarajuće jednačine sa prigušenjem

$$(E_p) \qquad \big[a(t)\psi(x(t))x'(t)\big]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

gde je $p \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$. Kriterijume oscilatornosti Grace navešćemo na kraju ovog poglavlja, dok ćemo zbog konciznosti izlaganja rezultat Lia i Yeha izložiti u Poglavlju 3.1. Osnovni cilj ove teze biće obogaćenje tih sadržaja kriterijumima oscilatornosti koji podrazumevaju upravo težinsko usrednjenje koeficijenata posmatranih nelinearnih diferencijalnih jednačina, klasom parametarskih funkcija. Zato ćemo ovde najpre definisati klase parametarskih funkcija sa određenim svojstvima, koje će biti korišćene u daljem radu.

Definicija 1.4.1. Za funkciju

$$H : \mathcal{D} = \{\, (t,s) \,|\, t \geq s \geq t_0 \,\} \to \mathbb{R},$$

koja je neprekidna i ima neprekidan parcijalni izvod po promenljivoj s i zadovoljava uslov (H_1), kažemo da ima svojstvo

(i) $\mathbf{H}^+$ ako je

$$(H_3) \qquad h(t,s) = -\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \geq 0, \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D},$$

(ii) $\widetilde{\mathbf{H}}$ ako ima svojstvo $\mathbf{H}^+$ i zadovoljava uslov (H_2);

(iii) $\mathbf{H}^\circ$ ako zadovoljava uslove

$$(H_4) \qquad \frac{\partial H(t,t)}{\partial s} = 0 \quad \text{za} \quad t \geq t_0, \qquad \frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \leq 0 \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D},$$

$$(H_5) \qquad \frac{\partial^2 H(t,s)}{\partial s^2} \geq 0 \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D},$$

$$(H_6) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)} > -\infty \quad \text{za} \quad s \geq t_0;$$

(iv) $\mathbf{H}^\circ$ u odnosu na funkciju $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$, u oznaci $\mathbf{H}^\circ_{\mathbf{a}}$, ako zadovoljava uslove (H_4), (H_6) i

$$(H_7) \qquad \frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \geq 0 \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D};$$

[4] J.F. Riccati, italijanski matematičar, 1676–1754

(v) $\widehat{\mathbf{H}}$ ako ima svojstvo $\widetilde{\mathbf{H}}$ i zadovoljava uslov (H_6);
(vi) $\mathbf{H}^*$ ako ima svojstvo $\mathbf{H}^\circ$ i zadovoljava uslov (H_2);
(vii) $\mathbf{H}^*$ u odnosu na funkciju $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$, u oznaci $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ ako ima svojstvo $\mathbf{H}^\circ_{\mathbf{a}}$ i zadovoljava uslov (H_2).

Za označavanje ovako definisanih klasa parametarskih funkcija $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ koristićemo oznake uvedene uz pomoć Tabele 1. U trećoj koloni tabele naznačeni su i uslovi koje neprekidna funkcija H i sa neprekidnim parcijalnim izvodom po promenljivoj s mora da zadovoljava da bi pripadala konkretnoj klasi.

oznaka	klasa parametarskih funkcija $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom	uslovi koje zadovoljavaju funkcije date klase
$\mathcal{H}^+(\mathcal{D})$	$\mathbf{H}^+$	(H_1), (H_3)
$\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$	$\widetilde{\mathbf{H}}$	(H_1), (H_2), (H_3)
$\mathcal{H}^\circ(\mathcal{D})$	$\mathbf{H}^\circ$	(H_1), (H_4), (H_5), (H_6)
$\mathcal{H}^\circ_a(\mathcal{D})$	$\mathbf{H}^\circ_{\mathbf{a}}$	(H_1), (H_4), (H_6), (H_7)
$\widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$	$\widehat{\mathbf{H}}$	(H_1), (H_2), (H_3), (H_6)
$\mathcal{H}^*(\mathcal{D})$	$\mathbf{H}^*$	(H_1), (H_2), (H_4), (H_5), (H_6)
$\mathcal{H}^*_a(\mathcal{D})$	$\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$	(H_1), (H_2), (H_4), (H_6), (H_7)

Tabela 1.

Primetimo da važe sledeće inkluzije među definisanim klasama funkcija:

$$\mathcal{H}^+(\mathcal{D}) \subset \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D}) \subset \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}^*(\mathcal{D}), \quad \mathcal{H}^+(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}^\circ(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}^*(\mathcal{D}),$$
$$\mathcal{H}^+(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}^\circ_a(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}^*_a(\mathcal{D}).$$

Kako funkcija $H(t,s) = (t-s)^\beta$, $\beta > 1$ ima svojstva $\mathbf{H}^+, \widetilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}^\circ, \mathbf{H}^*, \widehat{\mathbf{H}}$, ovako definisane klase funkcija su prirodno uopštenje do sada korišćene klase težinskih funkcija. Navešćemo u naredna tri primera funkcije koje imaju neka od definisanih svojstava.

Primer 1.4.1. Neka je $\theta(t)$ pozitivna neprekidna funkcija na $[t_0,\infty)$ takva da je

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{du}{\theta(u)} = \infty, \tag{4.6}$$

i $\gamma > 1$ proizvoljna konstanta. Tada možemo definisati funkciju $H(t,s)$ sa

$$H(t,s) = \left(\int_s^t \frac{du}{\theta(u)} \right)^\gamma \qquad \text{za} \qquad t \geq s \geq t_0.$$

Jasno,

$$
\begin{aligned}
&H(t,t)=0 \quad \text{za} \quad t\ge t_0, \quad H(t,s)>0 \quad \text{za} \quad t>s\ge t_0\\
&\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)=-\frac{\gamma}{\theta(s)}\left(\int_s^t\frac{du}{\theta(u)}\right)^{\gamma-1}<0, \quad \text{za} \quad t\ge s\ge t_0,\\
&\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)=\frac{\gamma(\gamma-1)}{\theta^2(s)}\left(\int_s^t\frac{du}{\theta(u)}\right)^{\gamma-2}>0 \quad \text{za} \quad t\ge s\ge t_0,\\
&\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)}=-\limsup_{t\to\infty}\frac{\gamma}{\theta(s)}\left(\int_s^t\frac{du}{\theta(u)}\right)^{-1}>-\infty.
\end{aligned}
$$

Dakle, ovako definisana funkcija H ima svojstvo $\mathbf{H}^\circ$.

Od posebnog interesa je funkcija $\theta(t)=t^\beta,\ \beta\le 1$. Tada je

$$
H(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\left[t^{1-\beta}-s^{1-\beta}\right]^\gamma}{(1-\beta)^\gamma}, & \beta<1\\[2ex] \left(\log\dfrac{t}{s}\right)^\gamma, & \beta=1.\end{cases}.
$$

Ako za funkciju $a\in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$ izaberemo pozitivnu funkciju $\theta\in C([t_0,\infty))$ tako da pored (4.6) zadovoljava i uslov

$$
a'(t)\theta(t)-a(t)\left[\theta'(t)+(\gamma-1)\left(\int_s^t\frac{du}{\theta(u)}\right)^{-1}\right]\le 0,
$$

onda funkcija H zadovoljava i uslov (H_7), odnosno $H\in\mathcal{H}_a^\circ(\mathcal{D})$. $\triangle$

Primer 1.4.2. Neka je $A(t)$ pozitivna diferencijabilna funkcija takva da je $A'(t)=\frac{1}{a(t)}$, za datu funkciju $a\in C([t_0,\infty);(0,\infty))$. Tada, funkciju $H(t,s)$ možemo definisati sa

$$
H(t,s)=[A(t)-A(s)]^\gamma, \quad \text{za} \quad t\ge s\ge t_0,\ \gamma>1
$$

ili sa

$$
H(t,s)=\left(\log\frac{A(t)}{A(s)}\right)^\gamma, \quad \text{za} \quad t\ge s\ge t_0,\ \gamma>1.
$$

U oba slučaja uslov (H_1) je očigledno zadovoljen. U prvom slučaju je i

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)=-\frac{\gamma}{a(s)}\left[A(t)-A(s)\right]^{\gamma-1}\le 0,\\
&\frac{\partial}{\partial s}\left(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)=\frac{\gamma(\gamma-1)}{a(s)}\left[A(t)-A(s)\right]^{\gamma-2}\ge 0,\\
&\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)}=-\frac{\gamma}{a(s)}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{A(t)-A(s)}>-\infty.
\end{aligned}
$$

Dakle, $H\in\mathcal{H}_a^\circ(\mathcal{D})$. U drugom slučaju je

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)=-\frac{\gamma}{a(s)A(s)}\left(\log\frac{A(t)}{A(s)}\right)^{\gamma-1}\le 0,\\
&\frac{\partial}{\partial s}\left(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)=\frac{\gamma}{a(s)A^2(s)}\left(\log\frac{A(t)}{A(s)}\right)^{\gamma-2}\left(\gamma-1+\log\frac{A(t)}{A(s)}\right)\ge 0,\\
&\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)}=-\frac{\gamma}{a(s)A(s)}\limsup_{t\to\infty}\left(\log\frac{A(t)}{A(s)}\right)^{-1}>-\infty,
\end{aligned}
$$

odnosno i ovako definisana funkcija H ima svojstvo $\mathbf{H}_{\mathbf{a}}^{\circ}$ u odnosu na zadatu funkciju $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$. $\triangle$

Primer 1.4.3. Neka je data funkcija $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$. Ako označimo sa

$$A_1(t) = \int_t^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty, \quad t \geq t_0,$$

uzevši u obzir da je A_1 opadajuća funkcija, može se pokazati da funkcija $H(t,s)$ definisana sa

$$H(t,s) = \left(\ln \frac{A_1(s)}{A_1(t)}\right)^{\gamma} A_1(s), \quad \text{za} \quad t \geq s \geq t_0,\ \gamma > 1,$$

ili

$$H(t,s) = \left(\frac{1}{A_1(t)} - \frac{1}{A_1(s)}\right)^{\gamma} A_1^2(s), \quad \text{za} \quad t \geq s \geq t_0,\ \gamma > 1,$$

ima svojstvo $\mathbf{H}_{\mathbf{a}}^{\circ}$. $\triangle$

Sada navedimo spomenute kriterijume oscilatornosti Grace za jednačinu (E) i (E_p). Pretpostavlja se pre svega da su funkcije f i ψ takve da je

$$\frac{f'(x)}{\psi(x)} \geq k > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0$$

i da je $p(t) \leq 0$, $t \geq t_0$.

Teorema 1.4.4. (Grace [41]). *Pretpostavimo da je funkcija f superlinearna i da postoji diferencijabilna funkcija $\varrho : [t_0,\infty) \to (0,\infty)$ takva da je*

$$(4.7) \qquad \big(p(t)\varrho(t)\big)' \geq 0 \quad \text{za} \quad t \geq t_0$$

i funkcija $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$, pri čemu je χ neprekidna funkcija određena sa (4.4). Ako je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\varrho(s)q(s) - \frac{a(s)\varrho(s)}{4k}\Big(\chi(t,s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\sqrt{H(t,s)}\Big)^2 \right] ds = \infty,$$

tada je jednačina (E_p) oscilatorna.

Bez pretpostavke o superlinearnosti funkcije f i uslova (4.7) teorema važi i za jednačinu (E).

Teorema 1.4.5. (Grace [41]). *Neka su funkcije f i f/ψ superlinearne, funkcije H i χ definisane kao u Teoremi 1.4.4. i $\varrho \in C^1([t_0,\infty))$ pozitivna funkcija koja zadovoljava uslove (4.4), (4.7) i*

$$(4.8) \qquad \varrho'(t) \geq 0 \quad i \quad (a(t)\varrho'(t))' \leq 0 \quad za \quad t \geq t_0.$$

Jednačina (E_p) je oscilatorna ako važi

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)\varrho(s)q(s) - \frac{a(s)\varrho(s)}{4k}\chi^2(t,s) \right] ds = \infty.$$

Naredna tri teoreme su kriterijumi oscilatornosti jednačine (E).

Teorema 1.4.6. (Grace [41]). *Neka je* $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$, χ *funkcija definisana kao u Teoremi* 1.4.4. *i* $\varrho \in C^1([t_0,\infty))$ *pozitivna funkcija, pri čemu važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s)\varrho(s)\Big(\chi(t,s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\sqrt{H(t,s)}\Big)^2 ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija Ω *na* $[t_0,\infty)$ *takva da je*

$$\begin{aligned}(4.9) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \Bigg[& H(t,s)\varrho(s)q(s) - \frac{a(s)\varrho(s)}{4k} \\ & \times \Big(\chi(t,s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\sqrt{H(t,s)}\Big)^2\Bigg] ds \ge \Omega(T) \quad \text{za svako} \quad T \ge t_0,\end{aligned}$$

i

$$(4.10) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\Omega_+^2(s)}{a(s)\varrho(s)}\, ds = \infty,$$

gde je $\Omega_+(t) = \max\{\Omega(t), 0\}$, *tada je jednačina* (E) *oscilatorna.*

Teorema 1.4.7. (Grace [41]). *Neka su funkcije* H, χ *i* ϱ *definisane kao u Teoremi* 1.4.6., *pri čemu važi i*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho(s)q(s)\, ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija Ω *na* $[t_0,\infty)$ *takva da je* (4.10) *i*

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \Bigg[& H(t,s)\varrho(s)q(s) - \frac{a(s)\varrho(s)}{4k} \\ & \times \Big(\chi(t,s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\sqrt{H(t,s)}\Big)^2\Bigg] ds \ge \Omega(T) \quad \text{za svako} \quad T \ge t_0,\end{aligned}$$

tada je jednačina (E) *oscilatorna.*

Teorema 1.4.8. (Grace [41]). *Neka je funkcija* $f(x)/\psi(x)$ *superlinearna, funkcije* H *i* χ *definisane kao u Teoremi* 1.4.6. *i* $\varrho \in C^1([t_0,\infty))$ *pozitivna funkcija koja zadovoljava uslov* (4.8), *pri čemu važi i*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \varrho(s)q(s)\, ds > -\infty$$

i

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\varrho(s)}\, ds = \infty.$$

Jednačina (E) *je oscilatorna ako postoji neprekidna funkcija* Ω *na* $[t_0,\infty)$ *takva da je* (4.9) *i* (4.10).

Glava 2

Oscilatornost polulinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda

U ovoj glavi biće dokazani kriterijumi oscilatornosti za nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$\big[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\big]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \quad \alpha > 0$$

i

$$\big[a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\big]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad \alpha > 0.$$

Prva jednačina je poznata u literaturi kao polulinearna diferencijalna jednačina, a drugu ćemo nazvati uopštena polulinearna diferencijalna jednačina.

Dobro je poznato da polulinearna diferencijalna jednačina i linearna diferencijalna jednačina oblika

$$(*) \qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad \text{ili} \quad (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0$$

imaju veliki broj sličnih svojstava koja opisuju karakter oscilatornosti rešenja. Na primer, Elbert [21], Li i Yeh [82] su Šturmovu teoremu upoređenja i Šturmovu teoremu o razdvajanju nula za linearnu diferencijalnu jednačinu na prirodan način uopštili na polulinearnu jednačinu. Tako, nule dva linearno nezavisna rešenja polulinearne jednačine međusobno se razdvajaju i svako netrivijalno rešenje polulinearne jednačine je ili oscilatorno ili neoscilatorno. Pored toga, Li i Yeh [82] su uopštili i nejednakost tipa Ljapunova, koja je potreban uslov da rešenje ima bar dve različite nule, i iz koje se dobija ocena broja nula rešenja na posmatranom segmentu realne prave. Hong, Lian i Yeh [54] su takođe pokazali da ako q ima veliki negativni deo ili je q oscilatorna funkcija, tada rastojanje između uzastopnih nula polulinearne jednačine ima tendenciju rasta, a što je veća amplituda oscilovanja za q to je manja amplituda oscilovanja rešenja polulinearne jednačine.

U teoriji oscilatornosti diferencijalnih jednačina je takođe dobro poznato da je svojstvo neoscilatornosti usko povezano sa egzistencijom rešenja Rikatijeve diferencijalne jednačine prvog reda. Naime, linearna diferencijalna jednačina $(*)$ je neoscilatorna ako i samo ako postoji $T_0 \geq 0$ i neprekidno-diferencijabilna funkcija $r : [T_0, \infty) \to \mathbb{R}$ takva da je

$$r'(t) + r^2(t) + q(t) \leq 0, \; t \geq T_0.$$

Ovaj dobro poznati rezultat uopštili su Li i Yeh [82] na polulinearnu diferencijalnu jednačinu, pokazavši da je ona neoscilatorna ako i samo ako postoji $t_0 \geq 0$ i funkcija $r \in C^1([t_0,\infty))$ takva da je

$$r'(t) + \alpha a^{-\frac{1}{\alpha}} |r(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + q(t) \leq 0 \quad \text{za} \quad t \in [t_0,\infty).$$

Pored pomenutih autora, oscilatorna svojstva rešenja polulinearne diferencijalne jednačine ispitivao je još veliki broj autora, među kojima citiram: Hsu, Yeh [57], Kusano, Yoshida [70], Li, Yeh [80], [81], [83], [84], [85], Lian, Yeh, Li [89].

Iako je veliki broj pokazanih kriterijuma oscilatornosti u pomenitim radovima dobijen metodom usrednjenja, ni jedan od autora nije kao težinsku funkciju u metodi usrednjenja koristio parametarsku funkciju iz opšte klase funkcija $H : \mathcal{D} = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$. Iz tog razloga, u ovoj glavi, koristeći parametarsku funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kao težinsku funkciju u metodi usrednjenja, biće pokazani kriterijumi oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine koji su uopštenja kriterijuma oscilatornosti linearne diferencijalne jednačine koje je pokazao Philos [111] (Teoreme 1.4.1., 1.4.2., 1.4.3.).

Uopštena polulinearna diferencijalna jednačina se pojavila u literaturi tek nedavno u radu Singapurskih matematičara Wonga i Agarwala [139] za slučaj kada je $\psi(x) \equiv 1$, a zatim i u radu Tajvanskog matematičara Honga [56]. U oba slučaja uopšteni su kriterijumi oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine pokazani u Hsu, Yeh [57]. Agarwal, Lian i Yeh [1] su takođe pokazali Levinovu komparativnu teoremu za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu.

Prirodno, postavio se problem daljeg uopštenja već poznatih kriterijuma oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine na uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu. U Poglavlju 2.2. su najpre uopšteni kriterijumi oscilatornosti polulinearne diferencijalne jednačine pokazani u prethodnom poglavlju, a zatim data i generalizacija dobro poznate teoreme Kameneva o oscilatornost linearne diferencijalne jednačine za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu. Pokazani su i kriterijumi oscilatornosti uopštene polulinearne diferencijalne jednačine koji specijalno predstavljaju i kvalitativno nove rezultate za polulinearnu diferencijalnu jednačinu.

U Poglavlju 2.3. pokazaćemo komparativne teoreme za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu u odnosu na odgovarajuću polulinearnu jednačinu. Te teoreme nam omogućavaju da o oscilatornosti uopštene polulinearne diferencijalne jednačine zaključimo na osnovu ponašanja rešenja odgovarajuće polulinearne diferencijalne jednačine.

Svi rezultati izloženi u ovoj glavi su novi i originalni.

2.1. Oscilatornost polulinearne diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju biće razmotrena oscilatorna svojstva rešenja *polulinearne diferencijalne jednačine*

$$\text{(HL)} \qquad \left[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \quad \alpha > 0$$

gde su koeficijenti $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$, $q \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$.

Pod *rešenjem jednačine* (HL) podrazumeva se funkcija $x \in C^1[T_x,\infty)$, $T_x \geq t_0$, koja ima svojstvo da je $|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t) \in C^1[T_x,\infty)$ i koja zadovoljava jednačinu (HL).

Da bi pokazali kriterijume za oscilatornost polulinearne jednačine koristićemo nejednakost navedenu u narednoj lemi:

Lema 2.1.1. (Hardy, Little i Polya [49]) *Ako su X i Y nenegativni, tada*

$$X^q + (q-1)Y^q - qXY^{q-1} \geq 0, \quad q > 1,$$

i

$$X^p + (p-1)Y^p - pXY^{p-1} \geq 0, \quad 0 < p < 1,$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $X = Y$.

Najpre ćemo pokazati teoremu koja je uopštenje Teoreme 1.4.1. Philosovog kriterijuma za linearnu diferencijalnu jednačinu.

Teorema 2.1.1. *Jednačina* (HL) *je oscilatorna, ako postoji funkcija $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$, takva da je*

$$(C_1) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)} \right] ds = \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji neoscilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (HL). Neka je $x(t) \neq 0$ za $t \geq T_0$ i definišimo na $[T_0, \infty)$ funkciju w sa

$$w(t) = \frac{a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}.$$

Iz jednačine (HL) sledi da funkcija $w(t)$ zadovoljava na $[T_0, \infty)$ uopštenu Rikatijevu diferencijalnu jednačinu

$$w'(t) = -q(t) - \alpha \frac{|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)}.$$

Dakle, za svako t i T, takve da je $t \geq T \geq T_0$, je

$$\int_T^t w'(s)H(t,s)\,ds = -\int_T^t q(s)H(t,s)\,ds - \alpha \int_T^t H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds.$$

Kako je

$$(1.1) \qquad \int_T^t w'(s)H(t,s)\,ds = -w(T)H(t,T) - \int_T^t w(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\,ds,$$

prethodna jednakost postaje

$$(1.2) \quad \int_T^t q(s)H(t,s)\,ds \leq w(T)H(t,T) + \int_T^t |w(s)|h(t,s)\,ds - \alpha \int_T^t H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds.$$

Ako se u Lemi 2.1.1. stavi da je

$$X = (\alpha\, H(t,s))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{|w(s)|}{a^{\frac{1}{\alpha+1}}(s)}, \quad Y = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{(\alpha+1)^{\alpha}} \frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)h^{\alpha}(t,s)}{H^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(t,s)}, \quad q = \frac{\alpha+1}{\alpha},$$

zaključuje se da za $t > s \geq T_0$ važi

$$|w(s)|h(t,s) - \alpha\, H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \leq \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}.$$

Prema tome, ako označimo sa $\mu = (\alpha+1)^{-\alpha-1}$, iz (1.2) se dobija da je

$$(1.3) \qquad \int_T^t q(s)H(t,s)\,ds \le H(t,T)w(T) + \mu \int_T^t a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\,ds \quad \text{za} \quad t \ge T \ge T_0.$$

Uzevši u obzir da je funkcija $H(t,s)$ sa svojstvom $\mathbf{H}^+$, tj. da je monotono nerastuća funkcija po s, za svako $t \ge T_0 \ge t_0$ je $H(t,t_0) \ge H(t,T_0)$. Onda, iz (1.3) sledi da je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds &\le H(t,T_0)|w(T_0)| + \mu \int_{T_0}^t a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\,ds \\ &\le H(t,t_0)|w(T_0)| + \mu \int_{t_0}^t a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\,ds,\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t q(s)H(t,s)\,ds &= \int_{t_0}^{T_0} q(s)H(t,s)\,ds + \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \\ &\le \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|H(t,s)\,ds + \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \\ &\le H(t,t_0)\int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\,ds + H(t,t_0)|w(T_0)| + \mu \int_{t_0}^t a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\,ds.\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^\alpha(t,s)}\right] ds < \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\,ds + |w(T_0)|$$

što je u suprotnosti sa (C_1). Dobijena kontradikcija pokazuje teoremu. □

Iz dokaza prethodne Teoreme može se zaključiti da važi sledeća posledica:

Posledica 2.1.1. *Jednačina* (HL) *je oscilatorna, ako postoji funkcija $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$, takva da važe sledeća dva uslova*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\,ds < \infty, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t q(s)H(t,s)\,ds = \infty.$$

Funkcija $H(t,s) = (t-s)^\lambda$ za neku konstantu $\lambda > 1$ ima svojstvo $\mathbf{H}^+$. Za tako izabranu funkciju H iz Teoreme 2.1.1., specijalno, dobija se kriterijum Lia i Yeha [80, Teorema 2.].

Posledica 2.1.2. (Li, Yeh [80]) *Jednačina* (HL) *je oscilatorna ako je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda-\alpha-1}\left[(t-s)^{\alpha+1}q(s) - \left(\frac{\lambda}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} a(s)\right] ds = \infty, \quad \textit{za neko } \lambda > 1.$$

U cilju ilustracije prethodno dokazanog kriterijuma navodimo naredni primer.

Primer 2.1.1. Posmatrajmo DJ

$$(E_1) \qquad \left(t^{-\nu}|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + t^\lambda \left(\lambda\,\frac{2-\cos t}{t} + \sin t\right)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \ t \ge t_0$$

gde su ν, λ, α proizvoljne pozitivne konstante i $\alpha \neq 2$. Tada, za svako $t \geq t_0$, imamo

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds &= \int_{t_0}^{t} d[s^{\lambda}(2-\cos s)] = t^{\lambda}(2-\cos t) - t_0^{\lambda}(2+\cos t_0)\\ &= t^{\lambda}(2-\cos t) - k_0 \geq t^{\lambda} - k_0.\end{aligned}$$

Uzevši da je $H(t,s) = (t-s)^2$ za $t \geq s \geq t_0$, ako označimo sa $\mu = (\alpha+1)^{-\alpha-1}$, imamo da je

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2 q(s) - \mu\,\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{s^{\nu}}\right] ds\\ &= \frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t}\left[2\,(t-s)\left(\int_{t_0}^{s} q(u)\,du\right) - \mu\,\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{s^{\nu}}\right] ds\\ &\geq \frac{2}{t^2}\int_{t_0}^{t}(t-s)\left(s^{\lambda}-k_0\right) ds - \frac{\mu}{t_0^{\nu}\,t^2}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{1-\alpha}\,ds\\ &= \frac{2\,t^{\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{k_1}{t^2} + \frac{k_2}{t} - k_0 - \frac{k_3}{t^{\alpha}}\left(1-\frac{t_0}{t}\right)^{2-\alpha},\end{aligned}$$

gde su

$$k_1 = \frac{2\,t_0^{\lambda+2}}{\lambda+2} - k_0 t_0^2, \quad k_2 = 2k_0 t_0 - \frac{2\,t_0^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad k_3 = \frac{\mu}{t_0^{\nu}(2-\alpha)}.$$

Dakle, kako je λ pozitivna konstanta, uslov (C_1) je zadovoljen, pa je posmatrana jednačina (E_1) oscilatorna prema Teoremi 2.1.1. $\triangle$

Naredne dve teoreme su dalje uopštenje Philosovih kriterijuma za linearnu diferencijalnu jednačinu (Teoreme 1.4.2. i 1.4.3.). Nezavisnost tih kriterijuma u odnosu na prethodni biće pokazana primerom.

Teorema 2.1.2. *Pretpostavimo da postoji funkcija $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ takva da je zadovoljen uslov*

$$(C_2) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0,\infty)$ takva da je

$$(C_3) \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}\right] ds \geq \varphi(T) \quad \textit{za svako } T \geq t_0$$

i

$$(C_4) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi_+^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds = \infty,$$

tada je jednačina (HL) *oscilatorna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno da postoji rešenje $x(t)$ jednačine (HL), takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$. Ako funkciju w definišemo kao u dokazu Teoreme 2.1.1., za svako $t \geq T \geq t_0$ dobija se (1.2) i (1.3). Tada je iz (1.3)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_{T}^{t}\left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}\right] ds \leq w(T).$$

Prema uslovu (C_3) je

$$\varphi(T) \leq w(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq T_0 \tag{1.4}$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} q(s)H(t,s) \geq \varphi(T_0). \tag{1.5}$$

Definišimo funkcije

$$F(t) = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} |w(s)|h(t,s)\,ds, \quad G(t) = \frac{\alpha}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) \frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)}\,ds.$$

Tada, iz (1.2) i (1.5), zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty} [G(t) - F(t)] \quad &\leq \quad w(T_0) - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} q(s)H(t,s)\,ds \\ &\leq \quad w(T_0) - \varphi(T_0) < \infty. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Pokažimo sada da važi

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{|w(s)|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds < \infty. \tag{1.7}$$

Ako pretpostavimo suprotno, postoji $T_1 > T_0$, takvo da je

$$\int_{T_0}^{t} \frac{|w(s)|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds \geq \frac{\mu}{\alpha\xi} \quad \text{za} \quad t \geq T_1, \tag{1.8}$$

gde je μ proizvoljan pozitivan broj, a ξ je pozitivna konstanta takva da je

$$\inf_{s\geq T_0} \left[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right] > \xi > 0. \tag{1.9}$$

Primenom parcijalne integracije i korišćenjem (1.8), za svako $t \geq T_1$ dobija se da je

$$\begin{aligned} G(t) \quad &= \quad \frac{\alpha}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d\left(\int_{T_0}^{s} \frac{|w(\tau)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)}\,d\tau \right) \\ &= \quad -\frac{\alpha}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{|w(\tau)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)}\,d\tau \right) ds \\ &\geq \quad -\frac{\alpha}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{|w(\tau)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau)}\,d\tau \right) ds \\ &\geq \quad -\frac{\mu}{\xi H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\,ds = \frac{\mu H(t,T_1)}{\xi H(t,T_0)} \geq \frac{\mu H(t,T_1)}{\xi H(t,t_0)}. \end{aligned}$$

Prema (1.9) postoji $T_2 \geq T_1$, takvo da je $\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} \geq \xi$ za svako $t \geq T_2$. Zbog toga je iz prethodne nejednakosti $G(t) \geq \mu$ za svako $t \geq T_2$. Kako je μ proizvoljno, ovim smo pokazali da je

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \infty. \tag{1.10}$$

Dalje, posmatrajmo brojni niz $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ iz (T_0, ∞) takav da je $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ i

$$\lim_{n\to\infty}[G(\tau_n) - F(\tau_n)] = \liminf_{t\to\infty}[G(t) - F(t)] < \infty.$$

Tada, postoji konstanta M, takva da je za svako dovoljno veliko n

$$G(\tau_n) - F(\tau_n) \le M. \tag{1.11}$$

Kako (1.10) garantuje da je

$$\lim_{n\to\infty} G(\tau_n) = \infty, \tag{1.12}$$

(1.11) povlači da je

$$\lim_{n\to\infty} F(\tau_n) = \infty. \tag{1.13}$$

Uzevši u obzir (1.12), iz (1.11) se dobija da je za svako dovoljno veliko n

$$\frac{F(\tau_n)}{G(\tau_n)} - 1 \ge -\frac{M}{G(\tau_n)} > -\frac{1}{2}.$$

Prema tome,

$$\frac{F(\tau_n)}{G(\tau_n)} > \frac{1}{2} \quad \text{za svako dovoljno veliko } n,$$

što zajedno sa (1.13) pokazuje da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{\alpha+1}(\tau_n)}{G^{\alpha}(\tau_n)} = \infty. \tag{1.14}$$

Sa druge strane, primenom Helderove[1] nejednakosti, za svako $n \in N$ je

$$\begin{aligned}
F(\tau_n) &= \frac{1}{H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} |w(s)| h(\tau_n, s)\, ds, \\
&= \int_{T_0}^{\tau_n} \left(\frac{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{H^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(\tau_n, T_0)} \frac{|w(s)| H^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(\tau_n, s)}{a^{\frac{1}{\alpha+1}}(s)} \right) \left(\frac{\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{H^{\frac{1}{\alpha+1}}(\tau_n, T_0)} \frac{h(\tau_n, s) |a^{\frac{1}{\alpha+1}}(s)}{H^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(\tau_n, s)} \right) ds \\
&\le \left(\frac{\alpha}{H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} H(\tau_n, s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\, ds \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \\
&\qquad \times \left(\frac{1}{\alpha^{\alpha} H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(\tau_n, s)}{H^{\alpha}(\tau_n, s)}\, ds \right)^{\frac{1}{\alpha+1}},
\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{F^{\alpha+1}(\tau_n)}{G^{\alpha}(\tau_n)} \le \frac{1}{\alpha^{\alpha} H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(\tau_n, s)}{H^{\alpha}(\tau_n, s)}\, ds \le \frac{1}{\alpha^{\alpha} H(\tau_n, t_0)} \int_{t_0}^{\tau_n} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(\tau_n, s)}{H^{\alpha}(\tau_n, s)}\, ds.$$

Dakle, kako važi (1.14), zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H(\tau_n, t_0)} \int_{t_0}^{\tau_n} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(\tau_n, s)}{H^{\alpha}(\tau_n, s)}\, ds = \infty,$$

[1] O. Hölder, nemački matematičar, 1859–1937

odnosno
$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds=\infty,$$
što je u suprotnosti sa uslovom (C_2). Ovim smo pokazali da zaista važi (1.7), tako da je prema (1.4)
$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi_{+}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds\le\int_{t_0}^{T_0}\frac{\varphi_{+}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds+\int_{T_0}^{\infty}\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds<\infty,$$
što je u suprotnosti sa pretpostavkom (C_4). Ovim je dokaz završen. $\square$

Kako se Teorema 2.1.2. može primeniti u izvesnim slučajevima u kojima nije moguće primeniti Teoremu 2.1.1., pokazana dva kriterijuma oscilatornosti su međusobno nezavisna. Jedan takav slučaj je opisan u sledećem primeru.

Primer 2.1.2. Posmatrajmo DJ

$$(E_2)\qquad \left(t^{\nu}|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)'+t^{\lambda}\sin t\,|x(t)|^{\alpha-1}x(t)=0,\quad t\ge t_0$$

gde su ν,λ,α konstante takve da je $\alpha\ne 2$, $\lambda<0$ i $\nu<\alpha$.
Uzevši da je $H(t,s)=(t-s)^2$ za $t\ge s\ge t_0$, imamo da je
$$\frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t}s^{\nu}(t-s)^{1-\alpha}\,ds\le\begin{cases}\dfrac{t^{\nu}}{t^2}\,\dfrac{(t-t_0)^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \nu>0\\[2ex] \dfrac{t_0^{\nu}}{t^2}\,\dfrac{(t-t_0)^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \nu<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{t^{\nu-\alpha}}{2-\alpha}\left(1-\dfrac{t_0}{t}\right)^{2-\alpha}, & \nu>0\\[2ex] \dfrac{t_0^{\nu}}{2-\alpha}\,\dfrac{1}{t^{\alpha}}\left(1-\dfrac{t_0}{t}\right)^{2-\alpha}, & \nu<0\end{cases}$$
Dakle, uslov (C_2) je zadovoljen.

Za proizvoljno malo $\varepsilon>0$, postoji $t_1\ge t_0$, takvo da je za svako $T\ge t_1$
$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_{T}^{t}\left[(t-s)^2s^{\lambda}\sin s-s^{\nu}\,\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\right]ds\ge T^{\lambda}\cos T-\varepsilon.$$
Uzmimo da je $\varphi(T)=T^{\lambda}\cos T-\varepsilon$ i posmatrajmo prirodan broj N takav da je
$$(2N+1)\pi-\frac{\pi}{4}>\max\{t_1,(1+\sqrt{2}\,\varepsilon)^{1/\lambda}\}.$$
Tada za svako $n\ge N$ i svako $T\in[(2n+1)\pi-\pi/4,(2n+1)\pi+\pi/4]$ je $\varphi(T)\ge 1/\sqrt{2}$. Uzevši u obzir da je $\nu<\alpha$ biće
$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi_{+}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds &\ge \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\int_{(2n+1)\pi-\pi/4}^{(2n+1)\pi+\pi/4}s^{-\frac{\nu}{\alpha}}\,ds\\ &\ge \frac{1}{(\sqrt{2})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\sum_{n=N}^{\infty}\int_{(2n+1)\pi-\pi/4}^{(2n+1)\pi+\pi/4}\frac{ds}{s}=\infty.\end{aligned}$$
Dakle, svi uslovi Teoreme 2.1.2. su ispunjeni, pa je jednačina (E_2) oscilatorna.

Sa druge strane, kako je

$$\frac{1}{t^2}\int_T^t \left|(t-s)^2 s^\lambda \cos s - s^\nu \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\right| ds \le \frac{1}{t^2}\int_T^t (t-s)^2 s^\lambda\, ds$$
$$= \left(\frac{1}{\lambda+1} - \frac{2}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+3}\right) t^{\lambda+1} - \frac{T^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{2}{t}\frac{T^{\lambda+2}}{\lambda+2} - \frac{1}{t^2}\frac{T^{\lambda+3}}{\lambda+3},$$

biće

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int_T^t \left[(t-s)^2 s^\lambda \cos s - s^\nu \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{(1+\alpha)^{1+\alpha}}\right] ds < \infty \quad \text{za} \quad \lambda < -1,$$

odnosno uslov (C_1) nije ispunjen za $\lambda < -1$, pa se na osnovu Teoreme 2.1.1. može utvrditi oscilatornost jednačine (E_2) samo za $-1 \le \lambda < 0$. $\triangle$

Teorema 2.1.3. *Pretpostavimo da za funkciju $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ važi da je*

$$(C_5) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t |q(s)| H(t,s)\, ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0,\infty)$ koja zadovoljava uslov (C_4) i takva da je

$$(C_6) \quad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^\alpha(t,s)}\right] ds \ge \varphi(T) \quad \textit{za svako} \quad T \ge t_0,$$

jednačina (HL) *je oscilatorna.*

Dokaz. Za neoscilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (HL), kao u dokazu Teoreme 2.1.1. važe (1.2) i (1.3) za svako $t \ge T \ge T_0$, dok se kao u dokazu Teoreme 2.1.2., korišćenjem uslova (C_6), dobija da važi (1.4). Korišćenjem uslova (C_5), zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty}\,[G(t) - F(t)] \le w(T_0) - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\, ds < \infty.$$

Prema uslovu (C_6) je

$$\varphi(T_0) \le \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\, ds - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^t \frac{a(s)h^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^\alpha(t,s)}\, ds,$$

tako da uslov (C_5) povlači da je

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H(t,T_0)}\int_{T_0}^t a(s)\,\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\, ds < \infty.$$

Posmatrajući niz $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ iz (T_0,∞) takav da je $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ i

$$\lim_{n\to\infty}\,[G(\tau_n) - F(\tau_n)] = \limsup_{t\to\infty}\,[G(t) - F(t)] < \infty$$

i koristeći postupak kao u dokazu Teoreme 2.1.2. može se zaključiti da važi (1.7), što je dalje, zajedno sa (1.4) u suprotnosti sa uslovom (C_4). $\square$

Ako se pored parametarske funkcije $H(t,s)$ uvede kao težinska funkcija i neprekidno diferencijabilna funkcija $\varrho : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ može se pokazati sledeći kriterijum oscilatornosti jednačine (HL) :

Teorema 2.1.4. *Jednačina* (HL) *je oscilatorna ako postoji pozitivna, neopadajuća funkcija* $\rho \in C^1([t_0,\infty))$ *i funkcija* $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$*, tako da važi*

$$(C_7) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \frac{a(s)\rho(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)} G^{\alpha+1}(t,s) \right] ds = \infty.$$

gde je $G(t,s) = h(t,s) + \dfrac{\rho'(s)}{\rho(s)}H(t,s)$.

