UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno-matematički fakultet

ESENCIJALNI SPEKTAR I BANACHOVE ALGEBRE

Doktorska disertacija

Vladimir Rakočević

Beograd, 1984.

PREDGOVOR

Za nastanak ovog rada od velikog je značaja bila knjiga ([20]), u kojoj je prikazana interakcija između teorije semi-Fredholmovih, Fredholmovih i Rieszovih operatora na Banachovom prostoru i Banachovih algebri. U ovom radu, osim što izlažemo problematiku u vezi esencijalnog spektra ograničenog linearnog operatora na Banachovom prostoru, želeli smo da prikažemo interakciju između ove problematike i teorije Banachovih algebri. Sa te strane ovaj rad se može shvatiti kao nastavak ideja započetih u gore pomenutom radu ([20]).

Ovaj rad se sastoji od pet glava, a svaka glava se sastoji od nekoliko odeljaka. Numeracija definicija, teorema, lema i td. teče neprekidno kroz čitav odeljak. Pri pozivanju, na primer, na Teoremu 3. 2. 1, reč je o prvoj teoremi drugog odeljka treće glave; oznaka glave, pa i odeljka otpadaju ukoliko se ima u vidu teorema iz iste glave odnosno iz istog odeljka.

Prva glava je uvodnog karaktera i u njoj su izloženi poznati rezultati neophodni za dalji rad. Dokazi navedenih stavova mogu se naći u ([20], [24], [91]).

U drugoj glavi originalni rezultati su Teorema 2. 2. 3, Teorema 2. 3. 6 i četvrti odeljak. U ovom odeljku polazeći od mere nekompaktnosti operatora uvedena je funkcija g koja „meri" ne-strogu-singularnost operatora. Pokazano je da je da je funkcija g seminorma na skupu svih ograničenih linearnih operatora sa Banachovog prostora X u Banachov prostor Y, i data je veza između ove funkcije i funkcije Δ razmatrane u ([90]). Kao posledica ovakvog razmatranja dobija se Katova teorema (Posledica 2. 4. 1). Ukoliko je X = Y Hilbertov prostor pokazano je da je g = Δ (Teorema 2. 4. 6).

Treća glava je posvećena proučavanju esencijalnog spektra ograničenog linearnog operatora na Banachovom prostoru. Osim što izlažemo poznate rezultate, dokazana je u prvom odeljku Posledica 3. 1. 2. U drugom odeljku koristeći teoremu Nussbauma (Teorema 3. 2. 1) procenjujemo poluprečnik esesecijalnog spektra lokalne q-kontrakcije (Teorema 3. 2. 3), odakle dobijamo rezultate iz ([23], Lemma 2. 1, Lemma 2. 2, Lemma 2.3, Theorem 2. 1, Theorem 2. 2) kao i pojačanje ([23], Lemma 2. 4). Osim toga, koristeći rezultate Kleineckea (Teorema 2. 5. 2) i pomenutu teoremu Nussbauma, dokazujemo nejednakost za poluprečnik esencijalnog spektra posebno definisanog operatora (Teorema 3. 2. 4) na osnovu koje pokazujemo teoremu Aldera (Posledica 3. 2. 2). U trećem odeljku, koristeći teoremu Miličića i Veselića (Teorema 3. 3. 1) dokazujemo Katovu teoremu (Posledica 3. 3. 1). Osim toga, kao drugu posledicu ove teoreme dobijamo poznati rezultat o esencijalnom spektru samokonjugovanog operatora na Hilbertovom prostoru (Posledica 3. 3. 2, Teorema 3. 3. 2). Sedmi odeljak je originalan. U njemu se ispituje esencijalni aproksimativni tačkasti spektar ograničenog linearnog operatora na Banachovom prostoru, tj. najveći podskup aproksimativnog tačkastog spektra koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije. Pokazuje se da je ovaj skup nadskup esencijalnog spektra Gustafsona i Weidmanna, a da je podskup Schechterovog esencijalnog spektra, i da za rubove odgovarajućih skupova važi obrnuta unkluzija (Teorema 3. 7. 2). Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar u odnosu na perturbacije ponaša se kao esencijalni spektar Gustafsona i Weidmanna (Teorema 3. 7. 3, Teorema 3. 7. 4), a u odnosu na preslikavanje polinomom kao Schechterov esencijalni spektar (Teorema 3. 7. 5, Primer 3. 7. 4). Polazeći od definicije operatora koji zadovoljavaju Weylievu teoremu i svojstava samokonjugovanog ograničenog linearnog operatora na Hilbertovom prostoru, uveli smo operatore koji zadovoljavaju a-Weylievu teoremu (Definicija 3. 7. 2) i odredili potrebne i dovoljne uslove da ograničen linearan operator na Banachovom prostoru zadovoljava a-Weylievu teoremu (Teorema 3. 7. 7). Ako je A ograničen linearan operator na Hilbertovom prostoru, i A^* hiponormalan operator pokazali smo da operator A zadovoljava a-Weylievu teoremu (Teorema 3. 7. 6). Primer 3. 7. 6 pokazuje da postoje operatori koji ne zadovoljavaju a-Weylievu teoremu.

U četvrtoj glavi originalni rezultati su Teorema 4. 2. 5, Teorema 4. 3. 6 i četvrti odeljak. U ovom odeljku uvode se i ispituju polinomski kompaktni elementi u Banachovim algebrama kao upštenje polinomski kompaktnih operatora. Zatim, na osnovu razmatranja u Banachovim algebrama dokazuje se teorema Gilfeathera za polinomski kompaktne operatore (Teorema 4. 4. 1).

U petoj glavi originalni rezultati su Lema 5. 4. 1, Teorema 5. 4. 2, Lema 5. 4. 3 i Teorema 5. 4. 4.

Koristim priliku i iskreno se zahvaljujem profesorima od kojih sam učio funkcionalnu analizu: prof. Dr. Branislavu Mirkoviću sa Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, i prof. Dr. Novaku Ivanovskom sa Matematičkog fakulteta u Skoplju.

Niš, juna 1983

Vladimir Rakočević

SADRŽAJ

PREDGOVOR ii
Glava 1 UVOD
1. Kompaktni operatori (teorija Riesza-Schaudera) 1
2. Fredholmovi i semi-Fredholmovi operatori 5
3. Rieszovi operatori 8
Glava 2 O NEKIM IDEALIMA U B(X)
1. Rieszovi operatori i Fredholmove perturbacije 13
2. Perturbacione klase 14
3. Mere nekompaktnosti 17
4. Mere ne-stroge-singularnosti operatora 21
5. O idealu neesencijalnih operatora 29
Glava 3 ESENCIJALNI SPEKTAR
1. Nekoliko definicija esencijalnog spektra 31
2. Poluprečnik esencijalnog spektra 36
3. O rubu esencijalnog spektra 40
4. Perturbacije esencijalnog spektra 41
5. Preslikavanje esencijalnog spektra 43
6. Operatori koji zadovoljavaju Weylievu teoremu 45
7. Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar 47
Glava 4 RIESZOVA TEORIJA U BANACHOVIM ALGEBRAMA
1. Kompaktan elemenat po Freundlichovoj 56
2. Kompaktan elemenat po Vali 58
3. Kompaktan elemenat po Veseliću 61
4. Polinomski kompaktni elementi u Banachovim algebrama 64
5. Rieszova teorija u poluprostim Banachovim algebrama 70
6. Rieszova teorija u Banachovim algebrama 71
Glava 5 DODATAK
1. Kvazi-nilpotentni elementi u Banachovim algebrama 77
2. Karakterizacija dvo-stranih ideala u Banachovim algebrama preko spektralnih svojstava njihovih elemenata 77

3. Spektralni poluprečnik u kvocijent algebrama 79
4. Eksponencijalni spektar u Banachovim algebrama 79

LITERATURA 83

INDEKS 88

Glava 1

UVOD

1. Kompaktni operatori (teorija Riesza-Schaudera)

Sa X i Y označavamo beskonačno-dimenzionalne Banachove prostore. Banachov prostor svih ograničenih linearnih operatora A sa X u Y sa normom $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$, označavamo sa $B(X, Y)$. Ako je $X = Y$ kažemo da je operator A na X, i umesto $B(X, Y)$ pišemo $B(X)$.

DEFINICIJA 1. Operator $A \in B(X, Y)$ je kompaktan ako ograničene skupove iz X preslikava u skupove čije je zatvaranje u Y kompaktno.

Sa $K(X, Y)$ označavaćemo skup svih kompaktnih operatora iz $B(X, Y)$. Umesto $K(X, Y)$ pisaćemo $K(X)$. $K(X, Y)$ je zatvoren potprostor u $B(X, Y)$. Ako je Z treći Banachov prostor, tada je $B(Y, Z)K(X, Y) \subset K(X, Z)$ i $K(X, Y)B(Z, X) \subset K(Z, X)$: $K(X)$ je zatvoren ideal u Banachovoj algebri $B(X)$.

Nul-prostor (jezgro) operatora $A \in B(X, Y)$, označava se sa $N(A)$, jeste skup svih $x \in X$ tako da je $Ax = 0$. $N(A)$ je potprostor u X i njegovu dimenziju označavamo sa $\alpha(A)$. Slika operatora $A \in B(X, Y)$, označava se sa $R(A)$, jeste skup svih $y \in Y$ za koje postoji $x \in X$ tako da je $Ax = y$. $R(A)$ je potprostor u Y i sa $\beta(A)$ označavamo dimenziju kvocijent prostora $Y/R(A)$, tj. $\beta(A) = \operatorname{codim} R(A) = \dim Y/R(A)$.

DEFINICIJA 2. Operator $A \in B(X, Y)$ je konačno-dimenzionalan (konačnog ranga) ako je njegova slika konačno-dimenzionalan potprostor u Y.

Skup svih konačno-dimenzionalnih operatora iz $B(X, Y)$ označavaćemo sa $F(X, Y)$, a umesto $F(X, X)$ pisaćemo $F(X)$. $F(X, Y) \subset K(X, Y)$ i $F(X)$ je ideal u $B(X)$. Neka je $\bar{F}(X)$ zatvaranje $F(X)$ u $B(X)$. Tada je $\bar{F}(X) \subset K(X)$. Ako je X Hilbertov prostor tada je $\bar{F}(X) = K(X)$, međutim ako je X Banachov prostor $\bar{F}(X)$ može biti i pravi podskup u $K(X)$ ([29]).

LEMA 1. (Riesz) Neka je X_1 zatvoren i pravi potprostor normiranog prostora X. Tada za svako ε $(0 < \varepsilon < 1)$ postoji vektor $x_\varepsilon \in X$, tako da je $\|x_\varepsilon\| = 1$ i $d(x_\varepsilon, X_1) \geq \varepsilon$, gde $d(x_\varepsilon, X_1)$ označava rastojanje vektora x_ε do potprostora X_1.

LEMA 2. Neka je S jedinična zatvorena lopta u X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) X je konačno-dimenzionalan prostor

(ii) S je kompaktan podskup u X

(iii) S je totalno ograničen podskup u X.

TEOREMA 1. Neka je $P \in B(X)$ idempotentan operator, tj. $P^2 = P$. Tada, ako je P kompaktan operator onda je on i konačno-dimenzionalan operator.

Sa X^* označavamo dualni (adjungovani) prostor prostora X, tj. prostor svih neprekidnih linearnih funkcionela f na X sa normom $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$. Ako je $M \subset X$, tada $\{f \in X^* : f(x) = 0 \text{ za svako } x \in M\}$ je zatvoren potprostor u X^* i označavamo ga sa $M^\perp$. Ako je $N \subset X^*$, tada $\{x \in X : f(x) = 0 \text{ za svako } f \in N\}$ je zatvoren potprostor u X i označavamo ga sa ${}^\perp N$. Ako je $A \in B(X, Y)$, sa A^* označavamo adjungovani operator operatora A; $A^* \in B(Y^*, X^*)$ i definisan je sa $(A^* f)x = f(Ax)$ za $f \in Y^*$ i $x \in X$.

TEOREMA 2. (Riesz-Schauder) Operator $A \in B(X, Y)$ je kompaktan ako i samo ako je A^* kompaktan.

LEMA 3. Neka je $A \in B(X, Y)$. Tada

(i) Ako je $R(A)$ zatvoren skup, tada je i $R(A^*)$ zatvoren i $R(A^*) = N(A)^\perp$.

(ii) Ako je $R(A^*)$ zatvoren skup, tada je i $R(A)$ zatvoren i $R(A) = {}^{\perp}N(A^*)$.

TEOREMA 3. Neka je X Banachov prostor, $K \in K(X)$, I identičan operator na X i $A = I - K$. Tada $R(A)$ je zatvoren potprostor u X i $\alpha(A) = \alpha(A^*) < \infty$. Šta više, $R(A) = X$ i $N(A) = \{0\}$, ili je $R(A) \neq X$ i $N(A) \neq \{0\}$.

Zadnje tvrđenje u Teoremi 3 je poznato kao Fredholmova alternativa.

Skup svih invertibilnih elemenata u Banachovoj algebri $B(X)$ označavamo sa $G(X)$. Spektar operatora $A \in B(X)$, označava se sa $\sigma(A)$, jeste skup svih kompleksnih brojeva λ tako da $A - \lambda \notin G(X)$[1], tj. $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin G(X)\}$. Skup $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ naziva se rezolventni skup operatora A. Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ je sopstvena vrednost operatora A, ako postoji $x \in X$ i $x \neq 0$, tako da je $Ax = \lambda x$. Vektor x je sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Skup svih sopstvenih vrednosti operatora A, označava se sa $\sigma_p(A)$, naziva se tačkasti spektar operatora A. $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$; ako je $\dim X < \infty$, tada je $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, međutim kada je $\dim X = \infty$ moguće je i $\sigma_p(A) = \emptyset$. $\sigma(A)$ je neprazan kompaktan podskup u $\mathbb{C}$. Neka je $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Broj $r(A)$ naziva se spektralni poluprečnik operatora A i $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Funkcija $R_\lambda(A) : \lambda \to (\lambda I - A)^{-1}$, ($\lambda \in \rho(A)$) naziva se rezolventa operatora A, i analitička je funkcija na $\rho(A)$. Ako je λ_0 izolovana tačka u $\sigma(A)$ (pod ovim se podrazumeva da je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ i izolovana je tačka u $\sigma(A)$), tada je λ_0 i izolovana singularna tačka rezolvente operatora A. Prema tome, postoji Laurentov razvoj ove funkcije po stepenima $\lambda - \lambda_0$. Zapisaćemo ovo u obliku

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n B_n + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{-n} C_n.$$

1) često pisaćemo samo λ umesto λI, kada to ne dovodi do zabune.

Koeficijenti B_n i C_n su iz $B(X)$, i razvoj rezolvente u red važi za $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$, gde je δ tako izabran broj da sve tačke iz $\sigma(A)$ osim λ_0 su van ili na krugu $|\lambda - \lambda_0| = \delta$. Ovi koeficijenti izražavaju se preko formula

$$B_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c (\lambda - \lambda_0)^{-n-1}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c (\lambda - \lambda_0)^{n-1}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

gde je c bilo koji krug $|\lambda - \lambda_0| = \rho$ i $0 < \rho < \delta$, koji se prelazi jednom u smeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu. Posebno koeficijenat C_1 naziva se <u>spektralna projekcija koja odgovara tački λ_0 i operatoru A</u>, i označava se sa $P_{\lambda_0}(A)$. Kao u klasičnoj teoriji funkcija, λ_0 se naziva <u>pol rezolvente operatora A reda m</u> ako i samo ako je $C_m \neq 0$ i $C_n = 0$ za $n > m$.

<u>LEMA 4</u>. Neka je $A \in B(X)$ i λ_0 izolovana tačka u $\sigma(A)$. Tada λ_0 je pol reda m rezolvente od A ako i samo ako je

$$(\lambda_0 I - A)^m P_{\lambda_0}(A) = 0, \quad (\lambda_0 I - A)^{m-1} P_{\lambda_0}(A) \neq 0.$$

<u>TEOREMA 4</u>. Neka je $A \in B(X)$ kompaktan operator. Tada je:

(1) $\sigma(A)$ je najviše prebrojiv skup sa nulom jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Ako je $\lambda \neq 0$ i $\lambda \in \sigma(A)$, tada λ je sopstvena vrednost operatora A. λ je i pol rezolvente od A.

Neka je $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ i $v(\lambda)$ red pola rezolvente od A u tački λ.

(2) Za svaki prirodan broj n, $(A - \lambda)^n X$ je zatvoren podskup u X. Šta više

$$(A - \lambda)^m X = (A - \lambda)^{m+1} X$$

za svako $m \geqslant v(\lambda)$, i $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovom osobinom.

:

(3) Za svaki prirodan broj n, $N((A - \lambda)^n)$ je konačno-dimenzionalan potprostor u X. Osim toga

$$N((A - \lambda)^m) = N((A - \lambda)^{m+1})$$

za svako $m \geqslant v(\lambda)$, i $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovom osobinom.

(4) Spektralna projekcija $P_\lambda(A)$ koja odgovara λ i A, je konačno-dimenzionalan operator i

$$R(P_\lambda(A)) = N((A - \lambda)^{v(\lambda)}).$$

Nul-prostor projekcije $P_\lambda(A)$ određen je sa

$$N(P_\lambda(A)) = R((A - \lambda)^{v(\lambda)}).$$

(5) Ako je $d(\lambda)$ dimenzija potprostora $R(P_\lambda(A))$, tada je $1 \leqslant v(\lambda) \leqslant d(\lambda)$.

Brojevi $v(\lambda)$ i $d(\lambda)$ nazivaju se indeks i algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ, respektivno.

2. Fredholmovi i semi-Fredholmovi operatori

Fredholmovi operatori predstavljaju uopštenje operatora oblika I - K, gde je K kompaktan, a I identičan operator.

DEFINICIJA 1. Neka su X i Y Banachovi prostori. Operator $A \in B(X, Y)$ je Fredholmov operator ako zadovoljava sledeće uslove:

(1) $\alpha(A) < \infty$,

(2) $\beta(A) < \infty$,

(3) R(A) je zatvoren skup u Y[1].

Skup svih Fredholmovih operatora iz B(X, Y) označavaćemo sa $\Phi(X, Y)$. $\Phi(X, X)$ kratko pišemo $\Phi(X)$.

DEFINICIJA 2. Neka je

$$\Phi_+(X, Y) = \{A \in B(X, Y) : \alpha(A) < \infty \text{ i } R(A) \text{ je zatvoren skup u } Y\}$$

1) Iz $\beta(A) < \infty$, sledi da je R(A) zatvoren skup u Y. Međutim, uobičajno je da se istakne da je R(A) zatvoren skup.

$\Phi_-(X, Y) = \{A \in B(X, Y) : \beta(A) < \infty$ i $R(A)$ je zatvoren skup u $Y\}$.

Operatori iz $\Phi_+(X, Y) \cup \Phi_-(X, Y)$ nazivaju se semi-Fredholmovi operatori. Umesto $\Phi_\pm(X, X)$ pisaćemo $\Phi_\pm(X)$.

DEFINICIJA 3. Indeks operatora $A \in B(X, Y)$, označava se sa $i(A)$, definisan je sa

$$i(A) = \alpha(A) - \beta(A),$$

ako je bar jedan od $\alpha(A)$, $\beta(A)$ konačan.

TEOREMA 1. Neka je $A \in B(X)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $A \in \Phi(X)$,

(ii) postoji operator $B \in B(X)$ tako da je

$$AB = I - K_1,$$

$$BA = I - K_2,$$

gde su K_1 i K_2 kompaktni operatori iz $B(X)$,

(iii) postoji operator $B \in B(X)$ tako da je

$$AB = I - F_1,$$

$$BA = I - F_2,$$

gde su F_1 i F_2 konačno-dimenzionalni operatori iz $B(X)$.

Kako je $K(X)$ zatvoren ideal u Banachovoj algebri $B(X)$, to je kvocijent algebra $B(X)/K(X) \equiv C(X)$ Banachova algebra sa kvocijent normom

$$\|A + K(X)\| = \inf_{K \in K(X)} \|A + K\| \equiv \|A\|_K,$$

gde je $A \in B(X)$.

DEFINICIJA 4. Kvocijent algebra $C(X)$ naziva se Calkinova algebra (algebra Calkina).

Sa π ćemo označavati prirodno preslikavanje sa $B(X)$ na

$C(X)$, tj. $\pi(A) = A + K(X)$ za $A \in B(X)$.

TEOREMA 2. Operator $A \in B(X)$ je Fredholmov operator ako i samo ako je $\pi(A)$ invertibilan elenenat u Calkinovoj algebri $C(X)$.

TEOREMA 3. Neka su A i B Fredholmovi operatori iz $B(X)$. Tada AB je Fredholmov operator i

$$i(AB) = i(A) + i(B).$$

TEOREMA 4. Ako je $A \in \Phi(X)$, tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da za svako $B \in B(X)$ za koje je $\|B\| < \varepsilon$ imamo $A + B \in \Phi(X)$ i $i(A + B) = i(A)$. Prema tome, indeks je neprekidna funkcija na otvoremoj semi grupi $\Phi(X)$.

TEOREMA 5. Operator $A \in B(X)$ je Fredholmov operator ako i samo ako je A^* Fredholmov operator. Operator $A \in \Phi_+(X)$ ako i samo ako $A^* \in \Phi_-(X)$; u tom slučaju je $\alpha(A^*) = \beta(A)$, $\alpha(A^{**}) = \alpha(A)$ i $i(A) = -\,i(A^*)$.

TEOREMA 6. Operator $A \in B(X)$ je u $\Phi_+(X)$ ($\Phi_-(X)$) ako i samo ako je $\alpha(A - K) < \infty$ ($\beta(A - K) < \infty$) za svako $K \in K(X)$.

NAPOMENA 1. Teoreme 3 i 4 važe uz očigledne reformulacije i za semi-Fredholmove operatore. Mnogi rezultati u ovom odeljku važe i za $\Phi_\pm(X, Y)$ i $\Phi(X, Y)$.

Označimo sa $\Phi_r(X)$ i $\Phi_\ell(X)$ sledeće podskupove u $\Phi_-(X)$ i $\Phi_+(X)$:

$$\Phi_r(X) = \{A \in \Phi_-(X) : \text{postoji projekcija iz } B(X) \text{ sa } X \text{ na } N(A)\}$$

$$\Phi_\ell(X) = \{A \in \Phi_+(X) : \text{postoji projekcija iz } B(X) \text{ sa } X \text{ na } R(A)\}$$

TEOREMA 7. Sa G, G_r i G_ℓ označimo skup svih invertibilnih desno invertibilnih i levo invertibilnih, respektivno, elemenata u Calkinovoj algebri $C(X)$. Tada je

$$\Phi(X) = \pi^{-1}(G), \quad \Phi_r(X) = \pi^{-1}(G_r), \quad \Phi_\ell(X) = \pi^{-1}(G_\ell).$$

3. Rieszovi operatori

Neka je $A \in B(X)$. Stavimo $A^0 = I$. Tada imamo sledeće skupovne nejednakosti

$$X = R(A^0) \supset R(A^1) \supset R(A^2) \supset \dots .$$

Ako postoji prirodan broj n tako da je $R(A^n) = R(A^{n+1})$, tada kažemo da operator A ima <u>konačan pad</u>. U tom slučaju najmanji takav broj n označavamo sa $d(A)$. Ako ne postoji takav broj n, pišemo $d(A) = \infty$. $d(A)$ se naziva <u>pad operatora</u> A. Slično imamo

$$\{0\} = N(A^0) \subset N(A^1) \subset N(A^2) \subset \dots .$$

Ako postoji prirodan broj n tako da je $N(A^n) = N(A^{n+1})$, tada kažemo da operator A ima <u>konačan rast</u>, i najmanji takav broj n označavamo sa $a(A)$. Ukoliko takav broj n ne postoji pišemo $a(A) = \infty$. $a(A)$ se naziva <u>rast operatora</u> A. Ako je $d(A) = n < \infty$ ($a(A) = n < \infty$) tada je $R(A^m) = R(A^n)$, ($N(A^m) = N(A^n)$) za svako $m \geq n$.

<u>LEMA 1</u>. Neka je $a(A) < \infty$ i $d(A) < \infty$. Tada je $a(A) = d(A)$.

<u>LEMA 2</u>. Neka je $A \in B(X)$, $a(A) < \infty$, $d(A) < \infty$ i $a(A) = d(A) = p \neq 0$. Tada je

(1) $X = R(A^p) \oplus N(A^p)$,
(2) $R(A^p)$ i $N(A^p)$ su zatvoreni invarijantni potprostori operatora A, tj. dekompozicija (1) potpuno razlaže operator A,
(3) operator A bijektivno preslikava $R(A^p)$ na $R(A^p)$, tj. restrikcija operatora A na $R(A^p)$ je homeomorfizam. Restrikcija operatora A na $N(A^p)$ je nilpotentan operator,
(4) $\lambda = 0$ je izolovana tačka u $\sigma(A)$,
(5) $\lambda = 0$ je pol rezolvente operatora A,
(6) neka je $P_\lambda(A)$ spektralna projekcija koja odgovara λ i A. Tada je $R(P_\lambda(A)) = N(A^p)$ i $N(P_\lambda(A)) = R(A^p)$.

Obrnuto, ako je $\lambda = 0$ pol rezolvente operatora A reda p, tada je $a(A) = d(A) = p$.

DEFINICIJA 1. Neka je λ sopstvena vrednost operatora $A \in B(X)$. Dimenzija vektorskog prostora $N(A-\lambda)$, tj. $\alpha(A-\lambda)$, naziva se višestrukost (geometrijska) sopstvene vrednosti λ.

