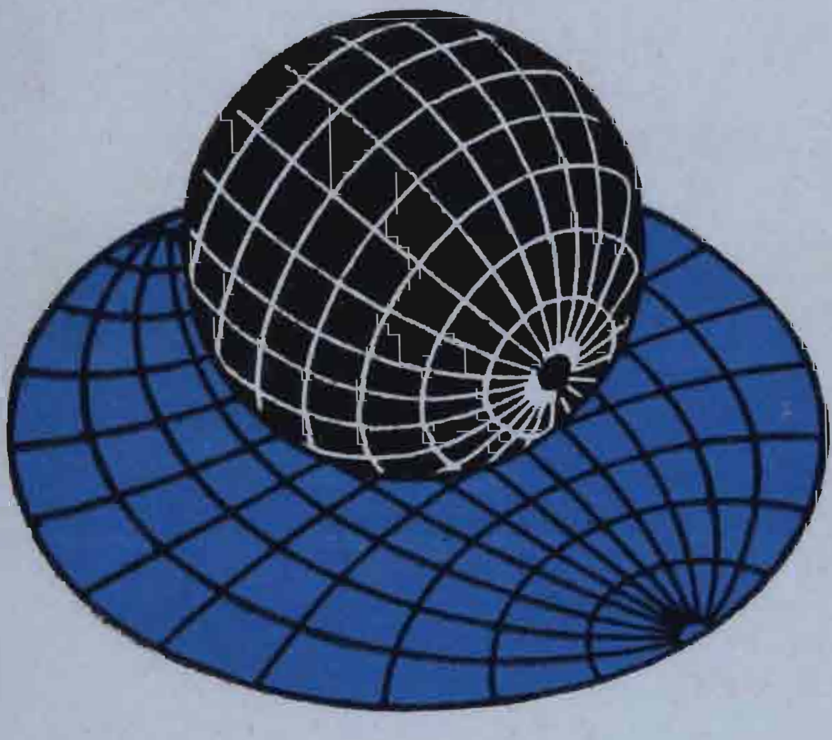
П. С. МОДЕНОВ

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ



П. С. МОДЕНОВ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

П. С. МОДЕНОВ

ЗАДАЧИ
по
ГЕОМЕТРИИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.151.0
М 74
УДК 513.0

М $\frac{20203-066}{053(02)-79}$ 26-79 1702040000

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге даны некоторые общие методы решения задач по элементарной геометрии.

Работа предназначена для преподавателей математики средних школ и для учащихся старших классов.

В книгу включен материал, несколько выходящий за рамки программ по математике для средних школ (применение комплексных чисел в планиметрии, инверсия, пучки окружностей и др.).

Книга состоит из пяти глав. В первых четырех главах рассматривается приложение к решению геометрических задач векторной алгебры, аналитической геометрии, комплексных чисел и преобразования инверсии. В V главе содержится список основных определений и формул, которые используются в первых четырех главах. Перед рассмотрением материала каждой главы необходимо познакомиться с соответствующей частью V главы. Вывод формул, приведенных в V главе, частично знаком учащимся старших классов средних школ. Подробный теоретический материал читатель найдет в списке рекомендуемой литературы, который дан в конце книги.

Хочу отметить дополнение к векторной алгебре, на которое мне указал еще в 1930 г. мой научный руководитель профессор МГУ Я. С. Дубнов: дело в том, что векторная алгебра на плоскости не доводится до той полноты, как это делается в пространстве: для устранения этого обстоятельства на ориентированной плоскости следует ввести поворот вектора на угол $+\pi/2$ (обозначение $[\boldsymbol{a}]$) и псевдоскалярное (или смешанное) произведение $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (или $\boldsymbol{ab}$) вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$. Отметим, что линейная векторная функция $A\boldsymbol{x}$ векторного аргумента $\boldsymbol{x}$, обладающая тем свойством, что $A\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$, на плоскости имеет вид $A\boldsymbol{x} = \lambda[\boldsymbol{x}]$ (λ — произвольное число), а в пространстве $A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{ax}]$ ($\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор). Смешанное произведение на плоскости и в пространстве может быть определено как полилинейная скалярная функция (от двух векторов на плоскости и от трех в пространстве), которая антисимметрична относительно любой пары векторов (на плоскости:

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -A(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x});$$

в пространстве:

$$A(x, y, z) = -A(y, x, z), \quad A(x, y, z) = -A(z, y, x),$$
$$A(x, y, z) = -A(x, z, y))$$

и нормирована (т. е. обращается в $+1$ для какого-нибудь одного ортонормального базиса).

Термин *смешанное* произведение объясняется тем, что оно и на плоскости и в пространстве может быть определено как результат двух операций

$$\{ab = ([a], b), \quad abc = ([ab], c)\}.$$

Хотя свободный вектор в геометрии является *классом* всех эквивалентных между собой направленных отрезков, я позволил в данной работе (в соответствии с широко установившейся традицией) идентифицировать вектор и направленный отрезок (подобно тому, как, например, в арифметике считают равными дроби p/q и np/nq, где p, q, n — натуральные числа). Поэтому в настоящей работе два направленных отрезка, которые коллинеарны, имеют одинаковую длину и направлены в одну сторону, называются или эквивалентными, или равными.

Идея применения комплексных чисел в планиметрии возникла у меня в связи с очень интересными и содержательными лекциями по теории аналитических функций, которые читал в МГУ профессор А. И. Маркушевич, и книгой по тому же вопросу того же автора. Кроме того, с сороковых годов систематически появляются статьи за рубежом, в которых применение комплексных чисел в планиметрии позволяет достаточно просто решать трудные задачи, связывая эти решения с основными геометрическими преобразованиями, которые естественно рассматривать в средней школе (изометрические, подобные, и круговые преобразования, в частности инверсия).

Во Франции вышла книга «Геометрия комплексных чисел» (R. Deaux. Geometrie de nombres complex). Всем этим вопросам посвящена глава III настоящей книги. Так как излагаемая здесь методика совсем не представлена в нашей учебной литературе, я позволил себе приводить все рассуждения и выкладки с исчерпывающей полнотой. В настоящей книге использованы работы ряда иностранных ученых (Р. До, Р. Бланшар, Гурмагшиг, В. Джебо и др.).

Полагаю, что содержание материала главы III является лишним доказательством того, как много теряет элементарная математика, если при ее изучении исключить комплексные числа. Рассмотрение простейших функций комплексного переменного

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}\ (ad - bc \neq 0), \qquad z' = \frac{a\bar{z} + c}{cz + d}\ (ad - bc \neq 0),$$
$$z' = az + b\ (a \neq 0), \qquad z' = a\bar{z} + b\ (a \neq 0)$$

охватывает изометрические преобразования первого и второго рода ($z' = az + b$, $z' = a\bar{z} + b$, где $|a| = 1$); подобные преобразования первого и второго рода ($z' = az + b$, $z' = a\bar{z} + b$, $a \neq 0$) и круговые преобразования (случай дробно-линейной функции; в частности, инверсия $z' = a/z$).

В главе IV дан обзор свойств инверсии плоскости и пространства и различные приложения (инверсоры, геометрия Маскерони, отображение областей при инверсии). В частности, подробно рассмотрены различные стереографические проекции сферы на плоскость и построение конформных изображений спектра меридианов и параллелей сферы.

В последней главе V дан список основных определений, формул и список литературы. В списке литературы указаны книги, в которых читатель найдет доказательства этих формул; это — учебники по векторной алгебре, аналитической геометрии, книги, в которых изложена теория геометрических преобразований, учебники по теории функций комплексного переменного.

Общие методы решения задач по геометрии, которые изложены в настоящей книге, имеют тесную взаимосвязь: векторная алгебра, как хорошо известно, связана с аналитической геометрией. Основные формулы, применяемые в главе III выводятся на базе фактов, известных из курсов аналитической геометрии, дробно-линейная функция комплексного переменного содержит в себе преобразование инверсии; преобразование инверсии хорошо исследуется и методами аналитической геометрии и т. д.

Замечу, что рисунок на обложке книги (он же рис. 114 в тексте книги) является копией *фотографии* изготовленной мною модели, иллюстрирующей стереографическую проекцию сферы на плоскость, при которой параллели и меридианы переходят в гиперболический пучок окружностей и союзный с ним эллиптический пучок окружностей. Так же были выполнены чертежи 107 и 108.

При работе над рукописью я получил ценные советы от профессора В. А. Ильина и члена-корреспондента АН СССР С. В. Яблонского, которым выражаю глубокую благодарность. Очень ценные и подробные советы я получил и от рецензента издательства «Наука», которые почти все были справедливыми и были мною приняты во внимание при окончательной подготовке рукописи к печати.

Конечно, приводимые в этой книге общие методы решения задач по элементарной геометрии не исчерпывают всех таких методов. В частности, отмечу очень сильный аналитический метод применения трилинейных координат на плоскости и тетраэдрических координат в пространстве (трилинейные координаты точки на проективно-евклидовой плоскости — это проективные координаты собственных точек такой плоскости при условии, что все четыре фундаментальные точки проективной системы координат —

также собственные; аналогично и в пространстве). Рамки книги не позволили мне изложить этот метод. Есть, конечно, еще и другие общие методы, которые, к сожалению, не затронуты в нашей учебной и методической литературе (например, синтетические методы решения задач с использованием изометрических, подобных, аффинных и проективных преобразований). Думаю, что со временем этот пробел будет заполнен.

П. С. Моденов

Материал, изложенный в главе V, используется при решении задач в главах I—IV, без ссылок на главу V. По этой причине, прежде чем приступить к проработке материала любой главы, надо очень внимательно изучить материал главы V. Кроме того понятия, приемы, терминология, введенные в предыдущих задачах, далее используются как известные, опять-таки без ссылок на соответствующие места. Чтобы читателю облегчить наведение соответствующих справок, книга снабжена предметным указателем.

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы на плоскости (примеры с решениями)

Пример 1. Даны внутренние углы A, B, C треугольника ABC; M — середина отрезка BC. Найти косинус угла $\varphi = \angle BAM$.

Решение.

$$\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC};$$

следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|} = \frac{AB^2 + (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})}{c\sqrt{c^2+b^2+2bc\cos A}} = \frac{c+b\cos A}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}},$$

и так как $b : c = \sin B : \sin C$, то

$$\cos\varphi = \frac{\sin C + \sin B \sin A}{\sqrt{\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B \sin C \cos A}}.$$

Пример 2. Даны внутренние углы A, B, C треугольника ABC. Пусть M — середина отрезка AB, а D — основание биссектрисы внутреннего угла C. Найти отношение

$$\frac{\overline{CDM}}{\overline{ABC}},$$

а также $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, где φ — угол от вектора $\overrightarrow{CD}$ до вектора $\overrightarrow{CM}$.

Решение.

$$\overrightarrow{CD} = \frac{a\mathbf{b}+b\mathbf{a}}{a+b}, \qquad \overrightarrow{CM} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2},$$

где $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$; следовательно,

$$\overline{CDM} = \overline{\overrightarrow{CD}\overrightarrow{CM}} = \frac{\overline{(a\mathbf{b}+b\mathbf{a})(\mathbf{a}+\mathbf{b})}}{2(a+b)} = \frac{(b-a)\overline{\mathbf{ab}}}{2(a+b)} = \frac{(a-b)\overline{ABC}}{a+b},$$

откуда

$$\frac{\overline{CDM}}{\overline{ABC}} = \frac{\overline{CDM}}{\overline{ABC}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Далее, так как $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow a\boldsymbol{b}+b\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CM} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, то

$$\cos\varphi = \frac{(a\boldsymbol{b}+b\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|a\boldsymbol{b}+b\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|} = \frac{ab^2+ba^2+ab(a+b)\cos C}{\sqrt{2a^2b^2+2a^2b^2\cos C}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}} =$$

$$= \frac{(a+b)\cos(C/2)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}} = \frac{(\sin A+\sin B)\cos(C/2)}{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos C}},$$

$$\sin\varphi = \frac{(a\boldsymbol{b}+b\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|a\boldsymbol{b}+b\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|} = \frac{(b-a)\,ab}{ab\sqrt{2(1+\cos C)}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C}} =$$

$$= \frac{(\sin B-\sin A)\sin(C/2)}{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B\cos C}}.$$

Пример 3. Даны внутренние углы A, B, C треугольника ABC; M — середина отрезка BC; N — основание высоты, опущенной из точки C на сторону AB; O — точка пересечения прямых AM и CN. Найти $\cos\varphi$, где $\varphi = \angle AOC$.

Решение. Ориентируем плоскость базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA}$. Тогда $\overrightarrow{CN} \uparrow\uparrow [\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]$. В самом деле, вектор $[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}] = [\overrightarrow{BA}]$ перпендикулярен прямой AB и образует с векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острые углы, так как

$$([\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{a}) = (-[\boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{ab} > 0,$$

$$([\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{b}) = ([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{ab} > 0.$$

Далее $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \frac{\boldsymbol{a}}{2} - \boldsymbol{b} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

Искомый угол φ — это угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{CN}$, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{([\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})}{|[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}]|\,|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|} = \frac{-2([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b})-([\boldsymbol{b}]\ \boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|} =$$

$$= \frac{-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|} = -\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|} =$$

$$= -\frac{ab\sin C}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}\sqrt{a^2+4b^2-4ab\cos C}} =$$

$$= -\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C}\sqrt{\sin^2 A+4\sin^2 B-4\sin A\sin B\cos C}}.$$

Пример 4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CA}$. Найти вектор $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{CO}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Из соотношений

$$\boldsymbol{x}^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})^2$$

находим

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}) = a^2/2, \quad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b}) = b^2/2,$$

и, следовательно, по формуле Гиббса

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}^* + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}^* = \frac{a^2}{2}\boldsymbol{a}^* + \frac{b^2}{2}\boldsymbol{b}^*,$$

где $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$ — базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{[\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{ba}}, \qquad \boldsymbol{b}^* = \frac{[\boldsymbol{a}]}{\boldsymbol{ab}}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{x} = \frac{b^2[\boldsymbol{a}] - a^2[\boldsymbol{b}]}{2\boldsymbol{ab}}.$$

Замечание. Если взять $\boldsymbol{x}$ в виде $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, то из соотношений

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = a^2/2, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = b^2/2$$

получим

$$\lambda a^2 + \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a^2/2,$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \mu b^2 = b^2/2.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{a^2b^2 - b^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{2(a^2b^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2)}, \qquad \mu = \frac{a^2b^2 - a^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{2(a^2b^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2)}$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\frac{a^2b^2 - b^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{a^2b^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\frac{a^2b^2 - a^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{a^2b^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{b}.$$

Пример 5. Даны смешанные произведения $\boldsymbol{ax} = p$, $\boldsymbol{bx} = q$ вектора $\boldsymbol{x}$ на неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выразить вектор $\boldsymbol{x}$ через векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и числа p, q.

Решение. Пусть

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{[\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{ba}}, \qquad \boldsymbol{b}^* = \frac{[\boldsymbol{a}]}{\boldsymbol{ab}}$$

— базис, взаимный базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}^*)\boldsymbol{b} = \left(\frac{[\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{ba}}, \boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{a} + \left(\frac{[\boldsymbol{a}]}{\boldsymbol{ab}}, \boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{b} =$$
$$= \frac{\boldsymbol{bx}}{\boldsymbol{ba}}\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{ax}}{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{b} = \frac{q}{\boldsymbol{ba}}\boldsymbol{a} + \frac{p}{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{b} = \frac{p\boldsymbol{b} - q\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{ab}}.$$

Пример 6. Относительно общей декартовой системы координат заданы две силы $\boldsymbol{F}_1 = \{2, 3\}$ и $\boldsymbol{F}_2 = \{4, 1\}$. Точки их приложения соответственно $A = (1, 1)$ и $B = (2, 4)$. Найти координаты равнодействующей и уравнение ее суппорта.

Решение. Координаты равнодействующей $\boldsymbol{F}$ равны 6 и 4. Далее, пусть $M(x, y)$ — произвольная точка суппорта. Тогда момент равнодействующей относительно точки M равен нулю. Этот момент равен сумме моментов $\overrightarrow{MA}\boldsymbol{F}_1$ и $\overrightarrow{MB}\boldsymbol{F}_2$ сил составляющих (смешанное произведение обладает свойством дистрибутивности).

Так как $\overrightarrow{MA} = \{1 - x, 1 - y\}$, $\overrightarrow{MB} = \{2 - x, 4 - y\}$, то

$$\overrightarrow{MA}\boldsymbol{F}_1 = \sqrt{g}\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1-y & 3 \end{vmatrix}, \qquad \overrightarrow{MB}\boldsymbol{F}_2 = \sqrt{g}\begin{vmatrix} 2-x & 4 \\ 4-y & 1 \end{vmatrix},$$

а следовательно, уравнение суппорта равнодействующей

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1-y & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-x & 4 \\ 4-y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$4x - 6y + 13 = 0.$$

§ 2. Векторы в пространстве (примеры с решениями)

Пример 1. Плоские углы трехгранного угла $OABC$ равны $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$. Внутренние двугранные углы данного трехгранного угла:

$$A = B\,(OA)\,C, \qquad B = C\,(OB)\,A, \qquad C = A\,(OC)\,B\text{ [1]}.$$

Трехгранным углом $OA^*B^*C^*$, *взаимным* с трехгранным углом $OABC$, называется трехгранный угол, который строится так: луч OA^* перпендикулярен лучам OB и OC и образует острый угол с лучом OA. Аналогично строятся и лучи OB^*, OC^*.

Пусть a^*, b^*, c^* — плоские углы трехгранного угла $OA^*B^*C^*$, а A^*, B^*, C^* — внутренние его двугранные углы.

1°. Зная a, b, c, найти $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

2°. Доказать, что $a^* = \pi - A$, $b^* = \pi - B$, $c^* = \pi - C$.

3°. Доказать, что $A^* = \pi - a$, $B^* = \pi - b$, $C^* = \pi - c$.

4°. Зная A, B, C, найти $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$.

5°. Доказать, что

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\Delta}{\sin a \sin b \sin c}$$

(это соотношение называется *теоремой синусов для трехгранного угла* $OABC$), где

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \cos b & \cos c \\ \cos b & 1 & \cos a \\ \cos c & \cos a & 1 \end{pmatrix}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}.$$

6°. Доказать, что теорему синусов для трехгранного угла $OABC$ (см. п. 5°) можно записать в виде

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\Delta^*}{\Delta},$$

где

$$\Delta^* = \sqrt{1 + 2\cos a^* \cos b^* \cos c^* - \cos^2 a^* - \cos^2 b^* - \cos^2 c^*} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos A \cos B \cos C - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C}.$$

---

[1]) Символом $B\,(OA)\,C$ обозначается двугранный угол с ребром OA, в полуплоскостях которого лежат точки B и C.

Решение. 1°. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — направляющие векторы лучей $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ($\boldsymbol{e}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{e}_3 \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$). Тогда векторы $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ базиса, взаимного с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, являются направляющими векторами лучей OA^*, OB^*, OC^*. Будем считать векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ единичными. Отложим их от точки O; тогда их концы E_1, E_2, E_3 будут лежать соответственно на лучах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Проведем через точку O плоскость π, перпендикулярную лучу OC. Пусть E_1^0 и E_2^0 — ортогональные проекции точек E_1 и E_2 на плоскость π. Тогда $C = A\,(OC)\,B = \angle E_1^0 O E_2^0$. Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \overrightarrow{OE_1^0}, \qquad \boldsymbol{e}_2^0 = \overrightarrow{OE_2^0}.$$

Имеем

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{e}_3.$$

Умножая скалярно обе части каждого из этих соотношений на вектор $\boldsymbol{e}_3$, получим

$$0 = \cos b + \lambda, \qquad 0 = \cos a + \mu,$$

так что

$$\boldsymbol{e}_1^0 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \cos b, \qquad \boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \cos a$$

и, следовательно,

$$\cos C = \frac{(\boldsymbol{e}_1^0, \boldsymbol{e}_2^0)}{|\boldsymbol{e}_1^0|\,|\boldsymbol{e}_2^0|} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \cos b,\ \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \cos a)}{\sqrt{(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \cos b)^2}\sqrt{(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \cos a)^2}} =$$

$$= \frac{\cos c - \cos b \cos a - \cos a \cos b + \cos b \cos a}{\sqrt{1 - 2\cos^2 b + \cos^2 b}\sqrt{1 - 2\cos^2 a + \cos^2 a}} =$$

$$= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Аналогично вычисляются $\cos A$ и $\cos B$. Итак,

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

2°. Формулы, полученные в п. 1°, можно переписать так:

$$\cos A = \frac{([\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2],\ [\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3])}{|[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]|\,|[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3]|},$$

$$\cos B = \frac{([\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1],\ [\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3])}{|[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1]|\,|[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]|},$$

$$\cos C = \frac{([\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1],\ [\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2])}{|[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1]|\,|[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2]|}.$$

Заметим, что при такой записи векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ не обязательно считать единичными, так как при замене $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$

соответственно на λe_1, μe_2, νe_3, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$, правые части последних соотношений не изменятся. Таким образом, e_1, e_2, e_3 можно считать любыми направляющими векторами лучей $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Последние соотношения можно переписать в виде

$$\cos A = -\frac{(e^2, e^3)}{|e^2||e^3|}, \qquad \cos B = -\frac{(e^3, e^1)}{|e^3||e^1|}, \qquad \cos C = -\frac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

В самом деле,

$$-\frac{(e^2, e^3)}{|e^2||e^3|} = -\frac{\left(\frac{[e_3e_1]}{e_1e_2e_3}, \frac{[e_1e_2]}{e_1e_2e_3}\right)}{\left|\frac{[e_3e_1]}{e_1e_2e_3}\right|\left|\frac{[e_1e_2]}{e_1e_2e_3}\right|} = \frac{([e_1e_3], [e_1e_2])}{|[e_1e_3]||[e_1e_2]|} = \cos A$$

и аналогично для двух других формул.

Отметим еще формулы для $\cos a^*$, $\cos b^*$, $\cos c^*$:

$$\cos a^* = \frac{(e^2, e^3)}{|e^2||e^3|}, \qquad \cos b^* = \frac{(e^3, e^1)}{|e^3||e^1|}, \qquad \cos c^* = \frac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

Из двух последних групп формул заключаем, что

$$\cos A = -\cos a^*, \qquad \cos B = -\cos b^*, \qquad \cos C = -\cos c^*,$$

и так как все углы A, B, C, a^*, b^*, c^* лежат в интервале $(0, \pi)$, то

$$a^* = \pi - A, \qquad b^* = \pi - B, \qquad c^* = \pi - C.$$

Эти соотношения можно вывести и геометрически.

3°. Запишем полученные выше формулы

$$\cos A = -\frac{(e^2, e^3)}{|e^2||e^3|}, \qquad \cos B = -\frac{(e^3, e^1)}{|e^3||e^1|}, \qquad \cos C = -\frac{(e^1, e^2)}{|e^1||e^2|}$$

для трехгранного угла $OA^*B^*C^*$:

$$\cos A^* = -\frac{(e_2, e_3)}{|e_2||e_3|}, \qquad \cos B^* = -\frac{(e_3, e_1)}{|e_3||e_1|}, \qquad \cos C^* = -\frac{(e_1, e_2)}{|e_1||e_2|},$$

и так как $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, то

$$\cos A^* = -\cos a, \qquad \cos B^* = -\cos b, \qquad \cos C^* = -\cos c,$$

откуда

$$A^* = \pi - a, \qquad B^* = \pi - b, \qquad C^* = \pi - c.$$

4°. Применяя для трехгранного угла $OA^*B^*C^*$ формулы, полученные в п. 1°, получим

$$\cos A^* = \frac{\cos a^* - \cos b^* \cos c^*}{\sin b^* \sin c^*}$$

или

$$\cos(\pi - a) = \frac{\cos(\pi - A) - \cos(\pi - B)\cos(\pi - C)}{\sin(\pi - B)\sin(\pi - C)},$$

или
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$
Аналогично выводятся формулы для $\cos b$ и $\cos c$. Итак,
$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$
$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$
$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

5°. Из формулы
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$
находим
$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}}{\sin b \sin c} = \frac{\Delta}{\sin b \sin c}.$$
Отсюда
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\Delta}{\sin a \sin b \sin c}.$$
То же самое значение имеют отношения $\frac{\sin B}{\sin b}$ и $\frac{\sin C}{\sin c}$. Итак,
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\Delta}{\sin a \sin b \sin c}.$$

6°. Запишем теорему синусов для трехгранного угла $OA^*B^*C^*$, взаимного с трехгранным углом $OABC$:
$$\frac{\sin A^*}{\sin a^*} = \frac{\sin B^*}{\sin b^*} = \frac{\sin C^*}{\sin c^*} = \frac{\Delta^*}{\sin \alpha^* \sin b^* \sin c^*}$$
или (см. пп. 2° и 3°)
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\Delta^*}{\sin A \sin B \sin C},$$
где
$$\Delta^* = \left(\begin{vmatrix} 1 & \cos b^* & \cos c^* \\ \cos b^* & 1 & \cos a^* \\ \cos c^* & \cos a^* & 1 \end{vmatrix}\right)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{1 + 2\cos a^* \cos b^* \cos c^* - \cos^2 a^* - \cos^2 b^* - \cos^2 c^*} =$$
$$= \sqrt{1 - 2\cos A \cos B \cos C - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C}.$$
Из равенств
$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\Delta}{\sin a \sin b \sin c},$$
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\Delta^*}{\sin A \sin B \sin C}$$

почленным делением находим

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{\Delta}{\Delta^*}\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin a \sin b \sin c}=\frac{\Delta}{\Delta^*}\frac{\sin^3 A}{\sin^3 a},$$

откуда

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\Delta^*}{\Delta}.$$

Аналогично

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\Delta^*}{\Delta}.$$

Итак,

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\Delta^*}{\Delta}.$$

Пример 2. В параллелепипеде даны длины a, b, c его ребер OA, OB, OC и плоские углы между ними:

$$\angle BOC=\alpha, \quad \angle COA=\beta, \quad \angle AOB=\gamma.$$

Найти:

1°. Длину d диагонали параллелепипеда OD.

2°. Косинусы углов φ_1, φ_2, φ_3, образуемых диагональю $\overrightarrow{OD}$ с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

3°. Если даны еще координаты u, v, w проекций $\overrightarrow{OD}$ на оси $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OC}$, то доказать, что

$$d=\sqrt{au+bv+cw}.$$

4°. Выразить длину d диагонали OD через углы α, β, γ и координаты u, v, w проекций направленного отрезка $\overrightarrow{OD}$ на оси $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

5°. Выразить объем V данного параллелепипеда через a, b, c, α, β, γ.

6°. Из точки O выходят два луча $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$; первый луч образует с осями $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ углы α_1, β_1, γ_1; второй — углы α_2, β_2, γ_2. Выразить косинус угла θ между лучами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ через α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2.

7°. Найти кратчайшее расстояние между прямыми OD и AB, зная a, b, c, α, β, γ.

8°. Найти расстояние δ от точки D до прямой AB.

Решение. 1°. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$, $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}$. Тогда

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

откуда

$$d=\sqrt{\boldsymbol{d}^2}=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta+2ab\cos\gamma}.$$

2°.

$$\cos\varphi_1=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{d}|}=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{d}|}=$$

$$=\frac{a^2+ab\cos\gamma+ac\cos\beta}{ad}=\frac{a+b\cos\gamma+c\cos\beta}{d}.$$

Аналогично выводятся формулы для $\cos\varphi_2$ и $\cos\varphi_3$. Итак,

$$\cos\varphi_1=\frac{a+b\cos\gamma+c\cos\beta}{d},$$

$$\cos\varphi_2=\frac{a\cos\gamma+b+c\cos\alpha}{d},$$

$$\cos\varphi_3=\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha+c}{d}.$$

3°. Из формул п. 2° имеем

$$u=d\cos\varphi_1=a+b\cos\gamma+c\cos\beta,$$

$$v=d\cos\varphi_2=a\cos\gamma+b+c\cos\alpha,$$

$$w=d\cos\varphi_3=a\cos\beta+b\cos\alpha+c.$$

Умножая обе части каждой из этих формул соответственно на a, b, c и складывая почленно полученные формулы, будем иметь

$$au+bv+cw=a(a+b\cos\gamma+c\cos\beta)+$$

$$+b(a\cos\gamma+b+c\cos\alpha)+c(a\cos\beta+b\cos\alpha+c)=d^2.$$

4°. Из формул п. 2° следует

$$a+b\cos\gamma+c\cos\beta=u,$$

$$a\cos\gamma+b+c\cos\alpha=v,$$

$$a\cos\beta+b\cos\alpha+c=w.$$

Решая эту систему относительно a, b, c, получим

$$a=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} u & \cos\gamma & \cos\beta \\ v & 1 & \cos\alpha \\ w & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

$$b=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & u & \cos\beta \\ \cos\gamma & v & \cos\alpha \\ \cos\beta & w & 1 \end{vmatrix},$$

$$c=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & u \\ \cos\gamma & 1 & v \\ \cos\beta & \cos\alpha & w \end{vmatrix},$$

где

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma,$$

и, следовательно, на основании формулы

$$d^2 = au + bv + cw$$

имеем

$$d^2 = \frac{1}{\delta}\left(u \begin{vmatrix} u & \cos\gamma & \cos\beta \\ v & 1 & \cos\alpha \\ w & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} 1 & u & \cos\beta \\ \cos\gamma & v & \cos\alpha \\ \cos\beta & w & 1 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & u \\ \cos\gamma & 1 & v \\ \cos\beta & \cos\alpha & w \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta & u \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha & v \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

так что

$$d = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left(- \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta & u \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha & v \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} \right)^{1/2}.$$

5°. $$V^2 = (\boldsymbol{abc})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

следовательно,

$$V = abc\sqrt{\delta} = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

6°. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$ и будем считать, что $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}| = 1$.

Разложим вектор $\boldsymbol{p}$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{a} + p_2\boldsymbol{b} + p_3\boldsymbol{c}.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства последовательно на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, получим

$$\cos\alpha_1 = p_1 + p_2\cos\gamma - p_3\cos\beta,$$

$$\cos\beta_1 = p_1\cos\gamma + p_2 + p_3\cos\alpha,$$

$$\cos\gamma_1 = p_1\cos\beta + p_2\cos\alpha + p_3.$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\beta_1 & 1 & \cos\alpha \\ \cos\gamma_1 & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

$$p_2 = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta_1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\gamma_1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\beta & \cos\alpha & \cos\gamma_1 \end{vmatrix}.$$

Далее, пусть $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ — базис, взаимный базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Разложим вектор $\boldsymbol{q}$ по базису $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$:

$$\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{a}^* + q_2\boldsymbol{b}^* + q_3\boldsymbol{c}^*.$$

Умножая поочередно обе части этого соотношения скалярно на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, получим

$$q_1 = \cos\alpha_2, \quad q_2 = \cos\beta_2, \quad q_3 = \cos\gamma_2.$$

Итак,

$$\boldsymbol{q} = \cos\alpha_2\,\boldsymbol{a}^* + \cos\beta_2\,\boldsymbol{b}^* + \cos\gamma_2\boldsymbol{c}^*.$$

Теперь находим

$$\cos(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) = \cos\theta = (\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}) = (p_1\boldsymbol{a} + p_2\boldsymbol{b} + p_3\boldsymbol{c},\ q_1\boldsymbol{a}^* + q_2\boldsymbol{b}^* + q_3\boldsymbol{c}^*) =$$
$$= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 =$$
$$= \frac{1}{\delta}\left(\cos\alpha_2\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\beta_1 & 1 & \cos\alpha \\ \cos\gamma_1 & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} + \cos\beta_2\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \cos\beta \\ \cos\gamma & \cos\beta_1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\gamma_1 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$
$$\left. + \cos\gamma_2\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma & 1 & \cos\beta_1 \\ \cos\beta & \cos\alpha & \cos\gamma_1 \end{vmatrix}\right) = -\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha & \cos\beta_1 \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Формулу, из которой находится $\cos\theta$, можно записать в более компактном виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha & \cos\beta_1 \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 & \cos\theta \end{vmatrix} = 0.$$

7°. Кратчайшее расстояние d между двумя неколлинеарными прямыми в пространстве равно длине проекции любого отрезка M_1M_2, концы которого лежат на данных прямых, на общий перпендикуляр к данным прямым.

Таким образом, в п. 7°

$$M_1 = O, \quad M_2 = B, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}.$$

Далее, направление общего перпендикуляра к прямым OD и AB задается векторным произведением вектора $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OD}$ на вектор $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$:

$$[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})] = 2[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{cb}] + [\boldsymbol{ac}].$$

Итак,

$$d = \frac{|(\boldsymbol{b},\ 2[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{cb}] + [\boldsymbol{ac}])|}{|2[\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{cb}] + [\boldsymbol{ac}]|} = \frac{|\boldsymbol{abc}|}{\sqrt{T}},$$

где (см. п. 5°)

$$|abc| = abc\sqrt{\delta},$$

$$T = 4[ab]^2 + [cb]^2 + [ac]^2 + 4([ab],\ [cb]) + 2([cb],\ [ac]) + \\ + 4([ab],\ [ac]) = 4a^2b^2\sin^2\gamma + c^2b^2\sin^2\alpha + a^2c^2\sin^2\beta + \\ + 4b^2ac(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) + 4a^2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) - \\ - 2c^2ab(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta).$$

Итак, $d = abc\dfrac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{T}}$.

8°. Пусть e — направляющий вектор прямой l и B — произвольная точка пространства. Возьмем на прямой l какую-нибудь точку A, и пусть $\overrightarrow{AB} = a$. Тогда расстояние d от точки B до прямой l вычисляется по формуле $d = |[ae]|/|e|$. В самом деле, $|[ae]| = |a||e|\sin\varphi = |e|d$.

В частности, если e — единичный вектор, то

$$d = |[ae]|.$$

Для определения расстояния от точки D до прямой AB заметим, что направляющий вектор этой прямой равен $a - b$, и так как $\overrightarrow{AD} = b + c$, то, применяя формулу

$$d = \frac{|[ae]|}{|e|},$$

будем иметь

$$d = \frac{|[(a-b)(b+c)]|}{|a-b|} = \frac{|[ab]+[ac]+[cb]|}{|a-b|} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}},$$

где

$$T_1 = a^2b^2\sin^2\gamma + b^2c^2\sin^2\alpha + c^2a^2\sin^2\beta + \\ + 2a^2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) + 2b^2ca(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha) - \\ - 2c^2ab(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta),$$

$$T_2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Пример 3. Даны плоские углы $\angle BOC = a$, $\angle COA = b$, $\angle AOB = c$ трехгранного угла $OABC$. Луч l выходит из точки O и образует с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ данного трехгранного угла равные углы φ. Найти $\operatorname{tg}\varphi$.

Решение. Выберем на ребрах данного трехгранного угла точки A, B, C так, чтобы $OA = OB = OC = 1$, и рассмотрим единичные векторы $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$, $c = \overrightarrow{OC}$.

Пусть $\overrightarrow{OP}$ — направленный отрезок, длина которого равна 1, такой, что $\angle POA = \angle POB = \angle POC = \varphi$. Рассмотрим единичный вектор $x = \overrightarrow{OP}$. Тогда

$$(x,\ a) = (x,\ b) = (x,\ c) = \cos\varphi$$

и по формуле Гиббса

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}^*+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}^*+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{c}^*=(\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{c}^*)\cos\varphi, \quad (*)$$

где $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ — базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, т. е.

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{[\boldsymbol{bc}]}{\boldsymbol{abc}},\quad \boldsymbol{b}^*=\frac{[\boldsymbol{ca}]}{\boldsymbol{abc}},\quad \boldsymbol{c}^*=\frac{[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{abc}}.$$

Возводя в скалярный квадрат обе части равенства (*), получим

$$1=\cos^2\varphi\,(\boldsymbol{a}^*+\boldsymbol{b}^*+\boldsymbol{c}^*)^2,$$

откуда

$$1+\operatorname{tg}^2\varphi=\boldsymbol{a}^{*2}+\boldsymbol{b}^{*2}+\boldsymbol{c}^{*2}+2\,(\boldsymbol{b}^*,\ \boldsymbol{c}^*)+2\,(\boldsymbol{c}^*,\ \boldsymbol{a}^*)+2\,(\boldsymbol{a}^*,\ \boldsymbol{b}^*)=\frac{T_1}{T_2},$$

где

$$T_1=\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+2\,(\cos b\cos c-\cos a)+\\ +2\,(\cos c\cos a-\cos b)+2\,(\cos a\cos b-\cos c),$$

$$T_2=(\boldsymbol{abc})^2=1+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{T_1}{T_2}-1=\frac{T_1-T_2}{T_2},$$

$$T_1-T_2=\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c+2\,(\cos b\cos c-\cos a)+\\ +2\,(\cos c\cos a-\cos b)+2\,(\cos a\cos b-\cos c)-\\ -1-2\cos a\cos b\cos c+\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=\\ =2[1-(\cos a+\cos b+\cos c)+(\cos b\cos c+\cos c\cos a+\cos a\cos b)-\\ -\cos a\cos b\cos c]=\\ =2\,(1-\cos a)\,(1-\cos b)\,(1-\cos c)=16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{T_1-T_2}{T_2}=\frac{16\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}}{\begin{vmatrix}1&\cos b&\cos c\\ \cos b&1&\cos a\\ \cos c&\cos a&1\end{vmatrix}}.$$

Угол φ можно считать острым (так как если φ — тупой угол, то направление отрезка $\overrightarrow{OP}$ можно изменить на противоположное).

Итак,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&\cos b&\cos c\\ \cos b&1&\cos a\\ \cos c&\cos a&1\end{vmatrix}=\\ =1+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c.$$

Пример 4. В тетраэдре $OABC$ даны длины ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Пусть PQ — общий перпендикуляр к прямым OA и BC (точка P лежит на прямой OA, точка Q — на прямой BC). Найти отношения

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{BC}} = \mu.$$

Решение. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\boldsymbol{t} = \overrightarrow{BQ}$, $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{PQ}$. Тогда

$$\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{t} = \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}).$$

Далее,

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{s} - \boldsymbol{t} - \boldsymbol{b} = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{s} = -\lambda \boldsymbol{a} + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}.$$

Так как вектор $\boldsymbol{s}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{s}) = 0, \quad (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{s}) = 0,$$

или

$$(\boldsymbol{a}, -\lambda \boldsymbol{a} + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}) = 0,$$
$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, -\lambda \boldsymbol{a} + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}) = 0,$$

или

$$\lambda a^2 - \mu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$
$$-\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})^2 = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}).$$

Из полученной системы уравнений, линейных относительно λ и μ, находим эти неизвестные:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{b}{a} \frac{\cos\gamma\,(c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha) - (c\cos\beta - b\cos\gamma)(c\cos\alpha - b)}{c^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma - 2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)},$$

$$\mu = \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{BC}} = b\,\frac{-c\cos\alpha + b + \cos\gamma\,(c\cos\beta - b\cos\gamma)}{c^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma - 2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}.$$

Пример 5. В настоящем примере дан векторный вывод основных формул, применяемых в теории аксонометрии.

Пусть Ox, Oy, Oz — три попарно перпендикулярные оси. Рассмотрим плоскость π, пересекающую эти оси соответственно в точках A, B, C. Пространство будем считать ориентированным упорядоченной тройкой осей Ox, Oy, Oz. Обозначим через O' ортогональную проекцию точки O на плоскость $\pi = ABC$, через α_1, α_2, α_3 обозначим углы осей Ox, Oy, Oz с плоскостью π, а через β_1, β_2, β_3 — соответственно углы $BO'C$, $CO'A$, $AO'B$.

Доказать, что

1°.
$$\cos\beta_1 = -\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3,$$
$$\cos\beta_2 = -\operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_1,$$
$$\cos\beta_3 = -\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2.$$

2°. $$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_2} = \frac{\sin\beta_3}{\sin\alpha_3\cos\alpha_3} = \frac{1}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}.$$

3°. $$\frac{\sin 2\beta_1}{\cos^2\alpha_1} = \frac{\sin 2\beta_2}{\cos^2\alpha_2} = \frac{\sin 2\beta_3}{\cos^2\alpha_3} = -2\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3}{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3}.$$

4°. Существует треугольник, длины сторон которого пропорциональны $\cos^2\alpha_1$, $\cos^2\alpha_2$, $\cos^2\alpha_3$; одним из таких треугольников является треугольник, образованный основаниями высот треугольника ABC (*теорема Шлёмильха*).

Решение. 1°.

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}) = \overrightarrow{OO'}^2 + (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'C}) = 0, \quad (*)$$

так как $\overrightarrow{OO'} \perp \overrightarrow{O'C}$, $\overrightarrow{OO'} \perp \overrightarrow{O'B}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$, следовательно, из соотношения $(*)$ получим

$$O'B\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot O'C\operatorname{tg}\alpha_3 + O'B \cdot O'C\cos\beta_1 = 0,$$

откуда

$$\cos\beta_1 = -\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3.$$

Аналогично выводятся формулы

$$\cos\beta_2 = -\operatorname{tg}\alpha_3\operatorname{tg}\alpha_1,$$
$$\cos\beta_3 = -\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2.$$

2°. $$[\overrightarrow{O'B}\,\overrightarrow{O'C}] = [(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC})] =$$
$$= [\overrightarrow{O'O}\,\overrightarrow{OC}] + [\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{O'O}] + [\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}].$$

Отсюда

$$([\overrightarrow{O'B}\,\overrightarrow{O'C}], \overrightarrow{OO'}) = ([\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}], \overrightarrow{OO'}). \quad (**)$$

Далее,

$$([\overrightarrow{O'B}\,\overrightarrow{O'C}], \overrightarrow{OO'}) = |[\overrightarrow{O'B}\,\overrightarrow{O'C}]|\,OO' =$$
$$= O'B \cdot O'C\sin\beta_1 \cdot OO' = OB\cos\alpha_2 \cdot OC\cos\alpha_3 \cdot OO'\sin\beta_1,$$
$$([\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}], \overrightarrow{OO'}) = OB \cdot OC \cdot OO'\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = OB \cdot OC \cdot OO'\sin\alpha_1,$$

и, значит, в силу равенства $(**)$ имеем

$$\sin\beta_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 = \sin\alpha_1;$$

следовательно,

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1} = \frac{1}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}=\frac{\sin\beta_3}{\sin\alpha_3\cos\alpha_3}=\frac{1}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}.$$

3°. Следует из пп. 1° и 2°.

4°. Переписывая соотношения п. 3° в виде

$$\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin 2\left(\beta_1-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos^2\alpha_2}{\sin 2\left(\beta_2-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos^2\alpha_3}{\sin 2\left(\beta_3-\frac{\pi}{2}\right)}$$

и замечая, что

$$2\left(\beta_1-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\beta_2-\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\beta_3-\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

заключаем, что существует треугольник Δ с углами $2\left(\beta_1-\frac{\pi}{2}\right)$, $2\left(\beta_2-\frac{\pi}{2}\right)$, $2\left(\beta_3-\frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле,

$$\beta_1>\pi/2,\quad \beta_2>\pi/2,\ \beta_3>\pi/2,$$

так как все плоские углы трехгранного угла $OABC$ равны $\pi/2$, а потому β_1, β_2, β_3 — тупые углы: сфера с диаметром AB проходит через точку O ($\angle AOB=\pi/2$), плоскость ABC пересечет эту сферу по большому кругу, так как AB — диаметр сферы, проекция O' точки O на плоскость ABC попадет внутрь этого круга и, значит, угол $AO'B=\beta_1$ тупой (аналогично $\pi/2<\beta_2<\pi$, $\pi/2<\beta_3<\pi$).

Из последних соотношений следует, что $\cos^2\alpha_1$, $\cos^2\alpha_2$, $\cos^2\alpha_3$ пропорциональны синусам углов треугольника Δ, следовательно, и длинам его сторон.

Докажем, наконец, что один из таких треугольников образован основаниями высот треугольника ABC. В самом деле: треугольник ABC остроугольный, так как длины его сторон

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2},\quad BC=\sqrt{OB^2+OC^2},\quad CA=\sqrt{OC^2+OA^2},$$

и, значит, например, $AB^2+BC^2>AC^2$ (угол B острый) и т. д. Далее, так как $OA\perp OBC$, то $OA\perp BC$ и, следовательно, на основании теоремы о трех перпендикулярах $AO'\perp BC$ и аналогично $BO'\perp CA$, $CO'\perp AB$, т. е. O' — точка пересечения высот треугольника ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC. Имеем: так как $\angle AC_1O'=\angle AB_1O'=\pi/2$, то точки A, C_1, O', B_1 лежат на одной окружности (с диаметром AO'). Отсюда следует, что $\angle C_1B_1O'=\angle C_1AO'$ (оба угла опираются на дугу C_1O'). Но $\angle C_1AO'=\frac{\pi}{2}-B$; значит, и $\angle C_1B_1O'=\frac{\pi}{2}-B$. Аналогично: точки B_1, O', A_1, C лежат на одной окружности, $\angle A_1B_1O'=$ $=\angle A_1CO'=\frac{\pi}{2}-B$. Таким образом, B_1O' — биссектриса внутреннего угла B_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Теперь из треугольника $O'B_1C_1$ имеем

$$\frac{B_1}{2}+\frac{C_1}{2}+\beta_1=\pi,$$

и так как

$$A_1+B_1+C_1=\pi,$$

то

$$A_1=2\beta_1-\pi=2\left(\beta_1-\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично

$$B_1=2\left(\beta_2-\frac{\pi}{2}\right),\qquad C_1=2\left(\beta_3-\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 6. В основании многогранника $OACBPQ$ лежит прямоугольник $OACB$. Ребро PQ параллельно плоскости этого прямоугольника, причем ортогональные проекции P_1 и Q_1 точек P и Q на плоскость $OABC$ таковы, что

$$P_1O=P_1A=Q_1B=Q_1C$$

(такой многогранник называется *клином*).

Даны длины сторон прямоугольника $OACB$:

$$OA=a,\qquad OB=b,$$

длина c отрезка PQ и высота $h=PP_1=QQ_1$. Вычислить косинус двугранного угла $A\,(CQ)\,B=\varphi$.

Решение. Введем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$, выбирая направления осей Ox и Oy соответственно по $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Координаты вершин клина в выбранной системе:

$$O=(0,\ 0,\ 0),\quad A=(a,\ 0,\ 0),\quad C=(a,\ b,\ 0),\quad B=(0,\ b,\ 0),$$

$$P=\left(\frac{a}{2},\ \frac{b-c}{2},\ h\right),\quad Q=\left(\frac{a}{2},\ \frac{b+c}{2},\ h\right).$$

Отсюда находим векторы

$$\overrightarrow{CA}=\{0,\ -b,\ 0\}\uparrow\uparrow\{0,\ -1,\ 0\}=\boldsymbol{x},$$

$$\overrightarrow{CQ}=\left\{-\frac{a}{2},\ \frac{c-b}{2},\ h\right\}\uparrow\uparrow\{-a,\ c-b,\ 2h\}=\boldsymbol{y},$$

$$\overrightarrow{CB}=\{-a,\ 0,\ 0\}\uparrow\uparrow\{-1,\ 0,\ 0\}=\boldsymbol{z}.$$

Находим

$$[\boldsymbol{yx}]=\left\{\begin{vmatrix}c-b & 2h\\ -1 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2h & -a\\ 0 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-a & c-b\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right\}=\{2h,\ 0,\ a\},$$

$$[\boldsymbol{yz}]=\left\{\begin{vmatrix}c-b & 2h\\ 0 & 0\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2h & -a\\ 0 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-a & c-b\\ -1 & 0\end{vmatrix}\right\}=\{0,\ -2h,\ c-b\}$$

и, следовательно, имеем

$$\cos\varphi=\frac{([\boldsymbol{yx}],\ [\boldsymbol{yz}])}{|[\boldsymbol{yx}]|\,|[\boldsymbol{yz}]|}=\frac{a\,(c-b)}{\sqrt{4h^2+a^2}\sqrt{4h^2+(c-b)^2}}.$$

§ 3. Векторы на плоскости и в пространстве (примеры с указаниями и ответами)

1. Даны два вектора $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{a} \neq 0$. Пусть P — ортогональная проекция точки A на прямую BC. Найти вектор $\overrightarrow{CP}$.

Ответ. $\dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}}{a^2}$.

2. Четыре точки A, B, C, D расположены (на плоскости или в пространстве) так, что $AD \perp BC$, $BD \perp CA$. Доказать, что $CD \perp AB$.

Указание. Полагая $\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{DB} = \boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{r}_3$, находим $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) = 0$; $(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0$, откуда $(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = 0$.

3. Произвольная точка O соединяется с центром тяжести G треугольника ABC и строится точка P такая, что $\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}$. Пусть A', B', C' — точки, симметричные точке P относительно точек A, B, C. Доказать, что точка O есть центр тяжести четырех точек A', B', C', P.

4. Пусть ABC — произвольный треугольник. Рассмотрим 12 векторов, начальными точками которых являются центр вписанной и вневписанных окружностей, а концами — точки прикосновения окружностей к сторонам треугольника. Доказать, что сумма этих векторов равна вектору $\overrightarrow{OH}$, где O — центр окружности (ABC), а H — ортоцентр треугольника ABC.

5. ABC — произвольный невырожденный треугольник, лежащий на ориентированной плоскости; P — произвольная точка, лежащая в плоскости этого треугольника. Векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ компланарны, следовательно, линейно зависимы:

$$\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$$

(хотя бы одно из чисел α, β, γ отлично от нуля). Доказать, что

$$\alpha : \beta : \gamma = \overrightarrow{PBC} : \overrightarrow{PCA} : \overrightarrow{PAB}.$$

Указание. Спроектировать нулевой вектор $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC}$ на прямую BC по направлению прямой PA. Пусть P_1 — точка, в которую спроектируются точки P и A. Тогда

$$\beta\overrightarrow{P_1B} + \gamma\overrightarrow{P_1C} = \mathbf{0}.$$

6. Пусть I — центр окружности (I), вписанной в треугольник ABC; D, E, F — точки прикосновения окружности (I) к сторонам BC, CA, AB; P — произвольная точка, лежащая в плоскости треугольника ABC; P_a, P_b, P_c — ортогональные проекции точки P на стороны BC, CA, AB. Доказать, что окружность, проходящая через центры тяжестей треугольников EP_aF, FP_bD, DP_cE, имеет диаметр, равный $\frac{1}{3}IP$.

Указание. Пусть G — центр тяжести треугольника DEF, G_a, G_b, G_c — центры тяжести треугольников EP_aF, FP_bD, DP_cE; тогда

$$\overline{IG_a} = \frac{1}{3}(\overline{IE} + \overline{IF} + \overline{IP_a}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{IE} + \overline{IF} + \overline{ID} + \overline{DP_a}) = \overline{IG} + \frac{1}{3}\overline{DP_a}.$$

Таким образом, точка G_a строится так: от точки G откладывается направленный отрезок, равный одной трети проекции $\overline{IP}$ на сторону BC. Отсюда сразу следует, что точки G_a, G_b, G_c находятся на окружности, диаметр которой мы получим, отложив от точки G вектор, определяемый направленным отрезком $\frac{1}{3}\overline{IP}$.

7. ABC — произвольный треугольник; A_1, B_1, C_1 — середины его сторон BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 — основания его высот; O — центр окружности (ABC); G — центр тяжести треугольника ABC (точка пересечения его медиан); H — ортоцентр (точка пересечения высот треугольника ABC); A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH, CH; A_4, B_4, C_4 — вторые точки пересечения окружности (ABC) с высотами AH, BH, CH (рис. 1). Доказать, что:

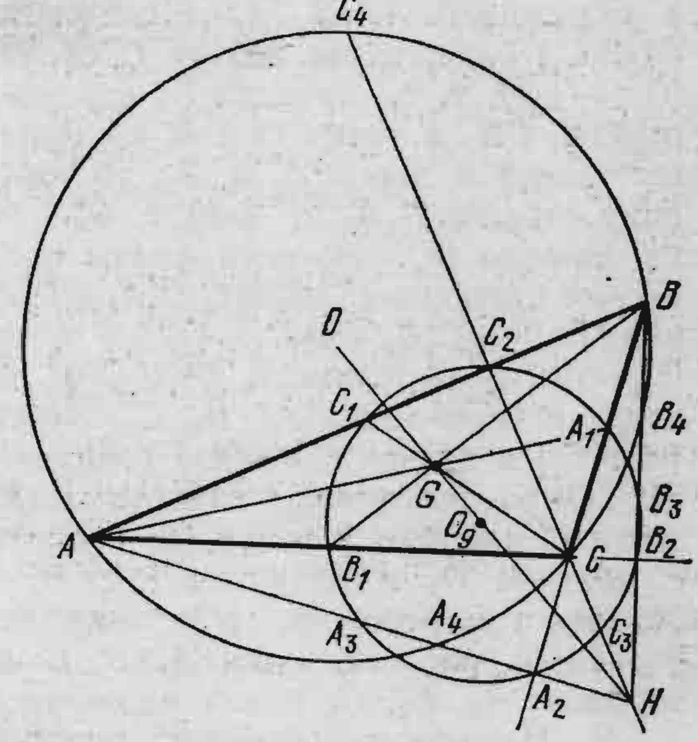


Рис. 1.

1°. Точки O, G, H коллинеарны и $\overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{GH}$.

2°. Точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности, называемой *окружностью Эйлера* для треугольника ABC или окружностью (O_9) девяти точек треугольника ABC.

3°. Точки A_4, B_4, C_4 являются точками, симметричными ортоцентру H относительно прямых BC, CA, AB.

Указание. Задача эта может быть решена векторно. Сначала надо доказать, что если за полюс принять центр O окружности, описанной около треугольника ABC, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OH}$ и т. д. (векторное решение предоставляется провести читателю; мы дадим ниже еще одно доказательство всех этих положений, применяя комплексные числа).

Отметим сейчас следующее простое синтетическое решение.

1°. При гомотетии $(G, -1/2)$ точки A, B, C перейдут в точки A_1, B_1, C_1, а следовательно, высоты треугольника ABC (рассматриваемые сейчас как прямые) перейдут в медиатрисы сторон BC, CA, AB (*медиатрисой отрезка* мы называем прямую, перпендикулярную этому отрезку в его середине). Отсюда следует, что точка H пересечения высот треугольника ABC перейдет в точку O пересечения медиатрис его сторон. Итак, при гомотетии $(G, -1/2)$ точка H перейдет в точку O, значит, эти точки коллинеарны и $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}/2$.

2°. Окружность (ABC) при гомотетии $(G, -1/2)$ перейдет в окружность $(A_1B_1C_1)$, а следовательно, центром окружности $(A_1B_1C_1)$ будет образ центра O окружности (ABC) при гомотетии $(G, -1/2)$, т. е. середина O_9 отрезка OH. Так как O_9 — середина отрезка OH, а точки O и H на сторону BC проектируются соответственно в точки A_1 и A_2, то точка O_9 спроектируется в середину отрезка A_1A_2 и, значит, $O_9'A_1 = O_9'A_2$, где O_9' — проекция O_9 на прямую BC. Но если равны проекции наклонных, то равны и сами наклонные, значит, $O_9A_1 = O_9A_2$. Аналогично доказывается, что $O_9B_1 = O_9B_2$, $O_9C_1 = O_9C_2$, и так как $O_9A_1 = O_9B_1 = O_9C_1$ (O_9 — центр окружности $(A_1B_1C_1)$), то окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит и через точки A_2, B_2, C_2. Заметим, что радиус окружности $(A_1B_1C_1)$ в два раза меньше радиуса R окружности (ABC).

Теперь рассмотрим гомотетию $(H, 1/2)$. При этой гомотетии точка O перейдет в точку O_9, а окружность (ABC) в окружность с центром O_9 и радиусом $R/2$, т. е. в окружность $(A_1B_1C_1)$. Но при гомотетии $(H, 1/2)$ точки A, B, C перейдут в точки A_3, B_3, C_3, и так как точки A, B, C лежат на окружности (ABC), то точки A_3, B_3, C_3 лежат на окружности Эйлера $(A_1B_1C_1) = (O_9)$.

3°. Рассмотрим, наконец, гомотетию $(H, 2)$. При этой гомотетии окружность $(A_1B_1C_1)$ перейдет в окружность с центром O и радиусом R, т. е. в окружность (ABC). С другой стороны, при гомотетии $(H, 2)$ точки A_2, B_2, C_2 перейдут в точки A_4, B_4, C_4, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB. Но точки A_2, B_2, C_2 лежат на окружности Эйлера, следовательно, точки A_4, B_4, C_4 лежат на окружности (ABC).

8. Пусть H, G, O, O_9 — соответственно ортоцентр треугольника ABC, его центр тяжести, центр описанной окружности (ABC) и центр окружности Эйлера; A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB; A_H, B_H, C_H — основания высот; A', B', C' — точки, симметричные вершинам A, B, C треугольника ABC относительно его сторон BC, CA, AB; A'', B'', C'' — точки, в которых высоты AH, BH, CH пересекают описанную окружность (ABC); O' — центр окружности $(A'B'C') = (O')$; α, β, γ — проекции точки O_9 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC. Тогда:

1°. Треугольник $A'B'C'$ является образом треугольника $\alpha\beta\gamma$ при гомотетии $(G, 4)$.

2°. $4\overrightarrow{O_9\alpha} = \overrightarrow{AA''}$, $4\overrightarrow{O_9\beta} = \overrightarrow{BB''}$, $4\overrightarrow{O_9\gamma} = \overrightarrow{CC''}$.

3°. Для того чтобы описанная окружность (ABC) касалась высоты, опущенной из A на BC, необходимо и достаточно, чтобы центр O_9 окружности Эйлера лежал на стороне BC.

4°. Пусть O_9' — точка, симметричная точке O_9 относительно центра ω окружности $(\alpha\beta\gamma)$, тогда центры O и O' окружностей (ABC) и $(A'B'C')$ симметричны относительно точки O_9'.

5°. Если центр O' окружности $(A'B'C')$ лежит внутри треугольника ABC, то он является точкой, обладающей тем свойством, что кратчайшие расстояния от точки O' до каждой вершины A, B, C с предварительным перемещением по прямой к противоположной стороне равны между собой.

6°. Если точка O' лежит на стороне BC, то точка A лежит на окружности $(A'B'C')$.

Указание. 1°. $4\overrightarrow{GO_9}=\overrightarrow{GH}$, $4\overrightarrow{O_9\alpha}=2(\overrightarrow{HA_H}+\overrightarrow{OA_1})=\overrightarrow{HA''}+$ $+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HA''}+\overrightarrow{A''A'}=\overrightarrow{HA'}$.

2°. $4\overrightarrow{O_9\alpha}=\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{AA''}$.

3°. Следствие п. 2°.

4°. На основании п. 1° имеем $\overrightarrow{G\omega}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GO'}$, а кроме того,

$$\overrightarrow{GO_9}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GH},\quad \overrightarrow{O_9O_9'}=2\overrightarrow{O_9\omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO'},$$

но и

$$\overrightarrow{OO_9}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}.$$

5°. Если P — произвольная точка, лежащая внутри треугольника ABC, то, обозначая через A_2, B_2, C_2 точки пересечения прямых PA', PB', PC' со сторонами BC, CA, AB, заключаем, что длины ломаных $PA_2A=PA'$, $PB_2B=PB'$, $PC_2C=PC'$ будут кратчайшими путями из точки P к вершинам A, B, C с предварительными перемещениями к противоположным сторонам. Для того чтобы эти минимальные расстояния были равны между собой, необходимо и достаточно, чтобы $PA'=PB'=PC'$, т. е. точка P совпала с точкой O'.

6°. Следствие из п. 5°.

9. Даны три некомпланарных вектора

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

Пусть S — центр сферы, проходящей через точки O, A, B, C. Найти вектор $\overrightarrow{OS}=\boldsymbol{x}$.

Ответ. $\boldsymbol{x}=\dfrac{a^2[\boldsymbol{bc}]+b^2[\boldsymbol{ca}]+c^2[\boldsymbol{ab}]}{2\boldsymbol{abc}}$.

10. Даны векторы

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

Векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ неколлинеарны. Пусть H — ортогональная проекция точки A на плоскость OBC. Найти вектор $\overrightarrow{OH}=\boldsymbol{h}$.

Ответ. $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{abc}}{[\boldsymbol{bc}]^2}[\boldsymbol{bc}]$.

11. Даны четыре вектора

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}.$$

Дано, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны и что прямая OD пересекает плоскость ABC в некоторой точке M. Найти вектор $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{m}$.

Ответ. $\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{abc}}{\boldsymbol{dbc}+\boldsymbol{dca}+\boldsymbol{dab}}\boldsymbol{d}$.

12. Даны три вектора

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Пусть H — ортогональная проекция точки C на плоскость OAB. Найти вектор $\overrightarrow{CH}=\boldsymbol{x}$.

Ответ. $\boldsymbol{x}=-\frac{\boldsymbol{abc}}{[\boldsymbol{ab}]^2}[\boldsymbol{ab}]$.

13. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, если известны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и их скалярные произведения на $\boldsymbol{x}$:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})=p,\quad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b})=q,\quad (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c})=r.$$

Ответ. $\boldsymbol{x}=\frac{p\,[\boldsymbol{bc}]+q\,[\boldsymbol{ca}]+r\,[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{abc}}$.

14. Найти векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, если известна их сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$, скалярное произведение $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=p$ и векторное произведение $[\boldsymbol{xy}]=\boldsymbol{b}$.

Ответ. Если $a^4<4(b^2+pa^2)$, то решений нет. Если $a^4=4(b^2+pa^2)$, то одно решение:

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}+\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2},\quad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{a}}{2}-\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2}.$$

Если $a^4>4(b^2+pa^2)$, то два решения:

$$\boldsymbol{x}_1=\frac{a^2+\sqrt{a^4-4\,(b^2+pa^2)}}{2a^2}\boldsymbol{a}+\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2},$$

$$\boldsymbol{y}_1=\frac{a^2-\sqrt{a^4-4\,(b^2+pa^2)}}{2a^2}\boldsymbol{a}-\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2};$$

$$\boldsymbol{x}_2=\frac{a^2-\sqrt{a^4-4\,(b^2+pa^2)}}{2a^2}\boldsymbol{a}-\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2},$$

$$\boldsymbol{y}_2=\frac{a^2+\sqrt{a^4-4\,(b^2+pa^2)}}{2a^2}\boldsymbol{a}+\frac{[\boldsymbol{ab}]}{a^2}.$$

15. $ABCD$ — произвольный тетраэдр, находящийся в ориентированном пространстве; P — произвольная точка. Векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ линейно зависимы:

$$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}+\delta\overrightarrow{PD}=0$$

(хотя бы одно из чисел α, β, γ, δ отлично от нуля). Доказать, что

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \overrightarrow{PBCD} : \overrightarrow{APCD} : \overrightarrow{ABPD} : \overrightarrow{ABCP}.$$

Указание. Спроектировать нулевой вектор $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} + \delta\overrightarrow{PD}$ на прямую AB плоскостями, параллельными плоскости PCD. Точки P, C, D спроектируются в одну точку P_1, и мы получим $\alpha\overrightarrow{P_1A} + \beta\overrightarrow{P_1B} = \mathbf{0}$ и т. д.

16. Дан трехгранный угол $OABC$ такой, что среди его плоских углов BOC, COA, AOB имеется не более одного угла, равного $\pi/2$. Доказать векторно, что три прямые, проходящие через вершину O, лежащие в плоскостях граней BOC, COA, AOB и перпендикулярные соответственно к ребрам OA, OB, OC, лежат в одной плоскости.

Указание. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — направляющие векторы ребер, то направляющие векторы указанных прямых $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$, $[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{ca}]]$, $[\boldsymbol{c}[\boldsymbol{ab}]]$. Их сумма равна нулю.

17. Доказать векторно, что если пересечь все ребра трехгранного угла $OABC$, все плоские углы которого прямые, плоскостью, не проходящей через его вершину O, то точки пересечения высот треугольника, полученного в сечении, совпадает с проекцией точки O на плоскость этого треугольника.

18. $ABCD$ — произвольный тетраэдр; A', B', C', D' — ортогональные проекции его вершин на плоскости противолежащих им граней. Даны радиус-векторы

$$\overrightarrow{DA} = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{DB} = \boldsymbol{r}_2, \quad \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{r}_3.$$

1°. Найти радиус-векторы $\overrightarrow{DA'} = \boldsymbol{r}'_1$, $\overrightarrow{DB'} = \boldsymbol{r}'_2$, $\overrightarrow{DC'} = \boldsymbol{r}'_3$, $\overrightarrow{DD'} = \boldsymbol{r}'_4$ и доказать, что если прямые AA' и BB' лежат в одной плоскости, то $AB \perp CD$, и обратно.

2°. Если дано еще, что $AC = AD = BC = BD$, то доказать, что прямые AA' и BB' лежат в одной плоскости. Пусть H — точка пересечения этих прямых, а K — точка пересечения прямых CC' и DD'. Доказать, что плоскость AHB пересекает отрезок CD в его середине I, а плоскость CKD пересекает отрезок AB в его середине J. Доказать, что точка H расположена на прямой IJ.

19. В пирамиде $OABC$ дана длина ребра $OA = a$ и плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Сфера (S) касается грани BOC в точке O и проходит через точку A. Найти ее радиус x.

Решение. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OS}$. Так как вектор $\boldsymbol{x}$ перпендикулярен плоскости BOC, то $\boldsymbol{x} = \lambda[\boldsymbol{bc}]$, где $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Из равенства $OS = SA$ находим $\boldsymbol{x}^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x})^2$, где $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, откуда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = a^2/2$. Подставляя в это равенство $\lambda[\boldsymbol{bc}]$ вместо $\boldsymbol{x}$, получим $\lambda(\boldsymbol{abc}) = a^2/2$, откуда $\lambda = \dfrac{a^2}{2abc}$ и, следовательно, $\overrightarrow{OS} = \boldsymbol{x} = \dfrac{a^2[\boldsymbol{bc}]}{2abc}$. Длина x вектора $\boldsymbol{x}$ равна радиусу R (сферы S):

$$R = |\boldsymbol{x}| = x = \frac{a^2|[\boldsymbol{bc}]|}{2|\boldsymbol{abc}|} = \frac{a^2bc\sin\alpha}{2|\boldsymbol{abc}|} =$$
$$= \frac{a^2bc\sin\alpha}{2abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}.$$

Итак,

$$R = \frac{a\sin\alpha}{2\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}}.$$

20. В тетраэдре $OABC$ даны длины ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и плоские углы при вершине O: $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Найти радиус x сферы (S), описанной около данной пирамиды.

Решение. Пусть $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OS}$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2,$$

откуда

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = a^2/2, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = b^2/2, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = c^2/2.$$

По формуле Гиббса

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}^* + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b}^* + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{c}^*,$$

где $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ — тройка, взаимная тройке $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, находим

$$\boldsymbol{x} = \frac{a^2}{2}\boldsymbol{a}^* + \frac{b^2}{2}\boldsymbol{b}^* + \frac{c^2}{2}\boldsymbol{c}^* = \frac{a^2[\boldsymbol{bc}]}{2abc} + \frac{b^2[\boldsymbol{ca}]}{2abc} + \frac{c^2[\boldsymbol{ab}]}{2abc}$$

и, следовательно,

$$x = \sqrt{\boldsymbol{x}^2} = \frac{\sqrt{\{a^2[\boldsymbol{bc}]+b^2[\boldsymbol{ca}]+c^2[\boldsymbol{ab}]\}^2}}{2|\boldsymbol{abc}|} = \frac{\sqrt{T}}{2|\boldsymbol{abc}|},$$

где

$$\begin{aligned}
T &= a^4[\boldsymbol{bc}]^2 + b^4[\boldsymbol{ca}]^2 + c^4[\boldsymbol{ab}]^2 + \\
&\quad + 2a^2b^2([\boldsymbol{bc}], [\boldsymbol{ca}]) + 2b^2c^2([\boldsymbol{ca}], [\boldsymbol{ab}]) + 2c^2a^2([\boldsymbol{ab}], [\boldsymbol{bc}]) = \\
&= a^4b^2c^2\sin^2\alpha + b^4c^2a^2\sin^2\beta + c^4a^2b^2\sin^2\gamma + \\
&\quad + 2a^2b^2(bc\cos\alpha\cdot ac\cos\beta - c^2ab\cos\gamma) + \\
&\quad + 2b^2c^2(ca\cos\beta\cdot ba\cos\gamma - a^2bc\cos\alpha) + \\
&\quad + 2c^2a^2(ab\cos\gamma\cdot cb\cos\alpha - b^2ca\cos\beta) = \\
&= a^4b^2c^2\sin^2\alpha + b^4c^2a^2\sin^2\beta + c^4a^2b^2\sin^2\gamma + \\
&\quad + 2a^3b^3c^2(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + 2b^3c^3a^2(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + \\
&\quad + 2c^3a^3b^2(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta) = \\
&= a^2b^2c^2\{a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\gamma + \\
&\quad + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + 2bc(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + \\
&\quad + 2ca(\cos\gamma\cos\alpha - \cos\beta)\} = a^2b^2c^2M,
\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{abc}| = abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma} = abc\cdot\Delta.$$

Итак,

$$x=\frac{\sqrt{M}}{2\Delta}.$$

21. Даны плоские углы $a=\angle BOC$, $b=\angle COA$, $c=\angle AOB$ трехгранного угла $OABC$ и внутренние двугранные углы A, B, C, соответственно противолежащие этим плоским углам. В п. 6° примера 1 § 2 было доказано, что

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\Delta}{\Delta^*},$$

где Δ — объем тетраэдра, построенного на единичных векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, т. е.

$$\Delta=(1+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c)^{1/2},$$

а

$$\Delta^*=(1-2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)^{1/2}.$$

Рассмотреть частные случаи:

1°. $a=A$, $b=B$, $c=C$. Доказать, что в этом случае по крайней мере один из углов A, B, C равен $\pi/2$ (указание: $\Delta^2-\Delta^{*2}=0$); далее, два ребра перпендикулярны третьему; два двугранных угла трехгранного угла $OABC$ равны $\pi/2$, а третий произвольный.

2°. $a=A$, $b=\pi-B$, $c=\pi-C$. Выводы те же, что в случае п. 1°.

3°. $a=A$, $b=B$, $c=\pi-C$. Доказать, что в этом случае $\cos a\cos b\cos c$ и $\cos A\cos B\cos C$ имеют противоположные знаки. Плоский угол c определяется из соотношения

$$\cos c=\frac{\cos A\cos B}{1+\sin A\sin B}.$$

4°. $a=\pi-A$, $b=\pi-B$, $c=\pi-C$. Доказать, что ребра трехгранного угла $OABC$ попарно перпендикулярны.

22. $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Пусть

$$\boldsymbol{x}=[\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{DC}],\quad \boldsymbol{y}=[\overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{DA}],\quad \boldsymbol{z}=[\overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DB}],\quad \boldsymbol{t}=[\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AB}].$$

1°. Доказать, что

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}=0.$$

Вывести отсюда, что со всяким тетраэдром $ABCD$ можно связать три пространственных четырехугольника, стороны которого перпендикулярны граням тетраэдра, а длины сторон каждого из этих пространственных четырехугольников пропорциональны площадям граней тетраэдра.

Пусть h_a, h_b, h_c, h_d — высоты тетраэдра $ABCD$, (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD) — внутренние двугранные углы тетраэдра, примыкающие к ребрам AB, AC, AD, BC, BD, CD. Доказать, что:

2°. $\frac{1}{h_a}=\frac{\cos(CD)}{h_b}+\frac{\cos(DB)}{h_c}+\frac{\cos(BC)}{h_d}$.

3°.

$$\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}-2\frac{\cos(CD)}{h_ah_b}=\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}-2\frac{\cos(AB)}{h_ch_d}.$$

4°. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+\frac{1}{h_d^2}\right)=$

$$=\frac{\cos(AB)}{h_ch_d}+\frac{\cos(AC)}{h_bh_d}+\frac{\cos(AD)}{h_bh_c}+\frac{\cos(BC)}{h_ah_d}+\frac{\cos(BD)}{h_ah_c}+\frac{\cos(CD)}{h_ah_b}.$$

5°. $$\begin{vmatrix} -1 & \cos(CD) & \cos(BD) & \cos(BC) \\ \cos(CD) & -1 & \cos(AD) & \cos(AC) \\ \cos(BD) & \cos(AD) & -1 & \cos(AB) \\ \cos(BC) & \cos(AC) & \cos(AB) & -1 \end{vmatrix}=0.$$

У к а з а н и е. Умножить скалярно равенство $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}=0$ на $\boldsymbol{x}$; записать уравнение $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}=0$ в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{z}-\boldsymbol{t}$ и возвести обе части в скалярный квадрат; возвести равенство $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}=0$ в скалярный квадрат; исключить h в равенствах, полученных в п. 1°.

23. Доказать, что шесть плоскостей, проходящих через середины ребер тетраэдра $ABCD$ и перпендикулярных противоположным ребрам этого тетраэдра, проходят через одну точку M (*точка Монжа*). Доказать, что точка Монжа симметрична центру O сферы $(O)=(ABCD)$ относительно центра тяжести G тетраэдра $ABCD$.

У к а з а н и е. Пусть $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$, $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{r}_4$. Тогда уравнения плоскостей, указанных в условии задачи, можно записать в виде

$$\left(\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4}{2},\ \boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j\right)=0,\quad i\neq j\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

24. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M. Пусть прямая, проходящая через точку M параллельно прямой AB, пересекает грани CDA и CDB в точках P и Q. Доказать, что сумма скалярных произведений $(\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{MQ})$, слагаемые которой составлены указанным образом для всех шести ребер тетраэдра $ABCD$, равна степени точки M относительно сферы $(ABCD)$.

25. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M. Доказать, что сумма степеней вершины A относительно сфер с диаметрами MC, MB, MD равна сумме квадратов длин всех ребер тетраэдра $ABCD$ (и аналогично для вершин B, C, D).

26. Найти тетраэдр, зная площади его граней и зная, что его высоты пересекаются в одной точке (такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*).

Решение. Этот вопрос исследовал аналитически Лагранж (J. L. Lagrange. Mém. Acad. Berlin, 1773, p. 160; OEuvres, t. III, p. 662), сформулировав его несколько иначе: «Определить тетраэдр наибольшего объема, для которого заданы площади всех его граней». Из полученных им формул следует, что искомый тетраэдр ортоцентрический, на что указал также Серре (P. Serret. — J. de Liouville, 1862, p. 377) и доказал это геометрически (не занимаясь, однако, определением такого тетраэдра). В связи с этой задачей Лагранж получил уравнение четвертой степени и доказал, что оно имеет по крайней мере один положительный корень, вычислил длины ребер тетраэдра как функции этого корня, но не рассмотрел условий, при которых существует тетраэдр с такими длинами ребер. Наконец, английский математик Айенгер (Iyenger. — The Mathematics Student, 1947, p. 104) решил ту же проблему, сведя ее к уравнению четвертой степени, провел полное исследование и доказал, что для существования указанного тетраэдра необходимо и достаточно, чтобы сумма площадей любых трех граней была больше площади четвертой грани. При этом он же доказал, что все такие тетраэдры изометричны. Теперь дадим решение, предложенное Мармионом (A. Marmion. — Mathesis, 1953, p. 69: вопрос № 3253, предложенный Тебо (V. Thébault)).

Известно, что сумма четырех векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{t}$, перпендикулярных граням тетраэдра $ABCD$ и направленных во внешнюю сторону, модули которых равны площадям граней этого тетраэдра, равна нулю (см. пример 22). Отсюда следует, что существует замкнутый пространственный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, стороны которого таковы, что $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\boldsymbol{y}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\boldsymbol{z}$, $\overrightarrow{D_1A_1}=\boldsymbol{t}$, и, следовательно, сумма площадей трех любых граней тетраэдра $ABCD$ больше площади четвертой грани.

Полагая $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c}$, заключаем, что в качестве векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ можно взять следующие векторы:

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{bc}], \quad \boldsymbol{y}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{ca}], \quad \boldsymbol{z}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{ab}].$$

Из векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{t}$ можно составить 6 пространственных четырехугольников типа $A_1B_1C_1D_1$; все тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ будут иметь равные между собой объемы V_1:

$$V_1=\frac{1}{6}\boldsymbol{xyz}=\frac{1}{48}[\boldsymbol{bc}][\boldsymbol{ca}][\boldsymbol{ab}]=\frac{1}{48}(\boldsymbol{abc})^2=\frac{1}{48}(6V)^2=\frac{3}{4}V^2. \quad (*)$$

Отсюда следует, что тетраэдры $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ принимают максимальное значение одновременно. С другой стороны, объем любого тетраэдра равен 2/3 произведения площадей двух его граней на синус двугранного угла φ между ними, разделенному на длину ребра этого двугранного угла, поэтому

$$V_1=\frac{2}{3}\,\frac{\text{пл. }\triangle A_1B_1C_1\cdot\text{пл. }\triangle A_1D_1C_1}{A_1C_1}\sin\varphi,$$

где φ — величина двугранного угла с ребром A_1C_1. Так как множитель перед $\sin\varphi$ не зависит от φ, то V_1 будет максимальным при $\varphi=\pi/2$. Аналогичные рассуждения, проведенные по отношению к другим граням $A_1B_1D_1$ и $C_1B_1D_1$, приводят к доказательству того, что двугранный угол, образованный этими гранями, также должен быть прямым. Но так как

$$A_1B_1\perp DBC,\quad B_1C_1\perp ACD,\quad C_1D_1\perp BDA,\quad D_1A_1\perp CAB,$$

то

$$AB\perp A_1C_1D_1,\quad BC\perp B_1D_1A_1,\quad CD\perp C_1A_1B_1,\quad DA\perp D_1B_1C_1$$

и, следовательно, $AB\perp CD$, $BC\perp AD$, т. е. тетраэдр $ABCD$ максимального объема, для которого заданы площади его граней, является ортоцентрическим.

Коэффициент при $\sin\varphi$ в выражении для V_1 зависит только от одной переменной $A_1C_1=\lambda$. Применяя для пл. $\triangle A_1B_1C_1$ и пл. $\triangle A_1D_1C_1$ формулу Герона и замечая, что $A_1B_1=x$, $B_1C_1=y$, $C_1D_1=z$, $D_1A_1=t$, получим, что квадрат выражения

$$\frac{\text{пл. }\triangle A_1B_1C_1\cdot\text{пл. }\triangle A_1C_1D_1}{A_1C_1},$$

умноженный на 2^8, равен

$$F(\lambda^2)=\frac{[\lambda^2-(x+y)^2]\,[\lambda^2-(x-y)^2]\,[\lambda^2-(t+z)^2]\,[\lambda^2-(t-z)^2]}{\lambda^2}.$$

Полагая $\lambda^2=\mu$, находим для логарифмической производной от функции $F(\mu)$ следующее выражение:

$$\frac{F'(\mu)}{F(\mu)}=\frac{1}{\mu-(x+y)^2}+\frac{1}{\mu-(x-y)^2}+\frac{1}{\mu-(t+z)^2}+\frac{1}{\mu-(t-z)^2}-\frac{1}{\mu}.$$

Пусть $(x-y)^2\leqslant(t-z)^2<(x+y)^2\leqslant(t+z)^2$, так как должно быть

$$(t-z)^2<A_1C_1^2=\mu,\qquad (x+y)^2>A_1C_1^2=\mu$$

(только при этом условии существуют треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1C_1$ с длинами сторон y, x, λ и t, z, λ). В интервале $((t-z)^2, (x+y)^2)$ производная $F'(\mu)$ имеет только один корень, поэтому существует только одно значение λ, при котором функция $F(\lambda^2)$ принимает экстремум, притом максимум. Зная λ, можно построить треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1D_1$. Прикладывая их друг к другу так, чтобы двугранный угол $B_1(A_1C_1)D_1$ был равен $\pi/2$, мы построим тетраэдр (и такой тетраэдр с точностью до изометрии только один), соответствующий тетраэдру $ABCD$ с наибольшим объемом. Далее, в силу соотношений

$$AB\perp A_1C_1D_1,\quad BC\perp B_1D_1A_1,\quad CD\perp C_1A_1B_1,\quad DA\perp D_1B_1C_1$$

и

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0$$

заключаем, что AB, BC, CD, DA должны быть пропорциональны площадям граней $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1D_1B_1$, так что, обозначая коэффициент пропорциональности через k, будем иметь

$$AB = k \cdot A_1C_1D_1, \qquad BC = k \cdot A_1B_1D_1,$$

$$CD = k \cdot B_1C_1A_1, \qquad DA = k \cdot C_1D_1B_1$$

и на основании предыдущего

$$V = \frac{3}{4} k^3 V_1^2 = \frac{27}{64} k^3 V^4.$$

Отсюда находим коэффициент пропорциональности:

$$k = \frac{4}{3V} = \frac{2}{\sqrt{3V_1}}.$$

Длины ребер AB, BC, CD, DA определены, и они должны быть соответственно перпендикулярны плоскостям $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1D_1B_1$. Итак, с точностью до изометрических преобразований существует и притом только один тетраэдр, удовлетворяющий условию задачи.

ГЛАВА II

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Применение аналитической геометрии (примеры с решениями)

Пример 1. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda, \qquad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu, \qquad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu.$$

Найти

$$\frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}}.$$

Решение. Введем на плоскости общую декартову систему координат, полагая $C=(0,\ 0)$, $A=(1,\ 0)$, $B=(0,\ 1)$. Тогда $P=\left(0,\ \frac{1}{1+\lambda}\right)$, $Q=\left(\frac{\mu}{1+\mu},\ 0\right)$, $R=\left(\frac{1}{1+\nu},\ \frac{\nu}{1+\nu}\right)$ и, следовательно,

$$\frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{1+\lambda} & 1 \\ \frac{\mu}{1+\mu} & 0 & 1 \\ \frac{1}{1+\nu} & \frac{\nu}{1+\nu} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}.$$

Следствие. *Для того чтобы точки P, Q, R, лежащие на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1 \quad \text{или} \quad \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{CP}}\cdot\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{AQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{BR}}=1$$

(*теорема Менелая*).

Пример 2. Треугольник ABC вписан в окружность. Доказать, что точки P, Q, R пересечения касательных к окружности в точках A, B, C соответственно со сторонами BC, CA, AB коллинеарны (*частный случай теоремы Брианшона*).

Доказательство. Заметим, что все отношения

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}},\quad \mu=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}},\quad \nu=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$$

отрицательны. Далее,

$$\frac{BP}{PA}=\frac{\sin C}{\sin B},\qquad \frac{PC}{PA}=\frac{\sin B}{\sin C},$$

следовательно,

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda=-\frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}=-\frac{c^2}{b^2}.$$

Аналогично $\mu=-\frac{a^2}{c^2}$, $\nu=-\frac{b^2}{a^2}$ и, значит, $\lambda\mu\nu=-1$ (см. пример 1).

Пример 3. Три окружности с центрами A, B, C и радиусами R_1, R_2, R_3 расположены так, что каждая из них лежит вне двух других. Пусть P, Q, R — центры внешнего подобия этих окружностей, взятых попарно. Доказать, что точки P, Q, R коллинеарны.

Доказательство. $\lambda=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=-\frac{R_2}{R_3}$, $\mu=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=-\frac{R_3}{R_1}$, $\nu=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-\frac{R_1}{R_2}$, откуда $\lambda\mu\nu=-1$.

Пример 4. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одному пучку (в частности, проходят через одну точку O). Доказать, что точки P, Q, R пересечения соответственных сторон BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ коллинеарны (*теорема Дезарга*).

Решение. Рассмотрим треугольник OBC и трансверсаль B_1PC_1 [1]). На основании теоремы Менелая имеем

$$\frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{B_1B}}\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1O}}=-1.$$

Аналогично

$$\frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{C_1C}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1O}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{A_1A}}\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}\frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1O}}=-1.$$

Перемножая почленно эти равенства, будем иметь

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1.$$

Читателю предлагается доказать теорему Дезарга для того слу-

---

[1]) *Трансверсалью треугольника* называется любая прямая, лежащая в его плоскости.

чая, когда AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одному и тому же несобственному пучку.

Пример 5. 1^0. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda\neq 0,\quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu\neq 0,\quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu\neq 0.$$

Пусть прямые BQ и CR пересекаются в точке A_1, прямые CR и AP в точке B_1, прямые AP и BQ в точке C_1. Найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

2°. Рассмотреть частный случай $\lambda=\mu=\nu=2$.

3°. При каком необходимом и достаточном условии прямые AP, BQ, CR принадлежат одному и тому же собственному пучку?

4°. При каком необходимом и достаточном условии прямые AP, BQ, CR принадлежат одному и тому же несобственному пучку?

Решение. 1°. Введем общую декартову систему координат, полагая $C=(0,\ 0)$, $A=(1,\ 0)$, $B=(0,\ 1)$. Тогда

$$P=\left(0,\ \frac{1}{1+\lambda}\right),\quad Q=\left(\frac{\mu}{1+\mu},\ 0\right),\quad R=\left(\frac{1}{1+\nu},\ \frac{\nu}{1+\nu}\right).$$

Уравнения прямых AP, BQ, CR:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{1+\lambda} & 1\end{vmatrix}=0 \text{ или } x+(1+\lambda)\,y-1=0 \text{ (прямая } B_1C_1 \text{ или } AP),$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{\mu}{1+\mu} & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ или } (1+\mu)\,x+\mu y-\mu=0 \text{ (прямая } C_1A_1 \text{ или } BQ),$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ \frac{1}{1+\nu} & \frac{\nu}{1+\nu} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \text{ или } \nu x-y=0 \text{ (прямая } A_1B_1 \text{ или } CR).$$

Отсюда

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda & -1\\ 1+\mu & \mu & -\mu\\ \nu & -1 & 0\end{vmatrix}^2}{(1+\mu+\mu\nu)\,(1+\nu+\lambda\nu)\,(1+\lambda+\mu\lambda)}=$$

$$=\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(1+\mu+\mu\nu)\,(1+\nu+\lambda\nu)\,(1+\lambda+\mu\lambda)}.$$

З а м е ч а н и е. Можно было найти (решая системы из уравнений прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1) вершины треугольника $A_1B_1C_1$:

$$A_1=\left(\frac{\mu}{1+\mu+\mu\nu},\ \frac{\nu\mu}{1+\mu+\mu\nu}\right),$$

$$B_1=\left(\frac{1}{1+\nu+\nu\lambda},\ \frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda}\right),$$

$$C_1=\left(\frac{\lambda\mu}{1+\lambda+\lambda\mu},\ \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}\right)$$

и тогда

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}=\frac{\begin{vmatrix}\mu & \mu\nu & 1+\mu+\mu\nu\\ 1 & \nu & 1+\nu+\lambda\nu\\ \lambda\mu & 1 & 1+\lambda+\lambda\mu\end{vmatrix}}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}.$$

Вычитая из последнего столбца сумму двух первых и упрощая, получим тот же результат.

2°. При $\lambda=\mu=\nu=2$ найдем $\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}=\dfrac{1}{7}$.

3°. Прямые AP, BQ, CR принадлежат одному собственному пучку тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu\neq 0$ (умножая обе части неравенства $1+\lambda+\lambda\mu\neq 0$ на $\nu\neq 0$, получим $1+\nu+\nu\lambda\neq 0$, а затем, умножая на $\mu\neq 0$, получим $1+\mu+\mu\nu\neq 0$).

4°. Прямые AP, BQ, CR принадлежат одному и тому же несобственному пучку тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu=1$, $1+\lambda+\lambda\mu=0$ (в этом случае прямые AP, BQ, CR попарно параллельны; среди них нет совпадающих).

Объединяя случаи пп. 3° и 4°, получаем теорему: *если стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены в отношениях*

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\lambda\neq 0,\quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\mu\neq 0,\quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\nu\neq 0,$$

то прямые AP, BQ, CR принадлежат одному пучку (собственному или несобственному) тогда и только тогда, когда $\lambda\mu\nu=1$ (теорема Чевы).

Пример 6. Доказать, что если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA, AB соответственно в точках P, Q, R, то прямые AP, BQ, CR пересекаются в одной точке.

Р е ш е н и е.

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{p-b}{p-c},\quad \mu=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\frac{p-c}{p-a},\quad \nu=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{p-a}{p-b}$$

($p=(a+b+c)/2$, a, b, c — длины сторон треугольника ABC). Отсюда

$$\lambda\mu\nu=1,\quad 1+\lambda+\lambda\mu\neq 0.$$

Пример 7. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Фиксировано действительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2+MB^2=k.$$

Решение. Введем декартову прямоугольную систему координат. Пусть

$$A=(x_1,\ y_1),\quad B=(x_2,\ y_2),\quad M=(x,\ y).$$

Применяя формулу для расстояния между двумя точками на плоскости, получим

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=k,$$

или

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{k}{2}-\frac{1}{4}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right],$$

или

$$MO^2=\frac{k}{2}-\frac{1}{4}AB^2,$$

где O — середина отрезка AB. Из последнего соотношения следует, что если $k<AB^2/2$, то заданное геометрическое место точек пусто. Если $k=AB^2/2$, то заданное геометрическое место точек состоит из одной точки O — середины отрезка AB. Если $k>AB^2/2$, то заданное геометрическое место точек M является окружностью с центром O и радиусом $\sqrt{2k-AB^2}/2$.

Пример 8. На плоскости фиксированы три точки A, B, C. Фиксировано действительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2+MB^2+MC^2=k.$$

Решение. Введем в плоскости треугольника ABC декартову прямоугольную систему координат. Пусть в этой системе координат

$$A=(x_1,\ y_1),\quad B=(x_2,\ y_2),\quad C=(x_3,\ y_3),\quad M=(x,\ y).$$

Применяя формулу для расстояния между двумя точками, получим

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=k$$

или

$$3\left[\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3}\left[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(x_1-x_3)^2+\right.$$
$$\left.+(y_1-y_3)^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]=k.$$

Так как $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ — координаты точки G пересечения медиан треугольника, а

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=a^2,$$
$$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=b^2,$$
$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=c^2,$$

где a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, то последнее соотношение можно переписать так:

$$MG^2=\frac{1}{9}[3k-(a^2+b^2+c^2)].$$

Отсюда следует, что если $k<(a^2+b^2+c^2)/3$, то заданное геометрическое место точек M пусто. Если $k=(a^2+b^2+c^2)/3$, то заданное геометрическое место точек M состоит из одной точки G — точки пересечения медиан треугольника ABC. Если $k>(a^2+b^2+c^2)/3$, то заданное геометрическое место точек является окружностью с центром G и радиусом $\sqrt{3k-(a^2+b^2+c^2)}/3$.

