УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Математички факултет

Миланка Гардашевић - Филиповић

НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЗА РЕШАВАЊЕ КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ОПТИМИЗАЦИОНИХ ПРОБЛЕМА

Докторска дисертација

ПРЕДГОВОР

Историја неглатке оптимизације је релативно кратка, али прилично интензивна. Класична теорија оптимизације је увек била заснована на претпоставкама диференцијабилности и строге регуларности. Управо те претпоставке су понекад онемогућавале практичну примену, и то баш због неглаткости природних процеса. Типично је било да се неглатки проблеми довољно добро апроксимирају глатким и проблем се тако реши. Такав приступ проузроковао је проблеме у облику грешака које су биле последице недовољно добре апроксимације полазне функције. То је један од основних разлога за развој теорије неглатке анализе.

Претпоставка конвексности је врло удобна, јер има лепу геометријску интерпретацију и нема проблема са локалним минимумом. Стога је природно да се теорија неглатке оптимизације развија најпре за конвексне функције. У случају конвексних функција интересантно је разматрати локалне линеаризације функције. То су, заправо, хиперравни генерисане субградијентом функције које представљају тангентне равни графика функције. Код конвексних функција те линеаризације су увек миноранте, тј. налазе се испод графика функције. Није тешко закључити да се део по део линеарна апроксимација, добијена као максимум свих линеаризација генерисаних субградијентима субдиференцијала функције у фиксираној тачки, поклапа са полазном функцијом.

Наиме, за разлику од диференцијабилног случаја у неглаткој оптимизацији врши се генерализација диференцијабилности дефинисањем концепта субградијента и ε-субградијента. Субградијент у фиксираној тачки је вектор, који има особину да хиперраван коју он дефинише у тој фиксираној тачки представља доњу апроксимацију функције. Управо тај нови концепт дозвољава могућност добијања поменуте апроксимације. Дакле, у конвексном случају веза између диференцијабилности и геометрије је јака, и углавном се базира на теоријским резултатима изложеним у [90], [93] и [14].

Размотримо следећи проблем нелинеарне оптимизације са ограничењем:

$$min\, f(x) \text{ тако да } x \in G, \tag{1}$$

где је функција циља $f : R^n \to R$ по претпоставци локално *Lipcshitz*-ова на допустивом скупу $G \subseteq R^n$. Ако је f непрекидно диференцијабилна, онда за проблем (1) кажемо да је гладак проблем. Ако је $G = R^n$, онда за проблем (1) кажемо да је проблем без ограничења. Даље, ако је f конвексна функција и G конвексан скуп, онда за проблем (1) кажемо да је конвексан проблем.

Нелинеарна оптимизација је једна од веома значајних области примењене математике и управо њој је посвећен велики број истраживања током протеклих деценија.

Типично, оптимизационе методе су итеративне: полазећи од једне дате тачке $x_1 \in R^n$ оне конструишу низ тачака $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset R^n$ од кога се захтева да конвергира ка траженом решењу. Општи итеративни алгоритам за решавање проблема (1) дат је као што следи.

Алгоритам 1.1. (Основни алгоритам)

Корак 0: (Иницијализација) Наћи допустиву почетну тачку $x_1 \in R^n$ и ставити да је $k := 1$.

Корак 1: (Правац претраживања) Наћи допустив опадајући правац $d_k \in R^n$, тј.: $f(x_k + td_k) < f(x_k)$ и $x_k + td_k \in G$, $t > 0$.

Корак 2: (Критеријум заустављања) Ако је тачка x_k "довољно близу" траженом оптималном решењу, онда СТОП.

Корак 3: (Линијско претраживање) Наћи величину корака $t_k > 0$ тако да важи да је $t_k = \underset{t>0}{argmin}\, f(x_k + td_k)$ и $x_k + t_k d_k \in G$.

Корак 4: (Промена) Ставити да је $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ и $k := k+1$ и ићи на Корак 1.

Најједноставнији оптимизациони алгоритми су конструисани за гладак проблем без ограничења. Најефикасније методе, попут методе конјугованих градијената и квази *Newton*-ове методе, користе информације о изводу функције циља проблема (1), тј. у Кораку 1 опадајући правац може бити генерисан коришћењем чињенице да дуж правца антиградијента функција циља локално најбрже опада.

Даље, на основу потребног услова за локални оптимум, тј. услова да градијент мора бити једнак нули у локалном решењу, као и због непрекидности функције циља, закључујемо да је вредност градијента функције у тачки утолико мања уколико је та тачка ближа решењу. Та чињеница је садржана у критеријуму заустављања, тј. у Кораку 2.

Неглаткост прави много потешкоћа и захтева додатни рад на готово сваком кораку. Први и најтежи проблем је у Кораку 1, јер правац супротан неком постојећем субградијенту уопште не мора бити опадајући. Та нас чињеница приморава да модификујемо и класичне методе линијског претраживања. Такође, критеријум заустављања више није јасан. Најједноставнији контрапример у неглатком случају је функција $y=|x|, x\in R$, која достиже свој минимум у тачки 0, али је у довољно малој околини решења један њен субградијент једнак јединици.

Скоро све методе неглатке оптимизације могу се поделити на три главне класе: субградијентне методе, методе које чувају информације, ткзв. *bundle* методе, и методе базиране на регуларизацији типа *Moreau-Yosida*.

Ове методе су засноване на претпоставци да је функција циља локално *Lipschitz*-непрекидна и да смо у могућности да израчунамо вредност функције циља и вредност произвољног субградијента у свакој тачки домена те функције. Те претпоставке се у пракси намећу као природне.

Историја субградијентних метода почиње шездесетих година двадесетог века. Њихова основна идеја је генерализација метода развијених за глатке проблеме и то тако што се градијент замењује неким субградијентом. Та једноставна идеја производи два кључна питања: како да изаберемо величину корака и како да одредимо критеријум заустављања.

Неколико различитих приступа је дато као одговор на ова питања, али можемо да тврдимо да је критеријум заустављања основни хендикеп субградијентних метода. Такође, чињеница да правац супротан правцу неког субградијента није нужно опадајући правац чини субградијентне методе неопадајућим методама.

Субградијентне методе су развијане највише у бившем Совјетском савезу и одличан преглед тих метода може се наћи у [100].

Тренутно најефикасније методе у недиференцијабилној оптимизацији су методе које чувају информације – *bundle* методе. *Bundle* је уређена k-торка ($k \in N$) различитих информација. Основна идеја ових метода састоји се у томе да се искористе претходне итерације скупљањем субградијентних информација у један *bundle*. Пионирску *bundle* методу, тј. методу ε-најбржег спуста, развио је *Lemaréchal* [62] 1976. године. Та метода се заснива на конјугованој субградијентној методи коју су предложили *Lemaréchal* [61] и *Wolfe* [108] 1975. године. Добро познати и широко коришћени *Fortran*-кодови *M1FC1* и *M2FC1*, које је развио *Lemaréchal* су засновани на методи ε-најбржег спуста.

У својој књизи из 1985. године *Kiwiel* је дао нов приступ *bundle* методама. Тај приступ је заснован на класичној методи „одсецајућих равни“ (*cutting plane method*) коју су развили *Kelley* [51] и *Cheney* и *Goldstein* [13]. Суштина идеје методе „одсецајућих равни“ састоји се у томе да се за конвексне функције циља као апроксимација може узети део по део линеарна функција генерисана субградијентима. *Kiwiel* је изложио две стратегије „чувања“ субградијената: субградијентну селекцију и агрегацију.

Иако је приступ решавању проблема у методама које су предложили *Kiwiel* и *Lemaréchal* сасвим различит, оне имају и извесних сличности. Наиме, и једна и друга метода генеришу правац претраживања тако што на свакој итерацији решавају квадратни проблем.

Главна потешкоћа методе коју је предложио *Lemaréchal* је *a priori* избор апроксимативне толеранције који контролише радијус кугле у којој се *bundle* метода сматра добром апроксимацијом функције циља. С друге стране, основни недостатак методе коју је предложио *Kiwiel* је њена осетљивост на скалирање функције циља. Такође, присутна је и потешкоћа у линијском претраживању (избору дужине корака), које, уопште узев, захтева велики број поређења и велики број израчунавања током сваке итерације.

Најновији развој у неглаткој оптимизацији мотивисан је потребом да се избегну наведене потешкоће. Тако су настале нове методе: *The Bundle Trust Region* метода коју су развијали *Schramm* и *Zowe* ([96], [97], [112]), као и *proximal point* метода коју је развијао *Kiwiel* [56], а која је комбинована са *bundle* идејом и класичним *trust region* методом коју су развили *Fletcher* [31] и *Yuan* [110].

Деведесетих година прошлог века дошло се на идеју да се проблем (1), тј. проблем $\min_{x\in R^n} f(x)$, где је $f: R^n \to R$ затворена сопствена конвексна функција, која не мора бити диференцијабилна, решава помоћу нове функције, која је у литератури позната под именом регуларизација типа *Moreau-Yosida*. Та нова функција настаје од полазне функције f применом оператора који чува конвексност и затвореност. Занимљиво је да је скуп минимума те нове функције-регуларизације једнак скупу минимума полазне функције f, и при том нова функција-регуларизација има *Lipschitz*-непрекидан градијент, чак и када полазна функција f није диференцијабилна. Управо то и јесте разлог њеног разматрања овде, јер баш та регуларизација пружа могућност повезивања класичних нумеричких метода развијених за решавање оптимизационих проблема у диференцијабилном случају са недиференцијабилном оптимизацијом.

Циљ ове тезе је да се представе познати и нови теоријски резултати из области неглатке оптимизације у компактној и лако разумљивој форми.

У покушају систематичности излагања у првом делу, названом *Недиференцијабилна оптимизација*, биће изложени основни теоријски резултати о диференцијабилности. Други део, под називом *Нумеричке методе за оптимизацију конвексних недиференцијабилних функција*, састоји се из три поглавља. У првом од њих описане су субградијентне методе, у другом основна *bundle* метода, док је у трећем изложена регуларизација типа *Moreau-Yosida* и *proximal point* метода.

Трећи део тезе, назван *Прилог теорији нумеричких метода за минимизацију конвексних недиференцијабилних функција*, представља оригинални научни допринос – то је 6 алгоритама за решавање проблема (1) у случају када је функција циља конвексна и недиференцијабилна. Они су објављени редом у [40], [41], [39], [22], [23] и [24] (радови [41] и [24] су на рецензији).

У одељку 5.1 наведени су још неки теоријски резултати, неопходни за излагање поменутих алгоритама. Потом, у одељку 5.2 изложен је алгоритам који је заснован на комбинацији *trust region* стратегије и *bundle* философије, а који представља нов приступ решавању проблема (5.1) и који је објављен у [40] У одељку 5.3 изложен је алгоритам који се базира на комбинацији *trust region* стратегије и метода конјугованих субградијената, а који, такође, представља нов приступ решавању проблема (5.1) и који је изложен у [41] (тренутно је на рецензији).

Многи алгоритми за минимизацију конвексних недеференцијабилних функција користе *Moreau-Yosida* регуларизацију функције f, која има исти скуп минимума као и полазна функција (видети Поглавље 4), и што је још веома важно, та регуларизација има својство да је њен градијент *Lipschitz*-непрекидан, чак и у случају када је сама функција f недиференцијабилна. Класичне *Newton*-ове методе, које суперлинеарно конвергирају, захтевају непрекидну диференцијабилност другог реда. Како семиглаткост не имплицира глаткост (непрекидну диференцијабилност), али непрекидна диференцијабилност (глаткост) имплицира семиглаткост, истраживања у последњих неколико година усмерена су ка покушају да се обезбеди да суперлинеарна конвергенција *Newton*-ове методе за минимизацију диференцијабилних функција важи и за функције које имају семигладак извод. Имајући у виду да извод у правцу локално *Lipschitz*-ове функције не мора да постоји, али њен *Dini upper* извод увек постоји (видети [105] страна 598), дошли смо на идеју како избегнути наведене потешкоће. Резултат је нов алгоритам *Newton*-овог типа, изложен у одељку 5.4 и објављен у [39].

Dini upper извод *Moreau-Yosida* регуларизације функције f коришћен је у алгоритмима изложеним редом у параграфима 5.5, 5.6 и 5.7 и објављеним у [22], [23] и [24] ([24] је на рецензији), а који су дефинисани у радовима Н. Ђурановић-Миличић [19], [20] и [21] за LC^1 функције и примењени на *Moreau-Yosida* регуларизацију конвексне недиференцијабилне функције f.

Коначно, у одељку 5.8, названом *Закључна разматрања,* дате су неке идеје за даљи рад.

Београд, децембар 2011. године

Миланка Гардашевић-Филиповић

Нотација

R^n - n - димензионални Еуклидов простор

$x \in R^n$ - вектор колона, тј. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in R$

R_+ - скуп реалних ненегативних бројева

x^T - транспоновани вектор вектора x

A^T - транспонована матрица матрице A

$:=$ - по дефиницији

$x^T y$ - скаларни производ вектора x и y

$\|x\|$ - еуклидска норма вектора x, тј. $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (осим ако је дефинишемо другачије)

$d(x, X)$ - растојање тачке x од скупа X

$B(x, r)$ - сфера са центром у тачки x и полупречником r

$\partial f(x)$ - субдиференцијал функције f у тачки x

$\partial_\varepsilon f(x)$ - ε -субдиференцијал функције f у тачки x

$\nabla f(x)$ - градијент функције f у тачки x

$\nabla^2 f(x)$ - хесијан функције f у тачки x

$\nabla F(x)$ - јакобијан функције $F : R^n \to R^n$ у тачки x

$argmin\, f(x)$ - тачка у којој функција f достиже минимум

$conv(X)$ - конвексни омотач скупа X

$cl\, C$ - затворење скупа C

$int(X)$ - унутрашњост скупа X

$dom\, f(x)$ - скуп ефективних вредности функције f је $dom\, f(x) = \{x \in R^n \mid f(x) < +\infty\}$

$epi\, f$ - надграфик функције f је скуп $epi\, f = \{(\alpha, x) \mid \alpha \geq f(x)\} \subseteq R \times R^n$

Садржај

Први део: НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА ОПТИМИЗАЦИЈА

Поглавље 1: НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА ОПТИМИЗАЦИЈА: ПРОБЛЕМАТИКА, ДЕФИНИЦИЈЕ, ОСОБИНЕ

Увод....1

1.1 Теоријске основе 1
1.1.1 *Lipschitz*-ове функције и диференцијабилност 2
1.1.2 Конвексност 7
1.1.3 Полунепрекидност 13

1.2 Примери неглатких проблема....15
1.2.1 Минимакс проблем....15
1.2.2 Проблеми великог броја промењљивих. Пример технике декомпозиције....16

1.3 Закључна разматрања....19

Други део: НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЗА ОПТИМИЗАЦИЈУ КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Поглавље 2: СУБГРАДИЈЕНТНА МЕТОДА

Увод....22

2.1 Субградијентна метода....23

2.2 Техника дилатације простора....29
2.2.1 Дилатација дуж субградијента....31
2.2.2 Дилатација дуж разлике субградијената....32

Поглавље 3: *BUNDLE* МЕТОДА

Увод 34

3.1 Метода „одсецајућих равни“ 35

3.2 Стабилизација методе „одсецајућих равни“....41

3.3 Начело нултог (узалудног) корака 43

3.4 Општа метода....44
3.4.1. Техника селекције 50
3.4.2 Технике агрегације 52
3.4.3 Алгоритам....54
3.4.4. Конвергенција 56

3.5. Закључна разматрања 57

Поглавље 4: *MOREAU-YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈА
PROXIMAL POINT МЕТОДА

Увод 59
4.1 *Moreau-Yosida* регуларизација..60
4.2 *Proximal point* алгоритам 66
4.3. *Newton*-ова метода примењена на *Moreau-Yosida* регуларизацију.....69
4.4 Својства другог реда *Moreau-Yosida* регуларизације 76
4.5. Закључна разматрања...85

Трећи део: ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ НУМЕРИЧКИХ МЕТОДА
ЗА МИНИМИЗАЦИЈУ
КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Поглавље 5: ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ НУМЕРИЧКИХ МЕТОДА ЗА МИНИМИЗАЦИЈУ
КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Увод 86
5.1 Теоријске основе..87
5.2. *Trust region* - *bundle* алгоритам .... .91
5.3. *Trust region* - конјуговано субградијентни алгоритам.......................102
5.4. Алгоритам *Newton*-овог типа..115
5.5. Алгоритам заснован на својствима
Moreau-Yosida регуларизације...121
5.6. *A multi –step curve search* алгоритам..126
5.7. Још један алгоритам заснован на својствима
Moreau-Yosida регуларизације...130
5.8. Закључна разматрања..134

Библиографија..136

ПРВИ ДЕО

НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА ОПТИМИЗАЦИЈА

Поглавље 1

НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНА ОПТИМИЗАЦИЈА: ПРОБЛЕМАТИКА, ДЕФИНИЦИЈЕ, ОСОБИНЕ

УВОД

Сврха овог поглавља је излагање главних проблема недиференцијабилне оптимизације, и то са посебним освртом на конвексан случај.

Након увођења потребних дефиниција и навођења основних теоријских резултата из области недиференцијабилне оптимизације, биће наведени и проблеми који могу настати уколико се класичне методе за диференцијабилни случај примењују у недиференцијабилном случају.

Овде ваља прецизирати да ово поглавље треба да буде само преглед „математичких алата“ који се често јављају у теоремама конвергенције нумеричких метода за недиференцијабилну оптимизацију.

1.1 ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

У овом одељку биће наведене основне дефиниције и својства неопходна за разумевање наредних поглавља.

Ако није наглашено другачије, под реалном функцијом подразумеваће се функција n реалних променљивих која има скуп вредности у скупу $R \cup \{+\infty\}$, тј. $f : R^n \rightarrow R \cup \{+\infty\}$.

1.1.1. *LIPSCHITZ*[1]-ОВЕ ФУНКЦИЈЕ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ

<u>Дефиниција 1.1.1</u>. Нека је дат скуп $Q \subseteq R^n$. Функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *Lipschitz*-ова *на скупу* Q са константом $L_Q > 0$ ако важи да је

$$|f(x) - f(y)| \leq L_Q \|x - y\| \text{ за свако } x, y \in Q .$$

<u>Дефиниција 1.1.2</u>. Функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *локално Lipschitz-ова* ако је *Lipschitz*-ова на сваком ограниченом подскупу скупа R^n.

<u>Дефиниција 1.1.3</u>. Функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *глобално Lipschitz-ова* или само *Lipschitz-ова са константом* $L > 0$ ако важи да је

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \text{ за свако } x, y \in R^n .$$

<u>Дефиниција 1.1.4</u>. Функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *Lipschitz-ова у тачки* $x \in R^n$ ако је *Lipschitz*-ова у некој околини тачке $x \in R^n$.

Lipschitz-ове функције су занимљиве јер имају ограничен нагиб. Наиме, ако је функција *Lipschitz*-ова онда је њен извод, уколико постоји, ограничен, и то је све што знамо о њеној диференцијабилности. На пример, функција $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R$ је *Lipschitz*-ова и диференцијабилна, док је функција $g(x) = |x|, x \in R$ *Lipschitz*-ова, али у тачки 0 није диференцијабилна.

<u>Дефиниција 1.1.5.</u> Нека је дата функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ и $x, d \in R^n$. *Извод функције* f *у тачки* x *у правцу* d је:

$$f'(x; d) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{f(x + \varepsilon d) - f(x)}{\varepsilon} \quad . \tag{1.1}$$

---

[1] *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz* (1832 –1903) –немачки математичар

Ако је f диференцијабилна функција у тачки $x \in R^n$, онда она има извод у правцу у свим правцима $d \in R^n$. У том случају извод у правцу $f'(x;d)$ је линеарна функција по $d \in R^n$. Наиме, у случају диференцијабилности важи да је $f'(x;d) = \nabla f(x)^T d$. На основу *Taylor*-ове формуле важи да је:

$$f(x + \varepsilon d) = f(x) + \varepsilon f'(x,d) + o(\varepsilon) \text{ за све } d \in R^n \text{, где } \varepsilon \to 0 .$$

<u>Дефиниција 1.1.6.</u> За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ кажемо да је у тачки $x \in R^n$ *диференцијабилна у правцу* ако и само ако у тачки $x \in R^n$ постоји извод функције f у правцу d за свако $d \in R^n$.

<u>Дефиниција 1.1.7.</u> За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ кажемо да је *Gâteaux*[2]-*диференцијабилна у тачки* $x \in R^n$ ако је њен извод у правцу линеарна функција по правцу d за свако $d \in R^n$. Ако је функција *Gâteaux*-диференцијабилна њен извод у правцу је дат са $f'(x;d) = \nabla f(x)^T d$, где вектор $\nabla f(x)$ означава градијент функције f у тачки x.

За *Gâteaux-диференцијабилност* се у литератури користи и термин *слаба диференцијабилност*. Дата функција у датој тачки може имати највише један *Gâtoux*-извод. Може се десити да функција у датој тачки има извод у сваком правцу, али да није *Gâteaux*- диференцијабилна (Пример 1.1.1).

<u>Дефиниција 1.1.8.</u> За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ кажемо да је *Fréchet*[3]-*диференцијабилна у тачки* $x \in R^n$ ако постоји $\nabla f(x)$ такав да за свако $d \in R^n$ важи да је:

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + o(d) \quad . \tag{1.2}$$

За *Fréchet-диференцијабилност* се у литератури користи и термин *јака диференцијабилност*. Ако је дата функција у датој тачки *Fréchet*-диференцијабилна, онда је она у тој тачки непрекидна.

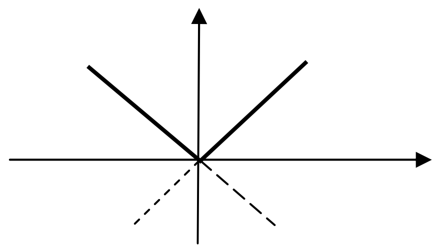
---

[2] *René Eugène Gâteaux* (1889-1914) – француски математичар
[3] *Maurice* Fréchet (1878-1973) -француски математичар

Напомињемо чињеницу, која следи из Дефиниције 1.1.8, да се диференцијабилност у класичном смислу поклапа са *Fréchet*-диференцијабилношћу. Лако је видети да *Fréchet*-диференцијабилност имплицира *Gâteaux*-диференцијабилност. Обрнуто не важи, осим у случају када је функција *Lipschitz*-ова [14]. Пример функције која је *Gâteaux*-диференцијабилна, али није *Fréchet*-диференцијабилна дат је у [17][4].

<u>Дефиниција 1.1.9.</u> У датој тачки $x \in R^n$ функција f је *глатка* ако важи да је f диференцијабилна у x и да је њен градијент непрекидна функција у тачки x .

<u>Пример 1.1.1.</u> Размотримо функцију $f(x)=|x|$, $x \in R$ у околини тачке $x=0$ (Слика 1).



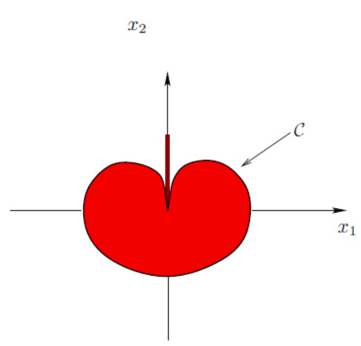
Слика 1

$$f'(0;d)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+td)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(td)-0}{t}=\lim_{t\to 0^+}|d|=|d| \tag{1.3}$$

Из (1.3) следи да функција има леви и десни извод, али њен извод у правцу није линеаран, што значи да функција није *Gâteaux*-диференцијабилна у тачки $x=0$.

---

[4] $f: R^2 \to R$, дата са $f(x_1,x_2)=\begin{cases}1,(x_1,x_2)\in C\\0,(x_1,x_2)\notin C\end{cases}$, при чему је скуп C дат у облику кардиоиде



Функција која је приказана у следећем примеру је занимљива јер је диференцијабилна, али није глатка.

<u>Пример 1.1.2.[34]</u> Размотримо функцију дефинисану на следећи начин:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \quad , \tag{1.4}$$

и њен извод у околини тачке $x=0$.

За $x\neq 0$ функција је диференцијабилна и њен извод је $2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. Размотримо извод функције дате са (1.4) у правцу d у тачки 0, тј.:

$$f'(0;d)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+td)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0^+} td^2\sin\frac{1}{td}=0\,.$$

Овај извод у правцу је линеаран по d, јер је $f'(0;d)=0\cdot d=0$, па је зато ова функција *Gâtoux*-диференцијабилна у околини тачке $x=0$ и тај извод је дат са

$$\nabla f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\,.$$

Да би у тачки $x=0$ ова функција била и *Fréchet*-диференцијабилна потребно је да важи услов (1.2), односно следећи услов

$$f(d)=o(d) \tag{1.5}$$

за свако $d\in R^n$.

За овако задату функцију f лако је проверити да је услов (1.5) задовољен, што значи да је ова функција чак и *Fréchet*-диференцијабилна. Међутим, будући да важи да је $\lim_{x\to 0}\nabla f(x)\neq\nabla f(0)=0$, дакле, градијент није непрекидна функција у околини тачке $x=0$, закључујемо да дата функција није глатка.

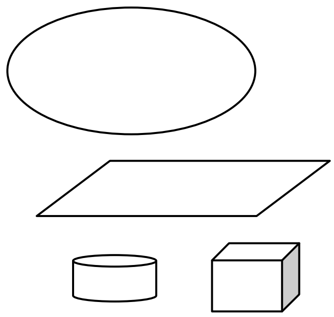
Lipschitz-ове функције су веома важне јер за њих важи *Rademacher*-ова[5] теорема:

<u>Теорема 1.1.1.[34]</u> На сваком отвореном подскупу скупа R^n *Lipschitz*-ова функција је скоро свуда диференцијабилна.

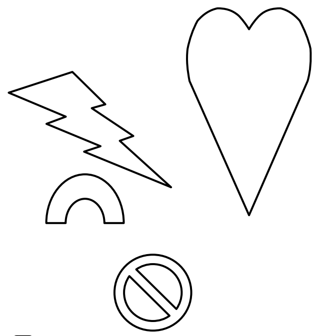
[5] *Hans Adolph Rademacher* (1892-1969) -немачки математичар

За недиференцијабилне функције *Clarke* је у [14] увео појам генералисаног градијента. Да бисмо навели ту дефиницију неопходно је да се подсетимо конвексних скупова.

Дефиниција 1.1.10. Скуп $C \subseteq R^n$ је *конвексан* ако и само ако за сваке две тачке $x_1, x_2 \in C$ и за свако $\lambda \in [0,1]$ тачка $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ припада скупу C.



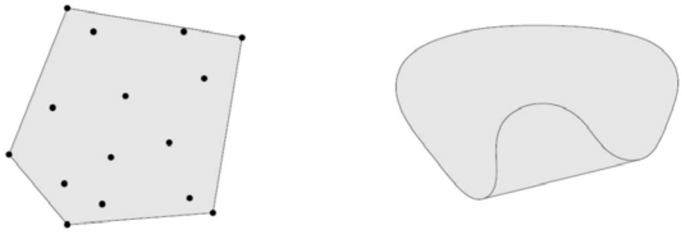
Слика 2: Примери конвексних скупова



Слика 3: Примери неконвексних скупова

Са $[x, y]$ означићемо **затворен интервал** (линијски сегмент) придружен векторима x и y, тј. $[x, y] = \{z \in R^n | z = \lambda x + (1-\lambda)y, 0 \le \lambda \le 1\}$, а са (x, y) одговарајући отворени линијски сегмент, тј. $(x, y) = \{z \in R^n | z = \lambda x + (1-\lambda)y, 0 < \lambda < 1\}$. Линеарну комбинацију $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ елемената $x_1, x_2, ..., x_n \in R^n$ и скалара $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ зваћемо **конвексном комбинацијом** уколико важи да је $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \ge 0$.

Дефиниција 1.1.11. Конвексни омотач скупа C, у ознаци $convC$ је скуп свих конвексних комбинација тачака из скупа C.



Слика 4: Лево: конвексни омотач скупа од 15 тачака у равни,
десно: конвексни омотач скупа у облику кифле

<u>Дефиниција 1.1.12.</u> Нека је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ локално *Lipschitz*-ова функција. *Генералисани градијент* функције f у тачки x дефинисан је на следећи начин:

$$\partial f(x) = conv\left\{ g \in R^n \middle| g = \lim_{i\to\infty} \nabla f(x_i), x_i \to x, \exists \nabla f(x_i) \right\}. \qquad (1.6)$$

Генералисани градијент је увео *Clarke* [14] и то за случај када је реална функција локално *Lipschitz*-ова, дефинисана на *Banach*[6]-овом простору X. У случају $X = R^n$ генералисани градијент се може изразити као у Дефиницији 1.1.12. Могуће је показати да је за свако x генералисани градијент непразан, конвексан и компактан скуп. Штавише, у случају глатких функција тај скуп је једночлан и његов једини елемент је градијент.

1.1.2. КОНВЕКСНОСТ

У недиференцијабилној оптимизцији конвексност игра важну улогу јер сваки конвексан скуп и свака конвексна функција под одређеним додатним претпоставкама имају неке занимљиве особине, нпр.:

- свака конвексна функција је и *Lipschitz*-ова функција,
- сваки локални минимум је и глобални минимум,
- конвексни скупови имају непразну релативну унутрашњост,
- конвексни скупови су повезани и имају у свакој тачки допустиве правце,
- конвексне функције су непрекидне у унутрашњим тачкама конвексних скупова.

Осим тога, видећемо да се у случају конвексних функција дефиниције диференцијабилности и глаткости поклапају. Али, пре него што опишемо

[6] *Stefan Banach* (1892 - 1945) - пољски математичар

конвексност, упознаћемо се са концептима: стварни или ефективни домен функције и сопственост функције.

Дефиниција 1.1.13. За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ *ефективни домен* функције је скуп

$$dom(f) = \{x \in R^n | f(x) < +\infty\}.$$

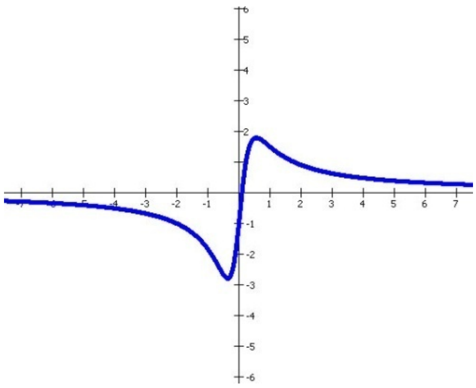
Дефиниција 1.1.14. За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ кажемо да је *сопствена* уколико је њен ефективни домен непразан, тј. $dom(f) \neq \emptyset$.

Дефиниција 1.1.15. За дату функцију $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ кажемо да је конвексна уколико важи да је:

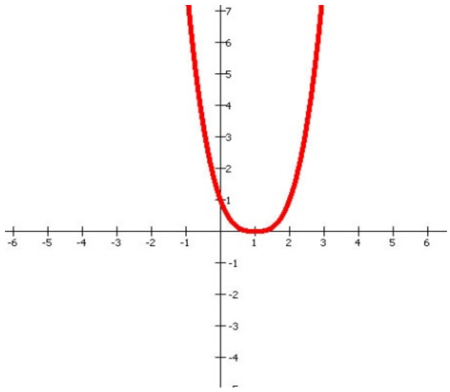
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \tag{1.7}$$

за све $x, y \in R^n$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

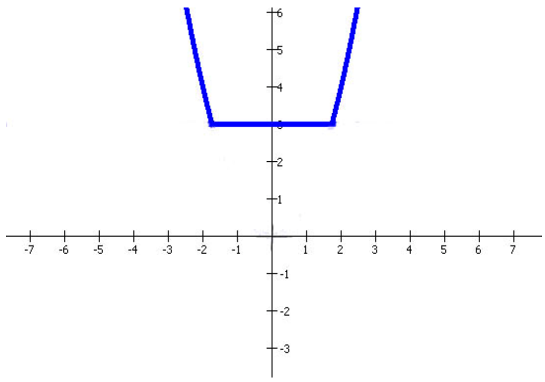
Уколико у (1.7) важи строга неједнакост за $x \neq y$ и $0 < \lambda < 1$, кажемо да је функција *строго конвексна.*



Слика 5: Пример неконвексне функције



Слика 6: Пример строго конвексне функције



Слика 7: Пример конвексне функције

Следећа теорема представља везу *Lipschitz*-ових (а самим тим и непрекидних) функција и конвексних функција.

<u>Теорема 1.1.2.</u> Нека је f конвексна сопствена функција дефинисана на компактном скупу $Q \subseteq dom(f)$. Тада је f *Lipschitz*-ова на Q.

Доказ. Видети у [90].

Још једну занимљиву особину конвексних функција даје следећа теорема.

Теорема 1.1.3. Нека је f конвексна сопствена функција и Q_f скуп тачака у којима је функција диференцијабилна. Тада је функција $\nabla f : x \to \nabla f(x)$ непрекидна на скупу Q_f.

Доказ. Видети у [90].

Можемо, дакле, на основу Теореме 1.1.3, закључити да се глаткост и диференцијабилност функције поклапају у случају конвексне функције.

У случају конвексне функције генералисани градијент се поклапа са скупом субдиференцијала који дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 1.1.16. Дата функција f у тачки $x \in dom(f)$ има *субдиференцијал* дефинисан на следећи начин.

$$\partial f(x) = \left\{ g \in R^n \middle| f(y) \geq f(x) + g^T (y - x), \ \forall y \in R^n \right\}. \tag{1.8}$$

Сваки елемент g субдиференцијала $\partial f(x)$ зовемо *субградијент* и за њега важи следећа неједнакост:

$$f(y) \geq f(x) + g^T (y - x) \text{ за свако } y \in R^n. \tag{1.9}$$

Неједнакост (1.9) позната је као субградијентна неједнакост.

Сваки субградијент конвексне функције у датој тачки x_0 има своју геометријску интерпретацију: вектор $\begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}$, где је $g \in \partial f(x_0)$, дефинише једну хиперраван (која није вертикална) која додирује график функције у датој тачки x_0 и цео надграфик[7] се налази изнад те хиперравни (Слика 8), тј важи следећа неједнакост:

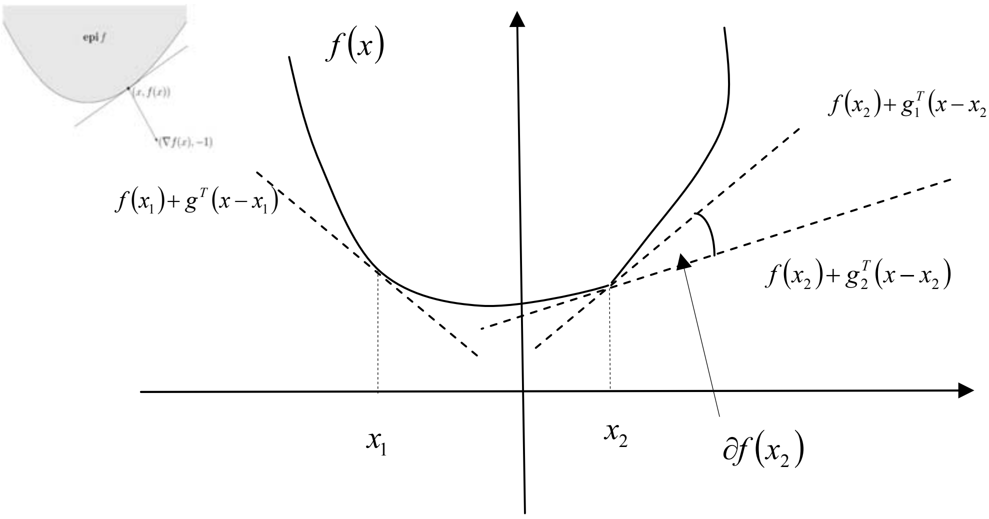
[7] Надграфик функције f је скуп $epi\, f = \{(\alpha, x) | \alpha \geq f(x)\} \subseteq R \times R^n$.

$$\begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \right) \le 0, \forall \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \in epi\, f \, .$$

Одавде следи да важи да је:

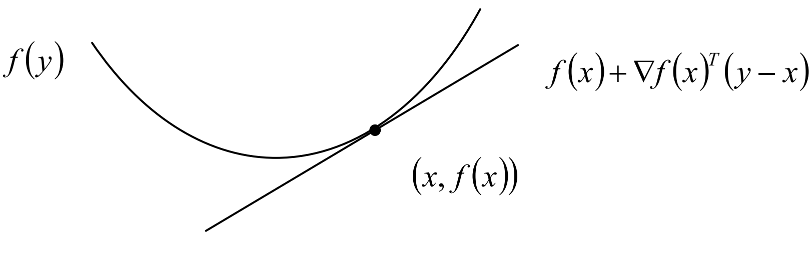
$$\begin{pmatrix} g \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y - x \\ t - f(x) \end{pmatrix} \le 0, \forall \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \in epi\, f \ ,$$

односно $g^T(y-x) \le 0 \wedge t - f(x) \ge 0 \Rightarrow g^T(y-x) \le t - f(x), \forall \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \in epi\, f$, што је ништа друго до субградијентна неједнакост (1.9).



Слика 8

<u>Напомена 1.1.1.</u> Ако је конвексна функција диференцијабилна у тачки x тада на основу Теореме 1.1.3 закључујемо да је она и глатка, а њен субдиференцијал је једночлан и садржи градијент функције (Слика 9).



Слика 9

За конвексну функцију извод у правцу може се исказати и на следећи начин:

$$f'(x;d) = \max_{g \in \partial f(x)} g^T d \,. \tag{1.10}$$

Доказ овог тврђења може се наћи на пример у [30], [37], [59], [81] или [90].

С обзиром на (1.10) може се закључити да је

$$f'(x;d) < 0 \tag{1.11}$$

услов опадања функције у правцу d. Услов (1.10) имплицира (1.11), јер да би се остварило опадање функције f у тачки x у правцу d угао између тог правца и произвољног субградијента мора бити туп. Провера тог услова је прилично тешка ([5]).

Овде би било згодно навести потребне и довољне услове за егзистенцију минимума конвексне функције. Наиме, важи следећа теорема.

<u>Теорема 1.1.4.</u> Дата конвексна функција $f: R^n \to R \cup \{+\infty\}$ достиже минимум у тачки x ако и само ако $0 \in \partial f(x)$.

<u>Доказ</u>. Видети у [18].

За конвексне функције важан је још један појам, а то је ε-субдиференцијал који дефинишемо на следећи начин.

<u>Дефиниција 1.1.17.</u> Нека је дато $\varepsilon \geq 0$. Дата функција f у тачки $x \in dom(f)$ има *ε-субдиференцијал* дефинисан на следећи начин:

$$\partial_\varepsilon f(x) = \left\{ g \in R^n \middle| f(y) \geq f(x) + g^T(y-x) - \varepsilon,\ \forall y \in R^n \right\}. \tag{1.12}$$

За $g \in \partial_\varepsilon f(x)$ кажемо да је *ε-субградијент.*

Следећа теорема је важна са становишта алгоритама за минимизацију конвексних функција.

<u>Теорема 1.1.5.[34]</u> Нека је дата конвексна функција f и тачка $x \in dom(f)$. Тада за свако $g \in \partial f(x)$ важи да је:

$$\|g\| \leq L_B \quad , \tag{1.13}$$

где је $L_B > 0$ *Lipschitz*-ова константа на сфери $B(x,r)$ за неко $r > 0$.

Доказ: За $g = 0$ неједнакост (1.13) је задовољена за било коју позитивну *Lipschitz*-ову константу.

