BEOGRADSKI UNIVERZITET

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Josif Vuković

OPTIMALNO UPRAVLJANJE KRETANJEM MEHANIČKIH SISTEMA

D o k t o r s k i   r a d

B E O G R A D

1984

P R E D G O V O R

Problemi optimalnosti se, svojom aktuelnošću, sve više nameću i nalaze mesta u raznorodnim naučnim disciplinama, naročito onim koje čine osnov tehničkih i ekonomskih nauka. Iako se analitička mehanika oduvek delimično bavila i takvim problemima neizbežno je bilo da se formira jedan opštiji pristup koji će obuhvatiti i one „neklasične" probleme koji su izlazili iz okvira klasične mehanike. U tom smislu je 1969. godine, pod rukovodstvom prof. Veljka Vujičića, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu osnovana Grupa za upravljanje kretanjem, odakle su, kao rezultati rada potekle magistarske i doktorske teze i veliki broj objavljenih naučnih radova i saopštenja.

Ovaj rad je deo autorovih istraživanja u okviru Grupe za upravljanje kretanjem. Učinjen je pokušaj da se u analitičku mehaniku uvede obuhvatnije razmatranje problema optimalnog upravljanja kretanjem, korišćenjem savremenih metoda zasnovanih na Pontrjaginovom principu maksimuma. Međutim, kako su postavka i dokaz principa maksimuma zasnovani na topološkim osobinama upravljanih sistema, u ovom radu je učinjen drukčiji pristup. Izvršena je geometrizacija problema, što je omogućilo da se princip maksimuma interpretira metodima koji su prisutni i u analitičkoj mehanici. Pri tome se težilo da spoljašnja forma osnovnog metoda, za rešavanje problema u konačnom obliku, ostane neizmenjena, bez obzira o kojoj je vrsti mehaničkih sistema i upravljanja reč. U tom smislu obrađeni su i neki teorijski prilozi kao ilustracija i potvrda opravdanosti primene usvojenog metoda na različite slučajeve optimalnog upravljanja kretanjem. Pri tome je ukazano i na neke otvorene probleme koji su posledica specifičnih osobina mehaničkih sistema.

Autor koristi ovu priliku da se iskreno zahvali prof. Veljku Vujičiću i prof. Aleksandru Bakši koji su ukazali veliku pomoć pri izradi ovog rada.

Beograd, 1984.god. J.V.

S A D R Ž A J

UVOD

Teorija optimalnih procesa nastala je sintezom mnogih istraživanja koja su se u svom začetku razvijala kao zasebne grane u specijalnim tehničkim disciplinama. Problemi upravljanja, u prvo vreme, odnosili su se na obezbeđivanje stabilnosti nekog procesa i na taj način bili tesno povezani sa problemima teorije diferencijalnih jednačina, teorije stabilnosti i oscilacija. Međutim, u svim oblastima, bez obzira na njihovu raznorodnost, bila je prisutna ideja optimizacije u nekom smislu.

Teško je ukazati na prve radove kojima je bilo načeto sistematsko izučavanje problema optimalnog upravljanja, no neosporno je da je centralno mesto u korišćenim metodima zauzimao klasični varijacioni račun. U tom smislu se, paralelno sa rešavanjem konkretnih problema, sredinom ovog veka, počeo formirati opštiji naučni pravac - teorija optimalnih procesa, koja objedinjuje različite probleme svrstane u dve osnovne klase: 1) problemi programskog upravljanja, 2) problemi sinteze optimalnih procesa. Problemi prve klase obuhvataju određivanje upravljačkih dejstava u funkciji vremena. Problemi druge klase gde se upravljačka dejstva formiraju u funkciji stanja sistema po principu povratne sprege stoje u osnovi teorije regulisanja i automatskog upravljanja.

Važna etapa u razvoju savremene teorije optimalnih procesa vezana je za istraživanja L.S. Pontrjagina i njegovih saradnika koji su formulisali princip maksimuma [31] , odakle se dobijaju neophodni uslovi optimalnosti za širok krug problema programskog upravljanja. Teoreme Pontrjaginove škole moguće je smatrati kao proširenje klasičnih varijacionih problema s diferencijalnim vezama, na probleme koji uključuju i „neklasične" uslove i ograničenja. Na taj način, aparat teorije koji se zasniva na principu maksimuma predstavlja razvoj metoda Lagranžovih množitelja, varijacionih principa i metoda kanonskih jednačina.

U isto vreme, u SAD-u, R. Belman i njegovi saradnici počeli su razvijanje metoda dinamičkog programiranja [5] , koji neposredno odgovara problemu optimalne sinteze i dovodi do parcijalnih diferencijalnih jednačina Hamilton-Jakobijevog tipa. Metod dinamičkog programiranja obuhvata veliki krug problema i predstavlja jedan od najmoćnijih savremenih metoda optimizacije, mada, sa analitičkog stanovišta, integralenje dobijenih jednačina predstavlja nepremostivu teškoću. Belmanov princip optimalnosti zasnovan je na uzastopnoj analizi u toku vremena, što omogućava da se proces razbije na niz etapa i na taj način dobiju rekurentni odnosi pogodni za primenu elektronskih računara.

Pored Pontrjagina i Belmana i sledbenika njihovih metoda, treba, neizbežno, ukazati na A.M. Letova i seriju njegovih radova koji se bave problemom minimizacije integrala kvadratnih formi pri kretanju linearnih sistema. U ovim radovima daje se rešenje sinteze za široku klasu problema, pri čemu se ispoljava važna veza između problema regulisanja i Ljapunovljeve teorije stabilnosti kretanja.

Sve širi krug problema nameće, sa jedne strane, teoriji optimalnih procesa takvu opštost da se ona spaja sa opštom teorijom sistema. Sa druge strane, dobijanje rezultata za bilo koju suženu klasu problema, vezano je i sa osobinama upravljanih sistema. Kako su, i pored moćnih savremenih računara, teškoće pri rešavanju često nepremostive, veliki deo literature o optimalnom upravljanju usmeren je na pronalaženje numeričkih metoda zasnovanih na savremenim matematičkim aparatima.

Što se tiče problema optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema, oni nisu kao celina posebno razmatrani. Razlog tome verovatno treba tražiti u činjenici što ti problemi prelaze okvire klasične mehanike i na jedan širi način povezuju je sa teorijom sistema. Naime, klasična mehanika proučava probleme u čijoj osnovi stoje objektivni prirodni uslovi optimalnosti na kojima su i postavljeni principi mehanike. U teoriji optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema, pored objektivnih, nametnuti su i subjektivni zahtevi optimalnosti, pa primena teorije optimalnih procesa, sa stanovišta klasične mehanike, prividno ima karakter matematičkog formalizma.

U ovom radu učinjen je pokušaj da se deo opšte teorije optimalnih procesa približi problemima optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema. Kao osnova za razmatranje uzet je Pontrjaginov princip maksimuma, prilagođen za mehaničke sisteme. Rad je podeljen na šest poglavlja.

U prvom poglavlju daju se, u kratkim crtama, definicije nekih pojmova iz teorije optimalnog upravljanja. Izvršena je uopštena postavka problema u obliku modela pogodnog za primenu analitičkih metoda optimizacije.

Drugo poglavlje je ključno u ovom radu. Data je geometrijska interpretacija principa maksimuma za holonomne skleronomne mehaničke sisteme i postavljen matematički model za rešavanje problema u konačnom obliku. Tako dobijeni rezultati prošireni su na reonomne sisteme pri čemu forma principa maksimuma ostaje neizmenjena. Usled toga, dalja razmatranja odnose se na holonomne skleronomne sisteme čime nije umanjena opštost usvojenog metoda. Sistemi jednačina koje opisuju optimalni proces imaju kanonsku formu i u celom radu postoji težnja da se taj oblik zadrži. Takva forma jednačina omogućila je da se na jednostavan način, primenom Hamilton-Jakobijeve metode, princip maksimuma svede na Belmanov princip optimalnosti.

U trećem poglavlju razmatrana je klasa singularnih upravljanja koja je vrlo česta u praktičnim problemima. Za probleme sa singularnim upravljanjima princip maksimuma je neefektivan, tj. potrebni uslovi optimalnosti principa maksimuma ne daju mogućnost da se odrede ekstremalna upravljanja. Prikazane su neke postojeće metode za rešavanje takvih problema i ukazano na njihove karakteristike. Posebno je, za ilustraciju singularnog upravljanja, obrađen teorijski prilog o kretanju mehaničkog sistema po optimalnom luku u konfiguracionom prostoru.

Četvrto poglavlje posvećeno je problemima optimalnosti kretanja pod dejstvom ograničenih upravljanja. Razmatrane su razne vrste ograničenja, uz ideju da diferencijalne jednačine upravljanog procesa zadrže kanonsku formu. Posebna pažnja posvećena je upravljanjima koja imaju prirodu generalisane sile.

Peto poglavlje delimično koristi rezultate drugog i četvrtog poglavlja za optimalno upravljanje kretanjem sistema ograničenog faznog stanja. Dat je princip maksimuma u nešto izmenjenom obliku uz stalno prisutnu ideju o očuvanju kanonske forme diferencijalnih jednačina optimalnog upravljanja.

Šesto poglavlje, za razliku od ostalih gde se razmatraju problemi programskog upravljanja, posvećeno je optimalnoj stabilizaciji kretanja mehaničkih sistema kao problemu automatskog upravljanja. U opštim crtama dat je metod rešavanja zasnovan na objedinjavanju Belmanovog principa optimalnosti i Ljapunovljevog kriterijuma stabilnosti.

U većini poglavlja ovog rada dat je jedan broj primera na kojima je, analitičkim postupkom do konačnog rešenja, ilustrovana primena razmatranih metoda.

Pri izradi ovog rada proučen je i pregledan veliki broj teorijskih i stručnih radova. Malo koja naučna disciplina danas ima toliki broj monografija i časopisa kao teorija optimalnih procesa. Na kraju je, pored osnovne, naveden i jedan deo one literature koja je na neki način uticala na razradu osnovne ideje ovog rada.

1. OSNOVNA POSTAVKA PROBLEMA

1.1. Upravljanje. Dozvoljeno upravljanje.

U teoriji optimalnih upravljanja, za opisivanje procesa, najčešće se koriste obične diferencijalne jednačine prvog reda u normalnom obliku koji je pogodan za analitičko razmatranje i primenu varijacionih i numeričkih metoda. U tom smislu, ograničićemo se na proučavanje mehaničkog sistema sa konačnim brojem stepeni slobode čije stanje je u proizvoljnom trenutku vremena t, određeno u 2n-dimenzionom faznom prostoru V_{2n} koordinatama q^α, p_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), gde su: n-broj stepena slobode, q^α-generalisane koordinate a p_α-generalisani impulsi.

Ukoliko uporedo sa prostorom V_{2n} postoji neki r-dimenzioni vektorski prostor U_r vektora u_i ($i=1,2,\ldots,r$) čije koordinate figurišu u diferencijalnim jednačinama kretanja sistema, onda izborom vektora u_i možemo na odgovarajući način uticati na promenu faznog stanja sistema. Drugim rečima, vektor u_i ima neki fizički smisao i pomoću njega možemo upravljati kretanjem mehaničkog sistema. Takav vektor zvaćemo vektor upravljanja a njegove koordinate funkcije upravljanja ili, samo, upravljanja.

U daljem izlaganju ograničićemo se na vektore upravljanja čije se koordinate javljaju kao promenljivi parametri u generalisanim silama ili sami imaju prirodu generalisane sile.

U opštem slučaju, upravljanja su ograničena kao posledica nekih nametnutih uslova ili realnih fizičkih mogućnosti upravljačkog sistema. Neka je G_u neki skup iz prostora U_r određen tim ograničenjima. Upravljanja koja ispunjavaju uslov

$$u_i \in G_u \qquad \forall\, t, q^\alpha, p_\alpha, \tag{1.1.1}$$

nazivamo dozvoljena upravljanja, a oblast G_u iz U_r skup dozvoljenih upravljanja.

Oblast G_u može biti otvoren ili zatvoren skup, konstantan ili promenljiv. Dozvoljena upravljanja mogu biti prekidna i u konačnom intervalu $[t_0, t_1]$ mogu imati konačan broj prekida.

1.2. Cilj upravljanja.

Svakom upravljanju iz (1.1.1) odgovara neka promena faznog stanja, odnosno neko kretanje mehaničkog sistema. Pri tome, osnovni problem je da se odrede takva upravljanja iz (1.1.1) pod čijim dejstvom će sistem da se kreće u skladu sa nekim unapred postavljenim ciljem.

Za mehaničke sisteme cilj upravljanja izražava se zahtevom da sistem iz nekog početnog stanja Σ_0 pređe u stanje Σ_1 i da taj proces bude obavljen u intervalu $[t_0, t_1]$. Početno stanje sistema $t_0, q^\alpha(t_0), p_\alpha(t_0)$ može biti na mnogostrukosti:

$$\varphi_j^0 [t_0, q(t_0), p(t_0)] = 0 \qquad j = 1,2,\dots,s \leq 2n \tag{1.2.1}$$

a krajnje stanje $t_1, q^\alpha(t_1), p_\alpha(t_1)$ na mnogostrukosti:

$$\varphi_k^1 [t_1, q(t_1), p(t_1)] = 0 \qquad k = 1,2,\dots,m \leq 2n \tag{1.2.2}$$

pri čemu, u nekim problemima, vreme $t_1 - t_0$ nije određeno unapred.

Ovde se prirodno nameće jedan suštinski problem: da li među dozvoljenim upravljanjima (1.1.1) postoje takva čije dejstvo obezbeđuje izvršenje postavljenog cilja? Osnovni kriterijumi egzistencije takvih upravljanja predstavljaju uslove upravljivosti sistema i njihovo postavljanje je veoma složeno. Izuzetak čine problemi koji obuhvataju kretanja opisana linearnim diferencijalnim jednačinama.

1.3. Mera optimalnosti.

Pored uslova da upravljani sistem izvrši određeni cilj, u praktičnim problemima, postavljaju se i zahtevi da se taj proces obavi na najpovoljniji način u nekom smislu, što može da se postavi u vidu uslova da neki funkcional:

$$J = J(u) \tag{1.3.1}$$

u toku kretanja, u intervalu $[t_0, t_1]$ ima minimalnu vrednost.

Ovaj uslov , kome je podvrgnut proces upravljanja, karakteriše suštinu optimalnosti i predstavlja, na neki način, njegovu kvalitativnu i kvantitativnu meru.

Funkcional (1.3.1), zavisno od zahteva optimalnosti procesa, najčešće se javlja u jednom od sledećih oblika:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, q, p, u)\,dt \tag{1.3.2}$$

$$J = \phi\left[t_0, q(t_0), p(t_0), t_1, q(t_1), p(t_1)\right] \tag{1.3.3}$$

$$J = \phi\left[t_0, q(t_0), p(t_0), t_1, q(t_1), p(t_1)\right] + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, q, p, u)\,dt \tag{1.3.4}$$

Ovi funkcionali postoje i u klasičnom varijacionom računu u problemima kao što su Lagranžov, Majerov i sličnim [26] . U velikom broju slučajeva mogu da se transformišu iz jednog oblika u drugi.

1.4. Postavka problema. Optimalno upravljanje.

Na osnovu prethodnih razmatranja i uvedenih pojmova možemo formulisati zadatak optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkog sistema u sledećem obliku:

Među dozvoljenim upravljanjima (1.1.1) treba naći ona pod čijim dejstvom će dati mehanički sistem iz stanja (1.2.1) doći u stanje (1.2.2) uz uslov minimalnosti funkcionala (1.3.1).

Upravljanja u_i koja uspunjavaju sve navedene uslove nazivaćemo optimalna upravljanja a odgovarajuće trajektorije sistema optimalne trajektorije.

Matematička postavka problema sastoji se u formiranju modela koji je opisan dovoljnim brojem jednačina i uslova za rešenje u konačnom obliku. Pri tome oblik funkcije upravljanja zavisi od toga kojoj osnovnoj klasi pripada razmatrani problem.

Ako se radi o tzv. programskom upravljanju, poželjno je da rešenje bude u obliku:

$$u_i^* = u_i^*(t)\,. \tag{1.4.1}$$

U problemima automatskog upravljanja treba rešavati problem sinteze optimalnog upravljanja tj. tražiti rešenje u obliku:

(1.4.2) $$u_i^* = u_i^* (t, q, p)$$

Ovaj oblik rešenja odgovara poznatom principu povratne sprege i pogodan je za stabilizaciju stanja mehaničkog sistema.

2. USLOVI OPTIMALNOSTI. PRINCIP MAKSIMUMA

2.1. Jednačine upravljanog kretanja mehaničkog sistema

U početnim razmatranjima, ograničimo se na kretanja opisana autonomnim diferencijalnim jednačinama sa ciljem da dobijene rezultate proširimo i na opštije slučajeve. U tom smislu posmatrajmo kretanje holonomnog, skleronomnog mehaničkog sistema u polju potencijalnih i nepotencijalnih sila koje ne zavise od vremena. Kinetička energija takvog sistema je:

$$T = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1.1}$$

gde je $a^{\alpha\beta}$ metrički tenzor konfiguracionog prostora R_n. Hamiltonova funkcija, u tom slučaju, predstavlja ukupnu mehaničku energiju i ima oblik:

$$H = T + \Pi \tag{2.1.2}$$

gde je $\Pi = \Pi(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ potencijalna energija sistema.

U prethodnom poglavlju ograničili smo se na funkcije upravljanja koje se u diferencijalnim jednačinama kretanja javljaju kao parametri u generalisanim silama. U tom smislu generalisana nepotencijalna sila ima oblik:

$$Q_\alpha^N = Q_\alpha^N (q, p, u). \tag{2.1.3}$$

Diferencijalne jednačine kretanja takvog sistema su:

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N . \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Ne upuštajući se u oblik zavisnosti ovih jednačina od upravljanja u_i pretpostavimo da su desne strane i njihovi izvodi po faznim koordinatama q^α i p_α neprekidne i ograničene funkcije. Na taj način, za neko dozvoljeno upravljanje $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ i za neko zadato početno stanje $t_0, q^\alpha(t_0), p_\alpha(t_0)$, postoji jedinstveno neprekidno rešenje jednačina (2.1.4).

Pošto smo uslovili da su jednačine (2.1.4) autonomne, početni trenutak t_0 može biti proizvoljno biran. Naime, ako upravljanje $u_i(t), t \in [t_0, t_1]$ prevodi sistem iz stanja Σ_0 u stanje Σ_1, to isto biće ostvareno i upravljanjem $u_i(\tau), \tau \in [t_0 + \Delta t, t_1 + \Delta t]$.

2.2. Geometrizacija upravljanog kretanja holonomnog skleronomnog mehaničkog sistema

Neka je optimalnost kretanja uslovljena zahtevom da funkcional:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(q, p, u)\, dt \tag{2.2.1}$$

ima minimalnu vrednost. Uvođenjem veličine

$$q^0 = \int_{t_0}^{t} f^0(q, p, u)\, dt \tag{2.2.2}$$

dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$\dot{q}^0 = f^0(q, p, u) \tag{2.2.3}$$

koja, zajedno sa jednačinama(2.1.4) predstavlja diferencijalne jednačine kretanja upravljanog mehaničkog sistema u proširenom faznom prostoru V_{2n+1}. Ovde ćemo pretpostaviti da su funkcija f^0 i njeni izvodi neprekidni i ograničeni.

Izvršivši na taj način geometrizaciju imamo sistem diferencijalnih jednačina:

$$\dot{q}_0^0 = f^0(q, p, u)$$

$$(2.2.4) \qquad \dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

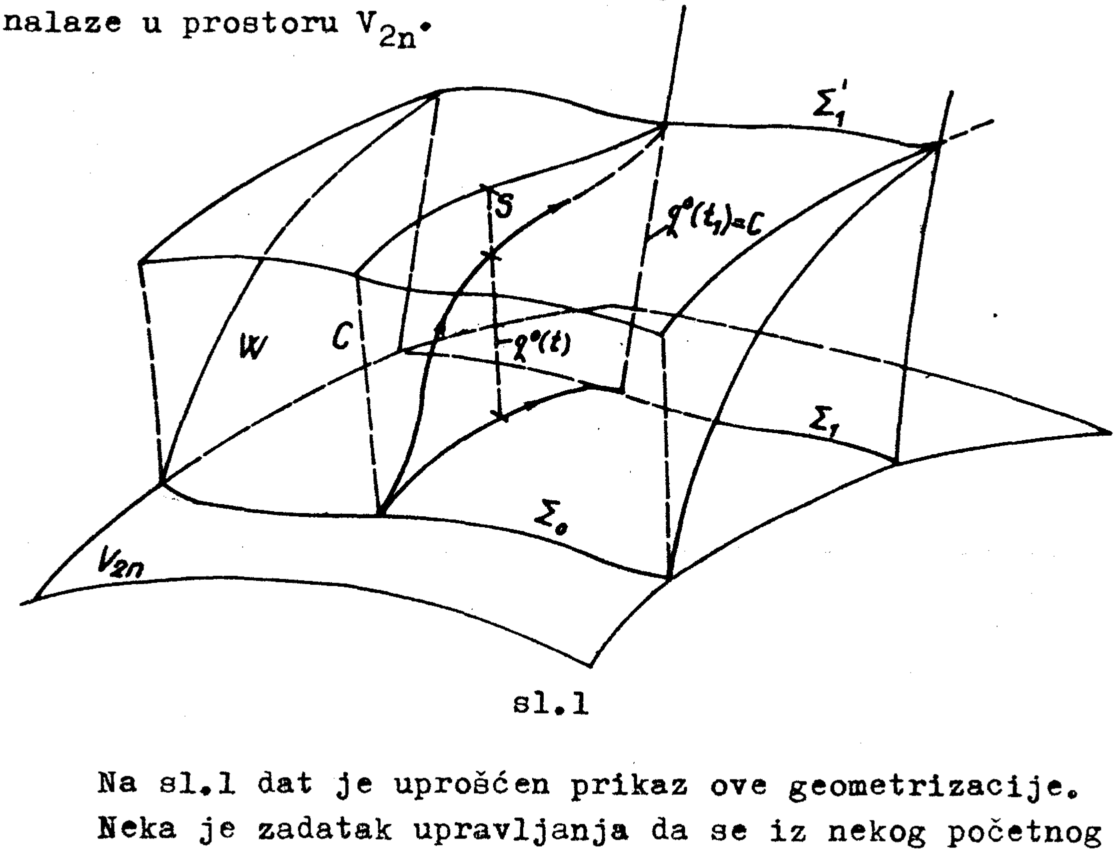
$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^\mu (q, p, u)$$

pri čemu treba primetiti da desna strane ne zavise od koordinate q^0. Zahtev optimalnosti, s obzirom na (2.2.2) dobija oblik uslova:

$$(2.2.5) \qquad \min_{u_i} J(u) = \min_{u_i} q^0(t_1)$$

Prostor V_{2n+1} formiran je tako da je osa q^0 upravna na V_{2n}, pa trajektorija sistema u V_{2n} predstavlja projekciju odgovarajuće trajektorije iz V_{2n+1}.

