ĐURO KUREPA

O REALNIM FUNKCIJAMA U OBITELJI UREĐENIH SKUPOVA RACIONALNIH BROJEVA

U nekoliko navrata[1] bilo je postavljeno ovo pitanje: može li se svakom dobro uređenom skupu a racionalnih brojeva pridružiti *racionalan* broj $\varphi(a)$, tako da bude $\varphi(x) < \varphi(y)$, kad god je dobro uređeni skup x racionalnih brojeva početan komad dobro uređena skupa y racionalnih brojeva. U knjizi *Teorija skupova* (v. [6], problemi 23.3.1, 23.3.2, 23.5) postavili smo s tim u vezi još tri druga problema. U ovom članku dat ćemo (negativan) odgovor na sva četiri problema (v. teoreme 3.1–3.6). Specijalno, odgovor na uvodno pitanje glasi: ne postoji nikakvo naprijed navedeno preslikavanje φ, jer je zahtjev, da φ prima samo racionalne vrijednosti preoštar; inače, zahtjevamo li, da vrijednosti od φ budu realni brojevi, problem je naravno moguć (isp. § 3).

Uvjerit ćemo se. da je navedeni problem najuže povezan s pitanjem prikazivanja uređenih skupova kao spoj (unija) svojih antilanaca (v. [3] i [5] p. 841). S tim u vezi od interesa je uputiti i na teorem 3.6, u kojem se nalazi iskaz ekvivalentan sa *Cantor*ovom hipotezom. Uređeni skupovi $w_k R$ i $\sigma_k R$ (v. § 2), koji se specijalno istražuju. direktno se nadovezuju na skup R racionalnih brojeva, pa je zato prirodno, da se i prouče.[2] S tim u vezi možemo odmah spomenuti, da se glavni rezultat rada sastoji u tom, da se skup $\sigma_k R$ (isp. § 2) ne može prikazati kao unija od manje od $\aleph_1$ svojih antilanaca; inače je već *Cantor* pokazao, da je $\sigma_k R$ unija od $\aleph_1$ mnogo svojih antilanaca. Također ćemo vidjeti, kako nijedan antilanac nije nigdje gust u prirodnom uređenju $\sigma_1 R$ skupa σR (v. teorem 4.1).

1. Proces wE. Proces σE. Neka je $\mathrm{E} = (E; \leq)$ uređen skup (potpuno ili djelomično). Označimo sa

$$wE \tag{1.1}$$

[1] v. *Kurepa*: [3] p. 1033, [4] p. 160 (problème 2), [5] p. 841. [6] p. 263 (problem 23.3.3).

[2] Specijalno skup σR definiran je već u Tezi (isp. [1] p. 95; također [2] p. 200, [4] p. 143).

obitelj svih potpuno dobro uređenih dijelova skupa E; specijalno je prazan skup v jedan elemenat u wE; u wE se nalaze i takvi dobro uređeni lanci skupa E, iza kojih nema nijedne točke skupa E. Skup wE smatrat ćemo uređenim relacijom *»podudaranja po početnim komadima«:*

(1.2) $$\leqq_k \text{ ili } k \text{ ili } K$$

što znači: za $a, b \in wE$ relacija $a \leqq_k b$ znači isto što i činjenica, da je a početni komad od b; specijalno će se smatrati $v \leqq_k a \, (a \in wE)$; tu je v prazan skup (vakuum). Uređeni skup

(1.3) $$(wE; \leqq_k),$$

a označivat ćemo ga i w_kE, *razgranat* je, jer za svako $a \in wE$ skup $(\cdot, a)_{w_kE}$ svih $x \in wE$, za koje je $x <_k a$, čine jedan lanac u w_kE, t. j. za bilo koja takva dva elementa x, x' postoji bar jedna od relacija $x \leqq_k x'$, $x' \leqq_k x$. Ktome je w_kE i (djelomično) dobro uređen, jer ni za koji neprazan dio $X \subseteq wR$ skup

(1.4) $$R_0 X$$

početnih elemenata skupa X nije prazan.