Dokaz. Ako je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (HL), bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $x(t) \neq 0$ for $t \geq t_0$. Definišimo funkciju

$$W(t) = \rho(t)\frac{a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} \quad \text{za} \quad t \geq t_0.$$

Tada za svako $s \geq t_0$ važi

$$(1.15) \qquad W'(s) = -q(s)\rho(s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}W(s) - \alpha\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Ako (1.15) pomnožimo sa $H(t,s)$ za $t \geq s \geq t_0$, zatim integralimo u granicama od t_0 do t, dobija se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} W'(s)H(t,s)\,ds &= -\int_{t_0}^{t} q(s)\rho(s)H(t,s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}W(s)H(t,s)\,ds \\ &\quad - \alpha\int_{t_0}^{t} H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds. \end{aligned}$$

Koristeći (1.1) biće

$$(1.16) \qquad \begin{aligned} \int_{t_0}^{t} q(s)\rho(s)H(t,s)\,ds &\leq W(t_0)H(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,|W(s)|\,ds \\ &\quad - \alpha\int_{t_0}^{t} H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds. \end{aligned}$$

Prema Lemi 2.1.1., uzevši da je

$$X = (\alpha\,H(t,s))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,\frac{|W(s)|}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha+1}}},\ Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{a(s)\rho(s)}{(\alpha H(t,s))^{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} G^{\alpha}(t,s),\ q = \frac{\alpha+1}{\alpha},$$

može se zaključiti da za svako $t > s \geq t_0$ važi nejednakost

$$(1.17) \qquad |W(s)|G(t,s) - \alpha\,H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \leq \frac{a(s)\rho(s)G^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)}.$$

Iz (1.16) i (1.17) je onda

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \frac{a(s)\rho(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)} G^{\alpha+1}(t,s) \right] ds \leq W(t_0),$$

što je u kontradikciji sa (C_7). $\square$

Posledica 2.1.3. *Jednačina* (HL) *je oscilatorna ako postoji pozitivna, neopadajuća funkcija* $\rho \in C^1([t_0, \infty))$ *i funkcija* $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$*, takve da važe sledeća dva uslova:*

$$(C_8) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \left(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \right)^{\alpha+1} ds < \infty,$$

$$(C_9) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} q(s)\rho(s)H(t,s)\, ds = \infty.$$

Svrhu uvođenja težinske funkcije $\varrho \in C^1([t_0, \infty))$ opravdaćemo narednim primerom.

Primer 2.1.3. Posmatrajmo DJ

$$(E_3) \qquad \left(t^\nu |x'(t)|^{\alpha-1} x'(t)\right)' + \left[\lambda\, t^{\lambda-3}(2-\cos t) + t^{\lambda-2}\sin t\right] |x(t)|^{\alpha-1} x(t) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Primenom Teoreme 2.1.1. zaključujemo da je jednačina (E_3) oscilatorna za $\lambda > 2$ i $\nu < 0$. Cilj nam je da pokažemo da je *jednačina* (E_3) *oscilatorna i za* $0 < \lambda \leq 2$ *i* $\nu < \alpha - 2$.

Za funkciju ρ možemo izabrati $\rho(t) = t^2$, a za funkciju $H(t,s)$ uzmimo da je $H(t,s) = (t-s)^2$ za $t \geq s \geq t_0$. Tada, kako je $\rho(t)q(t) = \frac{d}{ds}[s^\lambda(2-\cos s)]$, kao i u Primeru 2.1.1. dobija se da je

$$\int_{t_0}^{t} \rho(s)q(s)\, ds \geq t^\lambda - k_0,$$

odnosno,

$$\frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} (t-s)^2 \rho(s)q(s)\, ds \geq \frac{2t^\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)} + \frac{k_1}{t^2} + \frac{k_2}{t} - k_0,$$

gde je

$$k_1 = \frac{2\, t_0^{\lambda+2}}{\lambda+2} - k_0 t_0^2, \;\; k_2 = 2k_0 t_0 - \frac{2\, t_0^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

Dakle, za $\lambda > 0$ uslov (C_9) je zadovoljen. Sa druge strane,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} \frac{s^{\nu+2}}{(t-s)^{2\alpha}} \left(2(t-s) + \frac{2}{s}(t-s)^2 \right)^{\alpha+1} ds &= t^{\alpha-1} 2^{\alpha+1} \int_{t_0}^{t} s^{\nu-\alpha+1}(t-s)^{1-\alpha}\, ds \\
&\leq 2^{\alpha+1} \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)^{1-\alpha} \frac{t^{\nu-\alpha+2} - t_0^{\nu-\alpha+2}}{\nu-\alpha+2},
\end{aligned}$$

tako da je za $\nu - \alpha + 2 < 0$ i uslov (C_8) zadovoljen. Posmatrana jednačina je dakle oscilatorna prema Posledici 2.1.3. za $\lambda > 0$ i $\nu < \alpha - 2$. $\triangle$

Polazeći od integralne nejednakosti (1.16), postupkom kao u dokazu Teoreme 2.1.2., odnosno Teoreme 2.1.3., mogu se pokazati i sledeća dva kriterijuma oscilatornosti polulinearne jednačine (HL):

Teorema 2.1.5. *Pretpostavimo da za funkciju* $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ *važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \left(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \right)^{\alpha+1} ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija φ *na* $[t_0, \infty)$ *koja zadovoljava uslov* (C_4) *i*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \frac{a(s)\rho(s)G^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1} H^\alpha(t,s)} \right] ds \geq \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq t_0,$$

jednačina (HL) *je oscilatorna.*

Teorema 2.1.6. *Pretpostavimo da za funkciju $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} |q(s)|\rho(s)H(t,s)\,ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0,\infty)$ koja zadovoljava uslov (C_4) i

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \frac{a(s)\rho(s)G^{\alpha+1}(t,s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}H^{\alpha}(t,s)} \right] ds \geq \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq t_0,$$

tada je jednačina (HL) *oscilatorna.*

2.2. Oscilatornost uopštene polulinearne diferencijalne jednačine

Posmatrajmo nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$(E_\alpha) \qquad [a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad \alpha > 0$$

gde je funkcija $a \in C^1([t_0,\infty))$ pozitivna, funkcija $q \in C([t_0,\infty))$ nema ograničenja o znaku, $\psi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su neprekidno diferencijabilne funkcije, pri čemu je funkcija ψ pozitivna, a funkcija f zadovoljava uslov

$$(F_1) \qquad xf(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Diferencijalnu jednačinu (E_α) nazvaćemo *uopštena polulinearna diferencijalna jednačina.*

Izlaganje u ovom poglavlju podelićemo na dva dela u zavisnosti od uslova koje zadovoljavaju funkcije f i ψ.

$\boxed{\text{I}}$ Osnovni problem koji se nameće je uopštenje poznatih kriterijuma oscilatornosti polulinearne jednačine na uopštenu polulinearnu jednačinu, pod dodatnim pretpostavkama za funkcije f i ψ. Tako ćemo u ovom delu pretpostaviti da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov

$$(F_2) \qquad \frac{f'(x)}{(\psi(x)|f(x)|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \geq K > 0, \quad x \neq 0$$

i označićemo sa

$$\beta = \frac{1}{\alpha K^\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}.$$

Najpre ćemo uopštiti Teoremu 2.1.1. na jednačinu (E_α).

Teorema 2.2.1. *Jednačina (E_α) oscilatorna ako postoji neprekidna funkcija $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbf{H}^+$, koja zadovoljava uslov*

$$(C_1) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \beta\, a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)} \right] ds = \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo da jednačina (E_α) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$, tako da postoji $T_0 \geq t_0$ takvo da je $x(t) \neq 0$ na $[T_0,\infty)$. Ako funkciju w definišemo na $[T_0,\infty)$ na sledeći način

$$(2.1) \qquad w(t) = \frac{a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{f(x(t))},$$

diferenciranjem i korišćenjem jednačine (E_α), zaključujemo da ona zadovoljava jednačinu

$$w'(t) = -q(t) - \frac{f'(x(t))|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(t)\psi(x(t))|f(x(t))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \text{za svako} \quad t \geq T_0. \tag{2.2}$$

Uzevši u obzir da važi (F_2), dobija se da je

$$w'(s) \leq -q(s) - K\,\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \quad \text{za svako} \quad s \geq T_0. \tag{2.3}$$

Ako pomnožimo (2.3) sa $H(t,s)$, za $t \geq s \geq T \geq T_0$ i integralimo na $[T,t]$, $t \geq T \geq T_0$, dobijamo

$$\int_T^t w'(s)H(t,s)\,ds \leq -\int_T^t q(s)H(t,s)\,ds - K\int_T^t H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds.$$

Kako je

$$\int_T^t w'(s)H(t,s)\,ds = -w(T)H(t,T) - \int_T^t w(s)\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\,ds, \tag{2.4}$$

za svako $t \geq T \geq T_0$ iz prethodne nejednakosti imamo da je

$$\int_T^t q(s)H(t,s)\,ds \leq w(T)H(t,T) + \int_T^t |w(s)|h(t,s)\,ds - K\int_T^t H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds. \tag{2.5}$$

Primenom Leme 2.1.1. za

$$X = (K\,H(t,s))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,\frac{|w(s)|}{a^{\frac{1}{\alpha+1}}(s)}, \quad Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)h^{\alpha}(t,s)}{[K\,H(t,s)]^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}}, \quad q = \frac{\alpha+1}{\alpha} > 1,$$

zaključujemo da je za $t > s \geq T$

$$|w(s)|h(t,s) - K\,H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \leq \beta\,a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}.$$

Prema tome, (2.5) povlači da je za svako $t > T \geq T_0$

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t q(s)H(t,s)\,ds \leq w(T) + \frac{\beta}{H(t,T)}\int_T^t a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds. \tag{2.6}$$

Dakle, za $t \geq T_0$ je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^t \left[q(s)H(t,s) - \beta\,a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\right] ds &\leq w(T_0)H(t,T_0)\\ &\leq |w(T_0)|H(t,T_0) \leq |w(T_0)|H(t,t_0),\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^t \left[q(s)H(t,s) - \beta\,a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\right] ds\\ &\quad= \int_{t_0}^{T_0}\left[q(s)H(t,s) - \beta\,a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\right] ds + \int_{T_0}^t \left[q(s)H(t,s) - \beta\,a(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\right] ds\\ &\quad\leq \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\,|q(s)|\,ds + |w(T_0)|H(t,t_0) \leq H(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{T_0}|q(s)|\,ds + |w(T_0)|\right),\end{aligned}$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom (C_1). $\square$

Posledica 2.2.1 *Zaključak Teoreme* 2.2.1. *važi i ako se uslov* (C_1) *zameni sa sledeća dva uslova*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\, ds < \infty, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} q(s) H(t,s)\, ds = \infty.$$

U narednom primeru je posmatrana jednačina za koju $\int_0^\infty q(s)\,ds$ nije konvergentan, tako da se kriterijumi oscilatornosti pokazani u [56], do sada jedini poznati rezultati za ovaj tip nelinearne jednačine, ne mogu primeniti na tu jednačinu, ali je zato moguće pokazati da je posmatrana jednačina oscilatorna primenom Teoreme 2.2.1.

Primer 2.2.1. Posmatrajmo sledeću diferencijalnu jednačinu

$$(E_1) \qquad \left(\frac{|x(t)|^{3-\alpha}}{t^{\nu}} |x'(t)|^{\alpha-1} x'(t) \right)' + t^{\lambda} \left(\lambda\, \frac{2-\cos t}{t} + \sin t \right) x^3(t) = 0, \quad t \geq t_0,$$

gde su ν, λ, α proizvoljne pozitivne konstante i $\alpha \neq 2$.
Tada funkcije $f(x) = x^3$, $\psi(x) = |x|^{3-\alpha}$ zadovoljavaju uslov (F_2), jer je

$$\frac{f'(x)}{(\psi(x)|f(x)|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} = 3 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Da je uslov (C_1) zadovoljen može se pokazati kao u Primeru 2.1.1., tako da je jednačina (E_1) oscilatorna prema Teoremi 2.2.1. $\triangle$

Polazeći od diferencijalne nejednačine (2.3) postupkom analognim postupku u dokazu Teoreme 2.1.2. i Teoreme 2.1.3. mogu se pokazati sledeća dva kriterijuma oscilatornosti jednačine (E_α) :

Teorema 2.2.2. *Neka funkcija* $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *sa svojstvom* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *zadovoljava uslov*

$$(C_2) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\, ds < \infty.$$

Tada je jednačina (E_α) *oscilatorna, ako postoji neprekidna funkcija* φ *na* $[t_0,\infty)$ *takva da je*

$$(C_3) \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \beta\, a(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)} \right] ds \geq \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq t_0,$$

i

$$(C_4) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi_+^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\, ds = \infty.$$

Teorema 2.2.3. *Neka funkcija* $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *sa svojstvom* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *zadovoljava uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} |q(s)| H(t,s)\, ds < \infty.$$

Ako postoji neprekidna funkcija φ *na* $[t_0,\infty)$ *takva da važi* (C_4) *i*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)H(t,s) - \beta\, a(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)} \right] ds \geq \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \geq t_0,$$

tada je jednačina (E_α) *oscilatorna.*

Primetimo da se Teorema 2.2.2. može primeniti u izvesnim slučajevima u kojim se Teorema 2.2.1. ne može primeniti. Takav slučaj je opisan u narednom primeru.

Primer 2.2.2. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_2) \qquad \left(t^\nu |x(t)|^{3-\alpha}|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + t^\lambda \cos t\, x^3(t) = 0, \quad t \geq t_0$$

gde su ν, λ, α konstante takve da je $\lambda < 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2$ i $\nu < \alpha$.
Uslov (F_2) je zadovoljen. Štaviše, izabravši da je $H(t,s) = (t-s)^2$, za $t > s \geq t_0$, imamo

$$\frac{1}{t^2}\int_{t_0}^t s^\nu (t-s)^{1-\alpha}\, ds \leq \begin{cases} \dfrac{t^\nu}{t^2}\dfrac{(t-t_0)^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \nu > 0 \\[2ex] \dfrac{t_0^\nu}{t^2}\dfrac{(t-t_0)^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \nu < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-\alpha}}{2-\alpha}\left(1-\dfrac{t_0}{t}\right)^{2-\alpha}, & \nu > 0 \\[2ex] \dfrac{t_0^\nu}{2-\alpha}\dfrac{1}{t^\alpha}\left(1-\dfrac{t_0}{t}\right)^{2-\alpha}, & \nu < 0 \end{cases}$$

Prema tome, uslov (C_2) je takođe zadovoljen i za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$, postoji $t_1 \geq t_0$ tako da za svako $T \geq t_1$ je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int_T^t \left[(t-s)^2 s^\lambda \cos s - \beta\, s^\nu\, (t-s)^{1-\alpha}\right] ds \geq -T^\lambda \sin T - \varepsilon.$$

Dakle, za funkciju $\varphi(T) = -T^\lambda \sin T - \varepsilon$ važi uslov (C_3). Fiksirajmo prirodan broj N takav da je $2N\pi + 5\pi/4 \geq \max\{t_1, (1+\sqrt{2}\varepsilon)^{1/\lambda}\}$. Tada, za svako $n \geq N$ imamo da je

$$\varphi(T) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{za svako} \quad T \in \left[2n\pi + \frac{5\pi}{4}, 2n\pi + \frac{7\pi}{4}\right].$$

Uzevši u obzir da je $\nu < \alpha$, dobija se da je

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^\infty \frac{\varphi_+^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\, ds &\geq \sum_{n=N}^\infty (\sqrt{2})^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \int_{2n\pi+5\pi/4}^{2n\pi+7\pi/4} s^{-\frac{\nu}{\alpha}}\, ds \\ &\geq (\sqrt{2})^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sum_{n=N}^\infty \int_{2n\pi+5\pi/4}^{2n\pi+7\pi/4} \frac{ds}{s} \\ &= (\sqrt{2})^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sum_{n=N}^\infty \ln\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi + \frac{5\pi}{4}}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Dakle, svi uslovi Teoreme 2.2.2. su ispunjeni i jednačina (E_2) je oscilatorna. $\triangle$

Uvodeći pored funkcije $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ kao težinsku funkciju i funkciju $\rho : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, pokazaćemo kao i u prethodnom odeljku, još tri kriterijuma oscilatornosti jednačine (E_α).

Teorema 2.2.4. *Jednačina (E_α) oscilatorna, ako postoji diferencijabilna, monotono neopadajuća funkcija $\rho : [t_0, \infty) \to (0, \infty)$, takva da za proizvoljnu funkciju $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ važi*

$$(C_5) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \rho(s)\left[q(s)H(t,s) - \frac{\beta\, a(s)}{H^\alpha(t,s)} G^{\alpha+1}(t,s)\right] ds = \infty,$$

gde je $G(t,s) = h(t,s) + \dfrac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s)$.

Dokaz. Ako pretpostavimo da jednačina (E_α) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$, takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$, možemo definišati funkciju $W(t)$ na $[T_0, \infty)$ sa

$$W(t) = \rho(t) \frac{a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{f(x(t))} \quad \text{za} \quad t \geq T_0. \tag{2.7}$$

Tada, za svako $t \geq T_0$, važi

$$W'(t) = -q(t)\rho(t) + \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t) - \frac{f'(x(t))|W(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(t)\rho(t)\psi(x(t))|f(x(t))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}},$$

odakle je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^t W'(s)H(t,s)\,ds \leq &- \int_{T_0}^t q(s)\rho(s)H(t,s)\,ds + \int_{T_0}^t \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}W(s)H(t,s)\,ds \\ &- K\int_{T_0}^t H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds.\end{aligned}$$

Koristeći (2.4), imamo da je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^t q(s)\rho(s)H(t,s)\,ds \quad &\leq \quad W(T_0)H(t,T_0) + \int_{T_0}^t G(t,s)|W(s)|\,ds \\ &\quad - K\int_{T_0}^t H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ako se u Lemi 2.1.1. uzme da je

$$X = (K\,H(t,s))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{|W(s)|}{(a(s)\rho(s))^{\frac{1}{\alpha+1}}}, \quad Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha} \frac{[a(s)\rho(s)]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{[K\,H(t,s)]^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}} G^{\alpha}(t,s), \quad q = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

zaključujemo da važi

$$|W(s)|G(t,s) - K\,H(t,s)\frac{|W(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{[a(s)\rho(s)]^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \beta\,\frac{a(s)\rho(s)}{H^{\alpha}(t,s)}G^{\alpha+1}(t,s). \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) dolazimo do nejednakosti

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \beta\,\frac{a(s)\rho(s)}{H^{\alpha}(t,s)}G^{\alpha+1}(t,s)\right] ds \leq W(T_0) + \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\rho(s)\,ds,$$

koja je u suprotnosti sa uslovom (C_5) i time dokazuje teoremu. □

Posledica 2.2.2. *Jednačina* (E_α) *oscilatorna, ako postoji pozitivna, monotono neopadajuća funkcija* $\rho \in C^1([t_0,\infty))$ *i funkcija* $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ *tako da važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \frac{a(s)\rho(s)}{H^{\alpha}(t,s)}\Big(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)}H(t,s)\Big)^{\alpha+1} ds < \infty, \tag{C_6}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t q(s)\rho(s)H(t,s)\,ds = \infty. \tag{C_7}$$

Napomena 2.2.1. Za $\alpha = 1$ Teorema 2.2.4. se svodi na Teoremu 1.4.4. Teorema 2. u Grace [36] je takođe specijalan slučaj Teoreme 2.2.4. za $\alpha = 1$ i $H(t,s) = (t-s)^\gamma$ za neko $\gamma > 1$.

Primer 2.2.3. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_3) \quad \left(\frac{x^2(t)}{t^\nu}|x'(t)|x'(t)\right)' + \left[\lambda\, t^{\lambda-3}(2-\cos t) + t^{\lambda-2}\sin t\right](x(t)+x^3(t))^2 \operatorname{sgn} x(t) = 0, \quad t \ge t_0,$$

gde je λ i ν proizvoljne pozitivne konstante.

Kako je za posmatranu jednačinu $\alpha = 2$, za funkcije $f(x) = (x+x^3)^2 \operatorname{sgn} x$, $\psi(x) = x^2$ je

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{\psi(x)|f(x)|}} \ge 2\,\frac{1+3x^2}{|x|} \ge 4\sqrt{3}, \quad x \ne 0,$$

tj. one zadovoljavaju uslov (F_2) sa konstantom $K = 4\sqrt{3}$. Pored toga, ako izaberemo da je $\rho(t) = t^2$ i $H(t,s) = (t-s)^2$ za $t \ge s \ge t_0$, kao i u Primeru 2.1.3. može se pokazati da su zadovoljeni uslovi (C_6) i (C_7), pa je jednačina (E_3) oscilatorna prema Posledici 2.2.2. $\triangle$

Polazeći od integralne nejednakosti (2.8) koju zadovoljava funkcija $W(t)$, definisana sa (2.7), postupkom kao u dokazu Teoreme 2.1.2. i Teoreme 2.1.3. mogu se pokazati i sledeća dva kriterijuma oscilatornosti jednačine (E_α). Ti kriterijumi su uopštenja kriterijuma Gracea - Teoreme 1.4.6 i 1.4.7 koji se odnose na specijalan slučaj jednačine (E_α) za $\alpha = 1$.

Teorema 2.2.5. *Neka funkcija $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo $\widetilde{\mathbf{H}}$. Ako na intervalu $[t_0, \infty)$ postoji pozitivna, neprekidno-diferencijabilna funkcija ρ, koja je monotono neopadajuća i zadovoljava uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \Big(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s)\Big)^{\alpha+1} ds < \infty,$$

i ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0, \infty)$ koja zadovoljava uslov (C_4) i za svako $T \ge t_0$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \beta\, \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \Big(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s)\Big)^{\alpha+1}\right] ds \ge \varphi(T),$$

jednačina (E_α) je oscilatorna.

Teorema 2.2.6. *Neka funkcija $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo $\widetilde{\mathbf{H}}$. Ako na intervalu $[t_0, \infty)$ postoji pozitivna, neprekidno-diferencijabilna funkcija ρ, koja je monotono neopadajuća i zadovoljava uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} |q(s)|\rho(s)H(t,s)\, ds < \infty$$

i ako postoji neprekidna funkcija φ na $[t_0, \infty)$ koja zadovoljava uslov (C_4) i za svako $T \ge t_0$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} \left[q(s)\rho(s)H(t,s) - \beta\, \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \Big(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s)\Big)^{\alpha+1}\right] ds \ge \varphi(T),$$

jednačina (E_α) je oscilatorna.

Da bi pokazali naredni kriterijum oscilatornosti koristićemo sledeću lemu:

Lema 2.2.1. *Pretpostavimo da važe sledeći uslovi*

$$(F_3) \qquad x\psi'(x) > 0 \quad za \quad x \neq 0,$$

$$(C_8) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} = \infty,$$

$$(C_9) \qquad \liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} q(s)\,ds > -\infty.$$

Ako je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E_α), koje nije eventualno konstantna funkcija, onda važi

$$(2.10) \qquad \int^{\infty} \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds < \infty,$$

gde je $w(t)$ funkcija definisana sa (2.1).

Dokaz. Neka je $x(t)$ proizvoljno neoscilatorno rešenje jednačine (E_α) na $[T,\infty)$, $T \geq t_0$. Za funkciju $w(t)$ definisanu sa (2.1) važi (2.2), odakle integracijom dobijamo

$$(2.11) \qquad -w(t) = -w(T) + \int_T^t q(s)\,ds + \int_T^t \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds, \quad t \geq T.$$

Prema uslovu (C_9) postoji konstanta μ takva da je

$$(2.12) \qquad -w(t) \geq \mu + \int_T^t \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds \quad \text{za svako} \quad t \geq T.$$

Ako pretpostavimo da (2.10) ne važi, postoji $T^* \geq T$ takvo da je

$$C \equiv \mu + \int_T^{T^*} \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds > 0.$$

Tada je iz (2.12)

$$(2.13) \qquad -w(t) \geq C + \int_{T^*}^t \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds, \ t \geq T^*$$

odakle možemo zaključiti da je funkcija w negativna na $[T^*,\infty)$, odnosno da je $x(t)x'(t) < 0$ za svako $t \geq T^*$. Ako pomnožimo (2.13) sa

$$\frac{f'(x(t))|w(t)|^{\frac{1}{\alpha}}}{(a(t)\psi(x(t))|f(x(t))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{f'(x(t))|x'(t)|}{|f(x(t))|}$$

i integralimo na $[T^*,\tau]$ za proizvoljno $\tau > T^*$, dobija se

$$\log \frac{C + \displaystyle\int_{T^*}^{\tau} \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds}{C} \geq \int_{T^*}^{\tau} \frac{f'(x(t))|x'(t)|}{|f(x(t))|}\,dt$$
$$= -\int_{T^*}^{\tau} \frac{f'(x(t))x'(t)}{|f(x(t))|}\,\operatorname{sgn} f(x(t))\,dt = \log \frac{|f(x(T^*))|}{|f(x(\tau))|} \quad \text{za} \quad \tau \geq T^*.$$

Dakle, za svako $t \geq T^*$ je

$$C + \int_{T^*}^{t} \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\, ds \geq \frac{C|f(x(T^*))|}{|f(x(t))|},$$

što zajedno sa (2.13) daje

$$|w(t)||f(x(t)| \geq C^* = C|f(x(T^*))| \quad \text{za svako} \quad t \geq T^*.$$

Sada, iz činjenice da je $x(t)$ pozitivna, opadajuća funkcija ili negativna, rastuća funkcija na $[T^*, \infty)$ i da je funkcija ψ rastuća na $(0, \infty)$ i opadajuća na $(-\infty, 0)$, možemo zaključiti da je $0 < \psi(x(t)) \leq \psi(x(T^*))$ na $[T^*, \infty)$. Zato je iz prethodne jednakosti

$$|x'(t)| \geq \frac{C_1}{a^{1/\alpha}(t)} \quad \text{za svako} \quad t \geq T^*,$$

gde je $C_1 = \big(C^*/\psi(x(T^*))\big)^{1/\alpha}$.

Ako je $x'(t) > 0$, $t \geq T^*$, biće

$$x(t) \geq x(T^*) + C_1 \int_{T^*}^{t} \frac{ds}{a^{1/\alpha}(s)} \to \infty, \quad t \to \infty,$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da u ovom slučaju mora biti $x(t) < 0$, $t \geq T^*$. Ako je $x'(t) < 0$, $t \geq T^*$, biće

$$x(t) \leq x(T^*) - C_1 \int_{T^*}^{t} \frac{ds}{a^{1/\alpha}(s)} \to -\infty, \quad t \to \infty,$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da je $x(t) > 0$, $t \geq T^*$. Dobijena kontradikcija pokazuje da zaista važi (2.10). $\square$

Teorema 2.2.7. *Diferencijalna jednačina (E_α) je oscilatorna ako važi (F_3), (C_8), (C_9) i za funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbf{H}^+$, koja ima nenegativan drugi parcijalni izvod po promenljivoj s na $\mathcal{D}$, važe uslovi*

$$(C_{10}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} q(s)H(t,s)\, ds = \infty,$$

$$(C_{11}) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H(t,t_0)}{\partial s}}{H(t,t_0)} \left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} > -\infty.$$

Dokaz. Ako je x neoscilatorno rešenje jednačine (E_α) na intervalu $[T^*, \infty)$, $T^* \geq t_0$ i $w(t)$ funkcija definisana sa (2.1), onda važi (2.2). Ako odbacimo poslednji sabirak sa desne strane jednakosti (2.2), pomnožimo sa $H(t,s)$, $t \geq s \geq T^*$ i integralimo na $[T^*, t]$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_{T^*}^{t} H(t,s)\, q(s)\, ds &\leq -\int_{T^*}^{t} H(t,s)\, w'(s)\, ds \\
&= w(T^*)H(t,T^*) + \int_{T^*}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\, w(s)\, ds \\
&\leq |w(T^*)|\, H(t,t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\, |w(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Kako je po pretpostavci $\dfrac{\partial H}{\partial s}$ monotono neopadajuća funkcija na $\mathcal{D}$, biće

$$\int_{T^*}^{t} H(t,s)\,q(s)\,ds \le |w(T^*)|\,H(t,t_0) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}|w(s)|\,ds \tag{2.14}$$

Prema Lemi 2.2.1. važi (2.10), pa postoji konstanta $N>0$ takva da važi

$$\int_{t_0}^{t}\frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}}\,ds \le N \quad \text{za svako} \quad t\ge t_0,$$

odnosno, prema uslovu (F_2), važi

$$\int_{t_0}^{t}\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds \le \frac{N}{K} = L \quad \text{za svako} \quad t\ge t_0.$$

Primenom Helderove nejednakosti i korišćenjem prethodne nejednakosti, dobija se da je

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}|w(s)|\,ds &\le \left(\int_{t_0}^{t}\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\,ds\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}\\ &\le L^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

Dakle, iz (2.14) sledi da je

$$\int_{t_0}^{t}H(t,s)\,q(s)\,ds \le H(t,t_0)\left[\int_{t_0}^{T^*}|q(s)|\,ds + |w(T^*)|\right] - L^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

tako da je

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\,q(s)\,ds &\le |w(T^*)| + \int_{t_0}^{T^*}|q(s)|\,ds\\ &\quad - L^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)}{H(t,t_0)}\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\,ds\right)^{\frac{1}{\alpha+1}},\end{aligned}$$

što je uzevši u obzir pretpostavku (C_{11}) u suprotnosti sa (C_{10}). $\square$

$\boxed{\text{II}}$ Kao što je već rečeno u uvodnom delu dobro je poznato da je uslov

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\beta}}\int_{0}^{t}(t-s)^{\beta}q(s)\,ds = \infty \quad \text{za neko } \beta>1 \tag{2.15}$$

dovoljan za oscilatornost linearne diferencijalne jednačine. Međutim u slučaju superlinearne jednačine Emden–Fowlera potrebno je pretpostaviti i da važi uslov (C_9). Kako je Philos [113] (kriterijum (V) Poglavlja 1.3.) pokazao da su ova dva uslova, pod dodatnom pretpostavkom za funkciju f, dovoljna i za oscilatornost uopštene jednačine Emden–Fowlera, postavlja se pitanje da li se analogni kriterijum može pokazati i za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu.

Mi ćemo pretpostaviti da važi (F_3),

$$(F_4) \qquad f'(x) \geq 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

i da funkcije ψ, f zadovoljavaju sledeći superlinearni uslov

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du, \quad \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du < \infty \quad \text{za svako} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\min \left\{ \inf_{x>0} \left(\frac{f'(x)}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x)|f(x)|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \int_{x}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du, \right.$$
$$\left. \inf_{x<0} \left(\frac{f'(x)}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x)|f(x)|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du \right\} > 0,$$

pri čemu ćemo tu pretpostavku označiti sa (F_5). Očigledno se za $\alpha = 1$, $\psi(x) \equiv 1$ uslov (F_5) svodi na uslov (F_2) kriterijuma (V) Poglavlja 1.3. Umesto težinske funkcije $(t-s)^{\beta}$, $\beta > 1$ u uslovu (2.15) koristićemo funkciju $H : \mathcal{D} = \{(t,s) \,|\, t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$, i pokazati da se kriterijum Philosa, pod dodatnim pretpostavkama za koeficijent a jednačine (E_α), može proširiti na tu jednačinu.

Teorema 2.2.8. *Diferencijalna jednačina (E_α) je oscilatorna ako koeficijenti a i q zadovoljavaju uslove (C_8), (C_9) i za funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbf{H}^+$ važe uslovi (C_{10}) i*

$$(C_{12}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s) \left(\int_{t_0}^{s} \frac{du}{a^{\frac{1}{\alpha}}(u)} \right)^{\alpha} \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)} \, ds < \infty.$$

Dokaz. Neka je x neoscilatorno rešenje na intervalu $[T,\infty)$, $T \geq t_0$, jednačine (E_α). Ako $w(t)$ definišemo sa (2.1) važi (2.2), a integracijom se dobija (2.11). Prema Lemi 2.2.1. važi (2.10), pa postoji konstanta $N > 0$ takva da je

$$(2.16) \qquad \int_T^t \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \, ds \leq N^{\alpha+1} \quad \text{za svako} \quad t \geq T.$$

Primenom Helderove nejednakosti, za svako $t \geq T$, dobija se da je

$$\int_T^t \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} |x'(s)| \, ds \leq \left(\int_T^t \frac{ds}{a^{1/\alpha}(s)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$
$$\times \left(\int_T^t \frac{f'(x(s))|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \, ds}{(a(s)\psi(x(s))|f(x(s))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

što sa (2.16) povlači da je

$$(2.17) \qquad \int_T^t \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|} \right)^{\frac{2}{\alpha+1}} |x'(s)| \, ds \leq N \, A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t) \quad \text{za svako} \quad t \geq T,$$

gde je $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a^{1/\alpha}(s)}$.

Razlikovaćemo dva slučaja, kada je $x(t)$ pozitivno i negativno rešenje.
(i) $x(t) > 0$ za svako $t \geq T$: Prema uslovu (F_5), postoji pozitivna konstanta M_1, takva da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))|f(x(t))|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \left(\int_{x(t)}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \geq M_1 \quad \text{za} \quad t \geq T. \tag{2.18}$$

Ako označimo sa

$$K_1 = \int_{x(T)}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du > 0,$$

biće

$$\begin{aligned}
\int_{x(t)}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du &= K_1 - \int_{x(T)}^{x(t)} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du \\
&= K_1 - \int_{T}^{t} \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} x'(s)\, ds \\
&\leq K_1 + \int_{T}^{t} \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} |x'(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

(ii) $x(t) < 0$ za svako $t \geq T$: Prema uslovu (F_5), postoji pozitivna konstanta M_2, takva da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))|f(x(t))|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \left(\int_{-\infty}^{x(t)} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \geq M_2 \quad \text{za} \quad t \geq T. \tag{2.19}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x(t)} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du &= K_2 + \int_{x(T)}^{x(t)} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du \\
&= K_2 + \int_{T}^{t} \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} x'(s)\, ds \\
&\leq K_2 + \int_{T}^{t} \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} |x'(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

gde je

$$K_2 = \int_{-\infty}^{x(T)} \left(\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{|f(u)|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} du > 0,$$

Dakle, prema (2.17) i (2.18), za svako $t \geq T$ je

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x(t))}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))|f(x(t))|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} &\geq M_j \left[K_j + \int_{T}^{t} \left(\frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{|f(x(s))|}\right)^{\frac{2}{\alpha+1}} |x'(s)|\, ds\right]^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\
&\geq M_j \left[K_j + N\, A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t)\right]^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}},
\end{aligned}$$

pri čemu uzimamo da je $j=1$ za $x>0$ i $j=2$ za $x<0$. Prema uslovu (C_8) postoji $T_0 \geq t_0$ tako da je $A(t) \geq 1$ za svako $t \geq T_0$, odnosno

$$K_j + N\,A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t) \leq K_j\,A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t) + N\,A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t) = K_j^*\,A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t), \quad t \geq T_0,$$

gde je $K_j^* = K_j + N$. Dakle, postoji pozitivna konstanta C takva da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi^{\frac{1}{\alpha}}(x(t))|f(x(t))|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \geq \frac{C}{A(t)}, \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0.$$

Sada, (2.2) ima sledeći oblik

$$q(t) \leq -w'(t) - C\,\frac{|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)A(t)}, \quad t \geq T_0.$$

Kao i u dokazu Teoreme 2.2.1., integracijom prethodne nejednakosti i korišćenjem (2.4), dobija se da je

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \quad &\leq \quad w(T_0)H(t,T_0) + \int_{T_0}^t |w(s)|h(t,s)\,ds \\ &\quad - C\int_{T_0}^t H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)A(s)}\,ds. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Stavljajući da je

$$X = (C\,H(t,s))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\,\frac{|w(s)|}{a^{\frac{1}{\alpha+1}}(s)A(s)}, \quad Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha}\frac{a^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(s)A^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(s)}{[C\,H(t,s)]^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}}\,h^{\alpha}(t,s), \qquad q = \frac{\alpha+1}{\alpha},$$

prema Lemi 2.1.1., za svako $t > s \geq T_0$, sledi da je

$$|w(s)|h(t,s) - C\,H(t,s)\frac{|w(s)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)A(s)} \leq \xi\,a(s)\,A^{\alpha}(s)\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)},$$

gde smo označili sa $\xi = \dfrac{1}{\alpha C^{\alpha}}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}$. Tada iz (2.20) sledi da je za svako $t \geq T_0$

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \quad &\leq \quad w(T_0)\,H(t,T_0) + \xi\int_{T_0}^t a(s)\,A^{\alpha}(s)\,\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds \\ &\leq \quad w(T_0)\,H(t,T_0) + \xi\int_{t_0}^t a(s)\,A^{\alpha}(s)\,\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t q(s)H(t,s)\,ds &= \int_{t_0}^{T_0} q(s)H(t,s)\,ds + \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \\ &\leq \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|H(t,s)\,ds + \int_{T_0}^t q(s)H(t,s)\,ds \\ &\leq H(t,t_0)\int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\,ds + |w(T_0)|\,H(t,t_0) + \xi\int_{t_0}^t a(s)\,A^{\alpha}(s)\,\frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\,ds \end{aligned}$$

što je zajedno sa uslovom (C_{12}) u suprotnosti sa uslovom (C_{10}). $\square$

Posledica 2.2.3. *Diferencijalna jednačina* (E_α) *je oscilatorna ako koeficijenti* a *i* q *zadovoljavaju uslove* (C_8), (C_9) *i za funkciju* $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ *koja zadovoljava uslov*

$$(H_8) \qquad \Big(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big)^2 \le \frac{(\alpha+1)}{\alpha} H(t,s) \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s) \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D}$$

važe uslovi (C_{10}) *i*

$$(C_{13}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{h(t,t_0)}{H(t,t_0)}\right)^{\alpha+1} \int_{t_0}^t a(s) \left(\int_{t_0}^s \frac{du}{a^{\frac{1}{\alpha}}(u)}\right)^\alpha ds < \infty.$$

Dokaz. Kako iz uslova (H_8) sledi da je funkcija $\frac{h^{\alpha+1}}{H^\alpha}$ monotono nerastuća, integral na desnoj strani nejednakosti (2.21) se može oceniti na sledeći način

$$\int_{t_0}^t a(s)\, A^\alpha(s)\, \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^\alpha(t,s)}\, ds \le \frac{h^{\alpha+1}(t,t_0)}{H^\alpha(t,t_0)} \int_{t_0}^t a(s)\, A^\alpha(s)\, ds.$$

Dakle, iz (2.21) sledi da je

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t q(s) H(t,s)\, ds &\le \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\, ds + |w(T_0)| \\ &+ \xi \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{h(t,t_0)}{H(t,t_0)}\right)^{\alpha+1} \int_{t_0}^t a(s) \left(\int_{t_0}^s \frac{du}{a^{\frac{1}{\alpha}}(u)}\right)^\alpha ds < \infty, \end{aligned}$$

što je u suprotnosti sa uslovom (C_{10}). $\square$

2.3. Komparativne teoreme

Od posebnog interesa u teoriji oscilatornosti diferencijalnih jednačina je formulisanje komparativnih teorema koje omogućavaju da se o oscilatornim svojstvima rešenja diferencijalnih jednačina zaključi na osnovu ponašanja rešenja jednostavnijih diferencijalnih jednačina. Kako je oscilatornost polulinearne diferencijalne jednačine mnogo detaljnije proučena u odnosu na oscilatornost uopštene polulinearne diferencijalne jednačine, u ovom poglavlju pokazaćemo komparativne teoreme za uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu u odnosu na odgovarajuću polulinearnu jednačinu.