DEFINICIJA 2. Neka je $A \in B(X)$, λ izolovana tačka u $\sigma(A)$ i $P_\lambda(A)$ spektralna projekcija koja odgovara λ i A. Dimenzija slike operatora $P_\lambda(A)$ naziva se algebarska višestrukost tačke λ.

Kako je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N((A-\lambda)^n) \subset R(P_\lambda(A)),$$

to je višestrukost (geometrijska) sopstvene vrednosti λ $\leq$ od algebarske višestrukosti tačke λ.

Ako je $P_\lambda(A))$ konačno-dimenzionalan operator, kaže se da je λ pol konačne višestrukosti, i tada je λ pol rezolvente operatora A.

DEFINICIJA 3.(Dieudonne ([25], vol I, str.327, Problem 5)) Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Tačka $\lambda \in \sigma(A)$ je Rieszova tačka operatora A ako je:

(i) λ izolovana tačka u $\sigma(A)$,

(ii) X je direktna suma zatvorenog potprostora $F(\lambda)$ i konačno-dimenzionalnog potprostora $N(\lambda)$, $F(\lambda)$ i $N(\lambda)$ su invarijantni potprostori operatora A, restrikcija operatora A na $F(\lambda)$ je linearan homeomorfizam, a restrikcija operatora A na $N(\lambda)$ je nilpotentan operator.

DEFINICIJA 4. (West ([104])) Tačka $\lambda \in \sigma(A)$ je Rieszova tačka operatora A, ako je ispunjen uslov (ii) iz Definicije 3.

Dieudonneova i Westova definicija Rieszove tačke operatora A su ekvivalentne, jer u Definiciji 3 iz (ii) sledi (i). Ako je λ Rieszova tačka operatora A, $P_\lambda(A)$ spektralna projekcija koja odgovara λ i A, tada je $N(\lambda) = R(P_\lambda(A))$, $F(\lambda) = N(P_\lambda(A))$, i λ je pol konačne višestrukosti, odnosno

λ je tačka sa konačnom algebarskom višestrukošću. Obrnuto je takođe tačno, tj. ako je λ tačka sa konačnom algebarskom višestrukošću, tada je λ pol konačne višestrukosti, i λ je Rieszova tačka operatora A.

DEFINICIJA 5. Operator $A \in B(X)$ je Rieszov operator ako je svaka tačka $\lambda \neq 0$ iz $\sigma(A)$ Rieszova tačka operatora A.

Skup svih Rieszovih operatora iz B(X) označavamo sa R(X). Na osnovu Teoreme 1.4 sledi da je $K(X) \subset R(X)$.

TEOREMA 1. Neka je $A \in B(X)$ Rieszov operator. Tada je:

(1) $\sigma(A)$ je najviše prebrojiv skup sa nulom jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Ako je $\lambda \neq 0$ i $\lambda \in \sigma(A)$, tada λ je sopstvena vrednost operatora A. λ je i pol rezolvente od A.

Neka je $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$ i $v(\lambda)$ red pola rezolvente od A u tački λ.

(2) Za svaki prirodan broj n, $(A - \lambda)^m X$ je zatvoren podskup u X. Šta više

$$(A - \lambda)^m X = (A - \lambda)^{m+1} X$$

za svako $m \geqslant v(\lambda)$, i $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovom osobinom.

(3) Za svaki prirodan broj n, $N((A - \lambda)^n)$ je konačno-dimenzionalan potprostor u X. Osim toga

$$N((A - \lambda)^m) = N((A - \lambda)^{m+1})$$

za svako $m \geqslant v(\lambda)$, i $v(\lambda)$ je najmanji prirodan broj sa ovom osobinom.

(4) Spektralna projekcija $P_\lambda(A)$ koja odgovara λ i A, je konačno-dimenzionalan operator i

$$R(P_\lambda(A)) = N((A - \lambda)^{v(\lambda)}).$$

Nul-prostor projekcije $P_\lambda(A)$ određen je sa

$$N(P_\lambda(A)) = R((A - \lambda)^{v(\lambda)}).$$

(5) Ako je $d(\lambda)$ dimenzija potprostora $R(P_\lambda(A))$, tada je $1 \leqslant v(\lambda) \leqslant d(\lambda)$.

DEFINICIJA 6. Operator $A \in B(X)$ je asimptotski kvazi-kompaktan ako je

$$\lim_{n\to\infty} (\|A^n\|_K)^{1/n} = 0,$$

tj. ako je $\pi(A)$ kvazi-nilpotentan elemenat u Calkinovoj algebri $C(X)$. Operator A je asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan ako je

$$\lim_{n\to\infty} (\|A^n\|_F)^{1/n} = 0,$$

gde je $\|A\|_F = \inf\{\|A - C\|: C \in F(X)\}$.

TEOREMA 2. Neka je $A \in B(X)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) A je Rieszov operator,
(ii) A je asimptotski kvazi-kompaktan operator,
(iii) A je asimptotski kvazi-konačno-dimenzionalan operator.

TEOREMA 3. Operator $A \in B(X)$ je Rieszov operator ako i samo ako je $\pi(A)$ kvazi-nilpotentan elemenat u $C(X)$.

POSLEDICA 1. Operator A je Rieszov operator ako i samo ako je $A - \lambda$ Fredholmov operator za svako $\lambda \neq 0$.

POSLEDICA 2. Ako je A Rieszov operator, tada $0 \in \sigma(A)$.

TEOREMA 4. Neka je $A, B \in R(X)$ i $AB = BA$. Tada je $A + B \in R(X)$ i $AB \in R(X)$. Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada $\lambda A \in R(X)$.

U opštem slučaju zbir i proizvod dva Rieszova operatora nije Rieszov operator.

TEOREMA 5. Neka je $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz Rieszovih operatora iz $R(X)$. Pretpostavimo da je $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ i $A_nA = AA_n$ za svako n. Tada A je Rieszov operator.

U opštem slučaju $R(X)$ nije zatvoren skup u $B(X)$.

TEOREMA 6. Neka je $A \in B(X)$ Rieszov operator i V zatvoren potprostor u X invarijantan u odnosu na A. Tada restrikcija operatora A na V je Rieszov operator.

TEOREMA 7. Operator $A \in B(X)$ je Rieszov operator ako i samo ako je A^* Rieszov operator.

TEOREMA 8. Neka je $A \in B(X)$ Rieszov operator i $0 \neq \lambda \in \sigma(A)$. Tada, za svaki prorodan broj n nul-prostori $N((A - \lambda I)^n)$ i $N((A^* - \lambda I^*)^n)$ imaju istu dimenziju. Osim toga slike spektralnih projekcija $P_\lambda(A)$ i $P_\lambda(A^*)$ imaju istu dimenziju.

Glava 2
O NEKIM IDEALIMA U B(X)

1. Rieszovi operatori i Fredholmove perturbacije.

DEFINICIJA 1. ([89]) Neka su A i B operatori iz B(X). Ako je AB – BA kompaktan operator kažemo da su operatori A i B skoro komutativni. U ovom slučaju pišemo $A \# B$.

TEOREMA 1. ([88], Theorem 9) Ako $A \in \Phi(X)$, $E \in R(X)$ i $A \# E$, tada $A + E \in \Phi(X)$.

LEMA 1. ([88], Lemma 11) Neka $A \in \Phi(X)$ i $E \in B(X)$. Tada $EA \in R(X)$ ako i samo ako $AE \in R(X)$.

TEOREMA 2. ([88], Theorem 12) Operator $E \in R(X)$ ako i samo ako $A + E \in \Phi(X)$ za svako $A \in \Phi(X)$ za koje je $A \# E$.

TEOREMA 3. ([88], Theorem 13) Ako $E_1, E_2 \in R(X)$ i $E_1 \# E_2$, tada $E_1 + E_2 \in R(X)$.

DEFINICIJA 2. ([88]) Operator $E \in B(X)$ je Fredholmova perturbacija ako je $A + E \in \Phi(X)$ za svako $A \in \Phi(X)$.

Označimo sa

$$\mathcal{F}(X) = \{E \in B(X) : AE \in R(X) \text{ za svako } A \in \Phi(X)\}.$$

LEMA 2. ([88], Lemma 14) $E \in \mathcal{F}(X)$ ako i samo ako $I + AE \in \Phi(X)$ za svako $A \in \Phi(X)$.

TEOREMA 4. ([88], Theorem 15) $E \in \mathcal{F}(X)$ ako i samo ako $A + E \in \Phi(X)$ za svako $A \in \Phi(X)$. Prema tome, $\mathcal{F}(X)$ se poklapa sa skupom svih Fredholmovih perturbacija.

POSLEDICA 1. ([88], Corollary 16) Ako $E_1, E_2 \in \mathcal{F}(X)$, tada $E_1 + E_2 \in \mathcal{F}(X)$.

POSLEDICA 2. ([88], Corollary 20) Ako $E \in \mathcal{F}(X)$, tada $EB \in \mathcal{F}(X)$ za svako $B \in B(X)$.

POSLEDICA 3. ([88], Corollary 21) Ako je $E \in B(X)$, $E_n \in \mathcal{F}(X)$ i $\lim_{n\to\infty} E_n = E$, tada je $E \in \mathcal{F}(X)$.

TEOREMA 5. ([88], Corollary 22) $\mathcal{F}(X)$ je zatvoren dvostrani ideal u $B(X)$.

Označimo sa

$$\mathcal{F}_{\pm}(X) = \{E \in B(X) : A + E \in \Phi_{\pm}(X) \text{ za svako } A \in \Phi_{\pm}(X)\}. \quad (1)$$

TEOREMA 6. ([88], Corollary 32) $\mathcal{F}_{+}(X)$ je zatvoren dvostrani ideal u $B(X)$, i $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}(X)$.

TEOREMA 7. ([20], (5.6.9) Theorem) $\mathcal{F}_{-}(X)$ je zatvoren dvo-strani ideal u $B(X)$, i $\mathcal{F}_{-}(X) \subset \mathcal{F}(X)$.

NAPOMENA 1. ([88]) $R(X)$ nije ideal u $B(X)$. Na osnovu Teoreme 5, vidimo da je $\mathcal{F}(X)$ najveći ideal sadržan u $R(X)$. Šta više, operatori iz $R(X)$ okarakterisani su činjenicom da se svaki od njih ponaša kao Fredholmova perturbacija u odnosu na Fredholmove operatore koji skoro komutiraju sa njim (Teorema 2).

2. Perturbacione klase

DEFINICIJA 1. ([53]) Neka je S podskup Banachovog prostora A. Perturbaciona klasa skupa S, označava se sa $P(S)$, jeste skup

$$P(S) = \{a \in A : a + s \in S \text{ za svako } s \in S\}.$$

Pretpostavljaćemo da S zadovoljava uslov

$$\lambda S \subset S \quad (2)$$

za svaki skalar $\lambda \neq 0$.

Primetimo da ako je $A = B(X)$, tada na osnovu Teoreme 1.4 imamo

$$P(\Phi(X)) = \mathcal{F}(X),$$

a iz (1) sleduje

$$P(\Phi_{\pm}(X)) = \mathcal{F}_{\pm}(X).$$

<u>LEMA 1.</u> ([53], Lemma 2. 1) $P(S)$ je potprostor u A. Ako je S otvoren podskup u A, tada je $P(S)$ zatvoren podskup u A.

<u>LEMA 2.</u> ([53], Lemma 2. 2) Neka su S_1 i S_2 podskupovi u A koji zadovoljavaju uslov (2). Pretpostavimo da je S_1 otvoren skup, $S_1 \subset S_2$ i da S_2 ne sadrži nijednu rubnu tačku skupa S_1. Tada je $P(S_2) \subset P(S_1)$.

Dalje, pretpostavimo da je A Banachova algebra sa jedinicom $1 \neq 0$, i da je G grupa invertibilnih elemenata u A.

<u>LEMA 3.</u> ([53], Lemma 2. 3) Ako je $GS \subset S$, tada je $P(S)$ levi ideal. Ako je $SG \subset S$, tada je $P(S)$ desni ideal.

<u>TEOREMA 1.</u> ([53], Theorem 2. 4) Ako je S otvoren podskup u A koji zadovoljava uslove

$$GS \subset S, \quad SG \subset S,$$

tada $P(S)$ je zatvoren, dvo-strani ideal.

<u>DEFINICIJA 2.</u> ([25], Vol II, str. 315, Problem 7) Neka je A Banachova algebra. <u>Radikal u A</u>, označava se sa $\mathrm{Rad}(A)$, jeste skup svih $x \in A$ tako da je $r(ax) = 0$ za svako $a \in A$, gde $r(b)$ označava spektralni poluprečnik elementa $b \in A$. 1)

Algebra A je <u>poluprosta (bez radikala)</u> ako je $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$; ako je $\mathrm{Rad}(A) = A$, tada se kaže da je A <u>radikalna algebra</u>.

<u>TEOREMA 2.</u> ([53], Theorem 2. 5) $P(G) = \mathrm{Rad}(A)$.

<u>TEOREMA 3.</u> Neka je $a \in G$, i G_a povezana komponenta u G koja sadrži a. Tada je

$$P(G_a) = \mathrm{Rad}(A).$$

1) Ovo je Jacobsonov radikal. Detaljnije o radikalu videti u [17], [42], [77], [43].

DOKAZ: Pretpostavimo da je $x \in G_a$ i $r \in \mathrm{Rad}(A)$. Na osnovu Teoreme 2 $x + \lambda r \in G$ za svaki skalar λ. Prema tome $x + \lambda r \in G_a$, odnosno $r \in P(G_a)$. Ovim smo pokazali da je

$$\mathrm{Rad}(A) \subset P(G_a). \tag{3}$$

Da bi dokazali inkluziju u drugom smeru, prvo ćemo pokazati

$$P(aG_1) = aP(G_1) \tag{4}$$

i

$$P(G_1) \text{ je dvostrani ideal,} \tag{5}$$

gde G_1 označava povezanu komponentu u G koja sadrži jedinicu 1. Dokažimo (4); pretpostavimo da $x \in P(aG_1)$ i $b \in G_1$. Tada $a^{-1}x + b = a^{-1}(x + ab) \in G_1$, i kako je $x = a(a^{-1}x)$ sledi da $x \in aP(G_1)$. Obrnuto, pretpostavimo da $x \in aP(G_1)$ i $b \in G_1$. Tada postoji $z \in P(G_1)$ tako da je $x = az$, i prema tome $x + ab = a(z + b) \in aG_1$, odnosno $x \in P(aG_1)$. Ovim smo dokazali (4). Da dokažemo (5), primetimo da je $P(G_1)$ potprostor u A (Lema 1), i da se svaki elemenat iz A može napisati kao zbir dva elementa iz G_1 (tj. ako je $a \in A$, tada $a = (a - \lambda) + \lambda$; $a - \lambda \in G_1$ za dovoljno veliko $|\lambda|$ ([26], 2. 13 Lemma), i očigledno je da $\lambda 1 \in G_1$ za svako $\lambda \neq 0$). Pretpostavimo da $a \in G_1$, $b \in P(G_1)$ i $c \in G_1$. Tada $ab + c = a(b + a^{-1}c) \in G_1$. Prema tome $ab \in P(G_1)$ i $P(G_1)$ je levi ideal. Da je $P(G_1)$ desni ideal pokazuje se na sličan način. Ovim smo pokazali (5).

Na osnovu ([26], 2. 9 Proposition) imamo $G_a = aG_1$, i zbog (3), (4) i (5) sleduje da je $\mathrm{Rad}(A) \subset P(aG_1) = aP(G_1) \subset P(G_1)$. Ideal $P(G_1)$ sastoji se od kvazinilpotentnih elemenata, i prema tome je $P(G_1) \subset \mathrm{Rad}(A)$ ([77], Theorem (2. 3.5)(ii)). Ovim je teorema dokazana.

Neka je A Banachova algebra. Elemenat $z \in A$ ([77], str. 20) je levi (desni) topološki delilac nule ako postoji niz $\{z_n\}$ u A, tako da je $\|z_n\| = 1$ za svako n, i $zz_n \to 0$ ($z_n z \to 0$). Elemenat iz A koji je ili levi ili desni topološki delilac nule naziva se topološki delilac nule. Ako je elemenat i levi i desni topološki delilac nule, tada se on naziva dvo-strani topološki delilac nule. Skup svih topoloških delilaca nule označava se sa Z. Skup svih levih (desnih) topoloških delilaca nule označava se sa Z^{ℓ} (Z^r). Primetimo da je $Z = Z^{\ell} \cup Z^r$. Komplementi ovih skupova u A označavaju se sa H^{ℓ}, H^r i H respektivno. Označimo sa G_{ℓ} (G_r) skup svih levo (desno) invertibilnih elemenata u A.

TEOREMA 4. ([53], Theorem 2. 6)

$$P(H^{\ell}) \subset P(G_{\ell}) = Rad(A),$$

$$P(H^r) \subset P(G_r) = Rad(A).$$

TEOREMA 5. ([53], Theorem 2. 7) Neka je $A \equiv C(X)$ algebra Calkina. Tada je

$$P(\Phi(X)) = P(\Phi_{\ell}(X)) = P(\Phi_r(X)) = \pi^{-1}(Rad(A)).$$

3. Mere nekompaktnosti

Neka je X Banachov prostor i Q ograničen podskup u X. Označimo sa

$$q(Q) = \inf \left\{ r > 0 : \begin{array}{l} Q \text{ se može prekriti sa ko-} \\ \text{načno mnogo otvorenih lop-} \\ \text{ti poluprečnika } r \end{array} \right\}.$$

Vidimo da je $q(Q) = 0$ ako i samo ako je Q totalno ograničen skup, tj. ako je njegovo zatvaranje kompaktan skup. Neka su Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi u X i $Q_1 + Q_2 = \{x : x = x_1 + x_2,\ x_i \in Q_i\}$. Ukoliko se Q_1 može prekriti sa n ε-lopti i ako se Q_2 može prekriti sa m η-lopti tada se $Q_1 + Q_2$ može prekriti sa $nm(\varepsilon + \eta)$-lopti. Prema tome

$$q(Q_1 + Q_2) \leqslant q(Q_1) + q(Q_2).$$

Za svaki skalar λ imamo $q(\lambda Q) = |\lambda| q(Q)$.

DEFINICIJA 1. ([53]) Funkcija q naziva se mera nekompaktnosti, a $q(Q)$ mera nekompaktnosti skupa Q.

LEMA 1. ([53], Proposition 4. 13) Ako je X beskonačno-dimenzionalan prostor, tada je $q(S_X) = 1$, gde S_X označava zatvorenu jediničnu loptu u X.

Za $A \in B(X, Y)$ stavimo

$$\|A\|_q = q(A(S_X)).$$

Može se lako proveriti da je $\|A\|_q$ seminorma na $B(X, Y)$ i da je $\|A\|_q = 0$ ako i samo ako je $A \in K(X, Y)$. Takođe imamo

$$\|A\|_q \leqslant \|A\|$$

$$\|A + K\|_q = \|A\|_q, \qquad K \in K(X, Y).$$

Šta više, ako je Z Banachov prostor i $B \in B(Y, Z)$, tada je

$$\|BA\|_q \leqslant \|B\|_q \|A\|_q$$

(videti [53]).

Za $A \in B(X, Y)$ označimo sa $\|A\|_m$ najveću donju granicu svih brojeva η sa osobinom da postoji potprostor M u X sa konačnom kodimenzijom i tako da je

$$\|Ax\| \leqslant \eta \|x\|, \qquad x \in M.$$

$\|A\|_m$ je seminorma na $B(X, Y)$ i naziva se m-seminorma ([56]).

TEOREMA 1. ([53], Theorem 3. 1) Neka je $A \in B(X, Y)$. Tada je

$$\|A\|_q/2 \leqslant \|A\|_m \leqslant 2\|A\|_q.$$

POSLEDICA 1. ([53], str. 9) $\|A\|_m = 0$ ako i samo ako je $A \in K(X, Y)$. Prema tome

$$\|A + K\|_m = \|A\|_m, \qquad K \in K(X, Y).$$

Za $A \in B(X, Y)$ označimo sa

$$\|A\|_K = \inf_{K \in K(X, Y)} \|A + K\|.$$

DEFINICIJA 2. ([53]) Seminorme $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|_m$ i $\|\cdot\|_K$ su mere nekompaktnosti operatora.

PROBLEM 1. ([53]) Na kvocijent prostoru $B(X, Y)/K(X, Y)$ seminorme $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|_m$ i $\|\cdot\|_K$ indukuju normu. Ovaj prostor je kompletan u odnosu na normu indukovanu sa $\|\cdot\|_K$, međutim u opštem slučaju nije poznato da li je kompletan i u odnosu na normu indukovanu sa ostalim seminormama $\|\cdot\|_q$ i $\|\cdot\|_m$.

TEOREMA 2. ([7], Theorem 14. 3. 1) Ako je X Banachov prostor i H Hilbetov prostor, tada je

$$\|A\|_q = \|A\|_K$$

za svako $A \in B(X, H)$.

U radu ([109]) uvedena je mera nekompaktnosti u C^*-algebrama, i između ostalog dokazana je

TEOREMA 3. ([109], Lemma) Neka je $\mathcal{A}$ C^*-algebra i J zatvoren dvo-strani ideal u $\mathcal{A}$. Označimo sa $q(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in J\}$, za $x \in \mathcal{A}$. Neka je p seminorma na $\mathcal{A}$, tako da je $p(x) \leqslant q(x)$ i $p(xy) \leqslant p(x)p(y)$ za svako $x, y \in \mathcal{A}$ i $\{x \in \mathcal{A} : p(x) = 0\} = J$. Tada je $p(x) = q(x)$ za svako $x \in \mathcal{A}$.

Na osnovu ove teoreme pokazuje se

TEOREMA 4. ([109], Theorem 1) Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$. Tada je

$$\|A\|_q = \|A\|_m = \|A\|_K.$$

TEOREMA 5. ([53], Theorem 4. 10) Operator $A \in B(X, Y)$ je u $\Phi_+(X, Y)$ ako i samo ako postoji konstanta $c > 0$ tako da je

$$q(Q) \leqslant cq(A(Q)) \qquad (6)$$

za svaki ograničen podskup Q u X.

DEFINICIJA 3. ([23]) Operator $A \in B(X)$ je q-kontrakcija ako postoji $k \in [0, 1)$, tako da je

$$q(A(Q)) \leq kq(Q),$$

za svaki ograničen podskup Q u X.

DEFINICIJA 4. ([23]) Operator $A \in B(X)$ je lokalna q-kontrakcija ako za svaki ograničen podskup Q u X postoji prirodan broj $n = n(Q)$, tako da je

$$q(A^n(Q)) \leq kq(Q),$$

gde je $k \in [0, 1)$ fiksiran broj koji ne zavisi od Q.

Lokalna q-kontrakcija je uopštenje q-kontrakcije. Analogno, želeli smo da polazeći od (6) uopštimo operatore iz $\bar{\Phi}_+(X, Y)$. Na prvi pogled izgleda da je to postignuto sledećom

DEFINICIJA 5. Operator $A \in B(X, Y)$ je lokalni $\bar{\Phi}_+$-operator ako za svaki ograničen podskup Q u X postoji prirodan broj $n = n(Q)$ tako da je

$$q(Q) \leq cq(A^n(Q)), \tag{7}$$

gde je $c > 0$ fiksiran broj koji ne zavisi od Q.

Kako uslov (6) povlači uslov (7), to je svaki operator iz $\bar{\Phi}_+(X, Y)$ ujedno i lokalni $\bar{\Phi}_+$-operator. Da važi i obrnuto pokazuje sledeća

TEOREMA 6. Neka je $A \in B(X, Y)$. Tada $A \in \bar{\Phi}_+(X, Y)$ ako i samo ako je A lokalni $\bar{\Phi}_+$-operator. Drugim rečima uslovi (6) i (7) su ekvivalentni.

DOKAZ: Dovoljno je pokazati da ako je A lokalni $\bar{\Phi}_+$-operator, da je tada $A \in \bar{\Phi}_+(X, Y)$. Pretpostavimo da operator A zadovoljava relaciju (7). Neka je $K \in K(X, Y)$. Da je operator A iz $\bar{\Phi}_+(X, Y)$, zbog Teoreme 1. 2. 6, dovoljno je dokazati da je $\alpha(A - K) < \infty$. Označimo sa $Q_K = \{x \in X : \|x\| \leq 1 \text{ i } x \in N(A - K)\}$. Kako operator A ispunjava uslov (7), postoji prirodan broj $n = n(Q_K)$ tako da je

$$q(Q_K) \leqslant cq(A^n(Q_K)). \tag{8}$$

Kako je $(A - K)^n = A^n - K_1$, gde je $K_1 \in K(X, Y)$, sledi da je

$$q((A - K)^n(Q_K)) = q(A^n(Q_K)). \tag{9}$$

Tada, zato što je $(A - K)^n(Q_K) = \{0\}$, imamo $q(A^n(Q_K)) = 0$. Iz (8) sledi da je $q(Q_K) = 0$, tj. Q_K je totalno ograničen skup, i prema tome $\alpha(A - K) < \infty$ (Lema 1. 1. 2). Ovim je teorema dokazana.

4. Mere ne-stroge-singularnosti operatora

U prethodnom odeljku ,, merili '' smo nekompaktnost operatora i skupova. Može se postaviti pitanje da li možemo ,, meriti '' i druge operatore i skupove, tako da ta ,, mera '' ima slične osobine kao mera nekompaktnosti? Takvu ideju sproveli smo u ([70]), gde smo ,, merili'' ne-strogu-singularnost operatora. U ovom odeljku izložićemo proširenu verziju pomenutog rada.