Zato je za svaki podskup $S \subseteq w_kE$ potpuno određen rang γS i slojevi $R_\xi S \, (\xi < \gamma S)$, i to po redu

(1.5) $$R_\xi S = R_0 (S \quad \bigvee_\eta R_\eta S) \quad (\eta < \xi)$$

za svako $\xi > 0$; pritom je γS prvi redni broj, za koji je $R_\xi S$ prazan[3)]

Naravno, za svako $\xi < \gamma S$ skup $R_\xi S$ je antilanac, t. j. bez različitih uporedljivih elemenata, a kako je

(1.6) $$S = \bigcup_\xi R_\xi S \quad (\xi < \gamma S),$$

imamo tako određen rastav uređena skupa S na $k\gamma S$ njegovih antilanaca $R_\xi S$.[4)]

Označimo li sa

(1.5) $$R^* S$$

skup završnih elemenata svakog uređenog skupa S, tada je specijalno određen skup

(1.7) $$R^* (wE)$$

kao i skup

(1.8) $$\sigma E = wE \quad R^* (wE) \quad (v).$$

Drugim riječima (v. *Thèse*, p. 95), σE je skup svih nepraznih dobro uređenih lanaca $L \subseteq E$ za svaki od kojih postoji bar jedan element $l \in E$ sa svojstvom $L \leqq l$. t. j. $x \leqq l \, (x \in L)$.

[3] Pritom valja uočiti. da je na pr. $R_0 (w_kE) = (v)$ = skup sastavljen od prazna skupa: naprotiv, $R_\alpha (w_kE) = v$ = prazno za $\alpha \geqq \gamma w_kE$. Više o tom može se naći u *Kurepa* [6], § 17.2 i 17.3.

[4] kX = kardinalni broj od X.

Označimo li za uređen skup S sa tS tip uređenja skupa S, tad je za svako $a \in wE$, ta određen redni broj, jer je a dobro uređen lanac; elemente od a možemo označiti po redu. i to na jednoznačan način ovako:

(1.9) $$a_0 < a_1 < \ldots a_\xi < \ldots \quad (\xi < ta)$$

ili kraće: $a_\xi \, (\xi < ta)$. Vidimo, da za svako $\xi < \gamma w_kE$ sloj $R_\xi w_kE$ obuhvaća sve i samo one $a \in wE$, za koje je $ta = \xi$.

2. *Skupovi* w_kR, σ_kR (R = uređeni skup racionalnih brojeva). Nas će napose zanimati uređeni skupovi

(2.1) $$w_kR, \ \sigma_kR,$$

gdje je R skup racionalnih brojeva. Istaknimo napose, da se σ_kR dobije iz w_kR izbacivanjem prazna skupa v i svih onih dobro uređenih skupova iz R, kojima je supremum $= \infty$. Isto tako, za svaki par x, x' racionalnih brojeva određen je skup $(x, x')_R$ svih $z \in R$, koji su između x, x'; tako imamo i skupove $w\,(x, x')_R$, $\sigma\,(x, x')_R$, $\sigma\,(\cdot, x)_R$ i t. d.; $\sigma\,(\cdot, x)_R$ označuje na pr. skup svih dobro uređenih nepraznih skupova racionalnih brojeva, kojima je supremum $< x$.

Kako po *Cantor*ovu teoremu za svako $\alpha < \omega_1$ ima dobro uređenih skupova $\subseteq R$ tipa α, bit će $R_\alpha (w_kR)$, $R_\alpha (\sigma_kR)$ neprazni, pa je zbog $kR = \aleph_0$:

(2.2) $$\gamma (w_kR) = \gamma (\sigma_kR) = \omega_1.$$

Zato

(2.3) $$\sigma_kR = \bigvee_a R_\alpha (\sigma_kR) \quad (a < \omega_1)$$

daje rastav skupa σ_kR u $\aleph_1$ mnogo antilanaca toga skupa. Međutim, vrijedi

Teorem 2.1. Uređeni skup σ_kR *ne može se prikazati kao unija od* $\leqq \aleph_0$ *svojih antilanaca.*

Podsjetimo se, da za svako $v \neq a \in wR$

(2.4) $$sup\ a$$

znači $\sup\limits_{x \in a} x$; prema tome

$$-\infty < sup\ a \leqq \infty. \text{ specijalno } -\infty < sup\ a < \infty \ (a \in \sigma R).$$
$$-\infty < sup\ a < sup\ a' \quad (a < a' \in \sigma R),$$

osim ako je k tome $a' = a \bigvee sup\ a$ i $sup\ a \in R$, kad je $sup\ a = sup\ a'$.