Posmatrajmo uopštenu polulinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$(E_\alpha) \qquad [a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = r(t), \alpha > 0,$$

gde je $a \in C^1([t_0,\infty);[0,\infty))$, q, $r \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R};[0,\infty))$, $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, za $x \neq 0$ je $xf(x) > 0$.

Definicija 2.3.1. Kažemo da jednačina (E_α) ima:
(i) *svojstvo* (P) ako ni za jednu vrednost konstanti $C > 0$ i $D > 0$ ne postoji rešenje $x(t)$ jednačine

$$(E^1_\alpha) \qquad [a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + C\, q(t)f(x(t)) = D\, r(t),$$

takvo da je

$$(3.1) \qquad |x(t)| \ge \delta \quad \text{za neko } \delta > 0 \text{ i svako } t \in [T,\infty).$$

(ii) *svojstvo* $(\overline{P})$ ako ni za jednu vrednost konstante $D > 0$ ne postoji rešenje $x(t)$ jednačine

$$(E_\alpha^2) \qquad [a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = D\,r(t),$$

takvo da važi (3.1).

Da bi pokazali prvu komparativnu teoremu koristićemo dobro poznati rezultat Lia i Yeha, koji daje potreban i dovoljan uslov da polulinearna diferencijalna jednačina bude neoscilatorna.

Teorema 2.3.1. **(Li, Yeh [82])** *Polulinerana diferencijalna jednačina*

$$\left[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0,$$

je neoscilatorna ako i samo ako postoji $T \geq t_0$ *i funkcija* $v \in C^2([T,\infty))$ *takva da je*

$$v'(t) + \alpha a^{-\frac{1}{\alpha}}|v(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + q(t) \leq 0 \quad \text{za} \quad t \in [t_0,\infty).$$

Teorema 2.3.2. *Pretpostavimo da za svako* $\delta > 0$ *postoji konstanta* $\xi > 0$ *takva da je*

$$(F_1) \qquad \frac{f'(x)}{(\psi(x)|f(x)|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \geq \xi \quad \text{za svako } |x| \geq \delta$$

i da je za ma koje dve pozitivne konstante β *i* γ *jednačina*

$$\left[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right]' + \big(\beta\, q(t) - \gamma\,|r(t)|\big)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0,$$

oscilatorna, onda jednačina (E_α) *ima svojstvo* (P).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoje konstante C_0 i D_0 takve da jednačina

$$(3.2) \qquad [a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + C_0\,q(t)f(x(t)) = D_0\,r(t),$$

ima rešenje $x(t)$ koje zadovoljava uslov (3.1). Ako funkciju w definišemo na $[T,\infty)$ na sledeći način

$$w(t) = \frac{a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{f(x(t))},$$

iz (3.2) imamo da je

$$(3.3)\ w'(t) + \frac{f'(x(t))|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(a(t)\psi(x(t))|f(x(t))|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} + C_0\,q(t) - D_0\,\frac{r(t)}{f(x(t))} = 0 \quad \text{za svako} \quad t \geq T.$$

Iz (F_1) zaključujemo da postoji $\eta > 0$ takvo da je

$$(3.4) \qquad \frac{1}{|f(x(t))|} \leq \eta, \quad t \in [T,\infty).$$

Tako iz (F_1), (3.3) i (3.4) imamo da je

$$w'(t) + \xi\,\frac{|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} + C_0\,q(t) - D_0\,\eta\,|r(t)| \leq 0, \quad t \geq T.$$

Uzevši da je $v(t) = \left(\dfrac{\xi}{\alpha}\right)^{\alpha} w(t)$ dobija se

$$v'(t) + \alpha\, \frac{|v(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} + \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\alpha} \big(C_0\, q(t) - D_0\, \eta\, |r(t)|\big) \le 0, \quad t \ge T.$$

Sada na osnovu Teoreme 2.3.1. zaključujemo da je jednačina

$$\big[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\big]' + \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\alpha} \big(C_0 q(t) - D_0|r(t)|\big)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0,$$

neoscilatorna, što je u suprotnosti sa datom pretpostavkom. □

U toku daljeg rada pretpostavićemo da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov

$$\frac{f'(x)}{(\psi(x)|f(x)|^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}} \ge K > 0, \quad x \ne 0$$

i pokazati tri teoreme koje daju dovoljne uslove da jednačina (E_α) ima svojstvo $(\overline{P})$.

Teorema 2.3.3. *Pretpostavimo da za funkciju $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ i proizvoljnu konstantu $\beta > 0$ važe uslovi*

$$(C_1) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s) \frac{h^{\alpha+1}(t,s)}{H^{\alpha}(t,s)}\, ds < \infty$$

$$(C_2) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\big(q(s) - \beta|r(s)|\big)\, ds = \infty.$$

Tada jednačina (E_α) ima svojstvo $(\overline{P})$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji konstanta D_0 takva da jednačina (E_α^2) za $D = D_0$ ima rešenje $x(t)$ koje zadovoljava (3.1). Tada postoji $\eta > 0$ tako da važi (3.4). Kako je $x(t) \ne 0$ za $t \ge T$ ono zadovoljava jednačinu

$$[a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + Q(t)f(x(t)) = 0, \tag{3.5}$$

gde je $Q(t) = q(t) - D_0 \dfrac{r(t)}{f(x(t))}$. Kako je $Q(t) \ge q(t) - D_0\, \eta\, |r(t)|,\ t \ge T$ iz (C_2) zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} Q(s)\, H(t,s)\, ds = \infty. \tag{3.6}$$

Sada na osnovu (C_1) i (3.6), primenom Posledice 2.2.1. zaključujemo da je $x(t)$ oscilatorno rešenje jednačine (3.5), što je u suprotnosti sa (3.1). □

Analogno, koristeći Posledicu 2.2.2. može se pokazati i sledeća teorema:

Teorema 2.3.4. *Jednačina* (E_α) *ima svojstvo* $(\overline{P})$ *ako za funkciju* $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ *i pozitivnu, monotono neopadajuću funkciju* $\rho \in C^1([t_0,\infty))$ *važi uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \frac{a(s)\rho(s)}{H^\alpha(t,s)} \Big(h(t,s) + \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \Big)^{\alpha+1} ds < \infty,$$

i za proizvoljno $\beta > 0$ *uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \big(q(s) - \beta |r(s)| \big) \rho(s) H(t,s)\, ds = \infty.$$

Primenom kriterijuma oscilatornosti pokazanog u Teoremi 2.2.7. na jednačinu (3.5) može se pokazati i sledeća teorema:

Teorema 2.3.5. *Pretpostavimo da važe sledeći uslovi:*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}\, ds = \infty, \qquad \liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds > -\infty,$$

i za funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *sa svojstvom* $\mathbf{H}^+$, *koja ima nenegativan drugi parcijalni izvod po promenljivoj* s *na* $\mathcal{D}$, *važe uslovi* (C_2) *i*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H(t,t_0)}{\partial s}}{H(t,t_0)} \left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} > -\infty.$$

Tada jednačina (E_α) *ima svojstvo* $(\overline{P})$.

Glava 3

Oscilatornost generalizovane diferencijalne jednačine tipa Emden–Fowlera

Sredinom osamdesetih godina ovog veka pažnju autora je privukla nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda oblika

$$(*) \qquad [a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0$$

kao još jedna generalizacija diferencijalne jednačine Emden–Fowlera. Postoji veliki broj radova o asimptotskim svojstvima rešenja nelinearne jednačine ovog oblika, a posebno o oscilatornim svojstvima rešenja. Jednačina $(*)$ je posmatrana pod pretpostavkom da je funkcija $a \in C^1([t_0, \infty))$ pozitivna, dok je od posebnog interesa utvrditi oscilatornost jednačine kada su funkcije $p,\ q \in C([t_0, \infty))$ proizvoljnog znaka. Zapravo, J.R. Graef i P.W. Spikes su 1987. u [47] pokazali da su sva rešenja jednačine $(*)$ neoscilatorna ako je funkcija q nepozitivna, te stoga oscilatornost jednačine ima svrhe ispitivati samo u slučajevima kada funkcija q menja znak ili kada je nenegativna.

Za funkcije f i ψ se bazično pretpostavlja da su neprekidne na $\mathbb{R}$, neprekidno diferencijabilne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i da zadovoljavaju uslove

$$xf(x) > 0, \quad \psi(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

dok se u zavisnosti od ostalih pretpostavki za funkcije f i ψ najčešće vrši klasifikacija postojećih rezultata o oscilatornosti jednačine $(*)$. Tako su J.R. Graef i P.W. Spikes [46] pokazali kriterijume oscilatornosti jednačine $(*)$ ako je $p(t) \equiv 0$, odnosno nelinearne jednačine oblika

$$(**) \qquad [a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0,$$

pod pretpostavkom da je $f'(x) \geq 0$ za $x \neq 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ i

$$(F_1) \qquad \frac{f'(x)}{\psi(x)} \geq k > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

U istom radu pokazan je i kriterijum oscilatornosti jednačine $(**)$ ako je funkcija $f(x)/\psi(x)$ superlinearna i važi (F_1). S.R. Grace, B.C. Lalli su u radu [38] posmatrali jednačinu $(*)$ bez ograničenja o znaku funkcije p i pod pretpostavkama da postoje pozitivne konstante $k_1,\ c,\ c_1$ tako da je

$$(F_2) \qquad f'(x) \geq k_1 > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0, \quad 0 < c \leq \psi(x) \leq c_1 \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ista dva autora su u svom radu [39] korišćenjem uslova koji podrazumevaju težinsko usrednjenje integrala koeficijenta q, pod pretpostavkom da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov (F_2), generalizovali dobro poznate kriterijume Witnera, Hartmana, Kameneva i Philosa (videti Poglavlje 1.2. str. 4 i 6) za oscilatornost linearne diferencijalne jednačine. Razmatrana su i oscilatorna svojstva rešenja jednačine $(*)$ pod pretpostavkom da je funkcija f superlinearna. Kao težinske funkcije su korišćene funkcija $\varrho \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$ i $H(t,s) = (t-s)^\alpha,\ \alpha > 1$. Dobijeni kriterijumi proširuju i objedinjavaju rezultate u S.R. Grace, B.C. Lalli [28], [31], J. Yan [143] i C.C. Yeh [147]. U slučaju kada je prigušujući koeficijent $p(t)$ nepozitivan uslov (F_2) može se oslabiti uslovom (F_1) i

$$(F_3) \qquad \psi(x) \geq c > 0 \quad \text{za} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Najčešće se vrži klasifikacija kriterijuma oscilatornosti diferencijalne jednačine $(*)$ u odnosu na sublinearnost odnosno superlinearost funkcije f/ψ. Tako su S.R. Grace, B.C. Lalli [31] i S.R. Grace [36] pokazali kriterijume oscilatornosti sublinearne jednačine $(*)$ pod pretpostavkom da je

$$\psi(x)f'(x) \geq K > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0$$

odnosno da važi (F_2) i sublinearne jednačine $(**)$ pod uslovom (F_1). Ti kriterijumi su takođe dobijeni težinskim usrednjenjem i korišćenjem težinske funkcije $\varrho \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$ i $H(t,s) = (t-s)^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ odnosno $H(t,s) = (t-s)^\alpha,\ \alpha > 1$. Ista dva autora su u [34] generalizovali kriterijume Philosa [105], [107] za oscilatornost uopštene jednačine Emden–Fowlera uz pretpostavku o nenegativnosti funkcije p, kao i bez ograničenja o znaku funkcije p uz uslov (F_3).

Znatno je manji broj rezultata o oscilatornosti superlinearne jednačine $(*)$. Tako su samo S.R. Grace, B.C. Lalli i C.C. Yeh u [28] i [35] pokazali kriterijume oscilatornosti sublinearne ali i superlinearne jednačine $(*)$, koristeći takođe težinsko usrednjenje intergrala koeficijenata a i q.

Od ostalih rezultata u oblasti oscilatornosti nelinearne jednačine $(*)$ treba još istaći radove: R. Blaśko, J.R. Graef, M. Hačik, P.W. Spikes [3], S.R. Grace [40], [42], [43], S.R. Grace, B.C. Lalli [27], [29], [32], [34], J.R. Graef, P.W. Spikes [47], G.W. Johnson, J. Yan [60], L. Wudu [140].

S.R. Grace u [41] je 1992. po prvi put pokazao kriterijume oscilatornosti jednačine $(*)$ i $(**)$ (Teoreme 1.4.4., 1.4.5., 1.4.6., 1.4.7., 1.4.8), koristeći kao težinsku funkciju u metodi usrednjenja funkciju iz opšte klase parametarskih funkcija $H(t,s)$. H.J. Li i C.C. Yeh su 1997. u [87] nastavili istraživanje u tom pravcu uopštivši kriterijum Wonga i Yeha [136] o oscilatornosti uopštene jednačine Emden–Fowlera (kriterijum (XV) Poglavlja 1.3) na sublinearnu jednačinu $(**)$.

Osnovni zadatak u ovoj glavi biće obogaćenje ovih sadržaja kriterijumima oscilatornosti nelinearne jednačine $(*)$ i $(**)$. Uopšteni su i prošireni mnogi kriterijumi oscilatornosti uopštene diferencijalne jednačine Emden–Fowlera navedeni u Poglavlju 1.3. U ispitivanju je korišćeno težinsko usrednjenje opštom klasom paramterskih funkcija $H(t,s)$, inspirisano pomenutim radovima S.R. Grace [41], H.J. Lia i C.C. Yeha [87], kao i naravno inicijalnim radom sa ovakovim pristupom Ch.G. Philosa [111] (Teoreme 1.4.1., 1.4.2., 1.4.3.).

U Poglavlju 3.1. ćemo posmatrati sublinearnu jednačinu $(**)$ i najpre generalizovati rezultate Ch.G. Philosa [115], [110] – kriterijume (XIII) i (XIV) Poglavlja 1.3. Zatim ćemo pokazati kriterijum oscilatornosti analogan kriterijumu Wonga [134] za uopštenu jednačinu Emden–Fowlera - kriterijum (XVII) Poglavlja 1.3. Pokazaćemo dalje da se kriterijum (XIX) Poglavlja 1.3., pod dodatnim pretpostavkama za funkcije a i ψ, može proširiti i na jednačinu $(**)$. Drugi deo ovog poglavlja daje rezultate o oscilatornosti sublinearne jednačine bez ograničenja o znaku funkcije ψ. Kriterijumi oscilatornosti koji podrazumevaju takvu pretpostavku, prema našem saznanju, nisu do sada poznati, odnosno u svim do sada poznatim rezultatima fuguriše pretpostavka o pozitivnosti funkcije ψ. Zapravo, pokazani su kriterijumi oscilatornosti jednačine (E) pri sledećim pretpostavkama za funkcije f i ψ:

$$\psi(x) \neq 0, \quad x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0, \quad \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \geq 0, \quad \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \geq \frac{1}{k} > 0, \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

Ti kriterijumi su u Poglavlju 3.2. prošireni na jednačinu $(*)$ bez ograničenja o znaku funkcije p, što je, kao što je prethodno rečeno, od takođe posebnog interesa.

U Poglavlju 3.3. posmatrana je superlinearna jednačina $(**)$. Generalizovani su rezultati u radovima Ch.G. Philosa [113], [112] i Ch.G. Philosa, I.K. Purnarasa [117], [116] – kriterijumi (V), (VI), (VII), (VIII), (IX) Poglavlja 1.3. Kao i u prethodna dva poglavlja svi pokazani kriterijumi oscilatornosti superlinearne jednačine $(**)$ predstavljaju, specijalno, poboljšanje navedenih kriterijuma oscilatornosti superlinearne uopštene jednačine Emden–Fowlera, u smislu korišćenja težinske funkcije $H(t,s)$ umesto $(t-s)^\alpha$, α prirodan ili realan broj veći od jedinice.

3.1. Oscilatornost sublinearne diferencijalne jednačine

U ovom poglavlju biće razmatrana oscilatorna svojstva rešenja nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda oblika

$$(E) \qquad [a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

pri sledećim pretpostavkama:
(i) $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ je pozitivna neprekidno diferencijabilna funkcija,
(ii) $q : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija,
(iii) $\psi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su neprekidno diferencijabilne funkcije.

Definicija 3.1.1. Diferencijalna jednačina (E) je **sublinearna** ako važi

$$0 < \int_{0+}^{\varepsilon} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, \ \int_{0-}^{-\varepsilon} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du < \infty \ \text{ za svako } \varepsilon > 0.$$

Razmatranje u ovom poglavlju podelićemo na dva dela, u zavisnosti od uslova koje zadovoljavaju funkcije f i ψ.

$\boxed{\text{I}}$ Pretpostavimo da funkcije f, ψ zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(F_1) \qquad \psi(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

$$(F_2) \qquad xf(x) > 0, \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Koristeći kao osnovu ideju Philosa [107] (kriterijum (XI) Poglavlja 1.3.), Li i Yeh [87] su uveli konstantu $M_{f,\psi}$ na sledeći način

$$M_{f,\psi} = \min\left\{ \frac{\inf_{x>0} \frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}{1+\inf_{x>0} \frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}, \frac{\inf_{x<0} \frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}{1+\inf_{x<0} \frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}} \right\},$$

gde je

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{0+}^{x} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du, & x > 0 \\[2ex] \displaystyle\int_{0-}^{x} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du, & x < 0 \end{cases}$$

i pokazali sledeći kriterijum oscilatornosti jednačine (E):

Teorema 3.1.1. (Li, Yeh [87]). *Neka je $H : \mathcal{D} = \{ (t,s) \,|\, t \ge s \ge t_0 \} \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima svojstvo $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$. Ako postoji pozitivna funkcija $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$, takva da je $(a(t)\varrho'(t))' \le 0$ za svako $t \ge t_0$ i koja za neko $\beta \in [0, M_{f,\psi}]$ zadovoljava uslov*

$$(C_1) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)q(s)\, ds = \infty,$$

jednačina (E) je oscilatorna.

Očigledno za $a(t) \equiv 1, \psi(x) \equiv 1$ jednačina (E) se svodi na uopštenu diferencijalnu jednačinu Emden-Fowlera. Tako za $H(t,s) = (t-s)^{\alpha}$, $\alpha > 1$ kao specijalan slučaj Teoreme 3.1.1. dobija se kriterijum Wonga i Yeha iz [136] (kriterijum (XV) Poglavlja 1.3.), odnosno za α prirodan broj veći od jedinice kriterijum Philosa [115] (kriterijum (XII) Poglavlja 1.3.). Posmatrajući na primer, u slučaju uopštene diferencijalne jednačine Emden-Fowlera, funkciju $q(t) = t^{\lambda} \sin t$, može se uočiti da Philosov kriterijum (XIII) Poglavlja 1.3. omogućava proširenje oblasti vrednosti parametra λ za koje je jednačina oscilatorna, u odnosu na kriterijum (XII). Iz tog razloga prirodno se postavio problem formulisanja odgovarajućeg proširenja kriterijuma (XIII) Poglavlja 1.3. na jednačinu (E).

Teorema 3.1.2. *Neka je*
(i) *$\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ pozitivna funkcija takva da je $\varrho'' \le 0$ na $[t_0,\infty)$ i*

$$(R_1) \qquad a(t)[\varrho'(t)]^2 \le -c\,[a(t)\varrho'(t)]'\varrho(t) \quad \text{za svako } t \ge t_0,$$

za neku pozitivnu konstantu c,
(ii) *$H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkcija sa svojstvom $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ koja zadovoljava uslov*

$$(H_9) \qquad \int_{t_0}^{\infty} s\,\Omega^2(s)\, ds < \infty, \quad \Omega(s) = \limsup_{t\to\infty} \left(-\frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)} \right),\ s \ge t_0.$$

Jednačina (E) je oscilatorna ako postoji funkcija $\varphi \in C([t_0,\infty))$ takva da važi uslov

$$(C_2) \qquad \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds = \infty,$$

i za neko $\beta \in [0, M_{f,\psi}]$ važi

$$(C_3) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} H(t,s)\,\varrho^{\beta}(s)\,q(s)\, ds \ge \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \ge t_0.$$

Dokaz. Neka je $x(t)$ neoscilatorno rešenje diferencijalne jednačine (E) i neka je $T_0 \geq t_0$ takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$. Definišimo funkciju w na $[T_0, \infty)$ sa

$$w(t) = \varrho^{\beta}(t)\Phi(x(t)). \tag{1.1}$$

Tada je za svako $t \geq T_0$

$$w'(t) = \varrho^{\beta}(t)\frac{\psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} + \beta\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}w(t), \tag{1.2}$$

što povlači da je

$$\begin{aligned}
(aw')' &= \varrho^{\beta}\frac{(a\,\psi(x)x')'}{f(x)} + \beta\,\varrho^{\beta-1}\varrho'\,\frac{a\,\psi(x)\,x'}{f(x)} - \varrho^{\beta}a\,\psi(x)\,\frac{f'(x)}{f^2(x)}\,x'^2 \\
&\quad +\beta\,\frac{(a\,\varrho')'}{\varrho}\,w - \beta\,a\,\frac{\varrho'^2}{\varrho^2}w + \beta\,a\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,\left(\varrho^{\beta}\frac{\psi(x)x'}{f(x)} + \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) \\
&= -\varrho^{\beta}\,q + \beta\,\frac{(a\,\varrho')'}{\varrho}\,w + \beta(\beta-1)\,a\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 w \\
&\quad +2\,\beta\,\varrho^{\beta-1}\varrho' a\,\frac{\psi(x)x'}{f(x)} - \frac{\varrho^{\beta}a}{\Phi(x)}\frac{\Phi(x)f'(x)}{\psi(x)}\left(\frac{\psi(x)\,x'}{f(x)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Prema načinu izbora konstante β je

$$\frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)} \geq \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

tako da je iz prethodne jednakosti

$$\begin{aligned}
(aw')' &\leq -\varrho^{\beta}q + \beta\,\frac{(a\,\varrho')'}{\varrho}\,w - \beta(1-\beta)\,a\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\varrho^{\beta}\Phi(x) \\
&\quad +2\,\beta\,\frac{\varrho^{\beta}a}{\Phi(x)}\,\frac{\varrho'}{\varrho}\Phi(x)\frac{\psi(x)\,x'}{f(x)} - \frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{\varrho^{\beta}a}{\Phi(x)}\,\left(\frac{\psi(x)\,x'}{f(x)}\right)^2 \\
&= -\varrho^{\beta}q + \beta\,\frac{(a\,\varrho')'}{\varrho}\,w - \frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{\varrho^{\beta}a}{\Phi(x)}\,\left((1-\beta)\frac{\varrho'}{\varrho}\,\Phi(x) - \frac{\psi(x)\,x'}{f(x)}\right)^2,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\big(a(t)w'(t)\big)' &\leq -\varrho^{\beta}(t)q(t) + \beta\,\frac{\big(a(t)\,\varrho'(t)\big)'}{\varrho(t)}\,w(t) \\
&\quad - \frac{\beta}{1-\beta}\,\frac{a(t)}{w(t)}\,\left(w'(t) - \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\,w(t)\right)^2 \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Dakle, za svako t i svako T, takve da je $t \geq T \geq T_0$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\int_T^t H(t,s)(a(s)w'(s))'\,ds &\leq -\int_T^t H(t,s)\varrho^{\beta}(s)q(s)\,ds + \beta\int_T^t H(t,s)\frac{[a(s)\,\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\,w(s)\,ds \\
&\quad -\frac{\beta}{1-\beta}\int_T^t H(t,s)\frac{a(s)}{w(s)}\,\left(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\right)^2 ds.
\end{aligned}$$

Kako je primenom parcijalne integracije

$$
\begin{aligned}
-\int_T^t H(t,s)[a(s)w'(s)]'\,ds &= H(t,T)a(T)w'(T) + \int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)w'(s)\,ds \\
&= H(t,T)a(T)w'(T) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T)a(T)w(T) - \int_T^t w(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)\right)ds,
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

iz prethodne nejednakosti, dobija se da je

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\varrho^{\beta}(s)q(s)\,ds &\le a(T)w'(T) - \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,T)}{H(t,T)}a(T)w(T) \\
&\quad - \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t w(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)\right)ds \\
&\quad + \frac{\beta}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\frac{[a(s)\,\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\,w(s)\,ds \\
&\quad - \frac{\beta}{(1-\beta)H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\frac{a(s)}{w(s)}\left(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\right)^2 ds.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Tako, prema uslovu (C_3), za svako $T \ge T_0$ mora biti

$$
\begin{aligned}
&a(T)w'(T) - a(T)w(T)\,\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,T)}{H(t,T)} \\
&\quad \ge \varphi(T) + \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t w(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)\right)ds \\
&\qquad + \beta\,\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\left(-\frac{[a(s)\,\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\right)w(s)\,ds \\
&\qquad + \frac{\beta}{1-\beta}\,\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\frac{a(s)}{w(s)}\left(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\right)^2 ds,
\end{aligned}
$$

odakle zaključujemo da je za svako $T \ge T_0$

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\left(-\frac{[a(s)\,\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\right)w(s)\,ds < \infty, \tag{1.6}
$$

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t H(t,s)\frac{a(s)}{w(s)}\left(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\right)^2 ds < \infty, \tag{1.7}
$$

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t w(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)\right)ds < \infty, \tag{1.8}
$$

$$
\varphi(T) \le a(T)[w'(T) + \Omega(T)w(T)]. \tag{1.9}
$$

Sem toga, kako je

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t w(s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)\right)ds \\
&\quad \ge \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)w(s)a(s)\,ds + \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)w(s)a'(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

iz (1.8) sledi da je

$$
\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)w(s)a(s)\,ds < \infty. \tag{1.10}
$$

Prema (1.7) i (1.10), postoji brojni niz $\{\tau_n\}_{n\in N}$ u intervalu (T_0,∞), takav da je $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=\infty$ i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(\tau_n,T_0)}\int_{T_0}^{\tau_n}H(\tau_n,s)\,\frac{a(s)}{w(s)}\Big(w'(s)-\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds<\infty, \tag{1.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(\tau_n,T_0)}\int_{T_0}^{\tau_n}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n,s)\,a(s)\,w(s)\,ds<\infty. \tag{1.12}$$

Pokažimo sada da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)w(t)}{t}<\infty. \tag{1.13}$$

Neka je μ proizvoljna pozitivna konstanta. Kako funkcija $H\in\mathcal{H}_a^*(\mathcal{D})$ zadovoljava uslov

$$0<\inf_{s\ge t_0}\left[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right]\le\infty,$$

postoji konstanta ρ takva da je

$$\inf_{s\ge t_0}\Big[\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\Big]>\rho>0. \tag{1.14}$$

Pretpostavimo suprotno, da (1.13) ne važi. Tada postoji $T_1\ge T_0$, takvo da je

$$\frac{a(t)w(t)}{t}\ge\frac{\mu}{\rho}\qquad\text{za svako}\quad t\ge T_1.$$

Za $t\ge T_1$ dobija se da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^{t}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)a(s)w(s)\,ds&\ge\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_1}^{t}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)a(s)w(s)\,ds\\&\ge\frac{\mu}{\rho\,H(t,T_0)}\int_{T_1}^{t}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\,s\,ds=\frac{\mu}{\rho\,H(t,T_0)}\Big(H(t,T_1)-T_1\frac{\partial H}{\partial s}(t,T_1)\Big)\\&\ge\frac{\mu}{\rho}\,\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}.\end{aligned}$$

Kako (1.14) garantuje da je

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}>\rho,$$

postoji $T_2\ge T_1$, takvo da je

$$\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}\ge\rho\qquad\text{za svako}\quad t\ge T_2. \tag{1.15}$$

Dakle,

$$\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^{t}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\,a(s)w(s)\,ds\ge\mu\qquad\text{za svako}\quad t\ge T_2,$$

tako da je za svako dovoljno veliko n

$$\frac{1}{H(\tau_n,T_0)}\int_{T_0}^{\tau_n}\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n,s)\,a(s)\,w(s)\,ds\ge\mu.$$

Zbog proizvoljnosti $\mu > 0$, ovim smo pokazali da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n, s)\, a(s)\, w(s)\, ds = \infty,$$

što je u kontradikciji sa (1.12) i samim tim pokazuje da (1.13) zaista važi.

Dalje, pokažimo da je

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{a(s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds < \infty. \tag{1.16}$$

Prepostavimo suprotno, da postoji $T_1 \geq T_0$, takvo da je

$$\int_{T_0}^{t} \frac{a(s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds \geq \frac{\mu}{\rho} \quad \text{za svako} \quad t \geq T_1,$$

gde je μ proizvoljna pozitivna konstanta, a ρ konstanta određena sa (1.14). Za svako $t \geq T_1$, imamo da je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{a(s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds \\
&\quad = \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d\bigg(\int_{T_0}^{s} \frac{a(\tau)}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau)\Big)^2 d\tau\bigg) \\
&\quad = \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \bigg(\int_{T_0}^{s} \frac{a(\tau)}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau)\Big)^2 d\tau\bigg) ds \\
&\quad \geq \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_1}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \bigg(\int_{T_0}^{s} \frac{a(\tau)}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau)\Big)^2 d\tau\bigg) ds \\
&\quad \geq \frac{\mu}{\rho\, H(t, T_0)} \int_{T_1}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) ds = \frac{\mu}{\rho}\, \frac{H(t, T_1)}{H(t, t_0)}.
\end{aligned}$$

Prema (1.15), dobija se da je

$$\frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{a(s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds \geq \mu \quad \text{za svako} \quad t \geq T_2.$$

Za svako dovoljno veliko n onda mora biti

$$\frac{1}{H(\tau_n, T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} H(\tau_n, s)\, \frac{a(s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds \geq \mu,$$

što je u suprotnosti sa (1.11) i samim tim pokazuje (1.16).

Analognim postupkom, koristeći (1.6), može se pokazati da važi

$$\int_{T_0}^{\infty} w(s) \left(-\frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\right) ds < \infty. \tag{1.17}$$

Dalje, $\varrho'(t)$ je nerastuća funkcija, tako da je za svako $t \geq T_0$

$$\varrho(t) - \varrho(T_0) = \int_{T_0}^{t} \varrho'(s)\, ds > (t - T_0)\varrho'(t),$$

što pokazuje da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\varrho'(t)}{\varrho(t)} < \infty. \tag{1.18}$$

Koristeći uslov (R_1), zaključujemo da je za svako $t \geq T_0$

$$\begin{aligned}
&\int_{T_0}^t \frac{a(s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds \\
&\quad = \int_{T_0}^t a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds - 2\int_{T_0}^t \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,a(s)w'(s)\,ds + \int_{T_0}^t \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 a(s)w(s)\,ds \\
&\quad = \int_{T_0}^t a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds - 2\,\frac{a(t)\varrho'(t)}{\varrho(t)}w(t) + 2\,\frac{a(T_0)\varrho'(T_0)}{\varrho(T_0)}w(T_0) \\
&\quad\quad + 2\int_{T_0}^t \frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\,w(s)\,ds - \int_{T_0}^t \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 a(s)w(s)\,ds \\
&\quad \geq \int_{T_0}^t a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds - 2\,\frac{a(t)\varrho'(t)}{\varrho(t)}w(t) + 2\,\frac{a(T_0)\varrho'(T_0)}{\varrho(T_0)}w(T_0) \\
&\quad\quad + (c+2)\int_{T_0}^t \frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\,w(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^\infty a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds &\leq 2\left[\limsup_{t\to\infty}\frac{t\,\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right]\left[\limsup_{t\to\infty}\frac{a(t)w(t)}{t}\right] - 2\,\frac{a(T_0)\varrho'(T_0)}{\varrho(T_0)}w(T_0) \\
&+ (c+2)\int_{T_0}^\infty \Big(-\frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\Big)\,w(s)\,ds + \int_{T_0}^\infty \frac{a(s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds,
\end{aligned}$$

što, zbog (1.13), (1.16), (1.17) i (1.18), pokazuje da je

$$\int_{T_0}^\infty a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds < \infty. \tag{1.19}$$

Konačno, kako prema (1.13) postoji konačno $M = \sup_{t\geq T_0} a(t)w(t)/t$, koristeći (1.9), zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^\infty \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds &\leq \int_{T_0}^\infty \frac{a^2(s)[w'(s)+\Omega(s)w(s)]^2}{s}\,ds \\
&\leq M\int_{T_0}^\infty \frac{a(s)[w'(s)+\Omega(s)w(s)]^2}{w(s)}\,ds \\
&\leq 2M\int_{T_0}^\infty a(s)\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds + 2M\int_{T_0}^\infty a(s)\Omega^2(s)w(s)\,ds \\
&\leq 2M\int_{T_0}^\infty a(s)\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds + 2M^2\int_{t_0}^\infty s\,\Omega^2(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Dobijena nejednakost je prema (1.19) i (H_9) u kontradikciji sa pretpostavkom (C_2), čime je torema pokazana. $\square$

Kao ilustraciju navodimo sledeća dva primera.

Primer 3.1.1. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_1) \qquad \big[t^{\nu}\, x^2(t)x'(t)\big]' + t^{\lambda} \sin t\big[|x(t)|^{\beta+2} \operatorname{sgn} x + x^3(t)\big] = 0,$$

gde je $0 < \beta < 1$ i $\nu < 0$. Cilj nam je da pokažemo da je *diferencijalna jednačina* (E_1) *oscilatorna za* $\lambda > -\dfrac{\beta+2}{6}$.

Za svako $x \neq 0$ je

$$x\, f(x) > 0,\;\; f'(x) = (\alpha+2)|x|^{\alpha+1} + 3x^2 > 0,$$

odnosno funkcija f zadovoljava uslove (F_1) i (F_2). Pored toga, za svako $x \neq 0$ je

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \leq \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

tako da je

$$\inf_{x>0} \Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} = \inf_{x<0} \Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} \leq \inf_{x>0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}[(\alpha+2)x^{\alpha-1}+3] = \frac{\alpha+2}{1-\alpha}.$$

S druge strane, za svako $x \neq 0$, dobija se da je

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \geq \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{2\,u^{\alpha}} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \text{ako je } |x| \leq 1$$

i

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \geq \int_{0+}^{1} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \geq \int_{0+}^{1} \frac{du}{2\,u^{\alpha}} = \frac{1}{2(1-\alpha)}, \quad \text{ako je } |x| \geq 1,$$

te je za svako $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} &\geq \frac{|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}[(\alpha+2)|x|^{\alpha-1}+3] = \frac{\alpha+2+3|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} \\ &> \frac{\alpha+2}{2(1-\alpha)} \quad \text{za} \quad |x| \leq 1 \end{aligned}$$

i

$$\Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} \geq \frac{(\alpha+2)|x|^{\alpha-1}+3}{2(1-\alpha)} > \frac{3}{2(1-\alpha)} > \frac{\alpha+2}{2(1-\alpha)} \quad \text{za} \quad |x| \geq 1.$$

Dakle,

$$\inf_{x>0} \Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} = \inf_{x<0} \Phi(x)\frac{f'(x)}{\psi(x)} \geq \frac{\alpha+2}{2(1-\alpha)}.$$

Na taj način je

$$M_{f,\psi} \geq \frac{\frac{\alpha+2}{2(1-\alpha)}}{1+\frac{\alpha+2}{1-\alpha}} = \frac{\alpha+2}{6},$$

tako da možemo uzeti da je $\beta \leq \dfrac{\alpha+2}{6}$.