S obzirom na (2.2.2) je $q^0(t_0)=0$, pa se sva početna stanja nalaze u prostoru V_{2n}.



sl.1

Na sl.1 dat je uprošćen prikaz ove geometrizacije.

Neka je zadatak upravljanja da se iz nekog početnog stanja sistem premesti u bilo koju tačku skupa Σ_1 krajnjih stanja u prostoru V_{2n} i neka pri tome funkcional (2.2.1) ima vrednost:

(2.2.6) $$q^0(t_1) = C$$

onda skupu Σ_1 u prostoru V_{2n}, odgovara Σ'_1 skup krajnjih stanja u prostoru V_{2n+1}. Pri tome oba skupa pripadaju cilindričnoj hiperpvrši N, čiji je presek sa V_{2n} skup Σ_1. Neka je Σ_0 skup svih početnih stanja iz kojih za isto dozvoljeno upravljanje sistem dolazi na skup Σ_1, onda sve odgovarajuće trajektorije u prostoru V_{2n+1} leže na hiperpovrši čiji je presek sa V_{2n} skup Σ_0 a presek sa N skup Σ'_1 (sl.1). Jednačina ove hiperpovrši ima oblik:

(2.2.7) $$W(q^0, q, p) = q^0 + S[q, p, q(t_1), p(t_1)] = C$$

pri čemu je vrednost funkcije S određena vrednošću funkcionala u intervalu $[t, t_1]$ tj.:

(2.2.8) $$S[q, p, q(t_1), p(t_1)] = \int_t^{t_1} f^0(q, p, u)\, dt.$$

Neka je $u_i^* \in G_u$ optimalno upravljanje, onda odgovarajuća hiperpovrš W^* predstavlja geometrijsko mesto svih optimalnih trajektorija koje odgovaraju istom optimalnom upravljanju za koje je:

(2.2.9) $$\min_{u_i} q^0(t_1) = C^* \leqslant C$$

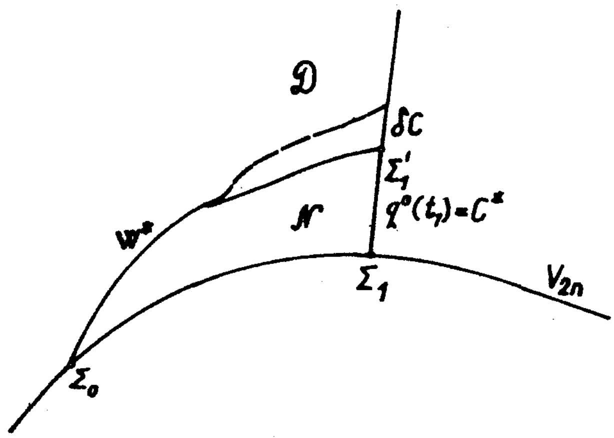
Na taj način hiperpovrš W^* deli prostor V_{2n+1} na dva poluprostora: poluprostor $\mathcal{D}$ dostupan za reprezentativnu tačku q^0, q^α, p_α i poluprostor $\mathcal{N}$ nedostupan za reprezentativnu tačku za bilo koje upravljanje $u_i \in G_u$ (sl.2). Drugim rečima za neko upravljanje

(2.2.10) $$u_i^* + \delta u_i \in G_u \qquad \forall\, t,\, q^\alpha,\, p_\alpha$$

imamo:

$$\frac{\partial W^*}{\partial q^0}\delta q^0 + \frac{\partial W^*}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial W^*}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha = \delta C \geq 0 \tag{2.2.11}$$

što znači da varirana putanja u faznom prostoru V_{2n+1}, nastala variranjem upravljanja, skreće u poluprostor $\mathcal{D}$ u koji je usmeren vektor gradijenta hiperpovrši W^*.



sl.2

Posmatrajmo varijacije nastale početnim varijacijama $\delta q^0(t_o)$, $\delta q^\alpha(t_o)$, $\delta p_\alpha(t_o)$ takvim da varirana početna tačka pripada skupu Σ_o, tj.:

$$(q^0+\delta q^0,\ q^\alpha+\delta q^\alpha,\ p_\alpha+\delta p_\alpha)_{t_0} \in \Sigma_0 . \tag{2.2.12}$$

Ako ne variramo optimalno upravljanje iz definicije hiperpovrši W^* sledi:

$$\frac{\partial W^*}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial W^*}{\partial q^0}\delta q^0 + \frac{\partial W^*}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \tag{2.2.13}$$

što znači da vektor varijacije δq^0, δq^α, δp_α leži u tangetnoj ravni hiperpovrši W^*.

Varijacije nastale na ovaj način imaju prirodu poremećaja izazvanih početnim poremećajima, pa predstavljaju rešenja poznatih varijacionih jednačina [24] koje, u našem slučaju imaju oblik:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\delta q^0 = \frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \\
(2.2.14)\qquad &\frac{d}{dt}\delta q^\alpha = \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q^\beta}\delta q^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\delta p_\beta \\
&\frac{d}{dt}\delta p_\alpha = \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\alpha^N}{\partial q^\beta}\right)\delta q^\beta + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} + \frac{\partial Q_\alpha^N}{\partial p_\beta}\right)\delta p_\beta .
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem jednačina dobijen je iz sistema (2.2.4) za $u_i = u_i^*$.

Uporedo sa vektorom varijacije δq^0, δq^α, δp_α posmatrajmo $2n+1$-dimenzioni vektor λ_0, λ_α, ν^α koji predstavlja rešenje jednačina:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_0 = -\frac{\partial f^0}{\partial q^0}\lambda_0 - \frac{\partial^2 H}{\partial q^0 \partial p_\alpha}\lambda_\alpha - \frac{\partial}{\partial q^0}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right)\nu^\alpha \\
(2.2.15)\qquad &\dot{\lambda}_\alpha = -\frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha}\lambda_0 - \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta}\lambda_\beta - \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\beta} + Q_\beta^N\right)\nu^\beta \\
&\dot{\nu}^\alpha = -\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}\lambda_0 - \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\lambda_\beta - \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\beta} + Q_\beta^N\right)\nu^\beta .
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem jednačina poznat je pod nazivom spregnuti sistem [31], a njegov oblik zavisi od oblika sistema jednačina kretanja (2.2.4).

Usled nezavisnosti funkcija f^0, H i Q^N od koordinate q^0 prva od jednačina (2.2.15) ima oblik:

$$\dot{\lambda}_0 = 0$$

odakle je

$$(2.2.16)\qquad \lambda_0 = const.$$

Rešenje sistema jednačina (2.2.15), pri zadatim početnim vrednostima:

(2.2.17) $\lambda_0(t_0),\ \lambda_\alpha(t_0),\ \nu^\alpha(t_0)$

je različito od nule ukoliko je početna vrednost različita od nule. Takvo rešenje je i jedinstveno.

Uslovimo da je početni vektor (2.2.17) normalan na Σ_o u tački $q^\alpha(t_o), p_\alpha(t_o)$ i usmeren u oblast $\mathcal{N}$, nedostupnu za reprezentativnu tačku. Kako je vektor početne varijacije takav da je:

$$\delta q^0(t_0)=0\ ,\quad (q^\alpha+\delta q^\alpha,\ p_\alpha+\delta p_\alpha)_{t_0}\in\Sigma_0$$

onda je pomenuti uslov ortogonalnosti:

(2.2.18) $(\lambda_\alpha\delta q^\alpha+\nu^\alpha\delta p_\alpha)_{t_0}=0.$

Formirajmo skalarni proizvod vektora λ_o, λ_α, ν^α i vektora varijacije δq^o, δq^α, δp_α u proizvoljnoj tački hiperpovrši W^* i nađimo njegov izvod po vremenu. Uzimajući u obzir jednačine (2.2.14) i jednačine (2.2.15) dobijamo:

(2.2.19) $\frac{d}{dt}(\lambda_0\delta q^0+\lambda_\alpha\delta q^\alpha+\nu^\alpha\delta p_\alpha)=0 \qquad \forall t\in[t_0,t_1]$

odnosno:

(2.2.20) $\lambda_0\delta q^0+\lambda_\alpha\delta q^\alpha+\nu^\alpha\delta p_\alpha=const. \qquad \forall t\in[t_0,t_1]$

a, na osnovu uslova (2.2.18), konačno imamo:

(2.2.21) $\lambda_0\delta q^0+\lambda_\alpha\delta q^\alpha+\nu^\alpha\delta p_\alpha=0 \qquad \forall t\in[t_0,t_1]\ .$

Na osnovu ovoga zaključujemo da je uslov ortogonalnosti (2.2.18) spregnutog vektora i Σ_o u početnom trenutku odredio njegovu ortogonalnost na tangentnu ravan hiperpovrši W^*. Drugim rečima vektor λ_0, λ_α, ν^α kolinearan je sa gradijentom hiperpovrši W^* u proizvoljnoj tački i usmeren je u poluprostor $\mathcal{D}$, usled čega je:

(2.2.22) $\lambda_0 = const. \leq 0$.

Na taj način je, uzimajući u obzir obe vrste variranja:

(2.2.23) $\lambda_0 \delta q^0 + \lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha \leq 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$

gde znak nejednakosti odgovara varijacijama koje su posledica variranja upravljanja, a znak jednakosti odgovara varijacijama nastalim, isključivo, variranjem početnog stanja sistema.

Brzina reprezentativne tačke na hiperpovrši W^*, za proizvoljno $u_i \in G_u$ usmerena je u dostupni poluprostor $\mathcal{D}$ pa, s obzirom na osobinu spregnutog vektora, imamo:

(2.2.24) $\lambda_0 \dot{q}^0 + \lambda_\alpha \dot{q}^\alpha + \nu^\alpha \dot{p}_\alpha \leq 0 \qquad \forall u_i \in G_u$

i

(2.2.25) $(\lambda_0 \dot{q}^0 + \lambda_\alpha \dot{q}^\alpha + \nu^\alpha \dot{p}_\alpha)_{u_i = u_i^*} = 0$

ili, uzimajući u obzir jednačine (2.2.4),

(2.2.26) $\lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha [-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N(q,p,u)] \leq 0 \qquad \forall u_i \in G_u$

i

(2.2.27) $\lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha [-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N(q,p,u^*)] = 0$

Uvodeći funkciju:

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha \left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^\mu\right) \tag{2.2.28}$$

relacije (2.2.26) i (2.2.27) dobijaju oblik:

$$\mathcal{H}(q, p, \lambda_0, \lambda, \nu, u) \leq 0 \qquad \forall u_i \in G_u \tag{2.2.29}$$

i

$$\mathcal{H}(q, p, \lambda_0, \lambda, \nu, u^*) = 0 . \tag{2.2.30}$$

Pomoću ovako uvedene funkcije $\mathcal{H}$, jednačine kretanja (2.2.4) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{q}^0 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_0} \\ \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^\alpha} \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

a spregnute jednačine (2.2.15) u obliku:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^0} \\ \dot{\lambda}_\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \\ \dot{\nu}^\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Medutim, kako funkcija $\mathcal{H}$ ne zavisi od q^0 i kako je, usled toga, λ_0=const., prve jednačine u sistemima (2.2.31) i (2.2.32) možemo ignorisati i ograničiti se na proučavanje rešanja sledećih sistema jednačina:

$$(2.2.33)\qquad \left|\begin{aligned} \dot{q}^{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^{\alpha}} \end{aligned}\right.$$

$$(2.2.34)\qquad \left|\begin{aligned} \dot{\lambda}_{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^{\alpha}} \\ \dot{\nu}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\alpha}} \end{aligned}\right.$$

Prema tome, uvodeći funkciju $\mathcal{H}$ u obliku (2.2.28), jednačine upravljanog kretanja holonomnog skleronomnog mehaničkog sistema i odgovarajuće spregnute jednačine sveli smo na kanonski oblik.

2.3. Uslovi transverzalnosti

Sistemi jednačina (2.2.33) i (2.2.34) za prizvoljno $u_i \in G_u$ imaju odgovarajuća opšta rešenja. Određivanjem optimalnog upravljanja u_i^* dobijamo opšta rešenja za kretanje po optimalnoj trajektoriji, pa je za rešenje u Košijevom obliku potrebno ukupno 4n uslova u određenim tačkama optimalne trajektorije.

Neka je, u opštem slučaju, početno stanje na mnogostrukosti:

$$(2.3.1)\qquad \varphi_j^0\,(q,p)_{t_0} = 0 \qquad\qquad j = 1,2,\dots,m \leq 2n$$

a krajnje stanje na mnogostrukosti:

$$(2.3.2)\qquad \varphi_k^1\,(q,p)_{t_1} = 0 \qquad\qquad k = 1,2,\dots,s \leq 2n$$

tada je, za rešenje problema u konačnom obliku, potrebno još

4n-(m+s) uslova.

Mnogostrukost (2.3.2) predstavlja presek s hiperpovrši za koje ćemo pretpostaviti da su glatke. Neka su njihovi gradijenti linearno nezavisni, tj. neka je:

$$(2.3.3) \qquad rang\left\{ \frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial q^\alpha}, \frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial p_\alpha} \right\}_{t_1} = s$$

tada mnogostrukost (2.3.2), u svakoj tački $q^\alpha(t_1), p_\alpha(t_1)$, ima jedinstvenu tangentnu ravan u kojoj leži vektor $\delta q^\alpha(t_1)$, $\delta p_\alpha(t_1)$. Prema tome je:

$$(2.3.4) \qquad \left(\frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \right)_{t_1} = 0$$

Kako je $\delta q^0(t_1)=0$, iz (2.2.21) imamo:

$$(2.3.5) \qquad (\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha)_{t_1} = 0.$$

Iz (2.3.4) imamo, s obzirom na (2.3.3), 2n-s nezavisnih veličina $\delta q^\alpha(t_1)$, $\delta p_\alpha(t_1)$. Eliminacijom zavisnih veličina iz (2.3.5) i izjednačavanjem sa nulom koeficijente uz nezavisne veličine, dobijamo 2n-s uslova u krajnjoj tački. Te uslove nazivamo uslovi transverzalnosti u krajnjoj tački. Oni su ekvivalentni jednačinama (2.3.4) i (2.3.5).

Uz iste pretpostavke o mnogostrukosti (2.3.1), kao preseku m glatkih hiperpovrši čiji su gradijenti linearno nezavisni tj.:

$$(2.3.6) \qquad rang\left\{ \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_i}{\partial q^\alpha}, \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_i}{\partial p_\alpha} \right\}_{t_0} = m$$

imamo:

(2.3.7) $$\left(\frac{\partial\varphi_i^o}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial\varphi_i^o}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)_{t_0} = 0$$

a, s obzirom da je $\delta q^o(t_o)=0$, iz (2.2.21) je:

(2.3.8) $$(\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha)_{t_0} = 0 .$$

Ponavljajući prethodno razmatranje iz (2.3.7) i (2.3.8) dobijamo novih 2n-m uslova koje nazivamo uslovi transverzalnosti u početnoj tački. Oni su ekvivalentni jednačinama (2.3.7) i (2.3.8).

Prema tome, ukupan broj početnih i krajnjih uslova i uslova transverzalnosti iznosi 4n, što je, za slučaj da je krajnje vreme t_1 unapred poznato, dovoljno za rešenja jednačina (2.2.33) i (2.2.34) u konačnom obliku. Za slučaj da vreme t_1 nije unapred poznato, raspolažemo iz (2.2.30) uslovom:

(2.3.9) $$(\mathcal{H}^*)_{t_1} = 0 .$$

Na osnovu ovih razmatranja možemo zaključiti da oblik uslova transverzalnosti zavisi, isključivo, od oblika uslova za početno i krajnje stanje sistema, što omogućava da se, jednostavno, uoče neke posledice.

1) Kako uslovi (2.3.5) i (2.3.8) ne obuhvataju veličinu λ_o i kako je ranije pokazano da je:

$$\lambda_0 = const. \leq 0$$

onda ona može biti proizvoljno uzeta iz skupa negativnih brojeva.

Obično se, pored obaveznog razmatranja vrednosti $\lambda_0=0$, razmatra i

$$\lambda_0 = -1 . \tag{2.3.10}$$

2) Ako je broj početnih i krajnjih uslova takav da je m=s=2n i ako je ispunjeno (2.3.3) i (2.3.6), onda su uslovi transverzalnosti ispunjeni trivijalno.

3) Ukoliko u početnim i krajnjim uslovima ne figurišu neke od faznih promenljivih, tj.:

$$\varphi_j^0 \neq q^A, p_B \qquad \varphi_k^1 \neq q^\Gamma, p_\Delta$$

onda deo uslova transverzalnosti ima oblik:

$$\begin{aligned} &\lambda_A(t_0) = 0 \quad , \quad \nu^B(t_0) = 0 \\ &\lambda_\Gamma(t_1) = 0 \quad , \quad \nu^\Delta(t_1) = 0 . \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Na primer, treba sistem pod određenim uslovima optimalnosti prevesti iz stanja:

$$q^\alpha(t_0) = q_0^\alpha , \qquad p_\alpha(t_0) = p_{\alpha 0}$$

u stanje:

$$q^\alpha(t_1) = q_1^\alpha .$$

Drugim rečima, sistem, iz određenog početnog položaja, određene početne brzine, treba prevesti u određeni krajnji položaj neodređenom brzinom. Kako je broj početnih uslova 2n, odgovarajući uslovi transverzalnosti ispunjeni su trivijalno, jer je:

$$\delta q^\alpha(t_0) = 0 \qquad \delta p_\alpha(t_0) = 0 .$$

U krajnjem položaju je:

$$\delta q^{\alpha}(t_1) = 0$$

pa, iz (2.3.5), imamo:

$$(\nu^{\alpha}\delta p_{\alpha})_{t_1} = 0$$

odakle, zbog nezavisnosti veličina $\delta p_{\alpha}(t_1)$, dobijamo:

$$\nu^{\alpha}(t_1) = 0. \tag{2.3.12}$$

2.4. Princip maksimuma. Pontrjaginova teorema.

Prethodna razmatranja odnose se na upravljano kretanje mehaničkog sistema, čije su jednačine (2.1.4), iz početnog stanja na mnogostrukosti (2.3.1) u krajnje stanje na mnogostrukosti (2.3.2), uz uslov minimalnosti funkcionala (2.2.1), pri čemu interval $t_1 - t_0$ nije određen unapred. Definišući funkciju $\mathcal{H}$ u obliku (2.2.28) i rezimirajući dobijene rezultate možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 1. Ako je $u_i^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, optimalno upravljanje (gore postavljenog problema) onda postoji neprekidni $2n+1$-dimenzioni vektor $\lambda_0, \lambda_{\alpha}, \nu^{\alpha}$, rešenje jednačina (2.2.32), različit od nule i takav da je, na optimalnoj trajektoriji:

a) $$\mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, \nu, q, p, u) \leq \mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, \nu, q, p, u^*)$$

b) $$(\mathcal{H})_{u^*} = \mathcal{H}^* = 0$$

c) $$\lambda_0 = const \leq 0$$

d) vektor $\lambda_{\alpha}, \nu^{\alpha}$ normalan je na početne i krajnje mnogostrukosti

Σ_0 i Σ_1 u trenucima $t=t_0$ i $t=t_1$.

Ova teorema pretstavlja poznatu Pontrjaginovu teoremu [31] u nešto suženom obliku. Odnosi se na optimalno upravljanje kretanjem holonomnih skleronomnih mehaničkih sistema sa autonomnim jednačinama i njena geometrijska interpretacija, data u ovom poglavlju, ne predstavlja strog dokaz, u poređenju sa dokazom koji je zasnovan na topološkim osobinama upravljanih sistema i sproveden u monografiji [31] .

Pontrjaginova teorema nazvana princip maksimuma daje potrebne uslove optimalnosti upravljanja. Dozvoljena upravljanja koja zadovoljavaju princip maksimuma nazivamo ekstremalna upravljanja i među njima treba tražiti optimalna. Ukoliko je ekstremalno upravljanje jedinstveno onda je ono i optimalno, što ne isključije mogućnost da, za nejedinstveno ekstremalno upravljanje, postoji i i nejedinstveno optimalno upravljanje.

Pretpostavljajući da dozvoljena upravljanja pripadaju nekoj zatvorenoj oblasti G_u u prostoru U_r uslov a) teoreme 1. ima oblik:

$$\mathcal{H}^* = \sup_{u \in G_u} \mathcal{H} \tag{2.4.1}$$

i u tom slučaju optimalno upravljanje u konačnom intervalu $[t_0, t_1]$ može da ima konačan broj prekida.

Ukoliko dozvoljena upravljanja pripadaju otvorenom skupu, uslov a) teoreme 1. ima oblik:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i}\right)_{u_i^*} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_i \partial u_j}\right)_{u_i^*} u_i u_j \leq 0 . \tag{2.4.2}$$

Navedeni uslovi daju određeni broj algebarskih jednačina za određivanje ekstremalnog upravljanja. S obzirom na strukturu funkcije $\mathcal{H}$, uslovi (2.4.1) ili (2.4.2) svode se na:

$$(\nu^\alpha Q_\alpha^N + \lambda_0 f_0)_{u_i^*} = \sup_{u_i \in G_u} (\nu^\alpha Q_\alpha^N + \lambda_0 f^0) \tag{2.4.3}$$

ili:

$$(2.4.4)\qquad (\nu^{\alpha}\frac{\partial Q_{\alpha}^{u}}{\partial u_i}+\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial u_i})_{u^*}=0\,,\quad (\nu^{\alpha}\frac{\partial^2 Q_{\alpha}^{u}}{\partial u_i\partial u_j}-\lambda_0\frac{\partial^2 f^0}{\partial u_i\partial u_j})_{u^*}u_i u_j\leq 0.$$

Odatle se dobijaju upravljanja u obliku:

$$(2.4.5)\qquad u_i^* = u_i^*(q,p,\nu)\,.$$

Zamenom (2.4.5) u jednačine kretanja i odgovarajuće spregnute jednačine i njihovim rešavanjem dobijamo, s obzirom na početne i krajnje uslove i uslove transverzalnosti, rešenja u Košijevom obliku. Vraćanjem tih rešenja u (2.4.5) dobijamo:

$$(2.4.6)\qquad u_i^* = u_i^*(t).$$

Ukoliko je ovo rešenje jedinstveno onda je ono i optimalno. Inače, u slučaju nejedinstvenih ekstremalnih rešenja, medu njima treba tražiti optimalna. Na taj način, neposrednom primenom principa maksimuma, dobijamo rešenja koja odgovaraju programskom upravljanju. Rešavanje problema optimalne sinteze zahteva neke dopunske ili sasvim drukčije metode.

Iako u ovom radu princip maksimuma ima specifičnu ulogu može da se zaključi da on predstavlja uopštenje klasičnih varijacionih metoda za rešavanje problema optimizacije sa diferencijalnim vezama. Njegova specifičnost ovde ogleda se u tome što su diferencijalne veze jednačine kretanja mehaničkog sistema u faznom prostoru V_{2n}. Pored toga funkcije upravljanja figurišu u jednačinama kretanja samo preko sila. Inače, osim upravljanja kretanjem, princip maksimuma može jednako efikasno da se koristi i u drugim problemima optimizacije. Za ilustraciju mogućnosti principa maksimuma mogu da posluže rezultati rada [4] gde je formulisan zadatak optimalnog upravljanja ekvivalentan integralnim principima. Primenom Pontrjaginovog principa, na tako postavljen problem izvedene su diferncijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema u više oblika.