Dokažimo najprije da vrijedi

Lema 2.1. Za svako $a \in \sigma R$, $x \in (sup\ a, \cdot)_R$ *i za svaki* K-*antilanac* $A \subseteq \sigma_kR$ *postoji element* e. *koji zavisi od* a. A, x, *recimo*

$$e = \varphi (a, A, x)$$

tako da bude

(2.5) $$e \in \sigma (\cdot, x)_R$$

(2.6) $$a <_k e$$

(2.7) $$sup\ e < x$$

(2.8) $$A \wedge [\varphi(a, A, x), \cdot)_{\sigma_k(\cdot, x)_R} = v.$$

Pretpostavimo, da lema nije istinita; to bi značilo da postoji a, x i A, tako da nijedno $e \in \sigma R$ ne bi zadovoljavalo sve uvjete (2.5) – (2.8). No kako zbog gustoće skupa $(\cdot, x)_R$ vazda postoji element e s uvjetima (2.5) – (2.7), značilo bi, da ni za jedno e, koje zadovoljava uvjete (2.5), (2.6) i (2.7), ne bi bio ispunjen uvjet (2.8), nego bi za svako takvo e postojalo bar jedno a' sa svojstvom $a' \in A \wedge [e, \cdot)_{\sigma_k(\cdot, x)_R}$: specijalno dakle

$$a <_k e \leqq_k a',\ sup\ a' < x,\ a' \in A.$$

No, to bi značilo, da bi i element a' mogao poslužiti kao polazište za a u prethodnim razmatranjima, pa bi polazeći od

$$a' \in \sigma R,\ x \in (sup\ a', \cdot)_R \text{ i } A$$

izveli po pretpostavci, da postoji element a'' sa svojstvima

$$a' <_k a'',\ sup\ a' < sup\ a'' < x,\ a'' \in A.$$

Specijalno bi dakle bilo $a' <_k a''$, $a' \in A$, $a'' \in A$, što je protivno tome, da je A bez različitih uporedljivih elemenata. Time je lema 2.1 potpuno dokazana.

Prijeđimo sad na dokaz teorema 2.1. Neka su $a \in \sigma R$ i $x \in (sup\ a, \cdot)_R$ proizvoljni; neka je nadalje $A_n\ (n < \omega_0)$ bilo koji ω_0-niz k-antilanaca $\subseteq \sigma_k R$. Promatrajmo tada element $e^0 = \varphi(a, A_0, x)$ iz leme 2.1. On zadovoljava uvjete, što se iz uvjeta (2.5) – (2.8) dobiju pišući A_0 mjesto A; isto tako promatrajmo element $e^1 = \varphi(e^0, A_1, x)$ i općenito element $e^n = \varphi(e^{n-1}, A_n, x)\ (n < \omega_0)$; prema lemi 2.1 taj element e^n zadovoljava uvjete, što se iz (2.5) – (2.8) dobiju pišući e^{n-1} mjesto a te A_n mjesto A; specijalno, vrijede ove relacije:

(1.n) $$e^n \in \sigma(\cdot, x)_R$$

(2.n) $$e^{n-1} <_k e^n$$

(3.n) $$sup\ e^n < x$$

(4.n) $$A_n \wedge [e^n, \cdot)_{\sigma_k(\cdot, x)_R} = v.$$

Iz uvjeta (2.n) $(n < \omega_0)$ proizlazi

$$a <_k e^0 <_k e^1 <_k \ldots <_k e^n <_k \ldots$$

pa stavljajući

$$e = \bigvee_n e^n\ (n < \omega_0)$$

e je dobro uređen skup; a prema (1.n) zaključujemo, da je $e \subseteq (\cdot, x]_R$ dakle $e \in \sigma(\cdot, x')_R$ za svako $x' \in (x, \cdot)_R$. No $e^n <_k e\ (n < \omega_0)$ pa po relaciji (4.n) slijedi

$$A_n \wedge [e, \cdot)_{\sigma_k(\cdot, x)_R} = v \quad (n < \omega_0),$$

dakle

$$e \text{ non} \in \bigvee_n A_n \quad (n < \omega_0).$$

Drugim riječima:

$$e \in \sigma R \setminus \bigvee_n A_n \quad (n < \omega_0),$$

pa čak i

$$e \in w(\cdot, x)_R \setminus \bigvee_n A_n\ (n < \omega_0).$$

Time je teorem 2.1 dokazan.