Претпоставимо да је $g \neq 0$. Будући да је сфера компактан скуп на основу Теореме 1.1.2 закључујемо да је функција f *Lipschitz*-ова са константом $L_B > 0$, тј.:

$$\left|f(y) - f(x)\right| \leq L_B \|x - y\| \text{ за све } y \in B(x,r). \tag{1.14}$$

Како је $g \in \partial f(x)$ на основу субградијентне неједнакости (1.9) важи да је:

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x) \text{ за свако } y \in R^n. \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) за $y = x + r\dfrac{g}{\|g\|}$ закључујемо да важе следеће две неједнакости:

$$-rL_B \leq f(y) - f(x) \leq rL_B \tag{1.16}$$

$$f(y) \geq f(x) + r\|g\|. \tag{1.17}$$

Из (1.16) и (1.17) следи (1.13), што је и требало доказати.■

1.1.3 ПОЛУНЕПРЕКИДНОСТ

У претходном параграфу смо видели (Теорема 1.1.2) да је конвексна функција и локално *Lipschitz*-ова на релативној унутрашњости ефективног домена, па је због тога она непрекидна на релативној унутрашњости свога ефективног домена. Шта је са непрекидношћу конвексне функције на границама ефективног домена?

У овом параграфу учињен је покушај да се да одговор на то питање.

Пре свега, навешћемо неколико важних дефиниција.

Дефиниција 1.1.18. Дата функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *полунепрекидна одозго* ако за свако $x \in R^n$ важи да је:

$$\limsup_{y\to x} f(y) \le f(x) \ . \tag{1.18}$$

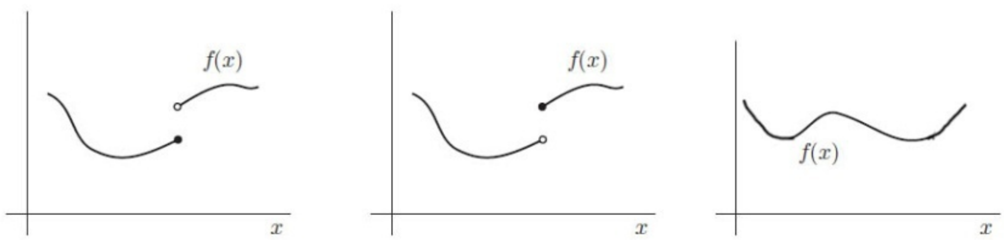
Дефиниција 1.1.19. Дата функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је *полунепрекидна одоздо* ако за свако $x \in R^n$ важи да је:

$$\liminf_{y\to x} f(y) \ge f(x) \ . \tag{1.19}$$

Напомена 1.1.2. Концепти доње и горње полунепрекидности настају „цепањем" класичне непрекидности.

Дакле, за дато $x \in R^n$ нека функција f је полунепрекидна одозго (респективно одоздо) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако $y \in R^n$ важи: ако је $\|y - x\| < \delta$, онда је $f(y) - f(x) < \varepsilon$ (респективно $f(x) - f(y) > \varepsilon$).

Ако је нека функција у датој тачки непрекидна, онда је она у тој тачки полунепрекидна и одоздо и одозго (Слика 10).



Слика 10: а) функција полунепрекидна одоздо,
б) функција полунепрекидна одозго, в) непрекидна функција

Следећа теорема даје карактеризацију полунепрекидности функције.

Теорема 1.1.6. Нека је дата функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$. Следећи искази су еквивалентни:

а) f је полунепрекидна одоздо у R^n;

б) надграфик функције f је затворен скуп у $R^n \times R$;

в) ниво-скуп $L_\alpha(x) = \{x : f(x) \le \alpha\}$ је затворен за свако $\alpha \in R$.

Доказ: Видети у [90].

На основу Теореме 1.1.6 закључујемо да је полунепрекидност одоздо повезана са затвореношћу. Размотримо случај функције једне променљиве: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,+\infty)\\ +\infty, & x\in(-\infty,0]\end{cases}$. Ова функција је конвексна, сопствена, њен ефективни домен је отворен, али је њен надграфик затворен скуп.

Полунепрекидност одоздо важна је с аспекта минимизације функције. Наиме, сопствена конвексна полунепрекидна ододздо функција достиже минимум на сваком компактном подскупу свог ефективног домена. Дакле, полунепрекидност одоздо важна је за егзистенцију бар једне тачке минимума конвексне сопствене функције.

1.2 ПРИМЕРИ НЕГЛАТКИХ ПРОБЛЕМА

У операционим истраживањама често се сусрећу проблеми у којима је функција циља недиференцијабилна. У принципу, проблем постаје недиференцијабилан или због структуре модела или због ограничења. Навешћемо неке типичне примере недиференцијабилних функција које сусрећемо у операционим истраживањима.

1.2.1 МИНИМАКС ПРОБЛЕМ

Класа недиференцијабилних проблема у којима се минимизира функција која је задата као максимум коначног броја функција назива се класом минимакс проблема. Овакви проблеми се могу наћи, на пример, у проблемима оптималног управљања [66] или као биланс проблеми у економској теорији [52].

Минимакс проблем има следећи облик:

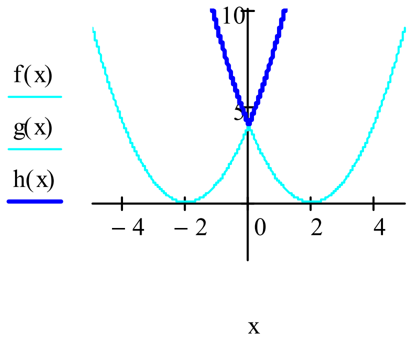
$$min\, f(x), x\in X\subseteq R^n \quad , \tag{1.20}$$

где је $f(x) = max\ h(x,y), y \in Y \subseteq R^n$ и функција h је глатка у односу на x. У принципу, функција циља проблема (1.20) је недиференцијабилна у тачки x на „активном“ скупу $I(x) = \{y \in Y | f(x) = h(x,y)\}$ ако и само ако тај скуп има више од једног елемента.

Следећи пример минимакс проблема је

$$\min_{x \in R^n} f(x),\ f(x) = \min_i \{f_i(x)\} \ . \tag{1.21}$$

На Слици 11 дат је пример функције циља минимакс проблема за случај две функције једне променљиве. У тачки $x = 0$ у којој „активан“ скуп није једночлан функција је недиференцијабилна.



$$f(x) = (x+2)^2$$
$$g(x) = (x-2)^2$$
$$h(x) = max\{f(x), g(x)\}$$

Слика 11

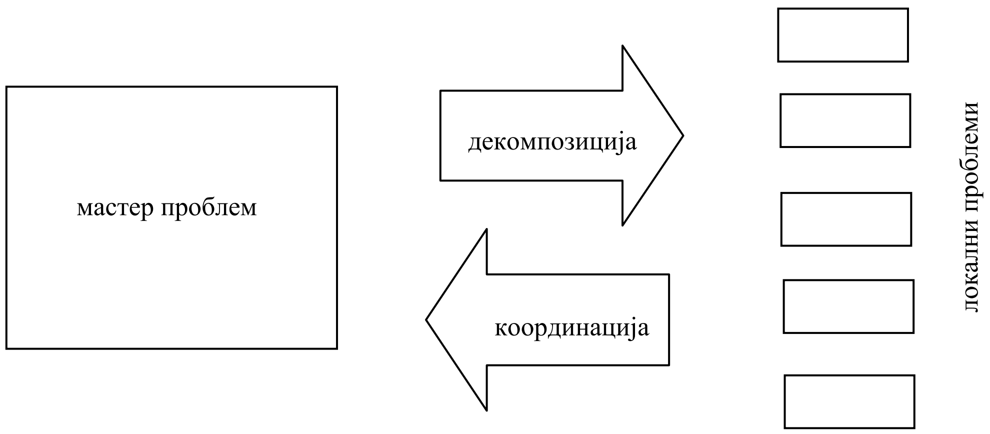
Познато је да се проблем типа (1.21) своди на проблем са ограничењима, тј. на проблем следећег типа.

$$\min_{x \in R^n, v \in R} v$$

$$v \geq f_i(x), \forall i \quad .$$

1.2.2 ПРОБЛЕМИ ВЕЛИКОГ БРОЈА ПРОМЕНЉИВИХ ПРИМЕР ТЕХНИКЕ ДЕКОМПОЗИЦИЈЕ

Технике декомпозиције користе се за решавање такозваних великих, комплексних или *large-scale* проблема. То су проблеми у којима се појављује велики број непознатих и / или велики број ограничења. Ове технике декомпозиције, како им само име каже, састоје се у томе да се полазни проблем, такозвани мастер проблем, који је недиференцијабилан, разложи на више мањих локалних проблема који су лакши за решавање од самог полазног проблема. Декомпозиција се схематски може представити као на Слици 12.



Слика 12

Овде ће бити изложене две важне технике декомпозиције из којих су поникле све остале. То су: декомпозиција цене и декомпозиција ресурса, и дуалне су једна другој.

У декомпозицији ресурса, централни проблем шаље директиву (правило) у сваки потпроблем. Сваки потпроблем се, на основу тих директива, решава и шаље податке централном проблему. На основу тих нових података, централни проблем прави нове директиве (координација).

У декомпозицији цена, централни проблем шаље скуп података у сваки потпроблем. Сваки потпроблем се, на основу тих података, решава на локалном нивоу и шаље податке мастер проблему, који са њима координира [5].

Декомпозиција цена

Ова техника је добила име по *Lagrange*-овим[8] мултипликаторима, јер су *Lagrange*–ови мултипликатори у економији познати под термином цена.

Дакле, разматра се проблем:

$$\begin{gathered} min\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \\ \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i) = 0 \end{gathered} \tag{1.22}$$

где су $a_i(x_i) \in R^m, \forall i$. Конструишемо *Lagrange*-ове мултипликаторе $\lambda \in R^m$ као променљиве дуала у придруженој *Lagrange*-овој функцији

$$L(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(x_i) + \lambda^T a_i(x_i) \right] \tag{1.23}$$

и функцију дуала

$$q(\lambda) = \min_{x} L(x,\lambda) \ . \tag{1.24}$$

Приметимо да $q(\lambda)$ за свако λ представља доњу границу (тј. њену процену) функције циља проблема (1.22). Проблем (1.24) може се разложити на потпроблеме следећег типа:

$$\min_{x_i} \left\{ f_i(x_i) + \lambda^T a_i(x_i) \right\} \tag{1.25}$$

који зависе само од променљиве x_i. Јасно је да је проблем (1.25) знатно лакши од полазног проблема (1.22).

Могуће је, на основу најбоље процене за $q(\lambda)$, израчунати вредност функције циља проблема (1.22) решавањем следећег проблема:

$$\max_{\lambda} q(\lambda) \ , \tag{1.26}$$

такозваног проблема *Lagrange*-овог дуала. Проблем (1.26) за свако λ се може декомпоновати на проблем (1.25).

<u>Напомена 1.2.1</u>. Техника *Lagrange*-ове релаксације доста се користи у линеарном програмирању. За више детаља видети [44].

[8] *Joseph Louis Lagrange* (1736 -1813)– италијански математичар

Декомпозиција ресурса

Проблем (1.22) еквивалентан је следећем проблему:

$$\min_{y} \sum_{i=1}^{n} v_i(y_i), \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \ , \tag{1.27}$$

где је

$$v_i(y_i) = \min_{x_i} f_i(x_i) \ , \ a_i(x_i) = y_i \quad . \tag{1.28}$$

И у овом случају функција циља проблема (1.27) је недиференцијабилна.

1.3 ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Овде ћемо објаснити због чега су класичне методе оптимизације развијене за диференцијабилан случај доживеле неуспех у недиференцијабилном случају.

Нека је дат проблем

$$\min_{x \in R^n} f(x) \ , \tag{1.29}$$

где је функција f непрекидно диференцијабилна. Методе класичне оптимизације описане у [4] у околини тачке x_k разматрају линеаран модел функције f, дефинисан на следећи начин:

$$\nabla f(x_k)^T d \approx f(x_k + d) - f(x_k) \ , \tag{1.30}$$

или квадратни модел типа:

$$\nabla f(x_k)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x_k) d \approx f(x_k + d) - f(x_k) \ , \tag{1.31}$$

где d означава правац кретања из тачке x_k, док $\nabla f(x_k)$ и $\nabla^2 f(x_k)$ респективно означавају градијент и хесијан функције f у тачки x_k. Минимизација модела (1.30) назива се градијентна метода, а минимизација модела (1.31) назива се *Newton*-ова метода.

Следећи пример показује како примена класичних метода оптимизације за минимизацију недиференцијабилне функције може да доведе до конвергенције ка тачки која није минимум.

<u>Пример 1.3.1.</u> [60] Размотримо следећу функцију две променљиве:

$$f_1(x,y)=3\left(x^2+2y^2\right)$$

и применимо градијентну методу. Кренимо од тачке $x_1=(2,1)^T$. Следеће две итерације означимо респективно са $x_2=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T$ и $x_3=\left(\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)^T$. Низ $\{x_k\}$ генерисан алгоритмом осцилира између две хиперравни: $H_+=\left\{(x,y)^T \middle| 2y=x\right\}$ и $H_-=\left\{(x,y)^T \middle| 2y=-x\right\}$ и тежи ка тачки оптимума $x^*=(0,0)^T$.

Размотримо сада функцију $f_2(x,y)=\sqrt{f_1(x,y)}$. Градијентном методом из исте полазне тачке као за функцију f_1 генерише се исти низ који конвергира ка тачки оптимума $x^*=(0,0)^T$ за функцију f_1, али низ $\{\nabla f_2(x_k)\}$ не тежи 0, већ осцилира у интервалу $\sqrt{2}[2,\pm 2]^T$.

Конструишимо скуп D који садржи низ $\{x_k\}$, на пример на следећи начин: $D=\left\{(x,y) \middle| 0\le |y|\le 2x\right\}$ и модификујмо функцију f_2 у околини тачке $(0,0)^T$ на следећи начин:

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\sqrt{3\left(x^2+2y^2\right)}; & 0\le |y|\le 2x\\ \dfrac{x+4|y|}{\sqrt{3}}, & \text{иначе}\end{cases}.$$

Градијентна метода генерише исти низ $\{x_k\}$ као у случају функција f_1 и f_2, који чак и за ову функцију конвергира ка тачки $(0,0)^T$, али то сада није тачка минимума.■

Пре него што закључимо ово поглавље констатујмо да критеријум заустављања алгоритма у случају диференцијабилне функције мора бити:

$$\|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon \quad . \tag{1.32}$$

Није тешко видети да је ово добар критеријум за глатке функције, али не и за недиференцијабилне. Разматрајмо функцију $f(x)=|x|,\ x \in R$. Ова функција није диференцијабилна у тачки 0. У околини тачке 0 њен градијент, и слева и сдесна, по норми је једнак 1. У самој тачки 0, она има и субградијенте који су по норми једнаки јединици, али у тачки 0 постоји и субградијент који задовољаа услов (1.32).

У Примеру 1.3.1 показано је како класичне методе оптимизације за минимизацију диференцијабилне функције када се примене на недиференцијабилну функцију могу да довести до конвергенције ка тачки која није минимум. Стога је било неопходно развити нове методе оптимизације за недиференцијабилни случај, које ће укратко бити изложене у следећа три поглавља.

ДРУГИ ДЕО

НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЗА ОПТИМИЗАЦИЈУ КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Поглавље 2

<u>СУБГРАДИЈЕНТА МЕТОДА</u>

УВОД

У овом поглављу решаваћемо следећи проблем:

$$\min_{x \in R^n} f(x), \tag{2.1}$$

где је $f : R^n \to R$ произвољна сопствена конвексна функција која не мора бити диференцијабилна.

У СССР-у 60-тих година прошлог века појавиле су се прве методе за решавање проблема (2.1). То су субградијентне методе. Оне представљају генерализацију класичне градијентне методе за случај недиференцијабилне оптимизације. Базирају се на идеји да се градијент замени произвољним субградијентом, што представља уопштење градијенте методе, развијене за диференцијабилни случај, на недиференцијабилни случај. То су веома једноставне методе за минимизацију недиференцијабилних функција.

Методе веома подсећају на градијентне методе у диференцијабилном случају, уз извесне разлике. Величина корака не бира се као у диференцијабилном случају. За разлику од градијентних метода, субградијентне методе не морају бити опадајуће.

Субградијентне методе су споре; то су методе првог реда и њихове перформансе зависе од избора почетне тачке. Ипак, субградијентне методе имају предност у односу на унутрашње и *Newton*-ове методе. Разлог тој тврдњи је чињеница да је меморија коју захтевају субградијентне методе мања од меморије коју захтевају унутрашње и *Newton*-ове методе, што значи да субградијентне методе могу бити коришћене за екстремно велике проблеме за које су поменуте методе немоћне [7].

Комбинација субградијентних метода са примал - дуал декомпозиционим техникама отвара могућност развоја нових алгоритама за решавање проблема

(2.1) (видети [76]). У сваком случају, субградијентне методе заузимају важно место у области нумеричких метода за минимизацију конвексних недиференцијабилних функција, што је довољан разлог да овде буду описане.

Најважније референце из ове области су [100] и [78]. Такође, добра референца, у којој је детаљно објашњено како повезати примал и дуал декомпозицију проблема, је [4]. Друге добре референце које третирају овај проблем су [94], [75], [1], [16], [101] и [5]. Неки интересантни радови скоријег датума су [73], [74], [76], [53] и [54].

У овом поглављу посебно ћемо се фокусирати на субградијенте методе и на неке технике као што је дилатација простора, која представља уопштење квази *Newton*-ове методе оптимизације за случај глатке оптимизације. Такође, биће речи о ефикасности, као и о тешкоћама са критеријумом заустављања.

2.1 СУБГРАДИЈЕНТНА МЕТОДА

Нека је на k-тој итерацији дата тачка x_k и нека се следећа итеративна тачка x_{k+1} рачуна на следећи начин:

$$x_{k+1} = x_k - t_k d_k . \tag{2.2}$$

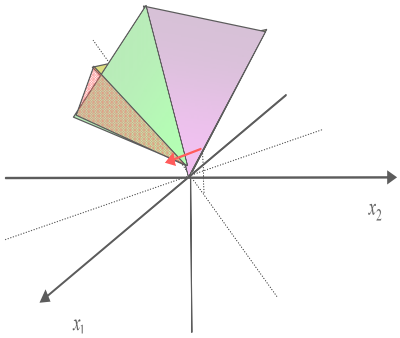
Ако је g_k произвољан субградијент функције f у тачки x_k, онда је $d_k = -g_k$ правац у ком се крећемо из тачке x_k, док $t_k > 0$ представља величину корака.

Позната је чињеница да је у случају диференцијабилних функција правац антиградијента најбржи правац опадања функције f у тачки x_k. Међутим, то се не може тврдити и за случај недиференцијабилне функције. Може се десити да $-g_k$ није опадајући правац за f, тј. да важи да је $f'(x,-g_k) > 0$. У том случају имамо да важи да је $f(x_{k+1}) > f(x_k)$. Осим тога, чак и ако је $-g_k$ опадајући правац из x_k корак нас може довести до ситуације у којој он то није. Наиме, може се десити да важи да је $f(x_{k+1}) > f(x_k)$. Другим речима, нека итерација субградијентне методе може довести до рашћења функције циља. То ћемо видети у следећем примеру.

<u>Пример 2.1.1 [78]</u> Размотримо следећу функцију две променљиве

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + 0.2|x_1 + x_2|,$$

која има тачку минимума $x^* = (0,0)^T$. Претпоставимо да се на k-тој итерацији налазимо у тачки $x_k = (1,1)^T$. Израчунајмо један произвољан субградијент $g_k = (1.2, -0.8)^T$. На Слици 13 можемо видети да правац $-g_k$ није опадајући правац, тј. не постоји величина корака t_k таква да важи да је $f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$, односно једначина $|t_k| + 0,2|1 - 0,2t_k| < 0,2$ нема решења за $t_k \in R$.



Слика 13

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| + 0.2|x_1 + x_2| = \begin{cases} 1.2x_1 - 0.8x_2 & x_1 \geq x_2 \geq -x_1 \\ 0.8x_1 - 1.2x_2 & x_1 \geq x_2, x_2 < -x_1 \\ -0.8x_1 + 1.2x_2 & x_1 < x_2, x_2 \geq -x_1 \\ -1.2x_1 + 0.8x_2 & x_1 < x_2 < -x_1 \end{cases}$$

С друге стране, имајући у виду да мали корак дуж антисубградијента може дати добар правац, може се десити да добијемо и већу вредност функције, а да смо ипак ближе оптималној тачки.

Отуда значај израчунавања величине корака t_k дуж правца антисубградијента постаје веома важан у концепту линеарног претраживања. Због тога је увођење нових критеријума за добијање величине корака потребно прилагодити тако да се крећемо ка тачки минимума функције.

Пре увођења следеће леме дефинишимо скуп: $U_k = \{x \in R^n | f(x) = f(x_k)\}$ и начин преласка из x_k у x_{k+1} следећом формулом:

$$x_{k+1} = x_k - \hat{t}\,\frac{g_k}{\|g_k\|} \tag{2.3}$$

за неко $\hat{t} > 0$, где је g_k произвољан субградијент.

Лема 2.1.1. Нека је x^* оптимална тачка конвексне функције f и x_k тачка која није оптимална. Даље, нека је x_{k+1} тачка коју рачунамо по формули (2.3) и нека важи да је

$$b_k = d\left(x^*, U_k\right) \geq \frac{\hat{t}}{2}(1+\varepsilon) \tag{2.4}$$

за неко $\varepsilon > 0$. Тада важи да је:

$$\left\|x_{k+1} - x^*\right\|^2 \leq \left\|x_k - x^*\right\|^2 - \varepsilon\hat{t}^2 \ . \tag{2.5}$$

Доказ. Видети у [100].

На основу Леме 2.1.1 следи да је конвергенција ка тачки минимума функције могућа само ако је растојање између тачке минимума функције и скупа U_k веће или једнако вредности која зависи од корака $\hat{t}$. Дакле, само у том случају може се постићи конвергенција. Међутим, тај услов није довољан, што се види из следећег разматрања.

Означимо са A следећу вредност:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \ ,$$

где је t_k величина корака у случају када се следећа итеративна тачка рачуна по формули $x_{k+1} = x_k - t_k \dfrac{g_k}{\|g_k\|}$. За неко k тада важи да је:

$$\|x_1 - x_k\| \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_2 - x_3\| + \ldots + \|x_{k-1} - x_k\| = t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1} \leq A \ . \tag{2.6}$$

Из (2.6) следи да свака тачка x_k припада сфери с центром у x_1 и полупречником A. Да би се обезбедило да тачка минимума буде у сфери са центром у полазној тачки, полупречник мора бити довољно велики, тако да је то још један услов који мора бити задовољен.

На основу овог разматрања, у [78] и [100] доказана је конвергенција субградијентне методе у којој се генерише низ тачака $\{x_k\}$ облика:

$$x_{k+1} = x_k - t_k \frac{g_k}{\|g_k\|}, \ t_k \to 0, \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty \ . \tag{2.7}$$

<u>Теорема 2.1.1.</u> [34] Нека је $\Phi_k = \min_{j=1,\dots,k} f(x_j)$ и $f^* = \inf_{x\in R^n} f(x)$, где је $f: R^n \to R \cup \{\infty\}$ конвексна функција. За низ тачака $\{x_k\}$ дефинисан са (2.7) важи да $\Phi_k \to f^*$ када $k \to \infty$.

<u>*Доказ.*</u> Претпоставимо да за свако k важи да је

$$f(x_k) \geq \hat{f} \quad , \tag{2.8}$$

где је $\hat{f}$ такво да је $\hat{f} > f^*$. Нека је $\tilde{x}$ тачка таква да важи да је $f(\tilde{x}) < \hat{f}$. Због непрекидности функције f постоји $\varepsilon > 0$ такво да важи да је

$$f(x) \leq \hat{f} \tag{2.9}$$

кад год је $\|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Нека је x_ε тачка таква да важи да је $x_\varepsilon = \tilde{x} + \varepsilon \frac{g_k}{\|g_k\|}$ за $g_k \in \partial f(x_k)$ у некој тачки x_k. За тако дефинисану тачку x_ε из неједнакости субградијента (1.9) и на основу (2.8) закључујемо да важи да је:

$$\begin{aligned} f(x_\varepsilon) &\geq f(x_k) + g_k^T(x_\varepsilon - x_k) \geq \hat{f} + g_k^T(\tilde{x} - x_k) + g_k^T(x_\varepsilon - \tilde{x}) \\ &= \hat{f} + g_k^T(\tilde{x} - x_k) + \varepsilon\|g_k\| \quad . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) за $x = x_\varepsilon$ следи да је:

$$\frac{g_k^T}{\|g_k\|}(x_k - \tilde{x}) \geq \varepsilon \, . \tag{2.11}$$

Даље, из (2.11), на основу (2.7), следи да је:

$$\|x_{k+1} - \tilde{x}\|^2 \leq \|x_k - \tilde{x}\|^2 - 2t_k\varepsilon + t_k^2 \quad . \tag{2.12}$$

Нека $t_k \to 0$. Тада постоји неко $\tilde{k}$ такво да је $t_k \leq \varepsilon$ за свако $k \geq \tilde{k}$. За свако $k \geq \tilde{k}$ онда важи да је:

$$\|x_{k+1} - \tilde{x}\|^2 \leq \|x_k - \tilde{x}\|^2 - t_k\varepsilon \quad . \tag{2.13}$$

Сумирајући (2.13) по k, због позитивности норме, следи да је $\varepsilon \sum_{k=\tilde{k}}^{\infty} t_k \leq \|x_{\tilde{k}} - \tilde{x}\|^2$, што је контрадикција са $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$. Према томе, $f(x_k) \geq \hat{f} > f^*$, тј. Φ_k тежи ка f^*.■

<u>Напомена 2.1.1</u>. Занимљиво је да Теорема 2.1.1 уводи само претпоставку о конвексности функције f, али не и претпоставку о постојању минимума те функције [34].

<u>Напомена 2.1.2.</u> У [16], [110] и [100] постоје алтернативни докази конвергенције субградијентне методе.

У [16] су приказани резултати конвергенције у случају минимизације конвексне недиференцијабилне функције. Између осталог, доказује се конвергенција субградијентне методе у случају када су итерације биране као у (2.7), али уз претпоставку да $t_k \to 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 < \infty$.

Субградијентне методе су јако споре. То је јасно, јер ако се тачка бира по (2.7), онда је конвергенција могућа само ако важи да је:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty . \tag{2.14}$$

Нешто више о брзини и начину конвергенције субградијентних метода може се видети у [60].

<u>Пропозиција 2.1.1.</u> [34] Субградијентна метода дефинисана са (2.7) конвергира брзином мањом од геометријске.

<u>Доказ</u>. Претпоставимо супротно, тј. да низ $\{x_k\}$ тежи ка x^* геометријском брзином. То значи да постоје $M > 0$ и $0 < q < 1$ такви да за свако k важи да је:

$$\left\| x_k - x^* \right\| \le M q^k \quad . \tag{2.15}$$

Из (2.15) следи да је:

$$t_k = \left\| x_{k+1} - x_k \right\| \le \left\| x_{k+1} - x^* \right\| + \left\| x^* - x_k \right\| \le M(q+1)q^k \quad . \tag{2.16}$$

Даље, из (2.16) следи да је $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \le M(q+1)\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \dfrac{M(q+1)}{1-q}$, што је контрадикција са претпоставком (2.14).■

Ипак, постоји могућност да се погодним избором величине корака у субградијентној методи дефинисаној са (2.7) постигне геометријска брзина конвергенције. Нека је

$$t_k = t_1 q^k \tag{2.17}$$

за $t_1 > 0$ и $q \in (0,1)$. Погодним избором t_1 и q могуће је постићи геометријску брзину конвергенције субградијентне методе дате са (2.7). Величина корака може се бирати и на следећи начин:

$$t_k = \lambda \frac{f(x_k) - f^*}{\|g_k\|} \text{ за } \lambda \in (0,2) \quad . \tag{2.18}$$

Наиме, важи следећа теорема.

<u>Теорема 2.1.2</u>. [34] Претпоставимо да f има минимум у тачки x^* и да је позната вредност $f^* = f(x^*)$ и за неко $l > 0$ важи да је $f(x) - f(x^*) \geq l\|x - x^*\|$ за свако $x \in R^n$. Тада метода дефинисан са (2.7), при чему се корак бира као у (2.18), конвергира ка x^* геометријском брзином.

Конкретно, под претпоставком да текућа тачка x_k није довољно близу оптималне тачке, следећа тачка x_{k+1}, на основу (2.18), израчунава се на следећи начин:

$$f(x_k) + g_k^T(x_{k+1} - x_k) = f(x_k) - t_k g_k^T \frac{g_k}{\|g_k^T\|} = f(x_k) - \lambda(f(x_k) - f^*) = (1-\lambda) f(x_k) + \lambda f^*,$$

односно за $\lambda = 1$ важи да је

$$f(x_k) + g_k^T(x_{k+1} - x_k) = f^* \quad . \tag{2.19}$$

Из (2.19) добија се $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) - f^*}{\|g_k\|} \frac{g_k}{\|g_k\|}$ што одговара субградијентној методи дефинисаној са (2.18) за $\lambda = 1$ ([34]).

У принципу, у субградијентним методама избор величиине корака се битно разликује од оног у градијентној методи. Навешћемо пет основних начина за избор величине корака.

- $t_k = t$, где је t позитивна константа независна од k ,
- $t_k = \dfrac{\gamma}{\|g_k\|}$, где је $\gamma > 0$; на пример може се бирати да је $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$,
- $t_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$; на пример може се бирати да је $t_k = \dfrac{a}{b+k}, a > 0, b \geq 0$,
- $t_k \geq 0, \lim_{k \to \infty} t_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$; на пример може се бирати да је $t_k = \dfrac{a}{\sqrt{k}}, a > 0$,
- $t_k = \dfrac{\gamma_k}{\|g_k\|}$ тако да је задовољено $\gamma_k \geq 0, \lim_{k \to \infty} \gamma_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty.$

Постоје и други избори величине корака, али су они мање-више варијација ових.

2.2 ТЕХНИКА ДИЛАТАЦИЈЕ ПРОСТОРА

У принципу, градијентна метода споро конвергира због чињенице да је правац градијента g_k у текућој тачки нормалан на правац $d_k^* = -g_{k+1}$ који води ка тачки минимума функције. Једна идеја о побољшању конвергенције лежи у чињеници да постоји могућност да се смањи компонента градијента која је ортогонална на правац ка тачки минимума. То се једноставно постиже променом угла између градијента g_k и правца d_k^*, тако што се уведе трансформација простора.

За глатке функције то се ради методом променљиве метрике (познатијом под термином квази *Newton*-ова метода), у којој се на свакој итерацији израчунава хесијан инверзне функције. Очигледно је да овакав приступ није могућ за недиференцијабилне функције. Дакле, постоји потреба да се овај концепт прошири и у недиференцијабилном случају, а пре него што га детаљно опишемо наводимо неке важне чињенице.

Нека је дат вектор $\xi \in R^n$ јединичне норме. Тада се сваки вектор $x \in R^n$ може представити на следећи начин:

$$x = \gamma_\xi(x)\xi + d_\xi(x), \tag{2.20}$$

где је

$$\xi^T d_\xi(x) = 0 \ . \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) следи да је

$$\gamma_\xi(x) = x^T\xi \ \text{ и } \ d_\xi(x) = x - \xi\xi^T x \ . \tag{2.22}$$

<u>Дефиниција 2.2.1</u>. Нека је дат број $\alpha \geq 0$ и вектор $\xi \in R^n$ такав да је $\|\xi\| = 1$. Оператор $R_\alpha(\xi)$ на R^n дефинисан са $R_\alpha(\xi)x = \alpha\gamma_\xi(x)\xi + d_\xi(x)$ за $x \in R^n$ називамо *оператор дилатације простора у правцу* ξ *са коефицијентом* α. Параметар α називамо *коефицијент дилатације*.

Из (2.21) и (2.22) следи да је

$$R_\alpha(\xi)x = \alpha\gamma_\xi(x)\xi + d_\xi(x) = \alpha\xi\xi^T x + x - \xi\xi^T x = x + (\alpha - 1)\xi\xi^T x = \left[I + (\alpha - 1)\xi\xi^T\right]x,$$

што значи да се оператор $R_\alpha(\xi)x$ може записати и матрично у следећем облику

$$R_\alpha(\xi) = I + (\alpha - 1)\xi\xi^T. \tag{2.23}$$

Овде је згодно напоменути да коефицијент дилатације игра важну улогу. Шор је у [102] показао да метода елипсоида (чији су творци *D.B. Judin* и *A.S.Nemirovski)* није ништа друго до специјалан случај алгоритма за дилатацију простора дуж субградијента.

Овде ћемо изложити две технике дилатације простора. Разматраћемо само конвексне функције. У том случају функција се може апроксимирати део по део линеарном функцијом која нема хесијан.

2.2.1 ДИЛАТАЦИЈА ДУЖ СУБГРАДИЈЕНТА

На почетку ћемо навести дефиниције потребне за излагање методе коју је Шор предложио у [100].

Претпоставићемо да у тачки x_k субградијент g_k није нула. Нека је x_1 полазна тачка, и нека је B_1 нека регуларна квадратна матрица. Можемо претпоставити да је, на пример, $B_1 = I$. Претпоставимо још да су дати низови тачака $\{t_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ (респективно корак и коефицијент дилатације).

Алгоритам који следи предложио је Шор у [100].

Алгоритам 2.2.1.

Корак 0. (Иницијални корак) Нека је $k = 1$ и нека су дати α_1, t_1, B_1.

Корак 1. Израчунати произвољан субградијент $g_k \in \partial f(x_k)$

и ставити да је

$$\hat{g}_k = B_k^T g_k \tag{2.24}$$

$$\varepsilon_k = \frac{\hat{g}_k}{\|\hat{g}_k\|} . \tag{2.25}$$

Корак 2. Рачунати нову тачку на следећи начин:

$$x_{k+1} = x_k - t_k B_k \varepsilon_k . \tag{2.26}$$

Корак 3. Ажурирати матрицу B_k на следећи начин:

$$B_{k+1} = B_k R_{\frac{1}{\alpha_k}}(\varepsilon_k) . \tag{2.27}$$

Корак 4. Израчунати α_{k+1}, t_{k+1} и ставити $k = k+1$. Иђи на Корак 2

Напомена 2.2.1. Израз (2.26) генерише низ

$$x_{k+1} = x_k - t_k \frac{H_k g_k}{\left(g_k^T H_k g_k\right)^{1/2}} , \tag{2.28}$$

где је $H_k = B_k B_k^T$. Ако је $B_1 = I$ и $\alpha_k = 1$ за свако k, онда је Алгоритмом 2.2.1 дефинисана субградијентна метода.

Напомена 2.2.2. Алгоритмом 2.2.1 дефинисана је једна флексибилна метода за различито изабране t_k и различите коефицијенте дилатације α_k.

У Алгоритму 2.2.1 може се бирати да је $A_k = B_k^{-1}$ и

$$y = A_k x \ . \tag{2.29}$$

Пропозиција 2.2.1. Вектор $\hat{g}_k$, израчунат у Кораку 1 Алгоритма 2.2.1, је субградијент функције $\varphi_k(y) = f(B_k y)$ у тачки $y_k = A_k x_k$.

Доказ. Видети у [100].

Имајући у виду Пропозицију 2.2.1 лако је видети да Алгоритам 2.2.1 није ништа друго до субградијентна метода примењена на трансформисану функцију φ_k. Заиста, множењем оба члана у (2.26) са A_k добијамо $A_k x_{k+1} = A_k x_k - t_k \varepsilon_k$, односно $y_{k+1} = y_k - t_k \varepsilon_k$, где је ε_k дефинисано са (2.25), док се матрица A_k ажурира на следећи начин

$$A_{k+1} = R_{\alpha_k}(\varepsilon_k) A_k \ . \tag{2.30}$$

Лако је проверити да (2.27) следи из (2.30).

2.2.2 ДИЛАТАЦИЈА ДУЖ РАЗЛИКЕ СУБГРАДИЈЕНАТА

Други приступ изложен у [99] сличан је претходном, и није ништа друго до техника дилатације дуж разлике градијената у две узастопне итерације у диференцијабилном случају. Наиме, угао између вектора g_{k-1} и g_k може довести до проблема званог „зиг-заг“ или „цик-цак“ као и у градијентној методи. Штавише, када је функција недиференцијабилна, разматра се $g_k^T(x^* - x_k) = g_{k-1}^T(x^* - x_k)$, односно

$$(g_k - g_{k-1})^T (x^* - x_k) = 0 \ . \tag{2.31}$$

Из (2.31) следи да је правац $g_k - g_{k-1}$ ортогоналан на правац који из x_k води до тачке минимума функције.

На основу овог разматрања, долази се до идеје да се простор прошири дуж разлике субградијената и то на начин сличан оном у претходном параграфу, тј. $\hat{g}_k = B_k^T(g_k - g_{k-1})$.

Више о методама ширења простора, може се видети у [98] и [99]. Напомињемо да у конвергенцији ових алгоритама, веома важну улогу имају t_k и α_k.

Поглавље 3

BUNDLE МЕТОДА

Увод

Седамдесетих година прошлог века *C. Lemaréchal* и *P. Wolfe* предложили су *bundle* методу за решавање проблема

$$\min_{x \in R^n} f(x),$$

где је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна и не обавезно глатка функција.

На енглеском језику *bundle*[1] значи сноп, свежањ, бала. Тај назив методе потиче од чињенице да се у свакој итерацији нов правац у решавању проблема (2.1) израчунава користећи информације из претходних итерација. Наиме, на k-тој итерацији *bundle* B_k садржи троструке информације, тј. $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) | i \in I_k\}$, где је x_i тачка, $f(x_i)$ вредност функције f у тачки x_i, и $g_i \in \partial f(x_i)$ један произвољан субградијент функције f у тачки x_i.

Међу *bundle* методама постоји мноштво метода међусобно различитих по начину селекције и компресије података, што је веома важно са становишта примене на проблеме са великим бројем променљивих и великим бројем ограничења.

Иначе, *bundle* метода настала је као стабилизована верзија методе „одсецајућих равни“ (*cutting plane method*). Управо због тога, пре излагања *bundle* методе, биће изложена метода „одсецајућих равни“.

[1] Будући да не постоји летерарура на српском језику, назив ових метода оставићемо у оригиналу.

3.1 МЕТОДА „ОДСЕЦАЈУЋИХ РАВНИ“

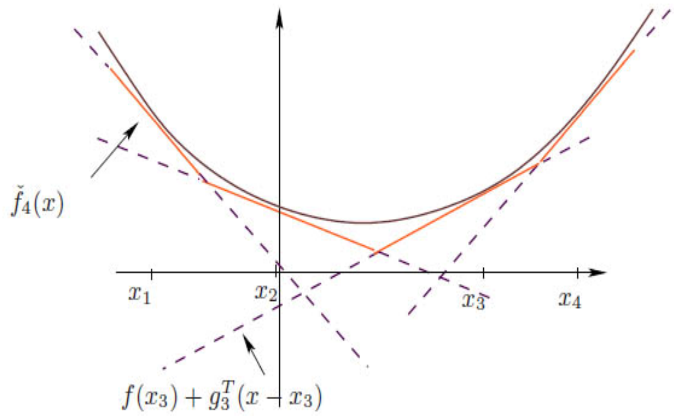
Bundle метода је метода која је предложена да поправи и стабилизује методу „одсецајућих равни“. Методу „одсецајућих равни“, коју су предложили *Cheney* и *Goldstein* [13] и *Kelley* [51] за решавање проблема (2.1), кратко ћемо описати у овом параграфу.