DEFINICIJA 1. ([35], III, 1. 1. Definition) Neka je $A \in B(X, Y)$. Operator A je strogo-singularan ako za svaki beskonačno-dimenzionalan potprostor M u X, restrikcija operatora A na M nije homeomorfizam.

Skup svih strogo-singularnih operatora iz $B(X, Y)$ označavamo sa $S(X, Y)$. $S(X, X)$ kratko pišemo $S(X)$.

Neka su M i N beskonačno-dimenzionalni potprostori u X. Ako je $A \in B(X, Y)$ sa $A_{|M}$ označavamo restrikciju operatora A na M. U ([90]) uvedene su sledeće funkcije na $B(X, Y)$:

$$\Gamma_M(A) = \inf_{N \subset M} \|A_{|N}\|, \quad \Gamma(A) = \Gamma_X(A), \tag{10}$$

$$\Delta_M(A) = \sup_{N \subset M} \Gamma_N(A), \qquad \Delta(A) = \Delta_X(A). \tag{11}$$

Dokazana je i sledeća

TEOREMA 1. ([90])
(i) $A \in S(X, Y)$ ako i samo ako je $\Delta(A) = 0$, $(A \in B(X, Y))$.

(ii) $\Delta(A+B) \leqslant \Delta(A) + \Delta(B)$, $(A, B \in B(X, Y))$.
(iii) $\Delta(AT) \leqslant \Delta(A)\Delta(T)$, $(A \in B(X, Y), T \in B(Z, X))$.

Za naš dalji rad od značaja je

TEOREMA 2. ([35], III, 2. 1. Theorem) Neka je $A \in B(X, Y)$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) $A \in S(X, Y)$.

(ii) Za svaki beskonačno-dimenzionalan potprostor M u X, postoji beskonačno-dimenzionalan potprostor $N \subset M$ tako da je restrikcija operatora A na N kompaktan operator.

(iii) Za svako $\varepsilon > 0$ i svaki beskonačno-dimenzionalan potprostor M u X, postoji beskonačno-dimenzionalan potprostor $N \subset M$ tako da restrikcija operatora A na N ima normu koja nije veća od ε.

Po našem mišljenju, povod za uvođenje i ispitivanje funkcija Γ_M, Γ, Δ_M i Δ je Teorema 2(iii). U našem radu ([70]), pošli smo od ekvivalentnog rezultata Teorema 2(ii) i koristeći meru nekompaktnosti uveli sledeće funkcije na $B(X, Y)$:

$$t_M(A) = \inf_{N \subset M} \|A|_N\|_q, \qquad g(A) = \sup_M t_M(A), \tag{12}$$

gde su N i M beskonačno-dimenzionalni potprostori u X, i $A \in B(X, Y)$.

TEOREMA 3. Neka je $A \in B(X, Y)$. Tada je

$$g(A) \leqslant \Delta(A) \leqslant 2g(A). \tag{13}$$

DOKAZ: Kako je $\|A|_N\|_q \leqslant \|A|_N\|$, sledi $t_M(A) \leqslant \Gamma_M(A)$ i $g(A) \leqslant \Delta(A)$. Da bi dokazali drugu stranu nejednakosti (13) dovoljno je za svaki beskonačno-dimenzionalan potprostor M u X pokazati sledeću nejednakost

$$\Gamma_M(A) \leqslant 2t_M(A). \tag{14}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji beskonačno-dimenzionalan potprostor N u M, tako da je

$$\|A|_N\|_q \leqslant t_M(A) + \varepsilon .$$

Sada možemo izabrati elemente $y_1, \ldots, y_n \in Y$, tako da je

$$\min_k \|Ax - y_k\| \leqslant t_M(A) + \varepsilon , \quad x \in S_N, \tag{15}$$

gde S_N označava zatvorenu jediničnu loptu u N. Neka su $y_1', \ldots, y_n'$ funkcioneli iz Y^*, izabrani tako da je

$$\|y_k'\| = 1, \quad y_k'(y_k) = \|y_k\|, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

i neka je L skup svih $x \in X$ koji se anuliraju sa $A^* y_1', \ldots, A^* y_n'$, tj. $L = {}^{\perp}\{A^* y_1', \ldots, A^* y_n'\}$. Potprostor L ima konačnu kodimenziju u X, tj. $\operatorname{codim} L = \dim X/L < \infty$. Prema tome $W = N \cap L$ je beskonačno-dimenzionalan potprostor u M (sledi iz činjenice da je $X = L \oplus L_1$, gde je L_1 konačno-dimenzionalan potprostor u X; i da je $N = (N \cap L) \oplus (N \cap L_1)$ i $\dim N \cap L_1 < \infty$). Sa S_W označimo zatvorenu jediničnu loptu u W. Neka je $x \in S_W$, i neka je y_k jedan od elemenata $y_1, \ldots, y_n$ koji je najbliži elementu Ax. Kako je $x \in L$, to je $y_k'(Ax) = A^* y_k'(x) = 0$. Prema tome je

$$\|y_k\| = y_k'(y_k) = y_k'(y_k - Ax) \leqslant \|y_k - Ax\| .$$

Iz (15) sledi da je

$$\|y_k\| \leqslant t_M(A) + \varepsilon ,$$

za svako y_k koje je najbliže nekom Ax, $x \in S_W$.

Kako je

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax - y_k\| + \|y_k\| ,$$

imamo da je

$$\|Ax\| \leqslant 2(t_M(A) + \varepsilon), \quad x \in S_W .$$

Na osnovu definicije funkcije $\Gamma_M(A)$, zaključujemo da je

$$\Gamma_M(A) \leqslant 2(t_M(A) + \varepsilon).$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$, sledi (14). Kako je M proizvoljno izabran beskonačno-dimenzionalan potprostor u X, iz (14) sledi nejednakost $\Delta(A) \leqslant 2g(A)$, čime je teorema dokazana.

<u>POSLEDICA 1.</u> $A \in S(X, Y)$ ako i samo ako je $g(A) = 0$.

DOKAZ: Na osnovu Teoreme 1 (ii) i Teoreme 3.

<u>TEOREMA 4.</u> Neka je $A, B \in B(X, Y)$. Tada je

$$g(A + B) \leqslant g(A) + g(B).$$

DOKAZ: Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki beskonačno-dimenzionalan potprostor M u X postoji beskonačno-dimenzionalan potprostor N u M, tako da je $\|A|_N\|_q \leqslant t_M(A) + \varepsilon$. Prema tome

$$\begin{aligned} \|(A + B)|_N\|_q &\leqslant \|A|_N\|_q + \|B|_N\|_q \\ &\leqslant t_M(A) + \varepsilon + \|B|_N\|_q \\ &\leqslant g(A) + \varepsilon + \|B|_N\|_q . \end{aligned}$$

Odavde sledi da je

$$t_M(A + B) \leqslant g(A) + \varepsilon + t_M(B),$$

i prema tome je

$$g(A + B) \leqslant g(A) + \varepsilon + g(B).$$

Zbog proizvoljnosti ε, teorema je dokazana.

<u>DEFINICIJA 2.</u> Seminorme Δ i g su mere ne-stroge-singularnosti operatora. 1)

1) U radu ([90]) napomenuto je da bi se funkcija Δ mogla nazvati ,, mera ne-stroge-singularnosti operatora '', ali se taj termin ne koristi.

Do kraja odeljka sa V, M i N označavaćemo beskonačno-dimenzionalne potprostore u X. Neka je $A \in B(X, Y)$ i

$$t(A) = \inf_{M} \|A|_M\|_q, \qquad g_M(A) = \sup_{N \subset M} t_N(A). \tag{16}$$

Iz definicije funkcija t_M i g, tj. iz (12), sledi da je

$$t(A) = t_X(A), \qquad t_M(A) = \inf_{N \subset M} t_N(A), \tag{17}$$

$$g(A) = g_X(A), \qquad g_M(A) = \sup_{N \subset M} g_N(A). \tag{18}$$

<u>TEOREMA 5.</u> Neka je $T \in B(X, Y)$ i $A \in B(Y, Z)$. Tada je

$$g(AT) \leqslant g(A)g(T). \tag{19}$$

DOKAZ: Neka je M beskonačno-dimenzionalan potprostor u X. Pretpostavimo za trenutak, da važi sledeća nejednakost

$$t_M(AT) \leqslant t_M(T)g_{TM}(A), \tag{20}$$

gde je $\dim TM = \infty$; ako je $\dim TM < \infty$ tada je $t_M(AT) = 0$.

Neka je N beskonačno-dimenzionalan potprostor u M. Iz (20) sledi

$$t_N(AT) \leqslant t_N(T)g_{TN}(A)$$

$$\leqslant t_N(T)g(A),$$

i prema tome

$$t_M(AT) \leqslant t_M(T)g(A). \tag{21}$$

Kako je M proizvoljan beskonačno-dimenzionalan potprostor u X, vidimo da iz (21) sledi (19). Prema tome, da bi dokazali teoremu potrebno je pokazati (20). Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji beskonačno-dimenzionalan potprostor N u M, tako da je $\|T|_N\|_q < t_M(T) + \varepsilon$. Osim toga imamo da je

$$t_N(AT) = \inf_{V \subset N} \|AT|_V\|_q \leqslant \inf_{V \subset N} \|A|_{TV}\|_q \|T|_V\|_q$$

$$\leqslant \|T|_N\|_q \inf_{V \subset N} \|A|_{TV}\|_q. \tag{22}$$

Ako je $\dim TN < \infty$ tada je $\|T_{|N}\|_q = 0$. U tom slučaju je $t_N(AT) = 0$ i $t_M(AT) = 0$. Pretpostavimo da je $\dim TN = \infty$ i da je W beskonačno-dimenzionalan potprostor u TN. Tada $U = N \cap T^{-1}(W)$ je beskonačno-dimenzionalan potprostor u N, i $TU = W$. Prema tome

$$\inf_{V \subset N} \|A_{|TV}\|_q \leqslant \inf_{W \subset TN} \|A_{|W}\|_q = t_{TN}(A)$$

i iz (22) sledi

$$t_N(AT) \leqslant t_{TN}(A)\|T_{|N}\|_q . \qquad (23)$$

Iz izbora potprostora N i (23) sledi da je

$$t_N(AT) \leqslant g_{TN}(A)(t_M(T) + \varepsilon)$$

$$\leqslant g_{TM}(A)(t_M(T) + \varepsilon).$$

Prema tome, imamo da je

$$t_M(AT) \leqslant g_{TM}(A)(t_M(T) + \varepsilon).$$

Zbog proizvoljnosti ε, dokazana je nejednakost (20). Ovim je teorema dokazana.

POSLEDICA 2. $S(X, Y)$ je zatvoren potprostor u $B(X, Y)$. $S(X, Y) \subset K(X, Y)$ i $S(X)$ je zatvoren ideal u $B(X)$.[1]

DOKAZ: Kako je $\Delta(A) \leqslant \|A\|$ i $g(A) \leqslant \|A\|$, $A \in B(X, Y)$, dokaz sledi na osnovu Posledice 1, Teoreme 2, 4 i 5.

LEMA 1. Neka je $A \in B(X, Y)$. Operator $A \in \Phi_+(X, Y)$ ako i samo ako je $t(A) > 0$.

DOKAZ: Lako se može pokazati da je

$$\inf_{\substack{Q \subset X \\ q(Q) = 1}} q(A(Q)) \leqslant t(A) \leqslant \Gamma(A), \qquad (24)$$

gde se infimum uzima po svim ograničenim podskupovima Q u X

1) Ovaj rezultat je dokazivan više puta ([20], [35], [45], [90]).

za koje je $q(Q) = 1$. Ukoliko je $A \in \Phi_+(X, Y)$, tada je $\inf\{q(Q) : Q \subset X \text{ i } q(Q) = 1\} > 0$ (Teorema 3. 5), te je zbog (24) $t(A) > 0$. Obrnuto, pretpostavimo da je $t(A) > 0$. Iz (24) sledi da je $\Gamma(A) > 0$, i na osnovu ([90], Theorem 2. 11) $A \in \Phi_+(X, Y)$. Ovim je lema dokazana.

LEMA 2. Neka je $A, B \in B(X, Y)$. Tada je

$$t(A + B) \leq g(A) + t(B).$$

DOKAZ: Dokažimo prvo da je

$$t_N(A + B) \leq t_N(A) + \|B_{|N}\|_q . \tag{25}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $V \subset N$, tako da je $\|A_{|V}\|_q < t_N(A) + \varepsilon$. Prema tome

$$\begin{aligned} \|(A + B)_{|V}\|_q &\leq \|A_{|V}\|_q + \|B_{|V}\|_q \\ &\leq t_N(A) + \varepsilon + \|B_{|N}\|_q . \end{aligned}$$

Ovim smo pokazali da je

$$t_N(A + B) \leq t_N(A) + \|B_{|N}\|_q + \varepsilon . \tag{26}$$

Zbog proizvoljnosti ε, iz (26) sledi (25). Iz (16), (17), (18) i (25) sledi

$$t_N(A + B) \leq g(A) + \|B_{|N}\|_q ,$$

odnosno

$$\inf_N t_N(A + B) \leq g(A) + \inf_N \|B_{|N}\|_q , \tag{27}$$

gde se infimum uzima po svim beskonačno-dimenzionalnim potprostorima N u X. Dokaz leme sledi iz (16), (17), (18) i (27).

POSLEDICA 3. Neka je $A, B \in B(X, Y)$. Ako je $g(B) < t(A)$, tada je $A + B \in \Phi_+(X, Y)$.

DOKAZ: Kako je $t(A) = t(-B + (A + B))$ i $g(-B) = g(B)$, na osnovu Leme 2 imamo

$$t(A) < g(B) + t(A + B),$$

odnosno

$$t(A) - g(B) < t(A + B).$$

Prema tome $t(A + B) > 0$, i $A + B \in \Phi_+(X, Y)$ (Lema 1). Ovim je lema dokazana.

POSLEDICA 4. Neka je $A \in \Phi_+(X, Y)$ i $B \in S(X, Y)$. Tada je $A + B \in \Phi_+(X, Y)$.[1]

DOKAZ: $t(A) > 0$ (Lema 1) i $g(B) = 0$ (Posledica 1). Prema tome, $g(B) < t(A)$ i $A + B \in \Phi_+(X, Y)$ (Posledica 3).

Neka je $A \in B(X, Y)$ i

$$\|A\|_S = \inf_{S \in S(X, Y)} \|A + S\|.$$

$\|\cdot\|_S$ je seminorma na $B(X, Y)$ i $A \in S(X, Y)$ ako i samo ako je $\|A\|_S = 0$. Osim toga $g(A) \leq \|A\|_S$ i $\Delta(A) \leq \|A\|_S$. Seminorme g, Δ i $\|\cdot\|_S$ indukuju normu na kvocijent prostoru $B(X, Y)/S(X, Y)$. Ovaj prostor je kompletan u odnosu na normu indukovanu seminormom $\|\cdot\|_S$.

PROBLEM 1. Da li je $B(X, Y)/S(X, Y)$ kompletan prostor u odnosu na norme indukovane sa g i Δ?

Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku, problem se svodi na ispitivanje da li su norme indukovane sa g, Δ i $\|\cdot\|_S$ ekvivalentne?

TEOREMA 6. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$. Tada je

$$g(A) = \Delta(A) = \|A\|_S = \|A\|_K.$$

DOKAZ: Kako je H Hilbertov prostor, to je $S(H) = K(H)$ ([45], str. 287). Prema tome $\|A\|_S = \|A\|_K$. Ostatak dokaza sledi iz Teoreme 3. 3 i činjenice da je $B(H)$ C^*-algebra (dovoljno je uzeti $J = K(H)$).

1) Ovaj rezultat je dokazivan više puta ([20], [35], [45], [90]).

PRIMEDBA 1. U ovom odeljku „merili smo ne-strogu- singularnost" operatora $A \in B(X, Y)$. Može se postaviti pitanje da li postoji neka funkcija, označimo je sa $\tilde{g}$, koja bi „merila ne-strogu-singularnost skupova" iz X, ali tako da je $g(A) = \tilde{g}(A(S_X))$, gde je S_X zatvorena jedinična lopta u X. U tom cilju ispitivali smo funkciju $\tilde{g}(Q) = \sup_{M} \inf_{N \subset M} q(Q \cap N)$, gde su M i N beskonačno-dimenzionalni potprostori u X, a Q ograničen podskup u X. Može se pokazati da je $\tilde{g}(Q) \leq q(Q)$ i $g(A) \leq \tilde{g}(A(S_X))$. Pitanje je da li iz $g(A) = 0$ sledi $\tilde{g}(A(S_X)) = 0$? Osim toga ako su Q_1 i Q_2 ograničeni podskupovi u X nismo mogli da pokažemo nejednakost $\tilde{g}(Q_1 + Q_2) \leq \tilde{g}(Q_1) + \tilde{g}(Q_2)$. Ovo ukazuje da je za „meru ne-stroge-singularnosti skupova" možda potrebno uzeti neku drugu, „bolju" funkciju od $\tilde{g}$, ali koju ?

5. O idealu neesencijalnih operatora

DEFINICIJA 1. ([20], str. 33) Neka je X Banachov prostor, $C(X)$ algebra Calkina i π prirodno preslikavanje sa $B(X)$ na $C(X)$. Označimo sa

$$I(X) = \pi^{-1}(\mathrm{Rad}(C(X))).$$

$I(X)$ je zatvoren dvo-strani ideal u $B(X)$ i naziva se ideal neesencijalnih operatora.

LEMA 1. ([20], (5. 6. 1) Lemma) Svaki ideal J u $B(X)$ koji se sastoji od Rieszovih operatora sadržan je u $I(X)$.

TEOREMA 1. ([47]) $I(X) = \pi^{-1}(\mathrm{Rad}\,(B(X)/\bar{F}(X)))$, gde je π prirodno preslikavanje sa $B(X)$ na $B(X)/\bar{F}(X)$.

TEOREMA 2. ([47]) Neka je $A \in B(X)$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(i) Operator A je invertibilan moduo ideal $I(X)$.

(ii) Operator A je invertibilan moduo ideal $\bar{F}(X)$.

(iii) Operator A je invertibilan moduo ideal $F(X)$.

TEOREMA 3. ([20], (5. 6. 9) Theorem) Za svaki Banachov prostor X važe sledeće inkluzije:

(i) $K(X) \subset S(X) \subset P(\Phi_+(X)) \subset P(\Phi(X)) = I(X)$;

(ii) $K(X) \subset P(\Phi_-(X)) \subset P(\Phi(X)) = I(X)$.

U opštem slučaju, ideali pomenuti u Teoremi 3 (osim možda $S(X)$ i $P(\Phi_+(X))$ za koje ostaje otvoren problem) su međusobno različiti, i ideal $S(X)$ nije uvek sadržan u $P(\Phi_-(X))$ ([20], str. 101).

Glava 3
ESENCIJALNI SPEKTAR

1. Nekoliko definicija esencijalnog spektra

Neka je X beskonačno-dimenzionalan Banachov prostor.[1] Postoji nekoliko definicija esencijalnog spektra operatora $A \in B(X)$, koje se poklapaju ako je A samokonjugovan operator i X Hilbertov prostor (Teorema 3. 2).

DEFINICIJA 1. ([84]) Wolfov[2] esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$, označava se sa $\sigma_{ew}(A)$, jeste skup svih kompleksnih brojeva λ, tako da $A - \lambda$ nije Fredholmov operator, tj.

$$\sigma_{ew}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin \Phi(X)\}. \tag{1}$$

Kako je operator $A \in B(X)$ Fredholmov operator ako i samo ako je $\pi(A)$ invertibilan elemenat u Calkinovoj algebri $C(X)$ (Teorema 1. 2. 2), to je Wolfov esencijalni spektar operatora A jednak spektru elementa $\pi(A)$ u $C(X)$, tj.

$$\sigma_{ew}(A) = \sigma(\pi(A)). \tag{2}$$

Na osnovu (2) zaključujemo da je $\sigma_{ew}(A)$ kompaktan, neprazan podskup u $\mathbb{C}$, da je $\sigma_{ew}(A)$ invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije, tj.

$$\sigma_{ew}(A + K) = \sigma_{ew}(A), \quad K \in K(X), \tag{3}$$

i da je

$$\sigma_{ew}(A) \subset \sigma(A). \tag{4}$$

1) Ako je $\dim X < \infty$, tada je esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$ prazan skup.
2) Koriste se i termini Fredholmov spektar, Calkinov spektar.

Iz (3) i (4) vidimo da se neke tačke spektra operatora A ne mogu ukloniti ako se operatoru A doda kompaktan operator. Potrebno je odrediti najveći podskup spektra operatora A koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije. Sa tim u vezi je sledeća definicija.

DEFINICIJA 2. ([84]) Schechterov[1] esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$, označava se sa $\sigma_{em}(A)$, jeste najveći podskup spektra operatora A koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije, tj.

$$\sigma_{em}(A) = \bigcap_{K \in K(X)} \sigma(A + K). \tag{5}$$

Iz Definicije 2 i (3) sledi da je

$$\sigma_{ew}(A) \subset \sigma_{em}(A) \subset \sigma(A). \tag{6}$$

TEOREMA 1. ([91], VII, Theorem 5. 4) $\lambda \notin \sigma_{em}(A)$ ako i samo ako je $A - \lambda \in \Phi(X)$ i $i(A - \lambda) = 0$, tj.

$$\sigma_{em}(A) = \sigma_{ew}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \in \Phi(X) \text{ i } i(A - \lambda) \neq 0\}. \tag{7}$$

POSLEDICA 1. ([39], Theorem 2. 2) $\sigma(A) = \sigma_{em}(A) \cup \sigma_p(A)$.

TEOREMA 2. ([55], 3. Lemma) Neka je λ izolovana tačka u $\sigma(A)$ i $P_\lambda(A)$ spektralna projekcija koja odgovara λ i A. Tada je

(a) $\dim R(P_\lambda(A)) < \infty$ i $\lambda \notin \sigma_{em}(A)$, ili

(b) $\dim R(P(A)) = \infty$ i $\lambda \in \sigma_{em}(A)$.

TEOREMA 3. ([102], II, Trditev 13) Neka je $\lambda \in \partial\sigma(A)$ neizolovana tačka u $\sigma(A)$. Tada je $\lambda \in \sigma_{em}(A)$.

PRIMER 1. Neka je $A \in B(X)$ kompaktan operator. Tada je

$$\sigma_{ew}(A) = \sigma_{em}(A) = \{0\}.$$

DOKAZ: Iz (5) sledi da je $\sigma_{em}(A) \subset \sigma(A + (-A)) = \{0\}$. Kako su $\sigma_{ew}(A)$ i $\sigma_{em}(A)$ neprazni skupovi, oni su jednaki $\{0\}$.

1) Oznaka $\sigma_{em}(A)$ je verovatno zbog imena Martin Schechter; za ovaj skup koristi se i termin Weyliev spektar ([11]).

PRIMER 2. ([11], Example 1. 2) Neka je $U : \ell^2 \to \ell^2$ operator jednostranog pomeranje, tj.

$$U(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \quad (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2.$$

Tada je $\sigma_{em}(U) = \sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ i $\sigma_{ew}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

DEFINICIJA 3. ([30], str. 183) Neka je D kompaktan podskup u komleksnoj rarvni $\mathbb{C}$. Rupa u D je ograničena komponenta skupa $\mathbb{C} \setminus D$.

LEMA 1. ([30], str. 183) Ako su E i F kompaktni podskupovi u kompleksnoj ravni tako da je $E \subset F$ i $\partial F \subset E$, tada F je unija skupa E i onih rupa u E koje imaju neprazan presek sa F. Drugim rečima F se dobija popunjavanjem izvesnih rupa u E (ili je $F = E$).

U primeru 2 vidimo da se veći esencijalni spektar $\sigma_{em}(U)$ dobija iz manjeg esencijalnog spektra $\sigma_{ew}(U)$ popunjavanjem rupe u $\sigma_{ew}(U)$. To je i opšte tvrđenje.

TEOREMA 4. ([30], Theorem (2. 4)) $\sigma_{em}(A)$ se sastoji od $\sigma_{ew}(A)$ zajedno sa još možda nekim rupama u $\sigma_{ew}(A)$.

Schechterov esencijalni spektar ima „preimućstvo" nad Wolfovim esencijalnim spektrom jer je on najveći deo spektra koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije. Međutim, njegov „nedostatak" je što može isključiti iz spektra čak i otvorene skupove, tj. u izvesnom smislu „veliki" deo spektra može biti van Schechterovog esencijalnog spektra. Browder je proširio Schechterov esencijalni spektar dodajući mu sve neizolovane tačke spektra.

DEFINICIJA 4. ([84]) Browderov esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$, označava se sa $\sigma_{eb}(A)$, jeste unija skupa $\sigma_{em}(A)$ i skupa svih tačaka iz $\sigma(A)$ koje nisu izolovane tačke u $\sigma(A)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_{eb}(A)$, tada λ je izolovana tačka u $\sigma(A)$ i zbog Teoreme 2 (a) spektralna projekcija $P_\lambda(A)$ koja odvara tački λ i A je konačno-dimenzionalan operator. Prema tome λ je Rieszova tačka operatora A. Često se Browderov esencijalni spektar definiše ekvivalentno sa

DEFINICIJA 5. ([55]) Browderov esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$, sastoji se iz svih tačaka iz $\sigma(A)$ osim izolovanih tačaka $\lambda \in \sigma(A)$ za koje je odgovarajuća spektralna projekcija $P_\lambda(A)$ konačno-dimenzionalan operator, tj.

$$\sigma_{eb}(A) = \sigma(A) \setminus \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ je izolovana tačka u } \sigma(A) \text{ i } \dim R(P_\lambda(A)) < \infty\}. \quad (8)$$

Drugim rečima

$$\sigma_{eb}(A) = \sigma(A) \setminus \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ je Rieszova tačka operatora } A\}. \quad (9)$$

U literaturi ([52], [62], [63]) Browderov esencijalni spektar definiše se sa

DEFINICIJA 6. ([62]) Browderov esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$,1) jeste skup $\lambda \in \sigma(A)$, tako da je ispunjen bar jedan od sledećih uslova:

(i) $R(A - \lambda)$ nije zatvoren skup u X.