Dokazali smo zapravo i ovaj precizniji:

Teorem 2.2. Ako su $a \in \sigma R$ *i* $x \in (sup\ a, \cdot)_R$ *proizvoljni, tada za svaki* ω_0*-niz* K*-antilanaca* $A_n \subseteq \sigma_k R$ *postoji element*

$$e \in w(\cdot, x)_R \setminus \bigvee_n A_n\ (n < \omega_0).$$

3. O uzlaznim preslikavanjima skupa $\sigma_k R$ *na* R *i* **R**.[5] Preslikavanje

(3.1) $$sup\ x\ (x \in \sigma_k R)$$

je uzlazno preslikavanje uređena skupa $\sigma_k R$ na uređeni skup $\mathbf{R}$; ono nije strogo uzlazno, jer, ako x nema posljednjeg elementa, t. j. ako nije $sup\ x \in x$, tad je za slučaj $sup\ x \in R$ naravno

$$x \vee sup\ x \in \sigma R,\ sup\ x = sup(x \vee sup\ x),$$

ma da je inače $x <_k x \vee sup\ x$. No *postoji čisto uzlazno preslikavanje skupa* $\sigma_k R$ *na* $\mathbf{R}$. Jer, neka je $r_n\ (n < \omega_0)$ jedno normalno dobro uređenje skupa R; stavimo li $\varphi(r_n) = \frac{1}{(n+1)^2}$ za svako $n < \omega_0$, tad je za svaki neprazni skup $X \subseteq R$ dovoljno staviti

$$f(X) = \sum_a \varphi(a) \quad (a \in X)$$

i $f(v) = v$, pa da se vidi. da je $f(X)\ (X \subseteq R)$ jedno čisto uzlazno preslikavanje čak skupa $(PR; \subseteq)$, a ne samo skupa $\sigma_k R$ na uređeni skup $\mathbf{R}$.[6]

Imajući u vidu, da je skup R svuda gust na skupu $\mathbf{R}$ i znajući, da postoji čisto uzlazno preslikavanje skupa $\sigma_k R$ na $\mathbf{R}$, postavili smo ovo pitanje:

Postoji li čisto uzlazno preslikavanje uređena skupa $\sigma_k R$ *na skup* R*?* (isp. [3] p. 1033, [4] p .160. [5], p. 841, [6] p. 263). Odgovor je negativan, jer vrijedi

Teorem 3.1. Ne postoji čisto uzlazno preslikavanje skupa $\sigma_k R$ *na* R*; drugim riječima, ako je* f *bilo koje čisto uzlazno preslikavanje skupa* $(\sigma R; \leqq_k)$ *u* $\mathbf{R}$*, tad* f *poprima bar jednu vrijednost iz skupa* $\mathbf{R} \setminus R$.

Jer, kad bi postojalo čisto uzlazno preslikavanje φ skupa $\sigma_k R$ na R, tada bi za svako $r \in \varphi \sigma_k R$ bio određen skup $\varphi^{-1}(r)$ svih $x \in \sigma_k R$, za koje je $\varphi(x) = r$; no $\varphi^{-1}(r)$ je čak određen K-antilanac, pa bi zbog

[5] Za uređen skup S označuje $\mathbf{S}$ uređen skup, što se iz S dobije popunjavanjem svih njegovih praznina. Prema tome $\mathbf{R}$ znači na pr. skup sastavljen od svih realnih brojeva i od $-\infty$ i $+\infty$.

[6] PR je skup svih $X \subseteq R$ uređenih relacijom $\subseteq$; naravno $wR \subseteq PR$; ako $x, y \in wR$ i $x \leqq_k y$, tada je $x \subseteq y$.

$$\sigma_k R = \bigcup_r \varphi^{-1}(r) \quad (r \in \varphi\sigma_k R)$$

$$k\varphi\sigma_k R \leqq \aleph_0$$

proizlazilo, da je uređen skup $\sigma_k R$ spoj od $\leqq \aleph_0$ svojih K-antilanaca, što se protivi teoremu 2.1.