Primer 1. Harmonijski oscilator: $\dot{q}=p$, $\dot{p}=-q$ ima amplitudu oscilacija a=1. Odrediti upravljanje čijim delovanjem će oscilator doći u ravnotežno stanje uz uslov minimalnosti funkcionala:

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}u^2dt \tag{P.1.1}$$

gde interval $[t_0, t_1]$ nije dat unapred. Jednačine upravljanog kretanja imaju oblik:

$$\dot{q}=p\ ,\ \dot{p}=-q+u \qquad \forall t\in[t_0,t_1]. \tag{P.1.2}$$

Treba odrediti upravljanje u^* da sistem iz početnog stanja:

$$(q^2+p^2)_{t_0}=1 \tag{P.1.3}$$

dođe u krajnje stanje:

$$q(t_1)=0\ ,\ p(t_1)=0. \tag{P.1.4}$$

Pontrjaginova funkcija je:

$$\mathcal{H}=\lambda p+\nu(-q+u)-\frac{1}{2}u^2 \tag{P.1.5}$$

uz napomenu da smo ovde uzeli $\lambda_0=-1$, jer za $\lambda_0=0$ sledi i $\lambda=0$, $\nu=0$ što je u protivrečnosti sa principom maksimuma.

Spregnute jednačine su:

$$\dot{\lambda}=\nu\ ,\ \dot{\nu}=-\lambda. \tag{P.1.6}$$

Iz uslova optimalnosti:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u}=0 \tag{P.1.7}$$

dobijamo:

$$u^*=\nu.$$

Na taj način problem je sveden na rešavanje jednačina:

(P.1.8) $$\dot{q} = p \qquad \dot{p} = -q + \nu$$
$$\dot{\lambda} = \nu \qquad \dot{\nu} = -\lambda$$

uz početne i krajnje uslove (P.1.3) i (P.1.4). Uslov transverzalnosti u početnom trenutku ima oblik:

$$(q\delta q + p\delta p)_{t_0} = 0, \quad (\lambda \delta q + \nu \delta p)_{t_0} = 0$$

odakle, eliminacijom zavisne varijacije, dobijamo:

(P.1.9) $$(\lambda p - \nu q)_{t_0} = 0.$$

Kako je sistem jednačina (P.1.9) autonoman i kako početni i krajnji uslovi ne zavise od vremena, početni trenutak t_0 možemo da izaberemo proizvoljno. Uzmimo da je $t_0=0$. Za određivanje trenutka t_1 iskoristimo uslov b) teoreme 1:

(P.1.10) $$(\mathcal{H}^*)_{t_1} = 0.$$

Time smo dobili dovoljan broj jednačina i uslova za rešenje problema u konačnom obliku:

(P.1.11) $$q = \pm\left(1 - \frac{t}{k\pi}\right)\cos t + \frac{1}{k\pi}\sin t$$
$$p = \mp\left(1 - \frac{t}{k\pi}\right)\sin t$$

pri čemu je:

(P.1.12) $$u^* = \pm\frac{2}{k\pi}\sin t$$

a vreme upravljanja:

(P.1.13) $$t_1 = k\pi$$

gde je k-prirodan broj.

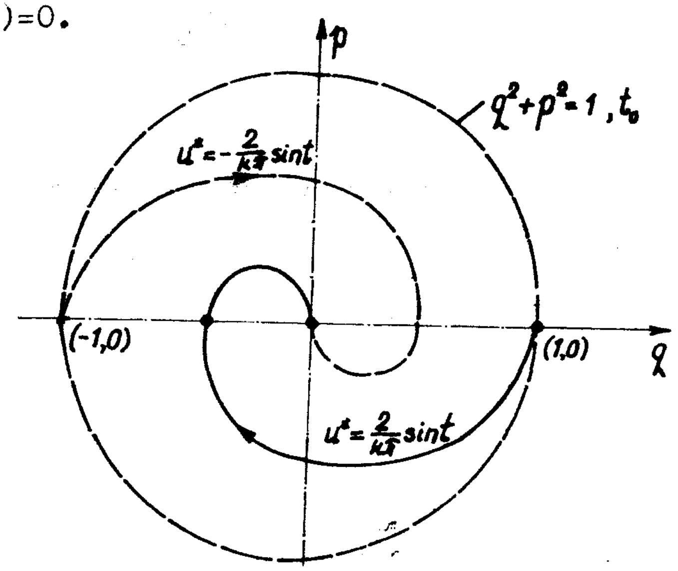
Vrednost funkcionala (P.1.1) na optimalnoj trajektoriji u intervalu $[t_0, t_1]$ iznosi:

(P.1.14) $$J = \frac{1}{k\pi} .$$

Minimalna vrednost težila bi nuli za beskonačne vrednosti broja k. Međutim, realno je uzeti da se optimalni proces obavi u nekom konačnom intervalu $[0,T]$. Tada će optimalno rešenje biti za vrednost broja k određenu relacijom:

$$T-1 < k\pi \leq T .$$

Iz rešenja (P.1.11) može da se zaključi da će optimalno kretanje početi iz stanja $t_0=0, q(t_0)=1, p(t_0)=0$ ili iz stanja $t_0=0$, $q(t_0)=-1, p(t_0)=0$.



Sl.3

Na sl.3 prikazana je optimalna trajektorija za k=2 tj za $t\in[0,2\pi]$.

Primer 2. Tačka mase m=1 kreće se u ravni pod dejstvom sile konstantnog intenziteta $|\vec{F}|=1$. Odrediti kako treba da se menja pravac sile da bi tačka iz početnog stanja $t_0=0, x_1(0)=0, x_2(0)=0$, $y_1(0)=1, y_2(0)=0$ za najkraće vreme stigla na oblast ograničenu hiperbolom $x_2^2-x_1^2=2$, $x_2 \geqslant 0$.

Uzimajući za upravljanje parametar koji određuje pravac i smer sile imamo:

(P.2.1) $$\vec{F} = \{\cos u \, , \, \sin u\}$$

tako da su diferencijalne jednačine upravljanog kretanja u faznom prostoru:

(P.2.2) $$\dot{x}_1 = y_1 \; , \; \dot{x}_2 = y_2 \; , \; \dot{y}_1 = \cos u \; , \; \dot{y}_2 = \sin u .$$

Treba minimizirati integral:

(P.2.3) $$J = \int_0^{t_1} dt$$

pa Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(P.2.4) $$\mathcal{H} = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \nu_1 \cos u + \nu_2 \sin u - 1$$

odakle dobijamo spregnute jednačine:

(P.2.5) $$\dot{\lambda}_1 = 0 \; , \; \dot{\lambda}_2 = 0 \; , \; \dot{\nu}_1 = -\lambda_1 \; , \; \dot{\nu}_2 = -\lambda_2$$

čija su opšta rešenja:

(P.2.6) $$\lambda_1 = L_1 \; , \; \lambda_2 = L_2 \; , \; \nu_1 = -L_1 t + N_1 \; , \; \nu_2 = -L_2 t + N_2$$

gde su L_1, L_2, N_1, N_2 konstante.

Početni uslovi su:

(P.2.7) $$t_0 = 0 , \; x_1(0) = 0 , \; x_2(0) = 0 , \; y_1(0) = 1 \; , \; y_2(0) = 0$$

a krajnji:

(P.2.8) $$(x_2^2 - x_1^2)_{t_1} = 2 .$$

Uslovi transverzalnosti u krajnjem trenutku t_1 su:

(P.2.9) $$(\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1)_{t_1} = 0 \; , \; \nu_1(t_1) = 0 , \; \nu_2(t_1) = 0 .$$

Pored početnih i krajnjih uslova i uslova transverzalnosti za konačno rešenje raspolažemo još i uslovom:

(P.2.10) $$(\mathcal{H}^*)_{t_1} = 0.$$

Iz neophodnih uslova optimalnosti imamo:

(P.2.11) $$-\nu_1 \sin u + \nu_2 \cos u = 0$$

pa, kako je s obzirom na (P.2.9),

(P.2.12) $$\nu_1 = L_1 t \quad , \quad \nu_2 = L_2 t$$

dobijamo upravljanje u obliku:

(P.2.13) $$u = \operatorname{arctg} \frac{L_2}{L_1} \; .$$

Zamenom ove vrednosti u jednačine kretanja (P.2.2) i njihovim integralenjem, s obzirom na uslove (P.2.7), dobijamo:

(P.2.14)
$$x_1 = \frac{L_1}{2\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}\, t^2 + t \quad , \quad y_1 = \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}\, t + 1$$
$$x_2 = \frac{L_2}{2\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}\, t^2 \quad , \quad y_2 = \frac{L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}\, t \, .$$

Koristeći uslove (P.2.8),(P.2.9) i (P.2.10) iz (P.2.14) imamo:

(P.2.15) $$L_1 = -\frac{1}{3} \; , \; L_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \; , \; t_1 = 2$$

tako da je optimalno upravljanje:

(P.2.16) $$u^* = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} \; .$$

Tačka se kreće po trajektoriji:

$$x_2 = \sqrt{3}\,(2 - x - 2\sqrt{1-x}\;)$$

i stiže na zadatu oblast u tačku $(1,\sqrt{3})$ brzinom $v(t_1)=(0,\sqrt{3})$ (Sl.4).

Prema uslovu a.) teoreme 1. na optimalnoj trajektoriji je:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \quad , \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} \right)_{u^*} < 0 .$$

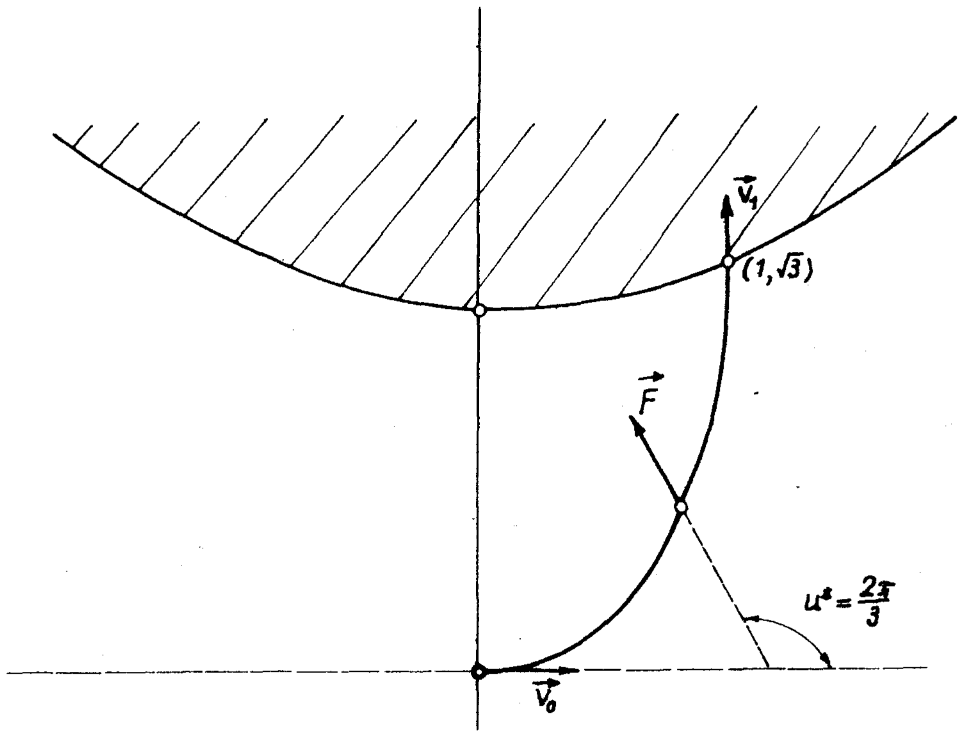
Prvu relaciju ovog uslova iskoristili smo za određivanje upravljanja (P.2.13) odnosno (P.2.16). Kako je:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = -\nu_1 \sin u - \nu_2 \cos u$$

zamenom (P.2.16) imamo:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} \right)_{u^*} = -\frac{2}{3}(2-t) < 0 \qquad \forall t \in [0,2]$$

čime smo potvrdili da je (P.2.16) optimalno upravljanje.



sl.4

2.5. Belmanov princip optimalnosti

Spregnuti vektor λ_0, λ_α, ν^α je upravan na tangetnu ravan hiperpovrši (2.2.7), odnosno kolinearan sa njenim gradijentom u proizvoljnoj tački. Koordinate gradijenta hiperpovrši W u faznom prostoru V_{2n} su:

$$(2.5.1)\qquad \frac{\partial W}{\partial q^0} = 1 \;,\quad \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \;,\quad \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial S}{\partial p_\alpha}$$

a uslovi kolinearnosti sa spregnutim vektorom mogu da se izraze u obliku:

$$(2.5.2)\qquad \lambda_0 = k\frac{\partial W}{\partial q^0} \;,\quad \lambda_\alpha = k\frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \;,\quad \nu^\alpha = k\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \,.$$

S obzirom na prvu jednakost iz (2.5.1)imamo da je $\lambda_0=k$, pa iz (2.5.2) dobijamo:

$$(2.5.3)\qquad \lambda_\alpha = \lambda_0\frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \;,\quad \nu^\alpha = \lambda_0\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}$$

odnosno, uzimajući prema ranijem zaključku $\lambda_0=-1$, možemo napisati:

$$(2.5.4)\qquad \lambda_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \;,\quad \nu^\alpha = -\frac{\partial S}{\partial p_\alpha} \,.$$

Zamenjujući ove vrednosti u (2.2.28) dobijamo:

$$(2.5.5)\qquad \mathcal{H} = -f^0 - \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^N_\alpha\right).$$

Primenjujući tačke a) i b) teoreme 1. na ovakav oblik funkcije $\mathcal{H}$ imamo:

$$(2.5.6)\qquad \left[f^0+\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^\mu\right)\right]_{u_i\in G_u}\geqslant\left[f^0+\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^\mu\right)\right]_{u_i^*}$$

i

$$(2.5.7)\qquad \left[f^0+\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^\mu\right)\right]_{u_i^*}=0$$

odnosno:

$$(2.5.8)\qquad \inf_{u_i\in G_u}\left[f^0+\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^\mu\right)\right]=0.$$

Ova jednačina predstavlja Belmanov princip optimalnosti upravljanog kretanja holonomnog skleronomnog mehaničkog sistema. Iz ovako formulisanog principa optimalna upravljanja mogu da se odrede u obliku:

$$(2.5.9)\qquad u_i^*=u_i^*\left(q,p,\frac{\partial S}{\partial p}\right).$$

Zamenivši, tako određena upravljanja u (2.5.7) dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu:

$$(2.5.10)\qquad f^0\left(q,p,\frac{\partial S}{\partial p}\right)+\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial S}{\partial p_\alpha}\left[-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^\mu\left(q,p,\frac{\partial S}{\partial p}\right)\right]=0.$$

Na taj način, primenom Belmanovog principa optimalnosti, problem se svodi na rešavanje jednačine (2.5.10) Hamilton-Jakobijevog tipa.

2.6. Optimalno upravljanje kretanjem holonomnog reonomnog mehaničkog sistema

U dosadašnjem izlaganju razmatrani su holonomni skleronomni sistemi sa autonomnim jednačinama kretanja. Pretpostavili smo da početno i krajnje stanje sistema pripadaju mnogostrukostima nepokretnim u faznom prostoru V_{2n} i da podintegralna funkcija f^o funkcionala (2.2.1) ne zavisi eksplicitno od vremena. Tim pretpostavkama dobili smo da Pontrjaginova funkcija $\mathcal{H}$ ne zavisi eksplicitno od vremena, što uslovljava da su sistemi jednačina (2.2.31) i (2.2.32) autonomni, kao i da početni trenutak t_o može biti proizvoljno biran. Prema tome, teorema 1. može da se neposredno primeni na sisteme sa autonomnim jednačinama kretanja.

Pokažimo, u kojoj meri treba izvršiti izmenu teoreme 1. da bi njene rezultate mogli koristiti za rešavanje problema optimalnog upravljanja sistemom čije su jednačine kretanja neautonomne, a početni i krajnji uslovi i podintegralna funkcija f^o zavise i od vremena. U tom cilju, posmatrajmo kretanje holonomnog reonomnog mehaničkog sistema iz početno stanja:

$$\varphi_j^0[q(t_0), p(t_0), t_0] = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,m \tag{2.6.1}$$

u krajnje stanje:

$$\varphi_k^1[q(t_1), p(t_1), t_1] = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,s \tag{2.6.2}$$

uz uslov minimalnosti funkcionala:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(q,p,u,t)\,dt = 0. \tag{2.6.3}$$

Hamiltonova funkcija reonomnog mehaničkog sistema ima oblik [23]:

$$H = T_2 + (\Pi - T_0)$$

gde su:

$$T_2 = T_2(t,q,p), \quad \Pi = \Pi(t,q), \quad T_0 = T_0(t,q).$$

Jednačine upravljanog kretanja holonomnog reonomnog sistema u faznom prostoru V_{2n+1} imaju oblik:

$$\begin{aligned} \dot{q}^0 &= f^0(q,p,u,t) \\ \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^H(q,p,u,t). \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Da bi teoremu 1. mogli neposredno primeniti problem treba formulisati tako da ta teorema važi.

Uvođenjem promenljive:

$$q^{n+1} = t \tag{2.6.5}$$

dobijamo novi sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{q}^0 &= f^0(q,p,u,t) \\ \dot{q}^\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ \dot{q}^{n+1} &= 1 \\ \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^H(q,p,u,t) \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

koje opisuju kretanje fazne tačke u proširenom prostoru V_{2n+2}. Početni i krajnji uslovi (2.6.1) i (2.6.2) sada imaju oblik:

$$\varphi_j^0 [q(t_0), q^{n+1}(t_0), p(t_0)] = 0 \tag{2.6.8}$$

i

(2.6.9) $$\varphi_k^1 [q(t_1), q^{n+1}(t_1), p(t_1)] = 0$$

a funkcional (2.6.3):

(2.6.10) $$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(q, q^{n+1}, p, u)\, dt .$$

Ovakvom geometrizacijom problem optimalnog upravljanja kretanjem reonomnog sistema postaje ekvivalentan po formi problemu razmatranom u odeljku(2.2) ovog poglavlja. Napomenimo, da smo izostavili impuls p_{n+1}, jer njegovo uvođenje nema značaja za ovako postavljen problem optimizacije. Osim toga, treba imati u vidu da proširenjem faznog prostora V_{2n}, uvođenjem koordinate q^{n+1}, dobijamo fazni prostor V_{2n+1} koji ćemo razmatrati ekvivalentno prostoru V_{2n} u odeljku (2.2). Pri tome je koordinatna osa q^0, kao i pre, upravna na njemu.

Prema tome, jednačine (2.6.7), koje opisuju kretanje reprezentativne tačke u faznom prostoru V_{2n+2}, autonomne su, čime teorema 1. postaje primenjiva. U tom slučaju, Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(2.6.11) $$\bar{\mathcal{H}} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \lambda_{n+1} + \nu^\alpha \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right)$$

odnosno:

(2.6.12) $$\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \lambda_{n+1}$$

tako da jednačine kretanja (2.6.7) i odgovarajuće spregnute jednačine mogu da se napišu u kanonskom obliku:

$$(2.6.13)\qquad \begin{cases} \dot{q}^0 = \dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \lambda_0} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_0} \\ \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \lambda_\alpha} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_\alpha} \\ \dot{q}^{n+1} = \dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \lambda_{n+1}} = 1 \\ \dot{p}_\alpha = \dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \nu^\alpha} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^\alpha} \end{cases}$$

$$(2.6.14)\qquad \begin{cases} \dot{\lambda}_0 = -\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial q^0} = 0 \\ \dot{\lambda}_\alpha = -\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial q^\alpha} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \\ \dot{\lambda}_{n+1} = -\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial q^{n+1}} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^{n+1}} \\ \dot{\nu}^\alpha = -\dfrac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial p_\alpha} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}\,. \end{cases}$$

Saglasno teoremi 1., 2n+2-dimenzioni vektor $\lambda_0, \lambda_\alpha, \lambda_{n+1}, \nu^\alpha$ je različit od nule i predstavlja rešenje jednačina (2.6.14). Uslovi a) i b) teoreme 1. dobijaju oblik:

$$(2.6.15)\qquad \sup_{u_i \in G_u} \bar{\mathcal{H}} = (\bar{\mathcal{H}})_{u_i^*} = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]$$

što se, s obzirom na (2.6.11), svodi na:

$$(2.6.16)\qquad \sup_{u_i \in G_u} \mathcal{H} = (\mathcal{H})_{u_i^*}$$

i

$$(2.6.17)\qquad (\mathcal{H})_{u_i^*} = -\lambda_{n+1}\,.$$

Međutim, iz sistema (2.6.14), s obzirom na (2.6.5) i

(2.6.12), imamo:

$$(2.6.18) \qquad \dot{\lambda}_{n+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

odakle je:

$$(2.6.19) \qquad \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}\, d\tau$$

pa uslov (2.6.17) možemo izraziti u obliku:

$$(2.6.20) \qquad \mathcal{H}^* = (\mathcal{H}^*)_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}\, d\tau \,.$$

Nastavljajući dalja razmatranja, analogno razmatranjima u odeljku (2.3), dobijamo uslove transverzalnosti u početnoj tački:

$$(2.6.21) \qquad \left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi_i}}{\partial q^\alpha}\, \delta q^\alpha + \frac{\partial \overset{0}{\varphi_i}}{\partial q^{n+1}}\, \delta q^{n+1} + \frac{\partial \overset{0}{\varphi_i}}{\partial p_\alpha}\, \delta p_\alpha \right)_{t_0} = 0$$

$$(2.6.22) \qquad \left(\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \lambda_{n+1} \delta q^{n+1} + \nu^\alpha \delta p_\alpha \right)_{t_0} = 0$$

a u krajnjoj tački:

$$(2.6.23) \qquad \left(\frac{\partial \overset{1}{\varphi_k}}{\partial q^\alpha}\, \delta q^\alpha + \frac{\partial \overset{1}{\varphi_k}}{\partial q^{n+1}}\, \delta q^{n+1} + \frac{\partial \overset{1}{\varphi_k}}{\partial p_\alpha}\, \delta p_\alpha \right)_{t_1} = 0$$

$$(2.6.24) \qquad \left(\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \lambda_{n+1} \delta q^{n+1} + \nu^\alpha \delta p_\alpha \right)_{t_1} = 0 \,.$$

Uzimajući u obzir (2.6.5) i (2.6.13) dobijamo u početnoj tački:

(2.6.25) $$\left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi}_j}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial \overset{0}{\varphi}_j}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)_{t_0} = -\left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi}_j}{\partial t}\delta t\right)_{t_0}$$

(2.6.26) $$(\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha)_{t_0} = (\mathcal{H}\delta t)_{t_0}$$

a, u krajnjoj tački:

(2.6.27) $$\left(\frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right)_{t_1} = -\left(\frac{\partial \overset{1}{\varphi}_k}{\partial t}\delta t\right)_{t_1}$$

(2.6.28) $$(\lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha)_{t_1} = (\mathcal{H}\delta t)_{t_1} .$$

Na taj način, uslovi a) i b) teoreme 1. zamenjeni su uslovima (2.6.16) i (2.6.20), uslov d) uslovima transvezalnosti (2.6.25), (2.6.26) i (2.6.27), (2.6.28), a uslov c) ostaje nepromenjen.

