UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

JEDNOGRANI SINGULARITETI ALGEBARSKIH MNOGOSTRUKOSTI

I

NERASTAVLJIVOST U PRSTENIMA FORMALNIH REDOVA

-doktorska disertacija-

Aleksandar T. Lipkovski

BEOGRAD

maj 1985

SADRŽAJ

UVOD

Nekoliko reči o nastanku ovog rada. U toku školske 1981/82 godine boravio sam na Moskovskom Državnom Univerzitetu na specijalizaciji kod V.A. Iskovskih. U jednom od razgovora on je izneo mišljenje da je jedini singularitet krivih nad kojim u normalizaciji leži jedna jedina tačka, singularitet tipa parabole $y^p=x^q$ sa uzajamno prostim p, q i predložio mi da detaljnije ispitam takve singularitete. Ispostavilo se medjutim da ovakvih singulariteta ima znatno više i da sa njima stoji u vezi malo poznata i malo izučavana klasa lokalnih prstena. Zatim je postalo jasno da se u slučaju singulariteta hiperpovrši radi o vezi sa nerastavljivim elementima prstena formalnih stepenih redova. Najzad, relativno nedavno sam čitajući radove V.I.Arnoljda i njegove škole o klasifikaciji singulariteta realnih funkcija uvideo da se metoda Njutnovih poliedara, koju je uveo i ekstenzivno koristio Arnoljd (v.[3],[4]), može sa uspehom primeniti i u problematici nerastavljivih formalnih redova. Kao rezultat svega toga nastali su moji radovi [27],[28],[29] a zatim i ovaj rad.

Rad se sastoji iz dva dela. U prvom delu je sadržana motivacija ovog rada. Prvi odeljak je uvodnog karaktera i sadrži pregled osnovnih pojmova i stavova algebarske geometrije koji se u daljem koriste. Posle izvesnog kolebanja rešio sam da ga uvrstim u rad, zbog kompletnosti kao i zbog potrebe upoznavanja šireg kruga naših matematičara sa ovom problematikom. U drugom odeljku se opisuje osnovni objekt sa algebarskog i geometrijskog stanovišta - jednograni lokalni prsteni i jednograni singulariteti. Navode se malobrojni rezultati o ovim strukturama iz literature. Od interesa je dokaz teoreme 2.4. (ovo tvrdjenje se samo uzgred pominje u [18] i nigde se ne dokazuje), kao i nezavisni dokazi teorema 2.1. i 2.3. (u [20] se oni baziraju na teoremi 2.2. koju ovde nismo dokazivali), a isto tako i lema 2.9.

Drugi deo je glavni deo rada. U njemu se sistematski izlaže tehnika tzv. Njutnovih poliedara i primenjuje na izučavanje nerastavljivosti u prstenu formalnih redova. Prvi odeljak o poliedrima i celobrojnim poliedrima je uvodnog karaktera, ali sadrži i neka jednostavna tvrdjenja o poliedrima koja se ne nalaze u standardnoj literaturi (v. 1.3.,1.5,1.6.), važnu teoremu 1.4. o kancelativnosti polugrupe poliedara, kao i novu definiciju nerazloživosti (str. 34), prilagodjenu našim potrebama, i njena elementarna svojstva (v.1.10.,1.11.,1.12.). U drugom odeljku je izložena tehnika $\mathcal{N}$-poliedara, koja je u literaturi sistematizovana samo u slučaju n=2. Od centralnog su značaja teoreme 2.3. i 2.9. o strukturi polugrupe $\mathcal{N}$-poliedara. Razvijena je tehnika valuacija pomoću koje su dobijeni neki jednostavni neophodni (v. 2.7.) i dovoljni (v. 2.12.)

uslovi nerazloživosti. Isto tako, poznata teorema o sabirku dokazana je u slučaju $\mathcal{N}$-poliedara (teorema 2.11.). U trećem odeljku se uspostavlja veza izmedju generatora polugrupe $\mathcal{N}$-poliedara i nerastavljivih elemenata u prstenu formalnih redova, koja i opravdava razmatranje $\mathcal{N}$-poliedara. Od osnovnog značaja pri tome je teorema 3.1. koja predstavlja generalizaciju poznatog tvrdjenja u slučaju poligona (n=2). Uvodi se pojam jake nerastavljivosti formalnih redova (str.46) i daju neki dovoljni uslovi. Razmatraju se kvazihomogene filtracije u prstenu formalnih redova, u skladu sa radom [3] , i koriste za naše ciljeve. Od interesa su takodje teoreme 3.5. i 3.6. koje predstavljaju uopštenja na kvazihomogeni slučaj poznatih teorema o homogenim polinomima. Uveden je pojam indeksa nerastavljivosti (str.53) i u vezi s njim formulisana jedna hipoteza. Četvrti odeljak je posvećen sistematskom izučavanju slučaja n=2. U teoremi 4.1. nalaze se svi generatori polugrupe $\mathcal{N}$-poliedara i dokazuje da je ona slobodna. Osnovna teorema 4.5., koja je u stvari bazirana na poznatom procesu redukcije singulariteta, dokazana je bez korišćenja teoreme o razrešenju singulariteta (v.primedbu na str.62). Iz nje je izvedena interesantna posledica (str.62) o broju nerastavljivih faktora formalnog reda. Zatim je opisan algoritam provere nerastavljivosti, koji je implicitno sadržan u radu [10]. Takodje se u teoremama 4.6. i 4.7. nalaze svi nerastavljivi elementi u K[[x,y]] male višestrukosti (v. rad autora [29]). U petom odeljku su opisane dve familije generatora polugrupe $\mathcal{N}$-poliedara u slučaju n=3 (teoreme 5.5. i 5.6.). Svi rezultati ovde su novi. Korišćenjem jedne ideje Arnoljda [3] klasifikovani su u teoremi 5.8. i svi kvazihomogeni polinomi za koje nijedna osa nije singularna.

Najzad, u dodatku je kratko prikazan globalni aspekt razmatranih problema i navedeni neki rezultati autora.

Tehnika $\mathcal{N}$-poliedara se u ovom radu po prvi put primenjuje sistematski u problemima nerastavljivosti formalnih redova. Relevantni podaci o poreklu i motivaciji pojedinih rezultata dati su, gde je to potrebno, u primedbama i referencama. Sva tvrdjenja bez reference predstavljaju autorov doprinos problematici. Sistem oznaka u radu je uobičajen. Nekoliko crteža je realizovano na računaru ljubaznošću saradnika Matematičko-programerskog odseka Vazduhoplovnotehničkog instituta u Žarkovu, na čemu im zahvaljujem.

Kao što će čitalac moći da vidi, problematika obradjena u ovom radu ni izdaleka nije iscrpljena. Otvoreno je široko polje rada na daljem razvoju metode $\mathcal{N}$-poliedara, specijalno nalaženju relacija izmedju generatora polugrupa $\mathcal{N}^{(i)}$ $(i>2)$, zatim istraživanjima homeomorfnih raširenja prstena, algebarskih svojstava jednogranih prstena i drugo. Autor se nada da će i on sam, a i drugi naši matematičari eventualno zainteresovani za ova pitanja, uskoro dati nove rezultate.

U Beogradu, aprila 1985.

I deo

JEDNOGRANI LOKALNI PRSTENI

I

JEDNOGRANI SINGULARITETI

§1. Algebarske mnogostrukosti i njihovi singulariteti

Cilj ovog odeljka je da se u najkraćim crtama opišu osnovni pojmovi algebarske geometrije koji se koriste u radu. U njemu nema novih rezultata kao ni dokaza. Izlaganje se bazira uglavnom na knjigama Hartshorna [22] i Šafareviča [35], gde se nalaze i odgovarajući dokazi.

1. Topologija Zariskog. Fiksirajmo jednom za svagda algebarski zatvoreno polje K. Sa $\mathbb{A}^n$ obeležavamo uobičajeni n-dimenzioni afini prostor nad K, skupovno jednak $K^n=K\times\ldots\times K$. Neka je $A=K[x_1,\ldots,x_n]$ prsten polinoma sa n nepoznatih nad poljem K. Elementi iz A definišu funkcije na $\mathbb{A}^n$ sa vrednostima u K. Za svaki $S\subset A$ ima smisla definicija:
$V(S)=\{a\in\mathbb{A}^n:$ za svako $f\in S$ je $f(a)=0\}$.
Ako je ideal I generisan skupom S, očito je $V(S)=V(I)=V(f_1,\ldots,f_k)$ gde je $f_1,\ldots,f_k$ (konačna) baza ideala I.
Definicija. Zatvoreni skup u $\mathbb{A}^n$ (zatvoreni afini podskup) je podskup u $\mathbb{A}^n$ oblika $V(S)$ za neki $S\subset A$.
Komplementi svih zatvorenih skupova u $\mathbb{A}^n$ čine topologiju na $\mathbb{A}^n$, takozvanu topologiju Zariskog. Naime, konačna unija i proizvoljni presek zatvorenih skupova, kao i $\emptyset$ i $\mathbb{A}^n$ su zatvoreni skupovi:
$V(S)\cup V(T)=V(ST)$, $\bigcap_\alpha V(S_\alpha)=V(\bigcup_\alpha S_\alpha)$, $V(1)=\emptyset$, $V(0)=\mathbb{A}^n$.

<u>Primer</u>. Topologiju Zariskog na $\mathbb{A}^1$ čine $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ i komplementi konačnih skupova t.j. to je kofinitna topologija. Naime, $K[x]$ je glavnoidealski prsten i $V(S)=V(f)=V((x-a_1)\ldots(x-a_k))$ $=\{a_1,\ldots,a_k\}$.

Primetimo da topologija Zariskog u opštem slučaju nije hausdorfova t.j. T_2.

<u>Definicija</u>. Ireducibilni skup u topološkom prostoru X je neprazni skup $Y\subset X$ koji se ne može predstaviti kao unija dva prava zatvorena podskupa.

Ireducibilnost je sa topološkog aspekta veoma grubo svojstvo. Na primer, svaki neprazni otvoreni podskup ireducibilnog prostora je svuda gust. $\mathbb{A}^1$ je ireducibilan: pravi zatvoreni podskupovi su konačni, a $\mathbb{A}^1$ je beskonačan.

<u>Definicija</u>. Afina mnogostrukost je ireducibilni zatvoreni podskup u $\mathbb{A}^n$. Kvaziafina mnogostrukost je otvoreni podskup afine mnogostrukosti.

<u>Teorema 1.1</u>. Ako je $X\subset\mathbb{A}^n$ i $I(X)=\{f\in A:\forall P\in X,\ f(P)=0\}$, tada je $I(X)$ ideal u A i

(a) $Y\subset X \Rightarrow I(Y)\supset I(X)$;

(b) $I(X\cup Y)=I(X)\cap I(Y)$;

(c) $I(V(I))=\mathrm{rad}(I)$ (Hilbertov Nullstellensatz);

(d) $X=V(I(X))$.

(v. [22]str.19).

<u>Posledica</u>. Postoji obostrano jednoznačna korespondencija izmedju zatvorenih podskupova u $\mathbb{A}^n$ i radikalnih ideala u A. Zatvoreni skup je ireducibilan $\Leftrightarrow$ njegov ideal je prost.

<u>Primeri</u>. 1. $\mathbb{A}^n$ je ireducibilan jer je $I(\mathbb{A}^n)=(0)$ prost.
2. Neka je $f\in A$ ireducibilan. Tada je (f) prost jer je A PF-prsten i $V(f)$ je ireducibilan. Za $n=2$ to je ravna afina kriva stepena deg f, za $n=3$ površ, za $n>3$ hiperpovrš.
3. Maksimalni ideali u A odgovaraju minimalnim ireducibilnim zatvorenim podskupovima t.j. tačkama u $\mathbb{A}^n$. Zato je svaki maksimalni ideal u A oblika $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$.
<u>Primedba</u>. Jednačine koje zadaju zatvoreni skup $X=V(f_1,\dots,f_k)$ ne moraju generisati ideal $I(X)$. Na primer,
$X=V(x-1,x^2+y^2-1)=\{(0,1)\}$ i $I(X)=(x-1,y)\supsetneq(x-1,x^2+y^2-1)$.
<u>Definicija</u>. Ako je $X=V(I)\subset\mathbb{A}^n$ zatvoreni skup, prsten $A(X)=$ $=A/I(X)$ se naziva afini koordinatni prsten od X.
$A(X)$ je konačno generisana K-algebra. Ako je X ireducibilan, $A(X)$ nema nula-delitelja. Važi i obrat: svaka konačno generisana K-algebra bez nula-delitelja je oblika $A(X)$ za neki zatvoreni algebarski skup X (v.[35]str.47).
<u>Primeri</u>. 1. $X=V(y-x^2)$, $A(X)=K[x,y]/(y-x^2)\cong K[x]$.
2. $X=V(xy-1)$, $A(X)=K[x,y]/(xy-1)\cong K[x^{-1},x]\ncong K[x]$.
3. $X=\{(t,t^2,t^3) : t\in K\}\subset\mathbb{A}^3$ je prostorna kubna kriva, ideal $I(X)=(y-x^2,z-x^3)$ i $A(X)\cong K[x]$.

2. <u>Dimenzija</u>. Pojam dimenzije koji se koristi u algebarskoj geometriji ima korene još u Euklidovim definicijama tačke, prave i ravni.
<u>Definicija</u>. Ako je X topološki prostor, dimenzija $\dim X$ je supremum dužina strogo rastućih lanaca ireducibilnih podskupova.

Očito, ako je X zatvoreni podskup u $\mathbb{A}^n$, dim X = dim A(X) je supremum dužina strogo rastućih lanaca prostih ideala, tzv. Krull-ova dimenzija prstena.

Teorema 1.2. Ako je B konačno generisana K-algebra bez nula-delitelja, onda je:

(a) dim B = tr $\deg_K$ K(B) , gde je K(B) polje razlomaka za B;

(b) ht P = dim B - dim B/P , gde je P proizvoljni prosti ideal u B, a ht P supremum dužina strogo rastućih lanaca prostih ideala koji završavaju sa P. Specijalno, ht I(X) = = codim X.

(v. [22] str.23).

Odavde odmah sledi da je dim $\mathbb{A}^n$ = n, što nam i treba.

Teorema 1.3. Zatvoreni skup $X\subset \mathbb{A}^n$ je dimenzije n-1 $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ X=V(f) t.j. X je hiperpovrš.

(v. [22] str.23).

Drugim rečima, ht I(X) = 1 $\Leftrightarrow$ I(X) je glavni ideal. Ovo tvrdjenje je poznato kao Krull-ova teorema o glavnim idealima. Već za codim X = 2 ovo ne važi: dim X $\geqslant$ n-broj generatora ideala I(X), ali može biti i strogo >.

3. Regularne funkcije. U svakoj geometrijskoj teoriji, u skladu sa opštom tendencijom "kategorizacije", pored objekata moramo zadati i dopustiva preslikavanja.

Definicija. Ako je X (kvazi)afina mnogostrukost, funkcija $f:X\longrightarrow K$ je regularna u tački $a\in X$ ako a ima okolinu (Zariskog) $U\subset X$ takvu da je za svako $x\in U$, f(x)=F(x)/G(x) za neke polinome F, G iz A. f je regularna na X ako je regularna u svakoj tački $x \in X$.

Regularna funkcija je neprekidna (u topologiji Zariskog). Ako se dve regularne funkcije na X poklapaju na nekom otvorenom skupu, one se poklapaju na celom X.

<u>Definicija</u>. Morfizam mnogostrukosti $f: X \to Y$ je neprekidna funkcija koja prevodi regularne funkcije na Y u regularne funkcije na X putem kompozicije ("Hom-funktor"):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed] & Y \arrow[d] \\ & K \end{tikzcd}$$

Sve afine algebarske mnogostrukosti nad poljem K sa ovakvim morfizmima čine kategoriju Aff_K.

<u>Definicija</u>. Neka je X mnogostrukost. Skup $\mathcal{O}(X)$ svih regularnih na X funkcija je prsten regularnih funkcija na X. Za svaku tačku $x \in X$, $\mathcal{O}_{x,X}$ je lokalni prsten tačke: to je prsten "klica" regularnih funkcija ("germ"(eng.), "Keim" (nem.), "rostok"(rus.)) u tački x t.j. faktor skupa svih funkcija regularnih u x po relaciji ekvivalencije $f \sim g \Leftrightarrow$ postoji okolina $W \subset U \cap V$ gde su U,V oblasti definisanosti f,g respektivno, takva da je $f|_W = g|_W$.

$\mathcal{O}_{x,X}$ je lokalni prsten u algebarskom smislu: on ima jedinstveni maksimalni ideal $\mathcal{M}_{x,X} = \{$sve klice regularnih funkcija jednakih 0 u x$\}$. Naime, ako je $f(x) \neq 0$, onda $1/f \in \mathcal{O}_{x,X}$. Polje $\mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{M}_{x,X} = k(x) \cong k$ je polje ostataka u tački x.

4. Racionalne funkcije. Na sličan način kao u prethodnoj tački, ako u skup svih regularnih funkcija na ma kakvim otvorenim podskupovima u X uvedemo relaciju ekvivalencije $(f,U)\sim(g,V) \Leftrightarrow$ postoji $W\subset U\cap V$ takva da je $f|_W = g|_W$, skup klasa ekvivalencije čini polje $K(X)$, polje racionalnih funkcija na X. Za svako $x\in X$ je $\mathcal{O}(X)\subset \mathcal{O}_{x,X} \subset K(X)$ i za svaki otvoreni $U\subset X$ je $K(X)=K(U)$.

Teorema 1.4. Neka je $X\subset \mathbb{A}^n$ afina mnogostrukost. Tada je:

(a) $\mathcal{O}(X) = A(X)$;

(b) ako je $\mathfrak{M}=\{f\in A(X) : f(x)=0\}$, onda je $\mathcal{O}_{x,X} = A(X)_{\mathfrak{M}}$ (lokalizacija po maksimalnom idealu), $\dim \mathcal{O}_{x,X} = \dim X$ i $x\mapsto \mathfrak{M}$ je bijekcija izmedju tačaka u X i maksimalnih ideala u $A(X)$;

(c) $K(X)=A(X)_{(0)}$ (polje razlomaka) i to je konačno generisano raširenje polja K stepena transcendentnosti dim X ;

(d) $\mathcal{O}(X)= \bigcap\{\mathcal{O}_{x,X} : x\in X\}$.

(v.[22]str.35).

Teorema 1.5. Ako su X i Y afine mnogostrukosti, postoji prirodna bijekcija $\mathrm{Hom}_{Aff}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{K\text{-}Alg}(A(Y),A(X))$. Specijalno, $X \cong Y$ u Aff $\Leftrightarrow A(X) \cong A(Y)$ kao K-algebre.

(v.[22]str.38-39).

Primedba. Prsten $\mathcal{O}(X)$ predstavlja prirodnu invarijantu samo u slučaju afinih mnogostrukosti, koji je nama i potreban.

Definicija. Racionalno preslikavanje mnogostrukosti $\Phi:X \dashrightarrow Y$ je klasa ekvivalencije para (U,φ) gde je $U\subset X$ otvoren, $\varphi:U\to Y$ morfizam i $(U,\varphi)\sim(V,\psi)\Leftrightarrow \varphi|_{U\cap V}=\psi|_{U\cap V}$.

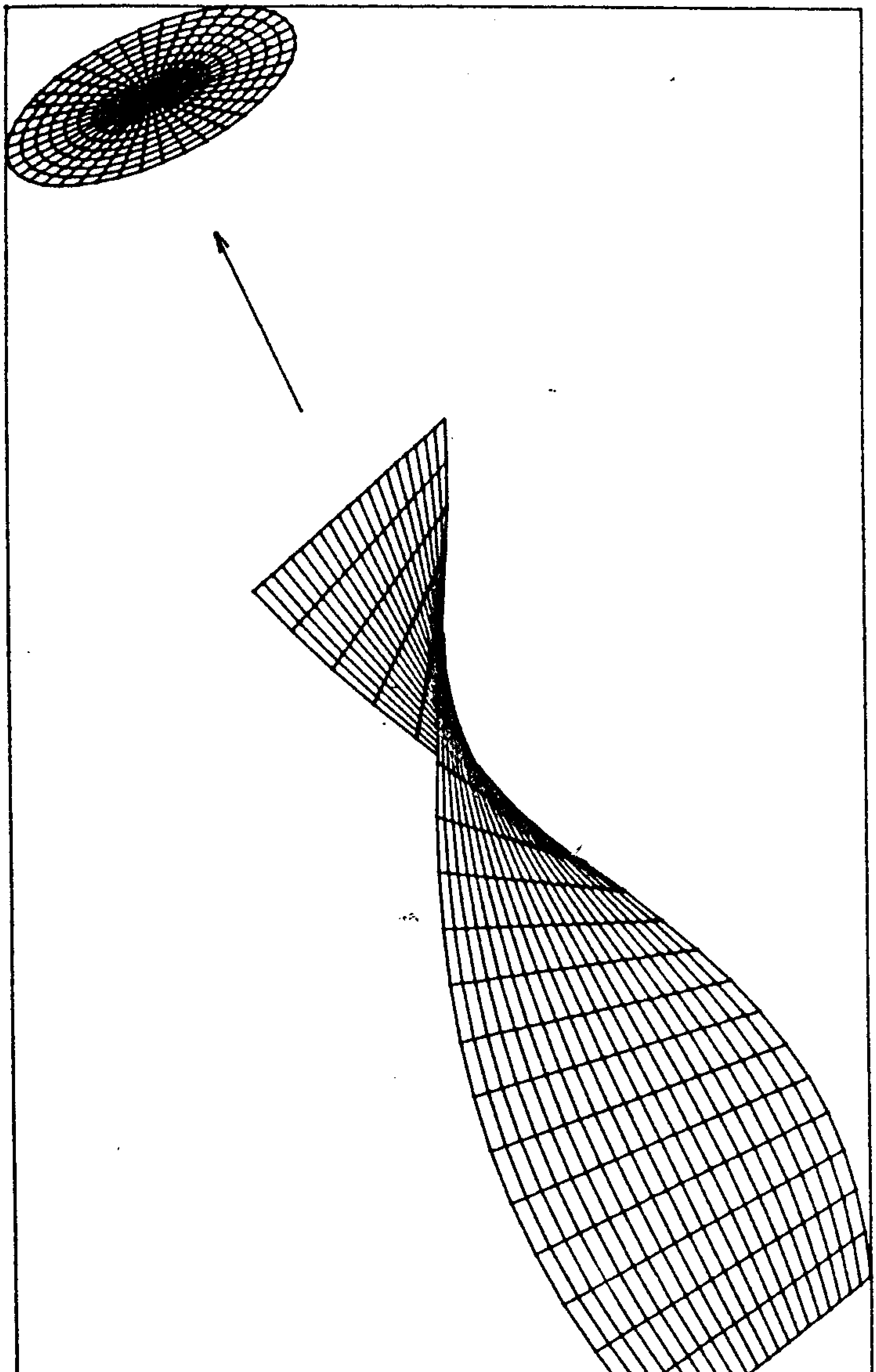
Racionalno preslikavanje ne mora biti funkcija u uobičajenom smislu: u nekim tačkama nije definisano, u drugim je nejednoznačno. Φ je dominantno ako postoji predstavnik $\varphi : U \to Y$ takav da je $\varphi(U)$ gust u Y.

Teorema 1.6. Kategorija mnogostrukosti sa dominantnim racionalnim preslikavanjima je inverzno ekvivalentna kategoriji konačno generisanih raširenja polja L/K.
(v.[22]str.46).

Izomorfizmi u ovoj kategoriji se nazivaju biracionalnim (izo)morfizmima.

Teorema 1.7. X je biracionalno izomorfno Y $\Leftrightarrow$ postoje otvoreni $U \subset X$ i $V \subset Y$ takvi da je $U \cong V$ $\Leftrightarrow$ $K(X) \cong K(Y)$ kao K-algebre.
(v.[22]str.47).

Za nas najvažnije regularno biracionalno preslikavanje je σ-proces (engl. "blowing-up", ruski "razdutie"), koji se može opisati na sledeći način (v.[22]str.48 ili [35]str.141). Neka je $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ proizvod afinog i projektivnog prostora sa koordinatama $(x_1,\dots,x_n)$ u $\mathbb{A}^n$ i $(y_1:\dots:y_n)$ u $\mathbb{P}^{n-1}$. Uočimo projekciju p: $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{A}^n$ i mnogostrukost
$X = \{ ((x_i),(y_j)) : x_i y_j = x_j y_i \text{ za } i,j=1,\dots,n\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.
Njena projekcija pokriva $\mathbb{A}^n$. Suženje $p|_X = \sigma : X \to \mathbb{A}^n$. Ovaj morfizam nazivamo σ-procesom ili razduvavanjem $\mathbb{A}^n$ u tački O. Za n=2 situacija se može ilustrovati slikom 1 (str.9). Pravim kroz O sa različitim nagibima u $\mathbb{A}^2$ odgovaraju različite prave u X.



Slika 1

5. Singulariteti. Svaka tačka algebarske mnogostrukosti ima afinu okolinu, pa prilikom izučavanja lokalnih osobina možemo smatrati sve mnogostrukosti afinim. Neka je $X \subset \mathbb{A}^n$, $I(X)=(f_1,\ldots,f_k)$, $\dim X = d$ i $x \in X$. Tangentni prostor $\mathcal{T}_{x,X}$ na X u tački x je linearni podprostor u $\mathbb{A}^n$ definisan sistemom linearnih jednačina

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial X_j}(X_j - x_j) = 0 \qquad (i=1,\ldots,k)$$

Matrica tog sistema $J(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial X_j} \right)$ je Jakobijeva matrica polinoma $f_1,\ldots,f_k$ u tački x. Ako je $r=\text{rang } J(x)$, očito je $\dim \mathcal{T}_{x,X} = n-r$ i $\dim X \leqslant \dim \mathcal{T}_{x,X}$.

Definicija. Tačka x je regularna ako je $d=n-r$ tj. ako je $\dim X = \dim \mathcal{T}_{x,X}$. U suprotnom $(d<n-r)$, x je singularna.

Regularnost se može okarakterisati i preko lokalnog prstena $\mathcal{O}_{x,X}$ tačke $x \in X$. Naime, $\mathcal{T}_{x,X} \cong (\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2)^*$ (dualni vektorski prostor) i $\dim \mathcal{O}_{x,X} \leqslant \dim_K \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$. Zato, x je regularna $\Leftrightarrow$ važi jednakost dimenzija $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{x,X}$ je regularni lokalni prsten. Svi singulariteti u X čine pravu podmnogostrukost (manje dimenzije) Sing X.

Najjednostavnija mera složenosti singulariteta je njegova višestrukost (v.[22]str.494 ili [33]str.75 i 153). Za tačke hiperpovrši višestrukost je jednaka stepenu početne homogene forme jednačine hiperpovrši u toj tački. Tačka je regularna $\Leftrightarrow$ njena višestrukost je 1. Postoje i druge mogućnosti klasifikacije singulariteta pomoću osobina lokalnog prstena tačke.

<u>Definicija</u>. Tačka $x \in X$ je normalna ako je $\mathcal{O}_{x,X}$ celozatvoren prsten (u svom polju razlomaka).
Poznato je da je svaki regularni lokalni prsten celozatvoren (v.[34] str.73). Zato su sve regularne tačke normalne.
Ali normalni mogu biti i singulariteti: singularitet konusa $x^2+y^2-z^2=0$ u $\mathbb{A}^3$ je normalan.

<u>Teorema 1.8</u>. Ako je mnogostrukost X normalna, ona je nesingularna u kodimenziji 1 tj. $\dim \mathrm{Sing}\, X \leqslant \dim X -2$.
(v.[35]str.158 a takodje [22]str.241).

Odavde specijalno sledi da na krivoj ne može biti normalnih singulariteta, a na površi je svaki normalni singularitet izolovan ($\dim \mathrm{Sing}\, X =0$). Važi i obrat.

<u>Teorema 1.9</u>. Izolovani singularitet površi u $\mathbb{A}^3$ je normalan.
(v.[22]str.241).

<u>Definicija</u>. Tačka $x \in X$ je faktorijalna ako je $\mathcal{O}_{x,X}$ PF-prsten (prsten sa jednoznačnom prostom faktorizacijom).
Singularitet konusa pomenut malopre nije faktorijalan jer su $(x+iy)(x-iy)=z\cdot z$ dve različite faktorizacije u $\mathcal{O}_{o,X}$.
Očito, regularnost $\Rightarrow$ faktorijalnost $\Rightarrow$ normalnost.
Grotendik je pokazao da je svaki izolovani singularitet hiperpovrši u $\mathbb{A}^n$ za $n \geqslant 5$ faktorijalan.