Izaberimo da je $\varrho(t) = t^{\mu}$, $0 < \mu < 1$. Tako izabrana funkcija ϱ je konkavna i zadovoljava uslov (R_1) za proizvoljnu konstantu c takvu da je $c \geq \frac{\mu}{\nu+1-\mu} > 0$. Pored toga, uzmimo da je $H(t,s) = t - s$ za $t \geq s \geq t_0$.

Za proizvoljan realan broj δ i za svako $t \geq t_0$ je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)\tau^{\delta}\sin\tau\,d\tau &= \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\tau^{\delta}\sin\tau\,d\tau\,ds \\
&= \Big(1-\frac{t_0}{t}\Big)\Big[t_0^{\delta}\cos t_0 - \delta t_0^{\delta-1}\sin t_0 - \delta(\delta-1)t_0^{\delta-2}\cos t_0\Big] \\
&\quad + \frac{1}{t}\Big[t_0^{\delta}\sin t_0 + 2\delta t_0^{\delta-1}\cos t_0 - (\delta+1)\delta(\delta-1)t_0^{\delta-2}\sin t_0\Big] \\
&\quad - t^{\delta-1}\sin t - 2\delta t^{\delta-2}\cos t + (\delta+1)\delta(\delta-1)t^{\delta-3}\sin t \\
&\quad - \frac{(\delta+1)\delta(\delta-1)(\delta-2)}{t}\int_{t_0}^{t}s^{\delta-3}\sin s\,ds - \delta(\delta-1)(\delta-2)\int_{t_0}^{t}s^{\delta-3}\cos s\,ds.
\end{aligned}$$

Dakle, ako je $\delta = \lambda + \mu\beta > 1$, tada je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,\tau)\varrho^{\alpha}(\tau)q(\tau)\,d\tau = \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)\tau^{\mu\beta+\lambda}\sin\tau\,d\tau = \infty,$$

tako da je prema Teoremi 3.1.1. jednačina (E) oscilatorna za $\lambda > 1 - \dfrac{\alpha+2}{6}$.

Ako je $0 < \delta \leq 1$, može se primetiti da integral u (C_1) postoji i da je konačan, pa se Teorema 3.1.1. ne može primeniti. Ali sa druge strane, imamo da je

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{T}^{t}(t-\tau)\tau^{\delta}\sin\tau\,d\tau \quad &\geq \quad T^{\delta}\cos T - \delta T^{\delta-1}\sin T - \delta(\delta-1)T^{\delta-2}\cos T \\
&\quad - \delta(\delta-1)(\delta-2)\int_{T}^{\infty}s^{\delta-3}\sin s\,ds.
\end{aligned}$$

Uzmimo da je $\varphi(T) = T^{\delta}\cos T - 2\delta$. Tada postoji $t_1 \geq t_0$, takvo da važi uslov (C_3) za svako $t \geq t_1$. Kako je $\delta > 0$, postoji prirodan broj $N > 0$ takav da je $2N\pi - \frac{\pi}{4} > t_1$ i

$$\varphi(T) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{na } \Big[2n\pi - \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{4}\Big] \text{ za svako } n \geq N.$$

Dakle,

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\varphi_+^2(s)}{s}\,ds \geq \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\int_{2n\pi-\pi/4}^{2n\pi+\pi/4}\frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\ln\Big(1+\frac{2}{8n-1}\Big) = \infty,$$

tako da je zadovoljen uslov (C_2). Primenjujući Teoremu 3.1.2. zaključujemo da je jednačina (E_1) oscilatorna za $-\dfrac{\alpha+2}{6} < \lambda \leq 1 - \dfrac{\alpha+2}{6}$.

Konačno, jednačina (E_1) je oscilatorna za $\lambda > -\dfrac{\alpha+2}{6}$. $\triangle$

Primer 3.1.2. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_2) \qquad \Big[\frac{x^2(t)}{t}\,x'(t)\Big]' + t^{\lambda}\cos t\big[|x(t)|^{\alpha+2}\operatorname{sgn} x + x^3(t)\big] = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Kao u Primeru 3.1.1. može se pokazati da su zadovoljeni uslovi (F_1) i (F_2), kao i da je $M_{f,\psi} \geq \frac{\alpha+2}{6}$, tj. može se uzeti da je $\beta = \frac{\alpha+2}{6}$.

Sada, izaberimo da je $\varrho(t) = t^{\mu}$, gde μ biramo tako da je

$$0 < \mu < \min\Big\{1, -\frac{6\lambda}{\alpha+2}\Big\}.$$

Za tako izabrano μ funkcija ϱ je konkavna i štaviše zadovoljava uslov (R_1) za proizvoljnu konstantu c takvu da je $c \geq \frac{\mu}{2-\mu}$.

Zatim, uzmimo da je $H(t,s) = (t-s)^2$ za $t \geq s \geq t_0$. Pre svega, primetimo da funkcija H ima svojstvo $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ i da zadovoljava uslov (H_9). Za svako $T \geq t_0$, dobija se da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^\delta \cos s \geq -T^\delta \sin T + T^\delta, \quad \delta = \lambda + \mu\,\frac{\alpha+2}{6}.$$

Prema načinu izbora konstante μ je $\delta < 0$. Tada postoji $t_1 \geq t_0$, tako da je za svako $T \geq t_1$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^\delta \cos s\, ds \geq -T^\delta \sin T - \varepsilon.$$

Prema tome, možemo uzeti da je $\varphi(T) = -T^\delta \sin T - \varepsilon$ i fiksirajmo prirodan broj N takav da je $2N\pi + 5\pi/4 \geq \max\{t_1, (1+\sqrt{2}\varepsilon)^{1/\delta}\}$. Tada, za svaki prirodan broj $n \geq N$ biće

$$\varphi(T) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{za svako} \quad T \in \left[2n\pi + \frac{5\pi}{4}, 2n\pi + \frac{7\pi}{4}\right],$$

što povlači da je

$$\int_{t_0}^\infty \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds \geq \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2} \int_{2n\pi+5\pi/4}^{2n\pi+7\pi/4} \frac{1}{s}\, ds = \frac{1}{2} \sum_{n=N}^\infty \ln\left(1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{2n\pi + \frac{5\pi}{4}}\right) = \infty.$$

Dakle, svi uslovi Teoreme 3.1.2. su zadovoljeni tako da je jednačina (E_2) oscilatorna. $\triangle$

Naredna teorema je uopštenje kriterijuma (XIV) Poglavlja 1.3. na jednačinu (E).

Teorema 3.1.3. *Neka je*
(i) $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ *pozitivna, rastuća, konkavna funkcija takva da je*

$$(R_2) \qquad \big[a(t)\varrho'(t)\big]' \leq 0 \quad \textit{za svako } t \geq t_0,$$

(ii) $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *funkcija sa svojstvom* $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ *koja zadovoljava uslov* (H_9).
Jednačina (E) *je oscilatorna ako postoji funkcija* $\varphi \in C([t_0,\infty))$ *koja za neko* $\beta \in [0, M_{f,\psi}]$ *zadovoljava uslov* (C_3) *i*

$$(C_4) \qquad \limsup_{t\to\infty} \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds\right]^{-1} \int_{t_0}^t \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds = \infty.$$

Dokaz. Ako je $x(t)$ rešenje diferencijalne jednačine (E) na intervalu $[T_0,\infty)$, $T_0 \geq t_0$, takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$, definišimo funkciju $w(t)$ sa (1.1). Tada, kao u dokazu Teoreme 3.1.2., dobijamo (1.9), (1.13), (1.16), (1.17) i (1.18). Sem toga, za svako $t \geq T_0$, dobija se

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^t a(s)\,\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds &= \int_{T_0}^t \frac{a(s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds + 2\,\frac{a(t)\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) \\
&\quad - 2\,\frac{a(T_0)\varrho'(T_0)}{\varrho(T_0)} w(T_0) + 2\int_{T_0}^t \Big(-\frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\Big)\, w(s)\, ds \\
&\quad + \int_{T_0}^t \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 a(s) w(s)\, ds \\
&\leq \int_{T_0}^t \frac{a(s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\Big)^2 ds + 2\,\frac{a(t)\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) \\
&\quad + 2\int_{T_0}^t \Big(-\frac{[a(s)\varrho'(s)]'}{\varrho(s)}\Big)\, w(s)\, ds + M \int_{T_0}^t \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 s\, ds,
\end{aligned}$$

gde je $M = \sup_{t \geq T_0} \frac{a(t)w(t)}{t}$. Prema tome, uzevši uobzir (1.13), (1.16), (1.17) i (1.18), možemo zaključiti da postoji pozitivna konstanta K takva da je

$$\int_{T_0}^{t} a(s)\, \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds \leq K \int_{t_0}^{t} \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 s\, ds, \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0. \tag{1.20}$$

Dakle, prema (1.9) i (1.20), za svako $t \geq T_0$ biće

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds &= \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds + \int_{T_0}^{t} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds + M \int_{T_0}^{t} a(s)\, \frac{[w'(s) + \Omega(s)w(s)]^2}{w(s)}\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds + 2M \int_{T_0}^{t} a(s)\, \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds + 2M \int_{T_0}^{t} \Omega^2(s) a(s) w(s)\, ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds + 2MK \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds + 2M^2 \int_{T_0}^{t} s\, \Omega^2(s)\, ds,
\end{aligned}$$

što povlači da je

$$\begin{aligned}
\left\{\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds\right\}^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds &\leq \left\{\int_{t_0}^{T_0} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds\right\}^{-1} \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\, ds \\
&\quad + 2MK + 2M^2 \left\{\int_{t_0}^{T_0} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds\right\}^{-1} \int_{T_0}^{t} s\, \Omega^2(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Prethodna nejednakost je prema uslovu (H_9) i u suprotnosti sa (C_4), čime je teorema pokazana. $\square$

Napomena 3.1.1. Uslov (R_1) Teoreme 3.1.2. stroživi od uslova (R_2) koji se zahteva u formulaciji Teoreme 3.1.3, dok je sa druge strane pretpostavka (C_2) Teoreme 3.1.2. slabija od odgovarajuće pretpostavke (C_4) Teoreme 3.1.3.

Napomena 3.1.2. U [110] je pokazano da ako je $\varrho \in C^2([t_0, \infty))$ pozitivna, rastuća, konkavna funkcija onda je uslov (C_4) zadovoljen ako važi sledeći uslov

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{\log t} \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\, ds = \infty.$$

Zaista, kao što je pokazano u dokazu Teoreme 3.1.3. takva funkcija ϱ zadovoljava uslov (1.18), tako da postoji pozitivna konstanta k takva da je $t\varrho'(t)/\varrho(t) \leq k$ za svako $t \geq t_0$. Onda, za svako dovoljno veliko t imamo da je

$$\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\, ds \leq k^2 \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{s} = k^2(\log t - \log t_0) \leq 2\, k^2 \log t,$$

što pokazuje tvrđenje.

Primer 3.1.3. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_3) \qquad \left(\frac{x^2(t)\,x'(t)}{t}\right)' + t\left(t + \frac{\ln^2 t}{2}\right)^{-\lambda} \sin t\big[|x(t)|^{\alpha+2}\operatorname{sgn} x + x^3(t)\big] = 0.$$

za $t \geq t_0 > e$, gde je $0 < \alpha < 1$ i $\lambda \leq \frac{\alpha+2}{6}$.
Možemo uzeti funkciju $H(t,s)$ kao u Primeru 3.1.2. i $\beta = \lambda$, jer je $\lambda \leq M_{f,\psi}$. Pored toga, definišimo funkciju $\varrho(t) = t + \ln^2 t/2$ i primetimo da je uslov (R_2) zadovoljen na $[e, \infty)$, dok istovremeno (R_1) ne važi. Dalje, za svako $t \geq T \geq t_0$, imamo da je

$$\begin{aligned}\int_T^t H(t,s)\,\varrho^\beta(s)\,q(s)\,ds &= \int_T^t (t-s)^2 s \sin s\,ds \\ &= (t-T)^2 T\cos T - t^2 \sin T + 2t(2T\sin T + \cos t + 2\cos T) \\ &\quad - 6T\cos T - 6\sin t + 6\sin T - 3T^2 \sin T,\end{aligned}$$

odnosno

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\,\varrho^\beta(s)\,q(s)\,ds = T\cos T - \sin T \geq T\cos T - 2.$$

Uslov (C_3) je tada zadovoljen za $\varphi(T) = T\cos T - 2$, $T \geq t_0$. Uočimo broj t_1 takav da je $t_1 \geq \max\{t_0, 4\sqrt{2}\}$ i fiksirajmo prirodan broj N takava da je $2N\pi - \pi/4 \geq t_1$. Tada za svaki prirodan broj $n \geq N$ važi

$$\varphi(T) \geq \frac{T}{2\sqrt{2}} \qquad \text{za svako} \quad T \in \left[2n\pi - \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{4}\right].$$

Dakle, za svako $n \geq N$ dobija se da je

$$\int_{t_0}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\,ds \geq \int_{2n\pi-\pi/4}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\,ds \geq \frac{1}{8}\int_{2n\pi-\pi/4}^{2n\pi+\pi/4} s\,ds = \frac{\pi^2 n}{8},$$

pa je zato

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\log t}\int_{t_0}^t \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\,ds \quad &\geq \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log(2n\pi + \pi/4)} \int_{t_0}^{2n\pi+\pi/4} \frac{\varphi_+^2(s)}{s}\,ds \\ &\geq \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2 n}{8\log(2n\pi + \pi/4)} = \infty.\end{aligned}$$

Uzevši u obzir prethodnu napomenu uslovi Teoreme 3.1.3. su ispunjeni, pa je diferencijalna jednačina (E_3) oscilatorna. $\triangle$

Uzevši da je $H(t,s) = t - s, t \geq s \geq t_0$ uslov (C_1) Teoreme 3.1.1. ima sledeći oblik

$$(C_5) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \varrho^\beta(u) q(u)\,du\,ds = \infty,\ \beta \in [0, M_{f,\psi}].$$

Ako posmatramo jednačinu (E) za $a(t) = t^\nu,\ t > 0,\ \nu < 0,\ q(t) = t^\lambda \sin t$ i $\varrho(t) = t$, uslov (C_5) i Teorema 3.1.1. garantuju oscilatornost jednačine (E) za $\lambda > 1 - M_{f,\psi}$. Međutim za

$\lambda \leq 1 - M_{f,\psi}$ granična vrednost dvostrukog integrala u (C_5) postoji i konačna je. Tada za svako $s \geq 0$ možemo definisati funkciju

$$Q(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^T \int_s^t \varrho^\alpha(u) q(u)\, du\, dt \tag{1.21}$$

i pokazati kriterijum oscilatornosti analogan kriterijumu Wonga [134] za uopštenu jednačinu Emden–Fowlera - kriterijum (XVII) Poglavlja 1.3.

Teorema 3.1.4. *Neka je $a(t)$ monotono nerastuća funkcija. Jednačina (E) je oscilatorna ako postoji pozitivna funkcija ϱ na $[t_0, \infty)$ koja zadovoljava uslov (R_2) i za koju važi*

$$\limsup_{T\to\infty} \left(\int_{t_0}^T s \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)} \right)^2 ds \right)^{-1} \int_{t_0}^T \frac{Q_+^2(s)}{s}\, ds = \infty. \tag{C_6}$$

Dokaz. Neka diferencijalna jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$ za koje se može pretpostaviti da je $x(t) \neq 0$ na $[T_0, \infty)$. Za funkciju w definisanu na $[T_0, \infty)$ sa (1.1) važi (1.3). Zato uzevši u obzir uslov (R_2), kao i da je

$$\frac{a(t)}{w(t)} \left(w'(t) - \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\, w(t) \right)^2 = \frac{a(t)\varrho^2(t)}{w(t)} \left[\left(\frac{w(t)}{\varrho(t)} \right)' \right]^2,$$

iz (1.3) dobija se da je

$$\big(a(u)w'(u)\big)' \leq -\varrho^\alpha(u)q(u) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\, \frac{a(u)\varrho^2(u)}{w(u)} \left[\left(\frac{w(u)}{\varrho(u)} \right)' \right]^2 \quad \text{za svako} \quad u \geq T_0. \tag{1.22}$$

Integraljenjem od s do t za $t > s > T_0$, imamo da je

$$a(t)w'(t) - a(s)w'(s) + \int_s^t \varrho^\alpha(u)q(u)\, du \leq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \int_s^t \frac{a(u)\varrho^2(u)}{w(u)} \left[\left(\frac{w(u)}{\varrho(u)} \right)' \right]^2 du,$$

i ponovnom integracijom na $[s, T]$, $T > s \geq T_0$, biće

$$\begin{aligned} a(T)w(T) - a(s)w(s) - a(s)w'(s)(T-s) + \int_s^T \int_s^t \varrho^\alpha(u)q(u)\, du\, dt \\ \leq -\frac{\alpha}{1-\alpha} \int_s^T \int_s^t \frac{a(u)\varrho^2(u)}{w(u)} \left[\left(\frac{w(u)}{\varrho(u)} \right)' \right]^2 du\, dt \leq 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Kako je funkcija $Q(s)$ definisana sa (1.21) za svako $s \geq t_0$, ako podelimo (1.23) sa T i pustimo lim kada $T \to \infty$, zaključujemo da sledeće granične vrednosti postoje i da su konačne

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} \frac{a(T)w(T)}{T} = w_0 < \infty \tag{1.24}$$

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_s^T \int_s^t \frac{a(u)\varrho^2(u)}{w(u)} \left[\left(\frac{w(u)}{\varrho(u)} \right)' \right]^2 du\, dt = \Theta(s) < \infty. \tag{1.25}$$

Sada iz (1.23), imamo da je

$$Q(s) \leq a(s)w'(s) = a(s) \left(\frac{w(s)\varrho(s)}{\varrho(s)} \right)' = a(s) \left(\frac{w(s)}{\varrho(s)} \right)' \varrho(s) + a(s)\, \frac{w(s)}{\varrho(s)}\, \varrho'(s)$$

odakle zaključujemo da je

$$\frac{Q_+^2(s)}{s} \le \frac{2\,a^2(s)}{s}\left[\left(\left(\frac{w(s)}{\varrho(s)}\right)'\right)^2 \varrho^2(s) + \frac{w^2(s)}{\varrho^2(s)}\left(\varrho'(s)\right)^2\right]. \tag{1.26}$$

Prema (1.24) i (1.25), prvi sabirak na desnoj strani nejednakosti (1.26) može se oceniti na sledeći način

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{a^2(s)\,\varrho^2(s)}{s}\left[\left(\frac{w(s)}{\varrho(s)}\right)'\right]^2 ds \le \widetilde{W}\int_{t_0}^{\infty} \frac{a(s)\,\varrho^2(s)}{w(s)}\left[\left(\frac{w(s)}{\varrho(s)}\right)'\right]^2 ds = \widetilde{W}\Theta(t_0), \tag{1.27}$$

gde je $\widetilde{W} = \sup_{s\ge t_0}\dfrac{a(s)w(s)}{s}$. Na drugoj strani, drugi sabirak na desnoj strani nejednakosti (1.26) se može oceniti sa

$$\int_{t_0}^{T} \frac{a^2(s)}{s}\,\frac{w^2(s)}{\varrho^2(s)}\left(\varrho'(s)\right)^2 ds \le \widetilde{W}^2\int_{t_0}^{T} s\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 ds \tag{1.28}$$

Dakle,

$$\left(\int_{t_0}^{T} s\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 ds\right)^{-1}\int_{t_0}^{T}\frac{Q_+^2(s)}{s}\,ds \le 2\,\widetilde{W}\Theta(t_0)\left(\int_{t_0}^{T_0}\frac{s\left(\varrho'(s)\right)^2}{\varrho^2(s)}\,ds\right)^{-1} + \widetilde{W}^2,$$

što je u suprotnosti sa (C_6). $\square$

Primer 3.1.4. Ako se vratimo na posmatrani slučaj jednačine (E) za $a(t) = t^{\nu}$, $t > 0$, $\nu < 0$, $q(t) = t^{\lambda}\sin t$, $-M_{f,\psi} < \lambda \le 1 - M_{f,\psi}$, izaberimo $\mu \in (0,1)$ takvo da je $0 < \mu\, M_{f,\psi} + \lambda < 1$. Označimo sa $\eta = \mu\, M_{f,\psi} + \lambda$ i stavimo da je $\varrho(t) = t^{\mu}$. Tada je

$$s\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 = \frac{\mu^2}{s}, \quad Q(s) = s^{\eta}(\cos s + o(1)).$$

Dakle, uslov (C_6) važi, jer je dominantan član $T^{2\eta}(\log T)^{-1} \to \infty$, $T \to \infty$. $\triangle$

Pretpostavimo sada da su funkcije f i ψ takve da je

$$K_{f,\psi} = \min\left\{\inf_{x>0}\frac{f'(x)}{\psi(x)}\int_{0+}^{x}\frac{\psi(u)}{f(u)}\,du,\ \inf_{x<0}\frac{f'(x)}{\psi(x)}\int_{0-}^{-x}\frac{\psi(u)}{f(u)}\,du\right\} > 0.$$

Očigledno za $\psi(x) \equiv 1$, prethodni uslov se svodi na uslov (F_5) kriterijuma (XIX) Poglavlja 1.3. Pokazaćemo da se taj kriterijum, pod dodatnim pretpostavkama za funkcije a i ψ, može proširiti i na jednačinu (E), s tim što ćemo umesto uslova

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{n-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}\,q(s)\,ds > -\infty \quad \text{za neki prirodan broj } n \ge 2,$$

koristiti opštiji uslov

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\,q(s)\,ds > -\infty. \tag{C_7}$$

Teorema 3.1.5. *Jednačina (E) je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi*

$$(C_8) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} < \infty,$$

$$(C_9) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)}\left[\int_{t_0}^{s} q(\tau)\,d\tau\right]^2 ds = \infty,$$

i za neku funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ važi (C_7).

Dokaz. Pretpostavimo da jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$. Tada, postoji $T_0 \geq t_0$ takvo da je $x(t) \neq 0$ na $[T_0,\infty)$. Neka je $w(t) = \Phi(x(t))$ za svako $t \in [T_0,\infty)$. Diferenciranjem i korišćenjem jednačine (E) dobija se da je

$$(1.29) \qquad \big(a(t)w'(t)\big)' = -q(t) - \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\,a(t)\,[w'(t)]^2, \quad t \geq T_0.$$

Razmatraćemo dva slučaja, kada integral $\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds$ konvergira i kada divergira, i u oba slučaja doći ćemo do kontradikcije.

S l u č a j I: $\displaystyle\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds < \infty$

Ako označimo sa $\delta = \frac{K_{f,\psi}}{1-K_{f,\psi}}$, prema načinu izbora konstante $K_{f,\psi}$ je

$$(1.30) \qquad \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\Phi(x(t)) = \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}w(t) \geq \delta, \quad t \geq T_0.$$

Sem toga, prema uslovu (C_8) postoji konstanta M takva da je

$$M = \sup_{t\geq T_0} \frac{1}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{ds}{a(s)}.$$

Pokažimo najpre da je

$$(1.31) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0.$$

U tu svrhu uočimo proizvoljnu konstantu $\varepsilon > 0$. Tada, postoji $T_1 \geq T_0$ takvo da je

$$(1.32) \qquad \int_{T_1}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds \leq \frac{\varepsilon\,\delta}{4}.$$

Primenom Švarcove nejednakosti, za svako $t \geq T_1$ je

$$w(t) - w(T_1) \leq \left|\int_{T_1}^{t} w'(s)\,ds\right| \leq \left[\int_{T_1}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds\right]^{1/2} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\,ds\right]^{1/2},$$

odakle na osnovu (1.32) nalazimo da je

$$(1.33) \qquad w(t) \leq w(T_1) + \frac{\sqrt{\varepsilon\,\delta}}{2}\left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\,ds\right]^{1/2} \quad \text{za} \quad t \geq T_1.$$

Ako je

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds < \infty,$$

iz (1.33) zaključujemo da je w ograničena funkcija na $[T_1, \infty)$, tako da (1.31) važi. Zato ćemo se ograničiti na slučaj kada je

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds = \infty.$$

U tom slučaju, postoji $T_2 > T_1$ takvo da je

$$w(T_1) \le \frac{\sqrt{\varepsilon\,\delta}}{2} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds\right]^{1/2} \qquad \text{za} \quad t \ge T_2,$$

tako da je iz (1.30) i (1.33)

$$w(t) \le \sqrt{\varepsilon\,\delta} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds\right]^{1/2} \le \sqrt{\varepsilon} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds\right]^{1/2} \qquad \text{za} \quad t \ge T_2.$$

Onda je

$$\frac{w(t)}{a(t)} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds\right]^{-\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a(t)} \qquad \text{za} \quad t \ge T_2.$$

Integracijom prethodne nejednakosti od T_2 do t, $t \ge T_2$, dobija se

$$2 \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds\right]^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds\right]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\varepsilon} \int_{T_2}^{t} \frac{ds}{a(s)} \le \sqrt{\varepsilon}\, M\, t.$$

Izabravši da je

$$T_3 = \max\Big\{T_2, \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds\right]^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

za svako $t \ge T_3$ je $w(t) < \varepsilon\, t$, što zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ pokazaje da (1.31) zaista važi.

Onda, iz (1.29) za svako $t \ge T_0$ dobijamo da je

$$\int_{t_0}^{t} q(s)\, ds = \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds + \int_{T_0}^{t} q(s)\, ds = C_1 - a(t)w'(t) - \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds,$$

gde je

$$C_1 = \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds + a(T_0)w'(T_0).$$

Onda, za svako $t \ge T_0$ je

$$\begin{aligned}
\left[\int_{t_0}^{t} q(s)\, ds\right]^2 \quad &= \quad \left[C_1 - a(t)w'(t) - \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds\right]^2 \\
&\le \quad 3C_1^2 + 3\big[a(t)w'(t)\big]^2 + 3\left[\int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds\right]^2 \\
&\le \quad C_2 + 3\big[a(t)w'(t)\big]^2,
\end{aligned}$$

gde je

$$C_2 = 3C_1^2 + 3\left[\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds\right]^2.$$

Ako označimo sa

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau,\ t \geq t_0 \ \text{ i } \ \sigma = \int_{t_0}^{T_0} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\, ds$$

i iskoristimo (1.30) da bi za svako $t \geq T_0$ dobili

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\, ds &= \frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\, ds \\
&\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{C_2}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{t}\int_{T_0}^{t} a(s)\big[w'(s)\big]^2\, ds \\
&\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{C_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{\delta\, t}\int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, w(s)\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{C_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{\delta\, t}\Big[\max_{T_0 \leq s \leq t} w(s)\Big] \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\, ds \leq \frac{\sigma}{t} + \frac{C_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{C_4}{t}\max_{T_0 \leq s \leq t} w(s) \quad \text{za} \quad t \geq T_0, \tag{1.34}$$

gde je

$$C_4 = \frac{3}{\delta}\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds > 0.$$

Na osnovu (1.31), postoji $T^* \geq T_0$ takvo da je $w(t) \leq t$ za svako $t \geq T^*$. Zato je

$$\max_{T_0 \leq s \leq t} w(s) \leq \max_{T_0 \leq s \leq T^*} w(s) + t \quad \text{za svako} \quad t \geq T_0.$$

Na taj način, (1.34) daje

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\, ds \leq \frac{\sigma}{t} + \frac{C_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{C_4}{t}\Big[\max_{T_0 \leq s \leq T^*} w(s) + t\Big], t \geq T_0.$$

Prema tome, uzevši u obzir uslov (C_8) zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)}\left[\int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\right]^2 ds \leq C_4 + C_2 \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} < \infty,$$

što je u suprotnosti sa (C_9).

S l u č a j II: $\displaystyle\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds = \infty.$

Tada, postoji $T_1 \geq T_0$, takvo da je

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \geq \frac{\mu}{\rho} \quad \text{za svako} \quad t \geq T_1,$$

gde je μ proizvoljna konstanta, ρ konstanta takva da je

$$\inf_{s \geq t_0}\Big[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\Big] > \rho > 0. \tag{1.35}$$

Iz (1.29), za svako $t \geq T_0$ dobija se

$$\int_{T_0}^{t} H(t,s)\, q(s)\, ds + \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds = -\int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \big(a(s)w'(s)\big)'\, ds.$$

Korišćenjem (1.4), uzevši u obzir da je $\frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \geq 0,\ (t,s) \in \mathcal{D}$ za $h \in ghza$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} H(t,s)\, q(s)\, ds \quad &+ \quad \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\leq \quad \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\, q(s)\, ds + \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\quad\ + H(t,T_0)a(T_0)w'(T_0) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0)a(T_0)w(T_0) \\
&\leq \quad H(t,t_0) \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\, ds + H(t,t_0) \int_{t_0}^{T_0} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\quad\ + H(t,t_0)a(T_0)|w'(T_0)| - \frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)a(t_0)w(T_0),
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\qquad \leq L - a(t_0)w(T_0)\, \liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)}{H(t,t_0)} - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, q(s)\, ds,
\end{aligned}$$

gde je

$$L = \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\, ds + \int_{t_0}^{T_0} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds + a(T_0)|w'(T_0)|.$$

Prema uslovima (H_6) i (C_7) zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds < \infty. \tag{1.36}$$

Sa druge strane, imamo da je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\quad = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) \\
&\quad = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \left(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) ds \\
&\quad \geq \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \left(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) ds \\
&\quad \geq \frac{\mu}{\rho\, H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \left(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right) ds = \frac{\mu}{\rho}\, \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}.
\end{aligned}$$

Kako (1.35) garantuje da je

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} > \rho,$$

postoji $T_2 \geq T_1$, takvo da je

$$\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} \geq \rho \quad \text{za svako} \quad t \geq T_2.$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \geq \mu \quad \text{za svako} \quad t \geq T_2,$$

što je u suprotnosti sa (1.36). $\square$

Primenom Švarcove nejednakosti je

$$\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds\right)^2 \leq \left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \left[\int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\right]^2 ds\right)\left(\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)}\right),$$

odakle zaključujemo, prema (C_8), da uslov

$$(C_{10}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds = \infty,$$

povlači uslov (C_9). Dakle, važi sledeća posledica:

Posledica 3.1.1. *Jednačina (E) je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi (C_8), (C_{10}) i za neku funkciju $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $\mathbf{H}^*_{\mathbf{a}}$ važi (C_7).*

$\boxed{\text{II}}$ Kako u svim do sada utrđenim kriterijumima oscilatornosti jednačine (E), figuriše pretpostavka da je funkcija ψ pozitivna, nameće se prirodno pitanje - da li je moguće utvrditi oscilatornost jednačine (E) i u slučajevima kada je funkcija ψ negativna ili menja znak? U daljem toku ovog poglavlja je dat pozitivan odgovor na to pitanje i pokazani kriterijumi oscilatornosti jednačine (E) pri sledećim pretpostavkama za funkcije f i ψ:

$$(F_3) \qquad \psi(x) \neq 0, \quad x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

$$(F_4) \qquad \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \geq 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

$$(F_5) \qquad \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \geq \frac{1}{k} > 0, \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Definisaćemo nenegativnu konstantu

$$I_{f,\psi} = \min\left\{ \frac{\inf_{x>0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'}{1 + \inf_{x>0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'},\ \frac{\inf_{x<0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'}{1 + \inf_{x<0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'} \right\}$$

i u cilju jednostavnijeg označavanja funkciju

$$\chi(t) = \frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{4}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2.$$

Teorema 3.1.6. *Neka je $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ pozitivna, konkavna funkcija i $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja ima svojstvo $\mathbf{H}^\circ$. Jednačina (E) je oscilatorna ako je za neko $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds = \infty. \tag{C_{11}}$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji neoscilatorno rešenje $x(t)$ na $[T_0,\infty)$ i definišimo funkciju w na $[T_0,\infty)$ sa (1.1). Diferenciranjem se dobija (1.2) što povlači da je

$$\begin{aligned} w'' &= \varrho^\beta \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x'' + \varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\, x'^2 - \varrho^\beta \psi(x) \Big(\frac{x'}{f(x)}\Big)^2 f'(x) \\ &\quad + \beta\, \varrho^\beta \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x' + \beta \left[\frac{\varrho''}{\varrho} - \Big(\frac{\varrho'}{\varrho}\Big)^2\right] w + \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} w'. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Iz (1.2) je

$$\frac{x'}{f(x)} = \frac{1}{\varrho^\beta\, \psi(x)} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big),$$

tako da drugi i treći sabirak na desnoj strani jednakosti (1.37) postaju

$$\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\, x'^2 = \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \frac{\psi'(x)\, f(x)}{\varrho^\beta \psi^2(x)} = \frac{1}{w} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \frac{\psi'(x)\, f(x)\, \Phi(x)}{\psi^2(x)} \tag{1.38}$$

$$\varrho^\beta \psi(x) \Big(\frac{x'}{f(x)}\Big)^2 f'(x) = \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \frac{f'(x)}{\varrho^\beta \psi(x)} = \frac{1}{w} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \frac{\Phi(x)\, f'(x)}{\psi(x)}. \tag{1.39}$$

Oduzimanjem (1.38) i (1.39) dobija se

$$\begin{aligned} \varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\, x'^2 - \varrho^\beta \psi(x) \Big(\frac{x'}{f(x)}\Big)^2 f'(x) &= \frac{\Phi(x)}{w} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \frac{f(x)\psi'(x) - f'(x)\psi(x)}{\psi^2(x)} \\ &= -\frac{1}{w} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2 \Phi(x) \Big(\frac{f(x)}{\psi(x)}\Big)'. \end{aligned}$$

Prema načinu izbora konstante β je

$$\Phi(x) \Big(\frac{f(x)}{\psi(x)}\Big)' \geq \frac{\beta}{1-\beta} \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

tako da je iz prethodne jednakosti

$$\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\, x'^2 - \varrho^\beta \psi(x) \Big(\frac{x'}{f(x)}\Big)^2 f'(x) \leq -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big)^2. \tag{1.40}$$

Pored toga, drugi sabirak na desnoj strani jednakosti (1.37) ima oblik

$$\begin{aligned} \beta\, \varrho^\beta \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x' &= \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} \Big(\varrho^\beta \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x' + \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big) - \beta^2 \Big(\frac{\varrho'}{\varrho}\Big)^2 w \\ &= \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} \Big(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w\Big), \end{aligned} \tag{1.41}$$

a koristeći jednačinu (E) i uslove (F_3), (F_4) i (F_5), prvi sabirak na desnoj strani jednakosti (1.37) je oblika

$$
\begin{aligned}
\varrho^\beta \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x'' &= -\varrho^\beta \frac{q}{a} - \varrho^\beta \frac{a'}{a}\, \frac{\psi(x)}{f(x)}\, x' - \varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\, x'^2 \\
&= -\varrho^\beta \frac{q}{a} - \varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)} \left(x' + \frac{a'}{2\,a} \frac{\psi(x)}{\psi'(x)} \right)^2 + \frac{\varrho^\beta}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \frac{\psi^2(x)}{f(x)\psi'(x)} \\
&\le -\varrho^\beta \frac{q}{a} + \frac{k}{4}\, \varrho^\beta \left(\frac{a'}{a} \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.42}
$$

Konačno, (1.37), (1.40), (1.41) i (1.42) daju

$$
\begin{aligned}
w'' &\le -\varrho^\beta \frac{q}{a} + \frac{k}{4}\, \varrho^\beta \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} \left(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w \right) \\
&\quad - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \left(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w \right)^2 + \beta \left[\frac{\varrho''}{\varrho} - \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2 \right] w + \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} w' \\
&= -\varrho^\beta \frac{q}{a} + \frac{k}{4}\, \varrho^\beta \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \beta\, \frac{\varrho''}{\varrho}\, w + 2\,\beta\, \frac{\varrho'}{\varrho} \left(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w \right) \\
&\quad + \beta\,(\beta - 1) \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2 w - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \left(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w \right)^2 \\
&= -\varrho^\beta \left(\frac{q}{a} - \frac{k}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) + \beta\, \frac{\varrho''}{\varrho}\, w - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \left(w' - \beta\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w - (1-\beta)\, \frac{\varrho'}{\varrho}\, w \right)^2,
\end{aligned}
$$

što za svako $t \ge T_0$ znači da je

$$
w''(t) \le -\varrho^\beta(t)\chi(t) + \beta\, \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)}\, w(t) - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w(t)} \left(w'(t) - \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\, w(t) \right)^2. \tag{1.43}
$$

Koristeći pretpostavku da je ϱ pozitivna i konkavna funkcija, dobija se da je

$$
w''(s) \le -\varrho^\beta(s)\chi(s) \quad \text{za svako} \quad s \ge T_0. \tag{1.44}
$$

Množenjem prethodne nejednakosti sa $H(t,s)$ i integracijom na $[T_0, t]$ biće

$$
\int_{T_0}^t H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds \le -\int_{T_0}^t H(t,s) w''(s)\, ds. \tag{1.45}
$$

Prema uslovima (H_1), (H_4), (H_5), parcijalnom integracijom dobija se

$$
\begin{aligned}
-\int_{T_0}^t H(t,s) w''(s)\, ds &= H(t,T_0) w'(T_0) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0) w(T_0) - \int_{T_0}^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s) w(s)\, ds \\
&\le H(t,T_0) w'(T_0) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0) w(T_0),
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

što zajedno sa (1.45) daje

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^t H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds &= \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds + \int_{T_0}^t H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds \\
&\le \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\, \varrho^\beta(s)\, \chi(s)\, ds + H(t,T_0) w'(T_0) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0) w(T_0) \\
&\le H(t,t_0) \left[\int_{t_0}^{T_0} \varrho^\beta(s)\, |\chi(s)|\, ds + |w'(T_0)| \right] - \frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0) w(T_0).
\end{aligned}
$$

Dakle, uslov (H_6) povlači da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\,\varrho^{\beta}(s)\,\chi(s)\,ds \le L - w(T_0)\,\liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)}{H(t,t_0)} < \infty,$$

gde je $L = \int_{t_0}^{T_0} \varrho^{\beta}(s)\,|\chi(s)|\,ds + |w'(T_0)|$. Ovim je teorema pokazana, jer je prethodna nejednakost u suprotnosti sa (C_{11}). $\square$

Kao ilustraciju prethodno pokazanog kriterijuma navodimo sledeći primer:

Primer 3.1.5. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_4) \qquad \left[t^{\nu}\, x^3(t)x'(t)\right]' + q(t)\left[|x(t)|^{\alpha+3} + x^4(t)\right] = 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

gde je $q(t) = \lambda t^{\lambda-1}(2-\cos t) + t^{\lambda}\sin t$, $\nu < \alpha/2$ i $\lambda - \nu + \alpha/2 > 0$.