Пример 9. На плоскости фиксированы две различные точки C_1 и C_2. Фиксировано действительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MC_1^2-MC_2^2=k.$$

Решение. Введем декартову прямоугольную систему координат, принимая $\overline{C_1C_2}$ за ось Ox и середину O отрезка C_1C_2 за начало координат. Пусть во введенной системе координат

$$C_1=(-a,\ 0),\quad C_2=(a,\ 0),\quad M=(x,\ y).$$

Тогда данное соотношение примет вид

$$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k \quad \text{или} \quad x=\frac{k}{4a}$$

— это уравнение прямой, перпендикулярной C_1C_2 (оси Ox).

Пример 10. *Радикальной осью* двух неконцентрических окружностей $(C_1,\ r_1)$ и $(C_2,\ r_2)$ называется геометрическое место точек M, для каждой из которых ее степени относительно этих окружностей равны между собой. Составить уравнение радикальной оси окружностей $(C_1,\ r_1)$ и $(C_2,\ r_2)$, принимая $\overline{C_1C_2}$ за ось Ox, а середину отрезка C_1C_2 за начало координат O.

Решение. $C_1=(-a,\ 0)$, $C_2=(a,\ 0)$, $M=(x,\ y)$. Соотношение

$$\sigma_1=\sigma_2$$

или

$$MC_1^2-r_1^2=MC_2^2-r_2^2,$$

или

$$MC_1^2-MC_2^2=r_1^2-r_2^2,$$

принимает вид

$$(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=r_1^2-r_2^2$$

или

$$x=\frac{r_1^2-r_2^2}{4a}$$

— это прямая, перпендикулярная прямой C_1C_2 (см. также предыдущий пример).

Замечание. Рассмотрим построение радикальной оси двух окружностей в зависимости от различного расположения их друг относительно друга.

1) Окружности (C_1) и (C_2) пересекаются. Их радикальной осью будет прямая l, проходящая через точки P и Q их пересечения. В самом деле, степени обеих точек P и Q относительно обеих окружностей (C_1) и (C_2) равны нулю, а тогда точки P и Q принадлежат радикальной оси этих окружностей, поэтому сама радикальная ось есть прямая PQ.

2) Окружности (C_1) и (C_2) расположены так, что каждая из них лежит вне другой. Проведем какую-нибудь из четырех прямых, касающихся данных окружностей; P_k, Q_k $(k=1, 2, 3, 4)$ — точки прикосновения; P_kQ_k — отрезки касательных. Пусть точка M_k делит отрезок P_kQ_k пополам. Тогда точка M_k лежит на радикальной оси данных окружностей. В самом деле, $M_kP_k^2=M_kQ_k^2=$ $=k$, где k — степень точки M_k относительно обеих окружностей. Таким образом, середины четырех отрезков P_kQ_k общих касательных к окружностям (C_1) и (C_2), ограниченные точками касания P_k и Q_k, лежат на радикальной оси этих окружностей. Для построения радикальной оси достаточно построить две из точек M_1, M_2, M_3, M_4 или даже одну (и опустить затем из нее перпендикуляр на линию центров C_1C_2).

Замечание. Если неконцентрические окружности (C_1) и (C_2) не пересекаются, то их радикальная ось не имеет общих точек ни с одной из них. В самом деле, предположим, что радикальная ось l окружностей (C_1) и (C_2) имеет общую точку A с окружностью (C_1). Тогда степень точки A относительно окружности (C_1) равна нулю, а так как точка A лежит на радикальной оси окружностей (C_1) и (C_2), то степень точки A относительно окружности (C_2) также равна нулю и потому точка A лежит и на окружности (C_2). Мы получили противоречие: окружности (C_1) и (C_2) имеют общую точку A вопреки предположению.

Читателю предлагается доказать более сильное утверждение: если каждая из окружностей (C_1), (C_2) лежит вне другой, то окружности (C_1) и (C_2) лежат по разные стороны от их радикальной оси, а если одна из окружностей (C_1), (C_2) вложена внутрь другой (см. ниже), то окружности (C_1) и (C_2) лежат по одну сторону от их радикальной оси (речь все время идет о двух неконцентрических окружностях (C_1) и (C_2)).

3) Окружность (C_1) нулевая (точка C_1) лежит вне окружности (C_2). Строим касательные C_1T_1 и C_2T_2, проведенные из точки C_1

к окружности (C_2) (T_1 и T_2 — точки касания). Пусть M_1 и M_2 — середины отрезков C_1T_1 и C_2T_2; прямая M_1M_2 — радикальная ось окружностей (C_2) и (C_1). Можно было бы построить одну касательную C_1T_1, радикальная ось есть прямая, проходящая через середину M_1 отрезка C_1T_1 перпендикулярно прямой C_1C_2.

4) Окружности (C_1) и (C_2) — нулевые. Их радикальная ось есть медиатриса отрезка C_1C_2.

5) Окружности (C_1) и (C_2) ненулевые и касаются друг друга внешним образом или внутренним образом. Их радикальной осью является касательная l в их общей точке T. В самом деле, степени любой точки M, лежащей на касательной l, относительно обеих окружностей (C_1) и (C_2) равны MT^2, т. е. равны между собой.

6) Нулевая окружность (C_1) «лежит» на ненулевой окружности (C_2). Радикальной осью этих окружностей является касательная к окружности (C_2) в точке C_1. В самом деле, точка C_1 принадлежит радикальной оси, так как ее степени относительно (C_1) и (C_2) равны нулю, а кроме того, радикальная ось перпендикулярна прямой C_1C_2 (можно рассуждать и иначе).

7) Окружность (C_1) — нулевая, окружность (C_2) — ненулевая и точка C_1 лежит внутри окружности (C_2), причем $C_1 \neq C_2$. Построим какую-нибудь окружность (C), касающуюся прямой C_1C_2 в точке C_1 и пересекающей окружность (C_2) в точках A и B. Тогда прямая AB пересекает прямую C_1C_2 в точке P, лежащей на радикальной оси окружностей (C_1) и (C_2). В самом деле, степень точки P относительно окружности (C_2) равна $PA \cdot PB$. Но это произведение равно PC_1^2, т. е. степени точки P относительно нулевой окружности (C_1). Радикальной осью окружностей (C_1) и (C_2) является прямая, проходящая через точку P перпендикулярно прямой C_1C_2.

8) Неконцентрические окружности (C_1) и (C_2) — ненулевые и окружность (C_1) вложена внутрь окружности (C_2). Построим какую-нибудь окружность (C), которая пересечет окружность (C_1) в точках A и B, а окружность (C_2) в точках A' и B'. Пусть P — точка пересечения прямых AB и $A'B'$. Тогда точка P принадлежит радикальной оси окружностей (C_1) и (C_2), так как ее степени $\sigma = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})$ и $\sigma' = (\overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{PB'})$ относительно окружностей (C_1) и (C_2) равны между собой: $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{PB'})$ — это степень точки P относительно окружности (C). Радикальной осью l окружностей (C_1) и (C_2) является прямая, проходящая через точку P перпендикулярно прямой C_1C_2.

Пример 11. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Фиксировано положительное число k, не равное 1.

1°. Доказать, что геометрическое место точек M, для каждой из которых выполняется равенство

$$\frac{MA}{MB} = k,$$

есть окружность (C_k)[1]), центр C_k которой лежит на прямой AB. Введем декартову прямоугольную систему координат, принимая за начало координат середину O отрезка AB, а прямую AB за ось Ox. Найти на оси Ox координату x_k центра C_k окружности (C_k), зная координаты $-a$ и a точек A и B (будем считать, что $a>0$, т. е. положительное направление оси координат выбрано от A к B). Найти также радиус R_k окружности (C_k).

2°. Доказать, что центр C_k окружности (C_k) является внешней точкой отрезка AB.

3°. Доказать, что при любом k $(0<k\neq 1)$ окружность (C_k) не имеет общих точек с медиатрисой s отрезка AB: при $0<k<1$ окружность (C_k) и точка A лежат по одну сторону от медиатрисы s отрезка AB (а следовательно, точка B и окружность (C_k) лежат по разные стороны от s), а при $k>1$ точка A и окружность (C_k) лежат по разные стороны от s (а следовательно, точка B и окружность (C_k) лежат по одну сторону от s).

4°. Доказать, что если $0<k<1$, то точка A лежит внутри окружности (C_k), а точка B вне ее. Если же $k>1$, то наоборот: точка A лежит вне окружности (C_k), а точка B внутри этой окружности.

5°. Доказать, что окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) $(0<k_1\neq 1,\ 0<k_2\neq 1)$ симметричны относительно медиатрисы s отрезка AB тогда и только тогда, когда $k_1k_2=1$.

6°. Пусть P_k и Q_k — точки пересечения окружности (C_k) с прямой AB. Доказать, что упорядоченная четверка точек A, B, P_k, Q_k *гармоническая*, т. е.

$$\frac{\overrightarrow{AP_k}}{\overrightarrow{P_kB}}:\frac{\overrightarrow{AQ_k}}{\overrightarrow{Q_kB}}=-1.$$

7°. Доказать, что если S — произвольная точка медиатрисы s отрезка AB, а T — точка прикосновения любой (из двух) касательной, проведенной из точки S к окружности (C_k), то

$$ST=SA=SB;$$

иначе говоря: медиатриса s отрезка AB является радикальной осью всех окружностей (C_k) $(0<k\neq 1)$, включая нулевые окружности A и B.

8°. Доказать, что любая из окружностей (S), проходящая через точки A и B, пересекает ортогонально все окружности (C_k) $(0<k\neq 1)$, т. е. касательные к окружностям (S) и (C_k) в любой из двух точек их пересечения взаимно перпендикулярны.

---

[1]) Окружность, определяемую этим свойством, называют *окружностью Аполлония*. Точки A и B называются *предельными точками* или *точками Понселе* окружностей (C_k) (если k изменяется от 0 до $+\infty$, исключая $k=1$, то получаем семейство окружностей (C_k)).

Множество (C_k) всех окружностей Аполлония, определяемое соотношением

$$\frac{MA}{MB} = k,$$

где k принимает все положительные значения (в это множество включается и медиатриса отрезка AB), называется *гиперболическим пучком окружностей*. Точки A и B называются *предельными точками* этого пучка или *точками Понселе*.

Множество всех окружностей, проходящих через точки A и B (в это множество включается и прямая AB), называется *эллиптическим пучком окружностей*, союзным с рассматриваемым гиперболическим пучком. Точки A и B называются *базисными точками* эллиптического пучка.

Замечание. Гиперболический пучок окружностей можно определить различными способами (все сформулированные ниже определения эквивалентны друг другу).

1) Гиперболический пучок Г окружностей есть образ семейства всех концентрических окружностей (O) при инверсии. При этом пучок прямых с центром O преобразуется в эллиптический пучок окружностей Е, союзный с гиперболическим пучком Г.

2) Гиперболическим пучком Г окружностей называется множество всех окружностей с общей радикальной осью, которая их не пересекает.

3) Гиперболическим пучком Г окружностей называется множество всех окружностей (PQ) с диаметром PQ, где точки P и Q гармонически сопряжены с предельными точками A и B (в качестве точек A и B можно взять две произвольные различные точки). Множество всех окружностей, проходящих через точки A и B, образуют при этом эллиптический пучок Е окружностей, союзный с гиперболическим пучком Г.

4) Гиперболическим пучком Г окружностей называется стереографическая проекция (см. ниже главу IV) из произвольной точки сферы множества всех окружностей сферы, плоскости которых перпендикулярны какому-либо диаметру NS этой сферы. При этом проекции A и B точек N и S будут предельными точками пучка Г, а стереографические проекции множества больших кругов сферы, проходящих через точки N и S, образуют эллиптический пучок Е окружностей, союзный с пучком Г.

5) Гиперболическим пучком Г окружностей с предельными точками $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ называется семейство окружностей, заданное уравнением

$$\lambda f + \mu\varphi = 0,$$

где

$$f \equiv x^2 + y^2 - 2px + a^2 = 0,$$

$$\varphi \equiv x^2 + y^2 - 2qx + a^2 = 0, \qquad p \neq q,$$

— какие-нибудь две окружности этого семейства (среди чисел λ и μ хотя бы одно отлично от нуля).

6) Гиперболический пучок Г окружностей — это множество окружностей, заданных уравнением

$$x^2+y^2-2px+1=0,$$

где p — параметр, принимающий все значения, по модулю не превосходящие 1. Тогда союзный с ним эллиптический пучок определяется уравнением

$$x^2+y^2-2qx-1=0,$$

где параметр q принимает все действительные значения; фундаментальные точки пучков Г и Е суть $(\pm 1,\ 0)$.

Существуют и другие определения.

9°. Пусть $0<k_1<k_2<1$. Доказать, что окружность (C_{k_1}) вложена внутрь окружности (C_{k_2}). Если же $1<k_1<k_2$, то окружность (C_{k_2}) вложена внутрь окружности (C_{k_1}).

10°. Доказать справедливость следующего способа построения окружности Аполлония: заданы точки Понселе A и B и одна из точек M_0 окружности Аполлония, не лежащая ни на прямой AB, ни на медиатрисе отрезка AB; проводим касательную в точке M_0 к окружности (ABM_0). Если C — точка пересечения этой касательной с прямой AB, то окружность Аполлония, проходящая через точку M_0, есть окружность с центром C и радиусом CM_0. Рассмотреть случай, когда точка M_0 лежит на прямой AB, но отлична от точек A, B и середины O отрезка AB.

11°. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

11°₁. $\frac{MA}{MB}>k$, где $0<k\neq 1$,

11°₂. $\frac{MA}{MB}<k$, где $0<k\neq 1$.

12°. Доказать, что две неконцентрические окружности (C') и (C''), не имеющие общих точек, однозначно определяют гиперболический пучок окружностей, к которому они принадлежат. Как построить предельные точки этого пучка? Рассмотрим случай, когда одна или обе окружности нулевые.

13°. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Задана прямая l. Найти на прямой l точки M такие, что отношение

$$\frac{MA}{MB}$$

принимает наибольшее и наименьшее значения. Исследовать вопрос в зависимости от положения прямой l относительно точек A и B.

14°. Дана плоскость π и прямая l, пересекающая плоскость в точке A. Дан угол φ, который прямая l образует с плоскостью π (в случае, если прямая l не перпендикулярна плоскости π, φ — это острый угол между прямой l и ее проекцией l' на плоскость π; в случае, если прямая l перпендикулярна плоскости π, $\varphi=90^\circ$). На прямой l фиксирована точка B, отличная от точки A.

Пусть PQ — произвольный отрезок, лежащий в пространстве. Проведем через точки P и Q прямые, коллинеарные прямой l, и пусть P' и Q' — точки пересечения этих прямых с плоскостью π. Отрезок $P'Q'$ называется параллельной проекцией отрезка PQ на плоскость π по направлению прямой l. Отношение

$$k=\frac{P'Q'}{PQ}$$

назовем *коэффициентом искажения* отрезка PQ при параллельном его проектировании на плоскость π по направлению прямой l (ниже мы будем писать просто — коэффициент искажения, так как в этой задаче рассматривается параллельное проектирование только на плоскость π по направлению прямой l).

Пусть фиксировано положительное число k. Найти на плоскости π геометрическое место точек M, каждая из которых обладает следующим свойством: коэффициент искажения любого ненулевого отрезка, лежащего на прямой BM, равен k.

Решение. 1°. $A=(-a,\ 0)$, $B=(a,\ 0)$, $M=(x,\ y)$. Применяя формулу для расстояния между двумя точками, получим

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=k$$

или

$$\left(x-a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

— это уравнение окружности с центром в точке $C_k(x_k,\ 0)$, где

$$x_k=a\,\frac{k^2+1}{k^2-1},$$

и радиусом

$$R_k=\frac{2ak}{|k^2-1|}.$$

2°. Из равенства

$$x_k=a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}$$

следует, что $|x_k|>a$.

3°. Если бы окружность (C_k) имела с медиатрисой отрезка AB хотя бы одну общую точку M_0, то для этой точки мы имели бы

$$1=\frac{M_0A}{M_0B}=k,$$

что противоречит условию $k\neq1$. Если $0<k<1$, то $x_k=a\frac{k^2+1}{k^2-1}<0$, следовательно, точки C_k и A лежат по одну сторону от медиатрисы отрезка AB, а значит, по одну сторону от этой медиатрисы лежат точка A и окружность (C_k). Если $k>1$, то $x_k>0$, следовательно, точки B и C_k лежат по одну сторону от медиатрисы отрезка AB, а так как окружность (C_k) не имеет общих точек с этой медиатрисой, то точка B и окружность (C_k) лежат по одну сторону от медиатрисы отрезка AB.

4°. Степень точки A относительно окружности (C_k) равна

$$\sigma_A = \left(-a - a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} = \frac{4a^2k^2}{k^2-1}.$$

Если $0 < k < 1$, то $\sigma_A < 0$, т. е. точка A лежит внутри окружности (C_k), а значит, точка B лежит вне окружности (C_k), так как точки A и B лежат по разные стороны от медиатрисы s отрезка AB, а точка A и окружность (C_k) лежат (при $0 < k < 1$) по одну сторону от медиатрисы отрезка AB, если $k > 1$, то $\sigma_A > 0$ и A лежит вне (C_k).

Степень σ_B точки B относительно окружности (C_k) равна

$$\sigma_B = \left(a - a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} = \frac{4a^2}{1-k^2}.$$

Если $0 < k < 1$, то $\sigma_B > 0$, а если $k > 1$, то $\sigma_B < 0$.

5°. Докажем, что если $0 < k_1 < k_2 < 1$, то $R_{k_1} < R_{k_2}$, а если $1 < k_1 < k_2$, то $R_{k_1} > R_{k_2}$.

В самом деле, если $0 < k_1 < k_2 < 1$, то

$$R_{k_1} - R_{k_2} = \frac{2ak_1}{1-k_1^2} - \frac{2ak_2}{1-k_2^2} = 2a\frac{(k_1-k_2)(1+k_1k_2)}{(1-k_1^2)(1-k_2^2)} < 0,$$

а если $1 < k_1 < k_2$, то

$$R_{k_1} - R_{k_2} = \frac{2ak_1}{k_1^2-1} - \frac{2ak_2}{k_2^2-1} = 2a\frac{(k_2-k_1)(1+k_1k_2)}{(k_1^2-1)(k_2^2-1)} > 0.$$

Значит, окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) могут быть симметричными относительно медиатрисы s отрезка AB в одном из случаев

$$0 < k_1 < 1 < k_2, \quad 0 < k_2 < 1 < k_1.$$

Оба случая исследуются одинаково. Пусть, например, $0 < k_1 < 1$, $k_2 > 1$; тогда

$$R_{k_1} = \frac{2ak_1}{1-k_1^2}, \quad R_{k_2} = \frac{2ak_2}{k_2^2-1}.$$

Необходимое условие того, что окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) (в случае $0 < k_1 < 1 < k_2$) симметричны относительно медиатрисы s отрезка AB, состоит в том, что равны их радиусы:

$$R_{k_1} = R_{k_2},$$

$$\frac{2ak_1}{1-k_1^2} = \frac{2ak_2}{k_2^2-1},$$

$$k_1k_2^2 - k_1 - k_2 + k_1^2k_2 = 0,$$

$$(k_1+k_2)(k_1k_2-1) = 0,$$

и так как $k_1 + k_2 > 0$, то $k_1k_2 - 1 = 0$, откуда $k_1k_2 = 1$. Это условие и достаточно для того, чтобы окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) были симметричны относительно медиатрисы s отрезка AB. В самом деле, предполагая, что $k_1k_2=1$, имеем

$$x_{k_1}=2a\frac{k_1^2+1}{k_1^2-1}=2a\frac{\frac{1}{k_2^2}+1}{\frac{1}{k_2^2}-1}=2a\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}=-x_{k_2},$$

следовательно, точки C_{k_1} и C_{k_2} симметричны относительно точки O или, что то же самое, относительно медиатрисы s отрезка AB. Но из условия $k_1k_2=1$ следует, что $R_{k_1}=R_{k_2}$, значит, и сами окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) симметричны относительно прямой s.

З а м е ч а н и е. Все сказанное в этом пункте следует и из того, что данное уравнение эквивалентно следующему:

$$\frac{MB}{MA}=\frac{1}{k}.$$

6°. Одна из точек A, B лежит внутри окружности (C_k), а другая вне этой окружности; иначе: одна из точек A, B является внутренней точкой диаметра P_kQ_k окружности (P_kQ_k), а другая — внешней. Отсюда следует, что одна из точек P_k, Q_k является внутренней точкой отрезка AB, а другая — внешней. Отсюда следует, что числа

$$\frac{\overrightarrow{AP_k}}{\overrightarrow{P_kB}},\quad \frac{\overrightarrow{AQ_k}}{\overrightarrow{Q_kB}}$$

имеют разные знаки. Но модули этих дробей равны k, так как точки P_k и Q_k лежат на окружности (C_k) и, значит, принадлежат заданному геометрическому месту точек. Таким образом,

$$\frac{\overrightarrow{AP_k}}{\overrightarrow{P_kB}}:\frac{\overrightarrow{AQ_k}}{\overrightarrow{Q_kB}}=-1.$$

Итак, точки P_k и Q_k гармонически сопряжены относительно точек A и B.

Обратно, если точки P_k и Q_k гармонически сопряжены относительно пары A, B, то

$$\frac{AP_k}{P_kB}=\frac{AQ_k}{Q_kB}\,(=k),$$

т. е. точки P_k и Q_k принадлежат окружности (C_k) гиперболического пучка окружностей с предельными точками A и B (для указанного значения k). Отсюда следует, что окружностью (C_k) будет окружность (P_kQ_k), построенная на отрезке P_kQ_k как на диаметре.

Доказанное положение о том, что A, B, P_k, Q_k — гармоническая четверка, позволяет дать следующее изящное построение окружностей Аполлония: через точки A и B проводим две прямые s_1 и s_2, перпендикулярные прямой AB (рис. 2), и фиксируем на них точки S_1 и S_2, отличные соответственно от точек A и B. Откла-

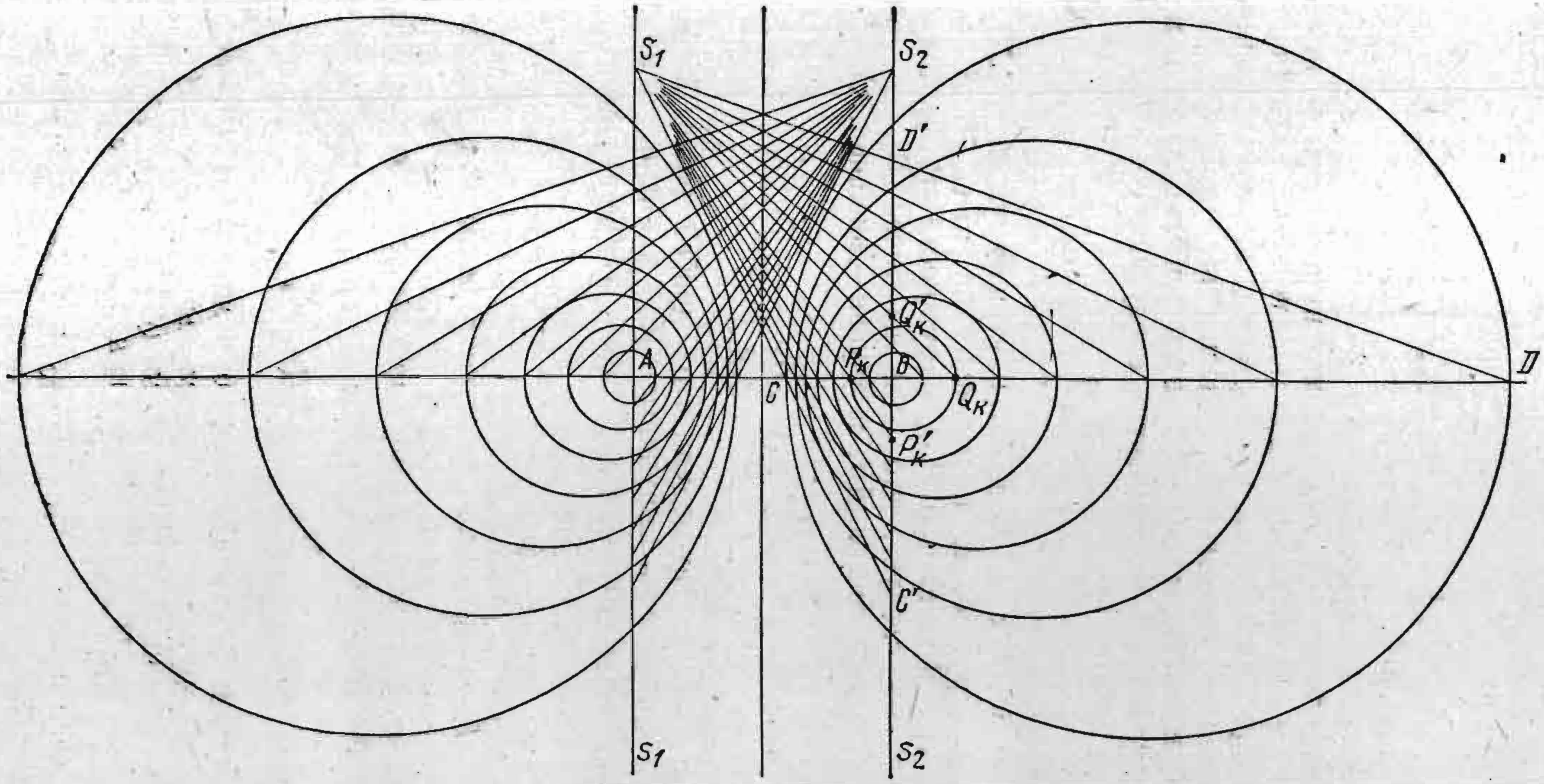


Рис. 2.

дываем на прямой s_1 по разные стороны от прямой AB конгруэнтные отрезки BP'_k и BQ'_k. Прямые $S_1P'_k$ и $S_1Q'_k$ пересекают прямую AB в точках P_k и Q_k. Тогда прямые

$$S_1A, \quad S_1B, \quad S_1P'_k, \quad S_1Q'_k$$

образуют гармоническую четверку. Окружность с диаметром P_kQ_k есть окружность гиперболического пучка с предельными точками A и B.

На рис. 3 дан еще один способ построения окружности Аполлония: пусть l — касательная к окружности Ω в точке S; N — точка, диаметрально противоположная точке S на окружности Ω.

Построим семейство хорд $P'_kQ'_k$ окружности Ω, параллельных ее диаметру SN. Пусть $A'B'$ — диаметр окружности Ω, перпендикулярный диаметру SN, а A и B — проекции точек A' и B' на прямую l из точки N. Обозначим через P_k и Q_k проекции точек P'_k и Q'_k на прямую l из точки N. Четверка точек

$$A, \ B, \ P_k, \ Q_k$$

гармоническая, так как четверка прямых

$$NA', \ NB', \ NP'_k, \quad NQ'_k$$

гармоническая ($\angle A'NB' = \pi/2$, а NB' и NA' — биссектрисы угла $P'_kNQ'_k$). Окружность с диаметром P_kQ_k есть окружность Аполлония с предельными точками A и B.

Этот способ построения окружностей Аполлония связан с так называемой стереографической проекцией сферы на плоскость (эта проекция применяется при построении географических карт).

7°. Пусть $S(0, b)$ — произвольная точка медиатрисы s отрезка AB. Так как все точки медиатрисы s отрезка AB являются внешними точками окружности (C_k), то из точки S можно провести две касательные к окружности (C_k). Пусть ST — одна из них, причем T — точка касания.

Степень точки S относительно окружности (C_k) равна ST^2:

$$\sigma = ST^2 = \left(a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + b^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} = a^2 + b^2$$

и, следовательно,

$$ST = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{OA^2+OS^2} = SA = SB.$$

Мы видим, что длина отрезка ST не зависит от k, а значит, все окружности (C_k) и нулевые окружности A и B имеют общую радикальную ось — медиатрису s отрезка AB.

8°. Из доказанного в п. 7° следует, что окружность, центром которой является любая точка S медиатрисы s отрезка AB, а радиус равен $SA = SB$, пересекает ортогонально окружность (C_k), так как $SA = SB = ST$, где T — точка прикосновения касательной (любой из двух) к окружности (C_k), проведенной из точки S.

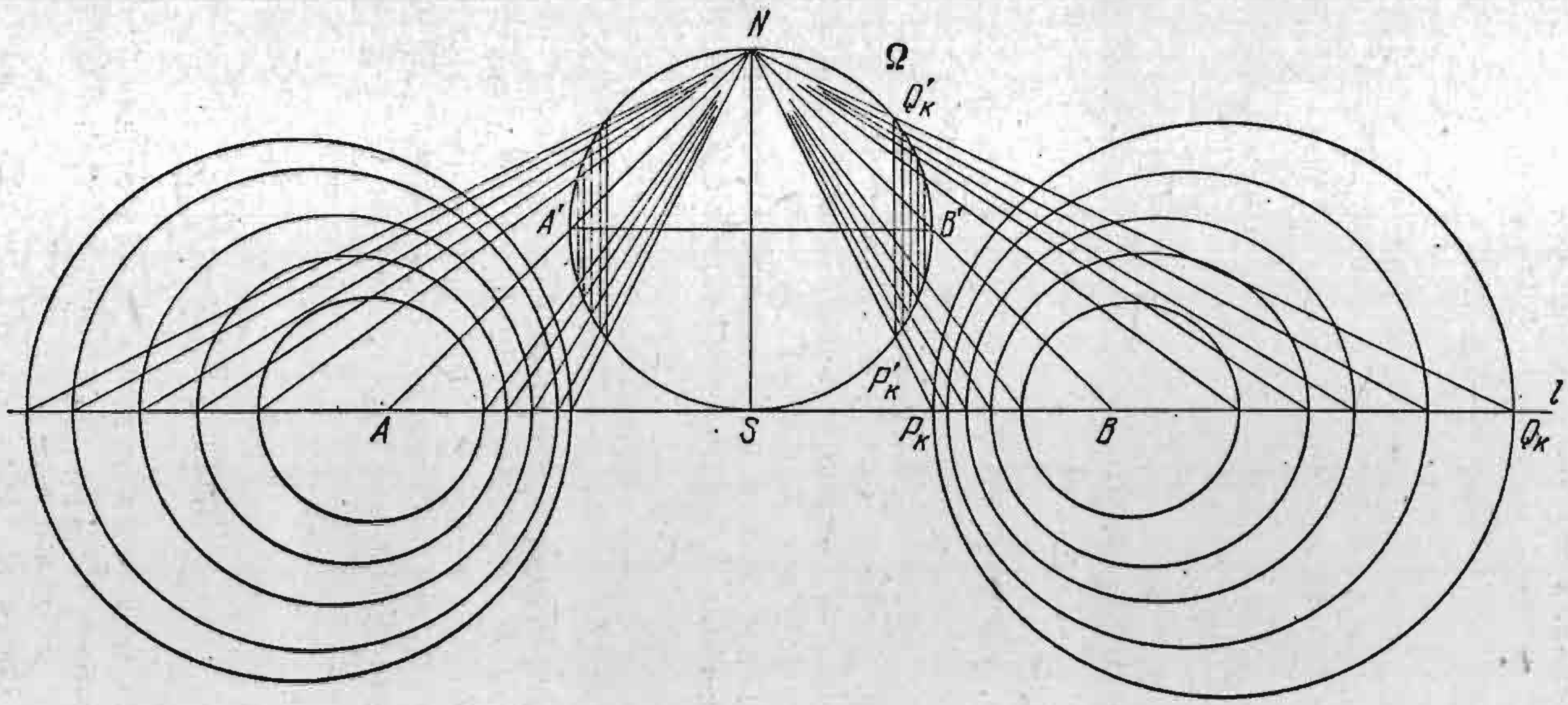


Рис. 3.

Но любая окружность, проходящая через точки A и B, имеет центр на медиатрисе отрезка AB, а ее радиус равен $SA=SB$.

9°. Пусть $0<k_1<k_2<1$. Окружности (C_{k_1}) и $(C_{k_2}$ не имеют общих точек при $k_1 \neq k_2$, так как если бы они имели общую точку M_0, то выполнялось бы соотношение

$$k_1=\frac{M_0A}{M_0B}=k_2,$$

что неверно $(k_1 \neq k_2)$. Точка A в случае $0<k_1<k_2<1$ лежит внутри как окружности (C_{k_1}), так и окружности (C_{k_2}), а так как эти окружности не имеют общих точек, то одна из них вложена внутрь другой. Но в случае $0<k_1<k_2<1$ имеем $R_{k_1}<R_{k_2}$ (см. п. 5°), значит, окружность (C_{k_1}) вложена внутрь окружности (C_{k_2}).

Если же $1<k_1<k_2$, то точка B лежит внутри окружностей (C_{k_1}) и (C_{k_2}) (см. п. 4°), окружности (C_{k_1}) и (C_{k_2}) не имеют общих точек и $R_{k_1}>R_{k_2}$ (см. п. 5°), значит, окружность (C_{k_2}) вложена внутрь окружности (C_{k_1}).

10°. 1) Построим окружность (ABM_0). Окружность (C_k) Аполлония по доказанному в п. 8° должна пересекать (в точке M_0) ортогонально эту окружность (ABM_0). Поэтому радиус окружности (C_k) будет лежать на касательной к окружности (ABM_0) в точке M_0. С другой стороны, центр C_k окружности (C_k) лежит на прямой AB, поэтому центр C_k окружности (C_k) есть точка пересечения прямой AB с касательной к окружности (ABM_0) в точке M_0. Значение k, соответствующее окружности (C_k), равно

$$k=\frac{M_0A}{M_0B},$$

так как точка M_0 лежит на окружности (C_k).

2) Если точка M_0 лежит на прямой AB, но отлична от точек A, B, O, то это одна из точек P_k, Q_k пересечения окружности (C_k) с этой прямой. Другая точка N_0 пересечения окружности (C_k) с прямой AB находится из соотношения

$$(ABM_0N_0)=-1.$$

Отсюда

$$(\overrightarrow{OM}_0,\ \overrightarrow{ON}_0)=a^2,$$

где O — середина отрезка AB; точка N_0 является образом точки M_0 при инверсии относительно окружности (AB), построенной на отрезке AB как на диаметре.

Построение точки N_0 дано на рис. 4 и 5: точка N_0 принадлежит окружности Аполлония, проходящей через точку M_0, так как из соотношения

$$(\overrightarrow{OM}_0,\ \overrightarrow{ON}_0)=a^2$$

следует, что

$$(ABM_0N_0) = -1,$$

$$\frac{AM_0}{BM_0} = \frac{AN_0}{BN_0} \ (= k).$$

Построение точки N_0, гармонически сопряженной с точкой M_0 относительно A, B, может быть осуществлено и многими другими способами (без применения инверсии).

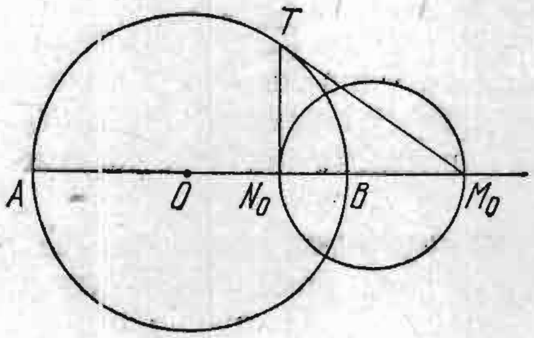


Рис. 4.

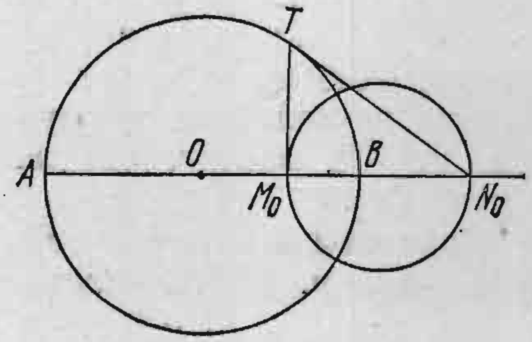


Рис. 5.

Если на плоскости задана прямая, параллельная прямой AB, то такое построение может быть выполнено даже при помощи одной линейки.

11°. Неравенство

$$\frac{MA}{MB} > k,$$

или

$$MA^2 - k^2MB^2 > 0,$$

эквивалентно следующему:

$$(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 + 2a\,(1+k^2)\,x + a^2\,(1-k^2) > 0.$$

Если $0 < k < 1$, то, поделив левую часть этого уравнения на $1-k^2$ и преобразуя, получим

$$\left(x - a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} > 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют координаты всех точек (x, y), лежащих вне окружности (C_k).

Если $k > 1$, то получаем

$$\left(x - a\,\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 - \frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2} < 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют координаты всех точек, лежащих внутри окружности (C_k).

Аналогично доказывается, что при $0 < k < 1$ неравенству

$$\frac{MA}{MB} < k$$

удовлетворяют все точки M, лежащие внутри окружности (C_k), а при $k > 1$ — все точки, лежащие вне окружности (C_k).

12°. Пусть s — радикальная ось окружностей (C') и (C''), а O — точка, в которой эта радикальная ось пересекает прямую $C'C''$ центров данных окружностей. Обозначим через P'_k, Q'_k, P''_k, Q''_k соответственно точки пересечения окружностей (C') и (C'') с прямой $C'C''$. Так как точка O лежит на радикальной оси окружностей (C') и (C''), то степени ее относительно этих окружностей равны между собой:

$$\sigma = (\overrightarrow{OP'_k}, \overrightarrow{OQ'_k}) = (\overrightarrow{OP''_k}, \overrightarrow{OQ''_k})$$

(эти степени положительны, так как радикальная ось не пересекает данные окружности и, следовательно, точка O лежит вне этих окружностей).

Построим на прямой $C'C''$ точки A и B, отстоящие от точки O на расстояние $\sqrt{\sigma}$. Тогда

$$OA^2 = OB^2 = (\overrightarrow{OP'_k}, \overrightarrow{OQ'_k}) = (\overrightarrow{OP''_k}, \overrightarrow{OQ''_k}) = \sigma.$$

Из этих соотношений следует, что

$$(ABP'_kQ'_k) = -1, \qquad (ABP''_kQ''_k) = -1,$$

т. е. (C') и (C'') — окружности Аполлония для значений k, равных

$$k' = \frac{P'_kA}{P'_kB} = \frac{Q'_kA}{Q'_kB}, \qquad k'' = \frac{P''_kA}{P''_kB} = \frac{Q''_kA}{Q''_kB}.$$

13°. Построим медиатрису s отрезка AB. Предположим, что прямая l пересекает эту медиатрису, но не проходит через точки A и B (случай 1) см. на рис. 6). Пусть S — точка пересечения прямых l и s. Построим окружность с центром S и радиусом SA; она пересечет прямую l в двух точках M_1 и M_2. Проведем касательную к построенной окружности в точке M_1. Пусть P_1 — точка пересечения этой касательной с прямой AB. Построим окружность с центром в точке P_1 и радиусом P_1M_1. Это будет окружность Аполлония с предельными точками A и B. Значит,

$$\frac{M_1A}{M_1B} = k_1 > 1.$$

Все точки прямой l лежат вне окружности (C_{k_1}), значит, для всех точек прямой l, отличных от точки M_1, отношение $\frac{MA}{MB}$ будет меньше k_1, т. е. в точке M_1 отношение $\frac{MA}{MB}$ максимально. Аналогично доказывается, что это отношение $\frac{MA}{MB}$ в точке M_2 минимально.

На рис. 6 даны различные положения прямой l относительно точек A и B:

1) Прямая l не проходит через точки A и B и не перпендикулярна AB: в точке M_1 — максимум $\left(\text{отношения } \frac{MA}{MB}\right)$, в точке M_2 — минимум (случай, подробно рассмотренный выше).

2) Прямая l перпендикулярна AB, не проходит через точки A и B и расположена по ту сторону от медиатрисы отрезка AB, где лежит точка B. В точке M_1 — максимум, минимума нет.

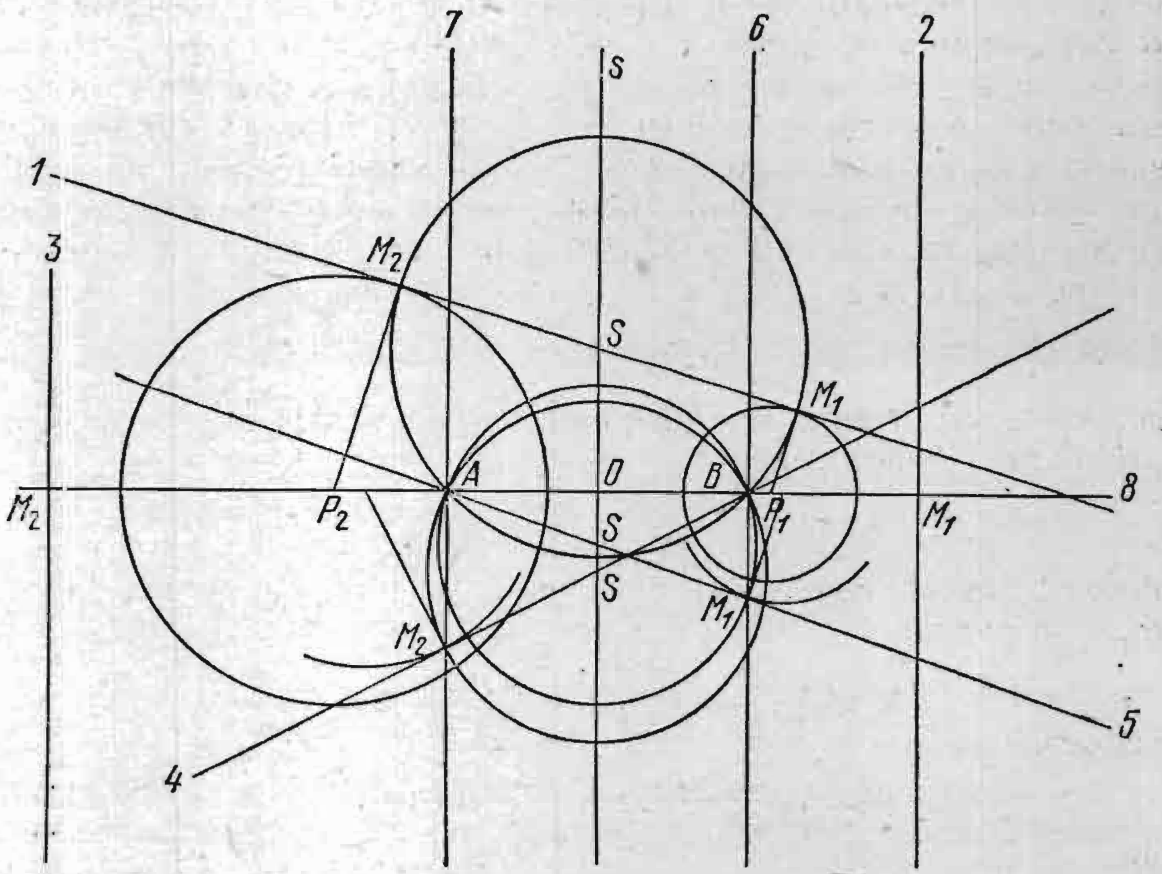


Рис. 6.

3) Прямая l перпендикулярна AB, не проходит через точки A, B и расположена по ту же сторону от медиатрисы отрезка AB, где лежит точка A. В точке M_2 — минимум, максимума нет.

4) Прямая l проходит через точку B, но не совпадает с AB; в точке M_2 — минимум, максимума нет.

5) Прямая l проходит через точку A, но не совпадает с AB; в точке A — минимум (отношение $\frac{MA}{MB}$ в этом случае равно нулю); в точке M_1 — максимум.

6) Прямая l проходит через точку B и перпендикулярна AB. Нет ни максимума, ни минимума.

7) Прямая l проходит через точку A и перпендикулярна AB. Минимум в точке A $\left(\frac{MA}{MB} = \frac{AA}{AB} = 0\right)$, максимума нет.

8) Прямая l совпадает с прямой AB. Минимум в точке A $\left(\frac{MA}{MB} = 0\right)$, максимума нет.

14°. Геометрическое место точек M на плоскости π находится из условия

$$\frac{MA}{MB}=k.$$

Это геометрическое место точек M в пространстве является *сферой* S *Аполлония* с предельными точками A и B. Если $0<k<1$, то сфера S содержит внутри себя точку A, а так как точка A лежит на плоскости π, то сфера S и плоскость π пересекаются по окружности σ, которая и является искомым геометрическим местом точек M. Если же $k>1$, то сфера S содержит внутри себя точку B и здесь возможны три случая: либо эта сфера пересекает плоскость π, либо касается плоскости π, либо не имеет с плоскостью π ни одной общей точки. Исследуем эти случаи. Введем на прямой AB положительное направление от точки A к точке B. Тогда

$$\overrightarrow{AP}=\frac{k^2}{k^2-1}\overrightarrow{AB},$$

где P — центр сферы S. Расстояние d от центра P сферы S до плоскости π будет равно

$$d=\frac{k^2}{k^2-1}AB\sin\varphi.$$

Сфера S будет пересекать плоскость π тогда и только тогда, когда ее радиус

$$r=\frac{k}{k^2-1}AB$$

будет больше d:

$$\frac{k\cdot AB}{k^2-1}>\frac{k^2AB}{k^2-1}\sin\varphi$$

или

$$\sin\varphi<1/k.$$

При выполнении этого условия сфера S пересекает плоскость π по окружности σ, которая и является геометрическим местом точек M.

Если $\sin\varphi=1/k$, то сфера S касается плоскости π в точке M, являющейся искомым геометрическим местом точек (эта точка M совпадает с точкой A только тогда, когда $\varphi=\pi/2$).

Если, наконец, $\sin\varphi>1/k$, то сфера S и плоскость π не пересекаются и искомое геометрическое место точек M пусто.

§ 2. Применение аналитической геометрии (примеры с указаниями и ответами)

1. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Дано действительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$2MA^2+3MB^2=k.$$

Ответ. Если $k<\frac{6}{5}AB^2$, то заданное геометрическое место точек M пусто; если $k=\frac{6}{5}AB^2$, то заданное геометрическое место точек состоит из одной точки P, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении 3/2:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{3}{2};$$

если $k>\frac{6}{5}AB^2$, то заданное геометрическое место точек M является окружностью с центром в точке P и радиусом $R=$ $=\frac{1}{5}\sqrt{5k-6AB^2}$.

2. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Фиксировано действительное число k. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$2MA^2-3MB^2=k.$$

Ответ. Если $k>6AB^2$, то заданное геометрическое место точек M пусто; если $k=6AB^2$, то заданное геометрическое место точек M состоит из одной точки P, делящей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отношении $-3/2$:

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-\frac{3}{2};$$

если $k<6AB^2$, то заданное геометрическое место точек M является окружностью с центром P и радиусом $R=\sqrt{6AB^2-k}$.

3. На плоскости фиксированы три точки A, B, C. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых

$$MA^2+MB^2=MC^2.$$

Указание. Ввести декартову прямоугольную систему координат.

Ответ. Если угол C треугольника ABC тупой, то заданное геометрическое место точек пусто; если $C=\pi/2$, то заданное геометрическое место точек M состоит из одной точки D, симметричной точке C относительно середины отрезка AB; если C — острый угол, то заданное геометрическое место точек является окружностью с центром D и радиусом $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ (a, b, c — длины сторон треугольника ABC).

4. Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BD=4$, $DC=2$. Найти длины сторон AB и AC, зная, что они выражаются целыми числами и что высота, опущенная из вершины A на сторону BC, больше $\sqrt{10}$.

Решение. По условию биссектриса AD делит сторону BC на отрезки длиной 4 и 2, следовательно, $BD/DC=2$, т. е. $AB/AC=2$. Геометрическим местом точек A, для которых выполняется это соотношение, является окружность Аполлония с радиусом

$$R=\frac{2ak}{|k^2-1|},$$

где $2a=CB=6$, $k=2$, т. е. $R=\frac{6\cdot 2}{3}=4$, с центром P, лежащим на прямой BC и имеющим координату

$$\overline{OP}=a\frac{k^2+1}{k^2-1}=3\cdot\frac{5}{3}=5,$$

где O — середина отрезка BC. Если ввести декартову прямоугольную систему координат, принимая $\overrightarrow{BC}$ за ось Ox, а середину O отрезка BC за начало координат, то уравнение окружности $(P, 4)$ примет вид

$$(x-5)^2+y^2=16.$$

Рассмотрим прямую $y=3$. Эта прямая пересекает окружность $(P, 4)$ в точках $A_1(5-\sqrt{7}, 3)$, $A_2(5+\sqrt{7}, 3)$. Отсюда $A_1C=\sqrt{20-4\sqrt{7}}<3{,}1$, $A_2C=\sqrt{20+4\sqrt{7}}>5{,}5$. Так как $AH>\sqrt{10}>3$, то точка A должна лежать на меньшей дуге $\overset{\frown}{A_1A_2}$ окружности $(P, 4)$; $A_1C<AC<A_2C$, значит, $3{,}1<AC<5{,}5$, и так как по условию задачи длина AC должна выражаться целым числом, то $AC=4$, тогда $AB=8$, или $AC=5$ и $AB=10$.

Дополнительные вопросы. Предположим, что биссектриса AD внутреннего угла A треугольника ABC делит сторону BC на отрезки $BD=4$, $DC=2$.

а) Каково максимальное значение высоты AH? (*Ответ*. 4.)

б) В каких пределах изменяются длины сторон AB и AC? (*Ответ*. $2<AC<6$, $4<AB<12$.)

в) Доказать, что AC и AB возрастают, если точка A описывает окружность Аполлония $\frac{AB}{AC}=2$ от точки D до точки, ей диаметрально противоположной.

г) Доказать, что длина AD биссектрисы угла A изменяется от 0 до 8.

г) Дана медиана m, выходящая из A. При каком необходимом и достаточном условии существует треугольник с данными $BD=4$, $DC=2$, m? Как построить этот треугольник? (*Ответ*. $1<m<9$.)

5. Найти образы окружностей Аполлония (см. пример 11)

$$\left(x-a\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{4a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

при инверсии $I=(A, AB^2)$:

$$x+a=4a^2\frac{X+a}{(X+a)^2+Y^2},\qquad y=4a^2\frac{Y}{(X+a)^2+Y^2}.$$

Во что переходят при этой инверсии окружности эллиптического пучка, союзного с рассматриваемым гиперболическим пучком?

Ответ. (Γ'): $(X-a)^2+Y^2=(2a/k)^2$ — это семейство концентрических окружностей (C_k') с общим центром $B(a, 0)$, радиус окружности (C_k') равен $2a/k$. Окружность E эллиптического пучка, союзного с пучком Γ, с центром в точке $S(0, s)$ перейдет в радикальную ось окружности E и окружности инверсии, т. е. в прямую

$$a(X-a)+sY=0. \qquad (E')$$

6. Доказать, что уравнения

$$x^2+y^2-2px+a^2=0,$$

$$x^2+y^2-2qy-a^2=0,$$

где a — фиксированное положительное число, p и q — действительные параметры, являются соответственно уравнениями гиперболического пучка окружностей и союзного с ним эллиптического пучка окружностей. Каковы фундаментальные точки этих пучков? В какие линии переходят окружности Γ и E при инверсии $I=(A, 4a^2)$, где $A=(-a, 0)$.

Ответ. Фундаментальные точки $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. При инверсии $I=(A, 4a^2)$ окружность Γ переходит в окружность

$$(X-a)^2+Y^2=4a^2\frac{p-a}{p+a}$$

с центром в точке $B(a, 0)$ и радиусом $R'=2a\sqrt{\frac{p-a}{p+a}}$. Заметим, что только при следующих значениях параметра p: $p<-a$ и $p\geqslant a$ уравнение Γ есть уравнение действительной окружности.

При той же инверсии окружность E переходит в прямую $a(X-a)+pY=0$, проходящую через точку $B(a, 0)$; это — радикальная ось окружности E и окружности инверсии.

Если рассматривать окружность Γ как окружность Аполлония, то k и p связаны соотношением $p=a\frac{k^2+1}{k^2-1}$. Отсюда $\frac{p-a}{p+a}=\frac{1}{k^2}$ и, значит, $R'=2a\sqrt{\frac{p-a}{p+a}}=\frac{2a}{k}$.

7. Доказать, что если

$$f\equiv x^2+y^2-2p_1x+a^2=0, \qquad \varphi\equiv x^2+y^2-2p_2x+a^2=0$$

две различные окружности гиперболического пучка ($p_1\neq p_2$) с предельными точками $(\pm a, 0)$, то всякая окружность этого пучка может быть задана уравнением

$$\lambda f+\mu\varphi=0,$$

где λ и μ — числа. Обратно, при любых λ и μ, из которых хотя бы одно отлично от нуля, уравнение $\lambda f+\mu\varphi=0$ есть уравнение окружности гиперболического пучка (при $\lambda=-\mu\neq 0$ — уравнение медиатрисы отрезка, ограниченного предельными точками).

Рассмотреть частный случай $f=x^2+y^2$, $\varphi=x-a$.

8. Сформулировать и доказать аналогичное положение для двух различных окружностей

$$f\equiv x^2+y^2-2q_1y-a^2=0,\quad \varphi\equiv x^2+y^2-2q_2y-a^2=0$$

эллиптического пучка E.

9. Пусть M — произвольная точка плоскости. Доказать, что разность степеней точки M относительно окружностей (O) и (O') с центрами O и O' равна $2(\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{KM})$, где K — ортогональная проекция точки M на радикальную ось окружностей (O) и (O').

10. AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC; CC_1 — его высота. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 образуют треугольник $A_2B_2C_2$. Найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{A_2B_2C_2}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Ответ. $\dfrac{(\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} A)^2}{3(2\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A)(\operatorname{ctg} B+2\operatorname{ctg} A)}$.

11. A', B' C' — основания биссектрис внутренних углов треугольника ABC. Зная длины a, b, c сторон BC, CA, AB треугольника ABC, найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{A'B'C'}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Ответ. $\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

12. A', B' C' — точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами BC, CA, AB. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{A'B'C'}}{\overrightarrow{ABC}}=\frac{r}{2R}.$$

13. A',B',C' — основания высот треугольника ABC. Даны углы A, B, C этого треугольника. Найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{A'B'C'}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

При каком необходимом и достаточном условии $\overrightarrow{A'B'C'}\uparrow\downarrow\overrightarrow{ABC}$?

Ответ. $2\cos A\cos B\cos C$; $\overrightarrow{A'B'C'}\uparrow\downarrow\overrightarrow{ABC}$ тогда и только тогда, когда треугольник ABC тупоугольный.

14. На плоскости даны три окружности (A), (B), (C), каждая из которых лежит вне двух других. Пусть P, Q, R — центры внутреннего подобия пар (B), (C); (C), (A); (A), (B). Найти

$$\frac{\overrightarrow{PQR}}{\overrightarrow{ABC}},$$

зная, что радиусы окружностей (A), (B), (C) соответственно равны R_1, R_2, R_3.

Ответ. $\dfrac{2R_1R_2R_3}{(R_2+R_3)(R_3+R_1)(R_1+R_2)}$.

15. Дан треугольник ABC. Через точку D, лежащую на прямой BC, проведены прямые DP и DQ, соответственно параллельные прямым AB и AC. Доказать, что $\overline{DQC}+\overline{PBD}=0$.

16. Через произвольную точку, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь треугольника ABC.

Ответ. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

17. Пусть A'', B'', C'' — точки, симметричные вершинам A, B, C треугольника ABC относительно оснований биссектрис его внутренних углов. Даны длины a, b, c сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Вычислить отношение

$$\frac{\overline{A''B''C''}}{\overline{ABC}}.$$

Ответ. $3+\dfrac{8abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

18. Прямая (а также ее отрезок внутри треугольника), симметричная медиане относительно биссектрисы внутреннего угла, выходящей из той же вершины, называется *симедианой* треугольника. Даны длины c и b сторон AB и AC треугольника ABC. В каком отношении симедиана, выходящая из вершины A, делит направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$? Доказать, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (*точка Лемуана*).

Ответ. $\dfrac{c^2}{b^2}$.

19. Построить симедиану прямоугольного треугольника, выходящую из вершины прямого угла.

Ответ. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу.

20. Выразить через длины a, b, c сторон BC, CA, AB треугольника ABC площадь треугольника PQR, где P, Q, R — проекции центра тяжести треугольника G на его стороны.

Ответ. $\dfrac{4(a^2+b^2+c^2)S^3}{9a^2b^2c^2}$, где S — площадь треугольника ABC.

21. Биссектрисы внутренних углов треугольника ABC пересекают противоположные его стороны BC, CA, AB соответственно в точках A', B', C'. Точки A'', B'', C'' симметричны точкам A', B', C' по отношению к соответствующим вершинам A, B, C треугольника ABC. Даны длины a, b, c сторон треугольника ABC. Найти отношение

$$\frac{\overline{A''B''C''}}{\overline{ABC}}.$$

Ответ. $6+\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

22. Пусть M и N — середины медиан BD и CE треугольника ABC. Площадь треугольника ABC равна S. Вычислить площадь четырехугольника $BMNC$.

Ответ. $\frac{5}{16}S$.

23. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках P, Q, R. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{AP}}+\frac{\overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{BQ}}+\frac{\overrightarrow{OR}}{\overrightarrow{CR}}=1.$$

24. Даны две прямые l и m, лежащие на ориентированной плоскости и пересекающиеся в точке A. Через произвольную точку O, не лежащую ни на прямой l, ни на прямой m, проводится прямая n, пересекающая прямые l и m соответственно в точках B и C. Доказать, что сумма

$$\frac{1}{\overline{OAB}}+\frac{1}{\overline{OCA}}$$

не зависит от выбора прямой n.

25. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проводится произвольная прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E, а прямые BC и CD соответственно в точках F и G. Доказать, что отрезок AE есть среднее пропорциональное между отрезками EF и EG.

26. Пусть α, β, γ — точки, симметричные какой-нибудь одной и той же точке O относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Доказать, что прямые $A\alpha$, $B\beta$ и $C\gamma$ проходят через одну и ту же точку P. Доказать также, что если точка O описывает какую-нибудь линию Γ, то точка P описывает линию Γ', гомотетичную линии Γ. Где находится центр гомотетии? Чему равен коэффициент гомотетии?

Ответ. Центр гомотетии находится в центре тяжести M треугольника ABC; $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{MO}}=-\frac{1}{2}$.

27. Прямая l пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках α, β, γ. Пусть α', β', γ' — точки, симметричные точкам α, β, γ соответственно относительно середин сторон BC, CA, AB. Доказать, что точки α', β', γ' лежат на одной прямой.

28. Пусть $A'B'C'$ — треугольник, который получается, если через каждую вершину треугольника ABC провести прямую, параллельную противоположной стороне; α, β, γ — точки, взятые соответственно на сторонах BC, CA, AB. Доказать, что если прямые $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ проходят через одну точку, то и прямые $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ также проходят через одну точку.

29. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали.

Точка пересечения проведенных прямых соединена с серединами сторон данного четырехугольника. Доказать, что четырехугольник разбивается на равновеликие части.

30. Точки P и Q делят направленные стороны $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ треугольника ABC в данных отношениях λ и μ. Пусть прямые AP и BQ пересекаются в точке O. Найти отношения:

$$1)\ \frac{\overrightarrow{ABO}}{ABC};\quad 2)\ \frac{\overrightarrow{OBP}}{ABC};\quad 3)\ \frac{\overrightarrow{AOQ}}{ABC}.$$

Ответ. $1)\ \dfrac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu};\ 2)\ \dfrac{\lambda^2\mu}{(1+\lambda)(1+\lambda+\lambda\mu)};\ 3)\ \dfrac{1}{(1+\mu)(1+\lambda+\lambda\mu)}.$

31. Некоторая точка O находится в плоскости параллелограмма $ABCD$ (AC и BD — диагонали). Доказать, что:

1°. Если точка O находится внутри параллелограмма $ABCD$, то сумма площадей треугольников OAB и OCD равна сумме площадей треугольников OBC и ODA.

2°. Где бы в плоскости параллелограмма $ABCD$ ни находилась точка O, треугольник OAC равновелик или сумме или разности треугольников OAB и OAD.

32. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A', B', C'. Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — образы точек A, B, C соответственно при гомотетиях с одним и тем же коэффициентом гомотетии и с центрами гомотетий в точках C', A', B' и B', C', A'. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имеют один и тот же центр тяжести.

33. Пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки, лежащие на стороне BC треугольника ABC, а N — произвольная точка, лежащая на стороне AB. Обозначим точки пересечения прямых NM_1 и NM_2 со стороной AC через P_1 и P_2, а точки пересечения прямых PM_1 и PM_2, где P — произвольная точка прямой AC, со стороной AB через Q_1 и Q_2. Доказать, что прямые BC, P_1Q_2 и Q_1P_2 принадлежат одному пучку.

34. Пусть P и Q — две точки, лежащие в плоскости треугольника ABC; $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — треугольники, симметричные треугольнику ABC соответственно относительно точек P и Q. Пусть α, β, γ — точки пересечения прямых A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно с прямыми BC, CA, AB. Доказать, что точки α, β, γ коллинеарны (рис. 7).

Доказательство. Пусть α', β', γ' — точки пересечения прямых $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ с прямой PQ. Тогда α', β', γ' — середины отрезков $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; эти точки лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$, где A', B', C' — соответственно середины сторон BC, CA, AB. При гомотетии $(G, -2)$, где G — точка пересечения медиан треугольника ABC, точки α', β', γ' перейдут в точки α'', β'', γ'', также лежащие на одной прямой и соответственно на прямых BC, CA, AB. При этом $C\alpha = 2B'\alpha'$, $B\alpha'' = 2B'\alpha'$ и, значит,

$C\alpha = B\alpha''$, откуда

$$\frac{\overrightarrow{B\alpha}}{\overrightarrow{\alpha C}} = \frac{\overrightarrow{C\alpha''}}{\overrightarrow{\alpha'' B}}$$

и аналогично для двух других сторон. Так как точки α'', β'', γ'' коллинеарны, то

$$\frac{\overrightarrow{C\alpha''}}{\overrightarrow{\alpha'' B}} \frac{\overrightarrow{A\beta''}}{\overrightarrow{\beta'' C}} \frac{\overrightarrow{B\gamma''}}{\overrightarrow{\gamma'' A}} = -1$$

и, значит,

$$\frac{\overrightarrow{B\alpha}}{\overrightarrow{\alpha C}} \frac{\overrightarrow{C\beta}}{\overrightarrow{\beta A}} \frac{\overrightarrow{A\gamma}}{\overrightarrow{\gamma B}} = -1,$$

следовательно, точки α, β, γ также коллинеарны.

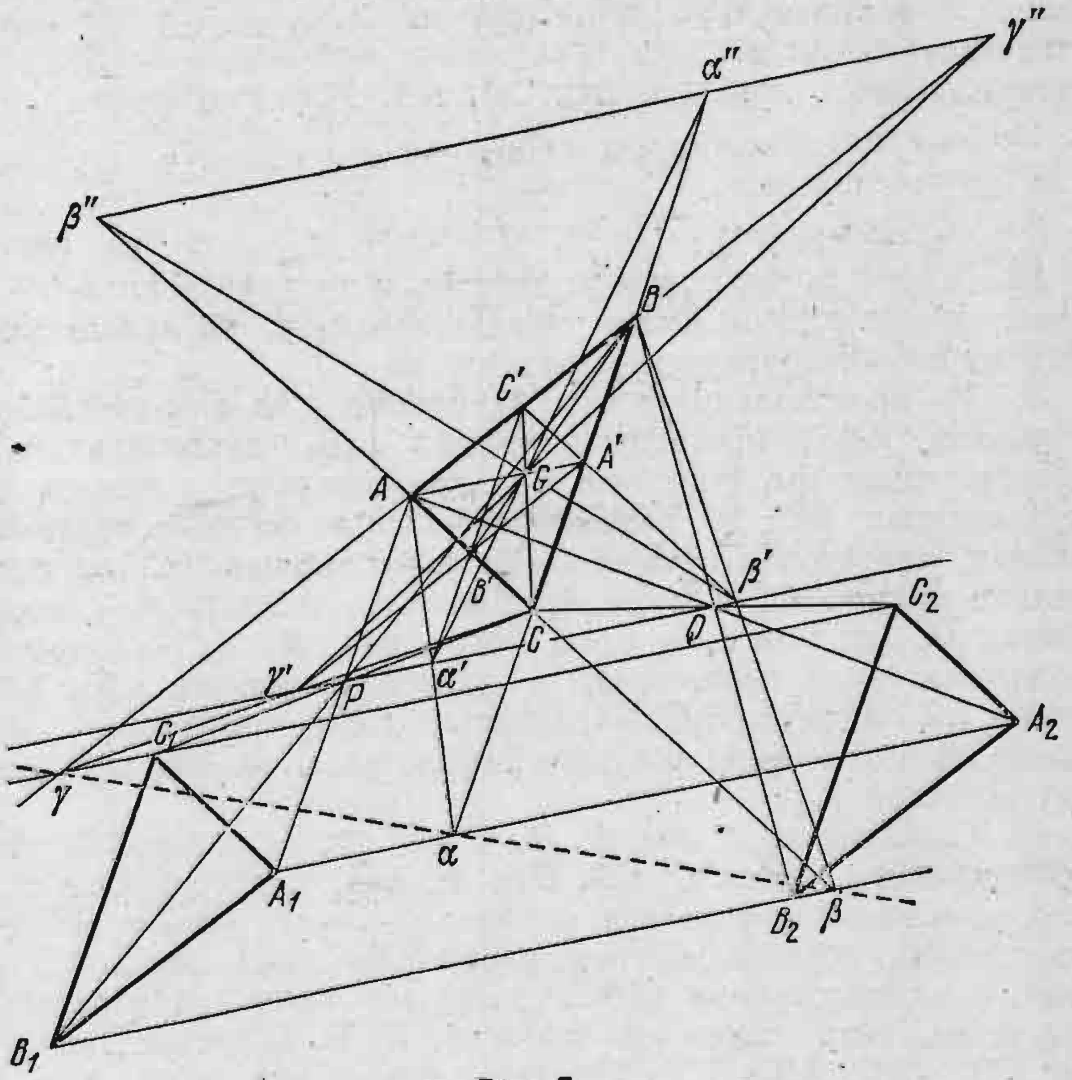


Рис. 7.

35. Пусть прямые Δ и Δ' пересекают стороны треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 (прямая Δ) и A_1', B_1', C_1' (прямая Δ'). Доказать, что прямые A_1B_1', B_1C_1', C_1A_1' пересекают соответственно прямые AB, BC, CA в точках P_3, P_1, P_2, лежащих на одной прямой, а прямые $A_1'B_1$, $B_1'C_1$, $C_1'A_1$ пересекают прямые AB, BC, CA соответственно в точках Q_3, Q_1, Q_2,

также лежащих на одной прямой. Прямые $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$ называются *брокардианами* прямых Δ и Δ' относительно треугольника ABC.

36. Даны длины a, b, c сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Через точку C проведена биссектриса CC_0 внутреннего угла C. Через точку A проведена медиана AA_0 к стороне BC, а через точку B проведена высота BB_0 к стороне CA. Проведенные прямые образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Ответ. $\dfrac{[b(a^2+b^2-c^2)-a(b^2+c^2-a^2)]^2}{(a^2b+b^3-bc^2+2ab^2)(-a^2+3b^2+c^2)(a+2b)}$.

37. Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — треугольники, являющиеся образами треугольника ABC при гомотетиях $(P,\ k)$, $(Q,\ k)$. Обозначим через α, β, γ точки пересечения прямых A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 соответственно с прямыми BC, CA, AB. Найти отношение

$$\frac{\overrightarrow{\alpha\beta\gamma}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Ответ. $-k(k+1)$.

38. Доказать, что если три диагонали шестиугольника (не обязательно выпуклого) имеют общую середину, то любые две его противоположные стороны параллельны.

39. Из произвольной точки A_1, лежащей на стороне BC треугольника ABC, проводится прямая A_1B_1, параллельная BA, до пересечения с CA в точке B_1; затем проводится прямая B_1C_1, параллельная BC, до пересечения с прямой AB в точке C_1 и, наконец, проводится прямая C_1A_2, параллельная AC, до пересечения с прямой BC в точке A_2. Доказать, что если A_1 — середина отрезка BC, то точки A_1 и A_2 совпадают. В противном случае продолжим этот процесс, т. е. проведем прямую A_2B_2 параллельно BA, прямую B_2C_2 параллельно CB и прямую C_2A_3 параллельно AC. Доказать, что путь замкнется, т. е. точка A_3 совпадает с точкой A_1.

40. Соединим вершины A, B, C, D параллелограмма $ABCD$ с серединами сторон BC, CD, DA, AB так, что образуется параллелограмм, лежащий внутри параллелограмма $ABCD$. Доказать, что площадь образовавшегося параллелограмма равна 1/5 площади параллелограмма $ABCD$. Другой такой параллелограмм получится, если соединить точки A, B, C, D с серединами сторон CD, DA, AB, BC. Доказать, что общая часть этих двух малых параллелограммов является центрально симметричным восьмиугольником и имеет площадь, равную 1/6 площади параллелограмма $ABCD$.

41. $ABCD$ — произвольная выпуклая однородная пластинка. Каждая из сторон четырехугольника $ABCD$ делится на три равные части: $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$, $BB_1 = B_1B_2 = B_2C$, $CC_1 = C_1C_2 = C_2D$, $DD_1 = D_1D_2 = D_2A$. Прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2D_1, D_2A_1 образуют

параллелограмм. Доказать, что центр тяжести пластинки $ABCD$ совпадает с точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма.

Указание. Принять диагонали параллелограмма за оси координат.

42. Относительно общей декартовой системы координат заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и прямая $ax+by+c=0$. Дано, что точки M_1 и M_2 не лежат на данной прямой и что прямая M_1M_2 пересекает прямую $ax+by+c=0$ в некоторой точке M. Найти отношение λ, в котором точка $M(x, y)$ делит отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ответ. $\lambda=-\dfrac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$. Указание. $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; эти координаты должны удовлетворять уравнению $ax+by+c=0$.

43. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, доказать, что если прямая l не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его стороны BC, CA, AB соответственно в точках P, Q, R, то произведение отношений

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}},\ \mu=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}},\ \nu=\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}},$$

в которых точки P, Q, R делят направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, равно -1:

$$\lambda\mu\nu=-1.$$

Указание. Введем в плоскости треугольника ABC общую декартову систему координат; пусть в этой системе $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$ и $ax+by+c=0$ — уравнение прямой l. Тогда

$$\lambda=-\frac{ax_2+by_2+c}{ax_3+by_3+c},\quad \mu=-\frac{ax_3+bx_3+c}{ax_1+by_1+c},\quad \nu=-\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}.$$

Замечание. Верно и обратное положение: если $\lambda\mu\nu=-1$, то точки P, Q, R, делящие направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ в отношениях λ, μ, ν, коллинеарны. В самом деле, пусть прямая PQ пересекает прямую AB в точке R'. Обозначим через ν' отношение, в котором точка R' делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Тогда $\lambda\mu\nu'=-1$. Отсюда и из равенства $\lambda\mu\nu=-1$ следует, что $\nu=\nu'$, т. е.

$$\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\frac{\overrightarrow{AR'}}{\overrightarrow{R'B}},$$

следовательно, точки R и R' совпадают.

44. Линия второго порядка, заданная уравнением

$$F(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает его стороны BC, CA, AB соответственно в точках A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Доказать, что произведение отношений, в которых точки A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 делят соответственно направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$:

$$\lambda_1=\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}},\ \lambda_2=\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{A_2C}},\ \mu_1=\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}},\ \mu_2=\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{B_2A}},\ \nu_1=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}},\ \nu_2=\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{C_2B}},$$

равно 1:

$$\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2=1.$$

Обратно: если на сторонах треугольника ABC выбраны точки A_1, A_2 (на стороне BC), B_1, B_2 (на стороне CA), C_1, C_2 (на стороне AB) и если произведение отношений, в которых эти точки делят направленные отрезки $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, равно 1, то точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной и той же линии второго порядка.

Указание. Числа λ_1 и λ_2 определяются из уравнения

$$F\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)=0,$$

где $B(x_1,\ y_1)$, $C(x_2,\ y_2)$, или

$$a\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2+2b\,\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+c\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)^2+2d\,\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+$$
$$+2e\,\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+f=0,$$

или

$$F(x_2,\ y_2)\lambda^2+\ldots+F(x_1,\ y_1)=0.$$

По теореме Виета

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{F(x_1,\ y_1)}{F(x_2,\ y_2)}$$

и т. д.

Доказательство обратного утверждения аналогично доказательству, данному в замечании к примеру 43.

45. Пусть алгебраическая линия l порядка n не проходит ни через одну из вершин треугольника ABC и пересекает каждую из его сторон BC, CA, AB в n точках A_i, B_i, C_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда произведение простых отношений

$$\frac{\overrightarrow{BA_i}}{\overrightarrow{A_iC}},\quad \frac{\overrightarrow{CB_i}}{\overrightarrow{B_iA}},\quad \frac{\overrightarrow{AC_i}}{\overrightarrow{C_iB}}$$

равно $(-1)^n$ (*теорема Карно*). Верно ли обратное положение?

Указание. Доказательство аналогично доказательству, данному в указании к примеру 44. Обратное положение при $n>2$, вообще говоря, неверно.

46. На плоскости задано m точек P_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Алгебраическая линия l порядка n не проходит ни через одну из точек P_i и пересекает прямые P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{m-1}P_m$, P_mP_1 соответственно в n точках

$$A_i^{(1)},\ A_i^{(2)},\ \ldots,\ A_i^{(n-1)},\ A_i^{(n)}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Найти произведение всех простых отношений

$$\frac{\overline{P_1A_i^{(1)}}}{\overline{A_i^{(1)}P_2}}, \ \ldots, \ \frac{\overline{P_{m-1}A_i^{(n-1)}}}{\overline{A_i^{(n-1)}P_m}}, \ \frac{\overline{P_mA_i^{(n)}}}{\overline{A_i^{(n)}P_1}}.$$

Ответ. $(-1)^{mn}$ (обобщение теоремы Карно; см. пример 45).

47. A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 — произвольные точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC и являющиеся внутренними точками этих сторон. Введем в плоскости треугольника ABC общую декартову систему координат. Так как общее уравнение линии третьего порядка содержит 10 коэффициентов, то существует линия третьего порядка, проходящая через 9 точек A_i, B_i, C_i ($i=1$, 2, 3). По теореме Карно произведение отношений, в которых точки A_i, B_i, C_i делят соответственно $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, равно $(-1)^3=-1$, а между тем все эти отношения положительны и их произведение не может быть отрицательным. Где ошибка?

2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный тетраэдр; B_1, B_2, B_3, B_4 — центры тяжести его граней $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$; C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{23}, C_{24}, C_{34} — середины его ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 (а также сами эти отрезки) называются *медианами тетраэдра* $A_1A_2A_3A_4$. Прямые $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{23}C_{14}$ (а также сами эти отрезки) называются *бимедианами тетраэдра* $A_1A_2A_3A_4$.

Доказать, что четыре медианы и три бимедианы тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ проходят через одну и ту же точку G, называемую *центром тяжести тетраэдра* $A_1A_2A_3A_4$; при этом $\overline{A_iG}:\overline{GB_i}=3:1$, а бимедианы точкой G делятся пополам. Полагая, что радиус-векторы точек A_i равны $\overrightarrow{OA_i}=\boldsymbol{r}_i$ ($i=1$, 2, 3, 4), найти радиус-векторы $\boldsymbol{r}_{ij}$ середин ребер A_iA_j, радиус-векторы $\boldsymbol{r}_{ijk}$ центров тяжести граней $A_iA_jA_k$ и радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ центра тяжести G.

Ответ. $\boldsymbol{r}_{ij}=\dfrac{\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}_j}{2}$, $\boldsymbol{r}_{ijk}=\dfrac{\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}_j+\boldsymbol{r}_k}{3}$, $\boldsymbol{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4}{4}$.

2. Доказать, что шесть плоскостей, проходящих через ребра A_iA_j тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и середины противолежащих им ребер, проходят через центр тяжести G тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$.

Указание. $A_iA_jC_{kl}$ и $A_kA_lC_{ij}$ пересекаются по бимедиане $C_{kl}C_{ij}$.

3. Доказать, что шесть плоскостей, проходящих через ребра тетраэдра и делящие его объем пополам, пересекаются в одной точке.

4. OA, OB, OC — ребра параллелепипеда; A', B', C', O' — его вершины, симметричные вершинам A, B, C, O относительно центра этого параллелепипеда. Доказать утверждения:

1°. Диагональ OO' параллелепипеда плоскостями ABC и $A'B'C'$ делится на три равные части.

2°. Диагональ OO' пересекает плоскости треугольников ABC и $A'B'C'$ в их центрах тяжести.

Указание. Положить $O=(0, 0, 0)$, $A=(1, 0, 0)$, $B=(0, 1, 0)$, $C=(0, 0, 1)$.

5. Пусть G_a, G_b, G_c, G_d — центры тяжести граней BCD, CDA, ABD, ABC тетраэдра $ABCD$. Доказать утверждения:

1°. Если прямая λ пересекает грани BCD, CDA, ADB, ABC соответственно в точках ω_a, ω_b, ω_c, ω_d, то середины отрезков $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$, $D\omega_d$ компланарны.

2°. Тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ являются образами тетраэдра $ABCD$ при гомотетиях $(P_1, -1/2)$, $(P_2, -1/2)$, где P_1 и P_2 — произвольные точки. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 пересекают грани BCD, CDA, DAB, ABC в точках α, β, γ, δ, лежащих в одной плоскости.

Доказательство. Пусть G — центр тяжести тетраэдра $ABCD$; α', β', γ', δ' — точки пересечения прямой P_1P_2 с прямыми $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$; ω_a, ω_b, ω_c, ω_d — точки, в которых пересекаются прямые $G\alpha$ и $G_a\alpha'$; $G\beta$ и $G_b\beta'$; $G\gamma$ и $G_c\gamma'$; $G\delta$ и $G_d\delta'$. Точки α', β', γ', δ' делят направленные отрезки $\overrightarrow{A\alpha}$, $\overrightarrow{B\beta}$, $\overrightarrow{C\gamma}$, $\overrightarrow{D\delta}$ в отношении $2:1$ и потому лежат в плоскостях граней тетраэдра $G_aG_bG_cG_d$. Точка G делит отрезок $\overrightarrow{AG_a}$ в отношении $3:1$, а потому ω_a — середина отрезка $G_a\alpha'$ и $\overrightarrow{G\alpha}=3\overrightarrow{G\omega_a}$. На основании п. 1° точки ω_a, ω_b, ω_c, ω_d лежат в одной плоскости, а значит, и точки α, β, γ, δ, полученные из точек ω_a, ω_b, ω_c, ω_d при гомотетии $(G, 3)$, также лежат в одной плоскости.

3°. Образы ω_a', ω_b', ω_c', ω_d' точек ω_a, ω_b, ω_c, ω_d при гомотетиях $(G_a, -1/2)$, $(G_b, -1/2)$, $(G_c, -1/2)$, $(G_d, -1/2)$ компланарны.

Указание. См. п. 2°, $\dfrac{\overrightarrow{\alpha A'}}{\overrightarrow{A'G_a}} = -\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GG_a}}\dfrac{\overrightarrow{\alpha\alpha'}}{\overrightarrow{\alpha' A}} = -\dfrac{3}{2}$ $\left(\dfrac{\overrightarrow{G_a\alpha}}{\overrightarrow{G_aA'}} = -\dfrac{1}{2}\right)$.

6. Даны четыре произвольные точки A', B', C', D', лежащие соответственно в гранях BCD, CDA, DAB, ABC тетраэдра $ABCD$. Пусть (A_1, B_1, C_1, D_1), (A_2, B_2, C_2, D_2), (A_3, B_3, C_3, D_3) — образы точек A, B, C, D при гомотетии с коэффициентом k и соответственно с центрами (D', A', B', C'), (C', D', A', B'), (B', C', D', A'), так что

$$\frac{\overrightarrow{D'A_1}}{\overrightarrow{D'A}}=k, \quad \frac{\overrightarrow{A'B_1}}{\overrightarrow{A'B}}=k, \quad \frac{\overrightarrow{B'C_1}}{\overrightarrow{B'C}}=k, \quad \frac{\overrightarrow{C'D_1}}{\overrightarrow{C'D}}=k, \quad \frac{\overrightarrow{C'A_2}}{\overrightarrow{C'A}}=k \text{ и т. д.}$$

Доказать, что тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$ имеют общий центр тяжести.

7. Пусть P — произвольная точка, лежащая внутри тетраэдра $ABCD$. Обозначим через A', B', C', D' точки пересечения пря-

мых PA, PB, PC, PD с противоположными гранями. Доказать, что

$$\frac{AP}{PA'}+\frac{BP}{PB'}+\frac{CP}{PC'}+\frac{DP}{PD'}\geqslant 12,$$

$$\frac{AP}{PA'}\frac{BP}{PB'}\frac{CP}{PC'}\frac{DP}{PD'}\geqslant 81.$$

При каком условии имеют место знаки равенства?

8. Пусть a и a', b и b', c и c' — соответственно точки, в которых ребра BC и AD, CA и DB, AB и DC тетраэдра $ABCD$ пересекаются с произвольной плоскостью. Обозначим через G_a, G_b, G_c, G_d центры тяжестей треугольников $a'bc$, $b'ca$, $c'ab$, $a'b'c'$. Построим точки A', B', C', D' такие, что

$$\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{AG_a},\quad \overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{BG_b},\quad \overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{CG_c},\quad \overrightarrow{DD'}=3\overrightarrow{DG_d}.$$

Доказать, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости.

9. $T=ABCD$ — произвольный тетраэдр; $\alpha\beta\gamma\delta$ — пространственный четырехугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного тетраэдра. Через середины сторон четырехугольника $\alpha\beta\gamma\delta$ проводятся плоскости, соответственно параллельные граням тетраэдра (так, что если $\alpha\beta \nparallel AA'$, где AA' — медиана тетраэдра $ABCD$, то плоскость, проходящая через середину отрезка $\alpha\beta$, параллельна плоскости BCD и т. д.). Четыре проведенные плоскости образуют тетраэдр T_1. Доказать, что объем тетраэдра T_1 в восемь раз больше объема тетраэдра T и что тетраэдры T_1 и $\alpha\beta\gamma\delta$ имеют общий центр тяжести.

10. Через вершины A', B', C', D' тетраэдра $A'B'C'D'$ проводятся прямые d_1, d_2, d_3, d_4, параллельные между собой. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, гомотетичный тетраэдру $A'B'C'D'$ при гомотетии с коэффициентом k. Обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1 точки пересечения прямых d_1, d_2, d_3, d_4 соответственно с плоскостями BCD, CDA, ABD, ABC. Доказать, что

$$\overline{A_1B_1C_1D_1}=-k^2(2k+1)\,\overline{ABCD}.$$

11. Через вершины A, B, C, D тетраэдра $ABCD$ проводятся плоскости a, b, c, d, параллельные какой-нибудь плоскости m. Через вершины A', B', C', D' тетраэдра $A'B'C'D'$ проводятся плоскости a', b', c', d', параллельные какой-нибудь плоскости m'. При этом плоскости m и m' выбираются так, что прямые (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') лежат в одной плоскости P. Доказать, что при изменении плоскостей m и m' (однако так, чтобы все время сохранялась компланарность указанных четырех прямых) плоскость P будет вращаться вокруг фиксированной точки.

12. Прямые, соединяющие вершины A, B, C, D тетраэдра $ABCD$ с точкой P, пересекают его противоположные грани в точках A', B', C', D'. Рассмотрим на отрезках $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$

точки A_1, B_1, C_1, D_1 такие, что

$$\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{A'A_1}}=\frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{B'B_1}}=\frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{C'C_1}}=\frac{\overrightarrow{DD'}}{\overrightarrow{D'D_1}}=k,$$

и точки A_2, A_3, A_4, в которых прямые A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 пересекают плоскость BCD. Доказать, что площади треугольников A_2CD, A_3DB, A_4BC равны между собой. Рассмотреть случай $k=2$.

18. Дан тетраэдр $T=ABCD$ и четыре прямые a, b, c, d, проходящие через одну и ту же точку P и параллельные четырем заданным прямым. Пусть прямая a пересекает плоскости BCD, CDA, DAB, ABC в точках (l_1, m_4, n_3, p_2); прямая b — в точках (l_2, m_1, n_4, p_3); прямая c — в точках (l_3, m_2, n_1, p_4) и прямая d — в точках (l_4, m_3, n_2, p_1). Доказать, что, вообще говоря, существует лишь одно положение точки P, при котором четверки точек (l_1, m_1, n_1, p_1), (l_2, m_2, n_2, p_2), (l_3, m_3, n_3, p_3), (l_4, m_4, n_4, p_4) будут компланарны. Рассмотреть случай, когда прямые a, b, c, d параллельны медианам тетраэдра $ABCD$.

ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПЛАНИМЕТРИИ

§ 1. Примеры с решениями

Перед рассмотрением примеров необходимо познакомиться с теоретическим материалом, изложенным в главе V, § 4.

Так как применяемый здесь метод отсутствует в нашей учебной литературе, эффективен и прост при решении многих задач по планиметрии, то мы подобрали большое количество и примеров с решениями, и упражнений для самостоятельного решения (с указаниями и ответами).

Пример 1. ABC — произвольный треугольник; G — точка пересечения его медиан (центр тяжести); H — точка пересечения высот (ортоцентр); O — центр описанной окружности $(O)=(ABC)$; A_1, B_1, C_1 — соответственно середины сторон BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 — основания высот; A_3, B_3, C_3 — соответственно середины отрезков AH, BH, CH (точки Эйлера); A_4, B_4, C_4 — соответственно точки, симметричные ортоцентру H относительно прямых BC, CA, AB.

Доказать, что:

1°. Точки O, G, H коллинеарны и $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

2°. Точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной и той же окружности (O_9) (*окружность Эйлера* или *окружность девяти точек* треугольника ABC). Центром окружности O_9 является середина отрезка OH, а радиус окружности (O_9) равен $R/2$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

3°. Точки A_4, B_4, C_4 лежат на описанной окружности.

Решение 1°. Примем окружность (ABC) за единичную окружность. Пусть a, b, c — соответственно аффиксы точек A, B, C. Докажем, что $a+b+c$ — аффикс ортоцентра H треугольника ABC.

Угловой коэффициент прямой BC равен

$$\varkappa=\frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}=\frac{c-b}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=-bc.$$

Угловой коэффициент прямой, соединяющей вершину $A(a)$ с точкой M, имеющей аффикс $a+b+c$, таков:

$$\varkappa' = \frac{b+c}{\bar{b}+\bar{c}} = \frac{b+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = bc.$$

Отсюда

$$\varkappa + \varkappa' = 0$$

и, значит, $AM \perp BC$. Аналогично доказывается, что $BM \perp CA$ и $CM \perp AB$. Значит, M — точка с аффиксом $a+b+c$ — совпадает с точкой H пересечения высот треугольника ABC.

Далее, аффикс точки G:

$$\frac{a+b+c}{3}.$$

Отсюда и из того, что аффикс точки H равен $a+b+c$, следует, что

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG},$$

т. е. точки O, G, H коллинеарны.

2°. Середины A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA, AB имеют аффиксы

$$a_1 = \frac{b+c}{2}, \quad b_1 = \frac{c+a}{2}, \quad c_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Пусть E — середина отрезка OH. Ее аффикс

$$\varepsilon = \frac{a+b+c}{2}.$$

Так как

$$\varepsilon - a_1 = a/2, \quad \varepsilon - b_1 = b/2, \quad \varepsilon - c_1 = c/2$$

и $|a| = |b| = |c| = 1$, то

$$|\varepsilon - a_1| = |\varepsilon - b_1| = |\varepsilon - c_1| = 1/2 = R/2 \qquad (R=1),$$

т. е.

$$EA_1 = EB_1 = EC_1 = R/2.$$

Итак, середины A_1, B_1, C_1 отрезков BC, CA, AB отстоят от середины отрезка OH на одинаковые расстояния, равные $R/2$, и, следовательно, лежат на окружности $(A_1B_1C_1)$ с центром $E((a+b+c)/2)$ и радиусом $R/2$.

Далее, уравнения прямых AH и BC имеют вид

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a}),$$
$$z - b = -bc(\bar{z} - \bar{b})$$

или

$$z - bc\bar{z} = a - \bar{a}bc,$$
$$z + bc\bar{z} = b + c.$$

Складывая эти уравнения, найдем аффикс a_2 точки A_2:

$$a_2 = \frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} = \varepsilon - \frac{bc}{2a}.$$

Отсюда

$$EA_2 = |a_2 - \varepsilon| = \left| -\frac{bc}{2a} \right| = \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$$

($|a| = |b| = |c| = 1$). Аналогично доказывается, что

$$EB_2 = R/2, \qquad EC_2 = R/2.$$

Итак, точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на окружности, центром которой является середина отрезка OH, а радиус равен $R/2$.