6. <u>Redukcija singulariteta</u>. Za datu singularnu mnogostrukost Y od interesa je naći mnogostrukost X i morfizam $\varphi : X \to Y$ takav da je izvan Sing Y φ izomorfizam a da X ima "jednostavnije" singularitete nego Y. To je problem

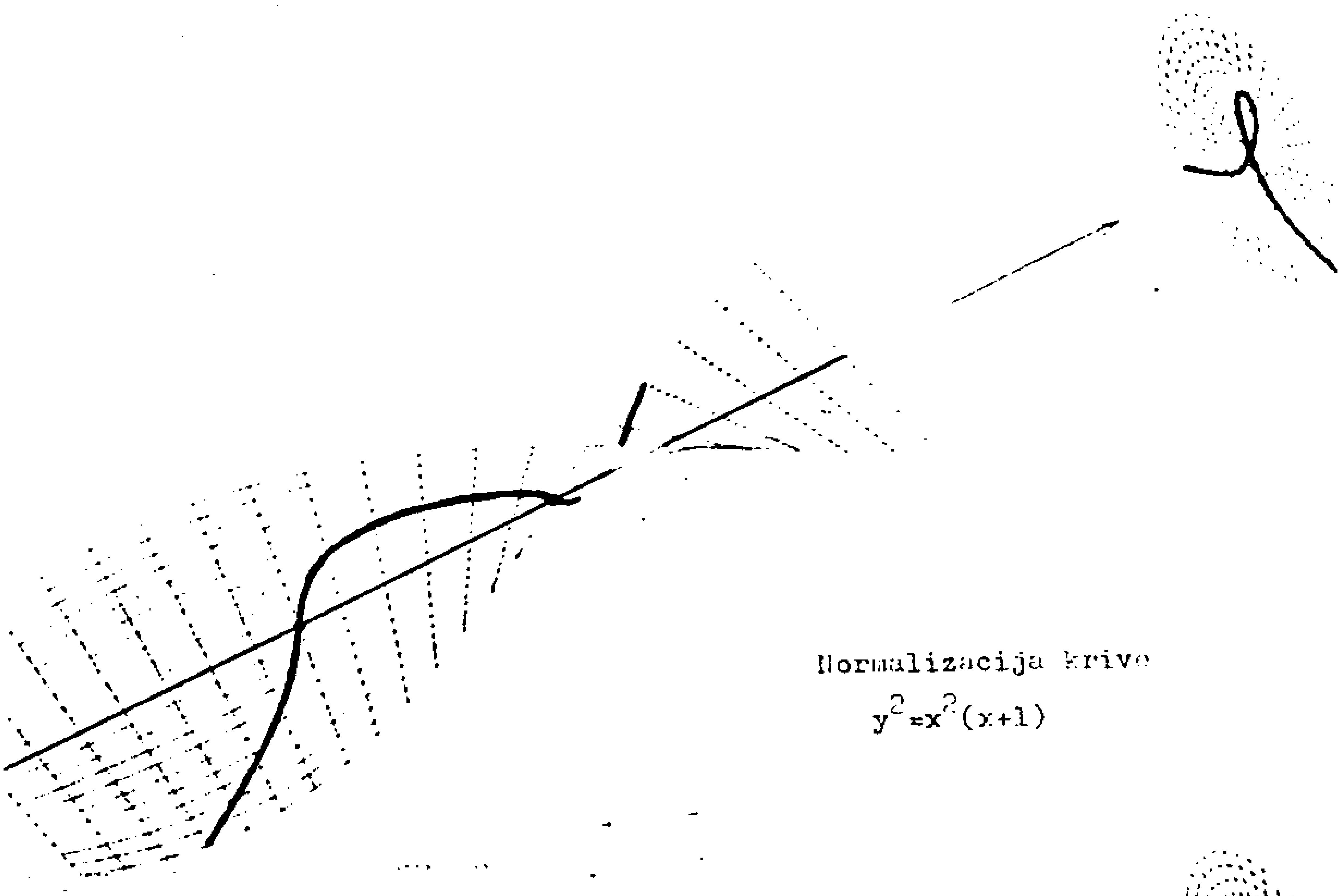
redukcije singulariteta. Ako se zadovoljimo normalnošću X, taj je problem u potpunosti rešen pomoću normalizacije. U afinom slučaju se ona opisuje na sledeći način. Ako je A = = A(Y) koordinatni prsten mnogostrukosti Y, B celo zatvorenje od A u njegovom polju razlomaka i X mnogostrukost koja odgovara B (teorema 1.5. str.7), tada imamo morfizam $\varphi: X \to Y$ koji odgovara inkluziji $A \subset B$ i predstavlja traženu normalizaciju jer je X normalna mnogostrukost. Ako je Y kriva, X je nesingularna (teorema 1.8. str.11). Zato normalizacija krivih rešava u potpunosti problem razrešenja singulariteta tj. nalaženje opisanog morfizma $\varphi : X \to Y$ sa regularnim X. Problem razrešenja singulariteta je dugo predstavljao glavni problem teorije algebarskih singulariteta u algebarskoj geometriji. U slučaju char K = 0 rešenje za površi znali su početkom ovog veka italijanski geometri. Ali tek 1964 god. je Heisuke Hironaka dokazao postojanje razrešenja u svim dimenzijama, u radu [23] na preko 200 stranica. Slučaj char K = p $\neq$ 0 je rešen samo za površi (Abjankar, [1]). To je još složeniji i mnogo manje geometrijski, a više aritmetički problem.

§2. Jednograni lokalni prsteni i jednograni singulariteti

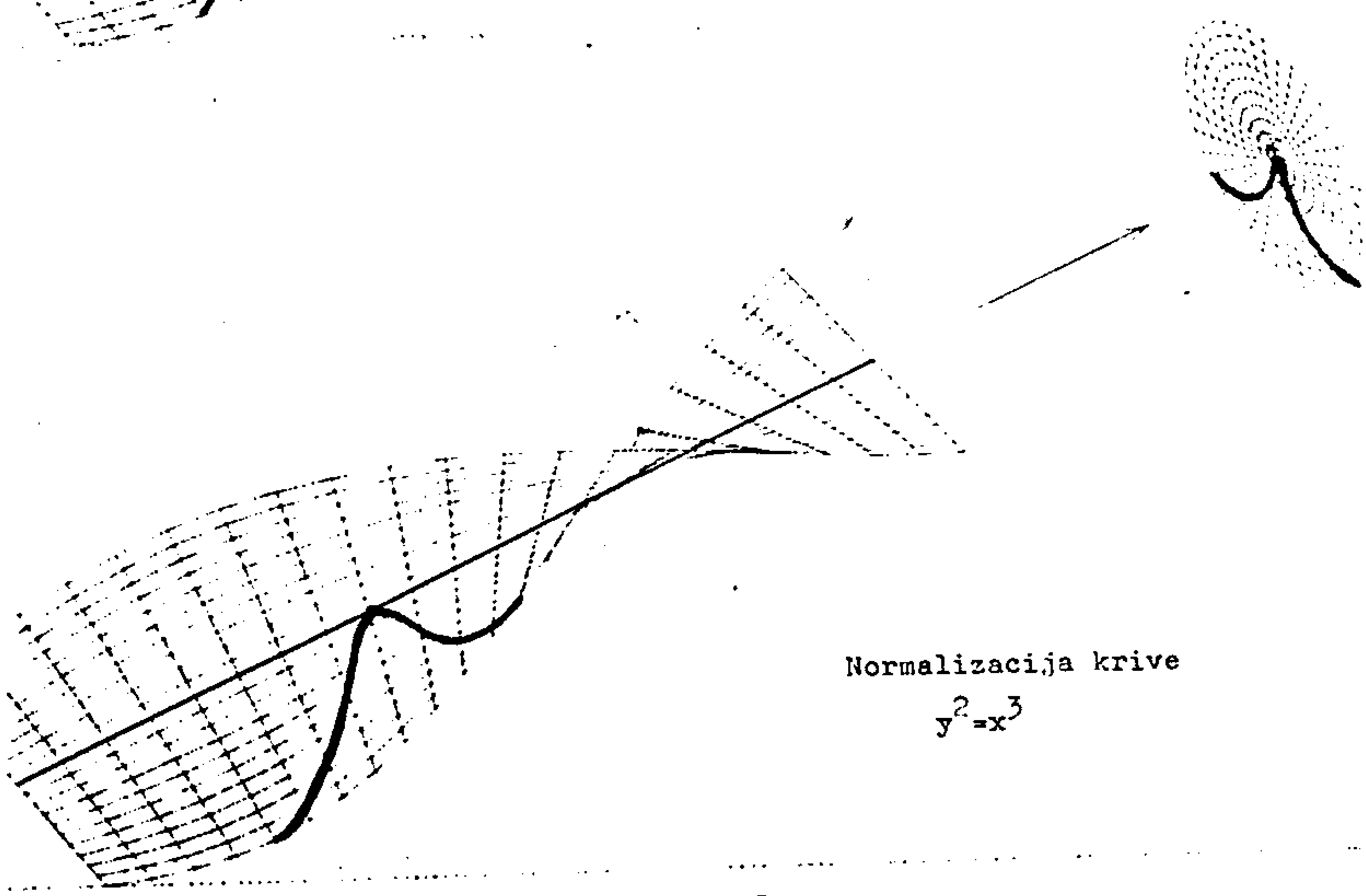
1. Jednograni lokalni prsteni. Proces normalizacije opisan na str.12 je važno sredstvo u klasifikaciji singulariteta. To je morfizam $f:X \longrightarrow Y$ koji je lokalno generisan raširenjem prstena $A \subset B$ pri čemu je B celo zatvorenje A u njegovom polju razlomaka. Prirodan diskretan parametar singulariteta $y \in Y$ je broj tačaka u X koje leže nad y. Pošto je celo zatvorenje lokalne oblasti polulokalan prsten, taj broj je uvek konačan. Jednostavan primer daje nam normalizacija dvaju ravnih singulariteta na slici 2 (str.14). U prvom slučaju taj broj je 2, u drugom 1. Singularitet sa vrednošću 1 može se nazvati jednogranim. Pošto tačke sloja $f^{-1}(y)$ odgovaraju maksimalnim idealima celog zatvorenja prstena $\mathcal{O}_{y,Y}$, lokalni prsten takve singularne tačke mora imati osobinu da njegovo celo zatvorenje ima samo jedan maksimalan ideal. Ovo je motivacija za sledeću čisto algebarsku definiciju jednogranosti.

Definicija. Neka je A lokalna oblast sa poljem razlomaka K. Reći ćemo da je A jednograni prsten, ako je njegovo celo zatvorenje A' u K lokalan prsten.

Ova klasa prstena je prirodna generalizacija klase celozatvorenih lokalnih prstena. Koliko mi je poznato, prvi put se pominje u Grotendikovom predavanju [18] i do danas



Normalizacija krive
$y^2=x^2(x+1)$



Normalizacija krive
$y^2=x^3$

Slika 2

o njoj ima malo rezultata. Neke od njih ćemo navesti.

<u>Teorema 2.1</u>. Neka je A lokalna oblast sa poljem razlomaka K. Tada, A je jednograna $\Leftrightarrow$ svaki medjuprsten $A \subset B \subset K$ koji je konačan kao modul nad A je lokalan.
(v.[8]str.403 i [20]str.151).

<u>Dokaz</u>. ($\Leftarrow$) Neka je A' celo zatvorenje A u K. Tada je A' unija svih svojih A-podmodula konačnog tipa:
$A' = \bigcup_{\alpha} \{ A_\alpha : \alpha$ je konačan podskup generatora A' nad $A \}$.
Svaki A_α je lokalan sa maksimalnim idealom $\mathfrak{M}_\alpha$. Neka je $\mathfrak{M} = \bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$. Za $\alpha \subset \beta$ je $A_\alpha \subset A_\beta$ i $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{M}_\beta$. Imamo sledeće:
$\mathfrak{M}$ je ideal (ako $a \in A_\alpha$, $m \in \mathfrak{M}_\beta$ onda $am \in A_\gamma$ za $\gamma = \alpha \cup \beta$);
$1 \notin \mathfrak{M}$ (u suprotnom $1 \in \mathfrak{M}_\alpha$ za neko α);
ako je $I \subset A$ pravi ideal, $I \cap A_\alpha \subset \mathfrak{M}_\alpha$ pa je $I = \bigcup_\alpha (I \cap A_\alpha) \subset \mathfrak{M}$ i zato je A' lokalan.
($\Rightarrow$) Neka je $A \subset B \subset K$. B je polulokalan. Neka su $\mathfrak{M} \subset A$, $\mathfrak{N} \subset A'$ i $\mathfrak{M}_i \subset B$ odgovarajući maksimalni ideali. Nad svakim $\mathfrak{M}_i$ leži neki prosti $\mathfrak{N}_i$ u A'(v. 8 str.380) i pošto su $\mathfrak{M}_i$ maksimalni, takvi su i $\mathfrak{N}_i$ (v. 8 str.378). Zato su $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}$ i $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}_i \cap B = \mathfrak{N} \cap B$ za sve i tj. B je lokalan. □

<u>Teorema 2.2</u>. Ako je $(A_\alpha, h_{\alpha\beta})$ induktivni sistem jednogranih prstena A_α sa injektivnim lokalnim homomorfizmima $h_{\alpha\beta}$, tada je $A = \varinjlim A_\alpha$ jednograni prsten.
(v.[20]str.151).

Napomenimo ovde konstrukciju kompletiranja. Ako je $(A, \mathfrak{M})$ lokalni prsten, uočimo skup svih nizova u A i uvedimo konvergenciju sa $x_n \to x \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_n - x \in \mathfrak{m}^n$. Skup svih Košijevih nizova $\hat{A}$ postaje lokalni prsten - kompletiranje prstena A - koji sadrži A. Skup $\{\mathfrak{m}^n : n \in \mathbb{N}\}$ predstavlja fundamentalni sistem okolina tačke 0. $\hat{A}$ se može definisati i kao inverzni limes: $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$.

Teorema 2.3. (a) Neka je A Neterova lokalna oblast. Ako je $\hat{A}$ oblast, onda je A jednogran.

(b) Neka je A konačna algebra nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0 i lokalna oblast. Tada,

A je jednogran $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ je oblast.

((a)v.[8]str.403 i [20]str.151; (b)v.[19]IV.24.).

Dokaz. (a) Iskoristimo teoremu 2.1.. Neka je $A \subset B \subset K$, B konačni A-modul i L polje razlomaka prstena $\hat{A}$. Tada je $B \subset E$ za neki slobodan A-podmodul E u K. Ali $\hat{A}$ je pljosnat (engl. "flat", ruski "ploskii") pa su u dijagramu

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d] & B \arrow[r, hook] \arrow[d, "\gamma"] & E \arrow[r, hook] \arrow[d, "\delta"] & K \arrow[d] \\
\hat{A} = \hat{A} \otimes_A A \arrow[r, "\alpha"] & \hat{A} \otimes_A B \arrow[r, "\beta"] & \hat{A} \otimes_A E \arrow[r] & \hat{A} \otimes_A K = \hat{A}K \subset L
\end{tikzcd}$$

α i β monomorfizmi. Pošto je E slobodan, i δ je mono. Zato je i γ mono pa je $\hat{A} \otimes_A B \cong \hat{A}B \subset L$ jer je $\hat{A}B$ najmanji podprsten u L koji sadrži i $\hat{A}$ i B. B je polulokalan jer je konačan nad A. Neka je $\mathfrak{m}$ maksimalni ideal u A, $\mathfrak{m}_i$ svi maksimalni ideali u B i R=radB. Tada je $\mathfrak{m}B \subset R$ jer je $\mathfrak{m}B \cap A = \mathfrak{m}$ a $R \cap A = \mathfrak{m}_i \cap A = \mathfrak{m}$, pa je $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{m}_i$(ako $\mathfrak{m}B \subset P$ onda je $\mathfrak{m} = P \cap A$ pa je $P = \mathfrak{m}_i$). Zato je $V(\mathfrak{m}B) = V(R)$ u Spec B i $R^n \subset \mathfrak{m}B \subset R$.

Ali B je Neterov jer je konačan nad Neterovim prstenom A. Sad je $B\otimes_A\hat{A}=\hat{B}=$ kompletiranje B po $\mathfrak{m}B$ = kompletiranje B po R. Ali (v.[8]str.231) $B=\prod_{i=1}^{k}\hat{B}_{\mathfrak{m}_i}$. Pošto je $\hat{B}=B\hat{A}\subset L$ oblast, k=1 i B je lokalan.

(b) Na osnovu korolara 37.6 u [33]str.139, broj prostih delitelja ideala (0) u $\hat{A}$ jednak je broju maksimalnih ideala u A'. Zato, ako je A jednograni, A' je lokalan, taj broj je 1 i (0) je prost ideal u $\hat{A}$. □

Uslov da je $\hat{A}$ oblast u terminologiji Nagate [33] se naziva analitičkom ireducibilnošću. Dakle, u "geometrijskoj" situaciji jednogranost $\Leftrightarrow$ analitička ireducibilnost.

Jedan od razloga zbog kojih su jednograni lokalni prsteni manje izučavani od normalnih je i to što se za razliku od normalnosti svojstvo jednogranosti ne nasledjuje prilikom lokalizacije (v. primer u [20]str.149).

Razni rezultati u vezi sá jednogranim lokalnim prstenima se u poslednje vreme povremeno javljaju u literaturi (v.[13],[16],[17]). U Grotendikovom predavanju [18] se medjutim pominje jedan interesantan rezultat W.-L. Chowa, čiji dokaz nije nigde publikovan. Koristeći tehniku algebarske geometrije možemo dati dokaz ove teoreme (v. rad autora [28], teorema 1.6.).

<u>Teorema 2.4.</u> Neka je A Neterova jednograna lokalna oblast, $\mathfrak{m}\subset A$ maksimalni ideal, $\mathrm{Gr}A=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ asocirani graduisani prsten. Tada je projektivni spektar Proj(GrA) povezan (u topologiji Zariskog).

Dokaz. Neka je $S=\bigoplus_{n\geq 0}\mathfrak{m}^n$, Proj S "razduvavanje" Spec A u zatvorenoj tački $\mathfrak{m}$(v. [22] str.213). Postoji kanonski projektivni biracionalni epimorfizam $f:\mathrm{Proj}\, S \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ sa Štajnovim razlaganjem (v. [22] str.358):

$$\mathrm{Proj}\, S \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}\, A \quad , \quad f=gh \qquad (*)$$

gde je h konačan i $g_*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_Z$. Zato je h afini i Z=SpecB gde je $\tilde{B}=f_*\mathcal{O}_S$ i B konačni A-modul. Možemo smatrati da je Z ireducibilan jer je Spec A ireducibilan. Proširimo u (*) bazu do Spec k gde je $k=A/\mathfrak{m}$ polje ostataka prstena A. Imamo $P=\mathrm{Proj}\, S \times_{\mathrm{Spec} A} \mathrm{Spec}\, k = \mathrm{Proj}(\mathrm{Gr}A)$, i dijagram

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "l"'] & \mathrm{Spec}\, B/\mathfrak{m}B \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Spec}\, k \arrow[d, "i"'] \\
\mathrm{Proj}\, S \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Spec}\, B \arrow[r, "h"'] & \mathrm{Spec}\, A
\end{tikzcd}$$

u kome je donji red (*) i svi kvadrati su produkt-dijagrami. Ali $g_*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_B$ i na osnovu tvrdjenja u [22] str.327,

$p_*\mathcal{O}_P = p_*l^*\mathcal{O}_S = j^*g_*\mathcal{O}_S = j^*\mathcal{O}_B = \mathcal{O}'_{B/\mathfrak{m}B}$.

Zato morfizam p ima povezane slojeve (v. [22] str.357). Ali A je jednogran, B je lokalan (teorema 2.1. na str.15) i Spec $B/\mathfrak{m}B$ se sastoji iz jedne tačke. Sloj nad tom tačkom je povezan, a to je upravo P=Proj(GrA). □

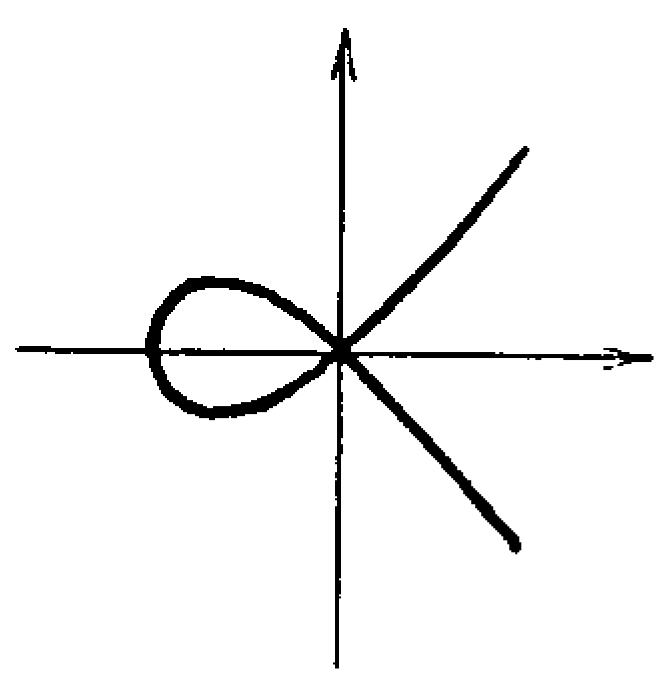
2. Jednograni singulariteti hiperpovrši. Neka je $x\in X$ tačka algebarske mnogostrukosti X i $\mathcal{O}_{x,X}$ njen lokalni prsten. $\mathcal{O}_{x,X}$ nije u dovoljnoj meri lokalna (u topološkom smislu) karakteristika tačke. Recimo, izomorfizam $\mathcal{O}_{x,X} \cong \mathcal{O}_{y,Y}$ povlači biracionalnu izomorfnost X i Y (v. teoremu 1.7. na str.8).

Drugim rečima, osobine $\mathcal{O}_{x,X}$ utiču na skoro sve tačke mnogostrukosti. Medjutim, ako kompletiramo $\mathcal{O}_{x,X}$ (v. str.15), dobijeni prsten $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ je u većoj meri lokalna karakteristika tačke.

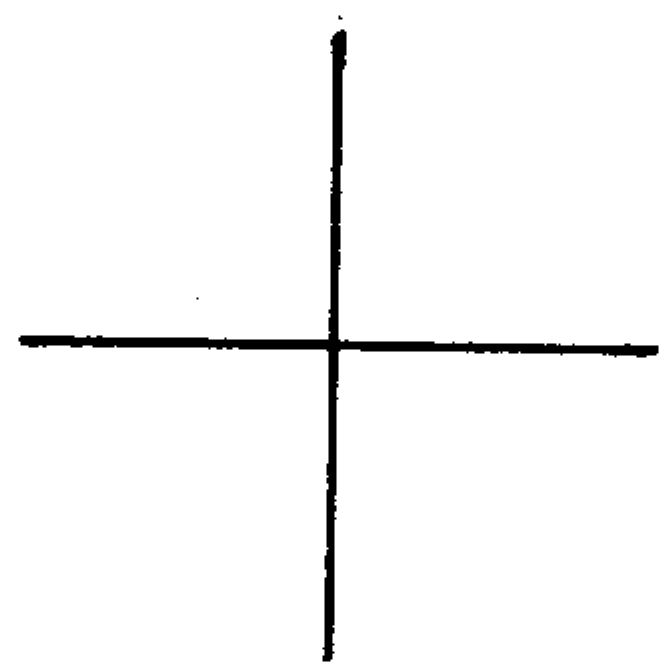
<u>Definicija</u>. Kažemo da su tačke $x\in X$ i $y\in Y$ analitički izomorfne ako je $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}\cong\widehat{\mathcal{O}}_{y,Y}$.

Iz analitičke izomorfnosti tačaka x i y sledi dimX=dimY. Isto tako, svake dve proste tačke na mnogostrukostima iste dimenzije n su analitički izomorfne. Naime, na osnovu strukturne teoreme Koena (v.[39]tom 2 str.355) u takvoj tački je $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}\cong K[[x_1,\dots,x_n]]$ (prsten formalnih stepenih redova od n promenjljivih). Znači, analitički izomorfizam je netrivijalan pojam samo u singularitetima.

<u>Primer</u>. Singulariteti u tački 0 krivih X: $y^2=x^2(x+1)$ i Y: $xy=0$ (v.sliku 3) su analitički izomorfni. Kompletiranje njihovog lokalnog prstena je $K[[x,y]]/(xy)$. Geometrijski, to odgovara činjenici da X u okolini tačke O(o,o) izgleda kao dve prave koje se seku.



$y^2=x^2(x+1)$



$xy=0$

<u>Definicija</u>. Neka je $x \in X$ singularna tačka i $\mathcal{O}_{x,X}$ njen lokalni prsten. Reći ćemo da je x jednograni singularitet ako je $\mathcal{O}_{x,X}$ jednograni prsten.
Na osnovu teoreme 2.3.(b) (str.16) ovo je ekvivalentno zahtevu da $\widehat{\mathcal{O}}_{x,X}$ nema nula delitelja.

Neka je X glatka n-dimenziona mnogostrukost ("ambijentni prostor"), $S \subset X$ hiperpovrš u X, $x \in S$. Očito, lokalni prsten $\mathcal{O}_{x,X} = K[x_1,\dots,x_n]_{(0)}$, $\mathcal{O}_{x,S} \cong \mathcal{O}_{x,X}/(f)$ gde je $f=0$ (lokalna) jednačina S u X, $f \in K[x_1,\dots,x_n]$. Kompletiranjem dobijamo $\widehat{\mathcal{O}}_{x,S} \cong K[[x_1,\dots,x_n]]/(f)$ gde je sad (f) ideal generisan sa f u prstenu $K[[x_1,\dots,x_n]]$. Vidimo da se izučavanje klasa analitički izomorfnih singulariteta hiperpovrši svodi na izučavanje glavnih ideala prstena $K[[x_1,\dots,x_n]]$. Zato navedimo osnovne rezultate o tom prstenu koji će nam biti potrebni. Zasnivanje i osnovni pojmovi u vezi sa formalnim stepenim redovima mogu se naći u [7]str.64 i dalje.

<u>Lema</u>. Red $f \in K[[x_1,\dots,x_n]]$ je invertibilan $\Leftrightarrow$ $f(0,\dots,0)\neq 0$. (v.[7]str.71).

Reći ćemo da je red $f \in K[[x_1,\dots,x_n]]$ regularan po promenjljivoj x_i ako f sadrži član oblika cx_i^k . Sledeća teorema je od suštinskog značaja za prsten $K[[x_1,\dots,x_n]]$.

<u>Teorema 2.5</u>. Neka je $f \in K[[x_1,\dots,x_n]]$ regularan po x_n i ord $f(0,\dots,0,x_n)=k$. Tada postoji invertibilni $g \in K[[x_1,\dots,x_n]]$ i $a_i \in K[[x_1,\dots,x_{n-1}]]$ sa $a_i(0,\dots,0)=0$ $(i=1,\dots,k)$ takvi da je $f(x)=g(x)\cdot(x_n^k+a_1(x_1,\dots,x_{n-1})\cdot x_n^{k-1}+\dots+a_k(x_1,\dots,x_{n-1}))$.

Ova teorema se naziva formalnom varijantom Vajerštrasove pripremne teoreme (WPTF) i može se naći u [39]tom 2 str.168. Slučaj dve promenljive je obradjen u [8]str.593. Konvergentna varijanta (sa $K=\mathbb{C}$) može se naći na pr. u [6]str.445. Elementi prstena $K[[x_1,\dots,x_{n-1}]][x_n]$ se nazivaju Vajerštrasovim polinomima. WPTF dakle kaže da se svaki regularni po x_n formalni red može zapisati kao proizvod invertibilnog reda i Vajerštrasovog polinoma po x_n. Da uslov regularnosti nije ograničavajući, vidimo iz sledeće leme.

<u>Lema 2.6.</u> Svaki $f\in K[[x_1,\dots,x_n]]\setminus K$ se može linearnom transformacijom promenljivih dovesti na oblik, regularan po bilo kom datom skupu promenljivih.