(ii) $\dim \bigcup_{n \geqslant 1} N((\lambda - A)^n) = \infty$.

(iii) λ je tačka nagomilavanja skupa $\sigma(A)$.

Dokaz da su Definicije 4, 5 i 6 ekvivalentne može se naći u ([85]).

TEOREMA 5. ([52], Corollary) Neka je $A \in B(X)$. Tada je

$$\sigma_{eb}(A) = \bigcap_{\substack{K \in K(X) \\ AK = KA}} \sigma(A + K). \quad (10)$$

1) Ovo je originalna Browderova definicija esencijalnog spektra za zatvorene gusto definisane operatore na Banachovom prostoru uvedena u radu : F. E. Browder, On the spectral theory of eliptic differential operators, Math. Ann. Vol. 142 (1961) 22-130.

Iz (10) vidimo da u opštem slučaju Browderov esencijalni spektar nije invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije. To je njegov „nedostatak" u odnosu na Schechterov esencijalni spektar.

POSLEDICA 2. $$\sigma_{eb}(A) = \sigma_{em}(A) \cup \Big(\bigcap_{\substack{K \in K(X) \\ AK = KA}} \sigma_p(A + K)\Big) \qquad (11)$$

DOKAZ: Pretpostavimo da $\lambda \in \sigma_{eb}(A) \setminus \sigma_{em}(A)$. Tada na osnovu Teoreme 1 imamo da je $A - \lambda \in \Phi(X)$ i $i(A - \lambda) = 0$. Ukoliko $\lambda \notin \bigcap_{\substack{K \in K(X) \\ AK = KA}} \sigma_p(A + K)$, postojao bi operator $K_1 \in K(X)$, tako da je $AK_1 = K_1A$ i $\lambda \notin \sigma_p(A + K_1)$. Tada je $\alpha(A + K_1 - \lambda) = 0$. Kako je $i(A - \lambda) = i(A + K_1 - \lambda) = 0$, to je $\beta(A + K_1 - \lambda) = 0$. Prema tome $A + K_1 - \lambda$ je invertibilan operator, što je zbog (10) u kontradikciji sa pretpostavkom da $\lambda \in \sigma_{eb}(A)$. Ovim smo pokazali jednu inkluziju u (11). Druga inkluzija sledi iz (10) i činjenice da je $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$ i $\sigma_{em}(A) \subset \sigma_{eb}(A)$.

DEFINICIJA 7. ([89]) Katov esencijalni spektar operatora $A \in B(X)$, označavaćemo sa $\sigma_{ek}(A)$ 1), jeste skup svih kompleksnih brojeva λ, tako da $A - \lambda$ nije semi- Fredholmov operator, tj.

$$\sigma_{ek}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)\}. \qquad (12)$$

DEFINICIJA 8. ([89]) Neka je $A \in B(X)$. Označimo sa

$$\sigma_{e\alpha}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin \Phi_+(X)\}, \qquad (13)$$

$$\sigma_{e\beta}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin \Phi_-(X)\}. \qquad (14)$$

$\sigma_{e\alpha}(A)$ i $\sigma_{e\beta}(A)$ su esencijalni spektri operatora A prema Gustafsonu i Weidmannu.

1) U literaturi ([89], [37], [46], [55], [36]) Katov esencijalni spektar se uvek različito označava. Ovde smo uzeli oznaku $\sigma_{ek}(A)$ kao najpogodniju.

Na sledećem dijagramu data je skupovno inkluziona veza među gore pomenutim esencijalnim spektrima operatora $A \in B(X)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \sigma_{e\alpha}(A) & & \\ & \subset & & \subset & \\ \sigma_{ek}(A) \subset & & & & \sigma_{ew}(A) \subset \sigma_{em}(A) \subset \sigma_{eb}(A). \\ & \subset & & \subset & \\ & & \sigma_{e\beta}(A) & & \end{array} \qquad (15)$$

Napomenimo da kada je dim $X = \infty$, svi ovi skupovi su neprazni i kompaktni podskupovi u $\sigma(A)$.

2. Poluprečnik esencijalnog spektra

TEOREMA 1. ([62], Theorem 1) Neka je $A \in B(X)$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_K^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_q^{1/n} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{eb}(A)\} = r_e(A)$$

TEOREMA 2. ([55], 8. Corollary) Neka je $A \in B(X)$. Tada je

$$\max_{\lambda\in\sigma_{eb}(A)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma_{em}(A)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma_{ew}(A)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma_{e\alpha}(A)} |\lambda| =$$

$$= \max_{\lambda\in\sigma_{e\beta}(A)} |\lambda| = \max_{\lambda\in\sigma_{ek}(A)} |\lambda| = r_e(A).$$

DEFINICIJA 1. ([62]) Neka je $A \in B(X)$ i $r_e(A)$ broj iz Teoreme 1. $r_e(A)$ se naziva poluprečnik esencijalnog spektra operatora A.

Na osnovu Teoreme 1 možemo proceniti poluprečnik esencijalnog spektra lokalne q-kontrakcije.

TEOREMA 3. Neka je $A \in B(X)$ lokalna q-kontrakcija. Tada je

$$r_e(A) \leqslant k_o < 1. \qquad (16)$$

DOKAZ: Na osnovu definicije lokalne q-kontrakcije postoji prirodan broj m tako da je

$$q(A^m(S_X)) \leqslant kq(S_X), \quad k \in [0, 1), \qquad (17)$$

gde je S_X zatvorena jedinična lopta u X. Kako je $\|A^m\|_q =$

$q(A^m(S_X))$ i $q(S_X) = 1$ (Lema 2. 3. 1), iz (17) sledi

$$\|A^m\|_q \leqslant k, \quad k \in [0, 1).$$

Neka je $B = A^m$. Na osnovu Teoreme 1 i zato što je $\|B^n\|_q^{1/n} \leqslant \|B\|_q$ imamo da je $r_e(B) = \lim_{n\to\infty} \|B^n\|_q^{1/n} \leqslant \|B\|_q \leqslant k$. Prema tome

$$r_e(A^m) \leqslant k < 1. \tag{18}$$

Kako je $r_e(A^m) = (r_e(A))^m$ (Teorema 1), iz (18) sledi da je

$$r_e(A) \leqslant k_o < 1,$$

gde je $k_o = k^{1/m}$. Ovim je teorema dokazana.

Kao posledicu Teoreme 3 dobijamo rezultate iz ([23], Lemma 2. 1, Lemma 2. 2, Lemma 2. 3, Theorem 2. 1, Theorem 2. 2) kao i pojačanje ([23], Lemma 2. 4)

POSLEDICA 1. Neka je $A \in B(X)$ lokalna q-kontrakcija. Tada

(i) iz $|\lambda| \geqslant 1$ sledi $A - \lambda \in \Phi(X)$ i $i(A - \lambda) = 0$.

(ii) $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}$ je konačan skup i sastoji se samo od sopstvenih vrednosti operatora A.

(iii) Ako je $|\lambda| \geqslant 1$, tada λ je izolovana tačka u $\sigma(A)$ i spektralna projekcija $P_\lambda(A)$ koja odgovara tački λ i A je konačno-dimenzionalan operator.

Dokaz: Iz (16) i Teoreme 2 sledi da ako je $|\lambda| \geqslant 1$, tada $\lambda \notin \sigma_{em}(A)$ i $\lambda \notin \sigma_{eb}(A)$. Prema tome, (i) sledi na osnovu Teoreme 1. 1, a (ii) i (iii) slede iz definicije Browderovog esencijalnog spektra operatora A.

TEOREMA 4. Neka su X i Y Banachovi prostori i T_1, T_2 operatori iz $B(Y)$, $B(X)$ respektivno. Sa ${}_1T_2$ označimo operator na $B(X, Y)$, definisan sa

$${}_1T_2(S) = T_1 S T_2 \qquad (S \in B(X, Y)).$$

Tada je

$$r_e({}_1T_2) \leqslant r_e(T_1)r(T_2) + r_e(T_2)r(T_1) + r_e(T_1)r_e(T_2).$$

DOKAZ: Na osnovu Teoreme 1. 2. 1 (videti i Teoremu 2. 5. 2) za $A \in B(X)$ sledi da je $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|_K^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_F^{1/n}$.

Prema tome, zbog Teoreme 1 imamo da je

$$r_e(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_F^{1/n}, \quad A \in B(X). \tag{19}$$

Neka su $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ zadati brojevi. Zbog (19) postoji n_1 tako da za svako $n > n_1$ imamo

$$\|T_1^n\|_F^{1/n} < r_e(T_1) + \varepsilon_1, \tag{20}$$

i postoji n_2 tako da za svako $n > n_2$ imamo

$$\|T_2^n\|_F^{1/n} < r_e(T_2) + \varepsilon_2. \tag{21}$$

Iz (20) sledi da za svako $n > n_1$ postoji $F_{1,n} \in F(Y)$ tako da je

$$\|T_1^n - F_{1,n}\|^{1/n} < r_e(T_1) + \varepsilon_1. \tag{22}$$

Na isti način, iz (21) sledi da za svako $n > n_2$ postoji $F_{2,n} \in F(X)$ tako da je

$$\|T_2^n - F_{2,n}\|^{1/n} < r_e(T_2) + \varepsilon_2. \tag{23}$$

Neka je $n_o = \max(n_1, n_2)$. Za svako $n > n_o$ sa ${}_{1,n}T_{2,n}$ označimo operator na $B(X, Y)$ definisan sa

$${}_{1,n}T_{2,n}(S) = F_{1,n}SF_{2,n}, \quad (S \in B(X, Y)).$$

${}_{1,n}T_{2,n}$ je konačno-dimenzionalan operator (Teorema 4. 2). Osim toga, za svako $n > n_o$ imamo da je

$$\|{}_1T_2^n(S) - {}_{1,n}T_{2,n}(S)\| = \|T_1^nST_2^n - F_{1,n}SF_{2,n}$$

$$\|(T_1{}^n - F_{1,n})ST_2{}^n + F_{1,n}S(T_2{}^n - F_{2,n})\|$$

$$\leq \|T_1{}^n - F_{1,n}\|\|S\|\|T_2{}^n\| + \|F_{1,n}\|\|S\|\|T_2{}^n - F_{2,n}\|. \qquad (24)$$

Na osnovu (22) imamo da je $\|T_1{}^n\| \leq \|F_{1,n}\| + (r_e(T_1) + \varepsilon_1)^n$. Prema tome, iz (22), (23) i (24) sledi da je za svako $n > n_0$

$$\|{}_1T_2{}^n(S) - {}_{1,n}T_{2,n}(S)\| \leq$$

$$(r_e(T_1) + \varepsilon_1)^n\|S\|\|T_2{}^n\| + (\|T_1{}^n\| + (r_e(T_1) + \varepsilon_1)^n)\|S\|(r_e(T_2) + \varepsilon_2)^n,$$

odnosno

$$\|{}_1T_2{}^n\|_F^{1/n} \leq (r_e(T_1) + \varepsilon_1)\|T_2{}^n\|^{1/n} + (\|T_1{}^n\|^{1/n} + r_e(T_1) + \varepsilon_1)(r_e(T_2) + \varepsilon_2). \qquad (25)$$

Iz (19) i (25) sledi da je

$$r_e({}_1T_2) = \lim_{n\to\infty} \|{}_1T_2{}^n\|_F^{1/n} \leq (r_e(T_1) + \varepsilon_1)r(T_2) + (r(T_1) + r_e(T_1) + \varepsilon_1)(r_e(T_2) + \varepsilon_2).$$

Kako su ε_1 i ε_2 proizvoljno izabrani brojevi, vidimo da je dokaz teoreme završen.

<u>POSLEDICA 2.</u> ([3], Theorem 1) Neka su T_1 i T_2 Rieszovi operatori. Tada je ${}_1T_2$ Rieszov operator.

DOKAZ: Kako su T_1 i T_2 Rieszovi operatori, to je na osnovu Teoreme 1. 3. 2 $r_e(T_1) = r_e(T_2) = 0$. Prema tome, iz Teoreme 4 sledi da je $r_e({}_1T_2) = 0$, i ponovo primenom Teoreme 1. 3. 2 imamo da je ${}_1T_2$ Rieszov operator. Ovim je posledica dokazana.

3. O rubu esencijalnog spektra

TEOREMA 1. ([55], 7. Theorem) Neka je $A \in B(X)$. Tada važe, pored već navedenih (15) inkluzija, i sledeće

$$\begin{array}{ccccc} & & \partial\sigma_{e\alpha}(A) & & \\ & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & \\ \partial\sigma_{eb}(A) \subset \partial\sigma_{em}(A) \subset \partial\sigma_{ew}(A) & & & & \partial\sigma_{ek}(A). \\ & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & \\ & & \partial\sigma_{e\beta}(A) & & \end{array} \tag{26}$$

Iz Teoreme 1 vidimo da se veći esencijalni spektar dobija iz manjeg popunjavanjem izvesnih rupa. To nam omogućuje da Katovu teoremu ([46], Theorem 5. 3. 3. IV) dobijemo kao posledicu Teoreme 1.

POSLEDICA 1. ([46], Theorem 5. 3. 3. IV) Neka je $A \in B(X)$ i $\sigma_{ek}(A)$ najviše prebrojiv skup. Tada je i $\sigma(A)$ najviše prebrojiv skup, i svaka tačka iz $\sigma(A) \setminus \sigma_{ek}(A)$ je izolovana sopstvena vrednost sa konačnom algebarskom višestrukošću.

DOKAZ: Kako je $\sigma_{ek}(A)$ najviše prebrojiv skup, on nema rupe i zbog Teoreme 1 imamo da je $\sigma_{ek}(A) = \sigma_{eb}(A)$. Skup $\sigma(A) \setminus \sigma_{eb}(A)$ se sastoji od izolovanih sopstvenih vrednosti konačne algebarske višestrukosti, a njih je najviše prebrojivo mnogo, čo je dokaz posledice završen.

Ako je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$ samokonjugovan operator, više puta ([84], [85], [86], [89], [92], [37]) se navodi (bez dokaza) da su svi esencijalni spektri operaoperatora A jednaki. To se može pokazati na osnovu Teoreme 1.

POSLEDICA 2. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$ samokonjugovan operator. Tada su svi esencijalni spektri operatora A jednaki.

DOKAZ: Kako je $\sigma(A)$ realan, to su i svi esencijalni spektri operatora A realni, i nemaju rupe. Zbog Teoreme 1 oni su jednaki.

U literaturi ([84], [85], [86], [89], [92], [40], [37]) često se pominje (bez dokaza) da je esencijalni spektar samokonjugovanog operatora na Hilbertovom prostoru jednak skupu svih tačaka iz spektra operatora koje nisu izolovane sopstvene vrednosti konačne višestrukosti. Ako je operator samokonjugovan svi esencijalni spektri su jednaki (Posledica 2), tako da ne dolazi do zabune kada samo kažemo esencijalni spektar samokonjugovanog operatora. Da bi potpuno izbegli zabunu pokazaćemo

TEOREMA 2. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$ samokonjugovan operator. Označimo sa

$$\sigma_e(A) = \sigma(A) \setminus \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ je izolovana tačka u } \sigma(A) \text{ i } 0 < \alpha(A - \lambda) < \infty\}. \quad (27)$$

Tada, svi esencijalni spektri operatora A su jednaki skupu $\sigma_e(A)$.

DOKAZ: Zbog Posledice 2, dovoljno je pokazati da je $\sigma_{eb}(A) = \sigma_e(A)$. Iz definicije sledi da je $\sigma_e(A) \subset \sigma_{eb}(A)$. Da bi dokazali obrnutu inkluziju, pretpostavimo da $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$. Tada λ je realan broj, $A - \lambda$ je samokonjugovan operator, 0 je izolovana tačka u $\sigma(A - \lambda)$ i $0 < \alpha(A - \lambda) < \infty$. Prema tome, $A - \lambda$ je Fredholmov operator i $i(A - \lambda) = 0$ ([91], XI. Lemma 5. 5). Iz Teoreme 1. 1 sledi da $\lambda \notin \sigma_{em}(A)$, a zbog Teoreme 1. 2(a) $\lambda \notin \sigma_{eb}(A)$. Ovim je teorema dokazana.

DEFINICIJA 1. ([84]) Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$ samokonjugovan operator. Esencijalni spektar samokonjugovanog operatora A jeste skup $\sigma_e(A)$ iz Teoreme 2. 1)

4. Perturbacije esencijalnog spektra

TEOREMA 1. ([89], Theorem 2. 2) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{ek}(A + E) = \sigma_{ek}(A),$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi_+(X)) \cap P(\Phi_-(X))$.

1) Koriste se i termini granične tačke spektra ([78], str. 363), neprekidni spektar ([1], str. 3).

TEOREMA 2. ([89], Theorem 2. α) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{e\alpha}(A + E) = \sigma_{e\alpha}(A),$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi_+(X))$.

TEOREMA 3. ([89], Theorem 2. β) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{e\beta}(A + E) = \sigma_{e\beta}(A),$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi_-(X))$.

TEOREMA 4. ([89], Theorem 2. 3) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{ew}(A + E) = \sigma_{ew}(A), \tag{28}$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi(X))$.

TEOREMA 5. ([89], Theorem 2. 4) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{em}(A + E) = \sigma_{em}(A), \tag{29}$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi(X))$.

TEOREMA 6. ([89], Theorem 2. 5) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov (28) (respektivno uslov (29)) za svaki operator $A \in B(X)$ koji je skoro komutativan sa E ako i samo ak $E \in R(X)$.

TEOREMA 7. ([89], Theorem 2. 6) Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{eb}(A + E) = \sigma_{eb}(A),$$

za svaki operator $A \in B(X)$ koji je komutativan sa E ako i samo ako $E \in R(X)$.

5. Preslikavanje esencijalnog spektra

Ako je $A \in B(X)$ i f analitička funkcija u okolini $\sigma(A)$, tada na osnovu teoreme o preslikavanju spektra ([51], str. 483, Teorema 8) imamo da je

$$\sigma(f(A)) = f\{\sigma(A)\}.$$

Analogno ispituje se i ze esencijalni spektar.

TEOREMA 1. ([36]) Neka je f analitička funkcija u okolini $\sigma(A)$. Tada je

(i) $$\sigma_{ew}(f(A)) = f\{\sigma_{ew}(A)\},$$

(ii) $$\sigma_{eb}(f(A)) = f\{\sigma_{eb}(A)\},$$

(iii) $$\sigma_{e\alpha}(f(A)) = f\{\sigma_{e\alpha}(A)\},$$

(iv) $$\sigma_{e\beta}(f(A)) = f\{\sigma_{e\beta}(A)\},$$

(v) $$\sigma_{ek}(f(A)) \supset f\{\sigma_{ek}(A)\},$$

(vi) $$\sigma_{em}(f(A)) \subset f\{\sigma_{em}(A)\}.$$

Inkluzije (v) i (vi) u Teoremi 1 mogu biti i prave. To pokazuju sledeći primeri:

PRIMER 1. ([36], str. 23) Neka je $A \in B(X)$ operator za koji je $R(I + A)$ zatvoren skup u X, $\alpha(I + A) < \infty$, $\beta(I + A) = \infty$, $\alpha(I - A) = \infty$, $\beta(I - A) < \infty$, i p polinom $p(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)$. Tada $0 \in \sigma_{ek}(p(A))$, međutim $0 \notin p\{\sigma_{ek}(A)\}$.

PRIMER 2. ([11], Example 3. 3) Neka je $T = U \oplus (U^* + 2I)$, gde je U operator jednostranog pomeranja, i $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. Tada $0 \in p\{\sigma_{em}(T)\}$ i $0 \notin \sigma_{em}(p(A))$.

U radovima ([36], ([27], str. 1393), ([35], str. 162), [89]) ispituje se još jedan esencijalni spektar.

DEFINICIJA 1. ([89]) Neka je $A \in B(X)$. Goldbergov esencijalni spektar operatora A, označava se sa $\sigma_{el}(A)$, jeste skup svih kompleksnih brojeva λ tako da $R(A - \lambda)$ nije zatvoren skup u X.

Skup $\sigma_{el}(A)$ može biti i prazan (na primer ako je A identičan operator), $\sigma_{el}(A) \subset \sigma_{ek}(A)$, i u opštem slučaju $\sigma_{el}(A)$ nije ni zatvoren ni otvoren podskup u $\mathbb{C}$. Osim toga, u opštem slučaju ne postoji veza između $\sigma_{el}(f(A))$ i $f\{\sigma_{el}(A)\}$ ([36], str. 29).

U ([36]) je dokazana spektralna teorema za Banachove algebre (Teorema 2) na osnovu koje se Teorema 1 dobija kao specijalan slučaj. Izložićemo neke rezultate iz pomenutog rada.

DEFINICIJA 2. ([36], Definition 1) Neka je $\mathcal{B}$ Banachova algebra sa jedinicom 1. Otvorena semi grupa $\mathcal{G}$ u $\mathcal{B}$ je F-semi grupa ako ispunjava sledeće uslove:

(i) iz $a, b \in \mathcal{B}$ i $ab = ba \in \mathcal{G}$ sledi $a \in \mathcal{G}$ i $b \in \mathcal{G}$,

(ii) postoji zatvoren dvostrani ideal $\mathcal{R}$ u $\mathcal{B}$, tako da je $\mathcal{G} = \pi^{-1}(S)$, gde je S otvorena semi grupa u $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ koja sadrži grupu invertibilnih elemenata G u $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ tako da je $S \setminus G$ otvoren skup, a π je prirodno preslikavanje sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B}/\mathcal{R}$.

DEFINICIJA 3. ([36], Definition 2) Indeks na F-semi grupi $\mathcal{G}$ jeste neki lokalno konstantan homomorfizam i koji preslikava $\mathcal{G}$ u semi grupu N.
Koristićemo sabiranje za binarnu operaciju u N, i sa 0 označavamo jedinicu u N.

TEOREMA 2. ([36], Theorem 1) Neka je i indeks na $\mathcal{G}$ tako da je $i(b) = 0$ za svaki invertibilan elemenat $b \in \mathcal{B}$. Za $a \in \mathcal{B}$, neka je

$$\sigma_{\mathcal{G}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \lambda - a \notin \mathcal{G}\},$$

i za $n \in N$, neka je

$$\sigma_n(a) = \{\lambda \in \sigma(a) \ : i(\lambda - a) = n\},$$

gde je $\sigma(a)$ spektar elementa a u odnasu na Banachovu algebru $\mathcal{B}$. Neka je f analitička funkcija na nekom otvorenom skupu koji sadrži $\sigma(a)$. Tada važe sledeća tvrđenja:

(a) $f(a) \in \mathcal{G}$ ako i samo ako je $f(\lambda) \neq 0$ za svako $\lambda \in \sigma_{\mathcal{G}}(a)$.

(b) $\sigma_{\mathcal{G}}(f(a)) = f\{\sigma_{\mathcal{G}}(a)\}$.

(c) Pretpostavimo da $f(a) \in \mathcal{G}$ i neka je α_n broj nula funkcije f na $\sigma_n(a)$ (brojanje nula se vrši prema njihovoj višestrukosti), ignorisavši komponente u $\sigma_n(a)$ gde je f identički nula. Tada je

$$i(f(a)) = \sum_N n\alpha_n .$$

Kada se Teorema 2 primeni na Banachovu algebru $\mathcal{B} = B(X)$, $\mathcal{R} = K(X)$, i na F-semi grupe $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ i $\Phi(X)$ dobija se dokaz Teoreme 1. Na ovim F-semi grupama indeks i je uobičajeni indeks i (Definicija 1. 2. 3). Osim pomenutih F-semi grupa, u B(X) se mogu definisati još neke F-semi grupe. Označimo sa G_l (G_r) skup svih levo (desno) invertibilnih elemenata u Calkinovoj algebri $\mathcal{C}(X)$, a sa H^l (H^r) označimo komplement u C(X) skupa svih levih (desnih) topoloških delioca nule, i neka je $H = H^l \cap H^r$. Tada ([36], str. 21) $\pi^{-1}(G_l)$, $\pi^{-1}(G_r)$, $\pi^{-1}(H^l)$, $\pi^{-1}(H^r)$ i $\pi^{-1}(H)$ su F-semi grupe u B(X), indeks na ovim F-semi grupama je uobičajen indeks (Definicija 1. 2. 3), i na njih se može primeniti Teorema 2.