Далее, аффиксы середин A_3, B_3, C_3 отрезков AH, BH, CH соответственно таковы:

$$a_3 = \frac{a+a+b+c}{2} = \frac{2\varepsilon + a}{2} = \varepsilon + \frac{a}{2},$$

$$b_3 = \varepsilon + \frac{b}{2},$$

$$c_3 = \varepsilon + \frac{c}{2}.$$

Отсюда

$$EA_3 = |a_3 - \varepsilon| = |a/2| = 1/2 = R/2$$

и аналогично

$$EB_3 = EC_3 = R/2.$$

Итак, все девять точек A_k, B_k, C_k ($k = 1, 2, 3$) лежат на окружности (E, $R/2$), центром E которой является середина отрезка OH, а радиус равен $R/2$.

3°. Вернемся к уравнению прямой AH:

$$z - a = bc(\bar{z} - \bar{a}),$$

проходящей через точку A перпендикулярно BC. Найдем аффиксы точек пересечения этой прямой с единичной окружностью $z\bar{z} = 1$. Имеем

$$z - a = bc\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right),$$

$$z - a = -bc\,\frac{z-a}{az}.$$

Один из корней этого уравнения $z = a$ (аффикс точки A); другой

$$z = -\frac{bc}{a}$$

(точка N с этим аффиксом лежит, конечно, на единичной окружности, это можно проверить, замечая, что $\left| -\frac{bc}{a} \right| = 1$).

Докажем, что середина отрезка HN совпадает с точкой A_2. В самом деле, аффикс этой середины

$$\frac{a+b+c-\frac{bc}{a}}{2}=\frac{2\varepsilon-\frac{bc}{a}}{2}=\varepsilon-\frac{bc}{2a}=a_2.$$

Таким образом, точка N совпадает с точкой A_4.

Аналогично доказывается, что высоты, выходящие из вершин B и C, пересекают окружность (ABC) в точках B_4 и C_4, симметричных ортоцентру H относительно сторон CA и AB.

Пример 2 (точки Бутена). Пусть в единичную окружность (O) вписан треугольник ABC. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C. *Точкой Бутена* для треугольника ABC называется такая точка, что при выборе ее за единичную точку (т. е. точку, аффикс которой $z=1$) выполняется равенство $\sigma_3=z_1z_2z_3=1$. Доказать, что для заданной окружности (O) и вписанного в нее треугольника ABC на окружности (O) имеется три точки Бутена, образующих равносторонний треугольник.

Доказательство. Примем точку α ($|\alpha|=1$) за новую единичную точку. Тогда новые аффиксы точек A, B, C будут $\frac{z_1}{\alpha}$, $\frac{z_2}{\alpha}$, $\frac{z_3}{\alpha}$. Точка α будет точкой Бутена, если произведение этих аффиксов равно 1:

$$\frac{z_1z_2z_3}{\alpha^3}=1 \quad \text{или} \quad \alpha^3=\sigma_3.$$

Это уравнение имеет три корня

$$\sqrt[3]{\sigma_3},\quad \varepsilon\sqrt[3]{\sigma_3},\quad \varepsilon^2\sqrt[3]{\sigma_3},$$

где $\sqrt[3]{\sigma_3}$ — любое из трех значений кубического корня из σ_3, а ε — любое из двух мнимых значений $\sqrt[3]{1}$, т. е.

$$\text{или } \varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{или } \varepsilon=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть, например,

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ;$$

тогда

$$\varepsilon^2=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$$

и для построения точек Бутена надо сначала построить точку для выбранного значения $\sqrt[3]{\sigma_3}$, а затем умножить его на ε (поворот на 120°) и еще раз на ε (еще поворот на 120°). Получаем вершины равностороннего треугольника с аффиксами

$$\sqrt[3]{\sigma_3},\quad \varepsilon\sqrt[3]{\sigma_3},\quad \varepsilon^2\sqrt[3]{\sigma_3}.$$

Пример 3. Дан произвольный треугольник ABC. На окружности (ABC) взята произвольная точка M (рис. 8). Пусть A_1, B_1 и C_1 — ортогональные проекции точки M на прямые BC, CA, AB. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Принимая окружность (ABC) за единичную и считая, что аффиксы точек A, B, C, M соответственно равны z_1, z_2, z_3, z_0, составить уравнение прямой $A_1B_1C_1$ (*прямая Симсона* для точки M относительно треугольника ABC).

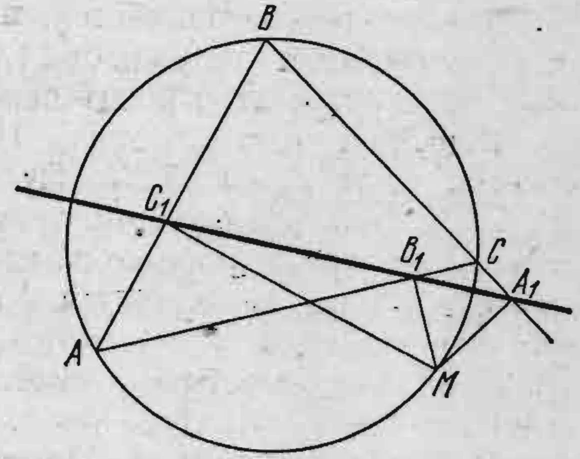


Рис. 8.

Решение. Уравнение прямой BC и прямой, проходящей через точку M перпендикулярно BC, имеют вид

$$z - z_2 = -z_2z_3(\bar{z} - \bar{z}_2),$$
$$z - z_0 = z_2z_3(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

или

$$z + z_2z_3\bar{z} = z_2 + z_3,$$
$$z - z_2z_3\bar{z} = z_0 - z_2z_3\bar{z}_0.$$

Складывая эти уравнения, найдем аффикс a_1 ортогональной проекции точки M на прямую BC:

$$a_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_2 + z_3 - z_2z_3\bar{z}_0).$$

Аналогично находим аффикс b_1 точки B_1:

$$b_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_3 + z_1 - z_3z_1\bar{z}_0).$$

Найдем угловой коэффициент прямой A_1B_1; имеем

$$a_1 - b_1 = \frac{1}{2}[z_2 - z_1 - z_3\bar{z}_0(z_2 - z_1)] =$$
$$= \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(1 - z_3\bar{z}_0) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)\left(1 - \frac{z_3}{z_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)}{z_0};$$
$$\bar{a}_1 - \bar{b}_1 = \frac{z_0}{2}\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_3}\right) = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(z_0 - z_3)\frac{1}{z_1z_2z_3}$$

и, следовательно,

$$\varkappa = \frac{\sigma_3}{z_0} = \sigma_3\bar{z}_0.$$

Уравнение прямой A_1B_1 можно записать в виде

$$z - a_1 = \sigma_3\bar{z}_0(\bar{z} - \bar{a}_1),$$

или

$$z - \frac{1}{2}(z_0 + z_2 + z_3 - z_2z_3\bar{z}_0) = \sigma_3\bar{z}_0\left[\bar{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - \frac{z_0}{z_2z_3}\right)\right],$$

или

$$z-\sigma_3\bar{z}_0\bar{z}=\frac{1}{2}\left(z_0+z_2+z_3-\frac{z_2z_3}{z_0}\right)-\frac{z_1z_2z_3}{2z_0}\left(\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}-\frac{z_0}{z_2z_3}\right),$$

или

$$z-\sigma_3\bar{z}_0\bar{z}=\frac{1}{2}\left(z_0+z_2+z_3-\frac{z_2z_3}{z_0}-\frac{\sigma_3}{z_0^2}-\frac{z_1z_3}{z_0}-\frac{z_1z_2}{z_0}+z_1\right),$$

или

$$z-\sigma_3\bar{z}_0\bar{z}=\frac{1}{2}(z_0+\sigma_1-\sigma_2\bar{z}_0-\sigma_3\bar{z}_0^2), \qquad (1)$$

где $\sigma_1=z_1+z_2+z_3$, $\sigma_2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$, $\sigma_3=z_1z_2z_3$.

Симметрия этого уравнения относительно z_1, z_2, z_3 позволяет утверждать, что прямая A_1B_1 проходит и через точку C_1.

Впрочем, в этом можно убедиться, подставив в левую и в правую части уравнения (1) аффикс

$$c_1=\frac{1}{2}(z_0+z_1+z_2-z_1z_2\bar{z}_0)$$

точки C_1 (получатся одинаковые результаты — проверить!) или убедившись в том, что выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & \bar{a}_1 & 1 \\ b_1 & \bar{b}_1 & 1 \\ c_1 & \bar{c}_1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(и это рекомендуется проверить читателю).

Если z_0 — единичная точка, то уравнение прямой (1) Симсона принимает вид

$$z-\sigma_3\bar{z}=\frac{1}{2}(1+\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3), \qquad (2)$$

а если за единичную точку принять точку Бутена (т. е. $\sigma_3=1$), то

$$z-\bar{z}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2). \qquad (3)$$

Замечание. Ниже будет доказано, что если точка M не лежит на окружности (ABC), то ее проекции A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB не лежат на одной прямой.

Пример 4. Доказать, что если за единичную точку принять точку M Бутена относительно треугольника ABC, вписанного в единичную окружность (O), то прямая Симсона, соответствующая точке M, будет коллинеарна диаметру единичной окружности, проходящему через точку M (см. примеры 2 и 3).

Решение. Уравнение прямой Симсона будет иметь вид

$$z-\bar{z}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2), \qquad (4)$$

т. е. она будет коллинеарна оси Ox или диаметру единичной окружности, проходящему через точку M, так как M — единичная точка оси Ox.

Заметим, что и обратно: если прямая Симсона для точки M окружности (ABC) по отношению к треугольнику ABC коллинеарна диаметру окружности, проходящему через точку M, то M — точка Бутена.

В самом деле, если M — единичная точка, то угловой коэффициент прямой Симсона будет равен σ_3, и если прямая Симсона параллельна диаметру, проходящему через точку M, т. е. оси Ox, то $\sigma_3 = 1$, так как угловой коэффициент оси Ox равен 1.

Пример 5. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в единичную окружность (O). Доказать, что:

1°. Точка P с аффиксом σ_2 симметрична ортоцентру H треугольника ABC относительно диаметра δ единичной окружности, параллельного прямой Симсона, построенной для единичной точки относительно треугольника ABC.

2°. Точка Q с аффиксом σ_3 симметрична единичной точке относительно диаметра δ.

Решение. 1°. Уравнение диаметра δ имеет вид

$$z - \sigma_3\bar{z} = 0$$

(см. уравнение (2) примера 3). Аффикс проекции ортоцентра H на этот диаметр находится из системы

$$\begin{aligned} z - \sigma_3\bar{z} &= 0, \\ z - \sigma_1 &= -\sigma_3(\bar{z} - \bar{\sigma}_1), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} z - \sigma_3\bar{z} &= 0, \\ z + \sigma_3\bar{z} &= \sigma_1 + \sigma_3\bar{\sigma}_1, \end{aligned}$$

или, так как $\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$, то

$$\begin{aligned} z - \sigma_3\bar{z} &= 0, \\ z + \sigma_3\bar{z} &= \sigma_1 + \sigma_2. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, находим аффикс λ проекции ортоцентра H на диаметр δ:

$$\lambda = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Аффикс ω точки, симметричной точке H относительно диаметра δ, найдем из уравнения

$$\frac{\omega + \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

откуда

$$\omega = \sigma_2.$$

2°. Уравнение перпендикуляра, опущенного из единичной точки на диаметр δ, имеет вид

$$z - 1 = -\sigma_3(\bar{z} - 1).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением единичной окружности $z\bar{z}=1$, получим

$$z-1=-\sigma_3\left(\frac{1}{z}-1\right),$$

$$z-1=\sigma_3\frac{z-1}{z}.$$

Один корень этого уравнения $z=1$, другой $z=\sigma_3$.

Пример 6. 1°. Пусть A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC. Принимаем центр O окружности (ABC) за начало координат. Пусть Rz_1, Rz_2, Rz_3 — аффиксы точек A, B, C, где R — радиус окружности (ABC) $(|z_1|=|z_2|=|z_3|=1)$. Пусть p — аффикс точки P. Найти аффиксы a_1, b_1, c_1 точек A_1, B_1, C_1 и выразить затем площадь $\overline{A_1B_1C_1}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ через площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$, через длины a, b, c сторон BC, CA, AB и аффикс p точки P.

Рассмотреть частные случаи:

2°. Точка P совпадает с центром тяжести G треугольника ABC.

3°. Точка P совпадает с центром I окружности, вписанной в треугольник ABC.

4°. Точка P совпадает с центром O окружности (ABC).

5°. Точка P совпадает с ортоцентром H треугольника ABC.

Решение. 1°. Уравнение прямой BC:

$$z-z_2R=-z_2z_3(\bar{z}-\bar{z}_2R),$$

или

$$z+z_2z_3\bar{z}=R(z_2+z_3),$$

или

$$z+z_2z_3\bar{z}=R(\sigma_1-z_1). \tag{5}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую BC, имеет вид

$$z-p=z_2z_3(\bar{z}-\bar{p}),$$

или

$$z-z_2z_3\bar{z}=p-z_2z_3\bar{p},$$

или

$$z-z_2z_3\bar{z}=p-\bar{z}_1\sigma_3\bar{p}. \tag{6}$$

Складывая почленно уравнения (5) и (6), найдем аффикс a_1 точки A_1:

$$a_1=\frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_1-\bar{z}_1\sigma_3\bar{p}).$$

Аналогично

$$b_1=\frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_2-\bar{z}_2\sigma_3\bar{p}),$$

$$c_1=\frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_3-\bar{z}_3\sigma_3\bar{p}).$$

Отсюда

$$\overline{A_1B_1C_1} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_1-\bar{z}_1\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1+\bar{p}-R\bar{z}_1-z_1\bar{\sigma}_3p) & 1 \\ \frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_2-\bar{z}_2\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1+\bar{p}-R\bar{z}_2-z_2\bar{\sigma}_3p) & 1 \\ \frac{1}{2}(R\sigma_1+p-Rz_3-\bar{z}_3\sigma_3\bar{p}) & \frac{1}{2}(R\bar{\sigma}_1+\bar{p}-R\bar{z}_3-z_3\bar{\sigma}_3p) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{16}\begin{vmatrix} Rz_1+\bar{z}_1\sigma_3\bar{p} & R\bar{z}_1+z_1\bar{\sigma}_3p & 1 \\ Rz_2+\bar{z}_2\sigma_3\bar{p} & R\bar{z}_2+z_2\bar{\sigma}_3p & 1 \\ Rz_3+\bar{z}_3\sigma_3\bar{p} & R\bar{z}_3+z_3\bar{\sigma}_3p & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{16}\left(R^2\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} + p\bar{p}\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{i}{16}\left(-4i\overline{ABC} + \frac{4ip\bar{p}}{R^2}\overline{ABC}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\overline{ABC}\left(1-\frac{p\bar{p}}{R^2}\right) = \frac{R^2-p\bar{p}}{4R^2}\overline{ABC} = \frac{R^2-OP^2}{4R^2}\overline{ABC}.$$

Заметим, что OP^2-R^2 есть степень σ_P точки P относительно окружности (ABC). Поэтому окончательно

$$\overline{A_1B_1C_1} = -\frac{\sigma_P}{4R^2}\overline{ABC}.$$

2°. Если точка P совпадает с точкой G пересечения медиан треугольника ABC, то

$$OP^2 = OG^2 = p\bar{p} = \frac{1}{9}(Rz_1+Rz_2+Rz_3)(R\bar{z}_1+R\bar{z}_2+R\bar{z}_3) =$$

$$= \frac{R^2}{9}(3+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_3+z_3\bar{z}_2+z_3\bar{z}_1+z_1\bar{z}_3).$$

Но

$$a^2 = (Rz_2-Rz_3)(R\bar{z}_2-R\bar{z}_3) = R^2[2-(z_2\bar{z}_3+z_3\bar{z}_2)],$$

откуда

$$z_2\bar{z}_3+z_3\bar{z}_2 = 2-\frac{a^2}{R^2}$$

и аналогично

$$z_3\bar{z}_1+z_1\bar{z}_3 = 2-\frac{b^2}{R^2},$$

$$z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1 = 2-\frac{c^2}{R^2},$$

так что

$$OG^2 = \frac{R^2}{9}\left(3+2-\frac{a^2}{R^2}+2-\frac{b^2}{R^2}+2-\frac{c^2}{R^2}\right) = R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Следовательно,

$$R^2-OG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

и потому

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{a^2+b^2+c^2}{36R^2}\,\overline{ABC}.$$

Но

$$R=\frac{abc}{4\,|\,\overline{ABC}\,|},$$

следовательно,

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{4\,(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}\,\overline{ABC}^3.$$

3°. Если точка P совпадает с центром I окружности (I), вписанной в треугольник ABC, то $p\bar{p}=OP^2=OI^2=R^2-2Rr$ (*формула Эйлера*, см. ниже пример 33) и, значит,

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{R^2-(R^2-2Rr)}{4R^2}\,\overline{ABC}=\frac{r}{2R}\,\overline{ABC}=\frac{2\,\dfrac{|\,\overline{ABC}\,|}{a+b+c}}{\dfrac{abc}{2\,|\,\overline{ABC}\,|}}\,\overline{ABC}=\frac{4\overline{ABC}^3}{abc\,(a+b+c)}.$$

Итак,

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{4\overline{ABC}^3}{abc\,(a+b+c)}.$$

Замечание. Отметим формулу

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}}=\frac{r}{2R},$$

где A_1, B_1, C_1 — проекции точки I на стороны BC, CA, AB.

4°. В случае, если точка P совпадает с точкой O, то $p\bar{p}=$ $=OP^2=0$ и, следовательно,

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{R^2}{4R^2}\,\overline{ABC}=\frac{1}{4}\,\overline{ABC}$$

(это ясно сразу и из элементарно-геометрических соображений).

5°. В случае, если точка P совпадает с ортоцентром H треугольника ABC, имеем

$$\overline{A_1B_1C_1}=\frac{R^2-OH^2}{4R^2}\,\overline{ABC}=\frac{R^2-(3OG)^2}{4R^2}\,\overline{ABC}=$$

$$=\frac{R^2-9\left(R^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}\right)}{4R^2}\,\overline{ABC}=\frac{a^2+b^2+c^2-8R^2}{4R^2}\,\overline{ABC}=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}-2\right)\overline{ABC}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\dfrac{a^2b^2c^2}{4\,(\overline{ABC})^2}}-2\right)\overline{ABC}=$$

$$=\left(4\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}\,\overline{ABC}^2-2\right)\overline{ABC}.$$

Так как $\frac{a^2}{4R^2} = \sin^2 A$, $\frac{b^2}{4R^2} = \sin^2 B$, $\frac{c^2}{4R^2} = \sin^2 C$, то

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2} - 2 = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 =$$
$$= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2} - 2 =$$
$$= -\frac{1}{2}(1+\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B) =$$
$$= -\frac{1}{2}[2\cos^2 C + 2\cos(A+B)\cos(A-B)] =$$
$$= -\cos^2 C - \cos(A+B)\cos(A-B) = -\cos^2 C + \cos C\cos(A-B) =$$
$$= \cos C[\cos(A-B) - \cos C] = \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] =$$
$$= 2\cos A\cos B\cos C.$$

Итак, если $A_1B_1C_1$ — треугольник, ортоцентрический для треугольника ABC (т. е. A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC), то

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} = 2\cos A\cos B\cos C.$$

Отсюда, между прочим, следует, что если треугольник ABC остроугольный, то треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ имеют одинаковую

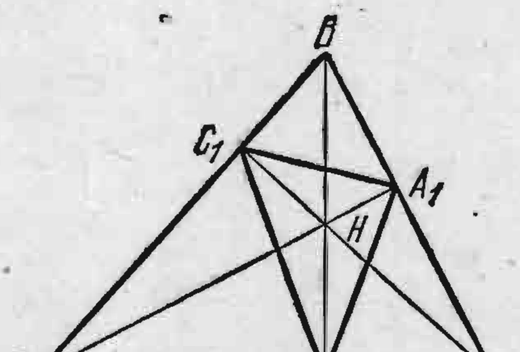


Рис. 9.

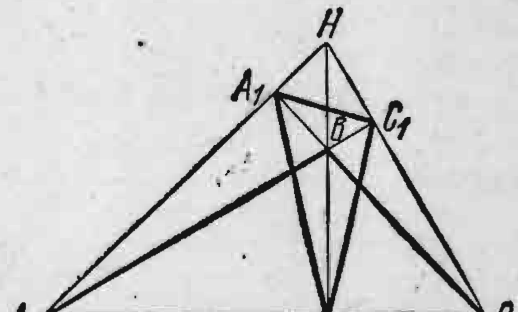


Рис. 10.

ориентацию (рис. 9), а если тупоугольный, то противоположную (рис. 10).

Пример 7. Дан треугольник ABC и прямая l. Пусть A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции точек A, B, C на прямую l. Доказать, что прямые, проходящие через точки A_1, B_1, C_1 и соответственно перпендикулярные прямым BC, CA, AB, пересекаются в одной точке Ω (называемой *ортополюсом* прямой l относительно треугольника ABC) (рис. 11). Принимая окружность (ABC) за единичную и считая, что прямая l задана уравнением

$$z - z_0 = \varkappa (\bar{z} - \bar{z}_0), \qquad |\varkappa| = 1, \tag{7}$$

найти аффикс ω ортополюса Ω прямой l относительно треугольника ABC. Аффиксы вершин треугольника ABC соответственно равны z_1, z_2, z_3.

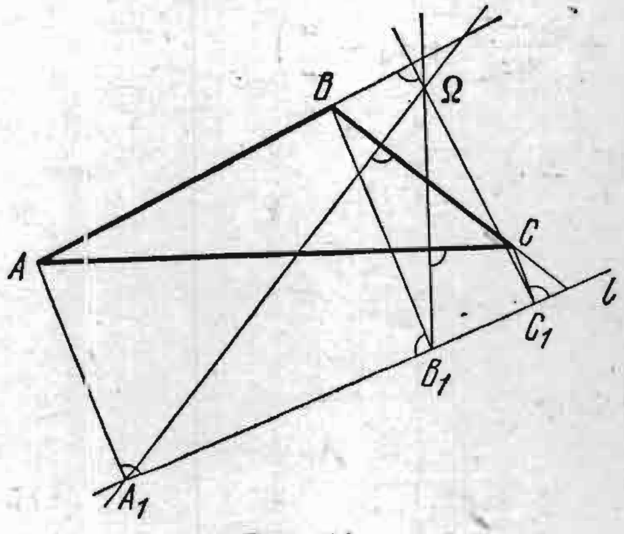


Рис. 11.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l, имеет вид

$$z - z_1 = -\varkappa (\bar{z} - \bar{z}_1). \tag{8}$$

Переписывая уравнения (7) и (8) в виде

$$z - \varkappa\bar{z} = z_0 - \varkappa\bar{z}_0,$$
$$z + \varkappa\bar{z} = z_1 + \varkappa\bar{z}_1$$

и складывая эти уравнения почленно, находим аффикс a_1 точки A_1:

$$a_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + \varkappa\bar{z}_1 - \varkappa\bar{z}_0).$$

Уравнение прямой, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой BC, имеет вид

$$z - a_1 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{a}_1),$$

или

$$z - \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + \varkappa\bar{z}_1 - \varkappa\bar{z}_0) = z_2 z_3 \left[\bar{z} - \frac{1}{2}\left(\bar{z}_0 + \frac{1}{z_1} + \frac{z_1}{\varkappa} - \frac{z_0}{\varkappa}\right)\right],$$

или

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(z_0 + z_1 + \frac{\varkappa}{z_1} - \varkappa\bar{z}_0 - \frac{z_2 z_3}{z_1} - z_2 z_3 \bar{z}_0 - \frac{\sigma_3}{\varkappa} + \frac{z_2 z_3 z_0}{\varkappa}\right). \tag{9}$$

Аналогично уравнение перпендикуляра, опущенного из точки B_1 на прямую AC, имеет вид

$$z - z_3 z_1 \bar{z} = \frac{1}{2}\left(z_0 + z_2 + \frac{\varkappa}{z_2} - \varkappa\bar{z}_0 - \frac{z_3 z_1}{z_2} - z_3 z_1 \bar{z}_0 - \frac{\sigma_3}{\varkappa} + \frac{z_3 z_1 z_0}{\varkappa}\right). \tag{10}$$

Вычитая почленно из уравнения (9) уравнение (10), найдем число $\bar{\omega}$, сопряженное аффиксу ω точки пересечения прямых (9) и (10):

$$z_3 (z_1 - z_2)\bar{\omega} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[z_1 - z_2 + \varkappa\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right) + z_3\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right) + z_3(z_1 - z_2)\bar{z}_0 - \right.$$
$$\left. - \frac{z_3 z_0}{\varkappa}(z_1 - z_2)\right]$$

или, сокращая на $z_1 - z_2$:

$$z_3\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varkappa}{z_1 z_2} + \frac{z_3 z_1 + z_3 z_2}{z_1 z_2} + z_3\bar{z}_0 - \frac{z_3 z_0}{\varkappa}\right),$$

откуда

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_3} - \frac{\varkappa}{z_1 z_2 z_3} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} + \bar{z}_0 - \frac{z_0}{\varkappa}\right)$$

или

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{\varkappa}{\sigma_3} + \bar{z}_0 - \frac{z_0}{\varkappa}\right),$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_3} - \frac{\bar{\varkappa}}{\bar{\sigma}_3} + z_0 - \varkappa\bar{z}_0\right).$$

Но $\bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, $\bar{\sigma}_3 = \frac{1}{\sigma_3}$, следовательно,

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\varkappa} + z_0 - \varkappa\bar{z}_0\right). \tag{11}$$

Симметрия этого уравнения относительно z_1, z_2, z_3 позволяет утверждать, что и перпендикуляр, опущенный из точки C_1 на прямую AB, также пройдет через точку с аффиксом ω, определяемым формулой (11), т. е. формулой (11) определяется аффикс ортополюса прямой l относительно треугольника ABC. Впрочем, в этом можно убедиться и так: записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую AB, и убедиться в том, что число ω, определяемое формулой (11), удовлетворяет уравнению этого перпендикуляра.

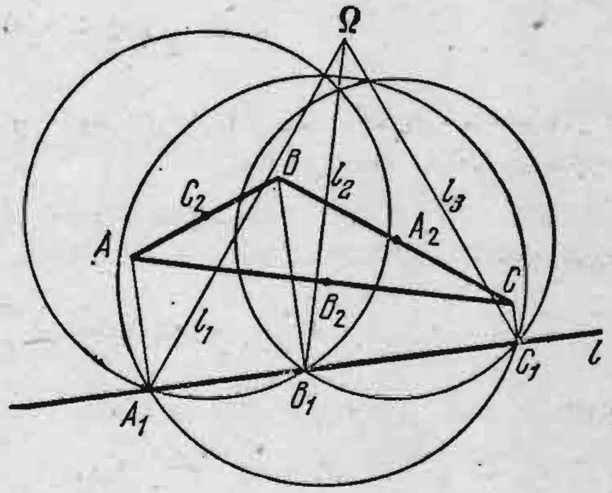


Рис. 12.

В частности, если прямая l проходит через центр O единичной окружности $(O) = (ABC)$, то аффикс ω ее ортополюса относительно треугольника ABC будет

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{\varkappa}\right), \tag{12}$$

а если за единичную точку принята точка Бутена, то

$$\omega = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \bar{\varkappa}). \tag{13}$$

На рис. 11 показано построение ортополюса Ω прямой l относительно треугольника ABC.

Замечание[1]). Доказательство того, что прямые l_1, l_2, l_3, проходящие через точки A_1, B_1, C_1 и соответственно перпендикулярные прямым BC, CA, AB, пересекаются в одной точке Ω, можно провести изящно синтетически: пусть A_2, B_2, C_2 — середины сторон BC, CA, AB, тогда радикальные оси окружностей (A_2, A_2C_1), (B_2, B_2A_1), (C_2, C_2B_1), взятых попарно, и будут прямыми l_1, l_2, l_3, а потому они пересекаются в одной точке Ω (рис. 12).

Пример 8. Дан треугольник ABC и прямая l. Окружность $(O)=(ABC)$ принимается за единичную; z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A, B, C. Прямая l задана автосопряженным уравнением

$$\bar{a}z+a\bar{z}=b \tag{14}$$

($a\neq 0$, b — действительное число). Найти аффикс ω ортополюса Ω прямой l относительно треугольника ABC (см. предыдущий пример).

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $\varkappa = -\dfrac{a}{\bar{a}}$, а угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой l, равен $\varkappa' = \dfrac{a}{\bar{a}}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l, имеет вид

$$z-z_1=\frac{a}{\bar{a}}(\bar{z}-\bar{z}_1)$$

или

$$\bar{a}z-a\bar{z}=\bar{a}z_1-a\bar{z}_1. \tag{15}$$

Складывая почленно уравнения (14) и (15), найдем аффикс a_1 проекции A_1 точки A на прямую l:

$$a_1=\frac{\bar{a}z_1-a\bar{z}_1+b}{2\bar{a}}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку A_1 перпендикулярно BC, имеет вид

$$z-a_1=z_2z_3(\bar{z}-\bar{a}_1),$$

или

$$z-\frac{\bar{a}z_1-a\bar{z}_1+b}{2\bar{a}}=z_2z_3\left(\bar{z}-\frac{a\bar{z}_1-\bar{a}z_1+b}{2a}\right),$$

или

$$z-z_2z_3\bar{z}=\frac{\bar{a}z_1-a\bar{z}_1+b}{2\bar{a}}-z_2z_3\frac{a\bar{z}_1-\bar{a}z_1+b}{2a}. \tag{16}$$

Аналогично запишется уравнение перпендикуляра к AC, проходящего через проекцию B_1 точки B на прямую l:

$$z-z_3z_1\bar{z}=\frac{\bar{a}z_2-a\bar{z}_2+b}{2\bar{a}}-z_3z_1\frac{a\bar{z}_2-\bar{a}z_2+b}{2a}. \tag{17}$$

[1]) Это замечание принадлежит французскому геометру До (R. Deaux).

Вычитая почленно из уравнения (16) уравнение (17), найдем число $\bar{\omega}$, сопряженное аффиксу ω ортополюса Ω прямой l относительно треугольника ABC:

$$(z_1 - z_2) z_3 \bar{\omega} = \frac{(z_1 - z_2)\bar{a} + \left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right)a}{2\bar{a}} + \frac{z_2\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right)a + bz_3(z_1 - z_2)}{2a},$$

и, сокращая на $z_1 - z_2$, получим

$$z_3\bar{\omega} = \frac{\bar{a} + \frac{a}{z_1 z_2}}{2\bar{a}} + \frac{\frac{z_3(z_1+z_2)}{z_1 z_2}a + bz_3}{2a},$$

откуда

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2z_3} + \frac{a}{2\bar{a}\sigma_3} + \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} + \frac{b}{2a},$$

или

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 + \frac{a\bar{\sigma}_3}{2\bar{a}} + \frac{b}{2a}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\bar{a}\sigma_3}{a} + \frac{b}{\bar{a}}\right). \tag{18}$$

Если прямая l проходит через центр единичной окружности, то $b = 0$ и формула (18) принимает вид

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\bar{a}}{a}\sigma_3\right), \tag{19}$$

а если единичная точка является точкой Бутена ($\sigma_3 = 1$), то

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\bar{a}}{a}\right). \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) совпадают соответственно с формулами (12) и (13) предыдущего примера, так как $\frac{\bar{a}}{a} = -\bar{\varkappa}$, где $\varkappa = -\frac{a}{\bar{a}}$ — угловой коэффициент прямой l, заданной уравнением $\bar{a}z + a\bar{z} = b$.

Пример 9. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, вписанного в окружность $(ABC) = (O)$, которую мы примем за единичную. На прямых AA_1, BB_1, CC_1 выбраны точки P, Q, R так, что

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AP}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{BQ}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{CR}} = \lambda.$$

Найти отношение

$$\mu = \frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}}.$$

Выразить это отношение через внутренние углы A, B, C данного треугольника ABC и через λ. Рассмотреть частные случаи: 1) $\lambda = 1$, 2) $\lambda = -1$, 3) $\lambda = 1/2$, 4) $\lambda = -1/2$, 5) $\lambda = 2$, 6) $\lambda = -2$.

Решение. Примем окружность (O) за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A, B, C. Уравнения прямых BC и AA_1:

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3,$$
$$z - z_2 z_3 \bar{z} = z_1 - \frac{z_2 z_3}{z_1}.$$

Складывая эти уравнения почленно, найдем аффикс a_1 точки A_1:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right),$$

а теперь из соотношения

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AP}} = \lambda$$

найдем аффикс p точки P:

$$\frac{a_1 - z_1}{p - z_1} = \lambda, \quad a_1 - z_1 = \lambda p - \lambda z_1,$$

$$\lambda p = a_1 - z_1 + \lambda z_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right) - z_1 + \lambda z_1.$$

Отсюда

$$p = \frac{1}{2\lambda}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_1^2}\right) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} z_1.$$

Аналогично

$$q = \frac{1}{2\lambda}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_2^2}\right) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} z_2,$$

$$r = \frac{1}{2\lambda}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_3}{z_3^2}\right) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} z_3,$$

где q и r — аффиксы точек Q и R. Теперь находим

$$\overline{PQR} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_1^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_1 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_1^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_1} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_2^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_2 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_2^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_2} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_3^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_3 + \frac{\sigma_1}{2\lambda} & -\frac{z_3^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_3} + \frac{\sigma_2}{2\lambda\sigma_3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4}\begin{vmatrix} -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_1^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_1 & -\frac{z_1^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_1} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_2^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_2 & -\frac{z_2^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_2} & 1 \\ -\frac{\sigma_3}{2\lambda z_3^2} + \frac{\lambda-1}{\lambda} z_3 & -\frac{z_3^2}{2\lambda\sigma_3} + \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{z_3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4}\left(\frac{1}{4\lambda^2}\begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^2 & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^2 & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{\sigma_3(\lambda-1)}{2\lambda^2}\begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^{-1} & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^{-1} & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^{-1} & 1 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda-1}{2\lambda^2\sigma_3}\begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & 1 \\ z_2 & z_2^2 & 1 \\ z_3 & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\begin{vmatrix} z_1 & z_1^{-1} & 1 \\ z_2 & z_2^{-1} & 1 \\ z_3 & z_3^{-1} & 1 \end{vmatrix}\right). \quad (21)$$

Далее,

$$\begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^2 & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^2 & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sigma_3^2}\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^4 \\ 1 & z_2^2 & z_2^4 \\ 1 & z_3^2 & z_3^4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sigma_3^2}(z_2^2-z_1^2)(z_3^2-z_2^2)(z_3^2-z_1^2) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_3^2}(z_2-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2+z_1)(z_3+z_2)(z_3+z_1) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_3^2}\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}(z_2+z_1)(z_3+z_2)(z_3+z_1) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_3}\begin{vmatrix} \bar z_1 & 1 & z_1 \\ \bar z_2 & 1 & z_2 \\ \bar z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}(\sigma_1-z_1)(\sigma_1-z_2)(\sigma_1-z_3) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_3}\frac{4}{i}\overline{ABC}(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3) = -\frac{4}{i}\overline{ABC}\,(\sigma_1\bar\sigma_1-1),$$

и первое слагаемое в круглых скобках в равенстве (21) будет

$$-\frac{i(1-\sigma\bar\sigma_1)}{\lambda^2}\overline{ABC}. \tag{22}$$

Вычислим второе слагаемое. Имеем

$$\begin{vmatrix} z_1^{-2} & z_1^{-1} & 1 \\ z_2^{-2} & z_2^{-1} & 1 \\ z_3^{-2} & z_3^{-1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_3}\begin{vmatrix} \bar z_1 & 1 & z_1 \\ \bar z_2 & 1 & z_2 \\ \bar z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = -\frac{4i}{\sigma_3}\overline{ABC},$$

так что второе слагаемое в круглых скобках в равенстве (21) равно

$$\frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2}\overline{ABC}. \tag{23}$$

Далее,

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & 1 \\ z_2 & z_2^2 & 1 \\ z_3 & z_3^2 & 1 \end{vmatrix} = \sigma_3\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar z_1 \\ 1 & z_2 & \bar z_2 \\ 1 & z_3 & \bar z_3 \end{vmatrix} = -4i\sigma_3\overline{ABC},$$

и, следовательно, третье слагаемое в круглых скобках в равенстве (21) равно

$$\frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2}\overline{ABC}. \tag{24}$$

Наконец, последнее слагаемое равно

$$-4i\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\overline{ABC}. \tag{25}$$

Из формул (21)—(25) следует, что

$$\overline{PQR} = \frac{i}{4}\left[-\frac{i(1-\sigma_1\bar\sigma_1)}{\lambda^2}+\frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2}+\frac{2i(\lambda-1)}{\lambda^2}-4i\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\right]\overline{ABC} =$$

$$= \left[\frac{1-\sigma_1\bar\sigma_1}{4\lambda^2}-\frac{\lambda-1}{\lambda^2}+\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\right]\overline{ABC} =$$

$$= \left[\frac{1-\sigma_1\bar\sigma_1}{4\lambda^2}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)\right]\overline{ABC}.$$

Отсюда

$$\frac{\overrightarrow{PQR}}{\overrightarrow{ABC}} = \frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}} = \frac{1-\sigma_1\bar{\sigma}_1}{4\lambda^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right) =$$
$$= -\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 1}{4\lambda^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right). \qquad (26)$$

Но $\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 1$ есть степень ортоцентра H треугольника ABC относительно окружности (ABC). Имеем

$$\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 1 = (z_1+z_2+z_3)(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3) - 1 =$$
$$= 2 + (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + (z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2) + (z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3).$$

Далее,

$$AB^2 = c^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = 2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1),$$

откуда

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2 - c^2 = 2 - 4\sin^2 C,$$

так как

$$\frac{c}{\sin C} = 2R = 2.$$

Аналогично находим

$$z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_2 = 2 - 4\sin^2 A, \qquad z_3\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_3 = 2 - 4\sin^2 B$$

и потому (см. пример 6)

$$\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 1 = 4(2 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)) = -8\cos A\cos B\cos C,$$

и формула (26) принимает следующий вид:]

$$\mu = \frac{\overrightarrow{PQR}}{\overrightarrow{ABC}} = \frac{2\cos A\cos B\cos C}{\lambda^2} + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{2}{\lambda}\right). \qquad (27)$$

1) Если $\lambda = 1$, то точки P, Q, R совпадают соответственно с основаниями высот треугольника ABC.

Ответ. $\mu = 2\cos A\cos B\cos C$.

2) Если $\lambda = -1$, то точки P, Q, R симметричны основаниям A_1, B_1, C_1 высот треугольника ABC относительно его вершин A, B, C.

Ответ. $\mu = 6 + 2\cos A\cos B\cos C$.

3) Если $\lambda = 1/2$, то точки P, Q, R симметричны вершинам A, B, C треугольника ABC относительно его сторон.

Ответ. $\mu = 3 + 8\cos A\cos B\cos C$.

4) Если $\lambda = -1/2$, то точки P, Q, R получаются из точек A_1, B_1, C_1 гомотетиями $(A, -2)$, $(B, -2)$, $(C, -2)$.

Ответ. $\mu = 15 + 8\cos A\cos B\cos C$.

5) Если $\lambda = 2$, то точки P, Q, R — середины высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC.

Ответ. $\mu = \frac{1}{2}\cos A\cos B\cos C$.

6) Если $\lambda = -2$, то точки P, Q, R симметричны серединам A_2, B_2, C_2 высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC относительно его вершин.

Ответ. $\mu = 3 + \frac{1}{2}\cos A\cos B\cos C.$

Пример 10. Пусть A', B', C' — точки, симметричные вершинам A, B, C треугольника ABC относительно его сторон BC, CA, AB. При каком необходимом и достаточном соотношении между

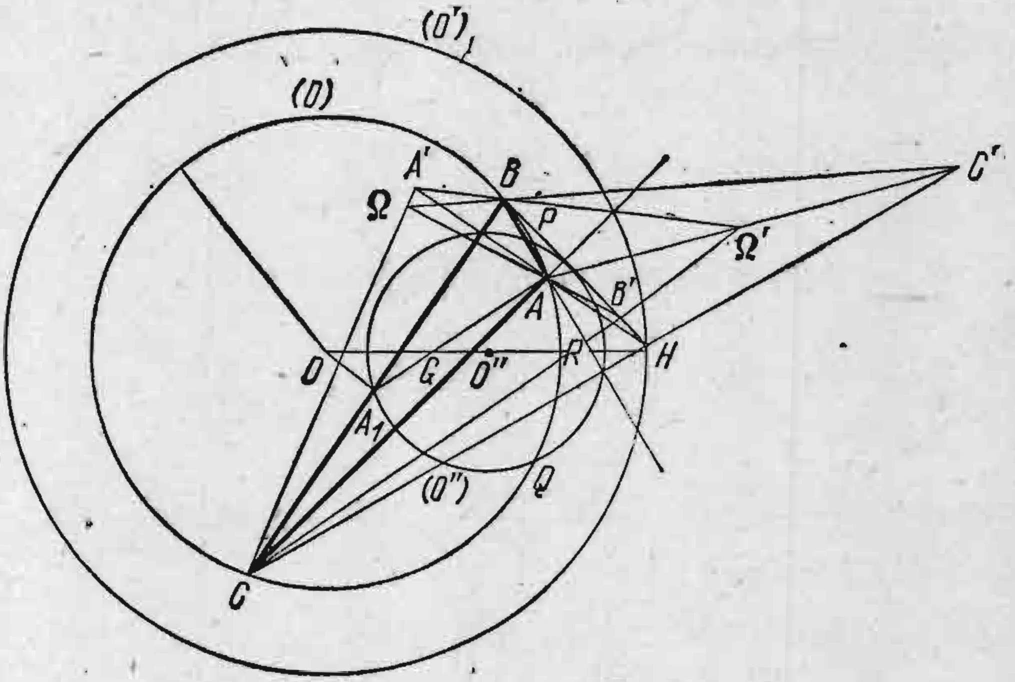


Рис. 13.

углами A, B, C треугольника ABC прямые AB', BC', CA' проходят через одну точку (рис. 13)?

Решение. Примем окружность (ABC) за единичную.

Найдем аффикс b' точки B'. Уравнение прямой AC:

$$z + z_3z_1\bar{z} = z_1 + z_3.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно AC:

$$z - z_2 = z_3z_1(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

или

$$z - z_3z_1\bar{z} = z_2 - \frac{z_3z_1}{z_2}.$$

Из уравнения AC и этого уравнения находим аффикс проекции точки B на прямую AC:

$$z = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2 + z_3 - \frac{z_3z_1}{z_2}\right).$$

Аффикс b' точки B', симметричной точке B относительно AC, находится из соотношения

$$\frac{b' + z_2}{2} = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2 + z_3 - \frac{z_3z_1}{z_2}\right),$$

откуда

$$b' = z_1 + z_3 - \frac{z_3 z_1}{z_2}.$$

Отсюда

$$\overline{b'} = \bar{z}_1 + \bar{z}_3 - \frac{z_2}{z_3 z_1} = \frac{z_1 + z_3 - z_2}{z_1 z_3}.$$

Составляем уравнение прямой AB':

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ b' & \overline{b'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$z(\bar{z}_1 - \overline{b}') + (b' - z_1)\bar{z} + z_1\overline{b}' - b'\bar{z}_1 = 0.$$

Имеем

$$\bar{z}_1 - \overline{b}' = \frac{1}{z_1} - \frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3 z_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 z_1},$$

$$z_1 - b' = \frac{\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_1}}{\dfrac{1}{z_3 z_1}} = \frac{z_3(z_1 - z_2)}{z_2}, \qquad b' - z_1 = \frac{z_3(z_2 - z_1)}{z_2},$$

$$z_1\overline{b}' - b'\bar{z}_1 = z_1\frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3 z_1} - \frac{1}{z_1}\left(z_3 + z_1 - \frac{z_3 z_1}{z_2}\right) =$$

$$= \frac{z_3 + z_1 - z_2}{z_3} - \frac{z_3}{z_1} - 1 + \frac{z_3}{z_2} = \frac{z_1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} - \frac{z_2}{z_3} =$$

$$= \frac{1}{z_3}(z_1 - z_2) + z_3\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{z_3}(z_1 - z_2) + z_3\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} =$$

$$= (z_1 - z_2)\left(\frac{1}{z_3} + \frac{z_3}{z_1 z_2}\right),$$

и уравнение прямой AB' принимает вид

$$\frac{1}{z_3 z_1} z + \frac{z_3}{z_2}\bar{z} - \frac{1}{z_3} - \frac{z_3}{z_1 z_2} = 0$$

или

$$z_2 z + z_3^2 z_1 \bar{z} - z_3^2 - z_1 z_2 = 0.$$

Аналогично запишутся уравнения прямых BC' и CA'. Итак,

$$z_2 z + z_3^2 z_1 \bar{z} - z_3^2 - z_1 z_2 = 0, \qquad (AB')$$

$$z_3 z + z_1^2 z_2 \bar{z} - z_1^2 - z_2 z_3 = 0, \qquad (BC')$$

$$z_1 z + z_2^2 z_3 \bar{z} - z_2^2 - z_3 z_1 = 0. \qquad (CA')$$

Обозначим через K, L, M точки пересечения прямых BC' и CA', CA' и AB', AB' и BC'. Тогда

$$\overline{KLM} = \frac{i}{4}\,\frac{\begin{vmatrix} z_2 & z_3^2 z_1 & z_3^2 + z_1 z_2 \\ z_3 & z_1^2 z_2 & z_1^2 + z_2 z_3 \\ z_1 & z_2^2 z_3 & z_2^2 + z_3 z_1 \end{vmatrix}^2}{\sigma_3 (z_2 z_3^2 - z_1^3)(z_3 z_1^2 - z_2^3)(z_1 z_2^2 - z_3^3)}.$$

Далее,

$$\Delta=\begin{vmatrix} z_2 & z_3^2 z_1 & z_3^2+z_1z_2 \\ z_3 & z_1^2 z_2 & z_1^2+z_2z_3 \\ z_1 & z_2^2 z_3 & z_2^2+z_3z_1 \end{vmatrix}=z_1^2z_2^4+z_1^3z_2^3z_3+z_2^2z_3^4+z_1z_3^2z_2^3+z_1^4z_3^2+z_1^2z_2z_3^3-$$

$$-z_1^3z_2z_3^2-z_1^4z_2^2-z_1^2z_2^3z_3-z_2^4z_3^2-z_1z_2^2z_3^3-z_1^2z_3^4=z_1^2z_2^2(z_2^2-z_1^2)-$$

$$-z_1^2z_2^2z_3(z_2-z_1)+z_3^4(z_2^2-z_1^2)+z_3^2z_2z_1(z_2^2-z_1^2)-z_3^2(z_3^4-z_1^4)-$$

$$-z_3^3z_1z_2(z_2-z_1)=(z_2-z_1)(z_1^2z_2^3+z_1^3z_2^2-z_1^2z_2^2z_3+z_3^4z_2+z_3^4z_1+z_3^2z_2^2z_1+$$

$$+z_3^2z_2z_1^2-z_3^2z_2^3-z_3^2z_2^2z_1-z_3^2z_2z_1^2-z_3^2z_1^3-z_3^3z_1z_2)=(z_2-z_1)[z_1^2z_2^2(z_1-z_3)+$$

$$+z_2^3(z_1^2-z_3^2)-z_2z_3^2(z_1^2-z_3^2)-z_1z_3^2(z_1^2-z_3^2)+z_3^2z_2z_1(z_1-z_3)]=(z_2-z_1)\times$$

$$\times(z_1-z_3)(z_1^2z_2^2+z_2^3z_1+z_2^3z_3-z_2z_1z_3^2-z_2z_3^3-z_1^2z_3^2-z_1z_3^3+z_3^2z_1z_2)=$$

$$=(z_2-z_1)(z_1-z_3)[z_1^2(z_2^2-z_3^2)+z_1(z_2^3-z_3^3)+z_2z_3(z_2^2-z_3^2)]=$$

$$=(z_2-z_1)(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_1^2z_2+z_1^2z_3+z_1z_2^2+z_1z_2z_3+z_1z_3^2+z_2^2z_3+z_2z_3^2)=$$

$$=(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_1^2z_2+z_2^2z_1+z_2^2z_3+z_3^2z_2+z_3^2z_1+z_1^2z_3+z_1z_2z_3).$$

Рассмотрим произведение:

$$(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3=$$
$$=2z_1z_2z_3+z_1^2z_2+z_2^2z_1+z_2^2z_3+z_3^2z_2+z_3^2z_1+z_1^2z_3.$$

Отсюда следует, что последний множитель $\sigma_1\sigma_2-\sigma_3-\sigma_3=\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3$, так что

$$\Delta=(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3).$$

Итак,

$$\overline{KLM}=\frac{i}{4}\,\frac{(z_2-z_1)^2(z_3-z_1)^2(z_3-z_2)^2(\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3)^2}{\sigma_3(z_2z_3^2-z_1^3)(z_3z_1^2-z_2^3)(z_1z_2^2-z_3^3)}.$$

Заметим, что

$$(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)=$$
$$=\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}=\sigma_3\begin{vmatrix} \bar z_1 & 1 & z_1 \\ \bar z_2 & 1 & z_2 \\ \bar z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix}=\sigma_3\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1 \\ z_2 & \bar z_2 & 1 \\ z_3 & \bar z_3 & 1 \end{vmatrix}=-4i\sigma_3\overline{ABC},$$

так что

$$\overline{KLM}=-\frac{4i\sigma_3(\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3)^2\,\overline{ABC}^2}{(z_2z_3^2-z_1^3)(z_3z_1^2-z_2^3)(z_1z_2^2-z_3^3)}.$$

Прямые AB', BC', CA' проходят через одну точку тогда и только тогда, когда

$$\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3=0$$

или

$$\sigma_1\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-2=0,\qquad \sigma_1\bar\sigma_1-2=0,$$

т. е.

$$\sigma_1\bar\sigma_1=OH^2=2=2R^2\qquad (R=1)$$

или

$$OH=R\sqrt{2}.$$

Отсюда, между прочим, следует, что треугольник ABC тупоугольный, так как $OH > R$, т. е. ортоцентр H лежит вне окружности (ABC).

Треугольник, для которого $OH = R\sqrt{2}$, может быть построен так: строим две концентрические окружности (O) и (O'), радиусы которых равны 1 и $\sqrt{2}$ (см. рис. 13). На окружности (O') берем произвольно точку H, а на окружности (O) берем произвольно точку A. Отрезок $\overrightarrow{OH}$ делим в отношении $1:2$:

$$\overrightarrow{OG} : \overrightarrow{GH} = 1 : 2.$$

Точка G — точка пересечения медиан треугольника ABC. Соединяем точку A с точкой G и на продолжении отрезка AG за точку G откладываем отрезок $GA_1 = AG/2$. Точка A_1 — середина стороны BC; поэтому, проведя через точку A_1 прямую, перпендикулярную прямой OA_1, в пересечении с окружностью (O) получим точки B и C.

Условие возможности построения состоит в том, чтобы точка A_1 лежала внутри окружности (O). Так как точка A_1 является образом точки A при гомотетии $(G, -1/2)$, а при этой гомотетии окружность (O) перейдет в окружность (O''), радиус которой равен $1/2$, а центр O'' находится на отрезке OH, причем $OO'' = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то окружности (O) и (O'') пересекаются в точках P и Q. Точка A может поэтому описывать открытую дугу PRQ окружности (O). Из треугольника OPO'' имеем

$$PO''^2 = OP^2 + OO''^2 - 2OP \cdot OO'' \cos(\alpha/2),$$

где $\alpha = \angle POQ$. И так как $PO'' = 1/2$, $OO'' = \sqrt{2}/2$, $OP = 1$, то

$$\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4\sqrt{2}}$$

и, следовательно,

$$\cos\alpha = 2 \cdot \frac{25}{32} - 1 = \frac{9}{16}, \qquad \alpha = \angle POQ = \arccos(9/16).$$

Условие $OH^2 = 2R^2$ можно переписывать в другом виде. Так как $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ (см. пример 6), то

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2R^2$$

или

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2.$$

И еще иначе ($a = 2R\sin A$ и т. д.)

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 7/4$$

или

$$\cos A \cos B \cos C = -1/8$$

(отсюда также следует, что треугольник ABC тупоугольный).

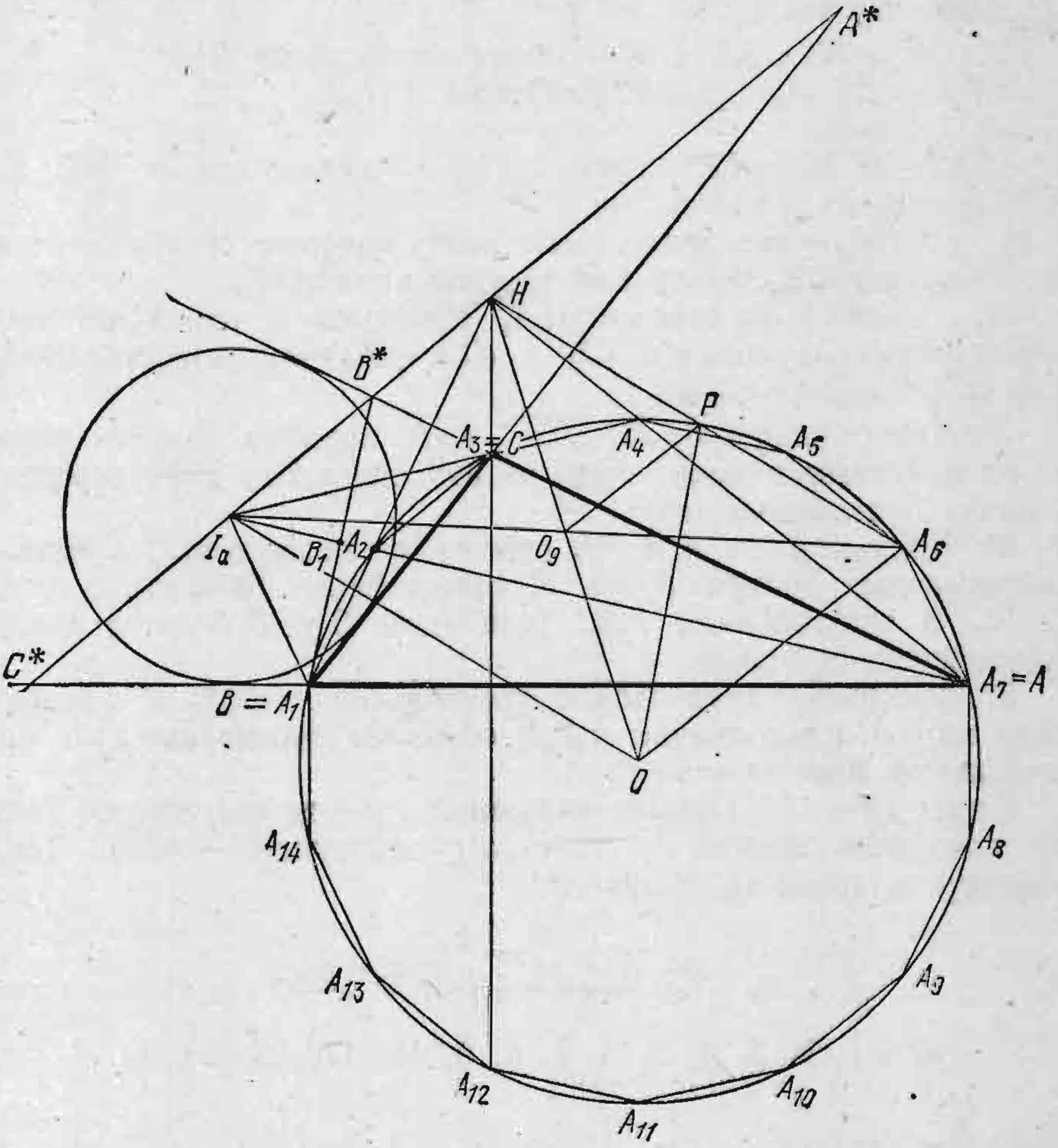


Рис. 14.

Пример 11. В окружность (O) вписан правильный четырнадцатиугольник:

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}.$$

Рассмотрим треугольник $T = ABC$ с вершинами:

$$A = A_7, \quad B = A_1, \quad C = A_3.$$

Углы этого треугольника опираются на дуги $\overset{\frown}{A_1A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_7}$, $\overset{\frown}{A_7A_1}$ и, следовательно,

$$A = \pi/7, \quad B = 2\pi/7, \quad C = 4\pi/7 \quad (\text{рис. } 14)$$

(т. е. углы треугольника T образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2). Обозначим через (I_a) окружность, вневписанную в угол A треугольника ABC, а через H ортоцентр треугольника ABC.

Доказать, что:

1°. $OH = OI_a = R\sqrt{2}$ (R — радиус окружности (O)).

2°. $R = 2r_a$ (r_a — радиус окружности (I_a)).

3°. $I_aH = R$.

4°. $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$ (здесь a, b, c — длины сторон BC, CA, AB — не путать с аффиксами).

5°. OI_aHA_6 — параллелограмм, центр которого совпадает с центром окружности Эйлера для треугольника ABC.

6°. Середина P отрезка HA_6 совпадает с одной из точек пересечения окружностей (O) и (O_9) ((O_9) — окружность Эйлера для треугольника ABC).

7°. Треугольники $\overrightarrow{AI_aH}$, $\overrightarrow{HBI_a}$, $\overrightarrow{I_aHC}$ подобны. Решить вопрос об их ориентации (какие пары из них одинаково ориентированы, а какие противоположно).

8°. Прямые BC, CA и AB пересекают прямую HI_a в точках, симметричных точкам A, B, C относительно биссектрис углов C, A, B треугольника ABC (для углов C и B берутся биссектрисы внешних углов).

9°. Квадраты длин сторон треугольника OI_aA_6 и квадраты длин сторон треугольника A_6I_aH образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Решение. 1°. Примем окружность (O) за единичную. Точке A_1 припишем аффикс 1 (т. е. A_1 — единичная точка). Тогда аффиксы a_k точек A_k будут

$$a_k = \cos\frac{(k-1)\pi}{7} + i\sin\frac{(k-1)\pi}{7},$$
$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14.$$

Аффиксы вершин $A = A_7$, $B = A_1$, $C = A_3$ будут

$$a = a_7 = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7},$$
$$b = a_1 = 1,$$
$$c = a_3 = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Их сумма равна аффиксу h ортоцентра H треугольника ABC:

$$h = 1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + i\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}\right).$$

Отсюда

$$OH^2=\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}\right)^2=$$
$$=1+\cos^2\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{6\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+$$
$$+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{6\pi}{7}+2\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}=3+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Пусть

$$x=2\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7};$$

тогда

$$x\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}=$$
$$=-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\pi=-\sin\frac{\pi}{7}$$

и, следовательно, $x=-1$; поэтому

$$OH^2=3-1=2,$$

откуда

$$OH=\sqrt{2}=R\sqrt{2}\qquad(R=1).$$

Определим теперь аффикс τ_a центра I_a окружности (I_a). Биссектриса внутреннего угла B есть BA_5, так как точка A_5 делит дугу CA пополам. Отсюда следует, что биссектриса внешнего угла B есть прямая $A_{12}B$, так как точки A_5 и A_{12} — диаметрально противоположные точки окружности (O), и потому $BA_5\perp BA_{12}$. Биссектриса внутреннего угла A есть $AA_2=A_7A_2$. Итак, I_a является точкой пересечения прямых A_2A_7 и A_1A_{12}. Составим уравнения этих прямых. Угловой коэффициент прямой A_2A_7 равен 1, так как $A_2A_7\| A_1A_8$, а A_1A_8 — действительная ось. Значит, уравнение прямой A_2A_7 имеет вид

$$z-\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=\bar{z}-\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$

или

$$z-\bar{z}=2i\sin\frac{\pi}{7}. \tag{28}$$

Угловой коэффициент прямой A_1A_{12}:

$$\frac{a_{12}-1}{\bar{a}_{12}-1}=\frac{a_{12}-1}{\frac{1}{a_{12}}-1}=-a_{12},$$

и, следовательно, уравнение прямой A_1A_{12}:

$$z-1=-\left(\cos\frac{11\pi}{7}+i\sin\frac{11\pi}{7}\right)(\bar{z}-1)$$

или

$$z-1=\left(\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}\right)(\bar{z}-1). \tag{29}$$

Решая систему (28), (29), находим аффикс τ_a точки I_a. Из уравнения (28)

$$\bar{z} = z - 2i\sin\frac{\pi}{7},$$

и уравнение (29) принимает вид

$$z - 1 = \left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)\left(z - 2i\sin\frac{\pi}{7} - 1\right),$$

$$z = 1 - \frac{2i\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)}{2\sin^2\frac{2\pi}{7} - 2i\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= 1 + \frac{i\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)}{i\sin\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)} = 1 + \frac{\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)}{\sin\frac{2\pi}{7}} =$$

$$= 1 + \frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}} + i\sin\frac{\pi}{7} = \tau_a.$$

Отсюда

$$OI_a^2 = |\tau_a|^2 = \frac{\left(2\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)^2}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} + \sin^2\frac{\pi}{7} =$$

$$= \frac{4\cos^2\frac{\pi}{7} + 4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7}}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{1 + 2\left(1 + \cos\frac{2\pi}{7}\right) + 2\left(\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{3 + 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} = \frac{3 + 2\left(2\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{6\pi}{7} - \cos\frac{4\pi}{7}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}.$$

Но $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$, поэтому

$$OI_a^2 = \frac{3 + 4\cos\frac{2\pi}{7} + 1}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} = \frac{1 + \cos\frac{2\pi}{7}}{\cos^2\frac{\pi}{7}} = 2,$$

откуда

$$OI_a = \sqrt{2} = R\sqrt{2} = OH.$$

2°. $$r_a = p\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = p\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{14}\left(\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7}\right)^{1)}.$$

[1]) Если радиус окружности равен 1, то хорда этой окружности, стягивающая дугу α, равна $2\sin(\alpha/2)$. Угол A — вписанный угол, опирающийся на

Пусть

$$y=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Умножая обе части этого равенства на $2\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)$, получим

$$2y\sin\frac{\pi}{14}=2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{7}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14},$$

следовательно,

$$y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14},$$

и потому

$$r_a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}=\frac{1}{2}=\frac{R}{2},$$

откуда

$$R=2r_a.$$

3°. Далее, $I_aM=h-\tau_a$ (h и τ_a вычислены в п. 1°), откуда

$$h-\tau_a=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}-1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{-\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=\frac{-\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=\frac{2\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{2\pi}{7}=$$

$$=\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}=a_6.$$

дугу $2\pi/7$, следовательно, $A_1A_3=BC=2\sin(\pi/7)$ и аналогично для двух других сторон. Длины сторон можно найти и по теореме синусов: $a=2R\sin A=2\sin(\pi/7)$ и т. д.

Итак,

$$h-\tau_a=\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}=a_6,$$

следовательно,

$$HI_a=|h-\tau_a|=1=R.$$

4°. $$a^2+b^2+c^2=4\sin^2\frac{\pi}{7}+4\sin^2\frac{2\pi}{7}+4\sin^2\frac{3\pi}{7}=$$
$$=2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$
$$=2\left[3-\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\right]=2[3-(-1/2)]=7=7R^2.$$

5°. Направленные отрезки $\overrightarrow{I_aH}$ и $\overrightarrow{OA_6}$ эквивалентны, так как $h-\tau_a=a_6$ (см. п. 3°), следовательно, I_aHA_6O — параллелограмм. Центром этого параллелограмма является середина отрезка OH, т. е. центр окружности Эйлера для треугольника ABC.

6°. Аффикс точки P:

$$\frac{h+a_6}{2}=\frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{\pi}{7}+i\left(2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\right)\right].$$

Отсюда

$$\left|\frac{h+a_6}{2}\right|^2=\frac{1}{4}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(2\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-2\cos\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+4\sin^2\frac{2\pi}{7}+4\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left[2-2\cos\frac{\pi}{7}+2\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1,$$
$$\left|\frac{h+a_6}{2}\right|=1,$$

т. е. середина P отрезка HA_6 лежит на окружности (O). Центр O_9 окружности Эйлера для треугольника ABC является серединой отрезка OH. Значит, O_9P — средняя линия треугольника OHA_6 и, значит, $O_9P=\frac{1}{2}OA_6=\frac{R}{2}$. Отсюда следует, что точка P лежит и на окружности (Q_9) Эйлера.

7°. Докажем, что треугольники $\overrightarrow{AI_aH}$ и $\overrightarrow{HBI_a}$ подобны и одинаково ориентированы. Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_7 & h & 1\\ \tau_a & 1 & 1\\ h & \tau_a & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_7-h & h-\tau_a & 0\\ \tau_a-h & 1-\tau_a & 0\\ h & \tau_a & 1\end{vmatrix}=(a_7-h)(1-\tau_a)+(h-\tau_a)^2.$$

Далее,

$$a_7-h=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}-1-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{6\pi}{7}=$$

$$=-1-\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$1-\tau_a=1-1-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}-i\sin\frac{\pi}{7}=-\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}-i\sin\frac{\pi}{7},$$

$$(h-\tau_a)^2=a_6^2=\cos\frac{10\pi}{7}+i\sin\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}-i\sin\frac{3\pi}{7},$$

$$(a_7-h)(1-\tau_a)=\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)\frac{\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\left(2\cos^2\frac{\pi}{7}+2i\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\right)\frac{\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}=\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Следовательно,

$$\Delta=(h-\tau_a)^2+(a_7-h)(1-\tau_a)=0.$$

Итак, $\overrightarrow{AI_a}\overrightarrow{H}\downarrow\downarrow\overrightarrow{HB}\overrightarrow{I_a}$, причем треугольники $\overrightarrow{AI_a}\overrightarrow{H}$ и $\overrightarrow{HB}\overrightarrow{I_a}$ подобны и одинаково ориентированы (именно при таком порядке задания их вершин).

Аналогично доказывается, что треугольники $\overrightarrow{AI_a}\overrightarrow{H}$ и $\overrightarrow{I_aH}\overrightarrow{C}$ подобны и одинаково ориентированы.

8°. Докажем, например, что точка B^*, симметричная точке $B=A_1$ относительно биссектрисы внутреннего угла A, лежит на прямой HI_a. Уравнение биссектрисы внутреннего угла A:

$$z-\bar{z}=2i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A_1=B$ на эту биссектрису, имеет вид

$$z+\bar{z}=2.$$

Отсюда находим аффикс b_1 проекции B_1 точки B на биссектрису угла A:

$$b_1=1+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Аффикс b^* точки B^* находим из соотношения

$$\frac{b^*+1}{2}=b_1,$$

откуда

$$b^*=1+2i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Далее,

$$h-\tau_a=\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7},$$

$$\tau_a-b^*=1+\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}+i\sin\frac{\pi}{7}-1-2i\sin\frac{\pi}{7}=$$

$$=\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}-i\sin\frac{\pi}{7}=\frac{\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}=-\frac{\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}},$$

и, следовательно, отношение

$$\frac{h-\tau_a}{\tau_a-b^*}=-2\cos\frac{\pi}{7}$$

— число действительное, а значит, точки H, I_a, B^* лежат на одной прямой. Читателю предлагается доказать два остальных положения настоящего пункта.

9°. Рассмотрим треугольник OI_aA_6. Имеем

$$OA_6^2=1,$$

$$OI_a^2=|\tau_a|^2=\left(1+\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)^2+\sin^2\frac{\pi}{7}=1+\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}+\frac{\cos^2\frac{2\pi}{7}}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}+\sin^2\frac{\pi}{7}=$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{\pi}{7}+4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos^2\frac{2\pi}{7}+4\cos^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{1+2\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}=\frac{3+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{3+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\right)}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}=\frac{4+4\cos\frac{2\pi}{7}}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}=2.$$

И наконец, из параллелограмма OI_aHA_6 имеем (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех его сторон):

$$OI_a^2+HA_6^2+OA_6^2+I_aH^2=OH^2+I_aA_6^2.$$

Но $OI_a^2=HA_6^2=2$ (см. пп. 1° и 5°), $OA_6=I_aH=1$, $OH=\sqrt{2}$, следовательно,

$$2+2+1+1=2+I_aA_6^2,$$

откуда

$$I_aA_6^2=4.$$

Треугольники OI_aA_6 и A_6I_aH равны, поэтому квадраты длин его сторон I_aH^2, HA_6^2, $I_aA_6^2$ также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Пример 12. Дана дробно-линейная функция

$$u=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{30}$$

где a, b, c, d — фиксированные комплексные числа, причем $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$; z — аргумент; u — функция.

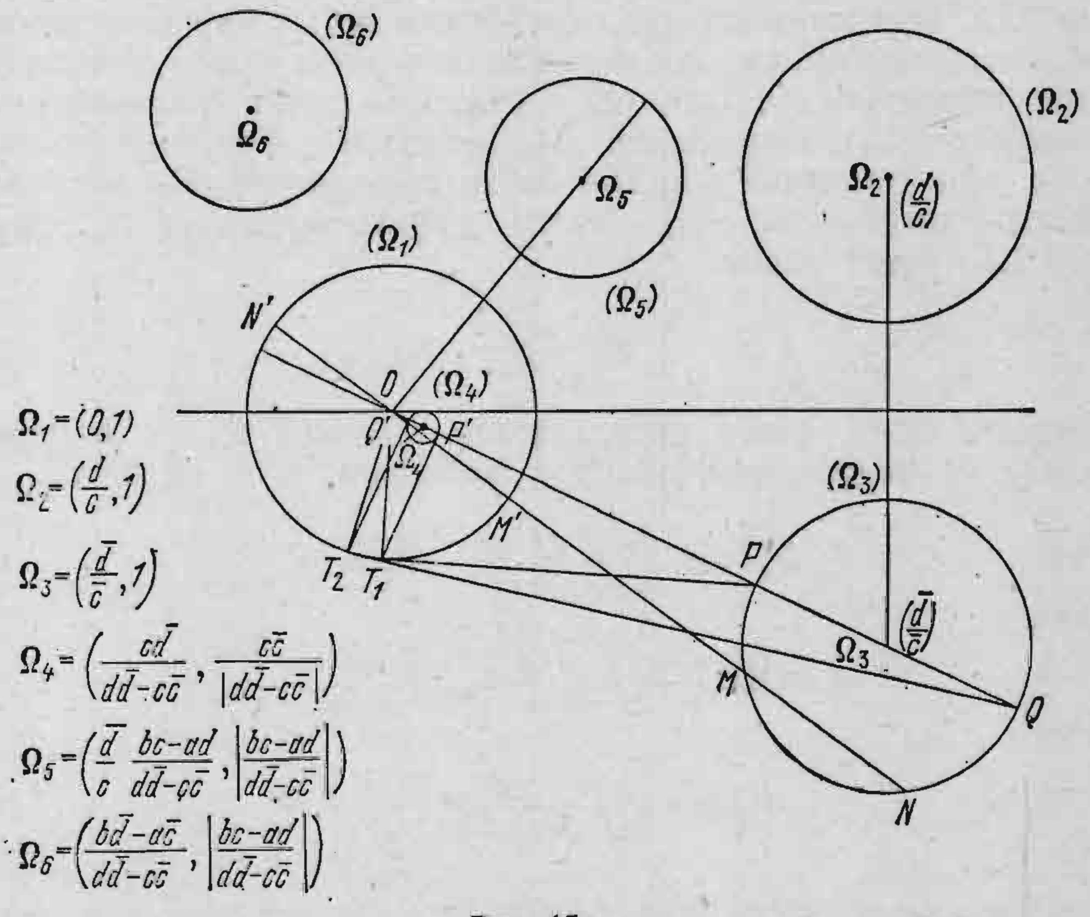


Рис. 15.

Доказать, что если $|c|\neq|d|$, то образом единичной окружности при этом преобразовании является окружность; найти ее радиус и аффикс центра.

Р е ш е н и е. Преобразуем функцию u следующим образом:

$$u=\frac{a}{c}+\frac{az+b}{cz+d}-\frac{a}{c}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c\,(cz+d)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}.$$

1) Преобразование $z \to z + \frac{d}{c}$ переводит единичную окружность $(\Omega_1) = (0,\ 1)$[1] в окружность $(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c},\ 1\right)$ (рис. 15).

2) Преобразование $z + \frac{d}{c} \to \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$ состоит в симметрии относительно действительной оси Ox, при которой окружность $(\Omega_2) = \left(\frac{d}{c},\ 1\right)$ переходит в окружность $(\Omega_3) = \left(\frac{\bar{d}}{\bar{c}},\ 1\right)$, и последующей инверсии (см. главу IV) окружности (Ω_3) относительно окружности (Ω_1), при которой окружность (Ω_3) перейдет в окружность (Ω_4); для построения окружности (Ω_4) достаточно провести прямую $O\Omega_3$ и построить образы P' и Q' концов P и Q диаметра, который высекает на окружности (Ω_3) эта прямая. Окружность $(P'Q')$, построенная на отрезке $P'Q'$ как на диаметре, и будет окружностью (Ω_4). Вычислим радиус окружности (Ω_4) и аффикс ее центра. Для этого заметим, что при инверсии относительно окружности (Ω_1) и при гомотетии $(O,\ 1/\sigma)$, где σ — степень точки O относительно окружности (Ω_3), окружность (Ω_3) переходит в окружность (Ω_4).

Но при гомотетии $(O,\ 1/\sigma)$ центр окружности (Ω_3) переходит в центр окружности (Ω_4), значит, аффикс ω_4 центра Ω_4 окружности (Ω_4) будет равен

$$\omega_4 = \frac{1}{\sigma} \frac{\bar{d}}{\bar{c}},$$

а радиус будет равен произведению радиуса $R_3 = 1$ окружности (Ω_3) на модуль коэффициента гомотетии, т. е. на $1/|\sigma|$:

$$R_4 = R_3 \frac{1}{|\sigma|} = \frac{1}{|\sigma|} \qquad (R_3 = 1).$$

Далее,

$$\sigma = O\Omega_3^2 - R_3^2 = \frac{\bar{d}}{\bar{c}} \frac{d}{c} - 1 = \frac{d\bar{d} - c\bar{c}}{c\bar{c}}\ ^{2)},$$

так что

$$(\Omega_4) = \left(\frac{c\bar{d}}{d\bar{d} - c\bar{c}},\ \frac{c\bar{c}}{|d\bar{d} - c\bar{c}|}\right).$$

---

[1]) Символом $(z_0,\ R)$ мы будем обозначать окружность радиуса R, аффикс центра которой равен z_0.

[2]) В общем случае при инверсии относительно точки O будем иметь

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k,$$

где $k \neq 0$ — степень инверсии и, следовательно,

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \frac{k}{\sigma},$$

где N — вторая точка пересечения прямой OM с инвертируемой окружностью; $\sigma \neq 0$, так как $|d| \neq |c|$.

3) Преобразование

$$\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \to \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}$$

заключается в повороте плоскости на угол $\arg\frac{bc-ad}{c^2}$ и гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{|bc-ad|}{|c|^2}$. После этих двух преобразований окружность (Ω_4) перейдет в окружность (Ω_5), аффикс ω_5 центра которой

$$\omega_5 = \omega_4\frac{bc-ad}{c^2} = \frac{c\bar{d}}{d\bar{d}-c\bar{c}}\,\frac{bc-ad}{c^2} = \frac{\bar{d}}{c}\,\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}},$$

а радиус

$$R_5 = \left|\frac{c\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}\cdot\frac{bc-ad}{c^2}\right| = \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|^{1)}.$$

Итак,

$$(\Omega_5) = \left(\frac{\bar{d}}{c}\,\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}},\ \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|\right).$$

4) Наконец преобразование переноса

$$\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}} \to \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}$$

переведет окружность (Ω_5) в окружность (Ω_6) того же радиуса: $R_6=R_5$, а аффикс ω_6 центра Ω_6 окружности (Ω_6) будет равен

$$\omega_6 = \frac{a}{c} + \frac{\bar{d}}{c}\,\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}} = \frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}.$$

Окончательно: в результате преобразования

$$u=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0,\quad c\neq 0,\quad |c|\neq|d|$$

окружность $(\Omega_1)=(0,\ 1)$ перейдет в окружность

$$(\Omega_6) = \left(\frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}},\ \left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|\right).$$

Пример 13. Пусть $\overrightarrow{BCA_1A_2}$, $\overrightarrow{CAB_1B_2}$, $\overrightarrow{ABC_1C_2}$ — квадраты, имеющие одинаковую ориентацию и построенные на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, ортоцентр которого H. Обозначим через $(O)=(ABC)$ окружность, проходящую через точки A, B, C. Пусть P, Q, R — соответственно центры квадратов $\overrightarrow{A_1B_2C'C''}$,

---

1) $\left|\frac{c\bar{c}}{c^2}\right| = \left|\frac{|c|^2}{c^2}\right| = \frac{|c|^2}{|c^2|} = \frac{|c|^2}{|c|^2} = 1.$

$\overline{B_1C_2A'A''}$, $\overline{C_1A_2B'B''}$, имеющих ту же ориентацию, что и три первых квадрата. Обозначим через P_1, P_2, P_3 ортогональные проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, через Q_1, Q_2, Q_3 ортогональные проекции точки Q на те же стороны и через R_1, R_2, R_3 ортогональные проекции точки R на те же стороны BC, CA, AB треугольника ABC. Доказать, что сумма *сил*

$$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}+\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{QQ_2}+\overrightarrow{QQ_3}+\overrightarrow{RR_1}+\overrightarrow{RR_2}+\overrightarrow{RR_3} \qquad (31)$$

равна вектору $\overrightarrow{OH'}$, где H' — ортоцентр треугольника, вершинами которого являются основания высот данного треугольника ABC.

Доказать, что суппорт этой равнодействующей (т. е. прямая, на которой лежит эта равнодействующая [1])) проходит через конец направленного отрезка $4\overrightarrow{OH}$.

Если же квадраты второй тройки имеют ориентацию, противоположную ориентации первых трех квадратов, то суппортом суммы сил (31) является прямая OH'.

Составить уравнения этих двух суппортов, принимая окружность $(O)=(ABC)$ за единичную окружность (рис. 16):

Решение. 1°. Пусть a, b, c — аффиксы точек A, B, C. Найдем аффиксы p, q, r точек P, Q, R. Обозначая через a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 аффиксы точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, имеем:

$$\left.\begin{aligned} b_2&=c+\overrightarrow{CB_2}=c+i\overrightarrow{CA}=c+i(a-c)=ia+(1-i)c,\\ a_1&=c+\overrightarrow{CA_1}=c-i\overrightarrow{CB}=c-i(b-c)=(1+i)c-ib. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Далее,

$$\begin{aligned} p=b_2+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_2A_1}-\frac{i}{2}\overrightarrow{B_2A_1}&=b_2+\frac{1}{2}(a_1-b_2)-\frac{i}{2}(a_1-b_2)=\\ &=b_2+\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}b_2-\frac{ia_1}{2}+\frac{ib_2}{2}=\frac{1+i}{2}b_2+\frac{1-i}{2}a_1 \end{aligned}$$

и, учитывая формулы (32),

$$p=\frac{1+i}{2}[ia+(1-i)c]+\frac{1-i}{2}[(1+i)c-ib]=2c+\frac{i-1}{2}a-\frac{1+i}{2}b. \qquad (33)$$

Аналогично (можно произвести круговую перестановку букв a, b, c) находим

$$\left.\begin{aligned} q&=2a+\frac{i-1}{2}b-\frac{1+i}{2}c,\\ r&=2b+\frac{i-1}{2}c-\frac{1+i}{2}a. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

---

[1]) Сила есть скользящий вектор.

Заметим теперь, что из формул (33) и (34) следует, что

$$p+q+r=a+b+c=\sigma_1,$$

а значит, треугольники ABC и PQR имеют общий центр тяжести (точку пересечения медиан).

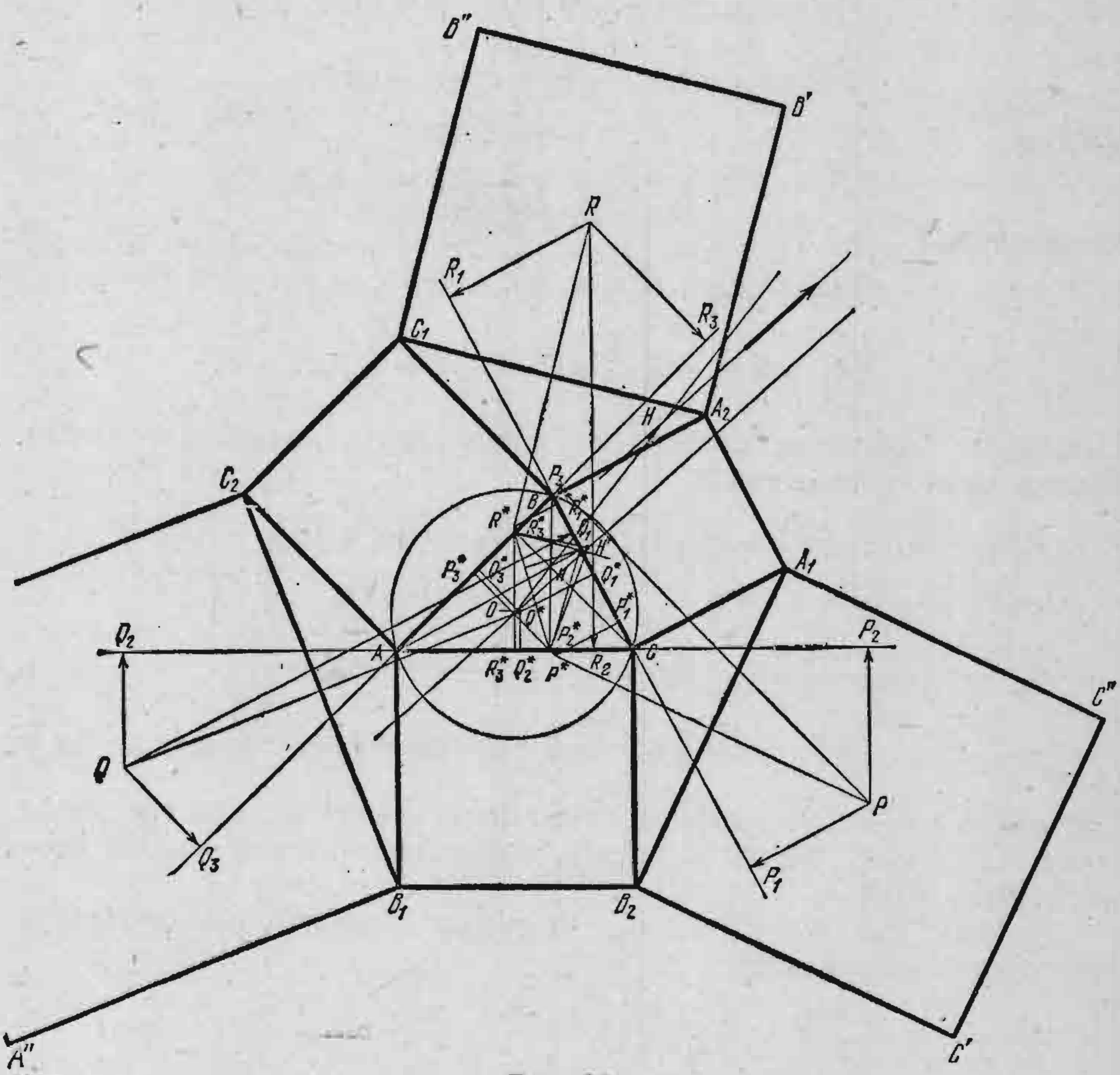


Рис. 16.

Теперь из уравнений прямых BC и PP_1

$$z-b=-bc(\bar{z}-\bar{b}),$$
$$z-p=bc(\bar{z}-\bar{p})$$

или

$$z+bc\bar{z}=b+c,$$
$$z-bc\bar{z}=p-bc\bar{p}$$

находим аффикс p_1 точки P_1:

$$p_1=\frac{1}{2}(b+c+p-bc\bar{p}),$$

а значит,

$$\overrightarrow{PP_1}=p_1-p=\frac{1}{2}(b+c+p-bc\bar{p})-p=\frac{1}{2}(b+c-p-bc\bar{p}).$$

Аналогично

$$\overrightarrow{PP_2}=p_2-p=\frac{1}{2}(c+a-p-ca\bar{p}),$$

$$\overrightarrow{PP_3}=p_3-p=\frac{1}{2}(a+b-p-ab\bar{p}).$$

Отсюда

$$\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}=\sigma_1-\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{p}.$$

Аналогично

$$\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{QQ_2}+\overrightarrow{QQ_3}=\sigma_1-\frac{3}{2}q-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{q},$$

$$\overrightarrow{RR_1}+\overrightarrow{RR_2}+\overrightarrow{RR_3}=\sigma_1-\frac{3}{2}r-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{r}.$$

Складывая почленно последние соотношения, находим главный вектор равнодействующей:

$$h'=\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}+\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{QQ_2}+\overrightarrow{QQ_3}+\overrightarrow{RR_1}+\overrightarrow{RR_2}+\overrightarrow{RR_3}=$$
$$=3\sigma_1-\frac{3}{2}(p+q+r)-\frac{1}{2}\sigma_2(\bar{p}+\bar{q}+\bar{r})=3\sigma_1-\frac{9}{2}\frac{p+q+r}{3}-$$
$$-\frac{3}{2}\sigma_2\frac{\bar{p}+\bar{q}+\bar{r}}{3}=3\sigma_1-\frac{9}{2}\frac{a+b+c}{3}-\frac{3}{2}\sigma_2\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}=$$
$$=3\sigma_1-\frac{9}{2}g-\frac{3}{2}\sigma_2\bar{g}=3\left(\sigma_1-\frac{3}{2}g-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{g}\right),$$

где $g=(a+b+c)/3$ — аффикс точки пересечения медиан треугольника ABC (или, что то же самое, точка пересечения медиан треугольника PQR).

Но так как $a+b+c=\sigma_1$, то сумму h' можно преобразовать следующим образом:

$$h'=3\left(\sigma_1-\frac{3}{2}\frac{\sigma_1}{3}-\frac{1}{2}\sigma_2\frac{\bar{\sigma}_1}{3}\right)=3\left(\frac{\sigma_1}{2}-\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_1}{6}\right)=\frac{1}{2}(3\sigma_1-\sigma_2\bar{\sigma}_1).$$

Докажем, что h' есть аффикс ортоцентра треугольника $A_hB_hC_h$, образованного основаниями высот данного треугольника. Уравнения BC и высоты из A на BC имеют вид:

$$z+bc\bar{z}=b+c,$$

$$z-bc\bar{z}=a-\frac{bc}{a}.$$

Складывая, найдем аффикс a_h точки A_h:

$$a_h=\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\frac{bc}{a}\right),$$

и аналогично

$$b_h=\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\frac{ca}{b}\right),\quad c_h=\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\frac{ab}{c}\right).$$

Угловой коэффициент B_hC_h равен

$$\frac{b_h-c_h}{\bar{b}_h-\bar{c}_h}=\frac{\frac{ab}{c}-\frac{ac}{b}}{\frac{c}{ab}-\frac{b}{ac}}=\frac{\frac{a(b^2-c^2)}{bc}}{\frac{c^2-b^2}{abc}}=-a^2.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины A_h на сторону B_hC_h:

$$z-\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\frac{bc}{a}\right)=a^2\left[\bar{z}-\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}_1-\frac{a}{bc}\right)\right],$$

или

$$z-a^2\bar{z}=\frac{1}{2}\sigma_1-\frac{bc}{2a}-\frac{1}{2}a^2\bar{\sigma}_1+\frac{a^3}{2bc},$$

или

$$z-a^2\bar{z}=\frac{1}{2}\sigma_1-\frac{1}{2}a^2\bar{\sigma}_1+\frac{a^4-b^2c^2}{2\sigma_3}. \tag{35}$$

Аналогично записывается уравнение высоты из B_h на C_hA_h:

$$z-b^2\bar{z}=\frac{1}{2}\sigma_1-\frac{1}{2}b^2\bar{\sigma}_1+\frac{b^4-c^2a^2}{2\sigma_3}. \tag{36}$$

Вычитая почленно из уравнения (35) уравнение (36), получим

$$(b^2-a^2)\bar{z}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\bar{\sigma}_1-\frac{b^4-a^4+c^2(b^2-a^2)}{2\sigma_3}$$

или, сокращая на b^2-a^2,

$$\bar{z}=\bar{h}'=\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1-\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sigma_3}=\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1-\frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{2\sigma_3}=\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1-\frac{\sigma_1^2}{2\sigma_3}+\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=$$
$$=\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1-\frac{\bar{\sigma}_2\sigma_1}{2}+\bar{\sigma}_1=\frac{3}{2}\bar{\sigma}_1-\frac{\bar{\sigma}_2\sigma_1}{2}=\frac{1}{2}(3\bar{\sigma}_1-\sigma_1\bar{\sigma}_2)$$

и, следовательно,

$$h'=\frac{1}{2}(3\sigma_1-\bar{\sigma}_1\sigma_2).$$

Теперь составим уравнение суппорта найденной равнодействующей. Так как указанные девять сил выходят по три из одной точки, то их равнодействующая равна сумме трех сил:

$$\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3},$$
$$\overrightarrow{QQ'}=\overrightarrow{QQ_1}+\overrightarrow{QQ_2}+\overrightarrow{QQ_3},$$
$$\overrightarrow{RR'}=\overrightarrow{RR_1}+\overrightarrow{RR_2}+\overrightarrow{RR_3},$$

отложенных соответственно от точек P, Q, R. Аффикс p' точки P' найдем из соотношения

$$p'-p=\sigma_1-\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{p},$$

откуда находим p', и аналогично аффиксы точек Q' и R':

$$p' = \sigma_1 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} \sigma_2 \bar{p},$$

$$q' = \sigma_1 - \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} \sigma_2 \bar{q},$$

$$r' = \sigma_1 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} \sigma_2 \bar{r}.$$

Замечание. Если на плоскости (будем считать ее ориентированной введением прямоугольной системы координат) задана совокупность сил $\overrightarrow{A_kB_k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), то главный вектор их равнодействующей находится как сумма свободных векторов:

$$\boldsymbol{K} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_kB_k}.$$

Суппорт суммы сил есть геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{mom}_M \overrightarrow{A_kB_k} = 0.$$

Так как на плоскости моментом силы $\boldsymbol{F}$ естественно считать смешанное произведение

$$\operatorname{mom}_M \boldsymbol{F} = \overrightarrow{MT}\boldsymbol{F},$$

где T — точка приложения силы $\boldsymbol{F}$, то уравнение суппорта системы сил $\overrightarrow{A_kB_k}$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_k & a'_k & 1 \\ b_k & b'_k & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{37}$$

где $(a_k, a'_k) = A_k$, $(b_k, b'_k) = B_k$.