<u>Dokaz.</u> Dovoljno je pokazati da postoji linearna smena $y=Cx$ takva da je $g(x)=f(Cx)$ regularan po istim promenljivim po kojim je regularan i f i još po jednoj promenljivoj. Neka f nije regularan po x_1. Uzmimo nove promenljive $y_1=x_1$, $y_i=x_i+\varepsilon_i x_1$ $(i=2,\dots,n)$. Tada je novi red

$g(x)=\sum a_{i_1\dots i_n}\, x_1^{i_1}(x_2+\varepsilon_2x_1)^{i_2}\dots(x_n+\varepsilon_nx_1)^{i_n}$, pa je

$g(0,x_2,\dots,x_n)=f(0,x_2,\dots,x_n)$, a

$$g(x_1,0,\dots,0)=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{i_1+\dots+i_n=i} a_{i_1\dots i_n}\,\varepsilon_2^{i_2}\dots\varepsilon_n^{i_n}\Big)x_1^i\ .$$

Kad bi svi koeficijenti ovog reda bili 0, bilo bi identički $f(1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)=0$. Zato postoji izbor $\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ takav da je $g(x_1,0,\dots,0)=cx_1^m+\dots$ sa $c\neq 0$ i g je traženi red. □

Pomoću teoreme 2.5. (WPTF) se dokazuje sledeća značajna teorema (v.[39]tom 2 str.290 za formalnu, [6]str.445 za konvergentnu varijantu, a takodje [8]str.597).

Teorema 2.7. Prsten $K[[x_1,\ldots,x_n]]$ je PF-prsten.

Vratimo se sad na malopredjašnju situaciju $x\in S\subset X$. Singularitet $x\in S$ je jednograni $\Leftrightarrow$ ideal (f) je prost u $K[[x_1,\ldots,x_n]]$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ je nerastavljiv u tom prstenu. Zato je u cilju klasifikacije jednogranih singulariteta od interesa nalaženje kriterijuma za utvrdjivanje analitičke nerastavljivosti polinoma tj. nerastavljivosti u prstenu formalnih redova. Tom zadatku je posvećen drugi, osnovni deo ovog rada.

3. Izolovani singulariteti. Ovo je najjednostavnija klasa singulariteta. U slučaju polja $\mathbb{C}$ postoji razradjena klasifikacija ovih singulariteta do na difeomorfizam, uglavnom u radovima Arnoljda (v.[3],[4]). Ispostavilo se da je tehnika razvijena u tim radovima izuzetno značajna i za pitanja kojima se bavimo u ovom radu. Ovde ćemo izneti neke osobine tih singulariteta koje će nam kasnije koristiti.

Neka je $x\in S\subset X$ situacija opisana na str.20 i x je singularna tačka tj. rešenje sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\ldots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0 \qquad (*)$$

Možemo smatrati da je $x=0$ bez gubitka opštosti. Imamo x je izolovani singularitet $\Leftrightarrow$ $\exists n\in\mathbb{N},\ \mathfrak{m}_{x,X}^{n}\subset\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=I$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\dim_K \mathcal{O}_{x,X}/I<+\infty$. Ova dimenzija se naziva Milnorovim brojem singulariteta x i obeležava μ (v.[32]str.59). μ je jednak višestrukosti izolovanog korena $x=0$ u sistemu $(*)$.

Dakle, x je izolovan $\Leftrightarrow$ ima konačan Milnorov broj.

U literaturi postoji izvesna terminološka zbrka. Milnorov broj singulariteta se naziva i višestrukošću (v.[31]). Medjutim, višestrukost singulariteta u algebarskoj geometriji je nešto drugo (v. §1.5 str.10), pa ćemo μ zvati isključivo Milnorovim brojem. Isto tako, singulariteti sa konačnim μ se nazivaju "konačnokratnim" i nedegenerisanim. I ovi nazivi su za nas neodgovarajući, prvi zbog drukčijeg pojma višestrukosti ("kratnosti"), a drugi zato što se u literaturi o singularitetima realnih funkcija (teoriji katastrofa) nedegenerisanim nazivaju singulariteti sa nenultim Hesijanom (v.[32]str.59), za koje se koristi još i termin morsovski singulariteti zbog leme Morsa. Zbog toga ćemo koristiti isključivo naziv izolovani singulariteti. Očito, svaki morsovski singularitet ima višestrukost 2 u algebrogeometrijskom smislu i Milnorov broj $\mu=1$.

Jedna od značajnih razlika izmedju izolovanih i neizolovanih singulariteta data je sledećom teoremom Mathera, dokazanom u [32]str.89 (v. i [6]str.478).

<u>Teorema 2.8</u>. Neka $f\in K[[x_1,\dots,x_n]]$ ima izolovani singularitet u 0 sa Milnorovim brojem $\mu<+\infty$. Tada postoji $k=k(\mu)$ (prirodan broj) takav da ako je $g\in K[[x_1,\dots,x_n]]$ i f i g se poklapaju do stepena k zaključno, onda postoji formalni izomorfizam $y_1=x_1+\dots$, ... , $y_n=x_n+\dots$ prstena $K[[x_1,\dots,x_n]]$ sa samim sobom takav da je $f(y(x))=g(x)$.

Primedba. U [32] ocena za k je k=2m gde je $m \in \mathbb{N}$ takav da $\mathfrak{m}^m \subset (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Može se dobiti i bolja ocena k=m+1 (v. [6]str.478) kao i dokazati odgovarajuća teorema u konvergentnom slučaju.

Jedna od najbolje izučenih i najjednostavnijih klasa izolovanih singulariteta su tzv. Briskornovi singulariteti - singulariteti polinoma $x_1^{k_1}+x_2^{k_2}+\ldots+x_n^{k_n}$ za $k_i \geq 2$ (v.[32] str.71). Lako se vidi da je svaki takav singularitet izolovan, pa je svaki takav polinom analitički nerastavljiv. Ova se činjenica može dokazati i nezavisno.

Lema 2.9. Svaki polinom $f=a_1x_1^{k_1}+\ldots+a_nx_n^{k_n}$ za $n \geq 3$ je analitički nerastavljiv. Za n=2, f je analitički nerastavljiv $\Leftrightarrow$ $M(k_1,k_2)=1$.

Dokaz. Za n=2 smer $\Leftarrow$ je očigledan, a smer $\Rightarrow$ će slediti iz §4 drugog dela rada.

U opštem slučaju, polinom $a_1x_1^{k_1}+a_2x_2^{k_2}$ nema višestruke faktore što se neposredno proverava. Opšti slučaj sada sledi indukcijom po n, primenom klasičnog Ajzenštajnovog kriterijuma na prsten $K[[x_1,\ldots,x_{n-1}]][x_n]$ i činjenice da je Vajerštrasov polinom rastavljiv u tom prstenu $\Leftrightarrow$ on je rastavljiv u $K[[x_1,\ldots,x_n]]$ (v.[6]str.458).

U radu Kušnirenka [24] data je izvanredna teorema o izračunavanju Milnorovog broja singulariteta hiperpovrši na osnovu broja celobrojnih tačaka ispod tzv. Njutnovog dijagrama reda f. Slična metoda korišćena je u čitavoj seriji radova ove škole (v.[12],[25],[36]) za ispitivanje nekih osobina u vezi sa singularitetima. Ovi radovi, a naročito pomenuta teorema Kušnirenka, bili su osnovni podsticaj za mene da primenim metodu Njutnovog dijagrama u razmatranju nešto drukčije problematike - nerastavljivosti.

II deo

NERAZLOŽIVI POLIEDRI

I

NERASTAVLJIVI FORMALNI REDOVI

§1. Poliedri: osnovni pojmovi

U ovom odeljku ćemo navesti neophodne definicije i rezultate teorije konveksnih poliedara, uglavnom na osnovu knjige [21]. Biće dokazani i neki jednostavni rezultati potrebni u daljem, koji se ne nalaze u standardnoj literaturi. Terminologija se uglavnom poklapa sa [21], pri čemu pod poliedrom uvek podrazumevamo konveksni poliedar, koji ne mora biti ograničen.

Fiksirajmo afini euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pri čemu uvek identifikujemo tačke i odgovarajuće radijus-vektore. Poluprostor H je skup $\{x\in\mathbb{R}^n : (x,u)\leqslant\alpha\}$, gde je u vektor spoljne normale granice poluprostora - hiperravni $L=\partial H$ zadate sa $(x,u)=\alpha$. Afini omotač Aff S skupa $S\subset\mathbb{R}^n$ je afini podprostor najmanje dimenzije koji sadrži S.

<u>Definicija</u>. Poliedar $P\subset\mathbb{R}^n$ je presek konačnog broja zatvorenih poluprostora: $P=\bigcap_{i=1}^{k} H_i$, $H_i=\{x\in\mathbb{R}^n : (x,u_i)\leqslant\alpha_i\}$. Možemo uvek smatrati da je ova reprezentacija neskrativa tj. da je $\bigcap_{j\neq i} H_j\neq P$ za sve $i=1,\dots,k$. Dimenzija $\dim P \overset{df}{=} \dim \operatorname{Aff} P$. Poliedar je zatvoreni konveksni podskup u $\mathbb{R}^n$. Hiperravan oslonca $L(P,v)$ poliedra P sa spoljnom normalom $v\in\mathbb{R}^n$ je hiperravan $(x,v)=\sup\{(y,v):y\in P\}$. $F\subset P$ je strana poliedra P ako je za neku hiperravan oslonca $L(P,v)$, $F=P\cap L(P,v)$. U

tom slučaju obeležavamo $F=F(P,v)$. Dimenzija strane F je $\dim F \overset{df}{=} \dim \mathrm{Aff}F$. Strane dimenzije 0 su temena, 1 ivice, a dimenzije $\dim P-1$ stranice poliedra P. Skup svih k-dimenzionih strana je $\mathcal{F}_k(P)$, skup svih strana $\mathcal{F}(P)$, broj strana dimenzije k je $f_k=f_k(P)$, od toga ograničenih f_k^o a neograničenih f_k^∞. Očito, $f_o^\infty=0$. Ograničeni poliedar (sa svim $f_k^\infty=0$) je politop.

Poliedar P je celobrojan ako su koordinate svih njegovih temena celobrojne. Skup svih poliedara (celobrojnih poliedara) obeležavaćemo $\mathcal{P}(\mathcal{P}_c)$. Lako se ustanovljuju sledeće osobine poliedara (v.[21]str.21 i 27).

(a) Ako je $P=\bigcap_i H_i$ neskrativa reprezentacija, onda je svaka stranica P oblika $F_i=P\cap\partial H_i$ i $\partial P=\bigcup_i F_i$.

(b) Svako $F\in\mathcal{F}(P)$ je poliedar dimenzije $\dim F$ i presek konačnog broja stranica poliedra P.

(c) $\mathcal{F}(P)$ je konačan skup i mreža u odnosu na inkluziju.

U partitivni skup $P(\mathbb{R}^n)$ se standardno prenose operacije vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$: $A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}$ i $\lambda A=\{\lambda a : a\in A\}$ pri čemu važe uobičajene osobine $(A+B)+C=A+(B+C)$, $A+B=B+A$, $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$ kao i $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ za $\lambda\mu\geqslant 0$. Primetimo da ovo ne važi u slučaju $\lambda\mu<0$.

<u>Lema 1.1</u>. Ako su P i Q (celobrojni) poliedri a $\lambda\in\mathbb{R}\ (\mathbb{Z})$, onda su i $P+Q$ i λP (celobrojni) poliedri.
(v.[21]str.316).

Primetimo da je $\dim(P+Q) \geq \dim P, \dim Q$.

Grupa translacija prostora $\mathbb{R}^n$(translacija za celobrojni vektor) dejstvuje na $\mathcal{P}(\mathcal{P}_c)$. Orbitu P u tom dejstvu obeležavaćemo sa $[P]$. U teoriji poliedara većina rezultata se u stvari formuliše za klase (orbite) tj. do na translaciju. Mi ćemo ipak praviti razliku s obzirom na kasnije potrebe. Operacije sabiranja i množenja skalarom definisane u $\mathcal{P}_{(c)}$ prenose se i u skupove translatornih orbita: $[P]+[Q]=[P+Q]$ i $\lambda[P]=[\lambda P]$. Poliedar P je homotetičan poliedru Q sa koeficijentom λ ako je $[P]=\lambda[Q]$.

Neka je dat poliedar $P=\bigcap_{i=1}^{k}\{x\in\mathbb{R}^n : (x,u_i)\leq\alpha_i\}$ gde su u_i spoljašnje normale stranica. Karakteristični konus P je poliedar $ccP=\bigcap_{i=1}^{k}\{x\in\mathbb{R}^n : (x,u_i)\leq 0\}$. On ima još nekoliko karakterizacija: to je maksimalni podskup u $\mathbb{R}^n$ sa osobinom da je za svako $x\in P$, $x+ccP\subset P$; to je skup svih zraka koje P sadrži transliranih u koordinatni početak (v.[21]str.24-26). P je politop $\Leftrightarrow$ $ccP=\{0\}$ (v.[21]str.24 i 32). Svaki neograničeni poliedar koji ne sadrži prave može se predstaviti kao $P=D(P)+ccP$ gde je $D(\Gamma)$ unija svih ograničenih strana poliedra P, koju ćemo zvati dijagramom poliedra P. Dijagram D(P) je ograničena poliedarska (hiper)površ odnosno poliedarski kompleks. U daljem ćemo koristiti i graf G(P) poliedra P tj. graf ivica kompleksa D(P). Pod grafom G(P) ćemo ponekad podrazumevati njegovu faktičku realizaciju tj. 1-skelet poliedra P. U toj terminologiji D(P) je (dimP-1)-skelet P.

Za $P\in\mathcal{P}$ funkcija $H(P,-): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ definisana sa $H(P,x)=\sup\{(y,x) : y\in P\}$ se naziva funkcijom oslonca i ima sledeće osobine (v.[21]str.13).

(a) Za $H(P,v)<+\infty$ $(x,v)=H(P,v)$ je jednačina $L(P,v)$.

(b) $H(P,-)$ je pozitivno homogena i konveksna funkcija tj. $H(P,\lambda x)=\lambda H(P,x)$ za $\lambda\geqslant 0$ i $H(P,x+y)\leqslant H(P,x)+H(P,y)$.

(c) $H(P,-)$ je deo po deo linearna.

(d) Za svaku funkciju H koja zadovoljava osobine (b) i (c) postoji $P\in\mathcal{P}$ za koji je $H=H(P,-)$.

Teorema 1.2. (a) $H(P,-)=H(Q,-) \Leftrightarrow P=Q$;

(b) $P=Q+R \Leftrightarrow H(P,-)=H(Q,-)+H(R,-)$;

(c) $P=Q+R \Leftrightarrow \forall u\in\mathbb{R}^n\ F(P,u)=F(Q,u)+F(R,u)$.

(v.[21]str.14 i 317 a takodje [5]str.31)

Dokaz. S obzirom da je (c) naročito značajno za nas, dokazaćemo ovu teoremu, tim pre što je u [21] ona data za politope.

(a) $H(P,-)=H(Q,-) \Rightarrow \forall u\neq 0\ \ L(P,u)=L(Q,u) \Rightarrow P=Q$.

(b) $\Rightarrow$: $H(P,u)=\sup\{(x,u):x\in P\}\leqslant\sup\{(y,u):y\in Q\}+\sup\{(z,u):z\in R\}$ $=H(Q,u)+H(R,u)$. Ako je $H(Q,u)=+\infty$, očito je i $H(P,u)=+\infty$. Ako je pak $H(Q,u)<+\infty$ i $H(R,u)<+\infty$, onda je za neko teme $q\in Q$ odnosno $r\in R$, $H(Q,u)=(q,u)$ i $H(R,u)=(r,u)$. Sada je $H(Q,u)+H(R,u)=(q+r,u)\leqslant\sup\{(x,u):x\in P\}=H(P,u)$ jer $q+r\in P$.

$\Leftarrow$: $H(P,-)=H(Q,-)+H(R,-)=H(Q+R,u) \Rightarrow P=Q+R$ na osnovu (a).

(c) Neka su $L(P,u)$: $(x,u)=H(P,u)$, $L(Q,u)$: $(y,u)=H(Q,u)$ i $L(R,u)$: $(z,u)=H(R,u)$ odgovarajuće hiperravni oslonca. Na osnovu (b) je $L(P,u)=L(Q,u)+L(R,u)$ i $F(P,u)=P\cap L(P,u)=$

$=(Q+R)\cap(L(Q,u)+L(R,u))\supset Q\cap L(Q,u)+R\cap L(R,u)$. Ako je tačka $p\in(Q+R)\cap(L(Q,u)+L(R,u))$ onda je $p=q+r=q'+r'$ gde $q\in Q$, $r\in R$ a $q'\in L(Q,u)$, $r'\in L(R,u)$. Sada je $(p,u)=(q+r,u)\leq H(Q,u)+H(R,u)$ a sa druge strane $(p,u)=(q'+r',u)=H(Q,u)+H(R,u)$ odakle je $(q,u)=H(Q,u)$ i $(r,u)=H(R,u)$, pa mora biti $q\in Q\cap L(Q,u)$ i $r\in R\cap L(R,u)$. □

<u>Lema 1.3</u>. Ako $P,Q,R\in\mathcal{P}_{(c)}$ i $P=Q+R$, tada se svako teme $p\in P$ predstavlja u obliku $p=q+r$ sa $q\in Q$ i $r\in R$ na jedinstven način, pri čemu q i r moraju biti temena Q i R respektivno.

<u>Dokaz</u>. Na osnovu teoreme 1.2.(c), $p=q+r$ gde su q, r temena Q, R respektivno. Ako je $p=q'+r'$ sa $q'\in Q$ i $r'\in R$, onda su $p'=q+r'$, $p=q+r$, $p''=q'+r$ tri kolinearne tačke poliedra P i p je središte duži $p'p''$. Pošto je p teme, mora biti $p=p'=p''$ tj. $q'=q$ i $r'=r$. □

<u>Teorema 1.4</u>, Aditivne polugrupe $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}_c$ su kancelativne: ako su $P,Q,R\in\mathcal{P}_{(c)}$ takvi da je $P+Q=P+R$, onda je $Q=R$.

<u>Dokaz</u>. Indukcija po $d=\dim(P+Q)$. Za $d=0$ tvrdjenje je očigledno jer se svodi na jednakost tačaka. Neka je $\dim(P+Q)=n$ i neka je tvrdjenje tačno za sve $d<n$. Neka je $F=F(Q,v)$ strana dimenzije k. Tada je $F(P+Q,v)=F(P,v)+F(Q,v)=F(P,v)+F(R,v)$ $=F(P+R,v)$ tj. $F+F(P,v)=F(R,v)+F(P,v)$. Na osnovu indukcijske pretpostavke je sad $F=F(R,v)$. Dakle, Q i R imaju sve strane iste pa je $Q=R$. □

Ako je P celobrojan, jednačine svih stranica imaju racionalne koeficijente. Slično važi za proizvoljne strane.

Lema 1.5. Neka $P\in\mathcal{P}_c$ i $F,F_1,\dots,F_k\in\mathcal{F}(P)$ strane takve da je $F=F_1\cap\dots\cap F_k$. Ako je $F_i=F(P,v_i)$ i $v=a_1v_1+\dots+a_kv_k$ za neke $a_i>0$, onda je $F=F(P,v)$.

Dokaz. Translirajmo P tako da je O teme od F i svih F_i. Jednačina svake hiperravni oslonca kroz teme O je $(x,v)=0$ i $P\subset\{x\in\mathbb{R}^n: (x,v)\leq 0\}$. Neka je $F'=F(P,v)$ sa $v=\sum_{i=1}^{k}a_iv_i$. Biće $x\in F\Rightarrow x\in F_i\Rightarrow (x,v_i)=0\Rightarrow (x,v)=0\Rightarrow x\in F'$. Dakle, $F\subset F'$ i O je teme F'. Ako $x\in F'$ onda je $(x,v)=0$. Pošto $x\in P$, imamo $(x,v_i)\leq 0$. Kad bi neka od nejednakosti bila stroga, imali bi $(x,v)=\sum a_i(x,v_i)<0$ što je nemoguće. Zato su svi $(x,v_i)=0$ i $x\in F_i$ tj. $x\in F$. □

Teorema 1.6. Ako $P\in\mathcal{P}_c$ i $F\in\mathcal{F}(P)$, postoji celobrojni vektor v koji odredjuje F: $F=F(P,v)=P\cap L(P,v)$.

Dokaz. Možemo smatrati da je dim P = n. Za stranice P tvrdjenje je očigledno. Proizvoljna strana F je presek stranica $F=F_1\cap\dots\cap F_k$(v.str.28). Ako su v_i celobrojni vektori normala stranica F_i, na osnovu leme 1.5. je vektor $v=\sum_{i=1}^{k}v_i$ celobrojni vektor normale strane F. □

U skup svih translatornih klasa poliedara može se uvesti jedna relacija poretka.

Lema-definicija 1.7. Neka $P,Q\in\mathcal{P}_{(c)}$. Ako je za svako $v\in\mathbb{R}^n$ $\dim F(P,v)\geq\dim F(Q,v)$ (*), onda postoji preslikavanje skupa svih strana dimenzije r poliedra Q na skup svih strana dimenzije r poliedra Q za svako r. Ako je $\{p_1,\dots,p_m\}$ skup temena P i q_i teme Q koje odgovara temenu p_i, onda su

$q_1,\dots,q_m$ sva temena Q pri čemu se neki q_i mogu poklapati. Svakoj ivici $e_k=p_i-p_j$ poliedra P odgovara paralelna ivica $f_k=q_i-q_j$ poliedra Q ako je $q_i\neq q_j$ ili teme ako je $q_i=q_j$. Ako je pored uslova (*) ispunjeno i $|f_k|\leqslant|e_k|$ (**) za sve ivice e_k poliedra P, reći ćemo da je $P\geqslant Q$. (v.[21]str.318).

<u>Teorema 1.8.</u> Za $P,Q\in\mathcal{P}_{(c)}$, $P\geqslant Q \iff \exists R\in\mathcal{P}_{(c)}:\ P=Q+R$ (v.[21]str.318).

<u>Dokaz</u>. Jedino što nam preostaje da dokažemo u odnosu na citiranu teoremu u [21] je smer ($\Rightarrow$) za celobrojne poliedre. Toga radi napomenimo konstrukciju poliedra R na osnovu P i Q u [21]. Ako P ima k ivica i $e_1,\dots,e_{2k}$ su vektori tih ivica po jedan u svakom smeru (dva za svaku ivicu), tada su $\lambda_1e_1,\dots,\lambda_{2k}e_{2k}$ $(0\leqslant\lambda_i\leqslant 1)$ vektori ivica Q. Ako za svako teme p_i fiksiramo jedan put duž ivica P koji ga spaja sa O (prethodno smo translirali P i Q tako da je O teme P i odgovarajuće teme Q) tj. fiksiramo reprezentaciju $p_i=e_{i_1}+\dots+e_{i_r}$, onda je $q_i=\lambda_{i_1}e_{i_1}+\dots+\lambda_{i_r}e_{i_r}$ odgovarajuće teme Q. Traženi poliedar R je $R=\mathrm{conv}\{r_1,\dots,r_m\}$ gde su $r_i=p_i-q_i$. Ali ako su P i Q celobrojni, onda je i R celobrojan. □

<u>Posledice</u>. (a) $P\geqslant Q$ i $Q\geqslant R \Rightarrow P\geqslant R$;

(b) $P\geqslant a+P$ za svako $a\in\mathbb{R}^n$;

(c) $P\geqslant Q \Rightarrow P+R\geqslant Q+R$;

(d) $P\geqslant Q$ i $Q\geqslant P \Rightarrow [P]=[Q]$.

<u>Dokaz</u>. Sva tvrdjenja slede direktno iz teorema 1.8. i 1.4. □

Lema 1.9. Ako je $P \geqslant Q$ i svi λ_i(koeficijenti proporcionalnosti ivica) su medjusobno jednaki: $\lambda_i = \lambda$, onda je $[Q]=\lambda[P]$ tj. P i Q su homotetični.
(v. 21 str.321).

Za nas je od osnovnog značaja pojam nerazloživosti poliedra. Uopšte uzev, kaže se da je poliedar P razloživ ako je $P=Q+R$ za neke poliedre Q i R. Nad $\mathbb{R}$ se medjutim svaki poliedar može razložiti u sumu njemu homotetičnih: za $0<\lambda<1$ $P= \lambda P+(1-\lambda)P$. Zato se u realnom slučaju takva razlaganja smatraju trivijalnim i nerazloživi poliedri su oni koji nemaju netrivijalnih razlaganja (v.[21]str.318). U slučaju celobrojnih poliedara situacija se menja. Poliedar $P\in\mathcal{P}_c$ ćemo zvati nerazloživim (ili $\mathbb{Z}$-nerazloživim za razliku od $\mathbb{R}$-nerazloživosti) ako se on ne može predstaviti kao zbir dvaju celobrojnih poliedara (makar i njemu homotetičnih). Neuporedivost $\mathbb{R}$- i $\mathbb{Z}$-nerazloživosti vidi se na primer iz sledećeg: $\mathbb{R}$-nerazloživi poligoni su samo trouglovi (v.[40] str.35) dok ima $\mathbb{Z}$-nerazloživih mnogouglova, ali i $\mathbb{Z}$-razloživih trouglova. Opišimo najjednostavniji neophodni uslov ($\mathbb{Z}$-)nerazloživosti. Za svaki celobrojni vektor v neka je $\ell(v)$ broj intervala na koje v dele celobrojne tačke. Za svaki $P\in\mathcal{P}_c$ neka je m(P) najveći zajednički faktor svih $\ell(v)$ kad v prolazi $\mathcal{F}_1(P)$. Za svaki $P\in\mathcal{P}_c$ očigledno postoji jedinstveni najmanji $P'\in\mathcal{P}_c$ njemu homotetičan takav da je $P=m(P)\cdot P'$ i $m(P')=1$. Isto tako, za $n\in\mathbb{N}$ je $m(nP)=n\cdot m(P)$.

<u>Lema 1.10</u>. Ako je $P\in\mathcal{P}_c$ nerazloživ onda je $m(P)=1$.

<u>Dokaz</u> je očigledan. □

Za trouglove je gornji uslov i dovoljan, ali već za četvorouglove nije.

<u>Lema 1.11</u>. (a) Celobrojni trougao P je nerazloživ $\Leftrightarrow$ $m(P)=1$.
(b) Celobrojni paralelogram je razloživ u zbir stranica, a celobrojni trapez u zbir trougla i stranice.
(c) Ako je P celobrojni konveksni četvorougao koji nije paralelogram ni trapez, tada postoji tačno jedno teme od P takvo da paralele iz tog temena drugim dvema stranicama leže unutar četvorougla. P je razloživ $\Leftrightarrow$ bar jedna od presečnih tačaka tih paralela sa naspramnim stranicama (a tada i obe) je celobrojna. Specijalno, ako P nema celobrojnih tačaka na ivicama osim temena, on je nerazloživ.

<u>Dokaz</u> je elementaran. Pri tome se koristi problem 49 iz [40]. □

<u>Lema 1.12</u>. (a) Ako su P i Q konveksni celobrojni poligoni, p,q i r ukupan broj celobrojnih tačaka na ivicama P, Q i P+Q respektivno, tada je $r=p+q$. Svaka ivica P i Q se u rubu P+Q pojavljuje tačno jedanput.
(b) Ako je P celobrojni petougao bez paralelnih ivica i bez celobrojnih tačaka na ivicama osim temena, P je nerazloživ.

<u>Dokaz</u> je elementaran. □

Ovih nekoliko jednostavnih lema biće nam potrebno u §5.

Teorema 1.8. nam daje opšti neophodan i dovoljan uslov nerazloživosti u $\mathcal{P}_c$: nerazloživi poliedri su minimalni elementi u uredjenju $\leqslant$. Naravno, ovaj uslov nije efektivan, već je samo preformulacija iste osobine. U daljem ćemo naći neke dovoljne uslove nerazloživosti u jednoj za nas značajnoj klasi celobrojnih poliedara - Njutnovih ili $\mathcal{N}$-poliedara.

Ovaj termin nosi Njutnovo ime jer je on posmatrao odredjenu geometrijsku konstrukciju u ravni (tzv. Njutnov paralelogram), u vezi sa eksponentima polinomijalne jednačine i koristio je za nalaženje približnih rešenja te jednačine u obliku odsečaka stepenog reda sa razlomljenim eksponentima, tj. početnih odsečaka Puiseux-ovog razvoja kako je kasnije nazvan. Detaljan istorijski prikaz razvoja Njutnovog poligona dat je u radu [11], kao i knjizi [6]. Tek u najnovije vreme je ova metoda poprimila oblik koji izlažemo i u ovom radu (v. Uvod).