Za svako $x \neq 0$ je

$$x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0, \quad \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \ge 3 = \frac{1}{k}, \quad \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' = \alpha|x|^{\alpha-1} + 1 > 0,$$

pa funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3), (F_4) and (F_5), dok uslovi (F_1) i (F_2) nisu zadovoljeni.

Dalje, za svako $x \neq 0$ je

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \le \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

tako daje

$$\inf_{x>0} \Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' = \inf_{x<0} \Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \le \inf_{x>0} \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}(\alpha x^{\alpha-1}+1) = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Sa druge strane, za svako $x \neq 0$ je

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \ge \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{2\,u^{\alpha}} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}, \quad \text{ako je } |x| \le 1$$

i

$$\Phi(x) = \int_{0+}^{|x|} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \ge \int_{0+}^{1} \frac{du}{u^{\alpha}+u} \ge \int_{0+}^{1} \frac{du}{2\,u^{\alpha}} = \frac{1}{2(1-\alpha)}, \quad \text{ako je } |x| \ge 1,$$

tako da će za svako $x \neq 0$ biti

$$\begin{aligned}\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' &\ge \frac{|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}(\alpha x^{\alpha-1}+1) = \frac{\alpha+|x|^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} \\ &> \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \quad \text{za} \quad |x| \le 1\end{aligned}$$

i

$$\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \ge \frac{\alpha x^{\alpha-1}+1}{2(1-\alpha)} > \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} \quad \text{za} \quad |x| \ge 1.$$

Dakle,

$$\inf_{x>0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)} \right)' = \inf_{x<0} \Phi(x) \left(\frac{f(x)}{\psi(x)} \right)' \geq \frac{\alpha}{2(1-\alpha)},$$

pa dobijamo da je $I_{f,\psi} \geq \alpha/2$.

Za svako $t \geq t_0$ imamo da je

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds &= \int_{t_0}^{t} d[s^\lambda(2-\cos s)] = t^\lambda(2-\cos t) - {t_0}^\lambda(2+\cos t_0) \\ &= t^\lambda(2-\cos t) - k_0, \end{aligned}$$

odnosno

$$t^\lambda - k_0 \leq \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds \leq 3t^\lambda \quad \text{za svako} \quad t \geq t_0.$$

Za proizvoljan pozitivan broj δ je

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^\delta q(s)\, ds &= \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^\delta d\left(\int_T^s q(u)\, du \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \int_T^t \left[2\,(t-s) s^\delta - \delta s^{\delta-1}(t-s)^2 \right] \left(\int_T^s q(u)\, du \right) ds \\ &= \frac{1}{t^2} \int_T^t \left[2t(1+\delta)s^\delta - \delta t^2 s^{\delta-1} - (\delta+2)s^{\delta+1} \right] \left(\int_T^s q(u)\, du \right) ds \\ &\geq \frac{1}{t^2} \int_T^t \left[2(1+\delta)ts^\delta(s^\lambda - k_0) - 3(\delta+2)s^{\delta+\lambda+1} - 3\delta t^2 s^{\delta+\lambda-1} \right] ds \\ &= L_1 t^{\delta+\lambda} + L_2 t^\delta + \frac{L_3}{t^2} + \frac{L_4}{t} + L_5, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{2(1+\delta)}{\delta+\lambda+1} - \frac{3(\delta+2)}{\delta+\lambda+2} - \frac{3\delta}{\delta+\lambda},\ L_2 = -2k_0,\ L_5 = \frac{3\delta}{\lambda+\delta} T^{\lambda+\delta} \\ L_3 &= \frac{3(\delta+2)}{\delta+\lambda+2} T^{\delta+\lambda+2},\ L_4 = 2k_0 T^{\delta+1} - \frac{2(\delta+1)}{\delta+\lambda+1} T^{\delta+\lambda+1}. \end{aligned}$$

Prema tome, ako je $\delta + \lambda > 0$ onda je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-2)^2 s^\delta q(s)\, ds = \infty.$$

Izabravši da je $\varrho(t) = t$, $\beta = \alpha/2$, $\delta = \alpha/2 - \nu > 0$ ($\delta + \lambda > 0$) i $H(t,s) = (t-s)^2$ za $t \geq s \geq t_0$, kako je

(1.47) $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} \int_T^t (t-s)^2 s^{\frac{\alpha}{2}-2}\, ds = \frac{2}{2-\alpha} T^{\frac{\alpha}{2}-1},$$

uslov (C_{11}) je zadovoljen. Primenom Teoreme 3.1.6 zaključujemo da je jednačina (E_4) oscilatorna. $\triangle$

Iz istih razloga kao i u prvom delu ovog poglavlja pokazaćemo teoreme analogne Teoremi 3.1.2. i Teoremi 3.1.3. za date uslove koje ispunjavaju funkcije f i ψ.

Teorema 3.1.7. *Neka je*
(i) $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ *pozitivna funkcija koja za neku pozitivnu konstantu c zadovoljava uslov*

$$(R_3) \qquad [\varrho'(t)]^2 \le -c\,\varrho(t)\varrho''(t) \quad \text{za svako } t \ge t_0,$$

(ii) $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *funkcija koja ima svojstvo* $\mathbf{H}^*$ *i zadovoljava uslov* (H_9),
Jednačina (E) *je oscilatorna ako postoji funkcija* $\varphi \in C([t_0,\infty))$ *koja zadovoljava uslov* (C_2) *i takva da za neko* $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ *važi*

$$(C_{12}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\,\varrho^\beta(s)\,\chi(s)\,ds \ge \varphi(T) \quad \text{za svako} \quad T \ge t_0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$. Tada postoji $T_0 \ge t_0$ takvo da je $x(t) \ne 0$ za svako $t \ge T_0$. Za funkciju $w(t)$ definisanu sa (1.1) na $[T_0,\infty)$, kao u dokazu Teoreme 3.1.6. zaključuje se da važi (1.43) za svako $t \ge T_0$. Tada, koristeći (1.46), za svako t i svako T takve da je $t > T \ge T_0$ dobija se

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\,\varrho^\beta(s)\,\chi(s)\,ds \\
&\quad = w'(T) - w(T)\liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,T)}{H(t,T)} - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s) w(s)\,ds \\
&\qquad + \beta \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\,ds \\
&\qquad - \frac{\beta}{1-\beta} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \frac{H(t,s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2 ds.
\end{aligned}$$

Prema uslovu (C_{12}), zaključujemo da je

$$(1.48) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \frac{H(t,s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2 ds < \infty,\ T \ge T_0,$$

$$(1.49) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\Big(-\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\Big)\,w(s)\,ds < \infty,\ T \ge T_0,$$

$$(1.50) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\,w(s)\,ds < \infty,\ T \ge T_0,$$

$$(1.51) \qquad \varphi(T) \le w'(T) + \Omega(T)w(T) \quad \text{za svako} \quad T \ge T_0.$$

Zbog (1.48) i (1.50) postoji niz $\{\tau_n\}_{n\in N}$ u intervalu (T_0,∞), takav da je $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty$ i

$$(1.52) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{H(\tau_n,T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{H(\tau_n,s)}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2 ds < \infty,$$

$$(1.53) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{H(\tau_n,T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n,s)\,w(s)\,ds < \infty.$$

Sada pokažimo da je

$$(1.54) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} < \infty.$$

Neka je $\mu > 0$ proizvoljna konstanta. Prema uslovu (H_2), postoji konstanta ρ takva da je

$$\inf_{s \ge t_0} \Big[\liminf_{t \to \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \Big] > \rho > 0.$$

Pretpostavimo da (1.54) ne važi, odnosno da postoji $T_1 \ge T_0$, takvo da je

$$\frac{w(t)}{t} \ge \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{za svako} \quad t \ge T_1.$$

Tada, za svako $t \ge T_1$ biće

$$\begin{aligned} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\, w(s)\, ds &\ge \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\, w(s)\, ds \\ &\ge \frac{\mu}{\rho\, H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\, s\, ds = \frac{\mu}{\rho\, H(t,T_0)} \Big(H(t,T_1) - T_1 \frac{\partial H}{\partial s}(t,T_1) \Big) \\ &\ge \frac{\mu}{\rho} \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} > \rho,$$

može se izabrati $T_2 \ge T_1$ takvo da je

$$\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} \ge \rho \qquad \text{za svako} \quad t \ge T_2. \tag{1.55}$$

Prema tome,

$$\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)\, w(s)\, ds \ge \mu \qquad \text{za svako} \quad t \ge T_2.$$

Zato postoji prirodan broj n_0, takav da za svako $n \ge n_0$ je

$$\frac{1}{H(\tau_n,T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n,s)\, w(s)\, ds \ge \mu,$$

što zbog proizvoljnosti μ pokazuje da je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{H(\tau_n,T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(\tau_n,s)\, w(s)\, ds = \infty.$$

Kako smo došli do kontradikcije sa (1.53), pokazali smo da važi (1.54).

Dalje, pokažimo da je

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{1}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds < \infty. \tag{1.56}$$

Pretpostavimo suprotno, da postoji $T_1 \ge T_0$ takvo da je

$$\int_{T_0}^{t} \frac{1}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds \ge \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{za svako} \quad t \ge T_1,$$

gde je $\mu > 0$ proizvoljno. Tada, za svako $t \geq T_1$ je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \frac{H(t,s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds \\
&= \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d \left(\int_{T_0}^{s} \frac{1}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau) \Big)^2 d\tau \right) \\
&= \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \Big) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{1}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau) \Big)^2 d\tau \right) ds \\
&\geq \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \Big) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{1}{w(\tau)} \Big(w'(\tau) - \frac{\varrho'(\tau)}{\varrho(\tau)}\, w(\tau) \Big)^2 d\tau \right) ds \\
&\geq \frac{\mu}{\rho\, H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \Big) ds = \frac{\mu}{\rho}\, \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}.
\end{aligned}$$

Na osnovu (1.55), dobija se

$$\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \frac{H(t,s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds \geq \mu \quad \text{za svako} \quad t \geq T_2,$$

te prema tome za svako dovoljno veliko n je

$$\frac{1}{H(\tau_n,T_0)} \int_{T_0}^{\tau_n} \frac{H(\tau_n,s)}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds \geq \mu,$$

što je u suprotnosti sa (1.52). Ovim je pokazano da (1.56) važi.

Analognim postupkom, ali polazeći od (1.49) može se pokazati da važi i

$$\int_{T_0}^{\infty} w(s) \Big(-\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)} \Big) ds < \infty. \tag{1.57}$$

Koristeći činjenicu da je se iz uslova (R_3) ϱ konkavna funkcija, za svako $t \geq T_0$ je

$$\varrho(t) - \varrho(T_0) = \int_{T_0}^{t} \varrho'(s)\, ds > (t - T_0)\varrho'(t),$$

što garantuje da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\varrho'(t)}{\varrho(t)} < \infty. \tag{1.58}$$

Sada, za svako $t \geq T_0$, uzevši u obzir uslov (R_3), dobija se da je

$$\begin{aligned}
&\int_{T_0}^{t} \frac{1}{w(s)} \Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w(s) \Big)^2 ds \\
&\quad = \int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds - 2 \int_{T_0}^{t} \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\, w'(s)\, ds + \int_{T_0}^{t} \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)} \Big)^2 w(s)\, ds \\
&\quad = \int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds - 2\, \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) + 2\, \frac{\varrho'(T)}{\varrho(T)} w(T) \\
&\qquad + 2 \int_{T_0}^{t} \frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\, ds - \int_{T_0}^{t} \Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)} \Big)^2 w(s)\, ds \\
&\quad \geq \int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\, ds - 2\, \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) + 2\, \frac{\varrho'(T)}{\varrho(T)} w(T) \\
&\qquad + (c+2) \int_{T_0}^{t} \frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\, w(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds \le 2\left[\limsup_{t\to\infty} \frac{t\,\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right]\left[\limsup_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\right] - 2\,\frac{\varrho'(T)}{\varrho(T)}w(T)$$
$$+ (c+2)\int_{T_0}^{\infty}\left(-\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\right)w(s)\,ds + \int_{T_0}^{\infty}\frac{1}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds,$$

što zbog (1.54), (1.56), (1.57) i (1.58), povlači da je

$$\int_{T_0}^{\infty}\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds < \infty. \tag{1.59}$$

Konačno, kako prema (1.54) postoji $M = \sup_{t\ge T_0} w(t)/t < \infty$, iz (1.51) je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{\infty}\frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds &\le \int_{T_0}^{\infty}\frac{[w'(s)+\Omega(s)w(s)]^2}{s}\,ds\\
&\le M\int_{T_0}^{\infty}\frac{[w'(s)+\Omega(s)w(s)]^2}{w(s)}\,ds\\
&\le 2M\int_{T_0}^{\infty}\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds + 2M\int_{T_0}^{\infty}\Omega^2(s)w(s)\,ds\\
&\le 2M\int_{T_0}^{\infty}\frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds + 2M^2\int_{t_0}^{\infty}s\,\Omega^2(s)\,ds.\end{aligned}$$

Nejednakost do koje smo došli je zbog (1.59) i (H_9), u suprotnosti sa (C_2). $\square$

U narednom primeru navodimo diferencijalnu jednačinu na koju se ne može primeniti Teorema 3.1.6., ali je zato moguće utvrditi oscilatornost primenom Teoreme 3.1.7.

Primer 3.1.6. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu (E_4), gde je $q(t) = t^{\lambda}\cos t$ i $\lambda - \nu + \alpha/2 < 0$. Tada kao u Primeru 3.1.5. uslovi (F_3), (F_4) i (F_5) su zadovoljeni i $I_{f,\psi} \ge \alpha/2$.

Uzmimo da je $\beta = \alpha/2$, $\varrho(t) = t^{\frac{2\mu}{\alpha}}$ za neko $\mu \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right)$ i $H(t,s) = (t-s)^2$ for $t \ge s \ge t_0$. Uslov (R_3) je zadovoljen za proizvoljnu konstantu c takvu da je $c \ge \frac{2\mu}{\alpha - 2\mu}$.

Korišćenjem (1.47), ako je $\delta = \lambda - \nu + \mu < 0$, za svako $T \ge t_0$, zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t\left[(t-s)^2 s^{\delta}\cos s - \frac{3\nu^2}{4}(t-s)^2 s^{\frac{\alpha}{2}-2}\right]ds$$
$$\ge -T^{\delta}\sin T + T^{\delta} - \frac{3\nu^2}{4-2\alpha}T^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Kako je $\delta < 0$ i $\alpha/2 - 1 < 0$, za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$, postoji $t_1 \ge t_0$ takvo da je za svako $T \ge t_1$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t\left[(t-s)^2 s^{\delta}\cos s - \frac{3\nu^2}{4}(t-s)^2 s^{\frac{\alpha}{2}-2}\right]ds \ge -T^{\delta}\sin T - \varepsilon.$$

Tako, uzevši da je $\varphi(T) = -T^{\delta}\sin T - \varepsilon$ kao i u Primeru 3.1.2. može se pokazati da je zadovoljen uslov (C_2). Primenom Teoreme 3.1.7. zaključujemo da je jednačina (E_4) u posmatranom slučaju oscilatorna.

Sa druge strane, napomenimo da se Teorema 3.1.6. ne može se primeniti na posmatranu jednačinu, jer uslov (C_{11}) nije zadovoljen. $\triangle$

Teorema 3.1.8. *Neka je*
(i) $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ *pozitivna funkcija koja zadovoljava uslove*

$$(R_4) \qquad \varrho'(t) > 0 \quad \text{i} \quad \varrho''(\mathrm{t}) \leq 0 \quad \text{za svako } \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0,$$

(ii) $H \in \mathcal{H}^*(\mathcal{D})$ *funkcija koja zadovoljava uslov* (H_9).
Jednačina (E) *je oscilatorna ako postoji funkcija* $\varphi \in C([t_0,\infty))$ *koja zadovoljava uslov* (C_4), *i za neko* $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ *uslov* (C_{12}).

Dokaz. Neka je $x(t)$ rešenje diferencijalne jednačine (E) na intervalu $[T_0,\infty)$, $T_0 \geq t_0$, takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0$ i $w(t)$ funkcija definisana sa (1.1) na intervalu $[T_0,\infty)$. Tada, kao u dokazu Teoreme 3.1.7., može se zaključiti da važe (1.51), (1.54), (1.56), (1.57) i (1.58). Pored toga, za svako $t \geq T_0$ dobija se da je

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds &= \int_{T_0}^{t} \frac{1}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds \\
&\quad + 2\,\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) - 2\,\frac{\varrho'(T)}{\varrho(T)} w(T) \\
&\quad + 2\int_{T_0}^{t}\Big(-\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\Big)\,w(s)\,ds + \int_{T_0}^{t}\Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 w(s)\,ds \\
&\leq \int_{T_0}^{t} \frac{1}{w(s)}\Big(w'(s) - \frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\,w(s)\Big)^2\,ds + 2\,\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} w(t) \\
&\quad + 2\int_{T_0}^{t}\Big(-\frac{\varrho''(s)}{\varrho(s)}\Big)\,w(s)\,ds + M\int_{T_0}^{t}\Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 s\,ds,
\end{aligned}$$

gde je $M = \sup_{t\geq T_0} w(t)/t$. Zato, uzevši u obzir (1.54), (1.56), (1.57) i (1.58), mora postojati pozitivna konstanta K takva da je

$$(1.60) \qquad \int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds \leq K\int_{t_0}^{t}\Big(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\Big)^2 s\,ds, \quad t \geq T_0.$$

Tada, prema (1.51) i (1.60), za $t \geq T_0$ biće

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds &= \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds + \int_{T_0}^{t} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds + M\int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)+\Omega(s)w(s)]^2}{w(s)}\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds + 2M\int_{T_0}^{t} \frac{[w'(s)]^2}{w(s)}\,ds + 2M\int_{T_0}^{t} \Omega^2(s)w(s)\,ds \\
&\leq \int_{t_0}^{T_0} \frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds + 2MK\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\,ds + 2M^2\int_{T_0}^{t} s\,\Omega^2(s)\,ds,
\end{aligned}$$

što povlači da je za svako $t \geq T_0$

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\,ds\right\}^{-1}\int_{t_0}^{t}\frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds \\
&\qquad \leq \left\{\int_{t_0}^{T_0}\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2 s\,ds\right\}^{-1}\int_{t_0}^{T_0}\frac{[\varphi_+(s)]^2}{s}\,ds
\end{aligned}$$

$$+ 2MK + 2M^2 \left\{ \int_{t_0}^{T_0} \left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)} \right)^2 s\, ds \right\}^{-1} \int_{T_0}^{t} s\, \Omega^2(s)\, ds.$$

Kako važi (H_9) prethodna nejednakost je u suprotnosti sa uslovom (C_4), čime je teorema pokazana. □

Kao primere funkcija koje zadovoljavaju uslov (R_3) navodimo sledeće funkcije:

(i) $\varrho(t) = t^{\mu},\ t \geq t_0,\ 0 < \mu < 1;$
(ii) $\varrho(t) = \log t,\ t \geq t_0 > 1;$
(iii) $\varrho(t) = \sqrt{t} \log t,\ t \geq t_0 > 1;$
(iv) $\varrho(t) = \log^{\mu} t,\ t \geq t_0 \geq e^{\mu - 1},\ \mu > 0,$

dok za sledeća dva tipa funkcije ϱ uslov (R_3) ne važi, a uslov (R_4) je zadovoljen:

(v) $\varrho(t) = t + \log t,\ t \geq t_0 > 1;$
(vi) $\varrho(t) = t,\ t \geq t_0.$

Primer 3.1.7. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$(E_5) \qquad \left[t^2 x^3(t) x'(t)\right]' + \left[t^3 (t + \log t)^{-\frac{\alpha}{2}} \sin t + \frac{1}{3}\right] \left[|x(t)|^{\alpha+3} + x^4(t)\right] = 0,\ t \geq t_0 > 1,$$

gde je $0 < \alpha < 1$ i $\lambda - \nu + \alpha/2 < 0$.
Uzećemo $H(t,s)$ kao u Primeru 3.1.6. i $\beta = \alpha/2$. Funkcija ϱ definisana sa $\varrho(t) = t + \log t$ zadovoljava uslov (R_4). Sem toga, za svako $t \geq T \geq t_0$ je

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t,s)\, \varrho^{\beta}(s)\, \chi(s)\, ds &= \int_T^t (t-s)^2 s \sin s\, ds \\ &= (t-T)^2 T \cos T - t^2 \sin T + 2t(2T \sin T + \cos t + 2\cos T) \\ &\quad - 6T\cos T - 6\sin t + 6 \sin T - 3T^2 \sin T \end{aligned}$$

odnosno

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t H(t,s)\, \varrho^{\beta}(s)\, \chi(s)\, ds = T\cos T - \sin T \geq T \cos T - 2.$$

Prema tome, (C_{12}) važi za $\varphi(T) = T\cos T - 2$, $T \geq t_0$. Kao u Primeru 3.1.3. zaključujemo da važi uslov (C_4), a onda primenom Teoreme 3.1.8. da je diferencijalna jednačina (E_5) oscilatorna. △

3.2. Oscilatornost sublinearne diferencijalne jednačine sa prigušenjem

U ovom poglavlju posmatraćemo nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$(E_p) \qquad [a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

koja je u literaturi poznata kao *diferencijalna jednačina sa prigušenjem* ili *diferencijalna jednačina sa prigušujućim (amortizujućim) članom* ("with a damping" ili "with a damping term"). Priroda ovakvog naziva potiče iz činjenice da dodavanje izraza $p(t)x'(t)$ u nelinearnu diferencijalnu jednačinu $[a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0$ može izazvati oscilatornost rešenja, ali može isto tako dovesti i do prigušenja oscilacija rešenja ili čak do pojave neoscilatornih rešenja. Ovo ćemo najbolje ilustrovati na primeru Ojlerove [1] jednačine sa prigušenjem

$$(E_*^{\pm}) \qquad x''(t) \pm \frac{\beta}{t}x'(t) + \frac{\delta}{t^2}x(t) = 0, \quad t > 0$$

i Ojlerove jednačine bez prigušujućeg člana

$$(E^*) \qquad x''(t) + \frac{\delta}{t^2}x(t) = 0, \quad t > 0.$$

Poznato je (videti Grace [36]) da je jednačina $(E_*^{\pm})$ oscilatorna za $\delta > \left(\frac{\beta \mp 1}{2}\right)^2$, dok su sva rešenja neoscilatorna za $\delta \leq \left(\frac{\beta \mp 1}{2}\right)^2$. Ako je $\beta = 1$ i $\delta = 1/4$ u jednačini (E_*^{+}), ta jednačina ima oscilatorno rešenje $x(t) = \sin\left(\frac{\ln t}{2}\right)$ i $x(t) = \cos\left(\frac{\ln t}{2}\right)$, dok je jednačina (E^*) neoscilatorna. Takođe, ako je $\beta = -1$ i $\delta = 1$, tada jednačina (E_*^{+}) ima neoscilatorno rešenje $x(t) = t$ i $x(t) = t\ln t$, a jednačina (E^*) je oscilatorna.

Posmatraćemo sublinearnu jednačinu (E_p) pri sledećim pretpostavkama:
(i) $a : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ je pozitivna neprekidno diferencijabilna funkcija,
(ii) $p, q : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije,
(iii) $\psi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ su neprekidno diferencijabilne.

Zbog jednostavnijeg dokazivanja osnovnih rezultata, pokazaćemo najpre pomoćne leme.

Lema 3.2.1. *Neka je funkcija $H \in \mathcal{H}^\circ(\mathcal{D})$. Ako je funkcija $v \in C([t_0, \infty))$ takva da postoji konstanta $T \geq t_0$ i pozitivna funkcija $w \in C^2([t_0, \infty))$, tako da je*

$$(2.1) \qquad v(t) \leq -w''(t) \quad \textit{za svako} \quad t \geq T \geq t_0,$$

tada je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)v(s)\,ds < \infty.$$

Dokaz. Pre svega, napomenimo da za funkciju $H \in \mathcal{H}^\circ(\mathcal{D})$ važi

$$(2.2) \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}}{H(t,s)} > -\infty.$$

Množenjem nejednakosti (2.1) sa $H(t,s)$, $t \geq s \geq t_0$, integracijom za $t \geq T$ i korišćenjem parcijalne integracije dobija se

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t,s)v(s)\,ds &\leq -\int_T^t H(t,s)w''(s)\,ds \\ &= H(t,T)w'(T) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T)w(T) - \int_T^t \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)w(s)\,ds. \end{aligned}$$

[1] Léonard Euler, švajcarski matematičar, 1856–1754

Uzevši u obzir da je $\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \le 0,\ \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s) \ge 0, (t,s) \in \mathcal{D}$ zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} H(t,s)v(s)\,ds &= \int_{t_0}^{T} H(t,s)v(s)\,ds - \int_{T}^{t} H(t,s)w''(s)\,ds \\ &\le \int_{t_0}^{T} H(t,s)|v(s)|\,ds + H(t,T)w'(T) - \frac{\partial H}{\partial s}(t,T)w(T) \\ &\le H(t,t_0)\int_{t_0}^{T} |v(s)|\,ds + H(t,t_0)|w'(T)| - \frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)w(T).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)v(s)\,ds \le L - w(T)\,\liminf_{t\to\infty} \frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)}{H(t,t_0)},$$

gde je $L = \int_{t_0}^{T} |v(s)|\,ds + |w'(T)|$, a što prema uslovu (2.2) pokazuje tvrđenje. $\square$

U narednoj lemi je izložen standardni metod ocene težinskog integrala amortizujućeg člana, koji nam omogućava da uopštimo kriterijume oscilatornosti sublinearne jednačine na sublinearnu jednačinu sa prigušenjem pod pretpostavkom da je funkcija p konstantnog znaka.

Lema 3.2.2. *Neka je funkcija $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ i neka važi ma koji od sledeća dva uslova:*
(i) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je sublinearna funkcija, $\varphi : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nenegativna, nerastuća funkcija ili*
(ii) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je superlinearna funkcija, $\varphi : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$ nepozitivna, neopadajuća funkcija.*
Tada za proizvoljno neocilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (E_p), takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $T \ge t_0$, postoji pozitivna konstanta M, takva da je

$$-\int_{T}^{t} H(t,s)\varphi(s)\frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds \le M\,H(t,t_0) \qquad \text{za svako} \quad t \ge T \ge t_0.$$

Dokaz. S l u č a j (i): Primenjujući drugu teoremu o srednjoj vrednosti integrala [2] za ma koje fiksirano $s \ge T$, postoji $\xi \in [T,s]$ takvo da je

$$\int_{T}^{s} \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du = \varphi(T)\int_{T}^{\xi} \frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du = -\varphi(T)\int_{x(\xi)}^{x(T)} \frac{d\tau}{f(\tau)}. \tag{2.3}$$

Kako je

$$\int_{x(\xi)}^{x(T)} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \begin{cases} 0 & , \text{ ako je } x(\xi) > x(T) \\ \displaystyle\int_{0+}^{x(T)} \frac{d\tau}{f(\tau)} & , \text{ ako je } x(\xi) \le x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x > 0,$$

$$\int_{x(\xi)}^{x(T)} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \begin{cases} 0 & , \text{ ako je } x(\xi) < x(T) \\ \displaystyle\int_{0-}^{x(T)} \frac{d\tau}{f(\tau)} & , \text{ ako je } x(\xi) \ge x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x < 0,$$

[2] Ako je funkcija $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitivna, nerastuća na segmentu $[a,b]$ i ψ Riman integrabilna na segmentu $[a,b]$, tada postoji $\xi \in [a,b]$ tako da je $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} \psi(x)\,dx$

i $\varphi(T) \geq 0$, iz (2.3) se dobija da je

$$-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du \leq \varphi(T)F_1[x(T)] \quad \text{za svako } s \geq T,$$

gde je

$$F_1(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{0+}^x \frac{du}{f(u)}\,, & x > 0 \\ \displaystyle\int_{0-}^x \frac{du}{f(u)}\,, & x < 0 \end{cases}.$$

Tada je za svako $t \geq T$

$$\begin{aligned} -\int_T^t H(t,s)\varphi(s)\frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds &= \int_T^t H(t,s)d\Big(-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du\Big) \\ &= -\int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\left(-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du\right)ds \\ &\leq \varphi(T)F_1[x(T)]\left(-\int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\,ds\right) \\ &= \varphi(T)F_1[x(T)]H(t,T) \leq \varphi(T)F_1[x(T)]H(t,t_0), \end{aligned}$$

čime je lema u ovom slučaju dokazana sa $M = g(T)F_1[x(T)] > 0$.

S l u č a j (ii): Korišćenjem činjenice da je $\varphi(t)$ nepozitivna, neopadajuća funkcija, primenom druge teoreme o srednjoj vrednosti integrala, zaključujemo da za ma koje fiksirano $s \geq T$, postoji $\xi \in [T,s]$ takvo da je

$$-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du = -\varphi(T)\int_T^\xi \frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du = -\varphi(T)\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{d\tau}{f(\tau)}. \tag{2.4}$$

Kako je $-\varphi(T) \geq 0$ i

$$\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \begin{cases} 0 & , \quad \text{ako je } x(\xi) < x(T) \\ \displaystyle\int_{x(T)}^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} & , \quad \text{ako je } x(\xi) \geq x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x > 0,$$

$$\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{d\tau}{f(\tau)} < \begin{cases} 0 & , \quad \text{ako je } x(\xi) > x(T) \\ \displaystyle\int_{x(T)}^{-\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} & , \quad \text{ako je } x(\xi) \leq x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x < 0,$$

za svako $s \geq T$ je

$$-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du \leq -\varphi(T)F_2[x(T)],$$

gde je

$$F_2(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{du}{f(u)}\,, & x > 0 \\ \displaystyle\int_x^{-\infty} \frac{du}{f(u)}\,, & x < 0 \end{cases}.$$

Dakle, za svako $t \geq T$ biće

$$\begin{aligned} -\int_T^t H(t,s)\varphi(s)\frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds &= -\int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\left(-\int_T^s \varphi(u)\frac{x'(u)}{f(x(u))}\,du\right)ds \\ &\leq -\varphi(T)F_2[x(T)]\left(-\int_T^t \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\,ds\right) \\ &= -\varphi(T)F_2[x(T)]\,H(t,T) \leq -\varphi(T)F_2[x(T)]\,H(t,t_0). \end{aligned}$$

čime je lema i u drugom slučaju pokazana. $\square$

Pretpostavimo da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove

$$(F_1) \qquad \psi(x) \neq 0, \quad x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0, \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

$$(F_2) \qquad \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \geq 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Kao u drugom delu Poglavlja 3.1. možemo definisati konstantu

$$I_{f,\psi} = \min\left\{ \frac{\inf_{x>0}\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'}{1+\inf_{x>0}\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'},\ \frac{\inf_{x<0}\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'}{1+\inf_{x<0}\Phi(x)\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)'} \right\}.$$

gde je

$$\Phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{0+}^x \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, & x > 0 \\ \displaystyle\int_{0-}^x \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, & x < 0 \end{cases},$$

i korišćenjem Leme 3.2.1. uopštiti Teoremu 3.1.6. na jednačinu (E_p).

Teorema 3.2.1. *Neka je funkcija f sublinearna, p nenegativna funkcija na $[t_0,\infty)$ i neka važi*

$$(F_3) \qquad \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \geq \frac{1}{k} > 0 \quad \textit{za} \quad x \neq 0.$$

Jednačina (E_p) je oscilatorna ako postoji funkcija $H \in \mathcal{H}^\circ(\mathcal{D})$ i pozitivna, konkavna funkcija $\varrho \in C^2([t_0,\infty))$ takva da za neko $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ važe uslovi

$$\left[\frac{p(t)}{a(t)}\varrho^\beta(t)\right]' \leq 0, \quad t \geq t_0,$$

$$(C_1) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho^\beta(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{4}\left(\frac{a'(s)}{a(s)}\right)^2\right]ds = \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji neoscilatorno rešenje $x(t)$ na $[T,\infty)$ i definišimo funkciju w na $[T,\infty)$ sa

$$w(t)=\varrho^{\beta}(t)\Phi(x(t)). \tag{2.5}$$

Diferenciranjem se dobija

$$\begin{aligned} w'' &= \varrho^{\beta}\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x''+\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2-\varrho^{\beta}\psi(x)\left(\frac{x'}{f(x)}\right)^2 f'(x)+\beta\,\varrho^{\beta}\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\ &\quad+\beta\left[\frac{\varrho''}{\varrho}-\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\right]w+\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\Big(\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w+\varrho^{\beta}\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'\Big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Korišćenjem jednačine (E_p) je

$$\varrho^{\beta}\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x''=-\varrho^{\beta}\frac{q}{a}-\varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)}-\varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2, \tag{2.7}$$

tako da se postupkom kao u dokazu Teoreme 3.1.6., iz (2.6), (2.7), (1.40) i (1.41), dobija da je

$$\begin{aligned} w'' &\le -\varrho^{\beta}\frac{q}{a}-\varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)}-\varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2+\beta\,\frac{\varrho''}{\varrho}\,w \\ &\quad+\beta\,(\beta-1)\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 w+2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right)-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &-\beta\,(1-\beta)\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 w+2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right)-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2 \\ &\qquad=-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w'-\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2\le 0, \end{aligned}$$

i $\varrho''/\varrho\le 0$, iz (2.8) sledi da je

$$w''\le-\varrho^{\beta}\frac{q}{a}-\varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)}-\varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2. \tag{2.9}$$

Pored toga je i

$$\begin{aligned} &-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2-\varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\ &\qquad=-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\left(x'+\frac{a'}{2\,a}\,\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\right)^2+\frac{\varrho^{\beta}}{4}\,\frac{\psi^2(x)}{\psi'(x)f(x)}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \\ &\qquad\le\varrho^{\beta}\frac{k}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

tako da iz (2.9) sledi da je

$$w''(t)\le-\varrho^{\beta}(t)\,\left[\frac{q(t)}{a(t)}-\frac{k}{4}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\right]-\varrho^{\beta}(t)\frac{p(t)}{a(t)}\frac{x'(t)}{f(x(t))},\quad t\ge T.$$

Kako je $\frac{p(t)}{a(t)}\varrho^\beta(t)$ nenegativna, nerastuća funkcija, prema Lemi 3.2.2. (i) postoji konstanta $M>0$ takva da je

$$-\int_T^t H(t,s)\varrho^\beta(s)\frac{p(s)}{a(s)}\,\frac{x'(s)}{f(x(s))}\,ds \le M\,H(t,t_0) \quad \text{za svako} \quad t\ge T\ge t_0.$$

Zato, ako označimo sa

$$\chi(t)=\frac{q(s)}{a(s)}-\frac{k}{4}\left(\frac{a'(s)}{a(s)}\right)^2,$$

postupkom kao u dokazu Leme 3.2.1. dobija se da je

$$\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho^\beta(s)\chi(s)\,ds \le H(t,t_0)\left[\int_{t_0}^T \varrho^\beta(s)|\chi(s)|\,ds+|w'(T)|+M\right]-\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)w(T).$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\chi(s)\,ds \le L^*-w(T)\liminf_{t\to\infty}\frac{\frac{\partial H}{\partial s}(t,t_0)}{H(t,t_0)}<\infty,$$

gde je $L^*=\int_{t_0}^T\varrho^\beta(s)|\chi(s)|\,ds+|w'(T)|+M$. Dobijena kontradikcija sa uslovom (C_1) pokazuje kriterijum. □

Analognim postupkom, korišćenjem Leme 3.2.2. (ii) može se pokazati i sledeća teorema:

Teorema 3.2.2. *Neka važi (F_3) i neka je funkcija f superlinearna, p nepozitivna funkcija na $[t_0,\infty)$. Jednačina (E_p) je oscilatorna ako postoji funkcija $H\in\mathcal{H}^\circ(\mathcal{D})$ i pozitivna, konkavna funkcija $\varrho\in C^2([t_0,\infty))$ takva da za neko $\beta\in[0,I_{f,\psi}]$ važi uslov (C_1) i*

$$\left[\frac{p(t)}{a(t)}\varrho^\beta(t)\right]'\ge 0,\quad t\ge t_0.$$

Ako pretpostavimo da funkcije f,ψ zadovoljavaju uslove

$$\psi(x)>0,\quad xf(x)>0,\quad f'(x)\ge 0 \quad \text{za} \quad x\ne 0.$$

i definišemo nenegativnu konstantu $M_{f,\psi}$ na sledeći način

$$M_{f,\psi}=\min\left\{\frac{\inf_{x>0}\frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}{1+\inf_{x>0}\frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}},\frac{\inf_{x<0}\frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}{1+\inf_{x<0}\frac{f'(x)\Phi(x)}{\psi(x)}}\right\},$$

možemo pomoću Leme 3.2.1. uopštiti i kriterijum Lia i Yeha [87] - Teorema 3.1.1. na jednačinu (E_p).