6. Operatori koji zadovoljavaju Weylievu teoremu

Ako je A ograničen samokonjugovan operator na Hilbertovom prostoru, tada klasična Weylieva teorema ([78], str. 367) kaže da se prilikom perturbacije operatora A sa simetričnim kompaktnim operatorom iz spektra operatora A mogu odstraniti samo izolovane sopstvene vrednosti konačne višestrukosti. U cilju da se ova teorema uopšti na Banachove prostore i da se odredi klasa operatora koji zadovoljavaju Weylievu teoremu uvedena je

DEFINICIJA 1. ([92], str. 68) Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Operator A zadovoljava Weylievu teoremu (ili Weylieva teorema se primenjuje na A) ako je

$$\sigma_{em}(A) = \sigma(A) \setminus \pi_{oo}(A), \tag{30}$$

gde $\pi_{oo}(A)$ označava skup izolovanih sopstvenih vrednosti operatora A konačne višestrukosti (tj. $\pi_{oo}(A)$ se sastoji od izolovanih tačaka λ iz $\sigma(A)$ za koje je $0 < \alpha(A-\lambda) < \infty$).

Coburn ([21]) je dokazao da hiponormalni i Toeplitzovi operatori zadovoljavaju Weylievu teoremu.

TEOREMA 1. ([92], Theorem 2. 1) Operator $A \in B(X)$ zadovoljava Weylievu teoremu ako i samo ako

(i) iz $\lambda \in \pi_{oo}(A)$ sledi $R(A-\lambda)$ je zatvoren skup u X,

(ii) iz $A-\lambda \in \Phi(X)$ i $i(A-\lambda) = 0$ sledi λ nije unutrašnja tačka skupa $\sigma(A)$.

TEOREMA 2. ([92], Theorem 2. 2) Uslov (i) ekvivalentan je sa

(iii) ako $\lambda \in \pi_{oo}(A)$, tada $A-\lambda$ nije kvazinilpotentan operator ni na jednom beskonačno-dimenzionalnom invarijantnom potprostoru.

TEOREMA 3. ([92], Theorem 2. 3) Uslov (ii) ekvivalentan je sa

(iv) iz $A-\lambda \in \Phi(X)$ i $i(A-\lambda) = 0$ sledi $\dim \bigcup_{n \geq 1} N((A-\lambda)^n) < \infty$.

TEOREMA 4. ([92], Theorem 2. 4) Ako je ispunjen uslov (i), imamo

(v) ako je W invarijantan potprostor operatora A i $\lambda \in \pi_{oo}(A)$ je izolovana tačka u $\sigma(A|_W)$, tada λ je sopstvena vrednost operatora $A|_W$.

TEOREMA 5. ([92], Theorem 2. 5) Ako iz $\alpha(A-\lambda) < \infty$ sledi da operator $A-\lambda$ nije kvazinilpotentan ni na jednom beskonačno-dimenzionalnom invarijantnom potprostoru, tada operator A zadovoljava Weylievu teoremu.

7. Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar

Neka je $A \in B(X)$ i $\sigma_a(A)$ aproksimativni tačkasti spektar operatora A ([24], Definition 1. 15), tj.

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_{\|x\|=1} \|(A - \lambda)x\| = 0\}.$$

$\sigma_a(A)$ je zatvoren neprazan podskup u $\sigma(A)$, $\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$ i $\sigma_p(A) \subset \sigma_a(A)$ ([24], Theorem 1. 16).

Moglo bi se postaviti pitanje koji je najveći podskup u $\sigma_a(A)$ koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije? Sa tim u vezi je sledeća

DEFINICIJA 1. Esencijalni aproksimativni tačkasti spektar operatora $A \in B(X)$, označava se sa $\sigma_{ea}(A)$, jeste najveći podskup $\sigma_a(A)$ koji je invarijantan u odnosu na kompaktne perturbacije, tj.

$$\sigma_{ea}(A) = \bigcap_{K \in K(X)} \sigma_a(A + K).$$

Iz definicije se vidi da je $\sigma_{ea}(A)$ zatvoren podskup u $\sigma_{em}(A)$.

Ako je $A \in B(X)$, definišimo funkciju ℓ sa

$$\ell(A) = \sup_{K \in K(X)} \inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\|.$$

U ([33]) je ispitivana funkcija (minimum modulus)

$$\mu(A) = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

i pokazana je ([33], Lemma 2. 2) sledeća nejednakost

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \|A - B\|, \ (A,\ B \in B(X)) \qquad (31)$$

LEMA 1. Neka je $A \in B(X)$. Tada je

(i) $\ell(A) = \ell(A + K)$, $K \in K(X)$,

(ii) $|\ell(A) - \ell(B)| \leq \|A - B\|$, $(A,\ B \in B(X))$,

(iii) $0 \leq \ell(A) \leq \|A\|_K$.

DOKAZ: Iz definicije funkcije ℓ sledi (i). Neka je $K \in K(X)$.

Iz (31) sledi da je

$$\inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\| - \inf_{\|x\|=1} \|Kx\| \leq \|A\|.$$

Kako je $\inf_{\|x\|=1} \|Kx\| = 0$, imamo da je

$$\inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\| \leq \|A\|,$$

a samim tim je i $\ell(A) \leq \|A\|$. Prema tome, (iii) sledi iz (i).
Neka je $K \in K(X)$ i $B \in B(X)$. Iz (31) sledi da je

$$\inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\| - \inf_{\|x\|=1} \|(B + K)x\| \leq \|A - B\|,$$

odnosno

$$\inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\| \leq \|A - B\| + \inf_{\|x\|=1} \|(B + K)x\|,$$

$$\leq \|A - B\| + \ell(B).$$

Kako je $K \in K(X)$ proizvoljno izabran operator imamo da je

$$\ell(A) - \ell(B) \leq \|A - B\|. \tag{32}$$

Ukoliko operatori A i B zamene mesta iz (32) sledi (ii).
Ovim je dokaz leme završen.

<u>LEMA 2.</u> Neka je $A \in B(X)$. Tada $A \in \Phi_+(X)$ i $i(A) \leq 0$ ako i samo ako je $\ell(A) > 0$.

DOKAZ: Neka je $A \in \Phi_+(X)$ i $i(A) \leq 0$. Na osnovu ([110], Theorem 3. 9) postoje operatori $A_1 \in B(X)$ i $K \in K(X)$ tako da je $A = A_1 + K$ i $\alpha(A_1) = 0$. Prema tome, $A_1 = A - K \in \Phi_+(X)$ i postoji konstanta $c > 0$ tako da je $c\|x\| \leq \|(A - K)x\|$ za svako $x \in X$. Samim tim je i $\ell(A - K) > 0$, tj. $\ell(A) > 0$ (Lema 1(i)). Ako je $\ell(A) > 0$ postoji $K \in K(X)$ tako da je $\inf_{\|x\|=1} \|(A + K)x\| > 0$. Prema tome $A + K \in \Phi_+(X)$ i $\alpha(A + K) = 0$. Odavde sledi da je $i(A + K) \leq 0$, odnosno $i(A) \leq 0$
Ovim je lema dokazana.

LEMA 3. Neka je $A \in B(X)$. Tada je

(i) $\lambda \in \sigma_{ea}(A)$ ako i samo ako je $\ell(A - \lambda) = 0$.

(ii) $\sigma_{ea}(A) \neq \emptyset$.

DOKAZ: (i) sledi iz definicije funkcije ℓ, aproksimativnog tačkastog spektra i esencijalnog aproksimativnog tačkastog spektra operatora A. (ii) sledi iz (i), Leme 2 i činjenice da je $\dim X = \infty$ (ako je $\sigma_{ea}(A) = \emptyset$, tada iz (i) i Leme 2 sledi da je $\sigma_{e\alpha}(A) = \emptyset$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\dim X = \infty$). Ovim je lema dokazana.

TEOREMA 1. Neka je $A \in B(X)$. Tada $\lambda \notin \sigma_{ea}(A)$ ako i samo ako $A - \lambda \in \Phi_+(X)$ i $i(A - \lambda) \leq 0$.

DOKAZ: Na osnovu Leme 2 i Leme 3(i).

Iz Teoreme 1, vidimo da je

$$\sigma_{ea}(A) = \sigma_{e\alpha}(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \in \Phi_+(X) \text{ i } i(A - \lambda) > 0\}. \quad (33)$$

TEOREMA 2. Neka je $A \in B(X)$. Tada je

(i) $\sigma_{e\alpha}(A) \subset \sigma_{ea}(A) \subset \sigma_{em}(A)$,

(ii) $\partial\sigma_{em}(A) \subset \partial\sigma_{ea}(A) \subset \partial\sigma_{e\alpha}(A)$.

DOKAZ: (i) sledi iz (33) i definicije skupa $\sigma_{ea}(A)$. Iz (i) i činjenice da je $\{ A \in B(X) : A \in \Phi_+(X) \text{ i } i(A) > 0\}$ otvoren podskup u $B(X)$, sledi da je $\partial\sigma_{ea}(A) \subset \partial\sigma_{e\alpha}(A)$. Na osnovu Teoreme 3. 1, (33) i (i) sledi da je $\partial\sigma_{em}(A) \subset \partial\sigma_{ea}(A)$. Ovim je dokaz teoreme završen.

Iz Teoreme 2 vidimo da se $\sigma_{ea}(A)$ dobija popunjavanjem izvesnih rupa u $\sigma_{e\alpha}(A)$, a da se $\sigma_{em}(A)$ dobija popunjavanjem izvesnih rupa u $\sigma_{ea}(A)$.

PRIMER 1. Neka je A ograničen samokonjugovan operator na Hilbertovom prostoru. Tada je $\sigma_{e\alpha}(A) = \sigma_{ea}(A) = \sigma_{em}(A)$.

DOKAZ: Sledi na osnovu Teoreme 2 i činjenice da je $\sigma(A)$ realan.

PRIMER 2. Neka je U operator jednostranog pomeranja. Tada je $\sigma_{ea}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \equiv C$.

DOKAZ: Iz ([38], Solution 67) sledi da je $\sigma_a(U) = C$. Prema tome $\sigma_{ea}(U) \subset C$. Kako je $\sigma_{em}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ (Primer 1. 2), sledi da je $C \subset \sigma_{ea}(U)$ (Teorema 2(ii)).

PRIMER 3. Neka je U operator jednostranog pomeranja. Tada je $\sigma_{ea}(U^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} \equiv D$.

DOKAZ: Kako je $\sigma_{em}(U^*) = D$ ([11], Example 1. 2 and Corollary 2. 6), sledi da je $\sigma_{ea}(U^*) \supset C$ (Teorema 2(ii)). Za svako $|\lambda| < 1$, na osnovu Primera 1. 2, $U^* - \lambda$ je Fredholmov operator i $i(U^* - \lambda) = 1$ (sledi iz činjenice da je $i(U^*) = 1$). Prema tome, na osnovu Teoreme 1 imamo da je $\sigma_{ea}(U^*) \supset D \setminus C$.

LEMA 4. Operator $A \in B(X)$ je Rieszov operator ako i samo ako je $\sigma_{ea}(A) = \{0\}$.

DOKAZ: Neka je A Rieszov operator. Tada $\sigma_{ew}(A) = \{0\}$ (Posledica 1. 3. 1), $\sigma_{em}(A) = \{0\}$ (Teorema 3. 1), i $\sigma_{ea}(A) = \{0\}$. Obrnuto, pretpostavimo da je $\sigma_{ea}(A) = \{0\}$. Tada je $\sigma_{em}(A) = \{0\}$ (Teorema 2), i prema tome je $\sigma_{ew}(A) = \{0\}$. Ponovo, primenom Posledice 1. 3. 1 sledi da je A Rieszov operator. Čime je lema dokazana.

Označimo sa

$$\Phi_+^-(X) = \{A \in B(X) : A \in \Phi_+(X) \text{ i } i(A) \leq 0\}.$$

Primetimo da je $\Phi_+^-(X)$ otvorena multiplikativna semi grupa u $B(X)$, i da je $\lambda\Phi_+^-(X) \subset \Phi_+^-(X)$ za svako $\lambda \neq 0$.

TEOREMA 3. Operator $E \in B(X)$ zadovoljava uslov

$$\sigma_{ea}(A + E) = \sigma_{ea}(A), \tag{34}$$

za svako $A \in B(X)$ ako i samo ako $E \in P(\Phi_+^-(X))$.

DOKAZ: Ako $E \in P(\Phi_+^-(X))$ i $\lambda \notin \sigma_{ea}(A)$, tada $A - \lambda \in \Phi_+^-(X)$ (Teorema 1), i prema tome $A + E - \lambda \in \Phi_+^-(X)$. Ponovo, na osnovu Teoreme 1 $\lambda \notin \sigma_{ea}(A + E)$. Ovim smo pokazali da je $\sigma_{ea}(A + E) \subset \sigma_{ea}(A)$. Kako dobijena inkluzija važi za svako $A \in B(X)$ i svako $E \in P(\Phi_+^-(X))$, imamo da je $\sigma_{ea}(A) = \sigma_{ea}(A + E + (-E)) \subset \sigma_{ea}(A + E)$. Obrnuto, ako je ispunjen uslov (34) i $A \in \Phi_+^-(X)$, tada je $A + E \in \Phi_+^-(X)$. Prema tome $E \in P(\Phi_+^-(X))$, čime je dokaz teoreme završen.

TEOREMA 4. $$P(\Phi_+^-(X)) = P(\Phi_+(X)). \tag{35}$$

DOKAZ: $\Phi_+^-(X)$ je otvoren podskup u $B(X)$ i $\Phi_+^-(X) \subset \Phi_+(X)$. Kako $\Phi_+(X)$ ne sadrži ni jednu rubnu tačku skupa $\Phi_+^-(X)$, na osnovu Leme 2. 2. 2 imamo da je

$$P(\Phi_+(X)) \subset P(\Phi_+^-(X)).$$

Da bi dokazali (35), potrebno je još dokazati inkluziju u drugom smeru. Sa $G(X)$ označimo skup svih invertibilnih elemenata u $B(X)$. Tada je $G(X)\Phi_+^-(X) \subset \Phi_+^-(X)$, $\Phi_+^-(X)G(X) \subset \Phi_+^-(X)$ i na osnovu Leme 2. 2. 3 sledi da je $P(\Phi_+^-(X))$ dvostrani ideal. Iz Leme 4 i Teoreme 3 sledi da se ideal $P(\Phi_+^-(X))$ sadrži u skupu Rieszovih operatora. Prema tome, na osnovu Leme 2. 5. 1 i Teoreme 2. 5. 3 imamo da je

$$P(\Phi_+^-(X)) \subset P(\Phi(X)). \tag{36}$$

Pretpostavimo da $A \in \Phi_+(X)$ i $E \in P(\Phi_+^-(X))$. Ako je $A \in \Phi_+^-(X)$, tada je $A + E \in \Phi_+^-(X)$. Prema tome $A + E \in \Phi_+(X)$ i $E \in P(\Phi_+(X))$. Ako je $A \in \Phi_+(X) \setminus \Phi_+^-(X)$, tada na osnovu Teoreme 1 imamo da je $A \in \Phi_+(X)$ i $i(A) > 0$. Ovim smo pokazali da je $A \in \Phi(X)$, i zbog (36) $A + E \in \Phi(X)$. Prema tome $A + E \in \Phi_+(X)$ i $E \in P(\Phi_+(X))$, čime je teorema dokazana.

TEOREMA 5. Neka je $A \in B(X)$ i p polinom. Tada je

$$\sigma_{ea}(p(A)) \subset p\{\sigma_{ea}(A)\}. \tag{37}$$

DOKAZ: Možemo pretpostaviti da p nije konstanta. Neka $\lambda \notin p\{\sigma_{ea}(A)\}$. Zapisavši

$$p(\mu) - \lambda = c(\mu - \mu_1)\ldots(\mu - \mu_n),$$

imamo

$$p(A) - \lambda = c(A - \mu_1)\ldots(A - \mu_n). \tag{38}$$

Za svako j, $p(\mu_j) = \lambda \notin p\{\sigma_{ea}(A)\}$; prema tome $\mu_j \notin \sigma_{ea}(A)$, tj. $A - \mu_j \in \Phi_+^-(X)$ (Teorema 1). Tada, iz (38) sledi $p(A) - \lambda \in \Phi_+^-(X)$, tj. $\lambda \notin \sigma_{ea}(p(A))$ (Teorema 1). Ovim je teorema dokazana.

Sledeći primer pokazuje da inkluzija (37) može biti prava.

PRIMER 4. Neka je $A = U^* \oplus (U + 2)$, gde je U operator jednostavnog pomeranja, i neka je $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. Tada $0 \in p\{\sigma_{ea}(A)\}$ i $0 \notin \sigma_{ea}(p(A))$.

DOKAZ: $p(A) = A(A - 2) = (U^* \oplus (U + 2))((U^* - 2) \oplus U)$; kako je U^* Fredholmov operator sa indeksom 1, i kako su $U + 2$ i $U^* - 2$ invertibilni operatori, sledi da su A i $A - 2$ Fredholmovi operatori sa indeksima 1 i -1, respektivno. Prema tome, na osnovu Teoreme 1. 2. 3, $p(A)$ je Fredholmov operator sa indeksom 0, i $0 \notin \sigma_{ea}(p(A))$ (Teorema 1). Kako je A Fredholmov operator sa indeksom 1, iz (33) sledi da $0 \in \sigma_{ea}(A)$. Ovo pokazuje da je $0 = p(0) \in p\{\sigma_{ea}(A)\}$, čime je dokaz završen.

Ako je A ograničen samokonjugovan operator na Hilbertovom prostoru H, tada je $\sigma_{em}(A) = \sigma_{ea}(A)$ (Primer 1). Osim toga $\sigma(A) = \sigma_a(A)$, i na osnovu Teoreme 3. 2 i (30) imamo da je

$$\sigma_{ea}(A) = \sigma_a(A) \setminus \pi_\infty(A). \tag{38}$$

Moglo bi se postaviti pitanje koji sve operatori zadovoljavaju relaciju (38)? Sa tim u vezi je sledeća

DEFINICIJA 2. Neka je X Banachov prostor i $A \in B(X)$. Operator A zadovoljava a-Weylievu teoremu ako je

$$\sigma_{ea}(A) = \sigma_a(A) \setminus \pi^a_\infty(A), \tag{39}$$

gde $\pi^a_\infty(A)$ označava skup sopstvenih vrednosti operatora A konačne višestrukosti i te sopstvene vrednosti su izolovane tačke u $\sigma_a(A)$ (tj. $\lambda \in \pi^a_\infty(A)$ ako je $0 < \alpha(A-\lambda) < \infty$ i λ je izolovana tačka u $\sigma_a(A)$).

Relacija (39) razlikuje se od relacije (38), jer je u opštem slučaju $\pi_\infty(A) \subset \pi^a_\infty(A)$. Ako je A samokonjugovan operator, tada je $\pi_\infty(A) = \pi^a_\infty(A)$, i operator A zadovoljava relaciju (39). Ova činjenica navela nas je na ispitivanje šire klase operatora koji zadovoljavaju uslov (39).

PRIMER 5. Neka je $A \in B(X)$ kompaktan operator sa beskonačnim spektrom. Tada je $\sigma_{ea}(A) = \{0\}$, $\pi^a_\infty(A) = \sigma(A) \setminus \{0\}$, $\sigma_a(A) = \sigma(A)$ i operator A zadovoljava a-Weylievu teoremu.

PRIMER 6. Neka je T operator sa škrtim spektrom, razmatran u ([10], Example 1). Tada je $\sigma_{em}(T) = \sigma(T) = \pi_\infty(T) = \{0\}$ ([10], Example 1), i operator T ne zadovoljava Weylievu teoremu. Kako je $\sigma_{ea}(T) = \sigma_a(T) = \pi^a_\infty(T) = \{0\}$, operator T ne zadovoljava ni a-Weylievu teoremu.

DEFINICIJA 3. ([21]) Neka je H Hilbertov prostor. Operator $A \in B(H)$ je hiponormalan ako je $A^*A \geq AA^*$.

TEOREMA 6. Neka je H Hilbertov prostor i $A \in B(H)$. Ako je A^* hiponormalan operator, tada operator A zadovoljava a-Weylievu teoremu.

DOKAZ: Neka je $\lambda \in \sigma_a(A)$. Ako $\lambda \notin \sigma_{ea}(A)$, tada $A - \lambda \in \Phi_+(H)$ i

$i(A-\lambda)\leq 0$ (Teorema 1). Prema tome $0<\alpha(A-\lambda)<\infty$. Kako je operator $(A-\lambda)^*$ hiponormalan ([91], XI. Lemma 5. 3), imamo da je $N((A-\lambda)^*)\subset N(A-\lambda)$, odnosno $\alpha((A-\lambda)^*)\leq\alpha(A-\lambda)$. Kako je $\beta(A-\lambda)=\alpha((A-\lambda)^*)$ (Teorema 1. 2. 5), vidimo da je $i(A-\lambda)=\alpha(A-\lambda)-\beta(A-\lambda)\geq 0$. Prema tome $i(A-\lambda)=0$, i $i((A-\lambda)^*)=0$ (Teorema 1. 2. 5). Na osnovu ([21], Theorem (3. 1)) $\bar{\lambda}$ je izolovana tačka u $\sigma(A^*)$, odakle sledi da je λ izolovana tačka u $\sigma(A)$. Prema tome $\lambda\in\pi^a_\infty(A)$. Ovim smo pokazali da je $\sigma_a(A)\setminus\pi^a_\infty(A)\subset\sigma_{ea}(A)$. Pokažimo sada obrnutu inkluziju. Pretpostavimo da je $\lambda_0\in\sigma_{ea}(A)$. Ako je $\lambda_0\in\pi^a_\infty(A)$, tada je $0<\alpha(A-\lambda_0)<\infty$ i postoji $\delta>0$ tako da $\lambda\notin\sigma_a(A)$ za svako λ koje zadovoljava uslov $0<|\lambda-\lambda_0|<\delta$. Prema tome $\alpha(A-\lambda)=0$, i kako je $(A-\lambda)^*$ hiponormalan operator ([91], XI. Lemma 5. 3), sledi $\alpha((A-\lambda)^*)=0$. Prema tome $A-\lambda$ je invertibilan operator i λ_0 je izolovana tačka u $\sigma(A)$, odakle sledi da je 0 izolovana tačka u $\sigma((A-\lambda_0)^*)$. Kako je $(A-\lambda_0)^*$ hiponormalan operator i $0<\alpha(A-\lambda_0)=\beta((A-\lambda_0)^*)<\infty$, na osnovu ([91], XI. Lemma 5. 5) imamo da je $(A-\lambda_0)^*\in\Phi(H)$ i $i((A-\lambda_0)^*)=0$. Prema tome $\bar{\lambda}_0\notin\sigma_{em}(A^*)$ (Teorema 1. 1) i $\lambda_0\notin\sigma_{em}(A)$ ([11], Corollary 2. 9). Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da $\lambda_0\in\sigma_{ea}(A)$. Prema tome $\lambda_0\in\sigma_a(A)\setminus\pi^a_\infty(A)$, čime je teorema dokazana.

TEOREMA 7. Neka je X Banachov prostor. Operator $A\in B(X)$ zadovoljava a-Weylievu teoremu ako i samo ako

(i) iz $\lambda\in\pi^a_\infty(A)$ sledi $R(A-\lambda)$ je zatvoren skup u X,

(ii) iz $A-\lambda\in\Phi^-_+(X)$ sledi λ nije unutrašnja tačka skupa $\sigma_a(A)$.

DOKAZ: Pretpostavimo da operator A zadovoljava a-Weylievu teoremu i da je $\lambda\in\pi^a_\infty(A)$. Tada $\lambda\notin\sigma_{ea}(A)$ i na osnovu Teoreme 1 $R(A-\lambda)$ je zatvoren skup u X. Ovim je dokazano (i). Da bi dokazali (ii) pretpost avimo da je $A-\lambda\in\Phi^-_+(X)$.

Tada, na osnovu Teoreme 1 imamo $\lambda \notin \sigma_{ea}(A)$; prema tome $\lambda \in (\mathbb{C}\setminus\sigma_a(A)) \cup \pi_\infty^a(A)$. Ovim je pokazano da λ nije unutrašnja tačka skupa $\sigma_a(A)$. Obratno, pretpostavimo da operator A zadovoljava uslove (i) i (ii), i da je $\lambda \in \sigma_a(A)\setminus \sigma_{ea}(A)$. Prema tome $A-\lambda \in \Phi_+^-(X)$ (Teorema 1), i iz (ii) sledi da λ nije unutrašnja tačka skupa $\sigma_a(A)$. Osim toga, kako je $R(A-\lambda)$ zatvoren skup u X imamo da je $0<\alpha(A-\lambda)<\infty$. Na osnovu ([46], IV. Theorem 5. 31) postoji $\delta>0$, tako da je $\alpha(A-z)$ konstanta i $A-z\in\Phi_+^-(X)$ za svako z koje zadovoljava uslov $0<|z-\lambda|<\delta$. Kako λ nije unutrašnja tačka skupa $\sigma_a(A)$, postoji z sa gore pomenutom osobinom tako da je $z\in \mathbb{C}\setminus\sigma_a(A)$. Prema tome $\alpha(A-z)=0$ i gore pomenuta konstanta je 0. Ovim smo pokazali da $\lambda \in \pi_\infty^a(A)$, odakle sledi da je $\sigma_{ea}(A)\supset\sigma_a(A)\setminus\pi_\infty^a(A)$. Dokažimo obrnutu inkluziju. Ako $\lambda\in\sigma_{ea}(A)$ i $\lambda\in\pi_\infty^a(A)$, tada je $0<\alpha(A-\lambda)<\infty$ i zbog (i) $R(A-\lambda)$ je zatvoren skup u X. Prema tome $A-\lambda\in\Phi_+(X)$, i na osnovu Teoreme 1 imamo da je $i(A-\lambda)>0$. Zbog neprekidnosti indeksa (Teorema 1. 2. 4) sledi da je λ unutrašnja tačka skupa $\sigma_a(A)$. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da $\lambda\in\pi_\infty^a(A)$. Prema tome $\sigma_{ea}(A)\subset \sigma_a(A)\setminus\pi_\infty^a(A)$, čime je dokaz teoreme završen.