§2. $\mathcal{N}$-poliedri

Neka je $\mathbb{R}^n_+$ prvi ortant i $\mathbb{Z}^n_+$ mreža celobrojnih tačaka u njemu. Ako je $S\subset\mathbb{Z}^n_+$, poliedar $\mathrm{conv}(S+\mathbb{R}^n_+)$ zvaćemo Njutnovim ili $\mathcal{N}$-poliedrom. Skup svih $\mathcal{N}$-poliedara u $\mathbb{R}^n_+$ obeležavaćemo $\mathcal{N}^{(n)}$ ili samo $\mathcal{N}$ ako je dimenzija jasna iz konteksta. Imamo jednostavnu lemu, čiji dokaz izostavljamo.

<u>Lema 2.1.</u> (a) Svaki $P\in\mathcal{N}^{(n)}$ je celobrojni poliedar dimenzije n sa karakterističnim konusom $ccP=\mathbb{R}^n_+$.

(b) $P\in\mathcal{P}_c$ je (do na translaciju) $\mathcal{N}$-poliedar $\Leftrightarrow$ $ccP=\mathbb{R}^n_+$.

(c) Svaki $P\in\mathcal{N}^{(n)}$ se razlaže u zbir $P=D(P)+\mathbb{R}^n_+$. (Primetimo da u ovom zbiru $D(P)$ nije $\mathcal{N}$-poliedar). $\square$

<u>Lema 2.2.</u> Ako je $P\in\mathcal{N}$, svaki vektor unutrašnje normale strane ima sve nenegativne komponente. Strana je neograničena $\Leftrightarrow$ neka komponenta tog vektora je 0.

<u>Dokaz.</u> Umesto unutrašnjih uočimo spoljne normale. To mogu biti samo oni $v\in\mathbb{R}^n$ za koje je $H(P,v)<+\infty$. Neka je $v=(a_1,\dots,a_n)$ takav. Pretpostavimo da je $a_1>0$. Tada P sadrži neki zrak $L=p+\mathbb{R}_+e_1$. Ako je $x\in L$, biće $H(P,v)=\sup\{(y,v):y\in P\}\geqslant(x,v)=a_1x_1+c$, što očito teži $+\infty$ kada se x udaljava od p ($x_1\to+\infty$). Zato moraju biti svi $a_i\leqslant 0$.
Neka je sad $v=(0,a_2,\dots,a_n)$ unutrašnja normala i p neko teme $F(P,v)$. Zrak $L=p+\mathbb{R}_+e_1$ leži u $L(P,v)$ jer je $e_1\perp v$ a isto tako i u P jer je $P=D(P)+\mathbb{R}^n_+$. Zato $L\subset F(P,v)$ i stra-

na je neograničena.

Neka je sad $F=F(P,v)$ strana sa vektorom unutrašnje normale $v=(a_1,\dots,a_n)$ i svi $a_i \geqslant 0$. Jednačina $L(F,v)$ je $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = d \geqslant 0$. Ako su svi $a_i > 0$, onda $L(P,v) \cap \mathbb{R}_+^n \subset \prod_{i=1}^{n} [0,1/a_i d]$ pa je strana F ograničena. □

Teorema 2.3. (a) $\mathcal{N}$ je Abelova kancelativna prebrojiva polugrupa u kojoj nijedan element $\neq 0$ nema suprotni. Specijalno, $\mathcal{N}$ je bez torzije.

(b) Za svako n, $\mathcal{N}^{(n)}$ sadrži $\mathcal{N}^{(n-1)}$ kao podpolugrupu.

(c) $\mathcal{N}^{(2)}$ je slobodna sa prebrojivim skupom generatora.

(d) $\mathcal{N}^{(k)}$ za $k \geqslant 3$ nije slobodna.

Dokaz. Ako $P,Q \in \mathcal{N}$ očigledno i $P+Q \in \mathcal{N}$ jer je $P+Q=D(P)+D(Q)+\mathbb{R}_+^n$. Nula element ove polugrupe je $\mathbb{R}_+^n$. Kancelativnost sledi iz teoreme 1.4.. Da iz $P+Q=0$ sledi $P=Q=0$ biće dokazano niže, u lemi 2.8.(b). Preslikavanje $\varphi: \mathcal{N}^{(n-1)} \to \mathcal{N}^{(n)}$ se lako konstruiše: $P \longmapsto P \times \mathbb{R}_+$. Neposredno je jasno da je $\varphi(P)$ n-dimenzioni $\mathcal{N}$-poliedar. Lako se vidi da je φ monomorfizam. Tvrdjenje (c) će slediti iz rezultata §4.

(d) dokazuje sledeći kontraprimer u $\mathcal{N}^{(3)}$. Neka su

$P_1=\mathrm{conv}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} + \mathbb{R}_+^3$,

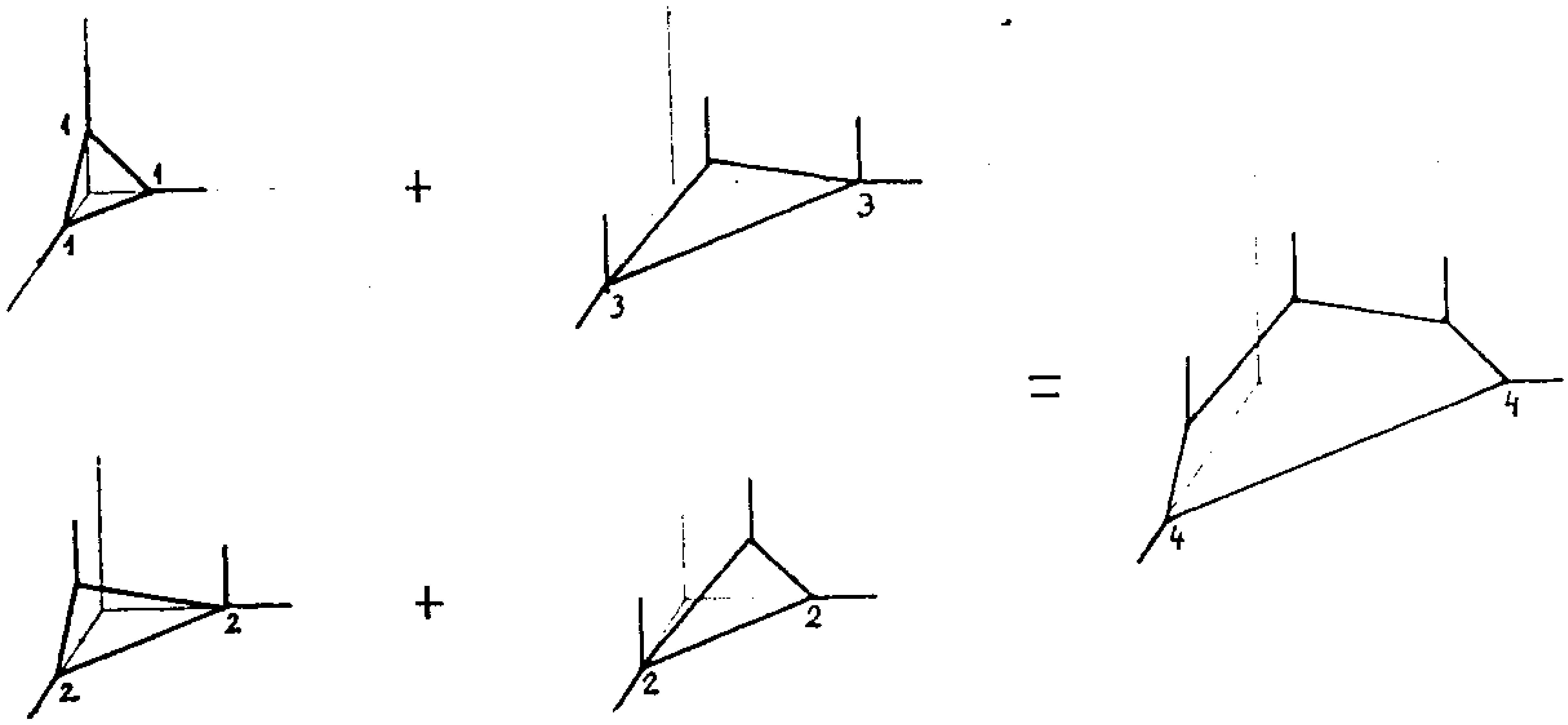
$P_2=\mathrm{conv}\{(3,0,0),(0,3,0),(1,1,1)\} + \mathbb{R}_+^3$,

$Q_1=\mathrm{conv}\{(2,0,0),(0,2,0),(1,0,1)\} + \mathbb{R}_+^3$,

$Q_2=\mathrm{conv}\{(2,0,0),(0,2,0),(0,1,1)\} + \mathbb{R}_+^3$ (v.sliku 4 na str.39).

Tada su P_1,P_2,Q_1,Q_2 $\mathcal{N}$-poliedri u $\mathbb{R}^3$. Neposredno se proverava da je $P_1+P_2=Q_1+Q_2=$

$=\mathrm{conv}\{(4,0,0),(0,4,0),(3,0,1),(0,3,1),(1,1,2)\} + \mathbb{R}_+^3$.



slika 4.

Nerazloživost ova četiri poliedra slediće iz rezultata §5, a lako se vidi i neposredno (v.posledicu leme 2.12). □

<u>Primedbe</u>. 1. Ideja primera u dokazu (d) potiče iz [40].
2. Iz navedenog sledi da se $\mathcal{N}^{(n)}$ može izomorfno utopiti u Abelovu grupu $\overline{\mathcal{N}^{(n)}}$ koja je za n=2 slobodna sa prebrojivim skupom generatora. Za $n \geqslant 3$ medju generatorima postoje netrivijalne relacije.

U nekim slučajevima moguće je izučavanje $\mathcal{N}$-poliedara svesti na izučavanje politopa.

<u>Lema 2.4</u>. Svaki $P \in \mathcal{N}$ se može projektivnom transformacijom prevesti u politop Q čija je jedna stranica F (n-1)-simpleks, sve strane Q incidentne sa F su slike neograničenih strana P a ostale strane Q imaju istu kombinatornu strukturu kao i skup ograničenih strana P (tj. D(P)).

Dokaz. Ako je L hiperravan $(x,v)=d$ odredjena sa $v=(1,\ldots,1)$, d se može uzeti dovoljno veliko tako da sva temena od P leže u ograničenom skupu $\mathbb{R}^n_+ \cap \{x:(x,v)<d\}$. Ako je T projektivna transformacija odredjena formulama

$$x_1'=d\cdot x_1/(\sum_{i=1}^{n} x_i+1)\ ,\ \ldots\ ,\ x_n'=d\cdot x_n/(\sum_{i=1}^{n} x_i+1)\ ,$$

neposredno se vidi da je to tražena transformacija, jer T beskonačno daleku ravan odredjenu osama prevodi u L a skup $\mathbb{R}^n_+$ preslikava u $\mathbb{R}^n_+ \cap \{x:(x,v)<d\}$. Struktura incidencije ograničenih strana se pri tome čuva a neograničene strane prelaze u strane incidentne $(n-1)$-simpleksu $F=L\cap\mathbb{R}^n_+$. □

Posledica 2.5. Za svaki $P\in\mathcal{N}$ je $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f_i(P)=(-1)^{n-1}$.

Dokaz. Za $(n-1)$-simpleks je $f_k(F)=\binom{n}{k+1}$ $(k=0,\ldots,n-1)$ (v.[21] str.53), a za politop Q je na osnovu Ojlerove teoreme (v.[21] str.131) $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i f_i(Q)=1-(-1)^n$. Pošto je $f_i(Q)=f_i(P)+f_i(F)$, odatle sledi tvrdjenje. □

Specijalno, za $n=2$ je $f_1(P)-f_0(P)=1$, a pošto je $f_1^\infty(P)=2$, imamo i $f_1^0(P)-f_0^0(P)=1$, što se vidi i neposredno.
Isto tako, za $n=3$ je $f_1^\infty=f_2^\infty$ pa je $f_0-f_1+f_2=f_0^0-f_1^0+f_2^0=1$.

Na polugrupi $\mathcal{N}$ se može prirodno definisati valuacija. Neka je $v\in\mathbb{R}^n_+$ proizvoljni vektor sa racionalnim koordinatama p_i/q_i $(i=1,\ldots,n)$ iz prvog ortanta $\neq 0$. Svaka hiperravan $L\perp v$ ima jednačinu $(v,x)=d$. Zapišimo $v=r/s\cdot(r_1,\ldots,r_n)$ gde su $r,s\in\mathbb{N}$, $r_i\in\mathbb{Z}$ i $M(r_1,\ldots,r_n)=1$. Dovoljno je uzeti $s=W(q_1,\ldots,q_n)$ (n.z.s.) i $r=M(p_1 s/q_1,\ldots,p_n s/q_n)$ (n.z.d.). Tada je jednačina L: $r_1x_1+\ldots+r_nx_n=m$ $(=sd/r)$.

Ako sad L sadrži neku celobrojnu tačku, onda $m \in \mathbb{Z}_+$. Na taj način, svakoj ravni normalnoj na v koja sadrži neku celobrojnu tačku iz prvog ortanta dodelili smo $m \in \mathbb{Z}_+$, pri čemu raznim ravnima odgovaraju različiti brojevi m. Prva pozitivna vrednost m koja se pri tome dobija je $m_0 = \min\{r_i : r_i \neq 0\}$ a najmanja vrednost m za koju ravan sadrži celobrojne tačke na svim osama $(k_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, k_n)$ je $m_1 = W(r_1, \ldots, r_n)$ i $k_i = m_1/r_i$. Iz odredjenih razloga odgovaraće nam da ta vrednost bude 1 pa ćemo jednačinu L zapisivati u obliku

$$x_1/k_1 + \ldots + x_n/k_n = m/m_1 = d(L) .$$

Očigledno, umesto proizvoljnog v na početku dovoljno je uzimati vektore $(r_1, \ldots, r_n)$ ($r_i \in \mathbb{Z}_+$ uzajamno prosti) ili vektore $(1/k_1, \ldots, 1/k_n)$ ($k_i \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti, pri čemu na nekim mestima umesto $1/k$ može stajati 0), pri čemu je $m_1 = W(k_1, \ldots, k_n)$ i $r_i = m_1/k_i$.

Neka je sad $P \in \mathcal{N}$. Sa $\bar{v}(P) = d(L(P,v))$ je definisano preslikavanje $\bar{v} : \mathcal{N} \to \frac{1}{m_1}\mathbb{Z}_+$. Grubo rečeno, $\bar{v}(P)$ meri rastojanje hiperravni oslonca normalne na v od koordinatnog početka. Najmanji korak izmedju susednih ravni je $1/m_1$ i njega ćemo obeležavati inc(v). Najmanji element u $\bar{v}(\mathcal{N} \setminus \{0\})$ je $m_0/m_1 = \min\{1/k_1, \ldots, 1/k_n\}$.

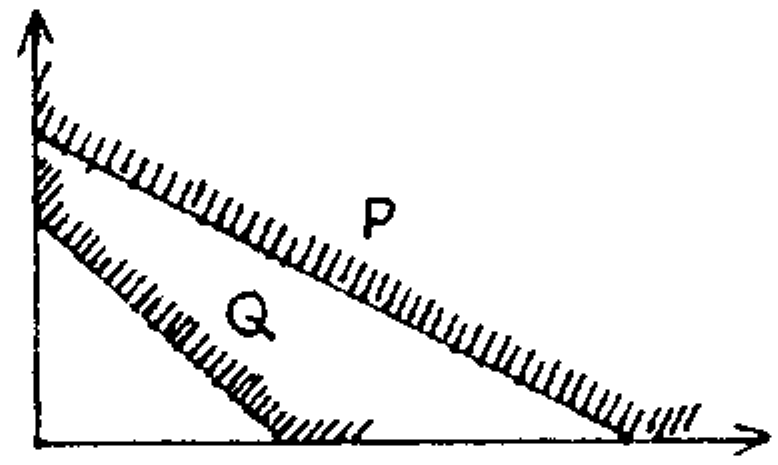
<u>Lema 2.6.</u> (a) Za sve $P, Q \in \mathcal{N}$ i $v \in \mathbb{Q}_+^n$ je $\bar{v}(P+Q) = \bar{v}(P) + \bar{v}(Q)$.
(b) $P \geqslant Q \Rightarrow \bar{v}(P) \geqslant \bar{v}(Q)$.
(c) $(\forall v \in \mathbb{Q}_+^n)\, \bar{v}(P) = \bar{v}(Q) \Longrightarrow P = Q$.

<u>Dokaz.</u> (a) je očigledno jer je $L(P+Q,v) = L(P,v) + L(Q,v)$.

(b) sledi direktno iz (a) i teoreme 2.11. (v.niže).

(c) Dovoljno je primetiti da je $\bar{v}(P)=\lambda H(P,v)$ i primeniti teoremu 1.2. □

Obrat tvrdjenja (b) ne važi, što se vidi već za $n=2$. U situaciji kao na slici je $\bar{v}(P)\geqslant\bar{v}(Q)$ za sve v ali nije $P\geqslant Q$ jer nije uvek ispunjeno $\dim F(P,v)\geqslant\dim F(Q,v)$.



Ako je $v=e_i$ (i-ti vektor standardne baze), $\bar{v}(P)=\bar{e}_i(P)$ je rastojanje P od koordinatne hiperravni $E_i\perp e_i$. Neka je vektor $e(P)=(\bar{e}_1(P),\dots,\bar{e}_n(P))$.

<u>Lema 2.7</u>. (a) $P=(e(P)+\mathbb{R}^n_+)+Q$ gde je $e(Q)=0$.

(b) $e(P+Q)=e(P)+e(Q)$.

(c) $e(a+\mathbb{R}^n_+)=a$.

<u>Dokaz</u> je očigledan. □

Dobili smo još jedan neophodan uslov nerazloživosti: ako je $P\in\mathcal{N}$ nerazloživ, onda je $e(P)=0$ tj. P ima tačaka u svim koordinatnim hiperravnima. Neka je $\mathcal{N}_0=\{P\in\mathcal{N} : e(P)=0\}$. $\mathcal{N}_0$ je podpolugrupa u $\mathcal{N}$ i za svako $P\in\mathcal{N}$ postoji jedinstveni $Q\in\mathcal{N}_0$ takav da je $[P]=[Q]$. Poliedar Q ćemo zvati $\mathcal{N}_0$-predstavnikom poliedra P. $\mathcal{N}_0$ sadrži sve nerazložive $\mathcal{N}$-poliedre osim jednotemenih $e_i+\mathbb{R}^n_+$ $(i=1,\dots,n)$.

U daljem ćemo uvek smatrati da su sve komponente $v>0$.

<u>Lema 2.8</u>. (a) $\bar{v}(P)=0 \Leftrightarrow P=\mathbb{R}^n_+$(tj. 0 u polugrupi $\mathcal{N}$).

(b) $P+Q=\mathbb{R}^n_+ \Leftrightarrow P=Q=\mathbb{R}^n_+$.

Dokaz. (a) se proverava neposredno, a (b) sledi iz (a) ako se za v uzme vektor $(1,\dots,1)$. □

Teorema 2.9. Svaki poliedar $P\in\mathcal{N}$ se može predstaviti kao konačna suma nerazloživih. Nerazloživi $\mathcal{N}$-poliedri čine skup generatora polugrupe $\mathcal{N}$.

Dokaz. Neka je $\bar{v}:\mathcal{N}\longrightarrow\mathbb{Z}_+$ valuacija odredjena vektorom $v=(1,\dots,1)$ i neka je $P=Q+R$ netrivijalno razlaganje. Tada je $\bar{v}(P)=\bar{v}(Q)+\bar{v}(R)$ i $\bar{v}(Q)\neq 0$, $\bar{v}(R)\neq 0$ (leme 2.6.(a) i 2.8.(a)). Zato su $\bar{v}(Q)$ i $\bar{v}(R)$ prirodni brojevi strogo manji od $\bar{v}(P)$. Odavde sledi da se svako razlaganje mora završiti posle konačno mnogo koraka. □

Primedba. Na osnovu teoreme 2.3.(d) ovo razlaganje ne mora biti jednoznačno za $n\geqslant 3$.

Na osnovu svega rečenog vidimo da se prilikom traženja nerazloživih elemenata $\mathcal{N}$ možemo ograničiti na generatore polugrupe $\mathcal{N}_0$.

Lema 2.10. Ako $P\in\mathcal{N}_0$ i Q je sabirak od P, onda i $Q\in\mathcal{N}_0$.

Dokaz. $0=e(P)=e(Q)+e(R)\implies e(Q)=e(R)=0$. □

Teorema 2.11. Ako $P,Q\in\mathcal{N}_0$ onda je $P\geqslant Q \iff P=Q+R$ za neki $R\in\mathcal{N}_0$.

Dokaz. Jedino što nam u odnosu na teoremu 1.8. preostaje da dokažemo je da u slučaju $P\geqslant Q$ postoji $S\in\mathcal{N}_0$ takav da je $P=Q+S$. Na osnovu 1.8. imamo $P=Q+R$ za neki $R\in\mathcal{P}_c$. Neka je $L(R,e_i)$: $(x,e_i)=a_i$ i $(x,e_i)\geqslant a_i$ za $x\in R$ $(i=1,\dots,n)$. Stavimo $a=(a_1,\dots,a_n)$ i translirajmo R za vektor $-a$. Tada je

$L(-a+R,e_i)$: $(x,e_i)=0$ tj. to je koordinatna ravan $E_i \perp e_i$ i $-a+R\subset \mathbb{R}^n_+$. Zato je $-a+R+\mathbb{R}^n_+=S$ $\mathcal{N}$-poliedar pa $-a\in\mathbb{R}^n_+$. Sada je $e(-a+\mathbb{R}^n_+ +P)=-a+e(P)=0$, odakle je $a=0$, $P=Q+S$ i $S\in\mathcal{N}_0$. □

Kao što se iz teoreme vidi, nerazloživi $\mathcal{N}$-poliedri su minimalni elementi uredjenja $\leqslant$ u skupu $\mathcal{N}_0$.

Pošto za $\bar{v}(P)<1$ ni u jednoj ravni nema celobrojnih tačaka na svim osama, dobijamo jednostavnu klasu nerazloživih poliedara. Druga klasa se dobija isto tako jednostavnim argumentom.

Lema 2.12. (a) Ako je $D(P)=F(P,v)$ $(n-1)$-simpleks sa temenima na osama i $\bar{v}(P)=1$, onda je P nerazloživ.
(b) Ako P ima stranu koja seče sve koordinatne ravni i nerazloživa je (u $\mathcal{P}_c$), onda je P nerazloživ. □

Posledica. Sad se neposredno vidi da su poliedri korišćeni kao kontraprimer u dokazu teoreme 2.3.(d) zaista nerazloživi.

§3. $K[[x_1,\ldots,x_n]]$: poliedri, filtracije

U prvom delu u §2 sveli smo pitanje jednogranosti singulariteta hiperpovrši na pitanje rastavljivosti polinoma koji ga definiše u prstenu formalnih redova. Pošto u metodi koju ćemo koristiti nije od značaja to što je f polinom, radićemo sa proizvoljnim formalnim redom i pokušati da damo neke informacije o njegovoj nerastavljivosti na osnovu njegovog Njutnovog poliedra.

Neka je $A=K[[x_1,\ldots,x_n]]$ prsten formalnih stepenih redova i $f\in A$ stepeni red $f=\sum_{|i|=0}^{\infty} a_i x^i$ gde je $i=(i_1,\ldots,i_n)$ multiindeks, $|i|=i_1+\ldots+i_n$, $a_i=a_{i_1\ldots i_n}$ i $x^i=x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$. Stavimo $\mathrm{Supp}(f)=\{i\in\mathbb{Z}_+^n : a_i\neq 0\}\subset\mathbb{R}_+^n$ i $N(f)=\mathrm{conv}(\mathrm{Supp}(f)+\mathbb{R}_+^n)$. $N(f)$ je $\mathcal{N}$-poliedar koji ćemo zvati $\mathcal{N}$-poliedrom reda f. Očito, $\mathcal{F}_0(N(f))\subset\mathrm{Supp}(f)$ i $N(f)=\mathbb{R}_+^n \Leftrightarrow$ f je invertibilan u A (v.str.20). Odgovarajući dijagram poliedra $N(f)$ obeležavaćemo jednostavno $D(f)$ i zvati $\mathcal{N}$-dijagramom reda f. Dobili smo preslikavanje $N: A\to\mathcal{N}$.

<u>Teorema 3.1.</u> Za $f,g\in A$ je $N(fg)=N(f)+N(g)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $f=\sum a_i x^i$, $g=\sum b_i x^i$. U proizvodu fg imamo članove $\sum_{i+j=k} a_i b_j x^k$ gde je $i+j=(i_1+j_1,\ldots,i_n+j_n)$. Zato je $\mathrm{Supp}(fg)\subset\mathrm{Supp}(f)+\mathrm{Supp}(g)$ i $N(fg)\subset N(f)+N(g)$. Neka je sada $N(f)+N(g)=P$ i $p=q+r$ teme P na jedinstven način zapisano u

obliku zbira temena q,r poliedara $N(f)$, $N(g)$ respektivno (lema 1.3.). Drugim rečima, monom x^p se na jedinstveni način predstavlja u obliku $x^p=x^q x^r$ sa $q\in \mathrm{Supp}(f)$, $r\in \mathrm{Supp}(g)$. Ali tada je koeficijent uz monom x^p u proizvodu fg jednak $a_q b_r\neq 0$ tj. $p\in \mathrm{Supp}(fg)$. Dakle, $\mathcal{F}_0(P)\subset \mathrm{Supp}(fg)$ pa je i $P=\mathrm{conv}(\mathcal{F}_0(P)+\mathbb{R}^n_+)\subset \mathrm{conv}(\mathrm{Supp}(fg)+\mathbb{R}^n_+)=N(fg)$. □

Posledica-definicija. Ako je $N(f)\in\mathcal{N}$ nerazloživ, onda je f nerastavljiv u prstenu A. Takve nerastavljive elemente zvaćemo jako nerastavljivim a ostale slabo nerastavljivim. Jako nerastavljivi su dakle oni redovi čija se nerastavljivost očituje na njihovom $\mathcal{N}$-poliedru. Pošto je $f\sim g \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $N(f)=N(g)$ jedna relacija ekvivalencije u A, f je jako nerastavljiv ako u njegovoj klasi ekvivalencije nema rastavljivih elemenata. Naši dalji napori biće usmereni na nalaženje svih jako nerastavljivih elemenata u prstenu A. Za n=2 ovo je pitanje u potpunosti rešeno u §4, dok su za $n\geqslant 3$ dobijeni neki dovoljni uslovi i opisane neke klase nerastavljivih elemenata.

Neka je $v\in\mathbb{Q}^n_+$ vektor sa pozitivnim racionalnim komponentama. Komponujmo valuaciju $\overline{v}:\mathcal{N}\to\frac{1}{m_1}\mathbb{Z}_+$ sa preslikavanjem $N: A\to\mathcal{N}$. Dobijamo preslikavanje $\mathrm{ord}_v:A\to\frac{1}{m_1}\mathbb{Z}_+$ koje definiše u A kvazihomogenu filtraciju odredjenu vektorom v (v.[3]). Očito, $\mathrm{ord}_v(f)=0 \Leftrightarrow$ f je invertibilan. Kvazistepen monoma $x^k=x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ je $\mathrm{ord}_v(x^k)=\overline{v}(k+\mathbb{R}^n_+)=r_1k_1+\dots+r_nk_n$ (v.str.40-41). Reći ćemo da je filtracija reda $f\in A$ jednaka d ako svi monomi u f imaju kvazistepen $\geqslant$ d. Ako je A_d skup svih $f \in A$ filtracije d onda je $A=A_0 \supset A_{1/m_1} \supset A_{2/m_1} \supset \ldots \supset (0)$ i $A_d \cdot A_{d'} \subset A_{d+d'}$ tj. A postaje filtrovani prsten (v.[8]str.189).

Red $f \in A$ je kvazihomogen kvazistepena d ako svi monomi u f imaju kvazistepen tačno d. U tom slučaju f mora biti polinom: ako su $d' < d$ dve uzastopne vrednosti filtracije $(m_1 d = m_1 d' + 1)$ onda je $B_d = A_d / A_{d'}$ konačnodimenzioni vektorski prostor nad K svih kvazihomogenih redova kvazistepena d i njegova dimenzija n(v,d) je jednaka broju monoma kvazistepena d tj. broju celih tačaka u delu hiperravni $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = d$ sa $x_i \geqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$. Graduisani prsten $B = \bigoplus B_d = Gr(A)$ je asociran sa filtrovanim prstenom A (v.[8]str.194). Elementi iz B_d su kvazihomogeni polinomi kvazistepena d. Dakle, $n(v,d)=\dim_K B_d$. Svaki $f \in A$ se može jednoznačno predstaviti u obliku sume svojih kvazihomogenih komponenti $f=f_d+f_{d+inc(v)}+\ldots$ gde je $d=ord_v(f)$ i ta suma konvergira u smislu topologije u A indukovane filtracijom kao fundamentalnim sistemom okolina 0. Ako je $v=(1,\ldots,1)$, opisana filtracija je standardna filtracija indukovana običnim stepenom monoma i $B \cong K[x_1,\ldots,x_n]$ (v.[8]str.195). Ako je $v=(r_1,\ldots,r_n)$, onda je $f \in A$ kvazihomogen stepena $d \Leftrightarrow$ za sve $x \in K^n$, $f(\lambda^{r_1}x_1,\ldots,\lambda^{r_n}x_n)=\lambda^d f(x_1,\ldots,x_n)$ tj. radi se o uobičajenoj definiciji kvazihomogenosti ili homogenosti sa težinama.