Teorema 3.2.3. *Neka je $H\in\mathcal{H}_a^\circ(\mathcal{D})$. Jednačina (E_p) je oscilatorna ako postoji pozitivna funkcija $\varrho\in C^2([t_0,\infty))$ takva da je $(a(t)\varrho'(t))'\le 0$, $t\ge t_0$ i za neko $\beta\in[0,M_{f,\psi}]$ važi uslov*

$$(C_2)\qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho^\beta(s)q(s)\,ds=\infty,$$

i ma koji od sledeća dva uslova:
(i) *funkcija f je sublinearna, p je nenegativna funkcija na $[t_0,\infty)$ i*

$$(p(t)\varrho^\beta(t))'\le 0,\quad t\ge t_0,\ \beta\in[0,M_{f,\psi}];$$

(ii) *funkcija f superlinearna, p nepozitivna funkcija na $[t_0,\infty)$ i*

$$(p(t)\varrho^\beta(t))'\ge 0,\quad t\ge t_0,\ \beta\in[0,M_{f,\psi}];$$

Dokaz. Ako je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E_p) na $[T,\infty)$ i w funkcija definisana na $[T,\infty)$ sa (2.5), postupkom kao u dokazu Teoreme 3.1.2. koristeći jednačinu (E_p) dolazimo do nejednakosti

$$w''(t) \le -\varrho^{\beta}(t)q(t) - \varrho^{\beta}(t)p(t)\frac{x'(t)}{f(x(t))}, \quad t \ge T,$$

odakle primenom Leme 3.2.1. dolazimo do kontradikcije sa uslovom (C_2). □

U svim prethodno pokazanim kriterijumima figuriše pretpostavka da je funkcija p konstantnog znaka. Ali naravno od mnogo većeg interesa je utvrditi kriterijume oscilatornosti jednačine (E_p) bez ograničenja o znaku funkcije p. Rezultati takvog tipa mogu se naći u radovima Grace i Lallia [31], [34], [36] i [38]. Kako su svi kriterijumi pokazani u tim radovima pod pretpostavkom o pozitivnosti funkcije $\psi(x)$, mi ćemo ovde, kao i u drugom delu prethodnog poglavlja, pokazati kriterijume oscilatornosti jednačine (E_p) bez te pretpostavke, odnosno pod pretpostavkom da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_1) i (F_2) i bez ograničenja o znaku funkcije p. U tu svrhu, u daljem toku rada označićemo sa

$$\gamma(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}.$$

Teorema 3.2.4. *Neka funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3) i*

$$(F_4) \qquad |\psi(x)| \ge c > 0 \quad \text{za} \quad x \ne 0.$$

Jednačina (E_p) je oscilatorna ako postoje funkcije $H \in \mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{D})$ i $\varrho \in C^2([t_0,\infty);(0,\infty))$ takve da za neko $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ važi

$$(C_3) \qquad \frac{1-\beta}{4c^2\beta^2}\Big(\frac{p(t)}{a(t)}\Big)^2 + \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} \le 0, \quad t \ge t_0,$$

$$(C_4) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left(\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{4}\,\gamma^2(s)\right) ds = \infty;$$

ili

$$(C_5) \qquad \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{4\,\beta^2}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 \le 0, \quad t \ge t_0,$$

$$(C_6) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{2c^2}\left(\frac{p(s)}{a(s)}\right)^2 - 2k\,\beta^2\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2\right] ds = \infty;$$

ili (C_1) i

$$(C_7) \qquad \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{2\,\beta^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 + 4\,\beta^2\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^2\right] \le 0, \quad t \ge t_0;$$

ili

$$(C_8) \qquad \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{2\,\beta^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 + \left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\right] \le 0, \quad t \ge t_0,$$

$$(C_9) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \beta^2\,k\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2\right] ds = \infty.$$

Dokaz. Neka je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E_p) na $[T,\infty)$ i w funkcija definisana na $[T,\infty)$ sa (2.5). Kao u dokazu Teoreme 3.2.1. dobija se da važi (2.8). Uzevši u obzir da je $\beta\in[0,1)$ iz (2.8) sledi da je

$$\begin{aligned} w'' \;\le\; & -\varrho^\beta \frac{q}{a} - \varrho^\beta \frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)} - \varrho^\beta \frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' - \varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2 + \beta\,\frac{\varrho''}{\varrho}\,w \\ & + 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big) - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Kako je

$$\varrho^\beta \frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' = w' - \beta\frac{\varrho'}{\varrho}w,$$

to je

$$\varrho^\beta \frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)} = \frac{p}{a\,\psi(x)}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big), \tag{2.12}$$

$$\varrho^\beta \frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' = \frac{a'}{a}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big), \tag{2.13}$$

$$2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big) = 2\,\beta\,\varrho^\beta \frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'. \tag{2.14}$$

$\big(\,(C_3)\wedge(C_4) \Longrightarrow (E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: Imamo da je

$$\begin{aligned} -\frac{p}{a\,\psi(x)}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big) \;&-\; \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2 \\ &= -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2 + \frac{1-\beta}{\beta}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)\,\frac{p}{a}\,\frac{w}{\psi(x)}\right] \\ &= -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w + \frac{1-\beta}{2\,\beta}\,\frac{p}{a}\,\frac{w}{\psi(x)}\right]^2 + \frac{1-\beta}{4\beta}\,\frac{w}{\psi^2(x)}\Big(\frac{p}{a}\Big)^2, \end{aligned}$$

odakle je prema uslovu (F_4)

$$-\,\frac{p}{a\,\psi(x)}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big) - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2 \le \frac{1-\beta}{4\beta\,c^2}\Big(\frac{p}{a}\Big)^2\,w. \tag{2.15}$$

Sa druge strane je

$$\begin{aligned} -\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2 \;&-\; \varrho^\beta \frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' + 2\,\beta\,\varrho^\beta \frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\ &= -\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\left[x'^2 + x'\,\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\Big(\frac{a'}{a} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\Big)\right] \\ &= -\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\left[x' + \frac{\psi(x)}{2\,\psi'(x)}\,\gamma\right]^2 + \varrho^\beta \frac{\psi^2(x)}{4\,f(x)\psi'(x)}\,\gamma^2, \end{aligned}$$

tako da iz uslova (F_3) sledi da je

$$-\,\varrho^\beta \frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2 - \varrho^\beta \frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' + 2\,\beta\,\varrho^\beta \frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \le \frac{k}{4}\,\varrho^\beta\,\gamma^2. \tag{2.16}$$

Dakle, iz (2.11), (2.12), (2.13), (2.15) i (2.16) je onda

$$w''(t) \leq -\varrho^{\beta}(t)\,\frac{q(t)}{a(t)} + \frac{k}{4}\,\varrho^{\beta}(t)\,\gamma^{2}(t) + \beta\,w(t)\,\left[\frac{1-\beta}{4c^{2}\beta^{2}}\Big(\frac{p(t)}{a(t)}\Big)^{2} + \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)}\right], \quad t \geq T.$$

Prema uslovu (C_3) je

$$\varrho^{\beta}(t)\,\left[\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{4}\,\gamma^{2}(t)\right] \leq -w''(t), \quad t \geq T$$

odakle prema Lemi 3.2.1. zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left(\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{4}\,\gamma^{2}(s)\right) ds < \infty,$$

što je u suprotnosti sa (C_4) i time pokazuje ovaj slučaj teoreme.

$\big($ $(C_5) \wedge (C_6) \Longrightarrow (E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: Korišćenjem uslova (F_3) imamo da je

$$\begin{aligned}
&-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^{2} - \varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)} + 2\,\beta\,\varrho^{\beta}\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\
&\quad = -\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\left[x' + \frac{\psi(x)}{2\,\psi'(x)}\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]^{2} \\
&\qquad + \frac{\varrho^{\beta}}{4}\,\frac{\psi^{2}(x)}{f(x)\psi'(x)}\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{2} \\
&\quad \leq \varrho^{\beta}\frac{k}{4}\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{2}.
\end{aligned}$$

Kako je $(a+b)^{2} \leq 2\,a^{2} + 2\,b^{2}$, prema uslovu (F_4) iz prethodne nejednakosti je

$$\begin{aligned}
&-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^{2} - \varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)} + 2\,\beta\,\varrho^{\beta}\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\
&\qquad \leq \varrho^{\beta}\frac{k}{2}\left[\frac{1}{\psi^{2}(x)}\,\left(\frac{p}{a}\right)^{2} + 4\beta^{2}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{2}\right] \\
&\qquad \leq \varrho^{\beta}\frac{k}{2}\left[\frac{1}{c^{2}}\,\left(\frac{p}{a}\right)^{2} + 4\beta^{2}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{2}\right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Pored toga je

$$\begin{aligned}
&-\frac{a'}{a}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^{2} \\
&\quad = -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w + \frac{1-\beta}{2\beta}\,w\,\frac{a'}{a}\right]^{2} + \frac{1-\beta}{4\,\beta}\,w\,\left(\frac{a'}{a}\right)^{2} \\
&\quad \leq \frac{1-\beta}{4\,\beta}\,w\,\left(\frac{a'}{a}\right)^{2}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Iz (2.11), (2.13), (2.14), (2.17) i (2.18) dobijamo da je za svako $t \geq T$

$$\begin{aligned}
w''(t) \quad \leq \quad & -\varrho^{\beta}(t)\frac{q(t)}{a(t)} + \frac{k}{2}\,\varrho^{\beta}(t)\left[\frac{1}{c^{2}}\,\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^{2} + 4\beta^{2}\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^{2}\right] \\
& +\beta\,w(t)\left[\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{4\,\beta^{2}}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^{2}\right],
\end{aligned}$$

odakle je prema uslovu (C_5)

$$\varrho^\beta(t)\left[\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{2\,c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 - 2\,k\beta^2\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^2\right] \le -w''(t), \quad t \ge T.$$

Na osnovu Leme 3.2.1. dolazimo do činjenice da je

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho^\beta(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{2\,c^2}\left(\frac{p(s)}{a(s)}\right)^2 - 2\,k\,\beta^2\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2\right] ds < \infty,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom (C_6) i samim time pokazuje oscilatornost jednačine (E_p) u ovom slučaju.

$\big(\,(C_1)\wedge(C_7) \Longrightarrow (E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: U ovom slučaju prema (2.10) i

$$\begin{aligned}
-\frac{p}{a}\frac{1}{\psi(x)}&\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) + 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right)^2 \\
&= -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w + \frac{1-\beta}{2\,\beta}\,w\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]^2 \\
&\quad + \frac{1-\beta}{4\,\beta}\,w\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 \\
&\le \frac{1-\beta}{2\,\beta}\,w\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 4\,\beta^2\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

(2.11) ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}
w''(t) \;\le\; & -\varrho^\beta(t)\frac{q(t)}{a(t)} + \varrho^\beta(t)\frac{k}{4}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 \\
& +\beta\,w(t)\left\{\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{2\,\beta^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 + 4\,\beta^2\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^2\right]\right\}, \quad t \ge T.
\end{aligned}$$

Iz uslova (C_7) dolazimo do nejednakosti

$$\varrho^\beta(t)\left[\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{4}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\right] \le -w''(t), \quad t \ge T,$$

koja nas prema Lemi 3.2.1. vodi do sledeće kontradikcije sa uslovom (C_1)

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho^\beta(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{4}\left(\frac{a'(s)}{a(s)}\right)^2\right] ds < \infty.$$

$\big(\,(C_8)\wedge(C_9) \Longrightarrow (E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: Sada iz sledeće dve nejednakosti:

$$\begin{aligned}
-\varrho^\beta&\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2 + 2\,\beta\,\varrho^\beta\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' \\
&= -\varrho^\beta\frac{\psi'(x)}{f(x)}\left(x' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{\psi'(x)}\right)^2 + \beta^2\,\varrho^\beta\frac{\psi^2(x)}{f(x)\psi'(x)}\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 \\
&\le \beta^2 k\,\varrho^\beta\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{p}{a\,\psi(x)}\Big(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)-\frac{a'}{a}\Big(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\Big(w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\Big)^2\\
&\qquad=-\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[w'-\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w+\frac{1-\beta}{2\,\beta}\,w\,\left(\frac{1}{\psi(x)}\,\frac{p}{a}+\frac{a'}{a}\right)\right]^2\\
&\qquad\quad+\frac{1-\beta}{4\,\beta}\,w\,\left(\frac{1}{\psi(x)}\,\frac{p}{a}+\frac{a'}{a}\right)^2\\
&\qquad\le\frac{1-\beta}{2\,\beta}\,w\,\left[\frac{1}{c^2}\,\left(\frac{p}{a}\right)^2+\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

i (2.11) dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
w''(t)\;\;&\le\;\;-\varrho^{\beta}(t)\frac{q(t)}{a(t)}+\beta^2k\,\varrho^{\beta}(t)\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^2\\
&\quad+\beta\,w(t)\left\{\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)}+\frac{1-\beta}{2\,\beta^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2+\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\right]\right\},\qquad t\ge T.
\end{aligned}
$$

Iz uslova (C_8) je

$$
\varrho^{\beta}(t)\,\left[\frac{q(t)}{a(t)}-\beta^2\,k\,\left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)^2\right]\le-w''(t),\quad t\ge T,
$$

odakle na osnovu Leme 3.2.1. mora biti

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)}-\beta^2k\,\left(\frac{\varrho'(s)}{\varrho(s)}\right)^2\right]ds<\infty.
$$

Dobijena kontradikcija sa uslovom (C_9) pokazuje teoremu i u ovom slučaju. □

Ako funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3) i (F_4) važi i sledeći kriterijum oscilatornosti jednačine (E_p).

Teorema 3.2.5. *Neka funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3), (F_4). Jednačina (E_p) je oscilatorna ako postoji pozitivna, konkavna funkcija $\varrho\in C^2([t_0,\infty);(0,\infty))$ i funkcija $H\in\mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{D})$ tako da za neko $\beta\in[0,I_{f,\psi}]$ važi*

$$
(C_{10})\qquad\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)}-\frac{k}{2c^2}\left(\frac{p(s)}{a(s)}\right)^2-\frac{k}{2}\,\gamma^2(s)\right]ds=\infty
$$

ili

$$
(C_{11})\qquad\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)}-\frac{k}{2\,c^2}\,\frac{p^2(s)+c^2(a'(s))^2}{a^2(s)}\right]ds<\infty.
$$

Dokaz. Neka je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E_p) na $[T,\infty)$ i w funkcija definisana na $[T,\infty)$ sa (2.5). Tada važi (2.9) i (2.11) .
$\big($ $(C_{10})\Longrightarrow(E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: Kako je

$$
-\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2-\varrho^{\beta}\frac{p}{a}\frac{x'}{f(x)}-\varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'+2\,\beta\,\varrho^{\beta}\frac{\varrho'}{\varrho}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x'
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\left\{x' + \frac{\psi(x)}{2\,\psi'(x)}\ \left[\frac{p}{a\,\psi(x)} + \left(\frac{a'}{a} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]\right\}^2 \\
&\quad + \varrho^{\beta}\frac{\psi^2(x)}{4\,f(x)\psi'(x)}\ \left[\frac{p}{a\,\psi(x)} + \left(\frac{a'}{a} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]^2 \\
&\leq \frac{k}{2}\,\varrho^{\beta}\left[\frac{1}{c^2}\,\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \gamma^2\right],
\end{aligned}
$$

iz (2.11), uzevši u obzir da je $\varrho''(t)/\varrho(t) \leq 0$, $t \geq t_0$, dobija se da je

$$
\varrho^{\beta}(t)\,\left\{\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{2}\,\left[\frac{1}{c^2}\,\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 + \gamma^2(t)\right]\right\} \leq -w''(t), \quad t \geq T.
$$

Iz dobijene nejednakosti prema Lemi 3.2.1. zaključujemo da je

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{2\,c^2}\,\left(\frac{p(s)}{a(s)}\right)^2 - \frac{k}{2}\,\gamma^2(s)\right]\,ds < \infty,
$$

što je u kontradikciji sa uslovom (C_{10}).

$\big($ $(C_{11}) \Longrightarrow (E_p)$ *je oscilatorna* $\big)$: Kako je

$$
\begin{aligned}
&-\varrho^{\beta}\frac{q}{a} - \varrho^{\beta}\frac{p}{a}\,\frac{x'}{f(x)} - \varrho^{\beta}\frac{a'}{a}\,\frac{\psi(x)}{f(x)}\,x' - \varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\,x'^2 \\
&\quad - \varrho^{\beta}\frac{q}{a} - \varrho^{\beta}\frac{\psi'(x)}{f(x)}\Big[x' + \frac{\psi(x)}{2\,\psi'(x)}\Big(\frac{p}{a\psi(x)} + \frac{a'}{a}\Big)\Big]^2 + \frac{\varrho^{\beta}}{4}\,\frac{\psi^2(x)}{f(x)\psi'(x)}\,\Big(\frac{p}{a\,\psi(x)} + \frac{a'}{a}\Big)^2 \\
&\quad \leq -\varrho^{\beta}\frac{q}{a} + \frac{k}{2}\,\varrho^{\beta}\,\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right],
\end{aligned}
$$

iz (2.9) imamo da je

$$
\varrho^{\beta}(t)\,\left[\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{k}{2\,c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2\right] \leq -w''(t), \quad t \geq T.
$$

Dakle, prema Lemi 3.2.1. zaključujemo da mora biti

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s)\left\{\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{k}{2\,c^2}\left(\frac{p(s)}{a(s)}\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{a'(s)}{a(s)}\right)^2\right]\,ds < \infty,
$$

što je u suprotnosti sa (C_{11}). $\square$

Pod nešto drugačijim pretpostavkama za funkcije f i ψ pokazaćemo jos dva kriterijuma.

Teorema 3.2.6. *Neka funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov*

(F_5) $$f(x)\psi'(x) \geq m > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Pretpostavimo da postoji funkcija $\varrho \in C^2([t_0,\infty);(0,\infty))$ takva da za neko $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ važi

(C_{12}) $$\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{4\,\beta^2}\,\gamma^2(t) \leq 0, \quad t \geq t_0.$$

Jednačina (E_p) *je oscilatorna ako postoji funkcija* $H \in \mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{D})$ *tako da je*

$$(C_{13}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s) \left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{1}{4m} \left(\frac{p(s)}{a(s)} \right)^2 \right] ds = \infty.$$

Dokaz. Neka je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E_p) na na $[T,\infty)$ i w funkcija definisana na $[T,\infty)$ sa (2.5). Tada kao u dokazu Teoreme 3.2.4. dobijamo (2.11). Prema uslovu (F_5) je

$$\begin{aligned} -\varrho^{\beta} \frac{p}{a} \frac{x'}{f(x)} - \varrho^{\beta} \frac{\psi'(x)}{f(x)} x'^2 \quad &= \quad -\varrho^{\beta} \frac{\psi'(x)}{f(x)} \left[x' + \frac{p}{2a} \frac{1}{\psi'(x)} \right]^2 + \frac{\varrho^{\beta}}{4} \frac{1}{f(x)\psi'(x)} \left(\frac{p}{a} \right)^2 \\ &\leq \quad \frac{\varrho^{\beta}}{4m} \left(\frac{p}{a} \right)^2 . \end{aligned}$$

Pored toga imamo da je

$$\begin{aligned} &-\frac{a'}{a} \left(w' - \beta \frac{\varrho'}{\varrho} w \right) + 2\,\beta \frac{\varrho'}{\varrho} \left(w' - \beta \frac{\varrho'}{\varrho} w \right) - \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \left(w' - \beta \frac{\varrho'}{\varrho} w \right)^2 \\ &\quad = -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{w} \left[w' - \beta \frac{\varrho'}{\varrho} w + \frac{1-\beta}{2\beta} w \left(\frac{a'}{a} - 2\,\beta \frac{\varrho'}{\varrho} \right) \right]^2 + \frac{1-\beta}{4\,\beta} w \left(\frac{a'}{a} - 2\,\beta \frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2 \\ &\quad \leq \frac{1-\beta}{4\,\beta} w\,\gamma^2, \end{aligned}$$

tako da se iz (2.11) dobija da je za svako $t \geq T$

$$w''(t) \leq -\varrho^{\beta}(t) \frac{q(t)}{a(t)} + \frac{1}{4m} \varrho^{\beta}(t) \left(\frac{p(t)}{a(t)} \right)^2 + \beta\, w(t) \left[\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{4\,\beta^2} \gamma^2(t) \right],$$

odakle je prema uslovu (C_{12})

$$\varrho^{\beta}(t) \left[\frac{q(t)}{a(t)} - \frac{1}{4m} \left(\frac{p(t)}{a(t)} \right)^2 \right] \leq -w''(t), \quad t \geq T.$$

Prema Lemi 3.2.1. mora biti

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s) \left[\frac{q(s)}{a(s)} - \frac{1}{4m} \left(\frac{p(s)}{a(s)} \right)^2 \right] ds < \infty,$$

što je u suprotnosti sa uslovom (C_{13}). $\square$

Teorema 3.2.7. *Neka funkcije* f *i* ψ *zadovoljavaju uslove* (F_4) *i*

$$(F_6) \qquad f(x)\psi'(x) \geq 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Jednačina (E_p) *je oscilatorna ako postoje funkcije* $H \in \mathcal{H}^{\circ}(\mathcal{D})$ *i* $\varrho \in C^2([t_0,\infty);(0,\infty))$ *takve da za neko* $\beta \in [0, I_{f,\psi}]$ *važi*

$$(C_{14}) \qquad \frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{2\beta^2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{p(t)}{a(t)} \right)^2 + \gamma^2(t) \right], \quad t \geq t_0,$$

$$(C_{15}) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^{\beta}(s) \frac{q(s)}{a(s)}\, ds = \infty.$$

Dokaz. Ako pretpostavimo da postoji neoscilatorno rešenje $x(t)$ na $[T,\infty)$ i definišemo funkciju w na $[T,\infty)$ sa (2.5), važi (2.11). Korišćenjem uslova (F_4), imamo da je

$$\begin{aligned}
-&\frac{p}{a\,\psi(x)}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) - \frac{a'}{a}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right)\\
&+ 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right) - \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left(w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w\right)^2\\
&= -\frac{\beta}{1-\beta}\frac{1}{w}\left[w' - \beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\,w + \frac{1-\beta}{2\beta}\,w\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} + \frac{a'}{a} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)\right]\\
&+ \frac{1-\beta}{4\beta}\,w\left(\frac{p}{a\,\psi(x)} + \frac{a'}{a} - 2\,\beta\,\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\\
&\le \frac{1-\beta}{2\beta}\,w\left[\frac{1}{\psi^2(x)}\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \gamma^2\right] \le \frac{1-\beta}{2\beta}\,w\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \gamma^2\right].
\end{aligned}$$

Prema uslovu (F_6) je $-\varrho^\beta(t)\dfrac{\psi'(x(t))}{f(x(t))}\,x'^2(t) \le 0$, $t \ge T$, tako da je iz (2.11), prema prethodnoj nejednakosti

$$w''(t) \le -\varrho^\beta(t)\frac{q(t)}{a(t)} + \beta\,w(t)\left\{\frac{\varrho''(t)}{\varrho(t)} + \frac{1-\beta}{2\beta^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{p(t)}{a(t)}\right)^2 + \gamma^2(t)\right]\right\}, \quad t \ge T.$$

Iz uslova (C_{14}) dolazimo do nejednakosti

$$\varrho^\beta(t)\frac{q(t)}{a(t)} \le -w''(t), \quad t \ge T,$$

koja prema Lemi 3.2.1. daje da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho^\beta(s)\frac{q(s)}{a(s)}\,ds < \infty.$$

Dobijena kontradikcija sa uslovom (C_{15}) pokazuje teoremu. $\square$

3.3. Oscilatornost superlinearne diferencijalne jednačine

Posmatraćemo nelinearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$(E) \qquad [a(t)\psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \ge t_0 \ge 0,$$

gde je $a \in C^1([t_0,\infty);(0,\infty))$, $q \in C([t_0,\infty);\mathbb{R})$, $\psi, f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\psi(x) > 0$, $xf(x) > 0$, $f'(x) \ge 0$ za $x \ne 0$. U Poglavlju 3.1. pokazali smo kriterijume oscilatornosti ove jednačine pod pretpostavkom da je funkcija f/ψ sublinearna, dok ćemo u ovom poglavlju pretpostaviti da je funkcija f/ψ superlinearna, odnosno uvodimo pojam superlinearne diferencijalne jednačine ovog oblika.

Definicija 3.3.1. Diferencijalna jednačina (E) je **superlinearna** ako važi

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, \ \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du < \infty \ \text{ za svako } \varepsilon > 0.$$

Zbog superlineranosti jednačine, možemo definisati funkciju

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, & x > 0 \\ \\ \displaystyle\int_x^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du, & x < 0 \end{cases}.$$

Oscilatorna svojstva rešenja superlinearne jednačine (E) razmatrali su S.R. Grace [41] (Teorema 1.4.5. i 1.4.8.), J.R. Graef, P.W. Spikes [46] i S.R. Grace, B.C. Lalli, C.C. Yeh [35]. U sva tri slučaja se pretpostavlja da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov

$$(F_1) \qquad \frac{f'(x)}{\psi(x)} \geq k > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Kada je $\psi(x) \equiv 1$ uslov (F_1) se svodi na uslov $f'(x) \geq k > 0$ za $x \neq 0$, koji nije zadovoljen u specijalnom slučaju kada je $f(x) = |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x,\ \lambda > 1$. Naravno, sa druge strane, taj uslov je zadovoljen u nekim zanimljivim superlinearnim slučajevima, kao na primer, u sledećim slučajevima:

(i) $f(x) = c\,x + |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{za} \quad \lambda > 0,\ c > 0,$

(ii) $f(x) = x\,\log^2(\mu + |x|), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{za} \quad \mu > 1,$

(iii) $f(x) = x\,e^{\mu\,|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{za} \quad \mu > 0.$

Uslov (F_1) ne važi ni u opštem slučaju jednačine (E) kada je na primer

$$(f\psi) \qquad f(x) = |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x,\ \lambda > 1, \quad \psi(x) = x^{2m},\ m \in \mathbb{N}$$

Iz tog razloga u ovom poglavlju pokazaćemo kriterijume oscilatornosti superlinearne jednacine (E) pod drugačijim pretpostavkama za funkcije f i ψ koje specijalno važe i u navedenom slučaju $(f\psi)$. Izlaganje ćemo podeliti u tri dela u zavisnosti od uslova koje zadovoljavaju funkcije f i ψ.

$\boxed{\text{I}}$ Motivisani rezultatima iz radova Ch.G. Philosa i I.K. Puranarasa [116], [117] pretpostavićemo da su funkcije f i ψ takve da definišu konstantu

$$(F_2) \qquad L_{f,\psi} = \min\left\{ \inf_{x>0} \frac{f'(x)}{\psi(x)} \int_x^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du,\ \inf_{x<0} \frac{f'(x)}{\psi(x)} \int_x^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du \right\} > 1$$

i poboljšati kriterijume (VIII) i (IX) Poglavlja 1.3. iz ta dva rada i proširiti ih na opštiju diferencijalnu jednačinu (E).

Primetimo pre svega, da je u slučaju izbora funkcija $(f\psi)$ konstanta $L_{f,\psi} = \frac{\lambda}{\lambda - 2m - 1} > 1$ za svako $m \in \mathbb{N}$.

Za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (E), takvo da je $x(t) \neq 0$ na $[T_0, \infty)$ definisaćemo funkciju w na $[T_0, \infty)$ sa

$$w(t) = \Lambda(x(t)).$$

Pokazaćemo najpre nekoliko pomoćnih rezultata koje ćemo koristiti u dokazivanju osnovnih rezultata ovog poglavlja.

Lema 3.3.1. *Ako je za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ superlinearne jednačine (E)*

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds = \infty, \tag{3.1}$$

tada je za funkciju $H \in \widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds = \infty. \tag{3.2}$$

Dokaz. Prema (3.1), postoji $T_1 \geq T_0$, takvo da je

$$\int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \geq \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_1,$$

gde je μ proizvoljna konstanta, ρ konstanta takva da je

$$\inf_{s\geq t_0} \Big[\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\Big] > \rho > 0. \tag{3.3}$$

Onda, imamo da je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\quad = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s) d\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) \\
&\quad = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} \left(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) ds \\
&\quad \geq \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \left(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)\left(\int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\right) ds \\
&\quad \geq \frac{\mu}{\rho\, H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} \Big(-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big)\, ds = \frac{\mu}{\rho}\, \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)}.
\end{aligned}$$

Kako (3.3) garantuje da je

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} > \rho,$$

postoji $T_2 \geq T_1$, takvo da je

$$\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_0)} \geq \rho \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_2.$$

Dakle,

$$\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \geq \mu \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_2,$$

što pokazuje da (3.2) zaista važi. □

Lema 3.3.2. *Ako postoji funkcija $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ takva da je*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t,s)\, q(s)\, ds > -\infty, \tag{C_1}$$

i postoji konstanta $m > \frac{1}{L_{f,\psi}}$ takva da je

$$(H_{10}) \qquad \frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \geq m\,\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)^2}{H(t,s)}\,a(s) \quad za \quad (t,s)\in\mathcal{D},$$

tada za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ superlinearne jednačine (E) važi

$$\int_{T_0}^{\infty}\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds < \infty. \tag{3.4}$$

Dokaz. Pre svega, uočimo da se diferenciranjem jednakosti $w(t) = \Lambda(x(t))$ i korišćenjem jednačine (E) dobija

$$\big(a(t)w'(t)\big)' = q(t) + \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\,a(t)\,[w'(t)]^2, \quad t \geq T_0. \tag{3.5}$$

Tada je

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{t}H(t,s)q(s)\,ds + \int_{T_0}^{t}H(t,s)\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds &= \int_{T_0}^{t}H(t,s)\big(a(s)w'(s)\big)'\,ds\\ &= -H(t,T_0)a(T_0)w'(T_0) - \int_{T_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)a(s)w'(s)\,ds.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da (3.4) ne važi, tj. da važi (3.1). Tada prema Lemi 3.3.1. važi (3.2). Ako je $\chi:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija određena sa

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \quad \text{za svako } (t,s)\in\mathcal{D},$$

prema uslovu (H_{10}) postoji konstanta $m > \frac{1}{L_{f,\psi}}$, takva da je

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \geq m\chi^2(t,s)\,a(s) \quad \text{za svako} \quad (t,s)\in\mathcal{D}.$$

Izaberimo realan broj R takav da je $1 < R < m\,L_{f,\psi}$. Pokazaćemo da za svako $t^* \geq T_0$ postoji $t \geq t^*$ takvo da je

$$\int_{T_0}^{t}H(t,s)\,\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds > R\int_{T_0}^{t}\chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\,a(s)w'(s)\,ds. \tag{3.7}$$

U suprotnom, postoji $t^* \geq T_0$ takvo da je za svako $t \geq t^*$

$$\int_{T_0}^{t}H(t,s)\,\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds \leq R\int_{T_0}^{t}\chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\,a(s)w'(s)\,ds. \tag{3.8}$$

Prema načinu izbora konstante $L_{f,\psi}$ je

$$\frac{\psi(x(t))}{f'(x(t))} \leq \frac{w(t)}{L_{f,\psi}}, \quad \text{za svako} \quad t \geq T_0. \tag{3.9}$$

Primenom Švarcove nejednakosti, uzevši u obzir (3.8) i (3.9) imamo da je za $t \geq t^*$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{T_0}^{t} \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\, a(s)w'(s)\, ds \\
&\leq \left(\int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_{T_0}^{t} \chi^2(t,s)\, \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))}\, a(s)\, ds\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{R}\left(\int_{T_0}^{t} \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\, a(s)w'(s)\, ds\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{L_{f,\psi}}} \left(\int_{T_0}^{t} \chi^2(t,s)\, a(s)w(s)\, ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int_{T_0}^{t} \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\, a(s)w'(s)\, ds \leq \frac{R}{L_{f,\psi}} \int_{T_0}^{t} \chi^2(t,s)\, a(s)\, w(s)\, ds, \quad t \geq t^*. \tag{3.10}$$

Sa druge strane, kako je primenom parcijalne integracije i prema uslovu (H_{10})

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{t} \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\, a(s)w'(s)\, ds &= -\int_{T_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\, a(s)w'(s)\, ds \\
&= w(T_0)a(T_0)\frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0) + \int_{T_0}^{t} w(s)\frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big)\, ds \\
&\geq w(T_0)a(T_0)\frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0) + m\int_{T_0}^{t} \chi^2(t,s)a(s)w(s)\, ds,
\end{aligned}$$

to se iz (3.10) dobija da je za svako $t \geq t^*$

$$\Big(1 - \frac{R}{m\, L_{f,\psi}}\Big)\int_{T_0}^{t} \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}\, a(s)w'(s)\, ds \leq -\frac{R}{m\, L_{f,\psi}} w(T_0)a(T_0)\frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0).$$

Zbog toga, iz (3.8) imamo da je

$$\Big(1 - \frac{R}{m\, L_{f,\psi}}\Big)\int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \leq -\frac{R^2}{m\, L_{f,\psi}} w(T_0)a(T_0)\frac{\partial H}{\partial s}(t,T_0), \quad t \geq t^*.$$

Odavde uzevši u obzir da je $\frac{R}{m\, L_{f,\psi}} < 1$, prema uslovu (H_6) koji zadovoljava funkcija $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$, zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds < \infty,$$

što je u suprotnosti sa (3.2). Ovim smo pokazali da važi (3.7), tako da možemo uočiti niz tačaka $(t_\nu)_{\nu\in N}$ iz intervala $[T_0,\infty)$, takav da je $\lim_{\nu\to\infty} t_\nu = \infty$ i

$$\int_{T_0}^{t_\nu} H(t_\nu,s)\, \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds > R\int_{T_0}^{t_\nu} \chi(t_\nu,s)\sqrt{H(t_\nu,s)}\, a(s)w'(s)\, ds, \quad \nu \in N.$$

Tada, iz (3.6) sledi da je

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{t_\nu} H(t_\nu,s)q(s)\, ds &= -\int_{T_0}^{t_\nu} H(t_\nu,s)\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \\
&\quad - H(t_\nu,T_0)a(T_0)w'(T_0) + \int_{T_0}^{t_\nu} \chi(t_\nu,s)\sqrt{H(t_\nu,s)}\, a(s)w'(s)\, ds \\
&< -H(t_\nu,T_0)a(T_0)w'(T_0) + \Big(\frac{1}{R} - 1\Big)\int_{T_0}^{t_\nu} H(t_\nu,s)\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Kako je $R > 1$, iz prethodne nejednakosti i (3.2) zaključujemo da je

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{H(t_\nu, T_0)} \int_{T_0}^{t_\nu} H(t_\nu, s) q(s)\, ds = -\infty,$$

što pokazuje da je

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t, s) q(s)\, ds = -\infty. \tag{3.12}$$

Konačno, za svako $t \geq T_0$, dobija se da je

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} H(t,s) q(s)\, ds &\leq \int_{t_0}^{T_0} H(t,s) |q(s)|\, ds + \int_{T_0}^{t} H(t,s) q(s)\, ds \\ &\leq H(t, t_0) \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|\, ds + \int_{T_0}^{t} H(t,s) q(s)\, ds. \end{aligned}$$

Onda, kako je $H(t, T_0) \leq H(t, t_0)$, iz (3.12) sledi da je

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^{t} H(t, s) q(s)\, ds = -\infty,$$

što je u suprotnosti sa (C_1). Ovim smo pokazali da (3.4) zaista važi. □

Lema 3.3.3. *Ako je zadovoljen uslov*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} < \infty, \tag{C_2}$$

i za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ superlinearne jednačine (E) važi (3.4)*, tada je*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0. \tag{3.13}$$

Dokaz. Uočimo proizvoljnu konstantu $\varepsilon > 0$. Prema (3.4) postoji $T_1 \geq T_0$ takvo da je

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \leq \frac{\varepsilon}{4\,M}, \tag{3.14}$$

gde je

$$M = \sup_{t\geq T_0} \frac{1}{t} \int_{T_0}^{t} \frac{ds}{a(s)}.$$

Primenom Švarcove nejednakosti, za svako $t \geq T_1$ je

$$w(t) - w(T_1) \leq \left| \int_{T_1}^{t} w'(s)\, ds \right| \leq \left[\int_{T_1}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \right]^{1/2} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s)) a(s)}\, ds \right]^{1/2},$$

tako da prema (3.14) nalazimo da je

$$w(t) \leq w(T_1) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{M}} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s)) a(s)}\, ds \right]^{1/2} \quad \text{za} \quad t \geq T_1. \tag{3.15}$$

Ako je

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds < \infty$$

iz (3.15) zaključujemo da je w ograničena funkcija na $[T_1, \infty)$, pa prema tome (3.13) važi. Zato pretpostavimo da je

$$\int_{T_1}^{\infty} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds = \infty$$

U tom slučaju, postoji $T_2 > T_1$ takvo da je

$$w(T_1) \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{M}} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds \right]^{1/2} \quad \text{za} \quad t \ge T_2,$$

tako da je iz (3.15)

$$w(t) \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f'(x(s))a(s)}\, ds \right]^{1/2} \quad \text{za} \quad t \ge T_2. \tag{3.16}$$

Uslov (F_2) garantuje da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))} w(t) = \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))} \Lambda(x(t)) \ge 1 \quad \text{za} \quad t \ge T_1.$$

Tada iz (3.16) sledi da je

$$w(t) \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{1/2} \quad \text{za} \quad t \ge T_2 \tag{3.17}$$

ili

$$\frac{w(t)}{a(t)} \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{-\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}\, a(t)} \quad \text{za} \quad t \ge T_2.$$

Integracijom prethodne nejednakosti od T_2 do t, $t \ge T_2$ dobija se

$$2 \left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M}} \int_{T_2}^{t} \frac{ds}{a(s)} < \sqrt{\varepsilon M}\, t.$$

Izabravši da je

$$T_3 = \max\Big\{ T_2, \frac{2}{\sqrt{\varepsilon M}} \left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \Big\},$$

za svako $t \ge T_3$ je

$$\left[\int_{T_1}^{t} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{\sqrt{\varepsilon M}}{2} t + \left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{w(s)}{a(s)}\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon M}}{2} t + \frac{\sqrt{\varepsilon M}}{2} T_3 \le \sqrt{\varepsilon M}\, t.$$

Sada iz (3.17) dobijamo da je

$$w(t) < \varepsilon\, t \quad \text{za svako} \quad t \ge T_3,$$

što zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ pokazaje da (3.13) zaista važi. $\square$

Kao što je rečeno u Poglavlju 1.3. (kriterijum (VIII)) uopštena diferencijalna jednačina Emden–Fowlera je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi

$$L_f = \min\left\{ \inf_{x>0} f'(x) \int_x^{\infty} \frac{du}{f(u)}\, ,\, \inf_{x<0} f'(x) \int_x^{-\infty} \frac{du}{f(u)} \right\} > 1, \tag{3.18}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds \text{ ne postoji u } \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} q(s)\, ds > -\infty \text{ za neki prirodan broj } n \geq 1. \tag{3.20}$$

Narednom teoremom ćemo poboljšati taj rezultat i uopštiti ga na jednačinu (E), pod pretpostavkom da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslov (F_2).