Glava 4

RIESZOVA TEORIJA U BANACHOVIM ALGEBRAMA

1. Kompaktan elemenat po Freundlichovoj

Proučavanje kompaktnih elemenata u Banachovim algebrama za svoj uzor ima teoriju Riesza-Schaudera za kompaktne operatore u Banachovoj algebri $B(X)$. U literaturi je zabeleženo nekoliko različitih definicija kompaktnog elementa u Banachovoj algebri.

DEFINICIJA 1. ([31], Definition 3. 1 (3. 2)) Neka je A komutativna Banachova algebra. Elemenat $a \in A$ je kompaktan (konačno-dimenzionalan) po Freundlichovoj ako je preslikavanje $x \to ax$, $x \in A$, kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator na A.

Da bi uprostili terminologiju, ako je $a \in A$ kompaktan (konačno-dimenzionalan) elemenat po Freundlichovoj nazivaćemo ga f-kompaktan (f-konačno-dimenzionalan) elemenat. Skup svih f-kompaktnih (f-konačno-dimenzionalnih) elemenata označavamo sa C_f (F_f). 1)

TEOREMA 1. ([31], Theorem 3. 1) Neka je $a \in A$ invertibilan elemenat. Tada a je f-kompaktan elemenat ako i samo ako je A konačno-dimenzionalna algebra.

TEOREMA 2. ([31], Theorem 3. 2) F_f je ideal u A. C_f je zatvoren ideal u A. Osim toga $F_f \subset \overline{F}_f \subset C_f$.

Svaki f-konačno-dimenzionalan elemenat je i f-kompaktan elemenat; obrnuto nije tačno ([31], str. 276)

1) Da bi razlikovali razne vrste kompaktnih elemenata ([31], [100], [101]) uveli smo oznake f-kompaktan, v-kompaktan, k-kompaktan, gde slova f, v i k odgovaraju početnim slovima imena autora respektivno. Analogno postupamo i kod različitih vrsta Rieszovih elemenata ([101], [95], [64]).

TEOREMA 3. ([31], Corollary 3. 1) Ako je $a \in A$ idempotentan i f-kompaktan elemenat, tada je a i f-konačno-dimenzionalan elemenat.

TEOREMA 4. ([31], str. 277) Neka je A beskonačno-dimenzionalna komutativna Banachova algebra. Ako je $a \in A$ f-konačno dimenzionalan-elemenat, tada je elemenat a delilac nule.

U opštem slučaju obrat Teoreme 4 ne važi ([31], str. 277).

TEOREMA 5. ([13], Theorem 2) Neka je $a \in A$ f-kompaktan elemenat. Tada 0 je jedino moguća tačka nagomilavanja skupa $\sigma(a)$. Osim toga, ako je $\lambda \neq 0$ i $\lambda \in \sigma(a)$, tada postoji $u \in A$ tako da je $au = \lambda u$ i $u \neq 0$.

Neka je $a \in A$ f-kompaktan elemenat, $\lambda \neq 0$ i $\lambda \in \sigma(a)$. Označimo sa

$$N_k = \{x \in A : (a - \lambda)^k x = 0\}, \quad R_k = (a - \lambda)^k A.$$

Na osnovu Teoreme 1. 1. 4(3), postoji najmanji prirodan broj v (indeks od λ) tako da je $N_{v+1} = N_v$. Može se pokazati da je $N_k = N_v$ za svako $k \geqslant v$.

TEOREMA 6. (13 , Theorem 3) (i) $A = N_v \oplus R_v$.

(ii) $1 = p + q$, gde su p i q idempotentni i jedinični elementi u podalgebrama N_v i R_v respektivno.

(iii) $(a - \lambda)q$ je invertibilan elemenat u odnosu na podalgebru R_v, tj. postoji $b \in R_v$ tako da je $(a - \lambda)qb = b(a - \lambda)q = q$.

(iv) $(a - \lambda)R_v = R_v$.

(v) v je najmanji prirodan broj tako da je $(a - \lambda)^{v+1}A = (a - \lambda)^v A$.

NAPOMENA 1. U ([13]) je pokazano da se spektralna teorija Riesza-Schaudera za kompaktne operatore u $B(X)$ može dobiti primenom elementarne tehnike Banachovih algebri. Za takve razmatranja od značaja je

TEOREMA 7. ([13], Theorem 1) Neka je $A \in B(X)$ kompaktan operator i sa Y_A označimo centralizator operatora A, tj. $Y_A = \{B \in B(X) : AB = BA\}$. Tada preslikavanje $B \rightarrow AB$, $B \in Y_A$, je kompaktan operator na Y_A.

U ([58], Theorem 5) je konstruisan operator $A \in B(X)$, koji nije kompaktan operator a preslikavanje $B \rightarrow AB$ je kompaktan operator na Y_A. U tom slučaju A je neophodno Rieszov operator ([14], Theorem 2).

2. Kompaktan elemenat po Vali

Neka su E_1, E_2, E_3, E_4 Banachovi prostori i $B(E_i, E_k)$ Banachov prostor ograničenih linearnih operatora sa E_i u E_k ($i, k = 1, 2, 3, 4$). Za operatore $A \in B(E_3, E_4)$, $T \in B(E_2, E_3)$ i $C \in B(E_1, E_2)$ formirajmo kompoziciono preslikavanje $ATC : E_1 \rightarrow E_4$. Neka su A i C fiksirani operatori, a T prolazi skupom $B(E_2, E_3)$. Stavimo $ATC = v(T)$. Tada v je ograničen linearan operator

$$v: B(E_2, E_3) \rightarrow B(E_1, E_4).$$

TEOREMA 1. ([99], Theorem 3, [100], str. 3) Preslikavanje $T \rightarrow v(T) = ATC$, gde je $A \neq 0$ i $C \neq 0$, je kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator ako i samo ako su A i C kompaktni (konačno-dimenzionalni) operatori.

DEFINICIJA 1. ([100]) Neka je A Banachova algebra i $a \in A$. Elemenat a je kompaktan (konačno-dimenzionalan) po Vali ako je preslikavanje $x \rightarrow axa$, $x \in A$, kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator na A.

U Banachovoj algebri $B(X)$ elemenat $B \in B(X)$ je kompaktan (konačno-dimenzionalan) po Vali ako i samo ako je B kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator (Teorema 1).

Da bi uprostili terminologiju, ako je $a \in A$ kompaktan (konačno-dimenzionalan) elemenat po Vali nazivaćemo ga v-kompaktan (v-konačno-dimenzionalan) elemenat. Skup svih v-kompaktnih (v-konačno-dimenzionalnih) elemenata označavamo sa C_v (F_v).

Neka je $a \in A$. Ako je preslikavanje $x \to ax$, $x \in A$, kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator tada je i preslikavanje $x \to axa$, $x \in A$, kompaktan (konačno-dimenzionalan) operator. Prema tome, svaki f-kompaktan (f-konačno-dimenzionalan) elemenat je v-kompaktan (v-konačno-dimenzionalan) elemenat; obrnuto ne važi. Primetimo da ako je $B \in B(X)$ i preslikavanje $T \to BT$, $T \in B(X)$, kompaktan operator na $B(X)$, tada je B nula operator (Teorema 1, u ovom slučaju je $C = I$ identičan operator).

<u>LEMA 1.</u> ([100], Proposition 1) C_v je zatvoren podskup u A

<u>POSLEDICA 1.</u> ([100], str. 4) $F_v \subset \bar{F}_v \subset C_v$.

<u>LEMA 2.</u> ([100], Proposition 2) Ako je $a \in A$ idempotentan i v-kompaktan elemenat, tada je a v-konačno-dimenzionalan elemenat.

<u>LEMA 3.</u> ([100], Proposition 3) Neka je $a \in A$ v-kompaktan (v-konačno-dimenzionalan) elemenat. Tada su au i ua v-kompaktni (v-konačno-dimenzionalni) elementi za svako $u \in A$.

Međutim, u opštem slučaju C_v (F_v) nije ideal ([100], str. 5).

<u>PRIMEDBA 1.</u> Postoje algebre kod kojih je skup C_v (F_v) ideal. Na primer u Banachovoj algebri $B(X)$ je $C_v = K(X)$ ($F_v = F(X)$) ideal. U C -algebrama C_v (F_v) je ideal ([108], Theorem). U semi-prim Banachovim algebrama F_v je ideal ([67], Corollary 3. 5); nije poznato da li je i C_v ideal.

<u>TEOREMA 2.</u> ([107], Theorem 1. 5) Neka je A beskonačno-dimenzionalna Banachova algebra. Ako je $a \in A$ v-konačno-dimenzionalan elemenat tada je a delilac nule.

<u>TEOREMA 3.</u> ([100], Proposition 10) Neka je $a \in A$ v-kompaktan elemenat i $N_k = \{u \in A : au = ua \text{ i } (1 - a)^k u = 0\}$ za $k = 1, 2, \ldots$. Tada postoji prirodan broj p, tako da je $N_k = N_p$ za svako $k \geqslant p$.

TEOREMA 4. ([107], Theorem 1. 6) Neka je $a \in A$ v-kompaktan elemenat. Tada je $\sigma(a)$ najviše prebrojiv skup sa 0 jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Spektar v-konačno-dimenzionalnog elementa je konačan skup.

POSLEDICA 2. ([107], Corollary) Neka je B zatvorena podalgebra u A sa istom jedinicom kao i A. Ako je $a \in B$ v-kompaktan elemenat u B, tada je $\sigma_B(a) = \sigma(a)$.

TEOREMA 5. Neka je A beskonačno-dimenzionalna Banachova algebra, $a \in A$ v-kompaktan elemenat, $\lambda \neq 0$ i $\lambda \in \sigma(a)$. Ako je $p_\lambda(a)$ spektralna projekcija koja odgovara tački λ i a, tada je $p_\lambda(a)$ v-konačno-dimenzionalan elemenat.

DOKAZ: Ako $p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$ posmatramo kao Banachovu algebru sa jedinicom $p_\lambda(a)$, tada je $\sigma_{p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)}(ap_\lambda(a)) = \{\lambda\}$ ([18], I. §4. 11. (25)). Prema tome $ap_\lambda(a)$ je invertibilan elemenat u $p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$ i postoji $b \in p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$, tako da je $p_\lambda(a) = ap_\lambda(a)b$. Kako je a v-kompaktan elemenat , to je i $p_\lambda(a)$ v-kompaktan elemenat (Lema 3). Osim toga, kako je $p_\lambda(a)$ idempotentan elemenat sledi da je $p_\lambda(a)$ v-konačno-dimenzionalan elemenat (Lema 2). Ovim je teorema dokazana.

PRIMEDBA 2. Moglo bi se postaviti pitanje kakve osobine ima preslikavanje v iz Teoreme 1, ako A i C nisu kompaktni operatori? Ukoliko su A i C Rieszovi operatori, moramo zahtevati da je $E_1 = E_2$ i $E_3 = E_4$.

TEOREMA 6. ([3], Theorem 2) Neka je ${}_1T_2$ operator definisan u Teoremi 3. 2. 4. Tada

(i) ${}_1T_2$ je kvazi-nilpotentan operator ako i samo ako je T_1 ili T_2 kvazi-nilpotentan operator.

(ii) Ako je ${}_1T_2$ Rieszov operator i nije kvazi-nilpotentan operator, tada su T_1 i T_2 Rieszovi operatori.

Koristeći rezultate Teoreme 6 i Posledice 3. 2. 2, J. C. Alexander ([3]) je uopštio pojam Rieszovih operatora ispitujući u proizvoljnoj Banachovoj algebri A elemente $a \in A$ za koje je preslikavanje $x \to axa$, $x \in A$, Rieszov operator. Pokušali smo da slična razmatranja primenimo na druge operatore. Kako je $K(X) \subset S(X) \subset R(X)$ (Teorema 2. 5. 3), moglo se očekivati da ako su A i C strogo-singularni operatori važi „analogni" rezultat za preslikavanje v iz Teoreme 1. Međutim, sledeće tvrđenje nije tačno: operatori A i C su srogo-singularni ako i samo ako je $T \to v(T) = ATC$, $T \in B(E_2, E_3)$, strogo-singularan operator. Ako bi pretpostavili da je pomenuto tvrđenje tačno, tada na isti način, kao što se pokazuje kod kompaktnih operatora ([13], Example 1), odnosno kod Rieszovih operatora ([3], str. 231), pokazali bi da je operator A strogo-singularan ako i samo ako je operator A^* strogo-singularan, a ovo nije tačno ([35], str. 92). Prema tome, (za nas) ostaje i dalje problem kako definisati strogo-singularan elemenat u proizvoljnoj Banachovoj algebri, tako da u Banachovoj algebri B(X) strogo-singularan elemenat je strogo-singularan operator.

3. Kompaktan elemenat po Veseliću

DEFINICIJA 1. ([95], str. 145) Neka je A Banachova algebra. Elemenat $a \in A$ je algebarski elemenat ako postoji ne-nula kompleksan polinom $p(z)$, tako da je $p(a) = 0$.

Može se pokazati da je ova definicija ekvivalentna sa uslovom $\dim A(a) < \infty$, gde $A(a)$ označava algebru generisanu sa a.

DEFINICIJA 2. ([101], Definition 3) Elemenat $a \in A$ je konačno-dimenzionalan (degenerisan) po Veseliću ako je ba algebarski elemenat za svako $b \in A$.

Da bi uprostili terminologiju, ako je $a \in A$ konačno-dimenzionalan elemenat po Veseliću kazaćemo da je a k-konačno-dimenzionalan elemenat.[1)] Skup svih k-konačno-dimenzionalnih elemenata označavamo sa F_k.

1) Uzeli smo oznaku k-konačno-dimenzionalan elemenat zbog imena Krešimir Veselić; obično se koristi termin konačno-dimenzionalan (konačan) elemenat a ne degenerisan elemenat.

TEOREMA 1. ([101], Theorem 4) F_k je dvo-strani ideal u A.

POSLEDICA 1. ([101], Corollary 5) Neka je $a \in A$. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) Aa se sastoji od algebarskih elemenata,

(ii) aA se sastoji od algebarskih elemenata,

(iii) AaA se sastoji od algebarskih elemenata.

U Banachovoj algebri B(X) skup svih k-konačno-dimenzionalnih elemenata jeste ideal konačno-dimenzionalnih operatora F(X) ([48], str. 292); ovo se može pokazati i na osnovu Teoreme 5. 1, jer je B(X) poluprosta Banachova algebra ([77], str. 278), cokla (Definicija 5. 1) u B(X) je ideal F(X) ([77], str. 278) i F_k je najveći ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata (Teorema 1 i Posledica 1).

TEOREMA 2. ([101], Theorem 6) Ako je $a \in A$ v-konačno-dimenzionalan elemenat, tada je a k-konačnodimenzionalan elemenat.

Obrat Teoreme 2 ne važi ([101], Example 7).

LEMA 1. ([101], Proposition 9) Neka je $a \in A$ idempotentan elemenat. Tada a je k-konačno-dimenzionalan elemenat ako i samo ako axa generiše konačno-dimenzionalnu algebru za svako $x \in A$.

DEFINICIJA 3. ([95], str. 146) Neka je $a \in A$ i $R_\lambda(a): \lambda \to (\lambda - a)^{-1}, \lambda \in \rho(a)$, rezolventna funkcija elementa a. Tačka $\lambda_0 \in \sigma(a)$ je pol za a ako je λ_0 pol rezolventne funkcije $R_\lambda(a)$.

LEMA 2. ([18], str. 64) Neka je $a \in A$ i λ_0 izolovana tačka u $\sigma(a)$.[1)] Ako je $P_{\lambda_0}(a)$ spektralna projekcija koja odgovara tački λ_0 i a, i m prirodan broj, tada tačka λ_0 je pol reda m rezolventne funkcije $R_\lambda(a)$ ako i samo ako je

$$(a - \lambda_0)^{m-1} P_{\lambda_0}(a) \neq 0, \quad (a - \lambda_0)^m P_{\lambda_0}(a) = 0.$$

1) Podrazumevamo da $\lambda_0 \in \sigma(a)$ i izolovana je tačka skupa $\sigma(a)$.

Iz Definicije 3 i Leme 2, vidimo da je tačka λ pol za $a \in A$ ako i samo ako je λ izolovana tačka u $\sigma(a)$ i $(a - \lambda)p_{\lambda}(a)$ je nilpotentan elemenat.

DEFINICIJA 4. ([101], Definition 10) Elemenat $a \in A$ je Rieszov elemenat po Veseliću (nazivaćemo ga k-Rieszov elemenat) ako je svaka ne nula tačka iz $\sigma(a)$ pol za a i spektralna projekcija koja odgovara toj tački i a jeste k-konačno-dimenzionalan elemenat.

Primetimo da u Banachovoj algebri $B(X)$ elemenat $B \in B(X)$ je k-Rieszov elemenat ako i samo ako je B Rieszov operator.

TEOREMA 3. ([101], Proposition 11) Svaki k-konačno-dimenzionalan elemenat je k-Rieszov elemenat.

DEFINICIJA 5. ([101], Definition 16) Elemenat $a \in A$ je kompaktan elemenat po Veseliću (nazivaćemo ga k-kompaktan elemenat) ako se ideal Aa sastoji od k-Rieszovih elemenata.

Skup svih k-kompaktnih elemenata iz A označavamo sa C_k.

TEOREMA 4. ([101], Theorem 18) C_k je zatvoren dvo-strani ideal u A. Osim toga, $F_k \subset \overline{F}_k \subset C_k$.

POSLEDICA 2. ([101], Corollary 19) Neka je $a \in A$. Sledeći uslovi su ekvivalentni

(i) Aa se sastoji od k-Rieszovih elemenata,

(ii) aA se sastoji od k-Rieszovih elemenata,

(iii) AaA se sastoji od k-Rieszovih elemenata.

Iz Definicije 5, Teoreme 4, Posledice 2 i Leme 2.5.1 sledi da u Banachovoj algebri $B(X)$ skup svih k-kompaktnih elemenata jeste ideal neesencijalnih operatora $I(X)$.

LEMA 3. ([101], str. 302) Ako je $a \in A$ idempotentan i k-kompaktan elemenat, tada je a k-konačno-dimenzionalan elemenat.

TEOREMA 5. ([101], Theorem 17) Neka je $a \in A$ v-kompaktan elemenat. Tada je a k-kompaktan elemenat.

Obrat Teoreme 5 ne važi ([101], Example 7).

TEOREMA 6. Elemenat $a \in A$ je k-Rieszov elemenat ako i samo ako je $\pi(a)$ kvazi-nilpotentan elemenat u kvocijent algebri $A/\overline{F}_k$, gde je π prirodno preslikavanje sa A na $A/\overline{F}_k$.

DOKAZ: Na osnovu Teoreme 6. 6.

DEFINICIJA 6. ([101], str. 304) Esencijalni spektar elementa $a \in A$ (po Veseliću), označava se sa $\sigma_{ess}(a)$, definisan je sa

$$\sigma_{ess}(a) = \sigma(a) \setminus \{\lambda \in \sigma(a) : \lambda \text{ je pol za } a, \text{ i spektralna projekcija koja odgovara tački } \lambda \text{ i } a \text{ je k-konačno-dimenzionalan elemenat}\}.$$

Primetimo da u Banachovoj algebri $B(X)$, esencijalni spektar elementa $B \in B(X)$ (po Veseliću) jeste Browderov esencijalni spektar **operatora** B.

TEOREMA 7. ([101], Theorem 23) Neka je $a \in A$. Tada, za svaki k-kompaktan elemenat c, koji komutira sa a, imamo

$$\sigma_{ess}(a + c) = \sigma_{ess}(a).$$

Šta više

$$\sigma_{ess}(a) = \bigcap_{\substack{c \in C_k \\ ac=ca}} \sigma(a + c).$$

4. Polinomski kompaktni elementi u Banachovim algebrama

U prethodnim odeljcima izložili smo neke rezultate za Banachove algebre koji predstavljaju uopštenje teorije Riesza-Schaudera za kompaktne operatore u $B(X)$. U ovom odeljku daćemo abstraktno tretiranje polinomski kompaktnih operatora (Definicija 1), tj. u Banachovim algebrama ispitivaćemo polinomski kompaktne elemente (Definicija 3). Navedimo prvo neke rezultate za operatore.

DEFINICIJA 1. ([32], str. 128) Operator $B \in B(X)$ je polinomski kompaktan operator ako postoji ne nula kompleksan polinom $p(z)$, tako da je $p(B)$ kompaktan operator.

Za polinomski kompaktan operator B postoji ne nula polinom

$p(z)$ najmanjeg stepena, tako da je $p(B)$ kompaktan operator. Šta više, polinom $p(z)$ može se jednoznačno odrediti ako se zahteva da njegov najstariji koeficijenat ima određenu fiksiranu vrednost.

DEFINICIJA 2. ([32], Definition) Za polinomski kompaktan operator $B \in B(X)$, ne nula polinom $p(z)$, najmanjeg stepena i sa najstarijim koeficijentom 1, tako da je $p(B)$ kompaktan operator naziva se minimalni polinom operatora B.

Naše proučavanje polinomski kompaktnih elemenata je u vezi sa sledećom strukturnom teoremom za polinomski kompaktne operatore.

TEOREMA 1. ([32], Theorem 1) Neka je $B \in B(X)$ polinomski kompaktan operator sa minimalnim polinomom $p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \ldots (z - \lambda_k)^{m_k}$. Tada Banachov prostor X razlaže se u direktnu sumu $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$ i $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k$, gde je B_i restrikcija operatora B na X_i. Operator $(B_i - \lambda_i I_i)^{n_i}$ je kompaktan operator za svako $i = 1, \ldots k$. $\sigma(B)$ je najviše prebrojiv skup i jedino moguće tačke nagomilavanja toga skupa su nule polinoma $p(z)$, tj. tačke $\lambda_1, \ldots \lambda_k$. Ako je $\lambda \in \sigma(B)$ i $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots k$, tada λ je sopstvena vrednost operatora B sa konačnom algebarskom višestrukošću. Za svako $i = 1, \ldots k$, λ_i je tačka nagomilavanja skupa sopstvenih vrednosti operatora B, ili je $(B_i - \lambda_i I_i)$ kvazi-nilpotentan operator na beskonačno-dimenzionalnom prostoru X_i.

Dokaz Teoreme 1 daćemo na kraju odeljka, kao posledicu sledećih razmatranja.

Moglo bi se postaviti pitanje kako u Banachovim algebrama (gde već imamo nekoliko definicija kompaktnog elementa) izgleda Teorema 1? Sa tim u vezi je

DEFINICIJA 3. Neka je A beskonačno-dimenzionalna Banachova sa jedinicom $1 \neq 0$. Elemenat $a \in A$ je f, v, k-polinomski kompaktan elemenat ako postoji ne nula kompleksan polinom $p(z)$, tako da je $p(a)$ f, v, k-kompaktan elemenat respektivno.

DEFINICIJA 4. Za f, v, k-polinomski kompaktan elemenat $a \in A$, ne nula kompleksan polinom $p(z)$, najmanjeg stepena i sa najstarijim koeficijentom 1, tako da je $p(a)$ f, v, k-kompaktan elemenat naziva se f, v, k-minimalni polinom elementa a respektivno.

Primetimo da su f i k-minimalni polinomi elementa a jednoznačno određeni(C_f i C_k su ideali u A), a da u opštem slučaju v-minimalni polinom elementa a nije jednoznačno određen (u opštem slučaju C_v nije ideal u A).

TEOREMA 2. Neka je A beskonačno-dimenzionalna komutativna Banachova algebra, $a \in A$ f-polinomski kompaktan elemenat i $p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \ldots (z - \lambda_k)^{n_k}$ f-minimalni polinom elementa a. Tada

(i) $\sigma(a)$ je najviše prebrojiv skup, $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \ldots k$, i jedino moguće tačke nagomilavanja skupa $\sigma(a)$ su nule polinoma $p(z)$, tj. tačke $\lambda_1, \ldots \lambda_k$.

(ii) Ako je $\lambda \in \sigma(a)$ i $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots k$, tada spektralna projekcija $p_\lambda(a)$ koja odgovara tački λ i a jeste f-konačno-dimenzionalan elemenat.

(iii) Ako je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$, tada spektralna projekcija $p_{\lambda_i}(a)$ koja odgovara tački λ_i i a nije f-konačno-dimenzionalan elemenat. $(a - \lambda_i)p_{\lambda_i}(a)$ je kvazi-nilpotentan elemenat.

(iv) Postoji idempotentan elemenat $e_i \in A$, $i = 1, \ldots k$, tako da je $a = \sum_{i=1}^{k} a_i$, gde je $a_i = ae_i$, i $(a_i - \lambda_i e_i)^{n_i}$ je f-kompaktan elemenat.

DOKAZ: (i) Kako je $p(a)$ f-kompaktan elemenat, na osnovu Teoreme 1. 5, sledi da je $\sigma(p(a))$ najviše prebrojiv skup sa 0 jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Prema tome, kako je na osnovu teoreme o preslikavanju spektra $\sigma(p(a)) = p\{\sigma(a)\}$, sledi da je $\sigma(a)$ najviše prebrojiv skup i jedino moguće tačke nagomilavanja toga skupa su nule polinoma $p(z)$, tj. tačke $\lambda_1, \dots \lambda_k$. Pokažimo da $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \dots k$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $i \in \{1, \dots, k\}$ tako da $\lambda_i \notin \sigma(a)$. Tada je $(a - \lambda_i)^{-1}p(a)$ f-kompaktan elemenat (Teorema 1. 2). Neka je $q(z) = (z - \lambda_i)^{-1}p(z)$. $q(a)$ je f-kompaktan elemenat i stepen polinoma q je manji od stepena polinoma p. Ovo je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $p(z)$ f-minimalni polinom elementa a. Prema tome $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \dots, k$.