Lema 3.2. Ako je f kvazihomogen tipa v stepena d i f=gh, tada su g i h kvazihomogeni istog tipa a stepena k i ℓ respektivno, pri čemu je $d=k+\ell$.

Dokaz. Ovo neposredno sledi iz uporedjivanja kvazistepena leve i desne strane u jednakosti

$f=(g_{\kappa}+g_{\kappa+\alpha}+\ldots)(h_{\ell}+h_{\ell+\alpha}+\ldots)=g_{\kappa}h_{\ell}+(g_{\kappa}h_{\ell+\alpha}+g_{\kappa+\alpha}h_{\ell})+\ldots$

pri čemu je $\alpha=\mathrm{inc}(v)$. □

Ako je v proizvoljni tip kvazihomogenosti i $f\in A$, kvazihomogenu komponentu od f najmanjeg kvazistepena d obeležavaćemo sa $f_d^{(v)}$. Biće $f=f_d^{(v)}+f_{>d}^{(v)}$ gde je

$f_d^{(v)}=\sum_{(i,v)=d} a_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$, $f_{>d}^{(v)}=\sum_{(i,v)>d} a_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$.

Očito, $(i,v)=d \Leftrightarrow i\in F(D(f),v)$. Ako je $v=(1,\ldots,1)$ i filtracija obična homogena, $f_d^{(v)}$ obeležavamo jednostavno sa f_d.

Lema 3.3. (a) Poliedar kvazihomogenog početnog dela od f ima jednu stranu i to stranu N(f) odredjenu sa v:

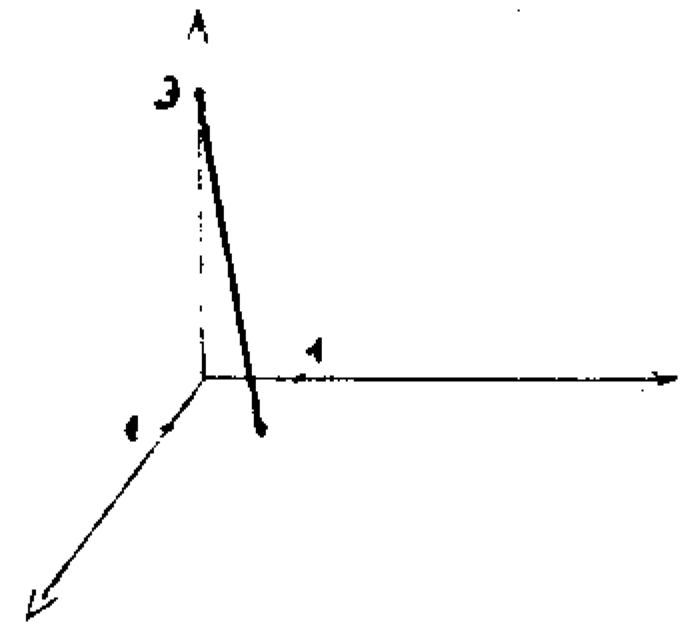
$N(f_d^{(v)})=F(N(f),v)+\mathbb{R}_+^n$.

(b) Ako je f rastavljiv, onda je svaki njegov kvazihomogeni početni deo rastavljiv.

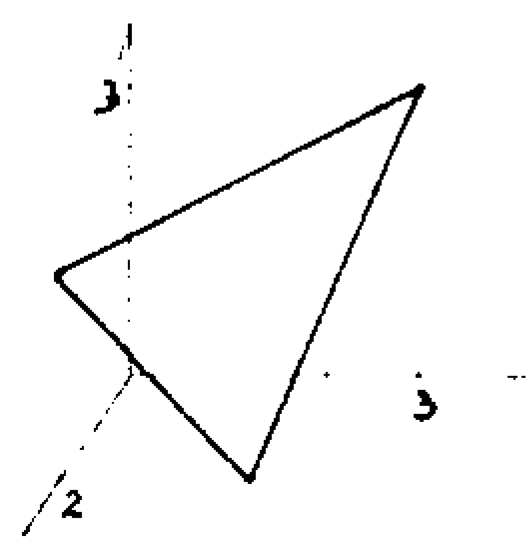
Dokaz je očigledan. □

Možemo navesti nekoliko primera primene ove leme u kombinaciji sa 1.11. i 2.12.

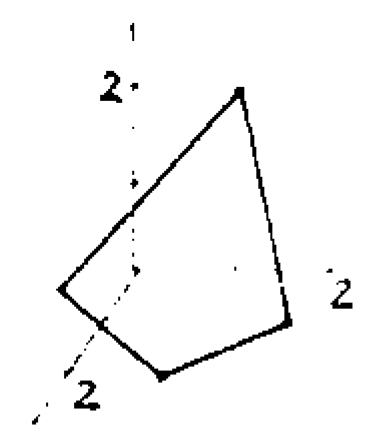
Primeri. 1. $xy+z^3$ je jako nerastavljiv: D(f) ima jednu stranu koja ima tačaka u svim koordinatnim ravnima i nerazloživa je jer nema celobrojnih tačaka osim temena.



2. $x^2y^2+x^2z^2+y^3z^3$ je jako nerastavljiv iz istog razloga: D(f) ima jednu stranu - nerazloživi trougao sa tačkama u svim koordinatnim ravnima.



3. $x^2y+x^2z+xy^2+yz^2$ je jako nerastavljiv jer je jedina strana D(f) nerazloživi četvorougao.



4. Ako je za neki v $ord_v(f)=1$ (takve f ćemo zvati kvazilinearnim tipa v) i Supp(f) sadrži sve tačke na osama tj. D(f) je (n-1)-simpleks, onda je f jako nerastavljiv.

5. Za $n\geqslant 3$ svaki red oblika $a_1x_1^{p_1}+\dots+a_nx_n^{p_n}+g$ gde je $ord_v(g)>1$ a $v=(1/p_1,\dots,1/p_n)$, je nerastavljiv. Primetimo ovde da f ne mora biti jako nerastavljiv (on to i nije kada je $M(p_1,\dots,p_n)\neq 1$) ali je uvek slabo nerastavljiv (v.lemu I.2.9. na str.24). Ako je f jako nerastavljiv, onda možemo dopustiti i jednakost $ord_v(g)=1$.

Brojeve kvazihomogenih monoma odredjenog tipa raznih stepeni tj. brojeve $n(v,d)=\dim_K B_d$ vezuje sledeća manje-više poznata lema (v.[7]str.79-80).

<u>Lema 3.4.</u> Neka je $v=(r_1,\dots,r_n)=m\cdot(1/k_1,\dots,1/k_n)$ gde je $m=W(k_1,\dots,k_n)$ i $r_i=m/k_i$. Tada je

$$\sum_{i=0}^{\infty} n(v,i/m)\cdot x^i = \frac{1}{(1-x^{r_1})\dots(1-x^{r_n})}$$

<u>Dokaz</u> je neposredan i dobija se razvijanjem desne strane u proizvod stepenih redova a zatim njihovim množenjem, uz

napomenu da je $n(v,d)$ broj celobrojnih tačaka u odgovarajućoj ravni $\perp v$ a izmedju ravni nema celobrojnih tačaka. $\square$

Ilustracije radi, za neke vrednosti vektora v navodimo prve vrednosti brojeva $n(v,d)$ izračunate pomoću jednostavnog programa za kućni mikroračunar u sledećoj tabeli.

Tabela 1.

$v=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

$m=6$

d	0	1	2	3	4	5
0	1	0	1	2	1	2
1	4	2	4	6	4	6
2	9	6	9	12	9	12
3	16	12	16	20	16	20
4	25	20	25	30	25	30

$v=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6})$

$m=6$

d	0	1	2	3	4	5
0	1	1	2	3	4	5
1	7	8	10	12	14	16
2	19	21	24	27	30	33
3	37	40	44	48	52	56
4	61	65	70	75	80	85

Primetimo da broj u prvoj koloni predstavlja celi deo d, a broj u prvoj vrsti razlomljeni deo d pomnožen sa m.

Sledeće dve teoreme daju odgovor na pitanje koliko u prostoru B_d kvazihomogenih polinoma datog tipa v i stepena d ima nerastavljivih odnosno koliko njih ima izolovani singularitet (v. § I.2.) i predstavljaju prirodnu generalizaciju odgovarajućih poznatih teorema u homogenom slučaju.

Teorema 3.5. Skup svih rastavljivih kvazihomogenih polinoma datog tipa $v=(r_1,\dots,r_n)$ i stepena $d\in\frac{1}{m}\mathbb{Z}$ je zatvoren algebarski podskup skupa svih kvazihomogenih polinoma tipa v stepena d tj. projektivnog prostora $\mathbb{P}^{n(v,d)-1}$.

Dokaz. Neka je $X \subset \mathbb{P}^{n(v,d)-1}$ skup svih tačaka koje odgovaraju rastavljivim formama, $X_r \subset X$ skup svih tačaka koje odgovaraju formama koje se razlažu u proizvod formi kvazistepena r i d-r. Tada je $X = \bigcup_r X_r$ i dovoljno je dokazati zatvorenost X_r. Neka je $n_1 = n(v,r)$, $n_2 = n(v,d-r)$. Množenje formi definiše regularno preslikavanje $f: \mathbb{P}^{n_1-1} \times \mathbb{P}^{n_2-1} \to \mathbb{P}^{n(r,d)-1}$ pri čemu je $X_r = f(\mathbb{P}^{n_1-1} \times \mathbb{P}^{n_2-1})$. Pošto je ovaj proizvod projektivna mnogostrukost (v.[35]str.67) a f regularno, X_r je zatvoren (v. [35]str.70). □

Primedba. Ova teorema je direktna generalizacija teoreme o homogenim polinomima u [35]str.72.

Teorema 3.6. Neka su $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$ kvazihomogene forme tipa v stepena $m_1, \dots, m_r$ respektivno. Tada postoje celobrojne homogene forme $R_1, \dots, R_k$ od koeficijenata f_i kao promenjljivih, koje zadovoljavaju uslov:

$f_1 = \dots = f_r = 0$ ima jedino rešenje $(0,\dots,0) \Leftrightarrow R_1 = \dots = R_k = 0$.

Dokaz. Neka je $I = (f_1, \dots, f_r)$. Na osnovu Hilbertovog Nullstellensatz-a, $f=0$ na skupu zajedničkih nula $f_1, \dots, f_r \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ za neko s, $f^s \in I$. Neka je sad $(0,\dots,0)$ jedini zajednički koren polinoma $f_1, \dots, f_r$. Tada postoji (dovoljno veliko) $d \in \frac{1}{m}\mathbb{Z}$ takvo da svaki monom kvazistepena d leži u I tj. $B_d \subset I$. Ako je $e \in B_d$, $e = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$ pri čemu možemo smatrati da su g_i kvazihomogeni kvazistepena $d-m_i$. Zato polinomi oblika ef_i gde e prolazi monome kvazistepena $d-m_i$ generišu B_d nad K. Obratno, ako za neko d polinomi ef_i generišu B_d nad K onda $x_i^{k_i d} \in B_d$ pa je $(0,\ldots,0)$ jedini zajednički koren f_i. Dokazali smo sledeće: postoje netrivijalni zajednički koreni $\Leftrightarrow$ za svako d polinomi ef_i kad e prolazi monome kvazistepena $d-m_i$ ne generišu B_d nad K. Pošto monomi kvazistepena d generišu B_d nad K, $ef_i = \sum a_{ij} e_j$ gde $a_{ij} \in K$ a e_j prolaze sve monome kvazistepena d. Rang matrice $(a_{i1},\ldots,a_{is})$ je strogo manji od m jer su ef_i linearno zavisni. Zato su svi minori reda m jednaki 0. Neka su za fiksirano d ti minori $D_{d,i}$ $(i=1,\ldots,q(d))$. Dakle, postoje netrivijalni zajednički koreni $\Leftrightarrow$ za svako d i sve $i=1,\ldots,q(d)$ je $D_{d,i}=0$. U idealu $(D_{d,i})$ prstena $\mathbb{Z}$[koeficijenti $f_1,\ldots,f_r$] izaberimo konačnu homogenu bazu. To su traženi polinomi $R_1,\ldots,R_k$. $\square$

Primedbe. 1. Skup $\{R_1,\ldots,R_k\}$ se zove skupom rezultanti.

2. Za $r<n$ taj skup je prazan tj. uvek imamo netrivijalno rešenje sistema.

3. Za $r=n=2$ je $k=1$ tj. imamo samo jednu rezultantu koja se podudara sa standardnom rezultantom dve forme.

4. Ovaj dokaz je direktna generalizacija na kvazihomogeni slučaj dokaza za homogene polinome u [37] str.490-492.

Posledica. Skup kvazihomogenih polinoma datog tipa v i stepena d sa neizolovanim singularitetom je zatvoren algebarski podskup skupa svih kvazihomogenih polinoma datog tipa i stepena tj. projektivnog prostora $\mathbb{P}^{n(v,d)-1}$.

Izložimo sada još jedno interesantno pitanje koje je zasad nerešeno. Neka je $f \in A$. Reći ćemo da je f rastavljiv

modulo m ako postoji red $g\in \mathfrak{M}^m$ ($\mathfrak{M}$ je maksimalni ideal u A, $\mathfrak{M}=(x_1,\dots,x_n)$) takav da je $f+g$ rastavljiv. Očito, f rastavljiv modulo $m \Rightarrow f$ rastavljiv modulo $m-1$.
Supremum svih $m\in\mathbb{N}$ takvih da je f rastavljiv modulo m, uvećan za 1 zvaćemo indeksom nerastavljivosti reda f i obeležavati sa $i(f)$. To je u stvari prvi broj m za koji sistem

$$\begin{cases} f_1=g_1h_1 \\ f_2=g_1h_2+g_2h_1 \\ \dots\dots \\ f_m=g_1h_m+\dots+g_mh_1 \end{cases}$$

nema rešenja po $g_1,\dots,g_m,h_1,\dots,h_m$.
<u>Primer</u>. Za $f(x,y,z)=xy+z^m$ je $i(f)=m$.
Jasno da, ako je f rastavljiv, onda je $i(f)=+\infty$. Da li ima nerastavljivih f sa $i(f)=+\infty$?

<u>Hipoteza</u>. $i(f)=+\infty \Rightarrow f$ je rastavljiv.

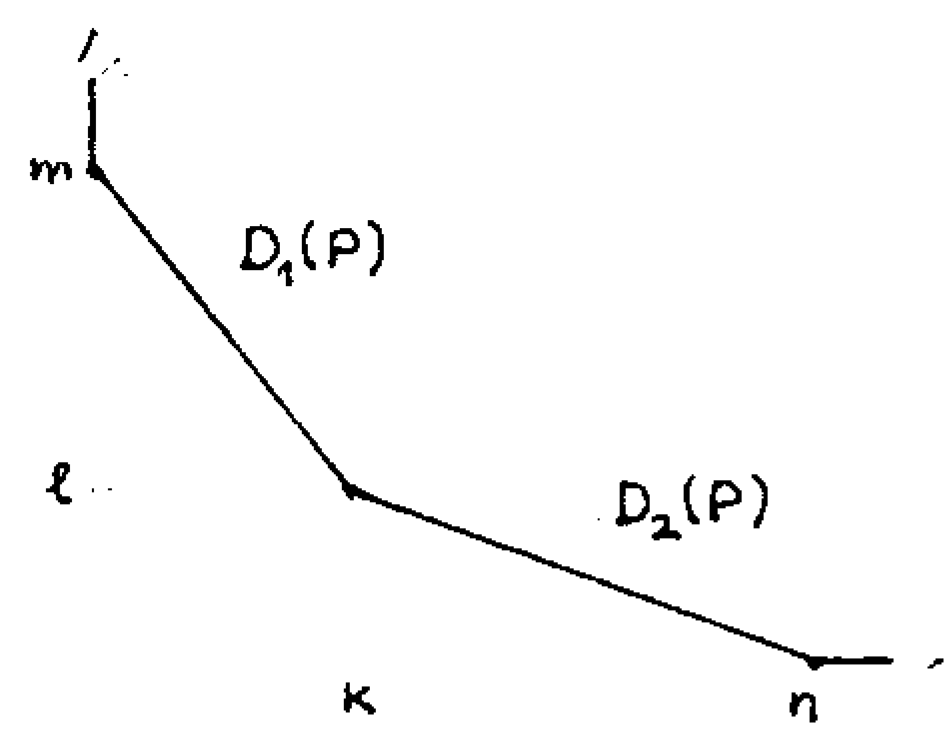
U prilog ovome govore i sledeće činjenice.
Dodavanje $g\in\mathfrak{M}^m$ redu f se na $N(f)$ manifestuje dodavanjem tačaka iznad ravni $\sum_{i=1}^{n} x_i=m$ i može promeniti Njutnov dijagram. Ako je medjutim f regularan po svim promenljivim (v.str.20), onda se za dovoljno veliko m $N(f)$ ne menja. Ako nije regularan, neke neograničene strane $N(f)$ mogu postati trouglovi. Zato, ako je f jako nerastavljiv i
1. regularan po svim promenljivim, ili
2. $D(f)$ ima nerazloživu stranu sa tačkama u svim koordinatnim ravnima (v.lemu 2.12.),
onda je $i(f)$ konačan i hipoteza važi.

§4. Slučaj n=2: krive

U ovom odeljku razmotrićemo $\mathcal{N}$-poliedre u $\mathbb{R}^2$ i rastavljivost elemenata prstena $A=K[[x,y]]$. Svi nerazloživi $\mathcal{N}$-poliedri se nalaze vrlo jednostavno.

<u>Teorema 4.1</u>. Neka je $P\in\mathcal{N}_o$ i $(n,0)$, $(0,m)$ celobrojna temena P koja leže na osama. Tada, P je nerazloživ $\Leftrightarrow$ $D(P)$ ima jednu ivicu $(n,0)(0,m)$ pri čemu je $M(m,n)=1$.

<u>Dokaz</u>. Dovoljno je pokazati da ako je $(k,\ell)\in D(P)$ celobrojna tačka različita od krajeva (tj. $k\neq 0,\ell\neq 0$) onda je $D(P)$ razloživ. Neka su $D_1(P)$ i $D_2(P)$ delovi $D(P)$ na koje ga deli (k,ℓ) i D' i D'' njihovi $\mathcal{N}_o$-predstavnici. Tada je očito $P=Q+R$ gde su



$Q=D'+\mathbb{R}^2_+$, $R=D''+\mathbb{R}^2_+$. Za kraj dokaza potrebno je primetiti da na duži $(n,0)(0,m)$ nema celobrojnih tačaka različitih od krajeva $\Leftrightarrow$ $M(m,n)=1$.

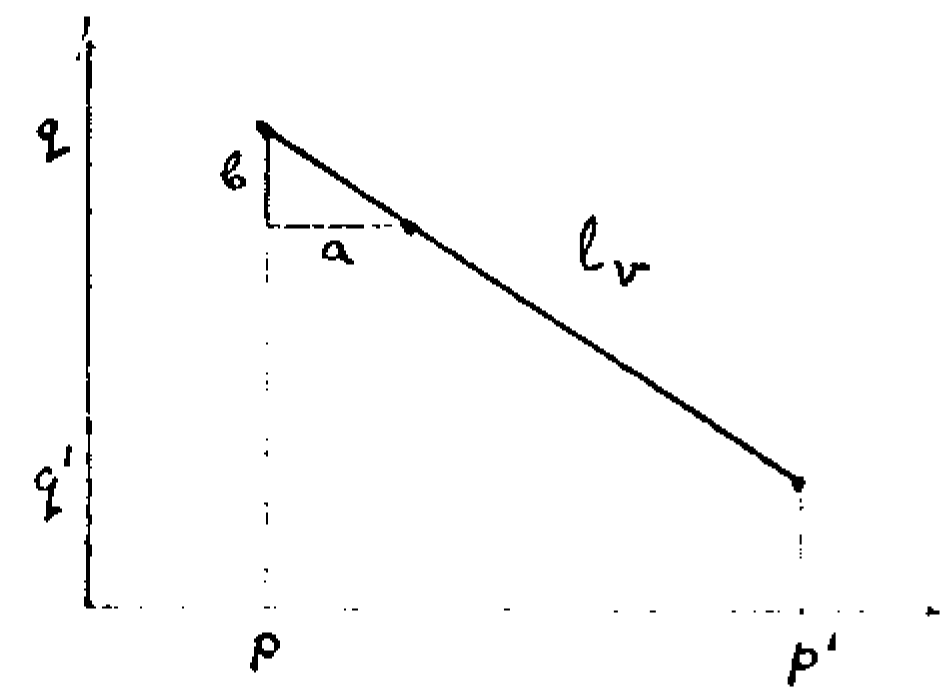
<u>Posledica</u>. Svaki $\mathcal{N}$-poliedar $P\in\mathcal{N}^{(2)}$ se predstavlja u obliku $P=m_1B_1+m_2B_2+\sum_{i=1}^{k}Q_i$ gde su $B_i=e_i+\mathbb{R}^2_+$ a $D(Q_i)$ duži sa krajevima $(p_i,0)$ i $(0,q_i)$ pri čemu su p_i i q_i uzajamno prosti. Ova reprezentacija je jedinstvena do na redosled sabiraka.

<u>Dokaz</u>. Ostaje da se proveri samo jednoznačnost. Ali ako je $P=\sum_{i=1}^{k} Q_i$ onda je $D(P)$ dobijen nadovezivanjem duži $D(Q_i)$ po rastućem nagibu. Pošto su ti odsečci jednoznačno odredjeni na osnovu $D(P)$, tvrdjenje je očigledno. $\square$

<u>Posledica</u>. Red $f\in A$ je jako nerastavljiv $\Leftrightarrow$ za neki tip kvazihomogenosti $v=(1/p,1/q)$ sa $M(p,q)=1$ i neke $a,b\in K\setminus\{0\}$ je $f(x,y)=(ax^p+by^q)+g(x,y)$ gde je $\mathrm{ord}_v(g)>1$.

<u>Dokaz</u>. Ovo očigledno sledi iz teoreme. $\square$

Uvedimo oznake koje ćemo koristiti u daljem. Neka je $f=\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j\in A$, $v=(1/a,1/b)$ $(M(a,b)=1)$ proizvoljni tip kvazihomogenosti i $f_d^{(v)}=\sum_{i/a+j/b=d} a_{ij}x^i y^j$ kvazihomogena komponenta od f najmanjeg kvazistepena d. Neka je $\ell_v=F(D(f),v)$ strana $D(f)$ odredjena vektorom v koja leži na pravoj $x/a+y/b=d$ $(d\in\frac{1}{ab}\mathbb{Z})$ i neka su (p,q) i (p',q') temena $(p=p'$ i $q=q'$ ako se ℓ_v svodi na jednu tačku). Prva celobrojna tačka na ℓ_v susedna temenu (p,q) je $(p+a,q-b)$ a sve celobrojne tačke na ℓ_v su $(p+ia,q-ib)$ $(i=0,\dots,k)$ gde je k ukupan broj odsečaka sa celobrojnim krajevima na ℓ_v.



Tada je $f_d^{(v)}=\sum_{i=0}^{k} a_{p+ia,q-ib}\,x^{p+ia}y^{q-ib}$. Obeležimo sa $L_v(t)=\sum_{i=0}^{k} a_{p+ia,q-ib}\,t^i$. To je običan polinom po t stepena k čiji koeficijenti su jednaki koeficijentima f koji odgovaraju temenima na ℓ_v. Zvaćemo ga polinomom asociranim sa stranom ℓ_v dijagrama D(f). Ako je $v=(1,1)$ tj. filtracija je obična homogena, stavićemo $L_v(t)=L(t)$. Ako su $\ell_1,\dots,\ell_r$ sve jednodimenzione stranice dijagrama D(f) i $v_i=(1/a_i,1/b_i)$ vektori koji ih odredjuju, neka su $L_i(t)=L_{v_i}(t)$.

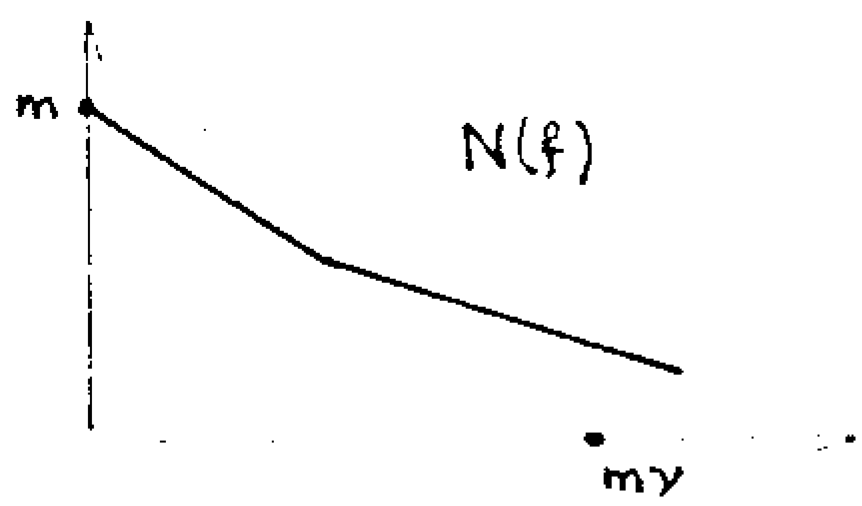
Lema 4.2. (a) Ako su $f,g\in K[x,y]$ homogene forme stepena m,n respektivno, bez zajedničkih linearnih faktora, onda je $(f,g)\supset(x,y)^k$ za sve $k\geqslant m+n-1$.
(b) Ako je $f=f_d+f_{d+1}+\dots\in K[[x,y]]$ razlaganje u sumu homogenih komponenti i početna forma $f_d=g_r h_s$ gde su g_r i h_s forme stepena r,s respektivno bez zajedničkih faktora, onda je f rastavljiv i $f=(g_r+g_{r+1}+\dots)(h_s+h_{s+1}+\dots)$.
(v.[22]str.61)

Dokaz. (a) Pošto f,g nemaju zajednički faktor, njihova rezultanta je $R(f,g)\neq 0$. Ako je $h\in(x,y)^{m+n-1}$ forma stepena $m+n-1$, jednakost $h=af+bg$ sa $a\in(x,y)^{n-1}$, $b\in(x,y)^{m-1}$ nam daje sistem linearnih jednačina sa nepoznatim koeficijentima formi a,b u kome je broj jednačina $(m+n-1)+1=m+n$, a broj nepoznatih $(n-1)+1+(m-1)+1=m+n$, slobodni članovi su koeficijenti forme h a determinanta $R(f,g)\neq 0$. Zato sistem ima jedinstveno rešenje tj. postoje jedinstveni a,b za koje je $h=af+bg$. Odavde sledi tvrdjenje leme.
(b) sledi neposredno iz (a), izjednačavanjem homogenih delova leve i desne strane u jednakosti
$f_d+f_{d+1}+\dots=(g_r+g_{r+1}+\dots)(h_s+h_{s+1}+\dots)$. □

<u>Posledica</u>. Ako je $f \in A$, broj nerastavljivih faktora od f nije manji od broja različitih korena polinoma $L(t)$. Specijalno, ako je f nerastavljiv i f_d početna homogena forma od f, onda je $f_d=(ax+by)^d$ stepen linearne forme i ℓ_v je za $v=(1,1)$ ili teme na osi $(m,0)$ ili $(0,m)$, ili ceo odsečak $(m,0)(0,m)$.

<u>Dokaz</u>. Broj različitih korena polinoma $L(t)$ jednak je najvećem broju faktora bez zajedničkih linearnih faktora na koje se homogena forma f_d može razložiti. Oba tvrdjenja sad slede na osnovu leme 4.2.(b). $\square$

Neka je $f \in A$ proizvoljan. Ako je $v=(1,1)$ i ℓ_v nema teme na osi, onda je na osnovu gornje posledice f rastavljiv. U daljem ćemo uvek smatrati da ℓ_v ima teme na osi y tj. $D(f) \ni (0,m)$ gde je $m=\mathrm{ord}_v(f)$. Sa ν ćemo obeležavati broj $-1/\lambda$ gde je λ nagib ivice $D(f)$ čije je teme $(0,m)$. Pri tome je $\nu \geqslant 1$.