Претпоставимо да смо израчунали низ тачака $x_1, x_2, ..., x_k$ и да у *bundle*-у имамо израчунате вредности функције f у тим тачкама, респективно означене са $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)$, као и субградијенте функције f у тим тачкама, респективно означене са $g_1, g_2, ..., g_k$. Тада сваки елемент *bundle*-а садржи информације за дефинисање једне линеаризације функције f у околини тачке x_i, дате са

$$f_i(x) = f(x_i) + g_i^T (x - x_i).$$

Основна идеја методе „одсецајућих равни“ састоји се у томе да се на свакој итерацији одреди минимум апроксимације функције циља проблема (2.1). Та апроксимација је једна конвексна функција дефинисана на следећи начин:

$$\hat{f}_k(x) = \max_{0 \le i \le k} f_i(x) = \max_{0 \le i \le k} \left\{ f(x_i) + g_i^T (x - x_i) \right\}. \tag{3.1}$$



Слика 14

Нека основна својства функције дефинисане са (3.1) даје следећа теорема.

Теорема 3.1.1. Функција дефинисана са (3.1) има следећа својства:

$$\hat{f}_k(x) \geq \hat{f}_j(x)\ ,\ \ \forall x \in R^n, \forall k, j = 1,2,\ldots,k\ , \tag{3.2}$$

$$\hat{f}_k(x) \leq f(x)\ ,\ \ \forall x \in R^n, \forall k\ , \tag{3.3}$$

$$\hat{f}_k(x_j) = f(x_j)\ ,\ \ \forall k, j = 1,2,\ldots,k\ . \tag{3.4}$$

Доказ. Видети у [46].■

Bundle метода ослања се на резултат који непосредно следи из резултата доказаног у [18]. Прецизније, у питању је теорема којом се тврди да ако је f конвексна функција, онда важи да је она једнака максимуму својих линеаризација, тј. $f(x) = \max\limits_{z \in R^n}\left\{f(z) + g^T(x - z)\right\}$, где је $g \in \partial f(z)$. Метода „одсецајућих равни“ је управо примена ове теореме. Наиме, израз (3.1) је састављен од коначног броја линеаризација функције f. Иако метода „одсецајућих равни“ изгледа веома једноставно, при њеној примени сусрећемо се са техничким потешкоћама. Може се, наиме, догодити да је број функција чији максимум тражимо у (3.1) исувише велики. Како би се избегла ова потешкоћа потребно је увести скуп C тако да он буде конвексан и компактан и да садржи тачку минимума функције. У том случају следећа итеративна тачка добија се као $x_{k+1} := \operatorname*{argmin}\limits_{x \in C} \hat{f}_k(x)$.

Сада ћемо изложити методу „одсецајућих равни“.

Алгоритам 3.1.1.

Корак 0: Изабрати $\varepsilon \geq 0$ и $x_1 \in C$. Ставити да је $k := 1$.

Корак 1: Решити k-ти проблем „одсецајућих равни“, тј. проблем $(P_k)\ \min\limits_{x \in C} \hat{f}_k$.

Добијено решење означити са $\bar{x}$.

Корак 2: Ставити $x_{k+1} := \bar{x}$. Израчунати $f(x_{k+1})$ и један произвољан

субградијент $g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$.

Корак 3: Ако је $f(x_{k+1}) \leq \hat{f}_k(x_{k+1}) + \varepsilon$, онда СТОП.

Иначе, ставити да је $k := k + 1$ и ићи на Корак 1.

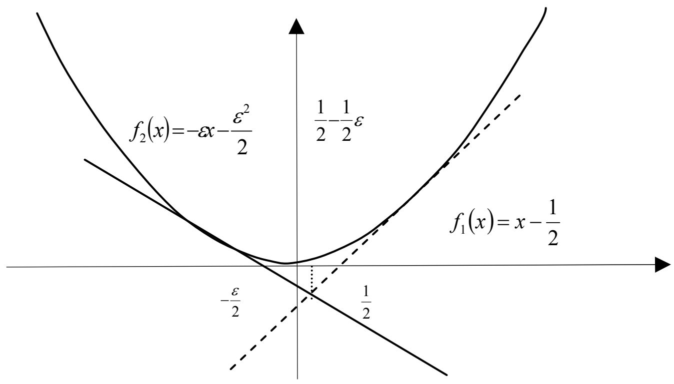
Приметимо да је проблем (P_k) еквивалентан следећем, једноставнијем, проблему:

$$\begin{cases} min\ v \\ v \geq f(x_j) + g_j^T(x - x_j),\ \forall j = 1,2,...,k \\ x \in C \end{cases} .$$

Следећи пример показује да следећа итеративна тачка не мора бити ближа оптималном решењу од текуће тачке.

<u>Пример 3.1</u>.[46] Нека је $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in R$, и нека су дате тачке $x_1 = 1$ и $x_2 = -\varepsilon < 0$. Следећу тачку бирамо тако да важи да је:

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(x) &= max\{f(x_1) + f'(x - x_1), f(x_2) + f'(x - x_2)\} \\ &= max\{f(1) + f'(1)(x-1), f(-\varepsilon) + f'(-\varepsilon)(x+\varepsilon)\} \\ &= max\left\{\frac{1}{2} + 1(x-1), \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon(x+\varepsilon)\right\} = max\left\{x - \frac{1}{2}, -\varepsilon x - \frac{\varepsilon^2}{2}\right\}. \end{aligned}$$



Слика 15

Следећа тачка бира се из услова $x_{k+1} := \underset{x \in R}{argmin}\, \hat{f}_k(x)$, а то је тачка $x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon$. Ако дозволимо да $\varepsilon \to 0$ тада ће тачка x_2 постати оптимална тачка, тј. $x_2 = x^* = 0$, а алгоритам ће нас одвести у $x_3 = \frac{1}{2}$ (која није ни близу оптималне тачке).■

Пример који следи показује нумеричку нестабилност методе „одсецајућих равни“ у случају када се она примењује у простору врло великих димензија.

<u>Пример 3.2</u>. [46] Нека је дата функција:

$$f(y,\eta) = max\{|y|, \|\eta\| - 1 + 2\varepsilon\}, \tag{3.5}$$

где је $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right), (y,\eta) \in R \times R^{n-1}$. Методом „одсецајућих равни“ ми ћемо одредити њен минимум на јединичној сфери. Приметимо да функција достиже минимум у свим тачкама скупа $\{(y,0) | y \in B^{(n)}(0,1-2\varepsilon)\}$, као и да је минимална вредност функције једнака нули. Изаберимо полазну тачку $x_1 = (y_1, \eta_1) = (0,1)$. Израчунајмо вредности функција (3.5) и (3.1) у тој првој итерацији и означимо их редом са $f_1(x_1) = \eta$ и $\hat{f}_1(x_1) = 1$. Сада решавамо први проблем „одсецања равни“, дат као што следи:

$$(P_1)\begin{cases} \min\limits_{r,x,y} \ v \\ v \geq \eta \\ \|y\|^2 + \eta^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Минимална вредност овог проблема је $v^* = -1$ и добијена је у тачки $(v^*, y^*, \eta^*) = (-1,0,-1)$.

Због тога је друга итерација $x_2 = (y_2, \eta_2) = (0,-1)$. Одавде следи да је $f(x_2) = 1$ и $\hat{f}_2(x_2) = |\eta|$. Сада решавамо други проблем „одсецања равни“, дат као што следи:

$$(P_2)\begin{cases} \min\limits_{r,x,y} \ v \\ v \geq \eta \\ \|y\|^2 + \eta^2 \leq 1 \end{cases}.$$

Минимална вредност овог проблема је $v^* = -1$ и добијена је у свим тачкама скупа $\{(v^*, y^*, \eta^*) | v^* = \eta^* = 0 \ , \|y^*\| \leq 1\}$.

Нека је $x_3 \in \{(y_3,0) \ | \ \|y_3\| = 1\}$. Тада важи да је $f(x_3) = 2\varepsilon$ и $\hat{f}_3(x_3) = \max\ \{|\eta|, 2\varepsilon + y_3^T(y - y_3)\}$. Сада решавамо трећи проблем „одсецања равни“, дат као што следи:

$$
(P_3)\begin{cases} \min\limits_{r,x,y} \ v \\ v \geq \eta \\ v \geq 2\varepsilon + y_3^T(y - y_3) \\ \|y\|^2 + \eta^2 \leq 1 \end{cases} .
$$

Минимална вредност овог проблема је $v^* = 0$ и добијена је у свим тачкама скупа $\left\{(v^*, y^*, \eta^*) \middle| v^* = \eta^* = 0 \ , \|y^*\| \leq 1, y^{*T} y_3 \leq 1 - 2\varepsilon \right\}$.

Нека је $x_4 \in \left\{(y_4, 0) \middle| \ \|y_4\| = 1 \ , y_4^T y_3 \leq 1 - 2\varepsilon \right\}$. Тада важи да је $f(x_4) = 2\varepsilon$. Приметимо да је $v^* = \eta^* = 0 \ \ v^* = 0$ за $k \geq 2$. Због тога важи да је:

$$
0 \leq \hat{f}_2(x_3) \leq \hat{f}_k(x_{k+1}) \leq f_c^* = 0 \qquad k \geq 2 .
$$

Пре него што елиминишемо векторе јединичне норме, тј. пре него што извршимо одсецање (рез), приметимо да је

$$
x_{i+1} \in \left\{(y_{i+1}, 0) \middle| \|y_{i+1}\| = 1, \ y_{i+1}^T y_p \leq 1 - 2\varepsilon \ , \ p = 3,4,...,i \right\},
$$

где је са x_{i+1} означено решење проблема (P_i).

Познато је да је површина сфере $S_r^{(n)}(0)$ једнака $r^{n-1} S_n$, где је S_n површина сфере $S_1^{(n)}(0)$. Више од тога, површина сферног одсечка у R^n на растојању r од координатног почетка (Слика 16(а)) дата је са $S_{n-1}\left(\sqrt{1 - r^2}\right)^{n-2} dr = S_{n-1}(\sin\theta)^{n-1} d\theta$.

Дефинишимо $S(\varepsilon)$ као површину i-те сферне капе (Слика 16(б)), тј. $\left\{y \in R^n \middle| \|y\| = 1, y^T y \geq 1 - 2\varepsilon \right\}$.

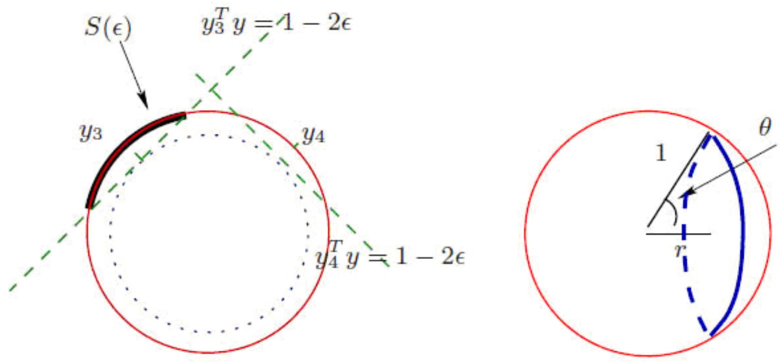
На крају, након $2 + \dfrac{S_n}{S(\varepsilon)}$ итерација, биће задовољен критеријум заустављања у Кораку 3 Алгоритма 3.1.1. Стављајући да је $\theta_\varepsilon = \dfrac{1}{\cos(1 - 2\varepsilon)}$ закључујемо да важи да је

$$
S(\varepsilon) = S_{n-1} \int_0^{\theta_\varepsilon} (\sin\theta)^{n-1} d\theta \leq S_{n-1} \int_0^{\theta_\varepsilon} (\theta)^{n-1} d\theta = S_{n-1} \frac{1}{n} (\theta_\varepsilon)^n
$$

и

$$
S_n = 2S_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{n-1} d\theta \geq 2S_{n-1} \int_0^{\theta_\varepsilon} (\sin\theta)^{n-1} \cos\theta d\theta = \frac{2}{n} S_{n-1} .
$$

Узевши у обзир да је $\theta_\varepsilon \approx 2\sqrt{\varepsilon}$ за ε довољно мало, важи да је $\frac{S_n}{S(\varepsilon)_\varepsilon} \approx \frac{2}{\left(2\sqrt{\varepsilon}\right)^n}$, што је у случају великог n просто немогуће израчунати.



(а) (б)

Слика 16

Геометријски гледано, како је приказано на Слици 16, ми заправо вршимо одсецање „сферне капе“ која је ε-кореспондирана конвексном омотачу (на Слици 16 је „сферна капа“ представљена подебљано).■

Увођење скупа C спречава појаву неограниченог броја функција у (3.1). Што се тиче стабилности морамо обезбедити да следећа тачка не одступа превише од текуће. То се може постићи, на пример увођењем могућности да се скуп C може разликовати на свакој итерацији. За стабилизацију методе наводимо неколико могућности.

- За нумеричку стабилност може се бирати и неки модел функције, означен са $\varphi(x)$ који апроксимира функцију циља f. Један такав избор би био функција дефинисана са (3.1);
- Да би смо избегли нумеричку нестабилност, у свакој итерацији можемо дефинисати једну посебну тачку, коју назвамо центар стабилности и означавамо је са y_k, тако да она буде „најближа“ тачки минимума функције f. Обично је бирамо као једну од тачака $x_1,\ldots,x_k$, (на пример ону у којој је вредност функције f најмања) и њу чувамо за нову итерацију x_{k+1} да бисмо постигли довољно опадање функције f;

- У центру стабилности дефинише се скуп $C_k = B^n(y_k, \tau_k)$ који је конвексан и компактан и у коме ће се наћи следећа итерација. Важно је да се дефинише норма (у општем случају довољно је узети еуклидску, али могу и друге), као и сам полупречник τ_k;

- Коначно, тачка која треба да стабилизује методу „одсецајућих равни“ мора задовољити два супротстављена захтева: да буде тачка минимума функције $\varphi(x)$ и да њено растојање од центра стабилизације буде најкраће.

3.2 СТАБИЛИЗАЦИЈА МЕТОДЕ ОДСЕЦАЈУЋИХ РАВНИ

У овом параграфу дајемо опис три могуће верзије *bundle* методе, методе која стабилизује методу „одсецајућих равни“. Модел апроксимације функције f дате у (3.1) састоји се од афиних функција, а под нормом подразумеваћемо еуклидску норму.

1. Прва могућност стабилизације методе „одсецајућих равни“ састоји се у томе да се тражи центар стабилности, тј. да се одреде центар y_k и полупречник τ_k лопте у којој ће се та апроксимација разматрати, тј.:

$$x_{k+1} := \underset{x}{argmin}\, \hat{f}_k(x) \qquad \text{тако да важи да је } \|x - y_k\| \le \tau_k \quad . \tag{3.6}$$

Проблем (3.6) је минимизација конвексне функције(дате са (3.1)) у *trust region*-у. Управо налажење *trust region*-а је овде суштинско питање. Пре свега, треба водити рачуна да полупречник лопте мора да тежи нули, у противном метода не мора да конвергира ка тачки минимума.

2. Нешто боља техника стабилизације је метода казнених функција у којој се разматра удаљеност тачке од центра лопте. Ако проблем (3.6) преведемо у проблем без ограничења добићемо казнену функцију облика

$$\min_{x}\left\{ \hat{f}_k(x)+\frac{1}{2}\beta_k\|x-y_k\|^2 \right\} , \tag{3.7}$$

где је β_k промењљиви казнени параметар („*proximity parameter*" или „*penalty parameter*"), који, када тежи нули, „враћа" проблем у основни тип методе „одсецајућих равни". Ако је вредност функције f у тачки x_{k+1} мања од вредности функције у центру стабилности y_k, онда ажурирамо центар стабилности стављајући $y_{k+1}=x_{k+1}$ (то је корак опадања), а ако то није задовољено, центар стабилности остаје непромењен (нулти корак).

Пре увођења треће могућности стабилизације методе, приметимо да се проблем (3.7) може превести у проблем квадратног програмирања са линеарним ограничењима, тј. проблем (3.7) еквивалентан је следећем проблему:

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x\in R^n, r\in R}\left\{ r+\frac{1}{2}\beta_k\|x-y_k\|^2 \right\} \\ r\geq f(x_j)+g_j^T(x-x_j), j=1,2,\ldots,k \end{array} . \tag{3.8}$$

3. Трећи приступ се базира на следећој идеји: квадратни проблем (3.7) може се разматрати као дуалан за ограничења у (3.6), или као проблем

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x}\frac{1}{2}\beta_k\|x-y_k\|^2 \\ \hat{f}_k(x)\leq\gamma_k \end{array} . \tag{3.9}$$

   Занимљиво је да γ_k треба бирати тако да важи да је $\hat{f}_k(x)\leq\gamma_k<\hat{f}_k(y_k)$ (прва неједнакост следи из дефинициије (3.1), док друга обезбеђује да се не вратимо у исту тачку). Овај проблем је познат као ниво-скуп и разматран је у [58], [64] и [34].

Параметри τ_k,β_k,γ_k су предмет истраживања у *bundle* методама. У том смислу занимљиви су радови [56], [97] и [64]. У [33] је показано да су све три наведене могућности стабилизације, у суштини, еквивалентне.

Напомена 3.2.1. Како је извод у правцу у тачки y_k негативан у правцу опадања функције, следи да је $f'(y_k;d_k)<0$ ако је d_k правац опадања функције. Дакле, могући избор праваца своди се на оне за које је извод у правцу негативан. Другим речима, правац опадања можемо добити решавањем следећег проблема (норма је еуклидска):

$$\begin{array}{l} \min\limits_x f'(y_k;x-y_k) \\ \|x-y_k\|\le 1 \end{array} . \tag{3.10}$$

Због позитивне хомогености извода у правцу еуклидска норма је ирелевантна за радијус сфере, па се узима да је 1.

Приметимо да се за смер опадања узима решење проблема (3.10), а проблем се решава погодним избором апроксимације φ_k за функцију $f'(y_k;x-y_k)$ која је позитивно хомогена. У последњем случају пресудан је избор радијуса τ_k (односно β_k и γ_k). То практично значи да је од нарочите важности изабрати добар модел $\varphi_k = f'(y_k;x-y_k)$.

3.3 НАЧЕЛО НУЛТОГ (узалудног) КОРАКА

У овом параграфу разматраћемо центар стабилности и услове које он ствара за стабилност *bundle* метода. Нека δ_k означава стварно смањење које постиже функција преласком из тачке y_k у нову тачку x_{k+1}. То смањење не мора бити тачно израчунато, наиме, можемо разматрати и приближна величина смањења. Прецизније, можемо разматрати да ли је задовољена неједнакост $f(y_k)-f(x_{k+1})\ge m\delta_k$, односно

$$f(x_{k+1})\le f(y_k)-m\delta_k \ , \tag{3.11}$$

за $m\in(0,1)$, док се δ_k може бирати на разне начине. Управо начин избора δ_k доводи нас до типичних модела проблема.

Ако бирамо δ_k тако да је.:

- $\delta_k = f(y_k) - \hat{f}_k(x_{k+1})$, то је *trust region* модел,
- $\delta_k = f(y_k) - \hat{f}_k(x_{k+1}) - \frac{1}{2}\beta_k \|x_{k+1} - y_k\|^2$, то је модел казненог параметра,
- $\delta_k = \gamma_k - f(y_k)$, то је модел ниво - скупа.

Ако нова тачка x_{k+1} задовољава (3.11) онда је $y_{k+1} := x_{k+1}$ и кажемо да је корак „стабилан“, иначе важи да је $y_{k+1} := y_k$ и кажемо да је корак „узалудан“ или „нулти“. У том смислу (3.11) представља тест стабилности.

За опадање функције, односно да би важило да је $f(x_{k+1}) < f(y_k)$, потребно је да корак буде стабилан. Будући да *bundle* метода омогућава ажурирање текуће итерације само када постоји стварно смањење функције, она се, за разлику од субградијентних метода, може сврстати у класу такозваних метода опадања. Важно је напоменути да нулти корак, иако не остварује померање из тачке, обогаћује апроксимативни модел $\hat{f}_k$, и то на тај начин што *bundle*-у додаје нову линеаризацију у тачки x_{k+1} .

<u>Напомена 3.3.1.[46]</u> Једноставан тест типа $f(x_{k+1}) < f(y_k)$ није нарочито делотворан и може довести до грешке која може угрозити конвергенцију алгоритма.

У *bundle* методи се, дакле, испитује да ли нова тачка x_{k+1} задовољава тест стабилности, па и ако га не прође она на известан начин улази у следећу итерацију у смислу ограничења. То је веома важно, јер обезбеђује да се метода не заглави у тачки која није прошла тест стабилности.

3.4 ОПШТА МЕТОДА

Сконцентришимо се на други од три изложена модела проблема стабилизације, тј. на модел проблема (3.8) у коме изостављамо функцију (3.1) на тај начин што је мајоризирамо са r и постављамо ограничење (управо онако како тврди теорема о апроксимацији конвексне функције максимумом њених линеаризација). На тај начин добијамо проблем са ограничењем, али губимо недиференцијабилност. Разматрамо, дакле, следећи проблем:

$$\begin{gathered} \min_{x \in R^n, r \in R} \left\{ r + \frac{1}{2} \beta_k \| x - y_k \|^2 \right\} \\ r \geq f(x_j) + g_j^T (x - x_j), j = 1,2,\ldots,k \end{gathered} . \tag{3.12}$$

Означимо меру одступања j-те линеаризације од вредности функције у тачки y_k са

$$e_j^k := f(y_k) - f_j(y_k) = f(y_k) - f(x_j) - g_j^T (y_k - x_j) . \tag{3.13}$$

Јасно је да из неједнакости (3.13) следи да је $f(x_j) + g_j^T (y_k - x_j) = f(y_k) - e_j^k$ и да увек важи да је $e_j^k \geq 0$ (на основу дефиниције субградијента).

Напомена 3.4.1. На основу дефиниције субградијента за свако $x \in R^n$ задовољена је неједнакост $f(x) \geq f(y_k) + g_j^T (x - y_k)$, одакле због $e_j^k \geq 0$, следи да важи следећа неједнакост:

$$f(x) \geq f(x_j) + g_j^T (x - x_j) = f(x_j) + g_j^T (x - y_k) + g_j^T (y_k - x_j) = f(y_k) - e_j^k + g_j^T (x - y_k),$$

односно:

$$f(x) \geq f(y_k) + g_j^T (x - y_k) - e_j^k . \tag{3.14}$$

Израз (3.14) показује да ако $g_j \in \partial f(x_j)$, онда је g_j заправо ε-субградијент функције f у тачки y_k за $\varepsilon = e_j^k$ (то је познат резултат доказан у [90]). Другим речима, грешка линеаризације представља меру одступања субградијента g_j функције f у тачки x_j од субградијента функције f у тачки y_k. С обзиром да је могуће конструисати такозване приближне методе које су ε-апроксимативне, довољно је рачунати те генеричке субградијенте, тј. ε-субградијенте у текућим итерацијама.■

Увођење грешке линеаризације дозвољава нам другачији запис проблема (3.12), тј. на основу (3.14) проблем (3.12) се може написати и у следећем облику:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in R^n, r\in R}\left\{r+\frac{1}{2}\beta_k\|x-y_k\|^2\right\} \\ &r \geq f(y_k)+g_j^T(x-y_k)-e_j^k,\ j=1,2,\dots,k \end{aligned} \quad . \tag{3.15}$$

Ако уведемо ознаке $v := r - f(y_k)$ и $d := x - y_k$, онда ће проблем (3.15) бити еквивалентан са следећим проблемом (у коме се само вредност функције циља помера за вредност $-f(y_k)$, која је константна и не утиче на налажење оптимума):

$$\begin{aligned} &\min_{d\in R^n, v\in R}\left\{v+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2\right\} \\ &v \geq g_j^T d - e_j^k,\ j=1,2,\dots,k \end{aligned} \quad . \tag{3.16}$$

Проблем (3.16) је класичан квадратни проблем *bundle* методе.

Конструисаћемо његов дуал.

Да се подсетимо, ако је примал дат са $\left.\begin{aligned} &\min_{x\in R^n}\varphi(x) \\ &f_j(x)\leq 0\ ,\ j=1,..,m \end{aligned}\right\}$ $(\overline{P})$,

онда је дуал

$$\left.\begin{aligned} &\max_{x\in R^n, u\in R^m}\psi(x,u)=\left(\varphi(x)+u^T f(x)\right) \\ &\nabla\varphi(x)+\sum_{j=1}^{m}u^T\nabla f(x)=0 \\ &u\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (\overline{D}).$$

Конкретно у нашем случају примал је

$$\left.\begin{aligned} &\min_{d\in R^n, v\in R}\left\{v+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2\right\} \\ &v \geq g_j^T d - e_j^k,\ j=1,2,\dots,k \end{aligned}\right\} \quad (P),$$

па је онда дуал дат са

$$\left.\begin{aligned} &\max_{d\in R^n, v\in R, \lambda\in R^k}\left(v+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2+\lambda^T\begin{pmatrix} g_1^T d - e_1^k - v \\ g_2^T d - e_2^k - v \\ \vdots \\ g_k^T d - e_k^k - v \end{pmatrix}\right) \\ &1+\lambda^T\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}=0\ ,\ \beta_k d+\lambda^T\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}=0,\ \lambda\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (D),$$

односно,

$$\left.\begin{array}{l}\underset{d\in R^n, v\in R, \lambda\in R^k}{max}\left(v+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j^T d-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j^k-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j v\right)\\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1,\ \beta_k d+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j=0,\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,...,k\end{array}\right\}\ (D)\ .$$

Ако претпоставимо да је $\beta_k > 0$, онда важи да је

$$\left.\begin{array}{l}\underset{d\in R^n, v\in R, \lambda\in R^k}{max}\left(v+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2+d\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j^T-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j^k-v\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)\\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\\ d=-\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,...,k\end{array}\right\}\ (D)$$

одакле, на основу (3.14), следи да је:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{d\in R^n, \lambda\in R^k}{max}\left(\nu+\frac{1}{2}\beta_k\|d\|^2-\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j^T-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j^k-\nu\right)\\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\\ d=-\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,...,k\end{array}\right\}(D)\ ,$$

односно:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{d\in R^n, \lambda\in R^k}{max}\left(\frac{1}{2}\beta_k\left\|-\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\right\|^2-\frac{1}{\beta_k}\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\right\|^2-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j^k\right)\\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\\ d=-\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,...,k\end{array}\right\}\ (D).$$

Како је максимум дуала једнак минимиму примала, дуал за проблем (3.16) је

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\lambda\in R^k}{min}\left(\frac{1}{2\beta_k}\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\right\|^2+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j e_j^k\right)\\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1\\ \lambda_j\geq 0, j=1,2,...,k\end{array}\right\}\ (D)\ . \qquad (3.17)$$

Ако, респективно са (d_k, v_k) и $\lambda_j^*, j = 1,2,...,k$ означимо решења проблема (3.16) и (3.17), онда на основу дуалности (стр. 50 у [107]), важи да је :

$$d_k = -\frac{1}{\beta_k}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* g_j \tag{3.18}$$

и

$$v_k = -\frac{1}{\beta_k}\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* g_j\right\|^2 - \sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* e_j^k \,. \tag{3.19}$$

С обзиром на (3.19) јасно је да увек важи да је $v_k \le 0$ (критеријум заустављања у *bundle* методама је $v_k = 0$). Ако је грешка линеаризације e_j^k већа, онда је, на основу (3.18), одговарајућа вредност λ_j^* мања (јер су $\lambda_j^*, j = 1,2,...,k$ решења дуала (3.17)), па је због тога мањи и удео субградијента g_j у рачунању правца d_k .

Занимљиво је разматрати грешку линеаризације, као и могућност да се она чува у *bundle*-у. Заправо, ако се нови правац рачуна решавањем проблема (3.16), онда се чувају не више триплети $(x_j, f(x_j), g_j)$ већ парови (g_j, e_j^k), што је значајна уштеда меморије. Ажурирање грешака линеаризације на следећој итерацији врши се помоћу формуле

$$e_j^{k+1} := f(y_{k+1}) - f_j(y_{k+1}) = e_j^k + f(y_{k+1}) - f(y_k) + g_j^T(y_k - y_{k+1}).$$

<u>Напомена 3.4.2.</u> Размотримо везу између вредности функције f у тачки y_k и вредности функције $\hat{f}_k$ у тачки $y_k + d_k = x_{k+1}$. Због конвексности функције $\hat{f}_k$ на основу Теореме 3.1.1 за свако $t \in [0,1]$ важи:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k(y_k + td_k) &= \hat{f}_k((1-t)y_k + t(y_k + d_k)) \\
&\le (1-t)\hat{f}_k(y_k) + t\hat{f}_k(y_k + d_k) \\
&\le (1-t)f(y_k) + t\hat{f}_k(y_k + d_k) \\
&\le f(y_k) + t\left(\hat{f}_k(y_k + d_k) - f(y_k)\right) = f(y_k) + tv_k \,.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Из израза (3.20) за $t > 0$ следи да је $\frac{\hat{f}_k(y_k + td_k) - f(y_k)}{t} \leq v_k$. Ако се у изразу (3.11) узме да је $\delta_k = -v_k$, добија се

$$f(x_{k+1}) \leq f(y_k) + m v_k \quad . \tag{3.21}$$

Вредност v_k може се, дакле, интерпретирати као апроксимација извода у правцу функције f у тачки y_k у правцу d_k. На основу (3.20) следи да је вредност v_k процена разлике $\hat{f}_k(y_k + d_k) - f(y_k)$.

Увођењем функције $q(t) = f(y_k + td_k)$ тест (3.21) може добити и једноставнији облик:

$$q(t) \leq q(0) + mtq'(0),$$

што је лакше проверити [5]. Приметимо да $q'(0)$ представља извод у правцу функције f у правцу d_k, као и да је v_k у (3.21) само процена (па, као процена, не мора бити једнозначна).

С обзиром да је $t > 0$ и $v_k \leq 0$ следи да је

$$\hat{f}_k(y_k + td_k) \leq f(y_k) + tv_k \leq f(y_k),$$

што значи да у тачки y_k у правцу d_k максимум линеаризација конвексне функције f остаје мањи од вредности саме функције f у тачки y_k.

Напомена 3.4.3. Множећи функцију циља са $\beta_k > 0$ решење проблема (3.17) се не мења, наиме проблем (3.17) еквивалентан је следећем проблему:

$$\left. \begin{array}{l} \min\limits_{\lambda \in R^k} \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \right\|^2 + \beta_k \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j^k \right) \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,k \end{array} \right\} \quad . \tag{3.22}$$

Приметимо да, ако је решење дуала λ_j^*, онда се нова итеративна тачка за проблем (3.12) рачуна на следећи начин

$$x_{k+1} = y_k + d_k = y_k - \frac{1}{\beta_k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* g_j \quad . \tag{3.23}$$

У проблему (3.22) могуће је линеаран члан функције циља разматрати као ограничење дуала следећег типа: $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* e_j^k \leq \eta_k$.

Како је $\beta_k > 0$ онда постоји η_k такво да се решење проблема (3.7) може представити са (3.23), при чему је λ решење следећег проблема

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda \in R^k} \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j \right\|^2 \right) \\ & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j^k \leq \eta_k , \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 . \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1,2,...,k \end{aligned} \tag{3.24}$$

Модел (3.24) је стабилизација модела „одсецајућих равни“ и еквивалентан је са (3.6), (3.7) и (3.9). Може се узети и следећа апроксимација ([46])

$$\min_{j=1,2,...,k} e_j^k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \min_{j=1,2,...,k} e_j^k \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j^k \leq \eta_k \Rightarrow \min_{j=1,2,...,k} e_j^k \leq \eta_k \quad .$$

3.4.1. ТЕХНИКА СЕЛЕКЦИЈЕ

У *bundle* методама веома је важна структура самог *bundle*-а, тј. важна је структура скупа информација које чувамо. Како добар алгоритам захтева коришћење минималних капацитета меморије (иначе се не може имплементирати), неопходно је истраживати нове методе решавања проблема (2.1). То истраживање се, пре свега, односи на избор података у *bundle*-у, односно на елиминисање оних података чије је учешће у избору новог правца занемарљиво. Као што смо видели, тај избор може се темељити, на пример, на разматрању грешака линеаризације.

Једна од могућих идеја за налажење d_k у тачки y_k је:

$$f'(y_k ; d_k) < 0 \ . \tag{3.25}$$

Ако је функција f глатка, онда је врло лако израчунати извод у правцу $f'(y_k;d_k)$, док се ствар знатно компликује у недиференцијабилном случају, јер тада важи да је:

$$f'(y_k;d_k)= \max_{g\in\partial f(y_k)} g^T d_k \quad . \tag{3.26}$$

Овде се намеће следеће питање: Зашто уопште проверавати (3.25) ако функција није диференцијабилна? Треба само израчунати правац d_k који гради туп угао са свим векторима $g \in \partial f(y_k)$. Једна таква идеја показала се потпуно непрактичном, јер није могуће имати потпуни увид у субдиференцијал осим уколико функција није диференцијабилна (у том случају је субдиференцијал једночлан скуп чији је једини елемент баш градијент).

Дакле, потребно је направити добру апроксимацију субдиференцијала функције у текућој тачки на k-тој итерацији (Напомена 3.4.1), а то значи да је потребно одредити довољно мали ε-субдиференцијал који га садржи (преко грешке линеаризације). Но, ако је ε-субдиференцијал непоуздан, онда ћемо имати велико одступање од резултата. Да бисмо избегли овај проблем треба из *bundle*-а избацити све оне вредности које карактерише велика грешка линеаризације, и то тако што унапред задамо праг поузданости.

Другу технику селекције предложио је *Kiwiel* у [55]. Та техника заснована је на идеји да се проблем (3.16) може решити преко свог дуала (3.17), а потом применити на (3.18). Наиме, нека је $J_k = \{1,2,...,k\}$. Означимо са $\hat{J}_k := \{ j \in J_k \,|\, \lambda_j^* > 0\}$ и нека је $p_k := \sum_{j\in J_k} \lambda_j^* g_j = -\beta_k d_k$. Приметимо да $\lambda_j^*, j \notin \hat{J}_k$ не утиче на решење проблема (3.16), па је он еквивалентан следећем проблему:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{d\in R^n, v\in R} \left\{ v + \dfrac{1}{2}\beta_k \|d\|^2 \right\} \\ v \geq g_j^T d - e_j^k, \; j \in \hat{J}_k \end{array}\right\} \quad . \tag{3.27}$$

Решење дуала $\lambda_j^*, j \in \hat{J}_k$ је могуће израчунати јер је $|\hat{J}_k| \leq n+1$. Величина p_k јединствено одређује решење (d_k, v_k) проблема (3.16) еквивалентног проблему (3.7), а дуал (3.17) је увек могуће решити елиминацијом квадратног дела функције циља са $\sum_{j\in J_k} \lambda_j g_j = p_k$, па тако проблем постаје линеаран:

$$\min_{\lambda} \sum_{j \in J_k} \lambda_j e_j^k$$
$$\sum_{j \in J_k} \lambda_j g_j = p_k, \sum_{j \in J_k}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in J_k \quad . \tag{3.28}$$

Проблем (3.28) је еквивалентан проблему (3.17) и важи да је $\sum_{j \in J_k} \lambda_j^* g_j = p_k$.

На k-тој итерацији решавање проблема (3.18) исто је што и решавање проблема (3.28), а то нам омогућава да у следећој итерацији можемо изоставити оне тачке у којима је $\lambda_j^* = 0$. Ако смо у простору врло великих димензија, онда није лоше знати и технике агрегације.

3.4.2 ТЕХНИКЕ АГРЕГАЦИЈЕ

Важна техника за управљање *bundle* методом је техника агрегације, која се састоји у агрегацији линеаризације и њоме се покушава избећи чување свих података у меморији.

Усмеримо сада пажњу на следећи проблем:

$$\min_{x} \left\{ \varphi(x) + \frac{\beta}{2} \|x - y\|^2 \right\} \quad , \tag{3.29}$$

где је φ конвексна функција која апроксимира f.

Ако је $\hat{x}$ решење проблема (3.29), онда тачка $\hat{x}$ задовољава потребан услов оптимума, тј. важи да је:

$$0 = p + \beta(\hat{x} - y) \text{ за свако } p \in \partial\varphi(\hat{x}) \quad . \tag{3.30}$$

<u>Теорема 3.4.1.</u> Нека је $\psi : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ функција таква да за свако $x \in R^n$ важи да је

$$\psi(x) \geq f^a(x) := \varphi(\hat{x}) + p^T (x - \hat{x}) \tag{3.31}$$

и $\psi(\hat{x}) = \varphi(\hat{x})$. Тада је $\hat{x}$ тачка минимума функције

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x) + \frac{1}{2}\beta\|x - y\|^2 \quad . \tag{3.32}$$

<u>Доказ.</u> Видети у [46].■

Линеаризација $f^a(x)$ дефинисана у Теореми 3.4.1 је линеарна агрегација. Теорема 3.4.1, заправо, дефинише начин на који се линеарне агрегације могу лако одредити. С обзиром да на k-тој итерацији треба генерисати проблем (3.29), узимајући да је $\varphi(x)=\hat{f}_k(x)$ и $\beta=\beta_k, y=y_k$, враћамо се на проблем (3.7), за који је линеаризација дата са:

$$\hat{f}_k^a(x)=\hat{f}_k(x_{k+1})+p_k^T(x-x_{k+1}), \tag{3.33}$$

где је x_{k+1} решење проблема (3.7) у текућој итерацији k. У тачки x_{k+1} конструишемо нову тачку *bundle*-а тако да задовољава услов (3.30) придружујући субградијентну агрегацију $p_k=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* g_j$, где су $\lambda_j^*, j=1,2,...,k$ решења дуала (3.17) па услови оптималности постају:

$$0=p_k+\beta_k(x_{k+1}-y_k) \text{ за свако } p_k\in\partial\hat{f}_k(x_{k+1}) \ . \tag{3.34}$$

Пре преласка са $\hat{f}_k$ на $\hat{f}_{k+1}$, функција $\hat{f}_k$ се може „олакшати“ за неке старе линеаризације, тј. може се разматрати $\hat{f}_k^a$, која се може означити са $\tilde{f}_k$. У том случају нова $\hat{f}_{k+1}$ се бира из услова: $\hat{f}_{k+1}(x)=max\{\tilde{f}_k(x), f(x_{k+1})+g_{k+1}^T(x-x_{k+1})\}$, где је g_{k+1} произвољан субградијент функције f у тачки x_{k+1}.

<u>Пропозиција 3.4.1.</u> Линеарна агрегација $\hat{f}_k^a$ је конвексна комбинација старих линеаризација, при чему су коефицијенти конвексности решења проблема (3.17), тј. важи да је:

$$\hat{f}_k^a(x)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* f_j(x) \ . \tag{3.35}$$

<u>*Доказ*</u>. Видети у [55].■

<u>Пропозиција 3.4.2.</u> За свако $x\in R^n$ важи следећа неједнакост:

$$f(x)\geq f(y_k)+p_k^T(x-y_k)-\omega_k \ , \tag{3.36}$$

где је $\omega_k=f(y_k)-\hat{f}_k^a(y_k)\geq 0$.