(ii) Pretpostavimo da $\lambda \in \sigma(a)$ i da je $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \dots k$. Iz (i) sledi da je λ izolovana tačka u $\sigma(a)$, i neka je $p_\lambda(a)$ spektralna projekcija koja odgovara tački λ i a. Posmatrajući $p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$ kao Banachovu algebru sa jedinicom $p_\lambda(a)$, na osnovu ([18], I. §4. 11. (25)) imamo da je $\sigma_{p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)}(ap_\lambda(a)) = \{\lambda\}$. Kako je $p(\lambda) \neq 0$, sledi da je $p(a)p_\lambda(a)$ invertibilan elemenat u $p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$, i postoji $b \in p_\lambda(a)Ap_\lambda(a)$ tako da je $p(a)p_\lambda(a)b = p_\lambda(a)$. Na osnovu Teoreme 1. 2 sledi da je $p_\lambda(a)$ f-kompaktan elemenat. Kako je $p_\lambda(a)$ idempotentan elemenat, iz Teoreme 1. 3 sledi da je $p_\lambda(a)$ f-konačno-dimenzionalan elemenat.

(iii) Neka je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$ i $p_{\lambda_i}(a)$ spektralna projekcija koja odgovara tački λ_i i a. Posmatrajući $(1 - p_{\lambda_i}(a))A(1 - p_{\lambda_i}(a))$ kao Banachovu algebru sa jedinicom $1 - p_{\lambda_i}(a)$, na osnovu ([18], I. §4. 11. (25)) imamo da je $\sigma_{(1 - p_{\lambda_i}(a)A(1 - p_{\lambda_i}(a))}(a(1 - p_{\lambda_i}(a)) = \sigma(a)\setminus\{\lambda_i\}$.

Prema tome $a(1 - p_{\lambda_i}(a)) - \lambda_i(1 - p_{\lambda_i}(a))$ je invertibilan elemenat u Banachovoj algebri $(1 - p_{\lambda_i}(a))A(1 - p_{\lambda_i}(a))$ i postoji $c \in (1 - p_{\lambda_i}(a))A(1 - p_{\lambda_i}(a))$ tako da je

$(a(1 - p_{\lambda_i}(a)) - \lambda_i(1 - p_{\lambda_i}(a)))c = 1 - p_{\lambda_i}(a)$. Neka je $q(z) = (z - \lambda_i)^{-1}p(z)$ i $q(a) = q(a)p_{\lambda_i}(a) + q(a)(1 - p_{\lambda_i}(a))$. Kako je $q(a)(1 - p_{\lambda_i}(a)) = cp(a)(1 - p_{\lambda_i}(a))$ f-kompaktan elemenat (Teorema 1. 2), iz f-minimalnosti polinoma p sledi da $p_{\lambda_i}(a)$ nije f-konačno-dimenzionalan elemenat (Teorema 1. 2). Kao u dokazu (ii), zato što je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$, imamo da je $\sigma_{p_{\lambda_i}(a)Ap_{\lambda_i}(a)}(ap_{\lambda_i}(a))$ $= \{\lambda_i\}$, odnosno $\sigma_{p_{\lambda_i}(a)Ap_{\lambda_i}(a)}(ap_{\lambda_i}(a) - \lambda_i p_{\lambda_i}(a)) = \{0\}$, odakle sledi da je $(a - \lambda_i)p_{\lambda_i}(a)$ kvazi-nilpotentan elemenat.

(iv) Konstruišimo otvorene skupove $\{\delta_i\}_{i=1}^{k}$ u $\mathbb{C}$ tako da je

(a) $\lambda_i \in \delta_i$ za svako $i = 1, \ldots, k$,

(b) $\partial\delta_i$ je rektificijabilna Jordanova kriva,

(c) $\bar{\delta}_i \cap \bar{\delta}_j =$ za $i \neq j$,

(d) ako je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$, tada je $\delta_i \cap \sigma(a) = \{\lambda_i\}$ i

(e) $\sigma(a) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \delta_i$.

Neka je e_i spektralna projekcija koja odgovara skupu δ_i i a, tj. $e_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\delta_i}(\lambda - a)^{-1}d\lambda$, i $a_i = ae_i$. Tada je $1 = \sum_{i=1}^{k} e_i$ i $a = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Šta više, $\sigma_{e_iAe_i}(ae_i) = \delta_i \cap \sigma(a)$ ([18], I. §4. 11. (25)), odakle sledi da je $a_i - \lambda_j e_i$ invertibilan elemenat u e_iAe_i za $j \neq i$. Prema tome, za svako $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ i $j \neq i$, postoji $b_{i,j} \in e_iAe_i$ tako da je $(a_i - \lambda_j e_i)b_{i,j} = e_i$. Tada je $(ae_i - \lambda_i e_i)^{n_i} = \prod_{j \neq i} b_{i,j}p(a)e_i$ f-kompaktan elemenat (Teorema 1. 2). Ovim je dokaz teoreme završen.

TEOREMA 3. Neka je A beskonačno-dimenzionalna Banachova algebra, $a \in A$ v-polinomski kompaktan elemenat i $p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \dots (z - \lambda_k)^{n_k}$ v-minimalni polinom elementa a. Tada

(i) $\sigma(a)$ je najviše prebrojiv skup, $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \dots, k$, i jedino moguće tačke nagomilavanja skupa $\sigma(a)$ su nule polinoma $p(z)$, tj. tačke $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

(ii) Ako $\lambda \in \sigma(a)$ i $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \dots, k$, tada spektralna projekcija $p_\lambda(a)$ koja odgovara tački λ i a jeste v-konačno-dimenzionalan elemenat.

(iii) Ako je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$ i ako je skup v-kompaktnih elemenata ideal u A, tada spektralna projekcija $p_{\lambda_i}(a)$ koja odgovara tački λ_i i a nije v-konačno-dimenzionalan elemenat. $(a - \lambda_i)p_{\lambda_i}(a)$ je kvazi-nilpotentan elemenat.

(iv) Postoji idempotentan elemenat $e_i \in A$, $i = 1, \dots, k$, tako da je $a = \sum_{i=1}^{k} a_i$, gde je $a_i = ae_i$, i $(a_i - \lambda_i e_i)^{n_i}$ je v-kompaktan elemenat.

DOKAZ: (i) Kako je $p(a)$ v-kompaktan elemenat, na osnovu Teoreme 2. 4 sledi da je $\sigma(p(a))$ najviše prebrojiv skup sa 0 jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Na isti način kao u Teoremi 2(i) pokazuje se da je $\sigma(a)$ najviše prebrojiv skup i da su jedino moguće tačke nagomilavanja toga skupa nule polinoma $p(z)$. Dokaz da $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \dots, k$, dobija se iz dokaza Teoreme 2(i) ako se umesto f-kompaktan elemenat, f-minimalni polinom, Teorema 1. 2 piše v-kompaktan elemenat, v-minimalni polinom, Lema 2. 3 respektivno.

(ii) Dokaz se dobija iz dokaza Teoreme 2(ii) ako se umesto f-kompaktan elemenat, f-konačno-dimenzionalan elemenat, Teorema 1. 2, Teorema 1. 3 piše v-kompaktan elemenat, v-konačno-dimenzionalan elemenat, Lema 2. 3, Lema 2. 2 respektivno.

(iii) Pretpostavimo da λ_i, $p_{\lambda_i}(a)$, c, q imaju isto značenje kao u dokazu Teoreme 2(iii). $q(a)(1 - p_{\lambda_i}(a)) = cp(a)(1 - p_{\lambda_i}(a))$ je v-kompaktan elemenat (Lema 2. 3), i iz v-minimalnosti polinoma $p(z)$ i pretpostavke da je skup v-kompaktnih elemenata ideal u A sledi da $p_{\lambda_i}(a)$ nije v-konačno-dimenzionalan elemenat. Ostali deo dokaza je isti kao u Teoremi 2(iii).

(iv) Dokaz se dobija iz dokaza Teoreme 2(iv) ako se umesto f-kompaktan elemenat, Teorema 1. 2 pišemo v-kompaktan elemenat, Lema 2, 3 respektivno. Ovim je dokaz teoreme završen.

TEOREMA 4. Neka je A beskonačno-dimenzionalna Banachova algebra, $a \in A$ k-polinomski kompaktan elemenat i $p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \ldots (z - \lambda_k)^{n_k}$ k-minimalni polinom elementa a. Tada

(i) $\sigma(a)$ je najviše prebrojiv skup, $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1, \ldots, k$, i jedino moguće tačke nagomilavanja skupa $\sigma(a)$ su nule polinoma $p(z)$, tj. tačke $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

(ii) Ako $\lambda \in \sigma(a)$ i $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, k$, tada spektralna projekcija $p_\lambda(a)$ koja odgovara tački λ i a jeste k-konačno-dimenzionalan elemenat.

(iii) Ako je λ_i izolovana tačka u $\sigma(a)$, tada spektralna projekcija $p_{\lambda_i}(a)$ koja odgovara tački λ_i i a nije k-konačno-dimenzionalan elemenat. $(a - \lambda_i)p_{\lambda_i}(a)$ je kvazi-nilpotentan elemenat.

(iv) Postoji idempotentan elemenat $e_i \in A$, $i = 1, \ldots, k$, tako da je $a = \sum_{i=1}^{k} a_i$, gde je $a_i = ae_i$, i $(a_i - \lambda_i e_i)^{n_i}$ je k-kompaktan elemenat.

DOKAZ: Kako je $p(a)$ k-kompaktan elemenat, iz Definicije 3. 5 i 3. 4 sledi da je $\sigma(p(a))$ najviše prebrojiv skup sa 0 jedino mogućom tačkom nagomilavanja. Na isti način kao u

Teoremi 2(i) pokazuje se da je $\sigma(a)$ najviše prebrojiv skup i da su jedino moguće tačke nagomilavanja toga skupa nule polinoma $p(z)$. Dokaz da $\lambda_i \in \sigma(a)$ za svako $i = 1,\dots,k$, dobija se iz dokaza Teoreme 2(i) ako se umesto f-kompaktan elemenat, f-minimalni polinom, Teorema 1. 2 piše k-kompaktan elemenat, k-minimalni polinom, Teorema 3. 4 respektivno. Dokaz za (ii), (iii) i (iv) dobija se iz dokaza Teoreme 2 (ii), (iii) i (iv) ako se umesto f-kompaktan elemenat, f-konačno-dimenzionalan elemenat, f-minimalni polinom, Teorema 1. 2, Teorema 1. 3 piše k-kompaktan elemenat, k-konačno-dimenzionalan elemenat, k-minimalni polinom, Teorema 3. 4, Lema 3. 3 respektivno. Ovim je teorema dokaz.

Dokaz Teoreme 1: Polinomski kompaktan operator $B \in B(X)$ sa minimalnim polinomom $p(z)$ je i v-polinomski kompaktan elemenat u Banachovoj algebri $B(X)$ sa v-minimalnim polinomom $p(z)$ (Teorema 2. 1). Osim toga, skup v-kompaktnih elemenata u $B(X)$ je ideal $K(X)$, a skup v-konačno-dimenzionalnih elemenata u $B(X)$ je ideal $F(X)$ (Primedba 2. 1). Kao u dokazu Teoreme 2(iv), za operator B uvedimo spektralne projekcije E_i (koristimo samo velika slova B, E_i umesto malih slova a, e_i respektivno), $i = 1, \dots, k$. Tada je $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$, $B_i = BE_i$, $i = 1, \dots, k$, $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_k$, gde je $X_i = R(E_i)$ za $i = 1, \dots, k$. Dokaz teoreme sledi iz Teoreme 3. Potrebno je još jedino pokazati da je $(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}$ kompaktan operator u $B(X_i)$. Neka je $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ograničen niz u $B(X_i)$, tj. postoji konstanta L tako da je $0 \leqslant L < \infty$ i $\|A_n\|_i \leqslant L$, $n = 1, 2, \dots$, gde je

$$\|A_n\|_i = \sup\{\|A_n(x)\| : x \in X_i \text{ i } \|x\| \leqslant 1\}.$$

Za svako $n = 1, 2, \dots$ označimo sa $A_{n,i} = A_n E_i$. Iz nejednakosti $\|A_{n,i}\| \leqslant L\|E_i\|$, $n = 1, 2, \dots$, sledi da je $\{A_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$ ograničen niz u $B(X)$. Kako je $(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}$ v-kompaktan elemenat u $B(X)$ (Teorema 3(iv)), sledi da niz $\{(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i} A_{m,i}(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}\}_{m=1}^{\infty}$ sadrži konvergentan podniz u $B(X)$.

Iz nejednakosti

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X_i}} \|(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i} A_m (B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}\| \leq$$

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X'}} \|(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i} A_m (B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}\|,$$

sledi da niz $\{(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i} A_m (B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}\}_{m=1}$ sadrži konvergentan podniz u $B(X_i)$. Ovim smo pokazali da je $(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}$ v-kompaktan elemenat u $B(X_i)$. Iz Teoreme 2. 1 sledi da je $(B_i - \lambda_i E_i)^{n_i}$ kompaktan operator na X_i. Ovim je teorema dokazana.

5. Rieszova teorija u poluprostim Banachovim algebrama

Iz Teoreme 1. 2. 2 sledi da je operator $A \in B(X)$ Fredholmov ako i samo ako je invertibilan moduo ideal kompaktnih operatora. Šta više, skup Fredholmovih operatora iz $B(X)$ jednak je skupu svih operatora iz $B(X)$ koji su invertibilni moduo ideal konačno-dimenzionalnih operatora $F(X)$ (Teorema 2. 5. 2). Ideal $F(X)$ je cokla (Definicija 1) u algebri $B(X)$ ([77], str. 278). Ova činjenica je polazna tačka uopštene Fredholmove teorije na prstenovima i algebrama ([8], [9]). Naime, u ovim radovima ispituju se elementi iz prstena A koji su invertibilni moduo cokla i nazivaju se Fredholmovi elementi, zatim se definiše uopšteni indeks na semi grupi Fredholmovih elemenata i pokazuje se da ako je A Banachova algebra, da je uopšteni indeks neprekidna funkcija na skupu Fredholmovih elemenata i td. Izložićemo neke rezultate iz ([64]). Ovaj rad se nadovezuje na gore pomenuta dva rada.

DEFINICIJA 1. ([17], IV.§30. Definition 8) Neka je A Banachova algebra. Ako A sadrži minimalne leve ideale, tada najmanji levi ideal koji sadrži sve minimalne leve ideale naziva se leva cokla u A. Desna cokla definiše se slično preko desnih ideala. Ako A sadrži minimalne leve i desne ideale, i ako se leva cokla poklapa sa desnom coklom, ona se naziva cokla u A i označava se sa soc(A). U ovom slučaju kažemo da cokla postoji.

Ako je A poluprosta Banachova algebra, tada postoji cokl... u A ([17], IV. §30. Proposition 5, §32. Proposition 5).

DEFINICIJA 2. ([64], str. 304) Neka je A poluprosta Banachova algebra. Elemenat $a \in soc(A)$ naziva se b-konačno-dimenzionalan elemenat.[1]

TEOREMA 1 ([95], Theorem 3. 2) Neka je A poluprosta Banachova algebra. soc(A) je najveći ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata u A.-

POSLEDICA 1. Neka je A poluprosta Banachova algebra. Elemenat $a \in A$ je b-konačno-dimenzionalan ako i samo ako je k-konačno-dimenzionalan.

DOKAZ: Skup k-konačno-dimenzionalnih elemenata F_k je najveći ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata (Teorema 3. 1 i Posledica 3. 1). Prema tome, iz Teoreme 1 sledi da je $F_k = soc(A)$.

DEFINICIJA 3. ([64], 3. 1. Definition) Neka je A poluprosta Banachova algebra i $a \in A$. Tačka $\lambda \in \sigma(a)$ je b-Rieszova tačka elementa a ako je λ pol za a i spektralna projekcija $p_\lambda(a)$ koja odgovara tački λ i a jeste b-konačno-dimenzionalan elemenat.

TEOREMA 2. ([64], 3. 5. Theorem) Neka je λ b-Rieszova tačka elementa $a \in A$, i $p_\lambda(a)$ spektralna projekcija koja odgovara tački λ i a. Tada $p_\lambda(a) \in soc(A)$ i $\lambda - a - p_\lambda(a)$ je invertibilan elemenat.

DEFINICIJA 4. ([64], str. 304) Neka je A poluprosta Banachova algebra. Označimo sa $I_A = \pi^{-1}(Rad(A/\overline{soc}(A)))$, gde je π prirodno preslikavanje sa A na $A/\overline{soc}(A)$. I_A je zatvoren ideal u A i naziva se ideal b-neesencijalnih elemenata.

TEOREMA 3. ([64], 3. 9. Theorem) Neka je A poluprosa Banachova algebra, $a \in A$, $c \in I_A$ i $\lambda \in \sigma(a)$. Ako je $ac = ca$ i $\lambda - a - c$ invertibilan elemenat, tada je λ b-Rieszova tačka elementa a.

1) Uveli smo oznaku b-konačno-dimenzionalan elemenat jer je njih prvi proučavao B. Barnes ([8], [9]); isto važi i za b-Rieszovelemenat i b-neesencijalni elemenat.

POSLEDICA 2. ([64], 3. 10. Corollary) Tačka λ je b-Rieszova tačka elementa $a \in A$ ako i samo ako postoji $c \in I_A$ tako da je $ac = ca$ i $\lambda - a - c$ je invertibilan elemenat u A.

DEFINICIJA 5 ([64], str. 320) Neka je A poluprosta Banachova algebra i π prirodno preslikavanje sa A na $A/\overline{soc}(A)$. Elemenat $a \in A$ je b-Rieszov elemenat ako je $\pi(a)$ kvazi-nilpotentan elemenat u kvocijent algebri $A/\overline{soc}(A)$.

TEOREMA 4. ([64], 4. 13(a), (b)) Neka je A poluprosta Banachova algebra. Elemenat $a \in A$ je b-Rieszov elemenat ako i samo ako je svaka ne nula tačka iz $\sigma(a)$ b-Rieszova tačka elementa a.

6. Rieszova teorija u Banachovim algebrama

DEFINICIJA 1. ([95], Definition 3. 3) Neka je A Banachova algebra i F ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata. Ako je $a \in F$ tada se a naziva konačno-dimenzionalan elemenat.

Navedimo neke primere ideala F.

PRIMER 1. ([95], Examples 3. 4(i)) Neka je $A = B(X)$. Tada postoje dva moguća izbora za za F, naime $\{0\}$ i ideal konačno-dimenzionalnih operatora $F(X)$.

PRIMER 2. ([95], Examples 3. 4(ii)) Neka je A poluprosta Banachova algebra i $F = soc(A)$ (Teorema 5. 1). Ovo je razmatrano u prethodnom odeljku.

PRIMER 3. Neka je A Banachova algebra i F najveći ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata (vidi Teoremu 3. 1 i Posledicu 3. 1). Tada je F skup svih k-konačno-dimenzionalnih elemenata u A. Ovo je razmatrano u odeljku 3.

TEOREMA 1. ([95], Theorem 3. 5) Leva cokla u Banachovoj algebri A jeste dvo-strani ideal sadržan u skupu algebarskih elemenata u A.

PRIMER 4. ([95], Examples 3. 4(iii)) Za F se može uzeti leva (desna) cokla u proizvoljnoj Banachovoj algebri A (Teorema 1).

PRIMER 5. ([95], Examples 3. 4(iv)) Neka je $F = \{x \in A : \dim xA < \infty\}$.

PRIMER 6. ([95], Examples 3. 4(v)) Neka je $S = \{u \in A : \dim uAu < \infty\}$ i $F = \{x \in A : \dim xAu < \infty$ za svako $u \in S\}$. F je dvo-strani ideal algebarskih elemenata koji je jednak soc(A) ako je A poluprosta Banachova algebra.

DEFINITION 2. ([95], Definition 4) Neka je M dvo-strani ideal u Banachovoj algebri A i π prirodno preslikavanje sa A na $A/\overline{M}$. Elemenat $a \in A$ je Rieszov elemenat (u odnosu na M) ako je $r(a + \overline{M}) = 0$, gde je $r(a + \overline{M})$ spektralni poluprečnik elementa $\pi(a)$ u kvocijent algebri $A/\overline{M}$. Skup svih Rieszovih elemenata u A označavaćemo sa $\mathcal{R}$. Neka je $I = \pi^{-1}(\mathrm{Rad}(A/\overline{M}))$. Elemenat $a \in I$ je neesencijalni elemenat u A.

Iz Definicije 2 sledi da je I zatvoren dvo-strani ideal u A koji sadrži M. Rieszovi operatori u B(X) su poseban slučaj Rieszovih elemenata; oni se dobijaju za $M = F(X)$ (Teorema 1. 3. 2).

TEOREMA 2. ([95], Theorem 4. 2) Neka je J zatvoren dvo-strani ideal u A, tako da je $M \subset J \subset \mathcal{R}$. Tada je $x \in \mathcal{R} \Leftrightarrow r(x + J) = 0$.

TEOREMA 3. ([95], Theorem 4. 4) I je najveći ideal sadržan u $\mathcal{R}$.

TEOREMA 4. ([95], Theorem 4. 5) Neka je J zatvoren dvo-strani ideal u A. Tada je $J = I \Leftrightarrow M \subset J \subset \mathcal{R}$ i A/J je poluprosta algebra.

TEOREMA 5. ([95], Theorem 4. 6) Neka je $a \in \mathcal{R}$ idempotentan elemenat. Tada je $a \in M$.

DEFINICIJA 3. ([95], Definition 5. 1) Neka je A Banachova algebra, F ideal algebarskih elemenata u A i $x \in A$. Tačka $\lambda \in \sigma(x)$ je konačan pol za x ako je λ izolovana tačka u $\sigma(x)$ i spektralna projekcija koja odgovara tački λ i x jeste elemenat iz F. Označimo sa

$$E\sigma(x) = \{\lambda \in \sigma(x) : \lambda \text{ nije konačan pol za } x\}.$$

$E\sigma(x)$ je esencijalni spektar elementa x (u odnosu na F).

Primetimo da je konačan pol i pol u smislu Definicije 3. 3; jer, na primer ako je 0 konačan pol za x i $p \in F$ spektralna projekcija koja odgovara tački 0 i x, tada je px algebarski elemenat i $\sigma(px) = \{0\}$ ([18], I. §4, 11 (20)). Prema tome px je nilpotentan elemenat, i na osnovu Leme 3. 2 0 je pol za x.

<u>TEOREMA 6.</u> ([95], Theorema 5. 3) $x \in R \Leftrightarrow E\sigma(x) \subset \{0\}$.

Glava 5

DODATAK

1. Kvazi-nilpotentni elementi u Banachovim algebrama

Iz Teoreme 1. 3. 3 vidimo da je operator $B \in B(X)$ Rieszov operator ako i samo ako je $\pi(B)$ kvazi-nilpotentan element u Calkinovoj algebri $C(X)$. Kako zbir (proizvod) dva Rieszova operatorau opštem slučaju nije Rieszov operator, to i zbir (proizvod) dva kvazi-nilpotentna elementa u Banachovoj algebri u opštem slučaju nije kvazi-nilpotentan element. Sa tim u vezi je sledeća

TEOREMA 1.([94], Theorem) Neka je A Banachova algebra i N skup svih kvazi-nilpotentnih elemenata u A. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) iz $x, y \in N$ sledi $x + y \in N$,

(ii) iz $x, y \in N$ sledi $xy \in N$,

(iii) $N = \mathrm{Rad}(A)$.

2. Karakterizacija dvo-stranih ideala u Banachovim algebrama preko spektralnih svojstava njihovih elemenata

TEOREMA 1. ([77], Theorem (2. 3. 2)(i)) Ako A nije radikalna Banachova algebra, tada je Rad(A) jednak preseku svih primitivnih ideala u A

Ako je M podskup u A, sa kh(M) označimo presek svih primitivnih ideala u A koji sadrže skup M. Iz Teoreme 1 sledi da je

$$\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{kh}(\{0\}). \qquad (1)$$

LEMA 1. ([114], Corollary 1) Neka je A Banachova algebra. Elemenat $b \in A$ pripada Rad(A) ako i samo ako je

$$\sigma(a + b) = \sigma(a) \qquad (2)$$

za svako $a \in A$.

Ako je J zatvoren dvo-strani ideal u A, tada je A/J Banachova algebra i $\sigma(a + J) \subset \sigma(a)$ za svako $a \in A$. Osim toga, ako je $b \in J$, tada je

$$\sigma(a + J) \subset \sigma(a + b) \qquad (3)$$

za svako $a \in A$. Ako je za neko $b \in A$ ispunjen uslov (3), tada u opštem slučaju ne sledi da je $b \in J$ ([114]); na primer ako je J nula ideal u nekoj ne nula radikalnoj algebri A, tada je $\sigma(a + J) = \sigma(a + b)$ za svako $b \in A$ (Lema 1), međutim ako je $b \neq 0$ tada $b \notin J$. Ako ideal J u A ima osobinu da ako je ispunjen uslov (3) za neko $b \in A$, sledi da je $b \in J$, tada se za ideal J kaže da ima spektralnu karakterizaciju ([114], str. 2).