Na osnovu teoreme I.2.5. (WPTF, str.20), postoji invertibilni $g \in A$ takav da je

$f(x,y)=g(x,y)\cdot(y^m+a_1(x)y^{m-1}+\ldots+a_m(x))$ (*).

Pri tome je $\nu=\max\{\mathrm{ord}\, a_i(x)/i\ ,\ i=1,\ldots,m\}$. Ako je f zapisan u obliku (*), reći ćemo da je normalizovan. Ako još primenimo tzv. transformaciju Tschirnhausena $x \mapsto x$, $y \mapsto y-a_1(x)/m$ koja indukuje formalni izomorfizam $A \xrightarrow{\sim} A$, dobićemo sledeći oblik za f:

$f(x,y)=g(x,y)\cdot(y^m+a_2(x)y^{m-2}+\ldots+a_m(x))$ (**).

Ovaj oblik ćemo zvati redukovanim oblikom za f. Sve što se u daljem odnosi na redukovane redove važi naravno samo u slučaju char $K=0$.

Lema 4.3. Neka je $f=f_m+f_{m+1}+\ldots \in A$ kao gore i $\nu>1$. Neka je $f'(x,y)=(1/x^m)\, f(x,xy)$. Tada $f'\in A$, odgovarajuće $\nu'=\nu-1$ i broj nerastavljivih faktora od f jednak je broju nerastavljivih faktora od f'. Specijalno, f je nerastavljiv $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ f' je nerastavljiv.

Dokaz. Zapišimo f u normalizovanom obliku (*) gde je ord $a_i(x)>i$ $(i=1,\ldots,m)$ jer je $\nu>1$. Tada, f je rastavljiv u A $\Leftrightarrow$ $y^m+a_1(x)y^{m-1}+\ldots+a_m(x)$ je rastavljiv u $K[[x]][y]$ (kao polinom). Zato možemo od početka smatrati da je $g=1$. Tada je $f'(x,y)=y^m+(a_1(x)/x)y^{m-1}+\ldots+(a_m(x)/x^m)$ i $a_i(x)/x^i=b_i(x)\in K[[x]]$, ord $b_i(x)>1$, $\nu'=\frac{m\nu-m}{m}=\nu-1$. Ako je f rastavljiv, očito je i f' rastavljiv. Ako je pak $f'=f_1'\cdot f_2'$, $f_1'=y^{m_1}+c_1(x)y^{m_1-1}+\ldots$, $f'=y^{m_2}+d_1(x)y^{m_2-1}+\ldots$ i $m_1+m_2=m$, onda je $f(x,y)=x^m f'(x,y/x)=$
$=(x^{m_1}f_1'(x,y/x))\cdot(x^{m_2}f_2'(x,y/x))=f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)$. $\square$

Primedba. Opisana smena koordinata geometrijski odgovara lokalnom razduvavanju (v.§I.1) $\pi: S^*\longrightarrow S$ sa centrom u tački $P\in S$ gde je $f=0$ jednačina krive $C\subset S$, P njena singularna tačka i $f'=0$ jednačina striktnog transformata C' krive C. Broj n nerastavljivih faktora od f jednak je broju algebroidnih (formalnih) grana krive C u tački P, broj r tačaka u C' koje leže nad P zadovoljava $r\leq n$ i ako sa m',

ν' obeležimo odgovarajuće parametre krive C' tj. reda f', imamo sledeću lemu.

Lema 4.4. Ako je f redukovani red, onda

(a) $\nu=1 \Rightarrow r>1$ i svi $m'<m$;

(b) $\nu>1 \Rightarrow r=1$ i $m'<m$ ili $m'=m$ i $\nu'=\nu-1$;

(c) $r=1 \Rightarrow (m'=m \Leftrightarrow \nu\geqslant 2)$.

(v.[31]str.226 kao i rad autora [29] lema 3).

Dokaz. Primetimo da ako je f redukovan, onda je i f' redukovan. $\nu=1$ označava da početna forma f_m sadrži bar dva člana: y^m i neki $ax^i y^{m-i}$. Medjutim, f je redukovan, f_m ne sadrži stepen y^{m-1} pa ne može biti potpun stepen. Na osnovu posledice leme 4.2. (str.57) f je rastavljiv tj. $r>1$ i višestrukost svakog od faktora je $<m=\text{ord } f$. (b) sledi na osnovu dokaza leme 4.3. kao i (c), ako primetimo da je $\text{ord } (a_i(x)y^{m-i}/x^i)=m-2i+\text{ord } a_i(x)$. $\square$

Teorema 4.5. Neka je $f\in A$ nerastavljiv i $\text{ord } f=m$. Tada

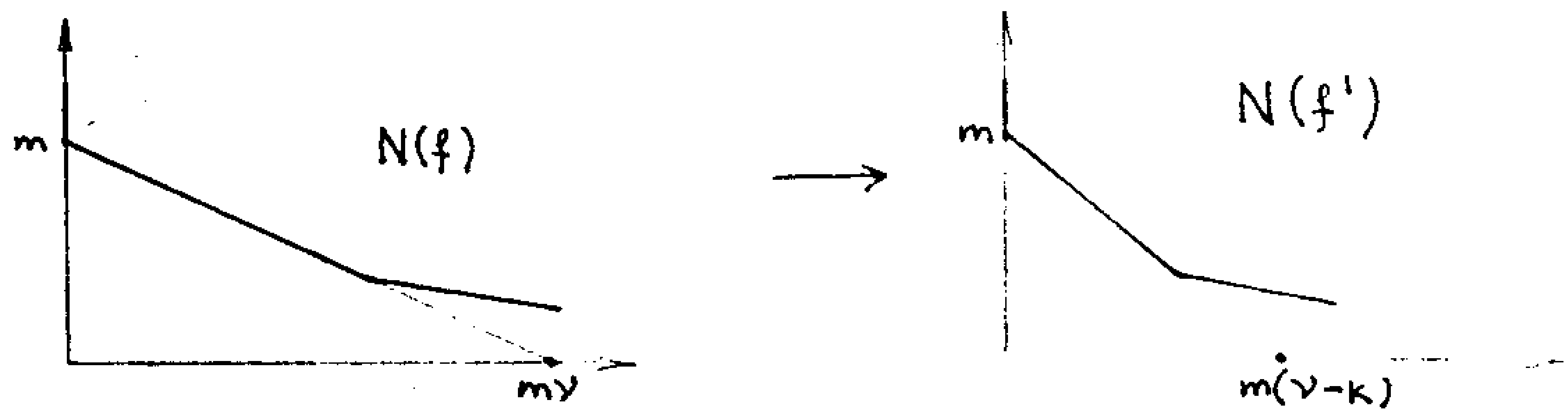
(a) $D(f)$ ima jednu ivicu sa temenima $(n,0)$ i $(0,m)$;

(b) kvazihomogena početna komponenta $f_m^{(v)}$ tipa $v=(1/n,1/m)$ je potpun stepen nerastavljive kvazihomogene forme: $f_m^{(v)}=(ax^{n/d}+by^{m/d})^d$ gde je $d=M(m,n)$.

Dokaz. (a) Dokaz izvedimo indukcijom po $m=\text{ord } f$. Za $m=1$ tvrdjenje je očigledno: $D(f)$ sadrži tačku $(0,1)$ i mora biti duž. Neka je $\text{ord } f=m$. Na osnovu posledice leme 4.2. mogu nastupiti dva slučaja.

1. ℓ_v je odsečak $(m,0)(0,m)$, $D(f)=\ell_v$ i dokaz je završen.

2. ℓ_v je teme $(0,m)$. Neka je ν kao gore, $\nu > 1$. Stavimo $k=\nu-1$ ako je ν ceo i $k=[\nu]$ inače. Primenom leme 4.3. k puta dolazimo do smene $x \mapsto x$, $y \mapsto x^k y$ i do reda $f'(x,y)=(1/x^{km})\cdot f(x,x^k y)$ pri čemu je f' nerastavljiv $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ f je nerastavljiv. Ova smena definiše linearnu transformaciju ravni eksponenata $(i,j) \longmapsto (i+kj-km,j)$:



Pri tome je $\nu-k=1$ ako je ν ceo i <1 inače. U prvom slučaju, na osnovu posledice leme 4.2. $D(f')$ je duž $(m,0)(0,m)$ pa je i $D(f)$ duž $(m\nu,0)(0,m)$ i to je kraj dokaza. U drugom slučaju je $\nu'=\nu-k<1$, ord $f'=m\nu'<m=$ord f, pa je na osnovu indukcijske hipoteze $D(f')$, a s njim i $D(f)$, duž. Specijalno, mora biti $m\nu=n\in\mathbb{N}$.

(b) Neka je $D(f)$ duž $(n,0)(0,m)$ pri čemu možemo smatrati da je $1<m\leqslant n$. Dokažimo da se uzastopnom primenom smena iz leme 4.3. $x\mapsto x$, $y\mapsto xy$ ili $x\mapsto xy$, $y\mapsto y$ može doći do smene $x\mapsto x^a y^b$, $y\mapsto x^c y^d$ takve da je $f(x^a y^b, x^c y^d)=$ $=x^p y^q f^*(x,y)$, $D(f^*)$ duž $(k,0)(0,k)$ i f nerastavljiv $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ f^* nerastavljiv, pri čemu ako je f redukovan imamo: $\nu\in\mathbb{N} \Rightarrow f^*$(i f) rastavljiv, a $\nu\notin\mathbb{N} \Rightarrow$ ord $f^*<$ ord f.

Dokaz izvedimo indukcijom po m=ord f. Za m=1 tražena smena je $x\mapsto x$, $y\mapsto x^{n-1}\cdot y$ tj. n-1 puta ponovljena transformacija leme 4.3. Lako se vidi da su ispunjene sve tražene osobine. U opštem slučaju, ako je m=n tvrdjenje je tačno. Neka je $n>m$, $\nu=n/m>1$ i k kao u dokazu pod (a). U prvom slučaju $\nu-k=\nu'=1$ i tvrdjenje je očigledno tačno. Ako je pak $\nu-k=\nu'<1$, po indukcijskoj hipotezi tvrdjenje je tačno za f' (ord $f'<$ ord f) pa važi i za f. Željena transformacija (*) se može dobiti i eksplicitno. Naime, uočimo algoritam deljenja:

$$\begin{aligned} n=r_{-1}&=q_0r_0+r_1 \\ m=r_0&=q_1r_1+r_2 \qquad\qquad 0<r_k<r_{k-1}<\dots<r_1<r_0<r_{-1} \\ &\dots \qquad\qquad\qquad\qquad r_k=d=M(m,n),\ p=m/d,\ q=n/d\ . \\ r_{k-1}&=q_kr_k, \end{aligned}$$

Brojevi $q_0,\dots,q_k$ mogu se definisati i kao delimični kvocijenti u razlaganju racionalnog $\nu=n/m$ u verižni razlomak:

$$\frac{n}{m}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cdots+\cfrac{1}{q_k}}\ .$$

Neka su sad matrice

$$A_0=\begin{pmatrix}1&0\\q_0&1\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}1&q_1\\0&1\end{pmatrix},\ \dots,\ A_k=\begin{pmatrix}1&0\\q_k&1\end{pmatrix}\ \text{ili}\ \begin{pmatrix}1&q_k\\0&1\end{pmatrix}$$

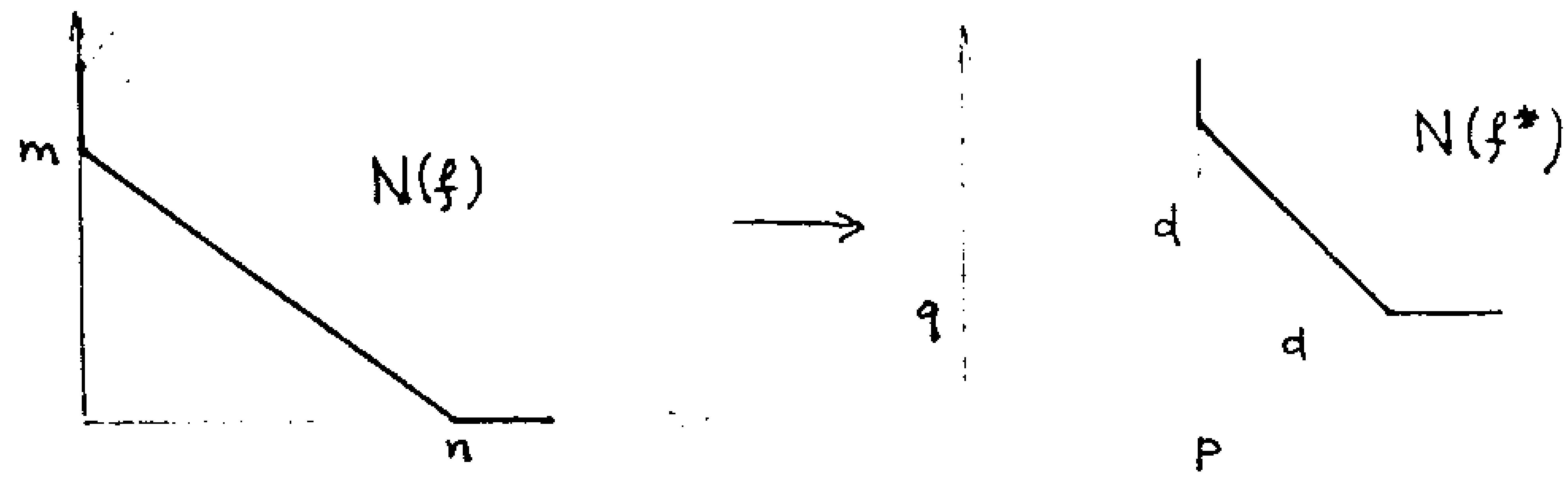
zavisno od parnosti k i neka je $A'_k=\begin{pmatrix}1&0\\q_k-1&1\end{pmatrix}$ ili $\begin{pmatrix}1&q_k-1\\0&1\end{pmatrix}$,

$C=A_k\dots A_0=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ i $C'=A'_kA_{k-1}\dots A_0=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c-a&d-b\end{pmatrix}$.

Tada je det C = det $C'=1$ i lako se vidi da je $a=p$, $c=q$ za k parno odnosno $b=p$, $d=q$ za k neparno.

Smena $x\mapsto x$, $y\mapsto x^ky$ dovodi do linearne transformacije ravni eksponenata sa matricom $A=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$. Pošto je $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}C'$,

kompozicija linearnih transformacija $A_0,\ldots,A_{k-1},A'_k$ ima matricu C' i daje traženu smenu promenljivih:



Pošto je transformacija C' obostrano jednoznačna, koeficijenti u f na $D(f)$ odgovaraju koeficijentima u f^* na $D(f^*)$. Ali homogeni deo f^*_d je potpun stepen na osnovu posledice leme 4.2. pa je i $f^{(v)}_m$ potpun stepen. □

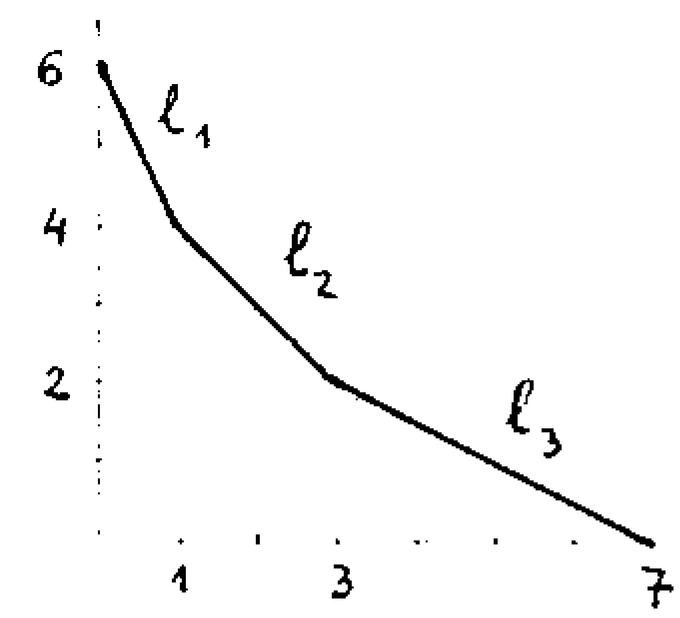
Primedba. Ova teorema je u suštini bazirana na procesu redukcije singulariteta. Dokaz koji koristi teoremu o razrešenju singulariteta izložen je u [10]str.90. U knjizi [6] na str.634 izložena je druga varijanta koja prolazi samo u slučaju kada je osnovno polje $K=\mathbb{C}$ jer koristi klasičnu topologiju $\mathbb{C}$. Dokaz izložen ovde prolazi za svako polje i ne koristi (bar ne eksplicitno) teoremu o razrešenju singulariteta, već je izveden isključivo u terminima formalnih redova.

Posledica. Ako je $f\in K[[x,y]]$, $\ell_1,\ldots,\ell_r$ sve jednosimenzione strane $D(f)$, $k_i=\deg L_i(t)$ (=broj različitih odsečaka sa celobrojnim krajevima na ℓ_i) i r_i broj različitih korena polinoma $L_i(t)$, onda je

$$r \leqslant \sum_{i=1}^{r} r_i \leqslant \text{broj nerastavljivih faktora } f \leqslant \sum_{i=1}^{r} k_i .$$

<u>Dokaz</u>. Neka je $f=f_1\ldots f_s$ nerastavljiva reprezentacija f. Tada $D(f_i)$ ima jednu ivicu i $N(f)=N(f_1)+\ldots+N(f_s)$ pa se skup $S=\{f_1,\ldots,f_s\}$ razbija na r podskupova $S_1,\ldots,S_r$ takvih da $f_j\in S_i \Leftrightarrow D(f_j)$ je paralelno ℓ_i. Pri tome je poliedar $D(\prod_{j\in S_i}(f_j))$ dobijen translacijom ℓ_i - to je njegov $\mathcal{N}_0$-predstavnik. Na osnovu teoreme, $r_i\leqslant \mathrm{card}\, S_i\leqslant k_i$, odakle sledi tvrdjenje posledice. □

<u>Primer</u>. Neka je $f(x,y)=x^7-x^5y+x^3y^2+2x^2y^3+xy^4+y^6$. $D(f)$ je predstavljen na slici. Imamo



$r=3$, $k_1=1$, $k_2=k_3=2$,

$L_1(t)=1+t$, $\quad r_1=1$,

$L_2(t)=1+2t+t^2$, $\quad r_2=1$,

$L_3(t)=1-t+t^2$, $\quad r_3=2$.

Zato je $4\leqslant$ broj nerastavljivih faktora $f\leqslant 5$.

<u>Posledica</u>. Svaki nerastavljivi kvazihomogeni polinom f je jako nerastavljiv tj. oblika $f(x,y)=ax^p+by^q$ sa $M(p,q)=1$. Svaki kvazihomogeni polinom tipa $(1/p,1/q)$ se jednoznačno predstavlja u obliku $f(x,y)=x^\alpha y^\beta \prod_{i=1}^{k}(a_ix^p+b_iy^q)^{m_i}$.

Dakle, nerastavljivi kvazihomogeni polinomi f odnosno njihovi singulariteti $f=0$ korespondiraju tzv. toroidalnim čvorovima (v.[6]str.576). Za svaki tip kvazihomogenosti postoji (do na linearni izomorfizam) tačno jedan jednograni kvazihomogeni singularitet definisan sa $y^q=x^p$ $(M(p,q)=1)$.

Bazirajući se na postupku opisanom u dokazu teoreme možemo dati efektivan algoritam za proveru ireducibilnosti datog reda $f\in K[[x,y]]$. Ovaj algoritam je implicitno sadržan u [10] a eksplicitno opisan u radu autora [26]. Ovde ćemo ga izložiti u poboljšanom obliku.

Neka je $f\in K[[x,y]]$ takav da je $D(f)$ duž $(n,0)(0,m)$, $m=\mathrm{ord}\, f\leq n$, $d=M(m,n)$ i $f_m^{(v)}=(ax^{n/d}+by^{m/d})^d$. Razlikujemo dva slučaja.

1. m deli n tj. $d=m$ i $\nu\in\mathbb{N}$. U ovom slučaju dovedimo f na redukovani oblik f'. Smena $x\mapsto x$, $y\mapsto y-a_1(x)/m$ ne menja $m=m'$ ali može promeniti n i to na dva načina:

(a) novi dijagram ne seče x-osu ($n'=\infty$) tj. $f'=(\text{invertibilni element})\cdot y^{m'}$. Tada je f potpun (m-ti) stepen nerastavljive forme $y+a_1(x)/m$ i zato rastavljiv;

(b) novi dijagram seče x-osu u tački $n'>n$. Pošto je f' redukovan, na osnovu primedbe u dokazu teoreme 4.5. razlikujemo opet dva slučaja: ako je $n'/m'=\nu'\in\mathbb{N}$, f' (a zato i f) je rastavljiv. Ako je pak $\nu'\notin\mathbb{N}$, prelazimo na tačku 2 sa f'.

2. m ne deli n tj. $\nu\notin\mathbb{N}$. Tada primenimo smenu odredjenu u dokazu teoreme. Dobijamo red $f'=(1/x^p y^q)\cdot f(x^\alpha y^\beta, x^\gamma y^\delta)$ u kome je $\mathrm{ord}\, f'=d=M(m,n)<\mathrm{ord}\, f$ i $f'_d=(ax+by)^d$. Ako sad izvršimo linearnu smenu koordinata $x\mapsto x$, $y\mapsto ax+by$ ako je $b\neq 0$ ili $x\mapsto ax+by$, $y\mapsto y$ ako je $a\neq 0$ dobijamo red $f^{(1)}$ pri čemu je $\mathrm{ord}\, f^{(1)}=d<\mathrm{ord}\, f$ i f je nerastavljiv $\Leftrightarrow$ takav je $f^{(1)}$. Opisani postupak ponavljamo za $f^{(1)}$ i dobijamo $f^{(2)}$ itd. Postoje dve mogućnosti:

1) na nekom od koraka postupak se ne može nastaviti tj. realizovao se neki od slučajeva 1.(a) ili 1.(b)(prvi) ili

$D(f)$ nije odsečak ili pak $f_m^{(r)}$ nije potpun stepen. Tada je f rastavljiv;

2) postupak se može uvek nastaviti. Tada dobijamo niz $f=f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ sa $\mathrm{ord}\, f^{(0)} > \mathrm{ord}\, f^{(1)} > \ldots > \mathrm{ord}\, f^{(k)} \geqslant 1$. Ovaj slučaj je očito nemoguć i posle konačno mnogo koraka moramo doći do $\mathrm{ord}\, f^{(k)}=1$. Tada je $f^{(k)}$, a zato i f, nerastavljiv.

<u>Primeri</u>. 1. $f(x,y)=y^4+2x^3y^2+x^6-x^5y$. Imamo $m=4$, $n=6$, algoritam deljenja daje $6=1\cdot 4+2$, $4=2\cdot 2$, $q_0=1$, $q_1=2$, matrica $C'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, smena $x\mapsto xy$, $y\mapsto x^2y$ daje $f(xy,x^2y)=x^6y^4(x^2+2xy+y^2-xy^2)=x^6y^4((x+y)^2-xy^2)$, $f'(x,y)=(x+y)^2-xy^2$. Linearna smena $x\mapsto x+y$, $y\mapsto y$ daje red $f^{(1)}(x,y)=x^2-xy^2-y^3$. Ali $M(2,3)=1$ pa je $\mathrm{ord}\, f^{(2)}=1$ i to je kraj algoritma. f je nerastavljiv.

2. $f(x,y)=y^4+2x^3y^2+x^6-x^4y^2$. Prvi korak je isti kao u primeru 1. Dobijamo $f'(x,y)=(x+y)^2-x^2y^2$ i $f^{(1)}(x,y)=x^2-x^2y^2-2xy^3-y^4$. Dobijeni red ne zadovoljava početne uslove: njegova početna kvazihomogena forma je $x^2-y^4\neq(ax+by^2)^2$. Zato je f rastavljiv (naravno, on je rastavljiv već u $K[x,y]$: $f=(y^2+x^3+x^2y)\cdot(y^2+x^3-x^2y)$).

3. $f(x,y)=y^4+x^3y^2+x^6-x^5y$. Početna forma od f je $y^4+x^3y^2+x^6\neq(ax^3+by^2)^2$ pa f ne zadovoljava početne uslove i zato je rastavljiv. Primetimo da je u $K[x,y]$ f nerastavljiv što se lako vidi na osnovu Ajzenštajnovog kriterijuma.

Neka je $f \in K[[x,y]]$ i $m = \operatorname{ord} f$. Zapišimo ga u reduciranom obliku. Na osnovu svega rečenog, neophodni uslovi nerastavljivosti su $\nu \notin \mathbb{N}$ i $m\nu \in \mathbb{N}$. Jasno je da se transformacijama leme 4.3. može dobiti red f^* takav da f i f^* imaju isti broj nerastavljivih faktora, a da je odgovarajuće $\nu^* \in (1,2)$. Pošto za svako fiksirano m ima samo konačno mnogo mogućih vrednosti za ν i to $(m+1)/m, \dots, (2m-1)/m$, možemo pokušati da nadjemo uslove za nerastavljivost svih f sa datim m počev od $m=2$. Na osnovu napred rečenog, ako su m i $m\nu$ uzajamno prosti f je nerastavljiv. Zato prvi netrivijalni slučaj nastaje za $m=4$, $\nu=3/2$. U radu autora [29] dobijen je potpun opis svih nerastavljivih redova sa tim m i ν, kao i delimični opis prvih sledećih slučajeva $m=6$, $\nu = 4/3$, $3/2$, $5/3$.

<u>Teorema 4.6.</u> Ako je $f \in K[[x,y]]$ sa $m=4$, $\nu=3/2$, tada postoji formalni izomorfizam koji f prevodi u oblik
$y^4+(a_3x^3+a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\dots)y^2+(b_\ell x^\ell+b_{\ell+1}x^{\ell+1}+\dots)y+x^6$
sa $a_k \neq 0$, $b_\ell \neq 0$, $k>3$, $\ell \geqslant 5$ pri čemu je f nerastavljiv $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $a_3 = \pm 2$ i $k > \ell$.

<u>Dokaz</u>. Reducirani oblik za f je $y^4+a^{(2)}(x)y^2+a^{(3)}(x)y+a^{(4)}(x)$. Pošto je $\operatorname{ord} a^{(i)} \geqslant i\nu = 3i/2$, biće $a^{(2)}(x)=a(x)\cdot x^3$, $a^{(3)}(x)= =b(x)\cdot x^5$. Pošto $(6,0) \in D(f)$, $\operatorname{ord} a^{(4)}(x)=6$ pa koordinatnom transformacijom $x \mapsto x\sqrt[6]{a^{(4)}(x)/x^6}$ (K je algebarski zatvoreno i $K[[x]]$ je korenski zatvoren !) dobijamo $a^{(4)}(x)=x^6$. Time je prvi deo tvrdjenja dokazan. Primenimo transformacije

$x \mapsto x$, $y \mapsto xy$ a zatim $y \mapsto y \mp x^2$. Dobijamo red
$y^2 + \sum_{i \geq k} a_i (y-x^2)^{i+1} + \sum_{i \geq l} b_i (y-x^2)^{i+2} \cdot x$, odakle razmatranjem
$D(f)$ dobijamo teoremu. □

Primer. Prethodna tri primera se pomoću teoreme 4.6. proveravaju neposredno iz zapisa reda $f(x,y)$.

Na osnovu teoreme Mathera (teorema I.2.8. na str.23) vidi se da za svako fiksirano m proces završava posle konačno mnogo koraka jer je svaki singularitet $f=0$ formalno izomorfan singularitetu dobijenom skraćivanjem redova $a^{(i)}(x)$ do polinoma dovoljnog stepena. Medjutim već za $m=6$ uslovi nerastavljivosti postaju složeni i neefektivni.

Teorema 4.7. Neka je $f \in K[[x,y]]$ reduciran, $m=6$ i (a) $\nu = 4/3$, (b) $\nu = 5/3$, (c) $\nu = 3/2$. f se može dovesti na oblik

(a) $y^6 + a(x)x^3y^4 + b(x)x^4y^3 + c(x)x^6y^2 + d(x)x^7y + x^8$

(b) $y^6 + a(x)x^4y^4 + b(x)x^5y^3 + c(x)x^7y^2 + d(x)x^9y + x^{10}$

(c) $y^6 + a(x)x^3y^4 + b(x)x^5y^3 + c(x)x^6y^2 + d(x)x^8y + x^9$.