<u>*Доказ*</u>. Видети у [55].■

Напомена 3.4.1. Величина ω_k није ништа друго до конвексна комбинација коефицијената λ_j^* и грешака линеаризације $e_j^k.j=1,...,k$. Заправо, из (3.35) следи да је $\hat{f}_k^a(y_k)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* f_j(y_k)$, и зато је

$$\omega_k = f(y_k)-\hat{f}_k^a(y_k)=f(y_k)-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* f_j(y_k)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^*\left[f(y_k)-f_j(y_k)\right]=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^* e_j^k\ .■$$

Теорема 3.4.2. За свако $x\in R^n$ важи следећа неједнакост

$$f(x)\geq f(y_k)-|\nu_k\beta_k|^{\frac{1}{2}}\|x-y_k\|+\nu_k\,. \tag{3.37}$$

Доказ. Видети у [46].■

Теорема 3.4.2 је фундаментална за *bundle* методу, јер даје критеријум заустављања. Дакле на k-тој итерацији, решењу проблема (3.16) придружује се ν_k и ако је $|\nu_k|\leq\sigma$ за σ довољно мало, онда се алгоритам зауставља у тачки y_k.

3.4.3 АЛГОРИТАМ

Сада имамо све потребне елементе за конструкцију једног општег алгоритма *bundle* методе. Означимо са y_k центар стабилности на k-тој итерацији, са B_k *bundle* који се састоји из парова (e_j^k, y_k) и са l текућу димензију за *bundle*.

Увешћемо и следеће параметре:

- $\bar{l}>2$ максимална димензија *bundle*-а,
- $m\in(0,1)$ параметар за тест (3.11),
- σ параметар који се користи за тест заустављања.

Да бисмо сагледали како казнени параметар β_k на текућој, k-тој итерацији, утиче на одређивање вектора p_k, размотримо инверзни параметар $\alpha_k = \dfrac{1}{\beta_k}$, као и следећи дуални проблем:

$$\begin{aligned} &\min_{\lambda \in R^k} \left(\frac{\alpha_k}{2} \left\| \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j e_j^k \right) \\ &\sum_{j=1}^{l} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1,2,\dots,l \end{aligned} \quad . \tag{3.38}$$

Сада ћемо описати један општи *bundle* алгоритам са почетном тачком $x_1 \in R^n$.

Алгоритам 3.4.1.

Корак 1 (Иницијализација): Ставити да је

$$k = 1,\, l = 1,\, y_1 = x_1,\, e_1^1 = 0,\ B_1 = \left(e_1^1, g_1\right)$$

Корак 2 (Дуални проблем): Изабрати $\alpha_k > 0$

и решити проблем (3.38). Израчунати $x_{k+1} = y_k - \alpha_k p_k$

и $v_k = -\alpha_k \left\| p_k \right\|^2 - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* e_j^k$ за $p_k = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* g_j \in \partial \hat{f}_k\left(x_{k+1}\right)$.

Ставити да је $\delta_k = -v_k - \dfrac{1}{2} \alpha_k \left\| p_k \right\|^2$ и $\hat{e}_k := \omega_k = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j^* e_j^k$.

Корак 3 (Тест заустављања): Ако је $\left| v_k \right| \leq \sigma$ СТОП . Решење је $x^* := y_k$.

Корак 4 (Тест опадања): Израчунати $f\left(x_{k+1}\right)$ и $g_{k+1} \in \partial f\left(x_{k+1}\right)$.

Ако важи да је $f\left(x_{k+1}\right) > f\left(y_k\right) - m\delta_k$ ићи на Корак 6.

Корак 5 (Успешан корак) : Ставити да је $y_{k+1} := x_{k+1}$ и

$$e_j^{k+1} = e_j^k + f\left(y_{k+1}\right) - f\left(y_k\right) + g_j^T\left(y_k - y_{k+1}\right), j = 1,\dots,l \text{ и } e_{l+1}^{k+1} = 0 \tag{3.39}$$

и ићи на Корак 7.

Корак 6 (Нулти корак)*:* Ставити да је $y_{k+1} := y_k$ и $e_j^{k+1} = e_j^k$, $j = 1,\dots,l$ и

$$e_{l+1}^{k+1} = f\left(y_k\right) - f\left(x_{k+1}\right) - g_{k+1}^T\left(y_k - y_{k+1}\right) \ . \tag{3.40}$$

Корак 7 (Агрегација): Ако је $l = \bar{l}$ уклонити из *bundle*-а бар 2 елемента

и убацити $\left(p_k, \hat{e}_k\right)$. Ако $l < \bar{l}$ нови *bundle* је $B_k = \left\{\left(g_j, e_j\right) : j = 1,2,\dots,l\right\}$.

Корак 8: Ставити $B_k := B_k \cup \left\{\left(g_{k+1}, e_{l+1}^{k+1}\right)\right\}$, $l := l + 1$, $k := k + 1$ и ићи на Корак 2.

3.4.4. КОНВЕРГЕНЦИЈА

У одељку 3.2 расправљало се о важности ажурирања параметара $\tau_k, \beta_k, \gamma_k, \eta_k, \alpha_k$ за конвергенцију *bundle* методе.

Фокусирајући се на конвергенцију Алгоритма 3.4.1 приметимо да:

- мале вредности α_k у успешном кораку много утичу на стабилизацију, тј. не допуштају да се оде далеко од центра,
- обрнуто, у случају нултог корака, велике вредности α_k уопште не утичу на побољшање модела $\hat{f}_k$.

Дакле, параметар α_k је веома важан, и он не треба да буде ни превише велики ни превише мали.

Следеће две теореме повезују конвергенцију Алгоритма 3.4.1 са општим претпоставкама о α_k.

Означимо са K скуп индекса који одговара тачкама које су прошле успешан корак. Следеће две теореме баве се тим скупом индекса; прва од њих разматра случај када је тај скуп бесконачан, а друга када је коначан.

<u>Теорема 3.4.3.</u> Нека је скуп K бесконачан. Тада је низ $\{y_k\}$ један минимизирајући низ ако важи да је

$$\sum_{k \in K} \alpha_k = +\infty \quad . \tag{3.41}$$

Ако $\{\alpha_k\}$ има лимес супериор на K и f има тачку минимума, онда важи да $dist(\{y_k\}, X^*) \to 0$, $k \to \infty$, где је са X^* означен скуп тачака минимума функције f.■

<u>Доказ</u>. Видети у [46].■

<u>Теорема 3.4.4.</u> Ако је скуп K коначан, и ако почевши од неког k_0 за све $k \geq k_0$ све итерације пролазе нулти корак и важи да

$$\alpha_k \leq \alpha_{k-1} \text{ за свако } k > k_0 \text{ и} \tag{3.42}$$

и

$$\sum_{k>k_0} \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k-1}} = +\infty \quad , \tag{3.43}$$

онда је y_{k_0} тачка минимума функције f.■

<u>*Доказ*</u>. Видети у [55].■

<u>Напомена 3.4.2.</u> Занимљиво је да је услов (3.41) врло близак услову (2.14) у субградијентној методи.■

На крају можемо видети да услови (3.41),(3.42) и (3.43) важе и ако је α_k константно. Но, велике вредности α_k у *bundle* методи нису нарочито ефикасне. С друге стране, мале вредности α_k доводе до алгоритма блиског субградијентној методи. Зато је потреба за налажењем компромиса између ова два избора велика и отворена за даља истраживања.

3. 5. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Пре закључења овог параграфа навешћемо још неке идеје о могућим изменама основне опште методе. Ту пре свега мислимо на измену хиперравни које чине основу *bundle* метода . Стога, размотримо проблем (3.16), односно проблем следећег типа:

$$\begin{gathered} \min_{d \in R^n, v \in R} \left\{ v + \frac{1}{2} \beta_k \|d\|^2 \right\} \\ v \geq g_j^T d - e_j^k, j = 1,2,...,k \end{gathered} \quad . \tag{3.44}$$

Са (d_k, v_k) означимо решење проблема (3.44), где, на основу Напомене 3.4.2, v_k представља једну апроксимацију извода у правцу d_k у тачки x_k функције f.

Нека је $\widetilde{S}(0)=\left\{d \in R^n \middle| \hat{f}_k(d) \le 0 \right\}$, где је $\hat{f}_k(d)=\max_{j=1,..,k}\left\{g_j^T d - e_j^k\right\}$. Означимо са $\Delta(d)$ разлику $\Delta(d)=f(x_k+d)-f(x_k)$ и са $S(0)$ скуп $S(0)=\left\{d \in R^n \middle| \Delta(d) \le 0\right\}$. Због конвексности функције важи да је $S(0) \subseteq \widetilde{S}(0)$. Зато избор нове тачке из $S(0)$ не гарантује довољно опадање и ефикасност алгоритма. Уместо надграфика функције могу се разматрати ниво-скупови $S(0)$ за избор новог правца d_k.

Интересантно је разматрати решење следећег проблема:

$$\begin{aligned} &\min_{d \in R^n, v \in R} \{v\} \\ &v \ge g_j^T d - \rho_j^k,\ j = 1,2,...,k \end{aligned} \quad , \tag{3.45}$$

где су ρ_k коефицијенти транслације на k-ој итерацији у j-той линеаризацији. Неке идеје тог типа могу се наћи у [42] и [43]. У раду [57] аутор предлаже модификацију грешака линеаризације скалирањем одговарајућих субградијената, док аутори у [49] предлажу филтер стратегије.

Последњих година многи аутори су се бавили овом проблематиком. Важне референце из ове области су [5], [42], [46], [53], [57], [64], [65], [67] и [95].

Побољшање ефикасности опште методе још увек је отворено питање у овој области.

Поглавље 4

MOREAU-YOSIDA РЕГУЛАРИЗАЦИЈА.

PROXIMAL POINT МЕТОДА

Увод

У овом поглављу проблем (2.1), тј. проблем $\min_{x \in R^n} f(x)$, где је $f : R^n \to R$ произвољна затворена сопствена конвексна функција, која не мора бити диференцијабилна, решаваћемо помоћу нове функције, која је у литератури позната под именом регуларизација типа *Moreau-Yosida*[1]. Та нова функција настаје од полазне функције f применом оператора који чува конвексност и затвореност. Занимљиво је да је скуп минимума те нове функције-регуларизације једнак скупу минимума полазне функције f, и при том нова функција-регуларизација има *Lipschitz*-непрекидан градијент, чак и када полазна функција f није диференцијабилна. Управо то и јесте разлог њеног разматрања овде, јер баш та регуларизација пружа могућност повезивања класичних нумеричких метода развијених за решавање оптимизационих проблема у диференцијабилном случају са недиференцијабилном оптимизацијом.

Поменута регуларизација могла би бити корисна за убрзање *bundle* метода, а могло би бити корисно и разматрање могућности да се овом регуларизацијом постигне убрзање метода првог реда (субградијентних метода).

Ово поглавље организовано је на следећи начин: прво је формално дефинисана регуларизација типа *Moreau-Yosida*, при чему су наглашена њена важна својства и констатована могућност њеног повезивања са *proximal point* [2] методама. У наредним одељцима разматрају се питања везана за примену *Newton*-ове и квази *Newton*-ове методе на ову регуларизацију, а потом се разматрају и својства другог реда регуларизације типа *Moreau-Yosida*.

---

[1] *Jean-Jacques Moreau* (1923-?) –француски математичар,
Kōsaku Yosida(1909-1990) – јапански математичар

[2] *proximal point* - приближна тачка *(енгл)*

4.1 *MOREAU-YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈА

Дефиниција 4.1.1. Нека је дата конвексна функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ и фиксирано $\lambda > 0$. Функција дефинисана са

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in R^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right\} \tag{4.1}$$

назива се *Moreau-Yosida регуларизација* функције f, или *регуларизација типа Moreau-Yosida*.■

Теорема 4.1.1. Нека је дата сопствена затворена конвексна функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$. Тада функција

$$\Phi_\lambda(x, y) = f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \tag{4.2}$$

у односу на y има јединствену тачку минимума.

Доказ[34]. Функција Φ_λ као збир конвексне и строго конвексне функције (за фиксирано x) је строго конвексна функција и због тога има највише једну тачку минимума. Остаје да се докаже да тачка минимума функције Φ_λ постоји.

Будући да је f сопствена функција, њен домен је непразан скуп, па због тога постоји бар један конвексан и компактан скуп на коме је дефинисана функција Φ_λ. Дакле, тачка минимума функције Φ_λ постоји на том скупу.

Како конвексна функција има субдиференцијал у свакој тачки свог ефективног домена, закључујемо да за свако $y_0 \in dom\, f$ постоји $g \in \partial f(y_0)$ такво да важи да је:

$$f(y_0) + g^T(y - y_0) \le f(y),\ \forall y \in R^n . \tag{4.3}$$

За свако $\lambda > 0$ и $x \in R^n$ из (4.3) следи да важи и:

$$f(y_0) + g^T(y - y_0) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \le f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 . \tag{4.4}$$

Ниво-скупови функције на левој страни израза (4.4) су ограничени и садрже се у ниво-скуповима функције на десној страни. Будући да је функција на десној страни сопствена и конвексна, закључујемо да постоји бар један ниво-скуп функције на десној страни који је непразан, а због њене затворености закључујемо да су затворени и њени ниво-скупови. Отуда функција Φ_λ има бар једну тачку минимума.■

Дакле, на основу Теореме 4.1.1 регуларизација типа *Moreau-Yosida* за конвексне затворене сопствене функције може се написати у следећем облику

$$f_\lambda(x) = \min_{y \in R^n}\left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right\} \quad . \tag{4.5}$$

Функција дефинисана изразом (4.5) је диференцијабилна, што ће бити и доказано у овом поглављу. У том циљу, ваљало би се, пре свега, подсетити појма монотоног оператора.

<u>Дефиниција 4.1.2.</u> Оператор $A : R^n \to R^n$ је *монотон* уколико важи да је

$$(a_1 - a_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

за свако $x_1, x_2 \in R^n$ такве да је $x_1 \neq x_2$ и за све $a_1 \in A(x_1)$ и $a_2 \in A(x_2)$.

Није тешко приметити да је субдиференцијал конвексне функције оператор који пресликава простор R^n у самог себе. Веома важно својство тог оператора дато је у пропозицији која следи.

<u>Пропозиција 4.1.1.</u> Субдиференцијал ∂f конвексне функције $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је монотон оператор.

<u>Доказ</u>. Видети у [90].

Од интереса је увести и појам „*proximal point*“, односно „приближна тачка“. Будући да се тај појам помиње у литератури на енглеском језику, можда је најбоље користити баш такав назив, јер би превод „приближна тачка“ могао довести до забуне, с обзиром на то да се код нас под термином „приближно“ најчешће подразумева „апроксимативно“.

Дефиниција 4.1.3. Нека је дата сопствена затворена конвексна функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$. Тачка $p_\lambda(x) = argmin\ \Phi_\lambda(x, y)$ је *proximal point* за x.■

Није тешко приметити да је *proximal point* за x добијена минимизацијом функције $\Phi_\lambda(x, y)$ за фиксирано x, што значи да је функција $\Phi_\lambda(x, y)$ минимизирана по y.

На основу Дефиниције 4.1.3 важи да је $0 \in \partial\Phi_\lambda(p_\lambda(x)) = \partial\Phi_\lambda(x, p_\lambda(x))$, односно да је:

$$0 \in \partial f(p_\lambda(x)) + \frac{1}{\lambda}(p_\lambda(x) - x) \ , \tag{4.6}$$

што се може записати и на следећи начин

$$g_\lambda(x) \in \partial f(p_\lambda(x)) \ , \tag{4.7}$$

где је

$$g_\lambda(x) = \frac{x - p_\lambda(x)}{\lambda}. \tag{4.8}$$

Лема 4.1.1. За свако $x_1, x_2 \in R^n$ важе следеће неједнакости:

а) $$(p_\lambda(x_1) - p_\lambda(x_2))^T (g_\lambda(x_1) - g_\lambda(x_2)) \geq 0 \ , \tag{4.9}$$

б) $$f(p_\lambda(x_2)) - f(p_\lambda(x_1)) \geq g_\lambda(x_1)^T (p_\lambda(x_2) - p_\lambda(x_1)) \ , \tag{4.10}$$

в) $$\|g_\lambda(x_1) - g_\lambda(x_2)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\| \ . \tag{4.11}$$

Доказ. Видети у [46].

Напомена 4.1.1. Будући да је $\lambda > 0$, на основу (4.8) и (4.9) за свако $x_1, x_2 \in R^n$ важи да је:

$$(p_\lambda(x_1) - p_\lambda(x_2))^T (x_1 - x_2) \geq \|p_\lambda(x_1) - p_\lambda(x_2)\|^2 \ , \tag{4.12}$$

што практично значи да је $p_\lambda(x)$ глобално *Lipschitz*-ова са константом 1.■

Теорема 4.1.2. Функција $f_\lambda(x)$, дефинисана изразом (4.1), је диференцијабилна.

Доказ. Видети у [46].

Регуларизација типа *Moreau-Yosida* може се довести у везу са многим важним операторима, и на тај начин се могу сагледати и доказати неке њене важне особине. Зато је од интереса увести следећу дефиницију.

Дефиниција 4.1.4.. Нека су дате две функције f_1 и f_2 такве да $f_1, f_2 : R^n \to R \cup \{+\infty\}$. Функција $(f_1 \,\square\, f_2)$, дефинисана са

$$(f_1 \,\square\, f_2)(x) = inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \,|\, x_1 + x_2 = x\} = \inf_{y \in R^n} \{f_1(y) + f_2(x - y)\} \tag{4.13}$$

назива се *инфимална конволуција* функција f_1 и f_2.■

Напомена 4.1.2. Инфимална конволуција сопствених конвексних функција је конвексна функција ([90]). Но, у општем случају, она не мора бити сопствена. На пример, ако су f_1 и f_2 индикаторске функције дисјунктних конвексних скупова, при чему се индикаторска функција скупа A дефинише са $\delta(x|A) = \begin{cases} 0, x \in A \\ +\infty, x \notin A \end{cases}$, онда је њихова инфимална конволуција $+\infty$. Осим тога, за f_1 и f_2 могу се изабрати линеарне функције тако да њихова инфимална конволуција буде $-\infty$ ([48]).■

С обзиром на Дефиницију 4.1.4 може се тврдити да *Moreau-Yosida* регуларизација придружена датој функцији f представља инфималну конволуцију дате функције f и квадратне функције $q_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$, за $\lambda > 0$.

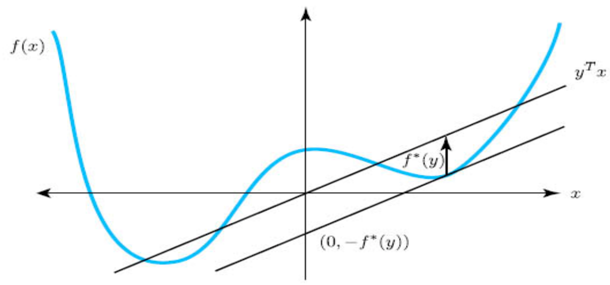
Теорема 4.1.3. Ако је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ затворена сопствена конвексна функција онда је функција f_λ конвексна и коначна свуда.

Доказ. Видети у [46].

Како у теорији оптимизације тако и у конвексној анализи уопште доста је пажње посвећено дуалности. Овде дуалност неће бити предмет истраживања, али је, свакако, неопходан инструмент истраживања. Зато је од интереса увести следећу дефиницију.

<u>Дефиниција 4.1.5</u>. Нека је дата функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$. Трансформација *Jung – Fenchel* или *конјугована* функција за функцију f је функција $f^* : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ дата са

$$f^*\left(x^*\right) = \sup_{x \in dom\, f} \left\{\left(x^*, x\right) - f(x)\right\}.$$



Слика 17. Геометријска интерпретација конјуговане функције

<u>Лема 4.1.2.</u> За дате сопствене функције $f_1, f_2 : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ такве да је $dom\left(f_1^*\right) \cap dom\left(f_2^*\right) \neq \emptyset$ важи да је

$$(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^* \quad . \tag{4.14}$$

<u>*Доказ.*</u> Видети у [48].

Следећа теорема пореди глаткост конјугованих функција за функције f и f_λ.

<u>Теорема 4.1.4.</u> $$f_\lambda^*(s) = f^*(s) + \frac{1}{2}\lambda \|s\|^2 . \tag{4.15}$$

<u>*Доказ[34].*</u> Регуларизација типа *Moreau-Yosida* је инфимална конволуција дате функције f и квадратне функције $q_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$. Функција $f^*(s) = \sup_{x \in dom(f)} \left\{s^T x - f(x)\right\}$ је конјугована датој сопственој функцији f, а конјугована функција квадратној функцији $q_\lambda(x)$ је функција $q_\lambda^*(s)$ дата са

$$q_\lambda^*(s) = \sup_{x \in R^n} \left\{ s^T x - \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 \right\}. \tag{4.16}$$

Будући да је домен функције $q_\lambda(x)$ цео скуп R^n, претпоставка Леме 4.1.2 је испуњена, и зато важи да је

$$f_\lambda^*(s) = f^*(s) + q_\lambda^*(s). \tag{4.17}$$

Функција $s^T x - \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$ је квадратна функција и зато има једну и само једну тачку максимума, која се поклапа са нулом градијента, тј. из

$$s - \frac{1}{\lambda}x = 0 \tag{4.18}$$

следи да је $x = \lambda s$. Замењујући ту вредност у (4.16) добија се

$$q_\lambda^*(s) = \lambda s^T s - \frac{\lambda^2}{2\lambda}\|s\|^2 = \frac{1}{2}\lambda\|s\|^2. \tag{4.19}$$

Из (4.17) и (4.19) следи тврђење (4.15). ■

<u>**Теорема 4.1.5.**</u> Скупови минималних вредности функција f и f_λ се поклапају, тј важи да је

$$\inf_{x\in R^n} f_\lambda(x) = \inf_{x\in R^n} f(x). \tag{4.20}$$

<u>Доказ.</u> Видети у [46].

<u>**Теорема 4.1.6.**</u> Следећи искази су еквивалентни

а) x је тачка минимума за функцију f;

б) $p_\lambda(x) = x$;

в) $g_\lambda(x) = 0$;

г) x је тачка минимума за функцију f_λ;

д) $f(p_\lambda(x)) = f(x)$;

ђ) $f_\lambda(x) = f(x)$.

<u>Доказ.</u> Видети у [46].

4.2 *PROXIMAL POINT* АЛГОРИТАМ

Proximal point алгоритам, формулисао је *Martinet* 1970. године у раду [68] као предлог за налажење решења следећег проблема

$$\min_{x \in H} f(x) , \tag{4.21}$$

где је H реалан *Hilbert*-ов простор, а $f : H \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна затворена функција. Идеја се базира на концепту приближног (*proximal*) пресликавања J_λ, које је дефинисао *Moreau* 1965. године у [72] на следећи начин:

$$J_\lambda(x) = \arg\min_{y \in H} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \right\}, \tag{4.22}$$

где је λ позитиван параметар.

Полазећи од дате тачке $x_1 \in H$, *proximal point* алгоритам за налажење решења проблема (4.21) на k-тој итерацији генерише нову тачку x_{k+1} која представља нову *proximal point*, такву да важи да је:

$$x_{k+1} = J_{\lambda_k}(x) \tag{4.23}$$

и за свако k важи да је $\lambda_k > 0$.

Једна могућност за проширење концепта *proximal point* је да се генерише максимално монотон[3] оператор $T : H \to H$ за који треба одредити тачку $x^* \in H$ такву да следећи услов:

$$0 \in \partial T(x^*) \tag{4.24}$$

буде задовољен.

Пропозицијом 4.1.1 тврди се да је субдиференцијал сопствене конвексне затворене функције монотон оператор. Да је субдиференцијал конвексне затворене функције и максимално монотон оператор доказано је у [91]. Није тешко закључити, на основу (4.24), да се тражена тачка $x^* \in H$ поклапа са тачком минимума максимално монотоног оператора T.

---

[3] Вишезначно пресликавање $T : E \to E^*$ је:

- *монотон оператор* уколико важи да је $(x_0 - x_1, x_0^* - x_1^*) \geq 0$ за свако $x_0^* \in T(x_0)$ и $x_1^* \in T(x_1)$;
- *циклично монотон оператор* ако важи да је $(x_0 - x_1, x_0^*) + \ldots + (x_{n-1} - x_n, x_{n-1}^*) + (x_n - x_0, x_n^*) \geq 0$ за свако $x_i^* \in T(x_i)$; $i = 0,1,\ldots,n$,
- *максимално монотон оператор* ако важи да његов график $G(T) = \{(x, x^*) | x^* \in T(x)\} \subset E \times E^*$ није садржан у графику било ког другог монотоног оператора $T' : E \to E^*$

Оператор J_λ дефинисан са (4.22) је максимално монотон оператор, чије је решење, познато као резолвента, дато са

$$T_\lambda = \frac{x - J_\lambda(x)}{\lambda}, \tag{4.25}$$

а то је *Yosida* апроксимација (видети у [111]). Више о монотоним операторима и њиховим особинама може се прочитати у [90] и [91].

Очигледно је да постоји тесна веза између *proximal point* алгоритма и регуларизације типа *Moreau - Yosida*, чије име, заправо, и потиче из чињенице да је вредност x блиска вредности за *proximal point* $p_\lambda(x)$, као и да се градијент $g_\lambda(x)$ поклапа са *Yosida* регуларизацијом (4.25).

Прве резултате о конвергенцији *proximal point* алгоритма дао је *Martinet* у раду [68], а добијени су под претпоставком да је $\lambda_k = const = \lambda > 0$.

Rockafellar у [92] предлаже да се за дато x_k бира $\lambda_k > 0$ и да је $x_{k+1} \approx p_{\lambda_k}(x_k) = p_k(x_k)$ тако да буде задовољен било који од следећа два услова:

$$dist\left(0, \partial\Phi_{\lambda_k}(x_{k+1})\right) \le \frac{\varepsilon_k}{\lambda_k}\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \tag{4.26}$$

или

$$dist\left(0, \partial\Phi_{\lambda_k}(x_{k+1})\right) \le \frac{\delta_k}{\lambda_k}\|x_{k+1} - x_k\|,\ \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty\quad , \tag{4.27}$$

где је $\Phi_{\lambda_k}(y) = f(y) + \frac{1}{2\lambda_k}\|y - x_k\|^2$.

Из (4.26) и (4.27) следи да је

$$\|x_{k+1} - p_k(x_k)\| \le \varepsilon_k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty \tag{4.28}$$

и

$$\|x_{k+1} - p_k(x_k)\| \le \delta_k \|x_{k+1} - x_k\| \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty\ . \tag{4.29}$$

Rockafellar је показао да је конвергенција суперлинеарна под следећим претпоставкама:

- *proximal point* израчунава се под једном од претпоставки: (4.28) или (4.29),
- низ $\{\lambda_k\}$ тежи бесконачности и
- функција f^* конјугована функцији f има *Lipschitz*-ов градијент у нули.

Неки аутори су разматрали конвергенцију *proximal point* алгоритма и покушали да ослабе претпоставке које је увео *Rockafellar*. Посебно треба издвојити *Güler* [45]. У том раду доказано је да алгоритам за решавање проблема (4.21) конвергира ако и само ако

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty . \tag{4.30}$$

Другачији доказ конвергенције алгоритма, а који се темељи на претпоставци (4.30), може се наћи и у [16] у коме аутори *Correa* и *Lemaréchal* представљају опште резултате о конвергенцији *proximal point* методе примењујући их у својим *bundle* методама за решење проблема (4.21).

Alvarez, Carrasco и *Pichard* у [2] разматрају могућност релаксације *proximal point* методе дуж одговарајуће ортогоналне пројекције на хиперраван и доказују глобалну конвергенцију. *Iusem* је у [47] углавном истраживао *proximal point* алгоритам уопштењем на максимално монотоне операторе у *Riemannian*-овим многострукостима. Занимљиви су и радови *Burachik, Lopes* и *Svaiter* [9], *Burachik* и *Svaiter* [10], *Burke* и *Qian* [11], *Corradi* [15] и *Fuduli* и *Gaudioso* [32], у којима аутори имају разне приступе решавању проблема (уопштење на максимално монотоне операторе, примена варијационих неједнакости, примена особина субдиференцијала).

Напомена 4.2.1. Из дела (2) Теореме 4.1.6 за неку тачку x кажемо да је тачка минимума функције f ако и само ако важи да је $p_\lambda(x)=x$. То значи да је примена *proximal point* алгоритма на функцију f еквивалентна рачунању фиксне тачке функције $p_\lambda(x)$.■

4.3. *NEWTON*-ОВА МЕТОДА ПРИМЕЊЕНА НА *MOREAU-YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈУ

На почетку овог поглавља већ је било речи о регуларизацији типа *Moreau – Yosida* као алату за повезивање метода развијених за решавање проблема оптимизације у класичном диференцијабилном случају (као што су: градијентна метода, *Newton*–ова и квази *Newton*-ова метода) са методама за недиференцијабилну оптимизацију.

Регуларизација типа *Moreau – Yosida*, дефинисана са (4.5), у општем облику може се записати на следећи начин:

$$f_M(x) = \min_{y \in R^n} \left\{ f(y) + \frac{1}{2}(y-x)^T M(y-x) \right\} , \tag{4.31}$$

где је M симетрична позитивно дефинитна матрица. Функција (4.5) се добија из (4.31) за

$$M = \frac{1}{\lambda} I .$$

Слично као и у случају регуларизације дате са (4.5), *proximal point* за тачку x и у случају регуларизације дате са (4.31) може се означити са $p_M(x)$.

Особине регуларизације (4.5), које су наведене у Леми 4.1.1, важе и у случају регуларизације (4.31) ([34]).

Специјално, услови оптимума дати са (4.6) постају

$$0 \in \partial f(p_M(x)) + M(p_M(x) - x) , \tag{4.32}$$

односно

$$p_M(x) = x - M^{-1} g \text{ за неко } g \in \partial f(p_M(x)). \tag{4.33}$$

Као што је описано у претходном параграфу, *proximal point* алгоритам на k-тој итерацији бира следећу тачку као *proximal point* текућој, тј.:

$$x_{k+1} = p_M(x_k). \tag{4.34}$$

То значи да за $x = x_k$ из (4.33) следи да важи да је

$$x_{k+1} = p_M(x_k) = x_k - M^{-1}g \text{ за неко } g \in \partial f(x_{k+1}), \qquad (4.35)$$

одакле се може закључити да се *proximal point* алгоритам може разматрати као имплицитно ортогонални градијентни метод за минимизацију функције f (имплицитно у смислу да се из x_k иде у x_{k+1} преко субградијента $g \in \partial f(x_{k+1})$). Матрица M је *матрица ортогонализације* или *матрица регуларизације*.

С обзиром на чињеницу да је градијент регуларизације типа *Moreau – Yosida* у некој тачки x дат са

$$\nabla f_M(x) = M(x - p_M(x)), \qquad (4.36)$$

није тешко закључити да из (4.35) следи да је

$$x_{k+1} = p_M(x_k) = x_k - M^{-1}M(x_k - x_{k+1}) = x_k - M^{-1}\nabla f_M(x_k). \qquad (4.37)$$

Из (4.37) није тешко закључити да се *proximal point* метода може интерпретирати као градијентна метода за минимизацију функције f_M.

С обзиром на еквивалентност скупова минимума функција f и f_M (Теорема 4.1.5), као и чињеницу да је функција f_M диференцијабилна (Теорема 4.1.2), прва идеја до које се долази размишљањем о минимизацији функције f је минимизација функције f_M класичном градијентном методом или неком методом *Newton*-овог типа.

Newton-ова метода, као што је познато, захтева да се на свакој итерацији израчуна вредност функције, као и вредност градијента и хесијана у датој тачки, а то није баш једноставно за регуларизацију типа *Moreau – Yosida*. Остављајући по страни проблем постојања и израчунавања хесијана ове регуларизације, пре свега се може приметити да није једноставно израчунати вредност функције f_M у тачки x_k, јер то подразумева да се израчуна и *proximal point* $p_M(x_k)$. Уколико је већ позната вредност за *proximal point* $p_M(x_k)$, онда је, на основу (4.36), релативно лако израчунати само градијент. Међутим, сам поступак рачунања *proximal point* $p_M(x_k)$ захтева минимизацију по y функције која није диференцијабилна, а њен облик је:

$$\Phi_M(y) = f(y) + \frac{1}{2}(y - x)^T M(y - x).$$

Критеријум за конвергенцију *proximal point* алгоритма је поставио *Rockafellar* у [92] условима (4.26) и (4.27). Како су то само теоријски резултати, други аутори покушали су да побољшају алгоритам наводећи критеријуме који би били применљиви. У [35] *Fukushima* је показао да је поступак рачунавања *proximal point* повезан са минималним по норми ε-субградијентом (за $\varepsilon \geq 0$). Прецизније, за фиксирано $\lambda > 0$ и $x \in R^n$, разматрао је следеће проблеме

$$\min_{g \in \partial_e f(x)} \|g\| \tag{4.38}$$

и

$$\min_{g} \left\{ \frac{1}{2}\|g\|^2 + \frac{f^*(y) - g^T x}{\lambda} \right\}. \tag{4.39}$$

Fukushima је показао[4] да ако је вектор g_λ решење проблема (4.39), онда је он, такође, решење и за проблем (4.38) уколико се бира да је $e = f(x) + f^*(g_\lambda) - g_\lambda^T x \geq 0$. При том је g_λ градијент регуларизације типа *Moreau–Yosida* у околини тачке x дат са (4.8). Аутор је предложио да се *proximal point* израчуна помоћу криве која је апроксимација функције f и представљена је део по део линеарном функцијом, као што се то ради у *bundle* методи. Исти приступ користи се у [71] и [65].

Fukushima и *Qi* у [36] разматрају случај када је матрица M дата са $M = \frac{1}{\lambda} I$ и за тако изабрани оператор апроксимирају *proximal point* $p_\lambda(x)$ тачком $p_\lambda(x,e)$ за $e \geq 0$, таквом да важи да је

$$f_\lambda(x,e) = f(p_\lambda(x,e)) + \frac{1}{2\lambda}\|p_\lambda(x,e) - x\|^2 \leq f_\lambda(x) + e.$$

Будући да се градијент регуларизације типа *Moreau – Yosida* у тачки x рачуна коришћењем *proximal point* $p_\lambda(x)$, грешка у рачунању *proximal point*-а, која се чини када се $p_\lambda(x)$ апроксимира са $p_\lambda(x,e)$, производи и грешку у рачунању

[4] Користио је једну од могућих дефиниција e - субдиференцијала која је дата са

$$\partial_e f(x) = \left\{ g \in R^n \middle| f(x) + f^*(g) - g^T x \leq e \right\}$$

градијента $g_\lambda(x,e)$ за регуларизацију типа *Moreau – Yosida*, где је $g_\lambda(x,e)$ дато са

$$g_\lambda(x,e) = \frac{x - p_\lambda(x,e)}{\lambda}.$$

Они су показали да важе следеће оцене

$$\begin{aligned} & f_\lambda(x) \le f_\lambda(x,e) \le f_\lambda(x) + e \\ & \|p_\lambda(x,e) - p_\lambda(x)\| \le \sqrt{2\lambda e} \quad , \\ & \|g_\lambda(x,e) - g_\lambda(x)\| \le \sqrt{\frac{2e}{\lambda}} \end{aligned} \tag{4.40}$$

које указују на чињеницу да квалитет апроксимације зависи од избора e и λ. Процес у ком се *proximal point* израчунава аутори су дефинисали као нову генерализацију *Newton*-ове методе за минимизацију функције f_λ, и показали да је конвергенција суперлинеарна под одређеним претпоставкама, које укључују семиглаткост градијента функције f_λ и употребу одговарајућих техника линеарног претраживања.

Аутори у [6], [12], [65], [71] и [88] предлажу употребу квази *Newton*-ове методе, што резултује читавом класом нових алгоритама које зовемо *proximal point* квази *Newton*–овим алгоритмима.

Ове методе, познате и као методе променљиве метрике, добро су проучене у диференцијабилном случају, а по аналогији са њима нова тачка се израчунава према (4.37), али са различитим матрицама M и на тај начин добијају се разне верзије алгоритама. Нова тачка се добија из формуле

$$x_{k+1} = x_k - t_k M_k^{-1} \nabla f_M(x_k) = x_k - t_k M_k^{-1}(x_k - p_M(x_k)) \ , \tag{4.41}$$

где је $t_k > 0$ и то је корак стандардног линеарног претраживања. Матрице M_k се рачунају квази *Newton* -овом методом. Ове методе захтевају да се *proximal point* израчуна приближно.

Може се разматрати и приступ који је коришћен у *bundle* методама, са основном идејом апроксимације функције конвексном функцијом датом са (3.1), и на тај начин може се рачунати следећа итерација за *proximal point* или њену апроксимацију.

Питање које постављају *Lemaréchal* и *Sagastizábal* у [65] је ажурирање матрице M_k неком базичном формулом, на пример $M_{k+1} = qN(M_k, u, v)$, где је $u = z' - z$ и $v = \nabla f_{M_k}(z') - \nabla f_{M_k}(z) = M_k(z' - p_{M_k}(z')) - M_k(z - p_{M_k}(z))$ за неке векторе z и z', такве да важи да је $v^T u > 0$ (овај услов обезбеђује позитивну дефинитност нове матрице M_{k+1} добијене из M_k квази *Newton*-овом методом).

За $z = x_k$ и $z' = x_{k+1}$, што је природан избор, поново се враћамо на рачунање тачке $p_{M_k}(x_k)$. За овакав проблем аутори предлажу формулу која, на неки начин, представља преокрет у квази *Newton*-овој методи, а базира се на условима оптималности датим у (4.33).

С обзиром да је за произвољан вектор y могуће израчунати неки субградијент $g \in \partial f(y)$, на основу (4.33), узевши да је $M = M_k$ и $p_{M_k}(x) = y$, могуће је за дато x и y израчунати *proximal point* следећом формулом:

$$x = y + M_k^{-1} g \tag{4.42}$$

одакле је $y = p_{M_k}(y + M_k^{-1} g)$ (јер $y = p_{M_k}(x)$).

Идеја је да се прво израчуна разлика v између субградијената, а затим разлика u између одговарајућих тачака. Прецизније, ако су дате две тачке x_k и x_{k+1}, онда је могуће израчунати субградијенте функције у тим тачкама, и означити их респективно са

$$g_k \in \partial f(x_k) \text{ и } g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1}).$$

Нека је $v = g_{k+1} - g_k$. Из (4.42), узимајући за y редом $y = x_k$ и $y = x_{k+1}$, следи да је:

$$\begin{aligned} u &= x_{k+1} + M_k^{-1} g_{k+1} - (x_k + M_k^{-1} g_k) = \\ &= (x_{k+1} - x_k) + M_k^{-1}(g_{k+1} - g_k) = \xi + M_k^{-1} v \quad , \end{aligned} \tag{4.43}$$

где је $\xi = x_{k+1} - x_k$. Поступајући тако, ажурирање матрице M_k се изводи по следећој формули (која представља преокрет у квази *Newton* - овој методи)

$$M_{k+1} = qN(M_k, \xi + M_k^{-1} v, v).$$

У [6] аутори *Bonnans., Gilbert, Lemaréchal* и *Sagastizábal* претпостављају да је функција f диференцијабилна, и да њен градијент има извод у правцу у било ком правцу, па и оном који води ка тачки минимума функције f, и показују глобалну конвергенцију једног таквог теоријског метода који за ажурирање матрице користи квази *Newton* - ову методу.

Јасно је да такав приступ нема неки значај ако функција није диференцијабилна, али може бити користан за проучавање и комбиновање метода за недиференцијабилну оптимизацију са класичним квази *Newton*-овим методама.