Уравнение (37) есть, вообще говоря, уравнение первой степени, следовательно, (37), вообще говоря, — уравнение прямой (левая часть соотношения (37) равна нулю тогда и только тогда, когда главный вектор системы сил равен нулю).

Уравнение суппорта суммы сил $\overrightarrow{A_kB_k}$ можно записать и в другом виде, вводя *аффиксы* a_k и b_k точек A_k и B_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a_k & \bar{a}_k & 1 \\ b_k & \bar{b}_k & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Применяя последнее уравнение к данной задаче, будем иметь

$$\begin{vmatrix} z & \bar z & 1 \\ p & \bar p & 1 \\ p' & \bar p' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & p & \sigma_1 - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}\sigma_2\bar p \\ \bar z & \bar p & \bar\sigma_1 - \frac{1}{2}\bar p - \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & p & \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar p \\ \bar z & \bar p & \bar\sigma_1 - \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= z\left(\frac{3}{2}\bar p - \bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p\right) + \bar z\left(-\frac{3}{2}p + \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar p\right) +$$

$$+ p\bar\sigma_1 - \bar p\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\bar p^2 - \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p^2.$$

Складывая три аналогичных выражения, полученных из него заменой p на q, а затем q на r, и приравнивая эту сумму нулю, получим уравнение суппорта в виде (следует еще заметить, что $p+q+r=a+b+c=\sigma_1$)

$$z\left(\frac{3}{2}\bar\sigma_1 - 3\bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\bar\sigma_2\sigma_1\right) + \bar z\left(-\frac{3}{2}\sigma_1 + 3\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar\sigma_1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_2(\bar p^2 + \bar q^2 + \bar r^2) - \frac{1}{2}\bar\sigma_2(p^2+q^2+r^2) = 0,$$

или

$$\left(-\frac{3}{2}\bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_1\bar\sigma_2\right)z + \left(\frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\bar\sigma_1\sigma_2\right)\bar z +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_2(\bar p^2 + \bar q^2 + \bar r^2) - \frac{1}{2}\bar\sigma_2(p^2+q^2+r^2) = 0,$$

или

$$(3\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_2)z - (3\sigma_1 - \bar\sigma_1\sigma_2)\bar z + \bar\sigma_2(p^2+q^2+r^2) - \sigma_2(\bar p^2 + \bar q^2 + \bar r^2) = 0.$$

Далее находим

$$p^2 = 4c^2 - \frac{ia^2}{2} + \frac{ib^2}{2} + 2ac(i-1) - 2cb(i+1) + ab,$$

$$q^2 = 4a^2 - \frac{ib^2}{2} + \frac{ic^2}{2} + 2ba(i-1) - 2ac(i+1) + bc,$$

$$r^2 = 4b^2 - \frac{ic^2}{2} + \frac{ia^2}{2} + 2cb(i-1) - 2ba(i+1) + ca,$$

и, значит,

$$p^2 + q^2 + r^2 = 4(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 3\sigma_2 = 4\sigma_1^2 - 11\sigma_2.$$

Отсюда следует, что

$$\bar p^2 + \bar q^2 + \bar r^2 = 4\bar\sigma_1^2 - 11\bar\sigma_2$$

и уравнение суппорта принимает вид

$$(3\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_2)z - (3\sigma_1 - \bar\sigma_1\sigma_2)\bar z + \bar\sigma_2(4\sigma_1^2 - 11\sigma_2) - \sigma_2(4\bar\sigma_1^2 - 11\bar\sigma_2) = 0$$

или

$$(3\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_2)z - (3\sigma_1 - \sigma_2\bar\sigma_1)\bar z + 4(\sigma_1^2\bar\sigma_2 - \sigma_2\bar\sigma_1^2) = 0. \qquad (30)$$

Подставляя в левую часть вместо z аффикс конца направленного отрезка $4\overrightarrow{OH}$, т. е. $4\sigma_1$, получим

$$4(3\bar{\sigma}_1-\sigma_1\bar{\sigma}_2)\sigma_1-4(3\sigma_1-\sigma_2\bar{\sigma}_1)\bar{\sigma}_1+4\sigma_1^2\bar{\sigma}_2-4\sigma_2\bar{\sigma}_1^2=$$
$$=12\bar{\sigma}_1\sigma_1-4\sigma_1^2\bar{\sigma}_2-12\sigma_1\bar{\sigma}_1+4\sigma_2\bar{\sigma}_1^2+4\sigma_1^2\bar{\sigma}_2-4\sigma_2\bar{\sigma}_1^2\equiv 0,$$

т. е. суппорт равнодействующей проходит через конец направленного стрезка $4\overrightarrow{OH}$.

2°. Теперь предположим, что ориентации квадратов $\overrightarrow{A_1B_2C'C''}$, $\overrightarrow{B_1C_2A'A''}$, $\overrightarrow{C_1A_2B'B''}$ одинаковы, но противоположны ориентациям каждого из квадратов: $\overrightarrow{BCA_1A_2}$, $\overrightarrow{CAB_1B_2}$, $\overrightarrow{ABC_1C_2}$.

Чтобы не усложнять рис. 16, на нем построены только центры P^*, Q^*, R^* квадратов $\overrightarrow{A_1B_2C'C''}$, $\overrightarrow{B_1C_2A'A''}$, $\overrightarrow{C_1A_2B'B''}$; точки P^*, Q^*, R^* симметричны соответственно точкам P, Q и R относительно A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2. На том же рис. 16 построены только три из девяти сил, именно построены силы $\overrightarrow{P^*P_1^*}$, $\overrightarrow{P^*P_2}$, $\overrightarrow{P^*P_3^*}$, где P_1^*, P_2^*, P_3^* — ортогональные проекции точки P^* на стороны BC, CA, AB.

Аффикс p^* точки P^* будет

$$p^*=b_2+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_2A_1}+\frac{i}{2}\overrightarrow{B_2A_1}=$$
$$=b_2+\frac{1}{2}(a_1-b_2)+\frac{i}{2}(a_1-b_2)=\frac{1+i}{2}a_1+\frac{1-i}{2}b_2=$$
$$=\frac{1+i}{2}[(1+i)c-ib]+\frac{1-i}{2}[ia+(1-i)c]=\frac{1-i}{2}b+\frac{1+i}{2}a.$$

Аналогично

$$q^*=\frac{1-i}{2}c+\frac{1+i}{2}b,$$
$$r^*=\frac{1-i}{2}a+\frac{1+i}{2}c,$$

где q^* и r^* — аффиксы точек Q^* и R^*. Заметим, что и в этом случае

$$p^*+q^*+r^*=a+b+c=\sigma_1.$$

Теперь из уравнений прямых BC и $P^*P_1^*$:

$$z+bc\bar{z}=b+c,$$
$$z-bc\bar{z}=p^*-bc\bar{p}^*,$$

находим аффикс p_1^* точки P_1^*:

$$p_1^*=\frac{1}{2}(b+c+p^*-bc\bar{p}^*),$$

и, значит,

$$\overrightarrow{P^*P_1^*}=p_1^*-p^*=\frac{1}{2}(b+c-p^*-bc\bar{p}^*).$$

Аналогично

$$\overrightarrow{P^*P_2^*} = \frac{1}{2}(c + a - p^* - ca\bar{p}^*),$$

$$\overrightarrow{P^*P_3^*} = \frac{1}{2}(a + b - p^* - ab\bar{p}^*),$$

и, следовательно,

$$\overrightarrow{P^*P_1^*} + \overrightarrow{P^*P_2^*} + \overrightarrow{P^*P_3^*} = \sigma_1 - \frac{3}{2}p^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{p}^*$$

и

$$\overrightarrow{Q^*Q_1^*} + \overrightarrow{Q^*Q_2^*} + \overrightarrow{Q^*Q_3^*} = \sigma_1 - \frac{3}{2}q^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{q}^*,$$

$$\overrightarrow{R^*R_1^*} + \overrightarrow{R^*R_2^*} + \overrightarrow{R^*R_3^*} = \sigma_1 - \frac{3}{2}r^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{r}^*,$$

и, значит, главный вектор суммы девяти сил $\overrightarrow{P^*P_1^*}$, $\overrightarrow{P^*P_2^*}$, ... будет равен

$$\zeta = 3\sigma_1 - \frac{3}{2}(p^* + q^* + r^*) - \frac{1}{2}\sigma_2(\bar{p}^* + \bar{q}^* + \bar{r}^*) =$$

$$= 3\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{\sigma}_1 = \frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2}(3\sigma_1 - \sigma_2\bar{\sigma}_1) = h',$$

где h' — аффикс ортоцентра треугольника $A_hB_hC_h$.

Рассмотрим, как и в случае п. 1°, суммы девяти сил, взятых по три:

$$\overrightarrow{P^*P'^*} = \overrightarrow{P^*P_1^*} + \overrightarrow{P^*P_2^*} + \overrightarrow{P^*P_3^*},$$

$$\overrightarrow{Q^*Q'^*} = \overrightarrow{Q^*Q_1^*} + \overrightarrow{Q^*Q_2^*} + \overrightarrow{Q^*Q_3^*},$$

$$\overrightarrow{R^*R'^*} = \overrightarrow{R^*R_1^*} + \overrightarrow{R^*R_2^*} + \overrightarrow{R^*R_3^*}.$$

Найдем аффикс p'^* точки P'^*:

$$\overrightarrow{P^*P'^*} = p'^* - p^* = \sigma_1 - \frac{3}{2}p^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{p}^*,$$

отсюда находим p'^*, и аналогично q'^* и r'^*:

$$p'^* = \sigma_1 - \frac{1}{2}p^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{p}^*,$$

$$q'^* = \sigma_1 - \frac{1}{2}q^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{q}^*,$$

$$r'^* = \sigma_1 - \frac{1}{2}r^* - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{r}^*.$$

Уравнение суппорта равнодействующей имеет вид

$$\begin{vmatrix} z & p^* & p'^* \\ \bar{z} & \bar{p}^* & \bar{p}'^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & q^* & q'^* \\ \bar{z} & \bar{q}^* & \bar{q}'^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & r^* & r'^* \\ \bar{z} & \bar{r}^* & \bar{r}'^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} z & p^* & p'^* \\ \bar z & \bar p^* & \bar p'^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & p^* & \sigma_1-\frac{1}{2}p^*-\frac{1}{2}\sigma_2\bar p^* \\ \bar z & \bar p^* & \bar\sigma_1-\frac{1}{2}\bar p^*-\frac{1}{2}\bar\sigma_2 p^* \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & p^* & \sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2\bar p^* \\ \bar z & \bar p^* & \bar\sigma_1-\frac{1}{2}\bar\sigma_2 p^* \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\bar p^* - \bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p^*\right) z + \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar p^* - \frac{3}{2}p^*\right)\bar z +$$

$$+ p^*\bar\sigma_1 - \bar p^*\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\bar p^{*2} - \frac{1}{2}\bar\sigma_2 p^{*2}.$$

Записав еще два аналогичных выражения, складывая их и приравнивая результат нулю, получим уравнение суппорта в случае п. 2°:

$$\left(\frac{3}{2}\bar\sigma_1 - 3\bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\bar\sigma_2\sigma_1\right) z + \left(3\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar\sigma_1 - \frac{3}{2}\sigma_1\right)\bar z +$$

$$+ \sigma_1\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\left(\bar p^{*2} + \bar q^{*2} + \bar r^{*2}\right) - \frac{1}{2}\bar\sigma_2\left(p^{*2} + q^{*2} + r^{*2}\right) = 0$$

или

$$(3\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_2) z - (3\sigma_1 - \bar\sigma_1\sigma_2)\bar z +$$

$$+ \bar\sigma_2\left(p^{*2} + q^{*2} + r^{*2}\right) - \sigma_2\left(\bar p^{*2} + \bar q^{*2} + \bar r^{*2}\right) = 0.$$

Далее,

$$p^{*2} + q^{*2} + r^{*2} = \left(\frac{1-i}{2} b + \frac{1+i}{2} a\right)^2 + \left(\frac{1-i}{2} c + \frac{1+i}{2} b\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1-i}{2} a + \frac{1+i}{2} c\right)^2 = -\frac{i}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca +$$

$$+ \frac{i}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \sigma_2,$$

$$\bar\sigma_2\left(p^{*2} + q^{*2} + r^{*2}\right) = \bar\sigma_2\sigma_2.$$

Поэтому

$$\sigma_2\left(\bar p^{*2} + \bar q^{*2} + \bar r^{*2}\right) = \sigma_2\bar\sigma_2,$$

и, значит, уравнение суппорта принимает вид

$$(3\bar\sigma_1 - \sigma_1\bar\sigma_2) z - (3\sigma_1 - \bar\sigma_1\sigma_2)\bar z = 0,$$

это и есть уравнение прямой.

Пример 14. Пусть P, Q, R — ортогональные проекции точки M на стороны BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 17). Обозначим через A', B', C' точки, полученные инверсией середин A_0, B_0, C_0 отрезков MA, MB, MC относительно окружности (PQR), а через A'', B'', C'' треугольник, образованный полярами точек A_0, B_0, C_0 относительно той же окружности (PQR). Доказать, что

$$\overline{A'B'C'}^2 = \frac{1}{4}\overline{A''B''C''}\cdot\overline{PQR}.$$

При каком необходимом и достаточном условии треугольники $\overline{A'B'C'}$ и $\overline{PQR}$ имеют противоположную ориентацию?

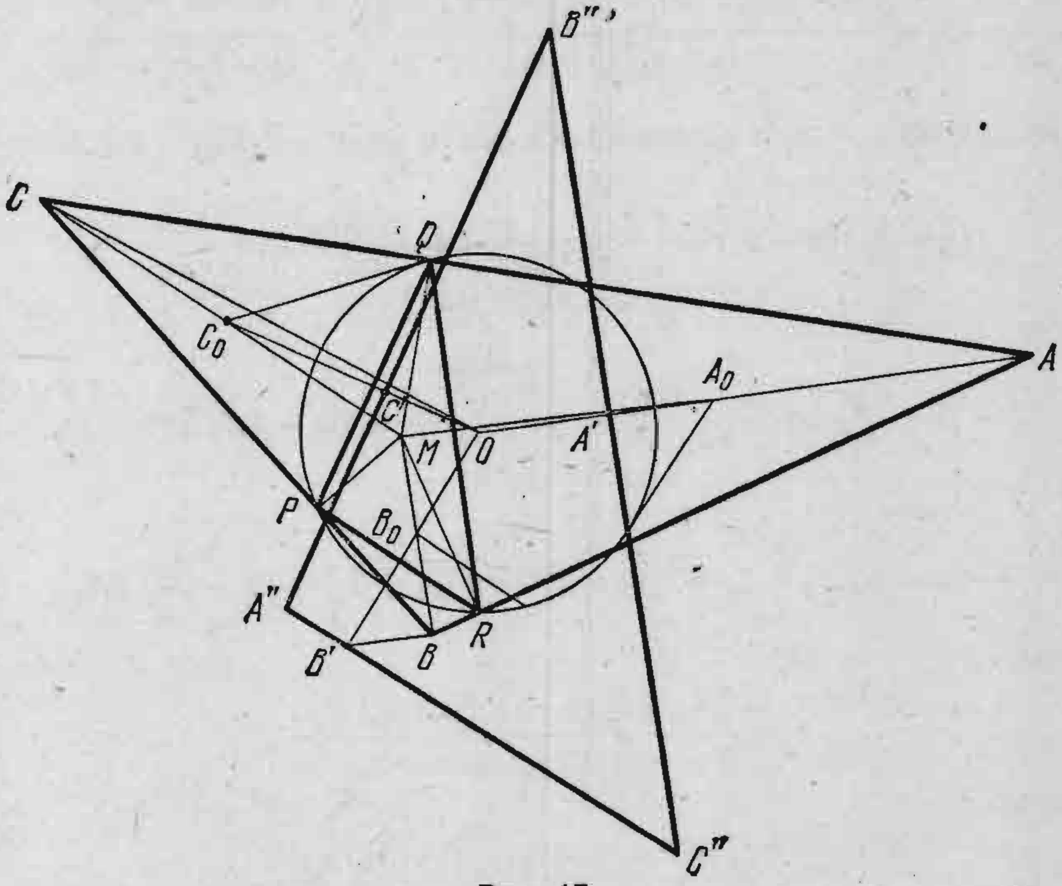


Рис. 17.

Решение. Примем окружность (PQR) за единичную окружность. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек P, Q, R, а μ — аффикс точки M.

Угловой коэффициент прямой MP равен

$$\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1},$$

и, значит, угловой коэффициент прямой BC будет равен

$$-\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1}$$

и уравнение прямой BC будет иметь вид

$$z - z_1 = -\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1). \tag{40}$$

Уравнение CA:

$$z - z_2 = -\frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2}(\bar{z} - \bar{z}_2). \tag{41}$$

Вычитая почленно из уравнения (40) уравнение (41), найдем комплексное число $\bar{c}$, сопряженное аффиксу c точки C:

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2} - \frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1}\right)\bar{z} + \bar{z}_1\frac{\mu - z_1}{\bar{\mu} - \bar{z}_1} - \bar{z}_2\frac{\mu - z_2}{\bar{\mu} - \bar{z}_2}$$

или

$$z_2 - z_1 = \frac{(z_2 - z_1)\left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\right)}{(\mu - \bar{z}_1)(\mu - \bar{z}_2)}\bar{z} + \frac{(z_2 - z_1)\frac{\mu\bar{\mu} - 1}{z_1 z_2}}{(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2)}.$$

Сокращая на $z_2 - z_1$ и умножая обе части на $(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2)$, получим

$$(\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2) = \left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\right)\bar{z} + \frac{\mu\bar{\mu} - 1}{z_1 z_2},$$

откуда

$$\left(-\bar{\mu} - \frac{\mu}{z_1 z_2} + \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}\right)\bar{z} = (\bar{\mu} - \bar{z}_1)(\bar{\mu} - \bar{z}_2) - \bar{z}_1\bar{z}_2(\mu\bar{\mu} - 1),$$

или

$$(-\bar{\mu} - \mu\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2)\bar{z} = \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (2 - \mu\bar{\mu})\bar{z}_1\bar{z}_2,$$

откуда

$$\bar{c} = \frac{\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (2 - \mu\bar{\mu})\bar{z}_1\bar{z}_2}{-\bar{\mu} - \mu\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2},$$

и, значит,

$$c = \frac{\mu^2 - \mu(z_1 + z_2) + (2 - \mu\bar{\mu})z_1 z_2}{-\mu - \bar{\mu}z_1 z_2 + z_1 + z_2}$$

или

$$c = \frac{-\mu^2 + \mu(z_1 + z_2) + (\mu\bar{\mu} - 2)z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu}z_1 z_2 - z_1 - z_2}.$$

Аффикс c_0 середины отрезка MC будет

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{-\mu^2 + \mu(z_1 + z_2) + (\mu\bar{\mu} - 2)z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu}z_1 z_2 - (z_1 + z_2)}\right) = \frac{(\mu\bar{\mu} - 1)z_1 z_2}{\mu + \bar{\mu}z_1 z_2 - z_1 - z_2},$$

а аффикс c' точки C', полученной из C_0 инверсией относительно окружности (PQR):

$$c' = \frac{1}{\bar{c}_0} = \frac{\bar{\mu} + \mu\bar{z}_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2}{(\mu\bar{\mu} - 1)\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\mu + \bar{\mu}z_1 z_2 - z_1 - z_2}{\mu\bar{\mu} - 1}.$$

Аналогично находятся аффиксы a' и b' точек A' и B':

$$a' = \frac{\mu + \bar{\mu}z_2 z_3 - z_2 - z_3}{\mu\bar{\mu} - 1},$$

$$b' = \frac{\mu + \bar{\mu}z_3 z_1 - z_3 - z_1}{\mu\bar{\mu} - 1}.$$

Теперь находим

$$\overline{A'B'C'} =$$

$$= \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a' & \bar a' & 1 \\ b' & \bar b' & 1 \\ c' & \bar c' & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4(\mu\bar\mu-1)^2}\begin{vmatrix} \mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3 & \bar\mu+\mu\bar z_2\bar z_3-\bar z_2-\bar z_3 & 1 \\ \mu+\bar\mu z_3z_1-z_3-z_1 & \bar\mu+\mu\bar z_3\bar z_1-\bar z_3-\bar z_1 & 1 \\ \mu+\bar\mu z_1z_2-z_1-z_2 & \bar\mu+\mu\bar z_1\bar z_2-\bar z_1-\bar z_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4(\mu\bar\mu-1)^2}\begin{vmatrix} \bar\mu z_2z_3-z_2-z_3 & \mu\bar z_2\bar z_3-\bar z_2-\bar z_3 & 1 \\ \bar\mu z_3z_1-z_3-z_1 & \mu\bar z_3\bar z_1-\bar z_3-\bar z_1 & 1 \\ \bar\mu z_1z_2-z_1-z_2 & \mu\bar z_1\bar z_2-\bar z_1-\bar z_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4(\mu\bar\mu-1)^2}\begin{vmatrix} \bar\mu\sigma_3\bar z_1-\sigma_1+z_1 & \mu\bar\sigma_3 z_1-\bar\sigma_1+\bar z_1 & 1 \\ \bar\mu\sigma_3\bar z_2-\sigma_1+z_2 & \mu\bar\sigma_3 z_2-\bar\sigma_1+\bar z_2 & 1 \\ \bar\mu\sigma_3\bar z_3-\sigma_1+z_3 & \mu\bar\sigma_3 z_3-\bar\sigma_1+\bar z_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4(\mu\bar\mu-1)^2}\begin{vmatrix} \bar\mu\sigma_3\bar z_1+z_1 & \mu\bar\sigma_3 z_1+\bar z_1 & 1 \\ \bar\mu\sigma_3\bar z_2+z_2 & \mu\bar\sigma_3 z_2+\bar z_2 & 1 \\ \bar\mu\sigma_3\bar z_3+z_3 & \mu\bar\sigma_3 z_3+\bar z_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4(\mu\bar\mu-1)^2}\left[\mu\bar\mu\sigma_3\bar\sigma_3\begin{vmatrix} \bar z_1 & z_1 & 1 \\ \bar z_2 & z_2 & 1 \\ \bar z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1 \\ z_2 & \bar z_2 & 1 \\ z_3 & \bar z_3 & 1 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= \frac{i(1-\mu\bar\mu)}{4(1-\mu\bar\mu)^2}\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1 \\ z_2 & \bar z_2 & 1 \\ z_3 & \bar z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\overline{PQR}}{1-\mu\bar\mu}.$$

Далее, угловой коэффициент прямой OA_0:

$$\varkappa_{OA_0} = \frac{(\mu\bar\mu-1)z_2z_3}{\mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3} : \frac{(\mu\bar\mu-1)\bar z_2\bar z_3}{\bar\mu+\mu\bar z_2\bar z_3-\bar z_2-\bar z_3} =$$

$$= \frac{(\mu\bar\mu-1)z_2z_3}{\mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3} : \frac{\mu\bar\mu-1}{\mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3} = z_2z_3,$$

поэтому уравнения поляр точек A_0 и B_0 относительно окружности (PQR) как прямых, проходящих через точки A' и B' соответственно и перпендикулярных прямым OA' и OB', будут

$$z - \frac{\mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3}{\mu\bar\mu-1} = -z_2z_3\left(\bar z - \frac{\bar\mu+\mu\bar z_2\bar z_3-\bar z_2-\bar z_3}{\mu\bar\mu-1}\right),$$

$$z - \frac{\mu+\bar\mu z_3z_1-z_3-z_1}{\mu\bar\mu-1} = -z_3z_1\left(\bar z - \frac{\bar\mu+\mu\bar z_3\bar z_1-\bar z_3-\bar z_1}{\mu\bar\mu-1}\right).$$

Аффикс c'' точки C'' их пересечения найдем из уравнения

$$-\frac{1}{z_2z_3}\left(z - \frac{\mu+\bar\mu z_2z_3-z_2-z_3}{\mu\bar\mu-1}\right) + \frac{\bar\mu+\mu\bar z_2\bar z_3-\bar z_2-\bar z_3}{\mu\bar\mu-1} =$$

$$= -\frac{1}{z_3z_1}\left(z - \frac{\mu+\bar\mu z_3z_1-z_3-z_1}{\mu\bar\mu-1}\right) + \frac{\bar\mu+\mu\bar z_3\bar z_1-\bar z_3-\bar z_1}{\mu\bar\mu-1}$$

или

$$-\frac{z}{z_2z_3}+2\frac{\mu+\bar{\mu}z_2z_3-z_2-z_3}{z_2z_3(\mu\bar{\mu}-1)}=-\frac{z}{z_3z_1}+2\frac{\mu+\bar{\mu}z_3z_1-z_3-z_1}{z_3z_1(\mu\bar{\mu}-1)},$$

$$\frac{(z_2-z_1)z}{\sigma_3}=\frac{2}{\mu\bar{\mu}-1}\left[\frac{\mu}{z_3}\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right)+\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_1}\right],$$

откуда

$$c''=\frac{2}{\mu\bar{\mu}-1}(\mu-z_3),$$

и аналогично

$$a''=\frac{2}{\mu\bar{\mu}-1}(\mu-z_1),$$

$$b''=\frac{2}{\mu\bar{\mu}-1}(\mu-z_2),$$

так что

$$\overline{A''B''C''}=\frac{i}{4}\frac{4}{(\mu\bar{\mu}-1)^2}\begin{vmatrix}\mu-z_1 & \bar{\mu}-\bar{z}_1 & 1\\ \mu-z_2 & \bar{\mu}-\bar{z}_2 & 1\\ \mu-z_3 & \bar{\mu}-\bar{z}_3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{4}{(\mu\bar{\mu}-1)^2}\cdot\frac{i}{4}\begin{vmatrix}z_1 & \bar{z}_1 & 1\\ z_2 & \bar{z}_2 & 1\\ z_3 & \bar{z}_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{4}{(\mu\bar{\mu}-1)^2}\overline{PQR}.$$

Итак,

$$\overline{A'B'C'}=\frac{\overline{PQR}}{1-\mu\bar{\mu}},\quad \overline{A''B''C''}=\frac{4}{(1-\mu\bar{\mu})^2}\overline{PQR}.$$

Отсюда

$$\overline{A'B'C'}^2=\frac{\overline{PQR}^2}{(1-\mu\bar{\mu})^2}=\frac{1}{4}\overline{A''B''C''}\cdot\overline{PQR}.$$

Треугольники $\overrightarrow{A'B'C'}$ и $\overrightarrow{PQR}$ имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда $1-\mu\bar{\mu}>0$, т. е. степень точки M относительно окружности (PQR) отрицательна, т. е. тогда и только тогда, когда точка M лежит внутри окружности (PQR). На рис. 17 точка M лежит внутри окружности (PQR) и действительно $\overrightarrow{A'B'C'}\downarrow\downarrow\overrightarrow{PQR}$.

Пример 15. Через произвольную точку P окружности (ABC), описанной около треугольника ABC, проводятся прямые, параллельные сторонам BC, CA, AB этого треугольника. Пусть A', B', C' — соответственно вторые точки пересечения этих прямых с окружностью (ABC). Обозначим через A'', B'', C'' точки, симметричные точкам A, B, C относительно прямых $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

1°. Доказать, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A''B''C''}$ конгруэнтны, но имеют противоположную ориентацию.

2°. Доказать, что $OO''=PH$, где O и O'' — центры окружностей (ABC) и $(A''B''C'')$, а H — ортоцентр треугольника ABC (рис. 18).

Решение. Первый вариант. 1°. Примем окружность (ABC) за единичную, а точке P припишем аффикс 1 (т. е. P — единичная точка). Тогда аффиксы a', b', c' точек A', B', C' будут

$$a' = z_2 z_3, \quad b' = z_3 z_1, \quad c' = z_1 z_2,$$

где z_1, z_2, z_3 — аффиксы вершин A, B, C треугольника. Угловой коэффициент прямой $B'C'$ будет

$$\frac{z_1 z_2 - z_1 z_3}{\bar z_1 \bar z_2 - \bar z_1 \bar z_3} = \frac{z_1 (z_2 - z_3)}{\frac{1}{z_1}\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right)} = $$

$$= -z_1^2 z_2 z_3 = -z_1 \sigma_3.$$

Уравнение прямой $B'C'$ будет иметь вид

$$z - z_1 z_3 = -z_1 \sigma_3 (\bar z - \bar z_1 \bar z_3)$$

или

$$z + z_1 \sigma_3 \bar z = z_1 z_2 + z_1 z_3. \quad (42)$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую $B'C'$:

$$z - z_1 = z_1 \sigma_3 (\bar z - \bar z_1)$$

или

$$z - z_1 \sigma_3 \bar z = z_1 - \sigma_3. \quad (43)$$

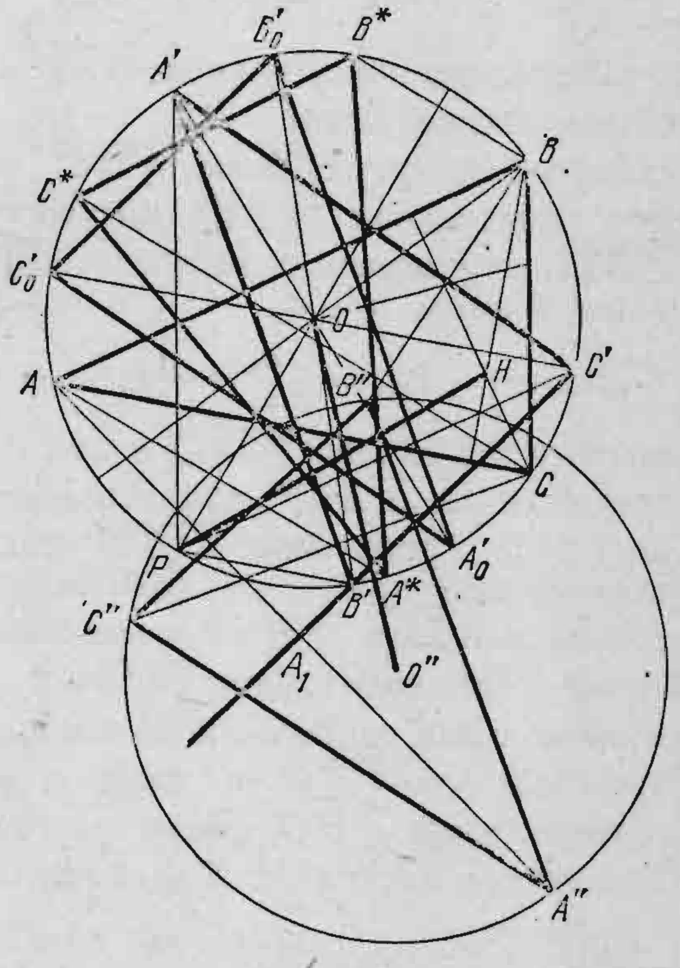


Рис. 18.

Складывая почленно уравнения (42) и (43), находим аффикс a_1 ортогональной проекции A_1 точки A на прямую $B'C'$:

$$a_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_3 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 z_3 + \sigma_2 - \sigma_3).$$

Аффикс a'' точки A'', симметричной точке A относительно $B'C'$, находится из соотношения

$$\frac{z_1 + a''}{2} = a_1,$$

откуда

$$a'' = 2a_1 - z_1 = \sigma_2 - \sigma_3 - z_2 z_3.$$

Аналогично находятся аффиксы b'' и c'' точек B'' и C''

$$b'' = \sigma_2 - \sigma_3 - z_3 z_1, \qquad c'' = \sigma_2 - \sigma_3 - z_1 z_2.$$

Из последних соотношений следует, что точки A'', B'', C'' лежат на окружности $(A''B''C'')$, центр O'' имеет аффикс

$$o'' = \sigma_2 - \sigma_3,$$

а радиус равен 1, так как

$$|a''-o''|=|b''-o''|=|c''-o''|=1$$
$$(|-z_2z_3|=|-z_3z_1|=|-z_1z_2|=1).$$

Рассмотрим треугольник $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$, аффиксы вершин которого соответственно равны $-z_2z_3$, $-z_3z_1$, $-z_1z_2$. Треугольник $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$ симметричен треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$ относительно точки O, а значит, треугольник $\overrightarrow{A''B''C''}$ получается переносом треугольника $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$, определяемым направленным отрезком $\overrightarrow{OT}$, где аффикс τ точки T равен $\sigma_2-\sigma_3$.

Далее $-z_2z_3=-\frac{\sigma_3}{z_1}=-\sigma_3\bar{z}_1$, $-z_3z_1=-\sigma_3\bar{z}_2$, $-z_1z_2=-\sigma_3\bar{z}_3$, поэтому треугольник $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$ получается поворотом вокруг точки O треугольника $\overrightarrow{A^*B^*C^*}$, аффиксы вершин которого $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$, на угол $\arg(-\sigma_3)$. Треугольник $\overrightarrow{A^*B^*C^*}$ симметричен треугольнику $\overrightarrow{ABC}$ относительно прямой OP (действительная ось Ox), поэтому треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A^*B^*C^*}$ равны и имеют противоположную ориентацию. Но треугольник $\overrightarrow{A^*B^*C^*}$ равен треугольнику $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$ и имеет с ним одинаковую ориентацию; треугольник $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$ равен треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$ и имеет с ним одинаковую ориентацию, а треугольник $\overrightarrow{A''B''C''}$ равен треугольнику $\overrightarrow{A_0'B_0'C_0'}$ и имеет с ним одинаковую ориентацию. Следовательно, $\overrightarrow{ABC}\downarrow\uparrow\overrightarrow{A''B''C''}$ и $\triangle ABC=$ $=\triangle A''B''C''$ (знаком $=$ мы обозначаем здесь конгруэнтность).

2°. Аффикс точки O'' равен $o''=\sigma_2-\sigma_3$. Отсюда

$$OO''=|\sigma_2-\sigma_3|=|\sigma_3|\left|\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-1\right|=\left|\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-1\right|=|\bar{\sigma}_1-1|=|\sigma_1-1|=PH.$$

Второй вариант. 1°. Примем окружность (ABC) за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3, p — соответственно аффиксы точек A, B, C, P. За единичную точку примем точку Бутена для треугольника ABC, так что $\sigma_3=1$. Аффиксы a', b', c' точек A', B', C' будут

$$a'=\frac{z_2z_3}{p},\quad b'=\frac{z_3z_1}{p},\quad c'=\frac{z_1z_2}{p}$$

или $(\sigma_3=1)$

$$a'=\bar{p}\bar{z}_1,\quad b'=\bar{p}\bar{z}_2,\quad c'=\bar{p}\bar{z}_3.$$

Угловой коэффициент прямой $B'C'$ будет

$$\frac{b'-c'}{\bar{b}'-\bar{c}'}=\frac{\bar{p}\bar{z}_2-\bar{p}\bar{z}_3}{pz_2-pz_3}=-\frac{1}{z_2z_3p^2}=-\frac{z_1}{p^2}\qquad(\sigma_3=1).$$

Уравнение $B'C'$:

$$z-\bar{p}\bar{z}_2=-z_1\bar{p}^2(\bar{z}-pz_2)$$

или

$$z + z_1\bar{p}^2\bar{z} = \bar{p}\bar{z}_2 + \bar{p}\bar{z}_3. \tag{44}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую $B'C'$:

$$z - z_1 = z_1\bar{p}^2(\bar{z} - \bar{z}_1)$$

или

$$z - z_1\bar{p}^2\bar{z} = z_1 - \bar{p}^2. \tag{45}$$

Складывая почленно уравнения (44) и (45), находим аффикс a_1 проекции A_1 точки A на прямую $B'C'$:

$$a_1 = \frac{1}{2}(z_1 + \bar{p}\bar{z}_2 + \bar{p}\bar{z}_3 - \bar{p}^2).$$

Аффикс a'' точки A'', симметричной точке A относительно $B'C'$ находится из соотношения

$$\frac{z_1 + a''}{2} = a_1,$$

откуда

$$a'' = 2a_1 - z_1 = \bar{p}\bar{z}_2 + \bar{p}\bar{z}_3 - \bar{p}^2;$$

и аналогично

$$b'' = \bar{p}\bar{z}_3 + \bar{p}\bar{z}_1 - \bar{p}^2.$$

Теперь находим

$$a'' - b'' = \bar{p}(\bar{z}_2 - \bar{z}_1),$$

$$\bar{a}'' - \bar{b}'' = p(z_2 - z_1),$$

и, значит,

$$A''B''^2 = (a'' - b'')(\bar{a}'' - \bar{b}'') = p\bar{p}(z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = AB^2,$$

т. е. $A''B'' = AB$. Аналогично доказывается, что $B''C'' = BC$, $C''A'' = CA$, т. е. треугольники ABC и $A''B''C''$ равны.

Для того чтобы доказать, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A''B''C''}$ имеют противоположную ориентацию, достаточно доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{a}'' & 1 \\ z_2 & \bar{b}'' & 1 \\ z_2 & \bar{c}'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & p(z_2 + z_3) - p^2 & 1 \\ z_2 & p(z_3 + z_1) - p^2 & 1 \\ z_3 & p(z_1 + z_3) - p^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & p(\sigma_1 - z_1) & 1 \\ z_2 & p(\sigma_1 - z_2) & 1 \\ z_3 & p(\sigma_1 - z_3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & -pz_1 & 1 \\ z_2 & -pz_2 & 1 \\ z_3 & -pz_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, $\triangle ABC = \triangle A''B''C''$ и $\overrightarrow{ABC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A''B''C''}$.

2°. Из формул

$$a'' = \bar{p}\bar{z}_2 + \bar{p}\bar{z}_3 - \bar{p}^2 = \bar{p}(\bar{\sigma}_1 - \bar{z}_1) - \bar{p}^2 = -\bar{p}\bar{z}_1 + \bar{p}\bar{\sigma}_1 - \bar{p}^2,$$

$$b'' = -\bar{p}\bar{z}_2 + \bar{p}\bar{\sigma}_1 - \bar{p}^2,$$

$$c'' = -\bar{p}\bar{z}_3 + \bar{p}\bar{\sigma}_1 - \bar{p}^2$$

следует, что аффикс o'' центра O'' окружности $(A''B''C'')$ равен

$$o''=\bar{p}\bar{\sigma}_1-\bar{p}^2,$$

а радиус равен 1 $(|-\bar{p}\bar{z}_1|=|-\bar{p}\bar{z}_2|=|-\bar{p}\bar{z}_3|=1)$. Отсюда

$$OO''=|o''|=|\bar{p}\bar{\sigma}_1-\bar{p}^2|=|\bar{p}||\bar{\sigma}_1-\bar{p}|=|\bar{\sigma}_1-\bar{p}|=|\sigma_1-p|=PH.$$

Замечание. Из соотношения $o''=\bar{p}(\bar{\sigma}_1-\bar{p})$ следует, что направленный отрезок $\overrightarrow{OO''}$ эквивалентен направленному отрезку, который получается симметрией в оси Ox направленного отрезка $\overrightarrow{PH}$ и последующего поворота на угол $\arg\bar{p}$ (ось Ox — это прямая, проходящая через O и точку Бутена).

Пример 16. На сторонах BC, CA, AB строятся треугольники $\overrightarrow{A'BC}$, $\overrightarrow{B'CA}$, $\overrightarrow{C'AB}$, которые подобны между собой и имеют одинаковую ориентацию. Пусть P — произвольная точка, лежащая на окружности $(O)=(ABC)$. Направленные отрезки $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ поворачиваются вокруг точки O на углы, соответственно равные $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC})$ (углы ориентированные). Пусть $\overrightarrow{OA''}$, $\overrightarrow{OB''}$, $\overrightarrow{OC''}$ — соответственно повернутые отрезки. Доказать, что центр тяжести G'' треугольника $A''B''C''$ симметричен центру тяжести G треугольника ABC относительно того диаметра окружности (O), который параллелен прямой Симсона, построенной для точки P относительно треугольника ABC.

Решение. Примем окружность $(O)=(ABC)$ за единичную окружность, а точку P за единичную точку. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C. Обозначим через a', b' c' аффиксы точек A', B', C'. Так как треугольники $\overrightarrow{A'BC}$, $\overrightarrow{B'CA}$, $\overrightarrow{C'AB}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию, то, полагая

$$\varphi=(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}), \quad \rho=\frac{CA'}{CB},$$

будем иметь

$$a'=z_3+\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)(z_2-z_3)=\alpha z_2+(1-\alpha)z_3,$$

где $\alpha=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, и аналогичные выражения для b' и c' с тем же значением α:

$$b'=\alpha z_3+(1-\alpha)z_1,$$
$$c'=\alpha z_1+(1-\alpha)z_2.$$

Аффиксы a'', b'', c'' точек A'', B'', C'' будут

$$a''=z_1a', \quad b''=z_2b', \quad c''=z_3c',$$

т. е.

$$a''=z_1z_2\alpha+(1-\alpha)z_1z_3,$$
$$b''=z_2z_3\alpha+(1-\alpha)z_2z_1,$$
$$c''=z_3z_1\alpha+(1-\alpha)z_3z_2.$$

Отсюда находим аффикс g'' центра тяжести треугольника $A''B''C''$:

$$g''=\frac{a''+b''+c''}{3}=\frac{\sigma_2}{3}.$$

Уравнение диаметра окружности (O), параллельного прямой Симсона, построенной для единичной точки P относительно треугольника ABC, имеет вид (см. пример 3)

$$z-\sigma_3\bar{z}=0.$$

Концы этого диаметра имеют аффиксы $\sqrt{\sigma_3}$ ($\sqrt{\sigma_3}$ имеет два значения; каждое из них удовлетворяет уравнению $z-\sigma_3\bar{z}=0$).

Для того чтобы доказать, что точки G и G'' симметричны относительно диаметра $z-\sigma_3\bar{z}=0$, достаточно доказать, что треугольники ODG и ODG'' подобны, но противоположно — ориентированы (D — один из концов диаметра $z-\sigma_3\bar{z}=0$), т. е. что

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ g & \bar{g}'' & 1 \\ \sqrt{\sigma_3} & \sqrt{\bar{\sigma}_3} & 1 \end{vmatrix}=0$$

(для $\sqrt{\sigma_3}$ берется любое из двух его значений, $\sqrt{\bar{\sigma}_3}$ — число, сопряженное этому значению). Имеем

$$\Delta=\sqrt{\bar{\sigma}_3}g-\sqrt{\sigma_3}\bar{g}''=\sqrt{\bar{\sigma}_3}(g-\sigma_3\bar{g}'')=$$

$$=\sqrt{\bar{\sigma}_3}\left(\frac{\sigma_1}{3}-\sigma_3\frac{\bar{\sigma}_2}{3}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\bar{\sigma}_3}\left(\sigma_1-\sigma_3\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)=0.$$

Пример 17. Высоты произвольного треугольника ABC пересекают окружность $(O)=(ABC)$ в точках A_1, B_1, C_1; A', B', C' — точки, симметричные точке P, лежащей на окружности (O), относительно прямых OA, OB, OC; A'', B'', C'' — точки, симметричные точке P относительно прямых OA', OB', OC'; α, β, γ — точки, симметричные точкам A'', B'', C'' относительно прямой OP. Доказать, что точки A_2, B_2, C_2, симметричные точкам α, β, γ относительно касательных к окружности (O) в точках A_1, B_1, C_1, образуют треугольник $A_2B_2C_2$, гомотетичный треугольнику $A_1B_1C_1$, с коэффициентом гомотетии, равным 2, причем центр Q этой гомотетии лежит на окружности (O).

Решение. Примем окружность $(O)=(ABC)$ за единичную окружность, а точку P за единичную точку. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C.

Уравнение прямой BC имеет вид

$$z+z_2z_3\bar{z}=z_2+z_3.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины A на прямую BC:

$$z-z_1=z_2z_3(\bar{z}-\bar{z}_1).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z}=1$ единичной окружности, будем иметь

$$z-z_1=z_2z_3\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_1}\right),\qquad z-z_1=-z_2z_3\frac{z-z_1}{z_1z}.$$

Один из корней этого уравнения $z=z_1$ (аффикс точки A); другой

$$a_1=-\frac{z_2z_3}{z_1}$$

— аффикс точки A_1. Аналогично

$$b_1=-\frac{z_3z_1}{z_2},\qquad c_1=-\frac{z_1z_2}{z_3}.$$

Уравнение прямой OA:

$$z-z_1^2\bar{z}=0,$$

а уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на эту прямую:

$$z-1=-z_1^2(\bar{z}-1).$$

Из этого уравнения и уравнения $z\bar{z}=1$ единичной окружности находим аффикс a' точки A':

$$z-1=-z_1^2\left(\frac{1}{z}-1\right),\qquad z-1=z_1^2\frac{z-1}{z}.$$

Один из корней этого уравнения $z=1$ (аффикс точки P), другой

$$a'=z_1^2$$

— аффикс точки A'. Аналогично

$$b'=z_2^2,\quad c'=z_3^2$$

— аффиксы точек B' и C'

Уравнение прямой OA':

$$z-z_1^4\bar{z}=0,$$

а уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно прямой OA':

$$z-1=-z_1^4(\bar{z}-1).$$

Отсюда и из уравнения $z\bar{z}=1$ единичной окружности найдем аффикс a'' точки A'':

$$z-1=-z_1^4\left(\frac{1}{z}-1\right),\qquad z-1=z_1^4\frac{z-1}{z}.$$

Один из корней этого уравнения $z=1$ (аффикс точки P). Другой

$$a''=z_1^4$$

— аффикс точки A''. Аналогично

$$b'' = z_2^4, \quad c'' = z_3^4,$$

где b'' и c'' — аффиксы точек B'' и C''.

Угловой коэффициент прямой OP равен 1. Значит, уравнение прямой, проходящей через точку A'' перпендикулярно прямой OP, имеет вид

$$z - a'' = -(\bar{z} - \overline{a''}).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z} = 1$ единичной окружности, найдем аффикс λ точки α:

$$z - a'' = -\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a''}\right),$$

$$z - a'' = \frac{z - a''}{a''z}.$$

Один из корней этого уравнения $z = a''$ (аффикс точки A''). Другой

$$\lambda = \frac{1}{a''} = \frac{1}{z_1^4}$$

— аффикс точки α. Аналогично находим аффиксы μ и ν точек β и γ:

$$\mu = \frac{1}{z_2^4}, \quad \nu = \frac{1}{z_3^4}.$$

Угловой коэффициент прямой OA_1 равен

$$\frac{a_1}{\bar{a}_1} = a_1^2 = \frac{z_2^2 z_3^2}{z_1^2},$$

а значит, уравнение касательной к единичной окружности (O) в точке A_1 имеет вид

$$z + \frac{z_2 z_3}{z_1} = -\frac{z_2^2 z_3^2}{z_1^2}\left(\bar{z} + \frac{z_1}{z_2 z_3}\right)$$

или

$$z + \frac{z_2^2 z_3^2}{z_1^2}\bar{z} = -2\frac{z_2 z_3}{z_1}. \qquad (46)$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки α на эту касательную, имеет вид

$$z - \frac{1}{z_1^4} = \frac{z_2^2 z_3^2}{z_1^2}(\bar{z} - z_1^4)$$

или

$$z - \frac{z_2^2 z_3^2}{z_1^2}\bar{z} = \frac{1}{z_1^4} - \sigma_3^2. \qquad (47)$$

Складывая почленно уравнения (46) и (47), находим аффикс a_2^* проекции точки α на эту касательную:

$$a_2^* = -\frac{z_2 z_3}{z_1} - \frac{\sigma_3^2}{2} + \frac{1}{2z_1^4}.$$

Аффикс a_2 точки A_2, симметричной точке α относительно касательной к единичной окружности в точке A_1, определится из соотношения

$$\frac{\lambda_1+a_2}{2}=a_2^*,$$

откуда

$$a_2=2a_2^*-\lambda_1=-2\frac{z_2z_3}{z_1}-\sigma_3^2+\frac{1}{z_1^4}-\frac{1}{z_1^4}=-2\frac{z_2z_3}{z_1}-\sigma_3^2.$$

Аналогично находим аффиксы b_2 и c_2 точек B_2 и C_2:

$$b_2=-2\frac{z_3z_1}{z_2}-\sigma_3^2, \quad c_2=-2\frac{z_1z_2}{z_3}-\sigma_3^2.$$

Из последних соотношений следует, что прямая A_1A_2 проходит через точку Q с аффиксом

$$q=\sigma_3^2,$$

так как середина отрезка A_2Q имеет аффикс:

$$\frac{a_2+q}{2}=-\frac{z_3z_2}{z_1}=a_1,$$

т. е. середина отрезка A_2Q совпадает с точкой A_1. Точка Q лежит на единичной окружности, так как $|q|=1$.

Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 являются соответственно серединами отрезков B_2Q и C_2Q. Итак,

$$\frac{\overrightarrow{QA_2}}{\overrightarrow{QA_1}}=\frac{\overrightarrow{QB_2}}{\overrightarrow{QB_1}}=\frac{\overrightarrow{QC_2}}{\overrightarrow{QC_1}}=2,$$

т. е. треугольник $A_2B_2C_2$ есть образ треугольника $A_1B_1C_1$ при гомотетии с центром Q, лежащим на окружности (ABC), и коэффициентом гомотетии, равным 2.

Пример 18. 1°. Через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника $A_1A_2A_3$, лежащего на ориентированной плоскости, проводятся параллельные между собой прямые, пересекающие данную прямую Δ в точках P_1, P_2, P_3, причем угол *от* прямой Δ *до* прямых A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 равен α (рис. 19).

Через точки P_1, P_2, P_3 проводятся прямые l_1, l_2, l_3, пересекающие соответственно стороны A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, причем углы, отсчитанные *от* прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *до* прямых l_1, l_2, l_3, равны между собой и равны β. Доказать, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник $Q_1Q_2Q_3$, подобный треугольнику $A_1A_2A_3$, причем коэффициент подобия равен

$$\left|\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right|.$$

Рассмотреть частные случаи:

2°. $\beta=\pi-\alpha$.

3°. $\beta=0$.

Решение. 1°. Примем окружность $(O)=(A_1A_2A_3)$ за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A_1, A_2, A_3, а

$$az+\bar{a}\bar{z}=b$$

— уравнение прямой Δ ($a\neq 0$, b — действительное число).

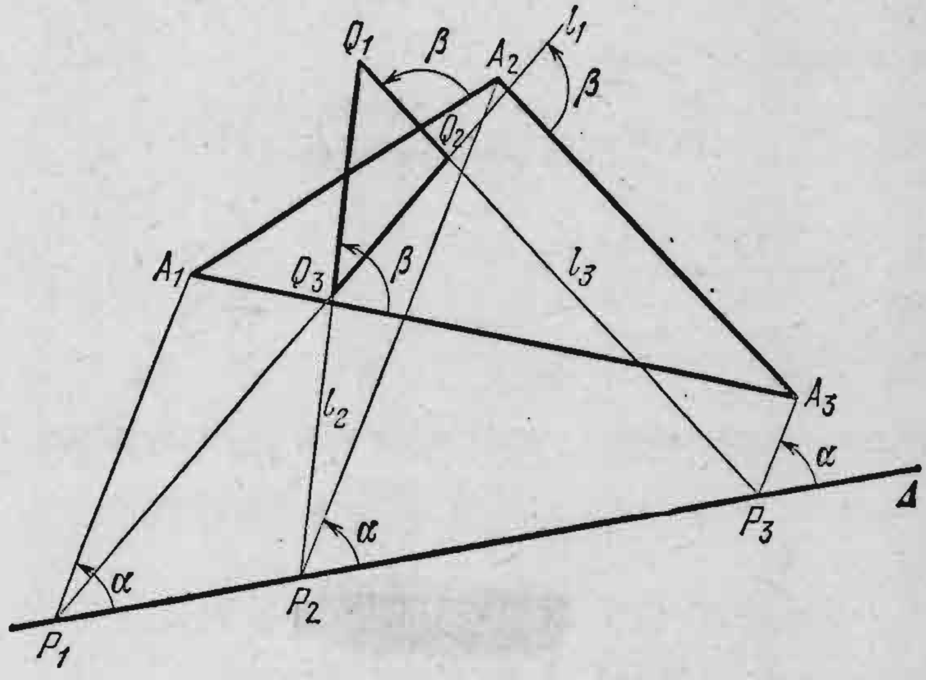


Рис. 19.

Положим

$$\lambda=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha,\qquad \mu=\cos 2\beta+i\sin 2\beta.$$

Уравнение прямой A_1P_1 можно записать в виде

$$a(z-z_1)+\lambda\bar{a}(\bar{z}-\bar{z}_1)=0. \tag{48}$$

В самом деле, угловой коэффициент прямой Δ равен

$$\varkappa=-\frac{\bar{a}}{a},$$

а угловой коэффициент прямой (48) равен

$$\varkappa'=-\frac{\lambda\bar{a}}{a}.$$

Значит,

$$\frac{\varkappa'}{\varkappa}=\lambda,$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}=\sqrt{\lambda}=\cos\alpha+i\sin\alpha,$$

т. е. угол от прямой Δ до прямой (48) равен α.

Если взять другое значение для $\sqrt{\lambda}$:

$$\sqrt{\lambda}=-(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi),$$

то угол от прямой Δ до прямой (48) оказался бы равным $\pi+\alpha$, т. е. был бы сравним с α по модулю π. Из системы уравнений прямых Δ и A_1P_1, т. е. из системы уравнений:

$$az+\bar{a}\bar{z}=b,$$
$$az+\lambda\bar{a}\bar{z}=az_1+\lambda\bar{a}\bar{z}_1,$$

находим аффикс p_1 точки P_1:

$$p_1=\frac{1}{1-\lambda}\left(z_1-\frac{\lambda b}{a}+\lambda\frac{\bar{a}\bar{z}_1}{a}\right).$$

Отсюда

$$\bar{p}_1=\frac{1}{1-\lambda}\left(\bar{z}_1-\frac{\bar{\lambda}b}{\bar{a}}+\bar{\lambda}\frac{az_1}{\bar{a}}\right)=$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{z_1}-\frac{b}{\lambda\bar{a}}+\frac{a\bar{z}_1}{\lambda\bar{a}}\right)=\frac{\lambda}{1-\lambda}\left(-\frac{1}{z_1}+\frac{b}{\lambda\bar{a}}-\frac{az_1}{\lambda\bar{a}}\right).$$

Аналогичные выражения имеют аффиксы p_2 и p_3 точек P_2 и P_3:

$$p_2=\frac{1}{1-\lambda}\left(z_2-\frac{\lambda b}{a}+\lambda\frac{\bar{a}\bar{z}_2}{a}\right),$$
$$p_3=\frac{1}{1-\lambda}\left(z_3-\frac{\lambda b}{a}+\lambda\frac{\bar{a}\bar{z}_3}{a}\right).$$

Далее, уравнение прямой A_2A_3 имеет вид

$$z-z_2=-z_2z_3(\bar{z}-\bar{z}_2),$$

поэтому уравнение прямой l_1 можно записать в виде

$$z-p_1=-\mu z_2z_3(\bar{z}-\bar{p}_1),$$

или

$$z-\frac{1}{1-\lambda}\left(z_1-\frac{\lambda b}{a}+\frac{\lambda\bar{a}}{az_1}\right)=-\mu z_2z_3\left[\bar{z}-\frac{\lambda}{1-\lambda}\left(-\frac{1}{z_1}+\frac{b}{\lambda\bar{a}}-\frac{az_1}{\lambda\bar{a}}\right)\right],$$

или

$$(1-\lambda)(z+\mu z_2z_3\bar{z})=z_1-\frac{\lambda b}{a}+\frac{\lambda\bar{a}}{az_1}-\frac{\lambda\mu z_2z_3}{z_1}+\frac{\mu bz_2z_3}{\bar{a}}-\frac{\mu a\sigma_1}{\bar{a}}. \quad (49)$$

Аналогично записываются уравнения прямых l_2 и l_3:

$$(1-\lambda)(z+\mu z_3z_1\bar{z})=z_2-\frac{\lambda b}{a}+\frac{\lambda\bar{a}}{az_2}-\frac{\lambda\mu z_3z_1}{z_2}+\frac{\mu bz_3z_1}{\bar{a}}-\frac{\mu a\sigma_3}{\bar{a}}, \quad (50)$$
$$(1-\lambda)(z+\mu z_1z_2\bar{z})=z_3-\frac{\lambda b}{a}+\frac{\lambda\bar{a}}{az_3}-\frac{\lambda\mu z_1z_2}{z_3}+\frac{\mu bz_1z_2}{\bar{a}}-\frac{\mu a\sigma_3}{\bar{a}}. \quad (51)$$

Умножая обе части уравнения (49) на $-z_1$, обе части уравнения (50) на z_2 и складывая почленно полученные уравнения будем иметь

$$(1-\lambda)(z_2-z_1)z=$$
$$=z_2^2-z_1^2-\frac{\lambda b}{a}(z_2-z_1)+z_3(z_2-z_1)\lambda\mu-\mu\frac{a}{\bar{a}}(z_2-z_1)\sigma_3,$$

откуда находим аффикс q_3 точки Q_3 пересечения прямых l_1 и l_2:

$$q_3=\frac{z_1+z_2-\frac{\lambda b}{a}+\lambda\mu z_3-\mu\frac{a}{\bar a}\sigma_3}{1-\lambda}=\frac{\sigma_1-\frac{\lambda b}{a}-\mu\frac{a}{\bar a}\sigma_3+(\lambda\mu-1)z_3}{1-\lambda}.$$

Аналогичные выражения имеют аффиксы q_1 и q_2 точек Q_1 и Q_2:

$$q_1=\frac{\sigma_1-\frac{\lambda b}{a}-\mu\frac{a}{\bar a}\sigma_3+(\lambda\mu-1)z_1}{1-\lambda},$$

$$q_2=\frac{\sigma_1-\frac{\lambda b}{a}-\mu\frac{a}{\bar a}\sigma_3+(\lambda\mu-1)z_2}{1-\lambda}.$$

Из последних трех соотношений следует, что точки Q_1, Q_2, Q_3 получаются из точек A_1, A_2, A_3 линейным преобразованием первого рода:

$$q=mz+n,$$

где

$$m=\frac{\lambda\mu-1}{1-\lambda},$$

$$n=\frac{\sigma_1-\frac{\lambda b}{a}-\mu\frac{a}{\bar a}\sigma_3}{1-\lambda},$$

и, значит, треугольники $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ и $\overrightarrow{Q_1Q_2Q_3}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 19); n — аффикс точки O', в которую переходит точка O при этом преобразовании, иначе: $(O')=(Q_1Q_2Q_3)$. Коэффициент подобия равен

$$|m|=\left|\frac{\lambda\mu-1}{1-\lambda}\right|=\frac{|\cos(2\alpha+2\beta)+i\sin(2\alpha+2\beta)-1|}{|1-\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha|}=$$

$$=\frac{|2\sin^2(\alpha+\beta)-2i\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)|}{|2\sin^2\alpha-2i\sin\alpha\cos\alpha|}=$$

$$=\frac{|\sin(\alpha+\beta)|}{|\sin\alpha|}\,\frac{|\sin(\alpha+\beta)-i\cos(\alpha+\beta)|}{|\sin\alpha-i\cos\alpha|}=\left|\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\right|.$$

2°. Если $\beta=\pi-\alpha$ (или $\beta=-\alpha$), то треугольник $Q_1Q_2Q_3$ вырождается в точку. Имеем теорему: если через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника $A_1A_2A_3$, лежащего на ориентированной плоскости, провести параллельные между собой прямые, пересекающие данную прямую Δ в точках P_1, P_2, P_3, причем угол от прямой Δ до прямых A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 равен α, а затем через точки P_1, P_2, P_3 провести прямые l_1, l_2, l_3, пересекающие стороны A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, причем углы от прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 соответственно до прямых l_1, l_2, l_3 равны $-\alpha$, то прямые l_1, l_2, l_3 проходят через одну точку (рис. 20).

В частности, если $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$, получаем теорему об ортополюсе прямой относительно треугольника: если P_1, P_2, P_3 — ортогональные проекции вершин A_1, A_2, A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ на данную прямую Δ, то прямые, проходящие через точки P_1,

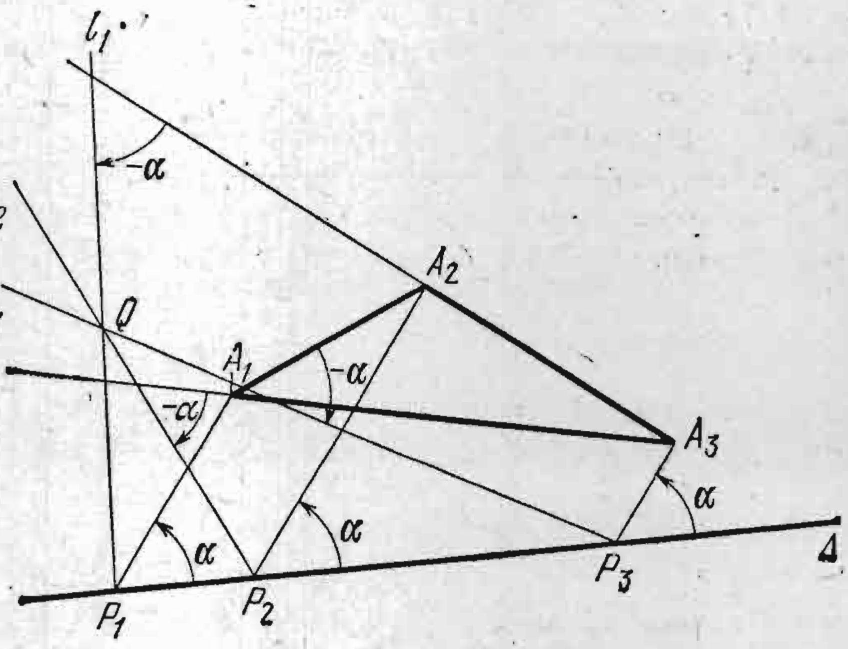


Рис. 20.

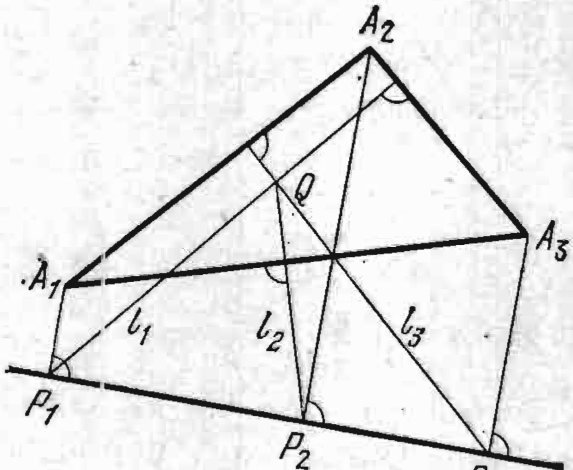


Рис. 21.

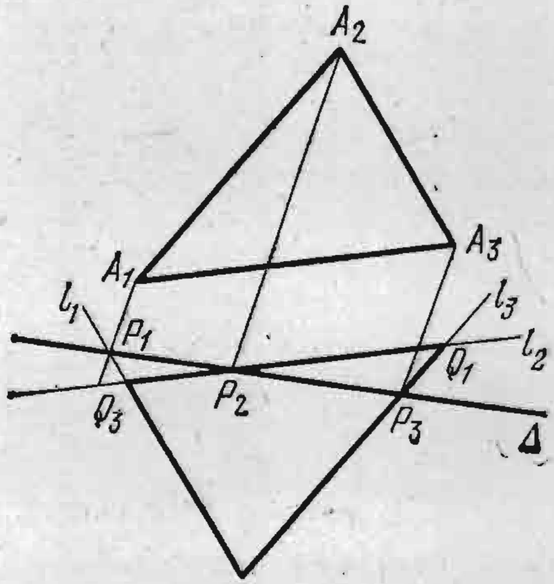


Рис. 22.

P_2, P_3 и соответственно перпендикулярные прямым A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, пересекаются в одной точке Q (называемой *ортополюсом прямой* Δ относительно треугольника $A_1A_2A_3$) (рис. 21).

3°. Пусть $\beta = 0$. Тогда получаем теорему: если через вершины A_1, A_2, A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ провести параллельные между собой прямые, пересекающие данную прямую Δ в точках P_1, P_2,

P_3, а затем через точки P_1, P_2, P_3 провести прямые l_1, l_2, l_3, соответственно параллельные прямым A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, то прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник $\overrightarrow{Q_1Q_2Q_3}$, равный и одинаково ориентированный с треугольником $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ (рис. 22).

Пример 19. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность (O). Обозначим через A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41} середины его сторон A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Пусть δ — какой-нибудь диаметр окружности (O). Обозначим через α_{12}, α_{23}, α_{34}, α_{41} ортогональные проекции точек A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41} на этот диаметр δ. Проведем через точки α_{12}, α_{23}, α_{34}, α_{41} прямые β_{34}, β_{14}, β_{12}, β_{23}, соответственно перпендикулярные прямым A_3A_4,

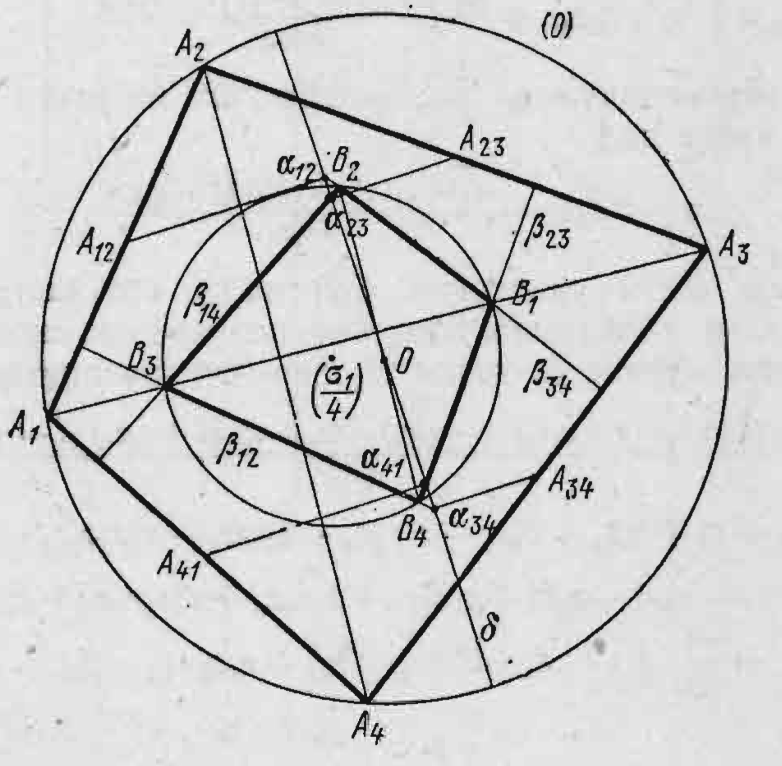


Рис. 23.

A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3. Доказать, что прямые β_{34}, β_{14}, β_{12}, β_{23} образуют четырехугольник $\overrightarrow{B_1B_2B_3B_4}$, подобный данному, но имеющий ориентацию, противоположную ориентации данного четырехугольника $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ (B_1 — точка пересечения прямых β_{23} и β_{34}, B_2 — точка пересечения прямых β_{14} и β_{34}, B_3 — точка пересечения прямых β_{12} и β_{14}, B_4 — точка пересечения прямых β_{12} и β_{23}) (рис. 23).

Решение. Примем окружность (O) за единичную, а ось Ox выберем так, чтобы на ней лежал диаметр δ. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, A_4. Середина A_{12} отрезка A_1A_2 имеет аффикс

$$a_{12} = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

а ее проекция α_{12} на прямую δ (на ось Ox) имеет аффикс

$$\tau_{12}=\frac{a_{12}+\bar{a}_{12}}{2}=\frac{z_1+z_2+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{4}=\frac{(1+z_1z_2)(z_1+z_2)}{4z_1z_2}.$$

Уравнение перпендикуляра β_{34}, опущенного из точки α_{12} на прямую A_3A_4, угловой коэффициент которой равен $-z_3z_4$, имеет вид

$$z-\tau_{12}=z_3z_4(\bar{z}-\bar{\tau}_{12}),$$

или

$$z-\frac{(1+z_1z_2)(z_1+z_2)}{4z_1z_2}=z_3z_4\left[\bar{z}-\frac{(1+z_1z_2)(z_1+z_2)}{4z_1z_2}\right],$$

или

$$z-z_3z_4\bar{z}=\frac{(z_1+z_2)(1+z_1z_2)(1-z_3z_4)}{4z_1z_2}. \tag{52}$$

Уравнение перпендикуляра β_{23}, опущенного из точки α_{14} на прямую A_2A_3, имеет вид

$$z-z_2z_3\bar{z}=\frac{(z_1+z_4)(1+z_1z_4)(1-z_2z_3)}{4z_1z_4}. \tag{53}$$

Умножая обе части уравнения (52) на z_2, обе части уравнения (53) на $-z_4$ и складывая почленно полученные при этом уравнения, найдем аффикс b_1 точки B_1 пересечения прямых β_{34} и β_{23}:

$$(z_2-z_4)b_1=\frac{(z_1+z_2)(1+z_1z_2)(1-z_3z_4)-(z_1+z_4)(1+z_1z_4)(1-z_2z_3)}{4z_1}=$$

$$=\frac{1}{4z_1}(z_1+z_2+z_1^2z_2+z_2^2z_1-z_1z_3z_4-z_2z_3z_4-z_1^2z_2z_3z_4-z_2^2z_1z_3z_4-$$

$$-z_1-z_4-z_1z_4^2-z_4z_1^2+z_1z_2z_3+z_2z_3z_4+z_4^2z_1z_2z_3+z_1^2z_2z_3z_4)=$$

$$=\frac{1}{4z_1}[z_2-z_4+z_1^2(z_2-z_4)+z_1z_3(z_2-z_4)+$$

$$+z_1(z_2^2-z_4^2)-z_1z_2z_3z_4(z_2-z_4)].$$

Отсюда

$$b_1=\frac{1+z_1^2+z_1z_3+z_1z_2+z_1z_4-z_1z_2z_3z_4}{4z_1}=\frac{1-\sigma_4}{4z_1}+\frac{\sigma_1}{4},$$

где

$$\sigma_1=z_1+z_2+z_3+z_4, \qquad \sigma_4=z_1z_2z_3z_4.$$

Аналогично находятся аффиксы b_2, b_3, b_4 точек B_2, B_3, B_4:

$$b_2=\frac{1-\sigma_4}{4z_2}+\frac{\sigma_1}{4},$$

$$b_3=\frac{1-\sigma_4}{4z_3}+\frac{\sigma_1}{4},$$

$$b_4=\frac{1-\sigma_4}{4z_4}+\frac{\sigma_1}{4}.$$

Итак,

$$b_k=\frac{\sigma_1}{4}+\frac{1-\sigma_4}{4}\bar{z}_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Из этого соотношения следует, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на окружности $(B_1B_2B_3B_4)$, аффикс центра которой равен $\sigma_1/4$, а радиус равен $|1-\sigma_4|/4$. Так как $|\sigma_4|=1$, то величина этого радиуса может изменяться от 0 до 1/2 (σ_4 может принимать значения ± 1).

Таким образом, если $\sigma_4=1$, т. е. единичной точкой является точка Бутена для четырехугольника, то четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ стягивается в точку: прямые β_{34}, β_{14}, β_{12}, β_{23} проходят все через центр тяжести $G(\sigma_1/4)$ системы точек A_1, A_2, A_3, A_4, в которых помещены равные массы.

Если $\sigma_1=0$, т. е. если центр тяжести четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4 совпадает с центром O окружности $(A_1A_2A_3A_4)=(O)$, то окружности $(A_1A_2A_3A_4)$ и $(B_1B_2B_3B_4)$ концентричны.

Наконец, если единичная точка не совпадает ни с одной из четырех точек Бутена для четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ (эти точки Бутена образуют вершины квадрата, вписанного в окружность (O)), то четырехугольник $\overrightarrow{B_1B_2B_3B_4}$ не вырождается. Он является образом четырехугольника $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$ при подобном преобразовании второго рода:

$$u=\frac{1-\sigma_4}{4}\bar{z}+\frac{\sigma_1}{4}.$$

Сначала берутся точки A_1', A_2', A_3', A_4' соответственно, симметричные точкам A_1, A_2, A_3, A_4 в оси Ox, затем четырехугольник $\overrightarrow{A_1'A_2'A_3'A_4'}$ поворачивается вокруг точки O на угол $\arg\frac{1-\sigma_4}{4}$ и над повернутым четырехугольником $\overrightarrow{A_1''A_2''A_3''A_4''}$ производится гомотетия с центром O и коэффициентом $|1-\sigma_4|/4$; получается четырехугольник $\overrightarrow{A_1'''A_2'''A_3'''A_4'''}$; наконец, последний четырехугольник подвергается параллельному переносу, определяемому направленным отрезком $\overrightarrow{OG}$, где аффикс g точки G равен $\sigma_1/4$ (G — центр тяжести системы из четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4, в которых помещены одинаковые массы); получаем четырехугольник $\overrightarrow{B_1B_2B_3B_4}$.

Из всех этих преобразований только первое (симметрия относительно оси Ox) меняет ориентацию и, значит, $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}\downarrow\uparrow\overrightarrow{B_1B_2B_3B_4}$, причем сами четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны.

Пример 20. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O; A_0, B_0, C_0 — центры окружностей (OBC), (OCA), (OAB); A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные точкам A_0, B_0, C_0 соответственно относительно BC, CA, AB. Доказать, что ортоцентр H треугольника ABC является центром одной из окружностей (S), касающейся прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, и что окружность (S) проходит через центр окружности Эйлера для треугольника ABC. Доказать, что радиус окружности (S) равен $\frac{1}{2}OH$.

Доказательство. Примем окружность (ABC) за единичную. Проведем касательные к окружности (ABC) в точках A, B, C;

они образуют треугольник $A_2B_2C_2$. Окружность $(ABC)=(O)$ для треугольника $A_2B_2C_2$ будет вписанной, если треугольник ABC остроугольный, и вневписанной, если треугольник ABC тупоугольный: если, например, угол C — тупой, то окружность (O) будет для треугольника $A_2B_2C_2$ вневписанной в угол C_2.

В четырехугольнике OBA_2C углы B и C равны $\pi/2$, значит, вокруг него можно описать окружность; отрезок OA_2 будет диаметром этой окружности и, следовательно, ее центр будет серединой отрезка OA_2. Но окружность (OBC) совпадает конечно с окружностью (OBA_2C), значит, центр окружности (OBC) есть середина A_0 отрезка OA_2.

Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C. Тогда аффикс a_3 середины A_3 отрезка BC будет равен

$$a_3=\frac{z_2+z_3}{2},$$

а так как точка A_2 получается из точки A_3 инверсией относительно окружности (ABC), то аффикс a_2 точки A_2 равен

$$a_2=\frac{1}{\bar{a}_3}=\frac{2}{\bar{z}_2+\bar{z}_3}.$$

Аффикс a_0 точки A_0 будет поэтому

$$a_0=\frac{1}{\bar{z}_2+\bar{z}_3}.$$

Аффикс a_1 точки A_1, симметричной точке A_0 относительно прямой BC, найдем из соотношения

$$\frac{a_0+a_1}{2}=a_3,$$

откуда

$$a_1=2a_3-a_0=$$
$$=z_2+z_3-\frac{1}{\bar{z}_2+\bar{z}_3}=z_2+z_3-\frac{z_2z_3}{z_2+z_3}=\sigma_1-\frac{z_2z_3}{z_2+z_3}-z_1=\sigma_1-\frac{\sigma_2}{z_2+z_3}.$$

Аналогичный вид имеют аффиксы b_1 и c_1 точек B_1 и C_1. Итак,

$$a_1=\sigma_1-\frac{\sigma_2}{z_2+z_3}=\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{a}_2,$$

$$b_1=\sigma_1-\frac{\sigma_2}{z_3+z_1}=\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{b}_2,$$

$$c_1=\sigma_1-\frac{\sigma_2}{z_1+z_2}=\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{c}_2.$$

Отсюда следует, что треугольник $A_1B_1C_1$ получается из треугольника $A_2B_2C_2$ в результате подобного преобразования

$$u=\sigma_1-\frac{1}{2}\sigma_2\bar{z}.$$

Это преобразование подобия второго рода: сначала производится симметрия относительно оси $Ox\,(z \to \bar{z})$, затем поворот вокруг точки O на угол $\arg(-\sigma_2)$, затем гомотетия с центром O и коэффициентом гомотетии, равным $|\sigma_2|/2 = |\sigma_1|/2$, и, наконец, перенос, определяемый направленным отрезком $\overrightarrow{OH}$ (так как σ_1 — аффикс точки H).

В результате этих преобразований треугольник $\overrightarrow{A_2B_2C_2}$ перейдет в треугольник $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$, подобный треугольнику $\overrightarrow{A_2B_2C_2}$, но имеющий с ним противоположную ориентацию.

Далее, так как при преобразовании

$$u = \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{z}$$

центр O окружности (ABC), касающейся сторон треугольника $A_2B_2C_2$, переходит в ортоцентр H треугольника ABC, то окружность (S), в которую перейдет окружность (O), будет касаться сторон треугольника $A_1B_1C_1$ (в который переходит треугольник $A_2B_2C_2$), а центром окружности (S) будет точка H.

Радиус окружности (ABC) при преобразовании

$$u = \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2\bar{z}$$

изменился только при преобразовании гомотетии $(O, |\sigma_1|/2)$, и, следовательно, радиус окружности (S) будет равен

$$\frac{|\sigma_1|}{2} = \frac{1}{2}OH,$$

так как радиус R окружности (ABC) равен 1.

Пример 21. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник, вписанный в окружность (O), а P — произвольная точка. Обозначим через P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34} точки, симметричные точке P относительно прямых A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. Пусть R, S, T — соответственно середины отрезков $P_{12}P_{34}$, $P_{13}P_{24}$, $P_{14}P_{23}$, а O' — точка, симметричная центру O окружности (O) относительно центра тяжести системы четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4, в которых помещены равные массы (рис. 24).

Доказать, что точки R, S, T, O' лежат на одной прямой.

Решение. Примем окружность (O) за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, A_4. Обозначим через σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 основные симметрические многочлены от этих аффиксов:

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4,$$
$$\sigma_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4,$$
$$\sigma_3 = z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3,$$
$$\sigma_4 = z_1z_2z_3z_4.$$

Аффикс g центра тяжести G системы точек A_1, A_2, A_3, A_4 равен $\sigma_1/4$, следовательно, аффикс o' точки O', симметричной точке O

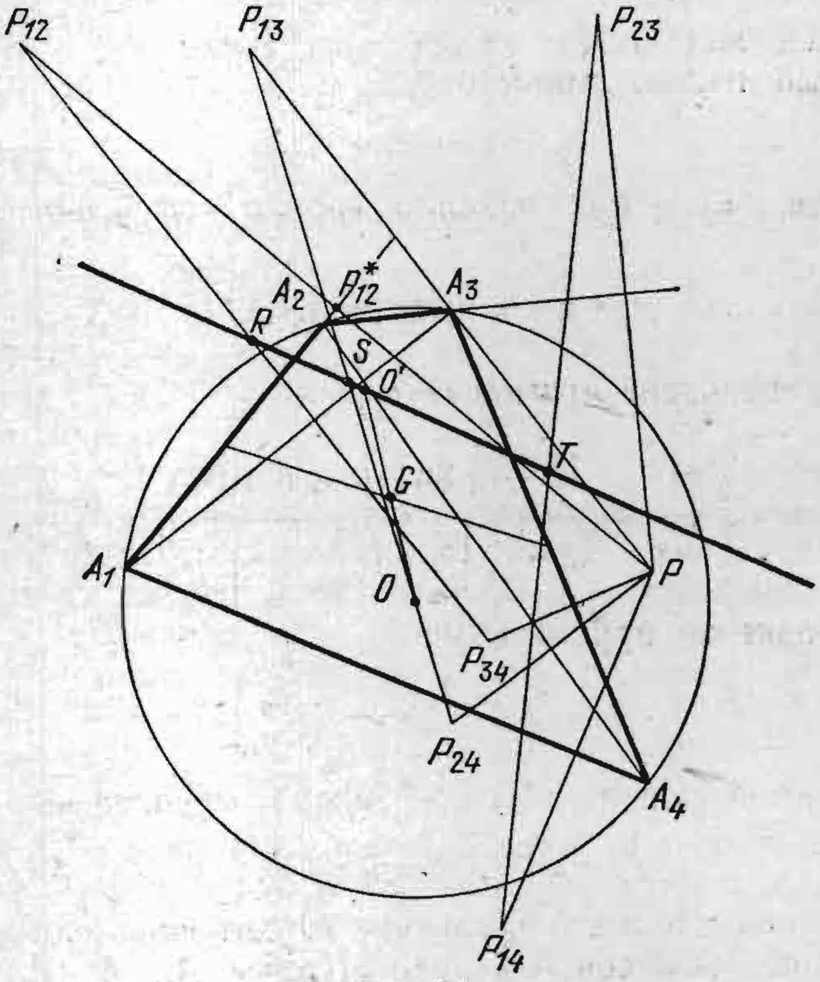


Рис. 24.

относительно точки G, равен

$$o' = \sigma_1/2.$$

Уравнение прямой A_1A_2:

$$z + z_1 z_2 \bar{z} = z_1 + z_2, \tag{54}$$

уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую A_1A_2:

$$z - p = z_1 z_2 (\bar{z} - \bar{p}),$$

или

$$z - z_1 z_2 \bar{z} = p - z_1 z_2 \bar{p}, \tag{55}$$

где p — аффикс точки P. Складывая почленно уравнения (54) и (55) найдем аффикс p^*_{12} проекции P^*_{12} точки P на прямую A_1A_2:

$$p^*_{12} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + p - z_1 z_2 \bar{p}).$$

Аффикс p_{12} точки P_{12}, симметричной точке P относительно прямой A_1A_2, находится из соотношения

$$\frac{p + p_{12}}{2} = p^*_{12},$$

откуда

$$p_{12}=2p_{12}^*-p=z_1+z_2-z_1z_2\bar{p}. \qquad (56)$$

Аналогичный вид имеет аффикс p_{34} точки P_{34}, симметричной точке P относительно прямой A_3A_4:

$$p_{34}=z_3+z_4-z_3z_4\bar{p}. \qquad (57)$$

Из равенств (56) и (57) находим аффикс r середины R отрезка $P_{12}P_{34}$:

$$r=\frac{1}{2}\left[\sigma_1-(z_1z_2+z_3z_4)\,\bar{p}\right]. \qquad (58)$$

Угловой коэффициент прямой $O'R$ равен

$$\varkappa=\frac{\frac{\sigma_1}{2}-r}{\frac{\bar{\sigma}_1}{2}-\bar{r}}=\frac{\frac{\sigma_1}{2}-\frac{1}{2}\left[\sigma_1-(z_1z_2+z_3z_4)\,\bar{p}\right]}{\frac{\bar{\sigma}_1}{2}-\frac{1}{2}\left[\bar{\sigma}_1-\left(\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_3z_4}\right)p\right]}=\frac{\bar{p}}{p}\,\sigma_4,$$

поэтому уравнение прямой $O'R$:

$$z-\frac{\sigma_1}{2}=\frac{\bar{p}}{p}\,\sigma_4\left(\bar{z}-\frac{\sigma_3}{2\sigma_4}\right).$$

Последнее уравнение прямой $O'R$ можно переписать в виде

$$2pz-2\bar{p}\sigma_4\bar{z}+\sigma_3\bar{p}-p\sigma_1=0. \qquad (59)$$

В силу того, что в это уравнение входят лишь симметрические многочлены от аффиксов z_1, z_2, z_3, z_4 точек A_1, A_2, A_3, A_4, уравнения прямых $O'S$ и $O'T$ будут такими же, как и уравнение (59), т. е. точки O', S, T, R лежат на одной прямой. Впрочем, можно и непосредственно убедиться в том, что аффиксы s и t:

$$s=\frac{1}{2}\left[\sigma_1-(z_1z_3+z_2z_4)\,\bar{p}\right],$$

$$t=\frac{1}{2}\left[\sigma_1-(z_1z_4+z_2z_3)\,\bar{p}\right],$$

точек S и T удовлетворяют уравнению (59).

З а м е ч а н и е. Так как уравнение (59) переходит в уравнение, ему эквивалентное, если p заменить на λp, где λ — произвольное действительное число, то прямая (59) не меняется, если точка P описывает прямую, проходящую через центр O окружности (O) (исключая, конечно, саму точку O).

Пример 22. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции вершин A, B, C треугольника ABC на диаметр δ окружности (ABC). Обозначим через A_2, B_2, C_2 точки, симметричные точкам A_1, B_1, C_1 соответственно относительно медиатрис сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Пусть A_3, B_3, C_3 — середины отрезков BC, CA, AB, а A_4, B_4, C_4 — середины отрезков A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3. Доказать, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A_4B_4C_4}$ подобны и имеют противоположную ориентацию. Доказать, что если диаметр δ окружности $(ABC)=(O)$ вращается вокруг точки O, то центр S окружности $(S)=(A_4B_4C_4)$ описывает окружность (Ω), концентричную окружности (ABC), причем эти вращения происходят в противоположных направлениях. Радиус окружности (S) равен $\frac{1}{4}\,OH$, где H — ортоцентр треугольника ABC. Радиус окружности (Ω) равен $R/4$, где R — радиус окружности (ABC) (рис. 25).

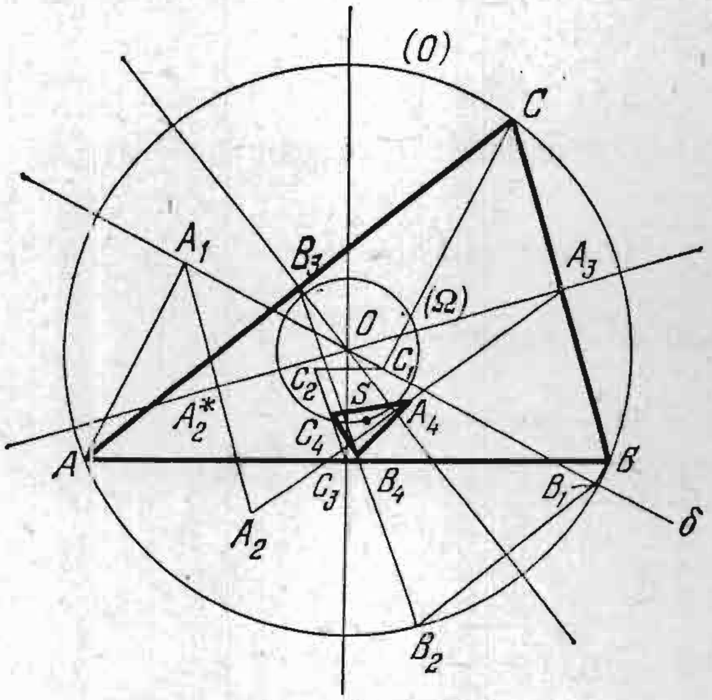


Рис. 25.

Решение. Примем окружность $(O)=(ABC)$ за единичную, а диаметр δ за ось Ox. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C. Аффикс a_1 проекции A_1 точки A на прямую δ будет

$$a_1=\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}.$$

Так как прямая BC имеет угловой коэффициент $-z_2z_3$, то уравнение прямой OA_3 будет

$$z=z_2z_3\bar{z},$$

а уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на прямую OA_3:

$$z-\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}=-z_2z_3\left(\bar{z}-\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}\right).$$

Из системы

$$\left.\begin{aligned} &z-z_2z_3\bar{z}=0,\\ &z+z_2z_3\bar{z}=\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}(1+z_2z_3)\end{aligned}\right\}\qquad(60)$$

находим аффикс a_2^* проекции A_2^* точки A_1 на медиатрису OA_3 отрезка BC:

$$a_2^*=\frac{z_1+\bar{z}_1}{4}(1+z_2z_3).$$

Аффикс a_2 точки A_2 найдем из равенства

$$\frac{a_1+a_2}{2}=a_2^*,$$

откуда

$$a_2=2a_2^*-a_1=\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}(1+z_2z_3)-\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}=\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}z_2z_3.$$

Аффикс a_4 середины A_4 отрезка A_2A_3:

$$a_4=\frac{a_2+a_3}{2},$$

где a_3 — аффикс середины A_3 отрезка BC, т. е.

$$a_3=\frac{z_2+z_3}{2}.$$

Итак,

$$a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2}z_2z_3+\frac{z_2+z_3}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\sigma_3+\frac{z_2z_3}{z_1}+z_2+z_3\right)=\frac{1}{4}\left(\sigma_3+\frac{\sigma_2}{z_1}\right).$$

Аналогичный вид имеют аффиксы b_4 и c_4 точек B_4 и C_4. Итак,

$$\left.\begin{aligned} a_4&=\frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_1},\\ b_4&=\frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_2},\\ c_4&=\frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_3}.\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Отсюда следует, что точки A_4, B_4, C_4 получаются из точек A, B, C подобным преобразованием

$$u=\frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4}\bar{z}$$

второго рода, а значит, треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A_4B_4C_4}$ имеют противоположную ориентацию, и, кроме того, они подобны.