Ako je f nerastavljiv, onda je

(a),(b) $b(0) = \pm 2$;

(c) $a(0) = 3\varepsilon$, $c(0) = 3\varepsilon^2$ gde je $\varepsilon^3 = 1$.

Stavimo

(a),(b) $\alpha = \mathrm{ord}\, a$, $\gamma = \mathrm{ord}\, c$, $\lambda = \min\{\gamma, \mathrm{ord}(a-d), \mathrm{ord}(b-b_0)\}$;

(c) $\alpha = \mathrm{ord}(a-a_0)$, $\beta = \mathrm{ord}\, b$, $\lambda = \min\{\mathrm{ord}(b-d), \mathrm{ord}(a-c-a_0+c_0)\}$.

Tada, ako je

(a),(b) $(\lambda < 6\alpha + 8) \wedge (\lambda \not\equiv 0 \bmod 2)$;

(c) $(\lambda \not\equiv 0 \bmod 3) \vee (\lambda \equiv 0 \bmod 3 \wedge \lambda < 3\alpha + 6 \wedge \lambda < 6\beta + 9)$, onda je f nerastavljiv. Ako je

(a),(b) $(\lambda > 6\alpha+8) \vee (\lambda < 6\alpha+8 \wedge \lambda \equiv 0 \bmod 2) \vee (\lambda = 6\alpha+8 \wedge a_\alpha^2 \neq 4c_\gamma)$,

(c) $(\lambda \equiv 0 \bmod 3) \wedge (\lambda > 3\alpha+6 \vee \lambda > 6\beta+9 \vee \lambda = 3\alpha+6 < 6\beta+9 \vee \lambda = 6\beta+9 < 3\alpha+6)$,

onda je f rastavljiv.

Dokaz. Analogan je prethodnom (v.rad autora [29] teorema ?).

§5. Slučaj n=3: površi

U ovom odeljku razmotrićemo $\mathcal{N}$-poliedre u $\mathbb{R}^3$ i rastavljivost elemenata prstena A=K[[x,y,z]]. U odnosu na ravni slučaj situacija se jako komplikuje: medju generatorima grupe $\mathcal{N}^{(3)}$ pojavljuju se netrivijalne veze. Dobijen je samo opis nekih familija nerazloživih $\mathcal{N}$-poliedara. Primetimo da je u ovom slučaju 2-skelet poliedra $P\in\mathcal{N}$ jednoznačno odredjen 1-skeletom tj. kombinatorna struktura dijagrama D(P) je odredjena grafom G(P). Kombinatorni tip nije presudan kod nerazloživosti: homotetični poliedri od kojih jedan može biti razloživ a drugi ne imaju isti kombinatorni tip.

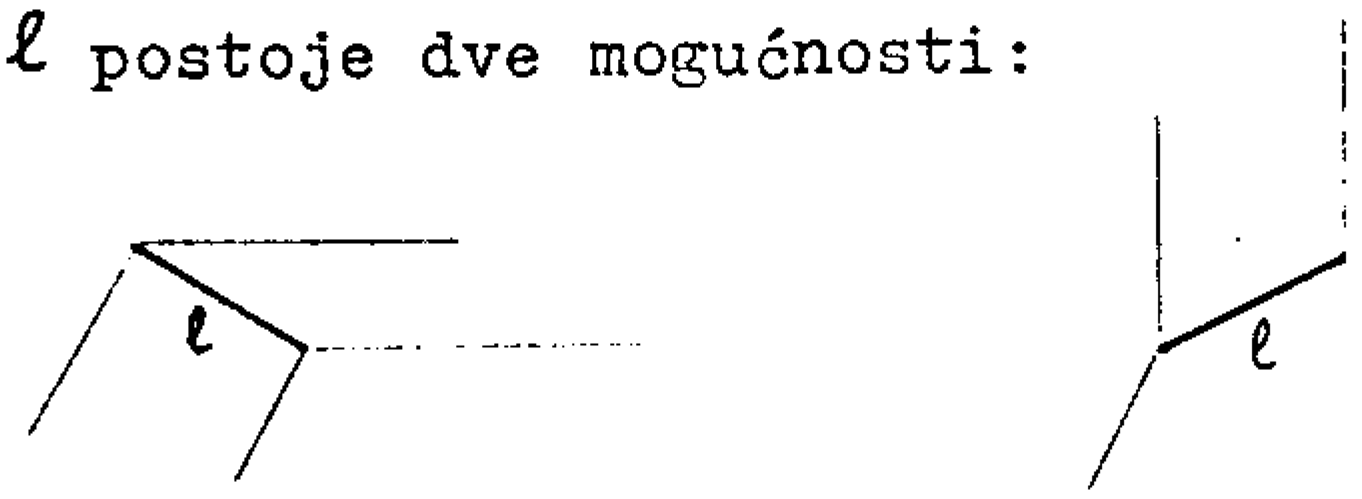
Lema 5.1. Za $P\in\mathcal{N}$ graf G(P) je planaran najviše 3-povezan.

Dokaz. Možemo primeniti teoremu Štajnica (v.[15]str.55 ili [21]str.235). Naime, G(P) se dobija iz poliedralnog grafa odstranjivanjem nekih ivica (koje odgovaraju neograničenim ivicama P) pa pošto je poliedralni graf planaran i 3-povezan, G(P) je planaran, najviše 3-povezan. Planarna realizacija G(P) se lako dobija i eksplicitno: odaberimo ravan $x+y+z=d$ iznad koje P nema temena. Tada svaki zrak upravan na tu ravan α seče D(P) u tačno jednoj tački zbog konveksnosti. Projektovanjem ivica D(P) na α dobijamo traženu ravansku realizaciju G(P). □

Reći ćemo da je ograničena ivica ℓ poliedra P slobodna ako je ona incidentna samo neograničenim 2-stranicama P tj. ako ivica koja joj odgovara u G(P) nije sadržana ni u jednom pravom lancu.

<u>Lema 5.2</u>. Ako je ℓ slobodna ivica $P \in \mathcal{N}$, onda je $P=Q+R$ gde je Q $\mathcal{N}_0$-predstavnik $\ell + \mathbb{R}^3_+$, a R $\mathcal{N}_0$-predstavnik poliedra dobijenog iz P izbacivanjem ivice ℓ i njoj incidentnih neograničenih stranica.

<u>Dokaz</u>. Pošto postoje dve vrste neograničenih stranica, za ivicu ℓ postoje dve mogućnosti:



Iz ovih crteža tvrdjenje leme sledi neposredno. □

Dakle, sve slobodne ivice možemo izdvojiti u posebne sabirke. Na osnovu ove leme izdvaja se klasa $\mathcal{N}$-poliedara koja se može smatrati direktnim uopštenjem $\mathcal{N}$-poligona: $\mathcal{N}_1$ je skup svih $P \in \mathcal{N}_0$ čiji je graf G(P) - drvo.

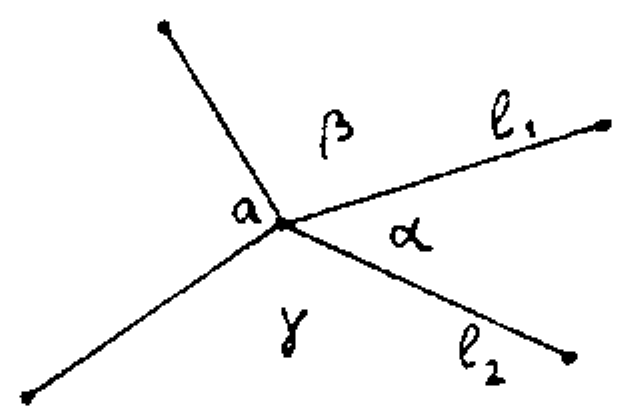
<u>Lema 5.3</u>. Ako $P \in \mathcal{N}_1$ i G(P) je njegov graf, tada

(a) stepen svakog temena G(P) je najviše 3,

(b) postoji najviše jedno teme stepena 3.

<u>Dokaz</u>. (a) Neka je $a \in P$ teme u kome se sustiče $k > 3$ ograničenih ivica P. Ako je s broj stranica incidentnih a, onda je $k \leq s \leq k+3$. Pošto ima najviše 3 neograničene ivice inci-

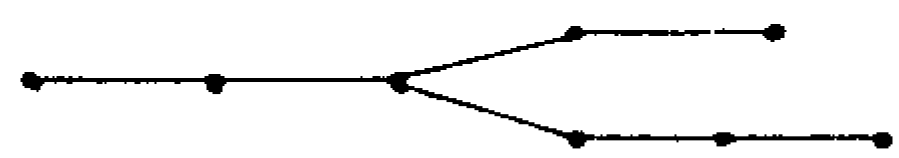
dentne a (paralelne osama), postoji par ograničenih ivica ℓ_1, ℓ_2 izmedju kojih nema neograničenih. Stranica α odredjena sa ℓ_1 i ℓ_2 je neograničena i mora biti paralelna bar jednoj od osa. Tada dve (neograničene) stranice β, γ susedne α moraju biti paralelne drugim dvema osama (u suprotnom bi ivice ℓ_1 i ℓ_2 bile neograničene). Ali onda postoji



stranica sa temenom a različita od α, β, γ pa ona mora biti ograničena, što protivreči činjenici da $P \in \mathcal{N}_1$.
(b) Ako se u temenu $a \in P$ sustiču tačno tri konačne ivice, onda se u a sustiču (neograničene) stranice paralelne svakoj od tri ose. Odavde sledi nemogućnost postojanja dva takva temena. □

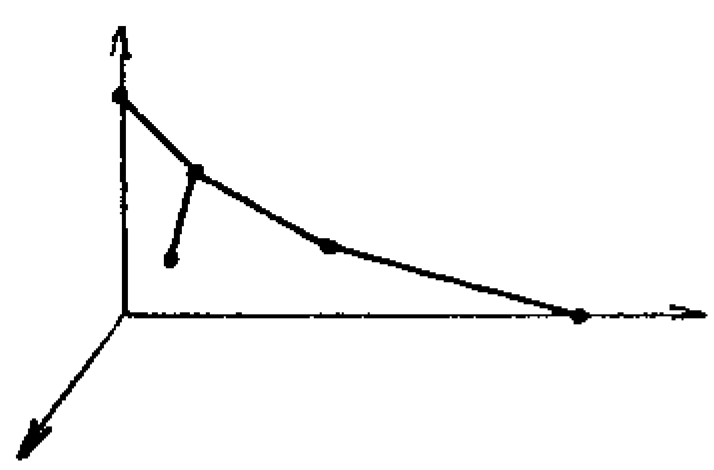
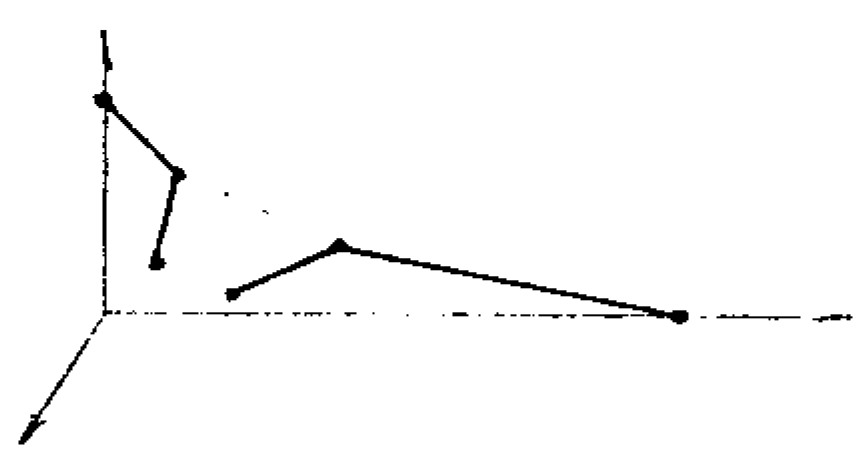
Posledica. Graf G(P) poliedra $P \in \mathcal{N}_1$ mora biti

I : linearan , ili

II: sa jednom tačkom grananja  .

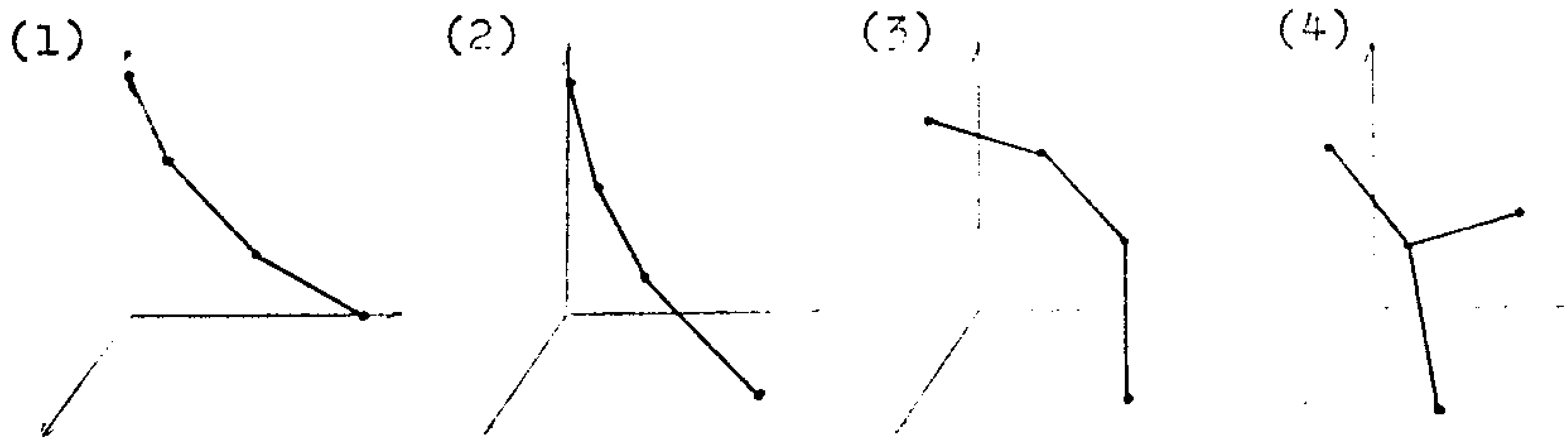
Lema 5.4. Ako $P \in \mathcal{N}_1$ i dva temena D(P) leže na dvema raznim osama, onda je G(P) tipa I i sve ivice D(P) leže u koordinatnoj ravni tih osa.

Dokaz. Situacija opisana u lemi izgleda na jedan od dva načina:

U oba slučaja D(P) bi morao imati ograničenu stranicu. □

Posledica. Za $P\in\mathcal{N}_1$ dijagram $D(P)$ mora biti jednog od sledećih (disjunktnih) tipova:



Dokaz. $D(P)$ ne može imati temena na sve tri ose jer bi imao ograničenu stranu. Ako $D(P)$ ima dva temena na osama, primenom leme 5.4. dobijamo tip (1). Ako $D(P)$ ima samo jedno teme na osi, on mora imati drugo završno teme u naspramnoj koordinatnoj ravni. Ako je $G(P)$ oblika I (posledica leme 5.3.), dobijamo tip (2). Kad bi $G(P)$ bio oblika II, morao bi imati ograničenu stranicu. Najzad, ako $D(P)$ nema temena na osama, on mora imati teme u svakoj koordinatnoj ravni. Za oblik I to nam daje tip (3) a za II tip (4). $\square$

Teorema 5.5. (a) $P\in\mathcal{N}_1$ je nerazloživ $\Leftrightarrow$ $D(P)$ ima samo jednu ivicu na kojoj nema celobrojnih tačaka osim temena.
(b) Svaki $P\in\mathcal{N}_1$ se jednoznačno do na redosled može razložiti u sumu nerazloživih $P_i\in\mathcal{N}_1$ koji odgovaraju celobrojnim odsečcima ivica $D(P)$.

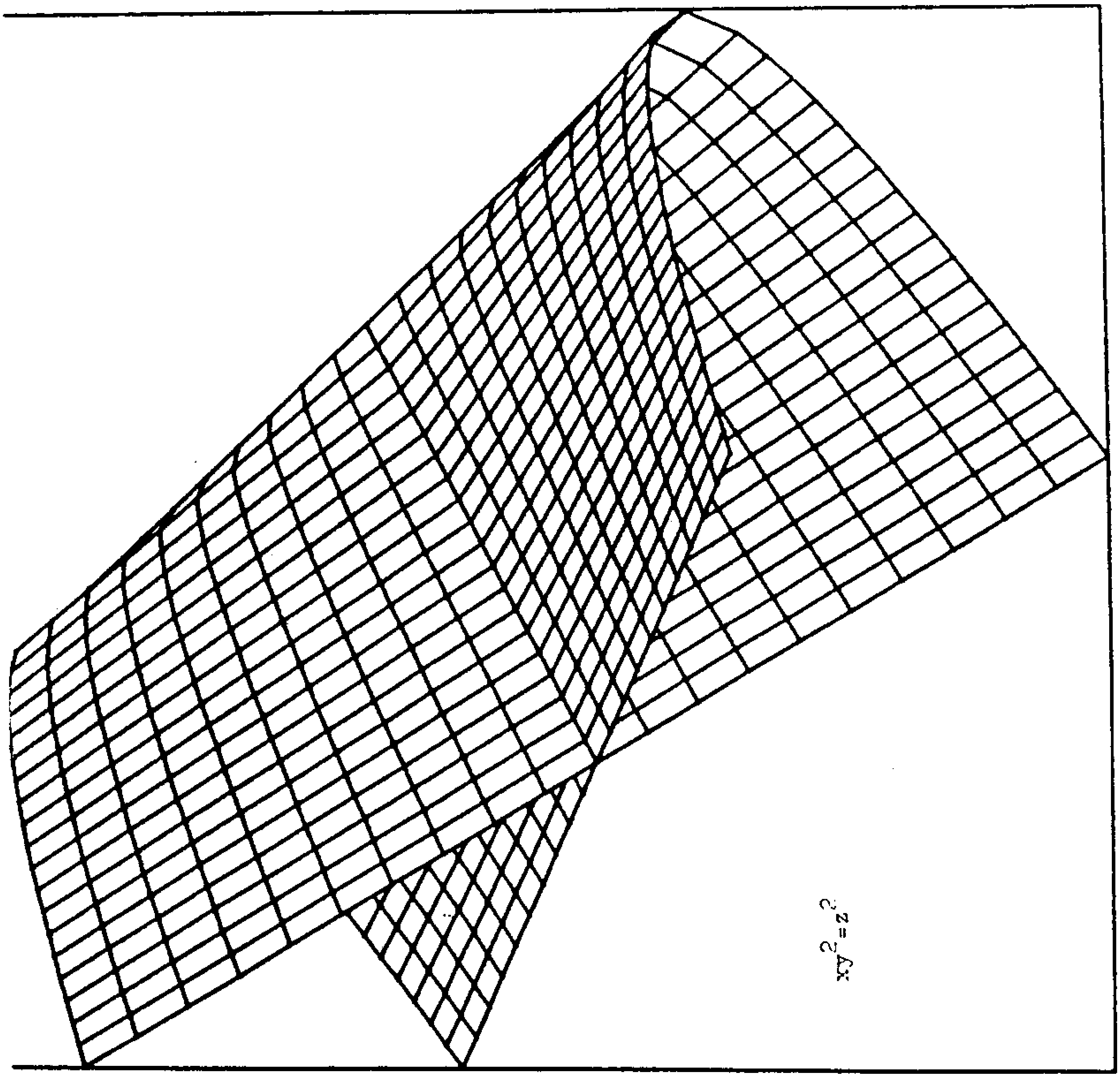
Dokaz. Induktivnom primenom leme 5.2. dobijamo razlaganje $P=\sum P_i$ gde P_i odgovaraju ivicama P. Ako je $n_i=n(P_i)$ broj celobrojnih odsečaka na ivici P_i, $P_i=n_iQ_i$ gde je $n(Q_i)=1$, odakle je Q nerazloživ. Jednoznačnost je očigledna iz konstrukcije. □

Posledica. Jako nerastavljivi redovi $f \in A$ čiji poliedar $N(f) \in \mathcal{N}_1$ su samo redovi oblika $f = ax^p + by^q z^r + g(x,y,z)$ gde su $a, b \neq 0$, $p, q, r \in \mathbb{N}$ takvi da je $M(p,q,r)=1$ ili $r=0$ i $M(p,q)=1$, a $N(g) \subset N(x^p + y^q z^r)$, kao i svi redovi dobijeni iz f permutacijom promenljivih x,y,z.

Dokaz. Očigledno, $N(f) = N(x^p + y^q z^r)$ a $D(f)$ duž $(p,0,0)(0,q,r)$ i na njoj nema celih tačaka $\Leftrightarrow$ $M(p,q,r)=1$ ili $r=0$ i $M(p,q)=1$. □

Primeri. 1. $xy+z^3$ je jako nerastavljiv, što već znamo.
2. xy^2-z^2 je jako nerastavljiv: $D(f)$ ima samo jednu ivicu - duž $(1,2,0)(0,0,2)$. Inače, singularitet 0 na ovoj površi nije izolovan: Sing X je prava $\{(a,0,0) : a \in K\}$ što se neposredno vidi. Od svih singulariteta, jedino je singularitet za $a=0$ jednogran. Ostali nisu: lokalni polinom koji odgovara tački $(a,0,0)$ je $xy^2+ay^2-z^2$, a on je za $a \neq 0$ rastavljiv. Ovo je primer jednogranog neizolovanog singulariteta. To se intuitivno vidi na slici 5 (str.74) koja prikazuje realni deo ove površi. Kroz tačku 0 prolazi jedan list površi, a kroz sve ostale tačke singularne krive dva lista.

Drugu klasu $\mathcal{N}_2$ koju ćemo ispitati čine svi $P \in \mathcal{N}_0$ čije su sve ograničene stranice trouglovi i nemaju slobodnih ivica. Drugim rečima, $P \in \mathcal{N}_2$ ako je svaka ivica $G(P)$ sadržana u ciklu dužine 3. Ovo je analogija pojma simplicijalnog politopa (politopa čija je svaka stranica simpleks),



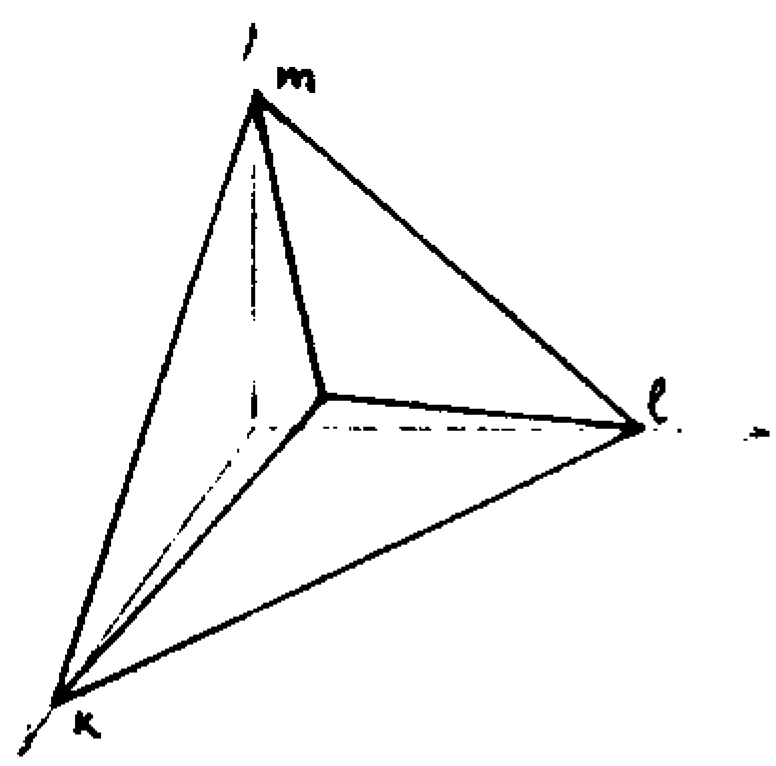
SLIKA 5

koji igraju važnu ulogu u teoriji politopa. Primetimo da projektivna transformacija $\mathcal{N}$-poliedra $P \in \mathcal{N}_2$ razmatrana u lemi 2.4.(str.39) ne daje obavezno simplicijalni politop: neograničene strane mogu preći u nesimplicijalne. Sledeća teorema je analogna odgovarajućem rezultatu za politope (v.[21]str.321).

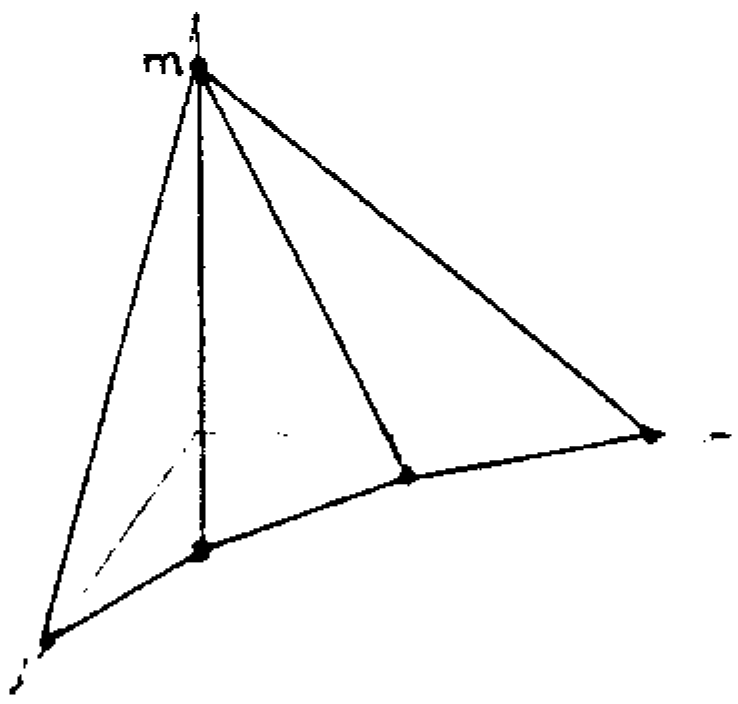
Teorema 5.6. (a) $P \in \mathcal{N}_2$ je nerazloživ $\Leftrightarrow m(P)=1$.
(b) Svaki $P \in \mathcal{N}_2$ je homotetičan nerazloživom $Q \in \mathcal{N}_2$: $P=m(P)\cdot Q$ pri čemu je $m(Q)=1$.

Dokaz. Neka je $P=Q+R$ i vektor $v \in \mathbb{R}^3_+$ odredjuje neku 2-stranicu od P. Tada je $F(P,v)=F(Q,v)+F(R,v)$ i pošto je $F(P,v)$ trougao, $F(Q,v)$ mora biti trougao homotetičan $F(P,v)$. Pošto se svake dve ivice P mogu povezati trouglovima, sve ivice P su proporcionalne odgovarajućim ivicama Q sa istim koeficijentom λ. Zato je (lema 1.9. na str.34) Q homotetičan P. Ako je $m(P)=1$ onda je i $m(Q)=1$ pa mora biti $\lambda=1$ i $P=Q$.
(b) neposredno sledi iz (a). □

Primeri. 1. Red $f(x,y,z)=x^p y^q z^r + x^k + y^\ell + z^m + g(x,y,z)$ je jako nerastavljiv ako je $p/k+q/\ell+r/m<1$, $\mathrm{ord}_v(g) \geq 1$ i $m(D(f))=1$. Njegov dijagram se sastoji od četiri trougla. Specijalno, $xyz+x^k+y^\ell+z^m(+g(x,y,z))$ je jako nerastavljiv za sve $k,\ell,m \in \mathbb{N}$.



2. Za svako $g \in K[[x,y]]$ red $f(x,y,z)=z^m+g(x,y)$ je jako nerastavljiv za beskonačno mnogo vrednosti $m \in \mathbb{N}$, na primer za sve vrednosti m za koje postoji teme $(k,\ell) \in N(g)$ takvo da je $M(k,\ell,m)=1$.



Ovo nam daje primer rastavljivog f takvog da za svako m postoji red h filtracije m takav da je f+h nerastavljiv (v. str.25).

Koristeći jednu ideju Arnoljda (v.[3]) može se napraviti klasifikacija kvazihomogenih polinoma koji imaju svojstvo da nijedna od koordinatnih osa nije sadržana u skupu singulariteta (tu su specijalno svi kvazihomogeni polinomi sa izolovanim singularitetima). Primetimo da se, pošto je skup singulariteta dimenzije $\leqslant 1$, uvek može izabrati koordinatni sistem tako da je taj uslov ispunjen, ali se time u opštem slučaju gubi kvazihomogenost.