У литератури су, такође, разматрани резултати глобалне конвергенције *proximal point* квази *Newton*-ових метода коришћењем BFGS[5] формула. Тако, на пример, *Chen* и *Fukushima* у [12] разматрају могућност израде алгоритма који се темељи на BFGS формули, и који конвергира глобално суперлинеарном брзином, и то користећи технике линеарне претраге не за f_M већ за f.

У [71] *Mifflin* користи квази *Newton*-ову методу за ажурирање *proximal point* алгоритма, у ком се *proximal point* рачуна са грешком која се чини и у *bundle* методама. Метод се базира на рачунању хесијана за f_M, а који зависи (по Пропозицији 4.4.1) од јакобијана функције $p_M(x)$. (За сада игноришемо тај проблем рачунања хесијана, то ћемо радити у следећем параграфу). Овај приступ се може прецизније објаснити на примеру. У том циљу размотримо следећу функцију

$$f(x) = max\{f_1(x), f_2(x)\}\ , \tag{4.44}$$

где су f_1, f_2 конвексне функције класе C^2.

Нека је x тачка таква да су у тачки $p_M(x)$ функције f_1 и f_2 активне, тј $f_1(p_M(x)) = f_2(p_M(x))$. Услов оптималности (4.32) се може записати на следећи начин

$$\begin{aligned} &\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1 \\ &f_1(p_M(x)) - f_2(p_M(x)) = 0 \\ &\lambda_1(x) g_1(p_M(x)) + \lambda_2(x) g_2(p_M(x)) + M(p_M(x) - x) = 0\ , \end{aligned} \tag{4.45}$$

[5] BFGS формула је скраћеница за *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* формулу

где су $g_i(p_M(x)) = \nabla f_i(p_M(x)),\ i = 1,2$ и $\lambda_i(x) \geq 0,\ i = 1,2$. Диференцирањем једначина система (4.45) по x и означавањем са $P(x)$ јакобијана за $p_M(x)$ добијамо

$$\nabla\lambda_1(x) + \nabla\lambda_2(x) = 0 \tag{4.46}$$

$$\left|g_1(p_M(x)) - g_2(p_M(x))\right|^T P(x) = 0 \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}&[\lambda_1(x)H_1(p_M(x)) + \lambda_2(x)H_2(p_M(x)) + M]P(x) + \\ &\quad + \nabla\lambda_1(x)g_1(p_M(x)) + \nabla\lambda_2(x)g_2(p_M(x)) - M = 0\end{aligned}, \tag{4.48}$$

где је $H_i(x) = \nabla^2 f_i(x),\ i = 1,2$.

Претпоставимо да је $g_1(p_M(x)) \neq g_2(p_M(x))$ и означимо са

$$G = \lambda_1(x)H_1(p_M(x)) + \lambda_2(x)H_2(p_M(x)) \tag{4.49}$$

и

$$V = g_1(p_M(x)) - g_2(p_M(x)). \tag{4.50}$$

Нека је $U \in R^{n\times(n-1)}$ матрица таква да је $V^T U = 0$. На основу (4.50) важи да је

$$0 = U^T V = U^T g_1(p_M(x)) - U^T g_2(p_M(x)). \tag{4.51}$$

Множећи (4.48) са U^T и користећи (4.49) добија се

$$U^T(G + M)P(x) + U^T\nabla\lambda_1(x)g_1(p_M(x)) + U^T\nabla\lambda_2(x)g_2(p_M(x)) - U^T M = 0,$$

одакле због (4.51) и (4.46) следи да је

$$U^T(G + M)P(x) = U^T M. \tag{4.52}$$

Матрица $P(x)$ се може разложити на следећи начин

$$P(x) = VP_V + UP_U, \tag{4.53}$$

где је $P_V \in R^{1\times n}$ и $P_U \in R^{(n-1)\times n}$. Множећи (4.53) са V^T, на основу (4.47), (4.50) и (4.51), добија се да важи да је

$$0 = V^T P(x) = V^T VP_V + 0, \tag{4.54}$$

а због претпоставке да је $V \neq 0$ следи да је $P_V = 0$, па из (4.53) закључујемо да важи да је:

$$P(x) = UP_U . \qquad (4.55)$$

Из (4.55), на основу (4.52), следи да је

$$P(x) = U\left[U^T (G+M)U\right]^{-1} U^T M . \qquad (4.56)$$

Означавајући са P матрице $P(x)$, један корак *Newton*-овог типа

$$-\left[\nabla^2 f_M(x)\right]^{-1} \nabla f_M(x),$$

због (4.36) и чињенице да се може показати (у следећем поглављу ће то бити урађено) да је $\nabla^2 f_M(x) = M(I - p(x))$, може се апроксимирати са:

$$-\left[M(I-P)\right]^{-1} M(p_M(x) - x) = -(I-P)^{-1}(p_M(x) - x).$$

Из (4.56) закључујемо да се процена P матрице $P(x)$ може добити рачунањем одговарајућих матрица U и G, на пример *bundle* методом (рачунајући $p_M(x)$) или квази *Newton*–овм методом. За додатне техничке детаље и конвергенцију погледати [71].

4.4 СВОЈСТВА ДРУГОГ РЕДА *MOREAU–YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈЕ

За израду једног разумног алгоритма за минимизацију функције f_M (а самим тим и функције f), заснованог на ортогоналном градијенту преко матрице M , било би од важности проучити својства другог реда регуларизације типа *Moreau–Yosida*.

Питање на које ћемо покушати да одговоримо у овом одељку је следеће. Када функција f_M има хесијан?

Неке одговоре на то питање покушали су да дају *Lemaréchal* и *Sagastizábal* у [63], *Meng* у [69] и *Qi* у [89].

Следећа пропозиција даје везу између хесијана функције $f_M(x)$ и јакобијана функције $p_M(x)$.

Пропозиција 4.4.1. Нека је f затворена конвексна функција. Тада важи:

1) функција $\nabla f_M(x)$ има извод у правцу ако и само ако функција $p_M(x)$ има извод у правцу;
2) хесијан $\nabla^2 f_M(x)$ постоји ако и само ако постоји јакобијан $\nabla p_M(x)$, и у том случају важи да је:

$$\nabla^2 f_M(x) = M(I - \nabla p(x)) \text{ за свако } x \in R^n \ . \qquad (4.57)$$

Доказ: Видети у [63].

Следећи пример потврђује да ако у тачки x_0 постоји $\nabla^2 f_M(x_0)$, онда није неопходно да постоји и $\nabla^2 f(x)$.

Пример 4.4.1.[89] Размотримо следећу функцију једне променљиве:

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x|^3} \ ,$$

чија је тачка минимума $x^* = 0$. Није тешко видети да је функција f конвексна, дефинисана на целом скупу R и њен извод је дат са

$$\nabla f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ ; \ x \ge 0 \\ -\sqrt{-x} ; \ x < 0 \end{cases} \ .$$

Функција ∇f је непрекидна у тачки $x^* = 0$, али у тој тачки није диференцијабилна и није *Lipschitz*-ова.

Размотримо регуларизацију типа *Moreau–Yosida* за функцију f са придруженом матрицом $M = \frac{1}{\lambda} I$, која је дата следећим изразом

$$f_\lambda(x) = \min_{y \in R^n} \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{|y|^3} + \frac{1}{2\lambda}(y - x)^2 \right\} .$$

Будући да је

$$\nabla f_\lambda(x) = \begin{cases} \sqrt{x + \frac{\lambda^2}{4}} - \frac{\lambda}{2} \ ; \ x \ge 0 \\ -\sqrt{-x + \frac{\lambda^2}{4}} + \frac{\lambda}{2} \ ; \ x < 0 \end{cases} ,$$

функција $\nabla f_\lambda(x)$ је непрекидно диференцијабилна, па је функција $f_\lambda(x)$ два пута непрекидно диференцијабилна на целом R, односно важи да је:

$$\nabla^2 f_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{4|x| + \lambda^2}} .$$

Примењујући *Newton*-ову методу на функцију f у тачки $x_1 > 0$ добијамо:

$$x_2 = x_1 - \frac{\nabla f(x_1)}{\nabla^2 f(x_1)} = -x_1 < 0 \text{ и } x_3 = x_2 - \frac{\nabla f(x_2)}{\nabla^2 f(x_2)} = -x_2 = x_1 ,$$

односно за $k = 1,2,...$ важи да је

$$\begin{cases} x_{2k} = -x_1 \\ x_{2k+1} = x_1 \end{cases} ,$$

што значи да *Newton*-ова метода не конвергира. Али, ако применимо *Newton*-ову методу на функцију $f_\lambda(x)$, онда имамо квадратну конвергенцију (због $\nabla^2 f_\lambda(0) = 1$ и $\lambda \neq 0$). ■

Из овог примера закључујемо да регуларизација типа *Moreau – Yosida* може побољшати конвергенцију *Newton* -ове методе.

Следећа дефиниција је важна, јер представља генерализацију класичног концепта хесијана.

Дефиниција 4.4.1. Нека је f конвексна функција са коначним вредностима. Кажемо да f у тачки y_0 има генералисани хесијан ако важи да:

1) постоји $\nabla f(y_0)$
2) постоји матрица $Hf(y_0)$ која је позитивно семидефинитна и симетрична, и за коју важи да је

$$f(y_0 + h) = f(y_0) + \nabla f(y_0)^T h + \frac{1}{2} h^T Hf(y_0) h + o\left(\|h\|^2\right) . \tag{4.58}$$

У [46] показано је да из (4.58) следи да важи следећа инклузија:

$$\partial f(y_0 + h) \subseteq \nabla f(y_0) + Hf(y_0) h + o(\|h\|) B . \tag{4.59}$$

Ако је субдиференцијал функције f у тачки y_0 једночлан скуп (односно ако је f диференцијабилна у околини y_0), онда је генералисани хесијан $Hf(y_0)$ једнак хесијану у класичном смислу, тј. $\nabla^2 f(y_0)$.

<u>Теорема 4.4.1.</u> Нека је дата тачка $x_0 \in R^n$ и конвексна функција f са коначним вредностима. Нека функција f има генералисани хесијан $Hf(p_M(x_0))$ у тачки $p_M(x_0)$. Тада у тачки $x_0 \in R^n$ постоји хесијан функције f_M, који се израчунава на следећи начин:

$$\nabla^2 f_M(x_0) = M - M\left[I + M^{-1}Hf(p_M(x_0))\right]^{-1} \quad . \tag{4.60}$$

<u>Доказ</u> . Видети у [63].

Следећа теорема повезује претходна разматрања са конјугованим функцијама. Ради поједностављења нотације уведимо следећу ознаку:

$$G(x) = \nabla f_M(x). \tag{4.61}$$

<u>Теорема 4.4.2.</u> Нека је дата тачка x_0 у којој конјугована функција f^* функције f има генералисани хесијан $Hf^*(G(x_0))$ у тачки $G(x_0)$. Тада постоји хесијан регуларизације типа *Moreau – Yosida* , који се израчунава на следећи начин:

$$\nabla^2 f_M(x_0) = \left[M^{-1} + Hf^*(G(x_0))\right]^{-1} . \tag{4.62}$$

Доказ. Видети у [89].

<u>Напомена 4.4.1.</u> За дату тачку x_0, у којој постоје $\nabla^2 f(p(x_0))$ и $\nabla^2 f^*(G(x_0))$, изрази (4.60) и (4.62) постају респективно:

$$\nabla^2 f_M(x_0) = M - M\left[I + M^{-1}\nabla^2 f(p(x_0))\right]^{-1} \tag{4.63}$$

и

$$\nabla^2 f_M(x_0) = \left[M^{-1} + \nabla^2 f^*(G(x_0))\right]^{-1}. \tag{4.64}$$

На основу теоријских резултата о конјугованим функцијама, закључујемо да важи да је:

$$G(x_0) = \nabla f\left(p(x_0)\right) \tag{4.65}$$

и

$$\nabla^2 f\left(p(x_0)\right)\nabla^2 f^*\left(G(x_0)\right) = I\ . \tag{4.66}$$

Дакле, ако је један од хесијана $\nabla^2 f\left(p(x_0)\right)$ или $\nabla^2 f^*\left(G(x_0)\right)$ сингуларан, на основу (4.66) други не може да постоји, али у сваком случају постоји $\nabla^2 f_M(x_0)$. Ово показује стабилност диференцијабилности другог реда регуларизације типа *Moreau-Yosida*. ■

<u>Напомена 4.4.2.</u> Теорема 4.4.2 оправдава постојање хесијана регуларизације типа *Moreau-Yosida* у околини тачке 0 у Примеру 4.4.1, у коме је:

$$\nabla f^*(y) = \begin{cases} y^2,\ y \geq 0 \\ -y^2,\ y < 0 \end{cases} \quad ,$$

односно

$$\nabla^2 f^*(y) = 2|y|\ .$$

Другим речима, можемо закључити да је функција $f^*(y)$, која је конјугована функција функцији f, два пута непрекидно диференцијабилна, па на основу Теореме 4.4.2 хесијан регуларизације типа *Moreau-Yosida* постоји.■

У следеће три пропозиције претпоставља се да функција f задовољава следећи услов рашћења:

$$f(p_0 + h) \leq f(p_0) + f'(p_0; h) + \frac{1}{2}C\|h\|^2 \quad , \tag{4.67}$$

за неко $C > 0$ и за свако $h \in B(0, e)$.

Нека је дато $y_0 \in R^n$ и $\tau \in (0,1)$. Означимо са $\Phi_\tau(y)$ следећу функцију:

$$\Phi_\tau(y) = f(y) + \frac{1}{2}\tau(y - y_0)^T M(y - y_0) \tag{4.68}$$

и са $f_\tau(x)$ њену регуларизације типа *Moreau-Yosida* (за придружену матрицу $M = I(1-\tau)$):

$$f_\tau(x) = \min_{y \in R^n} \left\{ \Phi_\tau(y) + \frac{1}{2}(1-\tau)(y-y_0)^T M(y-y_0) \right\}. \tag{4.69}$$

Означимо са $p_\tau(x)$ јединствену тачку у којој функција дефинисана изразом (4.69) достиже свој минимум.

Пропозиција 4.4.2. Нека је дата конвексна функција f са коначним вредностима и нека је (4.67) задовољено у некој тачки p_0. Нека је још дато $y_0 \in R^n$ и $\tau \in (0,1)$ и нека је функција $\Phi_\tau(y)$, дефинисана изразом (4.68), строго конвексна у околини неке тачке p_0 и задовољава услов (4.67). Тада важи да је :

$$p_\tau(x) = p_M(\tau y_0 + (1-\tau)x) \text{ за свако } x \in R^n. \tag{4.70}$$

Доказ. Видети у [63].

Пропозиција 4.4.3. Нека је дата строго конвексна функција f са коначним вредностима и тачка $x_0 \in R^n$. Даље, нека је (4.67) задовољено у некој тачки $p_0 = p_M(x_0)$. Тада важи да ако постоје $\nabla^2 f_M(x_0)$ и $\nabla f(p_0)$ онда постоји и $Hf(p_0)$.

Доказ. Видети у [63]

Пропозиција 4.4.4. Нека је дата строго конвексна функција f са коначним вредностима и тачка $x_0 \in R^n$. Даље, нека је (4.67) задовољено у некој тачки $p_0 = p_M(x_0)$. Тада важи да ако $\nabla^2 f_M(x)$ постоји за свако $x \in R^n$, онда постоји и хесијан функције $f(x)$ за свако $x \in R^n$.

Доказ. Видети у [63]

Следеће теореме повезују хесијан и генералисани хесијан функције са хесијаном њене регуларизације типа *Moreau-Yosida*.

Теорема 4.4.3. Нека је дата конвексна функција f са коначним вредностима и тачка $x_0 \in R^n$. Нека је (4.67) задовољено у некој тачки $p_0 = p_M(x_0)$. Тада важи да ако постоји $\nabla f(x_0)$, онда $\nabla^2 f_M(x_0)$ постоји ако и само ако постоји $Hf(p_0)$.

Доказ. Видети у [63].

Теорема 4.4.4. Нека је дата конвексна функција f са коначним вредностима и нека је за свако $x_0 \in R^n$ неједнакост (4.67) задовољена у тачки $p_0 = p_M(x_0)$. Тада $\nabla^2 f_M(x)$ постоји за свако $x \in R^n$ ако и само ако $\nabla^2 f(x)$ постоји за свако $x \in R^n$.

Доказ. Видети у [63].

Резултати приказани до сада могу се сумирати на следећи начин.

Пример 4.4.1 показује да постојање хесијана регуларизације типа *Moreau-Yosida* за функцију f у некој тачки не подразумева нужно постојање хесијана функције f у тој тачки.

Такође смо видели да је довољан услов (Теорема 4.4.1) за диференцијабилност другог реда функције f_M постојање генералисаног хесијана функције f, а потребан услов (Теорема 4.4.3) је да функција задовољава услов раста дат са (4.67). За исту класу функција приметимо да је (Теорема 4.4.4) постојање хесијана на целом R^n за *Moreau-Yosida* регуларизацију функције f условљено постојањем хесијана на целом R^n саме функције f. Коначно, постојање генералисаног хесијана за конјуговану функцију функције f је условљено постојањем хесијана за *Moreau-Yosida* регуларизацију функције f (Теорема 4.4.2).

Важно је приметити и то да су сви ови резултати (осим Теореме 4.4.2 о вези са f^*) базирани на диференцијабилности функције f. А шта ако функција f није диференцијабилна?

У случају недиференцијабилности, а везано за услов (4.38) важи следећа теорема (која не захтева диференцијабилност функције f).

<u>Теорема 4.4.5.</u> Нека је дата тачка $x_0 \in R^n$ таква да је унутрашњост скупа $\partial f\left(p(x_0)\right)$ непразна и да садржи $G(x_0)$. Тада је G непрекидно диференцијабилна у x_0 и важи да је $\nabla G(x) = M$.

<u>Доказ</u>. Видети у [89]

Истраживања на овом пољу су и даље веома актуелна. *Qi* је у [89] истраживао случајеве у којима је први извод *Moreau-Yosida* регуларизације семиглатка[6] функција, чак и када функција f није глатка.

Многи радови, као што су [45],[82], [85] и [87], разматрају проблем решавања семиглатких или неглатких[7] једначина. У радовима [29], [83] и [85] аутори се баве семиглатком оптимизацијаом и могућношћу израде алгоритама суперлинеарне конвергенције.

Класичне *Newton*-ове методе, које суперлинеарно конвергирају, захтевају непрекидну диференцијабилност другог реда. Како семиглаткост не имплицира глаткост (непрекидну диференцијабилност), али непрекидна диференцијабилност (глаткост) имплицира семиглаткост, истраживања у последњих неколико година усмерена су ка покушају да се суперлинеарна својства конвергенције *Newton* -ове методе за минимизацију диференцијабилних функција прошире на функције које имају семигладак извод.

Претпоставке које су учињене су да у датој тачки x_0 постоји могућност да се израчуна генералисани јакобијан V (дефинисан као у [14]), што иначе није увек могуће). Због тога је потребно дефинисати услове за његову егзистенцију.

У раду [36] аутори *Fukushima* и *Qi* предлажу да се на датој k -тој итерацији V_k апроксимира уопштеним јакобијаном, почевши од вредности апроксимације

[6] Дефиниција и основне особине наведене су у следећем поглављу.

[7] Минимизација функција f_M захтева решавање следећих неглатких система једначина $G(x) = \nabla f_M(x) = M\left(x - p_M(x)\right) = 0$.

$p_M(x_k, e_k)$ за *proximal point*, којој се придружује апроксимација градијента $g_M(x_k, e_k)$ *Moreau-Yosida* регуларизације. Из почетне позитивно дефинитне матрице V_1 они рачунају матрицу V_k на основу (4.63) или (4.64) на следећи начин:

$$V_k = \begin{cases} \alpha_k I + M - M\left[I + M^{-1}\nabla^2 f(p_M(x_k, e_k))\right]^{-1} & ако\ \exists \nabla^2 f(p_M(x_k, e_k)) \\ \alpha_k I + \left[M^{-1} + \nabla^2 f^*(g_M(x_k, e_k))\right]^{-1} & ако\ \exists \nabla^2 f^*(g_M(x_k, e_k)) \\ V_{k-1} & иначе \end{cases}$$

где је $\alpha_к$ позитивна константа која гарантује позитивну дефинитност матрице V_k. Правац се бира као у методама *Newton*-ог типа:

$$d_k = -V_k^{-1} g_M(x_k, e_k).$$

Својства конвергенције једног оваквог приступа базирају се не само на већ учињеним претпоставкама у претходном одељку, већ и на задовољењу следећег услова:

$$\lim_{k\to\infty}(V_k, \partial_B G(x_k)) = 0, \tag{4.71}$$

где $\partial_B G(x_k)$ означава B-субдиференцијал који је у [14] дефинисан са:

$$\partial_B G(x_k) = \left\{ V \in R^{n\times n} \middle| V = \lim_{x_k \to x} \nabla G(x_k), x_k \in \Omega_G \right\},$$

где је Ω_G скуп свих тачака у којима је G диференцијабилно.

Због грешака у израчунавању *proximal point* –а у алгоритму, који предлажу *Fukushima* и *Qi*, провера услова (4.71) је отежана. За избегавање тих потешкоћа *Qi* и *Chen* у [88] предлажу методу у којој се матрица M на свакој итерацији k замењује неком позитивно дефинитном симетричном матрицом M_k, таквом да $p_M(x_k, e_k)$ буде *proximal point* којој је придружена матрица M_k, тј.: $p_M(x_k, e_k) = p_{M_k}(x_k)$, и доказују суперлинеарну конвергенцију методе под претпоставком да је G семиглатка у тачки x^*.

4.5. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

У овом поглављу разматрана је регуларизација типа *Moreau-Yosida* и дат је преглед њених најважнијих особина, као и могућност њене примене на израчунавање тачке минимума за функцију f.

Последњих година истраживања у области конвексне недиференцијабилне оптимизације усмерена су ка минимизацији регуларизације типа *Moreau-Yosida* применом техника као што су *Newton*-ова и квази *Newton*-ова. У том смислу овде је учињен покушај да се да један преглед услова под којима хесијан регуларизације типа *Moreau-Yosida* постоји.

Више детаља може се видети у [89], где нису илустровани потребни услови за постојање хесијана функције f_M (у смислу уопштене диференцијабилности дефинисане у [14]).

У [9], [11] и [47] аутори разматрају општији случај увођењем максимално монотоних оператора.

Коначно, у [79] и [80] аутори се баве другачијим студијама регуларизације типа *Moreau-Yosida* за ширу класу конвексних функција.

Побољшање ефикасности метода још увек је отворено питање у овој области.

ТРЕЋИ ДЕО

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ НУМЕРИЧКИХ МЕТОДА ЗА МИНИМИЗАЦИЈУ КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Поглавље 5

ПРИЛОГ ТЕОРИЈИ НУМЕРИЧКИХ МЕТОДА ЗА МИНИМИЗАЦИЈУ КОНВЕКСНИХ НЕДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИХ ФУНКЦИЈА

Увод

Као и до сада, разматра се проблем

$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{5.1}$$

где је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна, не обавезно и диференцијабилна функција, која има непразан скуп минимума, који означавамо са X^*.

У овом поглављу, које представља научни доринос, биће изложено 6 алгоритама за решавање задатка (5.1). Они су објављени редом у [40], [41], [39], [22], [23] и [24] ([24] и [41] су на рецензији).

Пре свега, у одељку 5.1 навешћемо још неке теоријске резултате, неопходне за излагање поменутих алгоритама. Потом, у одељку 5.2 биће изложен алгоритам који се базира на комбинацији *trust region* стратегије и *bundle* философије, који представља нов приступ решавању проблема (5.1) и који је објављен у [40]. У одељку 5.3 биће изложен алгоритам који се базира на комбинацији *trust region* стратегије и метода конјугованих субградијената, а који, такође, представља нов приступ решавању проблема (5.1) и који је послат у [41].

Као што смо напоменули, многи алгоритми за минимизацију конвексних недиференцијабилних функција користе *Moreau-Yosida* регуларизацију функције f, која има исти скуп минимума као и полазна функција (видети Поглавље 4), и што је још веома важно, та регуларизација има својство да је њен градијент *Lipschitz*-непрекидан, чак и у случају када је сама функција f недиференцијабилна. Класичне *Newton*-ове методе, које суперлинеарно конвергирају, захтевају непрекидну диференцијабилност другог реда. Како семиглаткост не имплицира глаткост (непрекидну диференцијабилност), али непрекидна диференцијабилност (глаткост) имплицира семиглаткост, истраживања у последњих неколико година усмерена су ка покушају да се обезбеди да суперлинеарна конвергенција *Newton*-ове методе за минимизацију диференцијабилних функција важи и за функције које имају семигладак извод.

Имајући у виду да за локално *Lipschitz*-ове функције извод у правцу не мора да постоји, али *Dini upper* извод увек постоји (видети [105] страна 598), дошли смо на идеју како избегнути наведене потешкоће. Резултат је нов алгоритам *Newton*-овог типа, изложен у одељку 5.4 и објављен у [39].

Dini upper извод *Moreau-Yosida* регуларизације функције f коришћен је у алгоритмима изложеним редом у параграфима 5.5, 5.6 и 5.7 и објављеним у [22], [23] и [24] ([24] је на рецензији), а који су дефинисани за LC^1 функције у радовима Н. Ђурановић-Миличић [19], [20] и [21] и примењени на *Moreau-Yosida* регуларизацију конвексне недиференцијабилне функције f.

5.1 ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

Дефиниција 5.1.1. Функција $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ је класе LC^1 ако постоји $L > 0$ тако важи да је $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \le L\|x - y\|$ за свако $x, y \in R^n$.

Дефиниција 5.1.2. *Dini upper* извод у правцу другог реда функције $f \in LC^1$ у тачки $x \in R^n$ у правцу $d \in R^n$ је

$$f''_D(x;d) = \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{[\nabla f(x+\alpha d) - \nabla f(x)]^T \cdot d}{\alpha}.$$

Ако ∇f има извод у правцу $d \in R^n$ у тачки x_k, тада важи да је

$$f''_D(x_k;d) = f''(x_k;d) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{[\nabla f(x+\alpha d) - \nabla f(x)]^T \cdot d}{\alpha} \quad \text{за све } d \in R^n.$$

Како је *Moreau-Yosida* регуларизација сопствене конвексне затворене функције f класе LC^1, можемо разматрати њен *Dini upper* извод у правцу другог реда у тачки $x \in R^n$ у правцу $d \in R^n$, тј.:

$$F_D''(x;d) = \limsup_{\alpha \downarrow 0} \frac{[g_1 - g_2]^T \cdot d}{\alpha}, \; g_1 \in \partial f(p(x+\alpha d)), g_2 \in \partial f(p(x)),$$

где је $F(x)$ дефинисана са (4.1).

<u>Лема 5.1.1.</u> Нека је $f : R^n \to R$ сопствена конвексна затворена функција и нека је F њена *Moreau –Yosida* регуларизација. Тада важи:

(i) $F_D''(x;kd) = k^2 F_D''(x;d)$;

(ii) $F_D''(x;d_1 + d_2) \le 2(F_D''(x;d_1) + F_D''(x;d_2))$;

(iii) $|F_D''(x;d)| \le K \cdot \|d\|^2$, где је K константа.

<u>*Доказ*</u>. Видети у [14].

<u>Лема 5.1.2.</u> Нека је $f : R^n \to R$ сопствена конвексна затворена функција и нека је F њена *Moreau –Yosida* регуларизација. Тада важи:

(i) $F_D''(x;d)$је полунепрекидна одозго у односу на (x,d), тј. ако $x_i \to x$ и $d_i \to d$, тада важи да је: $\limsup_{i \to \infty} F_D''(x_i;d_i) \le F_D''(x;d)$;

(ii) $F_D''(x;d) = \max\{d^T V d \,|\, V \in \partial^2 F(x)\}$.

<u>*Доказ*</u>. Видети у [14].

У кратким цртама описаћемо још једну важну класу функција, а то су семиглатке функције. Појам семиглатке функције је увео *Miffin* [70].

Нека је дата функција $f : R^n \to R$ локално *Lipschitz*-ова у тачки $x \in R^n$ и нека $\partial f(x)$ означава генералисани градијент функције f у тачки x.

Дефиниција 5.1.3. Дата функција $f: R^n \to R$ је семиглатка у тачки x ако важи:

(i) f је локално *Lipschitz*-ова у тачки x;

(ii) За свако $d \in R^n$ и све низове $\{t_k\} \subset R_+, \{\theta_k\} \subset R^n, \{g_k\} \subset R^n$ такве да $t_k \to 0^+, \frac{\theta_k}{t_k} \to 0, g_k \in \partial f(x_k + t_k d + \theta_k)$, низ $\{g_k^T d\}$ има тачно једну тачку нагомилавања.

Дефиниција 5.1.4. Нека је дат скуп $X \subset R^n$ и функција $f: R^n \to R$. Кажемо да је функција f семиглатка на скупу X ако је семиглатка у свакој његовој тачки.

Пример 5.1.1. [70] Функција $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ није семиглатка, јер важи да је $f'(0;1) = 0$, док је $\partial f(0) = conv\{-1,1\}$ скуп тачака нагомилавања за $f'(x;1), x \downarrow 0$. Функција $g(x) = ln(1+|x|)$ је семиглатка, али није глатка, јер важи да је $\partial g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ conv\{-1,1\}, & x = 0 \\ \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Лема 5.1.3. Функција $f: R^n \to R$ је семиглатка у тачки x ако у тачки x постоји извод у сваком правцу $f'(x;d) = \lim_{k\to\infty} g_k^T d$ где је низ $\{g_k\}$ било који низ који задовољава услов *(ii)* Дефиниције 5.1.3.

Доказ. Видети у [70].

Глатке и конвексне функције (из R^n у R) су семиглатке функције ([70]).

Дефиниција 5.1.5. Функција $\nabla F: R^n \to R^n$ је семиглатка у тачки $x \in R^n$ ако је ∇F локално *Lipschitz*-ова у $x \in R^n$ и ако

$$\lim_{\substack{h\to d \\ \lambda\downarrow 0}} \{Vh\},\ V \in \partial^2 F(x + \lambda h)$$

постоји за сваки правац $d \in R^n$.

Дефиниција 5.1.6. Дата функција $f: R^n \to R$ је класе SC^1 ако је диференцијабилна и њен градијент је семиглатка функција.

Приметимо да је градијент *Moreau–Yosida* регуларизације сопствене конвексне затворене функције једна семиглатка функција.

Лема 5.1.4. Ако је $\nabla F: R^n \to R^n$ семиглатка у тачки $x \in R^n$ онда ∇F има извод у правцу у тачки $x \in R^n$ и за било које $V \in \partial^2 F(x+h), h \to 0$ важи да је: $Vh - (\nabla F)'(x;h) = o(\|h\|)$. Такође, важи и да је $h^T Vh - F''(x;h) = o(\|h\|^2)$.

Доказ. Видети у [14].

Лема 5.1.5. **[22]** Нека је $f: R^n \to R$ сопствена конвексна затворена функција и нека је F њена *Moreau –Yosida* регуларизација. Ако је $x \in R^n$ решење проблема (5.1), онда важи да је $F'(x;d) = 0$ и $F''(x;d) \geq 0$ за сваки $d \in R^n$.

Доказ: На основу дефиниције извода у правцу и Теореме 4.1.6 следи да важи да је $F'(x;d) = \nabla F(x)^T d = 0$. Будући да је $x \in R^n$ решење проблема (5.1) на основу Теореме 4.1.6, Теореме 23.1 у [90] и чињенице да важе неједнакости $F'(x+td;d) \geq \frac{1}{t}(F(x+td) - F(x)) \geq 0$, закључујемо да важи да је $F''_D(x;d) = \limsup_{t \downarrow 0} \frac{F'(x+td;d) - F'(x;d)}{t} \geq 0$.■

Лема 5.1.6. **[22]** Нека је $f: R^n \to R$ сопствена конвексна затворена функција и нека је F њена *Moreau –Yosida* регуларизација и x тачка у R^n. Ако важи да је $F'(x;d) = 0$ за сваки правац $d \in R^n$, онда је $x \in R^n$ тачка у којој се достиже локални минимум проблема (5.1).

Доказ. Из претпоставке ове Леме важи да је $F'(x;d) = \nabla F^T(x) \cdot d = 0$ за сваки правац $d \in R^n$, $d \neq 0$. Одатле следи да је $\nabla F(x) = 0$, па на основу Теореме 4.1.6 закључујемо да је $x \in R^n$ тачка у којој се достиже локални минимум проблема (5.1). ■

Лема 5.1.7. Нека су $f_i : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ за $i = \{1,2,...,n\}, n \in N$ конвексне функције и $f(x) = \max_{i \in \{1,2,...,n\}} f_i(x)$. Тада је функција f конвексна функција и њен субградијент у тачки $x \in R^n$, тј. $g \in \partial f(x)$ може се представити на следећи начин:

$$g = \left\{ \sum_{i \in \hat{I}} \lambda_i g_i \middle| \sum_{i \in \hat{I}} \lambda_i = 1,\, \lambda_i \geq 0,\, g_i \in \partial f_i(x) \; for \; i \in \hat{I} \right\},$$

где је $\hat{I}$ скуп дефинисан са $\hat{I} = \{i \in I | f(x) = f_i(x)\}$.

Доказ.. Видети у [18].

5.2. *TRUST REGION - BUNDLE* АЛГОРИТАМ

Овде ћемо изложити алгоритам за решавање проблема (5.1) који се базира на комбинацији *trust region* стратегије[1] и *bundle* философије. Показаћемо да низ тачака генерисаних тим алгоритмом има тачку нагомилавања која задовољава потребан и довољан услов минимума функције циља проблема (5.1).

Ова идеја разматрана је концептуално, без доказа конвергенције алгоритма, у раду [112]. За разлику од [112], овде је разматран други тип функције у потпроблему (5.5) и доказана је конвергенција алгоритма. Рад представља теоријски допринос и објављен је у [40].

Изградићемо итеративну методу која се базира на следећој идеји. Ако на k-тој итерацији апроксимирамо функцију циља f проблема (5.1) неком функцијом Φ, онда је реално претпоставити да је могуће дефинисати неку околину тачке x_k (где је x_k тачка добијена алгоритмом који ћемо касније дефинисати) у којој се апроксимација Φ функције циља f поклапа са функцијом циља у неком смислу. Тада је за следећу итеративну тачку згодно

[1] Више о *trust region* методи видети у [30], [31], [37] и [38]

изабрати тачку минимума апроксимативне функције Φ у *trust region*-у текуће тачке.

<u>Лема 5.2.1.</u> Нека је $f : S \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $S \subseteq R^n$ и $x' \in int\, S$. Нека је $\{x_k\}$ низ тачака таквих да $x_k \to x'$, где $x_k = x' + \varepsilon_k s_k$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $s_k \to s$ и $g_k \in \partial f(x_k)$. Тада све тачке нагомилавања низа $\{g_k\}$ припадају скупу $\partial f(x')$.

<u>*Доказ.*</u> Видети у [48] или [37].

<u>Лема 5.2.2.</u> Нека је $f : S \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $S \subseteq R^n$ и $x' \in int\, S$. Нека је $\{x_k\}$ низ тачака таквих да $x_k \to x'$, где $x_k = x' + \varepsilon_k s_k$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $s_k \to s$ и $g_k \in \partial f(x_k)$.Тада важи да је:

$$f'(x', s) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k) - f(x')}{\varepsilon_k} = \max_{g \in \partial f(x')} s^T g \, .$$

<u>*Доказ.*</u> Видети у [30].

Ако је функција f конвексна, онда важи да је

$$f(x' + t \cdot s) = f(x') + t \cdot f'(x', s) + o(t) \quad , \tag{5.2}$$

што се може схватити као једна линеаризација функције f (видети у [34]).

<u>Лема 5.2.3.</u> Нека је $f : S \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $S \subseteq R^n$. Тада је скуп $\partial f(x)$ ограничен за $\forall x \in B \subset int\, S$, где је B компактан скуп.

<u>*Доказ.*</u> Видети у [48].

Познато је да ако је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ сопствена конвексна функција, онда је потребан и довољан услов да тачка $x \in R^n$ буде тачка минимума функције f

управо услов да $0 \in \partial f(x)$ (Теорема 1.1.4). То се алтернативно може записати и на следећи начин: $\max_{g \in \partial f(x)} s^T g \geq 0$, $\forall s \in R^n, \|s\| = 1$ (видети у [8]).

Претпоставимо да на k-тој итерацији постоји скуп индекса $I_k = \{1,2,...,k\}$ и да чувамо информације у *bundle*-у $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) | i \in I_k\}$, тј. у скупу уређених тројки које се састоје из тачке x_i, вредности функције f у тој тачки, тј. $f(x_i)$, и једног произвољног субградијента функције f у тој тачки, тј. $g_i \in \partial f(x_i)$, и то за свако $i \in I_k$.

Свака тројка из скупа B_k дефинише једну линеаризацију $f_i(x)$ функције циља проблема (5.1), која је дата са:

$$f_i(x) = f(x_i) + g_i^T (x - x_i) \qquad \text{где је } \; i \in I_k \; .$$

Ако је f конвексна функција, онда важи да је $f(x) = \max_{z \in R^n} \{f(z) + g^T (x - z)\}$, где је $g \in \partial f(z)$ (видети у [18]). Због тога је интересантно разматрати следећу функцију:

$$\hat{f}_k(x) = \max_{0 \leq i \leq k} f_i(x) = \max_{0 \leq i \leq k} \{f(x_i) + g_i^T (x - x_i)\},$$

која је у литератури позната као *cutting plane* функција. Очигледно важи да је $f(x) \geq \hat{f}_{k+1}(x) \geq \hat{f}_k(x)$ за свако $x \in R^n$.

Размотримо, сада, следећу функцију

$$\Phi_k(x) = \hat{f}_k(x) + \frac{1}{2t_k} \|x_k - x\|^2, \tag{5.3}$$

где је $t_k > 0$ дат параметар. Очигледно важи да је $\Phi_k(x_k) = \hat{f}_k(x_k)$.

Функција $\hat{f}_k(x)$ је део по део линеарна функција и као таква она је затворена и конвексна. Више од тога, функција $\hat{f}_k(x)$ се може разматрати као композиција линеарних функција, тј. $\max_{0 \leq i \leq k} f_i(x)$. Тада, за дати параметар $t_k > 0$ функција дефинисана са (5.3) је збир једне диференцијабилне квадратне функције и максимума линеарних функција. Дакле, за дати $t_k > 0$ функција дефинисана са (5.3) је затворена конвексна неглатка функција.

Ако $z \in \partial\Phi_k(x)$ онда $z \in \partial\hat{f}_k(x) + \partial\left(\frac{1}{2t_k}\|x_k - x\|^2\right)$. Одатле следи да, ако $z \in \partial\hat{f}_k(x) + \frac{1}{t_k}(x - x_k)$, онда је $z = \hat{g} + \frac{1}{t_k}(x - x_k)$ за неко $\hat{g} \in \partial\hat{f}_k(x)$. Како је $\hat{f}_k(x)$ максимум линеарних функција, на основу Леме 5.1.7 следи да је $\hat{g} = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$, где је $\hat{I}_k = \{i \in I_k \mid \hat{f}_k(x) = f_i(x)\}$ и $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k, \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, тј. $\hat{g}$ је конвексна комбинација субградијената из *bundle*-а B_k.