Из соотношений (61) также следует, что точки A_4, B_4, C_4 лежат на окружности (S) с центром S; аффикс s этого центра S равен

$$s=\sigma_3/4,$$

а радиус окружности (S) равен

$$\rho=\frac{|\sigma_2|}{4}=\frac{|\sigma_1|}{4}=\frac{1}{4}OH.$$

Расстояние d от центра S окружности $(A_4B_4C_4)$ до центра O окружности $(O)=(ABC)$ равно

$$d=\frac{|\sigma_3|}{4}=\frac{1}{4}=\frac{R}{4} \qquad (R=1),$$

а значит, при вращении диаметра δ вокруг точки O центр S окружности $(A_4B_4C_4)$ описывает окружность (Ω), радиус которой равен $1/4=R/4$, где R — радиус окружности (ABC). Если диаметр δ повернется на угол α, то аффикс того его конца, который имел аффикс, равный 1, будет иметь аффикс $\beta=\cos\alpha+i\sin\alpha$; если эту точку с аффиксом β принять за новую единичную точку, то новые аффиксы точек A, B, C будут $\frac{z_1}{\beta}$, $\frac{z_2}{\beta}$, $\frac{z_3}{\beta}$, а новый аффикс нового центра S^* нового треугольника $A_4^*B_4^*C_4^*$ будет σ_3/β^3. Значит, аффикс точки S^* в начальной системе будет σ_3/β^2. Отсюда следует, что радиус OS окружности (Ω) будет вращаться в направлении, противоположном вращению диаметра δ, и угловая скорость вращения OS будет в два раза больше угловой скорости вращения δ.

Замечание. Найдем еще отношение

$$\frac{\overrightarrow{A_4B_4C_4}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Имеем,

$$\overline{A_4B_4C_4} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} \frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_1} & \frac{\bar\sigma_3}{4}+\frac{\bar\sigma_2}{4}z_1 & 1 \\ \frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_2} & \frac{\bar\sigma_3}{4}+\frac{\bar\sigma_2}{4}z_2 & 1 \\ \frac{\sigma_3}{4}+\frac{\sigma_2}{4z_3} & \frac{\bar\sigma_3}{4}+\frac{\bar\sigma_2}{4}z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} \frac{\sigma_2}{4z_1} & \frac{\bar\sigma_2}{4}z_1 & 1 \\ \frac{\sigma_2}{4z_2} & \frac{\bar\sigma_2}{4}z_2 & 1 \\ \frac{\sigma_2}{4z_3} & \frac{\bar\sigma_2}{4}z_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4}\,\frac{\sigma_2\bar\sigma_2}{16}\begin{vmatrix} \bar z_1 & z_1 & 1 \\ \bar z_2 & z_2 & 1 \\ \bar z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{|\sigma_2|^2}{16}\overline{ABC} = -\frac{|\sigma_1|^2}{16}\overline{ABC} = -\frac{OH^2}{16}\overline{ABC}. \tag{62}$$

Отсюда

$$\frac{\overrightarrow{A_4B_4C_4}}{\overrightarrow{ABC}} = \frac{\overline{A_4B_4C_4}}{\overline{ABC}} = -\frac{OH^2}{16}.$$

Отсюда также следует, что $\overrightarrow{A_4B_4C_4} \downarrow\uparrow \overrightarrow{ABC}$.

Пример 23. Дан треугольник T, обладающий тем свойством, что существует прямая τ, пересекающая его стороны под углами, равными углам этого треугольника, т. е. [1])

$$\left.\begin{aligned} (AB,\ \tau) &= (AC,\ AB) = A, \\ (BC,\ \tau) &= (BA,\ BC) = B, \\ (CA,\ \tau) &= (CB,\ CA) = C. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Требуется

1°. Найти углы треугольника T.

---

[1]) Символом $(p,\ q)$ мы обозначаем ориентированный угол от прямой p до прямой q (p и q лежат на ориентированной плоскости). Если α — одно из значений угла $(p,\ q)$, то все значения $(p,\ q)$ заключены в формуле

$$(p,\ q) = \alpha + k\pi,$$

где k принимает все целые значения; иначе:

$$(p,\ q) \equiv \alpha \pmod{\pi}.$$

Для трех прямых p, q, r, лежащих на ориентированной плоскости, имеет место *теорема Шаля*:

$$(p,\ q) + (q,\ r) = (p,\ r) \pmod{\pi}.$$

Соотношения (63) надо понимать так: одно из значений $(CA,\ \tau)$ равно C, одно из значений $(AB,\ BC)$ равно B и т. д.

2°. Через точки A, B, C проводятся прямые, параллельные прямой τ. Точки пересечения этих прямых с прямыми BC, CA, AB обозначим соответственно через A_1, C_1, B_1. Доказать, что треугольники $\overrightarrow{ACB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$ подобны

$$A = B_1, \quad C = C_1, \quad B = A_1$$

и имеют противоположную ориентацию.

3°. Для треугольника $B_1C_1A_1$ строится трансверсаль τ_1 аналогично тому, как строилась трансверсаль τ для треугольника ABC. Пусть прямые, проходящие соответственно через

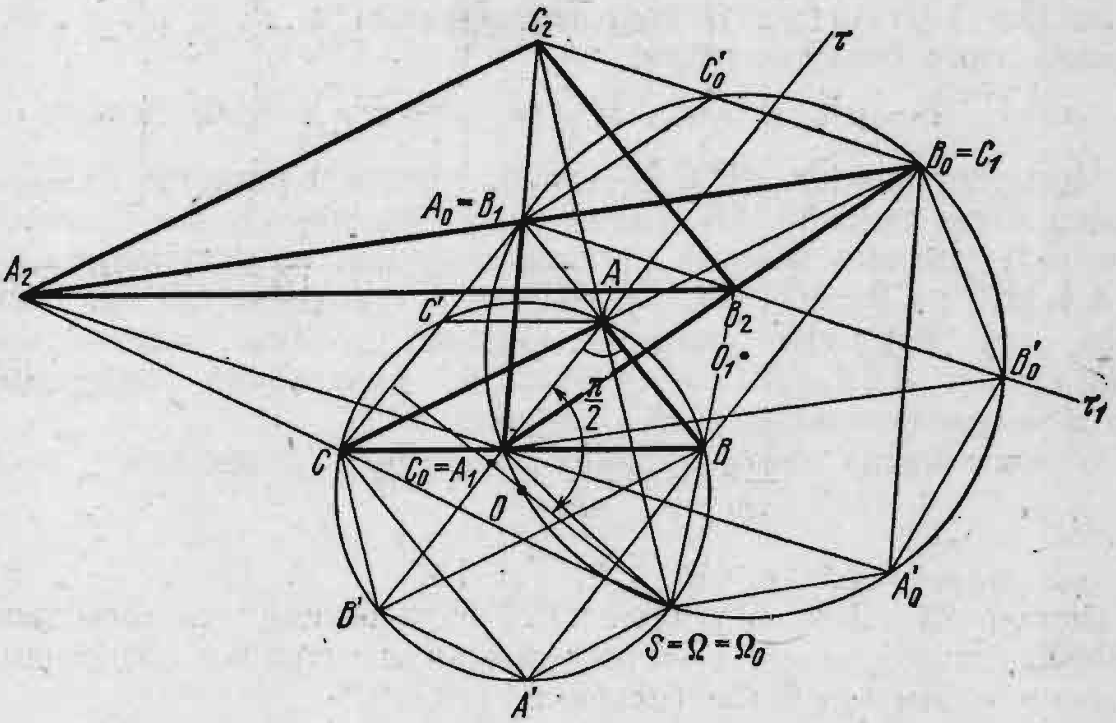


Рис. 26.

точки A_1, B_1, C_1 параллельно прямой τ_1, пересекают прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно в точках A_2, B_2, C_2.

Доказать, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{C_2B_2A_2}$ гомотетичны и имеют одинаковую ориентацию, т. е. доказать, что прямые AC_2, BB_2, CA_2 проходят через одну и ту же точку S и $AB \parallel C_2B_2$, $BC \parallel A_2B_2$, $CA \parallel A_2C_2$.

4°. Доказать, что диаметр окружности (ABC), проходящий через точку S, перпендикулярен прямой τ (рис. 26).

Решение. 1°. Предположим, что $C < B < A$. По теореме Шаля находим

$$B = (BA,\ BC) = (BA,\ \tau) + (\tau,\ BC) = A - B,$$

откуда

$$A = 2B;$$

далее,

$$C = (CB,\ CA) = (CB,\ \tau) + (\tau,\ CA) = B - C,$$

откуда

$$B = 2C.$$

Итак,

$$A = 2B = 4C$$

и, следовательно,

$$C = \frac{\pi}{7}, \quad B = \frac{2\pi}{7}, \quad A = \frac{4\pi}{7}.$$

2°. Примем окружность (ABC) за единичную окружность, а точку A за единичную точку. Вершины A, B, C треугольника ABC будут вершинами правильного семиугольника $AC'CB'A'\Omega B$, вписанного в окружность (ABC). Полагая $\alpha = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$, находим аффиксы a, c', c, b', a', ω, b вершин этого семиугольника:

$$a = 1, \quad c' = \alpha^1, \quad c = \alpha^2, \quad b' = \alpha^3, \quad a' = \alpha^4, \quad \omega = \alpha^5, \quad b = \alpha^6.$$

Четырехугольник $AC'CA_1$ — ромб, так как в качестве прямой τ можно взять прямую AB' (тогда будут выполнены все соотношения (63) условия задачи), и, следовательно, по построению $\tau = AA_1 \parallel CC'$, $CB \parallel AC'$, $C'C = C'A$. Четырехугольник $CA'BB_1$ также ромб, так как его противоположные стороны параллельны: $A'B \mid \tau \parallel CB_1$, $ABB_1 \parallel A'C$ и $A'C = A'B$. Аналогично убеждаемся, что и четырехугольник $B'BC_1A$ — ромб.

Отсюда можно найти аффиксы точек $A_1B_1C_1$; так как

$$\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1C'},$$

то

$$c - a_1 + a - a_1 = c' - a_1,$$

откуда

$$a_1 = c + a - c' = \alpha^2 + 1 - \alpha.$$

Далее, из соотношения

$$\overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{A'B_1}$$

находим

$$c - a' + b - a' = b_1 - a'$$

и, следовательно,

$$b_1 = c + b - a' = \alpha^2 + \alpha^6 - \alpha^4.$$

Наконец, из соотношения

$$\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'C_1}$$

находим

$$a - b' + b - b' = c_1 - b',$$

$$c_1 = a + b - b' = 1 + \alpha^6 - \alpha^3.$$

Итак,

$$a_1 = 1 - \alpha + \alpha^2,$$

$$b_1 = \alpha^2 - \alpha^4 + \alpha^6,$$

$$c_1 = 1 - \alpha^3 + \alpha^6.$$

Треугольники $\overrightarrow{ACB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$ подобны и имеют противоположную ориентацию тогда и только тогда, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{a} & b_1 & 1 \\ \bar{c} & c_1 & 1 \\ \bar{b} & a_1 & 1 \end{vmatrix}$$

равен нулю. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2-\alpha^4+\alpha^6 & 1 \\ \bar{\alpha}^2 & 1-\alpha^3+\alpha^6 & 1 \\ \bar{\alpha}^6 & 1-\alpha+\alpha^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2-\alpha^4+\alpha^6 & 1 \\ \alpha^5 & 1-\alpha^3+\alpha^6 & 1 \\ \alpha & 1-\alpha+\alpha^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1-\alpha^3+\alpha^6+\alpha^5-\alpha^6+\alpha^7+\alpha^3-\alpha^5+\alpha^7-\alpha+\alpha^4-\alpha^7-1+$$
$$+\alpha-\alpha^2-\alpha^7+\alpha^9-\alpha^{11} \equiv 0.$$

Далее, найдем центр подобия треугольников $\overrightarrow{ACB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$. Рассмотрим подобие, меняющее ориентацию, при котором точки A_1 и B_1 перейдут в точки B и A (тогда точка C_1 перейдет в C). Пусть z — аффикс произвольной точки M плоскости, а $M'(u)$ — ее образ при указанном подобии. Тогда

$$\begin{vmatrix} z & \bar{u} & 1 \\ b_1 & 1 & 1 \\ a_1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\bar{u}(a_1-b_1)+z(1-\alpha)+\alpha b_1-a_1=0,$$

или

$$\bar{u}(1-\alpha+\alpha^4-\alpha^6)+z(1-\alpha)+\alpha^3-\alpha^5+\alpha^7-1+\alpha-\alpha^2=0,$$

или, сокращая на $1-\alpha$,

$$\bar{u}(\alpha^5+\alpha^4+1)+z+\alpha(\alpha^3+\alpha^2+1)=0.$$

Неподвижная точка подобия удовлетворяет условию:

$$\bar{z}(\alpha^5+\alpha^4+1)+z+\alpha^4+\alpha^3+\alpha=0. \qquad (64)$$

Отсюда (переходя к сопряженным числам)

$$z(\bar{\alpha}^5+\bar{\alpha}^4+1)+\bar{z}+\bar{\alpha}^4+\bar{\alpha}^3+\bar{\alpha}=0$$

или, умножая левую часть на $\alpha^7=1$,

$$z(\alpha^2+\alpha^3+1)+\bar{z}+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6=0.$$

Из последнего соотношения находим

$$\bar{z}=-z(\alpha^2+\alpha^3+1)-\alpha^3-\alpha^4-\alpha^6,$$

и уравнение (64) принимает вид

$$-z(\alpha^2+\alpha^3+1)(\alpha^5+\alpha^4+1)-(\alpha^5+\alpha^4+1)(\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6)+$$
$$+z+\alpha^3+\alpha^4+\alpha=0$$

или

$$z(1-\alpha^7-\alpha^6-\alpha^2-\alpha^8-\alpha^7-\alpha^3-\alpha^5-\alpha^4-1)=$$
$$=\alpha^8+\alpha^9+\alpha^{11}+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^{10}+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6-\alpha^3-\alpha^4-\alpha,$$

или

$$z(-\alpha^6-\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2-\alpha-2)=\alpha^6+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1.$$

Но $\alpha^7=1$, и так как $\alpha-1\neq 0$, то

$$\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0,$$

и последнее соотношение принимает вид

$$-z=-\alpha^5,$$

откуда

$$z=\alpha^5,$$

т. е. неподвижная точка подобия второго рода, переводящего треугольник $\overline{B_1C_1A_1}$ в треугольник $\overline{ACB}$, есть точка Ω.

Полагая

$$\alpha^5+\alpha^4+1=\lambda, \quad \alpha^3+\alpha^2+1=\mu,$$

находим соотношение

$$\lambda\bar{u}+z+\alpha\mu=0, \tag{65}$$

связывающее аффикс z произвольной точки M плоскости с аффиксом u ее образа M' при рассматриваемом подобии. Точки B_1 и A_1 при этом подобии перейдут в точки A и B, так что

$$\bar{a}=-\frac{b_1+\alpha\mu}{\lambda}, \quad \bar{b}=-\frac{a_1+\alpha\mu}{\lambda},$$

откуда

$$\bar{a}-\bar{b}=\frac{a_1-b_1}{\lambda},$$

и, значит,

$$\frac{A_1B_1}{AB}=|\lambda|.$$

Однако

$$\alpha^5+\alpha^4+1=\alpha^{-2}+\alpha^{-3}+1,$$
$$\overline{\alpha^5+\alpha^4+1}=\alpha^2+\alpha^3+1,$$

следовательно,

$$|\lambda|^2=(\alpha^5+\alpha^4+1)(\alpha^2+\alpha^3+1)=$$
$$=\alpha^7+\alpha^8+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3+1=$$
$$=2+\alpha^6+\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=2,$$

откуда

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\sqrt{2}, \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

— коэффициент подобия, переводящего треугольник $\overline{B_1C_1A_1}$ в треугольник $\overline{ACB}$, равен $1/\sqrt{2}$.

3°. Пусть O_1 — центр окружности $(A_1B_1C_1)$. Точка O_1 является образом точки O при указанном подобии (п. 2°). Поэтому аффикс o_1 точки O_1 найдем из уравнения (65), полагая в нем $u=0$:

$$o_1 = -\alpha(\alpha^3+\alpha^2+1).$$

Рассмотрим правильный семиугольник, вписанный в окружность $(A_1B_1C_1)$, располагая его вершины в следующем порядке:

$$A_0C_0\Omega_0A_0'B_0'B_0C_0',$$

где $A_0=B_1$, $B_0=C_1$, $C_0=A_1$. Такой правильный семиугольник существует, так как углы треугольника $B_1A_1C_1$ таковы:

$$B_1=\frac{4\pi}{7}, \quad A_1=\frac{2\pi}{7}, \quad C_1=\frac{\pi}{7},$$

и, значит, A_1B_1 — одна из сторон этого семиугольника, C_1 — третья его вершина. Аффиксы вершин этого семиугольника будут

$$o_1+(a_0-o_1)\alpha^{k-1} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7).$$

Подробно:

$$a_0=b_1=\alpha^2-\alpha^4+\alpha^6,$$

$$c_0=a_1=\alpha^2-\alpha+1,$$

$$\omega_0=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+(\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+\alpha)\alpha^2=$$
$$=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+\alpha^4+\alpha^8+\alpha^5+\alpha^3=\alpha^5,$$

$$a_0'=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+(\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+\alpha)\alpha^3=$$
$$=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+\alpha^5+\alpha^9+\alpha^6+\alpha^4=\alpha^6+\alpha^5-\alpha^3+\alpha^2-\alpha,$$

$$b_0'=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+(\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+\alpha)\alpha^4=$$
$$=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+\alpha^6+\alpha^{10}+\alpha^7+\alpha^5=\alpha^6+\alpha^5-\alpha^4-\alpha+1,$$

$$b_0=c_1=\alpha^6-\alpha^3+1,$$

$$c_0'=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+(\alpha^2+\alpha^6+\alpha^3+\alpha)\alpha^6=$$
$$=-\alpha^4-\alpha^3-\alpha+\alpha^8+\alpha^{12}+\alpha^9+\alpha^7=\alpha^5-\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2+1.$$

Отсюда следует, что $\Omega_0=\Omega$ и что эта точка является центром подобия, при котором треугольник $\overrightarrow{C_2A_2B_2}$ переходит в треугольник $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$. То, что эти треугольники подобны и имеют противоположную ориентацию, следует из того, что построение треугольника $\overrightarrow{C_2A_2B_2}$ по отношению к треугольнику $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$ в точности такое же, как и построение треугольника $\overrightarrow{B_1C_1A_1}$ по отношению к треугольнику $\overrightarrow{ACB}$; рассматриваемые фигуры с двумя окружностями, описанными вокруг треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, и все соответствующие треугольники — подобны.

Далее, так как $C_0A_2A_0B_0'$ — ромб, то

$$a_2-c_0=a_0-b_0',$$

откуда

$$a_2=a_0+c_0-b_0'=$$
$$=\alpha^2-\alpha^4+\alpha^6+\alpha^2-\alpha+1-\alpha^6-\alpha^5+\alpha^4+\alpha-1=2\alpha^2-\alpha^5.$$

Далее, $B_2A_0C_0'B_0$ — ромб, поэтому

$$a_0-b_2=c_0'-b_0,$$

откуда

$$b_2=a_0+b_0-c_0'=$$
$$=\alpha^2-\alpha^4+\alpha^6+\alpha^6-\alpha^3+1-\alpha^5+\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-1=2\alpha^6-\alpha^5.$$

Наконец, так как $C_2C_0A_0'B_0$ — ромб, то

$$c_0-c_2=a_0'-b_0,$$

откуда

$$c_2=c_0+b_0-a_0'=\alpha^2-\alpha+1+\alpha^6-\alpha^3+1-$$
$$-\alpha^6-\alpha^5+\alpha^3-\alpha^2+\alpha=2-\alpha^5.$$

Итак,

$$a_2=2\alpha^2-\alpha^5,$$
$$b_2=2\alpha^6-\alpha^5,$$
$$c_2=2-\alpha^5,$$

и, следовательно, треугольник $\overrightarrow{C_2B_2A_2}$ получается из треугольника $\overrightarrow{ABC}$ (аффиксы вершин которого 1, α^6, α^2) гомотетией с центром Ω и коэффициентом 2, так как

$$\frac{c_2-\omega}{a-\omega}=\frac{2-\alpha^5-\alpha^5}{1-\alpha^5}=2,$$
$$\frac{b_2-\omega}{b-\omega}=\frac{2\alpha^6-\alpha^5-\alpha^5}{\alpha^6-\alpha^5}=2,$$
$$\frac{a_2-\omega}{c-\omega}=\frac{2\alpha^2-2\alpha^5}{\alpha^2-\alpha^5}=2.$$

4°. Угловой коэффициент прямой $O\Omega$ равен

$$\frac{\alpha^5}{\bar{\alpha}^5}=\alpha^{10}=\alpha^3.$$

Прямая τ проходит через точки A и B', следовательно, ее угловой коэффициент

$$\frac{1-\alpha^3}{1-\bar{\alpha}^3}=\frac{1-\alpha^3}{1-\frac{1}{\alpha^3}}=-\alpha^3.$$

Сумма угловых коэффициентов прямых $O\Omega$ и τ равна 0, следовательно, $O\Omega\perp\tau$.

Пример 24. 1°. На сторонах шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ построены равносторонние треугольники

$$\overrightarrow{A_1A_2A_1'},\quad \overrightarrow{A_2A_3A_2'},\quad \overrightarrow{A_3A_4A_3'},\quad \overrightarrow{A_4A_5A_4'},\quad \overrightarrow{A_5A_6A_5'},\quad \overrightarrow{A_6A_1A_6'},\qquad (66)$$

имеющие одинаковую ориентацию. Доказать, что концы P'_1, P'_3, P'_5 направленных отрезков $\overrightarrow{OP'_1}$, $\overrightarrow{OP'_3}$, $\overrightarrow{OP'_5}$ (O — произвольная точка), соответственно эквивалентных направленным отрезкам $\overrightarrow{A'_1A'_4}$, $\overrightarrow{A'_3A'_6}$, $\overrightarrow{A'_5A'_2}$, образует равносторонний треугольник $T = P'_1P'_3P'_3$, который имеет ориентацию, противоположную ориентации любого из треугольников (66). В частности, треугольник T может выродиться в точку.

2°. Доказать обратное положение, а именно: если на плоскости выбрать произвольный равносторонний треугольник $T = P'_1P'_3P'_5$ и точку O и построить направленные отрезки $\overrightarrow{A'_1A'_4}$, $\overrightarrow{A'_3A'_6}$, $\overrightarrow{A'_5A'_2}$, соответственно эквивалентные направленным отрезкам $\overrightarrow{OP'_1}$, $\overrightarrow{OP'_3}$, $\overrightarrow{OP'_5}$ (положение направленных отрезков $\overrightarrow{A'_1A'_4}$, $\overrightarrow{A'_3A'_6}$, $\overrightarrow{A'_5A'_2}$ в остальном произвольно), то, выбирая еще произвольно точку A_1, можно построить точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, что шестиугольник $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$ из шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ получается построением, указанным в п. 1°. Доказать, что если точку A_1 изменять на плоскости, то главные диагонали A_1A_4, A_3A_6, A_5A_2 шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (который будет изменяться вместе с изменением точки A_1) будут вращаться вокруг трех точек O_1, O_2, O_3. Как построить эти точки?

3°. Равносторонние треугольники

$$\overrightarrow{A'_1A'_2A''_1},\quad \overrightarrow{A'_2A'_3A''_2},\quad \overrightarrow{A'_3A'_4A''_3},\quad \overrightarrow{A'_4A'_5A''_4},\quad \overrightarrow{A'_5A'_6A''_5},\quad \overrightarrow{A'_6A'_1A''_6} \tag{67}$$

построены так, что все они имеют одинаковую ориентацию и ориентация любого из них противоположна ориентации любого из треугольников (66). Доказать следующие отношения эквивалентности между направленными отрезками:

$$\overrightarrow{A_1A''_1} \equiv \overrightarrow{A_2A_3},\quad \overrightarrow{A_2A''_2} \equiv \overrightarrow{A_3A_4},\quad \overrightarrow{A_3A''_3} \equiv \overrightarrow{A_4A_5},$$
$$\overrightarrow{A_4A''_4} \equiv \overrightarrow{A_5A_6},\quad \overrightarrow{A_5A''_5} \equiv \overrightarrow{A_6A_1},\quad \overrightarrow{A_6A''_6} \equiv \overrightarrow{A_1A_2}.$$

4°. Доказать, что

$$\overrightarrow{A''_1A''_4} \equiv \overrightarrow{A''_3A''_6} \equiv \overrightarrow{A''_5A''_2} \equiv 3\overrightarrow{OG},$$

где G — центр тяжести треугольника $T^* = M_{14}M_{36}M_{52}$, а M_{14}, M_{36}, M_{52} — концы направленных отрезков $\overrightarrow{OM_{14}}$, $\overrightarrow{OM_{36}}$, $\overrightarrow{OM_{52}}$, отложенных от произвольной точки O и соответственно эквивалентных направленным отрезкам $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$, $\overrightarrow{A_5A_2}$.

5°. Доказать, что середина главной диагонали A_1A_4 шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ совпадает с точкой K_{14}, в которой пересекаются и делятся пополам отрезки $A''_1A''_2$ и $A''_4A''_5$, середина A_3A_6 совпадает с точкой K_{36}, в которой пересекаются и делятся пополам отрезки $A''_3A''_4$ и $A''_6A''_1$, наконец, середина A_5A_2 совпадает с точкой K_{52}, в которой пересекаются и делятся пополам отрезки $A''_5A''_6$ и $A''_2A''_3$ (рис. 27).

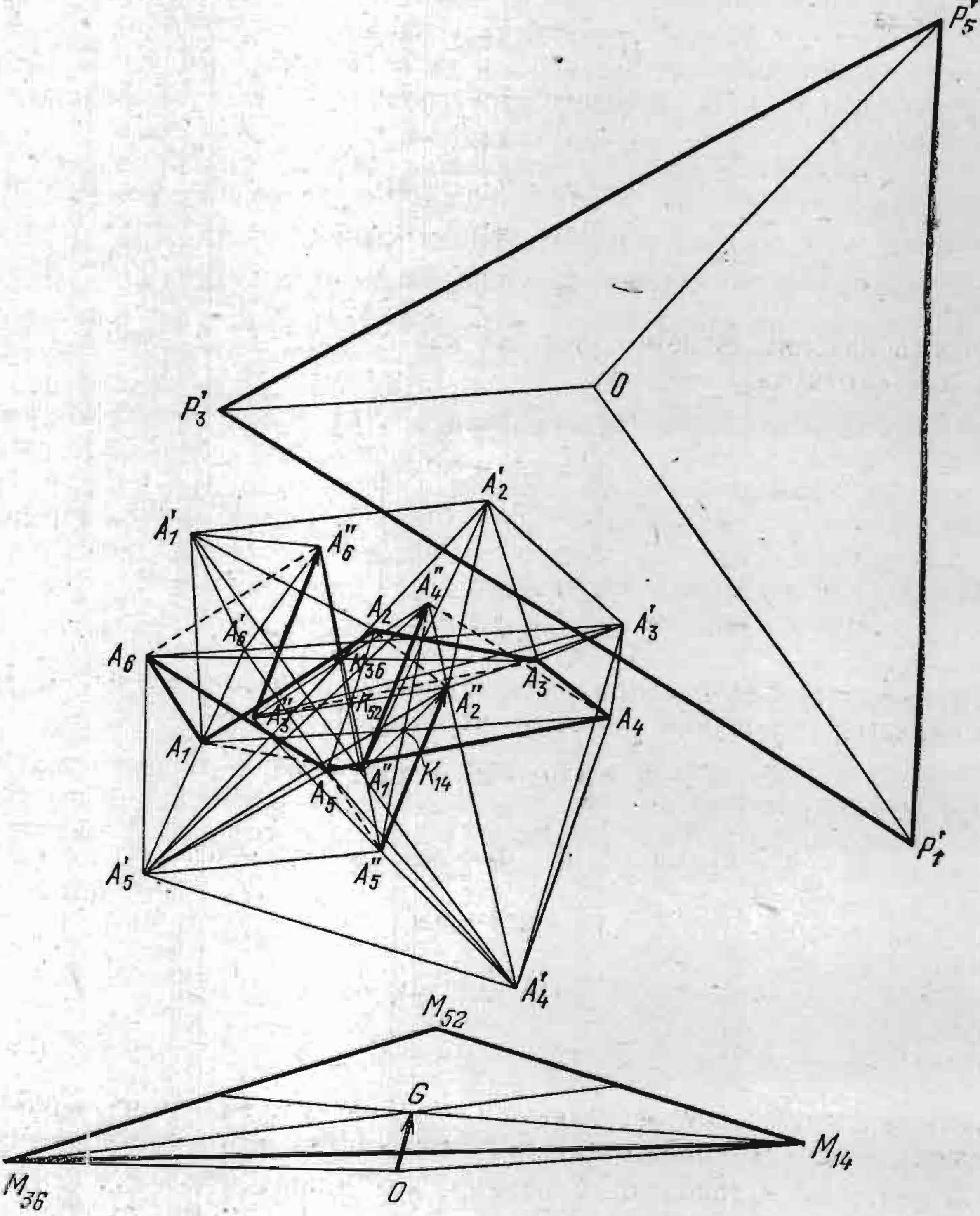


Рис. 27.

Решение. Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy. Обозначим через α и $\bar{\alpha}$ мнимые корни уравнения $x^3+1=0$:

$$\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{\alpha}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, p_1', p_3', p_5', a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', a_6' — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, P_1', P_3', P_5', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6'.

Тогда

$$
\begin{aligned}
a_2-a_1&=\alpha(a_1'-a_1),\\
a_3-a_2&=\alpha(a_2'-a_2),\\
a_4-a_3&=\alpha(a_3'-a_3),\\
a_5-a_4&=\alpha(a_4'-a_4),\\
a_6-a_5&=\alpha(a_5'-a_5),\\
a_1-a_6&=\alpha(a_6'-a_6).
\end{aligned}
$$

Отсюда находим (заметим, что так как $\alpha^2-\alpha+1=0$, то $\alpha-1+$ $+\bar\alpha=0$, откуда $1-\alpha=\bar\alpha$)

$$
\left.
\begin{aligned}
a_2&=\alpha a_1'+\bar\alpha a_1,\\
a_3&=\alpha a_2'+\bar\alpha a_2,\\
a_4&=\alpha a_3'+\bar\alpha a_3,\\
a_5&=\alpha a_4'+\bar\alpha a_4,\\
a_6&=\alpha a_5'+\bar\alpha a_5,\\
a_1&=\alpha a_6'+\bar\alpha a_6.
\end{aligned}
\right\}
\tag{68}
$$

Умножая эти соотношения соответственно на $\bar\alpha^5$, $\bar\alpha^4$, $\bar\alpha^3$, $\bar\alpha^2$, $\bar\alpha$, 1 и складывая, получим (заметим, что $\alpha\bar\alpha=1$, $\alpha^3=\bar\alpha^3=-1$)

$$a_2'-a_5'=\alpha(a_6'-a_3')+\bar\alpha(a_4'-a_1').$$

Так как

$$a_4'-a_1'=p_1',\qquad a_6'-a_3'=p_3',\qquad a_2'-a_5'=p_5',$$

то

$$p_5'=\alpha p_3'+\bar\alpha p_1',$$

или

$$p_5'=\alpha p_3'+(1-\alpha)p_1',$$

или

$$p_5'-p_1'=\alpha(p_3'-p_1'). \tag{69}$$

Отсюда следует, что треугольник $P_1'P_3'P_5'$ (если только он не вырождается в точку) — равносторонний, так как из этого соотношения следует, что направленный отрезок $\overline{P_1'P_5'}$ получается поворотом направленного отрезка $\overline{P_1'P_3'}$ на угол $\pi/3$ $\left(\alpha=\left(1+i\sqrt{3}\right)/2=\right.$ $\left.=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right)$. Ориентация треугольника $\overline{P_1'P_3'P_5'}$ противоположна ориентации любого из треугольников (66): это следует из соотношения (69) и, например, из соотношения

$$a_2-a_1=\alpha(a_1'-a_1),$$

так как $\alpha\bar\alpha=1$, то

$$a_1'-a_1=\bar\alpha(a_2-a_1),$$

т. е. направленный отрезок $\overrightarrow{A_1A_1'}$ получается поворотом направленного отрезка $\overrightarrow{A_1A_2}$ на угол $-\pi/3$ ($\bar{\alpha}=\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)$).

Возможен случай $p_1'=p_3'$, тогда и $p_1'=p_5'$, т. е. треугольник $P_1'P_3'P_5'$ стягивается в точку. Это будет тогда и только тогда, когда направленные главные диагонали $\overrightarrow{A_1'A_4'}$, $\overrightarrow{A_3'A_6'}$, $\overrightarrow{A_5'A_2'}$ шестиугольника $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'A_6'$ эквивалентны:

$$\overrightarrow{A_1'A_4'}\equiv\overrightarrow{A_3'A_6'}\equiv\overrightarrow{A_5'A_2'}.$$

2°. Пусть $\overline{P_1'P_3'P_5'}$ — произвольный равносторонний треугольник, а O — произвольная точка плоскости; $\overrightarrow{A_1'A_4'}$, $\overrightarrow{A_3'A_6'}$, $\overrightarrow{A_5'A_2'}$ — произвольные направленные отрезки, соответственно эквивалентные отрезкам $\overrightarrow{OP_1'}$, $\overrightarrow{OP_3'}$, $\overrightarrow{OP_5'}$:

$$\overrightarrow{OP_1'}\equiv\overrightarrow{A_1'A_4'},\quad \overrightarrow{OP_3'}\equiv\overrightarrow{A_3'A_6'},\quad \overrightarrow{OP_5'}\equiv\overrightarrow{A_5'A_2'}. \tag{70}$$

Выберем на плоскости произвольную точку A_1. Построим следующие равносторонние треугольники, имеющие одинаковую ориентацию:

$$\overline{A_1A_2A_1'},\quad \overline{A_2A_3A_2'},\quad \overline{A_3A_4A_3'},\quad \overline{A_4A_5A_4'},\quad \overline{A_5A_6A_5'},\quad \overline{A_6A_1A_6'},$$

но противоположную ориентации треугольника $\overline{P_1'P_3'P_5'}$. Шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ на основании п. 1° при помощи построения, указанного в п. 1°, приводит к выбранным точкам A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6' и затем к выбранному треугольнику $P_1'P_3'P_5'$,

3°. Аффиксы a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', a_6' точек A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6' связаны с аффиксами a_1'', a_2'', a_3'', a_4'', a_5'', a_6'' точек A_1'', A_2'', A_3'', A_4'', A_5'', A_6'' соотношениями вида (68), в которых только α и $\bar{\alpha}$ надо поменять местами:

$$\begin{aligned}
a_2'&=\bar{\alpha}a_1''+\alpha a_1',\\
a_3'&=\bar{\alpha}a_2''+\alpha a_2',\\
a_4'&=\bar{\alpha}a_3''+\alpha a_3',\\
a_5'&=\bar{\alpha}a_4''+\alpha a_4',\\
a_6'&=\bar{\alpha}a_5''+\alpha a_5',\\
a_1'&=\bar{\alpha}a_6''+\alpha a_6'.
\end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (68) находим

$$\bar{\alpha}a_1''=a_2'-\alpha a_1'=a_3\bar{\alpha}-a_2\bar{\alpha}+a_1\bar{\alpha}=\bar{\alpha}a_3-\bar{\alpha}a_2+\bar{\alpha}a_1,$$

и, следовательно,

$$a_1''=a_1-a_2+a_3.$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned}
a_2''&=a_2-a_3+a_4,\\
a_3''&=a_3-a_4+a_5,\\
a_4''&=a_4-a_5+a_6,\\
a_5''&=a_5-a_6+a_1,\\
a_6''&=a_6-a_1+a_2.
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Из последних соотношений следует, что

$$a_1'' - a_1 = a_3 - a_2,$$
$$a_2'' - a_2 = a_4 - a_3,$$
$$a_3'' - a_3 = a_5 - a_4,$$
$$a_4'' - a_4 = a_6 - a_5,$$
$$a_5' - a_5 = a_1 - a_6,$$
$$a_6'' - a_6 = a_2 - a_1,$$

и потому

$$\overrightarrow{A_1A_1''} \equiv \overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{A_2A_2''} \equiv \overrightarrow{A_3A_4}, \quad \overrightarrow{A_3A_3''} \equiv \overrightarrow{A_4A_5},$$
$$\overrightarrow{A_4A_4''} \equiv \overrightarrow{A_5A_6}, \quad \overrightarrow{A_5A_5''} \equiv \overrightarrow{A_6A_1}, \quad \overrightarrow{A_6A_6''} \equiv \overrightarrow{A_1A_2}.$$

4°. Из соотношений (71) следует также, что

$$a_4'' - a_1'' = a_6'' - a_3'' = a_2'' - a_5'' = a_4 - a_5 + a_6 - a_1 + a_2 - a_3. \qquad (72)$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{A_1''A_4''} \equiv \overrightarrow{A_3''A_6''} \equiv \overrightarrow{A_5''A_2''}.$$

Если построить направленные отрезки

$$\overrightarrow{OM_{14}} \equiv \overrightarrow{A_1A_4}, \quad \overrightarrow{OM_{36}} \equiv \overrightarrow{A_3A_6}, \quad \overrightarrow{OM_{52}} \equiv \overrightarrow{A_5A_2},$$

то аффиксы m_{14}, m_{36}, m_{52} точек M_{14}, M_{36}, M_{52} будут

$$m_{14} = a_4 - a_1, \quad m_{36} = a_6 - a_3, \quad m_{52} = a_2 - a_5,$$

и, следовательно, аффикс g центра тяжести треугольника $M_{14}M_{36}M_{52}$ будет

$$g = (a_4 - a_1 + a_6 - a_3 + a_2 - a_5)/3.$$

Отсюда и из соотношений (72) следует, что

$$\overrightarrow{A_1''A_4''} \equiv \overrightarrow{A_3''A_6''} \equiv \overrightarrow{A_5''A_2''} \equiv 3\overrightarrow{OG}.$$

5°. Середины отрезков $A_1''A_2''$, $A_4''A_5''$, A_1A_4 имеют один и тот же аффикс

$$\frac{a_1 + a_4}{2}$$

(см. формулы (71)), и, следовательно, эти середины совпадают с одной и той же точкой K_{14}. Остальные положения п. 5° доказываются аналогично.

Пример 25. Пусть A_1, B_1, C_1 — ортогональные проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC. Построим треугольник $\overrightarrow{C_1B_1Q_1}$, подобный треугольнику $\overline{BCP}$, но имеющий с ним противоположную ориентацию. Пусть A', B', C' — вторые точки пересечения прямых PA, PB, PC с окружностью $(ABC) = (O)$. Доказать, что:

1°. Треугольники $\overrightarrow{A_1C_1Q_1}$ и $\overrightarrow{CAP}$ подобны и противоположно ориентированы.

2°. Треугольники $\overrightarrow{B_1A_1Q_1}$ и $\overrightarrow{ABP}$ подобны и противоположно ориентированы.

3°. Треугольники $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ подобны и одинаково ориентированы. Найти коэффициент подобия.

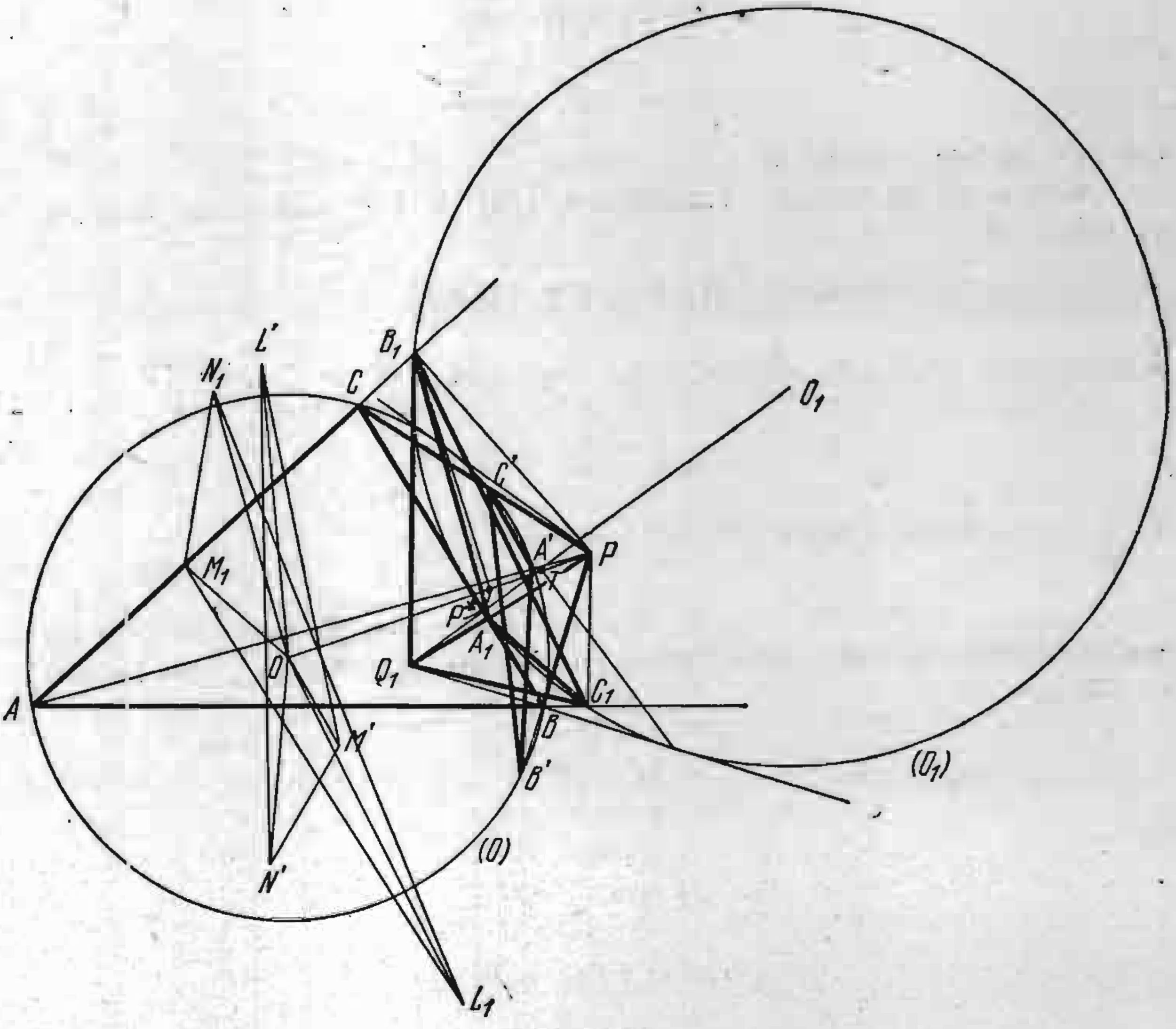


Рис. 28.

4°. Точка Q_1 является точкой, полученной инверсией относительно окружности $(A_1B_1C_1)$ (или симметрией относительно прямой $A_1B_1C_1$ в случае, если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой) середины T, отрезка PP^*, где P^* — образ точки P при инверсии относительно окружности (ABC).

5°. Найти аффикс неподвижной точки подобия, переводящего один из треугольников $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ в другой $\overrightarrow{A'B'C'}$.

6°. При каком положении точки P она совпадает с точкой Q_1? (рис. 28).

Решение. 1°. Примем окружность $(O) = (ABC)$ за единичную окружность. Пусть z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A,

B, C. Уравнение прямой BC имеет вид

$$z - z_2 = - z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_2),$$

или

$$z + z_2 z_3 \bar{z} = z_2 + z_3. \tag{73}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую BC:

$$z - p = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{p}),$$

или

$$z - z_2 z_3 \bar{z} = p - z_2 z_3 \bar{p}, \tag{74}$$

где p — аффикс точки P.

Складывая почленно уравнения (73) и (74), находим аффикс a_1 точки A_1:

$$a_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + p - z_2 z_3 \bar{p}).$$

Аналогично находим аффиксы b_1 и c_1 точек B_1 и C_1:

$$b_1 = \frac{1}{2}(z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p}),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + p - z_1 z_2 \bar{p}).$$

Так как по условию треугольники $\overrightarrow{BCP}$ и $\overrightarrow{C_1B_1Q_1}$ подобны, но противоположно ориентированы, то аффикс q_1 точки Q_1 находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} \bar{b} & c_1 & 1 \\ \bar{c} & b_1 & 1 \\ \bar{p} & q_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z_2} & \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + p - z_1 z_2 \bar{p}) & 1 \\ \frac{1}{z_3} & \frac{1}{2}(z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p}) & 1 \\ \bar{p} & q_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z_2} & z_1 + z_2 + p - z_1 z_2 \bar{p} & 1 \\ \frac{1}{z_3} & z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p} & 1 \\ \bar{p} & 2q_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отнимем из первой строки вторую, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{z_3 - z_2}{z_2 z_3} & z_2 - z_3 + (z_3 - z_2)\bar{p} z_1 & 0 \\ \frac{1}{z_3} & z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p} & 1 \\ \bar{p} & 2q_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

сокращая на $z_3 - z_2 \neq 0$, получим

$$\frac{1}{z_2 z_3}(z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p} - 2q_1) - \left(\frac{1}{z_3} - \bar{p}\right)(z_1 \bar{p} - 1) = 0.$$

Умножая левую часть на $z_2 z_3$, получим

$$z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p} - 2q_1 - (z_2 - z_2 z_3 \bar{p})(z_1 \bar{p} - 1) = 0,$$

или

$$z_3 + z_1 + p - z_3 z_1 \bar{p} - 2q_1 - z_2 z_1 \bar{p} + z_2 + \sigma_3 \bar{p}^2 - z_2 z_3 \bar{p} = 0,$$

откуда

$$q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_3 \bar{p}^2 - \sigma_2 \bar{p} + p + \sigma_1).$$

2°. Симметрия правой части относительно z_1, z_2, z_3 позволяет утверждать, что (п. 1°) треугольники $\overrightarrow{A_1C_1Q_1}$ и $\overrightarrow{CAP}$ подобны и противоположно ориентированы и что (п. 2°) треугольники $\overrightarrow{B_1A_1Q_1}$ и $\overrightarrow{ABP}$ подобны и противоположно ориентированы. Вместе с тем мы нашли аффикс q_1 точки Q_1.

3°. Направленному отрезку $\overrightarrow{A_1B_1}$ соответствует комплексное число

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}[z_1 - z_2 + z_3(z_2 - z_1)\bar{p}] = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)(z_3 \bar{p} - 1).$$

Найдем аффиксы a', b', c' точек A', B', C'. Уравнение прямой PA имеет вид

$$z - z_1 = \frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z} = 1$ единичной окружности (ABC), получим

$$z - z_1 = \frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right),$$

$$z - z_1 = -\frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1}\,\frac{z - z_1}{z z_1}.$$

Один из корней этого уравнения естественно $z = z_1$ (аффикс точки A); другой (аффикс a' точки A') найдем из уравнения

$$1 = -\frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1}\,\frac{1}{a' z_1},$$

откуда

$$a' = -\frac{1}{z_1}\,\frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1},$$

и аналогичные выражения имеют b' и c'. Итак,

$$a' = -\frac{1}{z_1}\,\frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1},$$

$$b' = -\frac{1}{z_2}\,\frac{p - z_2}{\bar{p} - \bar{z}_2},$$

$$c' = -\frac{1}{z_3}\,\frac{p - z_3}{\bar{p} - \bar{z}_3}.$$

Направленному отрезку $\overrightarrow{A'B'}$ соответствует комплексное число

$$b'-a'=\frac{1}{z_1}\frac{p-z_1}{\bar p-\bar z_1}-\frac{1}{z_2}\frac{p-z_2}{\bar p-\bar z_2}=$$

$$=\frac{z_2(p\bar p-z_1\bar p-\bar z_2\bar p+z_1\bar z_2)-z_1(p\bar p-\bar z_1p-z_2\bar p+\bar z_1z_2)}{z_1z_2(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)}=$$

$$=\frac{z_2\bar pp-z_1z_2\bar p-p+z_1-z_1p\bar p+p+z_1z_2\bar p-z_2}{z_1z_2(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)}=$$

$$=\frac{p\bar p(z_2-z_1)-(z_2-z_1)}{z_1z_2(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)}=\frac{(z_2-z_1)(p\bar p-1)}{z_1z_2(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{b'-a'}{b_1-a_1}=\frac{2(p\bar p-1)}{z_1z_2(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)(z_3\bar p-1)}=$$

$$=\frac{2(p\bar p-1)}{\sigma_3(\bar p-\bar z_1)(\bar p-\bar z_2)(\bar p-\bar z_3)}=\frac{2(p\bar p-1)}{\sigma_3(\bar p^3-\bar\sigma_1\bar p^2+\bar\sigma_2\bar p-\bar\sigma_3)},\tag{75}$$

и так как $\bar\sigma_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$, $\bar\sigma_2=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, то

$$\frac{b'-a'}{b_1-a_1}=\frac{2(p\bar p-1)}{\sigma_3\bar p^3-\sigma_2\bar p^2+\sigma_1\bar p-1}.\tag{76}$$

Обозначая правую часть через λ:

$$\lambda=\frac{2(p\bar p-1)}{\sigma_3\bar p^3-\sigma_2\bar p^2+\sigma_1\bar p-1},$$

получим

$$b'-a'=\lambda(b_1-a_1)$$

и аналогично (в силу того, что λ — симметричная функция от z_1, z_2, z_3)

$$c'-b'=\lambda(c_1-b_1),$$

$$a'-c'=\lambda(a_1-c_1).$$

Следовательно, треугольники $\overrightarrow{A'B'C'}$ и $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию.

Коэффициент подобия можно переписать, исходя из формулы (75), в виде

$$|\lambda|=\frac{2|OP^2-R^2|}{|\bar p-\bar z_1||\bar p-\bar z_2||\bar p-\bar z_3|}=\frac{2|OP^2-R^2|}{PA\cdot PB\cdot PC}.$$

4°. Рассмотрим подобие, переводящее треугольник $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ в треугольник $\overrightarrow{A'B'C'}$. При этом подобии центр O_1 окружности $(A_1B_1C_1)$ перейдет в центр $O'\equiv O$ окружности $(A'B'C')$, а точка H_1 пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ перейдет в точку H' пересечения высот треугольника $A'B'C'$. Так как указанное преобразование подобия имеет вид

$$z'=\lambda z_1+\mu$$

и так как при этом подобии направленный отрезок $\overrightarrow{O_1A_1}$ перейдет в направленный отрезок $\overrightarrow{O'A'} \equiv \overrightarrow{OA'}$, то

$$a' = \lambda (a_1 - o_1), \tag{77}$$

где a', a_1, o_1 — соответственно аффиксы точек A', A_1, O_1. Аналогично

$$\left.\begin{aligned} b' &= \lambda (b_1 - o_1), \\ c' &= \lambda (c_1 - o_1), \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

где b', c', b_1, c_1 — соответственно аффиксы точек B', C', B_1, C_1. Из соотношений (77) и (78) находим

$$a' + b' + c' = \lambda (a_1 + b_1 + c_1 - 3o_1).$$

Далее, используя полученные ранее выражения для a', b', c', имеем

$$a' + b' + c' = -\frac{1}{z_1} \frac{p - z_1}{\bar{p} - \bar{z}_1} - \frac{1}{z_2} \frac{p - z_2}{\bar{p} - \bar{z}_2} - \frac{1}{z_3} \frac{p - z_3}{\bar{p} - \bar{z}_3} = -\frac{1}{\sigma_3} \frac{X}{Y}, \tag{79}$$

где

$$X = z_2 z_3 (p - z_1)(\bar{p} - \bar{z}_2)(\bar{p} - \bar{z}_3) +$$
$$+ z_3 z_1 (p - z_2)(\bar{p} - \bar{z}_3)(\bar{p} + \bar{z}_1) + z_1 z_2 (p - z_3)(\bar{p} - \bar{z}_1)(\bar{p} - \bar{z}_2),$$
$$Y = (\bar{p} - \bar{z}_1)(\bar{p} - \bar{z}_2)(\bar{p} - \bar{z}_3).$$

Далее,

$$z_2 z_3 (\bar{p} - \bar{z}_2)(\bar{p} - \bar{z}_3)(p - z_1) = z_2 z_3 [\bar{p}^2 - (\bar{z}_2 + \bar{z}_3)\bar{p} + \bar{z}_2 \bar{z}_3](p - z_1) =$$
$$= [z_2 z_3 \bar{p}^2 - (z_2 + z_3)\bar{p} + 1](p - z_1) =$$
$$= z_2 z_3 \bar{p}^2 p - (z_2 + z_3) p\bar{p} + p - \sigma_3 \bar{p}^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3)\bar{p} - z_1.$$

Два других слагаемых в числителе формулы (79) будут иметь вид

$$z_3 z_1 \bar{p}^2 p - (z_3 + z_1) p\bar{p} + p - \sigma_3 \bar{p}^2 + (z_2 z_3 + z_2 z_1)\bar{p} - z_2,$$
$$z_1 z_2 \bar{p}^2 p - (z_1 + z_2) p\bar{p} + p - \sigma_3 \bar{p}^2 + (z_3 z_1 + z_3 z_2)\bar{p} - z_3.$$

Складывая последние три выражения, получим

$$X = p\bar{p}^2 \sigma_3 - 2\sigma_1 p\bar{p} + 3p - 3\sigma_3 \bar{p}^2 - 2\sigma_2 \bar{p} - \sigma_1.$$

Итак,

$$a' + b' + c' = \frac{-p\bar{p}^2\sigma_2 + 2\sigma_1 p\bar{p} - 3p + 3\sigma_3\bar{p}^2 - 2\sigma_2\bar{p} + \sigma_1}{\sigma_3 (\bar{p} - \bar{z}_1)(\bar{p} - \bar{z}_2)(\bar{p} - \bar{z}_3)}.$$

Используя полученные выше выражения для a_1, b_1, c_1, находим

$$a_1 + b_1 + c_1 = \frac{1}{2}(2\sigma_1 + 3p - \sigma_2\bar{p}),$$

и так как $\lambda = \dfrac{2(p\bar{p} - 1)}{\sigma_3 (\bar{p} - \bar{z}_1)(\bar{p} - \bar{z}_2)(\bar{p} - \bar{z}_3)}$, то соотношение

$$a' + b' + c' = \lambda (a_1 + b_1 + c_1 - 3o_1),$$

или

$$-3o_1=\frac{1}{\lambda}(a'+b'+c')-(a_1+b_1+c_1)$$

можно переписать так:

$$-6o_1=\frac{-p\bar{p}^2\sigma_2+2\sigma_1 p\bar{p}-3p+3\sigma_3\bar{p}^2-2\sigma_2\bar{p}+\sigma_1}{p\bar{p}-1}-(2\sigma_1+3p-\sigma_2\bar{p})=$$

$$=\frac{-3p^2\bar{p}+3\sigma_3\bar{p}^2-3\sigma_2\bar{p}+3\sigma_1}{p\bar{p}-1},$$

следовательно,

$$o_1=\frac{p^2\bar{p}-\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_2\bar{p}-\sigma_1}{2(p\bar{p}-1)}.$$

Отсюда находим

$$q_1-o_1=\frac{\sigma_3\bar{p}^2-\sigma_2\bar{p}+p+\sigma_1}{2}-\frac{p^2\bar{p}-\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_2\bar{p}-\sigma_1}{2(p\bar{p}-1)}=$$

$$=\frac{\sigma_3 p\bar{p}^3-\sigma_2 p\bar{p}^2+p^2\bar{p}+\sigma_1 p\bar{p}-\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_2\bar{p}-p-\sigma_1-p^2\bar{p}+\sigma_3\bar{p}^2-\sigma_2\bar{p}+\sigma_1}{2(p\bar{p}-1)}=$$

$$=\frac{\sigma_3 p\bar{p}^3-\sigma_2 p\bar{p}^2+\sigma_1 p\bar{p}-p}{2(p\bar{p}-1)}=\frac{\sigma_3 p(\bar{p}^3-\bar{\sigma}_1\bar{p}^2+\bar{\sigma}_2\bar{p}-\bar{\sigma}_3)}{2(p\bar{p}-1)}=$$

$$=\frac{\sigma_3 p(\bar{p}-\bar{z}_1)(\bar{p}-\bar{z}_2)(\bar{p}-\bar{z}_3)}{2(p\bar{p}-1)}.$$

Аффикс t середины T отрезка PP^* будет

$$t=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{\bar{p}}\right)=\frac{p\bar{p}+1}{2\bar{p}}.$$

Имеем

$$t-o_1=\frac{p\bar{p}+1}{2\bar{p}}-\frac{p^2\bar{p}-\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_2\bar{p}-\sigma_1}{2(p\bar{p}-1)}=\frac{p^2\bar{p}^2-1-p^2\bar{p}^2+\sigma_3\bar{p}^3-\sigma_2\bar{p}^2+\sigma_1\bar{p}}{2\bar{p}(p\bar{p}-1)}=$$

$$=\frac{\sigma_3\bar{p}^3-\sigma_2\bar{p}^2+\sigma_1\bar{p}-1}{2\bar{p}(p\bar{p}-1)}=\frac{\sigma_3(\bar{p}-\bar{z}_1)(\bar{p}-\bar{z}_2)(\bar{p}-\bar{z}_3)}{2\bar{p}(p\bar{p}-1)}.$$

Отсюда

$$\overline{t-o_1}=\frac{\bar{\sigma}_3(p-z_1)(p-z_2)(p-z_3)}{2p(p\bar{p}-1)},$$

и, значит,

$$(q_1-o_1)\overline{(t_1-o_1)}=\frac{|p-z_1|^2\,|p-z_2|^2\,|p-z_3|^2}{4(p\bar{p}-1)^2},$$

а это означает, что точки T и Q_1 находятся в инверсии относительно окружности с центром O_1 и радиусом

$$\rho=\frac{|p-z_1|\,|p-z_2|\,|p-z_3|}{2\,|p\bar{p}-1|}=\frac{PA\cdot PB\cdot PC}{2\,|OP^2-R^2|}\qquad(R=1).$$

Радиус окружности $(A_1B_1C_1)=(O_1)$ найдем из соотношения подобия $z'=\lambda z_1+\mu$, переводящего окружность $(A_1B_1C_1)$ в окружность $(A'B'C')$. Так как радиус окружности $(A'B'C')$ равен $R=1$, то радиус R_1 окружности $(A_1B_1C_1)$ будет равен

$$R_1=\frac{R}{|\lambda|}=\left|\frac{\sigma_3(\bar{p}-\bar{z}_1)(\bar{p}-\bar{z}_2)(\bar{p}-\bar{z}_3)}{2(p\bar{p}-1)}\right|=\frac{PA\cdot PB\cdot PC}{2\,|OP^2-R^2|}=\rho.$$

5°. Аффикс ω неподвижной точки Ω подобия, переводящего один из треугольников $A_1B_1C_1$ в другой $A'B'C'$, найдем из того соображения, что при этом подобии треугольник $O_1A_1\Omega$ переходит в треугольник $OA'\Omega$, так что

$$\begin{vmatrix} 0 & o_1 & 1 \\ a' & a_1 & 1 \\ \omega & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\omega = \frac{o_1 a'}{o_1 + a' - a_1}.$$

Далее,

$$a' - a_1 = \frac{z_1 - p}{z_1\bar{p} - 1} - \frac{z_2 + z_3 + p - z_2 z_3 \bar{p}}{2} =$$

$$= \frac{2z_1 - 2p - z_1 z_2 \bar{p} - z_1 z_3 \bar{p} - z_1 p\bar{p} + \sigma_3 \bar{p}^2 + z_2 + z_3 + p - z_2 z_3 \bar{p}}{2(z_1\bar{p} - 1)} =$$

$$= \frac{z_1 - p + \sigma_1 - \sigma_2 \bar{p} - z_1 p\bar{p} + \sigma_3 \bar{p}^2}{2(z_1\bar{p} - 1)},$$

$$o_1 + a' - a_1 = \frac{p^2\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^2 + \sigma_2\bar{p} - \sigma_1}{2(p\bar{p} - 1)} + \frac{z_1 - p + \sigma_1 - \sigma_2\bar{p} - z_1 p\bar{p} + \sigma_3\bar{p}^2}{2(z_1\bar{p} - 1)} =$$

$$= \frac{1}{2(p\bar{p} - 1)(z_1\bar{p} - 1)} (p^2\bar{p}^2 z_1 - \sigma_3\bar{p}^3 z_1 + \sigma_2 z_1 \bar{p}^2 - \sigma_1 z_1 \bar{p} - p^2\bar{p} + \sigma_3\bar{p}^2 -$$

$$- \sigma_2\bar{p} + \sigma_1 + p\bar{p} z_1 - p^2\bar{p} + p\bar{p}\sigma_1 - \bar{p}^2 p\sigma_2 - z_1 p^2 \bar{p}^2 +$$

$$+ \sigma_3 p\bar{p}^3 - z_1 + p - \sigma_1 + \bar{p}\sigma_2 + z_1 p\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^2) =$$

$$= \frac{2p\bar{p}(z_1 - p) - (z_1 - p) + \sigma_2\bar{p}^2(z_1 - p) - \sigma_1\bar{p}(z_1 - p) - \sigma_3\bar{p}^3(z_1 - p)}{2(p\bar{p} - 1)(z_1\bar{p} - 1)} =$$

$$= \frac{(z_1 - p)(2p\bar{p} - 1 + \sigma_2\bar{p}^2 - \sigma_1\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^3)}{2(p\bar{p} - 1)(z_1\bar{p} - 1)}$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{\dfrac{p^2\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^2 + \sigma_2\bar{p} - \sigma_1}{2(p\bar{p} - 1)} \cdot \dfrac{z_1 - p}{z_1\bar{p} - 1}}{\dfrac{(z_1 - p)(2p\bar{p} - 1 + \sigma_2\bar{p}^2 - \sigma_1\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^3)}{2(p\bar{p} - 1)(z_1\bar{p} - 1)}} = \frac{p^2\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^2 + \sigma_2\bar{p} - \sigma_1}{2(p\bar{p} - 1) - (\sigma_3\bar{p}^3 - \sigma_2\bar{p}^2 + \sigma_1\bar{p} - 1)}.$$

Но

$$p^2\bar{p} - \sigma_3\bar{p}^2 + \sigma_2\bar{p} - \sigma_1 = 2o_1(p\bar{p} - 1),$$

$$\sigma_3\bar{p}^3 - \sigma_2\bar{p}^2 + \sigma_1\bar{p} - 1 = 2\bar{p}(p\bar{p} - 1)(t - o_1),$$

значит,

$$\omega = \frac{2o_1(p\bar{p} - 1)}{2(p\bar{p} - 1) - 2\bar{p}(p\bar{p} - 1)(t - o_1)} = \frac{o_1}{1 - \bar{p}(t - o_1)}.$$

6°. Точки P и Q_1 совпадают тогда и только тогда, когда $p = q_1$, т. е.

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_3\bar{p}^2 - \sigma_2\bar{p} + p + \sigma_1)$$

или

$$\sigma_3\bar{p}^2 - \sigma_2\bar{p} - p + \sigma_1 = 0; \qquad (80)$$

отсюда

$$\bar{\sigma}_3 p^2 - \bar{\sigma}_2 p - \bar{p} + \bar{\sigma}_1 = 0,$$

или

$$\frac{1}{\sigma_3} p^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} p - \bar{p} + \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 0,$$

т. е.

$$\bar{p} = \frac{p^2 - \sigma_1 p + \sigma_2}{\sigma_3},$$

и соотношение (80) принимает вид

$$\frac{1}{\sigma_3}(p^4 + \sigma_1^2 p^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 p^3 + 2p^2\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2 p) -$$

$$- \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_2 p^2 - \sigma_1\sigma_2 p + \sigma_2^2) - p + \sigma_1 = 0,$$

или

$$p^4 - 2\sigma_1 p^3 + (\sigma_1^2 + \sigma_2) p^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3) p + \sigma_1\sigma_3 = 0; \tag{81}$$

$p = \sigma_1$ — корень этого уравнения.

Разделив многочлен, стоящий в левой части соотношения (81), на $p - \sigma_1$, получим $p^3 - \sigma_1 p^2 + \sigma_2 p - \sigma_3 = 0$, или $(p - z_1)(p - z_2) \times \times (p - z_3) = 0$. Таким образом, остальные корни уравнения (81)

$$p = z_1, \quad p = z_2, \quad p = z_3.$$

Предполагая, что точка P не совпадает ни с одной из вершин данного треугольника, заключаем, что остается только $p = \sigma_1$. Значит, точки P и Q_1 совпадают тогда и только тогда, когда P есть ортоцентр данного треугольника ABC.

Пример 26. На окружности $(ABC) = (O)$ взята произвольная точка P. Пусть A^* — точка, симметричная точке A относительно прямой OP, а A' — точка, симметричная точке P относительно прямой OA^*. Аналогично построим точки B' и C'. Обозначим через A'', B'', C'' точки, соответственно симметричные точкам A', B', C', относительно прямых BC, CA, AB.

1°. Доказать, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A''B''C''}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию.

2°. Доказать, что треугольник ABC вписан в треугольник $A''B''C''$, а именно, тройки точек A, B'', C''; B, C'', A''; C, A'', B'' лежат на одной прямой.

3°. Доказать, что ортоцентр H треугольника ABC является центром окружности $(A''B''C'')$.

4°. Найти радиус R'' окружности $(A''B''C'')$ и указать способ его построения, зная положение единичной точки на единичной окружности (ABC) и положение точки P на этой окружности.

5°. Каково наибольшее значение R''? Какому положению точки P соответствует это наибольшее значение R''?

6°. При каких положениях точки P все точки A'', B'', C'' совпадают с точкой H?

7°. При скольких и каких положениях точки P треугольники $A''B''C''$ и ABC равны между собой (конгруэнтны)?

8°. Найти аффикс центра подобия треугольников ABC и $A''B''C''$, принимая окружность (ABC) за единичную и зная аффиксы a, b, c, p точек A, B, C, P.

9°. Доказать, что если точка P описывает единичную окружность (ABC), то центр Ω' подобия треугольников ABC и $A''B''C''$ описывает ортоцентроидальную окружность треугольника ABC, т. е. окружность (GH), построенную на отрезке GH как на диаметре (H — ортоцентр треугольника ABC, G — его центр тяжести; отсюда термин *«ортоцентроидальная»*).

10°. При скольких и каких положениях точки P совпадают точки G и Ω'?

11°. При скольких и каких положениях точки P совпадают точки H и Ω'?

12°. Какую линию описывает центр тяжести G'' треугольника $A''B''C''$, если точка P описывает окружность (ABC)?

13°. Доказать, что аффикс центра подобия Ω' треугольников ABC и $A''B''C''$ связан с аффиксом центра тяжести G'' треугольника $A''B''C''$ дробно-линейным соотношением, которое определяет, следовательно, некоторое круговое преобразование плоскости. Доказать, что при этом преобразовании ортоцентроидальная окружность (GH) треугольника ABC инвариантна. Найти неподвижные точки упомянутого преобразования.

14°. Доказать, что центр тяжести G'' треугольника $A''B''C''$, соответствующий центру Ω'_1 подобия треугольников ABC и $A''B''C''$, есть вторая точка пересечения с окружностью (GH) прямой $O_1\Omega^*$, где O_1 — точка, симметричная точке O относительно середины K отрезка GH, а Ω^* — точка, симметричная точке Ω' относительно медиатрисы отрезка GH.

Решение. 1°. Примем окружность (ABC) за единичную окружность, а за единичную точку примем точку Бутена треугольника ABC. Пусть a, b, c, p, a', b', c', a'', b'', c'' — соответственно аффиксы точек A, B, C, P, A', B', C', A'', B'', C''. Тогда $\sigma_3 = abc = 1$. Уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой OP, имеет вид

$$z - a = -p^2(\bar{z} - \bar{a}).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением единичной окружности $z\bar{z} = 1$, будем иметь

$$z - a = p^2 \frac{z - a}{az}.$$

Один из корней этого уравнения $z = a$ — аффикс точки A, другой

$$a^* = p^2/a$$

— аффикс точки A^*.

Угловой коэффициент прямой, перпендикулярный прямой OA^*, равен

$$z - p = \varkappa(\bar{z} - \bar{p}), \quad -\frac{p^2}{a} \Big/ \frac{\bar{p}^2}{\bar{a}} = -\frac{p^4}{a^2}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно OA^*, имеет вид

$$z-p=-\frac{p^4}{a^2}(\bar{z}-\bar{p}).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением единичной окружности $z\bar{z}=1$, найдем аффикс a' точки A':

$$z-p=\frac{p^3}{a^2}\frac{z-p}{z}.$$

Один из корней этого уравнения естественно $z=p$ (аффикс точки P), другой — аффикс точки A': $a'=p^3/a^2$. Аналогично находятся аффиксы точек B' и C'. Итак,

$$a'=\frac{p^3}{a^2}, \quad b'=\frac{p^3}{b^2}, \quad c'=\frac{p^3}{c^2}. \tag{82}$$

Уравнение BC:

$$z+bc\bar{z}=b+c.$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A' на прямую BC:

$$z-\frac{p^3}{a^2}=bc\left(\bar{z}-\frac{\bar{p}^3}{\bar{a}^2}\right),$$

или

$$z-bc\bar{z}=\frac{p^3}{a^2}-bc\frac{a^2}{p^3}.$$

Складывая почленно последние уравнения и уравнение BC, находим аффикс a''_* проекции точки A' на прямую BC:

$$a''_*=\frac{1}{2}\left(b+c+\frac{p^3}{a^2}-a\frac{\sigma_3}{p^3}\right).$$

Аффикс a'' точки A'' находим из соотношения

$$\frac{a'+a''}{2}=a''_*,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{a^2}+a''\right)=\frac{1}{2}\left(b+c+\frac{p^3}{a^2}-a\frac{\sigma_3}{p^3}\right),$$

откуда (так как $\sigma_3=1$)

$$a''=b+c-a\frac{\sigma_3}{p^3}=\sigma_1-a(1+p^{-3}).$$

Аналогично находим b'' и c''. Итак,

$$\left.\begin{aligned} a''&=\sigma_1-(1+p^{-3})a,\\ b''&=\sigma_1-(1+p^{-3})b,\\ c''&=\sigma_1-(1+p^{-3})c. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Таким образом, треугольник $A''B''C''$ получается из треугольника ABC подобным преобразованием первого рода:

$$z''=\sigma_1-(1+p^{-3})z. \tag{84}$$

Следовательно, ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A''B''C''}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию.

2°. Докажем, что треугольник ABC вписан в треугольник $A''B''C''$. Докажем, что прямая $B''C''$ проходит через точку A. Для этого достаточно, например, доказать, что

$$\frac{a-b''}{a-c''}$$

есть число действительное. Воспользовавшись формулами (83), находим

$$\frac{a-b''}{a-c''}=\frac{a-\sigma_1+b\,(1+p^{-3})}{a-\sigma_1+c\,(1+p^{-3})}=\frac{bp^{-3}-c}{cp^{-3}-b}=u.$$

Имеем

$$\bar{u}=\frac{\frac{1}{b}p^3-\frac{1}{c}}{\frac{1}{c}p^3-\frac{1}{b}}=\frac{cp^3-b}{bp^3-c}=\frac{bp^{-3}-c}{cp^{-3}-b}=u.$$

Аналогично доказывается, что прямая $C''A''$ проходит через точку B, а прямая $A''B''$ проходит через точку C.

3°. Образом точки O при подобии (84) будет точка с аффиксом σ_1, т. е. ортоцентр H треугольника ABC. При подобии (84) треугольник ABC переходит в треугольник $A''B''C''$, следовательно, и центр O окружности (ABC) переходит в центр окружности $(A''B''C'')$, т. е. в точку H.

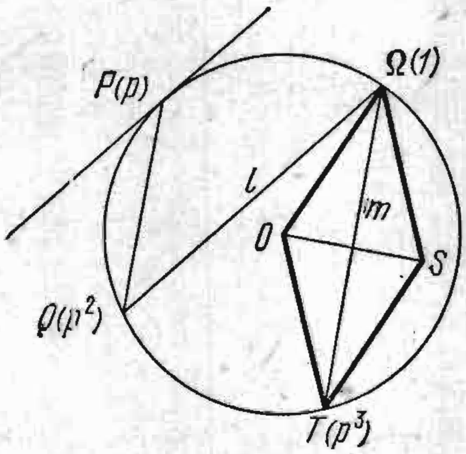


Рис. 29.

4°. Радиус R'' окружности $(A''B''C'')$ равен $|1+p^{-3}|=|1+p^3|$ и, следовательно, может быть построен так (рис. 29): проводим касательную к окружности (O) в точке P и через единичную точку Ω (точка Бутена) проводим прямую l, параллельную этой касательной; вторая точка Q пересечения прямой l с единичной окружностью будет иметь аффикс p^2. Через точку Ω проведем прямую m, параллельную прямой PQ; вторая точка T пересечения прямой m с единичной окружностью будет иметь аффикс p^3. Строим ромб со сторонами $O\Omega$ и OT. Его диагональ $OS=|1+p^3|=R''$, где R'' — радиус окружности $(A''B''C'')$.

5°. Пусть $p=\cos\varphi+i\sin\varphi$; тогда $1+p^3=1+\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi$ и, значит,

$$R''=|1+p^3|=\sqrt{(1+\cos 3\varphi)^2+\sin^2\varphi}=2\,|\cos(3\varphi/2)|.$$

Отсюда следует, что R'' будет наибольшим, притом в два раза больше радиуса R окружности (ABC), тогда и только тогда, когда $|\cos(3\varphi/2)|=1$, откуда $3\varphi/2=\pm k\pi$ и, следовательно, $\varphi=\pm 2k\pi/3$. На единичной окружности имеется всего три точки T_1, T_3, T_5, соответствующие, например, следующим значениям φ:

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_3=2\pi/3, \quad \varphi_5=4\pi/3.$$

При $\varphi_1=0$ получаем единичную точку, т. е. точку Бутена T_1 относительно треугольника ABC; T_3 и T_5 — две другие точки Бутена (треугольник $T_1T_3T_5$ равносторонний, вписанный в окружность (ABC)). Итак, R'' принимает наибольшее значение, равное $R''=2=2R$, тогда и только тогда, когда точка P совпадает с одной из трех точек Бутена треугольника ABC.

6°. Все точки A'', B'', C'' совпадают с точкой H тогда и только тогда, когда $p^3+1=0$, т. е. $p=\sqrt[3]{-1}$. Аффиксы этих точек T_2, T_4, T_6 имеют аргументы

$$\varphi_2=\pi/3, \quad \varphi_4=\pi, \quad \varphi_6=5\pi/3.$$

Эти точки T_2, T_4, T_6 вместе с точками Бутена треугольника ABC образуют правильный шестиугольник $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$, вписанный в окружность (ABC). Итак, все точки A'', B'', C'' совпадают в одну точку тогда и только тогда, когда точка P совпадает с одной из трех вершин T_2, T_4, T_6 правильного шестиугольника, вписанного в окружность (ABC), три другие вершины которого — точки Бутена T_1, T_3, T_5 треугольника ABC.

7°. Треугольники ABC и $A''B''C''$ конгруэнтны при шести положениях точки P. В самом деле: треугольники ABC и $A''B''C''$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда $|p^3+1|=1$, т. е. $2|\cos(3\varphi/2)|=1$, откуда

$$\cos(3\varphi/2)=\pm 1/2, \quad 3\varphi/2=2k\pi\pm\pi/3, \quad 3\varphi/2=2k\pi\pm 2\pi/3,$$

следовательно,

$$\varphi=\frac{4}{3}k\pi\pm\frac{2}{9}\pi, \qquad \varphi=\frac{4}{3}k\pi\pm\frac{4}{9}\pi.$$

На окружности (ABC) имеется всего шесть точек с такими аргументами, которые получаются поворотами радиусов OT_1, OT_3, OT_5 (T_1, T_3, T_5 — точки Бутена треугольника ABC) на углы $\pm 40°$ (повороты радиусов OT_1, OT_2, OT_3 на углы $\pm 80°$ приводят к тем же шести точкам).

8°. Из соотношения

$$z''=\sigma_1-(1+p^{-3})\,z,$$

определяющего подобие, переводящее треугольник ABC в треугольник $A''B''C''$, следует, что аффикс ω' неподвижной точки Ω' этого подобия равен

$$\omega'=\frac{\sigma_1}{2+p^{-3}}.$$

(в указанном соотношении следует положить $z''=z$).

9°. Из соотношения, полученного в п. 8°, следует, что если точка P описывает единичную окружность, то точка Ω' описывает окружность (Ω'), полученную из единичной окружности дробно-линейным преобразованием

$$z' = \frac{\sigma_1}{2+z}.$$

Докажем, что (Ω') есть ортоцентроидальная окружность треугольника ABC, т. е. окружность с диаметром GH. Аффикс k середины K отрезка GH:

$$k = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{3} + \sigma_1\right) = \frac{2}{3}\sigma_1.$$

Далее,

$$|z' - k| =$$

$$= \left|\frac{\sigma_1}{2+z} - \frac{2}{3}\sigma_1\right| = \left|\frac{-\sigma_1 - 2\sigma_1 z}{3(2+z)}\right| = \frac{|\sigma_1|}{3}\left|\frac{1+2z}{2+z}\right| = \frac{|\sigma_1|}{3}\frac{|z||2+\bar{z}|}{|2+z|} = \frac{|\sigma_1|}{3},$$

значит,

$$K\Omega' = OH/3 = GH/2.$$

Следовательно, точка Ω' описывает окружность с диаметром GH.

10°. Точки Ω' и G совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sigma_1}{2+p^{-3}} = \frac{\sigma_1}{3},$$

откуда $p^3 = 1$, т. е. точка P совпадает с одной из точек T_1, T_3, T_5.

11°. Точки Ω' и H совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sigma_1}{2+p^{-3}} = \sigma_1,$$

откуда $p^3 = -1$, т. е. точка P совпадает с одной из точек T_2, T_4, T_6.

12°. Центр тяжести G'' треугольника $A''B''C''$ соответствует центру тяжести G треугольника ABC при подобном преобразовании

$$z'' = \sigma_1 - (1 + p^{-3})z,$$

т. е. аффикс g'' точки G'':

$$g'' = \sigma_1 - (1 + p^{-3})\frac{\sigma_1}{3} = \frac{\sigma_1}{3}(2 - p^{-3}).$$

Отсюда

$$|g'' - k| = \left|\frac{\sigma_1}{3}(2 - p^{-3}) - \frac{2\sigma_1}{3}\right| = \frac{|\sigma_1|}{3},$$

т. е. если точка P описывает единичную окружность, то точка G'' описывает ортоцентроидальную окружность (GH) треугольника ABC.

13°. Исключая p из соотношений

$$\omega' = \frac{\sigma_1}{2+p^{-3}}, \quad g'' = \frac{\sigma_1}{3}(2 - p^{-3}),$$

получим

$$2+p^{3}=\frac{\sigma_1}{\omega'}, \quad 2-p^{-3}=\frac{3g''}{\sigma_1},$$

откуда

$$3g''\omega'-4\omega'\sigma_1+\sigma_1^2=0.$$

В этом соотношении σ_1 фиксировано, следовательно, оно выражает g'' как дробно-линейную функцию от ω' (обе точки G'' и Ω' с аффиксами g'' и ω' лежат на окружности с диаметром GH), и потому эта функция преобразует ортоцентроидальную окружность (GH) треугольника ABC в себя. Неподвижные точки этого преобразования найдем из уравнения $3z^2-4\sigma_1 z+\sigma_1^2=0$, откуда

$$z=\sigma_1, \quad z=\sigma_1/3$$

— это аффиксы точек H и G.

14°. Аффикс o_1 точки O_1 равен

$$o_1=\frac{4}{3}\sigma_1.$$

Угловой коэффициент прямой GH равен $\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}$. Следовательно, уравнение прямой, проходящей через точку Ω' параллельной GH:

$$z-\omega'=\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}(\bar{z}-\bar{\omega}'),$$

или

$$z-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{z}=\omega'-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{\omega}'. \tag{85}$$

Уравнение медиатрисы отрезка GH:

$$z-\frac{2}{3}\sigma_1=-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\left(\bar{z}-\frac{2}{3}\bar{\sigma}_1\right),$$

или

$$z+\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{z}=\frac{4}{3}\sigma_1. \tag{86}$$

Складывая почленно уравнения (85) и (86), найдем аффикс π проекции точки Ω' на медиатрису отрезка GH:

$$\pi=\frac{1}{2}\left(\omega'+\frac{4}{3}\sigma_1-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{\omega}'\right).$$

Аффикс ω^* точки Ω^* найдем из соотношения

$$\frac{\omega'+\omega^*}{2}=\pi=\frac{1}{2}\left(\omega'+\frac{4}{3}\sigma_1-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{\omega}'\right),$$

откуда

$$\omega^*=\frac{4}{3}\sigma_1-\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\bar{\omega}',$$

но

$$\bar{\omega}'=\frac{\bar{\sigma}_1}{2+\bar{p}^{-3}},$$

следовательно,

$$\omega^* = \frac{4}{3}\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2+\bar{p}^{-3}}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} o_1 & \omega^* & g'' \\ \bar{o}_1 & \bar{\omega}^* & \bar{g}'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3}\sigma_1 & \frac{4}{3}\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{2+\bar{p}^{-3}} & \frac{\sigma_1}{3}(2-p^{-3}) \\ \frac{4}{3}\bar{\sigma}_1 & \frac{4}{3}\bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_1}{2+p^{-3}} & \frac{\bar{\sigma}_1}{3}(2-\bar{p}^{-3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_1\bar{\sigma}_1 \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2+\bar{p}^{-3}} & -\frac{1}{3}(2+p^{-3}) \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{2+p^{-3}} & -\frac{1}{3}(2+\bar{p}^{-3}) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 27. Пусть P, Q, R — ортогональные проекции точки M на стороны BC, CA, AB треугольника ABC; A_0, B_0, C_0 — середины отрезков MA, MB, MC, а A', B', C' — точки, полученные

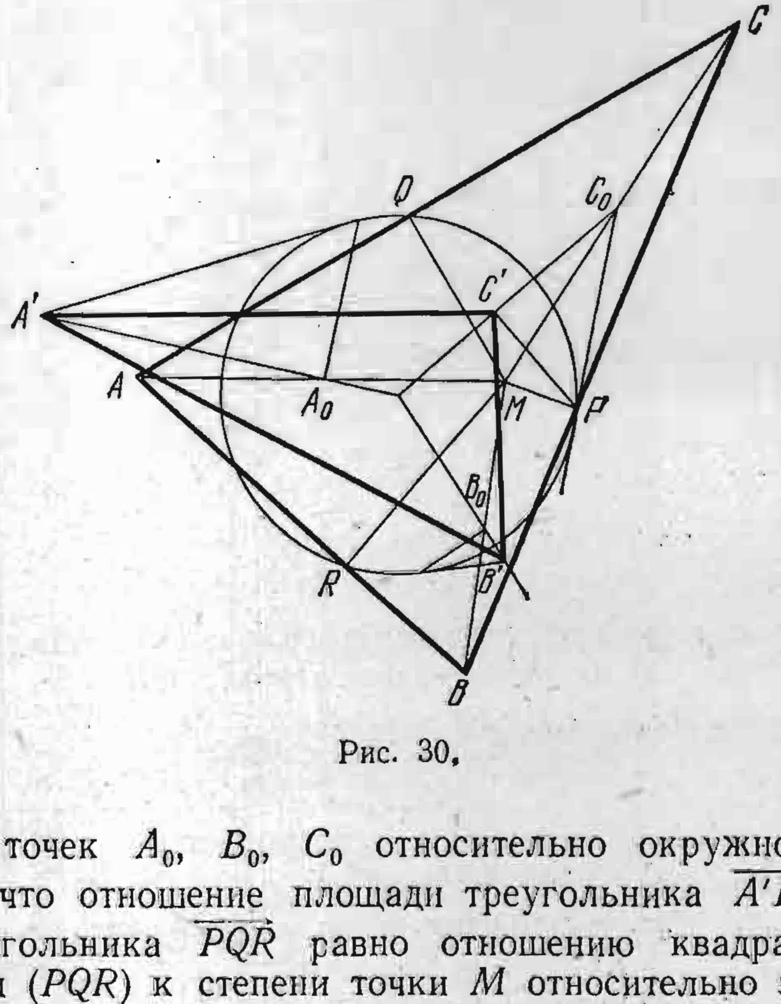


Рис. 30.

инверсией точек A_0, B_0, C_0 относительно окружности (PQR). Доказать, что отношение площади треугольника $\overrightarrow{A'B'C'}$ к площади треугольника $\overrightarrow{PQR}$ равно отношению квадрата радиуса окружности (PQR) к степени точки M относительно этой окружности, взятому с обратным знаком (рис. 30).

Решение. Примем окружность (PQR) за единичную окружность. Пусть z_1, z_2, z_3, z_0 — соответственно аффиксы точек P, Q, R, M. Так как радиус окружности (PQR) мы считаем равным 1, то степень точки M относительно окружности (PQR) равна $\sigma = z_0\bar{z}_0 - 1$. Таким образом, надо доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{A'B'C'}}{\overrightarrow{PQR}} = -\frac{1}{\sigma}.$$

Уравнение прямой MQ имеет вид

$$z - z_0 = \frac{z_0 - z_2}{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}(\bar{z} - \bar{z}_0),$$

или

$$(\bar{z}_0 - \bar{z}_2)\, z - (z_0 - z_2)\,\bar{z} = \bar{z}_0 z_2 - z_0\bar{z}_2.$$

Угловой коэффициент прямой AQ равен $-\dfrac{z_0 - z_2}{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}$, а потому уравнение этой прямой имеет вид

$$z - z_2 = -\frac{z_0 - z_2}{\bar{z}_0 - \bar{z}_2}(\bar{z} - \bar{z}_2),$$

или

$$(\bar{z}_0 - \bar{z}_2)\, z + (z_0 - z_2)\,\bar{z} = z_2\bar{z}_0 + \bar{z}_2 z_0 - 2. \tag{87}$$

Аналогично получим уравнение прямой AR:

$$(\bar{z}_0 - \bar{z}_3)\, z + (z_0 - z_3)\,\bar{z} = z_3\bar{z}_0 + \bar{z}_3 z_0 - 2. \tag{88}$$

Решая систему уравнений (87) и (88), находим аффикс a точки A:

$$a = \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} z_2\bar{z}_0 + \bar{z}_2 z_0 - 2 & z_0 - z_2 \\ z_3\bar{z}_0 + \bar{z}_3 z_0 - 2 & z_0 - z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{z}_0 - \bar{z}_2 & z_0 - z_2 \\ \bar{z}_0 - \bar{z}_3 & z_0 - z_3 \end{vmatrix}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\Delta' &= (z_2\bar{z}_0 + \bar{z}_2 z_0 - 2)(z_0 - z_3) - (z_3\bar{z}_0 + \bar{z}_3 z_0 - 2)(z_0 - z_2) = \\
&= z_2\bar{z}_0 z_0 + \bar{z}_2 z_0^2 - 2z_0 - z_2 z_3\bar{z}_0 - z_3\bar{z}_2 z_0 + 2z_3 - \\
&\qquad - z_3 z_0\bar{z}_0 - \bar{z}_3 z_0^2 + 2z_0 + z_2 z_3\bar{z}_0 + \bar{z}_3 z_2 z_0 - 2z_2 = \\
&= (z_2 - z_3)\, z_0\bar{z}_0 + z_0^2\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right) + z_0\left(\frac{z_2}{z_3} - \frac{z_3}{z_2}\right) - 2(z_2 - z_3) = \\
&= (z_2 - z_3)\left(z_0\bar{z}_0 - \frac{z_0^2}{z_2 z_3} + \frac{z_2 + z_3}{z_2 z_3} z_0 - 2\right) = \\
&= (z_2 - z_3)\,\frac{z_0\bar{z}_0 z_2 z_3 - z_0^2 + (z_2 + z_3)\, z_0 - 2z_2 z_3}{z_2 z_3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= (\bar{z}_0 - \bar{z}_2)(z_0 - z_3) - (z_0 - z_2)(\bar{z}_0 - \bar{z}_3) = \\
&= \bar{z}_0 z_0 - \bar{z}_0 z_3 - \bar{z}_2 z_0 + \bar{z}_2 z_3 - z_0\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_0 - z_2\bar{z}_3 = \\
&= \bar{z}_0(z_2 - z_3) + z_0\left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2}\right) + \frac{z_3}{z_2} - \frac{z_2}{z_3} = (z_2 - z_3)\,\frac{z_0 + z_2 z_3\bar{z}_0 - z_2 - z_3}{z_2 z_3}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$a = \frac{-z_0^2 + (z_2 z_3\bar{z}_0 + z_2 + z_3)\, z_0 - 2z_2 z_3}{z_0 + z_2 z_3\bar{z}_0 - z_2 - z_3}.$$

Аффикс a_0 середины A_0 отрезка AM:

$$a_0 = \frac{z_0+a}{2} = \frac{z_0^2 + z_2z_3z_0\bar{z}_0 - z_2z_0 - z_3z_0 - z_0^2 + z_2z_3z_0\bar{z}_0 + z_0z_2 + z_0z_3 - 2z_2z_3}{2(z_0 + z_2z_3\bar{z}_0 - z_2 - z_3)} =$$

$$= \frac{z_2z_3(z_0\bar{z}_0 - 1)}{z_0 + z_2z_3\bar{z}_0 - z_2 - z_3}.$$

Аффикс a' точки A' равен $1/\bar{a}_0$, т. е.

$$a' = \frac{\bar{z}_0 + \frac{1}{z_2z_3}z_0 - \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2z_3}(z_0\bar{z}_0 - 1)} = \frac{z_0 + z_2z_3\bar{z}_0 - z_2 - z_3}{z_0\bar{z}_0 - 1} = \frac{1}{\sigma}(z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_1\sigma_3 + z_1 - \sigma_1).$$

Теперь имеем

$$\bar{a}' = \frac{1}{\sigma}(\bar{z}_0 + z_0z_1\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_1 - \bar{\sigma}_1).$$

Аналогично

$$b' = \frac{1}{\sigma}(z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_2\sigma_3 + z_2 - \sigma_1),$$

$$c' = \frac{1}{\sigma}(z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_3\sigma_3 + z_3 - \sigma_1),$$

$$\bar{b}' = \frac{1}{\sigma}(\bar{z}_0 + z_0z_2\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_2 - \bar{\sigma}_1),$$

$$\bar{c}' = \frac{1}{\sigma}(\bar{z}_0 + z_0z_3\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_3 - \bar{\sigma}_1)$$

и, следовательно,

$$\overline{A'B'C'} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} a' & \bar{a}' & 1 \\ b' & \bar{b}' & 1 \\ c' & \bar{c}' & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4\sigma^2}\begin{vmatrix} z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_1\sigma_3 + z_1 - \sigma_1 & \bar{z}_0 + z_0z_1\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_1 - \bar{\sigma}_1 & 1 \\ z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_2\sigma_3 + z_2 - \sigma_1 & \bar{z}_0 + z_0z_2\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_2 - \bar{\sigma}_1 & 1 \\ z_0 + \bar{z}_0\bar{z}_3\sigma_3 + z_3 - \sigma_1 & \bar{z}_0 + z_0z_3\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_3 - \bar{\sigma}_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{4\sigma^2}\begin{vmatrix} \bar{z}_0\bar{z}_1\sigma_3 + z_1 & z_0z_1\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{z}_0\bar{z}_2\sigma_3 + z_2 & z_0z_2\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{z}_0\bar{z}_3\sigma_3 + z_3 & z_0z_3\bar{\sigma}_3 + \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4\sigma^2}\left[z_0\bar{z}_0 \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1 \\ \bar{z}_2 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\overline{PQR},$$

откуда

$$\frac{\overline{A'B'C'}}{\overline{PQR}} = \frac{\overline{A'B'C'}}{\overline{PQR}} = -\frac{1}{\sigma}.$$

Пример 28. $A_1A_2A_3$ — произвольный треугольник; P — произвольная точка. Через точку P проводятся две взаимно перпендикулярные прямые δ и δ'. Пусть эти прямые пересекают сторону A_2A_3 соответственно в точках B_2 и B_3, а высоту, опущенную из точки A_1 на сторону A_2A_3, в точках B_2' и B_3'. Аналогично строятся точки C_3 и C_1, C_3' и C_1' для стороны A_3A_1 и высоты, опущенной из вершины A_2 на эту сторону, и точки D_1 и D_2, D_1' и D_2' для стороны A_1A_2 и высоты, опущенной из точки A_3 на сторону A_1A_2. Доказать, что центры тяжести трех групп точек B_2, B_3, B_2', B_3'; C_3, C_1, C_3', C_1'; D_1, D_2, D_1', D_2' лежат на одной прямой (во всех указанных двенадцати точках помещена масса одной и той же величины) (рис. 31).