Napomenimo, da neautonomni sistem može biti skleronoman, a da neautonomnost dolazi usled toga što u jednačinama kretanja generalisane sile eksplicitno zavise od vremena. Međutim, i u tim slučajevima važe navedena razmatranja, uz činjenicu, da je Hamiltonova funkcija mehanička energija sistema.

Pored toga, navedena razmatranja o optimalnom upravljanju kretanjem mehaničkog sistema sa neautonomnim jednačinama omogućavaju da se donese jedan važan zaključak o holonomnim sistemima sa autonomnim jednačinama i određenim vremenskim intervalom t_1-t_0 procesa upravljanja. Naime, kod autonomnih sistema, početni trenutak t_0 može biti proizvoljno izabran pa je, poznavanje intervala t_1-t_0 ekvivalentno poznavanju vrednosti t_0 i t_1. Polazeći od tog stanovišta, koristeći rezultate za neautonomne sisteme, dobijamo da se uslovi (2.6.1) i (2.6.2) svode na uslove (2.3.1) i (2.3.2) uz dodatne uslove:

$$(t-t_0)_{t_0} = 0 \quad , \quad (t-t_1)_{t_1} = 0 .$$

Uzimajući u obzir činjenicu da, za autonomne sisteme, funkcija $\mathcal{H}$ ne zavisi od vremena, uslov (2.6.20) dobija oblik:

$$(\mathcal{H})_{u^*} = \mathcal{H}^* = const \quad . \tag{2.6.29}$$

Uslovi transverzalnosti dobijaju oblik uslova u odeljku (2.3). Treba primetiti da uslov(2.6.29) predstavlja prvi integral diferencijalnih jednačina kretanja i odgovarajućih spregnutih jednačina. Izuzimajući tu činjenicu, on nije neophodan za rešavanje problema optimizacije autonomnih sistema sa određenim intervalom $[t_o, t_1]$. Međutim, za rešavanje problema optimizacije autonomnih sistema sa neodređenim intervalom $[t_o, t_1]$ uslov (2.6.29) je neophodan i koristi se u obliku (2.3.9).

Analizirajući dobijene rezultate možemo zaključiti da smo, izloženim postupkom, problem doveli na oblik za koji je primenjiva teorema 1. Imajući u vidu tu činjenicu, u daljem radu ograničićemo se na proučavanje problema optimizacije kretanja mehaničkih sistema sa autonomnim jednačinama uz mogućnost da, u skladu sa postupkom u ovom poglavlju, dobijene rezultate proširimo i primenimo na ostale sisteme.

2.7. Integralna invarijanta i jednačine upravljanog kretanja mehaničkog sistema

U odeljku (2.2) ovog poglavlja, uvođenjem 2n+1-dimenzionog vektora λ_o, λ_α, ν^α i funkcije $\mathcal{H}$ u obliku (2.2.28), dobili smo diferencijalne jednačine (2.2.31) i (2.2.32) u kanonskom obliku. Pri tome smo konstatovali da je u svakoj tački optimalne trajektorije ispunjen uslov:

$$\lambda_o \delta q^o + \lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha = const \tag{2.7.1}$$

gde je 2n+1-dimenzioni vektor varijacije δq^o, δq^α, δp_α nastao variranjem početnog stanja ($\delta u_i=0$) i usled toga predstavlja rešenje Poankareovih varijacionih jednačina (2.2.14). Takav vektor varijacije, za razliku od varijacije koja se koristi pri izučavanju varijacionih principa mehanike, dozvoljava da se sa jedne trajektorije fizički moguće pređe na drugu trajektoriju, takođe fizički moguću, ukoliko obe predstavljaju rešenje istog sistema diferencijalnih jednačina sa različitim početnim uslovima. Usled toga veličine δq^0, δq^α, δp_α imaju karakter diferencijala a leva strana jednačine (2.7.1) karakter diferencijalne forme.

Izvedimo jednačine (2.2.31) i (2.2.32) polazeći sa drugog stanovišta. Neka postoji vektor λ_0, λ_α, ν^α različit od nule. Postavimo uslov da je u svakoj tački optimalne trajektorije ispunjeno (2.7.1). Potražimo diferencijalne jednačine čije rešenje je takav vektor.

Uslov (2.7.1) ukazuje na to da je vrednost diferencijalne forme nezavisna od vremena, usled čega ona predstavlja osnovu integralne invarijante [17]. Uzimajući za oblast integralenja zatvorenu konturu na mnogostrukosti koju čine tačke svih fizički mogućih trajektorija u istom trenutku vremena, imamo relativnu integralnu invarijantu [17] u obliku:

$$I = \oint \lambda_0 \delta q^0 + \lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha . \tag{2.7.2}$$

Uvažavajući razmatranja u [7],[10], možemo uslov, da izraz (2.7.2) predstavlja integralnu invarijantu, napisati u obliku:

$$\frac{dI}{dt} = 0. \tag{2.7.3}$$

Ovaj uslov ima smisla uz pretpostavku da zatvorena kontura, u svakom trenutku $t \in [t_0, t_1]$ obuhvata tačke istih trajektorija. Uzimajući da je:

$$\frac{dI}{dt} = \oint \frac{d}{dt} (\lambda_0 \delta q^0 + \lambda_\alpha \delta q^\alpha + \nu^\alpha \delta p_\alpha) \tag{2.7.4}$$

i razvijajući uslov (2.7.3) dobijamo:

$$(2.7.5) \qquad \oint \dot{\lambda}_0 \delta q^0 + \dot{\lambda}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{\nu}^\alpha \delta p_\alpha + \lambda_0 \frac{d}{dt}(\delta q^0) + \lambda_\alpha \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha) + \nu^\alpha \frac{d}{dt}(\delta p_\alpha) = 0.$$

Primenivši parcijalno integralenje imamo:

$$(\lambda_0 \dot{q}^0 + \lambda_\alpha \dot{q}^\alpha + \nu^\alpha \dot{p}_\alpha)_{\not{C}} + \oint \dot{\lambda}_0 \delta q^0 + \dot{\lambda}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{\nu}^\alpha \delta p_\alpha - \dot{q}^0 \delta \lambda_0 - \dot{q}^\alpha \delta \lambda_\alpha - \dot{p}_\alpha \delta \nu^\alpha = 0$$

gde je, zbog zatvorenosti konture integralenja, prvi sabirak na levoj stani jednačine jednak nuli. Usled toga je:

$$(2.7.6) \qquad \oint \dot{\lambda}_0 \delta q^0 + \dot{\lambda}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{\nu}^\alpha \delta p_\alpha - \dot{q}^0 \delta \lambda_0 - \dot{q}^\alpha \delta \lambda_\alpha - \dot{p}_\alpha \delta \nu^\alpha = 0.$$

Pošto je kontura integralenja proizvoljno birana, jednačina (2.7.6) važi ako je podintegralni izraz diferencijal (varijacija) neke funkcije. Označivši tu funkciju sa $-\mathcal{H}$ imamo:

$$(2.7.7) \qquad \oint -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^0}\delta q^0 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_0}\delta \lambda_0 - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_\alpha}\delta \lambda_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^\alpha}\delta \nu^\alpha = 0.$$

Upoređujući (2.7.6) i (2.7.7) slede jednačine:

$$(2.7.8) \qquad \left| \begin{array}{l} \dot{q}^0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_0} \\[2ex] \dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_\alpha} \\[2ex] \dot{p}_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^\alpha} \end{array} \right.$$

i

$$(2.7.9) \qquad \left| \begin{array}{l} \dot{\lambda}_0 = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^0} \\[2ex] \dot{\lambda}_\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} \\[2ex] \dot{\nu}^\alpha = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha} \end{array} \right.$$

Upoređujući jednačine (2.7.8) sa jednačinama (2.2.4) možemo konstatovati da je funkcija $\mathcal{H}$ linearna po promenljivim λ_0, λ_α, ν^α odnosno:

$$(2.7.10) \qquad \mathcal{H} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha \left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right).$$

Na taj način smo, uvođenjem vektora λ_0, λ_α, ν^α uslovom (2.7.1), došli do kanonske forme jednačina upravljanog kretanja i oblika Pontrjaginove funkcije $\mathcal{H}$.

3. SINGULARNO UPRAVLJANJE

3.1. Uslovi optimalnosti i singularno upravljanje

Ako dozvoljena upravljanja pripadaju otvorenom skupu, potrebni uslovi optimalnosti iz teoreme 1. daju r algebarskih jednačina:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1,2,\dots,r \tag{3.1.1}$$

iz kojih bi trebalo odrediti ekstremalna upravljanja među kojima se nalaze optimalna. Međutim, ukoliko jednačine (3.1.1) ne daju mogućnost da se odrede ekstremalna upravljanja, princip maksimuma ne može direktno da se primeni za rešavanje problema optimizacije.

Ako postoji takav skup $\omega(t) \subset U_r$ $\forall t \in [t_0, t_1]$, da je:

$$\mathcal{H}[q, p, \lambda, \nu, u] = const \qquad \forall u_i \in \omega(t) \tag{3.1.2}$$

uslovi (3.1.1) postaju neefektivni za upravljanja koja pripadaju skupu $\omega(t)$. Takva upravljanja nazivaju se singularna upravljanja a skup $\omega(t)$ skup singularnih upravljanja [13] . Prema tome, pojam singularnih upravljanja tesno je povezan sa neophodnim uslovima optimalnosti.

3.2. Slučaj kad Pontrjaginova funkcija linearno zavisi od upravljanja

U proučavanju singularnih upravljanja [13, 15, 16] uglavnom se razmatraju slučajevi kad Pontrjaginova funkcija linearno zavisi od upravljanja. Ovde se to javlja u problemima kad upravljanja figurišu linearno u jednačinama kretanja (2.2.4).

Tada je Pontrjaginova funkcija:

$$(3.2.1) \qquad \mathcal{H} = \mathcal{H} + \mathcal{H}^i u_i$$

pa uslovi (3.1.1) imaju oblik:

$$(3.2.2) \qquad \mathcal{H}^i = 0.$$

Primenivši formalizam Poasonovih zagrada [19] i razmatrajući autonomne sisteme, imamo da je:

$$(3.2.3) \qquad \frac{d\mathcal{H}^i}{dt} = [\mathcal{H}^i, \mathcal{H}] = 0$$

gde je, zbog nezavisnosti Pontrjaginove funkcije od koordinate q^0:

$$(3.2.4) \qquad [\mathcal{H}^i, \mathcal{H}] = \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial \lambda_\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{H}^i}{\partial \nu^\alpha}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}$$

Uzimajući u obzir (3.2.1) imamo:

$$(3.2.5) \qquad [\mathcal{H}^i, \mathcal{H}] = [\mathcal{H}^i, \mathcal{H}_0] + [\mathcal{H}^i, \mathcal{H}^j] u_j = 0.$$

Zbog antisimetričnih osobina Poasonovih zagrada, matrica:

$$[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}^j] \qquad i,j = 1,2,\dots,r$$

singularna je za neparan broj r, pa u tom slučaju sistem (3.2.5) nije moguće jednoznačno rešiti po u_i. Međutim pokazuje se da identičnosti:

(3.2.6) $$[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}^j] \equiv 0$$

predstavljaju neophodne uslove optimalnosti [13]. Prema tome, jednačine (3.2.5) ne daju ništa za određivanje singularnih upravljanja, pa treba preći na druge izvode:

(3.2.7) $$\frac{d^2\mathcal{H}^i}{dt^2} = 0$$

odnosno:

(3.2.8) $$\frac{d}{dt}[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}] = \left[[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}]\mathcal{H}_0\right] + \left[[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}]\mathcal{H}^j\right]u_j = 0$$

ili, s obzirom na (3.2.6),

(3.2.9) $$\left[[\mathcal{H}^i \mathcal{H}_0]\mathcal{H}_0\right] + \left[[\mathcal{H}^i, \mathcal{H}_0]\mathcal{H}^j\right]u_j = 0.$$

Ograničavajući se na slučaj kad je matrica:

(3.2.10) $$\left[[\mathcal{H}^i \mathcal{H}_0]\mathcal{H}^j\right]$$

nesingularna, onda iz (3.2.9) mogu da se odrede upravljanja koja će biti optimalna ukoliko su ispunjeni Kelijevi (Kelley) uslovi [15], koji glase da je kvadratna forma, čiji su koeficijenti elementi matrice (3.2.10), pozitivno definitna, tj:

(3.2.11) $$\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j}\right)\right]u_i u_j = \left[[\mathcal{H}^i \mathcal{H}_0]\mathcal{H}^j\right]u_i u_j \geq 0.$$

Ovi uslovi izvedeni su u [13, 15] i ovde neće biti posebno dokazivani.

Ukoliko je matrica (3.2.10) nula matrica postupak se sastoji u daljem diferenciranju jednakosti (3.2.7) po vremenu, na čemu se ovde nećemo zadržavati. U slučaju da matrica (3.2.10) nije nula matrica, ali da je singularna, Kelijevi uslovi su neprimenjivi.

3.3. Upravljanje generalisanom silom

U praktičnim problemima optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkog sistema čest slučaj je da se upravljanje javlja kao generalisana sila. Osim toga zahtevi optimalnosti imaju takav karakter, da je redak slučaj da podintegralna funkcija f^0 funkcionala (2.2.1) linearno zavisi od upravljanja. Imajući to u vidu, ograničićemo se na razmatranje optimalnog upravljanja kada su funkcije upravljanja koordinate generalisane sile i kada funkcija f^0 ne zavisi od upravljanja. U tom slučaju, diferencijalne jednačine upravljanog kretanja holonomnog skleronomnog sistema u faznom prostoru V_{2n+1} imaju oblik:

$$\begin{aligned} &\dot{q}^0 = f^0 \\ (3.3.1)\qquad &\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \\ &\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N + u_\alpha \end{aligned}$$

gde Q^N i f^0 zavise samo od faznih promenljivih q^α, p_α.

Pontrjaginova funkcija takvog sistema je:

$$(3.3.2)\qquad \mathcal{H} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N + u_\alpha\right).$$

Postavimo uslov da dozvoljena upravljanja pripadaju otvorenom skupu. Usled toga i činjenice da Pontrjaginova funkcija linearno zavisi od upravljanja, problem pripada singularnim upravljanjima, pa ćemo ga tako i razmatrati.

Potrebni uslovi optimalnosti (3.1.1) odnosno (3.2.2), s obzirom na (3.3.2), imaju oblik:

$$\nu^{\alpha} = 0. \tag{3.3.3}$$

Primenivši postupak iz prethodnog odeljka, odnosno diferencirajući ove jednačine po vremenu, s obzirom na spregnute jednačine (2.2.32) i oblik Pontrjaginove funkcije(3.3.2), dobijamo:

$$-\lambda_0 \frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - \lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = 0. \tag{3.3.4}$$

Ove jednačine predstavljaju uslove (3.2.5) i pošto u njima ne figurišu upravljanja, identično su ispunjeni uslovi (3.2.6). Iz jednačina (3.3.4) je:

$$\lambda_\alpha = -\lambda_0 a_{\alpha\beta} \frac{\partial f^0}{\partial p_\beta}. \tag{3.3.5}$$

Obratimo, ovde, pažnju na jednu važnu činjenicu! Tačka c) teoreme 1. obavezuje da se razmatraju dve vrednosti λ_0. Jedna od njih je $\lambda_0=0$, a druga proizvoljan negativni broj (uobičajeno je $\lambda_0=-1$). Pretpostavimo da je $\lambda_0=0$. Zamenom takve vrednosti u (3.3.5) dobijamo $\lambda_\alpha=0$, a kako je iz (3.3.3) i $\nu^\alpha=0$ sledi da je 2n+1-dimenzioni vektor λ_0, λ_α, ν^α nula vektor. Međutim to je u suprotnosti sa osnovnom tvrdnjom teoreme 1. pa pretpostavka $\lambda_0=0$ otpada u problemima ove vrste. Prema tome, kad su funkcije upravljanja koordinate generalisane sile, uslov c) teoreme 1. možemo napisati u obliku:

$$\lambda_0 = -1. \tag{3.3.6}$$

Postavimo uslove (3.2.7), odnosno diferencirajmo po vremenu jednačine (3.3.4). Uzimajući u obzir diferencijalne jednačine kretanja (3.3.1), oblik Pontrjaginove funkcije (3.3.2), odgovarajuće spregnute jednačine i jednačine (3.3.3), (3.3.5) i (3.3.6), dobijamo:

$$(3.3.7)\qquad \frac{\partial^2 f^0}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\beta}+Q^N_\beta+u_\beta\right)+\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial f^0}{\partial q^\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta}\right)+$$

$$+\frac{\partial f^0}{\partial p_\beta}\left(\Gamma_{\gamma\beta,\delta}-\Gamma_{\beta\delta,\gamma}\right)a^{\alpha\delta}\frac{\partial H}{\partial p_\gamma}=0\ ,\qquad \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial q^\beta}-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right)$$

Ove jednačine odgovaraju jednačinama (3.2.9), a koeficijenti (3.2.10) ovde imaju oblik:

$$(3.3.8)\qquad \frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\ .$$

Ukoliko su ovi koeficijenti takvi, da ispunjavaju Kelijeve uslove (3.2.11), onda iz (3.3.7) možemo da odredimo optimalna upravljanja:

$$(3.3.9)\qquad u^*_\alpha=\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q^N_\alpha+\mathcal{F}_\alpha(p,q)$$

gde smo radi jednostavnosti sa $\mathcal{F}_\alpha$ označili ostatak koji može da se odredi iz (3.3.7)

Obratimo pažnju na koeficijente (3.3.8). Ukoliko funkcija f^0 zavisi linearno ili uopšte ne zavisi od impulsa p_α, onda su koeficijenti (3.3.8) identički jednaki nuli pa u jednačinama (3.3.7) ne figurišu upravljanja. U tom slučaju, ako f^0 linearno zavisi od p_α, postupak se sastoji u diferenciranju po vremenu jednačina (3.3.7) sve dotle dok se ne pojave upravljanja. Ako f^0 zavisi samo od koordinata q^α, onda je, s obzirom na (3.3.5), $\lambda_\alpha=0$ pa optimalna upravljanja nema smisla tražiti na otvorenom skupu. Naime, ukoliko oblast dozvoljenih upravljanja nije ograničena, optimalna upravljanja će uzimati beskonačne vrednosti. Karakterističan primer je kad se postavlja uslov minimalnosti vremena. Tada je $f^0=1$.

3.4. Kretanje mehaničkog sistema po najkraćem luku na putanji u konfiguracionom prostoru

Kretanje po najkraćem luku između položaja M_0 i M_1 u konfiguracionom prostoru uslovljeno je minimalnošću integrala:

$$J = \int_{\widehat{M_0 M_1}} ds \tag{3.4.1}$$

gde je ds element luka u konfiguracionom prostoru.

Posmatrajmo kretanje holonomnog skleronomnog sistema na koji, pored potencijalnih i nepotencijalnih sila deluju i sile upravljanja. Tada diferencijalne jednačine kretanja takvog sistema imaju oblik:

$$\begin{aligned} \dot{q}^{\alpha} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}^{N} + u_{\alpha}, \qquad (\alpha = 1,2,\dots,n) . \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Neka dozvoljena upravljanja pripadaju otvorenom skupu i neka je početno stanje sistema na mnogostrukosti:

$$\varphi_j^{0}(q,p) = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,m \leqslant 2n), \tag{3.4.3}$$

a krajnje stanje na mnogostrukosti:

$$\varphi_k^{1}(q,p)_{t_0} = 0 \qquad (k = 1,2,\dots,s \leqslant 2n). \tag{3.4.4}$$

Kako je u konfiguracionom prostoru:

$$ds = \sqrt{2T}\, dt$$

integral (3.4.1) dobija oblik:

(3.4.5) $$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2T}\, dt$$

gde vreme $t_1 - t_0$ nije određeno.

Odredimo takva upravljanja u_α^* čijim dejstvom će sistem, opisan jednačinama (3.4.2), preći iz stanja (3.4.3) u stanje (3.4.4) uz minimalnu vrednost integrala (3.4.5).

Ovakvom postavkom problem smo doveli na oblik razmatran u prethodnom odeljku, pri čemu je:

$$f^0 = \sqrt{2T}.$$

Pored toga pokazali smo, da je za ovu vrstu problema:

$$\lambda_0 = 0$$

pa Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(3.4.6) $$\mathcal{H} = \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha \left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N + u_\alpha\right) - 1$$

gde su λ_α, ν^α rešenja jednačina:

(3.4.7)
$$\dot\lambda_\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\beta^N}{\partial q^\alpha}\right) + \frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$
$$\dot\nu^\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} + \frac{\partial Q_\beta^N}{\partial p_\alpha}\right) + \frac{1}{\sqrt{2T}}\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}.$$

Primenjujući postupak iz prethodnog odeljka, dobijamo potrebne uslove optimalnosti u obliku:

(3.4.8) $$\nu^\alpha = 0.$$

Diferenciranjem po vremenu ovih jednačina dobijamo, s obzirom na (3.4.7),

(3.4.9) $$-\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} + \frac{1}{\sqrt{2T}} \frac{\partial T}{\partial p_\alpha} = 0$$

odakle je:

(3.4.10) $$\lambda_\alpha = \frac{p_\alpha}{\sqrt{2T}} .$$

Daljim diferenciranjem po vremenu, u smislu jednačina kretanja i spregnutih jednačina i uzimajući u obzir (3.4.8) i (3.4.10), dobijamo:

(3.4.11) $$\frac{\partial^2 T}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta} + Q^N_\beta + u_\beta\right) - \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial p_\beta} \frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta} + Q^N_\beta + u_\beta\right) = 0$$

što neposredno sledi i iz sistema jednačina (3.3.7).

Jednačine (3.4.11) svode se na oblik:

(3.4.12) $$\left(\delta^\beta_\alpha - \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial p_\beta} p_\alpha\right)\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^\beta} + Q^N_\beta + u_\beta\right) = 0, \qquad \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

Ove jednačine imaju trivijalna rešenja:

(3.4.13) $$-u_\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha} + Q^N_\alpha$$

čijom zamenom u jednačine (3.4.2) dobijamo:

(3.4.14) $$\dot q^\alpha = \frac{\partial T}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot p_\alpha = -\frac{\partial T}{\partial q^\alpha}$$

što odgovara diferencijalnim jednačinama kretanja sistema po inerciji u konfiguracionom prostoru R_n.

Kretanje po inerciji u konfiguracionom prostoru odvija se po geodezijskoj liniji, a time i po najkraćem luku između dva položaja. U tom slučaju, rešenje (3.4.13) imalo bi smisla kao optimalno, ukoliko početni i krajnji uslovi (3.4.3) i (3.4.4) nisu u protivrečnosti sa uslovima da početna i krajnja brzina imaju, u početnoj i krajnjoj tački na putanji, pravce tangenti na geodezijsku liniju koja sadrži te tačke.