Алгоритам, који ћемо овде представити, генерише низ тачака $\{x_k\}$ на следећи начин. На *k*-тој итерацији разматрамо функцију дефинисану са (5.3) као једну апроксимацију функције циља f проблема (5.1) у некој околини тачке x_k, тј. $\Phi_k(x) = \hat{f}_k(x) + \frac{1}{2t_k}\|x_k - x\|^2$. За следећу итеративну тачку згодно је изабрати $x_{k+1} = x_k + \delta_k$, где корекција δ_k минимизира функцију $\Phi_k(x)$ за све $x = x_k + \delta \in \Omega_k$, при чему Ω_k означава *trust region*. Наиме, Ω_k означава околину тачке x_k у којој функција дефинисана са (5.3) апроксимира функцију циља проблема (5.1). Стога важи да је:

$$\Phi_k(x_k + \delta) := \hat{f}_k(x_k + \delta) + \frac{1}{2t_k}\|\delta\|^2 = \max_{0 \leq i \leq k}\left\{f(x_i) + g(x_i)^T(x_k + \delta - x_i)\right\} + \frac{1}{2t_k}\|\delta\|^2. \quad (5.4)$$

Уобичајено је разматрати случај када је $\Omega_k = B(x_k, h_k)$ и δ_k је решење потпроблема

$$\min_{\delta} \Phi_k(x_k + \delta) \quad \text{тако да} \quad \|\delta\| \leq h_k \quad . \quad (5.5)$$

Ако $\Phi_k(x_k + \delta)$ достиже минимум на R^n у δ_k, онда важи да $0 \in \partial\Phi_k(x_k + \delta_k)$, тј. $0 \in \partial\hat{f}(x_k + \delta_k) + \frac{1}{t_k}\delta_k$. Одатле следи да важи да је $-\frac{1}{t_k}\delta_k \in \partial\hat{f}(x_k + \delta_k)$.

Како δ_k у (5.5) мора да задовољи услов $\|\delta_k\| \leq h_k$, размотримо следећи проблем:

$$max\left\|\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i\right\| \text{ тако да } \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \quad . \tag{5.6}$$

где $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$. Проблем (5.6) увек има решење, јер је то максимум норме на симплексу. Означимо са λ_i решење проблема (5.6).

За радијус *trust region*-а можемо изабрати $h_k = t_k \overline{g}$, где је $\overline{g}$ максимална вредност функције циља проблема (5.6), тј. важи следећа једнакост:

$$h_k = t_k \max_{\substack{\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \left\|\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i\right\| \quad . \tag{5.7}$$

Под претпоставком (5.7) потпроблем (5.5) има решење које се поклапа са решењем проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$. Наиме, важи следећа теорема.

<u>**Теорема 5.2.1.**</u> Нека је дата тачка x_k. Ако је h_k бирано тако да важи једнакост (5.7) за дати параметар $t_k > 0$, онда потпроблем (5.5) има јединствено решење које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$.

<u>*Доказ.*</u> У датој тачки x_k функција циља потпроблема (5.5) има субградијент:

$$\hat{g}(x_k + \delta) + \frac{1}{t_k}\delta \in \partial\Phi(x_k + \delta),$$

где је $\hat{g}(x_k + \delta) := \hat{g} = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$ за $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$ и важи да $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, при чему је $\hat{I}_k = \left\{i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x_k + \delta) = f_i(x_k + \delta) = f(x_i) + g_i^T(x_k + \delta - x_i)\right\}$.

Ако је тачка $x_k + \delta_k$ тачка минимума за функцију $\Phi_k(x_k + \delta)$, онда важи $0 \in \partial\Phi_k(x_k + \delta_k)$ и одатле важи да је $\frac{1}{t_k}\delta_k = -\hat{g}(x_k + \delta_k) = -\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$, при чему је $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$ за $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, где је $\hat{I}_k = \left\{i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x_k + \delta_k) = f_i(x_k + \delta_k)\right\}$.

На основу (5.7) закључујемо да важи да је $h_k \geq t_k \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i^{(k)} g_i \right\| = t_k \frac{1}{t_k} \|\delta_k\| = \|\delta_k\|$. Дакле, следи да је $\delta_k = -t_k \hat{g}$ решење потпроблема (5.5). Решење је јединствено јер је Φ_k строго конвексна функција (као збир максимума линеарних функција и једне строго конвексне квадратне функције). ■

<u>Последица 5.2.1.</u> Нека је дата тачка x_k. Ако је h_k бирано тако да важи $h_k = t_k \max_{\substack{\sum_{i \in I_k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \left\| \sum_{i \in I_k} \lambda_i g_i \right\|$ (уместо (5.7)), онда потпроблем (5.5) има јединствено решење, које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$.

<u>Доказ</u> Ако изаберемо h_k тако да важи (5.7), онда на основу Теореме 5.2.1 следи да постоји решење проблема (5.5), које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$. Прецизније, постоји решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$ на скупу $S_0 = \left\{ \delta \middle| \; \|\delta\| \leq h_k, h_k = t_k \max_{\substack{\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\| \right\}$. Ако изаберемо да је $h_k = t_k \max_{\substack{\sum_{i \in I_k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \left\| \sum_{i \in I_k} \lambda_i g_i \right\|$ уместо (5.7), онда тражимо решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$ на ширем скупу $S = \left\{ \delta \middle| \; \|\delta\| \leq h_k, h_k = t_k \max_{\substack{\sum_{i \in I_k} \lambda_i = 1 \\ \lambda_i \geq 0}} \left\| \sum_{i \in I_k} \lambda_i g_i \right\| \right\}$, јер важи да је $S_0 \subseteq S$ (због $\hat{I}_k \subseteq I_k$). Дакле, ако решење припада подскупу S_0, онда то решење припада и скупу S, где $S_0 \subseteq S$.

Решење је јединствено јер је Φ_k строго конвексна функција (као збир максимума линеарних функција и једне квадратне строго конвексне функције).■

<u>Напомена 5.2.1</u>. Проблем (5.6) увек има решење, јер је то максимум норме на симплексу. Будући да важи да је:

$$\max \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\| \leq \max \left\{ \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i \|g_i\| \right\} \leq \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\| = \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\| \cdot \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\|,$$

где последња једнакост важи због ограничења у проблему (5.6), тј. $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, за радијус *trust region*-а бирамо да је $h_k = t_k \overline{g}$, где је $\overline{g} = \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\|$, тј. (5.7) је управо $h_k = t_k \cdot \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\|$.

Пре излагања алгоритма, споменимо да ћемо на *k*-тој итерацији означити са $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_k + \delta_k)$ стварно смањење функције $f(\cdot)$ и са $\Delta \Phi_k = f(x_k) - \Phi_k(x_k + \delta_k)$ очекивано смањење функције. Разломак $r_k = \frac{\Delta f_k}{\Delta \Phi_k}$ мери тачност којом $\Phi_k(x_k + \delta)$ апроксимира $f(x_k + \delta)$.

Разломак r_k игра важну улогу у избору нове итеративне тачке x_{k+1} и ажурирања радијуса h_k за *trust region*. Ако је разломак близак 1, то значи да је апроксимација добра и да можемо проширити *trust region* за нову итеративну тачку; ако је разломак близак нули или негативан онда морамо сузити *trust region.*

Алгоритам 5.2.1.

Корак 0: Нека је β дата константа таква да је $0.5 < \beta < 1$.

Нека су ε и μ довољно мали реални позитивни бројеви.

Нека је дата почетна тачка $x_1 \in R^n$ и $t_1 = 1$.

Ставити да је $k = 1$ и $I_0 = \emptyset,\ B_0 = \emptyset$.

Корак 1: За дато x_k израчунати $f_k = f(x_k)$ и $g_k = g(x_k)$.

Ставити да је $I_k = \{k\} \cup I_{k-1} \setminus S_k$, где је $S_k = \{i \in I_{k-1} \,|\, \|x_i - x_k\| \geq \mu\}$.

Ставити да је $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) \,|\, i \in I_k\}$.

Решити проблем (5.6) са I_k уместо $\hat{I}_k$ и означити са $\overline{h}_k$ његово решење. Ставити да је $h_k = t_k \overline{h}_k$.

Корак 2: Решити проблем (5.5) и са δ_k означити његово решење.

Означити са

$$\hat{I}_k = \left\{ i \in I_k \,\middle|\, \hat{f}_k(x_k + \delta_k) = f_i(x_k + \delta_k) = f(x_i) + g_i^T(x_k + \delta_k - x_i) \right\}.$$

Корак 3: Ако је $\|\delta_k\| \le \varepsilon$, онда СТОП. Иначе решити проблем

$$min\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right\| \text{ тако да } \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0$$

и означити са $\lambda_i^{(k)}$ његово решење.

Ако је $\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i^{(k)} g_i\right\| \le \varepsilon$, онда СТОП. Иначе ићи на Корак 4.

Корак 4: Израчунати $f(x_k+\delta_k), \phi_k(x_k+\delta_k), \Delta f_k, \Delta\phi_k, r_k$.

Корак 5: Ако је $r_k \ge \beta$ онда ставити да је $x_{k+1} = x_k + \delta_k$, $t_{k+1} = t_k$ $k = k+1$

и ићи на Корак 1. Иначе ићи на Корак 6.

Корак 6: Ставити $\delta_k = -\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i^{(k)} g_i$, $x_{k+1} = x_k$, $t_{k+1} = \frac{1}{2}t_k$, $k = k+1$

и ићи на Корак 1.

Лема 5.2.4. Нека је $\{x_k\}$ низ генерисан Алгоритмом 5.2.1 такав да $x_k \to x'$, $x_k = x' + \alpha_k s_k$, $s_k \to s$, $\alpha_k \downarrow 0$, где $\|s_k\| = 1$. Тада важи да је

$$\hat{f}_k(x_k) - \hat{f}_k(x') = o(\alpha_k) \quad . \tag{5.8}$$

Више од тога, важи да је $\lim_{k\to\infty}\hat{f}_k(x_k) = f(x')$.

Доказ. Означимо са $f_k = f(x_k), f' = f(x')$, $g_k = g(x_k) \in \partial f(x_k)$ и $g' = g(x') \in \partial f'$.

Како је Φ_k конвексна функција, онда из (5.2) следи да важи да је

$$\Phi_k(x' + \alpha_k s_k) = \Phi_k(x') + \alpha_k \cdot \Phi_k'(x', s_k) + o(\alpha_k).$$

Одавде, на основу Леме 5.2.2, следи:

$$\Phi_k(x' + \alpha_k s_k) = \Phi_k(x') + \alpha_k \cdot \max_{g\in\partial\Phi_k(x')} g^T s_k + o(\alpha_k). \tag{5.9}$$

Ако је $z \in \partial\Phi_k(x')$ такво да $z^T s_k = \max_{g\in\partial\Phi_k(x')} g^T s_k$, онда је $z = \hat{g} + \frac{1}{t_k}(x' - x_k)$ и $\hat{g} = \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i$, где $\hat{I}_k = \left\{i \in I_k \,\middle|\, \hat{f}_k(x) = f_i(x)\right\}$ и $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k, \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0$.

Одавде, на основу (5.9), следи:

$$\hat{f}_k(x_k)=\Phi_k(x_k)=\Phi_k(x'+\alpha_k s_k)=\Phi_k(x')+\alpha_k z^T s_k+o(\alpha_k)=\Phi_k(x')+z^T(x_k-x')+o(\alpha_k)$$

$$=\max_{0\le i\le k}\left\{f(x_i)+g(x_i)^T(x'-x_i)\right\}+\frac{1}{2t_k}\|x_k-x'\|^2+\left(\hat{g}+\frac{1}{t_k}(x'-x_k)\right)^T(x_k-x')+o(\alpha_k)$$

$$=f(x_i)+g(x_i)^T(x'-x_i)+\frac{1}{2t_k}\|\alpha_k s_k\|^2+\left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i-\frac{1}{t_k}\alpha_k s_k\right)^T(\alpha_k s_k)+o(\alpha_k), i\in\hat{I}_k$$

$$=f(x_i)+g(x_i)^T(x'-x_i)-\frac{1}{2t_k}\|\alpha_k s_k\|^2+\left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right)^T(\alpha_k s_k)+o(\alpha_k), i\in\hat{I}_k$$

$$=\hat{f}_k(x')-\frac{1}{2t_k}\alpha_k^{\ 2}+\left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right)^T(\alpha_k s_k)+o(\alpha_k)=\hat{f}_k(x')+o(\alpha_k).$$

Дакле, добили смо да важи да је $\hat{f}_k(x_k)-\hat{f}_k(x')=o(\alpha_k)$.

Када $k\to\infty$ имамо $\lim_{k\to\infty}\hat{f}_k(x_k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i+g_i^T(x_k-x_i)\right)\right\}$. Како је $f(x)\ge\hat{f}_{k+1}(x)\ge\hat{f}_k(x)$ за произвољно $x\in R^n$, следи да је низ $\left\{\hat{f}_k(x)\right\}$ растући и ограничен одозго. Како $x_k\to x'$, почевши од неког довољно великог k бесконачно много тачака низа припада околини тачке x'. Зато, због чињенице да је $f(x')=\max_{z\in R^n}\left\{f(z)+g^T(x'-z)\right\}$ где $g\in\partial f(z)$, можемо тврдити да је $f(x')=\lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i+g_i^T(x_k-x_i)\right)\right\}$.

Ако претпоставимо супротно , тј. да је $f(x')>\lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i+g_i^T(x_k-x_i)\right)\right\}$, онда важи да је $f(x')>\max_{1\le i\le k}\left(f_i+g_i^T(x_k-x_i)\right)\ge f_k+g_k^T(x_k-x_k)=f_k$ за свако k. Одатле, када $k\to\infty$ добијамо да је $f(x')>f(x')$ (због конвексности функције f). ■

<u>Лема 5.2.5.</u> Нека је низ $\{x_k\}$ генерисан алгоритмом такав да $x_k\to x'$, $x_k=x'+\alpha_k s_k$, $s_k\to s$, $\alpha_k\downarrow 0$, где је $\|s_k\|=1$. Тада је $\lim_{k\to\infty}\phi_k(x_k)=f(x')$.

<u>Доказ.</u> Када $k\to\infty$, онда, на основу Леме 5.2.4 и (5.3), следи да важи да је $\lim_{k\to\infty}\phi_k(x_k)=\lim_{k\to\infty}\hat{f}_k(x_k)=f(x')$.Ако означимо са $\Phi_\infty(x)=\hat{f}_\infty(x)+\frac{1}{2t_\infty}\|x'-x\|^2$, онда је $\Phi_\infty(x')=\hat{f}_\infty(x')=f(x')$.■

Остаје још да се докаже главни резултат.

Теорема 5.2.2. Нека је низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.2.1 такав да $x_k \in B \subset R^n, \forall k$ где је B компактан скуп. Тада постоји тачка нагомилавања x_∞ низа $\{x_k\}$ која задовољава потребан и довољан услов да буде тачка минимума проблема (5.1), тј. таква да важи да је

$$\max_{g \in \partial f_\infty} s^T g \geq 0 \ , \forall s \in R^n : \|s\| = 1, \text{ тј. } 0 \in \partial f_\infty \tag{5.10}$$

(где $\partial f_\infty = \partial f(x_\infty)$).

Доказ. Како је B компактан скуп и $x_k \in B$, следи да низ $\{x_k\}$ има бар једну тачку нагомилавања x^∞. Одатле следи да постоји конвергентан подниз $x_k \to x_\infty$. Алгоритам 5.2.1 генерише подниз за који важи једна од следеће две могућности:

(i) $\quad r_k < \beta$ и одатле $\|\delta_k\| \to 0$, или

(ii) $\quad r_k \geq \beta$ и $\inf(h_k) > 0$.

Показаћемо да (5.10) важи у оба случаја (*(i)* или *(ii)*).

У случају *(i)* важи да је $r_k < \beta$ за свако k подниза. На основу Леме 5.2.3 и Корака 6 Алгоритма 5.2.1 важи да $\|\delta_k\| \to 0$ када $k \to \infty$. Наиме, у Кораку 1 Алгоритма 5.2.1 мења се скуп индекса I_k тако што се додаје ново k, али не додајемо нови субградијент јер смо на Кораку 6 Алгоритма 5.2.1 бирали $x_{k+1} = x_k$, и због тога проблем (5.6) има исто решење као и у претходној итерацији. Дакле, важи да је $h_k = t_k \overline{h}_k = \frac{1}{2} t_{k-1} \overline{h}_{k-1} = \frac{1}{2} h_{k-1}$, тј. сузили смо *trust region* . Како свако $x_k \in B$ и B је, по претпоставци, компактан скуп, онда је, на основу Леме 5.2.3, сваки од скупова $\partial f(x_k)$ ограничен (за тачке x_k тог подниза).

Чињеница је да ако скуп индекса $\hat{I}_k$ представља скуп "активних делова" у x_k, који је скоро увек једночлан, онда је решење проблема (5.6) тривијално, јер захтева максимизацију норме на симплексу, и зато се редукује на налажење норме $g_i, i \in \hat{I}_k$. Како $t_k \to 0$ када $k \to \infty$ (због Корака 6) следи да $\|\delta_k\| \to 0$ када $k \to \infty$.

Будући да је ∂f_k ограничен у околини тачке x_∞ (Лема 5.2.3) закључујемо да постоји подниз за који важи да $g_k \to g_\infty$, а због Леме 5.2.1 следи да $g_\infty \in \partial f_\infty$. Како $\|x_{k+1} - x_k\| = \|\delta_k\| \to 0$ када $k \to \infty$ (на подниzу), због Корака 1 Алгоритма 5.2.1 и Леме 5.1.7 следи да $\|x_i - x_k\| \to 0, i \in \hat{I}_k$. Како су ∂f_i за $i \in \hat{I}_k$ ограничени скупови у околини тачке x_∞, следи да за придружени подниз, за који важи да $g_i \to g_\infty^i$ за $i \in \hat{I}_k$, на основу Леме 5.2.1 важи да $g_\infty^i \in \partial f_\infty$. Како је ∂f_∞ конвексан скуп, следи да свака конвексна комбинација тачака из скупа ∂f_∞ припада скупу ∂f_∞, тј. $\delta_\infty = \sum_{i \in \hat{I}_\infty} \lambda_i^{(\infty)} g_\infty^i \in \partial f_\infty$, где $\delta_k = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i^{(k)} g_i \to \delta_\infty = \sum_{i \in \hat{I}_\infty} \lambda_i^{(\infty)} g_\infty^i$. Будући да $\delta_k \to \delta_\infty$ и $\|\delta_k\| \to 0$, следи да $0 \in \partial f_\infty$.

У случају *(ii)* важи $f_1 - f_\infty \geq \sum_k \Delta f_k$ (где је сума узета по поднизу) и на основу претпоставке да је $r_k \geq \beta$ следи да $\Delta\Phi_k \to 0$, јер је $f_1 - f_\infty$ константа.

Нека $\bar{h}$ задовољава неједнакост $0 < \bar{h} < inf(h_k)$ и нека је $\bar{\delta}$ тачка минимума функције $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ за $\|\delta\| \leq \bar{h}$. Како тачка $\bar{x} = x_\infty + \bar{\delta}$ припада скупу $\Omega_k = B(x_k, h_k)$ за довољно велико k, на основу дефиниције $\Delta\Phi_k$ и чињенице да минимум на мањем скупу није мањи од минимума на већем скупу, следи

$$\Phi_k\left(x_k + \bar{\delta}\right) = \Phi_k\left(x_k + \bar{x} - x_\infty\right) \geq \Phi_k\left(x_k + \delta_k\right) = f_k - \Delta\Phi_k \,. \tag{5.11}$$

Како су f и Φ_k непрекидне као конвексне функције, и како $\Delta\Phi_k \to 0$ и $\bar{x} - x_k \to \bar{\delta}$ када $k \to \infty$, из (5.11), на основу Леме 5.2.5, закључујемо да важи:

$$\Phi_\infty\left(x_\infty + \bar{\delta}\right) \geq f_\infty - 0 = \Phi_\infty\left(x_\infty + 0\right) \,.$$

Приметимо да, како је $\delta = 0$ тачка минимума функције $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ за $\|\delta\| \leq \bar{h}$, онда следи да је $\bar{\delta} = 0$. Будући да $\bar{\delta} = 0$ минимизира $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ и како последње ограничење није активно (јер је $0 < \bar{h} < inf(h_k)$) следи да је потребан услов првог реда за егзистенцију минимума задовољен, тј. $0 \in \partial f_\infty$ (јер је $\Phi_\infty(x_\infty + 0) = \hat{f}_\infty(x_\infty) = f(x_\infty) = f_\infty$). Како је функција f конвексна, то је и довољан услов за егзистенцију глобалног минимума (Теорема 1.1.4) проблема (5.1) у тачки x_∞.■

Алгоритам 5.2.1 је комбинација *trust region* методе са стратегијом *bundle* метода. То је нов приступ решавању недиференцијабилног конвексног проблема (5.1). Уколико се користе неке друге норме у (5.3) могуће је очекивати друге резултате.

5.3. *TRUST REGION* - КОНЈУГОВАНО СУБГРАДИЈЕНТНИ АЛГОРИТАМ

Овде ћемо изложити алгоритам за минимизацију конвексне недиференцијабилне функције, који се базира на *trust region* стратегији и конјугованој субградијентној методи[2]. Доказано је да низ тачака генерисаних тим алгоритмом конвергира ка тачки која задовољава потребне и довољне услове минимума функције циља проблема (5.1). Рад је изложен у [41] и тренутно је на рецензији.

Као и до сада, разматра се проблем (5.1), тј. следећи проблем:

$$\min_{x \in R^n} f(x),$$

где је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна и не обавезно диференцијабилна функција која има непразан скуп минимума, који ћемо означити са X^*.

Алгоритам, који ћемо овде изложити, базира се на комбинацији *trust region* стратегије и конјуговане субградијентне методе. Идеја је следећа. На k-тој итерацији апроксимираћемо функцију циља f проблема (5.1) неком функцијом Φ и онда ће бити разумно да се претпостави да је могуће дефинисати околину

[2] Више о конјугованој субградијентној методи видети у [105].

тачке x_k у којој се апроксимација Φ функције циља f поклапа са функцијом циља у неком смислу. Тада је за следећу итеративну тачку погодно изабрати тачку у којој се апроксимативна функција Φ минимизира на R^n у разматраној околини тачке x_k, тј. применити *trust region* технику. Ако се апроксимација Φ функције циља f не поклапа са функцијом f у одговарајућемо степену, онда решавамо проблем (5.1) конјуговано субградијентном методом (уместо *bundle* техником како је то урађено у [40]).

Претпоставимо да на k-тој итерацији постоји скуп индекса $I_k = \{1,2,...,k\}$, и да чувамо информације у *bundle*-у $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) | i \in I_k\}$, тј. *bundle* је скуп свих уређених тројки које се састоје из текуће тачке x_i, вредности функције циља проблема (5.1) у тој тачки, тј. $f(x_i)$ и једног субградијента $g_i \in \partial f(x_i)$, при чему се сва та три податка односе на индексе из скупа I_k. Свака уређена тројка у *bundle*-у B_k одређује једну линеаризацију $f_i(x)$ функције циља проблема (5.1), која је дефинисана са

$$f_i(x) = f(x_i) + g_i^T(x - x_i), \text{ за } i \in I_k. \tag{5.12}$$

Ако је f конвексна функција, онда важи да је $f(x) = \max_{z \in R^n}\{f(z) + g^T(x - z)\}$, где је $g \in \partial f(z)$ (доказано у [18]). Дакле, можемо закључити да је функција

$$\hat{f}_k(x) = \max_{0 \le i \le k} f_i(x) = \max_{0 \le i \le k}\{f(x_i) + g_i^T(x - x_i)\} \tag{5.13}$$

(која је у литератури позната као *cutting plane* функција) добра апроксимација функције f. Очигледно важи да је $f(x) \ge \hat{f}_{k+1}(x) \ge \hat{f}_k(x)$ за свако $x \in R^n$.

Разматрајмо следећу функцију:

$$\Phi_k(x) = \hat{f}_k(x) + \frac{1}{2}\|x_k - x\|^2. \tag{5.14}$$

Није тешко закључити да важи да је $\Phi_k(x_k) = \hat{f}_k(x_k)$. Функција $\hat{f}_k(x)$ је део по део линеарна функција и као таква она је затворена конвексна функција. Више од тога, $\hat{f}_k(x)$ се може разматрати и као композиција линеарних функција, тј. $\max_{0 \le i \le k} f_i(x)$. Због тога је функција $\Phi_k(x)$, као збир једне диференцијабилне квадратне функције и максимума линеарних функција, затворена конвексна недиференцијабилна функција.

Ако $z \in \partial\Phi_k(x)$, онда $z \in \partial\hat{f}_k(x) + \partial\left(\frac{1}{2}\|x_k - x\|^2\right)$. Због тога $z \in \partial\hat{f}_k(x) + x - x_k$ и $z = \hat{g} + x - x_k$ за неко $\hat{g} \in \partial\hat{f}_k(x)$. Како је $\hat{f}_k(x)$ део по део линеарна функција и $\hat{g} \in \partial\hat{f}_k(x)$, онда, на основу Леме 5.1.7, следи да је $\hat{g} = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$, где је $\hat{I}_k = \left\{ i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x) = f_i(x) \right\}$ и $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$, $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, тј. $\hat{g}$ је конвексна комбинација субградијената из *bundle*-а B_k.

Алгоритам који ћемо овде изложити генерише низ тачака $\{x_k\}$ у R^n на следећи начин. На k-тој итерацији разматрамо функцију дефинисану са (5.14) као једну апроксимативну функцију функције циља f проблема (5.1) у околини тачке x_k, тј. $\Phi_k(x) = \hat{f}_k(x) + \frac{1}{2}\|x_k - x\|^2$. За следећу итеративну тачку биће згодно изабрати $x_{k+1} = x_k + \delta_k$, где корекција δ_k минимизира функцију $\Phi_k(x)$ за све $x = x_k + \delta \in \Omega_k$, при чему Ω_k означава *trust region*. Наиме, Ω_k означава околину тачке x_k у којој функција дефинисана са (5.14) апроксимира функцију циља проблема (5.1). Функција дефинисана са (5.14) може се записати на следећи начин:

$$\Phi_k(x_k + \delta) := \hat{f}_k(x_k + \delta) + \frac{1}{2}\|\delta\|^2 = \max_{0 \leq i \leq k}\left\{ f(x_i) + g(x_i)^T (x_k + \delta - x_i) \right\} + \frac{1}{2}\|\delta\|^2 . \qquad (5.15)$$

Уобичајено је разматрати случај када је $\Omega_k = B(x_k, h_k)$ и δ_k је решење следећег проблема

$$\min_{\delta} \Phi_k(x_k + \delta) \quad \text{тако да} \quad \|\delta\| \leq h_k \quad . \qquad (5.16)$$

Ако $\Phi_k(x_k + \delta)$ достиже минимум на R^n у δ_k, тада важи да $0 \in \partial\Phi_k(x_k + \delta_k)$, тј. $0 \in \partial\hat{f}(x_k + \delta_k) + \delta_k$, тј. $-\delta_k \in \partial\hat{f}(x_k + \delta_k)$

Ако желимо да решење проблема (5.16) буде тачка минимума функције $\Phi_k(x_k + \delta)$ када минимизацију вршимо на целом R^n, онда δ_k мора да задовољи услов $\|\delta_k\| \leq h_k$.

Разматраћемо следећи проблем.

За дате $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$ израчунати λ_i као решење следећег проблема:

$$max\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right\| \text{ тако да } \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ . \tag{5.17}$$

Можемо бирати *trust region* радијус h_k као максималну вредност функције циља проблема (5.17). Проблем (5.17) увек има решење, јер је то максимум норме на симплексу. Будући да важи да је:

$$max\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right\| \leq max\left\{\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i\|g_i\|\right\} \leq \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i \max_{i\in\hat{I}_k}\|g_i\| = \max_{i\in\hat{I}_k}\|g_i\| \cdot \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = \max_{i\in\hat{I}_k}\|g_i\|,$$

где последња једнакост важи због ограничења у проблему (5.17), тј. $\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, закључујемо да је *trust region* радијус $h_k = \bar{g}$, где је $\bar{g} = \max_{i\in\hat{I}_k}\|g_i\|$, тј. решење проблема (5.17) је:

$$h_k = \max_{i\in\hat{I}_k}\|g_i\| \ . \tag{5.18}$$

Важи следећа теорема.

<u>**Теорема 5.3.1.**</u> Нека је дата тачка x_k. Ако је h_k бирано тако да важи једнакост (5.18), онда потпроблем (5.16) има јединствено решење које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta\in R^n}\Phi_k(x_k+\delta)$.

<u>*Доказ.*</u> У датој тачки x_k функција циља потпроблема (5.16) има субградијент:

$$\hat{g}(x_k+\delta)+\delta \in \partial\Phi(x_k+\delta),$$

где је $\hat{g}(x_k+\delta) := \hat{g} = \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i$ за $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$ и важи да $\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, при чему је $\hat{I}_k = \left\{i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x_k+\delta) = f_i(x_k+\delta) = f(x_i) + g_i^T(x_k+\delta-x_i)\right\}$.

Ако је тачка $x_k+\delta_k$ тачка минимума за функцију $\Phi_k(x_k+\delta)$ када се минимизација врши на R^n, онда важи да $0 \in \partial\Phi_k(x_k+\delta_k)$ и одатле важи да је

$\delta_k = -\hat{g}(x_k + \delta_k) = -\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$, при чему је $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k$ за $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$, где је $\hat{I}_k = \left\{ i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x_k + \delta_k) = f_i(x_k + \delta_k) \right\}$.

На основу (5.18) закључујемо да важи да је $h_k = \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\| \geq \max \left\{ \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i \|g_i\| \right\} \geq \max \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\| \geq \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\| = \left\| -\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\| = \|\delta_k\|$, за $\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$. Дакле, следи да је $\delta_k = -\hat{g}$ решење потпроблема (5.16). Решење је јединствено јер је Φ_k строго конвексна функција (као збир максимума линеарних функција и једне строго конвексне квадратне функције). ■

<u>Последица 5.3.1.</u> Нека је дата тачка x_k. Ако је h_k бирано тако да важи $h_k = \max_{i \in I_k} \|g_i\|$ (уместо (5.18)), онда потпроблем (5.16) има јединствено решење, које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$.

<u>Доказ</u> Ако изаберемо h_k тако да важи (5.18), онда на основу Теореме 5.3.1 следи да постоји решење проблема (5.16), које је истовремено и решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$. Прецизније, постоји решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$ на скупу $S_0 = \left\{ \delta \middle| \|\delta\| \leq h_k, h_k = \max_{i \in \hat{I}_k} \|g_i\| \right\}$. Ако изаберемо да је $h_k = \max_{i \in I_k} \|g_i\|$ уместо (5.18), онда тражимо решење проблема $\min_{\delta \in R^n} \Phi_k(x_k + \delta)$ на ширем скупу $S = \left\{ \delta \middle| \|\delta\| \leq h_k, h_k = \max_{i \in I_k} \|g_i\| \right\}$, јер важи да је $S_0 \subseteq S$ (због $\hat{I}_k \subseteq I_k$). Дакле, ако постоји решење на подскупу S_0, онда мора постојати решење на скупу S, јер $S_0 \subseteq S$.

Решење је јединствено јер је Φ_k строго конвексна функција (као збир максимума линеарних функција и једне квадратне строго конвексне функције).■

Пре излагања алгоритма наведимо да ћемо на k-тој итерацији означити са $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_k + \delta_k)$ стварно смањење функције $f(\cdot)$ и са $\Delta \Phi_k = f(x_k) - \Phi_k(x_k + \delta_k)$ очекивано смањење функције.

Разломак $r_k = \dfrac{\Delta f_k}{\Delta \Phi_k}$ мери тачност којом $\Phi_k(x_k + \delta)$ апроксимира $f(x_k + \delta)$. Разломак r_k игра важну улогу у избору нове итеративне тачке x_{k+1} и ажурирања *trust region* радијуса h_k. Ако је разломак близак броју 1, онда је апроксимација добра; ако је разломак близак нули или негативан, онда апроксимација није добра па напуштамо *trust region* и следећу итеративну тачку бирамо конјуговано субградијентном методом.

Сада ћемо представити алгоритам.

Алгоритам 5.3.1.

<u>Корак 0:</u> Нека су β и η константе такве да важи $0.5 < \beta < 1$ и $0 < \eta < 1$.

Нека су ε, γ и μ довољно мали реални позитивни бројеви.

Нека је дата почетна тачка $x_1 \in R^n$.

За дато $x_1 \in R^n$ израчунати $g_1 = g(x_1) \in \partial f(x_1)$.

Ставити да је $k = 1$, $h_1 = \|g_1\|$ и $I_0 = \emptyset$, $B_0 = \emptyset$.

<u>Корак 1:</u> За дато x_k израчунати $f_k = f(x_k)$.

Ставити да је $I_k = \{k\} \cup I_{k-1} \setminus S_k$, где је $S_k = \{i \in I_{k-1} \| \|x_i - x_k\| \geq \mu\}$.

Ставити да је $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) | i \in I_k\}$.

Израчунати $h_k = \max_{i \in I_k} \|g_i\|$.

<u>Корак 2:</u> Решити проблем (5.16) и његово решење означити са δ_k.

Ставити да је

$$\hat{I}_k = \left\{ i \in I_k \middle| \hat{f}_k(x_k + \delta_k) = f_i(x_k + \delta_k) = f(x_i) + g_i^T (x_k + \delta_k - x_i) \right\}.$$

Корак 3: Ако је $\|\delta_k\| \leq \varepsilon$, онда СТОП. Иначе решити проблем

$$min\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right\| \text{ тако да } \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0,$$

и његово решење означити са $\lambda_i^{(k)}$. Ако је $\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i^{(k)}g_i\right\| \leq \varepsilon$, онда СТОП.

Иначе иђи на Корак 4.

Корак 4: Израчунати $f(x_k+\delta_k), \phi_k(x_k+\delta_k), \Delta f_k, \Delta\phi_k, r_k$.

Корак 5: Ако је $r_k < \beta$ иђи на Корак 6.

Иначе ставити да је $x_{k+1} = x_k + \delta_k$

и израчунати $g_{k+1} = g(x_{k+1}) \in \partial f(x_{k+1})$.

Ставити да је $k = k+1$ и иђи на Корак 1.

Корак 6: Ставити да је $\bar{\delta}_k = -\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i^{(k)}g_i$.

Израчунати $\alpha_k > \gamma > 0$ тако да важи да је $\alpha_k\|\bar{\delta}_k\| \leq \varepsilon\cdot\eta\cdot\mu$.

Израчунати $g_{k+1} = g(x_{k+1}) \in \partial f(x_k + \alpha_k\bar{\delta}_k)$.

Корак 7: Ако је задовољена неједнакост $g_{k+1}^T\bar{\delta}_k \leq -\frac{\eta}{2}\|\bar{\delta}_k\|^2$ ставити да је

$x_{k+1} = x_k + \alpha_k\bar{\delta}_k$.

Иначе ставити да је $x_{k+1} = x_k$, $k = k+1$ и иђи на Корак1.

Напомена 5.3.1. Овде ћемо детаљније описати како се реализује Корак 2 Алгоритма 5.3.1. Проблем (5.16) који се решава у Кораку 2, на основу Последице 5.3.1 може се записати на следећи начин:

$$\min_{\delta\in R^n, v\in R}\left\{v + \frac{1}{2}\|\delta\|^2\right\} \text{ тако да је } f(x_i) + g(x_i)^T(x_k + \delta - x_i) \leq v, i \in I_k \quad .$$

Овај проблем је нелинеаране структуре са непразним допустивим скупом, па на основу дуалности решавање тог проблема еквивалентно је налажењу мултипликатора $\lambda_i^k, i \in I_k$ који су решења следећег квадратног проблема:

$$\min_{\delta \in R^n, v \in R} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{i \in I_k} \lambda_i g(x_i) \right\|^2 + \sum_{i \in I_k} \lambda_i \left[f(x_i) + g(x_i)^T (x_i - x_k) \right] \right\},$$

$$\sum_{i \in I_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i \in I_k.$$

Ако су мултипликатори $\lambda_i^k, i \in I_k$ решења горњег проблема онда је $\delta_k = -\sum_{i \in I_k} \lambda_i^k g(x_i)$ решење проблема (5.16). Скуп $\hat{I}_k$ је скуп индекса $i \in I_k$ таквих да $\lambda_i^k > 0$.■

Напомена 5.3.2. Могуће је разматрати такозвану грешку линеаризације $e_i^k := f(x_k) - f_i(x_k) = f(x_k) - f(x_i) - g_i^T(x_k - x_i)$ и функцију (5.13) записати у следећем облику $\hat{f}_k(x) = \max_{i \in I_k} f_i(x) = f(x_k) + \min_{i \in I_k} e_i^k$. У том случају *bundle* се састоји од уређених парова (g_j, e_j^k) уместо уређених тројки $(x_j, f(x_j), g_j)$, и то може бити добар начин за уштеду меморијског простора.■

Напомена 5.3.3. Приметимо да је корак који чинимо при прелазу на следећу итеративну тачку већи на Кораку 5 него на Кораку 7. Наиме, у првом случају ($r_k \geq \beta$, тј. када се квадратна апроксимација функције циља проблема (5.1), дефинисана са (5.15) налази у *trust region*-у) правимо корак (јединичне дужине) у правцу $\delta_k = -\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i, \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$. У другом случају ($r_k < \beta$) на Кораку 7,

ако важи $g_{k+1}^T \bar{\delta}_k \leq -\frac{\eta}{2} \|\bar{\delta}_k\|^2$ онда правимо корак у правцу $\bar{\delta}_k = -\sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i^{(k)} g_i$ (где је $\lambda_i^{(k)}$ решење проблема $\min \left\| \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i \right\|, \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$) и при том је дужина корака $\alpha_k \in (0, \eta \cdot \mu)$, или ако важи да је $g_{k+1}^T \bar{\delta}_k > -\frac{\eta}{2} \|\bar{\delta}_k\|^2$ онда остајемо у истој тачки (уопште не правимо корак). Померање на Кораку 7 је у духу метода конјугованих субградијената, тако да можемо констатовати да је Алгоритам 5.3.2 бржи (случај $r_k \geq \beta$) од конјуговано субградијентних алгоритама ([106], страна 617).■

<u>Лема 5.3.1.</u> Нека је $\{x_k\}$ низ тачака генерисаних Алгоритмом 5.3.1, таквих да важи да је $x_k \to x'$, $x_k = x' + \alpha_k s_k$, $s_k \to s$, $\alpha_k \downarrow 0$, где је $\|s_k\| = 1$. Тада важи да је $\hat{f}_k(x_k) - \hat{f}_k(x') = o(\alpha_k)$. Више од тога, важи да је $\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x_k) = f(x')$.

<u>Доказ.</u> Означимо са $f_k = f(x_k), f' = f(x')$, $g_k = g(x_k) \in \partial f(x_k)$ и $g' = g(x') \in \partial f'$.

Како је Φ_k конвексна функција, онда из (5.2) следи да важи да је

$$\Phi_k(x' + \alpha_k s_k) = \Phi_k(x') + \alpha_k \cdot \Phi_k{}'(x', s_k) + o(\alpha_k).$$

Одавде, на основу Леме 5.2.2, следи:

$$\Phi_k(x' + \alpha_k s_k) = \Phi_k(x') + \alpha_k \cdot \max_{g\in\partial\Phi_k(x')} g^T s_k + o(\alpha_k). \tag{5.19}$$

Ако је $z \in \partial\Phi_k(x')$ такво да $z^T s_k = \max_{g\in\partial\Phi_k(x')} g^T s_k$, онда је $z = \hat{g} + (x' - x_k)$ и $\hat{g} = \sum_{i\in\hat{I}_k} \lambda_i g_i$, где $\hat{I}_k = \{i \in I_k \mid \hat{f}_k(x) = f_i(x)\}$ и $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k, \sum_{i\in\hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0$.