Teorema 3.3.1. *Superlinearna jednačina (E) je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi (C_2),*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds \quad \textit{ne postoji kao realan broj,} \tag{C_3}$$

i za funkciju $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$, za koju postoji konstanta $m > 1/L_{f,\psi}$ takva da je zadovoljeno (H_{10}), važi uslov (C_1).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$. Tada, postoji $T_0 \geq t_0$ takvo da je $x(t) \neq 0$ na $[T_0, \infty)$. Prema Lemi 3.3.2. važi (3.4), a onda prema Lemi 3.3.3 važi (3.13).

Iz (3.5), za svako $t \geq T_0$ dobija se da je

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} q(s)\, ds &= \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds + \int_{T_0}^{t} q(s)\, ds \\ &= \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds + a(t)w'(t) - a(T_0)w'(T_0) - \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds. \end{aligned}$$

odnosno

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds \leq w(t) + C_2 + C_1(t-T_0) - \int_{T_0}^{t} \int_{T_0}^{s} \frac{f'(x(\tau))}{\psi(x(\tau))}\, a(\tau)\, [w'(\tau)]^2\, d\tau\, ds,$$

gde je

$$C_1 = \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds - a(T_0)w'(T_0),\ \ C_2 = \int_{t_0}^{T_0} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds - w(T_0).$$

Prema tome, iz (3.13) sledi da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds = C_2 - \int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds,$$

što je u suprotnosti sa (C_3). □

Napomena 3.3.1. Za $a(t) \equiv 1$, $\psi(x) \equiv 1$ uslovi (F_2) i (C_3) se svode na uslove (3.18) i (3.19). Funkcija $H(t,s) = (t-s)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ima svojstvo $\widehat{\mathbf{H}}$. Sem toga, za nju postoji konstanta

$$m = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}(t,s)}{\left(\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\right)^2}\, H(t,s) = \frac{n-2}{n-1} < 1 < \frac{1}{L_{f,\psi}},$$

tako da važi (H_{10}). Prema tome uslov (C_1) povlači uslov (3.20), odnosno kriterijum (VIII) je direktna posledica Teoreme 3.3.1. Sa druge strane, Teorema 3.3.1. predstavlja poboljšanje kriterijuma (VIII), jer možemo zaključiti da je uopštena jednačina Emden–Fowlera oscilatorna ako važe uslovi (3.18), (3.19) i za funkciju $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$, za koju postoji konstanta $m > 1/L_f$ takva da je zadovoljeno (H_{10}), važi uslov (C_1).

Uslov

$$(C_4) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\, ds = \infty,$$

očigledno povlači uslov (C_3). Dakle, kao posledicu Teoreme 3.3.1. imamo sledeći rezultat.

Posledica 3.3.1. *Superlinearna jednačina* (E) *je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi* (F_2), (C_2), (C_4) *i za funkciju* $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$, *za koju postoji konstanta* $m > 1/L_{f,\psi}$ *takva da je zadovoljeno* (H_{10}), *važi uslov* (C_1).

U Poglavlju 3.1. primenom Švarcove nejednakosti je pokazano (v. str. 69) da uslov (C_4), uz pretpostavku da važi (C_2), povlači uslov

$$(C_5) \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \left[\int_{t_0}^{s} q(\tau)\, d\tau\right]^2 ds = \infty.$$

U Teoremi 3.1.5. je takođe pokazano da su uslovi (C_2), (C_5) i (C_1) za $H \in \mathcal{H}_a^*(\mathcal{D})$ dovoljni za oscilatornost jednačine (E) sa sublinearnim uslovom

$$\min\left\{\inf_{x>0} \frac{f'(x)}{\psi(x)} \int_{0+}^{x} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du,\ \inf_{x<0} \frac{f'(x)}{\psi(x)} \int_{0-}^{-x} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du\right\} > 0.$$

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje kada ova tri uslova povlače oscilatornost superlinearne jednačine (E).

Teorema 3.3.2. *Superlinearna jednačina* (E) *je oscilatorna ako su zadovoljeni uslovi* (F_2), (C_2), (C_5) *i za funkciju* $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ *za koju postoji konstanta* $m > 1/L_{f,\psi}$ *takva da je zadovoljeno* (H_{10}), *važi uslov* (C_1).

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$, takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T_0 \geq t_0$. Prema Lemi 3.3.2. važi (3.4), a onda prema Lemi 3.3.3 važi (3.13).

Iz (3.5) dobija se da je

$$\int_{t_0}^{t} q(s)\, ds = K_1 + a(t)w'(t) - \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0,$$

gde je

$$K_1 = \int_{t_0}^{T_0} q(s)\, ds - a(T_0)w'(T_0).$$

Tada, ako definišemo sa

$$K_2 = 3K_1^2 + 3\left[\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\, a(s)\, [w'(s)]^2\, ds\right]^2,$$

imamo da je

$$\begin{aligned}\left[\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds\right]^2 &\leq 3K_1^2 + 3\big[a(t)w'(t)\big]^2 + 3\left[\int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds\right]^2 \\ &\leq K_2 + 3\big[a(t)w'(t)\big]^2, \quad t \geq T_0.\end{aligned}$$

Označimo sa

$$Q(t) = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\,d\tau, \;\; t \geq t_0 \;\; \text{i} \;\; \sigma = \int_{t_0}^{T_0} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\,ds.$$

Kako uslov (F_2) garantuje da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\,w(t) \geq 1, \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0,$$

imamo da je za svako $t \geq T_0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\,ds &= \frac{\sigma}{t} + \frac{1}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\,ds \\ &\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{K_2}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{t}\int_{T_0}^{t} a(s)\big[w'(s)\big]^2\,ds \\ &\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{K_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{t}\int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,w(s)\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds \\ &\leq \frac{\sigma}{t} + \frac{K_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{3}{t}\Big[\max_{T_0\leq s\leq t} w(s)\Big] \int_{T_0}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\,ds \leq \frac{\sigma}{t} + \frac{K_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{K_4}{t}\max_{T_0\leq s\leq t} w(s) \qquad \text{za} \qquad t \geq T_0, \tag{3.21}$$

gde je

$$K_4 = 3\int_{T_0}^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,a(s)\,[w'(s)]^2\,ds > 0.$$

Na osnovu (3.13), postoji $T^* \geq T_0$ takvo da je $w(t) \leq t$ za svako $t \geq T^*$, pa je

$$\max_{T_0\leq s\leq t} w(s) \leq \max_{T_0\leq s\leq T^*} w(s) + t \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0.$$

Na taj način, (3.21) daje

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{Q^2(s)}{a(s)}\,ds \leq \frac{\sigma}{t} + \frac{K_2}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} + \frac{K_4}{t}\Big[\max_{T_0\leq s\leq T^*} w(s) + t\Big], \quad t \geq T_0.$$

Prema tome, uzevši u obzir uslov (C_2) zaključujemo da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)}\left[\int_{t_0}^{s} q(\tau)\,d\tau\right]^2 ds \leq K_4 + K_2 \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)} < \infty,$$

što je u suprotnosti sa (C_5). $\square$

Napomena 3.3.2. Iz Teoreme 3.3.2. za $a(t) \equiv 1, \psi(x) \equiv 1$ i $H(t,s) = (t-s)^n$, $n \geq 1$ prirodan broj, dobija se kriterijum (IX) Poglavlja 1.3., odnosno prethodno pokazana teorema je uopštenje i poboljšanje tog kriterijuma.

Primetimo da ako za funkciju $H \in \widehat{\mathcal{H}}(\mathcal{D})$ postoji konstanta $m > 1/L_{f,\psi}$ takva da važi (H_{10}) onda ona zadovoljava uslov

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(a(s)\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\Big) \geq 0 \quad \text{za} \quad (t,s) \in \mathcal{D},$$

odnosno pripada klasi $\mathcal{H}_a^*(\mathcal{D})$. Prema tome, u slučaju superlinearne jednačine (E) klasa težinskih funkcija za koju je uslov (C_1), zajedno sa uslovima (C_2), (C_5), dovoljan za oscilatornost je uža u odnosu na odgovarajuću klasu težinskih funkcija u slučaju sublinearne jednačine.

Kao ilustraciju navodimo sledeći primer:

Primer 3.3.1. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu (E) za

$$a(t) = \sqrt{t}, \quad q(t) = \lambda t^{\lambda-1}(2-\cos t) + t^\lambda \sin t.$$

Pre svega uočimo da je uslov (C_2) ispunjen. Kao u Primeru 3.1.5. može se pokazati da je

$$\int_{t_0}^t q(s)\,ds \geq t^\lambda - k_0 \quad \text{za svako} \quad t \geq t_0,$$

tako da je

$$\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \frac{1}{a(s)}\left[\int_{t_0}^s q(\tau)\,d\tau\right]^2 ds \geq \frac{t^{2\lambda-\mu}}{2\lambda-\mu+1} - \frac{2k_0}{\lambda-\mu+1}t^{\lambda-\mu} + \frac{k_0^2}{1-\mu}t^{-\mu} + \frac{C_1}{t}, \quad \mu = \frac{1}{2}$$

gde je

$$C_1 = \frac{2k_0}{\lambda-\mu+1}t_0^{\lambda-\mu+1} - \frac{t_0^{2\lambda-\mu+1}}{2\lambda-\mu+1} - \frac{k_0^2}{1-\mu}t_0^{-\mu+1}.$$

Dakle, uslov (C_5) je zadovoljen za $\lambda > 1/2$.

U Primeru 1.4.2. je pokazano da funkcija $H(t,s) = \big(\sqrt{t}-\sqrt{s}\big)^2$, $t \geq s \geq t_0$, $(A(t) = 2\sqrt{t},\ A'(t) = 1/\sqrt{t},\ \gamma = 2)$ ima svojstvo $\mathbf{H}^\circ_{\mathbf{a}}$. Štaviše, uslov (H_{10}) je zadovoljen za $m \leq 1/2$. Kako mora biti $m > 1/L_{f,\psi}$, funkcije f i ψ moraju biti takve da određuju konstantu $L_{f,\psi} > 2$. Pored toga, imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{t_0}^t \big(\sqrt{t}-\sqrt{s}\big)^2 q(s)\,ds &= \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \big(\sqrt{t}-\sqrt{s}\big)^2\, d\left(\int_{t_0}^s q(u)\,du\right)\\
&= \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \Big(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\Big)\left(\int_{t_0}^s q(u)\,du\right) ds\\
&\geq \frac{1}{t}\int_{t_0}^t \Big(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\Big)(s^\lambda - k_0)\,ds\\
&\geq \frac{1}{(\lambda+1)(2\lambda+1)}t_0^\lambda + \frac{L_1}{t} + \frac{L_2}{\sqrt{t}} - k_0,
\end{aligned}$$

gde je

$$L_1 = \frac{t_0^{\lambda+1}}{\lambda+1} - k_0 t_0, \quad L_2 = 2k_0\sqrt{t_0} - \frac{2t_0^{\lambda+1/2}}{2\lambda+1}.$$

Prema tome,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} H(t,s)q(s)\,ds > -\infty.$$

Svi uslovi Teoreme 3.3.2. su ispunjeni tako da je posmatrana superlinearna jednačina oscilatorna ako je $L_{f,\psi} > 2$ i $\lambda > 1/2$. Konkretno, ako je npr. $\psi(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$ i $f(x) = |x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x$, $\alpha > 1$ jednačina je oscilatorna za $\alpha < 4m+2$. $\triangle$

$\boxed{\text{II}}$ Kao što je rečeno u Poglavlju 1.3.1. superlinearna jednačina Emden–Fowlera $x''(t) + q(t)|x(t)|^{\lambda}\operatorname{sgn} x(t) = 0$, $\lambda > 1$ je oscilatorna ako važe sledeća dva uslova

$$(C_6)\qquad \liminf_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds > -\infty.$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(\tau)\,d\tau\,ds = \infty.$$

U ovom delu videćemo pod kojim uslovima za funkcije f, ψ i a ova dva uslova povlače oscilatornost superlinearne jednačine (E).

Pretpostavićemo da su funkcije f i ψ takve da je

$$(F_3)\qquad x\psi'(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0,$$

$$(F_4)\qquad \int^{\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du < \infty \quad \text{i} \quad \int^{-\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du < \infty,$$

$$(F_5)\qquad P_{f,\psi} = \min\left\{\inf_{x>0}\frac{\left[\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2}{\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\psi(u)}{f(u)}\,du},\ \inf_{x<0}\frac{\left[\displaystyle\int_x^{-\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2}{\displaystyle\int_x^{-\infty}\frac{\psi(u)}{f(u)}\,du}\right\} > 0.$$

Za izbor funkcija f i ψ sa $(f\psi)$ važi (F_3), uslov (F_4) je zadovoljen ako je $\lambda > 2m+1$, pri čemu je konstanta $P_{f,\psi} = \frac{4\lambda}{\lambda-1-2m}$.

Za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (E) na intervalu $[T,\infty)$, definišimo funkciju w sa

$$(3.22)\qquad w(t) = \varrho(t)\frac{a(t)\psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))}, \quad t \geq T$$

i pokažimo najpre dva pomoćna rezultata.

Lema 3.3.4. *Neka je ϱ pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na $[t_0,\infty)$ takva da važi*

$$(R_1)\qquad \varrho'(t) \geq 0, \quad \big(\varrho'(t)a(t)\big)' \leq 0 \quad \textit{za svako} \quad t \geq t_0.$$

Tada za proizvoljno neoscilatorno rešenje $x(t)$ jednačine (E) na intervalu $[T,\infty)$, postoji konstanta $P > 0$ takva da je

$$(3.23)\qquad \int_T^t \varrho(s)q(s)\,ds \leq -w(t) + P - \int_T^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds \quad \textit{za} \quad t \geq T.$$

Dokaz. Pre svega primetimo da se diferenciranjem (3.22) i koršćenjem jednačine (E) dobija da je za svako $t \geq T$

$$\varrho(t)q(t) = -w'(t) + \varrho'(t)\frac{a(t)\psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} - \frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\,\frac{w^2(t)}{\varrho(t)a(t)}, \tag{3.24}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\int_T^t \varrho(s)q(s)\,ds \;&=\; -w(t) + w(T) + \int_T^t \varrho'(s)\frac{a(s)\psi(x(s))x'(s)}{f(x(s))}\,ds \\ &\quad - \int_T^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds \quad \text{za svako} \quad t \geq T.\end{aligned}$$

Primenom druge teoreme o srednjoj vrednosti integrala, zaključujemo da za ma koje fiksirano $s \geq T$, postoji $\xi \in [T, s]$ takvo da je

$$\int_T^s \varrho'(u)\frac{a(u)\psi(x(u))x'(u)}{f(x(u))}\,du = \varrho'(T)a(T)\int_T^\xi \frac{\psi(x(u))}{f(x(u))}\,x'(u)\,du = \varrho'(T)a(T)\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{\psi(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau$$

i kako je $\varrho'(T)a(T) \geq 0$ i

$$\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{\psi(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau < \begin{cases} 0 & , \text{ ako je } x(\xi) < x(T) \\ \displaystyle\int_{x(T)}^{\infty} \frac{\psi(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau & , \text{ ako je } x(\xi) \geq x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x > 0,$$

$$\int_{x(T)}^{x(\xi)} \frac{\psi(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau < \begin{cases} 0 & , \text{ ako je } x(\xi) > x(T) \\ \displaystyle\int_{x(T)}^{-\infty} \frac{\psi(\tau)}{f(\tau)}\,d\tau & , \text{ ako je } x(\xi) \leq x(T) \end{cases} \qquad \text{za} \quad x < 0,$$

imamo da je

$$\int_T^s \varrho'(u)\frac{a(u)\psi(x(u))x'(u)}{f(x(u))}\,du \leq \varrho'(T)a(T)\Lambda[x(T)] = P_1 \quad \text{za svako} \quad t \geq T.$$

Prema tome, ako označimo sa $P = w(T) + P_1 > 0$, zaključujemo da je

$$\int_T^t \varrho(s)q(s)\,ds \leq -w(t) + P - \int_T^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds \quad \text{za} \quad t \geq T$$

što je i trebalo pokazati. □

Lema 3.3.5. *Pretpostavimo da važe sledeći uslovi*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} = \infty. \tag{C_7}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t_0}^t \varrho(s)q(s)\,ds > -\infty. \tag{C_8}$$

Ako je $x(t)$ neoscilatorno rešenje jednačine (E), koje nije eventualno konstantna funkcija, onda važi

$$\int^{\infty} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds < \infty. \tag{3.25}$$

Dokaz. Neka je $x(t)$ proizvoljno neoscilatorno rešenje jednačine (E) na $[T,\infty)$, $T \geq t_0$. Za funkciju $w(t)$ definisanu sa (3.22) prema Lemi 3.3.4. važi (3.23). Prema uslovu (C_8) postoji konstanta Θ takva da je

$$-w(t) \geq \Theta + \int_T^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds \quad \text{za svako} \quad t \geq T. \tag{3.26}$$

Ako pretpostavimo da (3.25) ne važi, postoji $T^* \geq T$ takvo da je

$$\theta \equiv \Theta + \int_T^{T^*} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds > 0.$$

Tada iz (3.26) zaključujemo da je w negativna funkcija na $[T^*,\infty)$. Ako pomnožimo (3.26) sa

$$-\frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\left[\theta + \int_{T^*}^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds\right]^{-1} \geq 0 \quad \text{za} \quad t \geq T^*$$

imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}\,\frac{w^2(t)}{\varrho(t)a(t)}\left[\theta + \int_{T^*}^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds\right]^{-1} \quad &\geq \quad -\frac{f'(x(t))}{f(x(t))}\,x'(t) \\ &= \quad -\frac{f'(x(t))}{|f(x(t))|}\,x'(t)\operatorname{sgn} f(x(t)),\ \ t \geq T^*.\end{aligned}$$

Dakle, za svako $t \geq T^*$ je

$$\log \frac{\theta + \int_{T^*}^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds}{\theta} \geq \log \frac{|f(x(T^*))|}{|f(x(t))|},$$

odnosno,

$$\theta + \int_{T^*}^t \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))}\,\frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds \geq \theta\,\frac{|f(x(T^*))|}{|f(x(t))|} \quad \text{za} \quad t \geq T^*.$$

Sada, (3.26) daje

$$-w(t) \geq \theta\,\frac{|f(x(T^*))|}{|f(x(t))|}, \quad t \geq T^*. \tag{3.27}$$

Dalje, primetimo da iz činjenice da je $w(t) < 0$ na $[T^*,\infty)$ i uslova da je $xf(x) > 0$ za $x \neq 0$, zaključujemo da je $x(t)x'(t) < 0$ za svako $t \geq T^*$. Prema tome, kako je $x(t)$ pozitivna, opadajuća funkcija ili negativna, rastuća funkcija na $[T^*,\infty)$ i ψ rastuća funkcija na $(0,\infty)$ i opadajuća na $(-\infty,0)$, sledi da je $0 < \psi(x(t)) \leq \psi(x(T^*))$ za $t \geq T^*$. Dakle, (3.27) povlači

$$-\varrho(t)a(t)\frac{x'(t)}{f(x(t))} \geq \frac{\theta^*}{|f(x(t))|}, \quad t \geq T^*,$$

gde je $\theta^* = \theta\dfrac{|f(x(T^*))|}{\psi(x(T^*))} > 0$. Ako je $x(t) < 0$, $x'(t) > 0$, $t \geq T^*$, biće

$$x'(t) \geq \frac{\theta^*}{\varrho(t)a(t)} \implies x(t) \geq x(T^*) + \theta^* \int_{T^*}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)},$$

što, uzevši u obzir uslov (C_7), dovodi do kontradikcije da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. Sa druge strane, ako je $x(t) > 0$, $x'(t) < 0$, $t \geq T^*$, imamo da je

$$x'(t) \leq -\frac{\theta^*}{\varrho(t)a(t)} \implies x(t) \leq x(T^*) - \theta^* \int_{T^*}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)},$$

što opet dovodi do kontradikcije da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$. Dobijene kontradikcije pokazuju da zaista važi (3.25). □

Sledeći rezultat generalizuje kriterijum (VI) Poglavlja 1.3. na jednačinu (E).

Teorema 3.3.3. *Neka je ϱ pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na $[t_0,\infty)$, takva da važi (R_1). Superlinearna jednačina (E) je oscilatorna ako važe uslovi (C_7), (C_8) i*

$$(C_9) \qquad \limsup_{t\to\infty} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \right)^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^{s} \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds = \infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo da jednačina (E) ima neoscilatorno rešenje $x(t)$ takvo da je $x(t) \neq 0$ za svako $t \geq T$. Kako na osnovu Leme 3.3.5. važi (3.25), postoji pozitivna konstanta N takva da je

$$(3.28) \qquad \int_{T}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))} \frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\, ds \leq N \quad \text{za svako} \quad t \geq T.$$

Za $t \geq T$, primenom Švarcove nejednakosti dobija se

$$\left| \int_{T}^{t} \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\, ds \right|^2 \leq \left(\int_{T}^{t} \frac{f'(x(s))}{\psi(x(s))} \frac{w^2(s)}{\varrho(s)a(s)}\, ds \right) \left(\int_{T}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \right),$$

tako da je iz (3.28)

$$(3.29) \qquad \left| \int_{T}^{t} \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\, ds \right|^2 \leq N \left(\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \right) \quad \text{za} \quad t \geq T.$$

Razlikovaćemo dva slučaja, kada je $x(t)$ pozitivno ili negativno rešenje.
(i) $x(t) > 0$ za svako $t \geq T$: Prema uslovu (F_4) postoji pozitivna konstanta M takva da je

$$(3.30) \qquad \int_{x(t)}^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du \leq M \left[\int_{x(t)}^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du \right]^2, \quad t \geq T.$$

Ako označimo sa

$$K_1 = \int_{x(T)}^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du, \ R_1 = \int_{x(T)}^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du$$

koristeći (3.30), za svako $t \geq T$ imamo da je

$$\begin{aligned} \left| \int_{T}^{t} \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\, ds \right| &= \left| \int_{T}^{t} \frac{\psi(x(s))}{f(x(s))} x'(s)\, ds \right| = \left| \int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du \right| = \left| K_1 - \int_{x(t)}^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du \right| \\ &\leq K_1 + \int_{x(t)}^{\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\, du \leq K_1 + M \left[\int_{x(t)}^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du \right]^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= K_1 + M\left[R_1 - \int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2 \\
&\le K_1 + M\left[R_1 + \left|\int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right|\right]^2 \\
&= K_1 + M\left[R_1 + \left|\int_{T}^{t} \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\,ds\right|\right]^2
\end{aligned}
$$

(ii) $x(t) < 0$ za svako $t \ge T$: Kako prema uslovu (F_4) postoji pozitivna konstanta M takva da je

$$
\int_{x(t)}^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du \le M\left[\int_{x(t)}^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2, \quad t \ge T, \tag{3.31}
$$

ako označimo sa

$$
K_2 = \int_{x(T)}^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du,\ R_2 = \int_{x(T)}^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du,
$$

za svako $t \ge T$ dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
\left|\int_T^t \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds\right| &= \left|\int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du\right| = \left|K_2 - \int_{x(t)}^{-\infty} \frac{\psi(u)}{f(u)}\,du\right| \\
&\le K_2 + M\left[\int_{x(t)}^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2 \\
&= K_2 + M\left[R_2 + \int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right]^2 \\
&\le K_2 + M\left[R_2 + \left|\int_T^t \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\,ds\right|\right]^2
\end{aligned}
$$

Dakle, bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da važi

$$
\left|\int_T^t \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds\right| \le K + M\left[R + \left|\int_T^t \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\,ds\right|\right]^2, \quad t \ge T,
$$

odakle prema (3.29), zaključujemo da je za $t \ge T$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_T^t \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\,ds\right| &\le K + M\left[R + \left(N\int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)}\right)^{1/2}\right]^2 \\
&\le K + 2MR^2 + 2MN^2\int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)}
\end{aligned}
$$

Prema uslovu (C_7) postoji $T_0 \ge t_0$ takvo da je

$$
\int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \ge 1 \quad \text{za svako} \quad t \ge T_0, \tag{3.32}
$$

tako da je

$$\left| \int_T^t \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\, ds \right| \le C \int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \qquad \text{za svako} \quad t \ge T^* = \max\{T_0, T\}, \tag{3.33}$$

gde je $C = K + 2M(R^2 + N^2)$.

Sada, kako prema Lemi 3.3.4. važi (3.23), sledi da postoji $P > 0$ tako da je

$$\int_{t_0}^t \varrho(s)q(s)\, ds = \int_{t_0}^T \varrho(s)q(s)\, ds + \int_T^t \varrho(s)q(s)\, ds \le \int_{t_0}^T \varrho(s)q(s)\, ds - w(t) + P, \quad t \ge T.$$

Uzevši u obzir (3.33), dobijamo da je za $t \ge T^*$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \\
&\quad = \int_{t_0}^T \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds + \int_T^t \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \\
&\quad \le \left| \int_{t_0}^T \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_T^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \right| - \int_T^t \frac{w(s)}{\varrho(s)a(s)}\, ds \\
&\quad\quad + \left(\left| \int_{t_0}^T \varrho(s)q(s)\, ds \right| + P \right) \int_T^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} \\
&\quad \le \left| \int_{t_0}^T \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_T^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \right| + P^* \int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)},
\end{aligned}$$

gde je $P^* = C + \left| \int_{t_0}^T \varrho(s)q(s)\, ds \right| + P$. Dakle, za svako $t \ge T^*$, zbog (3.32) je

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \le \widetilde{P} \int_{t_0}^t \frac{ds}{\varrho(s)a(s)}$$

gde je $\widetilde{P} = P^* + \left| \int_{t_0}^T \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_T^s \varrho(\tau)q(\tau)\, d\tau\, ds \right|$, što je u suprotnosti sa uslovom (C_9). □

Uzevši za $\varrho(t) \equiv 1$ imamo sledeću posledicu, koja predstavlja proširenje kriterijuma (I) na jednačina (E).

Posledica 3.3.2. *Superlinearna jednačina (E) je oscilatorna ako važe uslovi (C_6)*

$$\int_{t_0}^\infty \frac{ds}{a(s)} = \infty, \tag{C_{10}}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \left(\int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)} \right)^{-1} \int_{t_0}^t \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^s q(\tau)\, d\tau\, ds = \infty. \tag{C_{11}}$$

U narednom primeru navodimo jednačinu na koju je moguće primeniti Teoremu 3.3.3., ali nije moguće utvrditi njenu oscilatornost primenom Posledice 3.3.2. Time zapravo opravdamo uvođenje težinske funkcije ϱ.

Primer 3.3.2. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu (E) za

$$a(t) = \frac{1}{t^2}, \quad q(t) = -\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{2+\cos t}{2t\sqrt{t}}, \quad t \geq t_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Uzevši da je $\varrho(t) = t, t \geq t_0$, uslov (C_7) je zadovoljen. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \varrho(s)q(s)\,ds &= \int_{\pi/2}^{t} \Big[-\sqrt{s}\sin s + \frac{2+\cos s}{2\sqrt{s}}\Big]\,ds \\
&= \int_{\pi/2}^{t} d\big(\sqrt{s}(2+\cos s)\big) \\
&= \sqrt{t}(2+\cos t) - \sqrt{2\pi} \geq \sqrt{t} - \sqrt{2\pi},
\end{aligned}$$

tako da je i uslov (C_8) ispunjen. Pored toga,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^{s} \varrho(\tau)q(\tau)\,d\tau\,ds \geq \int_{\pi/2}^{t} \big(\sqrt{s} - \sqrt{2\pi}\big)s\,ds = \frac{2}{5}\,t^2\sqrt{t} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t^2 + \frac{3}{40}\,\pi^2\sqrt{2\pi}$$

i kako je

$$\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)} = \frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} \leq \frac{t^2}{2},$$

to je

$$\bigg(\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{\varrho(s)a(s)}\bigg)^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varrho(s)a(s)} \int_{t_0}^{s} \varrho(\tau)q(\tau)\,d\tau\,ds \geq \frac{2}{t^2}\Big(\frac{2}{5}t^2\sqrt{t} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}t^2 + \frac{3}{20}\pi^2\sqrt{2\pi}\Big).$$

Dakle, zaključujemo da je uslov (C_9) zadovoljen. Prema tome, kada su zadovoljeni uslovi (F_3), (F_4) i (F_5) posmatrana diferencijalna jednačine je oscilatorna prema Teoremi 3.3.3.

Sa druge strane, Posledica 3.3.2. ne može se primeniti za posmatranu jednačinu. Zaista, za $t \geq t_0$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds &= \int_{\pi/2}^{t} \Big[-\frac{\sin s}{\sqrt{s}} + \frac{2+\cos s}{2s\sqrt{s}}\Big]\,ds \\
&\leq \int_{\pi/2}^{t} \Big[-\frac{\sin s}{\sqrt{s}} + \frac{3}{2s\sqrt{s}}\Big]\,ds = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \int_{\pi/2}^{t} \Big[\frac{\cos s}{2s\sqrt{s}} + \frac{3}{2s\sqrt{s}}\Big]\,ds \\
&\leq \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \int_{\pi/2}^{t} \frac{2}{s\sqrt{s}}\,ds = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} - \frac{4}{\sqrt{t}} + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq -\frac{3}{\sqrt{t}} + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Tako, za svako $t \geq t_0$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\,d\tau\,ds \leq \int_{t_0}^{t} s^2\Big(-\frac{3}{\sqrt{s}} + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)\,ds = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,t^3 - \frac{6}{5}\,t^2\sqrt{t} - \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{60},$$

odakle je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^3} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)} \int_{t_0}^{s} q(\tau)\,d\tau\,ds < \infty,$$

odnosno uslov (C_{11}) nije zadovoljen. $\triangle$

$\boxed{\text{III}}$ Uopštena polulinearna diferencijalna jednačina čiju smo oscilatornost razmatrali u Poglavlju 2.2. se očigledno za $\alpha = 1$ svodi na jednačinu (E). Prema tome svi kriterijumi oscilatornosti pokazani u Poglavlju 2.2. za $\alpha = 1$ mogu se primeniti i na jednačinu (E). Specijalno, pod pretpostavkom da funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3), (F_4) i

$$(F_6) \qquad \min\left\{\inf_{x>0}\sqrt{\frac{f'(x)}{\psi(x)}}\int_x^{\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du,\ \inf_{x<0}\sqrt{\frac{f'(x)}{\psi(x)}}\int_x^{-\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du\right\} > 0,$$

kao direktnu posledicu Teoreme 2.2.8. imamo sledeći rezultat:

Teorema 3.3.4. *Superlinearna diferencijalna jednačina (E) je oscilatorna ako koeficijenti a i q zadovoljavaju uslove (C_6), (C_{10}) i za funkciju $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ važe uslovi*

$$(C_{12}) \qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t q(s)H(t,s)\,ds = \infty,$$

$$(C_{13}) \qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t a(s)\left(\int_{t_0}^s\frac{du}{a(u)}\right)\frac{h^2(t,s)}{H(t,s)}\,ds < \infty.$$

Ova teorema zapravo predstavlja poboljšanje i proširenje kriterijuma (V) Poglavlja 1.3. na jednačinu (E). Poboljšanje je izvršeno u smislu korišćenja težinske funkcije $H(t,s)$ umesto $(t-s)^n$, $n \geq 1$ prirodan broj. Ako pored ove težinske funkcije uvedemo kao težinsku funkciju neprekidno diferencijabilnu funkciju $\varrho : [t_0,\infty) \to (0,\infty)$ možemo pokazati poboljšanje kriterijuma oscilatornosti iskazanog Teoremom 3.3.4.

U cilju jednostavnijeg označavanja neka je $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)\varrho(s)}$ i $\chi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija određena sa

$$h(t,s) = -\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = \chi(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \quad \text{za svako } (t,s)\in\mathcal{D}.$$

Teorema 3.3.5. *Superlinearna diferencijalna jednačina (E) je oscilatorna ako za pozitivnu, neprekidno diferencijabilnu funkciju $\varrho(t)$ na $[t_0,\infty)$ važe uslovi (R_1), (C_7), (C_8) i za funkciju $H \in \mathcal{H}^+(\mathcal{D})$ važe uslovi*

$$(C_{14}) \qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t H(t,s)\varrho(s)q(s)\,ds = \infty,$$

$$(C_{15}) \qquad \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t \chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds < \infty.$$

Dokaz. Neka je x neoscilatorno rešenje na intervalu $[T,\infty)$, $T \geq t_0$, jednačine (E). Ako $w(t)$ definišemo sa (3.22) važi (3.24).Prema Lemi 3.3.5. važi (3.25), pa postoji konstanta $N > 0$ takva da važi (3.28), odakle se primenom Švarcove nejednakosti dobija da važi (3.29).

Pretpostavićemo da je $x(t)$ pozitivno rešenje, jer postupkom kao u dokazu Teoreme 2.2.8. ili Teoreme 3.3.3. dokaz se može proširiti i za slučaj kada je $x(t)$ negativno rešenje. Prema uslovu (F_6) postoji pozitivna konstanta M, takva da je

$$(3.34) \qquad \sqrt{\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))}}\int_{x(t)}^{\infty}\frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\,du \geq M \quad \text{za} \quad t \geq T.$$

Ako označimo sa

$$K = \int_{x(T)}^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du > 0,$$

biće

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))} &\geq M^2 \left(\int_{x(t)}^{\infty} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du \right)^{-2} = M^2 \left(K - \int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du \right)^{-2} \\
&\geq M^2 \left(K + \left| \int_{x(T)}^{x(t)} \frac{\sqrt{f'(u)\psi(u)}}{f(u)}\, du \right| \right)^{-2} \\
&= M^2 \left(K + \left| \int_{T}^{t} \frac{\sqrt{f'(x(s))\psi(x(s))}}{f(x(s))} x'(s)\, ds \right| \right)^{-2} \\
&\geq M^2 \left(K + N \left(\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{a(s)\varrho(s)} \right)^{1/2} \right)^{-2} = M^2 \left(K + N\sqrt{A(t)} \right)^{-2}
\end{aligned}$$

Prema uslovu (C_7) postoji $T_0 \geq t_0$ tako da je $A(t) \geq 1$ za svako $t \geq T_0$, odnosno

$$K + N\sqrt{A(t)} \leq K\sqrt{A(t)} + N\sqrt{A(t)} = K^* \sqrt{A(t)}, \quad t \geq T_0,\ K^* = K + N.$$

Dakle, postoji pozitivna konstanta C takva da je

$$\frac{f'(x(t))}{\psi(x(t))} \geq \frac{C}{A(t)}, \qquad \text{za svako} \quad t \geq T_0.$$

Sada, (3.24) ima sledeći oblik

$$\varrho(t)q(t) \leq -w'(t) + \varrho'(t)\frac{a(t)\psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} - C\,\frac{w^2(t)}{a(t)\varrho(t)A(t)}, \quad t \geq T_0,$$

odakle se integracijom dobija da je

$$\begin{aligned}
(3.35)\quad \int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho(s)q(s)\, ds &\leq -\int_{T_0}^{t} H(t,s)w'(s)\, ds + \int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho'(s)a(s)\frac{\psi(x(s))x'(s)}{f(x(s))}\, ds \\
&\quad - C\int_{T_0}^{t} H(t,s)\frac{w^2(s)}{a(s)\varrho(s)A(s)}\, ds \\
&= w(T_0)H(t,T_0) - \int_{T_0}^{t} w(s)h(t,s)\, ds \\
&\quad + \int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho'(s)a(s)\frac{\psi(x(s))x'(s)}{f(x(s))}\, ds - C\int_{T_0}^{t} H(t,s)\frac{w^2(s)}{a(s)\varrho(s)A(s)}\, ds.
\end{aligned}$$

Sada, primenom Leme 3.2.2. (f/ψ je superlinearna funkcija, a $\varphi = -a\,\varrho'$ nepozitivna, neopadajuća funkcija) zaključujemo da postoji pozitivna konstanta $L > 0$ takva da je

$$(3.36) \qquad \int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho'(s)a(s)\frac{\psi(x(s))x'(s)}{f(x(s))}\, ds \leq L\, H(t,t_0), \qquad \text{za} \quad t \geq T_0.$$

Sem toga je

$$
\begin{aligned}
(3.37)\qquad & -C\,H(t,s)\frac{w^2(s)}{a(s)\varrho(s)A(s)} - w(s)h(t,s)\\
&= -\left(\sqrt{\frac{C\,H(t,s)}{a(s)\varrho(s)A(s)}}\,w(s) + \frac{h(t,s)}{2\sqrt{H(t,s)}}\sqrt{\frac{a(s)\varrho(s)A(s)}{C}}\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{4\,C}\,\chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\\
&\le \frac{1}{4\,C}\,\chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s), \quad t \ge s \ge t_0.
\end{aligned}
$$

Dakle, iz (3.35), (3.36), (3.37) sledi da je za svako $t \ge T_0$

$$
\begin{aligned}
\int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho(s)q(s)\,ds &\le |w(T_0)|H(t,T_0) + L\,H(t,t_0) + \frac{1}{4\,C}\int_{T_0}^{t}\chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds\\
&\le \big(|w(T_0)| + L\big)H(t,t_0) + \frac{1}{4\,C}\int_{t_0}^{t}\chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} H(t,s)\varrho(s)q(s)\,ds &= \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\varrho(s)q(s)\,ds + \int_{T_0}^{t} H(t,s)\varrho(s)q(s)\,ds\\
&\le \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)\varrho(s)|q(s)|\,ds + \int_{T_0}^{t} q(s)H(t,s)\,ds\\
&\le H(t,t_0)\left(\int_{t_0}^{T_0}\varrho(s)|q(s)|\,ds + |w(T_0)| + L\right) + \frac{1}{4\,C}\int_{t_0}^{t}\chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

što je zajedno sa uslovom (C_{15}) u suprotnosti sa uslovom (C_{14}). □

Napomena 3.3.3. Iz Teoreme 3.3.5. za $a(t) \equiv 1, \psi(x) \equiv 1$ i $H(t,s) = (t-s)^n$, $n \ge 1$ prirodan broj dobija se kriterijum (VII) Poglavlja 1.3.