Razmotrimo, da li, osim (3.4.13), jednačine (3.4.12) imaju i neka druga rešenja. U tom cilju, ispitajmo rang matrice:

$$(3.4.15) \qquad \left\{\delta_\alpha^\beta - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_\beta} p_\alpha\right\}$$

čiji su elementi koeficijenti uz u iz jednačina (3.4.12).

Determinanta matrice (3.4.15) u razvijenom obliku je:

$$(3.4.16) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_1}p_1 & -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_1}p_2 & \cdots & -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_1}p_n \\ -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_2}p_1 & 1-\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_2}p_2 & \cdots & -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_2}p_n \\ \vdots & & & \\ -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_n}p_1 & \cdots & & 1-\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_n}p_n \end{vmatrix}$$

Množenjem svake vrste odgovarajućim impulsom (npr. j-tu vrstu sa p_j) i njihovim sabiranjem dobijamo vrstu sa elementima vrednosti nula, na osnovu čega zaključujemo da je:

$$(3.4.17) \qquad rang\left\{\delta_\alpha^\beta - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_\beta} p_\alpha\right\} < n$$

pa, pored trivijalnih rešenja (3.4.13), jednačine (3.4.12) imaju i netrivijalna rešenja:

$$(3.4.18) \qquad u_\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha_\chi} - Q^N_\alpha + v_\alpha$$

gde broj nezavisnih veličina v_α zavisi od ranga matrice (3.4.15). Ne upuštajući se u određivanje ranga matrice (3.4.15) odredimo v_α neposredno iz jednačina (3.4.12) koje, s obzirom na (3.4.18), sada imaju oblik:

$$(3.4.19) \qquad \left(\delta^\beta_\alpha - \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial p_\beta} p_\alpha\right) v_\beta = 0.$$

i j-te jednačine impulsom p_i

Množenjem proizvoljne i-te jednačine proizvoljnim impulsom p_j $(i \neq j)$ i njihovim sabiranjem dobijamo:

$$\delta^\beta_i v_\beta p_j - \delta^\beta_j v_\beta p_i = 0$$

odakle, s obzirom na proizvoljnost brojeva i i j, možemo zaključiti:

$$(3.4.20) \qquad v_\alpha p_\beta - v_\beta p_\alpha = 0$$

što predstavlja uslove kolinearnosti vektora v_α i p_α. Prema tome imamo:

$$(3.4.21) \qquad u_\alpha = \frac{\partial \Pi}{\partial q^\alpha_\chi} - Q^N_\alpha + \beta p_\alpha$$

gde je β proizvoljna skalarna funkcija koja može biti prekidna i neograničena. Njen oblik može biti određen nekim dopunskim uslovima.

Pokažimo da (3.4.21) predstavlja optimalno rešenje, odnosno da se pod njegovim dejstvom sistem kreće po geodezijskoj liniji.

Neka su jednačine geodezijske linije u konfiguracionom prostoru:

$$(3.4.22)\qquad G^{\nu}(q^{1}, q^{2}, \ldots, q^{n}) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Uslovi da se mehanički sistem kreće po njoj po inerciji imaju, s obzirom na (3.4.14), oblik:

$$(3.4.23)\qquad \frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}} = 0$$

$$(3.4.24)\qquad \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\left(\frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial T}{\partial p_{\beta}}\right)\frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial^{2} T}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} = 0 .$$

Zamenom rešenja (3.4.21) u diferencijalne jednačine kretanja dobijamo:

$$(3.4.25)\qquad \begin{aligned} \dot{q}^{\alpha} &= \frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}} \\ \dot{p}_{\alpha} &= -\frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} + \beta p_{\alpha} . \end{aligned}$$

Uslovi kretanja ovog sistema po krivoj (3.4.22) su:

$$(3.4.26)\qquad \frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}} = 0$$

$$(3.4.27)\qquad \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\left(\frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial T}{\partial p_{\beta}}\right)\frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial^{2} T}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial G^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \frac{\partial^{2} T}{\partial p_{\alpha} \partial p_{\beta}} \beta p_{\alpha} = 0 .$$

Imajući u vidu autonomnost jednačina (3.4.2) početni trenutak t_o intervala $t_1 - t_o$ možemo birati proizvoljno. Odredivanje krajnjeg trenutka t_1 uslovljeno je izborom funkcije u jednačinama kretanja. Pri tome koristimo uslov:

$$(\mathcal{H}^*)_{t_1} = 0 \tag{3.4.31}$$

koji sledi iz tačke b) teoreme 1.

Primer 3. Odrediti upravljanja pod čijim će dejstvom da se tačka, mase m=1, kreće po najkraćem putu na sferi r=1, iz položaja (φ_o, ψ_o) u položaj (φ_1, ψ_1).

Neka se tačka kreće u polju potencijala $\Pi = \Pi(\varphi, \psi)$. Uzimajući za generalisane koordinate (sl.5):

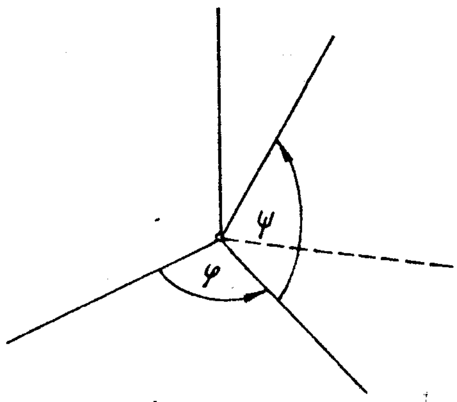
$$q^1 = \varphi \;, \quad q^2 = \psi \tag{P.3.1}$$

dobijamo Hamiltonovu funkciju:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2}[(\dot{q}^1)^2 \cos^2 q^2 + (\dot{q}^2)^2] + \Pi(q^1, q^2) \tag{P.3.2}$$

Uvodenjem generalisanih impulsa:

$$p_1 = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^1} = \dot{q}^1 \cos^2 q^2 \qquad p_2 = \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^2} = \dot{q}^2 \tag{P.3.3}$$



sl.5

imamo:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 q^2} p_1^2 + p_2^2\right) + \Pi(q_1, q_2) \tag{P.3.4}$$

tako da su diferencijalne jednačine upravljanog kretanja:

$$\dot{q}^1 = \frac{1}{\cos^2 q^2} p_1 \quad , \quad \dot{q}^2 = p_2 \, ,$$

(P.3.5)

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^1} + u_1 \quad , \quad \dot{p}_2 = -\frac{\sin q^2}{\cos^3 q^2} p_1^2 - \frac{\partial \Pi}{\partial q^2} + u_2 \, .$$

Treba minimizirati integral:

(P.3.6) $$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2T}\, dt$$

gde interval $[t_0, t_1]$ nije odredjen.

Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(P.3.7) $$\mathcal{H} = \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial p_1} + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \nu^1 \left(-\frac{\partial H}{\partial q^1} + u_1\right) - \nu^2 \left(-\frac{\partial H}{\partial q^2} + u_2\right) - \sqrt{2T}$$

tako da su spregnute jednačine:

(P.3.8) $$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^1} \, , \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^2} \, , \quad \dot{\nu}^1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} \, , \quad \dot{\nu}^2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} \, .$$

Iz potrebnih uslova optimalnosti dobijamo:

(P.3.9) $$\nu^1 = 0 \quad , \quad \nu^2 = 0 \, .$$

Zamenjujući ove vrednosti u jednačine (P.3.8) i uzimajući u obzir oblik funkcije (P.3.7) imamo:

(P.3.10) $$\lambda_1 = \frac{p_1}{\sqrt{2T}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{p_2}{\sqrt{2T}} \, .$$

Daljim diferenciranjem po vremenu u smislu jednačina (P.3.5) i (P.3.8) dobijamo jednačine:

$$\left(p_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} - 2T\right)\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^1} + u_1\right) + p_1 \frac{\partial T}{\partial p_2}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^2} + u_2\right) = 0$$

$$p_2 \frac{\partial T}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^1} + u_1\right) + \left(p_2 \frac{\partial T}{\partial p_2} - 2T\right)\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^2} + u_2\right) = 0$$

koje se svode na dve identične jednačine oblika:

$$p_2\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^1}+u_1\right)-p_1\left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^2}+u_2\right)=0$$

odakle je:

$$u_1=\frac{\partial \Pi}{\partial q^1}+\beta p_1 \quad , \quad u_2=\frac{\partial \Pi}{\partial q^2}+\beta p_2 \tag{P.3.11}$$

što odgovara rezultatu (3.4.21). Zamenom (P.3.11) u jednačine kretanja (P.3.5) imamo:

$$\begin{aligned} \dot q^1 &= \frac{p_1}{\cos^2 q^2} \quad , & \dot q^2 &= p_2 \\ \dot p_1 &= \beta p_1 \quad , & \dot p_2 &= -\frac{\sin q^2}{\cos^3 q^2}\,p_1^2+\beta p_2 . \end{aligned} \tag{P.3.12}$$

Uvodeći smenu $p_2=zp_1$ iz poslednje jednačine imamo integral:

$$Z=\pm\sqrt{C_1^2-\frac{1}{\cos^2 q^2}} \tag{P.3.13}$$

odakle, vraćanjem na prvobitne promenljive φ i ψ imamo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d\psi}{d\varphi}=\pm\cos\psi\sqrt{C_1^2\cos^2\psi-1}$$

čiji je integral:

$$\psi=\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C_1^2-1}\,\sin\,(C_2+\varphi)\right] \tag{P.3.14}$$

koji predstavlja jednačinu trajektorije upravljane tačke na sferi r=1. Postavljajući koordinatni sistem tako da početni i krajnji položaji budu u ravni ugla φ , tj: $\varphi(t_0)=0$, $\psi(t_0)=0$, $\varphi(t_1)=\varphi_1$, $\psi(t_1)=0$, dobijamo $C_1=1$ odnosno $\psi=0$; $\forall\, t\in[t_0,t_1]$. To pokazuje da se tačka pod dejstvom upravljanja (P.3.11) kreće po luku velikog kruga na sferi između početnog položaja $M_0(0,0)$ i krajnjeg položaja $M_1(\varphi_1,0)$.

3.5. Jedno uopštenje o singularnim upravljanjima

U prethodnim odeljcima razmatrali smo upravljanja koja pripadaju otvorenom skupu i konstatovali da su singularna, u koliko u Pontrjaginovoj funkciji figurišu linearno. Posebnu pažnju posvetili smo upravljanjima koja imaju prirodu generalisane sile. Time se ne isključuje mogućnost da su upravljanja singularna i u slučaju kad ona nelinearno figurišu u Pontrjaginovoj funkciji. Naime, neka vektor upravljanja ima n dimenzija i pripada otvorenom skupu. Neka koordinate vektora upravljanja ne figurišu u podintegralnoj funkciji f^o a u generalisanoj sili neka, u opštem slučaju, figurišu nelinearno. Tada potrebni uslovi optimalnosti (3.1.1) imaju oblik:

$$(3.5.1) \qquad \nu^{\alpha} \frac{\partial Q_{\beta}^{\mu}}{\partial u_{\alpha}} = 0 .$$

Iz ovih jednačina, na prvi pogled, mogu da se odrede ekstremalna upravljanja. Međutim, kako su one linearne i homogene po veličinama ν^{α}, uzimajući da je:

$$(3.5.2) \qquad rang\left\{ \frac{\partial Q_{\beta}^{\mu}}{\partial u_{\alpha}} \right\} = n \qquad \forall u_{\alpha} \in G_u$$

imaćemo:

$$(3.5.3) \qquad \nu^{\alpha} = 0 .$$

Na taj način, uslovi (3.5.1) svode se na oblik (3.5.3) identičan uslovima za slučaj kad upravljanja imaju prirodu generalisane sile (odeljak 3.3). U tom smislu problem možemo „linearizovati" uvođenjem n-dimenzionog vektora:

$$(3.5.4) \qquad V_{\alpha} = V_{\alpha}(q, p, u)$$

takvog da je:

(3.5.5) $$rang\left\{\frac{\partial v_\beta}{\partial u_\alpha}\right\} = n$$

i

(3.5.6) $$Q_\alpha^N = F_\alpha(q,p) + V_\alpha \cdot$$

Time je problem sveden na slučaj razmatran u odeljku 3.3, pri čemu vektor v_α ima prirodu upravljačke sile. Daljim postupkom, opisanim u odeljku 3.3, dobijamo:

(3.5.7) $$V_\alpha^* = V_\alpha^*(q,p).$$

Zamenjujući (3.5.7) u (3.5.4) možemo, s obzirom na uslov (3.5.5), izračunati ekstremalna upravljanja u obliku:

(3.5.8) $$u_\alpha^* = u_\alpha^*(q,p).$$

Prema tome, možemo zaključiti da n-dimenzioni vektor upravljanja u_i, koji pripada otvorenom skupu i čije koordinate ne figurišu u funkciji f^o, pripada klasi singularnih upravljanja ako je ispunjen uslov (3.5.2).

Međutim, pored uslova (3.5.2), treba razmatrati i uslov:

(3.5.9) $$\left|\frac{\partial Q_\beta^N}{\partial u_\alpha}\right| = 0$$

odakle bi dobili da sva upravljanja nisu među sobom nezavisna pa vektor upravljanja može da se redukuje na vektor sa manjim brojem dimenzija koji je određen rangom (3.5.2).

Ukoliko je uslov (3.5.9) identično ispunjen za svako $u_i \in G_u$, onda otpadaju prethodna razmatranja o singularnosti upravljanja.

4. OGRANIČENA UPRAVLJANJA

4.1. Promenljiva oblast dozvoljenih upravljanja

Oblast G_u dozvoljenih upravljanja ograničena je realnim fizičkim mogućnostima upravljačkog sistema ili nekim nametnutim zahtevima i uslovima. U dosadašnjem izlaganju, prećutno smo podrazumevali da je G_u neki konstantan skup i uz takve pretpostavke formulisali teoremu 1.

Razmotrimo, u kojoj meri možemo primeniti prethodne rezultate, ako oblast dozvoljenih upravljanja zavisi i od faznog stanja sistema, odnosno ako je G_u zadato na prostoru $U_r x V_{2n}$. Tada će u_i biti vektor dozvoljenog upravljanja ako je:

$$(4.1.1) \qquad u_i \in G_u(q,p) \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \,.$$

Neka je skup G_u određen relacijama:

$$(4.1.2) \qquad g_j(q,p,u) \leqslant 0 \qquad j = 1,2,\ldots,s \leqslant r$$

pri čemu ćemo pretpostaviti da su funkcije g_j i njihovi prvi izvodi neprekidni i definisani po svim promenljivim u_i, q, p.

Pretpostavimo da je, u opštem slučaju, optimalno upravljanje u_i^* i odgovarajuće fazno stanje takvo, da se relacije (4.1.2) javljaju u obliku jednakosti:

$$(4.1.3) \qquad g_k(q^*, p^*, u^*) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,p \leqslant r$$

i nejednakosti:

$$(4.1.4) \qquad g_s(q^*, p^*, u^*) < 0 \qquad s = p+1, p+2, \ldots, m \,.$$

Pretpostavljajući da matrica:

(4.1.5) $$\frac{\partial g_k}{\partial u_i}$$

ima maksimalni rang za $u_i^*, q^{\alpha *}, p_\alpha^*$, jednačine (4.1.3) mogu biti jednoznačno rešene po p upravljanja u_k^* $(k=1,2,\ldots,p)$ koja će biti funkcije faznih promenljivih q^α, p_α i ostalih r-p upravljanja u_h $(h=p+1,p+2,\ldots,r)$. Odnosno postoje takve funkcije:

(4.1.6) $$u_k = u_k(q^\alpha, p_\alpha, u_h)$$

da je u okolini tačke $q^{\alpha *}, p_\alpha^*, u_i^*$ prostora $U_r \times V_{2n}$:

(4.1.7) $$g_l[q^\alpha, p_\alpha, u_h, u_k(q^\alpha, p_\alpha, u_h)] = 0 \qquad l=1,2,\ldots,p.$$

U odeljku (2.2) razmatrali smo graničnu hiperpovrš W^* na kojoj leže optimalne trajektorije koje odgovaraju istim optimalnim upravljanjima u_i^* a različitim početnim uslovima. Varijacije δq^0, δq^α, δp_α u proizvoljnoj tački nastale su kao posledica varijacije početnog stanja $(\delta q^0, \delta q^\alpha, \delta p_\alpha)_t$, pri čemu je $\delta u_i = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$. Međutim, u slučaju kad dozvoljena upravljanja pripadaju oblasti G_u koja je određena relacijama (4.1.3) i (4.1.4) usled čega imamo (4.1.6), deo funkcija upravljanja menja se variranjem faznog stanja sistema na graničnoj hiperpovrši W^* tako da je:

(4.1.8) $$\delta u_k = \frac{\partial u_k}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial u_k}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

(4.1.9) $$\delta u_h = 0 \qquad (h=p+1,p+2,\ldots,r).$$

Prema tome, za $u_h = u_h^*$ na variranoj trajektoriji je, s obzirom na (4.1.3),

$$\delta g_k = \frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial g_k}{\partial u_l}\delta u_l = 0 \qquad (k,l = 1,2,\dots,p) \tag{4.1.10}$$

odakle je:

$$\delta u_l = -B_l^k\left(\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha + \frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha\right) \tag{4.1.11}$$

gde je:

$$\{B_l^k\} = \left\{\frac{\partial g_k}{\partial u_l}\right\}^{-1} .$$

U ovom slučaju varijacione jednačine imaju oblik:

$$\frac{d}{dt}(\delta q^0) = \left(\frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha} - B_l^k\frac{\partial f^0}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\right)\delta q^\alpha + \left(\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - B_l^k\frac{\partial f^0}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha) &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q^\beta}\delta q^\beta + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\delta p_\beta \\ \frac{d}{dt}(\delta p_\alpha) &= \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial q^\beta} - B_l^k\frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q^\beta}\right)\delta q^\beta + \\ &+ \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} + \frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial p_\beta} - B_l^k\frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_\beta}\right)\delta p_\beta \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

a odgovarajuće spregnute jednačine:

$$\begin{aligned} \dot\lambda_0 &= 0 \\ \dot\lambda_\alpha &= -\lambda_0\left(\frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha} - B_l^k\frac{\partial f^0}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\right) - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial p_\beta \partial q^\alpha} - \\ &\quad - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\beta^H}{\partial q^\alpha} - B_l^k\frac{\partial Q_\beta^H}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\right) \\ \dot\nu^\alpha &= -\lambda_0\left(\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - B_l^k\frac{\partial f^0}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\right) - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} - \\ &\quad - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\beta^H}{\partial p_\alpha} - B_l^k\frac{\partial Q_\beta^H}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\right) . \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Uvodeći oznaku:

$$\mu^k = B_l^k\left(\frac{\partial f^0}{\partial u_l}\lambda_0 + \frac{\partial Q_\alpha^N}{\partial u_l}\nu^\alpha\right) \tag{4.1.14}$$

spregnute jednačine (4.1.13) dobijaju oblik:

$$\begin{aligned}
&\dot\lambda_0 = 0\\
&\dot\lambda_\alpha = -\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha} - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha\partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha\partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\beta^N}{\partial q^\alpha}\right) + \mu^k\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}\\
&\dot\nu^\alpha = -\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial q^\beta} + \frac{\partial Q_\beta^N}{\partial p_\alpha}\right) + \mu^k\frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}\,.
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Ako Pontrjaginovu funkciju izaberemo u obliku:

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha\right) - \mu^k g_k \tag{4.1.16}$$

jednačine (4.1.15) i jednačine kretanja (2.2.4) u faznom prostoru V_{2n+1} imaju kanonski oblik. Pored toga Pontrjaginova funkcija (4.1.16) zadržava sve osobine uslovljene teoremom 1.

Napomenimo da, ukoliko veze (4.1.3) ne zavise od faznih koordinata, jednačine (4.1.15) svode se na (2.2.32).

Ako oblast dozvoljenih upravljanja zavisi i od vremena problem rešavamo geometrizacijom opisanom u odeljku (2.6). Pri tome, može da se u potpunosti primeni postupak dat u ovom odeljku.

Na kraju treba naglasiti da navedena razmatranja važe samo ukoliko su varijacije upravljanja δu_k takve da upravljanja $u_k^* + \delta u_k$ predstavljaju dozvoljena upravljanja. Drugim rečima da su, pored jednakosti (4.1.3), zadovoljene i nejednakosti (4.1.4). Kao što je pokazano varijacije upravljanja δu_k nastale su variranjem faznog stanja na graničnoj hiperpovrši W. Vrednosti tih varijacija date su izrazima (4.1.11). Prema tome proverimo relacije (4.1.4) u tački $(q^\alpha + \delta q^\alpha, p_\alpha + \delta p_\alpha, u_k + \delta u_k, u_h)$ prostora $U_r \times V_{2n}$. Zamenom tih vrednosti u leve strane nejednakosti (4.1.4) i njihovim razvijanjem u red, uzimajući u obzir (4.1.11), dobijamo:

(4.1.17) $$g_s(q^{\alpha *}+\delta q^{\alpha}, p_{\alpha}^{*}+\delta p_{\alpha}, u_k^{*}+\delta u_k, u_h^{*}) = g_s(q^{\alpha *}, p_{\alpha}^{*}, u_k^{*}, u_h) + \\ +\left(\frac{\partial g_s}{\partial q^{\alpha}} - B_l^k \frac{\partial g_s}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial q^{\alpha}}\right)\delta q^{\alpha} + \left(\frac{\partial g_s}{\partial p_{\alpha}} - B_l^k \frac{\partial g_s}{\partial u_l}\frac{\partial g_k}{\partial p_{\alpha}}\right)\delta p_{\alpha}$$

$$(k,l=1,2,\dots,p), \quad (s=p+1,p+2,\dots,m).$$

Kako je na optimalnoj trajektoriji ispunjeno (4.1.4), biranjem dovoljno malih δq^{α}, δp_{α} biće ispunjeno i:

(4.1.18) $$g_s(q^{\alpha *}+\delta q^{\alpha}, p_{\alpha}^{*}+\delta p_{\alpha}, u_k^{*}+\delta u_k, u_h) < 0$$

na osnovu čega zaključujemo da i upravljanja $u_k^{*}+\delta u_k$ pripadaju dozvoljenim upravljanjima.

4.2. Upravljanje silom ograničenog intenziteta

Razmotrimo problem određivanja optimalne sile u_{α}^{*}, uslovljavajući da je ona ograničenog intenziteta, tj. da je oblast G_u dozvoljenih upravljanja određena nejednakošću:

(4.2.1) $$g(q,p,u) = a^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta} - F^2 \leqslant 0$$

gde je, u opštem slučaju, F neka data funkcija faznih promenljivih q^{α}, p_{α}. Osim toga neka su F i njeni prvi izvodi po svim promenljivim neprekidne i definisane funkcije.