Time su riješeni i problemi 23.3.1, 23.3.2, 23.5 iz [6], jer iz teorema 2.1 proizlaze teoremi 3.2–3.4.

Teorem 3.2: Ako u dobro uređenu razgranatu skupu T *postoji čisto uzlazna realna funkcija, onda se u općem slučaju ne može pretpostaviti, da ta funkcija ne prihvata iracionalnih vrijednosti, jer se u općem slučaju takvo* T *ne može rastaviti u prebrojivo mnogo svojih antilanaca.* (Slučaj $T = \sigma_k R$ to potvrđuje; isp. [3] p. 1033, [5] p. 841.)

Teorem 3.3. Ako postoji čisto uzlazno preslikavanje dobro uređena razgranata skupa T *na lanac* S, *pa ako je* $S_1 \subseteq S$ *i* S_1 *svuda gusto po* S, *tada ne mora postojati čisto uzlazno preslikavanje skupa* T *na* S_1 (slučaj $T = \sigma_k R$, $S_1 = R$, $S = \mathbf{R}$).

Teorem 3.4. Postoji lanac S *takav, da se granati skup* $w_k S$ *ne može preslikati strogo uzlazno na* S (slučaj $S = R$ to potvrđuje[7]).

Dokažimo također

Teorem 3.5. Postoji uređen skup T *sa* $T = \omega_1$ *i koji je unija od prebrojivo mnogo svojih antilanaca.*

Da se vidi ispravnost teorema 3.5, dovoljno je sa T označiti skup svih $a \in w_k R$ za koji je *sup* $a \in R$ (isp. dokaz teorema 3.1).

Teorem 3.6. Skup (PN; $\subseteq$) *svih dijelova skupa* N *prirodnih brojeva ne može se prikazati kao spoj od* $\aleph_0$ *familija skupova, od kojih dva po dva nisu u relaciji* $\subseteq$; *ako je* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *onda je analogan rastav u* $\aleph_1$ *antilanaca* $\subseteq$ (PN; $\subseteq$) *moguć, i obrnuto.*

Najprije je jasno, da su skupovi $(PN; \subseteq)$ i $(PR; \subseteq)$ slični. Dovoljno je promatrati bilo koje obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa N na čitavo R, tako da je $fN = R$ i definirati $f(v) = v$ $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(x)$ za svako $v \subset X \subset N$, pa da se vidi, da je tako definirano preslikavanje između PN i PR sličnost s obzirom na relaciju $\subseteq$. Nadalje, skup $(PR; \subseteq)$ ne može se prikazati kao unija od $\aleph_0$ svojih antilanaca, jer bi to stim prije važilo za podskup $(wR; \subseteq)$; no svaki $\subseteq$-antilanac iz toga skupa također je k-antilanac $\subseteq w_k R$, pa bi tako uređeni skup $w_k R$ bio unija od $\aleph_0$ k-antilanaca; stim prije bi to vrijedilo za $\sigma_k R$ kao dio skupa $w_k R$, protivno teoremu 3.1. No, u stvari, skup $(PR; \subseteq)$ [a time ni skup $(PN; \subseteq)$] ne može se prikazati kao unija od $< 2^{\aleph_0}$ svojih antilanaca, jer skup $(PR; \subseteq)$ sadržava jedan lanac L kardinalna broja $2^{\aleph_0}$; takav je lanac na pr. obitelj svih početnih komada uređena skupa R. A jasno je, da svaki antilanac presijeca svaki lanac u najviše jednom elementu. Zato svakom $l \in L$ odgovara bar jedno $A(l) \in F$ svake familije F antilanaca,

[7] Analogan teorem važi i za skup $S = \mathbf{R}$.

koji iscrpljuju zadani skup $(PR; \subseteq)$. Pritom, ako je opet $l \neq l' \in L$, mora biti $A(l) \neq A(l')$, što znači, da je $kF \geqq kL = 2^{\aleph_0} = kPR$. Da je s druge strane skup $(PR; \subseteq)$ moguće iscrpsti pomoću $2^{\aleph_0}$ antilanaca, vidi se promatrajući obitelj svih jednočlanih antilanaca iz toga skupa.