TEOREMA 2. ([114], Corollary 2) Neka je J zatvoren dvo-strani ideal u A i $b \in A$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) $\sigma(a + J) \subset \sigma(a + b)$ za svako $a \in A$,

(ii) $r(a + J) \leq r(a + b)$ za svako $a \in A$.

Ovi uslovi su ispunjeni ako i samo ako $b \in kh(J)$. Prema tome, ideal J ima spektralnu karakterizaciju ako i samo ako je $J = kh(J)$.

TEOREMA 3. ([6], 1, 3, Corollaire 5) Neka je J zatvoren dvo-strani ideal u A, tako da je $J = kh(J)$. Ako je $a \in A$ označimo sa

$$w(a) = \bigcap_{b \in J} \sigma(a + b).$$

Elemenat $a \in A$ pripada J ako i samo ako je $w(a + x) = w(x)$ za svako $x \in A$.

3. Spektralni poluprečnik u kvocijent algebrama

Ako je J zatvoren dvo-strani ideal u Banachovoj algebri A, iz (3) sledi da je

$$r(a + J) \leq \inf_{b \in J} r(a + b) \tag{4}$$

za svako $a \in A$.

TEOREMA 1. ([96], Example 3) Neka je X Banachov prostor, $A = B(X)$ i $J = K(X)$. Tada važi jednakost u (4), tj. za svaki operator $B \in B(X)$ imamo da je

$$r(B + K(X)) = \inf_{K \in K(X)} r(B + K).$$

Jednakost u (4) ne važi za svaki ideal J u A ([96], Example 1).

DEFINICIJA 1. ([57]) Banachova algebra A je SR-algebra ako za svaki zatvoren dvo-strani ideal J u A važi jednakost u (4).

TEOREMA 2. ([57], Corollary) C^*-algebra je SR-algebra.

4. Eksponencijalni spektar u Banachovim algebrama

DEFINICIJA 1. ([40]) Neka je A Banachova algebra sa jedinicom $1 \neq 0$. Označimo sa

$$\mathrm{Exp}(A) = \{e^{c_1} e^{c_2} \cdots e^{c_k} : k \in N ; c_1, c_2, \ldots, c_k \in A\}$$

Elemenat $a \in \mathrm{Exp}(A)$ naziva se uopšteni eksponencijal.

Ako je G skup invertibilnih elemenata u A i G_1 povezana komponenta u G koja sadrži 1, tada je $\mathrm{Exp}(A) = G_1$ ([26], 2. 14 Theorem).

DEFINICIJA 2. ([40], Definition 1) Eksponencijalni spektar elementa $a \in A$, označava se sa $\mathcal{E}(a)$, jeste skup

$$\mathcal{E}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin \mathrm{Exp}(A)\}.$$

Iz definicije sledi da je $\sigma(a) \subset \mathcal{E}(a)$; za razliku od esencijalnog spektra koji je podskup spektra.

DEFINICIJA 3. ([40]) Neka je a $\in$ A. Označimo sa

$$\pi(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ je topološki delilac nule u } A\}.$$

$\pi(a)$ je singularni spektar elementa a.

Ako je K kompaktan podskup u $\mathbb{C}$, sa ηK označavamo povezanu ljusku skupa K, tj. ηK je podskup u $\mathbb{C}$ tako da se $\mathbb{C} \setminus \eta K$ sastoji od neograničene komponente skupa K. Ako su K_1 i K_2 kompaktni podskupovi u $\mathbb{C}$ tada ~~iz~~ $\partial K_1 \subset K_2$ sledi $K_1 \subset \eta K_2$ ([40]).

TEOREMA 1. ([40], Theorem 1) Neka je a $\in$ A. $\mathcal{E}(a)$ je kompaktan neprazan podskup u $\mathbb{C}$ i

$$\partial\mathcal{E}(a) \subset \pi(a) \subset \sigma(a) \subset \mathcal{E}(a) \subset \eta\sigma(a).$$

LEMA 1. Neka je B Banachova podalgebra u A sa jedinicom 1. Ako je a $\in$ B, tada je

(i) $\mathcal{E}(a) \subset \mathcal{E}_B(a)$

gde $\mathcal{E}_B(a)$ označava eksponencijalni spektar elementa a u B,

(ii) $\partial\mathcal{E}_B(a) \subset \mathcal{E}(a)$.

DOKAZ: (i) sledi iz činjenice da je Exp(A) $\supset$ Exp(B). Ako je $\lambda \in \partial\mathcal{E}_B(a)$, tada $\lambda \in \sigma_B(a)$ (Teorema 1), odakle sledi da je $\lambda \in \partial\sigma_B(a)$. Prema tome $\lambda \in \sigma(a)$ ([26], 2. 54 Theorem), odnosno $\lambda \in \mathcal{E}(a)$. Ovim je lema dokazana.

Iz Leme 1 sledi da se $\mathcal{E}_B(a)$ dobija popunjavanjem nekih rupa u $\mathcal{E}(a)$.

TEOREMA 2. Neka je b $\in$ A. Tada je

$$\mathcal{E}(a + b) = \mathcal{E}(a) \text{ za svako } a \in A \tag{5}$$

ako i samo ako je b $\in$ Rad(A).

DOKAZ: Pretpostavimo da b $\in$ A i da je ispunjen uslov (5). Ako je a $\in$ Exp(A) = G_1, tada $0 \notin \mathcal{E}(b)$ i prema tome $0 \notin \mathcal{E}(a + b)$, odnosno a + b $\in G_1$. Iz Teoreme 2. 2. 3 sledi da je b $\in$ Rad(A). Da bi dokazali teoremu u drugom smeru, pretpostavimo da je $b \in Rad(A)$, $a \in A$ i $\lambda \notin \mathcal{E}(a)$. Tada $a - \lambda \in G_1$, i ponovo iz Teoreme 2. 2. 3 sledi da je $(a + b) - \lambda \in G_1$. Prema tome $\lambda \notin \mathcal{E}(a + b)$. Ovim smo pokazali da je $\mathcal{E}(a + b) \subset \mathcal{E}(a)$. Iz proizvoljnosti $b \in Rad(A)$ i $a \in A$, sledi da je $\mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(a + b + (-b)) \subset \mathcal{E}(a + b)$, čime je dokaz teoreme završen.

PRIMER 1. ([40]) Neka je H Hilbertov prostor, $C(H) = B(H)/K(H)$, i π prirodno preslikavanje sa $B(H)$ na $C(H)$. Tada je eksponencijalni spektar elementa $B \in B(H)$ jednak spektru operatora B, i eksponencijalni spektar elementa $\pi(B)$ u $C(H)$ je Schechterov esencijalni spektar operatora B.

Za svaki polinom p i svaki elemenat $a \in A$ imamo

$$\mathcal{E}(p(a)) \subset p\{\mathcal{E}(a)\}. \tag{6}$$

([40]). Inkluzija u (6) može biti i prava (Primer 1 i Primer 3. 5. 2), i kaže se da eksponencijalni spektar ne zadovoljava teoremu o spektralnom preslikavanju za polinome, tj. u opštem slučaju nije tačno

$$\mathcal{E}(p(a)) = p\{\mathcal{E}(a)\} \tag{7}$$

za svako $a \in A$ i svaki polinom p.

Moglo bi se postaviti pitanje šta se može reći o eksponencijalnom spektru ukoliko on zadovoljava teoremu o preslikavanju spektra za polinome, tj. uslov (7)? Osim toga, iz Teoreme 1 sledi da se $\mathcal{E}(a)$ dobija iz $\sigma(a)$ popunjavanjem nekih rupa u $\sigma(a)$. Ako je B zatvorena podalgebra u A sa jedinicom 1, tada se i $\sigma_B(a)$ dobija popunjavanjem nekih rupa u $\sigma(a)$. Da li postoji neka veza između $\mathcal{E}(a)$ i $\sigma_B(a)$ kada se svaki od tih skupova dobija popunjavanjem nekih rupa u $\sigma(a)$? Pokazaćemo (Teorema 4) da u izvesnom smislu postoji veza između gore dva pomenuta pitanja.

<u>DEFINICIJA 4.</u> ([17], I. 5. Definition 15) Neka su E, F topološki prostori, i za svako $x \in E$ neka je $\varphi(x)$ podskup u F. Preslikavanje φ je <u>polu-neprekidno odozgo</u> ako i samo ako za svako $x_0 \in E$ i svaku okolinu V skupa $\varphi(x_0)$ postoji okolina U tačke x_0 tako da je $\varphi(x) \in V$ za svako $x \in U$.

LEMA 2. ([17], I, 5. Lemma 16) Neka je E metrički prostor, F kompaktan metrički prostor i φ preslikavanje sa E u zatvorene podskupove skupa F. Preslikavanje φ je polu-neprekidno odozgo ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi: iz $x_n \in E$, $y_n \in \varphi(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ sledi $y \in \varphi(x)$.

LEMA 3. Preslikavanje φ sa A u kompaktne podskupove skupa $\mathbb{C}$ definisano sa $\varphi(a) = \mathcal{E}(a)$, $a \in A$, je polu-neprekidno odozgo.

DOKAZ: Dovoljno je posmatrati $E = \{a \in A : \|a\| \leq L\}$ za $L > 0$, i $F = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq L\}$. Za svako $a \in E$, $\varphi(a) = \mathcal{E}(a)$ je kompaktan podskup u F, i može se primeniti Leme 2. Neka je $a_n \in E$, $\lambda_n \in \mathcal{E}(a_n)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Ako $\lambda \notin \mathcal{E}(a)$, tada je $a - \lambda \in \mathrm{Exp}(A)$. Kako je $a - \lambda = \lim_{n\to\infty}(a_n - \lambda_n)$, $\mathrm{Exp}(A)$ otvoren skup ([26], 2. 14 Theorem), sledi da je $a_n - \lambda_n \in \mathrm{Exp}(A)$ za dovoljno veliko n, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\lambda_n \in \mathcal{E}(a_n)$. Ovim je lema dokazana.

TEOREMA 3. ([16], VI. 23. Theorem 1) Neka je φ preslikavanje sa A u kompaktne podskupove skupa $\mathbb{C}$, tako da je

(i) φ polu-neprekidno odozgo,

(ii) $\sigma(a) \subset \varphi(a)$ $\quad (a \in A)$,

(iii) $\varphi(p(a)) = p(\varphi(a))$ $\quad (a \in A$, p je polinom$)$.

Tada, za svako $a \in A$ imamo da je $\varphi(a) \subset \sigma_{A(a)}(a)$, gde $A(a)$ označava zatvorenu algebru generisanu sa a i 1.

TEOREMA 4. Neka je A Banachova algebra i pretpostavimo da eksponencijalni spektar zadovoljava teoremu o spektralnom preslikavanju za polinome, tj. uslov (7). Tada je $\mathcal{E}(a) \subset \sigma_{A(a)}(a)$ za svako $a \in A$, gde $A(a)$ označava zatvorenu algebru generisanu sa a i 1.

DOKAZ: Na osnovu Leme 3 i Teoreme 3.

LITERATURA

1. Ахиезер, Н. И. и Глазман, И. М.: Теория линейных операторов в гилбертовом пространстве, II, Харков, Вища ш. 1978.
2. Alexander, J. C.: Compact Banach algebras, Proc. London Math. Soc. (3), 18, 1-18, (1968).
3. Alexander, J. C.: On Riesz operators, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 16, 227-232, (1969).
4. Aljančić, S.: Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Građevinska knjiga, Beograd 1968.
5. Аткинсон, Ф. В.: Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированых пространствах, Мат. сб.28,1951,3-14.
6. Aupetit, B.: Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, Lecture Notes in Math. 735, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.
7. Banaś, J. and Goebel, K.: Measures of noncompactness in Banach spaces, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1980.
8. Barnes, B. A.: A generalized Fredholm theory for certain maps in the regular representations of an algebra, Canad. J. Math. 20 (1968), 495-504.
9. Barnes, B. A.: The Fredholm elements of a ring, Canad. J. Math. 21 (1969), 84-95.
10. Berberian, S. K.: An extension of Weyl's theorem for a class of not necessarily normal operators, Michigan Math. J., 16, (1969), 273-279.
11. Berberian, S. K.: The Weyl spectrum of an operator. Indiana Univ. Math. J., 20 (1970), 529-544.
12. Berberian, S. K.: Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1974.
13. Bonsall, F. F.: Compact operators from an algebraic standpoint, Glasgow Math. J. 8, 41-49, (1967).
14. Bonsall, F. F. Operators that act compactly on an algebra of operators, Bull. London Math. Soc. 1, 163-170, (1969).
15. Bonsall, F. F. and Duncan, J.: Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, London Math. Soc. Lecture Note Series 2, Cambridge Univ. Press. 1971.
16. Bonsall, F. F. and Duncan, J.: Numerical Ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series 10, Cambridge 1973.
17. Bonsall, F. F. and Duncan, J.: Complete normed algebras, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
18. Бурбаки, Н.: Спектральная теория, Мир, Москва, 1972.
19. Caradus, S. R.: Operators of Riesz type, Pac. J. Math. 18 (1966), 61-71.
20. Caradus, S. R., Pfaffenberger, W., and Yood, B.: Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces, Marcel Dekker, Inc, New York, 1974.

21. Coburn, L. A.: Weyl's theorem for nonnormal operators, Michigan Math. J. , 13 (1966) 285-288.
22. Coburn, L. A. and Lebow, A.: Algebraic theory of Fredholm operators, J. Math. Mech. 15. 577-584, (1966).
23. Constantin, Gh.: Some spectral properties for the locally α-contraction operators, Boll. UMI. (4) 6 (1972), 323-330.
24. Dowson, H. R.: Spectral theory of linear operators, Academic Press, London, New York, 1978.
25. Dieudonne, J.: 1. Foundations of modern analysis, Vol(I), Academic Press, 1969; 2. Treatise on analysis, Vol. II, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976.
26. Douglas, R. G.: Banach Algebra Technique in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972.
27. Dunford, N. and Schwartz, J. T.: Linear operators, Part I (1958) Wiley, Interscience.
28. Dunford, N. and Schwartz, J. T.: Linear operators, Part II (1963) Interscience, New York.
29. Enflo. P.: A counter example to the approximation problem in Banach spaces, Acta. Math. 130 (1973), 309-317.
30. Fillmore, P. A. and Stampfli, J. G. and Williams, J. P.: On the essential numerical range, the essential spectrum, and the problem of Halmos, Acta. Math. Szeged 33 (1972), 179-192.
31. Freundlich, M.: Completely continuous elements of a normed ring, Duke Math. J. 16 (1949), 273-283.
32. Gilfeather, F.: The structure and asymptotic behavior of polynomially compact operators, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970) 127-134.
33. Gindler, H. A. and Taylor, A. E.: The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory, Studia Math. 22 (1962), 15-41.
34. Гохберг, И.Ц. и Крейн, М.Г.: Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, Успехи Мат. наук, XII. 2 (1951), 43-118.
35. Goldberg, S.: Unbounded Linear Operators With Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
36. Gramsh, B. and Lay, D.: Spectral mapping theorems for essential spectra, Math. Ann. 192, 17-32 (1971).
37. Gustafson, K, and Weidman, J.: On the essential spectrum, J. Math. Appl. 25, 121-127, (1969).
38. Halmos, P. R.: A Hilbert space problem book, Van Nostrand 1967.
39. Harte, R. E.: The exponential spectrum in Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 58, 114-118, (1976).
40. Harte, R. E.: Fredholm theory relative to a Banach algebra homomorfism, Math. Z., 179, 431-436, (1982).
41. Herman, R. H.: On the uniqueness of the ideals of compact and strictly singular operators, Studia Math. 29, (1968), 161-165.
42. Хилле, Е. и Филлипс, Р.: Функциональный анализ и полугруппы, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.
43. Jacobson, N.: Structure of rings, Amer. Math. Soc., 1956.
44. Kaplansky, I.: Normed algebras, Duke Math. J., 16, (1949), 399-418.
45. Kato, T.: Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Analyse math. 6 (1958) 261-322.

46. Kato, T.: Theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
47. Kleinecke, D.: Almost-finite, compact and inessential operators, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 863-868.
48. Kraljević, H. and Veselić, K.: On algebraic and spectrally finite Banach algebras, Glasnik Mat. vol. 11 (31) (1976), 291-318.
49. Kraljević, H., Suljagić, S. and Veselić, K.: Index in semisimple Banach algebras, Glasnik Mat. vol. 17 (37) (1982), 73-95.
50. Крейн, С. Г.: Линейные уравнения в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1971.
51. Kurepa, S.: Funkcionalna analiza, elementi teorije operatora, Školska knjiga, Zagreb, 1981.
52. Lay, D. Characterizations of the essential spectrum of F. E. Browder, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 246-248.
53. Lebow, A. and Schechter, M.: Semigroups of operators and measures of noncompactness, J. Funct. Anal. 7 (1971), 1-26.
54. Маркус, А. G. и Семецул, А. А.: Об операторах слабо возмущающих спектр, Сиб. Мат. Ж. XIX, 3, 1978, 646-653.
55. Miličić, D. and Veselić, K.: On the boundary of essential spectra, Glasnik Mat. tom 6 (26) No 1, 1971, 73-78.
56. Mizori-Oblak, P.: Fredholm elements in Banach algebras, Glasnik Mat. vol. 10 (30), 1975, 287-293.
57. Murphy, G. J. and West, T. T.: Spectral radius formulae, Proc. Edinburgh Math. Soc. 22, 271-275, 1979.
58. Murphy, I. S.: Non-compact operators that act compactly on their centralisers, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), 307-312.
59. Murphy, I. S.: Compact action of operator satisfying polynomial identity, J. London Math. Soc. (2), 4 (1972), 571-572.
60. Mietc, J. I.: On Fredholm operators and the essential spectrum of singular integral operators, Math. Ann. 178, 62-77, (1968).
61. Никольская, Л. Н.: Критерий устойчивости точечного спектра при вполне непрерывных возмущениях, Мат. заметки, Т. 18, 4, (1975), 601-607.
62. Nussbaum, R. D.: The radius of the essential spectrum, Duke Math. J., 38 (1970) 473-478.
63. Nussbaum, R. D.: Spectral mapping theorems and perturbation theorems for Browders essential spectrum, Trans. Amer. Math. Soc. 150, 1970, 445-455.
64. Olsen, L. and Plastiras, J. K.: Quasialgebraic operators, compact perturbations and the essential norm, Michigan Math. J., 21 (1974) 385-397.
65. Pearlman, L. D.: Riesz points of the spectrum of an element in a semisimple Banach algebra, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 193, 1974, 303-328.
66. Pfaffenberger, W. E.: On the ideal of the strictly singular and inessential operators, Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), 603-607.
67. Puhl, J.: The trace of finite and nuclear elements in Banach algebras, Czechoslovak Math. J., 28 (103) 1978, Praha, 656-676.

68. Rakočević, V.: Fredholmovi operatori, Magistarski rad, Matematički fakultet, Skoplje, 1979.
69. Rakočević, V.: On one subset of M. Schechter's essential spectrum, Mat. ves., 5(18)(33) 1981, 389-391.
70. Rakočević, V.: A note on the exponential spectrum in Banach algebras, Math. Balk. 1979, (u štampi).
71. Rakočević, V.: Measures of non-strict-singularity of operators, Mat. ves., 35, 1983, 79-82.
72. Rakočević, V.: Pollynomialy compact elements of Banach algebras, Mat. ves. (u štampi).
73. Rakočević, V.: On the essential approximate point spectrum II, Mat. ves. (u štampi).
74. Rakočević, V.: On J. C. Alexander's theorem, Mat. ves. (u štampi).
75. Rakočević, V.: Remarks on locally q-contraction operators, Mat. ves. (u štampi).
76. Reed, M. and Simon, B.: Methods of modern mathematical physis IV; Analysis of operators, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.
77. Rickart, C. E.: General theory of Banach algebras, Robert, E. Kriger Publ. com. Huntington, New York, 1974.
78. Riesz, F. and Sz.Nagy, B.: Functional analysis, Frederic Ungar, New York, 1972.
79. Rudin, W.: Functional analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
80. Ruston, A. F.: Formulae of Fredholm type for compact linear operations on a general Banach space, Proc. London Math. Soc. (3) 3 (1953), 368-372.
81. Ruston, A. F.: Operators with a Fredholm theory, J. London Math. Soc. 29 (1954), 318-326.
82. Salinas, N.: A characterization of the Browder spectrum Proc. Amer. Math. Soc. vol. 38, 2, 1973, 369-373.
83. Salinas, N.: Operators with essentially disconected spectrum, Acta Sci. Math. (Szeged), 33 (1972), 193-205.
84. Schechter, M.: Invariance of essential spectrum, Bull. Amer. Math. Soc., 71, (1965), 365-367.
85. Schechter, M.: On the essential spectrum of an arbitrary operator I, J. Math. Anal. Appl., 13(1966), 205-215.
86. Schechter, M.: On the invariance of the essential spectrum of an arbitrary operator II, Ricerche Mat. 16, 3-26, (1967).
87. Schechter, M.: Basic theory of Fredholm operators, Ann. Scoula Norm Sup. Pisa, 21 (1967), 361-380.
88. Schechter, M.: Riesz operators and Fredholm perturbations, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 1139-1144.
89. Schechter, M.: On perturbations of essential spectra, J. London Math. Soc., (2), 1 (1969), 343-347.
90. Schechter, M.: Quantities related to strictly singular operators, Indiana Univ. Math. J., vol. 21, No 11 (1972), 1061-1071.
91. Schechter, M.: Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York, Second Printing, 1973.
92. Schechter, M.: Operators obeying Weyl's theorem, Scripta Math. vol. XXIX, (67-75), 1973.
93. Schechter, M. and Snow, M.: Fredholm spectrum on tensor products, Proc. Royal Irosh Acad. vol. 75, sect. A, 121-127, (1975).

94. Sladkowski, Z., Wotynski, W. and Zemánek, J.: A note on quasi-nilpotent elements of a Banach algebra, Bull. De L'acad, Pol. , ser. Math. astr. et phys. vol XXV, No 2, 1977, (131-134).
95. Smyth, M. R.: Riesz theory in Banach algebras, Math. Z. 145-155, (1975).
96. Smyth, M. R. and West, T. T.: The spectral radius formula in quotient algebras, Math. Z. 145, 157-161, (1975).
97. Smyth, M. R. and West, T. T.: Invariant subspaces of compact elements in C^*-algebras, Math. Z., 153, 193-197, (1977).
98. Stampfli, J. G.: Compact perturbations, normal eigenvalues, and problem of Salinas, J. Londan Math. Soc. (2) 9, (1974), 1-11.
99. Vala, K.: On compact sets of compact operators, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1. 351 (1964), 1-8.
100. Vala, K.: Sur les elements compacts d'une algébre normée, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1. 407 (1967), 1-7.
101. Veselić, K.: On essential spectra in Banach algebras, Glasnik Mat. vol. 10 (30) (1975), 295-309.
102. Vidav, I.: Linearni operatorji v Banachovih prostorih, Društvo mat. fiz. in astr. SR Slovenije, Ljubljana, 1982.
103. Weidmann, J.: Linear operators in Hilbert spaces, Springer-Verlag, New York, Heildelberg, Bern, 1980.
104. West, T. T.: Riesz operators in Banach spaces, Proc. London Math. Soc. (3) 16 (1966), 131-140.
105. West, T. T.: The decomposition of Riesz operators, Proc. London Math. Soc. (3) 16 (1966), 737-752.
106. Williams, V.: Closed Fredholm and semi-Fredholm operators, essential spectra and prturbations, J. Func. Anal. 20, 1-25, (1975).
107. Ylinen, K.: Compact and finite-dimensional elements of normed algebras, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. 428 (1968), 1-37.
108. Ylinen. K.: A note on the compact elements of C^*- algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 35, No 1, 1972, 305-306.
109. Ylinen, K.: Measures of noncompactness for elements of C -algebras, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1, 6, 1981, 131-133.
110. Yood, B.: Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, Duke Math. J. 18 (1951), 599-612.
111. Yood, B.: Difference algebras of linear transformations an a Banach spaces, Pac. J. Math.4, 615-636, 1954.
112. Zemánek, J.: Spectral radius characterizations of commutativity in Banach algebras, Studia Math. 61, 257-268, (1977).
113. Zemánek, J.: A note on the radical of a Banach algebras, Manusc. Math. 20, 191-196, (1977).
114. Zemánek, J.: Spectral characterization of two-sided ideals in Banach algebras, Studia Math. T. LXVII, (1980), 1-12.

INDEKS

B

Browderov esencijalni spektar, 33

C

Calkinova algebra, 6
cokla, 72

F

Fredholmovi operatori, 5

G

Goldbergov esencijalni spektar, 44
Gustafsonov i Weidmannov ess. sp., 35

I

indeks, 6

K

Katov esencijalni spektar, 35
kompaktan elemenat po
Freundlichovoj (f-kompaktan el.), 56
Vali (v-kompaktan el.), 58
Veseliću (k-kompaktan el.), 62
konačno-dimenzionalan elemenat po
Freundlichovoj (f-konačno-dim. el.), 56
Vali (v-konačno-dim. el.), 58
Veseliću (k-konačno-dim. el.), 61

L

lokalna q-kontrakcija, 20

M

mera nekompaktnosti, 17

P

perturbaciona klasa, 14
pol konačne višestru-
kosti, 9
poluprosta algebra, 15

R

radikal, 15
radikalna algebra, 15
Rieszov operator, 10

S

semi-Fredholmov ope., 6
strogo-singularan op., 21
Schechterov es. sp., 32

V

višestrukost (geom.), 9
višestrukost alg. , 9

W

Wolfov es. sp., 31