Neka je uslov optimalnosti minimalnost integrala:

(4.2.2) $$J = \int_{t_0}^{t_1} f^{0}(q,p,u)\,dt$$

i neka su diferencijalne jednačine kretanja sistema:

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}$$
(4.2.3)
$$\dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}^{H} + u_{\alpha}\,.$$

Uzimajući u obzir, ranije date, pretpostavke o funkciji f^o i diferencijalnim jednačinama (4.2.3), primenimo princip maksimuma za rešavanje problema. Pri tome treba ravnopravno razmatrati mogućnosti da se optimalno upravljanje nalazi bilo unutar oblasti G_u bilo na njenoj granici. Drugim rečima interval $[t_o, t_1]$ treba da sadrži konačan broj podintervala od kojih jedan deo predstavlja vreme u kome je optimalno upravljanje unutar oblasti G_u, a drugi deo vreme u kome je optimalno upravljanje na granici oblasti G_u.

Pretpostavimo da je u nekom podintervalu $[\tau, \tau']$ upravljanje na otvorenom jezgru oblasti G_u, tj. neka je, s obzirom na (4.2.1),

(4.2.4) $$a^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} - F^2 < 0 \qquad \forall t \in [\tau, \tau'].$$

U tom slučaju, imajući u vidu da je $\lambda_o = -1$ (odeljak 3.3), Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(4.2.5) $$\mathcal{H} = \lambda_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} + \nu^{\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}^{H} + u_{\alpha}\right) - f^{o}.$$

Uslovi optimalnosti su:

(4.2.6) $$\nu^{\alpha} - \frac{\partial f^{o}}{\partial u_{\alpha}} = 0\,, \qquad \left(-\frac{\partial^2 f^{o}}{\partial u_{\alpha}\partial u_{\beta}}\right)_{u^*} u^{\alpha} u^{\beta} \leqslant 0$$

a odgovarajuće spregnute jednačine:

$$\dot{\lambda}_\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial q^\alpha}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha}$$

(4.2.7)

$$\dot{\nu}^\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial p_\alpha}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}$$

Neka u podintervalu $[\tau', \tau'']$ optimalno upravljanje ima vrednosti na granici oblasti G_u, tj. neka je:

(4.2.8) $$a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - F^2 = 0 \qquad \forall t \in [\tau', \tau''] .$$

Pontrjaginova funkcija tada ima oblik:

(4.2.9) $$\mathcal{H} = \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^N_\alpha + u_\alpha\right) - f^0 - \mu\left(a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - F^2\right)$$

Uslovi optimalnosti su:

(4.2.10) $$\nu^\alpha - \frac{\partial f^0}{\partial u_\alpha} - 2\mu a^{\alpha\beta} u_\beta = 0 \quad ; \quad \left(-\frac{\partial^2 f^0}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} - 2\mu a^{\alpha\beta}\right)_{u^*} u^\alpha u^\beta \leqslant 0$$

a odgovarajuće spregnute jednačine:

$$\dot{\lambda}_\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial q^\alpha}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha} + \mu \frac{\partial a^{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} u_\beta u_\gamma - \frac{\partial (F^2)}{\partial q^\alpha}$$

(4.2.11)

$$\dot{\nu}^\alpha = -\lambda_\beta \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\beta \partial p_\alpha} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial p_\alpha}\right) + \frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - \mu \frac{\partial (F^2)}{\partial p_\alpha}$$

Prema tome, za rešavanje problema u konačnom obliku, treba razmatrati na jednoj strani jednačine (4.2.3), (4.2.7) i uslove (4.2.6), a na drugoj strani jednačine (4.2.3), (4.2.11) i uslove (4.2.10). Pri tome, pored konstanti integralenja, treba odrediti i trenutke τ u kojima optimalna upravljanja uzimaju vrednosti na granici oblasti G_u ili silaze sa nje. U tom slučaju, osim početnih i krajnjih uslova i uslova transverzalnosti, treba koristiti i uslove neprekidnosti fazne trajektorije u trenucima τ, τ', τ'' kao i uslov b) teoreme 1.

Obratimo pažnju na posebne slučajeve:

1. Neka podintegralna funkcija f^0 ne zavisi od upravljanja. Pri postavljanju uslova optimalnosti na otvorenom jezgru oblasti G_u tj. u slučaju (4.2.4), dobijamo:

(4.2.12) $\qquad \nu^\alpha = 0$

na osnovu čega zaključujemo da optimalna upravljanja treba tražiti među singularnim. Ovaj slučaj razmatran je u odeljku (3.3) gde smo dobili optimalna upravljanja u obliku (3.3.9) uz određene Kelijeve uslove.

Uslovi optimalnosti na granici oblasti G_u imaju, s obzirom na (4.2.10), oblik:

(4.2.13) $\qquad \nu^\alpha - 2\mu a^{\alpha\beta} u_\beta = 0$

(4.2.14) $\qquad -2\mu a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \leqslant 0$

odakle je:

(4.2.15) $\qquad u_\alpha = \frac{1}{2\mu} a_{\alpha\beta} \nu^\beta$

Iz (4.2.14) je:

(4.2.16) $\qquad \mu > 0$

pa, postavljajući uslov da su upravljanja (4.2.15) na granici oblasti G_u, odnosno da ispunjavaju (4.2.8), dobijamo:

(4.2.17) $$\mu = \frac{\|\nu\|}{2F}$$

tako da konačno imamo:

(4.2.18) $$u_\alpha^* = \frac{F}{\|\nu\|} a_{\alpha\beta} \nu^\beta$$

gde je:

$$\|\nu\| = (a_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta)^{\frac{1}{2}} .$$

2. Neka podintegralna funkcija f^o ne zavisi od upravljanja i impulsa p . Uslovi ekstremalnosti na otvorenom jezgru oblasti G_u i u ovom slučaju imaju oblik (4.2.12), pa iz spregnutih jednačina (4.2.7) dobijamo:

(4.2.19) $$\lambda_\alpha = 0$$

Zamenom (4.2.12) i (4.2.19) u (4.2.5) imamo:

(4.2.20) $$\mathcal{H} = -f^o$$

što je u protivrečnosti sa uslovom b) teoreme 1., tako da možemo zaključiti da u ovom slučaju optimalna upravljanja nema smisla tražiti unutar oblasti G_u već na njenoj granici. To znači da će u celom intervalu $[t_o, t_1]$ upravljanje imati oblik (4.2.18).

Ovde treba posebno obratiti pažnju na slučaj kad je $f^o=1$, odnosno kad se kao uslov optimalnosti postavlja uslov minimalnosti intervala t_1-t_o. Na osnovu gornjeg razmatranja optimalna sila upravljanja javlja se samo na granici dozvoljenih upravljanja.

<u>Primer 4</u>. Telo koje se slobodno obrće ima ugaonu brzinu $\vec{\omega}_o$. Odrediti moment upravljanja čijim dejstvom će telo, za najkraće vreme t_1-t_o, doći u stanje obrtanja ugaonom brzinom $\vec{\omega}(t_1)=\vec{\omega}_1$. Pri tome nećemo uslovljavati određivanje položaja tela, usled čega ćemo se ograničiti na razmatranje jednačina:

$$
\begin{aligned}
J_x \dot{\omega}_x &= (J_y - J_z)\,\omega_y \omega_z + u_1 \\
J_y \dot{\omega}_y &= (J_z - J_x)\,\omega_z \omega_x + u_2 \\
J_z \dot{\omega}_z &= (J_x - J_y)\,\omega_x \omega_y + u_3
\end{aligned}
\tag{P.4.1}
$$

gde su u_i $(i=1,2,3,)$ koordinate vektora momenta upravljanja u odnosu na glavne centralne ose inercije tela.

Radi jednostavnosti, posmatrajmo telo sa obrtnim elipsoidom inercije pri čemu je $J_x=J_y$. Uvodeći oznake:

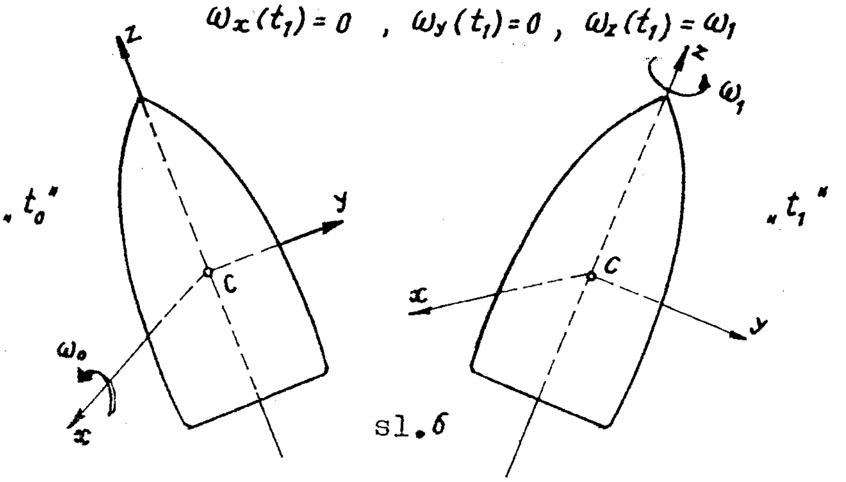
$$
p_1 = J_x \omega_x \,, \quad p_2 = J_y \omega_y \,, \quad p_3 = J_z \omega_z \,, \quad A = \frac{J_x - J_z}{J_x J_z}
\tag{P.4.2}
$$

dobijamo jednačine:

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= A p_1 p_2 + u_1 \\
\dot{p}_2 &= -A p_1 p_3 + u_2 \\
\dot{p}_3 &= u_3
\end{aligned}
\tag{P.4.3}
$$

Neka su u početnom i krajnjem trenutku (sl.6):

$$
\begin{aligned}
&t_0 = 0 \,, \quad \omega_x(0) = \omega_0 \,, \quad \omega_y(0) = 0 \,, \quad \omega_z(0) = 0 \\
&\omega_x(t_1) = 0 \,, \quad \omega_y(t_1) = 0 \,, \quad \omega_z(t_1) = \omega_1
\end{aligned}
\tag{P.4.4}
$$



sl.6

odnosno, s obzirom na (P.4.2), neka su:

(P.4.5) $$t_0 = 0 \; ; \; p_1(t_0) = \omega_0 \, , \, p_2(t_0) = 0 \; , \; p_3(t_0) = 0$$
$$p_1(t_1) = 0 \; , \; p_2(t_1) = 0 \; , \; p_3(t_1) = \omega_1 \, .$$

Treba minimizirati vreme t_1 odnosno integral:

(P.4.6) $$J = \int_0^{t_1} dt$$

Neka je upravljanje ograničenog intenziteta, tj:

(P.4.7) $$g(u) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - M^2 \leq 0 \, .$$

Tada Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(P.4.8) $$\mathcal{H} = \begin{cases} \nu^1(Ap_2p_3 + u_1) + \nu^2(-Ap_1p_3 + u_2) + \nu^3u_3 - 1 \, , & g(u) < 0 \\ \nu^1(Ap_2p_3 + u_1) + \nu^2(-Ap_1p_3 + u_2) + \nu^3u_3 - 1 - \mu g(u) \, , & g(u) = 0 \, . \end{cases}$$

Iz uslova optimalnosti:

(P.4.9) $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} = 0 \; , \; \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_i \partial u_j}\right) u_i u_j \leq 0$$

za slučaj $g(u) < 0$, dobijamo:

(P.4.10) $$\nu^i = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u_i \partial u_j} \equiv 0$$

što znači da su,na otvorenom jezgru oblasti (P.4.7), upravljanja singularna. Međutim, zamenjujući (P.4.10) u (P.4.8) dobijamo:

$$\mathcal{H} = -1$$

što je u protivrečnosti sa uslovom b) teoreme 1. pa znači da među singularnim upravljanjima ne postoje optimalna. Prema tome, u celom intervalu $[0, t_1]$ optimalna upravljanja su na granici $g(u)=0$, odnosno:

(P.4.11) $$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - M^2 = 0 \, .$$

U tom slučaju, iz (P.4.9) je:

(P.4.12) $\quad \nu^i - 2\mu u_i = 0 \quad , \quad \mu > 0$

odakle je:

(P.4.13) $\quad u_i = \frac{1}{2\mu} \nu^i .$

Zamenjujući ove vrednosti u (P.4.11) dobijamo:

(P.4.14) $\quad \mu = \frac{\| \nu \|}{2M}$

tako da je:

(P.4.15) $\quad u_i = \frac{M}{\| \nu \|} \nu^i .$

Spregnute diferencijalne jednačine imaju oblik:

(P.4.16) $\quad \dot{\nu}^1 = A\nu^2 p_3 \, , \; \dot{\nu}^2 = -A\nu^1 p_3 \; , \; \dot{\nu}^3 = A(-\nu^1 p_2 + \nu^2 p_1) .$

Iz ovih jednačina i jednačina (P.4.3), s obzirom na (P.4.15), uslove (P.4.4) i uslov b) teoreme 1, dobijamo, vraćajući se na prvobitne promenljive:

$$u_1^* = -a J_x \omega_0 \cos(bt^2)$$

$$u_2^* = a J_x \omega_0 \sin(bt^2)$$

$$u_3^* = a J_z \omega_1$$

$$\omega_x = \omega_0 (1 - at) \cos(bt^2)$$

$$\omega_y = -\omega_0 (1 - at) \sin(bt^2)$$

$$\omega_z = a \omega_1 t$$

$$a = \frac{M}{(J_x^2 \omega_0^2 + J_z^2 \omega_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$b = \frac{J_x - J_z}{2 J_x} a$$

$$t_1 = \frac{(J_x^2 \omega_0^2 + J_z^2 \omega_1^2)^{\frac{1}{2}}}{M}$$

4.3. Upravljanje silom ograničenih koordinata

Neka su dozvoljena upravljanja generalisane sile čije su koordinate ograničene u obliku:

$$a_\alpha \leqslant u_\alpha \leqslant b_\alpha \tag{4.3.1}$$

odnosno neka je oblast G_u dozvoljenih upravljanja određena nejednakostima:

$$g_\alpha = (u_\alpha - a_\alpha)(u_\alpha - b_\alpha) \leqslant 0. \tag{4.3.2}$$

Odredimo optimalna upravljanja iz (4.3.2) pod čijim će se dejstvom kretati mehanički sistem sa jednačinama (4.2.3) uz uslov minimalnosti funkcionala (4.2.2).

U skladu sa prethodnim razmatranjima neka je u nekom podintervalu intervala $[t_0, t_1]$ optimalno upravljane takvo da je ispunjeno p jednakosti:

$$g_k = (u_k - a_k)(u_k - b_k) = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,p \tag{4.3.3}$$

i n-p nejednakosti:

$$g_s = (u_s - a_s)(u_s - b_s) < 0 \;. \tag{4.3.4}$$

U tom slučaju Pontrjaginova funkcija (4.1.16) ima oblik:

$$\mathcal{H} = \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N + u_\alpha\right) - 1 - \mu^k (u_k - a_k)(u_k - b_k) \tag{4.3.5}$$

pa se problem rešava postupkom koji je izložen u odeljku (4.1) ovog poglavlja.

Obratimo pažnju, kao i u prethodnom slučaju , na problem kad je funkcija f^0 nezavisna od upravljanja u_α i impulsa p_α. Jednostavno se pokazuje da ne postoje takva optimalna upravljanja u_α za koja važe nejednakosti (4.3.4). Odnosno optimalna upravljanja javljaju se samo u temenima oblasti G_u, tj. kad je:

$$(u_\alpha - a_\alpha)(u_\alpha - b_\alpha) = 0. \tag{4.3.6}$$

Iz uslova ekstremalnosti Pontrjaginove funkcije, koja u ovom slučaju ima oblik:

$$\mathcal{H} = \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^{\mu}_\alpha + u_\alpha\right) - 1 - \mu^\alpha(u_\alpha - a_\alpha)(u_\alpha - b_\alpha) \tag{4.3.7}$$

dobijamo:

$$\nu^\alpha - \mu^\alpha(2u_\alpha - a_\alpha - b_\alpha) = 0 \tag{4.3.8}$$

$$-2\mu^\alpha \leqslant 0. \tag{4.3.9}$$

Kako je, na osnovu (4.3.6), vrednost optimalnog upravljanja $u^*_\alpha = a_\alpha$ ili $u_\alpha = b^*_\alpha$ i kako je iz (4.3.9) $\mu^\alpha >$ 0, iz (4.3.8) dobijamo:

$$u^*_\alpha = \begin{cases} a_\alpha \,, & \nu^\alpha < 0 \\ b_\alpha \,, & \nu^\alpha > 0 \,. \end{cases} \tag{4.3.10}$$

Ovakva optimalna upravljanja imaće konačan broj prekida, tj. konačan broj prelaza s temena na teme oblasti G_u u intervalu $[t_0, t_1]$.

Broj prelaza odreden je brojem nula funkcija ν^{α}, a trenuci prelaza τ_k odredeni su takozvanim prelaznim funkcijama, koje u ovom slučaju imaju oblik:

(4.3.11) $\nu^{\alpha}(\tau_k) = 0.$

Čest oblik ograničenja (4.3.1) je:

(4.3.12) $|u_{\alpha}| \leqslant C_{\alpha}$

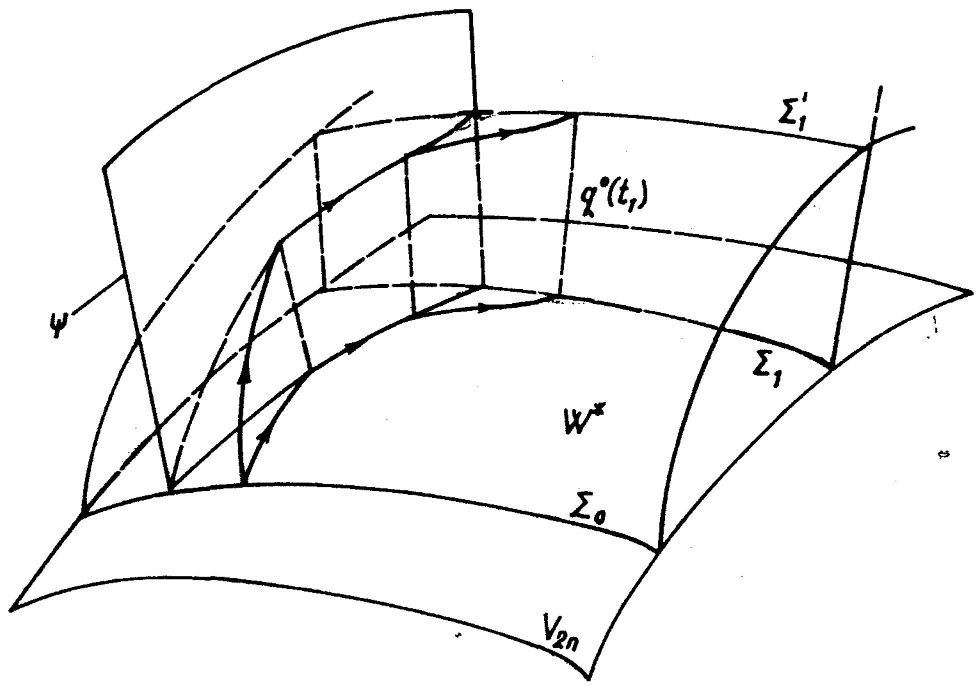
pa je, na osnovu (4.3.10),

(4.3.13) $u_{\alpha} = C_{\alpha} \operatorname{sign} \nu^{\alpha}.$

i kako funkcija ψ ne zavisi od q^0, jednačina (5.1.2) predstavlja, u proširenom faznom prostoru V_{2n+1} (videti 2.2), cilindričnu hiperpovrš koja ograničava 2n+1-dimenzionu oblast B', tako da imamo:

$$(5.1.3) \qquad q^0, q^\alpha, p_\alpha \in B' \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Prema tome, svakoj dozvoljenoj trajektoriji u prostoru V_{2n}, odgovara neka dozvoljena trajektorija u prostoru V_{2n+1} (sl.7).



Sl. 7

U skladu sa prethodni pretpostavkama, 2n-dimenziona granica (5.1.2) oblasti B , predstavlja glatku hiperpovrš u prostoru V_{2n+1}, a vektor njenog gradijenta, u svakoj tački, različit je od nule, pri čemu je:

$$(5.1.4) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial q^0} = 0 .$$

Na ovaj način, problem optimalnosti sastoji se u određivanju takvog dozvoljenog upravljanja $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, da odgovarajuća trajektorija $q^0(t), q^\alpha(t), p_\alpha(t)$ cela leži u oblasti B , a koordinata $q^0(t_1)$ ima minimalnu vrednost.

Kako princip maksimuma, formulisan teoremom 1., ne obuhvata ovaj problem, biće neophodna njegova dopuna.

5.2. Ograničenje oblika $\psi(q^\alpha, p_\alpha)=0$

Postavimo uslov da optimalna trajektorija cela leži na hiperpovrši:

(5.2.1) $$\psi(q, p) = 0 .$$

Tada fazne brzine ispunjavaju uslov:

(5.2.2) $$\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = 0$$

odnosno, ako su jednačine kretanja sistema (2.1.4), ispunjeno je:

(5.2.3) $$\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^u\right) = 0 .$$

Ako uvedemo funkciju:

(5.2.4) $$\vartheta(q, p, u) = \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^u\right)$$

uslov (5.2.3) dobija oblik:

(5.2.5) $$\vartheta(q, p, u) = 0 .$$

Na ovaj način smo za dozvoljeno upravljanje uveli dodatno ograničenje i time, na prvi pogled, problem sveli na problem sa ograničenim upravljanjima koji je razmatran u poglavlju 4. Uzimajući da je, u opštem slučaju, oblast dozvoljenih upravljanja data relacijama (4.1.3) i (4.1.4) i s obzirom na vezu (5.2.5), možemo, koristeći rezultate poglavlja 4., Pontrjaginovu funkciju napisati u obliku:

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right) - \mu^0 \theta - \mu^k g_k \, . \tag{5.2.6}$$

Sa takvim oblikom Pontrjaginove funkcije spregnute jednačine zadržavaju kanonsku formu. Ovde treba imati u vidu da uslov (5.2.5) u potpunosti ne zamenjuje uslov (5.2.1). Naime, pri postavljanju početnih i krajnjih uslova treba uzeti u obzir i ograničenje (5.2.1).

Pri geometrijskim razmatranjima u poglavlju 2. konstatovali smo da optimalna trajektorija leži na glatkoj graničnoj hiperpovrši W^* (2.2.7). Kako je, pored toga, nametnut i uslov (5.2.1), optimalnu trajektoriju treba tražiti na 2n-1-dimenzionoj površi koja predstavlja presek hiperpovrši W^* i hiperpovrši (5.2.1). Pri tome u svakoj tački optimalne trajektorije u faznom prostoru V_{2n+1} ispunjeni su uslovi:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 \dot{q}^0 + \lambda_\alpha \dot{q}^\alpha + \nu^\alpha \dot{p}_\alpha = 0 \\ &\frac{\partial W}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = 0 \\ &\frac{\partial \psi}{\partial q^0}\dot{q}^0 + \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

odakle sledi linearna zavisnost spregnutog vektora i vektora gradijenata hiperpovrši W^* i cilindre hiperpovrši (5.2.1), tj:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= a(t)\frac{\partial W}{\partial q^0} + b(t)\frac{\partial \psi}{\partial q^0} \\ \lambda_\alpha &= a(t)\frac{\partial W}{\partial q^\alpha} + b(t)\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \\ \nu^\alpha &= a(t)\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} + b(t)\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Imajući u vidu da je, s obzirom na (2.2.7) i (5.2.1),

$$\frac{\partial W}{\partial q^0} = 1 \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial q^0} = 0 .$$

iz prve jednačine (5.2.8) sledi:

$$a(t) = \lambda_0$$

tako da dobijamo:

$$\lambda_0 = \lambda_0 \frac{\partial W}{\partial q^0}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} + b(t) \frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \tag{5.2.9}$$

$$\nu^\alpha = \lambda_0 \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} + b(t) \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} .$$

Na osnovu ovoga sledi zaključak da, ni spregnuti vektor ni vektor gradijenta hiperpovrši W, ne mogu biti kolinearni sa vektorom gradijenta hiperpovrši (5.2.1).