4. Prirodno uređenje skupova w_kR, σ_kR.[8] *Skupovi* $w_1 R = (wR; \leqq_1)$, $\sigma_1 R = (\sigma R; \leqq_1)$.

Djelomično uređenje skupa $w_k R$ može se proširiti na potpuno uređenje tako, da se s obzirom na relaciju $\leqq_k$ neuporedljivi elementi urede alfabetski, t. j. ako je $x, y \in wR$, a nije ni $x \leqq_k y$ ni $y \leqq_k x$, tada postoji potpuno određen redni broj

$$\nu = \nu(x, y) \tag{4.1}$$

tako da bude $x_\xi = y_\xi$ $(\xi < \nu)$, $\quad x_\nu \neq y_\nu$

dakle ili $x_\nu < y_\nu$ ili $y_\nu < x_\nu$;

stavljajući tada za $a, b \in wR$, da je

$$x \leqq_1 y \tag{4.2}$$

onda, i samo onda, ako je ili

$$x \leqq_k y \quad \text{ili} \quad x_\nu < y_\nu, \tag{4.3}$$

tad se vidi, da je

$$(wR; \leqq_1) = w_1 R$$

potpuno uređen skup.

O tom uređenom skupu bilo je govora već drugom prilikom (v. [2] p. 200–210); specijalno vrijedi (isp. *Teorija skupova* p. 222):

Lema 4.1. Za svaki element a $\in \sigma_k$R, *skup*

$$[a, \cdot)_{\sigma_k R} \text{ svih } a' \in \sigma_k R, \tag{4.4}$$

za koje je a $\leqq_k$ a'. *sačinjava jedan komad lanca* $(\sigma R; \leqq_1)$, *t. j. ako je* a $\leqq_k$ x, a $\leqq_k$ y, *te* x $\leqq_1$ z $\leqq_1$ y, *onda je* a $\leqq_k$ z. *Zato svaki takav skup* (4.4) *sadržava neprazni interval lanca* $(\sigma R, \leqq_1) = \sigma_1 R$.

Vidi se, da je antilanac $R^* wR$ skupa $w_k R$ posvuda gust na lancu $w_1 R$; to je stim zanimljivije, što vrijedi

Teorem 4.1. Ako je A *bilo koji antilanac skupa* $(\sigma R, \leqq_k)$, *tad* A *nije nigdje gust u skupu* $(\sigma R, \leqq_1)$.

Dokažimo najprije

Lemu 4.2. Ako je $(a, b)_{\sigma_1 R}$ *bilo koji neprazni interval skupa* $\sigma_1 R$,[9] *tad postoji* c $\in \sigma$R *sa svojstvom*

$$[c, \cdot)_{w_k R} \subseteq (a, b)_{\sigma_1 R}.$$

[8] Isp. [1] p. 87, 127.

[9] Primijetimo, da lanac $\sigma_1 R$ ima i susjednih elemenata; oni su oblika $a, a \cup (r)$, gdje je $r \in R$, a = bilo koji dobro uređen skup $\subseteq (\cdot, r)_R$ sa sup $a = r$. Da se izbjegne pojava susjednih elemenata u $\sigma_1 R$, stavili smo bili u [2] zahtjev, da promatrani elementi a budu *izolirani* skupovi.

Naravno da možemo pretpostaviti, da je $a <_1 b$. Odatle proizlazi. da je ili $a <_k b$ ili $a_{\nu(a,b)} < b_{\nu(a,b)}$, gdje je, kao što znamo

$$a = \{a_0 < a_1 < \ldots a_\alpha < \ldots\}_{\alpha < ta}$$

$$b = \{b_0 < b_1 < \ldots b_\beta < \ldots\}_{\beta < tb}$$

$$a_\xi = b_\xi \, (\xi < \nu(a,b)), \; a_\nu \neq b_\nu, \; \nu = \nu(a,b).$$

Prvi slučaj: $a <_k b$; dovoljno je na pr. uzeti broj $c_\alpha \in (sup, b_{ta})_R$ i staviti $c = a \bigcup (c_\alpha)$, pa da se uvjerimo, da c zadovoljava uvjete leme 4.2.