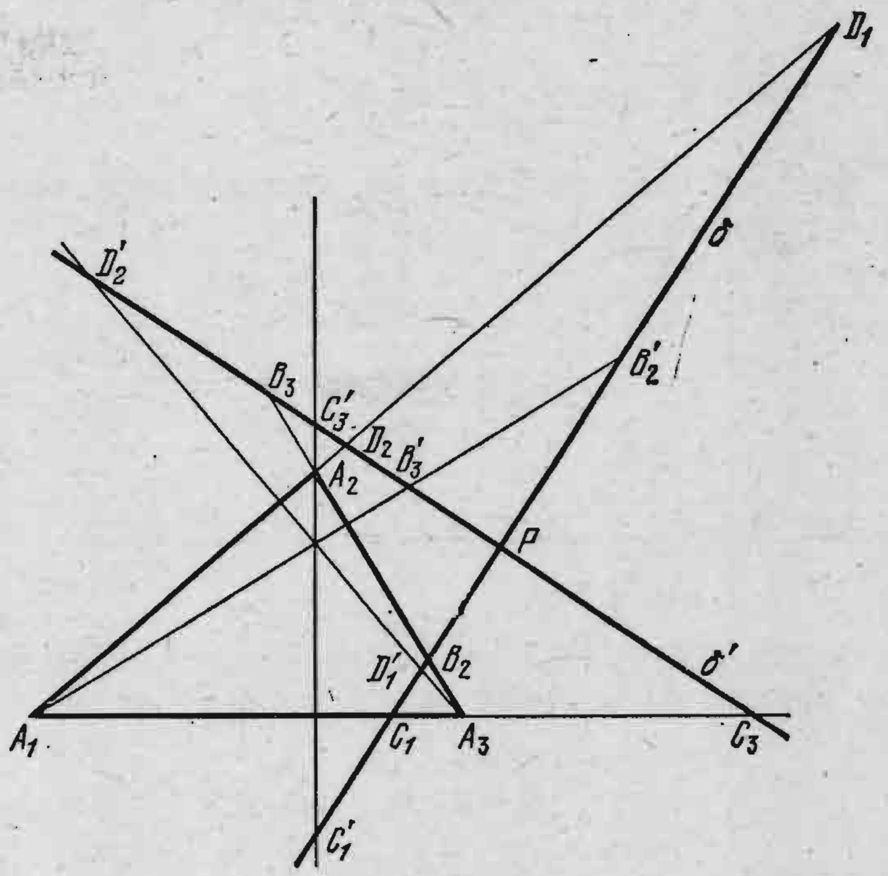


Рис. 31.

Решение. Примем окружность $(A_1A_2A_3)$ за единичную окружность. Пусть z_1, z_2, z_3, p — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, P. Запишем уравнения прямых δ и δ' в виде

$$z - p = \tau(\bar{z} - \bar{p}), \quad \text{или} \quad z - \tau\bar{z} = p - \tau\bar{p}, \tag{89}$$

$$z - p = -\tau(\bar{z} - \bar{p}), \quad \text{или} \quad z + \tau\bar{z} = p + \tau\bar{p}, \tag{90}$$

где $|\tau| = 1$. Уравнение прямой A_2A_3 имеет вид

$$z + z_2z_3\bar{z} = z_2 + z_3. \tag{91}$$

Вычитая почленно из уравнения (91) уравнение (89), найдем число $\bar{b}_2$, сопряженное аффиксу b_2 точки B_2:

$$\bar{b}_2 = \frac{z_2 + z_3 - p + \tau\bar{p}}{z_2z_3 + \tau}. \tag{92}$$

Отсюда

$$b_2 = \frac{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} - \bar{p} + \frac{1}{\tau}p}{\frac{1}{z_2z_3} + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau(z_2 + z_3 - z_2z_3\bar{p}) + z_2z_3p}{z_2z_3 + \tau}. \tag{93}$$

Заменяя в полученных формулах τ на $-\tau$, находим аффикс b_3 точки B_3 и $\bar{b}_3$:

$$b_3 = \frac{-\tau(z_2+z_3-z_2z_3\bar{p})+z_2z_3p}{z_2z_3-\tau},$$

$$\bar{b}_3 = \frac{z_2+z_3-p-\tau\bar{p}}{z_2z_3-\tau}.$$

Из этих формул находим число $\bar{b}_{23}$, сопряженное аффиксу b_{23} середины B_{23} отрезка B_2B_3:

$$\bar{b}_{23} = \frac{\bar{b}_2+\bar{b}_3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2+z_3-p+\tau\bar{p}}{z_2z_3+\tau}+\frac{z_2+z_3-p-\tau\bar{p}}{z_2z_3-\tau}\right) =$$

$$= \frac{z_2z_3(z_2+z_3)-pz_2z_3-\tau^2\bar{p}}{z_2^2z_3^2-\tau^2}.$$

Отсюда

$$b_{23} = \frac{\frac{1}{z_2z_3}\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)-\bar{p}\,\frac{1}{z_2z_3}-\frac{1}{\tau^2}\,p}{\frac{1}{z_2^2z_3^2}-\frac{1}{\tau^2}} = \frac{z_2^2z_3^2p+\tau^2\bar{p}z_2z_3-(z_2+z_3)\,\tau^2}{z_2^2z_3^2-\tau^2}.$$

Далее, уравнение прямой, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой A_2A_3, имеет вид

$$z-z_1 = z_2z_3(\bar{z}-\bar{z}_1),$$

или

$$z-z_2z_3\bar{z} = z_1-\frac{z_2z_3}{z_1}. \tag{94}$$

Вычитая почленно из уравнения (89) уравнение (94), находим аффикс $\bar{b}_2'$, сопряженный аффиксу b_2' точки B_2':

$$\bar{b}_2' = \frac{p-\tau\bar{p}-z_1+\frac{z_2z_3}{z_1}}{z_2z_3-\tau},$$

и аналогично

$$\bar{b}_3' = \frac{p+\tau\bar{p}-z_1+\frac{z_2z_3}{z_1}}{z_2z_3+\tau}.$$

Число $\bar{b}_{23}'$, сопряженное аффиксу b_{23}' середины B_{23}' отрезка $B_2'B_3'$:

$$\bar{b}_{23}' = \frac{1}{2}\left(\frac{p-\tau\bar{p}-z_1+\frac{z_2z_3}{z_1}}{z_2z_3-\tau}+\frac{p+\tau\bar{p}-z_1+\frac{z_2z_3}{z_1}}{z_2z_3+\tau}\right) = \frac{z_2z_3p-\sigma_3+\frac{z_2^2z_3^2}{z_1}-\tau^2\bar{p}}{z_2^2z_3^2-\tau^2}.$$

Отсюда

$$b_{23}' = \frac{\frac{1}{z_2z_3}\bar{p}-\frac{1}{\sigma_3}+\frac{z_1}{z_2^2z_3^2}-\frac{1}{\tau^2}\,p}{\frac{1}{z_2^2z_3^2}-\frac{1}{\tau^2}} = \frac{pz_2^2z_3^2-z_1\tau^2+\frac{z_2z_3}{z_1}\tau^2-z_2z_3\bar{p}\tau^2}{z_2^2z_3^2-\tau^2}.$$

Аффикс λ центра тяжести группы точек B_2, B_3, B_2', B_3', в которых помещены равные массы, равен аффиксу середины отрезка $B_{23}B_{23}'$, концами B_{23} и B'_{23} которого являются середины отрезков B_2B_3 и $B'_2B'_3$:

$$\lambda = \frac{b_{23}+b'_{23}}{2} = \frac{2z_2^2z_3^2p-\tau^2\left(\sigma_1-\dfrac{z_2z_3}{z_1}\right)}{2\,(z_2^2z_3^2-\tau^2)}. \qquad (95)$$

Докажем, что точка с аффиксом λ лежит на прямой Δ, заданной уравнением[1])

$$2z\left(2\bar{p}+\frac{\sigma_3}{\tau^2}-\bar{\sigma}_1\right)+2\bar{z}\left(2p+\frac{\tau^2}{\sigma_3}-\sigma_1\right)=$$
$$=\left(2p+\frac{\tau^2}{\sigma_3}\right)\left(2\bar{p}+\frac{\sigma_3}{\tau^2}\right)-\sigma_1\bar{\sigma}_1. \qquad (96)$$

Имеем

$$\bar{\lambda}=\frac{2\bar{p}\,\dfrac{1}{z_2^2z_3^2}-\dfrac{1}{\tau^2}\left(\bar{\sigma}_1-\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right)}{2\left(\dfrac{1}{z_2^2z_3^2}-\dfrac{1}{\tau^2}\right)}=\frac{\bar{\sigma}_1z_2^2z_3^2-\sigma_3-2\bar{p}\tau^2}{2\,(z_2^2z_3^2-\tau^2)}. \qquad (97)$$

Подсчитаем левую часть уравнения (96), полагая $z=\lambda$, $\bar{z}=\bar{\lambda}$ (знаменатель $z_2^2z_3^2-\tau^2$ пока опускаем):

$$\left(2pz_2^2z_3^2-\tau^2\sigma_1+\tau^2\frac{z_2z_3}{z_1}\right)\left(2\bar{p}+\frac{\sigma_3}{\tau^2}-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)+$$
$$+\left(z_2^2z_3^2\frac{\sigma_2}{\sigma_3}-\sigma_3-2\bar{p}\tau^2\right)\left(2p+\frac{\tau^2}{\sigma_3}-\sigma_1\right)=$$
$$=4p\bar{p}z_2^2z_3^2+2pz_2^2z_3^2\frac{\sigma_3}{\tau^2}-2p\frac{\sigma_2}{\sigma_3}z_2^2z_3^2-2\bar{p}\tau^2\sigma_1-\sigma_1\sigma_3+\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}\tau^2+$$
$$+2\bar{p}\tau^2\frac{z_2z_3}{z_1}+\sigma_3\frac{z_2z_3}{z_1}-\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\tau^2\frac{z_2z_3}{z_1}+2pz_2^2z_3^2\frac{\sigma_2}{\sigma_3}+\tau^2\frac{\sigma_2}{\sigma_3^2}z_2^2z_3^2-$$
$$-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}z_2^2z_3^2-2p\sigma_3-\tau^2+\sigma_3\sigma_1-4p\bar{p}\tau^2-2\bar{p}\frac{\tau^4}{\sigma_3}+2\bar{p}\tau^2\sigma_1=$$
$$=4p\bar{p}\,(z_2^2z_3^2-\tau^2)+z_2^2z_3^2-\tau^2-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}(z_2^2z_3^2-\tau^2)+$$
$$+2p\frac{\sigma_3}{\tau^2}(z_2^2z_3^2-\tau^2)+\frac{2\bar{p}\tau^2}{\sigma_3}(z_2^2z_3^2-\tau^2).$$

---

[1]) Уравнение этой прямой можно было бы составить, определив аналогично аффикс μ центра тяжести второй группы точек C_3, C_1, C'_3, C'_1:

$$\mu=\frac{2z_3^2z_1^2p-\tau^2\left(\sigma_1-\dfrac{z_3z_1}{z_2}\right)}{2\,(z_3^2z_1^2-\tau^2)},$$

определив еще аффикс ν группы точек D_1, D_2, D'_1, D'_2, можно проверить выполнимость необходимого и достаточного условия коллинеарности трех точек

$$\begin{vmatrix}\lambda & \bar{\lambda} & 1\\ \mu & \bar{\mu} & 1\\ \nu & \bar{\nu} & 1\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, левая часть при $z=\lambda$ равна

$$4p\bar{p}+1-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}+2p\frac{\sigma_3}{\tau^2}+\frac{2\bar{p}\tau^2}{\sigma_3}.$$

Правая часть уравнения (96)

$$4p\bar{p}+\frac{2p\sigma_3}{\tau^2}+2\bar{p}\frac{\tau^2}{\sigma_3}+1-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3},$$

т. е. то же самое, что и в левой части. Симметрия уравнения (96) доказывает теорему. Вместе с тем уравнение (96) есть уравнение прямой, на которой лежат три центра тяжести трех групп точек

$$B_2,\ B_3,\ B_2',\ B_3';\quad C_3,\ C_1,\ C_3',\ C_1';\quad D_1,\ D_2,\ D_1',\ D_2'.$$

Из доказанной теоремы вытекает следующее следствие (*теорема Дроз — Фарни* (Droz — Farny)) (рис. 32): если через ортоцентр H

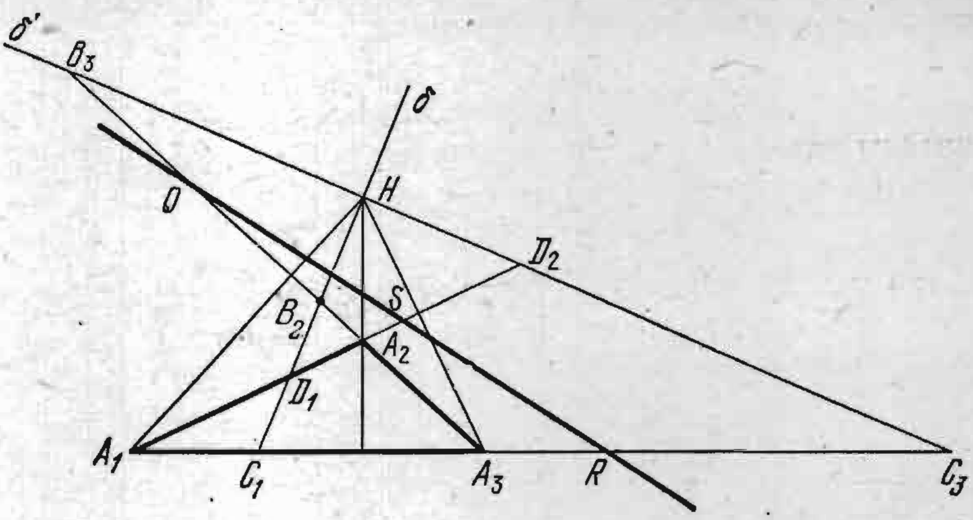


Рис. 32.

треугольника $A_1A_2A_3$ провести две взаимно перпендикулярные прямые, которые высекут на сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 отрезки B_2B_3, C_3C_1, D_1D_2, то середины отрезков B_2B_3, C_3C_1, D_1D_2 лежат на одной прямой. Эта теорема может быть конечно доказана и непосредственно (и ее доказательство значительно менее технично, чем то, которое дано в этом примере, обобщающем теорему Дроз — Фарни). При непосредственном доказательстве теоремы Дроз — Фарни следует учесть, что σ_1 есть аффикс ортоцентра H треугольника $A_1A_2A_3$.

Очевидно, что прямая Дроз — Фарни получается из прямой Δ, данной в обобщении (для того же случая $P=H$) при гомотетии (H, 1/2); точки B_2', B_3' сольются с точкой H и центром тяжести группы точек B_2, B_3, B_2', B_3' будет середина отрезка HB_{23}, где B_{23} — середина отрезка B_2B_3. Аналогично и для точек C_3', C_1' и D_1', D_2'.

Пример 29. Пусть I — центр окружности (I), вписанной в треугольник ABC; D, E, F — точки прикосновения окружности (I) соответственно со сторонами BC, CA, AB; H — ортоцентр треугольника DEF; δ — какой-нибудь диаметр окружности (I); D', E', F' — точки, симметричные соответственно точкам D, E, F относительно прямой δ. Доказать, что если P_a, P_b, P_c — точки, симметричные произвольной точке P относительно сторон $E'F'$, $F'D'$, $D'E'$ треугольника $D'E'F'$, и α, β, γ — точки, симметричные точкам P_a, P_b, P_c соответственно относительно сторон BC, CA, AB треугольника ABC, то центр Q окружности $(\alpha\beta\gamma)$ обладает тем свойством, что прямая Симсона точки Q относительно треугольника DEF параллельна прямой δ. Доказать, что если построить направленный отрезок $\overrightarrow{QN}$, эквивалентный направленному отрезку $\overrightarrow{HP^*}/2$, где P^* — точка, симметричная точке P относительно прямой δ, то радиус окружности $(\alpha\beta\gamma)$ будет равен $2IN$.

Решение. Примем окружность $(I)=(DEF)$ за единичную окружность, а диаметр δ примем за действительную ось. Пусть z_1, z_2, z_3, p — аффиксы точек D, E, F, P. Тогда аффиксы b и c точек B и C будут

$$b=\frac{2z_3z_1}{z_3+z_1}, \quad c=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2},$$

а им сопряженные

$$\bar{b}=\frac{2}{z_3+z_1}, \quad \bar{c}=\frac{2}{z_1+z_2}.$$

Найдем аффикс p_a точки P_a. Аффиксы точек D', E', F' будут $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\bar{z}_3$. Угловой коэффициент прямой $E'F'$ равен

$$\frac{\bar{z}_2-\bar{z}_3}{z_2-z_3}=\frac{\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}}{z_2-z_3}=-\frac{1}{z_2z_3}.$$

Уравнение прямой $E'F'$:

$$z-\bar{z}_2=-\frac{1}{z_2z_3}(\bar{z}-z_2),$$

или

$$z+\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}=\bar{z}_2+\bar{z}_3. \tag{98}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на эту прямую:

$$z-p=\frac{1}{z_2z_3}(\bar{z}-\bar{p}),$$

или

$$z-\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}=p-\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{p}. \tag{99}$$

Из уравнений (98) и (99) найдем аффикс p_a^* проекции точки P на прямую $E'F'$:

$$p_a^*=\frac{1}{2}(\bar{z}_2+\bar{z}_3+p-\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{p}).$$

Аффикс p_a точки P_a, симметричной точке P относительно прямой $E'F'$, найдем из соотношения

$$\frac{p+p_a}{2}=p_a^*=\frac{1}{2}(\bar{z}_2+\bar{z}_3-\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{p}+p),$$

откуда

$$p_a=\bar z_2+\bar z_3-\bar z_2\bar z_3\bar p.$$

Угловой коэффициент прямой $\bar{I}D$ равен $z_1/\bar z_1=z_1^2$, а угловой коэффициент BC равен $-z_1^2$. Уравнение BC:

$$z-z_1=-z_1^2(\bar z-\bar z_1),$$

или

$$z+z_1^2\bar z=2z_1. \tag{100}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P_a на сторону BC:

$$z-p_a=z_1^2(\bar z-\bar p_a),$$

или

$$z-z_1^2\bar z=p_a-z_1^2\bar p_a. \tag{101}$$

Из уравнений (100) и (101) находим аффикс $\tilde p_a$ проекции точки P_a на прямую BC:

$$\tilde p_a=\frac{1}{2}(p_a-z_1^2\bar p_a+2z_1),$$

а из соотношения

$$\frac{\lambda+p_a}{2}=\tilde p_a=\frac{1}{2}(p_a-z_1^2\bar p_a+2z_1)$$

находим аффикс λ точки α:

$$\begin{aligned}\lambda=2z_1-z_1^2(z_2+z_3-z_2z_3p)=2z_1-z_1(z_1z_2+z_1z_3-\sigma_3p)=\\=2z_1-z_1(\sigma_2-z_2z_3-\sigma_3p)=\sigma_3+z_1(2-\sigma_2+p\sigma_3).\end{aligned}$$

Аналогичные выражения имеют аффиксы μ и ν точек β и γ:

$$\mu=\sigma_3+z_2(2-\sigma_2+p\sigma_3),$$
$$\nu=\sigma_3+z_3(2-\sigma_2+p\sigma_3).$$

Отсюда следует, что точки α, β, γ лежат на окружности, аффикс центра которой равен σ_3, а так как $|\sigma_3|=1$, то этот центр лежит на окружности (DEF). Радиус окружности $(\alpha\beta\gamma)$ равен

$$\begin{aligned}\rho=|2-\sigma_2+p\sigma_3|=|2-\bar\sigma_2+\bar p\bar\sigma_3|=\left|2-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}+\frac{\bar p}{\sigma_3}\right|=\\=\frac{|2\sigma_3-\sigma_1+\bar p|}{|\sigma_3|}=|2\sigma_3-\sigma_1+\bar p|=2\left|\sigma_3+\frac{1}{2}(\bar p-\sigma_1)\right|.\end{aligned}$$

То обстоятельство, что прямая Симсона, соответствующая точке с аффиксом σ_3, параллельна действительной оси, следует из примера 3.

Аффикс p^* точки P^*, симметричной точке P относительно прямой δ, равен $p^*=\bar p$. Направленному отрезку $\overrightarrow{HP^*}$ соответствует комплексное число $p^*-\sigma_1=\bar p-\sigma_1$ [1]).

---

[1]) Пусть точки A и B имеют аффиксы a и b. Мы будем говорить, что направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$ соответствует комплексное число $b-a$.

Направленному отрезку $\overrightarrow{HP}^*/2 \equiv \overrightarrow{QN}$ соответствует комплексное число $(\bar{p}-\sigma_1)/2 = n - \sigma_3$, где n — аффикс точки N. Отсюда $n = \sigma_3 + (\bar{p}-\sigma_1)/2$. Так как n — аффикс точки N, а окружность (I) принята за единичную, то

$$IN = |n| = \left|\sigma_3 + \frac{1}{2}(\bar{p}-\sigma_1)\right| = \frac{1}{2}\rho.$$

Пример 30. На окружности (O) взяты произвольно четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4. Возьмем любой из шести отрезков, соединяющих эти точки между собой попарно, например, отрезок A_1A_2.

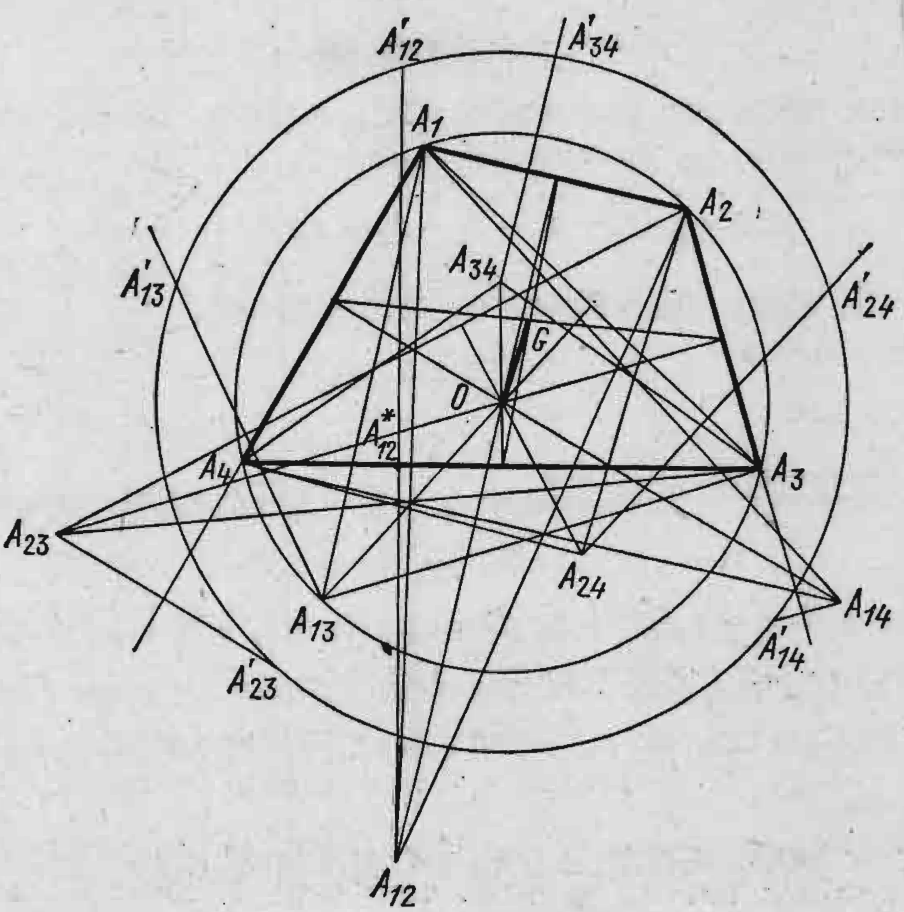


Рис. 33.

Построим равнобедренный треугольник $A_1A_2A_{12}$ с вершиной A_{12}, основанием A_1A_2 и так, чтобы его центр тяжести совпадал с точкой O. Пусть A'_{12} — точка, симметричная точке A_{12} относительно прямой A_3A_4. Доказать, что шесть полученных таким образом точек A'_{12}, A'_{13}, A'_{14}, A'_{23}, A'_{24}, A'_{34} лежат на одной окружности (S), концентрической окружности (O), причем радиус окружности (S) в четыре раза больше расстояния от точки O до центра тяжести G системы четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4 (рис. 33).

Решение. Примем окружность (O) за единичную, и пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, A_4. Аффикс α_{12} середины отрезка A_1A_2 будет $\alpha_{12} = (z_1+z_2)/2$, значит, аффикс a_{12} вершины A_{12} равнобедренного треугольника $A_1A_2A_{12}$

$(A_1A_{12}=A_2A_{12})$, центр тяжести которого совпадает с точкой O, будет

$$a_{12}=-(z_1+z_2).$$

Уравнение прямой A_3A_4:

$$z+z_3z_4\bar{z}=z_3+z_4. \qquad (102)$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A_{12} на прямую A_3A_4:

$$z+z_1+z_2=z_3z_4(\bar{z}+\bar{z}_1+\bar{z}_2),$$

или

$$z-z_3z_4\bar{z}=-z_1-z_2+z_3z_4\bar{z}_1+z_3z_4\bar{z}_2. \qquad (103)$$

Складывая почленно уравнения (102) и (103), найдем аффикс a_{12}^* проекции точки A_{12} на прямую A_3A_4:

$$a_{12}^*=\frac{1}{2}(z_3+z_4-z_1-z_2+z_3z_4\bar{z}_1+z_3z_4\bar{z}_2).$$

Аффикс a'_{12} точки A'_{12} найдем из соотношения:

$$\frac{a_{12}+a'_{12}}{2}=a_{12}^*$$

или

$$\frac{-z_1-z_2+a'_{12}}{2}=\frac{1}{2}(z_3+z_4-z_1-z_2+z_3z_4\bar{z}_1+z_3z_4\bar{z}_2),$$

откуда

$$a'_{12}=z_3+z_4+z_3z_4\bar{z}_1+z_3z_4\bar{z}_2=z_3z_4(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\bar{z}_4)=z_3z_4\bar{\sigma}_1,$$

где $\sigma_1=z_1+z_2+z_3+z_4$. Из полученного соотношения следует, что

$$OA'_{12}=|a'_{12}|=|\sigma_1| \qquad (|z_3|=|z_4|=1,\ |\bar{\sigma}_1|=|\sigma_1|).$$

Аналогично

$$OA'_{13}=OA'_{14}=OA'_{23}=OA'_{24}=OA'_{34}=|\sigma_1|.$$

Таким образом, точки A'_{12}, A'_{13}, A'_{14}, A'_{23}, A'_{24}, A'_{34} лежат на одной окружности, радиус которой равен $\rho=|\sigma_1|=4|\sigma_1/4|$. Но $\sigma_1/4$ есть аффикс центра тяжести системы из четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4, значит, $|\sigma_1/4|=OG$. Итак,

$$\rho=4OG.$$

Пример 31. Пусть D, E, F — точки прикосновения к сторонам BC, CA, AB окружности, вписанной в треугольник ABC. Рассмотрим произвольный диаметр δ окружности $(I)=(DEF)$. Проведем через точки D^*, E^*, F^*, в которых высоты треугольника DEF пересекают окружность (DEF), прямые, параллельные прямой δ, и пусть A', B', C' — точки, в которых эти прямые вторично пересекают окружность (I). Обозначим через A^*, B^*, C^* точки, симметричные точкам A', B', C' соответственно относительно сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Доказать, что центры тяжести G и G^* треугольников DEF и $A^*B^*C^*$ симметричны относительно ортополюса ω прямой δ относительно треугольника DEF (рис. 34).

Решение. Примем окружность (DEF) за единичную, причем диаметр δ примем за действительную ось Ox (точка O совпадает с I). Обозначим через z_1, z_2, z_3 соответственно аффиксы точек D,

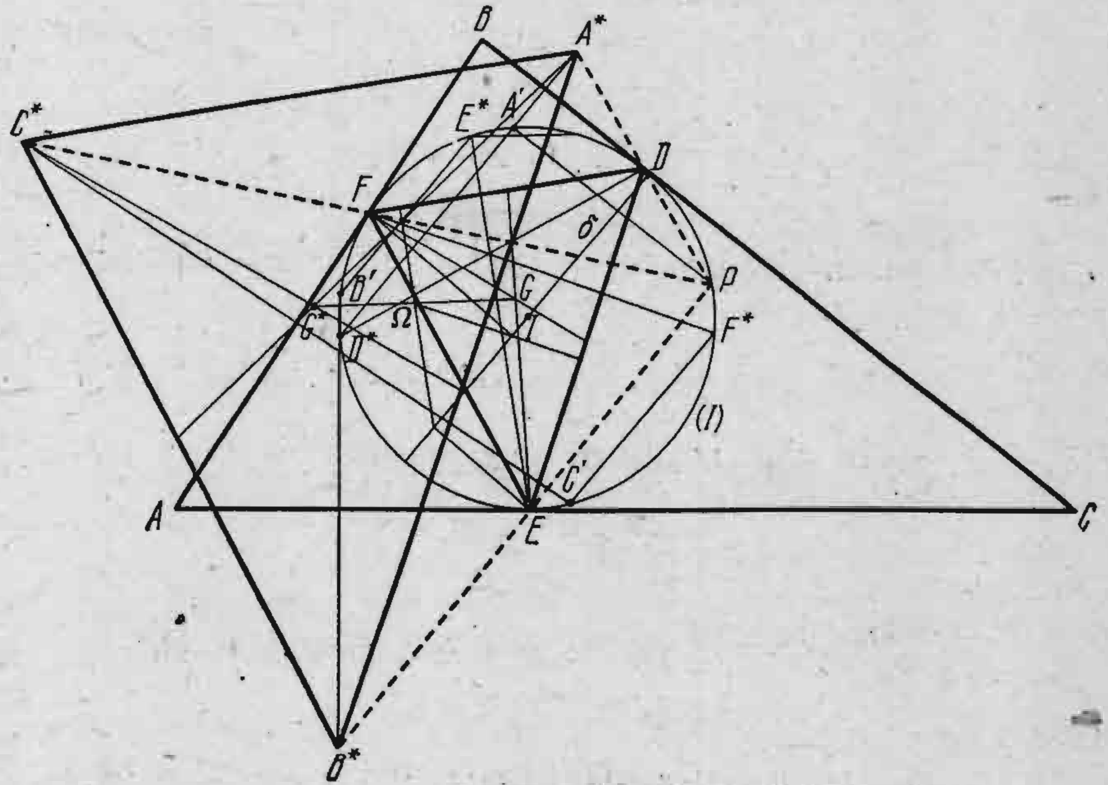


Рис. 34.

E, F. Уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно прямой EF, таково:

$$z - z_1 = z_2 z_3 (\bar{z} - \bar{z}_1).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением единичной окружности $z\bar{z} = 1$, найдем аффикс d^* точки D^*, действительно,

$$z - z_1 = z_2 z_3 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right),$$

или

$$z - z_1 = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z}(z - z_1).$$

Один из корней этого уравнения естественно $z = z_1$ (аффикс точки D), другой

$$d^* = -\frac{z_2 z_3}{z_1}$$

— аффикс точки D^*. Аналогично находим аффиксы

$$e^* = -\frac{z_3 z_1}{z_2}, \quad f^* = -\frac{z_1 z_2}{z_3}$$

точек E^* и F^*.

Уравнение прямой, проходящей, например, через точку D^* параллельной прямой δ, имеет вид

$$z+\frac{z_2z_3}{z_1}=\bar{z}+\frac{z_1}{z_2z_3}.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением единичной окружности $z\bar{z}=1$, найдем аффикс точки A':

$$z+\frac{z_2z_3}{z_1}=\frac{1}{z}+\frac{z_1}{z_2z_3},$$

$$\frac{z_1z+z_2z_3}{z_1}=\frac{z_1z+z_2z_3}{z_2z_3z}.$$

Один из корней этого уравнения $z=-z_2z_3/z_1$ — аффикс d^* точки D^*, другой равен аффиксу a' точки A':

$$a'=\frac{z_1}{z_2z_3}.$$

Аналогично

$$b'=\frac{z_2}{z_3z_1},\quad c'=\frac{z_3}{z_1z_2},$$

где b' и c' — аффиксы точек B' и C'.

Угловой коэффициент ID равен $z_1/\bar{z}_1=z_1^2$, следовательно, уравнение BC (угловой коэффициент которой $-z_1^2$):

$$z-z_1=-z_1^2(\bar{z}-\bar{z}_1),$$

или

$$z+z_1^2\bar{z}=2z_1. \qquad (104)$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A' на прямую BC:

$$z-\frac{z_1}{z_2z_3}=z_1^2\left(\bar{z}-\frac{z_2z_3}{z_1}\right),$$

или

$$z-z_1^2\bar{z}=\frac{z_1}{z_2z_3}-\sigma_3. \qquad (105)$$

Из уравнений (104) и (105) находим аффикс α проекции точки A' на прямую BC:

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(2z_1+\frac{z_1}{z_2z_3}-\sigma_3\right).$$

Аффикс a^* точки A^* найдем из соотношения

$$\frac{a'+a^*}{2}=\alpha,$$

или

$$\frac{\frac{z_1}{z_2z_3}+a^*}{2}=\frac{1}{2}\left(2z_1+\frac{z_1}{z_2z_3}-\sigma_3\right),$$

откуда

$$a^*=2z_1-\sigma_3,$$

и аналогично

$$b^* = 2z_2 - \sigma_3, \qquad c^* = 2z_3 - \sigma_3,$$

где b^* и c^* — аффиксы точек B^* и C^*.

Из полученных соотношений следует, что

$$\frac{a^* - \sigma_3}{z_1 - \sigma_3} = \frac{2z_1 - 2\sigma_3}{z_1 - \sigma_3} = 2,$$

и аналогично

$$\frac{b^* - \sigma_3}{z_2 - \sigma_3} = 2, \qquad \frac{c^* - \sigma_3}{z_3 - \sigma_3} = 2,$$

т. е. точка P с аффиксом $p = \sigma_3$ является центром гомотетии, при котором треугольник DEF переходит в треугольник $A^*B^*C^*$ (см. рис. 34).

Далее, аффиксы g и g^* точек G и G^*:

$$g = \frac{\sigma_1}{3}, \quad g^* = \frac{2}{3}\sigma_1 - \sigma_3.$$

Середина Ω отрезка GG^* имеет аффикс $\omega = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ и, значит, совпадает с ортополюсом прямой δ (действительной оси) (формула (11), пример 7, $z_0 = 0$, $\varkappa = 1$).

Замечание. Найдем аффикс точки, симметричной точке A' относительно DI: уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A' на DI, имеет вид

$$z - \frac{z_1}{z_2 z_3} = -z_1^2\left(\bar{z} - \frac{z_2 z_3}{z_1}\right),$$

или

$$z + z_1^2\bar{z} = \frac{z_1}{z_2 z_3} + \sigma_3.$$

Уравнение DI:

$$z - z_1^2\bar{z} = 0.$$

Отсюда находим аффикс λ проекции точки A' на прямую DI:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_2 z_3} + \sigma_3\right).$$

Аффикс μ точки, симметричной точке A' относительно прямой DI, находится из соотношения

$$\frac{a' + \mu}{2} = \lambda$$

или

$$\frac{\dfrac{z_1}{z_2 z_3} + \mu}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1}{z_2 z_3} + \sigma_3\right),$$

откуда

$$\mu = \sigma_3 = p.$$

Таким образом, все точки, симметричные точкам A', B', C' относительно прямых DI, EI, FI, совпадают с одной и той же точкой P, являющейся центром гомотетии $\Gamma = (P, 2)$, переводящей треугольник DEF в треугольник $A^*B^*C^*$.

Пример 32. Окружность $(DEF) = (I)$, вписанная в треугольник ABC, принимается за единичную; D, E, F — соответственно точки

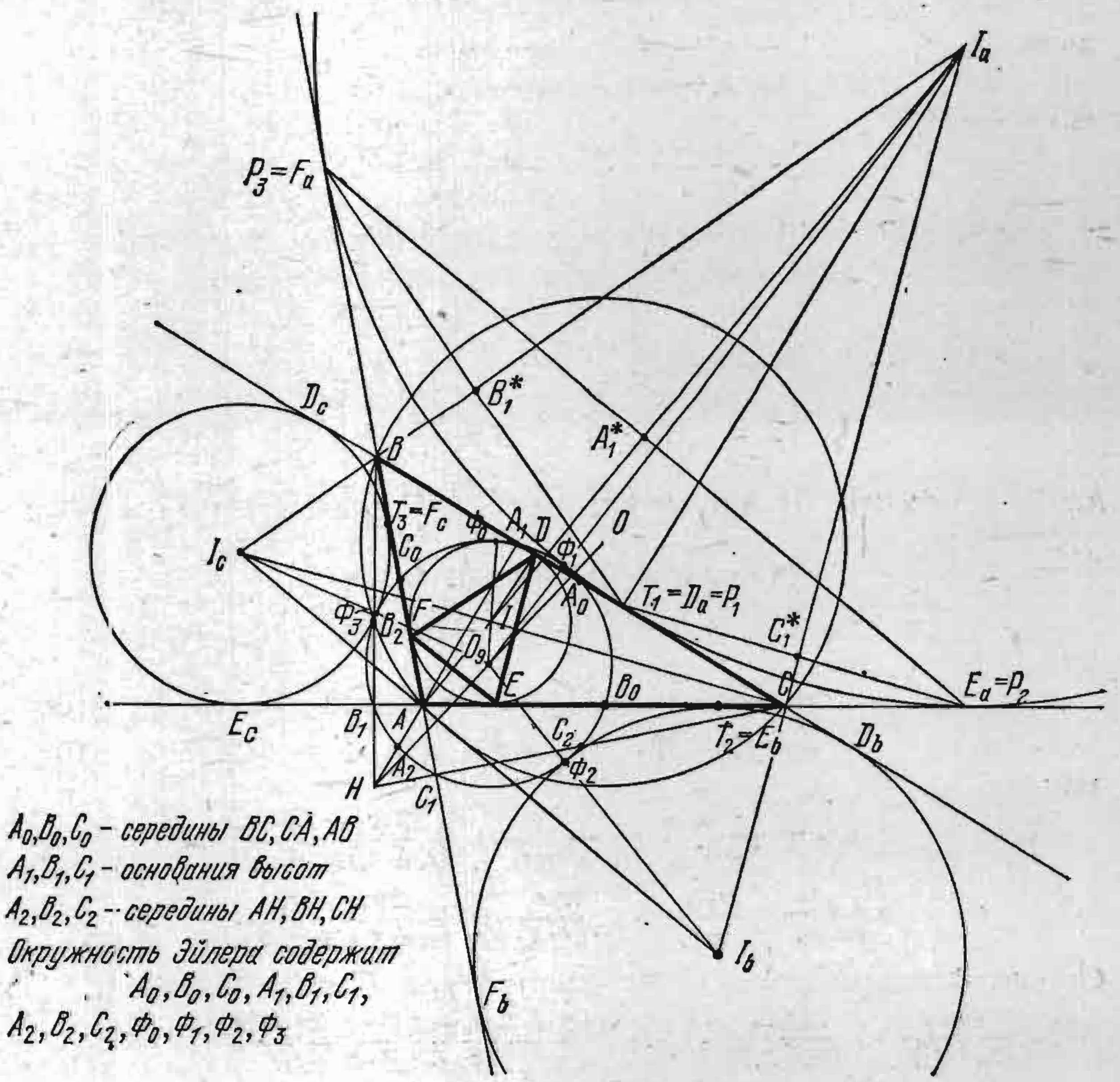


Рис. 35.

касания прямых BC, CA, AB с этой окружностью; z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек D, E, F. Требуется найти:

1°. Аффикс o центра O окружности $(O) = (ABC)$.

2°. Радиус R окружности (ABC).

3°. Радиус ρ окружности Эйлера для треугольника ABC.

4°. Аффикс h отроцентра H треугольника ABC.

5°. Аффикс ε центра O_9 окружности (O_9) Эйлера треугольника ABC.

6°. Доказать, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается окружности Эйлера, построенной для этого треугольника, в некоторой точке Φ_0 (называемой *точкой Фейербаха*). Найти аффикс φ_0 точки Φ_0 Фейербаха.

7°. Доказать, что три окружности (I_a), (I_b), (I_c), вневписанные в углы A, B, C треугольника ABC, также касаются окружности Эйлера треугольника ABC в точках Φ_1, Φ_2, Φ_3 (также называемые *точками Фейербаха*). Найти аффиксы τ_b, τ_b, τ_c центров I_a, I_b, I_c окружностей (I_a), (I_b), (I_c). Найти аффиксы t_1, t_2, t_3 точек T_1, T_2, T_3 прикосновения окружностей (I_a), (I_b), (I_c) к BC, CA, AB. Найти радиусы этих окружностей (рис. 35). Найти аффиксы φ_1, φ_2, φ_3 точек Φ_1, Φ_2, Φ_3 Фейербаха.

Решение. 1°. Аффикс середины отрезка EF равен $(z_2+z_3)/2$, а так как точка A получается при инверсии этой середины относительно единичной окружности (I), то аффикс a точки A:

$$a=\frac{2}{\bar z_2+\bar z_3}.$$

Аналогично находятся аффиксы b и c точек B и C:

$$b=\frac{2}{\bar z_3+\bar z_1},\qquad c=\frac{2}{\bar z_1+\bar z_2}.$$

Аффикс o центра O окружности $(O)=(ABC)$ находится из системы уравнений:

$$(o-a)(\bar o-\bar a)=(o-b)(\bar o-\bar b),$$
$$(o-b)(\bar o-\bar b)=(o-c)(\bar o-\bar c),$$

или

$$-o(\bar a-\bar b)-\bar o(a-b)=b\bar b-a\bar a, \tag{106}$$
$$-o(\bar b-\bar c)-\bar o(b-c)=c\bar c-b\bar b. \tag{107}$$

Имеем

$$\bar a-\bar b=\frac{2}{z_2+z_3}-\frac{2}{z_3+z_1}=\frac{2(z_1-z_2)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)},$$
$$a-b=\frac{2z_2z_3}{z_2+z_3}-\frac{2z_3z_1}{z_3+z_1}=\frac{2z_3^2(z_2-z_1)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)},$$

$$b\bar b-a\bar a=$$
$$=\frac{4z_1z_3}{(z_3+z_1)^2}-\frac{4z_3z_2}{(z_2+z_3)^2}=4z_3\frac{z_1(z_2^2+2z_2z_3+z_3^2)-z_2(z_3^2+2z_3z_1+z_1^2)}{(z_3+z_1)^2(z_2+z_3)^2}=$$
$$=4z_3\frac{z_1z_2^2+z_1z_3^2-z_2z_3^2-z_2z_1^2}{(z_3+z_1)^2(z_2+z_3)^2}=\frac{4z_3[z_1z_2(z_2-z_1)-z_3^2(z_2-z_1)]}{(z_3+z_1)^2(z_2+z_3)^2}=$$
$$=\frac{4z_3(z_2-z_1)(z_1z_2-z_3^2)}{(z_3+z_1)^2(z_2+z_3)^2};$$

уравнение (106) принимает вид

$$o\frac{2(z_2-z_1)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)}-\bar o\frac{2z_3^2(z_2-z_1)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)}=\frac{4z_3(z_2-z_1)(z_1z_2-z_3^2)}{(z_2+z_3)^2(z_3+z_1)^2},$$

или

$$o-z_3^2\bar o=\frac{2z_3(z_1z_2-z_3^2)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)}. \tag{108}$$

Аналогично преобразуется уравнение (107):

$$o-z_1^2\bar o=\frac{2z_1(z_2z_3-z_1^2)}{(z_3+z_1)(z_1+z_2)}. \tag{109}$$

Вычитая почленно из уравнения (109) уравнение (108), находим комплексное число $\bar{o}$, сопряженное аффиксу o точки O:

$$(z_3^2-z_1^2)\,\bar{o}=\frac{2z_1(z_2z_3-z_1^2)}{(z_1+z_3)(z_1+z_2)}-\frac{2z_3(z_1z_2-z_3^2)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)}=$$

$$=\frac{(z_2+z_3)(2\sigma_3-2z_1^3)-(z_1+z_2)(2\sigma_3-2z_3^3)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}=$$

$$=\frac{2\sigma_3(z_3-z_1)+2z_2(z_3^3-z_1^3)+2z_3z_1(z_3^2-z_1^2)}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3},$$

откуда

$$(z_3+z_1)\,\bar{o}=\frac{2\sigma_3+2z_2(z_3^2+z_3z_1+z_1^2)+2z_3z_1(z_3+z_1)}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=$$

$$=\frac{4\sigma_3+2z_2z_3^2+2z_2z_1^2+2z_1z_3^2+2z_3z_1^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=2\,\frac{z_1z_2z_3+z_1z_2z_3+z_2z_3^2+z_2z_1^2+z_1z_3^2+z_3z_1^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=$$

$$=2\,\frac{z_2z_3(z_3+z_1)+z_3z_1(z_3+z_1)+z_1z_2(z_1+z_3)}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}.$$

Следовательно,

$$\bar{o}=\frac{2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}.$$

Отсюда

$$o=\frac{2\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}_3}=\frac{2\,\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}}{\dfrac{\sigma_2\sigma_1}{\sigma_3^2}-\dfrac{1}{\sigma_3}}=\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}.$$

2°. $R^2=|o-a|^2=(o-a)(\bar{o}-\bar{a})=o\bar{o}+a\bar{a}-\bar{a}o-\bar{o}a=$

$$=\frac{4\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{4}{(z_2+z_3)(\bar{z}_2+\bar{z}_3)}-\frac{4\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\,\frac{1}{z_2+z_3}-\frac{4\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\,\frac{1}{\bar{z}_2+\bar{z}_3},$$

$$\frac{R^2}{4}=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{z_2z_3}{(z_2+z_3)^2}-\frac{\sigma_1\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)(z_2+z_3)}-\frac{z_2z_3\sigma_2}{(z_2+z_3)(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{z_2z_3(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)-(z_2+z_3)\sigma_1\sigma_3-z_2z_3(z_2+z_3)\sigma_2}{(z_2+z_3)^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{z_2z_3(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)-(z_2+z_3)\sigma_1\sigma_3-z_2z_3(z_2+z_3)\sigma_2}{(z_2+z_3)^2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{z_2z_3(z_1+z_3)(z_1+z_2)-\sigma_1\sigma_3-z_2z_3\sigma_2}{(z_2+z_3)(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}+\frac{z_1\sigma_3-\sigma_1\sigma_3}{(z_2+z_3)(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}-\frac{\sigma_3(z_2+z_3)}{(z_2+z_3)(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}-\frac{\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}.$$

Итак,

$$R^2=\frac{4\sigma_3^2}{(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)^2}=\left(\frac{2\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}\right)^2.$$

Докажем, что число

$$\lambda=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}$$

— действительное и положительное. Имеем

$$\bar{\lambda}=\frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}_3-\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}=\frac{\frac{1}{\sigma_3}}{\frac{1}{\sigma_3}-\frac{\sigma_2\sigma_3}{\sigma_3^2}}=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}=\lambda.$$

Значит, λ — число действительное. Иначе:

$$\lambda=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}=\frac{1}{1-\sigma_1\frac{\sigma_2}{\sigma_3}}=\frac{1}{1-\sigma_1\bar{\sigma}_1}=\frac{1}{1-|\sigma_1|^2}.$$

Докажем, что $|\sigma_1|<1$. В самом деле, так как все углы треугольника DEF всегда острые, то ортоцентр треугольника DEF, аффикс которого равен σ_1, лежит внутри треугольника DEF и, значит, и внутри окружности (DEF). Но радиус окружности (DEF) принят нами за 1, значит, $|\sigma_1|<1$ и, следовательно, $\lambda>0$, а так как $R^2=4\lambda^2$, то $R=2\lambda$, т. е.

$$R=\frac{2\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}=\frac{2}{1-\sigma_1\bar{\sigma}_1}.$$

3°. Радиус ρ окружности Эйлера для треугольника ABC равен

$$\rho=\frac{R}{2}=\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}=\frac{1}{1-|\sigma_1|^2}=-\frac{1}{\sigma},$$

где σ — степень ортоцентра H' треугольника DEF относительно окружности (DEF).

4°. Так как сумма направленных отрезков

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH},$$

где O — центр окружности $(O)=(ABC)$, а H — ортоцентр треугольника ABC, то

$$a-o+b-o+c-o=h-o,$$

откуда

$$h=a+b+c-2o,$$

где h — аффикс H. Имеем

$$\frac{h}{2}=\frac{z_2z_3}{z_2+z_3}+\frac{z_3z_1}{z_3+z_1}+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}-\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=$$
$$=\frac{z_2z_3(z_3+z_1)(z_1+z_2)+z_3z_1(z_1+z_2)(z_2+z_3)+z_1z_2(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}-$$
$$-\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=\frac{z_2z_3(z_1^2+\sigma_2)+z_3z_1(z_2^2+\sigma_2)+z_1z_2(z_3^2+\sigma_2)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}-\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3},$$

следовательно,

$$h=2\,\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}.$$

5°. Аффикс ε центра O_9 окружности Эйлера для треугольника ABC равен $\varepsilon=\frac{(h+o)}{2}$, так как O_9 — середина отрезка OH. Итак,

$$\varepsilon=\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3+\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}.$$

6°. Уравнение радикальной оси окружности (DEF) $(z\bar{z}-1=0)$ и окружности Эйлера, уравнение которой

$$(z-\varepsilon)(\bar{z}-\bar{\varepsilon})-\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=0,$$

имеет вид

$$z\bar{z}-1-(z-\varepsilon)(\bar{z}-\bar{\varepsilon})+\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=0,$$

или

$$-1+\varepsilon\bar{z}+\bar{\varepsilon}z-\varepsilon\bar{\varepsilon}+\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z}=1$ окружности (DEF), находим

$$-1+\frac{\varepsilon}{z}+\bar{\varepsilon}z-\varepsilon\bar{\varepsilon}+\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=0, \qquad (110)$$

и так как

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}}{\dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3^2}-\dfrac{1}{\sigma_3}}=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3},$$

то $\varepsilon\bar{\varepsilon}=\sigma_1^2\sigma_2^2/(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2$, и, значит,

$$-\varepsilon\bar{\varepsilon}+\frac{\sigma_3^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=\frac{\sigma_3^2-\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=\frac{\sigma_3+\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2};$$

уравнение (110) принимает вид

$$\frac{\varepsilon}{z}+\bar{\varepsilon}z+\frac{\sigma_3+\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}-1=0,$$

или

$$\frac{\varepsilon}{z}+\bar{\varepsilon}z+\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}=0,$$

или

$$\bar{\varepsilon}z^2+\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}z+\varepsilon=0. \qquad (111)$$

Дискриминант этого уравнения равен нулю:

$$\Delta=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}-\varepsilon\bar{\varepsilon}=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}-\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)^2}=0.$$

Следовательно, уравнение (111) имеет равные корни. Это означает, что радикальная ось окружности (I) и окружность (O_9) Эйлера для треугольника ABC как с окружностью (I), так и с окружностью (O_9) имеет только одну общую точку Φ_0, т. е. окружности (O_9) и (I) касаются в этой точке Φ_0. Аффикс φ_0 точки Φ_0 касания находим из уравнения (111):

$$\varphi_0 = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_3-\sigma_1\sigma_2)\,\bar{\varepsilon}} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}\cdot\frac{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Итак,

$$\varphi_0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Замечание. Если за единичную точку на окружности (DEF) взять точку Бутена треугольника DEF, то $\sigma_3 = 1$ и аффикс φ_0 точки Φ_0 Фейербаха можно записать в виде

$$\varphi_0 = \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_1}.$$

7°. Найдем аффиксы τ_a, τ_b, τ_c центров окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных в углы A, B, C треугольника ABC. Угловой коэффициент прямой IB равен $b/\bar{b}$, а следовательно угловой коэффициент прямой, перпендикулярной прямой IB, равен $-b/\bar{b}$, т. е.

$$\varkappa = -\frac{b}{\bar{b}} = -\frac{z_1+z_3}{\bar{z}_1+\bar{z}_3} = -z_1z_3,$$

и уравнение биссектрисы внешнего угла B имеет вид

$$z - \frac{2z_1z_3}{z_1+z_3} = -z_1z_3\left(\bar{z} - \frac{2}{z_1+z_3}\right),$$

или

$$z + z_1z_3\bar{z} = \frac{4z_1z_3}{z_1+z_3}. \tag{112}$$

Аналогично записывается уравнение биссектрисы внешнего угла C:

$$z + z_1z_2\bar{z} = \frac{4z_1z_2}{z_1+z_2}. \tag{113}$$

Из системы уравнений (112) и (113) находим аффикс τ_a точки I_a:

$$(z_3-z_2)\,\tau_a = 4\sigma_3\left(\frac{1}{z_1+z_2} - \frac{1}{z_1+z_3}\right),$$

$$(z_3-z_2)\,\tau_a = 4\sigma_3\,\frac{z_3-z_2}{(z_1+z_2)(z_1+z_3)},$$

откуда

$$\tau_a = \frac{4\sigma_3}{(z_1+z_2)(z_1+z_3)}.$$

Аналогично

$$\tau_b = \frac{4\sigma_3}{(z_2+z_1)(z_2+z_3)}, \qquad \tau_c = \frac{4\sigma_3}{(z_3+z_1)(z_3+z_2)}.$$

Так как

$$(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3,$$

то эти формулы можно переписать так:

$$\tau_a = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(z_2 + z_3) = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(\sigma_1 - z_1),$$

$$\tau_b = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(z_3 + z_1) = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(\sigma_1 - z_2),$$

$$\tau_c = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(z_1 + z_2) = \frac{4\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}(\sigma_1 - z_3),$$

или еще так (поделить числитель и знаменатель дроби на σ_3 и заменить $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$ на $\bar{\sigma}_1$):

$$\tau_a = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(z_2 + z_3) = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(\sigma_1 - z_1),$$

$$\tau_b = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(z_3 + z_1) = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(\sigma_1 - z_2),$$

$$\tau_c = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(z_1 + z_2) = \frac{4}{|\sigma_1|^2 - 1}(\sigma_1 - z_3),$$

или еще так:

$$\tau_a = -2R(\sigma_1 - z_1) = -2R\sigma_1 + 2Rz_1,$$

$$\tau_b = -2R(\sigma_1 - z_2) = -2R\sigma_1 + 2Rz_2,$$

$$\tau_c = -2R(\sigma_1 - z_3) = -2R\sigma_1 + 2Rz_3.$$

Отсюда следует, что центр окружности $(I_aI_bI_c)$ имеет аффикс

$$-2R\sigma_1 = \frac{4\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{4\sigma_1}{\sigma_1\bar{\sigma}_1 - 1},$$

а радиус окружности $(I_aI_bI_c)$ равен $2R$.

Найдем теперь аффиксы t_1, t_2, t_3 точек T_1, T_2, T_3 прикосновения окружностей (I_a), (I_b), (I_c) соответственно со сторонами BC, CA, AB. Так как отрезки T_1D и BC имеют общую середину, то $t_1 + z_1 = b + c$, откуда

$$t_1 = b + c - z_1 = \frac{2z_1z_3}{z_1 + z_3} + \frac{2z_2z_1}{z_2 + z_1} - z_1 = z_1\frac{3z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2 - z_1^2}{(z_1 + z_3)(z_1 + z_2)} =$$

$$= z_1\frac{2z_2z_3 + \sigma_2 - z_1^2}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)} = \frac{2\sigma_3 + z_1\sigma_2 - z_1^3}{(z_1 + z_3)(z_1 + z_2)}.$$

Аналогично

$$t_2 = \frac{2\sigma_3 + z_2\sigma_2 - z_2^3}{(z_2 + z_1)(z_2 + z_3)}, \qquad t_3 = \frac{2\sigma_3 + z_3\sigma_2 - z_3^3}{(z_3 + z_1)(z_3 + z_2)}.$$

Теперь находим радиусы r_a, r_b, r_c окружностей (I_a), (I_b), (I_c). Сначала находим

$$\tau_a - t_1 = \frac{4\sigma_3}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)} - \frac{2\sigma_3 + z_1\sigma_2 - z_1^3}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)} =$$

$$= \frac{2z_1z_2z_3 - z_1(z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2) + z_1^3}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)} =$$

$$= \frac{z_2z_3 - z_1z_3 - z_1z_2 + z_1^2}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}z_1 = \frac{z_1(z_1 - z_3) - z_2(z_1 - z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}z_1 = z_1\frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}.$$

Отсюда следует, что

$$r_a=\frac{\overrightarrow{T_1I_a}}{\overrightarrow{ID}}=\frac{\tau_a-t_1}{z_1}=\frac{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{(z_1+z_2)(z_1+z_3)},$$

и аналогично

$$r_b=\frac{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}{(z_2+z_1)(z_2+z_3)},\quad r_c=\frac{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{(z_3+z_1)(z_3+z_2)}.$$

Если за единичную окружность принять окружность $(I_a)=(D_aE_aF_a)$, вневписанную в угол A треугольника ABC (D_a, E_a, F_a — точки касания этой окружности (I_a) с прямыми BC, CA, AB), то доказательство того, что эта окружность касается окружности Эйлера, построенной для треугольника ABC, будет в точности таким, каким было доказательство того, что касаются окружности (I) и (O_9), только теперь надо приписать точкам D_a, E_a, F_a аффиксы z_1, z_2, z_3. Тогда аффиксы a, b, c точек A, B, C по-прежнему будут

$$a=\frac{2}{\bar z_3+\bar z_2},\quad b=\frac{2}{\bar z_3+\bar z_1},\quad c=\frac{2}{\bar z_1+\bar z_2}$$

и даже аффикс φ_1 точки Φ_1 Фейербаха, в которой касаются окружности (I_a) и (O_9), будет выражаться формулой $\varphi_1=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, где σ_1и σ_2 выражаются через аффиксы z_1, z_2, z_3 точек D_a, E_a, F_a. Наша задача состоит в том, что следует выразить φ_1, φ_2, φ_3 через аффиксы z_1, z_2, z_3 точек D, E, F. Сказанное выше облегчает эту задачу, так как установленный предыдущим рассуждением факт касания окружностей (I_a), (I_b), (I_c) с окружностью (O_9) облегчит вычисления (см. ниже).

Уравнения окружности (I_a) и окружности (O_9) имеют вид

$$(z-\tau_a)(\bar z-\bar\tau_a)-r_a^2=0,$$
$$(z-\varepsilon)(\bar z-\bar\varepsilon)-\rho^2=0.$$

По доказанному эти окружности касаются в точке Φ_1 Фейербаха, аффикс которой находится, следовательно, из уравнения

$$\frac{r_a^2}{z-\tau_a}+\bar\tau_a=\frac{\rho^2}{z-\varepsilon}+\bar\varepsilon,$$
$$\frac{r_a^2}{z-\tau_a}-\frac{\rho^2}{z-\varepsilon}+\bar\tau_a-\bar\varepsilon=0,$$
$$r_a^2(z-\varepsilon)-\rho^2(z-\tau_a)+[z^2-(\tau_a+\varepsilon)z+\tau_a\varepsilon](\bar\tau_a-\bar\varepsilon)=0,$$
$$(\bar\tau_a-\bar\varepsilon)z^2+[r_a^2-\rho^2-(\tau_a+\varepsilon)(\bar\tau_a-\bar\varepsilon)]z-\varepsilon r_a^2+\tau_a\rho^2+\tau_a\varepsilon(\bar\tau_a-\bar\varepsilon)=0.$$

Так как окружности (I_a) и (O_9) имеют только одну общую точку, то это квадратное уравнение имеет равные корни, являющиеся аффиксами φ_1 точки Φ_1 касания окружностей (I_a) и (O_9):

$$\varphi_1=\frac{r_a^2-\rho^2-(\tau_a+\varepsilon)(\bar\tau_a-\bar\varepsilon)}{2(\varepsilon-\tau_a)}=\frac{r_a^2-\rho^2}{2(\bar\varepsilon-\bar\tau_a)}+\frac{\tau_a+\varepsilon}{2}=$$

$$=\frac{\dfrac{(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2}{(z_1+z_2)^2(z_1+z_3)^2}-\dfrac{z_1^2z_2^2z_3^2}{(z_1+z_2)^2(z_2+z_3)^2(z_3+z_1)^2}}{2\left[\dfrac{(z_1+z_2+z_3)^2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}-\dfrac{4z_1(z_2+z_3)}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}\right]}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{4z_1z_2z_3}{(z_1+z_2)(z_1+z_3)}+\frac{(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)^2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2+z_3)^2-z_1^2z_2^2z_3^2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_2+z_3-z_1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{4z_1z_2z_3(z_2+z_3)+(z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2)^2}{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}.$$

Далее,

$$(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2+z_3)-z_1z_2z_3=(z_1-z_2-z_3)(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3),$$

$$(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2+z_3)+z_1z_2z_3=(z_1-z_2-z_3)(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)+2\sigma_3.$$

Следовательно,

$$(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2+z_3)^2-z_1^2z_2^2z_3^2=(z_2+z_3-z_1)^2\times$$

$$\times(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)^2-2z_1z_2z_3(z_2+z_3-z_1)(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3),$$

и потому

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\frac{(z_2+z_3-z_1)^2(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)^2-2z_1z_2z_3(z_2+z_3-z_1)(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)(z_2+z_3-z_1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{4z_1z_2z_3(z_2+z_3)+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)^2}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}=\frac{1}{2}\frac{(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)^2}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}+$$

$$+\frac{2z_1z_2z_3(z_2+z_3)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)}-\frac{z_1z_2z_3(z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3)}{(z_2+z_3)(z_3+z_1)(z_1+z_2)(z_2+z_3-z_1)}+$$

$$+\frac{\sigma_2^2}{2(\sigma_1\sigma_2-\sigma_3)}=\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\frac{z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3}{z_2+z_3-z_1}+\frac{1}{2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}=$$

$$=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\frac{z_1z_2+z_1z_3-z_2z_3}{z_2+z_3-z_1}.$$

Аналогично находим

$$\varphi_2=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\frac{z_2z_3+z_2z_1-z_3z_1}{z_3+z_1-z_2},$$

$$\varphi_3=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}-\frac{\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}\frac{z_3z_1+z_3z_2-z_1z_2}{z_1+z_2-z_3}.$$

Формулы для аффиксов точек Фейербаха лучше записать в виде

$$\varphi_1=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}+\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}\frac{z_1z_3+z_1z_2-z_2z_3}{z_2+z_3-z_1},$$

$$\varphi_2=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}+\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}\frac{z_2z_1+z_2z_3-z_1z_3}{z_3+z_1-z_2},$$

$$\varphi_3=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}+\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}\frac{z_3z_1+z_3z_2-z_1z_2}{z_1+z_2-z_3},$$

или еще так:

$$\varphi_1 = \varepsilon + \rho\,\frac{z_1z_3 + z_1z_2 - z_2z_3}{z_2 + z_3 - z_1},$$

$$\varphi_2 = \varepsilon + \rho\,\frac{z_2z_1 + z_2z_3 - z_3z_1}{z_3 + z_1 - z_2},$$

$$\varphi_3 = \varepsilon + \rho\,\frac{z_3z_1 + z_3z_2 - z_1z_2}{z_1 + z_2 - z_3},$$

или

$$\varphi_1 = \varepsilon + \rho u_1, \quad \varphi_2 = \varepsilon + \rho u_2, \quad \varphi_3 = \varepsilon + \rho u_3,$$

где

$$u_1 = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3}{z_2 + z_3 - z_1},$$

$$u_2 = \frac{z_2z_1 + z_2z_3 - z_3z_1}{z_3 + z_1 - z_2},$$

$$u_3 = \frac{z_3z_1 + z_3z_2 - z_1z_2}{z_1 + z_2 - z_3}.$$

Заметим, что множители при ρ суть комплексные числа по модулю равные единице, например,

$$u_1 = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3}{z_2 + z_3 - z_1},$$

$$\bar{u}_1 = \frac{\dfrac{1}{z_1z_2} + \dfrac{1}{z_1z_3} - \dfrac{1}{z_2z_3}}{\dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} - \dfrac{1}{z_1}} = \frac{z_2 + z_3 - z_1}{z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3}$$

и, следовательно, $u_1\bar{u}_1 = 1$. Это, конечно, сразу следует и из того, что $|\varphi_k - \varepsilon| = \rho$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

Пример 33. ABC — произвольный треугольник; (ABC) — описанная около него окружность (O — ее центр); радиус окружности (O) равен R; (I) — окружность, вписанная в треугольник ABC; I — ее центр; r — радиус. Пусть d — расстояние между центрами O и I окружностей, описанной и вписанной в треугольник ABC. Доказать, что

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Решение. Пусть D, E, F — точки прикосновения сторон BC, CA, AB к окружности (I). Примем за единичную окружность окружность с центром I. Тогда аффиксы точек D, E, F будут rz_1, rz_2, rz_3. В предыдущем примере было получено выражение для аффикса o:

$$o = \frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3},$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — основные симметрические многочлены от аффиксов вершин треугольника. Однако поскольку теперь эти аффиксы мы берем в виде rz_1, rz_2, rz_3, то для аффикса o точки O и для величины радиуса R окружности (ABC) получатся следующие выражения:

$$o=\frac{2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2-\sigma_3}r, \quad R=\frac{2\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}r.$$

Таким образом,

$$o=-R\sigma_1, \quad \bar{o}=-R\bar{\sigma}$$

и, значит,

$$d^2=OI^2=o\cdot\bar{o}=R^2\sigma_1\bar{\sigma}_1=$$
$$=R^2\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}=R^2\left(1-\frac{\sigma_3-\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}\right)=R^2\left(1-\frac{2r}{R}\right)=R^2-2Rr.$$

Пример 34. Построить треугольник ABC, если даны точки A_0, B_0, C_0 пересечения биссектрисы внутренних его углов A, B, C с окружностью $(O)=(ABC)$ (рис. 36).

Решение. Примем окружность (ABC) за единичную окружность $(O)=(ABC)=(A_0B_0C_0)$, описанную около данного треугольника ABC. Пусть z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A, B, C. Биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC вписанного в окружность (ABC) делит дугу $\overset{\frown}{BC}$, которая стягивается хордой BC, пополам некоторой точкой A_0, причем точки A_0 и A расположены по разные стороны от прямой BC. Аналогично и расположение точек B_0 и C_0 (см. условие задачи). Поэтому для аффиксов

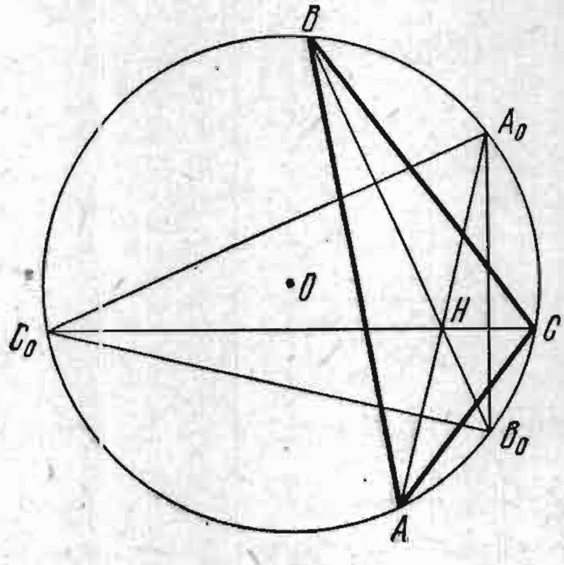


Рис. 36.

$$a_0=\sqrt{z_2z_3}, \quad b_0=\sqrt{z_3z_1}, \quad c_0=\sqrt{z_1z_2} \tag{114}$$

точек A_0, B_0, C_0 должны быть выбраны такие значения (каждый из радикалов имеет по два значения), чтобы точки A и A_0 лежали по разные стороны от прямой BC; точки B и B_0 лежали по разные стороны от прямой CA и точки C и C_0 лежали по разные стороны от прямой AB. При этих условиях и надо решить систему (114), которую мы перепишем так:

$$z_2z_3=a_0^2, \quad z_3z_1=b_0^2, \quad z_1z_2=c_0^2. \tag{115}$$

Из системы (115) имеем

$$z_1^2z_2^2z_3^2=a_0^2b_0^2c_0^2,$$

так что

$$z_1z_2z_3=\pm a_0b_0c_0.$$

В случае

$$z_1z_2z_3=a_0b_0c_0 \tag{116}$$

имеем

$$z_1=\frac{b_0c_0}{a_0},\quad z_2=\frac{c_0a_0}{b_0},\quad z_3=\frac{a_0b_0}{c_0}. \tag{117}$$

В случае

$$z_1z_2z_3=-a_0b_0c_0 \tag{118}$$

имеем

$$z_1=-\frac{b_0c_0}{a_0},\quad z_2=-\frac{c_0a_0}{b_0},\quad z_3=-\frac{a_0b_0}{c_0}. \tag{119}$$

Теперь надо установить, какое из двух решений (117) или (119) (или ни одно из них, или оба) дают решение задачи. Исследуем значения z_1, z_2, z_3, определяемые формулами (117). Так как основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, имеет аффикс $\frac{z_2+z_3}{2}$, то уравнение прямой BC можно записать в виде

$$\frac{z}{\frac{z_2+z_3}{2}}+\frac{\bar z}{\frac{\bar z_2+\bar z_3}{2}}=2,$$

или

$$\frac{z}{z_2+z_3}+\frac{\bar z}{\bar z_2+\bar z_3}-1=0. \tag{120}$$

Имеем

$$z_2+z_3=\frac{c_0a_0}{b_0}+\frac{a_0b_0}{c_0}=\frac{a_0}{b_0c_0}(b_0^2+c_0^2),$$

$$\bar z_2+\bar z_3=\frac{b_0c_0}{a_0}\left(\frac{1}{b_0^2}+\frac{1}{c_0^2}\right)=\frac{b_0^2+c_0^2}{a_0b_0c_0},$$

и уравнение (120) прямой BC принимает вид

$$f(z)=\frac{b_0c_0}{a_0(b_0^2+c_0^2)}z+\frac{a_0b_0c_0}{b_0^2+c_0^2}\bar z-1=0.$$

Найдем $f(a_0)$ и $f(z_1)=f\left(\frac{b_0c_0}{a_0}\right)$:

$$f(a_0)=\frac{b_0c_0}{b_0^2+c_0^2}+\frac{b_0c_0}{b_0^2+c_0^2}-1=-\frac{(b_0-c_0)^2}{b_0^2+c_0^2},$$

$$f(z_1)=\frac{b_0^2c_0^2}{a_0^2(b_0^2+c_0^2)}+\frac{a_0^2}{b_0^2+c_0^2}-1=\frac{(a_0^2-b_0^2)(a_0^2-c_0^2)}{a_0^2(b_0^2+c_0^2)}.$$

Из двух последних соотношений имеем

$$\frac{f(z_1)}{f(a_0)}=-\frac{(a_0^2-b_0^2)(a_0^2-c_0^2)}{a_0^2(b_0-c_0)^2}=-\frac{(a_0-b_0)(a_0-c_0)(b_0-c_0)(a_0+b_0)(a_0+c_0)}{a_0^2(b_0-c_0)^3},$$

но

$$\overline{A_0B_0C_0}=\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a_0 & \bar a_0 & 1\\ b_0 & \bar b_0 & 1\\ c_0 & \bar c_0 & 1\end{vmatrix}=\frac{i}{4a_0b_0c_0}\begin{vmatrix} a_0^2 & 1 & a_0\\ b_0^2 & 1 & b_0\\ c_0^2 & 1 & c_0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{i}{4a_0b_0c_0}(c_0-a_0)(c_0-b_0)(b_0-a_0)$$

и, следовательно,

$$(c_0-a_0)(c_0-b_0)(b_0-a_0)=\frac{4}{i}a_0b_0c_0\overline{A_0B_0C_0}=-4ia_0b_0c_0\overline{A_0B_0C_0}.$$

Итак,

$$\frac{f(z_1)}{f(a_0)}=4ia_0b_0c_0\overline{A_0B_0C_0}\,\frac{(a_0+b_0)(a_0+c_0)(b_0-c_0)}{a_0^2(b_0-c_0)^4}.$$

Рассмотрим точку A_0^* с аффиксом $a_0^*=-a_0$, диаметрально противоположную точке A_0 на окружность $(ABC)=(A_0B_0C_0)$. Имеем

$$(a_0+b_0)(a_0+c_0)(b_0-c_0)=(b_0-a_0^*)(c_0-a_0^*)(b_0-c_0)=$$
$$=4ia_0b_0c_0\overline{A_0^*B_0C_0}.$$

Итак,

$$\frac{f(z_1)}{f(a_0)}=-16\overline{A_0B_0C_0}\cdot\overline{A_0^*B_0C_0}\,\frac{b_0^2c_0^2}{(b_0-c_0)^4}=$$
$$=-16\overline{A_0B_0C_0}\cdot\overline{A_0^*B_0C_0}\left[\frac{b_0c_0}{(b_0-c_0)^2}\right]^2. \quad (121)$$

Число $u=b_0c_0/(b_0-c_0)^2$ — действительное. В самом деле,

$$\bar{u}=\frac{\frac{1}{b_0c_0}}{\left(\frac{1}{b_0}-\frac{1}{c_0}\right)^2}=\frac{b_0c_0}{(b_0-c_0)^2}=u.$$

Поэтому $u^2>0$ $(u\neq 0)$. Теперь заметим, что треугольник $A_0B_0C_0$, вершинами которого являются точки пересечения биссектрис внутренних углов A, B, C треугольника ABC с окружностью (ABC), всегда остроугольный. В самом деле, внутренние углы A_0, B_0, C_0 треугольника $A_0B_0C_0$ соответственно равны

$$A_0=\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},$$
$$B_0=\frac{C+A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2},$$
$$C_0=\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

независимо от того, будет ли треугольник ABC остроугольный, тупоугольный или прямоугольный.

Отсюда следует, что диаметр $A_0A_0^*$ пересекает хорду B_0C_0 и, следовательно, треугольники $\overrightarrow{A_0B_0C_0}$ и $\overrightarrow{A_0^*B_0C_0}$ имеют противоположную ориентацию. Таким образом, $\overline{A_0B_0C_0}$ и $\overline{A_0^*B_0C_0}$ — числа противоположных знаков, и из формулы (121) следует, что $f(z_1)/f(a_0)>0$, т. е. точки A_0 и A лежат по одну сторону от хорды BC. Итак, значения (117) — не решение. Решение системы (115) определяется формулами (119), если только треугольник $A_0B_0C_0$ остроугольный. Если же он тупоугольный или прямоугольный, задача не имеет решений.

Точки A, B, C — это точки пересечения высот треугольника $A_0B_0C_0$ с окружностью (ABC). В самом деле, угловой коэффициент прямой B_0C_0 равен $-b_0c_0$, и потому уравнение перпендикуляра, опущенного из точки A_0 на прямую B_0C_0, имеет вид

$$z - a_0 = b_0c_0(\bar{z} - \bar{a}_0).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z} = 1$ единичной окружности, получим

$$z - a_0 = b_0c_0\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{a_0}\right),$$

$$z - a_0 = -\frac{b_0c_0(z - a_0)}{a_0z}.$$

Один из корней этого уравнения естественно $z = a_0$ (аффикс точки A_0), другой $z = -b_0c_0/a_0$ — аффикс точки A:

$$z_1 = -b_0c_0/a_0.$$

Аналогично доказывается, что

$$z_2 = -c_0a_0/b_0, \quad z_3 = -a_0b_0/c_0$$

— соответственно аффиксы точек B и C.

Замечание. Из доказанного следует, что формулы (114) следует писать в виде

$$a_0 = -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}, \quad b_0 = -\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}, \quad c_0 = -\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}, \tag{122}$$

где для $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ берется одно и то же значение (в таком случае, например, $\sqrt{z_1}\sqrt{\bar{z}_1} = z_1$, $\sqrt{z_2}\sqrt{\bar{z}_2} = z_2$, $\sqrt{z_3}\sqrt{\bar{z}_3} = z_3$; если же для $\sqrt{z_1}$ взять разные значения в двух последних формулах, то $\sqrt{z_1}\sqrt{\bar{z}_1} = -z_1$).

Пример 35. Построить треугольник ABC, если даны точки A_1, B_1, C_1 пересечения его высот с окружностью $(O) = (ABC)$, описанной около треугольника ABC $((O) = (ABC) = (A_1B_1C_1))$.

Решение. Примем окружность $(A_1B_1C_1) = (ABC)$ за единичную окружность. Пусть a_1, b_1, c_1 — аффиксы точек A_1, B_1, C_1, а z_1, z_2, z_3 — аффиксы вершин A, B, C искомого треугольника ABC. Так как угловой коэффициент прямой AB равен $-z_1z_2$, то уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, имеет вид

$$z - z_3 = z_1z_2(\bar{z} - \bar{z}_3).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z} = 1$ единичной окружности, будем иметь

$$z - z_3 = z_1z_2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_3}\right),$$

$$z - z_3 = -\frac{z_1z_2}{z_3z}(z - z_3).$$

Один из корней этого уравнения естественно равен $z=z_3$ (аффикс точки C). Другой

$$c_1 = -z_1 z_2 / z_3 \tag{123}$$

— аффикс точки C_1. Аналогично находим аффиксы

$$a_1 = -z_2 z_3 / z_1, \qquad b_1 = -z_3 z_1 / z_2 \tag{124}$$

точек B_1 и A_1. Решим полученную систему относительно z_1, z_2, z_3. Перемножая эти уравнения попарно, получим

$$z_1^2 = b_1 c_1, \quad z_2^2 = c_1 a_1, \quad z_3^2 = a_1 b_1,$$

откуда

$$z_1 = \sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, \quad z_2 = \sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, \quad z_3 = \sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \tag{125}$$

и так как каждое из произведений двух радикалов, стоящих в правой части, имеет два значения, то последняя система имеет 8 решений. Считая, что в каждом из уравнений (125) для каждого радикала $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{b_1}$, $\sqrt{c_1}$ берется любое, но одно и то же значение в каждом уравнении, можем записать все эти решения в виде

$$\left.\begin{array}{lll}
z_1 = \sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = \sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = \sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = -\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = -\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = \sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = \sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = -\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = -\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = -\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = \sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = -\sqrt{a_1}\sqrt{b_1};
\end{array}\right\} \tag{126}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
z_1 = -\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = -\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = -\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = -\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = \sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = \sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = \sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = -\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = \sqrt{a_1}\sqrt{b_1}, \\
z_1 = \sqrt{b_1}\sqrt{c_1}, & z_2 = \sqrt{c_1}\sqrt{a_1}, & z_3 = -\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}.
\end{array}\right\} \tag{127}$$

Из системы (123), (124) следует, что $a_1 b_1 c_1 = -z_1 z_2 z_3$, поэтому все тройки (126) чисел не являются решениями системы (124). Любая же строка из соотношений (127) есть решение системы (123), (124). В самом деле,

$$-\frac{z_1 z_2}{z_3} = -\frac{\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}}{-\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}} = c_1,$$

$$-\frac{z_2 z_3}{z_1} = -\frac{\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}}{-\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}} = a_1,$$

$$-\frac{z_3 z_1}{z_2} = -\frac{\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}}{-\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}} = b_1$$

и также для трех остальных соотношений (127).

Итак, существует 4 треугольника, удовлетворяющих условию задачи. Построим, например, треугольник, соответствующий первой строке решений (127). Для этого проведем к окружности

$(A_1B_1C_1)$ какую-нибудь из двух касательных, параллельных прямой ΩA_1 (Ω — единичная точка), точка P_1 прикосновения проведенной касательной к окружности $(A_1B_1C_1)$ имеет аффиксом одно из значений $\sqrt{a_1}$ (рис. 37). Аналогично построим точки Q_1

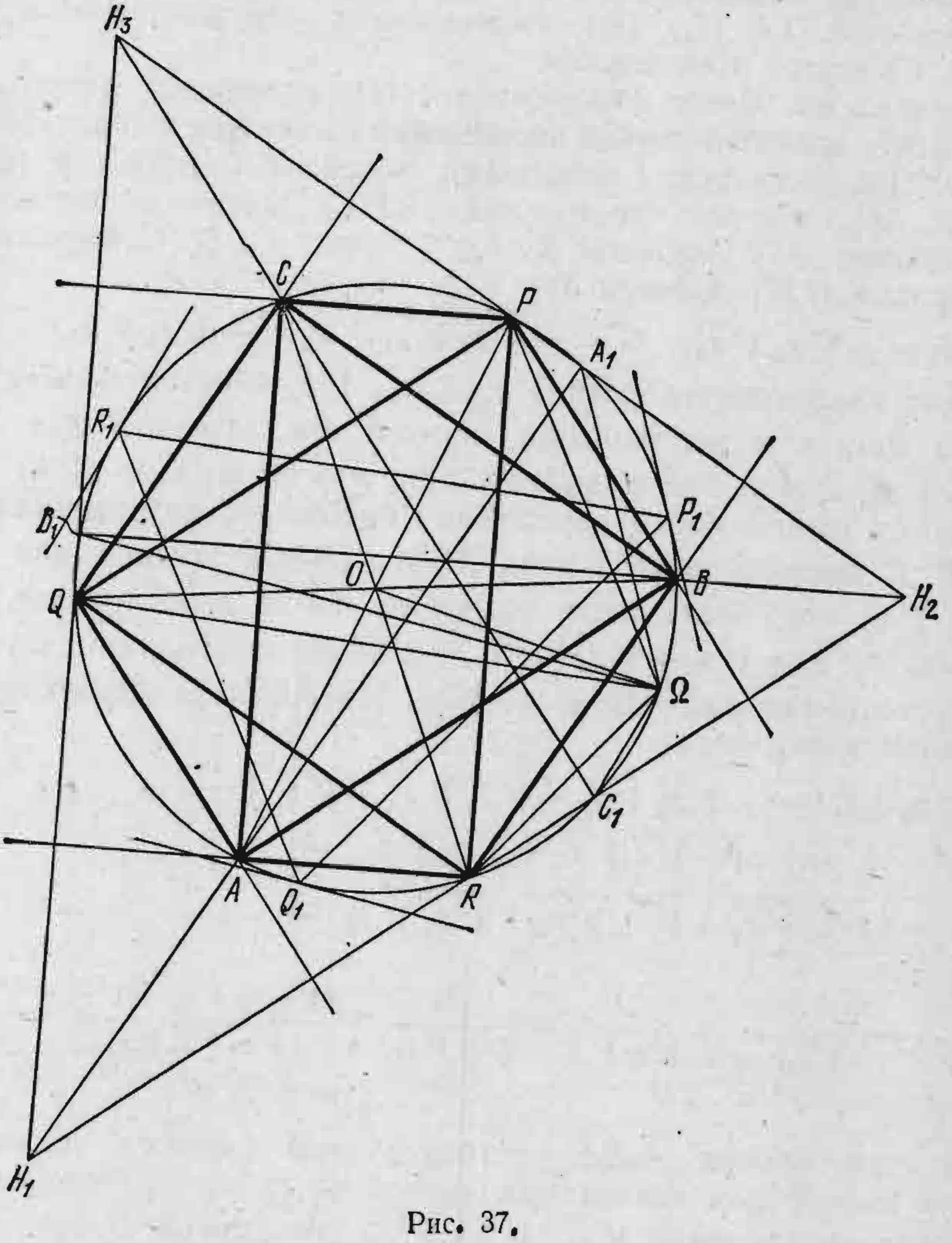


Рис. 37.

и R_1, аффиксами которых являются значения $\sqrt{b_1}$ и $\sqrt{c_1}$. Для построения точки с аффиксом $\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}$ проведем через точку Ω прямую, параллельную прямой Q_1R_1; вторая точка P пересечения проведенной прямой с окружностью $(A_1B_1C_1)$ имеет аффикс $\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}$. Наконец, точка A, симметричная точке P относительно центра O окружности $(A_1B_1C_1)$, имеет аффикс $-\sqrt{b_1}\sqrt{c_1}$. Аналогично строятся точки B и C с аффиксами $-\sqrt{c_1}\sqrt{a_1}$ и $-\sqrt{a_1}\sqrt{b_1}$.

Три других треугольника, удовлетворяющих условию задачи, таковы: AQR, PBR, PQC.

Пример 36. В единичную окружность вписан треугольник ABC, аффиксы вершин которого z_1, z_2, z_3. Найти аффиксы τ_0, τ_1, τ_2, τ_3 окружности, вписанной (I) в этот треугольник (аффикс τ_0), и окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных (соответственно в углы A, B, C) в этот треугольник.

Решение. Центр I окружности (I), вписанной в треугольник ABC, является точкой пересечения биссектрис его внутренних углов. Эти биссектрисы пересекают окружность (ABC) в точках A_0, B_0, C_0, причем треугольник $A_0B_0C_0$ всегда остроугольный (см. пример 34). Аффиксы a_0, b_0, c_0 точек A_0, B_0, C_0 выражаются формулами (122) примера 34:

$$a_0=-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}, \quad b_0=-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}, \quad c_0=-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}, \tag{128}$$

где для квадратных корней $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ берутся во всех формулах одни и те же значения, причем эти значения для $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ нужно всегда выбрать так, что формулами (128) определяются именно точки пересечения биссектрис внутренних углов A, B, C данного треугольника ABC с (ABC). Именно для $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ надо брать такие значения, чтобы выполнялось неравенство $|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}|<1$, т. е. чтобы треугольник, вершины которого имеют аффиксы $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$, был бы остроугольным. В самом деле, тогда

$$\begin{aligned}|a_0+b_0+c_0|&=|-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}|=\\&=|\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}|=\\&=|\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}+\overline{\sqrt{z_3}}\,\overline{\sqrt{z_1}}+\overline{\sqrt{z_1}}\,\overline{\sqrt{z_2}}|=\\&=\left|\frac{1}{\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}}+\frac{1}{\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}}+\frac{1}{\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}}\right|=\frac{|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}|}{|\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}|}=\\&=|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}|<1,\end{aligned}$$

т. е. треугольник $A_0B_0C_0$ остроугольный (имеется только два таких выбора для квадратных корней из z_1, z_2, z_3; если один из них обозначить через $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$, то другой будет $-\sqrt{z_1}$, $-\sqrt{z_2}$, $-\sqrt{z_3}$, и любой из этих выборов дает формулы (128)).