Odredimo podrobnije spregnuti vektor, odnosno funkciju b(t) iz (5.2.9). Naime, kako je vektor gradijenta hiperpovrši W upravan na optimalnu trajektoriju, odnosno kako je skalarni proizvod, gradijenta hiperpovrši i 2n+1-dimenzionog vektora fazne brzine, ekstremalne vrednosti, možemo, s obzirom na jednačine (2.2.4), napisati:

$$\frac{\partial W}{\partial q^0} f^0 + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right) \geqslant 0$$

i za $u_i = u_i^*$:

$$\frac{\partial W}{\partial q^0} f^0 + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha^N\right) = 0 .$$

Ako su dozvoljena upravljanja određena relacijama (4.1.3) i (4.1.4), onda, primenjujući pravilo množitelja, ove uslove ekstremalnosti možemo izraziti u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{\partial W}{\partial q^0} f^0 + \frac{\partial W}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \left(- \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha\right)\right] + d^k \frac{\partial g_k}{\partial u_i} = 0 \tag{5.2.10}$$

gde je d^k neki p-dimenzioni vektor različit od nule. Uslovi (5.2.10) svode se na uslove:

$$\frac{\partial f^0}{\partial u_i} + \frac{\partial W}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial u_i} + d^k\frac{\partial g_k}{\partial u_i} = 0. \tag{5.2.11}$$

Potrebni uslov ekstremalnosti funkcije $\mathcal{H}$ (5.2.6) imaju oblik:

$$\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial u_i} + \nu^\alpha\frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial u_i} - \mu^k\frac{\partial g_k}{\partial u_i} - \mu^0\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = 0. \tag{5.2.12}$$

Imajući u vidu da je:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_i} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha^H}{\partial u_i} \tag{5.2.13}$$

iz (5.2.9), (5.2.11) i (5.2.12) dobijamo:

$$[b(t)-\mu^0(t)]\frac{\partial \theta}{\partial u_i} + [d^k(t)-\mu^k(t)]\frac{\partial g_k}{\partial u_i} = 0 \tag{5.2.14}$$

odakle, zbog nezavisnosti p+1 vektora:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_i}\,,\quad \frac{\partial g_k}{\partial u_i}$$

sledi:

$$b = \mu^0\,,\quad d^k = \mu^k \tag{5.2.15}$$

tako da, iz (5.2.9), imamo:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \lambda_0\frac{\partial W}{\partial q^\alpha} + \mu^0(t)\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha} \\ \nu^\alpha &= \lambda_\alpha\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} + \mu^0(t)\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

odnosno, uzimajući $\lambda_0=-1$:

$$(5.2.17)\qquad \lambda_\alpha = -\frac{\partial W}{\partial q^\alpha} + \mu(t)\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha}$$
$$\nu^\alpha = -\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} + \mu(t)\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}$$

Možemo zaključiti da 2n+1-dimenzioni spregnuti vektor predstavlja linearnu kombinaciju vektora gradijenata hiperpovrši W i cilindrične hiperpovrši (5.2.1). Spregnuti vektor upravan je na 2n-1-dimenzioni presek pomenutih hiperpovrši u kome leži optimalna trajektorija. Prema tome, spregnuti vektor ne može biti jednoznačno odredjen. U tom smislu možemo formulisati sledeći stav.

<u>Stav 1.</u> Ako su λ_0, λ_α, ν^α, μ^0, pored ostalih veličina rešenja postavljenog problema optimalnosti onda su i:

$$(5.2.18)\qquad \lambda_0,\ \lambda_\alpha + c\frac{\partial \psi}{\partial q^\alpha},\ \nu^\alpha + c\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha},\ \mu^0 + c$$

gde je c=const., rešenja istog problema.

Dokaz ovog stava je jednostavan. Naime, kanonske spregnute jednačine, s obzirom na Pontrjaginovu funkciju (5.2.6), imaju oblik:

$$\dot\lambda_0 = 0$$

$$(5.2.19)\qquad \dot\lambda_\alpha = -\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial q^\alpha} - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial q^\alpha}\right) + \mu^0\frac{\partial \vartheta}{\partial q^\alpha} + \mu^k\frac{\partial g_k}{\partial q^\alpha}$$

$$\dot\nu^\alpha = -\lambda_0\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha} - \lambda_\beta\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} - \nu^\beta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q^\beta} + \frac{\partial Q^N_\beta}{\partial p_\alpha}\right) + \mu^0\frac{\partial \vartheta}{\partial p_\alpha} + \mu^k\frac{\partial g_k}{\partial p_\alpha}$$

Zamenom veličina (5.2.18) u (5.2.19) oblik tih jednačina se ne menja. Pored toga, ne menja se ni oblik algebarskih jednačina

(5.2.12), neophodnih uslova optimalnosti, ako u njih stavimo veličine (5.2.18). Time je stav 1. dokazan.

Ako u jednačinama (5.2.1) ne figurišu koordinate impulsa p_α, onda je ograničenju podvrgnut samo položaj sistema u konfiguracionom prostoru a ne i njegova brzina. Tada optimalna trajektorija leži na hiperpovrši:

$$(5.2.20) \qquad \psi(q) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] .$$

Neka su funkcija ψ i njeni parcijalni izvodi neprekidni u svakoj tački. Uzimajući u obzir jednačine kretanja dobijamo

$$(5.2.21) \qquad \vartheta(q,p,u) = \frac{\partial\psi}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 .$$

Kako funkcija ϑ ne zavisi od upravljanja u_i i koordinate q^0, tj. kako je:

$$\vartheta(q,p,u) \equiv \vartheta(q,p)$$

jednačina (5.2.21) predstavlja ograničenje faznih promenljivih q^α, p_α u obliku hiperpovrši u faznom prostoru V_{2n+1}. Uslov da optimalna fazna trajektorija leži na hiperpovrši ϑ, s obzirom na jednačine kretanja, ima oblik:

$$(5.2.22) \qquad \vartheta_1(q,p,u) = \frac{\partial\vartheta}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial\vartheta}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^N_\alpha\right) = 0.$$

Na taj način dobili smo ograničenje za upravljanja u_i pa dalja razmatranja slede kao u prethodnom postupku.

Treba imati u vidu da uslov (5.2.22) nije u potpunosti ekvivalentan ograničenju (5.2.20). Naime, pri rešavanju problema u konačnom obliku, početne i krajnje uslove treba postaviti tako da su zadovoljene jednačine (5.2.20) i (5.2.21) u početnom i krajnjem trenutku t_0 i t_1.

Primer 5. Odrediti silu pod čijim dejstvom tačka vrši brahistohrono kretanje u vertikalnoj ravni. Neka je, pri tome, mehanička energija:

(P.5.1) $$H=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)-gx_2=h=const.$$

Diferencijalne jednačine kretanja tačke su:

(P.5.2) $$\dot{x}_1=y_1\ ,\quad \dot{x}_2=y_2\ ,\quad \dot{y}_1=u_1\ ,\quad \dot{y}_2=g+u_2$$

i pri kretanju iz početnog stanja Σ_0 u krajnje stanje Σ_1 integral:

(P.5.3) $$J=\int_{t_0}^{t_1}dt$$

treba da ima minimalnu vrednost.

Kako jednačina (P.5.1) predstavlja ograničenje faznih promenljivih, s obzirom na (P.5.2), dobijamo:

(P.5.4) $$y_1u_1+u_2y_2=0$$

pa Pontrjaginova funkcija ima oblik:

(P.5.5) $$\mathcal{H}=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\nu_1u_1+\nu_2(g+u_2)-1-\mu(y_1u_1+y_2u_2)$$

a spregnute diferencijalne jednačine su:

(P.5.6) $$\dot{\lambda}_1=0\ ,\quad \dot{\lambda}_2=0\ ,\quad \dot{\nu}_1=-\lambda_1+\mu u_1\ ,\quad \dot{\nu}_2=-\lambda_2+\mu u_2\ .$$

Upravljanja u_1 i u_2 figurišu linearno u Pontrjaginovoj funkciji usled čega je problem singularan (poglavlje 3.).

Neophodni uslovi optimalnosti su:

(P.5.7) $$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_1}=\nu_1-\mu y_1=0\ ,\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_2}=\nu_2-\mu y_2=0\ .$$

Diferencirajući po vremenu ove jednačine, saglasno sa (P.5.2) i (P.5.6), dobijamo:

(P.5.8) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_1}=-\lambda_1-\dot{\mu}y_1=0\ ,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_2}=-\lambda_2-\dot{\mu}y_2-\mu g=0\ .$$

Pošto jednačine (P.5.8) ne sadrže upravljanja u_i ponavljamo postupak diferenciranja, tako da imamo:

(P.5.9) $$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_1} = -\ddot{\mu} y_1 - \dot{\mu} u_1 = 0 \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_2} = -\ddot{\mu} y_2 - 2\dot{\mu} g - \dot{\mu} u_2$$

odakle je:

(P.5.10) $$u_1 = -\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} y_1 \quad , \quad u_2 = -2g - \frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} y_2 \ .$$

Da bi rešenja (P.5.10) bila optimalna treba da budu ispunjeni Kelijevi uslovi, tj. da matrica:

(P.5.11) $$\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u_j}\right)\right]\right\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\mu} & 0 \\ 0 & -\dot{\mu} \end{Bmatrix}$$

bude matrica koeficijenata pozitivno definitne forme. Taj uslov je ispunjen kad je:

(P.5.12) $$\dot{\mu} < 0 \ .$$

Koristeći osobinu Pontrjaginove funkcije, da je na optimalnoj trajektoriji:

(P.5.13) $$(\mathcal{H})_{u^*} = 0$$

s obzirom na (P.5.5),(P.5.7) i (P.5.8) dobijamo:

(P.5.14) $$\dot{\mu} = -\frac{1}{2T}$$

čime je ispunjeno (P.5.12). Time je pokazano da su rešenja (P.5.10) optimalna.

Na osnovu (P.5.14) imamo:

$$\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} = \frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{\Pi}}{h-\Pi} = \frac{g y_2}{h - g x_2}$$

tako da je:

(P.5.15) $$u_1^* = -\frac{g y_1 y_2}{h - g x_2} \quad , \quad u_2^* = -2g - \frac{g y_2^2}{h - g x_2} \ .$$

Zamenom ovih vrednosti u jednačine (P.5.2) dobijamo:

(P.5.16) $\dot{x}_1 = y_1 \ , \ \dot{x}_2 = y_2 \ ; \ \dot{y}_1 = -\frac{g y_1 y_2}{h - g x_2} \ , \ \dot{y}_2 = -g - \frac{g y_2^2}{h - g x_2}$.

Uzmimo, radi jednostavnosti, da je koordinatni početak u početnom položaju tačke i da je mehanička energija u početnom trenutku (t_0=0) jednaka nuli, tj:

(P.5.17) $x_1(0) = 0 \ , \ x_2(0) = 0 \ ; \ y_1(0) = 0 \ , \ y_2(0) = 0$.

Neka je krajnje stanje na mnogostrukosti:

(P.5.18) $x_1(t_1) = a$.

Integralenjem jednačina (P.5.16), koristeći uslove (P.5.17) dobijamo:

$$y_1 = \frac{g}{k}(1 - \cos kt) \quad ; \quad y_2 = \frac{g}{k}\sin kt$$

(P.5.19)
$$x_1 = \frac{g}{k^2}(kt - \sin kt) ; \quad x_2 = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$$

gde poslednje dve jednačine predstavljaju cikloidu u parametarskom obliku.

Pored uslova (P.5.18) u krajnjem položaju je ispunjeno i

(P.5.20) $\left[\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) - g x_2\right]_{t_1} = 0$

pa postavljajući odgovarajuće uslove transverzalnosti:

$$(\delta x_1)_{t_1} = 0 , (y_1 \delta y_1 + y_2 \delta y_2 - g\delta x_2)_{t_1} = 0 \quad , (\lambda_1 \delta x_1 + \lambda_2 \delta x_2 + \nu_1 \delta y_1 + \nu_2 \delta y_2)_{t_1} = 0$$

dobijamo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{a\pi}{g}} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{g\pi}{a}} .$$

Optimalna upravljanja su:

$$u_1^* = g \sin\left(\sqrt{\frac{g\pi}{a}}\ t\right) \quad , \quad u_2^* = -g + g\cos\left(\sqrt{\frac{g\pi}{a}}\ t\right).$$

5.3. Ograničenje oblika $\psi(q^\alpha, p_\alpha) \leqslant 0$

Razmatranje u prethodnom odeljku odnosilo se na slučaj kad optimalna trajektorija cela leži na granici oblasti B, tj. kad ograničenje ima oblik (5.2.1). Međutim, u opštem slučaju, pojedini delovi optimalne trajektorije mogu da budu na granici oblasti B, a ostali unutar otvorenog jezgra oblasti B. U tom slučaju ograničenje ima oblik:

$$\psi(q,p) \leqslant 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{5.3.1}$$

Pretpostavljajući da početno i krajnje stanje sistema pripadaju otvorenom jezgru oblasti B i da na granici oblasti leži konačan broj s odsečaka optimalne fazne trajektorije, ograničenje (5.3.1) može da se napiše u obliku:

$$\psi(q,p) < 0 \qquad \forall t \in [t_0, \tau_1), (\tau_2, \tau_3), \dots, (\tau_{2s-2}, \tau_{2s-1}), (\tau_{2s}, t_1] \tag{5.3.2}$$

$$\psi(q,p) = 0 \qquad \forall t \in [\tau_1, \tau_2], [\tau_3, \tau_4] \dots [\tau_{2s-1}, \tau_{2s}] \tag{5.3.3}$$

gde su τ_{2k-1} trenuci dolaska fazne tačke na granicu oblasti B, a τ_{2k} trenuci odvajanja fazne tačke od granice. Neka je oblast G_u dozvoljenih upravljanja data relacijama (4.1.3) i (4.1.4). Uzimajući u obzir rezultate odeljaka (4.1) i (5.2), Pontrjaginovu funkciju možemo formirati na sledeći način:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^{\mu}_\alpha\right) - \mu^k g_k & \psi < 0 \\[2ex] \lambda_0 f^0 + \lambda_\alpha \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} + \nu^\alpha\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha} + Q^{\mu}_\alpha\right) - \mu^0 \vartheta - \mu^k g_k & \psi = 0. \end{cases} \tag{5.3.4}$$

Ovakav oblik Pontrjaginove funkcije omogućava da se jednačine kretanja i odgovarajuće spregnute jednačine napišu u kanonskoj formi. Osim toga, uslovi optimalnosti svode se na uslove ekstremalnosti funkcije (5.3.4)

Interval $[t_0, t_1]$ možemo podeliti na konačan broj $2s+1$ podintervala koji odgovaraju kretanju fazne tačke po odsečćima optimalne trajektorije, čije cele dužine pripadaju bilo unutrašnjosti oblasti B bilo njenoj granici. Konačno rešenje problema sastoji se u određivanju funkcija $q^\alpha(t), p_\alpha(t), \lambda_\alpha(t), \nu^\alpha(t), u_i(t), \mu^0(t), \mu^k(t)$ na svim podintervalima. Kako na svakom podintervalu imamo po $4n+r+p$ funkcija $q^\alpha, p_\alpha, \lambda_\alpha, \nu^\alpha, u_i, \mu^k$ i kako se funkcija μ^0 javlja na s podintervala u kojima trajektorija leži na granici oblasti B, ukupan broj traženih funkcija iznosi $(4n+r+p)(2s+1)+s$. Za njihovo određivanje raspolažemo sa $4n(2s+1)$ diferencijalnih jednačina kretanja i spregnutih jednačina, $r(2s+1)$ uslova optimalnosti, $p(2s+1)$ jednačina (4.1.3) i s jednačina (5.2.1), što odgovara ukupnom broju traženih funkcija.

Integralenjem diferencijalnih jednačina javlja se $4n(2s+1)$ konstanti integralenja. Osim toga, treba odrediti i trenutke $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2s}, t_1$ pa ukupan broj nepoznatih konstanti iznosi $(4n+1)(2s+1)$ Za njihovo određivanje raspolažemo sa $4n$ početnih i krajnjih uslova i uslova transverzalnosti. Ostale uslove dobijamo na osnovu osobona funkcija u tačkama $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2s}, t_1$. Naime optimalna fazna trajektorija neprekidna je u celom intervalu $[t_0, t_1]$ pa imamo:

$$
\begin{aligned}
&q^\alpha(\tau_{2k-1}^-) = q^\alpha(\tau_{2k-1}^+), \quad p_\alpha(\tau_{2k-1}^-) = p_\alpha(\tau_{2k-1}^+) \\
&q^\alpha(\tau_{2k}^-) = q^\alpha(\tau_{2k}^+), \quad p_\alpha(\tau_{2k}^-) = p_\alpha(\tau_{2k}^+) \qquad k = 1, 2, \ldots, s
\end{aligned}
\tag{5.3.5}
$$

što daje $4ns$ uslova. Osim toga Pontrjaginova funkcija, za autonomne sisteme, ispunjava $2s+1$ uslov:

$$
\mathcal{H}(\tau_{2k-1}^-) = \mathcal{H}(\tau_{2k-1}^+) \; ; \; \mathcal{H}(\tau_{2k}^-) = \mathcal{H}(\tau_{2k}^+), \quad \mathcal{H}(t_1) = 0 . \tag{5.3.6}
$$

Uzimajući u obzir stav 1. iz prethodnog odeljka, može da se iskoristi činjenica da su funkcije λ_α, ν^α, μ^0 određene do proizvoljne konstante na granici oblasti B. U tom smislu, proizvoljnu konstantu možemo birati na najprikladniji način. Uzimajući da je, u trenutku τ_{2k-1} dolaska fazne tačke na granicu,

$$(5.3.7) \qquad \mu^0(\tau_{2k-1}) = 0$$

imaćemo, s obzirom na (5.2.17) i (5.2.18),

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(\tau_{2k-1}^-) &= \lambda_\alpha(\tau_{2k-1}) \\ \nu^\alpha(\tau_{2k-1}^-) &= \nu^\alpha(\tau_{2k-1}) \end{aligned}$$

$$(5.3.8) \qquad \begin{aligned} \lambda_\alpha(\tau_{2k}^+) &= \lambda_\alpha(\tau_{2k}) - \mu^0(\tau_{2k})\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\alpha}\right)_{\tau_{2k}} \\ \nu^\alpha(\tau_{2k}^+) &= \nu^\alpha(\tau_{2k}) - \mu^0(\tau_{2k})\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)_{\tau_{2k}} \end{aligned}$$

što daje još 4ns uslova. Na taj način dobili smo ukupno (4n+1)(2s+1) uslova za određivanje konstanti integralenja, što predstavlja dovoljan broj za rešenje problema u konačnom obliku.

Analizirajući uslove (5.3.8) uočavamo da je spregnuti vektor neprekidan u trenutku dolaska fazne tačke na granicu oblasti B, a u trenutku silaska sa granice ima prekid. Neki autori [36] uslovljavaju prekid spregnutog vektora u trenutku dolaska fazne tačke na granicu oblasti B. Uslovi prekida spregnutog vektora, koji u našem slučaju imaju oblik (5.3.8), poznati su u literaturi pod nazivom uslovi skoka.

Na osnovu razmatranja u ovom odeljku, gde funkcija $\mathcal{H}$ ima oblik (5.3.4) usled čega jednačine kretanja i odgovarajuće spregnute jednačine imaju kanonsku formu u celom intervalu $[t_0, t_1]$, možemo formulisati sledeću teoremu.

Teorema 2. Neka je $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, optimalno upravljanje i neka odgovarajuća optimalna trajektorija cela leži u zatvorenoj oblasti B, pri čemu je konačan broj njenih odsečaka na granici oblasti. Tada postoji funkcija $\mathcal{H}$ oblika (5.3.4) i 2n+1-dimenzioni vektor λ_0, λ_α, ν^α različit od nule, rešenje jednačina:

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^0}, \quad \dot{\lambda}_\alpha = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q^\alpha}, \quad \dot{\nu}^\alpha = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\alpha}$$

tako da je na optimalnoj trajektoriji:

a) $$\mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, \nu, q, p, u) \leqslant \mathcal{H}(\lambda_0, \lambda, \nu, q, p, u^*)$$

b) $$(\mathcal{H})_{u^*} = 0$$

c) $$\lambda_0 = const \leqslant 0$$

d) vektor λ_α, ν^α normalan je na početne i krajnje mnogostrukosti u trenucima t_0 i t_1.

e) ispunjeni su uslovi skoka (5.3.8).

Ova teorema predstavlja u izvesnom smislu uopštenje principa maksimuma (teorema 1., odeljak 2.4). Funkcija $\mathcal{H}$ formirana je na takav način da svi uslovi teoreme 1. zadržavaju isti oblik, izuzev uslova neprekidnosti spregnutog vektora koji su u teoremi 2. zamenjeni uslovom e). Inače, u svim tačkama otsečaka optimalne trajektorije koji leže bilo unutar oblasti B bilo na njenoj granici, spregnuti vektor je neprekidan izuzimajući tačke u kojima fazna trajektorija silazi sa granice. Pri tome smatramo da je u tim tačkama spregnuti vektor neprekidan sa desne strane.

Treba napomenuti da teorema 2. delimično objedinjuje teoreme 22.,23.,24.,25. koje su date u monografiji [31] .

Mada je teorema 2. formulisana za slučaj kada je oblast B ograničena jednom hiperpovrši, ona je primenjiva i za opštije slučajeve. Neka granicu oblasti B čini više hiperpovrši. Ukoliko u nekom intervalu konačni deo optimalne trajektorije leži na preseku jednog broja hiperpovrši, onda je spregnuti vektor normalan na taj presek. Pri tome se pretpostavlja da su gradijenti hiperpovrši u tačkama preseka medusobno nezavisni, tj. da presek ima jedinstvenu tangentnu ravan u tačkama na optimalnoj trajektoriji, pa je u tim tačkama spregnuti vektor normalan na tangentnu ravan. Usled toga broj neodredenosti spregnutog vektora neposredno zavisi od dimenzija preseka. Pri tome se javljaju novi uslovi skoka oblika (5.3.8) pa je dalji postupak analogan prethodnom.

Napomenimo da, ako je množitelj $\mu^{0}(t)$ konstantan u intervalu $[\tau_{2k-1},\tau_{2k}]$, onda su, s obzirom na (5.3.7), uslovi skoka ispunjeni trivijalno, pa spregnuti vektor nije prekidan u granicama tog intervala.