<u>Lema 5.7</u>. Neka je $f \in A$ i r_i najmanje rastojanje (u koordinatnim ravnima) od $N(f)$ do i-te koordinatne ose. Tada,

(a) skup $f=0$ sadrži osu i $\Leftrightarrow$ $r_i \geqslant 1$;

(b) osa i je singularna za f $\Leftrightarrow$ $r_i \geqslant 2$.

<u>Dokaz</u>. Uslov $r_i \geqslant 1$ je ekvivalentan uslovu da f nije regularan po x_i a to upravo znači da je $f(0,\dots,x_i,\dots,0)=0$. Uslov $r_i \geqslant 2$ je ekvivalentan uslovu da f ne sadrži nijedan monom oblika x_i^k niti $x_i^k x_j$ za sve $j \neq i$ a to upravo znači da

je $\partial f/\partial x_j(0,\dots,x_i,\dots,0)=0$ za sve j tj. da je osa x_i singularna. □

Primetimo da lema 5.7. važi za proizvoljan broj promenljivih. Uslov da nijedna osa nije singularna za f je dakle ekvivalentan uslovu da N(f) ima tačaka u koordinatnim ravnima na rastojanju najviše 1 od svake ose.

Teorema 5.8. Neka $f\in A$ i nijedna osa nije singularna za f.

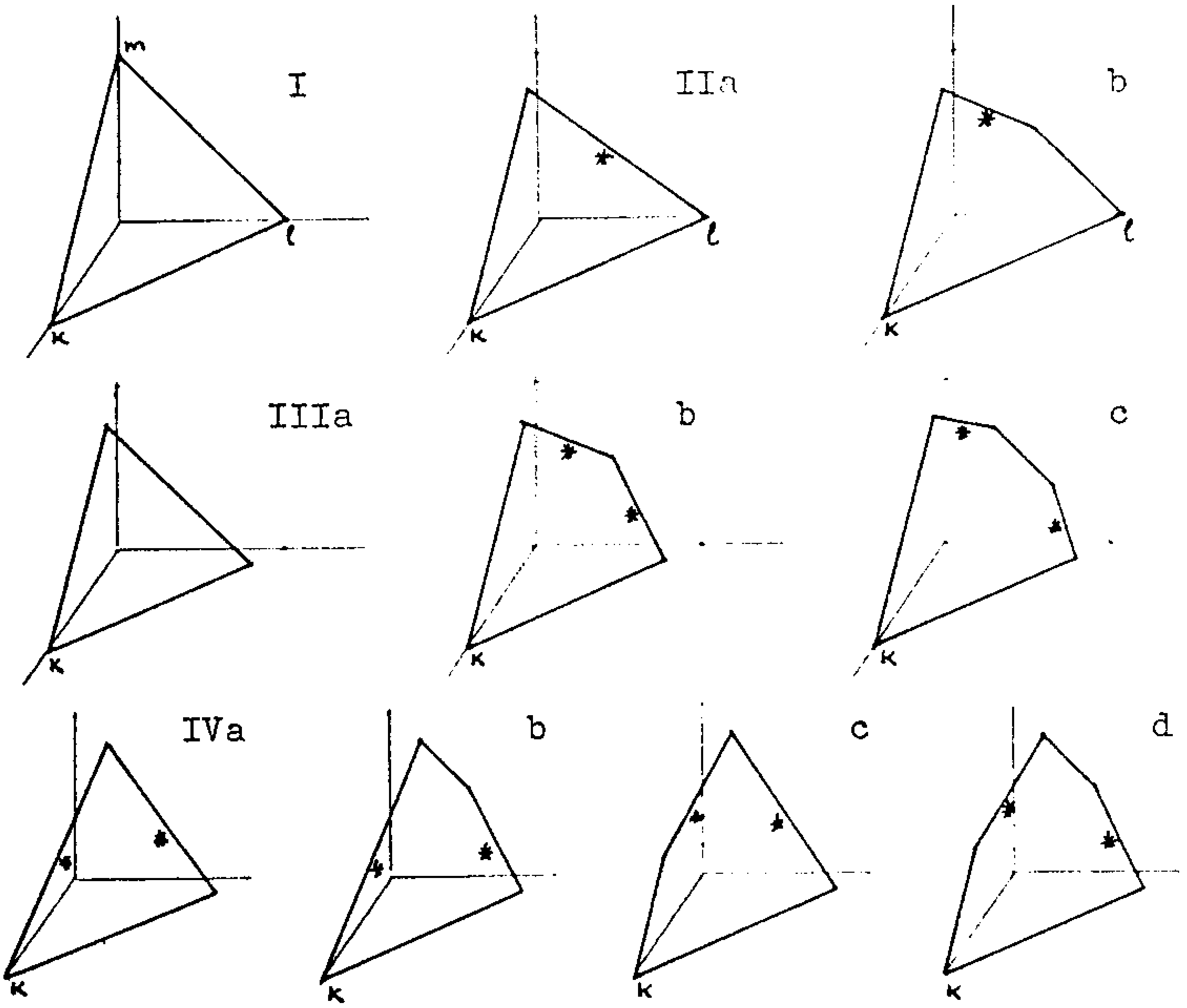
(a) f mora sadržati jedan od sledećih tipova trojki monoma:

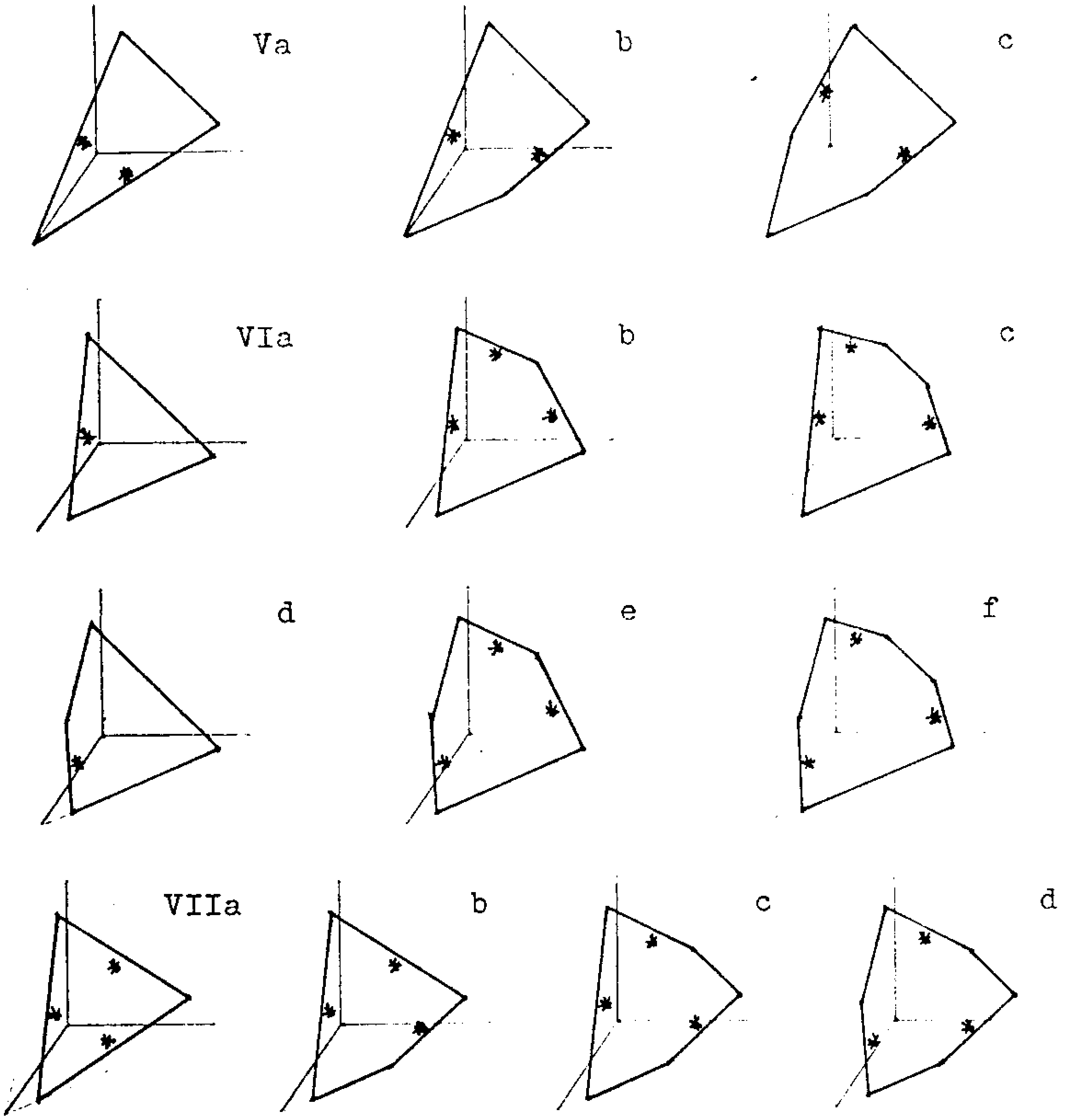
I $\{x^k,y^\ell,z^m\}$; II $\{x^k,y^\ell,z^m x\}$;

III $\{x^k,y^\ell x,z^m x\}$; IV $\{x^k,y^\ell x,z^m y\}$; V $\{x^m,y^\ell z,z^m y\}$;

VI $\{x^k y,y^\ell x,z^m x\}$; VII $\{x^k y,y^\ell z,z^m x\}$.

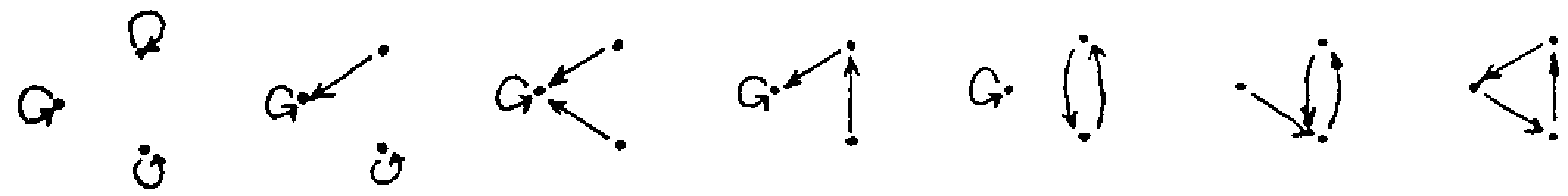
(b) Ako je f kvazihomogen, D(f) mora biti jednog od oblika:





Polinomi tipova IIa, IVa i b, Va i b, VIIa su jako nerastavljivi. Polinomi tipova IIIa, VIa i d su rastavljivi (deljivi sa x, količnik je tipa I odnosno IIa i b).

Dokaz. (a) je faktički dokazano u [3]. Opišimo taj dokaz. Na osnovu rečenog za svaku osu i $r_i \leq 1$ tj. postoji osa j takva da f sadrži monom $x_i^k x_j$. Ako za svako i izaberemo po jedno takvo j (na pr. sa najmanjim k) dobićemo preslikavanje $i \mapsto j$ troelementnog skupa u samog sebe. Ukupno takvih preslikavanja koje se ne svode jedno na drugo permutacijom osa ima 7 i njihovi grafovi su:



I II III IV V VI VII

Odavde odmah dobijamo 7 tipova trojki monoma sadržanih u f.

(b) Ako je f kvazihomogen, D(f) je ravni mnogougao i na osnovu dokazanog pod (a) imamo upravo navedene mogućnosti. Oznaka $*$ u odgovarajućem dijagramu znači da na označenoj ivici nema celobrojnih tačaka osim krajeva. Tvrdjenja o nerastavljivosti slede na osnovu lema 1.11 i 1.12. na str.35. □

Primedbe. 1. Razmatranje nerastavljivosti svih ostalih slučajeva moguće je lako sprovesti analogno, na osnovu pomenutih lema. Recimo, u slučaju I, f je jako nerastavljiv $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $M(k,\ell,m)=1$. Isto tako, u slučaju VIb odgovarajući četvorougao je paralelogram ili trapez (i onda razloživ), ili je nerazloživ i onda je f jako nerastavljiv.

2. Primetimo da ako je f=gh i f spada u razmatranu klasu tj. nijedna osa nije singularna za f onda i g spada u tu klasu.

3. Jednostavnim rasudjivanjima moguće je dobiti sledeće:

I=I·I , II=I·II ,

III=I·III ili II·II , IV=I·IV ili II·II , V=I·V ili II·II ,

VI=I·VI ili II·III ili II·IV ili II·V , VII=I·VII ili II·IV

tj. na osnovu tipa f=gh moguće je odrediti moguće tipove faktora g i h. Odatle se na pr. dobija da je IIIb=IIa·IIa tj. svaki faktor polinoma tipa IIIb mora biti tipa IIa.

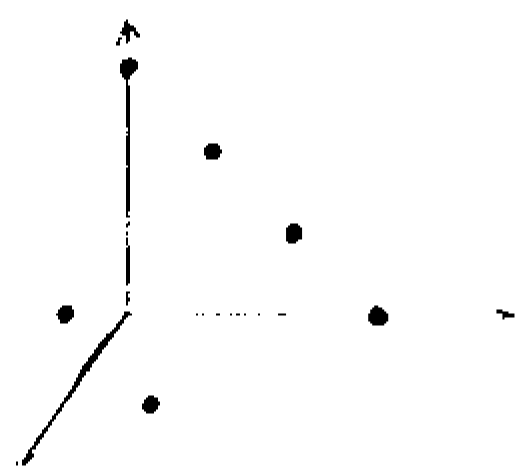
4. Vidimo da je za izučavanje jake nerastavljivosti kvazihomogenih polinoma opisane vrste dovoljno ispitati (ne)-razloživost 3-, 4-, 5- i 6-uglova u ravni.

Neka je $v=(1/p,1/q,1/r)$ tip kvazihomogenosti, $\alpha=inc(v)$ i $d\in\frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}$ stepen kvazihomogenosti. Jasno je da ako za dati stepen d u nekoj koordinatnoj ravni nema celobrojnih tačaka onda su svi elementi iz B_d rastavljivi. Isto tako, rastavljiv je svaki kvazihomogeni polinom koji nema tačaka u nekoj koordinatnoj ravni. Pretpostavimo da je $f\in B_d$ takav da $D(f)$ ima tačaka u svim trima koordinatnim ravnima. Jaka nerastavljivost f je ekvivalentna običnoj nerazloživosti poligona $D(f)$ u sumu celobrojnih poligona. Za svako fiksirano v i d moguće je odrediti sve nerazložive poligone i na taj način naći sve jako nerastavljive elemente B_d, koji čine zatvoreni algebarski podskup u projektivnom prostoru dimenzije $n(v,d)-1$ (v.teoremu 3.5. na str.50). Ilustrujmo situaciju sa nekoliko primera.

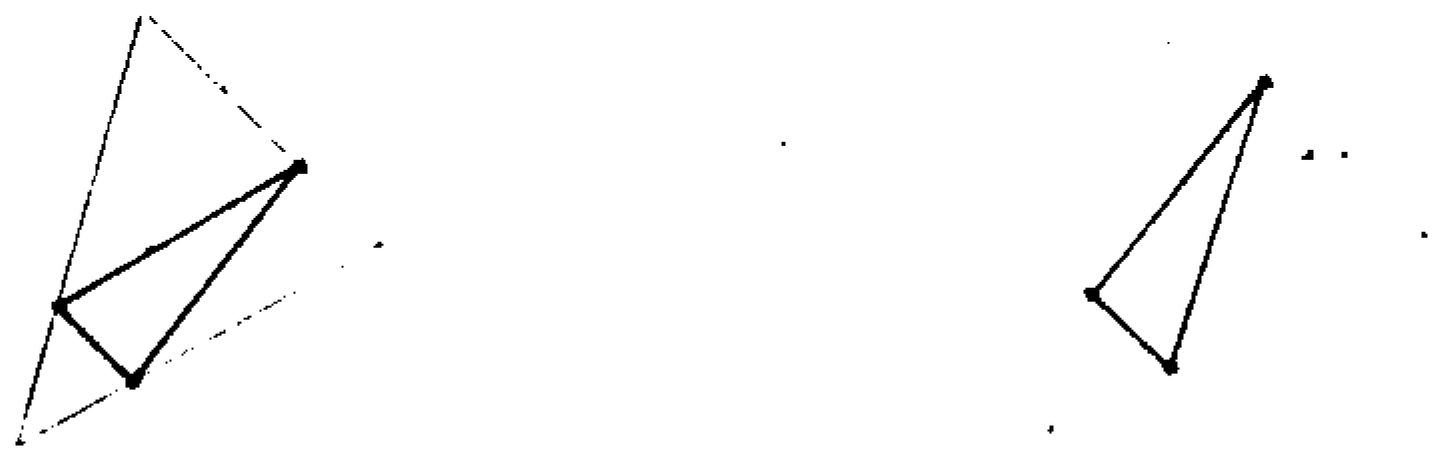
<u>Primer 1</u>. Kvazihomogeni polinomi tipa (2,2,3) stepena 1. Na osnovu tabele 1 (str.50) $n(v,1)=5$, monomi u B_1 koji ga razapinju nad K su $x^3, x^2y, xy^2, y^3, z^2$ i svaki $f\in B_1$ je oblika $f(x,y,z)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ez^2$. Nadjimo sve f koji imaju izolovani singularitet. Imamo $\partial f/\partial x=3ax^2+2bxy+cy^2$, $\partial f/\partial y=bx^2+2cxy+3dy^2$, $\partial f/\partial z=2ez$. Postupkom eliminacije opisanim u teoremi 3.6. (str.51) dobijamo da sistem

$\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = \partial f/\partial z = 0$ ima netrivijalno rešenje $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R = e\cdot(18abcd+b^2c^2-27a^2d^2-4ac^3-4b^3d)=0$.
Dakle, skup izolovanih singulariteta je u $\mathbb{P}^4$ odredjen jednačinom $R\neq 0$ i to je otvoreni skup (u topologiji Zariskog). Lako se vidi da je f rastavljiv $\Leftrightarrow (e=0)\vee(a=b=c=d=0)$ tj. skup svih rastavljivih f se sastoji iz unije tačke (nedogleda e-ose) i e-hiperravni i očito sadrži skup svih izolovanih singulariteta (v.teoremu I.1.9. na str.11).

Primer 2. Kvazihomogeni polinomi tipa (2,3,3) stepena 3/2. Na osnovu tabele 1 (str.50) $n(v,3/2)=6$. Imamo sledeće celobrojne tačke na odgovarajućem dijagramu: (3,1,0), (0,3,0), (0,2,1), (3,0,1), (0,1,2) i (0,0,3). Svaki $f\in B_{3/2}$ se zapisuje u obliku $f(x,y,z)=ax^3y+bx^3z+cy^3+dy^2z+eyz^2+pz^3$. Očigledno, za faktore f su moguće samo sledeće kombinacije kvazistepena: 2/6 i 7/6, 3/6 i 6/6, 4/6 i 5/6. Prvoj odgovara razlaganje $\alpha x(\beta x^2y+\gamma x^2z)$, drugoj - razlaganje $(\alpha y+\beta z)(\gamma x^3+\delta y^2+\varepsilon yz+\mu z^2)$ a trećoj $\alpha x^2(\beta xy+\gamma xz)$. Svi ovi slučajevi razloživosti su sadržani u skupu tačaka odredjenom jednačinom $a^3p-a^2be+ab^2d-b^3c=0$ i obratno. Skup svih nerastavljivih je dakle komplement ove hiperpovrši u $\mathbb{P}^5$. Raspored celih tačaka na našem dijagramu je



Lako se vidi da su jedina dva nerazloživa dijagrama ovi:



Zato su jako nerastavljivi samo polinomi $ax^3y+bx^3z+dy^2z$ sa $a,b,d\neq 0$ i $ax^3y+bx^3z+eyz^2$ sa $a,b,e\neq 0$. Tačke koje im odgovaraju čine zatvoren skup u $\mathbb{P}^5$ zadat sa $c=e=p=0$ ili $c=d=p=0$, sadržan u našoj hiperpovrši svih nerastavljivih i jednak uniji dva dvodimenziona podprostora u $\mathbb{P}^5$.

Primer 2'. Isti tip kvazihomogenosti, stepen 11/6. Neposredno se vidi da su svi dijagrami razloživi i svi $f\in B_{11/6}$ rastavljivi jer su deljivi sa x. Skup svih nerastavljivih je $\emptyset$.

Dodatak. Globalizacija: homeomorfna raširenja prstena

Pojam jednogranosti o kome je bilo reči u ovom radu je lokalan pojam. Ovde ćemo opisati neka globalna svojstva (algebarska i geometrijska) koja se mogu dovesti u vezu sa jednogranošću.

Često su od interesa morfizmi algebarskih mnogostrukosti koji zadovoljavaju neka dodatna skupovna ili topološka svojstva. Ističu se dve klase morfizama: morfizmi $f:X\to Y$ koji su bijekcije i morfizmi koji su homeomorfizmi (u topologijama Zariskog). U slučaju kada su X i Y krive ove dve klase se poklapaju. Naime, topologija Zariskog na krivoj je obična kofinitna topologija. Pošto svaka kriva ima kardinalnost jednaku kardinalnosti osnovnog polja, svake dve krive su homeomorfne i svaka bijekcija je homeomorfizam (v.[22]str.40,52). Sasvim je drugo pitanje da li se taj homeomorfizam može realizovati algebarskim morfizmom i u kojoj meri se takav morfizam može razlikovati od izomorfizma. Još je složenija situacija u višim dimenzijama. Iz iznetog vidi se da postoji interes u proučavanju morfizama $f:X\to Y$ koji su bijekcije ili homeomorfizmi. U algebarskoj interpretaciji pitanje se svodi na proučavanje raširenja prstena $A\subset B$ koja indukuju bijekciju ili homeomorfizam spektara $\mathrm{Spec}B\to\mathrm{Spec}A$. Takva raširenja ćemo zvati bijektivnim odnosno homeomorfnim. Bijektivna raširenja su proučavana u literaturi. U radu [14] ona se nazivaju jednogranim ("unibranched") ali je kod nas taj termin rezervisan za lokalnu situaciju. U radu [2] tretiran je poseban slučaj raširenja $A \subset B$ kod kojih je indukovani morfizam identiteta tj. SpecA=SpecB. U vezi sa homeomorfnim raširenjima u radu autora [27] dokazana je

<u>Teorema</u>. Ako su A i B algebre konačnog tipa nad algebarski zatvorenim poljem karakteristike 0, homeomorfno raširenje $A \subset B$ mora biti konačno.

<u>Posledica</u>. Ako je $f:X \to Y$ morfizam koji je homeomorfizam, normalizacija $g:Y' \to Y$ se propušta kroz f tj. $g:Y' \to X \xrightarrow{f} Y$. Ako je Y normalno, f je izomorfizam. Specijalno, ako su X i Y neizomorfne krive i Y glatka, nijedan morfizam $f:X \to Y$ ne može biti bijekcija tačaka. On mora nešto da slepljuje.

Primetimo da u situaciji kao gore, ako je X normalno, onda je $f:X \to Y$ normalizacija Y. Zato opisani problem dovodi do izučavanja mnogostrukosti sa bijektivnom normalizacijom tj. do izučavanja singulariteta nad kojima u normalizaciji leži jedna tačka. A to su kao što znamo jednograni singulariteti.

Izučavanje bijektivnih i homeomorfnih raširenja prstena je tek počelo i ima perspektivu.

LITERATURA

1. Abhyankar S.S.: Resolution of singularities of arithmetical surfaces. In: Arithmetical algebraic geometry, Harper & Row, New York, 1965, 111-152.
2. Anderson D., Dobbs D.: Pairs of rings with the same prime ideals. Can.J.Math., 32(1980), 362-384.
3. Арнольд В.И.: Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. УМН, 29:2(1974), 11-49.
4. Арнольд В.И.: Критические точки гладких функций и их нормальные формы. УМН, 30:5(1975), 3-65.
5. Bonnesen T., Fenchel W.: Theorie der konvexen Körper. Springer Verlag, Berlin, 1934.
6. Brieskorn E., Knörrer H.: Ebene algebraische Kurven. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1981.
7. Бурбаки Н.: Алгебра. Часть II, гл.IV-VI: Многочлены и поля. Упорядоченные группы. Наука, Москва, 1965.
8. Бурбаки Н.: Коммутативная алгебра. Мир, Москва, 1971.
9. Буземан Г.: Выпуклые поверхности. Наука, Москва, 1964.
10. Campillo A.: Algebroid curves in positive characteristic. LNM 813, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
11. Чеботарев Н.Г.: Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики. Собрание сочинений. Изд. АН СССР, Москва-Ленинград, 1950, 47-80.
12. Данилов В.И.: Многогранники Ньютона и исчезающие когомологии. Функц.анал.прил., 13:2(1979), 32-47.

13. Delorme C.: Sur les modules des singularités des courbes planes, Bull.Soc.Math.France, 106(1978), 417-446.

14. Dobbs D.: Divided rings & going down, Pacific J.Math., 67(1976), 353-363.

15. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.: Многогранники, графы, оптимизация. Наука, Москва, 1981.

16. Flexor-Mangeney M.: Étude de l'assassin du complété d'un anneau local noethérien. Bull.Soc.Math.France, 98(1970), 117-126.

17. Flexor-Mangeney M.: Une propriété des anneaux unibranches. Bull.Sc.Math., 96(1972), 169-175.

18. Гротендик А.: Теория когомологий абстрактных алгебраических многообразий. В сборнике Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958. Гос.изд.физ.-мат.лит., Москва, 1962.

19. Grothendieck A., Dieudonné J.: Éléments de géométrie algébrique. Publ.Math.IHES,
Chap.I Le langage des schémas, 4(1960);
Chap.II Étude globale elémentaire de quelques classes de morphismes, 8(1961);
Chap.III Étude cohomologique des faisceaux cohérents, 11(1961), 17(1963);
Chap.IV Étude locale des schémas et des morphismes des schémas, 20(1964), 24(1965), 28(1966), 32(1967).

20. Grothendieck A., Dieudonné J.: Éléments de géométrie algébrique I, 2.ed., Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

21. Grünbaum B.: Convex polytopes, Interscience Publ., London-New York-Sydney, 1967.

22. Хартсхорн Р.: Алгебраическая геометрия. Мир, Москва, 1981.

23. Hironaka H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann.of Math., 79(1964), 109-326.

24. Kouchnirenko A.G.: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. Invent.Math., 32(1976), 1-31.

25. Кушниренко А.Г.: Многогранники Ньютона и теорема Безу. Функц.анал.прил., 10:3(1976), 82-83.

26. Lejeune-Jalabert M.: Contributions a l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton. Thèse, Université Paris VII, 1973.

27. Липковски А.: Гомеоморфное расширение геометрических колец цело. Publ.Inst.Math. 32(1982), 105-107.

28. Lipkovski A.: On unibranched rings and a criterion for irreducibility in the formal power series ring. Proc. 3rd Alg.Conf.Beograd, Novi Sad, 1983, 93-98.

29. Lipkovski A.: On irreducibility of Weierstrass polynomials of low degree in the ring K[[x,y]]. Proc.4th Alg. Conf.Zagreb, Novi Sad, 1985.

30. Lipman J.: Introduction to resolution of singularities. In: Algebraic geometry Arcata 1974, AMS Proc.Symp.Pure Math., 29(1975), 187-230.

31. Мамфорд Д.: Алгебраическая геометрия I. Комплексные проективные многообразия. Мир, Москва, 1979.

32. Milnor J.: Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1968.

33. Nagata M.: Local rings, Interscience Publ., New York, 1962.

34. Серр Ж.-П.: Локальная алгебра и теория кратностей. Сб.пер. Математика, 7:5(1963), 3-93.

35. Шафаревич И.Р.: Основы алгебраической геометрии. Наука, Москва, 1972.

36. Varchenko A.N.: Zeta-function of monodromy and Newton's diagram. Invent.Math., 37(1976), 253-262.

37. ван дер Варден Б.Л.: Алгебра. Наука, Москва, 1976.

38. Zariski O.: Le probleme des modules pour les branches planes. Cours donné au Centre de Mathématiques de l' Ecole Polytechnique, 1973.

39. Зарисский О., Самюэль П.: Коммутативная алгебра. т.I,II. ИЛ, Москва, 1963.

40. Яглом И.М., Болтянский В.Г.: Выпуклые фигуры. Гос.изд. техн.-теорет.лит., Москва - Ленинград, 1951.

REGISTAR POJMOVA

REGISTAR OZNAKA