Da Teorema 3.3.5. zaista predstavlja poboljšanje Teoreme 3.3.4. uverićemo se u narednom primeru.

Primer 3.3.3. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu (E) za

$$
a(t) = t^{1/8}, \quad q(t) = -t^{-1/3}\sin t + \frac{1}{2}\,t^{-4/3}(2+\cos t), \quad t \ge t_0 = \frac{\pi}{2}.
$$

Uzevši da je $\varrho(t) = t^{5/6}, t \ge t_0$, imamo da je

$$
A(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{ds}{\varrho(s)a(s)} = 24\left(t^{1/24} - (\pi/2)^{1/24}\right)
$$

odakle odmah možemo zaključiti da važi uslov (C_7). Pored toga, za $t \ge \pi/2$ dobija se da je

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} s^{5/6}q(s)\,ds &= \int_{\pi/2}^{t}\Big[-\sqrt{s}\sin s + \frac{2+\cos s}{2\sqrt{s}}\Big]\,ds\\
&= \int_{\pi/2}^{t} d\big(\sqrt{s}(2+\cos s)\big) \ge \sqrt{t} - \sqrt{2\pi},
\end{aligned}
$$

tako da je i uslov (C_8) zadovoljen. Dalje, izabraćemo da je $H(t,s) = (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2,\ t \geq s \geq t_0$. Pre svega ovako izabrana funkcija H očigledno je sa svojstvom $\mathbf{H}^+$. Za $t \geq t_0$ je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 \varrho(s)q(s)\,ds &= \int_{t_0}^{t} (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 d\left(\int_{t_0}^{s} \varrho(u)q(u)\,du\right) ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\right) \int_{t_0}^{s} \varrho(u)q(u)\,du\,ds \\
&\geq \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\right) (\sqrt{s}-\sqrt{2\pi})\,ds \\
&= \frac{1}{3}\,t\sqrt{t} - \sqrt{2\pi}\,t + \frac{3}{2}\,\pi\sqrt{t} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{3},
\end{aligned}$$

odakle je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 \varrho(s)q(s)\,ds = \infty.$$

Dakle, uslov (C_{14}) je zadovoljen. Pored toga je $\chi^2(t,s) = 1/s$ i $A(t) \leq 24t^{1/24}$, tako da je

$$\int_{t_0}^{t} \chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds \leq 24\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} s^{1/8}s^{5/6}s^{1/24}\,ds = t - \frac{\pi}{2},$$

odakle sledi da je

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \chi^2(t,s)\varrho(s)a(s)A(s)\,ds < \infty,$$

odnosno i uslov (C_{15}) je zadovoljen. Prema tome, Teorema 3.3.5. garantuje oscilatornost posmatrane jednačine ako funkcije f i ψ zadovoljavaju uslove (F_3), (F_4) i (F_6).

Sa druge strane, uslov (C_{12}) ne važi tako da se Teorema 3.3.4. ne može primeniti. Zapravo, za $t \geq t_0$ je

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds &= \int_{\pi/2}^{t} \Big[-s^{-1/3}\sin s + \frac{1}{2}\,s^{-4/3}(2+\cos s)\Big]\,ds \leq \int_{\pi/2}^{t} \Big[-s^{-1/3}\sin s + \frac{3}{2}\,s^{-4/3}\Big]\,ds \\
&= t^{-1/3}\cos t + \int_{\pi/2}^{t} \Big[\frac{1}{3}\,s^{-4/3}\cos s + \frac{3}{2}\,s^{-4/3}\Big]\,ds \leq t^{-1/3}\cos t + \frac{11}{6}\int_{\pi/2}^{t} s^{-4/3}\,ds \\
&= t^{-1/3}\cos t - \frac{11}{2}\big(t^{-1/3} - (\pi/2)^{-1/3}\big) \leq \frac{11}{2}(\pi/2)^{-1/3} = k_0
\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 q(s)\,ds &= \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\right)\int_{t_0}^{s} q(u)\,du\,ds \\
&\leq \frac{k_0}{t}\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{s}}-1\right) ds = \frac{k_0}{t}\left(t - \sqrt{2\pi\,t} + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} (\sqrt{t}-\sqrt{s})^2 q(s)\,ds < \infty,$$

odnosno (C_{12}) ne važi. $\triangle$

Literatura

[1] R.P. Agarwal, W.C. Lian, C.C. Yeh*, *Levin's comparison theorems for nonlinear second order differential equations*, Appl. Math. Lett. **9** (1996), No. 6, 29–35

[2] N.P. Bhatia, *Some oscillation theorems for second order differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **15** (1966) 442–446

[3] R. Blaśko, J.R. Graef, M. Hačik, P.W. Spikes, *Oscillatory behaviour of solutions of nonlinear differential equations of the second order*, J. Math. Anal. and Appl. **151** (1990) 330–343

[4] G.J. Butler, *The existence of continuable solutions of a second order differential equations*, Can. J. Math. **29** (1977), 472–479

[5] G.J. Butler, *Hille–Wintner type comparison theorems for second order ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 51–59

[6] G.J. Butler, *Integral averages and the oscillation of second order ordinary differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 190–200

[7] G.J. Butler, L.H. Erbe, *A generalization of Olech–Opial–Wazevski oscillation criteria to second order nonlinear equations*, Nonlin. Anal., **11** (1987), 207–219

[8] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, *On the monotonicity property for a certain class of second order differential equations*, J. Differential Equations **82**, (1989), no. 1, 15–27

[9] M. Cecchi, M. Marini, *Oscillatory and nonoscillatory behavior of a second order functional-differential equation*, Rocky Mountain J. Math. **22** (1992), no. 4, 1259–1276

[10] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, *Integral criteria for a classification of solutions of linear differential equations*, J. Differ. Equat. **99**, (1992),, no. 2, 381–397

[11] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, *On a nonlinear second order differential equation with oscillating coefficient*, Differential Integral Equations **6**, (1993), no. 1, 47–61

[12] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, *On some classes of continuable solutions of a nonlinear differential equation*, J. Differential Equations **118**, (1995), no. 2, 403–419

[13] M. Cecchi, M. Marini, G. Villari, *On a duality principle for the self-adjoint differential equations of second order*, Bollettino U.M.I., **7**, (1995), 617-632

*I would like to express my gratitude to professors R.P Agarwal, C.C. Yeh and Ch.G. Philos for the variety of papers which they sent to me and without which it would not be possible to give determinative, definite and pellucid form of this work

[14] M. Cecchi, M. Marini, *Oscillation results for Emden-Fowler type differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **205**, (1997), no. 2, 406–422

[15] K. Y. Chan, Y. M. Chen, *On oscillation of second order sublinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **100**, (1984) 242–249

[16] K. Y. Chan, Y. M. Chen, *Generalization of an oscillation criterion for sublinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **127**, (1987) 585–594

[17] L. Chen, C. Yeh, *Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with an "integrally small" coefficient*, J. Math. Anal. and Appl. **78**, (1980) 49–57

[18] Y. Chen, *On the oscillation of nonlinear second order equations*, J. South China Normal Univ. Natur. Sci. Ed. **2** (1986), 99–103.

[19] C.V. Coffman, J.S.W. Wong, *Oscillation and nonoscillation of solutions of generalized Emden–Fowler equations*, Trans. Amer. Math. Soc, **167** (1972), 399–434

[20] C.V. Coffman, J.S.W. Wong, *Oscillation and nonoscillation theorems for second order ordinary differential equations*, Funk. Ekvac., **15** (1972), 119–130

[21] A. Elbert, *A half-linear second order differential equations*, Colloquia Math Soc. Janos Bolyai 30: Qualitative Theory of Differential Equations, Szeged (1979), 153–180

[22] L.H. Erbe, J.S. Muldowney, *Nonoscillation results for second order nonlinear differential equations*, Rocky Mountain J. Math. **122** (1982), no. 4, 635–642

[23] L.H. Erbe, V.S.H. Rao, *Nonoscillation criteria for forced second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **97** (1983), 202–213

[24] L.H. Erbe, *Nonoscillation criteria for second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **108** (1985), 515–527

[25] L.H. Erbe, H. Lu, *Nonoscillation theorems for second order nonlinear differential equations*, Funkc. Ekvacioj **33** (1990), 227–244

[26] A.N. Filatov, *Averaging methods in differential and integro-differential equations*, Publ: Izdat. "Fan" Uzbek. SSR, Tashkent, 1971, 279 pp. (in Russian)

[27] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillation theorems for certain second order perturbed nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **77** (1980), 205–214

[28] S.R. Grace, B.S. Lalli, C.C. Yeh, *Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with a nonlinear damping term*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), 1082–1093

[29] S.R. Grace, B.S. Lalli, C.C. Yeh, *Oscillation and convergence to zero of solutions of damped second order nonlinear differential equations* J. Math. Anal. and Appl. **102** (1984), 539–548

[30] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillation theorems for nonlinear second order functional differential equations with damping*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **13** (1985), 183–192

[31] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillatory behavior of solutions of second order differential equations with alternating coefficients*, Math. Nachr. **127** (1986), 165–175

[32] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillation theorems for a second order nonlinear ordinary differential equations with damping term*, Commen. Math. Univer. Carolinae **27** (1986), 449–453

[33] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillatory behavior of nonlinear second order differential equations with deviating coefficients*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **14** (1986), 187–196

[34] S.R. Grace, B.S. Lalli, *On the second order nonlinear oscillations*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **15** (1987), 297–309

[35] S.R. Grace, B.S. Lalli, C.C. Yeh, *Addendum: Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with a nonlinear damping term*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 1252–1253

[36] S.R. Grace, *Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping*, Math. Nachr. **141** (1989), 117–127

[37] S.R. Grace, *An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations*, Indian J. Pure. Appl. Math. **20(4)** (1989), 297–306

[38] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with a damping term*, Comment. Math. Univ. Carolinae **30** (1989), 691–697

[39] S.R. Grace, B.S. Lalli, *Integral averaging techniques for the oscillation of second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **149** (1990), 277–311

[40] S.R. Grace, *Oscillation criteria for second order differential equations with damping*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **49** (1990), 43–54

[41] S.R. Grace, *Oscillation theorems for nonlinear differential equations of second order*, J. Math. Anal. and Appl. **171** (1992), 220–241

[42] S.R. Grace, *Oscillation of nonlinear differential equations of second order*, Publ. Math. Debrecen **40/1-2** (1992), 143–153

[43] S.R. Grace, *On the oscillatory behabior of solutions of second order nonlinear differential equations*, Publ. Math. Debrecen **43/3-4** (1993), 351–357

[44] J.R. Graef, P.W. Spikes, *Sufficient conditions for nonoscillation of a second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 289–292

[45] J.R. Graef, P.W. Spikes, *Asymptotic behaviour of the nonoscillatory solutions of differential equations with integrable coefficients*, Publ. Math. Debrecen **32** (1985),, 211–221

[46] J.R. Graef, P.W. Spikes, *On the oscillatory behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations*, Czechoslovak Math. J. **36(111)** (1986),, 275–284

[47] J.R. Graef, P.W. Spikes, *On the nonoscillation, convergence to zero and integrability of solutions of a second order nonlinear differential equations*, Math. Nachr. **130** (1987),, 139-149

[48] R. Grimmer *On nonoscillatory solutions of a nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 118–120

[49] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities* 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (1988),

[50] P. Hartman, *On nonoscillatory linear differential equations of second order*, Amer. J. Math. **74** (1952), 389–400

[51] П. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, "Мир", Москва, 1970

[52] J.W. Heidel, *The existence of oscillatory solutions for a nonlinear odd order differential equations*, Czechoslovak Math. J. **20(95)** (1970),, 93–97

[53] J.W. Heidel, *Uniqueness, continuation and nonoscillation for second order nonlinear differential equations*, Pacific J. Math. **32** (1970), 715–721

[54] H.L. Hong, W.C. Lian, C.C. Yeh, *The oscillation of half-linear differential equations with an oscillatory coefficient*, Mathl. Comput. Modelling **24** (1996), 77–86

[55] H.L. Hong, W.C. Lian, C.C. Yeh, *Oscillation criteria for half-linear differential equations with functional arguments*, Nonlin. World **3** (1996), 849–855

[56] H.L. Hong, *On the oscillatory behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 55–68

[57] H.B. Hsu, C.C. Yeh, *Oscillation theorems for second order half-linear differential equations*, Appl. Math. Lett. **9** (1996), 71–77

[58] H.B. Hsu, W.C. Lian, C.C. Yeh, *Oscillation criteria for second order quasilinear functional differential equations*, Nonlin. World **3** (1996), 835–848

[59] Q. Huang, *Positive solutions of an Emden–Fowler equations*, J. Math. Anal. and Appl. **187** (1994), 769–789

[60] G.W. Johnson, J. Yan, *Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with an "integrally small" coefficient*, J. Math. Anal. and Appl. **105** (1985), 419–432

[61] I.V. Kamenev, Certain specifically nonlinear oscillation theorems, Mat. zametki **10** (1971), 129–134

[62] I.V. Kamenev, An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order, Mat. zametki **23** (1978), 249–251

[63] И.Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во ТГУ, (1975),

[64] I.T. Kiguradze, *On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equtions*, Arch. Math. (Brno) **14** (1978), 21–44

[65] I.G.E. Kordonis, Ch.G. Philos , *On the oscillation of nonlinear two–dimensional differential systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 1661–1667

[66] A. Kroopnick, *Oscillation properties of* $(m(t)x')' + a(t)b(x) = 0$, J. Math. Anal. and Appl. **63** (1978), 141–144

[67] T. Kura, *Oscillation theorems for a second order sublinear ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), 535–538

[68] T. Kusano, A. Ogata, H. Usami, *On the oscillation of solutions of second order quasilinear ordinary differential equations*, Hiroshima Math. Jour. **23** (1993), 645–667

[69] T. Kusano, A. Ogata, *Existence and asymptotic behavior of postive solutions of second order quasilinear differential equations*, Funkc. Ekvac. **37** (1994), 345–361

[70] T. Kusano, N. Yoshida, *Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order*, J. Math. Anal. and Appl. **189** (1995), 115–127

[71] T. Kusano, J. Wang, *Oscillation properties of half-linear functional differential equations of second order*, Hiroshima Math. Jour. **25** (1995), 371–385

[72] M.K. Kwong, *On certain Riccati integral equations and second-order linear oscillation*, J. Math. Anal. and Appl. **85** (1982), 315–330

[73] M.K. Kwong, J.S.W. Wong, *An application of integral inequality to second order nonlinear oscillation*, J. Differ. Equat., **46** (1982), 63–77

[74] M.K. Kwong, J.S.W. Wong, *On the oscillation and nonoscillation of second order sublinear equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **85** (1982), 547–551

[75] M.K. Kwong, A. Zettl, *Integral inequalities and second order linear oscillation*, J. Differ. Equat., **45** (1982), 16–33

[76] M.K. Kwong, J.S.W. Wong, *On an oscillation theorem of Belohorec*, SIAM J. Math. Anal. **14** (1983), 474–476

[77] M.K. Kwong, J.S.W. Wong, *Nonoscillation theorems for second order sublinear equations ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 467–474

[78] M.K. Kwong, J.S.W. Wong, *Linerazitaion of second order nonlinear oscillation theorems*, Trans. Amer. Math. Soc., **279** (1983), 705–722

[79] H.J. Li, *Oscillation criteria for second order linear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **194** (1995), 217–234

[80] H.J. Li, C.C. Yeh, *An integral criterion for oscillation of nonlinear differential equations*, Math. Japonica **41** (1995), 185–188

[81] H.J. Li, C.C. Yeh, *Oscillation criteria for nonlinear differential equations*, Houston Jour. Math. **21** (1995), 801–811

[82] H.J. Li, C.C. Yeh, *Sturmian comparison theorem for half-linear second-order differential equations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **125A** (1995), 1193–1204

[83] H.J. Li, C.C. Yeh, *Nonoscillation criteria for second order half-linear differential equations*, Appl. Math. Lett. **8** (1995), 63–70

[84] H.J. Li, C.C. Yeh, *Nonoscillation theorems for second order quasilinear differential equations*, Publ. Math. Debrecen **47/3-4** (1995), 271–279

[85] H.J. Li, C.C. Yeh, *Oscillations of half-linear second order differential equations*, Hiroshima Math. Jour. **25** (1995), 585–594

[86] H.J. Li, C.C. Yeh, *On the nonoscillatory behavior of solutions of a second order linear differential equatiops*, Math. Nachr. **182**, (1996), 295–315

[87] H.J. Li, C.C. Yeh, *Oscillation of second order sublinear differential equations*, Dynamic Systems and Applic. **6** (1997), 529–534

[88] W. Li, J. Yeh, *Oscillation of second order sublinear differential equations*, Indian J. Pure Appl. Math. **28(6)** (1997), 735–740

[89] W.C. Lian, C.C. Yeh, H.J. Li, *The distance between zeros of an oscillatory solution to a half-linear differential equations*, Computers Math. Applic. **29** (1995), 39–43

[90] J.V. Manojlović, *Asimptotska svojstva rešenja diferencijalnih jednačina*, Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu, 1996

[91] J.V. Manojlović, *Existence of oscillatory and nonoscillatory solutions for a nonlinear system of differential equations*, Filomat (Niš), **11** (1997), 135-148

[92] J.V. Manojlović, *Oscillation theorems for a nonlinear system of differential equations*, Acta Math. Hungarica, **81(1-2)** (1998), 59-67

[93] J.V. Manojlović, *Nonoscillation theorems for Emden–Fowler system of differential equations*, Indian J. Pure Appl. Math., (in print)

[94] J.V. Manojlović, *Oscillation criteria for second order half-linear differential equations*, Math. Computer Modelling, (in print)

[95] J.V. Manojlović, *Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations*, Acta Sci. Math., (in print)

[96] J.V. Manojlović, *Integral averages and second order sublinear oscillation*, (preprint)

[97] J.V. Manojlović, *Oscillation theorem for nonlinear differential equations of second order*, (preprint)

[98] J.V. Manojlović, *Integral averages and oscillation of second order sublinear differential equations*, (preprint)

[99] J.V. Manojlović, *Integral averaging techniques for oscillation of second order nonlinear differential equations with damping*, (preprint)

[100] Manabu Naito, *Asymptotic behavior of solutions of second order differential equations with integrable coefficients*, Tran. Amer. Math. Soc. **282** (1984), 577–588

[101] Manabu Naito, *Nonoscillatory solutions of second order differential equations with integrable coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 769–774

[102] A. H. Nasr, *Sufficient conditions for the oscillation of forced super-linear second order differential equations with oscillatory potential*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 123–125

[103] K. Nishihara, *Asymptotic behavior of positive solutions of second order differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **189** (1995), 424–441

[104] H. Onose *Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 67–73

[105] Ch.G. Philos, *Oscillation of sublinear differential equations of second order*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 1071–1080

[106] Ch.G. Philos, *Oscillation of second order linear ordinary differential equations with alternating coefficients*, Bull. Austral. Math. Soc. **27** (1983), 307–313

[107] Ch.G. Philos, *On second order sublinear oscillation*, Aequationes Math. **27** (1984), 242–254

[108] Ch.G. Philos, *A second order superlinear oscillation criterion*, Canad. Math. Bull. **27** (1984), 102–112

[109] Ch.G. Philos, *Integral averages and second order superlinear oscillation*, Math. Nachr. **120** (1985), 127–138

[110] Ch.G. Philos, *Integral averaging techniques for the oscillation of second order sublinear ordinary differential equations*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **40** (1986), 111–130

[111] Ch.G. Philos, *Oscillation theorems for linear differential equations of second order*, Arch. Math. (Basel) **53** (1989), 482–492

[112] Ch.G. Philos, *Oscillation criteria for second order superlinear differential equations*, Can. J. Math. **41** (1989), 321–340

[113] Ch.G. Philos, *An oscillation criterion for superlinear differential equations of second order*, J. Math. Anal. and Appl. **148** (1990), 306–316

[114] Ch.G. Philos, *On oscillation of second order sublinear ordinary differential equations with alternating coefficients*, Math. Nachr. **146** (1990), 105–116

[115] Ch.G. Philos, *Integral averages and oscillation of second order sublinear differential equations*, Diff. Integ. Equat. **4** (1991), 205–213

[116] Ch.G. Philos, I.K. Purnaras, *On the oscillation of second order nonlinear differential equations*, Arch. Math. (Basel) **59** (1992), 260–271

[117] Ch.G. Philos, I.K. Purnaras, *Oscillations in superlinear differential equations of second order*, J. Math. Anal. and Appl. **165** (1992), 1–11

[118] Ch.G. Philos, I.K. Purnaras, *Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **24** (1995), 81–90

[119] S.D. Taliaferro *Asymptotic behavior of solutions of* $y'' = \Phi(t)y^{\lambda}$, J. Math. Anal. and Appl. **66** (1978), 95–134

[120] H. Usami, *Asymptotic behavior of positive solutions of singular Emden–Fowler type equations*, J. Math. Soc. Japan, **46** (1994), 195–211

[121] D. Willett, *Classification of second order linear differential equations with respect to oscillation* Adv. in Math. **3** (1969), 594–623

[122] A. Wintner, *A criterion of oscillatory stability*, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 114–117

[123] J.S.W. Wong, *On two theorems of Waltman*, J. SIAM Appl. Math. **14** (1966), 724–728

[124] J.S.W. Wong, *On second order nonlinear oscillations* Funk. Ekvac. **11** (1968), 207–234

[125] J.S.W. Wong, *A second order nonlinear oscillation theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 487–491

[126] J.S.W. Wong, *On the generalized Emden-Fowler equation*, SIAM Rev. **17** (1975), 339–360

[127] J.S.W. Wong, *On existence of oscillatory solutions for a second order sublinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 367–371

[128] J.S.W. Wong, *An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 109–112

[129] J.S.W. Wong, *An oscillation criterion for second order sublinear differential equations*, Conf. Proc. Canad. Math. Soc. **8** (1987), 299–302

[130] J.S.W. Wong, *Second order nonlinear forced oscillation*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), 667–675

[131] J.S.W. Wong, *A sublinear oscillation theorem*, J. Math. Anal. and Appl. **139** (1989), 408–412

[132] J.S.W. Wong, *Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 1069–1077

[133] J.S.W. Wong, *An oscillation theorem for second order sublinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 633–637

[134] J.S.W. Wong, *Oscillation of sublinear second order differential equations with integrable coefficients*, J. Math. Anal. and Appl. **162** (1991), 476–481

[135] F.H. Wong, C.C. Yeh, *Oscillation criteria for second order superlinear differential equations*, Math. Japon. **37** (1992), 573–584

[136] J.S.W. Wong, C.C. Yeh, *An oscillation criterion for second order sublinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **171** (1992), 346–351

[137] J.S.W. Wong, *Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with integrable coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 389–395

[138] J.S.W. Wong, *Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations involving integral averages*, Canad. J. Math. **45** (1993), 1094–1103

[139] P.J.Y. Wong, R.P. Agarwal, *Oscillatory behaviour of solutions of certain second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **198** (1996), 337–354

[140] Lu Wudu, *Nonoscillation theorems for second order nonlinear differential equations*, Acta Math. Sinica **9** (1993), 166–174

[141] J. Yan, *A note on an oscillation criterion for an equation with damped term*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 277–280

[142] J. Yan, *A note on second order sublinear oscillation theorems*, J. Math. Anal. and Appl. **104** (1984), 103–106

[143] J. Yan, *Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 276–282

[144] J. Yan, *On some properties of solution of second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **138** (1989),, 75–83

[145] J. Yan, *On the distance between zeroes and the limit-point problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 971–975

[146] C.C. Yeh, *An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations with functional arguments*, J. Math. Anal. and Appl. **76** (1980), 72–76

[147] C.C. Yeh, *Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with damped term*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), 397–402

[148] C.C. Yeh, *Oscillation criteria for second order nonlinear perturbed differential equations*, J. Math. Anal. and Appl. **138** (1989), 157–165

[149] C.C. Yeh, *Levin's comparison theorems for second order nonlinear differential equations and inequalities*, Math. Japonica **36** (1991), 703–710

Indeks pojmova i oznaka

Preface

This thesis is concerned with the question of *oscillation of second order nonlinear differential equations* and is consisted of original results. It arose as the consequence of investigation started at the postgraduate studies (*"Asymptotic behavior of solutions of differential equations*, University of Belgrade, 1996.). It belongs to the sphere of *qualitative analysis of differential equations.*

The interest on qualitative analysis of differential equations is due, in large part, to the fact that many physical systems are modeled by second order differential equations. Solving differential equations by using quadratures was the most utilized method at the earlier period of development of theory of differential equations . An equation $x' = f(t, x)$ is considered solved if we can get the general integral $\psi(t, x, C) = 0$. But, that period was finished with the papers of Lia (Sophus Lie, 1842–1899), since this problem can not be solved for variety types of equations. Conditions for development of qualitative analysis of differential equations was created when the fundamental theorems of existence and uniqueness of solutions had been established and the person who initiated qualitative analysis of differential equations was France mathematician Poenkare (Henri Poincareé, 1854–1912.).

In the qualitative analysis of differential equations we make the conclusions according to the functions which appear in the differential equation . Qualitative analysis gives us information about properties of solutions of differential equation such as boundedness, number and position of zeroes and poles, asymptots, behavior in the neighborhood of singular points and in infinity, oscillation, monotonous, etc. In the other way, in the simpler cases it allows us to trace nearly the graph of solutions without knowledge of analytic expression. That is especially interesting in the cases when we can not solve the equation by the quadratures and moreover, expression of general integral is usually quite complicate, so that we have to use qualitative analysis.

In the last three decades qualitative analysis of differential equations has begun to receive more and more attention. For that time, new methods of investigations have been elaborated and very important and useful results have been obtained. Criteria of oscillation of linear and nonlinear differential equations has been established, classification of equations according to the oscillatory properties of their solutions have been proposed, the existence or nonexistence of singular, proper, oscillatory, bounded and monotone solutions of various types have been established and asymptotic properties of such solutions have been studied.

The oscillation problem for the second order linear and nonlinear differential equations is of particular interest and therefore, it is subject of many investigation. Probably, the most investigated differential equations is linear differential equation

$$(L) \qquad x''(t) + q(t)x(t) = 0$$

and nonlinear differential equations of the form

$$(EF) \qquad x''(t) + q(t)|x(t)|^{\lambda} \operatorname{sgn} x(t) = 0, \quad \lambda \neq 1,$$

which is known in the literature as the *Emden–Fowler differential equation.* The equation of this type for the first time attracted attention at the close of the XIX century in connection with the astrophysical investigations of R. Emden, and in thirties it appeared in the papers of E. Fermi and L.H. Thomasa devoted to the distribution of electrons in the heavy atom. The Emden-Fowler equation also arises in the study of gas dynamics and fluid mechanics. More recently, the Emden-Fowler equation also appear in the study of relativistic mechanics, nuclear physics and also in the study of chemically reacting systems.

Since the many oscillatory physical systems are modeled by the linear differential equations, development of theory of oscillations began with the investigation of those equations. In the sixties, efforts have been made to show that oscillation criteria for the linear equation remain valid for the Emden–Fowler equation and under appropriate assumptions on $f(x)$ for the more general equation

$$(GEF) \qquad x''(t) + q(t)f(x(t)) = 0,$$

where $q \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \cap C^1((-\infty,0)\cup(0,\infty))$ satisfies conditions $xf(x) > 0,\ f'(x) \geq 0$ for all $x \neq 0$. Differential equation of such form is known in the literature as the *generalized Emden–Fowler differential equation.* The shown oscillation criteria are usually classified into sublinear and superlinear cases according to $\gamma \in (0,1)$ or $\gamma > 1$ respectively for Emden–Fowler equation. Similarly, equation (GEF) is sublinear if $f(x)$ satisfies

$$0 < \int_{0+}^{\varepsilon} \frac{du}{f(u)},\ \int_{0-}^{-\varepsilon} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{za svako} \quad \varepsilon > 0;$$

equation (GEF) is superlinear if $f(x)$ satisfies

$$0 < \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{du}{f(u)},\ \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{za svako} \quad \varepsilon > 0.$$

Oscillation of solutions of nonlinear differential equations (EF) and (GEF) has been investigated by remarkable number of authors [2, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 37, 44, 48, 53, 59, 61, 66, 67, 72, 74, 76, 78, 88, 100, 101, 102, 103, 104, 119, 120, 142, 147] etc., among which Ch.G. Philos [105], [107]–[110], [112]–[118], J.S.W. Wong [19], [20], [73], [77], [123]–[134], [137], [138] and C.C. Yeh. [135, 136, 138, 146], by all means, made the greatest productive.

In the eighties the oscillation problem for the second order nonlinear equation of the type

$$(NL) \qquad (a(t)\psi(x(t))x'(t))' + q(t)f(x(t)) = 0,$$

where $a \in C^1([0,\infty);(0,\infty))$, $q \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, $\psi, f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $xf(x) > 0$, $f'(x) \geq 0$, $\psi(x) > 0$ for all $x \neq 0$, has been of particular interest. Among numerous papers dealing with the oscillation of this equations we choose to refer to S.R. Grace, B.S. Lalli [27]–[43] and J.R. Graef, P.W. Spikes [44]–[47].

During the last two decades there has been a great deal of work on the oscillatory behavior of solutions of the equation of the type

$$\big[a(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\big]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \quad \alpha > 0,$$

which is called *half-linear differential equation*. There is a striking similarity in the oscillatory behavior between the second order half-linear equation and the corresponding linear equation. The problem of finding oscillation criteria for nonlinear equation of this type has received the attention of many authors: A. Elbert [21], H.L. Hong, W.C. Lian, C.C. Yeh [54, 58], H.B. Hsu, C.C. Yeh [57], H.B. Hsu, W.C. Lian, C.C. Yeh [58], T. Kusano, A. Ogata, H. Usami [68], T. Kusano, A. Ogata [69], T. Kusano, N. Yoshida [70], T. Kusano, J. Wang [71], H.J. Li, C.C. Yeh [80]–[85], W.C. Lian, C.C. Yeh, H.J. Li [89], etc..

Nonlinear differential equation of the type

$$\big[a(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\big]' + q(t)f(x(t)) = 0, \quad \alpha > 0,$$

appeared in the literature in 1996. in the papers of P.J.Y. Wong, R.P. Agarwal [139] (in the case for $\psi(x) \equiv 1$), R.P. Agarwal, W.C. Lian, C.C. Yeh [1] and afterward in 1998. in the paper of H.L. Hong [56] who generalized criteria of oscillation of half-linear differential equations due to H.B. Hsu, C.C Yeh [57]. We shall call differential equation of this type as *generalized half-linear differential equation*.

Some of the more important and useful criteria of oscillation of the mentioned nonlinear equations involve the average behavior of the integral of the alternating coefficient. These tests have been motivated by the classical averaging criterion of Wintner which states that if $q(t)$ satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^s q(u)\,du\,ds = \infty,$$

then the linear equation (L) is oscillatory. Kamenev in 1978. extended Wintner's criterion by considering weighted averages of the integral of the coefficient q and proved that the condition

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^\beta}\int_0^t (t-s)^\beta q(s)\,ds = \infty \;\text{ za neko } \beta > 1,$$

suffices for the oscillation of (L).

Investigation of the second order nonlinear oscillation in this work is motivated by the most recent contributions in the sphere of *weighted averages*. Namely, among numerous papers dealing with averaging techniques in the study of second order nonlinear oscillation majority involve positive, continuously differentiable function ϱ such that ϱ' is nonnegative and decreasing function and the function $(t-s)^\alpha$, for $\alpha \geq 1$ integer or real, as the weighted functions. It is therefore natural to ask if it is possible to use more extensive class of functions as the weighted functions. An affirmative answer to this question has been given for the first time by Ch.G. Philos [111] [Arch. Math. (Basel), **53** (1989), 482–492] who has used averaging functions from a general class of parameter functions

$$H : \mathcal{D} = \{(t,s) \, : t \geq s \geq t_0\} \to \mathbb{R}$$

and obtained new oscillation criteria for linear differential equations . S.R. Grace [41] in 1992. and H.J. Li, C.C. Yeh [87] in 1997. have also answered to the above question in the affirmative for second order nonlinear equation (NL).

Accordingly, the main purpose is to establish new criteria for the oscillation of nonlinear equations of second order by using averaging conditions of type introduced by Philos [111]. Such averaging technique is unique in investigation of half-linear differential equations and it is extension of investigation of nonlinear equation (NL) started by Grace, Li and Yeh.

All results are presented in three chapters.

The first chapter is introductionary. Some notions from theory of oscillation are given there as well as some basic results that will be used in the sequel.

In the Chapter 2. we present oscillation criteria for half-linear differential equations. Although many established oscillation criteria for the half-linear equation involve the average behavior of the integral of the alternating coefficient, neither one of the authors considered weighted averages with a class of functions $H(t,s)$. Therefore, in the Section 2.1. we establish new criteria for the half-linear equation by using an averaging condition of the type introduced by Li, Yeh in the paper *"Oscillation of second order sublinear differential equations"* - Dynamic Systems and Applications **6**(1997), 529-534. That criteria has a general class of functions $H(t,s)$ as the parameter function.

It is also natural to ask whether oscillation criteria for the half-linear equation can be extended to the more general equation. Since the generalized half-linear equation is considerable less investigated, establishing oscillation criteria for that equation will be of particular interest. In the Section 2.2. established oscillation theorems for the half-linear equations in the previous section are extended to the generalized half-linear equation and also well-known results of Ch. G. Philos [113] for the equation (GEF) are extended. Beside that, some qualitative new oscillation criteria is proved for thus equation, which are also new oscillation criteria of half-linear equation as well as of the equation (NL) and which involve the weihgted average behavior of the integral of the coefficients.

Very important part in the oscillatory theory is establishing comparison theorems, which allows us to conclude about oscillatory behavior of solutions of some equations according to oscillatory behavior of solutions of the more elementary equations. That is why, in Section 2.3. we prove some comparison theorems for the generalized half-linear equation in the reference to the half-linear equation.

A systematic study is attempted in the Chapter 3. to extend, improve and correlate a number of existing results for the equation (NL). Some of the results are extensions of the known oscillation theorems for the generalized Emden–Fowler equation. The results will be classified into two classes according to sublinearity and superlinearity of the equation.

In the Section 3.1. we consider sublinear equation (NL) and prove that criteria of Ch.G. Philos [110], [115], Ch.G. Philos, I.K. Purnaras [116], J.S.W. Wong [134] for sublinear equation (GEF) under additional assumptions on the functions a, f and ψ can be extended to the general equation (NL). Since the assumption that the function ψ is positive has been required in all known criteria for the equation (NL), it is natural to ask whether it is possible to establish the oscillation of the equation (NL) when the function ψ is negative or allowed to change signs. An affirmative answer to this question is given in second part of Section 3.1. Oscillation criteria for equation (NL) are established under the following assumptions for the function f and ψ:

$$\psi(x) \neq 0,\ x\,\frac{f(x)}{\psi(x)} > 0,\ \left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)' \geq 0,\ \frac{f(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)} \geq \frac{1}{k} > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

This criteria are also extended to the nonlinear differential equation with a damping (with a damped term) in the Section 3.2.

$$(a(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0,$$

without any restriction on the sign of the damping coefficient $p(t)$, which is of particular interest.

In the Sections 3.3. we study the oscillatory behavior of superlinear equation (NL). Our results extend some of the results in the papers Ch.G. Philos [112], [113] and Ch.G. Philos, I.K. Purnaras [116], [117]. Not to mention, that established oscillation criteria improve mentioned criteria for equation (GEF), because they are obtained by using general class of the parameter functions $H(t,s)$ in the averaging techniques.

In this occasion I want to express my gratitude to my parents Vasilije and Ljiljana which have been tolerate enough and have enough patience for my work. I could not work to the best of my ability and finished this work without them, that goes without saying. I give special acknowledgement for unselfish help and understanding during my numerous visitation of Belgrade, to my aunt Vida. I also offer thanks to my sister Mima on the moral and financial support given to me during the period of preparation and making this thesis.

Contents