Одавде, на основу (5.19), следи:

$$\hat{f}_k(x_k) = \Phi_k(x_k) = \Phi_k(x' + \alpha_k s_k) = \Phi_k(x') + \alpha_k z^T s_k + o(\alpha_k) = \Phi_k(x') + z^T(x_k - x') + o(\alpha_k)$$

$$= \max_{0\le i\le k}\left\{f(x_i) + g(x_i)^T(x' - x_i)\right\} + \frac{1}{2}\|x_k - x'\|^2 + (\hat{g} + (x' - x_k))^T(x_k - x') + o(\alpha_k)$$

$$= f(x_i) + g(x_i)^T(x' - x_i) + \frac{1}{2}\|\alpha_k s_k\|^2 + \left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i - \alpha_k s_k\right)^T(\alpha_k s_k) + o(\alpha_k), i \in \hat{I}_k$$

$$= f(x_i) + g(x_i)^T(x' - x_i) - \frac{1}{2}\|\alpha_k s_k\|^2 + \left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right)^T(\alpha_k s_k) + o(\alpha_k), i \in \hat{I}_k$$

$$= \hat{f}_k(x') - \frac{1}{2}\alpha_k{}^2 + \left(\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right)^T(\alpha_k s_k) + o(\alpha_k) = \hat{f}_k(x') + o(\alpha_k).$$

Дакле, добили смо да важи да је $\hat{f}_k(x_k) - \hat{f}_k(x') = o(\alpha_k)$.

Када $k \to \infty$ имамо $\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x_k) = \lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i + g_i^T(x_k - x_i)\right)\right\}$. Како је $f(x) \ge \hat{f}_{k+1}(x) \ge \hat{f}_k(x)$ за произвољно $x \in R^n$, следи да је низ $\{\hat{f}_k(x)\}$ растући и ограничен одозго. Како $x_k \to x'$, почевши од неког довољно великог k

бесконачно много тачака низа припада околини тачке x'. Зато, због чињенице да је $f(x') = \max_{z \in R^n}\{f(z) + g^T(x' - z)\}$ где $g \in \partial f(z)$, можемо тврдити да је $f(x') = \lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i + g_i^T(x_k - x_i)\right)\right\}$.

Ако претпоставимо супротно , тј. да је $f(x') > \lim_{k\to\infty}\left\{\max_{1\le i\le k}\left(f_i + g_i^T(x_k - x_i)\right)\right\}$, онда важи да је

$$f(x') > \max_{1\le i\le k}\left(f_i + g_i^T(x_k - x_i)\right) \ge f_k + g_k^T(x_k - x_k) = f_k \text{ за свако } k.$$

Одатле, када $k \to \infty$ добијамо да је $f(x') > f(x')$ (због конвексности функције f). ■

<u>Лема 5.3.2.</u> Нека је низ $\{x_k\}$ генерисан алгоритмом такав да $x_k \to x'$, $x_k = x' + \alpha_k s_k$, $s_k \to s$, $\alpha_k \downarrow 0$, где је $\|s_k\| = 1$. Тада је $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x_k) = f(x')$.

<u>Доказ.</u> Када $k \to \infty$, онда, на основу Леме 5.3.1 и (5.15), следи да важи да је $\lim_{k\to\infty} \phi_k(x_k) = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x_k) = f(x')$. Ако означимо са $\Phi_\infty(x) = \hat{f}_\infty(x) + \frac{1}{2t_\infty}\|x' - x\|^2$, онда је $\Phi_\infty(x') = \hat{f}_\infty(x') = f(x')$.■

Сада ћемо изложити главни резултат.

<u>Теорема 5.3.2.</u> Нека је $\{x_k\}$ низ тачака генерисаних Алгоритмом 5.3.1, таквих да $x_k \in B \subset R^n, \forall k$ где је B компактан скуп. Тада постоји тачка нагомилавања x_∞ низа $\{x_k\}$ која задовољава потребан и довољан услов да буде тачка минимума проблема (5.1), тј. важи да је:

$$0 \in \partial f_\infty, \tag{5.20}$$

где је $\partial f_\infty = \partial f(x_\infty)$.

<u>Доказ</u>. Како је B компактан скуп и $x_k \in B$, следи да низ тачака $\{x_k\}$ има бар једну тачку нагомилавања x_∞. Одатле следи да постоји конвергентан подниз низа $\{x_k\}$ такав да важи да $x_k \to x_\infty, k \in K$. Алгоритам 5.3.1 генерише поднизове тачака за које је задовољен један од следећа два услова:

(i) $r_k < \beta$ и зато $\left\|\bar{\delta}_k\right\| \to 0$, $k \in K_1 \subseteq K$ или

(ii) $r_k \geq \beta$ и $inf(h_k) > 0$, $k \in K_2 \subseteq K$.

Доказаћемо да (5.20) важи у оба случаја (*(i)* или *(ii)*).

У случају *(i)* важи да је $r_k < \beta$, $k \in K_1$ и на Кораку 6 Алгоритма 5.3.1 рачунамо $g_{k+1} = g(x_{k+1}) \in \partial f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k)$, где је $\alpha_k > \gamma > 0$ такво да важи да је $\alpha_k \left\|\bar{\delta}_k\right\| \leq \eta \cdot \mu$. Како је g_{k+1} субградијент функције f важи да је:

$$f(z) \geq f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k) + g_{k+1}^T \cdot (z - x_k - \alpha_k \bar{\delta}_k) \tag{5.21}$$

за свако $z \in R^n$. Ако је неједнакост

$$g_{k+1}^T \bar{\delta}_k \leq -\frac{\eta}{2}\left\|\bar{\delta}_k\right\|^2 \tag{5.22}$$

задовољена на Кораку 7, тада из (5.21) следи да је (за $z = x_k$):

$$\begin{aligned} f(x_k) &\geq f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k) + \alpha_k \cdot \left(-g_{k+1}^T \bar{\delta}_k\right) \\ &\geq f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k) + \frac{\alpha_k \cdot \eta}{2}\left\|\bar{\delta}_k\right\|^2 > f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k), \end{aligned} \tag{5.23}$$

тј. $f(x_k) > f(x_{k+1})$. Како је низ тачака $\{f(x_k)\}$, $k \in K_1$ монотоно опадајући и ограничен одоздо на компактном скупу B, следи да $f(x_{k+1}) - f(x_k) \to 0$ када $k \to \infty$, $k \in K_1$. Из (5.23) следи да важи да је

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\alpha_k \cdot \eta}{2}\left\|\bar{\delta}_k\right\|^2 > \frac{\gamma \cdot \eta}{2}\left\|\bar{\delta}_k\right\|^2, \tag{5.24}$$

и како $f(x_{k+1}) - f(x_k) \to 0$ када $k \to \infty, k \in K_1$ на основу (5.24), следи да $\left\|\bar{\delta}_k\right\| \to 0$ када $k \to \infty$, $k \in K_1$. Како је ∂f_k ограничен у околини тачке x_∞ закључујемо да постоји подниз за који важи да $g_k \to g_\infty$, $k \in K_3 \subseteq K_1$ и $g_\infty \in \partial f_\infty$. На Кораку 6 важи да је $\left\|\bar{\delta}_k\right\| > \varepsilon$ и $\alpha_k \left\|\bar{\delta}_k\right\| \leq \varepsilon \cdot \eta \cdot \mu$, па због тога важи да $0 < \varepsilon \alpha_k < \alpha_k \left\|\bar{\delta}_k\right\| \leq \varepsilon \cdot \eta \cdot \mu$, одакле следи да важи $0 < \varepsilon \alpha_k < \varepsilon \cdot \eta \cdot \mu$. Делећи последњу неједнакост са ε добијамо $0 < \alpha_k < \eta \cdot \mu$. Како $\left\|x_{k+1} - x_k\right\| = \alpha_k \left\|\bar{\delta}_k\right\| \to 0$ када $k \to \infty$, $k \in K_1$ преко подниза (због ограничености низа $\{\alpha_k\}$), на основу Корака 1 Алгоритма 5.3.1 и Леме 5.1.7, следи да $\left\|x_i - x_k\right\| \to 0, i \in \hat{I}_k$, $k \in K_1$. Будући да су скупови ∂f_i за $i \in \hat{I}_k$ ограничени у околини тачке x_∞, за одговарајући пониз важи да $g_i \to g_\infty^i$ за $i \in \hat{I}_k$, $k \in K_3$ и $g_\infty^i \in \partial f_\infty$. Како је ∂f_∞ конвексан скуп, следи да свака конвексна комбинација тачака скупа ∂f_∞ припада скупу ∂f_∞, тј. $\bar{\delta}_\infty = \sum_{i \in \hat{I}_\infty} \lambda_i^{(\infty)} g_\infty^i \in \partial f_\infty$, где је $\bar{\delta}_k = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i^{(k)} g_i \to \bar{\delta}_\infty = \sum_{i \in \hat{I}_\infty} \lambda_i^{(\infty)} g_\infty^i$.

Како $\bar{\delta}_k \to \bar{\delta}_\infty$, $k \in K_3$ и $\|\bar{\delta}_k\| \to 0$, $k \in K_1$ следи да $0 \in \partial f_\infty$ (због $K_3 \subseteq K_1$).

Ако неједнакост (5.22) није задовољена на Кораку 7 Алгоритма 5.3.1, тј. ако важи да је $g_{k+1}^T \bar{\delta}_k > -\frac{\eta}{2}\|\bar{\delta}_k\|^2$ онда бирамо да је $x_{k+1} = x_k$ и због тога важи да је $f(x_k) - f(x_{k+1}) = 0$. Како је $\|x_{k+1} - x_k\| = 0 < \mu$, у следећој итерацији мења се скуп I_k (додаје се ново k) и *bundle* B_k (додаје се нова уређена тројка података, тј. додаје се $(x_k, f(x_k), g_{k+1})$). У том случају налазимо неко друго решење проблема (5.17), и због тога налазимо ново решење проблема (5.16), јер се мења *trust region* радијус. Дакле, на следећој итерацији добијамо нову вредност разломка r_k за који важи да је $r_k < \beta$ или је $r_k \geq \beta$. Ако важи да је $r_k < \beta$, онда ће у новој итерацији услов (5.22) можда бити задовољен. Ако не буде задовољен, онда ћемо израчунати друго $g_{k+1} = g(x_{k+1}) \in \partial f(x_k + \alpha_k \bar{\delta}_k)$ и пробати да нађемо друго решење. Ова ситуација може се поновити само коначно много пута.

Претпоставимо супротно, тј. да у Алгоритму 5.3.1 за бесконачно много итерација услов (5.22) није задовољен. Будући да функција $\Phi_k(x_k + \delta)$ постиже свој минимум на R^n у тачки δ_k, важи да $0 \in \partial \Phi_k(x_k + \delta_k)$, тј. да $0 \in \partial \hat{f}_k(x_k + \delta_k) + \delta_k$ и $0 = \hat{g} + \delta_k$ за неко $\hat{g} \in \partial \hat{f}_k(x_k + \delta_k)$, тј. $-\delta_k \in \partial \hat{f}_k(x_k + \delta_k)$. Из $\Phi_k(x_k + 0) \geq \Phi_k(x_k + \delta_k)$ следи да је $\hat{f}_k(x_k) \geq \hat{f}_k(x_k + \delta_k) + \frac{1}{2}\|\delta_k\|^2$, а одатле, на основу Леме 5.3.1 (када $k \to \infty$), важи да је $f(x_k) \geq f(x_k + \delta_k) + \frac{1}{2}\|\delta_k\|^2 > f(x_k + \delta_k)$ (јер на Кораку 3 важи да је $\|\delta_k\| > \varepsilon > 0$).

Дакле, важи следећа неједнакост:

$$f(x_k) > f(x_k + \delta_k) \; . \tag{5.25}$$

Како је $r_k < \beta$, тј. $\frac{f(x_k) - f(x_k + \delta_k)}{f(x_k) - \Phi_k(x_k + \delta_k)} < \beta$, следи да је $\frac{f(x_k) - \Phi_k(x_k + \delta_k)}{f(x_k) - f(x_k + \delta_k)} > \frac{1}{\beta}$, тј. $\frac{\Phi_k(x_k + \delta_k) - f(x_k)}{f(x_k + \delta_k) - f(x_k)} > \frac{1}{\beta}$. Одатле следи да:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{\Phi_k(x_k+\delta_k)-f(x_k)}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)} = \frac{\hat{f}_k(x_k+\delta_k)+\frac{1}{2}\|\delta_k\|^2-f(x_k)}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)}$$

$$\leq \frac{f(x_k+\delta_k)+\frac{1}{2}\|\delta_k\|^2-f(x_k)}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)} \text{ (јер } f(x_k+\delta_k) \geq \hat{f}_k(x_k+\delta_k)\text{)}$$

$$=1+\frac{\frac{1}{2}\|\delta_k\|^2}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)},$$

тј. $\frac{\frac{1}{2}\|\delta_k\|^2}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)} > \frac{1}{\beta}-1>0$, где последња неједнакост важи јер је $0.5 < \beta < 1$.

Из $\frac{\frac{1}{2}\|\delta_k\|^2}{f(x_k+\delta_k)-f(x_k)} > 0$ следи да је $f(x_k+\delta_k) > f(x_k)$ (јер је $\|\delta_k\| > \varepsilon > 0$), што је контрадикција са (5.25).

У случају *(ii)* имамо да је $f_1 - f_\infty \geq \sum_{k \in K_2} \Delta f_k$ (где је сума узета по разматраном поднизу) и због претпоставке $r_k \geq \beta$, $k \in K_2$ следи да $\Delta\Phi_k \to 0$, $k \in K_2$ јер је $f_1 - f_\infty$ константа. Нека $\bar{h}$ задовољава неједнакост $0 < \bar{h} < inf(h_k)$ и нека је $\bar{\delta}$ тачка минимума функције $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ на $\|\delta\| \leq \bar{h}$. Како тачка $\bar{x} = x_\infty + \bar{\delta}$ припада скупу $\Omega_k = B(x_k, h_k)$ за довољно велико k, $k \in K_2$ на основу дефиниције функције $\Delta\Phi_k$ и чињенице да минимум на ужем скупу не може бити мањи од минимума на ширем скупу, следи да је

$$\Phi_k(x_k + \bar{\delta}) = \Phi_k(x_k + \bar{x} - x_\infty) \geq \Phi_k(x_k + \delta_k) = f_k - \Delta\Phi_k . \tag{5.26}$$

Како су f и Φ_k непрекидне као конвексне функције, и како $\Delta\Phi_k \to 0$ $k \to \infty$, $k \in K_2$ и $\bar{x} - x_k \to \bar{\delta}$,$k \to \infty$, $k \in K_2$, из (5.26), на основу Леме 5.3.2, следи да важи да је:

$$\Phi_\infty(x_\infty + \bar{\delta}) \geq f_\infty - 0 = \Phi_\infty(x_\infty + 0).$$

Приметимо да како је $\delta = 0$ тачка минимума функције $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ за $\|\delta\| \leq \bar{h}$, онда следи да је $\bar{\delta} = 0$. Како је $\bar{\delta} = 0$ тачка минимума функције $\Phi_\infty(x_\infty + \delta)$ и како последње ограничење није активно (јер је $0 < \overline{h} < inf(h_k)$), следи да је задовољен потребан услов минимума, тј. $0 \in \partial f_\infty$ (јер је $\Phi_\infty(x_\infty + 0) = \hat{f}_\infty(x_\infty) = f(x_\infty) = f_\infty$). Како је функција f конвексна, то је и довољан услов да функција f постиже свој глобални минимум у тачки x_∞.■

Описани алгоритам комбинује *bundle trust region* методу и методу конјугованих субградијената. То је нови приступ у решавању проблема конвексне недиференцијабилне оптимизације. Увођењем других норми у (5.14) разумно је очекивати нове резултате.

5.4. АЛГОРИТАМ *NEWTON*-ОВОГ ТИПА

Овде ћемо изложити алгоритам за решавање проблема (5.1), објављен у [39], који генерише низ тачака облика

$$x_{k+1} = x_k + d_k \quad k = 0,1,\ldots, d_k \neq 0 \ , \tag{5.27}$$

где је d_k вектор правца.

Нека је $f : R^n \to R$ сопствена конвексна затворена функција и нека је F њена *Moreau –Yosida* регуларизација за $M = I$ и x тачка у R^n.

За локално *Lipschitz*-ове функције извод у правцу не мора да постоји, али *Dini upper* извод увек постоји (видети [105] страна 598).

На основу *Rademacher*-ове теореме, следи да је ∇F диференцијабилна скоро свуда у R^n. Нека $D_{\nabla F}$ означава скуп тачака у којима је ∇F диференцијабилна. Генералисани хесијан у *Clarke*-овом смислу је

$$\partial^2 F(x_k) = co\left\{ \lim_{x_i \to x_k} \nabla^2 F(x_i) \middle| x_i \in D_{\nabla F} \right\},$$

где co означава конвексни омотач који се састоји од свих $n \times n$ матрица добијених као граничне вредности хесијана $\nabla^2 F(x_i)$. Зато је $\partial^2 F(x)$ непразан конвексан компактан подскуп у $R^{n \times n}$.

На основу *Carathéodory*-јеве теореме (видети у [48] страна 195 или у [104] страна 155) следи да ако $V \in \partial^2 F(x)$, онда постоји $V_j \in \left\{ \lim_{x_i \to x} \nabla^2 F(x_i) \middle| x_i \in D_{\nabla F} \right\}$ и $\lambda_j \in [0,1], r \le n^2 + 1$ такви да $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$ и $V = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j V_j$. Другим речима $V \in \partial^2 F(x)$ се добија као конвексна комбинација граничних тачака позитивно семидефинитних матрица.

<u>Лема 5.4.1</u>. Нека је $f : R^n \to R$ сопствена затворена конвексна функција и F њена *Moreau–Yosida* регуларизација за $M = I$. Тада је $V \in \partial^2 F(x)$ позитивно семидефинитна матрица.

<u>Доказ.</u> Нека су V и d елементи скупова $\partial^2 F(x)$ и R^n редом.

На основу *Carathéodory*-јеве теореме тада постоје $V_j \in \left\{ \lim_{x_i \to x} \nabla^2 F(x_i) \middle| x_i \in D_{\nabla F} \right\}$ и $\lambda_j \in [0,1], r \le n^2 + 1$ такви да $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 1$ и $V = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j V_j$. Због тога важи да је:

$$\begin{aligned} d^T V d = d^T \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j V_j \right) d &= d^T \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \lim_{x_i \to x_j} \nabla^2 F(x_j) \right) d, x_i \in D_{\nabla F} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \lim_{x_i \to x_j} \left(d^T \nabla^2 F(x_j) d \right), x_i \in D_{\nabla F} \\ &\ge \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

где последња неједнакост важи јер је $\nabla^2 F(x_i)$ позитивно семидефинитна за свако $x_i \in D_{\nabla F}$ као хесијан конвексне функције F.■

Претпоставимо да је на свакој итерацији за свако $x \in R^n$ могуће израчунати $f(x), F(x)$, $\nabla F(x)$ и $F''_D(x;d)$ за дато $d \in R^n$, где $F''_D(x;d)$ означава *Dini upper* извод у правцу другог реда за функцију F у тачки $x \in R^n$ у правцу $d \in R^n$. Разматрајмо проблем :

$$\min_{d \in R^n} \widetilde{\Phi}_k(d), \widetilde{\Phi}_k(d) = F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} F''_D(x_k; d) \ . \tag{5.28}$$

Лема 5.4.2. Функција циља проблема (5.28) је конвексна.

Доказ Нека су d_1 и d_2 вектори из R^n и $\hat{V}_k \in \partial^2 F(x_k)$ и нека је λ скалар такав да је $0 < \lambda < 1$. Тада важи:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Phi}_k(\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) = F(x_k) + \nabla F(x_k)^T (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) + \frac{1}{2} F''_D(x_k; (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)) \\ &= \lambda\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_1\right) + (1-\lambda)\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{\hat{V}_k \in \partial^2 F(x_k)} (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)^T \hat{V}_k (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Како је $\hat{V}_k \in \partial^2 F(x_k)$ позитивно семидефинитна матрица следи да је:

$$(d_1 - d_2)^T \hat{V}_k (d_1 - d_2) \geq 0 \Rightarrow d_1^T \hat{V}_k d_2 + d_2^T \hat{V}_k d_1 \leq d_1^T \hat{V}_k d_1 + d_2^T \hat{V}_k d_2 .$$

Одатле је

$$\begin{aligned} &(\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)^T \hat{V}_k (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) = \\ &= \lambda^2 d_1^T \hat{V}_k d_1 + (1-\lambda)^2 d_2^T \hat{V}_k d_2 + \lambda(1-\lambda) d_2^T \hat{V}_k d_1 + \lambda(1-\lambda) d_1^T \hat{V}_k d_2 \\ &\leq \lambda^2 d_1^T \hat{V}_k d_1 + (1-\lambda)^2 d_2^T \hat{V}_k d_2 + \lambda(1-\lambda)\left(d_1^T \hat{V}_k d_1 + d_2^T \hat{V}_k d_2\right) \\ &= \lambda d_1^T \hat{V}_k d_1 + (1-\lambda) d_2^T \hat{V}_k d_2 \ , \end{aligned}$$

тј.:

$$(\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)^T \hat{V}_k (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) \leq \lambda d_1^T \hat{V}_k d_1 + (1-\lambda) d_2^T \hat{V}_k d_2 \ . \tag{5.30}$$

Из (5.29) и (5.30) следи да је:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_k(\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) &\leq \lambda\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_1\right) + (1-\lambda)\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{\hat{V}_k \in \partial^2 F(x_k)} (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2)^T \hat{V}_k (\lambda d_1 + (1-\lambda)d_2) \\ &\leq \lambda\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_1\right) + (1-\lambda)\left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_2\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{\hat{V}_k \in \partial^2 F(x_k)} \left(\lambda d_1^T \hat{V}_k d_1 + (1-\lambda) d_2^T \hat{V}_k d_2\right) \end{aligned}$$

$$\leq \lambda\left(F(x_k)+\nabla F(x_k)^T d_1\right)+(1-\lambda)\left(F(x_k)+\nabla F(x_k)^T d_2\right)+$$
$$+\lambda\frac{1}{2}\max_{\hat{V}_k\in\partial^2 F(x_k)} d_1^T\hat{V}_k d_1+(1-\lambda)\frac{1}{2}\max_{\hat{V}_k\in\partial^2 F(x_k)} d_2^T\hat{V}_k d_2$$
$$=\lambda\widetilde{\Phi}_k(d_1)+(1-\lambda)\widetilde{\Phi}_k(d_2)$$

(где последња неједнакост важи јер максимум збира две ненегативне функције није већи од збира максимума тих функција).■

<u>Лема 5.4.3.</u> Следећа два тврђења су еквивалентна:

(i) x_k је решење проблема (5.1);

(ii) $d_k = 0$ је решење проблема (5.28).

<u>Доказ</u> *(i)*$\Rightarrow$*(ii):* Претпоставимо да је $d_k \neq 0$ решење проблема (5.28) и x_k је решење проблема (5.1). На основу Теореме 4.1.6 тада је $\nabla F(x_k)=0$, а на основу Леме 5.4.1 следи да је

$$\widetilde{\Phi}_k(d_k)=F(x_k)+\nabla F(x_k)^T d_k+\frac{1}{2}F''_D(x_k;d_k)$$
$$=F(x_k)+\frac{1}{2}F''_D(x_k;d_k)\geq F(x_k)=\widetilde{\Phi}_k(0),$$

што је контрадикција са $\widetilde{\Phi}_k(d_k)=\min_{d\in R^n}\widetilde{\Phi}_k(d)\leq\widetilde{\Phi}_k(0)=F(x_k)$. Зато је $d_k=0$ решење проблема (5.28).

(ii)$\Rightarrow$*(i):* Претпоставимо да је $d_k=0$ решење проблема (5.28). Тада важи да $0\in\partial\widetilde{\Phi}_k(d_k)$ и зато постоји неко $\hat{V}_k\in\partial^2 F(x_k)$ такво да је $0=\hat{V}_k d_k+\nabla F(x_k)$. Како је по претпоставци $d_k=0$, следи да је $0=\nabla F(x_k)$, а што на основу Теореме 4.1.6 значи да је x_k решење проблема (5.1).■

<u>Лема 5.4.4</u> Ако x_k није решење проблема (5.1), тада је d_k, као тачка минимума функције $\widetilde{\Phi}_k(d)=F(x_k)+\nabla F(x_k)^T d+\frac{1}{2}F''_D(x_k;d)$ (на скупу R^n), нерастући правац за функцију F у тачки x_k.

<u>Доказ</u>. Ако је d_k решење проблема (5.28), онда $0\in\partial\widetilde{\Phi}_k(d_k)$, тј. $0\in\nabla F(x_k)+\frac{1}{2}\partial\left(F''_D(x_k;d_k)\right)\Rightarrow 0\in\nabla F(x_k)+\frac{1}{2}\partial\left(\max_{V\in\partial^2 F(x_k)} d_k{}^T V d_k\right)$. Тада за неко

$\hat{G}_k \in \frac{1}{2}\partial\left(\max_{V\in\partial^2 F(x_k)} d_k{}^T V d_k\right)$, где је $\hat{G}_k = \hat{V}_k d_k, \hat{V}_k = \sum_{j=1}^{r}\lambda_j V_j, r \le n^2+1, V_j \in \partial^2 F(x_k)$,

следи да важи да је

$$\hat{V}_k d_k = -\nabla F(x_k) \quad . \tag{5.31}$$

Ако је $\|\hat{V}_k\| = 0$ онда из (5.31) због конзистентности норме (видети [106], страна 5) следи да је $\|\nabla F(x_k)\| = 0$ (јер је $\|\nabla F(x_k)\| = \|\hat{V}_k d_k\| \le \|\hat{V}_k\|\|d_k\| = 0$). Одавде, на основу (4.56) и Теореме 4.1.6, следи да је x_k решење проблема (5.1). На основу претпоставке да x_k није решење проблема (5.1), следи да је $\|\hat{V}_k\| \neq 0$. Из (5.31), на основу Леме 5.4.1, следи да $0 \le d_k{}^T \hat{V}_k d_k = -\nabla F(x_k)^T d_k$, тј. $\nabla F(x_k)^T d_k \le 0$. Дакле, d_k је нерастући правац за функцију F у тачки x_k.■

Алгоритам 5.4.1

Корак 1 Дато је $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$. Ставити да је $k = 0$.

Корак 2 Израчунати $F(x_k)$ и $\nabla F(x_k)$. Ако је $\|\nabla F(x_k)\| < \varepsilon$, онда СТОП.

Тачка x_k је решење проблема (5.1). Иначе решити проблем (5.28),

тј. проблем $\min_{d\in R^n} \widetilde{\Phi}_k(d)$, где је $\widetilde{\Phi}_k(d) = F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} F_D''(x_k; d)$

и означити са d_k његово решење.

Корак 3 Ако је $\|d_k\| < \varepsilon$, онда СТОП. Тачка x_k је решење проблема (5.1).

Иначе ићи на Корак 4.

Корак 4 Ставити да је $x_{k+1} = x_k + d_k$ и $k = k+1$. Ићи на Корак 2.

Напомена 5.4.1. Ако се Алгоритам 5.4.1 заустави на Кораку 2, онда је, на основу Теореме 4.1.6, тачка x_k решење проблема (5.1).

Ако се Алгоритам 5.4.1 заустави на Кораку 3, онда, на основу Леме 5.4.3, следи да је тачка x_k решење проблема (5.1).■

Сада ћемо изложити главни резултат.

<u>**Теорема 5.4.1.**</u> Нека је $f : R^n \to R$ сопствена затворена конвексна функција и F њена *Moreau–Yosida* регуларизација за $M = I$. Нека је низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.4.1. Претпоставимо да $\{x_k\} \subseteq B$, где је B компактан скуп. Тада за сваку полазну тачку $x_0 \in R^n$, $x_k \to x_\infty$ када $k \to +\infty$, тачка x_∞ је тачка минимума функције f.

<u>*Доказ.*</u> Како по претпостаци $\{x_k\} \subseteq B$, где је B компактан скуп, следи да постоји тачка нагомилавања низа $\{x_k\}$. Како је ∇F непрекидна, тада ако $\nabla F(x_k) \to 0, k \to +\infty$, онда следи да свака тачка нагомилавања x_∞ низа $\{x_k\}$ задовољава $\nabla F(x_\infty) = 0$. Одавде, на основу Теореме 4.1.6, следи да је x_∞ тачка минимума функције F, а такође и тачка минимума за функцију f. Због тога само треба показати да $\nabla F(x_k) \to 0, k \to +\infty$.

Како из Алгоритма 5.4.1 имамо да је $x_{k+1} = x_k + d_k$, следи да $d_k \to 0$ када $k \to +\infty$, тј. $d_\infty = 0$. Из Алгоритма 5.4.1 следи да је $\nabla F(x_k)^T d_k \le 0$, а ако $k \to +\infty$, онда и $\nabla F(x_\infty)^T d_\infty \le 0$.

Ако означимо са $\Phi_\infty(d_\infty) = F(x_\infty) + \nabla F(x_\infty)^T d_\infty + \frac{1}{2} F''_D(x_\infty; d_\infty) = F(x_\infty)$, онда, због чињенице да је $F''_D(x;d)$ полунепрекидна одозго у односу на (x,d), важи да је $\limsup_{i\to\infty} F''_D(x_i;d_i) \le F''_D(x;d)$ када $x_i \to x$ и $d_i \to d$, па, на основу Леме 5.4.1 и Леме 5.1.2 ,закључујемо да важи да је

$$
\begin{aligned}
F(x_\infty) = \widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty) &\ge \limsup_{k\to\infty} \widetilde{\Phi}_k(d_k) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_k + \frac{1}{2} F''_D(x_k;d_k) \right) \\
&\ge \liminf_{k\to\infty} \left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_k + \frac{1}{2} F''_D(x_k;d_k) \right) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \widetilde{\Phi}_k(d_k) \ge \liminf_{k\to\infty} \left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_k \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(F(x_k) + \nabla F(x_k)^T d_k \right) \\
&= F(x_\infty) + \nabla F(x_\infty)^T d_\infty = F(x_\infty) = \widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty),
\end{aligned}
$$

тј. $\widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty) \geq \limsup_{k\to\infty} \widetilde{\Phi}_k(d_k) \geq \liminf_{k\to\infty} \widetilde{\Phi}_k(d_k) \geq \widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty)$, односно $\widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{\Phi}_k(d_k)$.

Како $g_k = 0 \in \partial\widetilde{\Phi}_k(d_k)$ онда, на основу Теореме 24.4 у [90] страна 249, следи да $g_\infty = 0 \in \partial\widetilde{\Phi}_\infty(d_\infty)$ када $k \to +\infty$. Тада за неко $\hat{G}_\infty \in \frac{1}{2}\partial\left(\max_{V\in\partial^2 F(x_k)} d_\infty{}^T V d_\infty\right)$, где $\hat{G}_\infty = \hat{V}_\infty d_\infty, \hat{V}_\infty = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j V_j, r \leq n^2+1, V_j \in \partial^2 F(x_\infty)$, следи да важи да је $\hat{V}_\infty d_\infty = -\nabla F(x_\infty)$. Одавде на основу конзистентности норме важи да је

$$\|\nabla F(x_\infty)\| = \|\hat{V}_\infty d_\infty\| \leq \|\hat{V}_\infty\|\|d_\infty\| = \|\hat{V}_\infty\| \cdot 0 = 0 \text{, тј. } \|\nabla F(x_\infty)\| = 0 .\blacksquare$$

5.5. АЛГОРИТАМ БАЗИРАН НА СВОЈСТВИМА *MOREAU-YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈЕ

Као и до сада, разматра се проблем (5.1), тј. следећи проблем:

$$\min_{x\in R^n} f(x),$$

где је $f : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна, не обавезно и диференцијабилна функција, која има непразан скуп минимума, који означавамо са X^*.

Овде ћемо приказати алгоритам (објављен у [22]), који користи *Dini upper* извод у правцу *Moreau-Yosida* регуларизације функције f. Овај алгоритам, дефинисан у раду Н. Ђурановић-Миличић [19] за LC^1 функције, примењен је на *Moreau-Yosida* регуларизацију конвексне недиференцијабилне функције f, па сви докази дати у [19] важе и код ове примене.

Показаћемо да алгоритам за налажење решења проблема (5.1) генерише низ тачака $\{x_k\}$ следећег облика:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad k = 0,1,..., d_k \neq 0 \ , \tag{5.32}$$

где су d_k вектор правца и α_k величина корака дефинисана посебним алгоритмом .

Претпоставимо да је за свако $x \in R^n$ и за дато $d \in R^n$ могуће израчунати $f(x), F(x), \ \nabla F(x)$ и $F''_D(x;d)$, где F означава *Moreau-Yosida* регуларизацију функције f и $F''_D(x;d)$ означава *Dini upper* извод у правцу *Moreau-Yosida* регуларизације функције f у тачки x_k у правцу d .

На k -тој итерацији разматрајмо следећи проблем

$$\min_{d \in R^n} \widetilde{\Phi}_k(d), \widetilde{\Phi}_k(d) = \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} F''_D(x_k;d) \ , \tag{5.33}$$

где $F''_D(x_k;d)$ означава *Dini upper* извод у правцу другог реда у тачки x_k у правцу d . Функција $\Phi_k(d)$ се назива итерациона функција. Очигледно важи да је $\Phi_k(0) = 0$.

Генеришимо низ тачака $\{x_k\}$ облика $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, где је вектор правца d_k решење проблема (5.33), а величина корака α_k дефинисана посебним алгоритмом названим Праволинијско правило претраживања.

Претпоставимо да

$$c_1 \|d\|^2 \leq F''_D(x_k;d) \leq c_2 \|d\|^2 \tag{5.34}$$

важи за неке c_1 и c_2 такве да је $0 < c_1 < c_2$.

Лема 5.5.1. Под претпоставком (5.34) функција $\Phi_k(\cdot)$ је коерцивна[3].

Доказ. Видети у [84].

Примедба 5.5.1. Коерцивност функције Φ_k гарантује да оптимално решење проблема (5.33.) постоји (видети у [103]). Такође, уз претпоставку (5.34) то значи да је низ праваца $\{d_k\}$ ограничен у R^n (доказ је аналоган доказу у [103]).

Пропозиција 5.5.1. Ако *Moreau-Yosida* регуларизација F за $M = I$ затворене сопствене конвексне функције f задовољава услов (5.34), онда важе следећа тврђења:

(i) функција F је униформно и стога строго конвексна на $L(x_0)$;

(ii) ниво-скуп $L(x_0) = \{x \in R^n : F(x) \leq F(x_0)\}$ је компактан конвексан скуп, и

(iii) постоји јединствена тачка x^* таква да важи да је $F(x^*) = \min\limits_{x \in L(x_0)} F(x)$.

Доказ.. Видети у [19].

Лема 5.5.2. Следећа тврђења су еквивалентна:

(i) $d = 0$ је глобално решење проблема (5.33);

(ii) 0 је оптимална вредност функције циља проблема (5.33);

(iii) тачка x_k је таква да важи да је $0 \in \partial f(x_k)$.

Доказ. Ако се тврђење *(iii)* замени тврђењем: тачка x_k је таква да важи да је $\nabla F(x_k) = 0$, где је F *Moreau-Yosida* регуларизација функције циља f проблема (5.1), онда је доказ идентичан доказу у [103]. На основу Теореме 4.1.6, закључујемо да је тврђење: тачка x_k је таква да важи да је $\nabla F(x_k) = 0$ еквивалентно са тврђењем *(iii)*.■

[3] Више о коерцивности видети у [3].

Алгоритам 5.5.1

Корак 1 Дато је $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$ и $q \in (0,1)$. Ставити да је $k = 0$.

Корак 2 Израчунати $F(x_k)$ и $\nabla F(x_k)$. Ако је $\|\nabla F(x_k)\| < \varepsilon$, онда СТОП.

Тачка x_k је решење проблема (5.1).

Иначе израчунати величину корака α_k Алгоритмом за

израчунавање величине корака. Решити проблем (5.33) и

означити са d_k његово решење.

Корак 3 Ако је $\|d_k\| < \varepsilon$, онда СТОП. Тачка x_k је решење проблема (5.1).

Иначе ићи на Корак 4.

Корак 4 Ставити да је $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ и $k = k + 1$. Ићи на Корак 2.

Алгоритам за израчунавање величине корака:

За дато q изабрати α_k тако да важи да је $\alpha_k = g^{i(k)}$, где је $i(k)$ најмањи цео број из скупа $\{0,1,2,...\}$ такав да важи

$$F\left(x_k + q^{i(k)} d_k\right) - F(x_k) \leq -\frac{1}{2} q^{i(k)} \sigma\left(F_D''(x_k; d_k)\right), \tag{5.35}$$

где је $\sigma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ непрекидна функција која задовољава услове $\delta_1 t \leq \sigma(t) \leq \delta_2 t$ и $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$.

Напомена 5.5.1. Ако се Алгоритам 5.5.1 заустави на Кораку 2, онда је, на основу Теореме 4.1.6, тачка x_k решење проблема (5.1).

Ако се Алгоритам 5.5.1 заустави на Кораку 3, онда, на основу Леме 5.5.2, следи да је тачка x_k решење проблема (5.1).■

Показаћемо да постоји коначно $i(k)$, што због чињенице да је d_k дефинисан као решење проблема (5.33), значи да је алгоритам добро дефинисан.

Пропозиција 5.5.2. Ако је $d_k \neq 0$ решење проблема (5.33) онда за произвољну непрекидну функцију $\sigma : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ за коју важи да је $\delta_1 t \leq \sigma(t) \leq \delta_2 t$ (где су $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$) постоји неко коначно $i^*(k)$ такво да за све $q^{i(k)} \in \left(0, q^{i^*(k)}\right)$ важи да је $F\left(x_k + q^{i(k)} d_k\right) - F(x_k) \leq -\frac{1}{2} q^{i(k)} \sigma\left(F_D''(x_k; d_k)\right)$.

Доказ. Видети у [19].

Сада ћемо изложити главни резултат.

Теорема 5.5.1. Претпоставимо да је f затворена сопствена конвексна функција и F њена *Moreau-Yosida* за $M = I$ која задовољава услов (5.34). Тада за било коју почетну тачку $x_0 \in R^n, x_k \to x_\infty$, када $k \to +\infty$, при чему је низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.5.1, важи да је x_∞ јединствена тачка минимума функције f.

Доказ Доказ да је x_∞ јединствена тачка минимума функције F, која је *Moreau-Yosida* регуларизација функције циља f проблема (5.1), идентичан је доказу у [19]. На основу Теореме 4.1.6, закључујемо да је x_∞ јединствена тачка минимума функције f. ■

Теорема 5.5.1. Под претпоставкама претходне теореме за низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.5.1. важи следећа оцена.

$$F(x_n) - F(x_\infty) \leq \mu_0 \left[1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F(x_k) - F(x_{k+1})}{\|\nabla F(x_k)\|^2} \right]^{-1} \quad \text{за} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

где је $\mu_0 = F(x_0) - F(x_\infty)$ и $diam L(x_0) = \eta < +\infty$ (а због Пропозиције 5.5.1 следи да је $L(x_0)$ ограничен).

