SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES ORDONNÉS

Aleksandar Grossmann, Zagreb

Si dans un ensemble totalement ordonné E il existe un sous-ensemble bien ordonné dont le type d'ordre est le nombre ordinal α, on dit qu'on peut représenter α dans E. Désignons par ΓE la borne supérieure des nombres ordinaux qu'on peut représenter dans E. pE signifiera la puissance, tE le type d'ordre de l'ensemble E.

Nous allons démontrer le

Théorème: Si $pE \leq \aleph_\xi$ *(ξ quelconque), alors ou bien* $\Gamma E < \omega_{\xi+1}$, *ou bien E est une somme ordonnée* $E = \sum_{i \varepsilon J} C_i$ *de portions* C_i, *par rapport à un argument J dont tout intervalle H satisfait à* $\Gamma H = \omega_{\xi+1}$.

Ce théorème généralise en partie les résultats obtenus par Kurepa dans [1].

La démonstration est basée sur le fait que les ordinaux inférieurs au nombre initial régulier $\omega_{\xi+1}$ forment un anneau (»Ring« au sens de Hausdorff [2]). Définissons dans E la relation $a \backsim b$, qui signifiera $\Gamma\,(a, b)_E < \omega_{\xi+1}$. Il est facile de vérifier que c'est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont des portions de E.

Lemme 1: Si $C(a)$ est l'ensemble des $x \varepsilon E$ tels que $x \backsim a$, on a $\Gamma\, C(a) < \omega_{\xi+1}$, quel que soit a.

Le lemme est évident si $C(a)$ a un premier et un dernier élément. Supposons que $C(a)$ n'ait ni un premier ni un dernier élément. Il existe alors un ensemble bien ordonné $B'' = \{a, \mathbf{b}''_1 \ldots \mathbf{b}''_\nu \ldots\}$ $(\nu < \boldsymbol{\omega}_\rho)$ de type $\omega_\rho \leq \omega_\xi$, confinal avec $C(a)$, et un ensemble inversement bien ordonné $B' = \{\ldots b'_\mu \ldots b'_2, b'_1, a\}$ $(\mu < < \omega_\tau)$ $\omega_\tau \leq \omega_\xi$, coïnitial avec $C(a)$. (Car $pC(a) \leq pE \leq \aleph_\xi$). Écrivons $\Gamma\,[b''_\nu, b''_{\nu+1})_E = \beta''_\nu$, $\Gamma\,(b'_{\mu+1}, b'_\mu]_E = \beta'_\mu$. On a $\beta''_\nu < \omega_{\xi+1}$ et $\beta'_\mu < \omega_{\xi+1}$ pour tout μ et tout ν, car $b''_\nu \backsim b''_{\nu+1}$, $b'_\mu \backsim b'_{\mu+1}$. De plus: il existe un nombre $\beta < \omega_{\xi+1}$, supérieur à tous les β'_μ, β''_ν, car les β'_μ, β''_ν ne peuvent pas former de suite de type $\omega_{\xi+1}$, et $\omega_{\xi+1}$ est régulier. On en déduit facilement que $\beta \cdot \omega_\rho < \omega_{\xi+1}$ majore les types des sous-ensembles bien ordonnés de $C(a)$; donc $\Gamma\, C(a) < < \omega_{\xi+1}$, c. q. f. d. Le même raisonnement s'applique aux autres cas possibles.

Il se peut que E ne contienne qu'une seule classe C. On a alors, d'après le lemme qui vient d'être démontré, $\Gamma E < \omega_{\xi+1}$. L'autre possibilité est que E contienne plusieurs classes $C(a)$. Vu que les classes sont des portions de E, on pourra écrire E comme somme ordonnée $E = \sum_{i\varepsilon J} C_i$, par rapport à un argument ordonné J, qu'on pourra identifier avec le sous-ensemble de E obtenu en choisissant un élément i de chaque classe $C_i = C(i)$.

Lemme 2: Si $H=(a, b)_J$ est un intervalle de J, on a $\Gamma H = \omega_{\xi+1}$, c'est-à-dire il est possible de représenter dans H tout ordinal $< \omega_{\xi+1}$.