Итак, AA_0, BB_0, CC_0 — биссектрисы внутренних углов A, B, C треугольника ABC. Угловой коэффициент биссектрисы AA_0 равен

$$\frac{a_0-z_1}{\bar{a}_0-\bar{z}_1}=\frac{-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-z_1}{-\dfrac{1}{\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}}-\dfrac{1}{z_1}}=z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3},$$

и, следовательно, уравнение прямой AA_0:

$$z-z_1=z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,(\bar{z}-\bar{z}_1),$$

или

$$z - z_1 \sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{z} = z_1 - \sqrt{z_2}\sqrt{z_3}. \tag{129}$$

Уравнение BB_0:

$$z - z_2 \sqrt{z_3}\sqrt{z_1}\,\bar{z} = z_2 - \sqrt{z_3}\sqrt{z_1}. \tag{130}$$

Из системы (129), (130) найдем аффикс τ_0 центра I окружности (I), вписанной в треугольник ABC:

$$\tau_0 (z_2 \sqrt{z_1} - z_1 \sqrt{z_2}) = -z_1 z_2 (\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) - \\ - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,(z_2 - z_1),$$

$$\tau_0 \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) = -z_1 z_2 (\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) - \\ - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,[(\sqrt{z_2})^2 - (\sqrt{z_1})^2],$$

$$\tau_0 = -\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}(\sqrt{z_2} + \sqrt{z_1}),$$

и окончательно

$$\tau_0 = -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} - \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = a_0 + b_0 + c_0. \tag{131}$$

Если теперь взять точку B_0^*, симметричную точке B_0 относительно центра O окружности (ABC), то аффикс точки B_0^* будет равен $b_0^* = -b_0$ и BB_0^* будет биссектрисой внешнего угла B. Угловой коэффициент BB_0^* равен

$$\frac{z_2 + b_0}{\bar{z}_2 + \bar{b}_0} = \frac{z_2 - \sqrt{z_3}\sqrt{z_1}}{\dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}}} = -z_2\sqrt{z_3}\sqrt{z_1},$$

и уравнение BB_0^*:

$$z - z_2 = -z_2\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}\,(\bar{z} - \bar{z}_2),$$

или

$$z + z_2\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}\,\bar{z} = z_2 + \sqrt{z_3}\sqrt{z_1}. \tag{132}$$

Из уравнений (129) и (132) находим аффикс τ_1 центра I_a окружности (I_a), вневписанной в угол A треугольника ABC:

$$\tau_1 (z_1\sqrt{z_2} + z_2\sqrt{z_1}) = z_2 z_1 (\sqrt{z_2} + \sqrt{z_1}) - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,(z_2 - z_1),$$

$$\tau_1 \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}) = z_1 z_2 (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}) - \\ - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,[(\sqrt{z_2})^2 - (\sqrt{z_1})^2],$$

$$\tau_1 = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}(\sqrt{z_2} - \sqrt{z_1}) = \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\sqrt{z_1},$$

$$\tau_1 = -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} + \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = a_0 - b_0 - c_0.$$

Аналогично находятся τ_2 и τ_3. Итак,

$$\left.\begin{aligned}
\tau_0 &= -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}=a_0+b_0+c_0,\\
\tau_1 &= -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}=a_0-b_0-c_0,\\
\tau_2 &= \sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}=-a_0+b_0-c_0,\\
\tau_3 &= \sqrt{z_3}\sqrt{z_3}+\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}=-a_0-b_0+c_0.
\end{aligned}\right\} \quad (133)$$

Из последних формул (33) следует, что

$$\frac{\tau_0+\tau_1}{2}=a_0, \quad \frac{\tau_0+\tau_2}{2}=b_0, \quad \frac{\tau_0+\tau_3}{2}=c_0,$$

т. е. середины отрезков II_a, II_b, II_c, совпадают соответственно с точками A_0, B_0, C_0, в которых биссектрисы внутренних углов

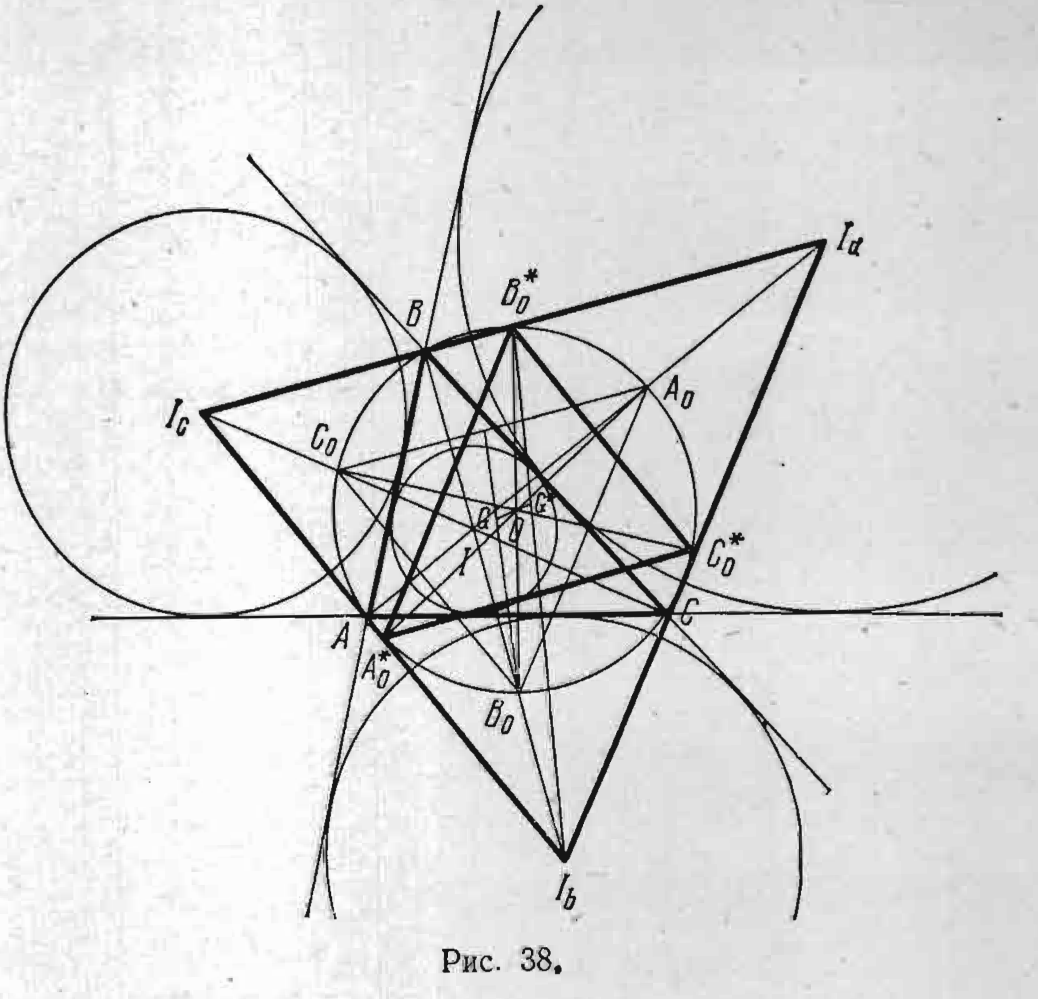


Рис. 38.

треугольника ABC пересекают окружность $(ABC)=(O)$, описанную около треугольника ABC (рис. 38).

Из формул (133) следует также, что

$$\frac{\tau_2+\tau_3}{2}=-a_0, \quad \frac{\tau_3+\tau_1}{2}=-b_0, \quad \frac{\tau_1+\tau_2}{2}=-c_0,$$

т. е. середины отрезков I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b совпадают соответственно с точками A_0^*, B_0^*, C_0^*, в которых биссектрисы внешних углов

A, B, C треугольника ABC пересекают окружность $(ABC)=(O)$, описанную около треугольника ABC. Точки A_0^*, B_0^*, C_0^* симметричны соответственно точкам A_0, B_0, C_0 относительно центра O окружности $(O)=(ABC)$, так что $A_0A_0^*$, $B_0B_0^*$, $C_0C_0^*$ — диаметры этой окружности. Из этого, между прочим, следует, что окружность $(O)=(ABC)=(A_0B_0C_0)=(A_0^*B_0^*C_0^*)$ является окружностью Эйлера для треугольника $I_aI_bI_c$, и потому радиус окружности $(I_aI_bI_c)$ в два раза больше окружности (ABC) (что мы уже доказали аналитически в примере 32, п. 7° (см. решение)).

Наконец, так как $IA \perp I_bI_c$, $IB \perp I_cI_a$, $IC \perp I_aI_b$, то I — ортоцентр треугольника $I_aI_bI_c$, и далее: так как $(\tau_1+\tau_2+\tau_3)/3 = -(a_0+b_0+c_0)/3$, то центр тяжести G^* треугольника $I_aI_bI_c$ симметричен центру тяжести G треугольника $A_0B_0C_0$ относительно центра O окружности (ABC), или же точка G^* является центром тяжести треугольника $A_0^*B_0^*C_0^*$, симметричного треугольнику $A_0B_0C_0$ относительно точки O.

Пример 37. ABC — произвольный треугольник, P — произвольная точка. Доказать, что прямые a', b', c', симметричные прямым

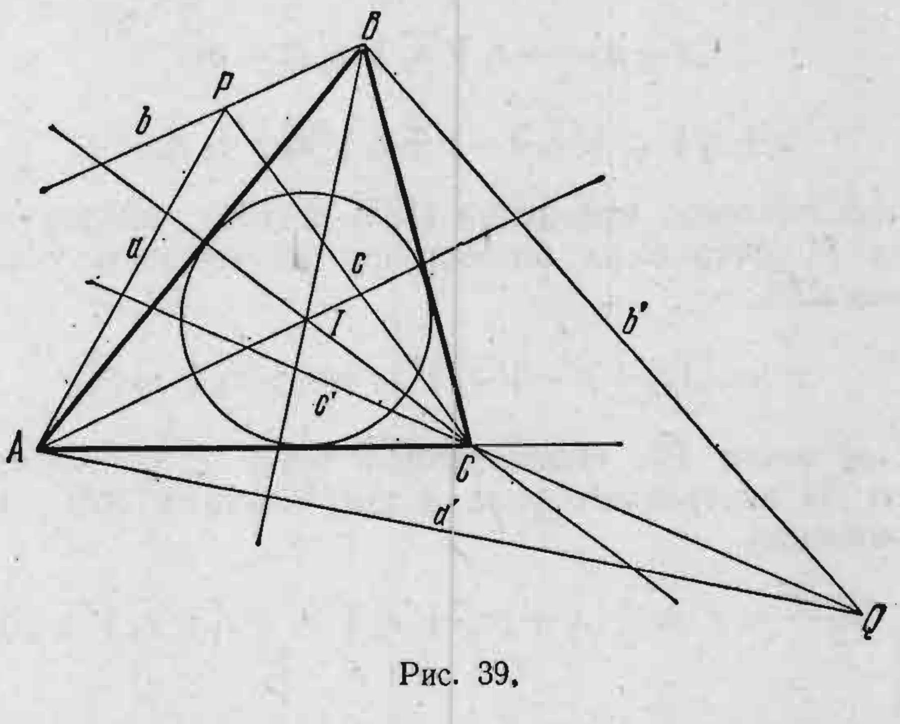


Рис. 39.

$a=AP$, $b=BP$, $c=CP$ относительно биссектрис AI, BI, CI внутренних углов A, B, C треугольника ABC, проходят также через одну и ту же точку Q. Точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC (рис. 39). Доказать, что если окружность (ABC) принята за единичную и если аффиксы точек A, B, C, P, Q соответственно равны z_1, z_2, z_3, p, q, то они связаны соотношением

$$p+q+\sigma_3\bar{p}\bar{q}=\sigma_1 \tag{134}$$

(это соотношение было получено английским математиком Морлеем). Выразить q через z_1, z_2, z_3, p.

Решение. Точки A_0, B_0, C_0 пересечения биссектрис внутренних углов A, B, C треугольника ABC с окружностью (ABC) образуют всегда остроугольный треугольник $A_0B_0C_0$. Если для $\sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, \sqrt{z_3}$ выбрать такие значения, что $|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}|<1$, то аффиксы a_0, b_0, c_0 точек A_0, B_0, C_0 будут

$$a_0=-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}, \quad b_0=-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}, \quad c_0=-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$$

(пример 36, формулы (128)). Угловой коэффициент биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC равен

$$\frac{z_1+\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}}{\bar{z}_1+\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}}=z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3},$$

а уравнение этой биссектрисы

$$z-z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{z}=z_1-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} \tag{135}$$

(см. предыдущий пример 36, уравнение (129)).

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на эту прямую, имеет вид

$$z-p=-z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,(\bar{z}-\bar{p}),$$

или

$$z+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{z}=p+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{p}. \tag{136}$$

Складывая почленно уравнения (135) и (136), найдем аффикс p' проекции P' точки P на биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC:

$$p'=\frac{1}{2}\left(z_1+p-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{p}\right).$$

Аффикс p_1^* точки P_1^*, симметричной точке P относительно биссектрисы AI внутреннего угла A треугольника ABC, находится из соотношения

$$\frac{p+p_1^*}{2}=p'=\frac{1}{2}\left(z_1+p-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{p}\right),$$

откуда

$$p_1^*=z_1-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{p}.$$

Уравнение прямой AP_1^* можно взять в виде

$$\begin{vmatrix} z & z_1 & p_1^* \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \overline{p_1^*} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} z & z_1 & z_1-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+z_1\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}\,\bar{p} \\ \bar{z} & \bar{z}_1 & \bar{z}_1-\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}+\bar{z}_1\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}\,p \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\left(\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3}-\bar z_1\,\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}\,p\right)z+\left(-\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}+z_1\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3}\,\bar p\right)\bar z-$$
$$-z_1\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3}+\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}\,p+\bar z_1\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}-\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3}\,\bar p=0,$$

или, умножая на $\sqrt{z_2}\,\sqrt{z_3}$:

$$(1-\bar z_1 p)\,z+(-z_2z_3+z_1z_2z_3\bar p)\,\bar z-z_1+p+\bar z_1z_2z_3-z_2z_3\bar p=0. \qquad (137)$$

Аналогично запишется уравнение прямой, симметричной прямой BP относительно биссектрисы BI внутреннего угла B треугольника ABC:

$$(1-\bar z_2 p)\,z+(-z_3z_1+z_1z_2z_3\bar p)\,\bar z-z_2+p+\bar z_2z_3z_1-z_3z_1\bar p=0. \qquad (138)$$

Аффикс точки Q пересечения прямых (137) и (138), симметричных прямым AP и BP относительно биссектрис AI и BI внутренних углов A и B треугольника ABC, найдем, решая систему уравнений (137) и (138). Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-\bar z_1p & -z_2z_3+z_1z_2z_3\bar p\\ 1-\bar z_2p & -z_3z_1+z_1z_2z_3\bar p\end{vmatrix}=$$
$$=-z_3z_1+\sigma_3\bar p+z_3p-z_2z_3p\bar p+z_2z_3-\sigma_3\bar p-z_3p+z_1z_3\bar pp=$$
$$=z_3(z_2-z_1)-z_3p\bar p\,(z_2-z_1)=z_3(z_2-z_1)(1-p\bar p).$$

Отсюда следует, что $\Delta\neq 0$ тогда и только тогда, когда $1-p\bar p\neq 0$, т. е. $|p|\neq 1$, иначе точка P не лежит на окружности (ABC).

1) Предполагая, что $|p|\neq 1$, т. е. что точка P не лежит на окружности (ABC), заключаем, что система (137), (138) имеет и притом только одно решение относительно z и $\bar z$: $z=q$, $\bar z=\bar q$. Это решение можно было бы найти, например, по формуле Крамера, однако мы пойдем по несколько иному пути; а именно, подставляя решение $z=q$, $\bar z=\bar q$ в уравнения (137), (138) и вычитая из первого равенства почленно второе, будем иметь

$$(\bar z_2-\bar z_1)\,pq+z_3(z_1-z_2)\bar q+z_2-z_1+z_3\left(\frac{z_2}{z_1}-\frac{z_1}{z_2}\right)+z_3\bar p\,(z_1-z_2)=0,$$

или

$$\frac{z_1-z_2}{z_1z_2}\,pq+z_3\bar q\,(z_1-z_2)-(z_1-z_2)-\frac{z_3}{z_1z_2}(z_1^2-z_2^2)+z_3\bar p\,(z_1-z_2)=0.$$

Далее, сокращая на z_1-z_2 и умножая обе части на z_1z_2, получим

$$pq+\sigma_3(\bar p+\bar q)-\sigma_2=0. \qquad (139)$$

Это — уже *соотношение Морлея.* В самом деле, переходя к сопряженным числам, будем иметь

$$\bar p\bar q+\bar\sigma_3(p+q)-\bar\sigma_2=0. \qquad (140)$$

Но $\bar\sigma_3=1/\sigma_3$, $\bar\sigma_2=\sigma_1/\sigma_3$, следовательно,

$$p+q+\sigma_3\bar p\bar q=\sigma_1. \qquad (141)$$

Из соотношений (139) и (141) легко выразить q через p. В самом деле, из соотношения (139) находим

$$\bar{q}=\frac{\sigma_2-pq}{\sigma_3}-\bar{p},$$

и соотношение (141) принимает вид

$$p+q+\bar{p}(\sigma_2-pq-\sigma_3\bar{p})=\sigma_1,$$

$$q(1-p\bar{p})=\sigma_3\bar{p}^2-\sigma_2\bar{p}-p+\sigma_1,$$

откуда

$$q=\frac{\sigma_3\bar{p}^2-\sigma_2\bar{p}-p+\sigma_1}{1-p\bar{p}}.$$

Из симметрии этого выражения относительно z_1, z_2, z_3 следует, что и прямая C' проходит через точку Q.

2) Если точка P лежит на окружности (ABC), но не совпадает ни с одной из точек A, B, C, то прямые (137) и (138) коллинеарны; им будет, как ясно из дальнейшего, коллинеарна и третья

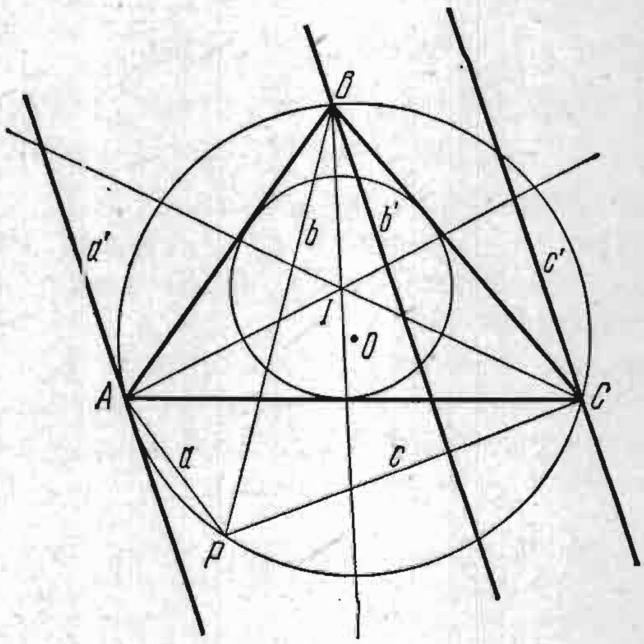


Рис. 40.

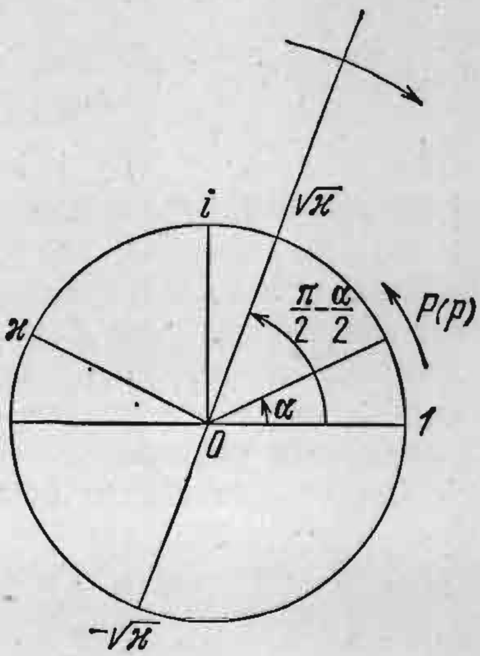


Рис. 41.

прямая, симметричная прямой CP относительно прямой CI (рис. 40). Их общий угловой коэффициент равен

$$\varkappa=\frac{z_2z_3-\sigma_3\bar{p}}{1-\bar{z}_1p}=\sigma_3\frac{\bar{z}_1-\bar{p}}{1-\bar{z}_1p}=\sigma_3\frac{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{p}}{1-\frac{p}{z_1}}=\sigma_3\frac{p-z_1}{p(z_1-p)}=-\frac{\sigma_3}{p}=-\sigma_3\bar{p},$$

а если за единичную точку принять точку Бутена, то $\varkappa=-\bar{p}$. Полагая $p=\cos\alpha+i\sin\alpha$, находим

$$\varkappa=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha).$$

Аффиксы концов диаметра единичной окружности (ABC), который имеет такой угловой коэффициент, будут

$$\sqrt{\varkappa} = \pm\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Отсюда следует, что если точка P описывает окружность (ABC), то этот диаметр произведет поворот на угол π, притом вращаться он будет в направлении, противоположном вращению радиуса OP (рис. 41). Если дополнить евклидову плоскость до проективно-евклидовой «бесконечно удаленными» или несобственными точками, то можно считать, что если точка P лежит на окружности (ABC), но не совпадает ни с одной из вершин A, B, C треугольника ABC, то ей соответствует несобственная точка проективно-евклидовой плоскости. Соотношение Морлея $p+q+\sigma_3\bar{p}\bar{q}=\sigma_1$ в этом случае, конечно, не имеет места, так как несобственные точки не имеют аффикса.

Наконец, из геометрических соображений ясно, что если точка P лежит на прямой BC, но не совпадает ни с B, ни с C, то ей будет изогонально сопряжена точка A (аналогично и для прямых CA и AB). Наконец, если точка P совпадает с одной из вершин треугольника ABC, например $P=A$, то ей будет изогонально сопряжена любая точка прямой BC (аналогично и в случаях $P=B$ и $P=C$). Это можно проверить и аналитически: пусть $p=\alpha z_2+\beta z_3$, где α и β действительны и $\alpha+\beta=1$ (т. е. точка P лежит на прямой BC). Тогда $\bar{p}=\frac{\alpha}{z_2}+\frac{\beta}{z_3}$ и полагая $q=z_1$, $\bar{q}=\frac{1}{z_1}$, будем иметь

$$\begin{aligned} p+q+\sigma_3\bar{p}\bar{q} &= \alpha z_2+\beta z_3+z_1+z_1z_2z_3\left(\frac{\alpha}{z_2}+\frac{\beta}{z_3}\right)\frac{1}{z_1} = \\ &= \alpha z_2+\beta z_3+z_1+\alpha z_3+\beta z_2 = z_1+(\alpha+\beta)\,z_2+(\alpha+\beta)\,z_3 = \\ &= z_1+z_2+z_3=\sigma_1. \end{aligned}$$

Заметим, что центр I окружности (I), вписанной в треугольник ABC, и центры I_a, I_b, I_c окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных в углы A, B, C этого треугольника, являются неподвижными точками при изогональной сопряженности точек относительно треугольника ABC. Ниже в примере 41 будет доказано, что кроме этих точек I, I_a, I_b, I_c больше нет точек, неподвижных при изогональном соответствии относительно треугольника ABC.

Отметим еще, что если из евклидовой плоскости исключить окружность (ABC), описанную около треугольника ABC, и исключить прямые BC, CA, AB, то изогональное соответствие между точками $P(p)$ и $Q(q)$ будет взаимно однозначным отображением ($P \leftrightarrow Q$) или взаимно однозначным и инволюционным преобразованием, которое описывается соотношением $p+q+\bar{p}\bar{q}\sigma_3=\sigma_1$.

Если евклидову плоскость дополнить до проективной, но исключить из нее прямые BC, CA, AB, то соответствие между точками $P(p)$ и $Q(q)$ будет снова взаимно однозначным, но теперь соотношение $p+q+\bar{p}\bar{q}\sigma_3=\sigma_1$ будет относиться только к собственным точкам $P(p)$ и $Q(q)$. Наконец, во всей проективно-евклидовой плоскости отображение $P(p)$ на $Q(q)$ уже не будет взаимно однозначным и соотношение $p+q+\bar{p}\bar{q}\sigma_3=\sigma_1$ будет снова верным лишь для собственных точек $P(p)$ и $Q(q)$ (несобственные точки не имеют аффиксов).

Пример 38. Окружность $(O)=(ABC)$, описанная вокруг треугольника ABC, принимается за единичную; z_1, z_2, z_3 — аффиксы вершин A, B, C. Найти аффиксы точек, изогонально сопряженных следующим точкам относительно треугольника ABC:

1°. Точки G пересечения медиан треугольника ABC.

2°. Ортоцентра H треугольника ABC.

3°. Центра O_9 окружности Эйлера треугольника ABC.

Решение. Воспользуемся формулой примера 37

$$q=\frac{p+\bar{p}\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3\bar{p}^2}{p\bar{p}-1},$$

определяющей аффикс q точки Q, являющейся образом точки P с аффиксом p при изогональном преобразовании относительно треугольника ABC. Имеем:

1°. Так как аффикс g точки G равен $\sigma_1/3$, то аффикс l образа L точки G при изогональном преобразовании относительно треугольника ABC будет

$$l=\frac{\frac{\sigma_1}{3}+\frac{\bar{\sigma}_1}{3}\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3\frac{\bar{\sigma}_1^2}{9}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{9}-1}=\frac{\frac{2}{3}\sigma_1+\frac{\sigma_2^2}{3\sigma_3}-\frac{\sigma_2^2}{9\sigma_3}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{9}-1}=$$

$$=\frac{-\frac{2}{3}\sigma_1+\frac{2\sigma_2^2}{9\sigma_3}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{9}-1}=2\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_1-3\sigma_1}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-9}.$$

Точка L, изогонально сопряженная точке G относительно треугольника ABC, называется *точкой Лемуана*. Таким образом, аффикс l точки L Лемуана треугольника ABC:

$$l=2\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_1-3\sigma_1}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-9}.$$

2°. Аффикс точки изогонально сопряженной ортоцентру H относительно треугольника ABC:

$$\frac{\sigma_1+\bar{\sigma}_1\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3\bar{\sigma}_1^2}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-1}=\frac{\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3}-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3}}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-1}=0,$$

т. е. ортоцентр H и центр O окружности (ABC) изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (прямые AO и AH симметричны относительно прямой AI и аналогично для вершин B и C).

3°. Аффикс точки изогонально сопряженной центру O_9 окружности (O_9) Эйлера относительно треугольника ABC:

$$\frac{\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\bar{\sigma}_1}{2}\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3\frac{\bar{\sigma}_1^2}{4}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{4}-1}=\frac{-\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\sigma_2^2}{2\sigma_3}-\frac{\sigma_2^2}{4\sigma_3}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{4}-1}=\frac{-\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\sigma_2^2}{4\sigma_3}}{\frac{\sigma_1\bar{\sigma}_1}{4}-1}=\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_1-2\sigma_1}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-4}.$$

Пример 39. Доказать, что середина M отрезка, концами которого служат точки P_1 и Q_1, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC концам P и Q любого диаметра PQ окружности (Ω), концентричной окружности (ABC), при вращении диаметра PQ описывает окружность, касающуюся касательных, проведенных из ортоцентра H треугольника ABC к окружности (ABC). Треугольник ABC предполагается тупоугольным, а радиус ρ окружности (Ω) предполагается меньшим OH (в этом и только в этом случае из точки H можно к окружности (ABC) провести касательные).

Решение. Примем окружность (ABC) за единичную окружность; пусть z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A, B, C. Пусть PQ — произвольный диаметр окружности (Ω), а p и $-p$ — соответственно аффиксы точек P и Q.

Обозначая через p_1 и q_1 аффиксы точек P_1 и Q_1, соответственно изогонально сопряженным точкам P и Q относительно треугольника ABC, будем иметь (см. пример 37)

$$p_1=\frac{\sigma_3\bar{p}^2-\sigma_2\bar{p}-p+\sigma_1}{1-p\bar{p}},$$

$$q_1=\frac{\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_2\bar{p}+p+\sigma_1}{1-p\bar{p}}.$$

Отсюда находим аффикс m середины M отрезка P_1Q_1:

$$m=\frac{p_1+q_1}{2}=\frac{\sigma_3\bar{p}^2+\sigma_1}{1-p\bar{p}}.$$

Из этого соотношения следует, что если точка P описывает окружность (Ω), концентричную окружности (ABC), то $1-p\bar{p}=$ $=\mathrm{const}$ $(1-p\bar{p}=-\sigma$, где σ — степень точки P относительно окружности $(ABC))$, и, следовательно, точка M описывает окружность (T), аффикс центра которой

$$t=\frac{\sigma_1}{1-p\bar{p}},$$

а радиус

$$R_1=\frac{|\sigma_3\bar{p}^2|}{|1-p\bar{p}|}=\frac{OP^2}{|1-OP^2|}.$$

Зная аффиксы точек H и T, находим комплексное число, соответствующее направленному отрезку $\overrightarrow{HT}$:

$$t-\sigma_1=\frac{\sigma_1}{1-p\bar{p}}-\sigma_1=\frac{\sigma_1 p\bar{p}}{1-p\bar{p}}=\sigma_1\frac{OP^2}{1-OP^2}.$$

Направленному отрезку $\overrightarrow{HO}$ соответствует комплексное число $-\sigma_1$. Следовательно,

$$\frac{\overrightarrow{HT}}{\overrightarrow{HO}}=\frac{OP^2}{OP^2-1}.$$

Из этого соотношения следует, что точка T является образом центра O окружности (ABC) при гомотетии с центром H и коэффициентом гомотетии, равном $\frac{OP^2}{OP^2-1}$. Поэтому окружность (T), описываемая точкой M, касается касательных, проведенных к окружности (ABC) из ортоцентра H треугольника ABC (вот здесь только и используется условие, что треугольник ABC тупоугольный).

Замечания. 1) Радиус R_1 окружности (T) равен радиусу 1 окружности (ABC) тогда и только тогда, когда

$$\frac{OP^2}{|1-OP^2|}=1.$$

Отсюда только одна возможность

$$\frac{OP^2}{1-OP^2}=1,\quad OP=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

2) Радиус R_1 окружности (T) равен радиусу окружности Эйлера тогда и только тогда, когда

$$OP=\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

3) Радиус с R_1 окружности (T) равен радиусу окружности (Ω) тогда и только тогда, когда

$$OP=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}R.$$

Пример 40. На плоскости задан произвольный треугольник ABC. Окружность $(ABC)=(O)$ принимается за единичную. Пусть τ_0 — аффикс центра I окружности, вписанной в треугольник ABC, а τ_1, τ_2, τ_3 — аффиксы центров I_a, I_b, I_c окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных в углы A, B, C данного треугольника ABC. Доказать, что ортополюсы прямых OI, OI_a, OI_b, OI_c относительно треугольника ABC являются соответственно точками Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 Фейербаха треугольника ABC: точки Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются соответственно точками, в которых окружность Эйлера для треугольника ABC касается с окружностями (I), (I_a), (I_b), (I_c). Найти, исходя из доказанной теоремы, аффиксы φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 точек Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 Фейербаха. Аффиксы вершин A, B, C треугольника ABC соответственно равны z_1, z_2, z_3 (см. рис. 35).

Решение. Пусть τ_0, τ_1, τ_2, τ_3 — соответственно аффиксы точек I, I_a, I_b, I_c. На основании примера 7 ортополюсы прямых OI,

OI_a, OI_b, OI_c относительно треугольника ABC будут иметь аффиксы

$$\varphi_0' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0}\right), \tag{142}$$

$$\varphi_1' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_1}{\tau_1}\right), \tag{143}$$

$$\varphi_2' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_2}{\tau_2}\right), \tag{144}$$

$$\varphi_3' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_3}{\tau_3}\right), \tag{145}$$

так как угловые коэффициенты прямых OI, OI_a, OI_b, OI_c соответственно таковы:

$$\varkappa_0 = \frac{\tau_0}{\bar{\tau}_0}, \quad \varkappa_1 = \frac{\tau_1}{\bar{\tau}_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{\tau_2}{\bar{\tau}_2}, \quad \varkappa_3 = \frac{\tau_3}{\bar{\tau}_3}.$$

Надо доказать, что φ_0', φ_1', φ_2', φ_3' — это аффиксы соответствующих точек Фейербаха. Рассмотрим сначала формулу (142)

$$\varphi_0' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0}\right).$$

Пусть o_9 — аффикс центра окружности (O_9) треугольника ABC. Так как $o_9 = \frac{\sigma_1}{2}$, то

$$\varphi_0' - \frac{\sigma_1}{2} = \varphi_0' - o_9 = -\frac{\sigma_3 \bar{\tau}_0}{2\tau_0},$$

откуда

$$|\varphi_0' - o_9| = \frac{1}{2},$$

следовательно, точка Φ_0' лежит на окружности Эйлера. По формуле Эйлера имеем

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = 1 - 2r \qquad (R = 1),$$

где r — радиус окружности (I), вписанной в треугольник ABC. Так как $OI^2 = \tau_0 \bar{\tau}_0$, то из последней формулы находим

$$r = \frac{1 - \tau_0 \bar{\tau}_0}{2}.$$

Уравнение окружности (I):

$$(z - \tau_0)(\bar{z} - \bar{\tau}_0) = \frac{(1 - \tau_0 \bar{\tau}_0)^2}{4}. \tag{146}$$

Докажем, что точка Φ_0' с аффиксом

$$\varphi_0' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0}\right)$$

лежит на окружности (I). Имеем

$$\varphi_0' - \tau_0 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_3 \bar{\tau}_0}{2\tau_0} - \tau_0,$$

и так как τ_0 — неподвижная точка изогонального преобразования относительно треугольника ABC (см. пример 37, формула (141)), то

$$2\tau_0+\sigma_3\bar{\tau}_0^2-\sigma_1=0,$$

откуда

$$\tau_0=\frac{\sigma_1-\sigma_3\bar{\tau}_0^2}{2},$$

и потому

$$\varphi_0'-\tau_0=\frac{\sigma_1}{2}-\frac{\sigma_3\bar{\tau}_0}{2\tau_0}-\frac{\sigma_1}{2}+\frac{\sigma_3\bar{\tau}_0^2}{2}=\frac{\sigma_3\bar{\tau}_0^2}{2}-\frac{\sigma_3\bar{\tau}_0}{2\tau_0}=\frac{\sigma_3\bar{\tau}_0}{2\tau_0}(\tau_0\bar{\tau}_0-1).$$

Отсюда

$$\bar{\varphi}_0'-\bar{\tau}_0=\frac{\bar{\sigma}_3\tau_0}{2\bar{\tau}_0}(\tau_0\bar{\tau}_0-1)$$

и, значит,

$$(\varphi_0'-\tau_0)(\bar{\varphi}_0'-\bar{\tau}_0)=\frac{(\tau_0\bar{\tau}_0-1)^2}{4}=r^2,$$

т. е. точка Φ_0' с аффиксом φ_0' лежит на окружности (I), уравнение которой имеет вид (146). Далее, угловой коэффициент прямой $I\Phi_0'$ равен

$$\frac{\varphi_0'-\tau_0}{\bar{\varphi}_0'-\bar{\tau}_0}=\sigma_3^2\frac{\bar{\tau}_0^2}{\tau_0^2}.$$

Угловой коэффициент прямой $O_9\Phi_0'$:

$$\frac{\frac{\sigma_1}{2}-\varphi_0'}{\frac{\bar{\sigma}_1}{2}-\bar{\varphi}_0'}=\frac{\frac{1}{2}\sigma_3\frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0}}{\frac{1}{2}\bar{\sigma}_3\frac{\tau_0}{\bar{\tau}_0}}=\sigma_3^2\frac{\bar{\tau}_0^2}{\tau_0^2},$$

значит, точки O_9, Φ_0', I лежат на одной прямой. Итак, точка Φ_0' с аффиксом φ_0' лежит и на окружности (I) и на окружности (O_9) Эйлера, а кроме того, точки Φ_0', I, O_9 лежат на одной прямой. Но если две окружности имеют общую точку (в данном случае Φ_0') и их центры (в данном случае I и O_9) лежат на одной прямой с этой общей точкой, то они касаются друг друга именно в этой точке. Но точка касания окружностей (I) и (O_9) и есть точка Φ_0 Фейербаха, значит, точки Φ_0' и Φ_0 совпадают и, следовательно, $\varphi_0'=\varphi_0$.

Для вывода трех остальных формул

$$\varphi_1'=\varphi_1,\qquad \varphi_2'=\varphi_2,\qquad \varphi_3'=\varphi_3,$$

где φ_1', φ_2', φ_3' выражаются формулами (143), (144), (145), а φ_1, φ_2, φ_3 — аффиксы точек Φ_1, Φ_2, Φ_3 Фейербаха, выведем предварительно формулы

$$OI_a^2=R^2+2r_aR, \tag{147}$$

$$OI_b^2=R^2+2r_bR, \tag{148}$$

$$OI_c^2=R^2+2r_cR. \tag{149}$$

Выведем только первую из них; остальные выводятся аналогично. Рассмотрим инверсию $[I_a, r_a^2]$, полюсом которой является центр I_a окружности (I_a), вневписанной в угол A треугольника ABC, а r_a^2 — степень инверсии. Пусть окружность (I_a) касается прямых BC, CA, AB соответственно в точках P_1, P_2, P_3 (см. рис. 35). При инверсии $[I_a, r_a^2]$ точки A, B, C перейдут соответственно в точки A_1^*, B_1^*, C_1^*, в которых пересекаются прямые I_aA и P_2P_3; I_aB и P_3P_1; I_aC и P_1P_2. Точки A_1^*, B_1^*, C_1^* — соответственно середины отрезков P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Таким образом, окружности (ABC) и $(A_1^*B_1^*C_1^*)$ перейдут друг в друга при инверсии относительно окружности $(P_1P_2P_3) = (I_a)$. Окружность $(A_1^*B_1^*C_1^*)$ есть окружность Эйлера для треугольника $P_1P_2P_3$, и потому радиус окружности $(A_1^*B_1^*C_1^*)$ равен $R'_a = r_a/2$. С другой стороны, отношение R'_a/R радиусов окружностей $(A_1^*B_1^*C_1^*)$ и (ABC) равно $|k/\sigma|$, где σ — степень центра I_a относительно окружности (ABC), а k — степень рассматриваемой инверсии, т. е. $k = r_a^2$. В самом деле, пусть M и M' — точки, соответствующие друг другу при рассматриваемой инверсии (точка M на окружности (ABC), точка M' на окружности $(A_1^*B_1^*C_1^*)$). Тогда

$$\overline{I_aM} \cdot \overline{I_aM'} = r_a^2 \, (= k). \tag{150}$$

Пусть M_1 — вторая точка пересечения прямой I_aM с окружностью (ABC). Тогда

$$\overline{I_aM} \cdot \overline{I_aM_1} = \sigma. \tag{151}$$

Из соотношений (150) и (151) находим

$$\frac{\overline{I_aM'}}{\overline{I_aM_1}} = \frac{k}{\sigma}, \qquad \overline{I_aM'} = \frac{k}{\sigma}\,\overline{I_aM_1}.$$

Это, между прочим, означает, что окружность $(O_1^*) = (A_1^*B_1^*C_1^*)$ может быть получена из окружности (ABC) гомотетией с центром гомотетии I_a и коэффициентом гомотетии k/σ. Конечно, соответствие точек при этой гомотетии и при рассматриваемой инверсии различно, но в *целом* при гомотетии с центром I_a и коэффициентом k/σ окружность (ABC) перейдет в окружность $(A_1^*B_1^*C_1^*)$. Это замечание важно в том отношении, что гомотетия есть преобразование подобия, откуда, в частности, в данном случае следует, что

$$\frac{R'_a}{R} = \left|\frac{k}{\sigma}\right| \quad \text{или} \quad \frac{\frac{1}{2} r_a}{R} = \frac{r_a^2}{|OI_a^2 - R^2|}.$$

Так как точка I_a лежит вне окружности (ABC) (середина отрезка II_a лежит на окружности (ABC) — см. пример 36), то $OI_a > R$ и, значит,

$$\frac{r_a}{2R} = \frac{r_a^2}{OI_a^2 - R^2},$$

откуда

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a.$$

Формулы (148) и (149) выводятся аналогично.

Мы предположили, что $R=1$. Кроме того, $OI_a^2 = \tau_1\bar{\tau}_1$, так как τ_1 — аффикс точки I_a, следовательно, $r_a = \frac{1}{2}(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1)$. Докажем, что точка Φ_1' с аффиксом

$$\varphi_1' = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\frac{\bar{\tau}_1}{\tau_1}\right)$$

лежит и на окружности Эйлера и на окружности (I_a). Имеем

$$\varphi_1' - \tau_1 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1} - \tau_1,$$

и так как I_a — неподвижная точка изогонального преобразования относительно треугольника ABC, то

$$2\tau_1 + \sigma_3\bar{\tau}_1^2 - \sigma_1 = 0,$$

откуда

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3\bar{\tau}_1^2}{2},$$

и потому

$$\varphi_1' - \tau_1 = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3\bar{\tau}_1^2}{2} = \frac{\sigma_3\bar{\tau}_1^2}{2} - \frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1} = \frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1}(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1); \quad (152)$$

отсюда

$$\bar{\varphi}_1' - \bar{\tau}_1 = \frac{\bar{\sigma}_3\tau_1}{2\bar{\tau}_1}(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1)$$

и, значит,

$$(\varphi_1' - \tau_1)(\bar{\varphi}_1' - \bar{\tau}_1) = \frac{(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1)^2}{4} = r_a^2,$$

т. е. точка Φ_1' с аффиксом φ_1' лежит на окружности (I_a), уравнение которой

$$(z - \tau_1)(\bar{z} - \bar{\tau}_1) = r_a^2.$$

Далее, $O_9 = \sigma_1/2$ — аффикс центра окружности (O_9). Поэтому

$$\varphi_1' - o_9 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\frac{\bar{\tau}_1}{\tau_1}\right) - \frac{1}{2}\sigma_1 = -\frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1},$$

откуда

$$|\varphi_1' - o_9| = 1/2$$

и, значит, точка Φ_1' лежит и на окружности Эйлера, уравнение которой можно записать в виде $|z - o_9| = 1/2$. Угловой коэффициент прямой $I_a\Phi_1'$ равен

$$\frac{\varphi_1' - \tau_1}{\bar{\varphi}_1' - \bar{\tau}_1} = \frac{\frac{\sigma_3\bar{\tau}_1}{2\tau_1}(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1)}{\frac{\bar{\sigma}_3\tau_1}{2\bar{\tau}_1}(\tau_1\bar{\tau}_1 - 1)} = \sigma_3^2\frac{\bar{\tau}_1^2}{\tau_1^2}.$$

Угловой коэффициент прямой $O_9\Phi_1'$:

$$\frac{\frac{\sigma_1}{2}-\varphi_1'}{\frac{\bar{\sigma}_1}{2}-\bar{\varphi}_1'}=\frac{\frac{1}{2}\sigma_3\frac{\bar{\tau}_1}{\tau_1}}{\frac{1}{2}\bar{\sigma}_3\frac{\tau_1}{\bar{\tau}_1}}=\sigma_3^2\frac{\bar{\tau}_1^2}{\tau_1^2},$$

следовательно, точки O_9, I_a и Φ_1' лежат на одной прямой. Итак, точка Φ_1' лежит и на окружности (O_9) и на окружности (I_a) и центры O_9 и I_a этих окружностей лежат на одной прямой с их общей точкой Φ_1', следовательно, окружности (I_a) и (O_9) касаются в точке Φ_1' с аффиксом φ_1'. Но точка касания окружностей (I_a) и (O_9) есть точка Φ_1 Фейербаха, следовательно, точки Φ_1' и Φ_1 совпадают и $\varphi_1'=\varphi_1$.

Аналогично доказывается, что φ_2' и φ_3', т. е. аффиксы ортополюсов прямых OI_b и OI_c относительно треугольника ABC, являются аффиксами точек Φ_2 и Φ_3 Фейербаха, т. е. Φ_2' и Φ_3' являются точками касания окружностей (I_b) и (I_c) с окружностью (O_9) Эйлера для треугольника ABC.

Пример 41. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C в системе координат, в которой окружность $(ABC)=(O)$ принята за единичную. Доказать, что:

1°. Аффиксы τ_0, τ_1, τ_2, τ_3 центров окружностей, вписанной и вневписанных в треугольник ABC, определяются из уравнения

$$\tau^4-2\sigma_2\tau^2+8\sigma_3\tau+\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_3=0.$$

2°. Аффиксы ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 точек Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, симметричных ортоцентру H треугольника ABC относительно точек Фейербаха, находятся из уравнения

$$(4\bar{\sigma}_2-\bar{\sigma}_1^2)\psi^4+4\bar{\sigma}_1\psi^3+2\sigma_1\bar{\sigma}_1\psi^2+4\sigma_1\psi+4\sigma_2-\sigma_1^2=0.$$

Эти точки $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ лежат на окружности (ABC) (рис. 42).

Решение. 1°. Пусть T — центр окружности, вписанной или центр одной из вневписанных окружностей в треугольник ABC. Любая из этих точек обладает тем *характеристическим* свойством, что она совпадает с точкой, ей изогонально сопряженной относительно треугольника ABC. Достаточность этого условия проверить просто геометрически; а именно, любая из указанных четырех точек T неподвижна при изогональном преобразовании. То, что таких точек четыре, мы сейчас и докажем. В самом деле, для того чтобы точка T с аффиксом τ ($|\tau|\neq 1$) совпадала с сопряженной с ней, необходимо и достаточно, чтобы соотношение Морлея

$$p+q+\sigma_3\bar{p}\bar{q}=\sigma_1$$

выполнялось при $p=q=\tau$, т. е.

$$2\tau+\sigma_3\bar{\tau}^2=\sigma_1.$$

Докажем, например, что оно выполняется для аффикса

$$\tau_0=-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}$$

центра окружности (I), вписанной в треугольник ABC (см. пример 36). Имеем

$$\bar{\tau}_0 = -\frac{1}{\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}} - \frac{1}{\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}} - \frac{1}{\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}} = -\frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}},$$

$$\bar{\tau}_0^2 = \frac{1}{\sigma_3}\left[z_1+z_2+z_3+2\left(\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\right)\right].$$

Отсюда

$$2\tau_0+\sigma_3\bar{\tau}_0^2 = 2\left(-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\right)+$$
$$+z_1+z_2+z_3+2\left(\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}+\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}+\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\right) = z_1+z_2+z_3 = \sigma_1,$$

и так для остальных аффиксов τ_1, τ_2, τ_3 (формулы (133) примера 36).

Присоединяя к уравнению

$$2\tau+\sigma_3\bar{\tau}^2-\sigma_1 = 0 \tag{153}$$

уравнение, полученное сопряжением левой части, получим уравнение

$$2\bar{\tau}+\bar{\sigma}_3\tau^2-\bar{\sigma}_1 = 0. \tag{154}$$

Отсюда

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\sigma}_1-\tau^2\bar{\sigma}_3}{2},$$

и уравнение (153) принимает вид

$$2\tau+\sigma_3\frac{\bar{\sigma}_1^2-2\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3\tau^2+\tau^4\bar{\sigma}_3^2}{4}-\sigma_1 = 0,$$

или

$$8\tau+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3}-\frac{2\sigma_2}{\sigma_3}\tau^2+\frac{1}{\sigma_3}\tau^4-4\sigma_1 = 0,$$

или

$$\tau^4-2\sigma_2\tau^2+8\sigma_3\tau+\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_3 = 0.$$

Так как это уравнение четвертой степени, то неподвижных точек при изогональном преобразовании не может быть более четырех. Но центр вписанной окружности в треугольник ABC и центры окружностей, вневписанных в этот треугольник, являются неподвижными при изогональном преобразовании относительно треугольника ABC. Значит, неподвижность точки при изогональном преобразовании есть характеристическое свойство центров окружностей (I), (I_a), (I_b), (I_c) (других неподвижных точек при изогональном преобразовании относительно треугольника ABC нет).

2°. Точка Φ Фейербаха является ортополюсом по отношению к треугольнику ABC прямой OI_k, проходящей через центр O окружности (ABC) и центр I_k соответствующей окружности, касающейся прямых BC, CA, AB. Если прямая задана уравнением

$$z-z_0 = \lambda(\bar{z}-\bar{z}_0),$$

то ортополюс ее относительно треугольника ABC имеет аффикс

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\sigma_1-\frac{\sigma_3}{\lambda}+z_0-\lambda\bar{z}_0\right)$$

(см. пример 7). В частности, если рассматриваемая прямая проходит через начало координат, то

$$\mu = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3\bar{\lambda}).$$

Аффиксы φ_k точек Φ_k Фейербаха, соответствующие центрам T_k

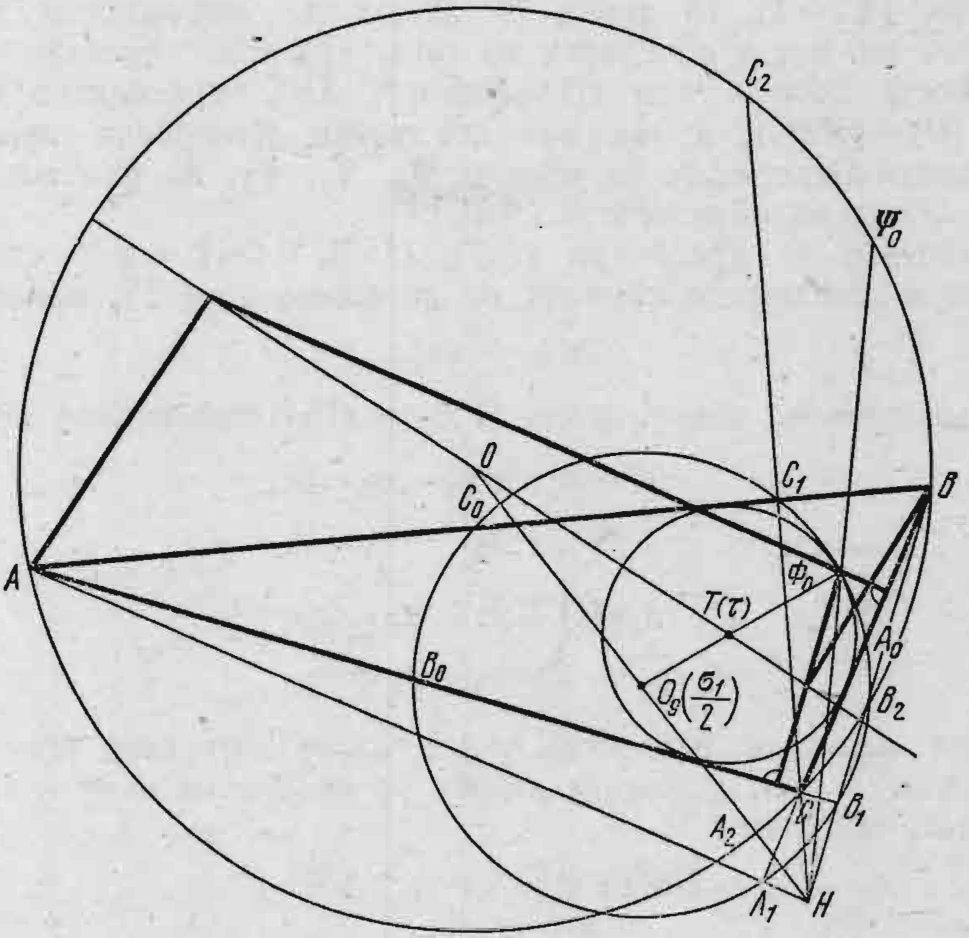


Рис. 42.

четырех окружностей (T_k), каждая из которых касается прямых BC, CA, AB, будут (см. пример 40)

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}_k}{\tau_k}\right), \tag{155}$$

где τ_k — аффикс точки T_k (отсюда, между прочим, следует, что угловой коэффициент прямой OT_k равен $\lambda_k = \frac{\tau_k}{\bar{\tau}_k}$, следовательно, $\frac{\bar{\tau}_k}{\tau_k} = \bar{\lambda}_k$). Будем обозначать аффиксы τ_k и φ_k соответствующих друг другу точек T_k и Φ_k просто через τ и φ. Тогда соотношение (155) перепишется так:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\bar{\tau}}{\tau}\right). \tag{156}$$

Найдем аффикс ψ точки Ψ, симметричной точке H относительно точки Φ:

$$\frac{\sigma_1+\psi}{2}=\frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_3\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right),$$

откуда

$$\psi=-\sigma_3\frac{\bar{\tau}}{\tau}. \tag{157}$$

Так как $|\psi|=1$, то точка Ψ лежит на окружности (ABC). Впрочем, это сразу следует и из того, что при гомотетии $(H, 2)$ окружность Эйлера для треугольника ABC переходит в окружность $(O)=(ABC)$, а так как все точки Фейербаха лежат на окружности Эйлера, то их образы Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 при гомотетии $(H, 2)$ лежат на окружности (ABC).

Исключим из уравнений (157), (153), (154) τ и $\bar{\tau}$. Получим уравнение для определения ψ. Из соотношения (157) имеем

$$\bar{\tau}=-\psi\tau\bar{\sigma}_3,$$

и, следовательно, соотношения (153) и (154) принимают вид

$$2\tau+\sigma_3\psi^2\tau^2\bar{\sigma}_3^2-\sigma_1=0, \tag{158}$$

$$-2\psi\tau\bar{\sigma}_3+\bar{\sigma}_3\tau^2-\bar{\sigma}_1=0, \tag{159}$$

или

$$\bar{\sigma}_3\psi^2\tau^2+2\tau-\sigma_1=0, \tag{160}$$

$$\bar{\sigma}_3\tau^2-2\psi\tau\bar{\sigma}_3-\bar{\sigma}_1=0. \tag{161}$$

Остается написать равенство нулю результанта этих уравнений. Но можно и так: умножим второе уравнение на $-\psi^2$ и сложим с первым, получим

$$(2\psi^3\bar{\sigma}_3+2)\,\tau=\sigma_1-\psi^2\bar{\sigma}_1,$$

откуда

$$\tau=\frac{\sigma_1-\psi^2\bar{\sigma}_1}{2\psi^3\bar{\sigma}_3+2}.$$

Подставляя это значение τ, например, в уравнение (161), получим

$$\bar{\sigma}_3\frac{\sigma_1^2-2\sigma_1\bar{\sigma}_1\psi^2+\bar{\sigma}_1^2\psi^4}{4\,(\psi^3\bar{\sigma}_3+1)^2}-2\psi\bar{\sigma}_3\frac{\sigma_1-\psi^2\bar{\sigma}_1}{2\,(\psi^3\bar{\sigma}_3+1)}-\bar{\sigma}_1=0,$$

или

$$(\bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1^2-4\sigma_1\bar{\sigma}_3^2)\,\psi^4-4\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3\psi^3-2\sigma_1\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3\psi^2-4\sigma_1\bar{\sigma}_3\psi+\bar{\sigma}_3\sigma_1^2-4\bar{\sigma}_1=0,$$

или, сокращая на $\bar{\sigma}_3$:

$$(\bar{\sigma}_1^2-4\sigma_1\bar{\sigma}_3)\,\psi^4-4\bar{\sigma}_1\psi^3-2\sigma_1\bar{\sigma}_1\psi^2-4\sigma_1\psi+\sigma_1^2-4\bar{\sigma}_1\sigma_3=0,$$

или

$$(\bar{\sigma}_1^2-4\bar{\sigma}_2)\,\psi^4-4\bar{\sigma}_1\psi^3-2\sigma_1\bar{\sigma}_1\psi^2-4\sigma_1\psi+\sigma_1^2-4\sigma_2=0.$$

Заметим, что коэффициенты этого уравнения, равноотстоящие от его концов, попарно сопряжены: первый и последний; второй и четвертый (антивозвратное уравнение).

Пример 42. Пусть M — переменная точка окружности (O) радиуса R, описанная около треугольника ABC; P — точка симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно диаметра окружности (O), параллельного прямой Симсона для точки M относительно треугольника ABC; A', B', C' — точки, симметричные точке M относительно прямых OA, OB, OC. Доказать, что точка Q, симметричная с ортоцентром H' треугольника $A'B'C'$ относительно точки P, описывает окружность, концентричную окружности (O), и имеющую радиус OQ, равный

$$OQ = \frac{1}{R^3} OI \cdot OI_a \cdot OI_b \cdot OI_c,$$

где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а I_a, I_b, I_c — центры окружностей, вневписанных в этот треугольник (рис. 43).

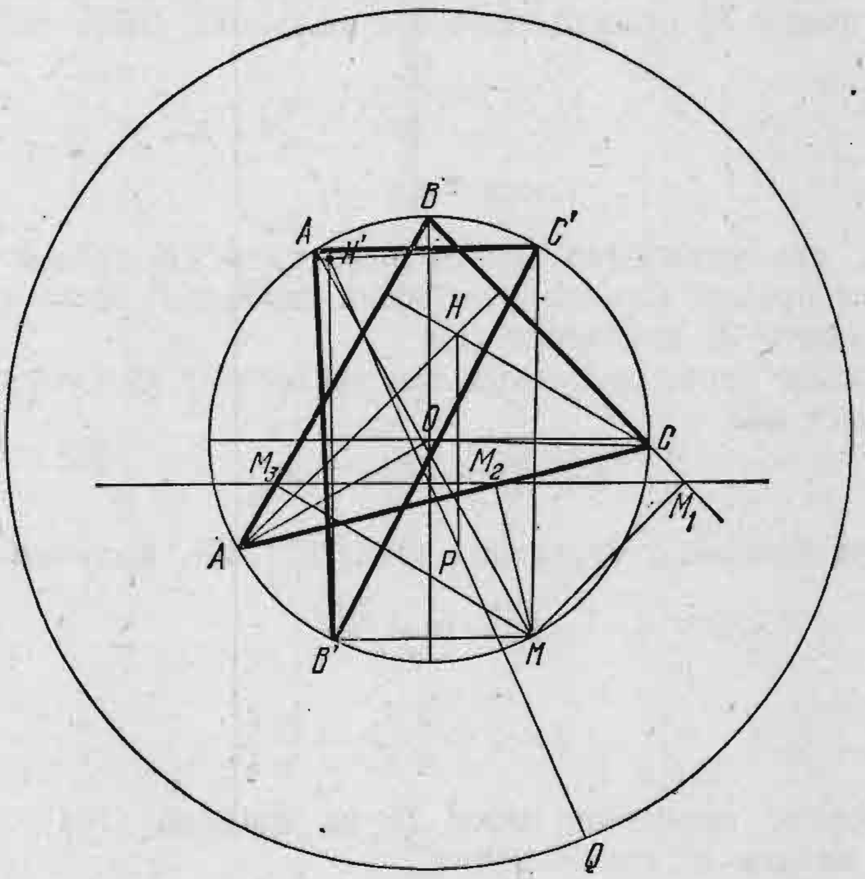


Рис. 43.

Решение. Примем окружность (O) за единичную, и пусть z_1, z_2, z_3, z_0 — соответственно аффиксы точек A, B, C, M. Уравнение прямой AB:

$$z + z_1 z_2 \bar{z} = z_1 + z_2. \tag{162}$$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB:

$$z - z_0 = z_1 z_2 (\bar{z} - \bar{z}_0),$$

или

$$z - z_1 z_2 \bar{z} = z_0 - z_1 z_2 \bar{z}_0. \tag{163}$$

Складывая почленно уравнения (162) и (163), находим аффикс m_3 проекции M_3 точки M на прямую AB:

$$m_3 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_2 - z_1 z_2 \bar{z}_0).$$

Аналогично: аффикс m_2 проекции M_2 точки M на прямую AC:

$$m_2 = \frac{1}{2}(z_0 + z_1 + z_3 - z_1 z_3 \bar{z}_0).$$

Угловой коэффициент прямой M_2M_3:

$$\frac{m_3 - m_2}{\bar{m}_3 - \bar{m}_2} = \frac{z_2 - z_3 - z_1\bar{z}_0(z_2 - z_3)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_0(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)} = \frac{(z_2 - z_3)(1 - z_1\bar{z}_0)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)(1 - \bar{z}_1 z_0)} = \frac{(z_2 - z_3)\dfrac{z_0 - z_1}{z_0}}{\dfrac{z_3 - z_2}{z_2 z_3}\cdot\dfrac{z_1 - z_0}{z_1}} = \frac{\sigma_3}{z_0},$$

и, значит, уравнение диаметра окружности, параллельного прямой Симсона точки M относительно треугольника ABC, имеет вид

$$z = \frac{\sigma_3}{z_0}\bar{z}, \tag{164}$$

или

$$z_0 z - \sigma_3 \bar{z} = 0. \tag{165}$$

Впрочем, это уравнение можно было написать сразу, исходя из уравнения прямой Симсона, отбросив свободный член этого уравнения (пример 3, уравнение (1)).

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки H на прямую (165), имеет вид

$$z - \sigma_1 = -\frac{\sigma_3}{z_0}(\bar{z} - \bar{\sigma}_1). \tag{166}$$

Складывая почленно уравнения (164) и (166), получим

$$2z - \sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}_1 \sigma_3}{z_0},$$

откуда

$$z = \lambda = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{z_0}\right)$$

— это аффикс проекции точки H на прямую (164). Аффикс p точки P найдем из соотношения

$$\frac{p + \sigma_1}{2} = \lambda = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{z_0}\right),$$

откуда

$$p = \sigma_2 \bar{z}_0.$$

Далее, уравнение прямой OA:

$$z = z_1^2 \bar{z}, \quad \text{или} \quad z - z_1^2 \bar{z} = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно прямой OA:

$$z - z_0 = -z_1^2(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Решая это уравнение совместно с уравнением $z\bar{z}=1$ единичной окружности (ABC), получим

$$z - z_0 = -z_1^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right),$$

$$z - z_0 = z_1^2\frac{z - z_0}{z_0 z}.$$

Один из корней этого уравнения естественно $z = z_0$ (аффикс точки M), другой

$$a' = z_1^2\bar{z}_0$$

— аффикс точки A'. Аналогично находим аффиксы b' и c' точек B' и C':

$$b' = z_2^2\bar{z}_0, \qquad c' = z_3^2\bar{z}_0,$$

и, значит, аффикс h' ортоцентра H' треугольника $A'B'C'$:

$$h' = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\bar{z}_0.$$

Аффикс q точки Q, симметричной точке H' относительно точки P, находится из соотношения

$$\frac{q+h'}{2} = p,$$

откуда

$$q = 2p - h' = 2\sigma_2\bar{z}_0 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\bar{z}_0 =$$
$$= \bar{z}_0\,[2\sigma_2 - (z_1 + z_2 + z_3)^2 + 2(z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2)] = \bar{z}_0(2\sigma_2 - \sigma_1^2 + 2\sigma_2) =$$
$$= \bar{z}_0\,(4\sigma_2 - \sigma_1^2).$$

Итак,

$$q = (4\sigma_2 - \sigma_1^2)\,\bar{z}_0.$$

Отсюда и следует, что если точка M с аффиксом z_0 описывает окружность (ABC), то точка Q описывает в противоположном направлении окружность (Ω), концентричную окружности (ABC). Радиус ρ окружности (Ω) равен

$$\rho = |4\sigma_2 - \sigma_1^2|.$$

Аффиксы точек I, I_a, I_b, I_c таковы:

$$\tau_0 = -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} - \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = a_0 + b_0 + c_0,$$
$$\tau_1 = -\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} + \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = a_0 - b_0 - c_0,$$
$$\tau_2 = \sqrt{z_2}\sqrt{z_3} - \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} + \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = -a_0 + b_0 - c_0,$$
$$\tau_3 = \sqrt{z_2}\sqrt{z_3} + \sqrt{z_3}\sqrt{z_1} - \sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = -a_0 - b_0 + c_0.$$

Отсюда

$$\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3 = [c_0^2 - (a_0 + b_0)^2]\,[c_0^2 - (a_0 - b_0)^2] =$$
$$= (c_0^2 - a_0^2 - b_0^2 - 2a_0b_0)\,(c_0^2 - a_0^2 - b_0^2 + 2a_0b_0) =$$
$$= (c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)^2 - 4a_0^2b_0^2 = (a_0^2 + b_0^2 - c_0^2)^2 - 4a_0^2b_0^2 =$$
$$= (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)^2 - 4\,(b_0^2c_0^2 + c_0^2a_0^2 + a_0^2b_0^2) =$$
$$= (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)^2 - 4\,(z_3^2z_1z_2 + z_1^2z_2z_3 + z_2^2z_3z_1) = \sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_3$$

(см. также пример 41). Отсюда

$$\overline{\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3} = \bar{\sigma}_2^2 - 4\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} - \frac{4\sigma_2}{\sigma_3^2} = \frac{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}{\sigma_3^2}$$

и, значит,

$$|\overline{\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3}| = |\tau_0\tau_1\tau_2\tau_3| = |\sigma_1^2 - 4\sigma_2| = \rho,$$

или

$$\rho = |\tau_0| \cdot |\tau_1| |\tau_2| |\tau_3|,$$

или

$$OQ = OI \cdot OI_a \cdot OI_b \cdot OI_c.$$

Если бы аффиксы точек A, B, C мы взяли бы в виде Rz_1, Rz_2, Rz_3, где $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, то получили бы

$$OQ = \frac{OI \cdot OI_a \cdot OI_b \cdot OI_c}{R^3}.$$

Пример 43. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности $(O) = (A_1A_2A_3A_4)$, которую примем за единичную окружность. Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 аффиксы точек Фейербаха Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, лежащих на окружностях, вписанных в треугольники $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Доказать, что середины отрезков $A_1\Phi_1$, $A_2\Phi_2$, $A_3\Phi_3$, $A_4\Phi_4$ лежат на одной окружности. Найти аффикс центра этой окружности и ее радиус.

Решение. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — соответственно аффиксы точек A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда аффикс φ_1 точки Φ_1 Фейербаха окружности, вписанной в треугольник $A_2A_3A_4$, вычисляется по формуле (см. пример 32, п. 6°)

$$\varphi_1 = \frac{z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4}{z_2 + z_3 + z_4},$$

а следовательно, аффикс μ_1 середины отрезка $A_1\Phi_1$ будет

$$\mu_1 = \frac{\varphi_1 + z_1}{2} = \frac{z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4}{2(z_2 + z_3 + z_4)} = \frac{\sigma_2}{2(\sigma_1 - z_1)},$$

где

$$\sigma_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4,$$
$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4.$$

Аналогичные выражения мы получим для аффиксов μ_2, μ_3, μ_4 середин отрезков $A_2\Phi_2$, $A_3\Phi_3$, $A_4\Phi_4$:

$$\mu_2 = \frac{\sigma_2}{2(\sigma_1 - z_2)}, \quad \mu_3 = \frac{\sigma_2}{2(\sigma_1 - z_3)}, \quad \mu_4 = \frac{\sigma_2}{2(\sigma_1 - z_4)}.$$

Отсюда следует, что точки μ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ находятся на окружности (Ω), уравнение которой

$$u = \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 - 2z},$$

где z описывает единичную окружность.

Производя инверсию этой окружности относительно окружности (O), получим окружность

$$v=\frac{1}{\bar{u}}=\frac{2\bar{\sigma}_1-2\bar{z}}{\bar{\sigma}_2}=2\frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2}-\frac{2}{\bar{\sigma}_2}\bar{z}$$

— это окружность (Ω'), аффикс центра которой равен $2\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_2$, а радиус равен $2/|\sigma_2|$. Окружность (Ω) из окружности (Ω') может быть получена той же инверсией, но также и подобием (только не при таком же соответствии точек). Отсюда можно найти аффикс центра окружности (Ω) и ее радиус.

Но можно воспользоваться и готовыми формулами примера 12, которые дают аффикс

$$\omega=\frac{b\bar{d}-a\bar{c}}{d\bar{d}-c\bar{c}}$$

и радиус

$$\rho=\left|\frac{bc-ad}{d\bar{d}-c\bar{c}}\right|$$

окружности (Ω), в которую переходит единичная окружность (O) при дробно-линейном преобразовании

$$u=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0. \tag{167}$$

Рассмотрим преобразование

$$u=\frac{\sigma_2}{2\sigma_1-2z}. \tag{168}$$

Здесь (сравнить с формулой (167)) $a=0$, $b=\sigma_2$, $c=-2$, $d=2\sigma_1$, поэтому аффикс ω окружности (Ω), на которой лежат середины отрезков $A_1\Phi_1$, $A_2\Phi_2$, $A_3\Phi_3$, $A_4\Phi_4$:

$$\omega=\frac{2\sigma_2\bar{\sigma}_1}{4(\sigma_1\bar{\sigma}_1-1)}=\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_1}{2(\sigma_1\bar{\sigma}_1-1)},$$

а радиус

$$\rho=\left|\frac{-2\sigma_2}{4\sigma_1\bar{\sigma}_1-4}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\sigma_2}{\sigma_1\bar{\sigma}_1-1}\right|.$$

Пример 44. Пусть B_1 и C_1 — точки пересечения биссектрис внутренних углов B и C треугольника ABC с окружностью $(ABC)=(O)$. Рассмотрим сумму направленных отрезков $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{ON}$. Доказать, что $IN\perp BC$, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать также, что отрезок IN равен радиусу окружности $(ABC)=(O)$.

Решение. Примем окружность (O) за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3 — соответственно аффиксы точек A, B, C. Аффиксы a_1, b_1, c_1 точек A_1, B_1, C_1 пересечения с окружностью (ABC) биссектрис внутренних углов треугольника ABC определяются соотношениями

$$a_1=-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}, \quad b_1=-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}, \quad c_1=-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2},$$

где для корней $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ взяты такие значения, чтобы $|\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}|<1$. Аффикс n точки N будет

$$n=-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2},$$

и так как аффикс точки I равен

$$\tau_0=-\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}-\sqrt{z_3}\sqrt{z_1}-\sqrt{z_1}\sqrt{z_2},$$

то направленному отрезку $\overrightarrow{IN}$ соответствует комплексное число $\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}$, откуда $IN=|\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}|=1=R$. Угловой коэффициент прямой IN равен

$$\varkappa=\frac{\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}}{\overline{\sqrt{z_2}}\,\overline{\sqrt{z_3}}}=z_2z_3.$$

Угловой коэффициент прямой BC равен $\varkappa'=-z_2z_3$, следовательно, $\varkappa+\varkappa'=0$, а потому прямые BC и IN взаимно перпендикулярны.

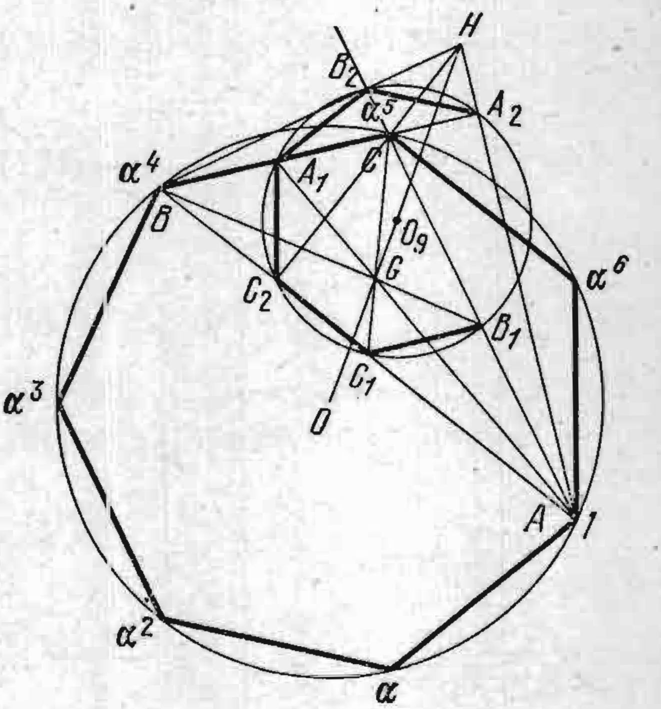


Рис. 44.

Пример 45. Углы треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Доказать, что середины его сторон и основания высот являются шестью вершинами правильного семиугольника (рис. 44).

Решение. Примем окружность (ABC) за единичную, а точке A припишем аффикс 1. Тогда, полагая

$$\alpha=\cos(2\pi/7)+i\sin(2\pi/7),$$

заключаем, что $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ — аффиксы вершин правильного семиугольника, вписанного в окружность (ABC). При этом аффиксы точек B и C соответственно равны α^4 и α^5. Пусть A_1, B_1, C_1 — соответственно середины сторон BC, CA, AB, а a_1, b_1, c_1 — аффиксы этих точек. Тогда

$$a_1=\frac{\alpha^4+\alpha^5}{2},\quad b_1=\frac{\alpha^5+1}{2},\quad c_1=\frac{1+\alpha^4}{2}.$$

Угловой коэффициент прямой BC равен

$$\varkappa_{BC}=\frac{\alpha^4-\alpha^5}{\bar\alpha^4-\bar\alpha^5}=-\alpha^4\alpha^5=-\alpha^9=-\alpha^2$$

(так как $\alpha^7=1$), а значит, уравнение прямой, проходящей через точку A, перпендикулярно BC:

$$z-1=\alpha^2(\bar{z}-1).$$

Уравнение BC:

$$z-\alpha^4=-\alpha^2(\bar{z}-\bar{\alpha}^4).$$

Решая систему уравнений

$$z-1=\alpha^2(\bar{z}-1),$$
$$z-\alpha^4=-\alpha^2(\bar{z}-\bar{\alpha}^4),$$

находим

$$2z-1-\alpha^4=-\alpha^2+\bar{\alpha}^2=-\alpha^2+\alpha^5,$$

откуда

$$a_2=\frac{1-\alpha^2+\alpha^4+\alpha^5}{2},$$

где a_2 — аффикс основания A_2 высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Далее,

$$\varkappa_{AC}=\frac{1-\alpha^5}{1-\bar{\alpha}^5}=-\alpha^5.$$

Уравнение AC:

$$z-1=-\alpha^5(\bar{z}-1).$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC:

$$z-\alpha^4=\alpha^5(\bar{z}-\bar{\alpha}^4).$$

Из двух последних уравнений находим

$$2z-1-\alpha^4=\alpha^5-\alpha,$$

откуда

$$b_2=\frac{1-\alpha+\alpha^4+\alpha^5}{2}.$$

Далее,

$$\varkappa_{AB}=\frac{1-\alpha^4}{1-\bar{\alpha}^4}=-\alpha^4.$$

Уравнение AB:

$$z-1=-\alpha^4(\bar{z}-1).$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB:

$$z-\alpha^5=\alpha^4(\bar{z}-\bar{\alpha}^5).$$

Из двух последних уравнений находим аффикс c_2 проекции точки C на прямую AB:

$$2c_2-1-\alpha^5=\alpha^4-\bar{\alpha}=\alpha^4-\alpha^6,$$

откуда

$$c_2=\frac{1+\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}{2}.$$

Рассмотрим аффикс o_9 точки O_9, полученной из точки O при гомотетии $(G, -1/2)$, иначе — аффикс центра O_9 окружности Эйлера треугольника ABC. Так как аффикс h ортоцентра треугольника ABC равен $1+\alpha^4+\alpha^5$, а O_9 — середина OH, то

$$O_9=\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}.$$

Теперь находим

$$a_2-o_9=\frac{1-\alpha^2+\alpha^4+\alpha^5}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{\alpha^2}{2},$$

$$b_2-o_9=\frac{1-\alpha+\alpha^4+\alpha^5}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{\alpha}{2},$$

$$a_1-o_9=\frac{\alpha^4+\alpha^5}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$c_2-o_9=\frac{1+\alpha^4+\alpha^5-\alpha^6}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{\alpha^6}{2},$$

$$c_1-o_9=\frac{1+\alpha^4}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{\alpha^5}{2},$$

$$b_1-o_9=\frac{1+\alpha^5}{2}-\frac{1+\alpha^4+\alpha^5}{2}=-\frac{\alpha^4}{2}.$$

Эти числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $1/\alpha$; при этом модули всех этих разностей равны $1/2$. Значит, каждый из направленных отрезков

$$\overrightarrow{O_9A_2},\quad \overrightarrow{O_9B_2},\quad \overrightarrow{O_9A_1},\quad \overrightarrow{O_9C_2},\quad \overrightarrow{O_9C_1},\quad \overrightarrow{O_9B_1},$$

начиная со второго, получается из предыдущего поворотом в одном и том же направлении на угол $2\pi/7$, т. е. A_2, B_2, A_1, C_2, C_1, B_1 — шесть последовательных вершин правильного семиугольника, вписанного в окружность Эйлера для треугольника ABC.

§ 2. Примеры с указаниями и ответами

1. Углы A, B, C треугольника связаны соотношением $C=3B=9A$; AA', BB', CC' — высоты этого треугольника; H — его ортоцентр; I — центр вписанной окружности; r — ее радиус; $(O)=(ABC)$ — окружность, описанная около треугольника ABC; R — ее радиус; а a, b c — длины сторон BC, AC, AB. Доказать, что:

1°. $HA'+HB'-HC'=R/2$.

2°. $OI^2+OH^2=5R^2$.

3°. $bc+ca+ab=R^2\sqrt{13}$.

4°. $\cos A+\cos B+\cos C=(1+\sqrt{13})/4$.

5°. $OI^2=R^2(5-\sqrt{13})/2$.

6°. $r=R(\sqrt{13}-3)/4$.

7°. $OH^2=R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)=R^2(5+\sqrt{13})/2$.

8°. $\cos A\cos B\cos C=-(3+\sqrt{13})/16$.

9°. $\sin A\sin B\sin C=\sqrt{(13-3\sqrt{13})/128}$.

10°. $\sin A+\sin B+\sin C=\sqrt{(13+3\sqrt{13})/8}$.

Решение. Точки A, B, C можно рассматривать как соответствующие вершины правильного 26-угольника, вписанного в окруж-

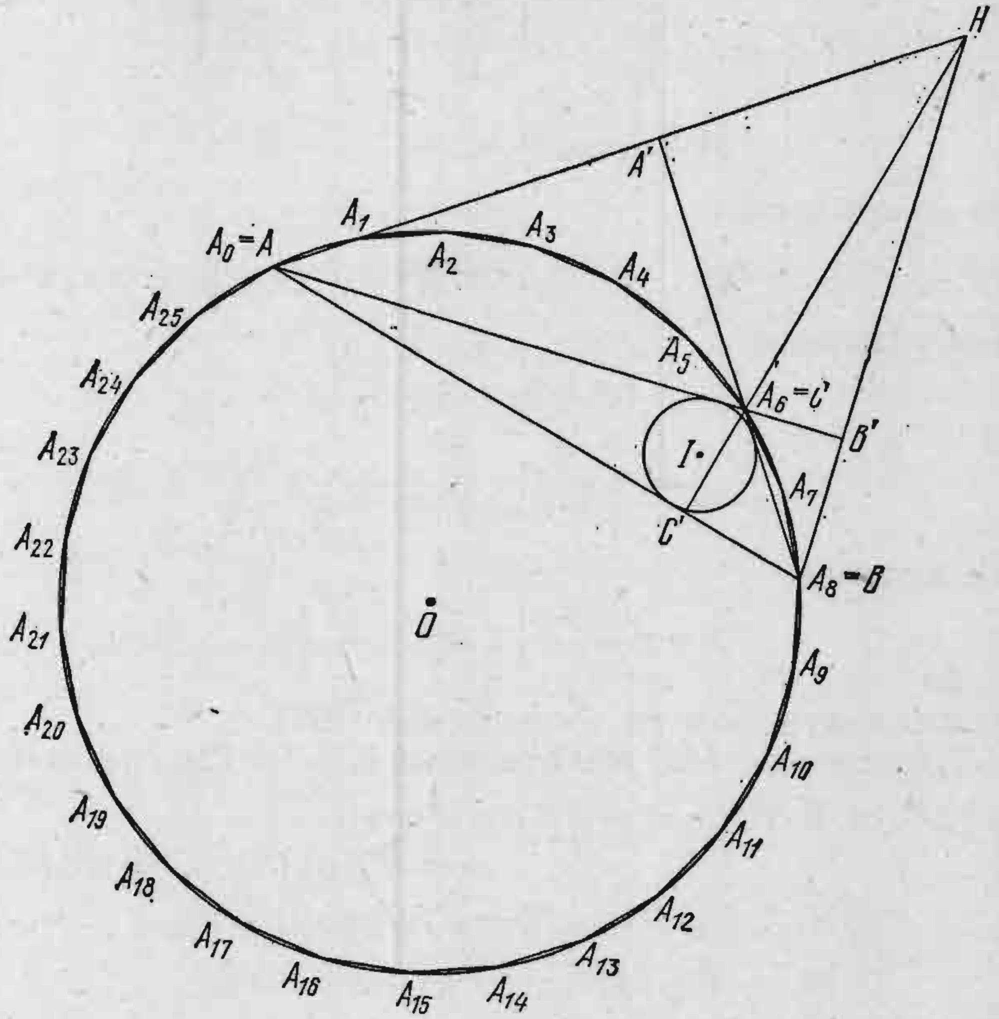


Рис. 45.

ность радиуса R, так как $A=\pi/13$, $B=3\pi/13$, $C=9\pi/13$ (рис. 45). Заметим сначала, что для любого натурального числа

$$\cos(\pi n/13)=\cos((26-n)\pi/13)=-\cos((13-n)\pi/13),$$

и, далее,

$$1+\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}+\\+\cos\frac{14\pi}{13}+\cos\frac{16\pi}{13}+\cos\frac{18\pi}{13}+\cos\frac{20\pi}{13}+\cos\frac{22\pi}{13}+\cos\frac{24\pi}{13}=0,$$

$$\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}=\\=\cos\frac{14\pi}{13}+\cos\frac{16\pi}{13}+\cos\frac{18\pi}{13}+\cos\frac{20\pi}{13}+\cos\frac{22\pi}{13}+\\+\cos\frac{24\pi}{13}=-1/2.$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13}, \\ y &= \cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}. \end{aligned}\right\} \qquad (169)$$

Тогда

$$\cos A + \cos B + \cos C = -y.$$

Исходя из тождеств

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha, \qquad 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),$$

получим уравнение

$$4x^2 + 2x - 3 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}, \quad y = \frac{-1-\sqrt{13}}{4}$$

и, следовательно,

$$x + y = -\frac{1}{2}, \quad xy = -\frac{3}{4}.$$

Это можно получить и из соотношений (169).

1°. Треугольник ABC тупоугольный ($C = 9\pi/13$), следовательно,

$$HA' = |2R\cos B\cos C| = -2R\cos B\cos C =$$
$$= -R[\cos(B-C) + \cos(B+C)],$$
$$HB' = -R[\cos(C-A) + \cos(C+A)],$$
$$HC' = R[\cos(A-B) + \cos(A+B)].$$

Отсюда

$$HA' + HB' - HC' = R(-x-y) = R/2.$$

2°. $OI^2 + OH^2 = R^2 - 2Rr + 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2,$

$$2Rr = 8R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$
$$= 2R^2(-1 + \cos A + \cos B + \cos C) = 2R^2(-1-y),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$
$$= 4R^2(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) = 2R^2(3-x),$$

и, значит,

$$OI^2 + OH^2 = R^2(6 + 2x + 2y) = 5R^2.$$

3°. $bc + ca + ab = 4R^2(\sin B\sin C + \sin C\sin A + \sin A\sin B) =$
$$= 2R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C) + \cos(C-A) - \cos(C+A) +$$
$$+ \cos(A-B) - \cos(A+B)] = 2R^2(x-y) = R^2\sqrt{13}.$$

Вывод остальных соотношений предоставляется читателю. Для их вывода следует воспользоваться основными формулами, относящимися к приложению тригонометрии к геометрии любого треугольника, и воспользоваться специфичностью данного треугольника ($A = \pi/13$, $B = 3\pi/13$, $C = 9\pi/13$).

Можно также ввести комплексную систему координат, приняв окружность (ABC) за единичную. Тогда аффиксами вершин упомянутого правильного 26-угольника будут все 26 значений $\sqrt[26]{1}$. Эти аффиксы

$$a_k = \cos\frac{k\pi}{13} + i\sin\frac{k\pi}{13} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 23,\ 24,\ 25).$$

Точку A можно принять за единичную $a = a_0 = 1$. Точки B и C будут иметь аффиксы

$$b = a_8 = \cos\frac{8\pi}{13} + i\sin\frac{8\pi}{13}, \quad c = a_6 = \cos\frac{6\pi}{13} + i\sin\frac{6\pi}{13}.$$

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (O). Из точек A и B опускаются перпендикуляры AA_2 и BB_2 на CD; из точек B и C опускаются перпендикуляры BB_1 и CC_1 на DA; из точек C и D опускаются перпендикуляры CC_2 и DD_2 на AB;

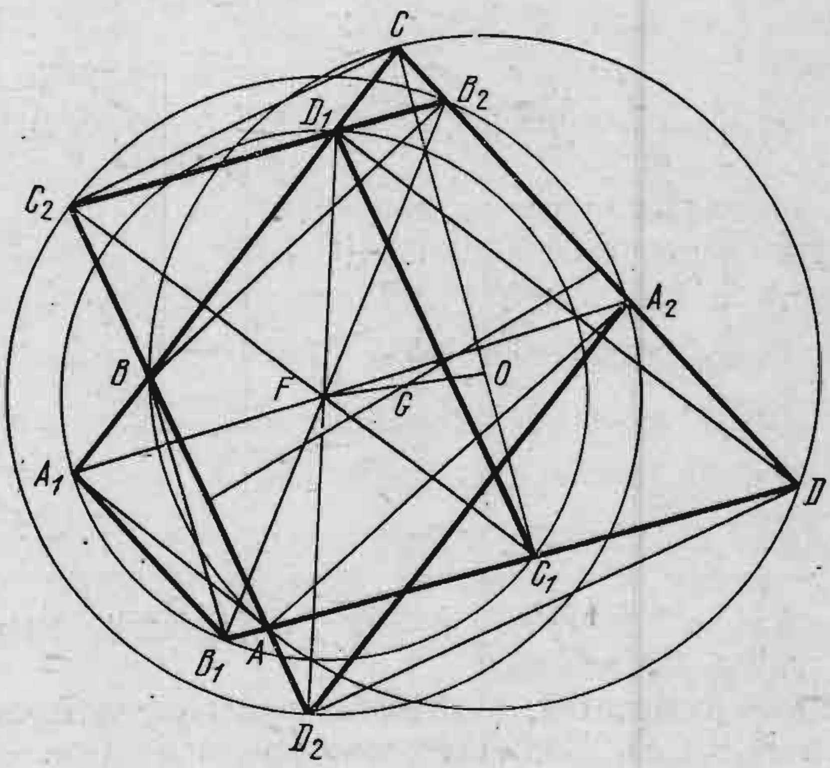


Рис. 46.

наконец, из точек D и A опускаются перпендикуляры DD_1 и AA_1 на BC.

Доказать, что (рис. 46):

1°. Отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 равны и лежат на прямых, проходящих через точку F, симметричную точке O относительно центра тяжести системы точек A, B, C, D.

2°. Четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны четырехугольнику $ABCD$ и вписаны в окружности с центром F (И. Лангер).

Указание. 1°. Примем окружность $(O)=(ABCD)$ за единичную. Пусть a, b, c, d — соответственно аффиксы точек A, B, C, D. Аффикс точки F будет

$$f=\sigma_1/2 \qquad (\sigma_1=a+b+c+d).$$

Аффиксы проекций A_1 и A_2 точки A на прямые BC и CD будут

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right), \qquad a_2=\frac{1}{2}\left(a+c+d-\frac{cd}{a}\right),$$

откуда

$$a_1-a_2=\frac{1}{2a}(a-c)(b-d), \quad f-a_1=\frac{1}{2a}(ad+bc).$$

Далее,

$$\frac{a_1-a_2}{\bar{a}_1-\bar{a}_2}=\frac{f-a_1}{\bar{f}-\bar{a}_1}=\frac{bcd}{a},$$

так что прямая A_1A_2 проходит через точку F. Кроме того,

$$A_1A_2=|a_1-a_2|=\frac{1}{2}AC\cdot BD$$

и аналогично для B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2.

2°. Имеем

$$a_1=f-\frac{1}{2a}(ad+bc), \qquad a_2=f-\frac{1}{2a}(ab+cd).$$

Отсюда (и из аналогичных соотношений для b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) следует, что четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ вписаны в окружность с центром $F(f)$. Пусть четырехугольник $\overrightarrow{ABCD}$ выпуклый. Преобразование $z'=f-\frac{1}{2}(ad+bc)\bar{z}$ переводит четырехугольник $\overrightarrow{ABCD}$ в четырехугольник $\overrightarrow{A_1B_1C_1D_1}$. Преобразование $z''=f-\frac{1}{2}(ab+cd)\bar{z}$ четырехугольник $\overrightarrow{ABCD}$ переводит в четырехугольник $\overrightarrow{A_2B_2C_2D_2}$. Поэтому четырехугольники $\overrightarrow{A_1B_1C_1D_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2C_2D_2}$ выпуклые, имеют ориентацию, противоположную ориентации четырехугольника $\overrightarrow{ABCD}$, и все четырехугольники $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ подобны.

Радиусы окружностей, в которые вписаны четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, соответственно равны

$$\frac{1}{2}|ad+bc| \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}|ab+cd|,$$

или

$$R\,|\cos(AD,\ BC)| \text{ и } R\,|\cos(AB,\ CD)| \qquad (R=1).$$

В самом деле, из соотношений

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right),$$
$$d_1=\frac{1}{2}\left(b+c+d-\frac{bc}{d}\right)$$

находим

$$a_1-d_1=\frac{1}{2ad}(a-d)(ad+bc);$$

$$A_1D_1=\frac{1}{2}AD\,|ad+bc|,$$

откуда

$$\frac{1}{2}|ad+bc|=\frac{A_1D_1}{AD}=|\cos(AD,\ BC)|.$$

Замечание. Аффикс a_3 проекции A_3 точки A на BD равен

$$a_3=f-\frac{1}{2a}(ac+bd).$$

Значит,

$$\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)=f-\frac{\sigma_2}{6a},$$

где $\sigma_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$. Отсюда следует: если четырехугольник Q (т. е. $ABCD$) вписан в окружности (O), то центры тяжести проекций его вершин на стороны треугольника, образованного тремя другими вершинами Q, образуют четырехугольник Q', подобный Q, но противоположно с ним ориентированный. При этом четырехугольник Q' вписан в окружность, центр которой симметричен точке O относительно центра тяжести четырехугольника Q. Радиус этой окружности равен расстоянию от центра тяжести четырехугольника Q до центра тяжести шести точек, в которых окружность (O) пересекает прямые, проходящие через какую-нибудь точку окружности (O) параллельно сторонам и диагоналям четырехугольника Q (решение Гурмагшига).