Доказ . Следи директно из Теореме 9.2 у [50] .

5.6 A *MULTI –STEP CURVE SEARCH* АЛГОРИТАМ

Овде ћемо приказати алгоритам (објављен у [23]), који користи *Dini upper* извод у правцу *Moreau-Yosida* регуларизације функције циља f проблема (5.1). Овај алгоритам, дефинисан у раду Н. Ђурановић-Миличић [20] за LC^1 функције, примењен је на *Moreau-Yosida* регуларизацију конвексне недиференцијабилне функције f, па сви докази дати у [20] важе и код ове примене.

Ова метода користи претходне *multi-step* итеративне информације и криволинијско претраживање за генерисање нових тачака. Добра дефинисаност алгоритма, теорема конвергенције и једна оцена брзине конвергенције, дати у [20], важе и код ове примене. У овој примени за корак заустављања у алгоритму искоришћене су претходне итеративне информације сачуване у *bundle*-у B_k, на исти начин како је то учињено у Алгоритму 5.2.1.

За налажење оптималног решења проблема (5.1) представићемо алгоритам који генерише низ тачака $\{x_k\}$ следећег облика:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k + \alpha_k^2 d_k \quad k = 0,1,..., s_k \neq 0, d_k \neq 0, \tag{5.36}$$

где су величина корака α_k и правци s_k и d_k дефинисани посебним алгоритмима.

Претпоставићемо да је за свако $x \in R^n$ и за дато $d \in R^n$ могуће израчунати $f(x), F(x),\ \nabla F(x)$ и $F''_D(x;d)$, где F означава *Moreau-Yosida* регуларизацију за $M = I$ функције f и $F''_D(x;d)$ означава *Dini upper* извод у правцу функције F у тачки x_k и у правцу d.

На k-тој итерацији разматрајмо следећи проблем

$$\min_{d \in R^n} \widetilde{\Phi}_k(d), \widetilde{\Phi}_k(d) = \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} F''_D(x_k;d) \ . \tag{5.37}$$

Функција $\Phi_k(d)$ се назива итерациона функција. Као што је речено, алгоритам генерише низ тачака облика (5.36), где су вектори праваца s_k и d_k дефинисани посебним алгоритмима, названим Прво правило правца вектора и Друго правило правца вектора, док се величина корака α_k дефинише посебним алгоритмом названим Криволинијско правило претраживања.

Претпоставимо да на k-тој итерацији постоји скуп индекса $I_k = \{1,2,...,k\}$, и да чувамо информације у *bundle*-у $B_k = \{(x_i, f(x_i), g_i) | i \in I_k\}$, тј. *bundle* је скуп свих уређених тројки које се састоје из текуће тачке x_i, вредности функције циља проблема (5.1) у тој тачки, тј. $f(x_i)$ и једног субградијента $g_i \in \partial f(x_i)$, при чему се сва та три податка односе на индексе из скупа I_k. Свака уређена тројка *bundle*-а B_k одређује једну линеаризацију $f_i(x)$ функције циља проблема (5.1), која је дефинисана са $f_i(x) = f(x_i) + g_i^T(x - x_i)$, за $i \in I_k$.

Ако је f конвексна функција, онда важи да је $f(x) = \max_{z \in R^n} \{f(z) + g^T(x - z)\}$, где је $g \in \partial f(z)$. Дакле, можемо закључити да је функција

$$\hat{f}_k(x) = \max_{0 \le i \le k} f_i(x) = \max_{0 \le i \le k} \{f(x_i) + g_i^T(x - x_i)\}$$

(која је у литератури позната као *cutting plane* функција) добра апроксимација функције f. Очигледно важи да је $f(x) \ge \hat{f}_{k+1}(x) \ge \hat{f}_k(x)$ за свако $x \in R^n$.

Функција $\hat{f}_k(x)$ је део по део линеарна функција и као таква она је затворена конвексна функција. Више од тога, $\hat{f}_k(x)$ се може разматрати и као композиција линеарних функција, тј. $\max_{0 \le i \le k} f_i(x)$. Ако је $\hat{g} \in \partial \hat{f}_k(x)$ и $\hat{f}_k(x)$ је дата као максимум линеарних функција, онда на основу Леме 5.1.7, следи да је $\hat{g} = \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i g_i$, где је $\hat{I}_k = \{i \in I_k \,|\, \hat{f}_k(x) = f_i(x)\}$ и $g_i \in \partial f(x_i), i \in \hat{I}_k, \sum_{i \in \hat{I}_k} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0$, тј. $\hat{g}$ је конвексна комбинација субградијената из *bundle*-а B_k.

Алгоритам 5.6.1.

Корак 0: : Нека су $0<\rho<1, 0<\sigma<1$, $x\in D$; ε и μ довољно мали позитивни реални бројеви; $k:=1$ и $I_0=\emptyset$, $B_0=\emptyset$.

Корак 1: За дато x_k израчунати $f_k=f(x_k)$ и $g_k=g(x_k)$.

Ставити да је $I_k=\{k\}\cup I_{k-1}\setminus S_k$, где је $S_k=\{i\in I_{k-1} \mid \|x_i-x_k\|\geq\mu\}$.

Ставити да је $B_k=\{(x_i, f(x_i), g_i) \mid i\in I_k\}$.

Корак2.: Ако је $\|g_k\|\leq\varepsilon$, онда СТОП. Иначе решити проблем

$$min\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i g_i\right\| \text{ где је } \sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i=1, \lambda_i\geq 0, \hat{I}_k=\left\{i\in I_k \,\middle|\, \hat{f}_k(x)=f_i(x)\right\},$$

$$\hat{f}_k(x)=\max_{0\leq i\leq k}\left\{f(x_i)+g_i^T(x-x_i)\right\} \text{ и } g_i\in\partial f(x_i), i\in\hat{I}_k,$$

и означити са $\lambda_i^{(k)}$ његово решење.

Ако је $\left\|\sum_{i\in\hat{I}_k}\lambda_i^{(k)}g_i\right\|\leq\varepsilon$, онда СТОП.

Иначе ићи на Корак 3.

Корак 3: Ставити да је $x_{k+1}=x_k+\alpha_k s_k(\alpha_k)+\alpha_k^2 d_k(\alpha_k)$,

где је α_k одређено Криволинијским правилом претраживања, док су $s_k(\alpha_k)$ и $d_k(\alpha_k)$ израчунати редом Првим правилом правца вектора и Другим правилом правца вектора . Ради поједностављења нотације означимо $s_k(\alpha_k)$ са s_k, $d_k(\alpha_k)$ са d_k и $g(x_k)$ са g_k.

Корак 4: Ставити да је $k:=k+1$, и ићи на Корак 1.

Криволинијско правило претраживања:

Изабрати $\alpha_k=q^{i(k)}, 0<q<1$ **,** где је $i(k)$ најмањи цео број из скупа $\{0,1,2,...\}$ такав да важи да је:

$$F(x_k)-F\left(x_k+q^{i(k)}s_k+q^{2i(k)}d_k\right)\geq\sigma\left(-q^{i(k)}g_k^T s_k+\frac{1}{2}q^{4i(k)}F_D''(x_k;d_k)\right). \tag{5.38}$$

Прво правило правца вектора:

$$s_k(\alpha)=\begin{cases} s_k^* \quad , \quad k\le m-1 \\ -\left[\left(1-\sum_{i=2}^{m}\alpha^{i-1}p_k^i\right)g_k+\sum_{i=2}^{m}\alpha^{i-1}p_k^i s_{k-i+1}\right],\ k\ge m \end{cases}$$

где су $m=card\, I_k,\ m>1$, $p_k^i=\dfrac{\rho\|g_k\|^2}{(m-1)\left[\|g_k\|^2+\left|g_k^T s_{k-i+1}\right|\right]}, i=2,3,...,m,$ и $s_k^*\neq 0$, за $k\le m-1$, је било који вектор који има својство опадајућег правца, тј. $g_k^T s_k^*\le 0.$

Друго правило правца вектора:

Вектор правца d_k^* , $k\le m-1$ је решење проблема (5.37) и

$$d_k(\alpha)=\begin{cases} d_k^* \quad , \quad k\le m-1 \\ \sum_{i=2}^{m}\alpha^{i-1}d_{k-i+1}^*,\ k\ge m. \end{cases}$$

Увешћемо следеће претпоставке.

А1. Претпоставимо да постоје константе $c_2\ge c_1>0$ такве да

$$c_1\|d\|^2\le F_D''(x_k;d)\le c_2\|d\|^2 \text{ важи за свако } d\in R^n .$$

А2. $\|d_k\|=1$ и $\|s_k\|=1,\ k=0,1,...$

Лема 5.6.1.[20] За $\alpha\in[0,1]$ и за све $k\ge m$ важи да је $g_k^T s_k(\alpha)\le-(1-\rho)\|g_k\|^2$.

Сада ћемо представити главни резултат.

Теорема 5.6.1. Претпоставимо да је f затворена сопствена конвексна функција и F њена *Moreau-Yosida* регуларизација за $M=I$. Нека важе претпоставке А1 и А2. Тада за произвољну полазну тачку $x_0\in R^n$ такву да $x_0\in R^n, x_k\to\bar{x}$, када $k\to\infty$, где је низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.6.1, важи да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције f .

Доказ Доказ да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције F, која је *Moreau-Yosida* регуларизација функције циља f проблема (5.1), идентичан је доказу у [20]. На основу Теореме 4.1.6, закључујемо да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције f.■

Теорема 5.6.2. Под претпоставкама претходне теореме за низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.6.1 важи следећа оцена.

$$F(x_n)-F(\bar{x})\le \mu_0\left[1+\mu_0\frac{1}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F(x_k)-F(x_{k+1})}{\|\nabla F(x_k)\|^2}\right]^{-1} \quad \text{за} \quad n=1,2,3,\ldots$$

где је $\mu_0=F(x_0)-F(\bar{x})$ и $diam L(x_0)=\eta<+\infty$ (а због Пропозиције 5.5.1 следи да је $L(x_0)$ ограничен).

Доказ . Следи директно из Теореме 9.2 у [50] .

5.7 ЈОШ ЈЕДАН АЛГОРИТАМ БАЗИРАН НА СВОЈСТВИМА *MOREAU-YOSIDA* РЕГУЛАРИЗАЦИЈЕ

Алгоритам, дефинисан за минимизацију LC^1 функције у раду Н. Ђурановић-Миличић [21], који користи *Dini upper* извод у правцу другог реда , примењен је на *Moreau-Yosida* регуларизацију функције циља проблема (5.1). Добра дефинисаност, теорема конвергенције и једна оцена брзине конвергенције, показани у [21], важе и код ове примене. Рад је послат у [24].

За налажење оптималног решења проблема (5.1) представићемо алгоритам који генерише низ тачака $\{x_k\}$ следећег облика:

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k s_k+\alpha_k^2 d_k \quad k=0,1,\ldots,s_k\neq 0, d_k\neq 0 \ , \tag{5.39}$$

где су s_k и d_k вектори праваца и α_k величина корака дефинисана посебним алгоритмом.

Лема 5.7.1. Нека је $f: S \to R \cup \{+\infty\}$ конвексна функција дефинисана на конвексном скупу $S \subseteq R^n$ и $x' \in int\, S$. Нека је $\{x_k\}$ низ тачака такав да $x_k \to x'$, где $x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k s_k + \varepsilon_k^2 d_k \quad k = 0,1,...,\ s_k \neq 0,\ d_k \neq 0,\ \varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \to 0,\ s_k \to s$, $d_k \to d$ и $g_k \in \partial f(x_k)$. Тада се све тачке нагомилавања низа $\{g_k\}$ налазе у скупу $\partial f(x')$.

Доказ Ако $g_k \in \partial f(x_k)$, онда за свако $y \in S$ важи следећа неједнакост $f(y) \geq f(x_k) + g_k^T \cdot (y - x_k)$. Због тога, узимајући било који подниз за који важи да $g_k \to g'$, следи да $f(y) \geq f(x') + g'^T \cdot (y - x')$, што значи да $g' \in \partial f(x')$.■

Претпоставићемо да је за свако $x \in R^n$ и за дато $d \in R^n$ могуће израчунати $f(x), F(x), \nabla F(x)$ и $F_D''(x;d)$, где F означава *Moreau-Yosida* регуларизацију за $M = I$ функције f и $F_D''(x;d)$ означава *Dini upper* извод у правцу функције F у тачки x_k у правцу d.

На k-тој итерацији разматраћемо следећи проблем:

$$\min_{d \in R^n} \widetilde{\Phi}_k(d), \widetilde{\Phi}_k(d) = \nabla F(x_k)^T d + \frac{1}{2} F_D''(x_k;d) \ . \tag{5.40}$$

Као што је речено, алгоритам генерише низ тачака облика (5.39), где је вектор правца s_k било који вектор $s_k \neq 0$ који задовољава неједнакост $\nabla F^T(x_k) s_k \leq 0$, док је вектор d_k решење проблема (5.40), док је величина корака α_k дефинисана посебним алгоритмом названим Правило претраживања.

Увешћемо следеће претпоставке.

Б1. Претпоставићемо да постоје константе $c_2 \geq c_1 > 0$ такве да важи да је

$$c_1 \|d\|^2 \leq F_D''(x_k;d) \leq c_2 \|d\|^2 \quad \text{за сваки } d \in R^n .$$

Б2. $\|d_k\| = 1$ и $\|s_k\| = 1,\ k = 0,1,...$

Б3. Постоји вредност $\gamma > 0$ таква да важи да је

$$-\nabla F^T(x_k) s_k \geq \gamma \|s_k\|^2, k = 0,1,2,...$$

Б4. $\nabla F^T(x_k) s_k \to 0 \Rightarrow \|\nabla F(x_k)\| \to 0, k \to \infty$.

Алгоритам 5.7.1

Корак 1 Дато је $x_0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$ и $q \in (0,1)$. Ставити да је $k = 0$.

Корак 2 Израчунати $F(x_k)$ и $\nabla F(x_k)$. Ако је $\|\nabla F(x_k)\| < \varepsilon$, онда СТОП.

Тачка x_k је решење проблема (5.1).

Иначе израчунати величину корака α_k Алгоритмом за израчунавање величине корака. Решити проблем (5.40) и означити са d_k његово решење.

Одредити вектор правца s_k тако да је $s_k \neq 0$ и $\nabla F^T(x_k)s_k \leq 0$.

Корак 3 Ставити да је $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k + \alpha_k^2 d_k$ и $k = k + 1$.

Иђи на Корак 2.

Алгоритам за израчунавање величине корака:

За дато q, изабрати $\alpha_k > 0$ тако да је $\alpha_k = q^{i(k)}$, где је $i(k)$ најмањи цео број из скупа $i = 0,1,...$ за који важе следеће неједнакости:

$$F(x_k + \alpha_k s_k + \alpha_k^2 d_k) - F(x_k) \leq \sigma\left[\alpha_k \nabla F(x_k)^T s_k - \frac{1}{4}\alpha_k^4 F_D''(x_k; d_k)\right] \tag{5.41}$$

и

$$F(x_k + 2\alpha_k s_k + (2\alpha_k)^2 d_k) - F(x_k) > \sigma\left[2\alpha_k \nabla F(x_k)^T s_k - \frac{1}{2}(2\alpha_k)^4 F_D''(x_k; d_k)\right] \tag{5.42}$$

Из Леме 3.1 у [103] следи да под претпоставком Б1 решење проблема (5.40) постоји. У раду [21] доказано је да ако s_k и d_k задовољавају услове опадања $\nabla F^T(x_k)s_k < 0$ и $\nabla F^T(x_k)d_k < 0$ кад год је $\nabla F(x_k) \neq 0$, онда постоји коначно $i(k)$ које задовољава(5.41) и (5.42).

Теорема 5.7.1. Ако *Moreau-Yosida* регуларизација F за $M = I$ сопствене затворене конвексне функције f задовољава претпоставке Б1, Б2, Б3 и Б4, тада за било коју полазну тачку $x_0 \in R^n$ такву да $x_k \to \bar{x}$ када $k \to \infty$, где је низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.7.1. важи да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције f.

Доказ Доказ да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције F, која је *Moreau-Yosida* регуларизација функције циља f проблема (5.1), идентичан је доказу у [21]. На основу Леме 5.7.1 и Теореме 4.1.6, закључујемо да је $\bar{x}$ јединствена тачка минимума функције f. ■

Теорема 5.7.2. Под претпоставкама претходне теореме за низ $\{x_k\}$ генерисан Алгоритмом 5.7.1 важи следећа оцена.

$$F(x_n) - F(\bar{x}) \le \mu_0 \left[1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F(x_k) - F(x_{k+1})}{\|\nabla F(x_k)\|^2} \right]^{-1} \quad \text{за} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

где је $\mu_0 = F(x_0) - F(\bar{x})$ и $diam L(x_0) = \eta < +\infty$ (а због Пропозиције 5.5.1 следи да је $L(x_0)$ ограничен).

Доказ . Следи директно из Теореме 9.2 у [50] .

5.8. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Недиференцијабилна оптимизација (NDO) веома је значајна област оптимизације, јер су примери њене примене бројни: решавање система линеарних једначина $c_i(x)=0, i=1,2,...,m$, где је $c(x)=(c_1(x),c_2(x),...,c_m(x))$; минимакс проблеми $\min_{x\in X} \max_{1\le i\le m} f_i(x)$, проблеми са ограничењима у облику једнакости $\min_{x\in X} f_i(x)$ тако да $c(x)=0$, где је $c(x)=(c_1(x),c_2(x),...,c_m(x))$ којима се придружују казнене функције облика $\min_x \Phi(x)=\mu f(x)+\|c(x)\|$; проблеми са ограничењима у облику неједнакости $\min_{x\in X} f_i(x)$ тако да $c(x)\le 0$, где је $c(x)=(c_1(x),c_2(x),...,c_m(x))$ којима се придружују казнене функције облика $\min_x \Phi(x)=\mu f(x)+\|c^+(x)\|$, где је $c_i^+(x)=\max\{c_i(x),0\}$ итд.

У овој тези разматран је проблем

$$\min_{x\in R^n} f(x) \quad , \tag{5.1}$$

где је $f: R^n \to R\cup\{+\infty\}$ конвексна, не обавезно и диференцијабилна функција, која има непразан скуп минимума, који означавамо са X^*. Дат је преглед постојећих метода за решавање проблема (5.1): субградијентне методе, *cutting plane* методе, *bundle* методе и *proximal point* методе које се базирају на *Moreau-Yosida* регуларизацији функције циља проблема (5.1).

Напоменуто је да су вишезначна пресликавања послужила као идеја за решавање нешто општијих проблема ове класе. Ради се, наиме, о томе да монотона вишезначна пресликавања добро репрезентују природу субдиференцијала конвексних функција. Било би интересантно истражити могућност њиховог повезивања са конвексификаторима [4] и субдиференцијалима нпр. *Michel–Penot* типа[5] .

С друге стране, имајући на уму захтеве који се појављују у *bundle* методама[6], отвара се могућност повезивања ове области са конусном метриком[7].

[4] Нешто више о конвексификаторима видети нпр.у радовима Демјанова.
[5] Нешто више о врстама субдиференцијала видети у [8].
[6] Видети [32].
[7] Нешто више о конусној метрици видети у [25].

У овој тези представљани су алгоритми који комбинују *trust region* стратегију са *bundle* философијом (објављено у [40]) и методом конјугованих субградијената (послато у [41]). Разматрана је веза семиглаткости са *Dini upper* изводом *Moreau-Yosida* регуларизације. На тај начин избегнуте су потешкоће које су се појављивале у примени *Newton*-ових метода, које суперлинеарно конвергирају. Резултат је алгоритам *Newton*-овог типа, изложен у одељку 5.4 и објављен у [39]. *Dini upper* извод *Moreau-Yosida* регуларизације функције f коришћен је у алгоритмима објављеним у [22], [23] и [24] ([24] је на рецензији), и изложеним редом у параграфима 5.5, 5.6 и 5.7.

Будући да се последњих година интензивно развијају *bundle* методе за недиференцијабилне неконвексне функције, интересантно би било размотрити могућност уопштавања ових алгоритама на такав случај.

БИБЛИОГРАФИЈА

1. Akgul M.: ”*Topics in Relaxation and Ellipsoidal Methods”*, Vol. 97 , Research Notes in Mathematics, Pitman, (1984)
2. Alvarez F., Carrasco M., Pichard K.:”*Convergence of a Hybrid Projection-Proximal Point Algorithm Coupled with Approximation Methods in Convex Optimization”*, Mathematics of Operations Research, Vol. 30, No. 4, pp 966-984, (2005)
3. Auslender A.: “*Noncoercive optimization problems*”, Mathematics of Operational Research, Vol 21, No. 4, pp 769-782, (1996)
4. Bertsekas D. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, second edition, (1999)
5. Bonnans J.F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., Sagastizáabal C.A.: *“Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects*”, Springer, (2006)
6. Bonnans J.F., Gilbert J.C., Lemaréchal C., Sagastizáabal C.A.:*“A family of variable metric proximal methods”.* Mathematical Programming, 68(1):15-47, (1995)
7. Boyd C., Mutapcic A.: “*Subgradient Methods*“, Notes for EE364b, Stanford University, (2008)
8. Browien J., Lewis A.: “*Convex analysis and nonlinear optimization”*, Canada, (1999)
9. Burachik R. S., Lopes J. O., Svaiter B. F.: “*An Outer Approximation Method For The Variational Inequality Problem”*, SIAM Journal on Control and Optimization Volume 43, Issue 6, pp 2071 - 2088, (2005)
10. Burachik R.S., Svaiter B.F.: “*A Relative Error Tolerance For A Family Of Generalized Proximal Point Methods”*, Mathematics of Operations Research, Vol. 26, No. 4., pp 816-831, (2001)
11. Burke J. V., Qian M.. “*A variable proximal point algorithm for monotone operators”,* SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 37, Issue 2 , pp 353-375, (1999)
12. Chen X., Fukushima M.: *„Proximal quasi-Newton methods for nondifferentiable convex optimization”*, Mathematical Programming, Volume 85, Number 2, pp 313-334, (1999)
13. Cheney E.W. and A.A. Goldstein. *“Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation”.* Numerische Matematik, 1:263 - 268, (1959)
14. Clarke F.H.. „*Optimization and Nonsmooth Analysis*“ Wiley & Sons, New York, Reprinted by SIAM , (1990)
15. Corradi G: “*A Method For Nonsmooth Optimization Problems”*, International Journal of Computer Mathematics, Vol 81, No. 6, pp 693-705, (2004)
16. Correa R., Lemarechal C.: “*Convergence of some algorithms for convex minimization”.* Mathematical Programming, 62(2), pp 261-275, (1993)
17. Demjanov V.F., Rubinov A.M.: „*Quasidifferential calculus”,* Optimization Software, Inc., New York, (1986)

18. Демьянов В. Ф., Васильев П.В.: „*Недифференцируемая оптимизация*“, Москва „Наука“, (1981)

19. Ђурановић Миличић Н.: “*On An Optimization Algorithm For LC^1 Unconstrained Optimization*”, FACTA UNIVERSITATIS Ser. Math. Inform. 20, pp 129-135, (2005)

20. Ђурановић Миличић Н.: *“A multi-step curve search algorithm in nonlinear optimization”*, *YUJOR ,* Vol.18, No. 1, pp 47-52, (2008)

21. Ђурановић Миличић Н: “*On An Algorithm For $C^{1,1}$ Optimization”,* Filomat 21:1,pp 17-24, (2007)

22. Ђурановић Миличић Н., Гардашевић Филиповић М.: „*An Algorithm For Minimization Of A Nondifferentiable Convex Function*“, Lecture notes in Engineering and Computer Science, WCE 2009, *VOL. II,* pp 1241-1246, (2009)

23. Ђурановић Миличић Н., Гардашевић Филиповић М.:“*A Multi-step Curve Search Algorithm in Nonlinear Optimization - Nondifferentiable Convex Case*" FACTA UNIVERSITATIS Series Mathematics and Informatics – прихваћен за публиковање 13.05.2011. године

24. Ђурановић Миличић Н., Гардашевић Филиповић М.: *"On An Algorithm In Nondifferential Convex Optimization",* послат у *YUJOR 12.04.2011.* године

25. Филиповић М., Пауновић Љ., Раденовић С., Рајовић М.: *„Remarks on Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of T-Kannan and T-Chatterjea Contractive Mappings”,* Elsevier Editorial System(tm) for Mathematical and Computer Modelling Manuscript Draft, Vol. 54, Issues 5-6, pp 1467-1472, (2011)

26. Филиповић М.: "*Теорема егзистенције за задатак линеарног програмирања са ограничењима типа максимума кончног броја линеарних функција*" Симпозијум о операционим истраживањима (*SYMOPIS*), Зборник радова ИБСН 86-403-0685-8, стр. 324-327, (2005)

27. Филиповић М.: "*Недиференцијабилна оптимизација: Потребан услов првог реда изведен применом субдиференцијала*", Симпозијум о операционим истраживањима (*SYMOPIS*), Зборник радова ИБСН 86-7352-123-8 стр 247-250 , (2004)

28. Филиповић М.: "*Недиференцијабилна оптимизација: Потребан услов другог реда изведен применом субдиференцијала*", Симпозијум о операционим истраживањима (*SYMOPIS*), Зборник радова ИБСН 86-7352-123-8 стр 251-254, (2004)

29. Facchinei F.: „*Minimization of SC^1 functions and Maratos effect“,* Oper. Res.Lett. 17, pp 131-137, (1995)

30. Fletcher R.: “*Practical Methods of Optimization, Volume 2”,* Department of Mathematics, University of Dundee, Scotland, U.K, Wiley-Interscience, Publication, (1981)

31. Fletcher R., *"Practical Methods of Optimization"* , John Wiley & Sons, Chichester, (1987)

32. Fuduli A., Gaudioso M.: “*Tuning Strategy for the Proximaty Parameter in Convex Minimization”,* SIAM Journal on Optimization Theory and Aplications, Vol. 130, No. 1. pp 95-112, (2006)
33. Fuduli A., Gaudioso M.: *“On convergence of cutting plane type algorithms for convex minimization”*, In Giornate di lavoro AIRO '96 - Atti, pages 476-478,Perugia, (1996)
34. Fuduli A.: *“Metodi Numerici per la Minimizzazione di Funzioni Convesse Nondifferenziabili”,* PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica Informatica e Sistemistica, Univerzita della Calabria, (1998)
35. Fukushima M. *“A descent algorithm for nonsmooth convex optimization”.*, Mathematical Programming, 30(2):163-175, (1984)
36. Fukushima M., L. Qi. “*A globally and superlinerly convergent algorithm for nonsmooth convex minimization”*, SIAM J. on Opt. 6, pp1106-1120, (1996)
37. Гардашевић М.*:”Примена субдиференцијала на минимизацију једног типа недиференцијабилне функције помоћу trust region методе*”, Математички факултет Универзитета у Београду, магистарска теза, (1999)
38. Гардашевић Филиповић М.: „ *A Trust Region Method Using Subgradient for Minimizing a Nondifferentiable Function*“, *YUJOR,* Vol. 19. No. 2, pp 249-262, (2009)
39. Гардашевић Филиповић М.*,* Ђурановић Миличић Н. „*An Algorithm Using Moreau-Yosida Regularization for Minimization of a Nondifferentiable Convex Function“, Filomat* – прихваћен за публиковање 26.08.2011. године
40. Гардашевић Филиповић М *,* Ђурановић Миличић Н. *"An Algorithm Using Trust Region Strategy for Minimization of a Nondifferentiable Function" , Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol. 32, No. 12, pp. 1239-1251, 2011
41. Гардашевић Филиповић М.*,* Ђурановић Миличић Н. : *"Minimization Of A Nondifferentiable Function: An Algorithm Using Trust Region Technique And Conjugate Subgradient Method",* послат у часопис *Optimization Letters* 14.07.2011. године.
42. Gaudioso M., Monaco M.F.: *“A bundle type approach to the unconstrained minimization of convex nonsmooth functions”.* Mathematical Programming, 23:216- 226, (1982)
43. Gaudioso M., Monaco M.F.: *“Variants to the cutting plane approach for convex nondifferentiable optimization”,.* Optimization 25, pp 65-75, (1992)
44. Geoffrion A. M.: *“Lagrangian relaxation and its uses in integer programming”.*Math. Progr. Study 2, pp 82-114, (1974)
45. Güler O.: “*On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization”,* SIAM J. Con. Opt. 29(2), pp 403-419, (1991)
46. Hiriart-Urruty J.P., Lemarechal C.: “*Convex analysis and minimization algorithms”, Vol. I-II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1993)
47. Iusem A, Joao Xavier da Cruz Neto: “*Central Paths, Generalized Proximal Point Methods And Cauchy Trajectories In Riemannian Manifolds”*, SIAM Journal on Control and Optimization 37, pp 566-588, (1999)

48. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.: *„Теория экстремальныц задач“,* Москва „Наука“, (1974)

49. Karas E., Ribeiro A, Sagastiz C., Solodov M.: “*A Bundle-Filter Method For Nonsmooth Convex Constrained Optimization”,* Mathematical Programming Vol. 30, No. 4, pp 966-984, (2006)

50. Карманов В.Г.: „*Математическое программирование*“, Москва „Наука“, (1975)

51. Kelley J.E.: *“The cutting plane method for solving convex programs*”, Journal of the SIAM 8, pp 703 - 712, (1960)

52. Keyzer M.A., Lemarechal C., Miffin R.: *“Computing economic equilibria through nonsmooth optimization”*, Technical Report RM78-13, IIASA, (1978)

53. Kiwiel K.: “*Convergence Of Approximate And Incremental Subgradient Methods For Convex Optimization”*, SIAM J. Optim. Vol 14, No. 5, pp 807-840, (2004)

54. Kiwiel K.: *“A Method Of Centers With Approximate Subgradient Linearizations For Nonsmooth Convex Optimization*”, SIAM J. OPTIM.,Vol. 18, No. 4, pp. 1467–1489, (2008)

55. Kiwiel K.: *"Methods of Descent for Nondifferentiable Optimization",* Lecture Notes in Mathematics 1133, Springer-Verlag, Berlin, (1985)

56. Kiwiel, K.: “*Proximity Control in Bundle Methods for Convex Nondifferentiable Minimization*” Math. Programming 46 (1), pp 105-122, (1990)

57. Kiwiel K.: “*A tilted cutting plane proximal bundle method for convex nondifferentiable optimization”*, Operations Research Letters 10, pp 75 - 81, (1991)

58. Kiwiel K. *“Proximal level bundle methods for convex nondifferentiable optimization, saddle point problems and variational inequalities”,* Math. Prog. 69, pp 89 - 109, (1995)

59. Кусарев А. Г., Кутателадзе С. С.: „*Субдифференциальное исчисление“*, Новосибирск, Издатеьство „Наука“, (1987)

60. Lemaréchal C.: ”*Nondifferentiable Optimization*”, In G.L. Nehmauser, A.H.G. Rinnooy Kan, and M.J. Todd, editors, Handbooks in Opns. Res. and Mgmt. Sc., Vol1 : Optimization. North-Holland, Amsterdam, (1989)

61. Lemaréchal C.: *„An Extension of Davidon Methods to Non Differentiable Problems“,* Nondifferentiable Optimization, Mathematical Programming Study 3, (Eds. Balinski M. L. and Wolfe P.), pp. 95-109, (1975)

62. Lemaréchal C, *“Nondifferentiable Optimization, Subgradicnt and e-subgradient Methods“*, Optimization and Operations Research, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 117, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 191-199, (1976)

63. Lemaréchal C., Sagastizábal C.: “*Practical aspects of the Moreau-Yosida regularization I: theoretical properties”*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rapport de Recherche, No. 2250, (1994)

64. Lemaréchal C., Nemirovski A., Nesterov Y.: *“New variants of bundle methods”*, Mathematical Programming 69, pp 111-147, (1995)

65. Lemaréchal C., Sagastizábal C.: *„Variable metric bundle methods: from conceptual to implementable forms”,* Mathematical Programming, 76(3), pp 393-410, (1997)

66. Luenberger D.G.: *“Control problems with kinks”,* IEEE Trans. on Aut. Contr.15(5), pp 570-575, (1970)

67. Mäkeä M.: “*Survey of Bundle Methods For Nonsmooth Optimization”*, Optimization Methods and Software, Vol 17, pp. 1-29, (2002)

68. Martinet B.. *“Regularisation, d'inéquations variationelles par approximations successives”,* Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, pp 154-159, (1970)

69. Meng F., Zhao G.: “*On Second-order Properties of the Moreau-Yosida Regularization for Constrained Nonsmooth Convex Programs”,* Numer. Funct. Anal. Optim , Vol. 25; No. 5/6, pp 515-530, (2004)

70. Miffin R.: *„An algorithm for constrained optimization with semismooth functions”,* Math. Op. Res. 2, pp 191-207, (1977)

71. Mifflin R.: *„A quasi-second-order proximal bundle algorithm*“, Mathematical Programming 73(1), pp 51-72, (1996)

72. J.J. Moreau: *“Proximité et dualité dans un espace Hilbertien”.* In Bull. Soc. Math., volume 93, pp 273-299, France, (1965)

73. Nedić A., Bertsekas D. *“Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization”,* SIAM J. on Optimization 12, pp 109–138, (2001)

74. Nesterov Yu: “*Exessive gap technique in nonsmooth convex minimization”*, SIAM J. Optim., Vol. 16, No. 1, pp 235-249, (2005)

75. Nesterov Y.. “*Introductory Lectures on Convex Optimization”,* A Basic Course. Kluwer Academic Publishers, (2004)

76. Nesterov Y.: *“Primal-dual subgradient methods for convex problems”,* Math. Prog. 120 (1), pp 221-259, (2009)

77. Polak E.: “*Computational methods in optimization*“*,* Academic Press, New York – London, (1971)

78. Polyak B.T.: “*Introduction to Optimization*”, Optimization Software, Inc. Publications Division, New York, (1987)

79. Poliquin R.A., Rockafellar R.T.: “*Prox-regular functions in variational analysis”*, Trans. Amer. Math. Soc. 348, pp 1805-1838, (1996)

80. Poliquin R.A., Rockafeller R.T.: “*Generalized Hessian properties of regularized nonsmooth functions”,* SIAM Journal on Optimization 6(4),pp 1121-1137, (1996)

81. Пшеничнй Б. Н.: „*Выпуклый анализ и экстремальные задачи“*, Москва „Наука“, (1980)

82. Pang J.S., Qi L.: “*Nonsmooth equations: motivation and algorithms”,* SIAM Journal on Optimization 3, pp 443-465, (1993)

83. Pang J.S., Qi. L.*: "A globally convergent Newton method for convex SC^1 minimization problems"*. Journal Optimization Theory and Applications 85, pp 633-648, (1995)

84. Pytlak R.: "*Conjugate Gradient Algorithms in Nonconvex Optimization"*, Library of Congress Control Number: 2008937497, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2009)

85. Qi L.: *"Superlinearly convergent approximate Newton methods for LC^1 optimization problems"*, Mathematical Programming 64, pp 277-294, (1984)

86. Qi L., Sun J.: *"A nonsmooth version of Newton's method".* Mathematical Programming 58(3), pp 353-368, (1993)

87. Qi L.: *"Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations"*, Math. Oper. Res. 18, pp 227-244, (1993)

88. Qi L., Chen X.: *"A preconditioning proximal Newton method for nondifferentiable convex optimization"*, Mathematical Programming 76, pp 411-429, (1997)

89. Qi L.:"*Second-Order Analysis Of The Moreau-Yosida Regularization"*, School of Mathematics, The University of New South Wales, Sidney, Australia, (1998)

90. Rockafellar T.: „*Convex Analysis*", Princeton, New Jersey, Princeton University Press, (Russian translation), (1970)

91. Rockafellar R.*:" On The Maximal Monotonicity Of Subdifferential Mappings*", Pacific Journal of Mathematics Vol. 33, No. 1, pp 209-216, (1970)

92. Rockafellar R.: "*Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm"*, SIAM jour. On Control and Optimization Vol. 14, pp 877-898, (1976)

93. Rockafellar R.: „*The Theory of Subgradients and Its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions",* Helderman Verlag, Berlin, (1981)

94. Ruszczynski A.: "*Nonlinear Optimization*", Princeton University Press, (2006)

95. Sagastizabal C., Solodov M.: "*An Infeasible Bundle Method For Nonsmooth Convex Constrained Optimization Without A Penality Function Or A Filter"*, SIAM Journal of Optimization, Vol. 16, No. 1., pp 146-169, (2005)

96. Schramm H., *"Eine Kombination von Bundle- und Trust-Region-Verfahren zur Losung nichtdifferenzierbarer Optimierungsprobleme"* Bayreuther Mathematische Schriften, Heft 30, Bayreuth, (1989)

97. Schramm H., Zowe J.*:"A Version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results",* SIAM J. Optimization, Vol.2, No. 1, pp 121-152, (1992)

98. Shor N.Z.: *"Utilization of the operation of space dilatation in the minimization of convex functions".* Cybernetics, 6(1), pp 7 - 15, (1970)

99. Shor N.Z., Zhurbenko N.G.: *"A minimization method using the operation of extension of the space in the direction of the difference of the two successive gradients"*. Cybernetics, 7(3), pp 450 - 459, (1971)

100. Shor N.Z.: "*Minimization Methods for Non-Differentiable Functions",* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1985)

101. Shor N.Z.*“Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Nonconvex Optimization and its Applications”*, Kluwer, (1998)

102. Shor N.Z., Zhurbenko N.G., Likhovid A.P., Stetsyuk P.I.: *„Algorithms of nondffierentiable optimization: development and application“*, Cybernetics and Systems Analysis, 39(4), pp 537 - 548, (2003)

103. Sun W., Sampaio R.J.B., Yuan J.*:”Two Algorithms for LC^1 Unconstrained Optimization”*, Jour. of Comp. Math., Vol. 18, No. 6, pp. 621-632, (2000)

104. Sun D., Sun J.: “*Semismooth matrix-valued functions”*, Math. Of Oper. Res., Vol. 27, No. 1, pp 150-169, (2002)

105. Sun J., Huang Z.*:”A smoothing Newton algorithm for the LCP with a sufficient matrix that terminates finitely at a maximally complementary solution”*, Optimization Methods and Software*,* Vol. 21, No. 4, pp 597–615, (2006)

106. Sun W., Yuan Y.: “*Optimization theory and methods”*, Nonlinear programming, ISBN-10:0-387-24975-3 Springer Science+Business Media, LLC, (2006)

107. Vujčić V., Ašić M., Miličić N.*:”Matematičko programiranje*”, Matematički institut Beograd, (1980)

108. Wolfe P.: „*A Method of Conjugate Subgradients for Minimizing Nondifferentiable Functions“*, Nondifferentiable Optimization, Mathematical Programming Study 3, (Eds. Balinski M. L. and Wolfe P.), pp 145-173, (1975)

109. Yu N. Ermoliev: “*Methods for solving nonlinear extremal problems*”, Kibernetika*(Kiev)*, 4:1 - 17, (1966)

110. Yuan Y.*:” On the Superlinear Convergence of a Trust Region Algorithm for Non- smooth Optimization”,* Mathematical Programming 31, pp 269-285, (1985)

111. Yosida K.: *“Functional analysis”,* Springer Verlag: Berlin, (1964)

112. Zowe J. *“The BT-algorithm for Minimizing a Nonsmooth Functional Subject to Linear Constraints”,* Working paper in Department of Economics, University of Bergen, Norway , (1988)