Supposons le contraire, $\Gamma H < \omega_{\xi+1}$. Écrivons $\Gamma C_i = \gamma_i$. Pour tout i on a $\gamma_i < \omega_{\xi+1}$ (lemme 1). Mais leur borne supérieure $\gamma = \sup_{i\varepsilon H} \gamma_i$ est aussi $< \omega_{\xi+1}$. En effet, $\gamma \leq \sum_{i\varepsilon H} \gamma_i$, $p\gamma_i \leq \aleph_\xi$, $pH \leq pJ \leq pE = \aleph_\xi$, donc $p\gamma \leq \sum_{i\varepsilon H} p\gamma_i \leq \aleph_\xi \cdot \aleph_\xi = \aleph_\xi$ ce qui signifie $\gamma < \omega_{\xi+1}$. Soit A un sous-ensemble bien ordonné quelconque de $[a, b]_E$. Désignons par A_i l'intersection $A \cap C_i$ L'ensemble A_i est bien ordonné, et $tA_i \leq \gamma_i$. Vu que tout point de $(a, b)_E$ appartient à une des portions C_i, on a $A = \sum_{i\varepsilon H} A_i = \sum_{i\varepsilon K} A_i$, où $K \subseteq H$ réunit les éléments i pour lesquels A_i n'est pas vide. K doit être bien ordonné, et donc $tK \leq \Gamma H < \omega_{\xi+1}$. Or $tA = \sum_{i\varepsilon K} tA_i \leq \gamma \cdot (tK) \leq \gamma \cdot (\Gamma H) < \omega_{\xi+1}$. L'ordinal $\gamma \cdot (\Gamma H)$ ne dépend pas de A. Nous avons ainsi trouvé un ordinal $< \omega_{\xi+1}$, qui ne saurait être dépassé par le type d'aucun sous-ensemble bien ordonné de $(a, b)_E$. Donc $\Gamma(a, b)_E < \omega_{\xi+1}$, $a \sim b$, en contradiction avec la supposition que a et b appartiennent à deux classes differentes. Le lemme 2 est démontré, ce qui prouve le théorème.

Remarque: L'ensemble le plus simple satisfaisant aux hypothèses $pE = \aleph_\xi$, $\Gamma E = \omega_{\xi+1}$, est l'ensemble des nombres rationnels. $(\xi = 0)$ (v. [1]). L'existence d'ensembles de puissances supérieures satisfaisant à ces mêmes relations est assurée si l'on accepte l'hypothèse généralisée du continu. En effet, cette hypothèse garantit l'existence d'ensembles η_ξ de puissance $\aleph_\xi$ (V. Hausdorff [3] et Sierpinski [4]). Il serait très intéressant de savoir si tout ensemble E dans lequel on peut représenter tout ordinal de puissance $pE = \aleph_\xi$ contient un ensemble η_ξ. La réponse affirmative éclaircirait la structure de l'ensemble partiellement ordonné des types d'ordre de puissance $\aleph_\xi$.

RÉFÉRENCES:

[1] *G. Kurepa:* »Sur les ensembles ordonnés dénombrables«. Glasnik mat. fiz. Ser. II, t. 3 No 4, (1948) p. 145.

[2] *F. Hausdorff:* »Grundzüge einer allgemeiner Theorie der geordneten Mengen« Math. Ann. 65 (1908) p. 435.

[3] *F. Hausdorff:* Grundzüge der Mengenlehre 1914, Chap. VI.

[4] *W. Sierpinski:* »Sur une propriété des ensembles ordonnés« Fund. Math. 36 (1949) p. 56.

O JEDNOM SVOJSTVU UREĐENIH SKUPOVA

Aleksandar Grossmann, Zagreb

Sadržaj

Kaže se da se ordinalni broj α može prikazati u uređenom skupu E, ako postoji podskup od E, kome je redni tip α. U članku se pokazuje, poopćujući jedan rezultat iz [1], slijedeći teorem:

Ako je potencija skupa E manja ili jednaka od $\aleph_\xi$ (ξ proizvoljan), onda ili

a) postoji ordinalni broj potencije $\leq \aleph_\xi$, koji se ne može prikazati u E (simbolički: $\Gamma E < \omega_{\xi+1}$), ili

b) E je uređena suma komada C_i, koji zadovoljavaju $\Gamma C_i < \omega_{\xi+1}$, obzirom na argument J. U svakom intervalu skupa J može se prikazati bilo koji ordinalni broj potencije $\leq \aleph_\xi$.

Dokaz teče ovako: Među elementima iz E definira se relacija $a \sim b$, koja znači $\Gamma (a, b)_E < \omega_{\xi+1}$. Lako se vidi, da je to relacija ekvivalencije, i da je svaka klasa ekvivalencije C_i komad skupa E. Neka je J skup dobiven izborom jednog elementa iz svake klase C_i. U lemi 1 se dokazuje, da je $\Gamma C_i < \omega_{\xi+1}$ za bilo koji i, a u lemi 2 je pokazano, da se u svakom pravom intervalu skupa J može prikazati bilo koji ordinalni broj potencije $\leq \aleph_\xi$.

Postojanje skupova potencije $> \aleph_0$, koji zadovoljavaju b), osigurano je, ako se prihvati poopćena hipoteza kontinuuma. Postavlja se pitanje, da li svaki takav skup sadrži jedan skup tipa η_ξ. (v. [2])

(Primljeno 12. VI. 1952.)