Drugi slučaj: $a_\nu < b_\nu$; dovoljno je uzeti $c = \{a_0 \ldots a_\xi \ldots c_\nu\}$ $(\xi < \nu)$, gdje je $c_\nu \in (a_\nu, b_\nu)_R$.

Dokažimo sada teorem 4.1. Pretpostavimo, da on nije ispravan, nego da postoji određen K-antilanac A, koji je gust u bar jednom nepraznom intervalu I lanca $(\sigma R; \leqq_1)$. Prema prethodnoj lemi 4.2, postoji bar jedna točka $c \in \sigma R$ sa svojstvom, da iz $c \leqq_k x \in \sigma R$ slijedi $x \in I$; no $c \in \sigma R$, pa zato svako $c^+ \in \sigma R$, koje u $(\sigma R, \leqq_1)$ dolazi neposredno iza c, ima u tom istom skupu dva neposredna sljedbenika, recimo c', c''; no ova dva elementa nisu u $\sigma_1 R$ susjedna, pa zbog pretpostavke, da je skup A gust u I slijedilo bi, da između c', c'' mora ležati bar jedan element $a \in A$.

Međutim pretpostavka je

$$a \in A \wedge (c', c'')_{\sigma_1 R} \tag{4.5}$$

nemoguća, kao što ćemo se odmah uvjeriti.

Promatrajmo naime elemente a, c; ili je $a \leqq_k c$ *ili* $c <_k a$ ili $a \|_k c$ (a, c su K-neuporedljivi). Međutim, ne može biti $a \leqq_k c$, jer je $c <_k c', c''$ pa bi bilo $a <_k c'$ c'', t. j. ne bi bilo $a \in (c', c'')_{\sigma_1 R}$, protivno (4.5). Ne može biti ni $c <_k a$, jer bi to značilo, da bi bilo $(a, \cdot)_{\sigma_k R} \subset (c, \cdot)_{\sigma_k R} \subset I$; kako je međutim, prema lemi 4.1, skup $(a, \cdot)_{\sigma_k R}$ jedan neprazan komad u $\sigma_1 R$, morao bi on sadržavati bar jednu točku $a' \in A$, jer je pretpostavljeno, da je A u I, a time i u $(a, \cdot)_{\sigma k R}$ svuda gust skup; tako bismo imali dvije točke a, $a' \in A$, za koje je $a <_k a'$, što se protivi pretpostavci, da je A antilanac u $\sigma_k R$. Preostaje još jedini slučaj $a \|_k c$; neka je tada $\nu = \nu(a, c)$ prvo mjesto, na kojem se skupovi a i c razlikuju, tako da je dakle ili $a_\nu < c_\nu$, ili $a_\nu > c_\nu$, a time $a <_1 c$ odnosno $a >_1 c$; prvi slučaj je nemoguć, jer bi to značilo, da je $a <_1 c', c''$, pa ne bi bilo $a \in (c', c'')_{\sigma_1 R}$; ostalo bi, da je $a_\nu > c_\nu$; no $c_\nu = c'_\nu = c''_\nu$, pa bi dakle bilo $a_\nu > c'_\nu$, $a_\nu > c''_\nu$, a time $a >_1 c'$, $a >_1 c''$, što opet isključuje pretpostavku (4.5). Time su sve logičke mogućnosti iscrpene, pa je teorem 4.1 posve dokazan.

LITERATURA

1. *G. Kurepa:* Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse. Paris, 1935 (Publ. math.. Belgrade, 4, 1935, 1–138).
2. *G. Kurepa:* O poredbenim relacijama, Rad Jugoslavenske akademije. Zagreb 1938. knj. 201 (81), 187–219.
3. *G. Kurepa:* Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés (Comptes rendus, Paris, 205, 1937. 1077–1085).
4. *G. Kurepa:* Ensembles linéaires et une classe de tableaux ramifiés (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn) Publ. math.. Belgrade, 6, 1937, 129–160).
5. *G. Kurepa:* Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés, [Revista de Ciencias, No 434. año 42 (1940), 827–846: No 437 año 43 (1941). 483–500].
6. *G. Kurepa:* Teorija skupova. Zagreb, 22+444. Naklada »Školska knjiga«. Zagreb. 1951.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke 14. IV. 1953.