5.4. Optimalno upravljanje kretanjem sistema ograničene mehaničke energije

U radu [38] razmatrano je optimalno upravljanje kretanjem sistema ograničene kinetičke energije, pri čemu je sila upravljanja imala konstantan intenzitet. Time je izbegnuto razmatranje singularnog upravljanja. Ovde ćemo na jednom problemu ukazati na neke osobenosti uslova skoka (5.3.8) koje se javljaju u slučaju singularnih upravljanja.

Neka je kretanje sistema opisano autonomnim jednačinama:

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}$$

$$(5.4.1) \qquad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q^{H}_{\alpha} + u_{\alpha} .$$

Neka je skup dozvoljenih upravljanja otvoren i neka je mehanička energija sistema ograničena, tj:

$$(5.4.2) \qquad \psi(q,p) = H-h \leqslant 0 \quad , \ h = const .$$

Uzmimo da su početno i krajnje stanje sistema unutar oblasti (5.4.2) tj:

$$(5.4.3) \qquad (H-h)_{t_0} < 0 \quad , \quad (H-h)_{t_1} < 0.$$

Zadatak je da se odrede upravljanja u koja će sistem iz nekog početnog stanja Σ_0 dovesti u neko krajnje stanje Σ_1 uz uslov minimalnosti funkcionala:

(5.4.4) $$J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(q,p)\,dt .$$

U intervalima kada je fazna tačka na granici oblasti (5.4.2) ispunjeno je:

(5.4.5) $$\vartheta(q,p,u)=\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}(Q_\alpha^N-u_\alpha)=0$$

pa, saglasno ranijim razmatranjima, Pontrjaginovu funkciju možemo napisati u obliku:

(5.4.6) $$\mathcal{H}=\begin{cases}\lambda_\alpha\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\nu^\alpha\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^N+u_\alpha\right)-f^0 & ,\ \psi(q,p)<0\\[2ex] \lambda_\alpha\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}+\nu^\alpha\left(-\dfrac{\partial H}{\partial q^\alpha}+Q_\alpha^N+u_\alpha\right)-f^0-\mu^0\left[\dfrac{\partial T}{\partial p_\alpha}(Q_\alpha^N-u_\alpha)\right], & \psi=0.\end{cases}$$

Kako Pontrjaginova funkcija linearno zavisi od upravljanja koja pripadaju otvorenom skupu problem je singularan. Neophodni uslovi optimalnosti daju:

(5.4.7) $$\nu^\alpha=\begin{cases}0 , & \psi(q,p)<0\\ \mu^0\dfrac{\partial T}{\partial p_\alpha}, & \psi(q,p)=0.\end{cases}$$

Daljim postupkom za singularna upravljanja dobijamo:

(5.4.8) $$\lambda_\alpha=\begin{cases}a_{\alpha\beta}\dfrac{\partial f^0}{\partial p_\beta} , & \psi(q,p)<0\\ a_{\alpha\beta}\dfrac{\partial f^0}{\partial p_\beta}+\mu^0\dfrac{\partial T}{\partial q^\alpha}-\dot\mu^0 p_\alpha, & \psi(q,p)=0\end{cases} .$$

Zadržimo se na analizi uslova skoka ovako određenog vektora λ_α, ν^α, uz pretpostavku da odgovara optimalnom rešenju.

Uslovi (5.3.8) u našem slučaju, s obzirom na (5.4.2), imaju oblik:

$$
\begin{aligned}
&\left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial f^0}{\partial p_\beta}\right)_{\tau^-_{2k-1}} = \left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial f^0}{\partial p_\beta} + \mu\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} - \dot{\mu}p_\alpha\right)_{\tau_{2k-1}}\\
&0 = \left(\mu^0\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right)_{\tau_{2k-1}}\\
&\left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial f^0}{\partial p_\beta}\right)_{\tau^+_{2k}} = \left(a_{\alpha\beta}\frac{\partial f^0}{\partial p_\beta} - \dot{\mu}p_\alpha\right)_{\tau_{2k}}\\
&0 = \left(\mu^0\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right)_{\tau_{2k}}
\end{aligned}
\tag{5.4.9}
$$

Imajući u vidu (5.3.7) jednostavno se uočava da koordinate ν^α iz (5.4.7) zadovoljavaju uslove skoka (5.4.9). Što se tiče koordinata λ_α iz (5.4.8), uslovi skoka (5.4.9) ispunjeni su samo ako je:

$$\dot{\mu}^0(\tau_{2k-1}) = 0 \qquad \dot{\mu}^0(\tau_{2k}) = 0. \tag{5.4.10}$$

Nameće se pitanje da li je to uvek moguće.

Zamenimo vrednosti λ_α, ν^α sa intervala $[\tau_{2k-1},\tau_{2k}]$ u Pontrjaginovu funkciju. Kako je njena vrednost na optimalnoj trajektoriji jednaka nuli, dobijamo:

$$\dot{\mu}^0 = \frac{1}{2T}\left(\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}p_\alpha - f^0\right) \tag{5.4.11}$$

pa bi (5.4.10) imalo smisla samo u posebnim slučajevima kad je:

$$\left(\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}p_\alpha - f^0\right)_{\tau_{2k-1}} = 0\ , \quad \left(\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}p_\alpha - f^0\right)_{\tau_{2k}} = 0 \tag{5.4.12}$$

ili:

$$\frac{\partial f^0}{\partial p_\alpha}p_\alpha - f^0 \equiv 0 \qquad \forall t \in [t_0,t_1]. \tag{5.4.13}$$

Za slučaj (5.4.13) spregnuti vektor bi bio neprekidan u celom intervalu $[t_0,t_1]$, jer je, s obzirom na (5.3.7) i (5.4.11),

$\mu^{o}(t)=0$. Kako je funkcija f^{o}, zavisno od zahteva optimalnosti, najčešće takva da nema osobine (5.4.12) i (5.4.13), problem uslova skoka u slučaju singularnih upravljanja ovde ostaje otvoren.

Suzimo postavljeni zadatak u tom smislu što ćemo postaviti zahtev optimalnosti da se sistem kreće po najkraćem luku između dva položaja u konfiguracionom prostoru. Tada podintegralna funkcija:

$$f^{o}=\sqrt{2T}$$

ima osobinu (5.4.13), pa je spregnuti vektor neprekidan na celom intervalu $[t_o,t_1]$ i ima oblik:

$$\nu^{\alpha}=0$$
$$\lambda_{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2T}}\,p_{\alpha}\,. \tag{5.4.14}$$

U skladu sa rezultatima odeljka (3.4) imamo:

$$u_{\alpha}^{*}=\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}}-Q_{\alpha}+\beta p_{\alpha}\,,\qquad \psi(q,p)<0$$
$$u_{\alpha}^{*}=\frac{\partial \Pi}{\partial q^{\alpha}}-Q_{\alpha}+\beta' p_{\alpha}\,,\qquad \psi(q,p)=0. \tag{5.4.15}$$

Pri kretanju fazne tačke po granici oblasti (5.4.2) mehanička energija je konstantna pa je ispunjeno:

$$\frac{\partial T}{\partial p_{\alpha}}(Q_{\alpha}+u_{\alpha}^{*})=0$$

odakle je, s obzirom na (5.4.15):

$$\beta'=\frac{\Pi}{2(h-\Pi)}\,.$$

6. OPTIMALNA STABILIZACIJA KRETANJA MEHANIČKOG SISTEMA

6.1. Diferencijalne jednačine poremećenog kretanja mehaničkog sistema

Rešavanje problema stabilizacije kretanja mehaničkog sistema sastoji se u određivanju analitičkog modela upravljačkog organa na principu povratne sprege. Značajnu ulogu u proučavanju ove oblasti odigrao je A.M. Letov serijom radova [10] koji su mnogim autorima poslužili kao osnov za rešavanje problema automatskog upravljanja i regulisanja. Realni uslovi i praktični zahtevi nameću procesu stabilizacije optimalnost u nekom smislu tako da rešenje problema treba tražiti u povezivanju principa optimalnosti i Ljapunovljevih metoda. Takav pristup pogodan je za primenu na sisteme čije je kretanje opisano diferencijalnim jednačinama prvog reda u normalnom obliku, pa ćemo problem posmatrati i rešavati u faznom prostoru.

Diferencijalne jednačine kretanja sistema u faznom V_{2n} prostoru imaju oblik:

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \qquad (6.1.1)$$

$$\dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} + Q_{\alpha}^{u} .$$

Neka su:

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(t), \quad p_{\alpha} = p_{\alpha}(t) \qquad (6.1.2)$$

rešenja sistema (6.1.1). Ona predstavljaju konačne jednačine neporemećenog kretanja mehaničkog sistema u faznom prostoru V_{2n}. Neka poremećeno stanje sistema određuju veličine:

$$\bar{q}^{\alpha} = q^{\alpha} + \xi^{\alpha}, \quad \bar{p}_{\alpha} = p_{\alpha} + \eta \qquad (6.1.3)$$

gde su ξ^{α} i η_{α} poremećaji faznih koordinata q^{α} i p_{α}.

Zamenom (6.1.3) u (6.1.1) dobijamo:

$$\dot{\xi}^{\alpha} = \Phi^{\alpha}(t,\xi,\eta)$$
(6.1.4)
$$\dot{\eta}_{\alpha} = F_{\alpha}(t,\xi,\eta).$$

Na taj način, poremećeno kretanje mehaničkog sistema opisano je diferencijalnim jednačinama kretanja (6.1.4) u faznom V_{2n} prostoru poremećaja ξ^{α} i η_{α} . Partikularna rešenja jednačina (6.1.4):

(6.1.5) $$\xi^{\alpha} = 0 \,, \quad \eta_{\alpha} = 0$$

predstavljaju jednačine neporemećenog kretanja.

Ako je neporemećeno kretanje (6.1.5) nestabilno, njegovu stabilizaciju možemo izvršiti delovanjem nekog upravljačkog sistema. Uvođenjem upravljanja u_i $(i=1,2,\ldots,r)$, diferencijalne jednačine poremećenog kretanja dobijaju oblik:

$$\dot{\xi}^{\alpha} = \Phi^{\alpha}(t,\xi,\eta)$$
(6.1.6)
$$\dot{\eta}_{\alpha} = \Psi_{\alpha}(t,\xi,\eta,u).$$

Neka upravljanja u_i pripadaju skupu dozvoljenih upravljanja G_u i neka su na neporemećenoj trajektoriji jednaka nuli. Osim toga, neka su desne strane jednačina (6.1.6) i njihovi izvodi, po svim promenljivim, neprekidne i definisane funkcije.

6.2. Stabilizacija kao problem optimalnog upravljanja

Uz navedene pretpostavke o jednačinama (6.1.6), rešavanje problema stabilizacije, sastoji se u određivanju dozvoljenih upravljanja $u_i = u_i(t, \xi^{\alpha}, \eta_{\alpha})$ koja obezbeđuju egzistenciju neke definitne funkcije $V(t, \xi^{\alpha}, \eta_{\alpha})$ čiji je izvod po vremenu, na poremećenoj trajektoriji suprotnog znaka ili jednak nuli. U opštem slučaju, rešenje ovako postavljenog problema jednostavno je i višeznačno. Međutim, uvođenjem uslova optimalnosti, problem postaje znatno složeniji.

Ograničimo se, u daljem razmatranju, na asimptotsku stabilizaciju i uslovimo da se proces odvija optimalno u nekom smislu.

Neka je uslov optimalnosti postavljen u vidu zahteva da funkcional:

$$J = \int_{t_0}^{\infty} f^0(t, \xi, \eta, u)\, dt \tag{6.2.1}$$

ima minimalnu vrednost u zadatom procesu stabilizacije. Ovde je f^0 neka, u opštem slučaju, nenegativna funkcija i vrlo često je, u problemima optimalne stabilizacije, pogodno birati da bude pozitivno definitna.

Na taj način, problem optimalne stabilizacije kretanja mehaničkog sistema svodi se na problem optimalnog upravljanja. Naime, treba naći takva upravljanja u_i, da sistem čije je kretanje opisano jednačinama (6.1.6), pređe iz stanja $t_0, \xi^\alpha(t_0), \eta_\alpha(t_0)$ u stanje $t_1 = \infty$, $\xi^\alpha(t_1)=0, \eta_\alpha(t_1)=0$, pri čemu treba da bude ispunjen uslov minimalnosti funkcionala (6.2.1)

Ovako postavljen problem omogućava neposrednu primenu principa maksimuma. Međutim, na taj način, optimalno upravljanje u_i^* dobija se u funkciji vremena, što je neprikladno za probleme automatskog upravljanja kojima pripada i optimalna stabilizacija kretanja. Treba rešavati problem optimalne sinteze, tj. tražiti optimalno upravljanje u funkciji faznog stanja sistema.

6.3. Belmanov princip optimalnosti i metod funkcije Ljapunova

Suština problema optimalne stabilizacije nameće da se uporedo razmatraju optimalnost i stabilnost kretanja. U tom smislu, metod za rešenje problema treba zasnovati na povezivanju kriterijuma optimalnosti i kriterijuma stabilnosti. U svom radu [37] rešavan je problem asimptotske stabilizacije linearizovanih sistema primenjujući teoremu Krasovskog o asimptotskoj stabilizaciji [25] , pri čemu je izvršeno objedinjavanje Pontrjaginovog principa maksimuma i metoda funkcije Ljapunova. Ovde ćemo, ne ulazeći u razmatranje oblika jednačina (6.1.6), metod za rešavanje problema zasnovati na Belmanovom principu optimalnosti.

Belmanov princip optimalnosti, koji se zasniva na stavu da je proizvoljni deo optimalne trajektorije takođe optimalna trajektorija, uvodi u razmatranje funkciju:

(6.3.1) $$S(t,\xi,\eta) = \int_t^{\infty} f^0(t,\xi,\eta,u)\,dt.$$

Korišćenjem ovakve funkcije, Belman je uslove optimalnosti izrazio u nekoliko oblika pogodnih za različite metode rešavanja. Mi ćemo koristiti Belmanov princip u diferencijalnoj formi,koji je razmatran u odeljku (2.5) i koji je pogodan za analitički pristup problemu.

U našem slučaju, tj. za jednačine (6.1.6) i funkcional (6.2.1) pomenuti princip ima oblik:

(6.3.2) $$\inf_{u^i\in G_u}\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial\xi^\alpha}\phi^\alpha(t,\xi,\eta)+\frac{\partial S}{\partial\eta_\alpha}\Psi_\alpha(t,\xi,\eta,u)+f^0(t,\xi,\eta,u)\right]=0.$$

S druge strane, primenimo metod funkcije Ljapunova za asimptotsku stabilnost. Neka je funkcija Ljapunova takva da je njen izvod u smislu jednačina (6.1.6):

(6.3.3) $$\dot V \geq -f^0(t,\xi,\eta,u)$$

pri čemu je na optimalnoj trajektoriji:

(6.3.4) $$(\dot V)_{u_i^*} = -f^0(t,\xi,\eta,u).$$

Na taj način je:

(6.3.5) $$(\dot V+f^0)_{u_i^*} = \min_{u_i\in G_u}(\dot V+\omega) = 0$$

odnosno, uzimajući u obzir (6.1.6),

(6.3.6) $$\min_{u_i \in G_u} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} \phi^\alpha(t,\xi,\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta_\alpha} \psi_\alpha(t,\xi,\eta,u) + f^0(t,\xi,\eta,u) \right] = 0$$

Iz (6.3.4) imamo:

(6.3.7) $$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{u_i^*} = -\omega(t,\xi,\eta,u^*).$$

U slučaju asimptotske stabilnosi je:

$$\lim_{t \to \infty} V = 0$$

pa je:

(6.3.8) $$V(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f^0 dt$$

tako da na optimalnoj trajektoriji konačno imamo:

(6.3.9) $$V = \int_{t}^{\infty} f^0 dt.$$

Upoređujući (6.3.6) i (6.3.9) sa (6.3.2) i (6.3.1) zaključujemo da, u problemima asimptotske stabilizacije, Belmanova funkcija ima oblik funkcije Ljapunova.

U slučaju kad dozvoljena upravljanja pripadaju otvorenom skupu, uslov (6.3.6) daje:

(6.3.10) $$\frac{\partial V}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \frac{\partial f^0}{\partial u_i} = 0$$

odakle optimalno upravljanje određujemo u obliku:

(6.3.11) $$u_i^* = u_i^*\left(t, \xi^\alpha, \eta_\alpha, \frac{\partial V}{\partial \eta_\alpha}\right).$$

Zamenom (6.3.11) u (6.3.6) dobijamo, u opštem slučaju nelinearnu, diferencijalnu jednačinu:

$$\mathcal{F}\left(t, \xi, \eta, \frac{\partial V}{\partial \xi}, \frac{\partial V}{\partial \eta}, \frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0. \tag{6.3.12}$$

Jednačine (6.1.6), (6.3.11), (6.3.12), početni i krajnji uslovi omogućuju konačno rešenje sistema. Odredivši funkciju Ljapunova u obliku

$$V = V(t, \xi, \eta) \tag{6.3.13}$$

i izračunavši njene parcijalne izvode po poremećajima η_α, iz (6.3.11 (6.3.11) dobijamo:

$$u_i^* = u_i^*(t, \xi, \eta). \tag{6.3.14}$$

Na taj način rešavamo problem optimalne sinteze, tj. određujemo optimalno upravljanje u funkciji faznog stanja. Ovaj oblik rešenja predstavlja analitički model upravljačkog sistema i pogodan je, sa praktičnog stanovišta, za optimalnu stabilizaciju kretanja mehaničkog sistema jer daje direktan odziv na informaciju o poremećenom stanju sistema.

Problem obične (neasimptotske) stabilizacije ne utvrđuje krajnje uslove već postavlja uslov da poremećaji pripadaju nekoj ograničenoj oblasti u okolini neporemećenog stanja. Osim toga, interval vremena u kome se vrši proces optimalne stabilizacije, u opštem slučaju, neutvrđen je, pa ovaj problem pripada klasi problema optimalnog upravljanja kretanjem sistema ograničenog faznog stanja sa slobodnim krajnjim stanjem.

L I T E R A T U R A

1. Aggarwal R., Leitmann G., Avoidance Control, Journ. of Din. Sist. Meas. and Control, ASME, Series G, Vol. 94, June 1972.

2. Andelić T. Stojanović R., Racionalna mehanika, Beograd, 1966.

3. Арнол д В.И., Матемaтематические методы класической механики, Наука, Москва, 1979.

4. Бакша А., Принцип максимума Понтрягина и интегральные принципы механики, т.п.МЕХАНИКА, 7, Београд, 1981.

5. Bellman R.E., Dynamic Programming, Princeton Universiti Press, Princeton, N.J., 1957.

6. Bellman R. Kalaba R., Dynamic Programming and Modern Control Theory, (prevod na ruski 1969.)

7. Bilimović A., O jednom opštem fenomenološkom diferencijalnom principu, Naučno delo, Beograd, 1958.

8. Болтянскии В.Г., Математические методы оптимального управления, Наука Москва, 1966.

9. Болтянскии В.Г., Оптимальное управление дискретнимысистемами Наука, Москва, 1973.

10. Добронравов В.В., Основы аналитической механики, Высшая школа, Москва, 1976.

11. Dreyfus S.E., Dinamic Programming and the Calculus of Variation, Academic Press, New York, 1965.

12. Черноуско Ф.Л. Акуленко Л.Д. Соколов Б.Н., Управление колебани ми, Наука, Москва, 1980.

13. Габасов Р. Кириллова Ф.М. Особ е оптимал н е управлени , Наука, Москва, 1973.

14. Габасов Р. Кириллова Ф.М., Основы динамического программирования, БГУ, Минск, 1975.

15. Kelley H.J., Singular exstremals in Lawdens problem of optimal rocket fight, J. AIAA, v. 1, No. 7, 1963.

16. Kelley H.J. Koop R.E. Moyer H.G., Singular exstremals, in Topics in Optimization (ed. by Leitman) Acad. Press, NY,1967.

17. Красовский Н.Н., Теория управления движением, Наука, Моаква,1968.

18. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов, Автомеханика и телемеханика, т.XXI,1960;XXII,1961;XXIII?1962.

19. Летов А.М., Динамика полета и управление, Наука, Москва, 1969.

20. Leitman G. An Introduction to Optimal Control, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

21. Lee E.B. Markus L., Foundations of Optimal Control Theory, (prevod na ruski, Moskva, 1972.)

22. Lefschetz S., Stability if nonlinear control sistems. New York, 1965.

23. Лурье А.И. Аналитическая механика, гос. изд. физ.-мат. лит. Москва, 1961.

24. Кильчевскии Н.А., Курс теоретической механики, тI,II, Наука, Москва, 1977.

25. Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, Наука, Москва, 1966.

26. Моисеев Н.Н., Численние методы в теории оптимальных систем, Наука, Моаква, 1971.

27. Моисеев Н.Н., Элементи теории оптимальных систем, Наука, Москва, 1975.

28. McConnel A.J. The Brahistochronic motion of a Dynamical sistem, Proc.Roy.Irish.Acad.39A,1930.

29. Niemann R.A., Ont the Optimal Control Problem With Variable Terminal Point, J. of D.S.M. andC. Series G vol.93. 1971.

30. Петров .П., Вариационные методы теории оптимального управления, Энергия, Ленинград, 1977.

31. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г. идр., Математтическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

33. Румянцев В.В., Об оптимальной стабилизации управляемых систем, ПММ, т.34, в п.3. 1970.

34. Sage A.P., Optimum Sistems Control, Prentice-Hall, Pr. N.J., 1968.

35. Троицкий В.А. Оптимальные процесс колебании механических систем, Машиностроение, Ленинград, 1976.

36. Ту Ю., Современная теория управления, Машиностроение, Москва, 1971.

37. Vuković J., Optimalna stabilizacija kretanja mehaničkog sistema, magistarski rad, Beograd 1977.

38. Vuković J., On optimal control of a motion of a mechanical system of a restricted kinetic energy, t. i p. meh. 1982.

39. Vujičić V., Optimalno upravljanje kretanjem holonomnog sistema, glas CCCXXIV SANU knj.47., Beograd, 1981.

40. Зубов В.И., Лекции по теории управления, Наука, Москва, 1975.

41. Kalman R.E. Falb P.L. Arbib M.A., Topics in Matematical System Theory, (prevod na ruski, 1971)

42. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В., Оптимальное управление, Наука,Москва, 1979.

43. Bliss G. A., Lectures on the Calculus of Variations, Press, Chicago, 1946.

44. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Основы теории управления, изд. Вища школа, Киев, 1975.

45. Гельфанд И.М., Фомин С.В., Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.

46. Гирсанов И.В. Лекции по математической теории экстремальных задач, изд. Московского университета, 1970.

47. Галиуллин И.А. и др., Построение систем программного движения, Наука, Москва, 1971.

48. Геращенко Е.И. Геращенко С.М., Метод разделения движений и оптимизация нелинеиных систем, Наука, Москва, 1975.

49. Henrion R. La theorie de la variation seconde e ses applications en commande optimale, (prevod na ruski 1979.)

50. Цлаф Л. ., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, Наука, Москва, 1970.

51. Пшеничний Б.Н., Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, Москва, 1980.