3. Прямые AP, BP, CP, проведенные из произвольной точки P, пересекают стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках $A_1B_1C_1$ и делят эти стороны в отношениях:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}=\lambda,\quad \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=\mu,\quad \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\nu.$$

Найти отношения

$$x=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PA_1}},\quad y=\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PB_1}},\quad z=\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PC_1}}.$$

Указание. Применить к треугольнику AA_1B и трансверсали CC_1 теорему Менелая.

Ответ. $x=(1+\lambda)\nu$, $y=(1+\mu)\lambda$, $z=(1+\nu)\mu$. Можно применить и комплексные числа.

4. Треугольник $A_1B_1C_1$ вписан в треугольник ABC (т. е. точка A_1 лежит на прямой BC, точка B_1 — на прямой CA и точка C_1 — на прямой AB). Доказать, что:

1°. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общий центр тяжести тогда и только тогда, когда отношения

$$\lambda = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}, \quad \mu = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}, \quad \nu = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}$$

равны между собой: $\lambda = \mu = \nu$.

2°. Считая, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют общий центр тяжести ($\lambda = \mu = \nu$), доказать, что

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}} = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{(\lambda+1)^2}.$$

3°. Пусть треугольник $A_2B_2C_2$ описан около треугольника ABC и имеет с ним общий центр тяжести. Доказать, что тогда отношение λ', в котором точки A, B, C делят направленные отрезки $\overrightarrow{B_2C_2}$, $\overrightarrow{C_2A_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, равно $1/\lambda$, т. е. обратно по величине отношению, в котором точки A_1, B_1, C_1 делят $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$. Найти

$$\frac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{A_2B_2C_2}}$$

и доказать, что

$$\overline{ABC}^2 = \overline{A_1B_1C_1} \cdot \overline{A_2B_2C_2}$$

(Р. До).

5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны при гомотетии с центром S и коэффициентом гомотетии

$$k = \frac{SA}{SA_1}.$$

Известно, что треугольник $A'B'C'$ вписан в треугольник ABC и описан около треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что тогда

$$\overline{A'B'C'}^2 = \overline{ABC} \cdot \overline{A_1B_1C_1}$$

(*теорема Пилатти*).

6. Дан треугольник ABC. Его стороны ориентируются как: $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$. Доказать, что на осях $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ существует только одна тройка точек A_1, B_1, C_1 таких, что $\overline{BA_1} = \overline{CB_1} = \overline{AC_1}$ и что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать также, что точки A_1, B_1, C_1 соответственно внутренние точки отрезков BC, CA, AB.

Указание. Применить теорему Чевы. Исследовать получившееся при этом кубическое уравнение $(\overline{BA_1} = \overline{CB_1} = \overline{AC_1} = x)$ относительно x (С. Ватрикант).

7. Пусть I, I_a, I_b, I_c — центр окружности (I), вписанной в треугольник ABC, и центры окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных в этот треугольник. Пусть R — радиус окружности $(O) = (ABC)$, а N — точка, расположенная на отрезке HH_1 на расстоянии $\frac{2}{3}HH_1$ от H; H — ортоцентр треугольника ABC, а H_1 —

ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот треугольника ABC. Обозначим через L центр тяжести системы четырех точек, полученных из точек I, I_a, I_b, I_c инверсией относительно окружности (O). Доказать, что точки O, N, L лежат на одной прямой и что

$$OI \cdot OI_a \cdot OI_b \cdot OI_c = 3R^2 \cdot ON,$$

$$ON \cdot OL = \frac{2}{3} R^2.$$

8. Треугольник ABC вписан в окружность (O). Построим прямоугольные треугольники AOA', BOB', COC' (угол O во всех трех треугольниках равен $\pi/2$), имеющие одинаковую ориентацию. Пусть окружности $(A', A'A)$, $(B', B'B)$, $(C', C'C)$ пересекают стороны AB и AC, BC и BA, CA и CB в точках B_a, C_a; C_b, A_b; A_c, B_c.

Доказать, что треугольники AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c имеют одну и ту же окружность Эйлера (рис. 47) (Р. Бланшар).

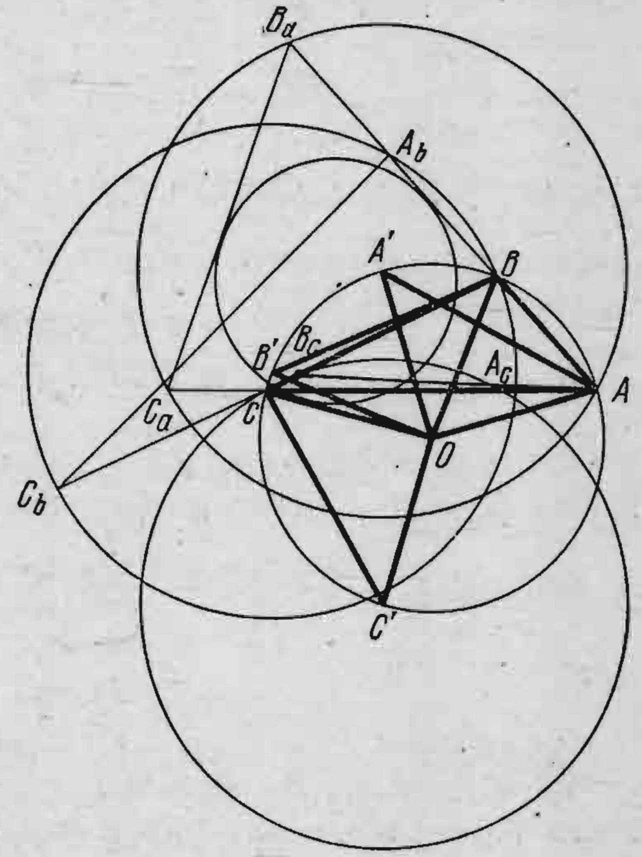


Рис. 47.

Указание. Примем окружность (O) за единичную. Пусть a, b, c, a', b', c' — аффиксы точек A, B, C, A', B', C'. Тогда

$$a' = ia, \quad b' = ib, \quad c' = ic, \quad AA' = \sqrt{2}.$$

Уравнение окружности $(A', A'A)$:

$$(z - ia)(\bar{z} + i\bar{a}) = 2. \tag{170}$$

Уравнение AB:

$$z + ab\bar{z} = a + b,$$

откуда

$$\bar{z} + \bar{a}\bar{b}z = \bar{a} + \bar{b},$$

$$\bar{z} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{a}\bar{b}z,$$

и уравнение (170) принимает вид

$$(z - ia)(\bar{a} + \bar{b} - \bar{a}\bar{b}z + i\bar{a}) = 2,$$

или

$$(z - ia)(\bar{a}\bar{b}z - \bar{a} - \bar{b} - i\bar{a}) + 2 = 0.$$

Один из корней этого уравнения $z = a$; другой —

$$b_a = b + i(a + b).$$

Аналогично аффикс c_a точки C_a:

$$c_a = c + i(a + c).$$

Аффикс h_a ортоцентра H_a треугольника AB_aC_a найдем из соотношения

$$\overrightarrow{OH_a} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B_a} + \overrightarrow{A'C_a} + \overrightarrow{A'A},$$

т. е.

$$h_a = ia + b + i(a + b) - ia + c + i(a + c) - ia + a - ia = \sigma_1(1 + i) - ai.$$

Аффикс a_9 середины отрезка H_aA', т. е. центр окружности Эйлера треугольника AB_aC_a:

$$a_9 = \frac{\sigma_1(1+i) - ai + ai}{2} = \frac{1+i}{2}\sigma_1 \; (= b_9 = c_9).$$

9. Даны аффиксы z_1, z_2, z_3 вершин A, B, C треугольника ABC. Найти аффикс z_0 центра окружности (ABC).

Ответ. $z_0 = \dfrac{z_1\bar{z}_1(z_3 - z_2) + z_2\bar{z}_2(z_1 - z_3) + z_3\bar{z}_3(z_2 - z_1)}{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}$.

Указание. $(z_0 - z_1)(\bar{z}_0 - \bar{z}_1) = (z_0 - z_2)(\bar{z}_0 - \bar{z}_2) = (z_0 - z_3)(\bar{z}_0 - \bar{z}_3)$.

10. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные центру O окружности $(O) = (ABC)$, описанной около треугольника ABC, соответственно относительно его сторон BC, CA, AB. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ симметричны относительно середины O_9 отрезка OH, где H — ортоцентр треугольника ABC (*теорема Гамильтона*).

Указание. Примем окружность (ABC) за единичную. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы точек A, B, C. Тогда аффиксы точек A_1, B_1, C_1 будут $z_2 + z_3$, $z_3 + z_1$, $z_1 + z_2$. Аффиксы середин отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны $(z_1 + z_2 + z_3)/2 = \sigma_1/2$, а это аффикс середины отрезка OH.

11. На плоскости задано подобие, заключающееся в повороте вокруг точки O на угол $\alpha \neq \pi n$ (n — целое) и гомотетий с центром O и коэффициентом k. Пусть при этом подобии треугольник ABC перейдет в треугольник $A'B'C'$. Обозначим через A_1, B_1, C_1 соответственно точки пересечения прямых BC и $B'C'$, CA и $C'A'$, AB и $A'B'$. Какое положение должна занимать точка O относительно треугольника ABC, чтобы треугольники $\overline{ABC}$ и $\overline{A_1B_1C_1}$ были бы подобны и имели одинаковую ориентацию?

Указание. Пусть a, b, c — аффиксы точек A, B, C в произвольной системе координат с началом координат в точке O. Полагая $p = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, находим аффиксы $a' = pa$, $b' = pb$, $c' = pc$ точек A', B', C'. Из уравнений прямых BC и $B'C'$:

$$(\bar{b} - \bar{c})z - (b - c)\bar{z} + b\bar{c} - \bar{b}c = 0,$$

$$\bar{p}(\bar{b} - \bar{c})z - p(b - c)\bar{z} + p\bar{p}(b\bar{c} - \bar{b}c) = 0,$$

находим аффикс a_1 точки A_1:

$$a_1 = \frac{b\bar{c} - \bar{b}c}{b - \bar{c}} \frac{p(\bar{p}-1)}{p - \bar{p}},$$

и аналогичные выражения для b_1 и c_1:

$$b_1 = \frac{c\bar{a} - \bar{c}a}{\bar{c} - \bar{a}} \frac{p(\bar{p}-1)}{p - \bar{p}}, \quad c_1 = \frac{a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{a} - \bar{b}} \frac{p(\bar{p}-1)}{p - \bar{p}}.$$

Ориентированные треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ будут подобны и одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя сюда выражения для a_1, b_1, c_1 через a, b, c, p и упрощая, получим

$$a\bar{a}(\bar{b} - \bar{c}) + b\bar{b}(\bar{c} - \bar{a}) + c\bar{c}(\bar{a} - \bar{b}) = 0,$$

а это означает (см. предыдущую задачу), что O — центр окружности (ABC).

З а м е ч а н и е. Если теперь принять окружность $(O) = (ABC)$ за единичную, то

$$a_1 = \frac{p(\bar{p}-1)}{\bar{p} - p}(b + c),$$

$$b_1 = \frac{p(\bar{p}-1)}{\bar{p} - p}(c + a),$$

$$c_1 = \frac{p(\bar{p}-1)}{\bar{p} - p}(a + b),$$

и, значит, треугольник $\overrightarrow{A_1B_1C_1}$ является образом треугольника $\overrightarrow{A_2B_2C_2}$, дополнительного к $\overrightarrow{ABC}$ при подобии с центром O, углом поворота

$$\arg \frac{p(\bar{p}-1)}{\bar{p} - p}$$

и коэффициенты подобия

$$2\left|\frac{k(\bar{p}-1)}{\bar{p} - p}\right| = \frac{\sqrt{k^2 - 2k\cos\alpha + 1}}{|\sin\alpha|}$$

(Р. Бланшар).

12. Доказать, что если в треугольнике ABC медиана m_a, выходящая из угла A, равна длине l_a биссектрисы, выходящей из того же угла A: $m_a = l_a$, то треугольник ABC равнобедренный: $b = c$. Решить задачу аналитически (вычислением) и геометрически.

13. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ — правильный выпуклый семиугольник. Доказать, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми A_1A_2, A_3A_5, A_4A_7, проходит через вершину A_6 (В. Тебо).

14. Доказать, что если углы треугольника ABC:

$$A=\frac{\pi}{7},\quad B=\frac{2\pi}{7},\quad C=\frac{4\pi}{7},$$

а через a, b, c обозначены длины его сторон BC, CA, AB, то выполняются следующие соотношения:

1°. $a^2+b^2+c^2=7R^2$.

2°. $OH=R\sqrt{2}$ (см. пример 11).

3°. Углы треугольника $A'B'C'$, вершинами которого являются основания A', B', C' высот данного, таковы:

$$A'=\frac{2\pi}{7}=B,\quad B'=\frac{4\pi}{7}=C,\quad C'=\frac{\pi}{7}=A.$$

4°. $\cos A=\frac{b}{2a}$, $\cos B=\frac{c}{2b}$, $\cos C=\frac{a-b}{2b}=-\frac{a}{2c}$.

5°. $bc=a(b+c)$, $bc=c^2-a^2$, $ac=b^2-a^2$; и обратно, если выполнены первые два соотношения, то $A=\pi/7$, $B=2\pi/7$, $C=4\pi/7$.

6°. $\cos A\cos B\cos C=-1/8$,

$\sin A\sin B\sin C=\sqrt{7}/8$.

7°. $\sin^2 A=\frac{3a-c}{4a}$, $\sin^2 B=\frac{3b-a}{4b}$, $\sin^2 C=\frac{3c+b}{4c}$.

8°. $\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C+\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C=1/8$.

9°. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=5/4$.

10°. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=7/4$.

11°. $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b}{a}-\frac{1}{2}=\frac{c+a}{2(c-a)}$.

12°. $\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 C\cos^2 A+\cos^2 A\cos^2 B=3/8$.

13°. $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=-\sqrt{7}$.

14°. $h_a=h_b+h_c$.

15°. $h_a^2+h_b^2+h_c^2=(a^2+b^2+c^2)/2$.

16°. $BA'\cdot A'C=\frac{ac}{4}$, $CB'\cdot B'A=\frac{ab}{4}$, $AB'\cdot C'B=\frac{bc}{4}$.

17°. Если Q_a, Q_b, Q_c — основания биссектрис внутренних углов треугольника ABC, а Q'_a, Q'_b, Q'_c — основания биссектрис внешних его углов, то

$$AQ_a=\sqrt{\frac{b^2a^2-a^4}{bc}},\quad BQ_b=\frac{bc}{a+c}=c-a,\qquad CQ_c=\frac{ac}{a+b}=b-a.$$

18°. $AQ_a^2+BQ_b^2+CQ_c^2=6a^2$.

19°. $BQ_b\cdot BQ_c=(c-a)(b-a)=a^2$.

20°. $AQ'_a=b+c$.

21°. $BQ_b'^2=a^2-ab+b^2$.

22°. $CQ_c'^2 = b^2 + bc + c^2$.

23°. $AQ_a'^2 + BQ_b'^2 + CQ_c'^2 = 4b^2 + 4c^2 - 2a^2 = 8m_a^2$.

24°. Радиусы окружностей Аполлония равны сторонам треугольника ABC (окружности Аполлония треугольника — это окружности (Q_aQ_a'), (Q_bQ_b'), (Q_cQ_c'), построенные на отрезках Q_aQ_a', Q_bQ_b', Q_cQ_c' как на диаметрах).

Пусть $A_tB_tC_t = T_t$ — треугольник, образованный касательными в точках A, B, C к окружности (ABC), описанной около треугольника $ABC = T$. Доказать, что:

25°. Треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A_tB_tC_t}$ подобны и имеют противоположную ориентацию; коэффициент подобия равен 1/2.

26°. Высоты AA', BB', CC' треугольника ABC делят пополам стороны B_tC_t, C_tA_t, A_tB_t треугольника T_t.

27°. Окружность Эйлера для треугольника T_t проходит через ортоцентр треугольника T.

28°. Треугольники $\overrightarrow{II_bI_c}$ и $\overrightarrow{ABC}$ подобны, одинаково ориентированы и коэффициент подобия равен 1/2.

15. Дан треугольник ABC, G — точка пересечения его медиан. Пусть A_1, B_1, C_1 — образы точек A, B, C при гомотетии $(G, -2)$. Пусть

$$\overrightarrow{BCA'}, \quad \overrightarrow{CAB'}, \quad \overrightarrow{ABC'} \tag{171}$$

— равносторонние треугольники, имеющие одинаковую ориентацию;

$$\overrightarrow{BCA''}, \quad \overrightarrow{CAB''}, \quad \overrightarrow{ABC''} \tag{172}$$

— также равносторонние треугольники, имеющие одинаковую ориентацию, причем ориентация любого из треугольников (171) противоположна ориентации любого из треугольников (172). Доказать, что треугольники

$$\overrightarrow{B'C'A_1}, \quad \overrightarrow{C'A'B_1}, \quad \overrightarrow{A'B'C_1} \tag{173}$$

— равносторонние и имеют одинаковую ориентацию — такую же, как треугольники (172), а треугольники

$$\overrightarrow{B''C''A_1}, \quad \overrightarrow{C''A''B_1}, \quad \overrightarrow{A''B''C_1} \tag{174}$$

— равносторонние и имеют одинаковую ориентацию — такую же, как треугольники (171) (рис. 48).

Указание. Если α — любое из мнимых значений $\sqrt[3]{-1}$, то аффиксы точек A', B', C', A'', B'', C'' выражаются через аффиксы точек A, B, C соотношениями

$$\begin{aligned} a' &= \alpha c + \bar{\alpha} b, \\ b' &= \alpha a + \bar{\alpha} c, \\ c' &= \alpha b + \bar{\alpha} a; \\ a'' &= \bar{\alpha} c + \alpha b, \\ b'' &= \bar{\alpha} a + \alpha c, \\ c'' &= \bar{\alpha} b + \alpha a. \end{aligned}$$

Аффиксы третьих вершин равносторонних треугольников, построенных на отрезках $B'C'$ и $B''C''$ и одинаково ориентированных соответственно с треугольниками $\overrightarrow{BCA''}$ и $\overrightarrow{BCA'}$, таковы:

$$\bar{\alpha}c' + \alpha b' = b + c - a,$$

$$\alpha c'' + \bar{\alpha} b'' = b + c - a,$$

и, следовательно, эти третьи вершины совпадают с точкой A_1 (Р. До).

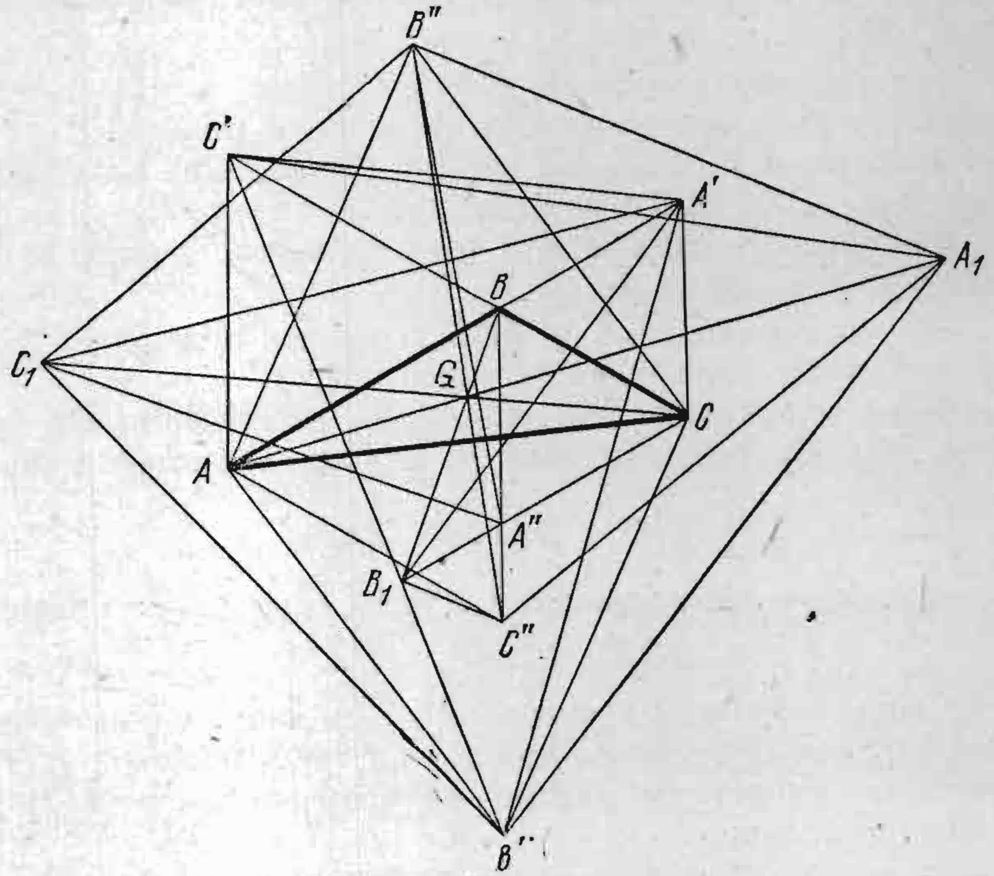


Рис. 48.

16. Доказать, что если в треугольнике ABC углы A, B, C связаны соотношением

$$\sin A = \cos B \operatorname{tg} C,$$

то высота AA', медиана BB' и биссектриса CC' пересекаются в одной точке.

Указание. Углы B и C острые. Значит, основание A' высоты AA' является внутренней точкой отрезка BC. Значит,

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{c \cos B}{b \cos C}$$

и далее применить теорему Чевы.

Дополнительный вопрос. Какая теорема получится из доказанной, если к точке M, в которой пересекаются высота AA', медиана BB' и биссектриса CC', применить изогональное преобразование? (по Морлею).

Указание. Так как центр O окружности (ABC) при изогональном преобразовании переходит в ортоцентр H треугольника ABC (и обратно), то получаем теорему: если в треугольнике ABC углы A, B, C связаны соотношением $\sin A = \cos B \operatorname{tg} C$, то диаметр AO окружности $(O)=(ABC)$, биссектриса CC' и симедиана BB^* (прямая, симметричная медиане BB' относительно биссектрисы внутреннего угла B) пересекаются в одной точке.

17. В единичную окружность вписан треугольник ABC, аффиксы вершин которого соответственно равны z_1, z_2, z_3. Дана точка P, аффикс которой

$$p=\frac{\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3}{\alpha+\beta+\gamma},$$

где α, β, γ — действительные числа. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, в которых прямые AP, BP, CP пересекают соответственно стороны BC, CA, AB. Найти

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}.$$

Указание. Аффиксы точек A_1, B_1, C_1 таковы:

$$a_1=\frac{\beta z_2+\gamma z_3}{\beta+\gamma},\quad b_1=\frac{\gamma z_3+\alpha z_1}{\gamma+\alpha},\quad c_1=\frac{\alpha z_1+\beta z_2}{\alpha+\beta}.$$

Ответ. $\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1C_1}}{\overrightarrow{ABC}}=\dfrac{\overline{A_1B_1C_1}}{\overline{ABC}}=\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$.

18. Доказать, применяя комплексные числа, что необходимым и достаточным условием того, что ортогональные проекции B_1 и C_1 вершин B и C треугольника ABC соответственно на стороны AC и AB лежат на одной прямой с центром тяжести G треугольника ABC, является равенство: $3a^2=b^2+c^2$, или $a^2=b^2+c^2$, где a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC.

Указание. Принять окружность (ABC) за единичную. Доказать равенства $z_2\bar{z}_3+z_3\bar{z}_2=2-a^2$ и т. д.

19. Пусть z_1, z_2, z_3 — аффиксы вершин треугольника ABC, вписанного в единичную окружность. Доказать, что равенство $z_1^2=z_2z_3$ является необходимым и достаточным условием того, что треугольник ABC равнобедренный: $AC=AB$.

20. ABC — прямоугольный треугольник $(C=\pi/2)$; (I) — окружность, вписанная в этот треугольник. Пусть A_1, B_1, C_1 — ортоцентры треугольников IBC, ICA, IAB. Доказать, что длина проекции $A_3^*B_3^*$ отрезка A_1B_1 на гипотенузу AB равна диаметру окружности (I), вписанной в треугольник ABC. Длина проекции $B_1^*C_1^*$ отрезка B_1C_1 на катет BC равна диаметру окружности (I_b), вневписанной в угол B, а длина $A_2^*C_2^*$ — проекции отрезка A_1C_1 на катет AC равна диаметру окружности (I_a), вневписанной в угол A.

Указание. Принять окружность (I) за единичную. Пусть P, Q, R — точки касания окружности (I) со сторонами BC, CA,

AB, и пусть их аффиксы соответственно 1, i, α. Тогда аффиксы точек A, B, C будут

$$a = \frac{2}{\bar{\alpha} + \bar{i}} = \frac{2\alpha i}{\alpha + i}, \quad b = \frac{2}{1+\bar{\alpha}} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad c = \frac{2}{1+\bar{i}} = 1 + i,$$

так как точки A, B, C являются образами при инверсии относительно окружности (I) точек A', B', C' пересечения прямых IA, IB, IC соответственно с прямыми RQ, PR, PQ (рис. 49). Далее: аффикс a_1 ортоцентра A_1 треугольника IBC: $a_1 = \frac{(1-i)(i+\alpha)}{1+\alpha}$ и т. д. (в целом выкладки достаточно громоздкие).

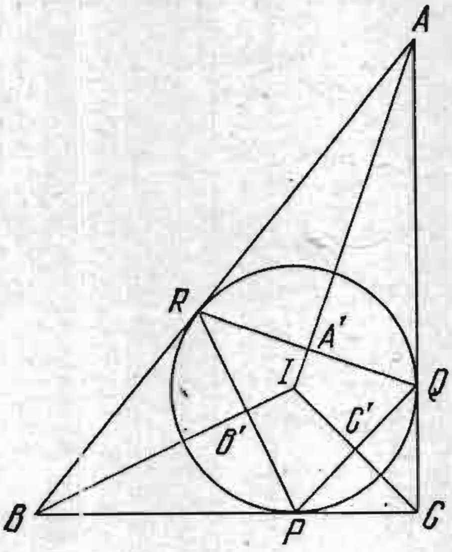


Рис. 49.

21. ABC — прямоугольный треугольник ($C = \pi/2$). Окружность $(ABC) = (O)$ принимается за единичную. Точка $M(z_0)$ описывает эту окружность. Пусть Q — середина отрезка OM, а l — прямая Симсона для точки M, построенная относительно треугольника ABC. Найти геометрическое место точек P, симметричных Q относительно l.

Ответ. Отрезок $A'B'$, полученный параллельным переносом диаметра AB, определяемый направленным отрезком $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ (рис. 50).

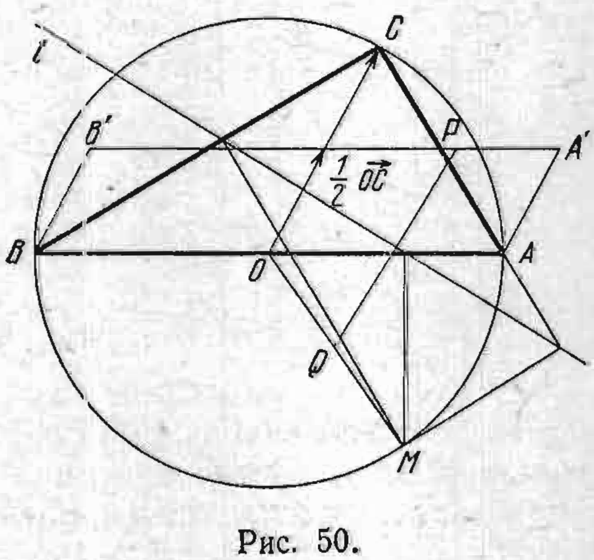


Рис. 50.

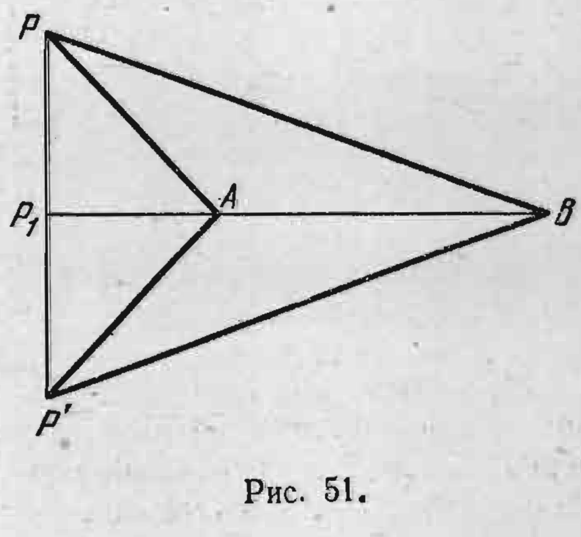


Рис. 51.

22. На плоскости даны две различные точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Найти аффикс p' точки P', симметричной точке $P(p)$ относительно AB.

Указание. p' находится из уравнения (рис. 51)

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ p_1 & \bar{p}_1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ где } p_1 = (p + p')/2.$$

Ответ. $p' = (z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \bar{p}(z_2 - z_1))/(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$.

23. На плоскости заданы две различные точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Доказать, что если точка $M(\lambda)$ описывает единичную окружность (за вычетом точки с аффиксом $\lambda = -1$), то точка $M'\left(\frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$ описывает медиатрису отрезка AB.

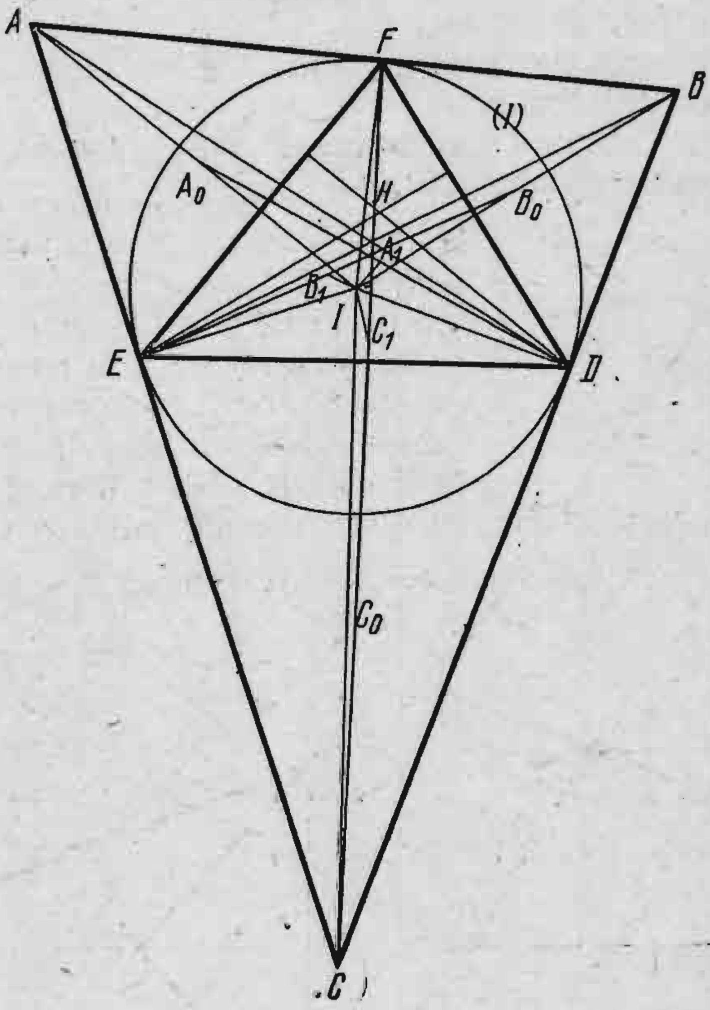


Рис. 52.

24. Пусть D, E, F — точки касания окружности (I), вписанной в треугольник ABC со сторонами BC, CA, AB. Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины медиан DA_0, EB_0, FC_0 треугольников ADI, BEI, CFI, выходящих из вершин D, E, F (A_0, B_0, C_0 — соответственно середины отрезков AI, BI, CI). Пусть H — ортоцентр треугольника DEF. Доказать, что (рис. 52)

$$IA_1 = \frac{IH}{4\sin(A/2)}, \quad IB_1 = \frac{IH}{4\sin(B/2)}, \quad IC_1 = \frac{IH}{4\sin(C/2)}.$$

Указание. Принять окружность (DEF) за единичную; аффиксы точек D, E, F обозначим через z_1, z_2, z_3. Тогда

$$IA_1=\frac{|\sigma_2|}{2|z_2+z_3|},\quad IA=\frac{2}{|z_2+z_3|},\quad |\sigma_2|=|\sigma_1| \text{ и т. д.}$$

25. ABC — произвольный треугольник; $(ABC)=(O)$ — описанная около него окружность; Ω — произвольная точка, лежащая на этой окружности. Через точку A проводится прямая, параллельная прямой $O\Omega$ (рис. 53). Пусть A' — вторая точка пересечения этой прямой с окружностью (ABC), а P — точка, симметричная точке A' относительно диаметра окружности (O), параллельного BC. Доказать, что:

1°. Аналогичное построение, выполненное для точек B и C, приводит к той же точке P.

2°. Прямая Симсона для точки P относительно треугольника ABC параллельна прямой OP.

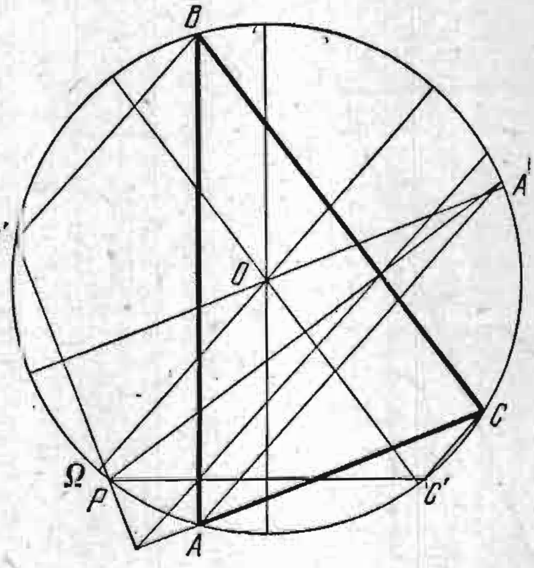


Рис. 53.

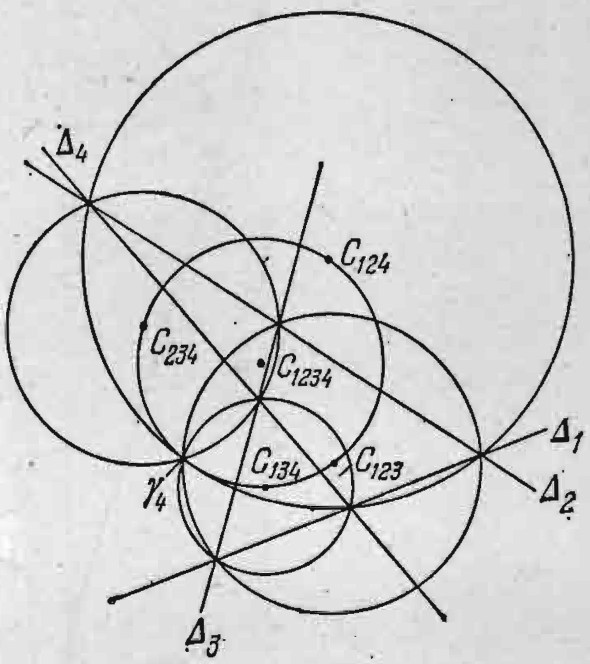


Рис. 54.

26. Пусть Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 — четыре прямые, лежащие на одной и той же плоскости, причем среди них нет параллельных и никакие три из них не проходят через одну точку. Если взять любые три из них, например, Δ_1, Δ_2, Δ_3, то они образуют треугольник. Пусть C_{123} — окружность, описанная около этого треугольника. Построим аналогично окружности C_{124}, C_{134}, C_{234}. Доказать, что:

1°. Центры окружностей C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123} лежат на одной и той же окружности C_{1234}.

2°. Окружности C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}, C_{1234} проходят через одну и ту же точку γ_4 (рис. 54).

Добавим к прямым Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 прямую Δ_5, но так, чтобы никакие три прямые из этих пяти прямых не принадлежали одному пучку. Исключая одну из этих прямых, например Δ_5, построим окружность C_{1234} и аналогично, исключая по очереди

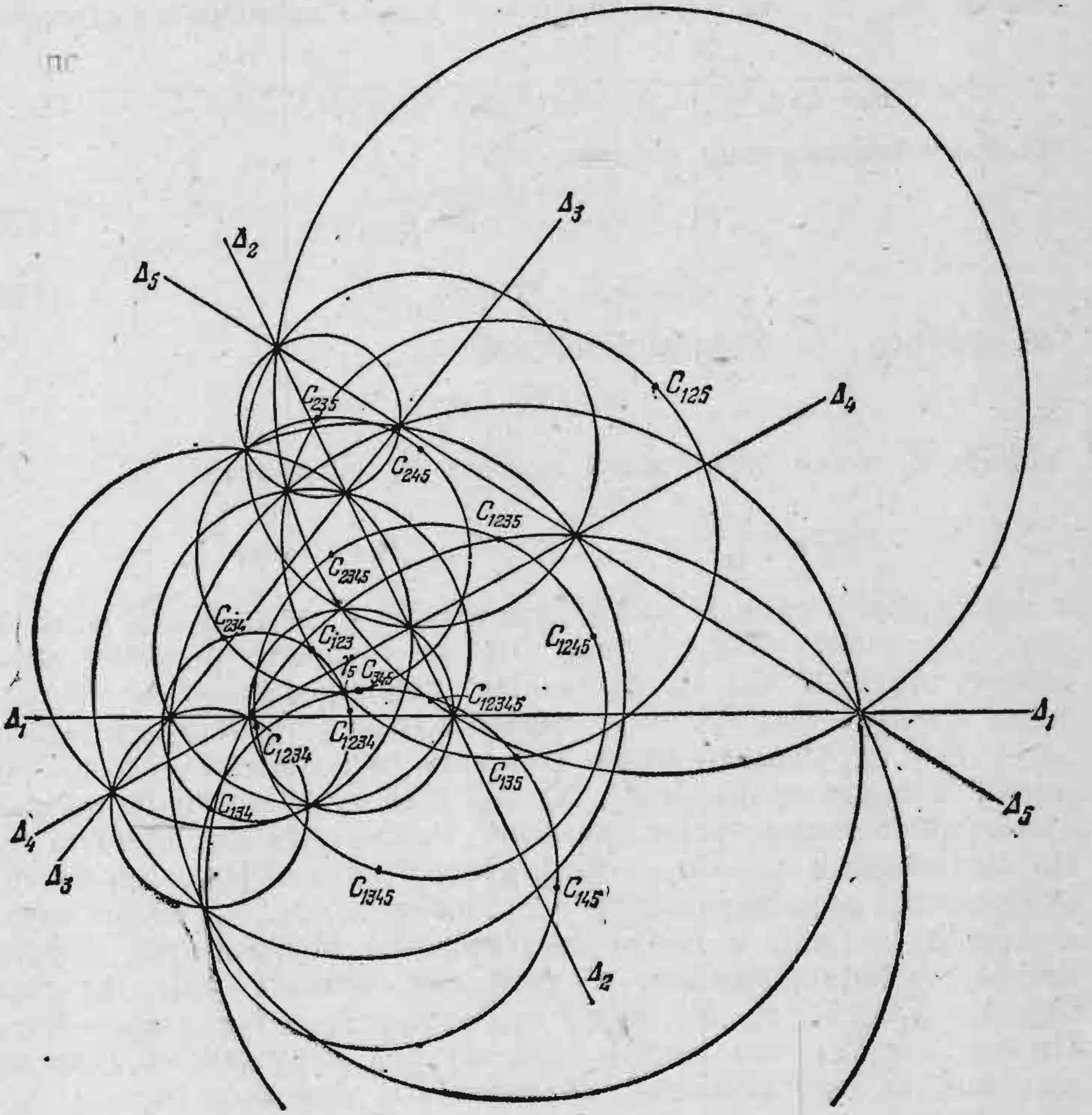


Рис. 55.

прямые Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, построим окружности C_{2345}, C_{1345}, C_{1245}, C_{1235} (рис. 55). Доказать, что:

3°. Центры этих пяти окружностей лежат на одной и той же окружности C_{12345}.

4°. Окружности C_{2345}, C_{1345}, C_{1245}, C_{1235}, C_{1234} проходят через одну и ту же точку γ_5, которая, однако, не лежит, вообще говоря, на окружности C_{12345}.

Докажите аналогичные утверждения для любого числа прямых Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n.

Указание. Я приведу в сжатом виде решение этой задачи, которое дал в 1974—1975 учебном году ученик 9-го класса средней школы № 69 Фрунзенского района г. Москвы.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — аффиксы точек, симметричных точке O (произвольная точка, принятая за начало) относительно прямых $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Положим $t_j = -\bar{x}_j/x_j$. Рассмотрим выражение

$$a_{n,i} = \frac{x_1 t_1^i}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\ldots(t_1-t_n)} + \frac{x_2 t_2^i}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\ldots(t_2-t_n)} + \ldots$$

Из этого соотношения следует, что

$$a_{n,i} = a_{n+1,\,i+1} - t_{n+1}\, a_{n+1,\,i} \tag{175}$$

и

$$\bar{a}_{n,\,i} = (-1)^n \sigma_n a_{n,\,n-i-1}, \tag{176}$$

где $\sigma_n = t_1 t_2 \ldots t_n$. Уравнение прямой Δ_j:

$$\bar{x} = t_j (x - x_j).$$

Аффикс z_2 точки пересечения прямых Δ_1 и Δ_2 равен

$$z_2 = \frac{t_1 x_1}{t_1 - t_2} + \frac{t_2 x_2}{t_2 - t_1} = a_{2,1} = a_{3,2} - t_3 a_{3,1},$$

и аналогично аффиксы точки пересечения прямых Δ_1, Δ_3 и Δ_2, Δ_3 будут $a_{3,2} - t_2 a_{3,1}$ и $a_{3,2} - t_1 a_{3,1}$. Отсюда следует, что точки пересечения прямых Δ_1, Δ_2, Δ_3, взятых попарно, лежат на окружности $x = a_{3,2} - t a_{3,1}$ ($|t| = 1$), аффикс центра которой $a_{3,2}$, а радиус $|a_{3,1}|$. Эту окружность будем называть окружностью, ассоциированной с тремя прямыми Δ_1, Δ_2, Δ_3, а ее центр — точкой, ассоциированной с этими тремя прямыми. Рассмотрим еще прямую Δ_4. Из соотношения $a_{3,2} = a_{4,3} - t_4 a_{4,2}$ следует, что аффикс $a_{3,2}$ центра окружности, ассоциированной с прямыми Δ_1, Δ_2, Δ_3, можно взять в виде $a_{4,3} - t_4 a_{4,2}$, и аналогично аффиксы центров трех окружностей, ассоциированных с тройками прямых (Δ_1, Δ_2, Δ_4), (Δ_1, Δ_3, Δ_4), (Δ_2, Δ_3, Δ_4), будут $a_{4,3} - t_3 a_{4,2}$, $a_{4,3} - t_2 a_{4,2}$, $a_{4,3} - t_1 a_{4,2}$. Отсюда следует, что центры этих четырех окружностей (описанных вокруг треугольников, образованных прямыми (Δ_1, Δ_2, Δ_3), (Δ_1, Δ_2, Δ_4), (Δ_1, Δ_3, Δ_4), (Δ_2, Δ_3, Δ_4)) лежат на окружности $x = a_{4,3} - t a_{4,2}$, аффикс центра которой $a_{4,3}$, а радиус равен $|a_{4,2}|$. Эту окружность мы будем называть окружностью, ассоциированной с четырьмя прямыми Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, а ее центр — точкой, ассоциированной с этими прямыми.

Продолжая рассуждения, приходим к теореме: если на плоскости даны n прямых $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, то, удаляя из этой совокупности поочередно по одной из прямых $\Delta_n, \ldots, \Delta_2, \Delta_1$, получим n групп прямых по $n-1$ прямых в каждой группе; центры n окружностей, ассоциированных этим n группам, принадлежат одной окружности Γ_n:

$$x = a_{n,\,n-1} - t a_{n,\,n-2} \qquad (|t| = 1), \tag{177}$$

аффикс центра которой $a_{n,\,n-1}$, а радиус $|a_{n,\,n-2}|$. Эту окружность Γ_n будем называть окружностью, ассоциированной с n прямыми $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, а ее центр — точкой, ассоциированной с этими прямыми. Уравнение окружности Γ_{n-1}, ассоциированной с $n-1$ прямыми $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$, имеет вид

$$x = a_{n-1,\,n-2} - t a_{n-1,\,n-3} \qquad (|t|=1). \tag{178}$$

Комплексное число

$$-\left(t_n - \frac{a_{n,2}}{a_{n,1}}\right) \Big/ \left(1 - t_n \frac{a_{n,\,n-3}}{a_{n,\,n-2}}\right)$$

имеет модуль, равный 1 (это следует из (176)). Если в соотношение (178) вместо t подставить это число, то получим

$$x = \gamma_n = a_{n,\,n-1} - \frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} a_{n,\,n-2}$$

— выражение, симметричное относительно индексов $1, 2, \ldots, n$ (так как на первом месте всюду стоит индекс n). Отсюда следует, что n окружностей, ассоциированных n системам прямых по $n-1$ прямых в каждой системе (эти системы получаются удалением поочередно одной из n прямых из системы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$), проходят через одну точку с аффиксом γ_n.

Замечание. При $n=4$ модуль комплексного числа

$$\frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} = \frac{a_{4,2}}{a_{4,1}}$$

равен 1, следовательно, окружность Γ_4:

$$x = a_{4,3} - t a_{4,2},$$

ассоциированная с четырьмя прямыми $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ (т. е. содержащая центры четырех окружностей, описанных вокруг треугольников $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4)$, $(\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4)$, $(\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$), проходит и через точку с аффиксом

$$\gamma_4 = a_{4,3} - \frac{a_{4,2}}{a_{4,1}} a_{4,2}.$$

Аналогичное положение неверно при $n > 4$, так как, например, модуль комплексного числа $\frac{a_{5,2}}{a_{5,1}}$ уже не равен (вообще говоря) 1.

27. $A_1A_2A_3A_4$ — произвольный четырехугольник (не обязательно выпуклый). На его сторонах строятся квадраты $\overrightarrow{A_1A_2P_1P_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3P_3P_4}$, $\overrightarrow{A_3A_4P_5P_6}$, $\overrightarrow{A_4A_1P_7P_8}$, имеющих одинаковую ориентацию, и еще четыре квадрата $\overrightarrow{A_1A_2P_1'P_2'}$, $\overrightarrow{A_2A_3P_3'P_4'}$, $\overrightarrow{A_3A_4P_5'P_6'}$, $\overrightarrow{A_4A_1P_7'P_8'}$, также имеющих одинаковую ориентацию, причем ориентация любого из квадратов первой группы противоположна ориентации любого из квадратов второй группы. Пусть B_1, B_2, B_3, B_4 — центры квадратов первой группы, а B_1', B_2', B_3', B_4' — центры квадратов второй группы. Доказать, что:

1°. Отрезки B_1B_3 и B_2B_4 равны и взаимно перпендикулярны (такой четырехугольник $B_1B_2B_3B_4$ называется *псевдоквадратом*).

2°. $B'_1B'_2B'_3B'_4$ также псевдоквадрат.

3°. Отрезки B_1B_3 и $B'_2B'_4$ имеют общую середину C_1; отрезки $B'_1B'_3$ и B_2B_4 имеют общую середину C_2. Пусть C_3 и C_4 — соответственно середины отрезков A_1A_3 и A_2A_4. Доказать, что $C_1C_2C_3C_4$ — квадрат (рис. 56).

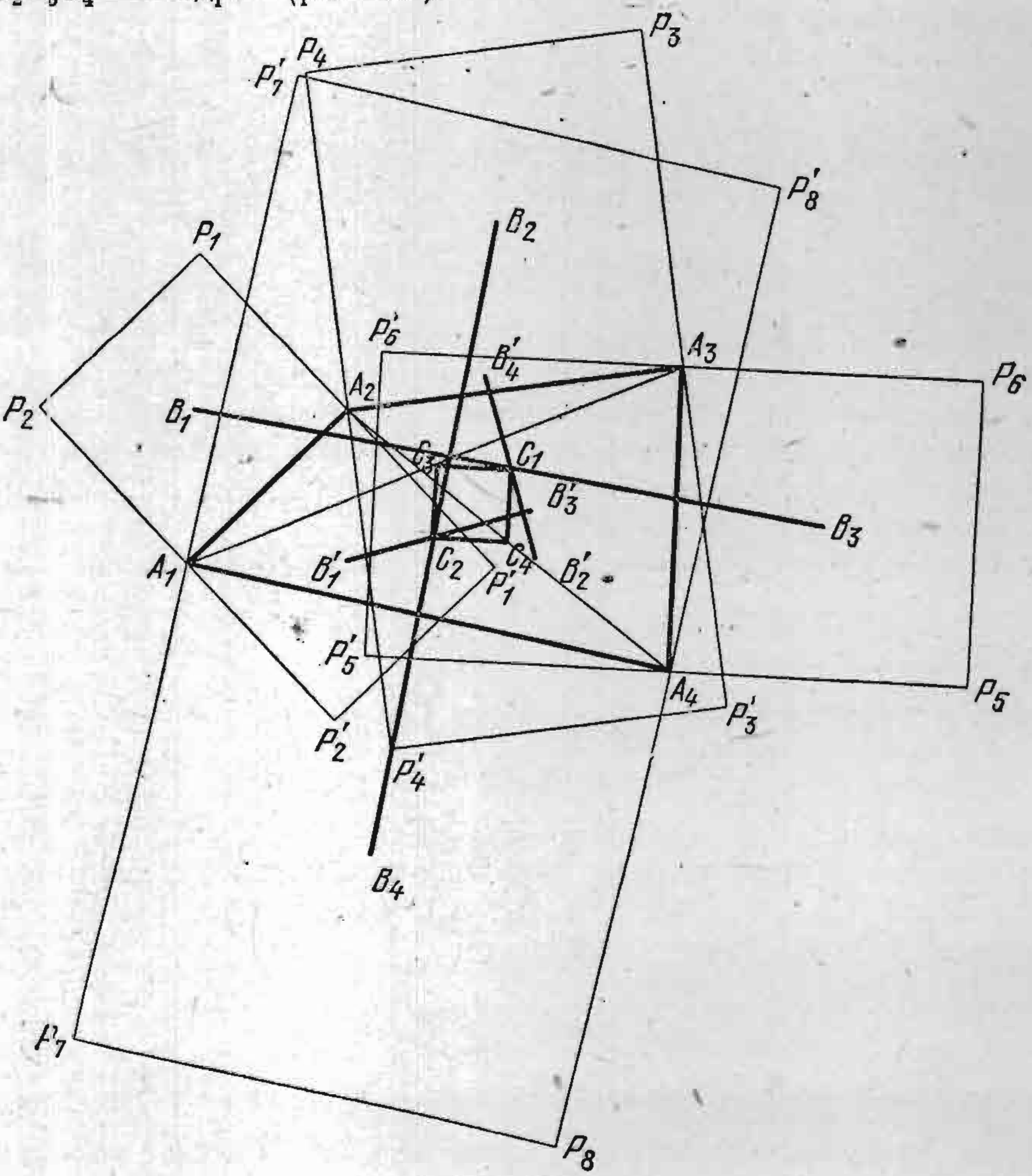


Рис. 56.

Замечание. Решить эту задачу, применяя комплексные числа, а также решить ее методами аналитической геометрии и методами векторной алгебры.

28. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ — произвольный восьмиугольник (не обязательно выпуклый). На его сторонах строятся квадраты

$$\overrightarrow{A_1A_2P_1P_2},\quad \overrightarrow{A_2A_3P_3P_4},\quad \overrightarrow{A_3A_4P_5P_6},\quad \overrightarrow{A_4A_5P_7P_8},$$
$$\overrightarrow{A_5A_6P_9P_{10}},\quad \overrightarrow{A_6A_7P_{11}P_{12}},\quad \overrightarrow{A_7A_8P_{13}P_{14}},\quad \overrightarrow{A_8A_1P_{15}P_{16}}$$

так, что все они имеют одну и ту же ориентацию, и еще восемь квадратов

$$\overrightarrow{A_1A_2P_1'P_2'},\quad \overrightarrow{A_2A_3P_3'P_4'},\quad \overrightarrow{A_3A_4P_5'P_6'},\quad \overrightarrow{A_4A_5P_7'P_8'},$$
$$\overrightarrow{A_5A_6P_9'P_{10}'},\quad \overrightarrow{A_6A_7P_{11}'P_{12}'},\quad \overrightarrow{A_7A_8P_{13}'P_{14}'},\quad \overrightarrow{A_8A_1P_{15}'P_{16}'},$$

также имеющих одну и ту же ориентацию, причем ориентация любого из ориентированных квадратов первой группы противоположна ориентации любого из ориентированных квадратов второй группы. Пусть B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 — соответственно центры квадратов первой группы, а B_1', B_2', B_3', B_4', B_5', B_6', B_7', B_8' — соответственно центры квадратов второй группы.

Доказать, что

1°. Середины C_1, C_2, C_3, C_4 главных диагоналей[1]) восьмиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ образуют псевдоквадрат.

2°. Середины C_1', C_2', C_3', C_4' главных диагоналей восьмиугольника $B_1'B_2'B_3'B_4'B_5'B_6'B_7'B_8'$ также образуют псевдоквадрат.

3°. Совокупности точек

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ A_8,$$
$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ B_6,\ B_7,\ B_8,$$
$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,$$
$$C_1',\ C_2',\ C_3',\ C_4'$$

имеют общий центр тяжести.

4°. Середины отрезков C_1C_3 и C_2C_4 совпадают соответственно с серединами отрезков $C_2'C_4'$ и $C_1'C_3'$.

5°. Необходимым и достаточным условием того, что $C_1C_2C_3C_4$, следовательно, и $C_1'C_2'C_3'C_4'$ были квадратами (в указанном порядке их вершин), состоит в том, что две совокупности точек A_1, A_3, A_5, A_7 и A_2, A_4, A_6, A_8 имеют общий центр тяжести.

6°. Квадраты $C_1C_2C_3C_4$ и $C_1'C_2'C_3'C_4'$ совпадают ($C_1=C_1'$, $C_2=C_2'$, $C_3=C_3'$, $C_4=C_4'$) тогда и только тогда, когда две последовательные главные диагонали восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ точкой их пересечения делятся пополам.

7°. Если совпадают точки C_1, C_3, C_2', C_4' и точки C_1', C_3', C_2, C_4, то четырехугольники $A_1A_3A_5A_7$ и $A_2A_4A_6A_8$ — параллелограммы, и обратно.

Решить эту задачу, применяя: 1) комплексные числа; 2) векторную алгебру; 3) аналитическую геометрию.

29. В окружность (O) вписан треугольник ABC. Доказать, что точки P, Q, R пересечения касательных, проведенных в точках A, B, C к окружности (O), соответственно с прямыми BC, CA, AB лежат на одной прямой (рис. 57).

---

[1]) Главными диагоналями восьмиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ называются отрезки B_1B_5, B_2B_6, B_3B_7, B_4B_8 (а также прямые, на которых лежат эти отрезки).

30. Через точки $A=(z_1)$, $B=(z_2)$, $C=(z_3)$, лежащие на единичной окружности, проводятся прямые, параллельные данной прямой Δ, которая имеет угловой коэффициент λ. Пусть A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения этих прямых с окружностью (ABC); A_2, B_2, C_2 — точки, симметричные точкам A_1, B_1, C_1 относительно соответственно прямых BC, CA, AB. Проведем через точки A_2, B_2, C_2 прямые, параллельные прямой Δ, и обозначим точки пересечения этих прямых соответственно с пря-

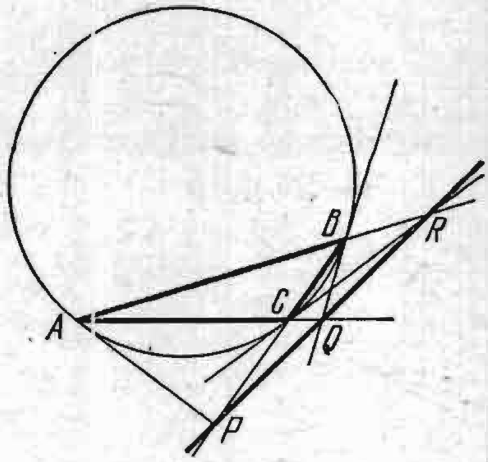


Рис. 57.

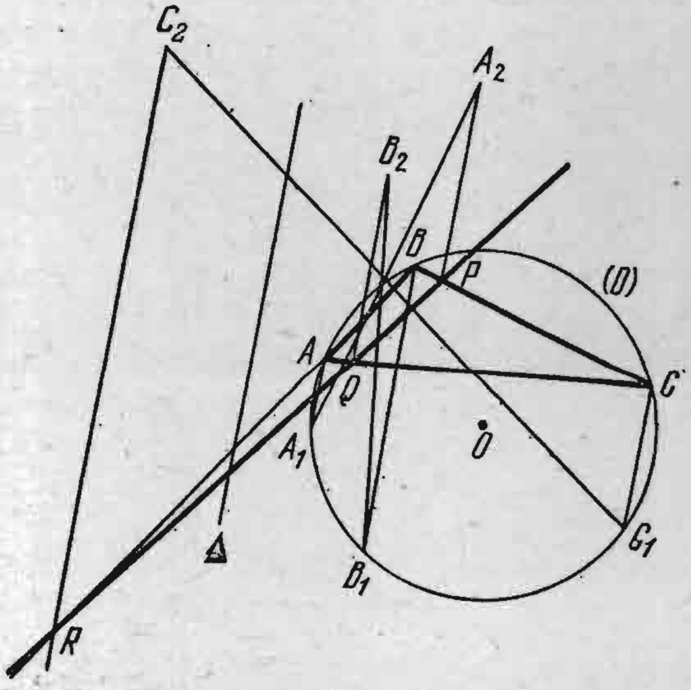


Рис. 58.

мыми BC, CA, AB через P, Q, R. Доказать, что точки P, Q, R лежат на одной прямой, и составить уравнение этой прямой (рис. 58).

Ответ. $\lambda(2\lambda^3+\sigma_1\lambda^2-1)z+\lambda^2(2+\sigma_1\lambda-\lambda^3)\bar{z}=$
$$=\lambda^6+\sigma_2\lambda^5-\sigma_1\lambda^4+(1-\sigma_1\sigma_2)\lambda^3-\sigma_2\lambda^2+\sigma_1\lambda+1.$$

31. На окружности (O) взяты четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4. Пусть P — точка пересечения прямых A_1A_3 и A_2A_4; Q — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4; R — точка пересечения касательных к окружности (O) в точках A_1 и A_4; S — точка пересечения касательных к окружности (O) в точках A_2 и A_3. Доказать, что точки P, Q, R, S лежат на одной прямой (рис. 59).

Указание. Принять окружность (O) за единичную.

32. Треугольник ABC вписан в окружность (O). В точках A, B, C к окружности (O) проведены касательные, которые образуют треугольник $A_0B_0C_0$ (называемый *тангенциальным треугольником* для треугольника ABC). Доказать, что

1°. Точки P, Q, R пересечения прямых: $P=(BC,\ B_0C_0)$, $Q=(CA,\ C_0A_0)$, $R=(AB,\ A_0B_0)$ лежат на одной прямой m.

2°. Прямые AA_0, BB_0, CC_0 проходят через одну точку M.

3°. Точка M является полюсом прямой m относительной окружности (O) (или что то же самое — прямая m является полярой точки M относительно этой окружности) (рис. 60).

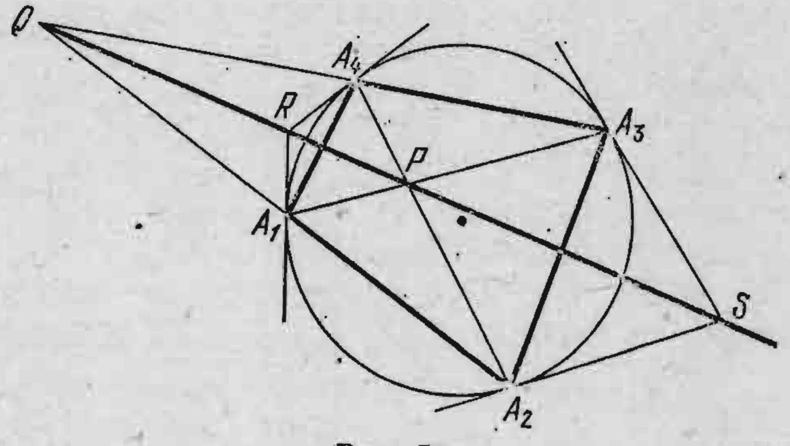


Рис. 59.

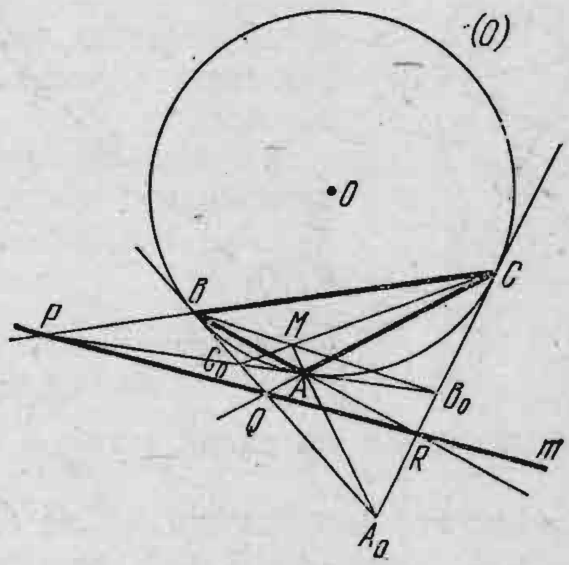


Рис. 60.

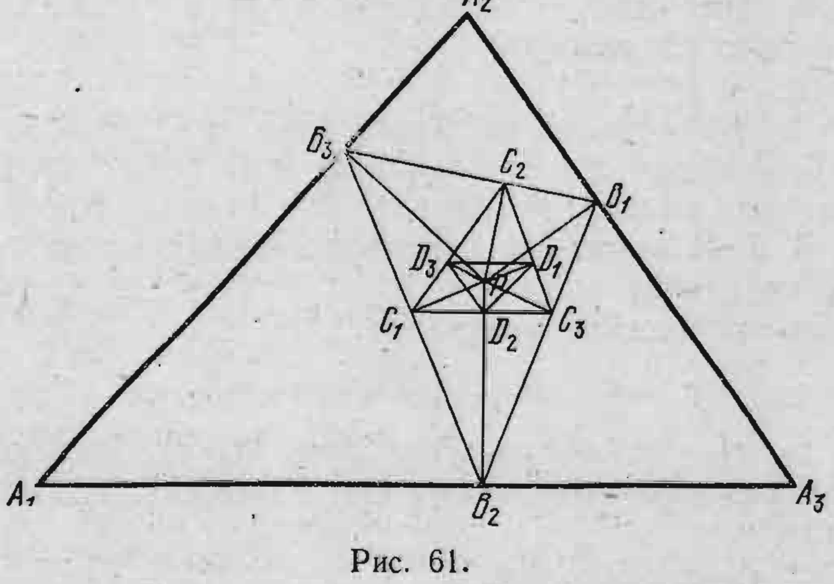


Рис. 61.

Указание. Принять окружность (O) за единичную.

33. $A_1A_2A_3$ — произвольный треугольник, лежащий на ориентированной плоскости; P — произвольная точка, лежащая в плоскости этого треугольника, но не лежащая ни на одной из его сторон, ни на окружности $(A_1A_2A_3)$. Пусть B_1, B_2, B_3 — ортогональные проекции точки P на прямые A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; C_1, C_2, C_3 — ортогональные проекции точки P на прямые B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 и D_1, D_2, D_3 — ортогональные проекции точки P соответственно на прямые C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2. Доказать, что треугольники $\overrightarrow{A_1A_2A_3}$ и $\overrightarrow{D_1D_2D_3}$ подобны и имеют одинаковую ориентацию (рис. 61).

Указание. Принять точку P за начало координат. Пусть a_k, b_k, c_k, d_k $(k=1, 2, 3)$ — соответственно аффиксы точек A_k, B_k, C_k, D_k. Выразить b_k через a_k; c_k через b_k; d_k через c_k.

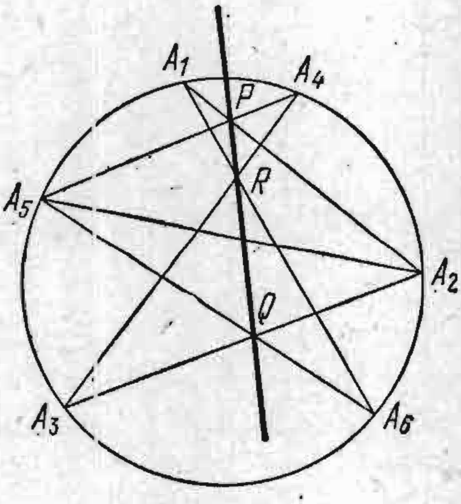


Рис. 62.

34. На окружности (O) взяты произвольно шесть точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Доказать, что три точки P, Q, R:

$$P=(A_1A_2,\ A_4A_5) \quad Q=(A_2A_3,\ A_5A_6),$$
$$R=(A_3A_4,\ A_6A_1),$$

пересечения прямых лежат на одной прямой (*теорема Паскаля*) (рис. 62).

Указание. Принять окружность (O) за единичную.

35. Доказать, что точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$, где z_1 и z_2 — корни уравнения

$$z^2+2pz+q=0$$

(p и q — комплексные числа и $p^2-q\neq 0$), лежат на прямой, проходящей через начало координат тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $p=0$;

2) $p\neq 0$, q/p^2 — число действительное и $(q/p^2)<1$; при этом, если $p\neq 0$, $0\leqslant q/p^2<1$, то точки A и B лежат на одном луче, выходящем из начала координат O, а если $p\neq 0$, $q/p^2<0$, то точки A и B лежат на противоположных лучах, выходящих из начала координат.

36. Дано кубическое уравнение

$$a_0z^3+3a_1z^2+3a_2z+a_3=0.$$

Пусть z_1, z_2, z_3 — его корни. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ коллинеарны, таково: или

1) $2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3=0$,

или

2) $\dfrac{(a_0a_2-a_1^2)^3}{(2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3)^2}$ — число, действительное и меньшее, чем $-1/4$.

Указание. При преобразовании переноса

$$z=\zeta-\frac{a_1}{a_0}$$

(*преобразование Чирнгауза*) данное уравнение примет вид

$$\zeta^3+3p\zeta+q=0,$$

где

$$p=\frac{a_0a_2-a_1^2}{a_0^2}, \quad q=\frac{2a_1^3-3a_0a_1a_2+a_0^2a_3}{a_0^3}.$$

Сумма корней ζ_1, ζ_2, ζ_3 последнего уравнения равна нулю, а так как $(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)/3=0$ — аффикс центра тяжести системы точек $A'(\zeta_1)$, $B'(\zeta_2)$, $C'(\zeta_3)$, то этот центр тяжести совпадает с началом координат. Если точки A, B, C коллинеарны, то точки A', B', C' также коллинеарны (и обратно). Если точки A', B', C' коллинеарны, то они в силу сказанного выше лежат на прямой, проходящей через начало координат.

37. Пусть на плоскости введена общая декартова система координат Oxy. *Аффинным преобразованием плоскости* называется соответствие, при котором координаты x', y' образа $M'(x', y')$ точки $M(x, y)$ через координаты x, y прообраза $M(x, y)$ точки $M'(x', y')$ выражаются линейными соотношениями

$$x'=a_1x+b_1y+c_1,$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2,$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — произвольные действительные числа, причем $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Доказать, что:

1°. Всякое аффинное преобразование может быть записано в виде

$$z'=\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma,$$

где z и z' — соответственно аффиксы точек M и M', причем $|\alpha|\neq|\beta|$. Обратно: если $|\alpha|\neq|\beta|$, то соотношением $z'=\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma$ определяется некоторое аффинное преобразование.

2°. Существует и притом только одно аффинное преобразование, которое любые три неколлинеарные точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ переводит соответственно в три неколлинеарные точки $A'(z_1')$, $B'(z_2')$, $C'(z_3')$.

3°. Треугольник $\overrightarrow{ABC}$ называется *метапараллельным* треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$, если прямые, проходящие через точки A, B, C и соответственно параллельные прямым $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, пересекаются в одной точке. Пусть $z'=\alpha z+\beta\bar{z}+\gamma$ — аффинное преобразование, при котором треугольник $\overrightarrow{ABC}$ переходит в треугольник

$\overrightarrow{A'B'C'}$. Доказать, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ метапараллелен треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$ тогда и только тогда, когда

1) α — число чисто мнимое, или, что то же самое,

2) $\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}'_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}'_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}'_3 & 1 \end{vmatrix}$

— число действительное.

4°. Доказать, что понятие метапараллельности симметрично, но не рефлексивно и не транзитивно.

5°. Доказать, что если треугольник $\overrightarrow{ABC}$ метапараллелен двум из трех треугольников: $\overrightarrow{A'B'C'}$, $\overrightarrow{B'C'A'}$, $\overrightarrow{C'A'B'}$, то он метапараллелен и третьему (в этом случае говорят, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ трижды метапараллельны).

6°. На плоскости задан треугольник ABC:

$$A = (z_1), \quad B = (z_2), \quad C = (z_3).$$

Найти аффикс z'_3 точки C', если известно, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ трижды метапараллелен треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$ с вершинами:

$$A' = (0), \quad B' = (1), \quad C' = (z'_3).$$

7°. Треугольник $\overrightarrow{ABC}$ называется *ортологичным* треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$, если прямые, проходящие через точки A, B, C и соответственно перпендикулярные прямым $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, пересекаются в одной точке. Доказать, что треугольник $\overrightarrow{ABC}$ ортологичен треугольнику $\overrightarrow{A'B'C'}$ тогда и только тогда, когда

1) α — число действительное,

или, что то же самое,

2) $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}'_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}'_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}'_3 & 1 \end{vmatrix}$

— число чисто мнимое.

8° Доказать, что понятие ортологичности рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

9°. Доказать, что если треугольник $\overrightarrow{ABC}$ ортологичен двум из треугольников $\overrightarrow{A'B'C'}$, $\overrightarrow{B'C'A'}$, $\overrightarrow{C'A'B'}$, то он ортологичен и третьему (в этом случае говорят, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{A'B'C'}$ трижды ортологичны).

Ответ. 6°. $z'_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} \bar{z}_1 - z_1 & z_2 & 1 \\ \bar{z}_2 - z_2 & z_3 & 1 \\ \bar{z}_3 - z_3 & z_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}$.

ГЛАВА IV

ИНВЕРСИЯ

§ 1. Определение инверсии. Свойства инверсии

Присоединим к множеству всех точек евклидовой плоскости один элемент, который будем называть *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* плоскости π. Условимся считать, что любая прямая плоскости π проходит через бесконечно удаленную точку и что эта точка не принадлежит никакой конечной фигуре. Евклидова плоскость, пополненная одной бесконечно удаленной точкой (с указанными соглашениями) называется *евклидово конформной плоскостью* или просто *конформной плоскостью*. Прямые, лежащие на конформной плоскости, будем иногда называть окружностями бесконечно большого радиуса. Мы будем также рассматривать точки как окружности; такие «окружности» мы будем называть окружностями нулевого радиуса или нулевыми окружностями. Две пересекающиеся прямые имеют две общие точки, одну собственную и одну бесконечно удаленную. Две параллельные прямые имеют только одну общую точку — бесконечно удаленную; мы будем говорить, что две параллельные прямые или две окружности бесконечно большого радиуса касаются в бесконечно удаленной точке.

Пусть O — фиксированная собственная точка конформной плоскости, а k — фиксированное действительное число, не равное нулю. *Инверсией* $[O, k]$ *с полюсом* O и *степенью* k конформной плоскости π называется взаимно однозначное преобразование этой плоскости, при котором каждой собственной точке M плоскости π, отличной от точки O, ставится в соответствие собственная точка M', лежащая на прямой OM и такая, что

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k.$$

Полюсу O инверсии поставим в соответствие бесконечно удаленную точку O', а точке O' поставим в соответствие точку O.

Всякая инверсия I является *инволюционным преобразованием*, т. е.

$$I^2 = E,$$

где E — тождественное преобразование.

Это следует из того, что если при инверсии I точка M' есть образ точки M, то точка M является образом точки M'.

Если степень k инверсии $[O, k]$ положительна, то окружность K с центром O и радиусом $\sqrt{k}$ называется *окружностью инверсии*. При инверсии $[O, k]$, где $k > 0$, каждая точка M окружности инверсии инвариантна, т. е. ее образ M' совпадает с ней самой.

Для построения образа M' точки M, лежащей вне окружности K инверсии $[O, k]$, где $k > 0$, проводим из точки M касательную MT к окружности K (T — точка касания); M' — проекция точки T на прямую OM (можно провести две касательные MT и MT', точка M' есть точка пересечения прямых OM и TT') (рис. 63).

Для построения образа M' точки M, лежащей внутри окружности K инверсии $[O, k]$, $k > 0$, проводим через точку M прямую, перпендикулярную к прямой OM. Пусть T — любая из точек

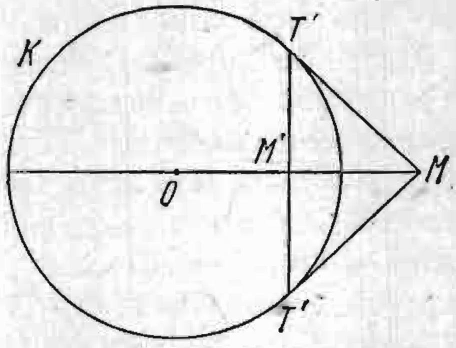


Рис. 63.

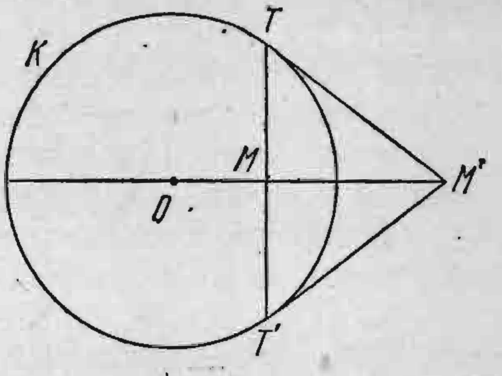


Рис. 64.

пересечения этого перпендикуляра с окружностью K. Тогда касательная к окружности K в точке T пересечет прямую OM в точке M' (рис. 64).

Таким образом, при положительной инверсии $[O, k]$, $k > 0$, точки, лежащие вне окружности K инверсии, переходят во внутренние точки этой окружности, а точки, лежащие внутри окружности K, переходят в точки, лежащие вне этой окружности.

Для отрицательной инверсии $[O, k]$, $k < 0$, окружность K с центром O и радиусом $\sqrt{|k|}$ инвариантна, однако каждая ее точка неинвариантна и переходит в точку, диаметрально ей противоположную на этой окружности. Для построения образа M' точки M при отрицательной инверсии $[O, k]$, $k < 0$, строим образ M^* точки M при положительной инверсии $[O, |k|]$, M' — симметрична точке M^* относительно точки O. Отсюда следует, что и при отрицательной инверсии множество всех точек, лежащих вне окружности K, переходит во множество внутренних точек окружности K, а множество всех внутренних точек окружности K переходит во множество всех внешних точек окружности K (рис. 65 и 66).

Пусть $[O, k]$ — инверсия с полюсом O и степенью k. Если C — произвольная окружность, не проходящая через полюс инверсии, то ее образ C' при инверсии $[O, k]$ есть снова окружность, не проходящая через полюс инверсии.

Доказательство. Пусть M — произвольная точка окружности C, а M' — ее образ при инверсии $[O, k]$, т. е. $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=k$. Так как прямая OM имеет с окружностью C общую точку M,

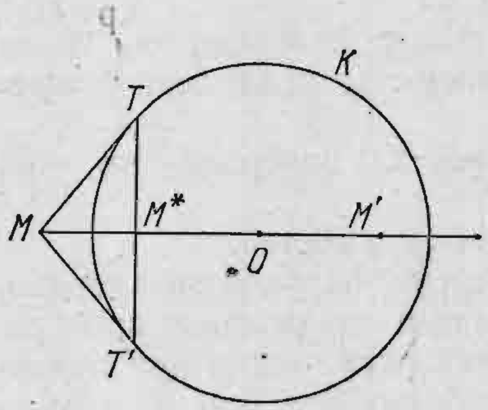


Рис. 65.

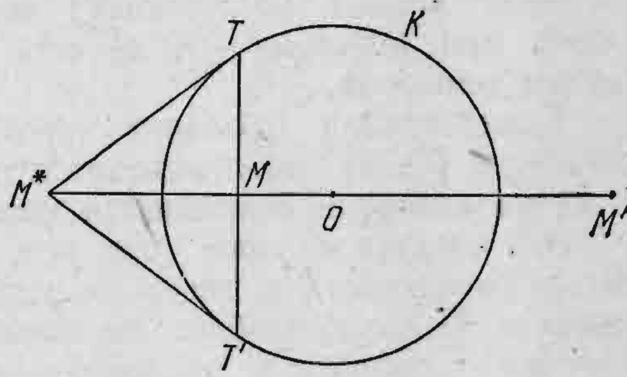


Рис. 66.

то эта прямая имеет с окружностью C вторую общую точку N (возможно, что $M=N$). Произведение $\overline{OM}\cdot\overline{ON}=\sigma$ есть степень полюса O инверсии относительно окружности C (рис. 67). Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}}=\frac{k}{\sigma},\quad \frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{ON}}=\frac{k}{\sigma},\quad \overrightarrow{OM'}=\frac{k}{\sigma}\overrightarrow{ON}.$$

Таким образом, точка M' является образом точки N окружности C при гомотетии $(O, k/\sigma)$, но при гомотетии $(O, k/\sigma)$ окруж-

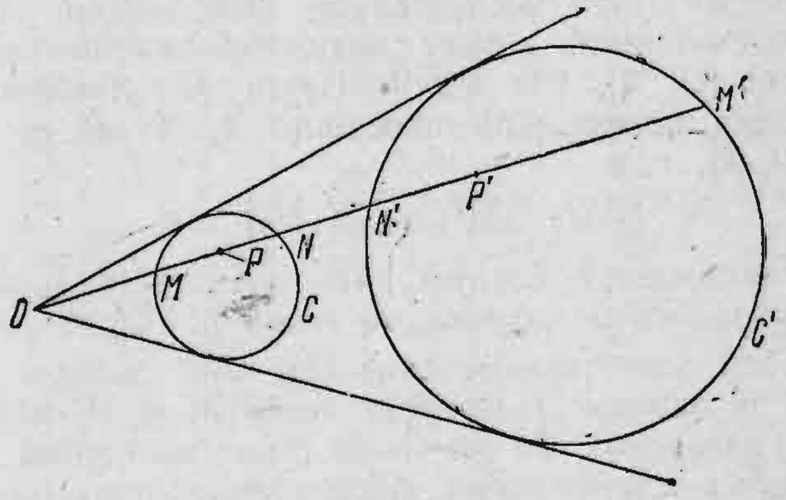


Рис. 67.

ность C переходит в окружность C'. Если точка M описывает окружность C, то и точка N описывает ту же окружность C, и значит, ее образ M' при гомотетии $(O, k/\sigma)$ описывает окружность C'. Итак, окружность C' является образом окружности C

и при гомотетии $(O, k/\sigma)$, где σ — степень полюса O инверсии относительно окружности C[1]) и при инверсии $[O, k]$.

Если окружность C проходит через полюс инверсии O, то ее образ при инверсии $[O, k]$ есть прямая, не проходящая через полюс инверсии и перпендикулярная к прямой, соединяющей полюс инверсии с центром окружности C.

Если прямая не проходит через полюс инверсии O, то ее образ при инверсии $[O, k]$ есть окружность, проходящая через полюс инверсии.

Если прямая проходит через полюс O инверсии, то при инверсии $[O, k]$ она переходит в себя.

При инверсии сохраняется касание окружностей.

Это следует из того, что при инверсии окружность переходит в окружность и инверсия есть взаимно однозначное преобразование (более подробно: две касающиеся окружности при инверсии могут перейти в две касающиеся окружности или в окружность и касательную к ней, или в две параллельные прямые).

Если полюс инверсии $[O, k]$ лежит вне окружности C, а C' ее образ при этой инверсии, то множество точек, лежащих внутри окружности C, переходит во множество точек, лежащих внутри окружности C' (и наоборот). Множество точек, лежащих вне окружности C, переходит во множество точек, лежащих вне окружности C' (и наоборот) (см. рис. 67).

Если полюс O инверсии $[O, k]$ лежит внутри окружности C, а C' образ окружности C при этой инверсии, то множество точек, лежащих внутри окружности C, переходит во множество точек, лежащих вне окружности C', а множество точек, лежащих вне окружности C, переходит во множество точек, лежащих внутри окружности C'.

Замечание. При исследовании отображений областей при инверсии полезно иметь в виду следующие соображения. Рассмотрим инверсию $[O, k]$, где $k>0$. Пусть M — произвольная собственная точка конформной плоскости π, а M' ее образ при инверсии $[O, k]$, т. е.

$$(\overline{OM}, \overline{OM'}) = \overline{OM}\cdot\overline{OM'} = k.$$

Из этого соотношения следует, что если точка M движется по лучу OM, удаляясь от полюса, то точка M' будет двигаться ей навстречу, так как произведение $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$ должно оставаться постоянным и равным k (встреча точек M и M' произойдет на окружности инверсии). То же самое имеет место для луча, противоположного рассмотренному. В конкретных примерах (см. ниже)

[1]) Заметим, что инверсия $[O, k]$ и гомотетия $(O, k/\sigma)$ переводят окружность C в одну и ту же окружность C', однако точки, лежащие на окружности C, преобразуются инверсией $[O, k]$ и гомотетией $(O, k/\sigma)$ в разные точки окружности C': при инверсии $[O, k]$ точка M переходит в точку M' окружности C', а при гомотетии $(O, k/\sigma)$ точка M переходит в точку N', где N' — вторая точка пересечения прямой OM' с окружностью C'.

это соображение полезно использовать для исследования отображения областей при инверсии и для нахождения инвариантных областей, т. е. областей, переходящих в себя при рассматриваемой инверсии.

Угол между двумя пересекающимися окружностями сохраняется при инверсии, но ориентация угла меняется на противоположную (инверсия есть конформное преобразование второго рода) (доказательство этого положения дано ниже при рассмотрении инверсии пространства).

Замечание. Дробно-линейное преобразование комплексного переменного

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0, \quad c \neq 0,$$

можно переписать в виде

$$z' = \frac{a}{c} + \frac{\Delta}{z+\frac{d}{c}}, \quad \text{где} \quad \Delta = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

Оно может быть геометрически интерпретировано так:

1°. $z_1 = z + \frac{d}{c}$ — перенос.

2°. $z_2 = \frac{1}{z_1}$ — инверсия относительно единичной окружности с последующей симметрией в оси Ox [1]).

3°. $z_3 = \Delta z_2$ — подобное преобразование с центром подобия O: поворот вокруг начала координат на угол $\arg \Delta$ и гомотетия $(O, |\Delta|)$.

4° $z' = z_3 + \frac{a}{c}$ — снова перенос.

Отсюда следует, что дробно-линейное преобразование является конформным преобразованием первого рода (сохраняющее ориентацию углов), так как преобразования 1°, 3°, 4° сохраняют ориентацию углов, а инверсия $z_2 = \frac{1}{z_1}$ с последующей симметрией в оси Ox также сохраняет ориентацию углов.

§ 2. Примеры на инверсию

Пример 1. Пусть A' и B' — образы точек A и B при инверсии $[O, k]$. Выразить длину отрезка $A'B'$ через длины отрезков AB, OA, OB и через k. Предполагается, что точки A и B отличны от точки O.

Решение. Предположим, что точки O, A и B не принадлежат одной прямой. Пусть $k > 0$. Тогда точки A' и B' лежат соответственно на лучах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, причем

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = k.$$

---

[1]) $|z_2||z_1| = 1, \quad \arg z_2 \equiv -\arg z_1 \pmod{2\pi}$.

Отсюда следует, что

$$\frac{OA'}{OB}=\frac{OB'}{OA}.$$

Значит, треугольники $\overline{OAB}$ и $\overline{OB'A'}$ подобны (но противоположно ориентированы) (рис. 68). Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA'\cdot OA}{OB\cdot OA}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OA'}}{OA\cdot OB}=\frac{k}{OA\cdot OB}=\frac{|k|}{OA\cdot OB},$$

и, следовательно,

$$A'B'=\frac{|k|\,AB}{OA\cdot OB}.$$

Эта формула верна и в том случае, если точки O, A и B лежат на одной прямой, а также в случае $k<0$.

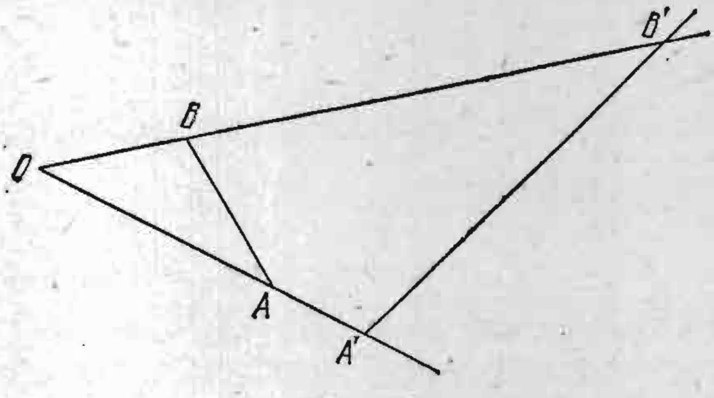


Рис. 68.

Пример 2. Доказать, что вокруг выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведение диагоналей этого четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон (*теорема Птолемея*)

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

I. Предположим, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность K и докажем, что тогда выполняется соотношение $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.

Рассмотрим инверсию $[A,\ 1]$. При этой инверсии окружность K перейдет в прямую K', а точки B, C и D перейдут в точки B', C', D', лежащие на этой прямой. Точка C' будет лежать между точками B' и D', а потому (рис. 69)

$$B'C'+C'D'=B'D',$$

или на основании предыдущего примера

$$\frac{BC}{AB\cdot AC}+\frac{CD}{AC\cdot AD}=\frac{BD}{AB\cdot AD}.$$

Отсюда следует соотношение $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.

II. Предположим, что соотношение $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ выполнено. Докажем, что тогда четырехугольник $ABCD$ выпуклый и вокруг него можно описать окружность.

Рассмотрим инверсию $[A, 1]$. Пусть B', C', D' — образы точек B, C и D при этой инверсии. Из соотношения

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

следует соотношение

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD},$$

а из этого соотношения и результата примера 1 следует, что $B'C' + C'D' = B'D'$. Значит, точки B', C' и D' лежат на одной

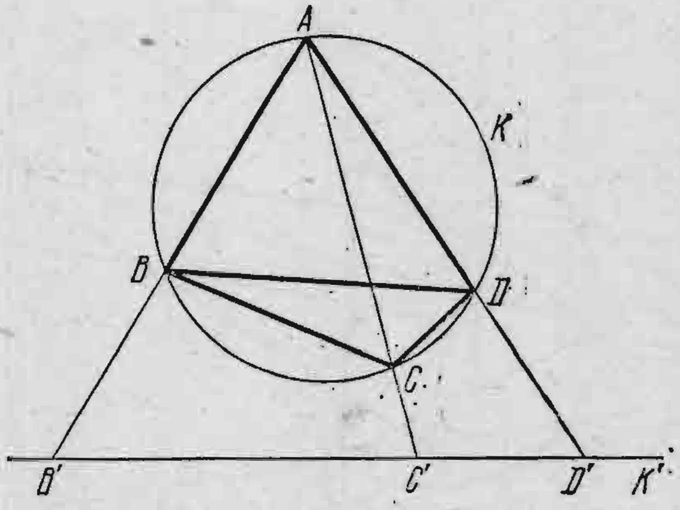


Рис. 69.

прямой K', причем точка C' лежит между точками B' и D'. Отсюда следует, что точки B, C и D лежат на одной окружности (проходящей через точку A), являющейся образом прямой K' при инверсии $[A, 1]$. Так как луч $\overrightarrow{AC}$ лежит внутри угла A, образованного лучами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, то AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, а значит, этот четырехугольник при указанном порядке его вершин — выпуклый.

Пример 3. В окружность K вписан равносторонний треугольник ABC. Пусть O — точка, не лежащая на окружности K. Доказать, что существует треугольник со сторонами OA, OB и OC. Доказать, что если точка O лежит на окружности K, то сумма двух из отрезков OA, OB, OC равна третьему.

Доказательство. Пусть точка O не лежит на окружности K (рис. 70). Рассмотрим инверсию $[O, 1]$. Окружность K перейдет в окружность K', а точки A, B, C перейдут в точки A', B', C', лежащие на окружности K' и, следовательно, не лежащие на одной прямой. На основании примера 1 имеем

$$\left.\begin{aligned} B'C' &= \frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{OA \cdot BC}{OA \cdot OB \cdot OC}, \\ C'A' &= \frac{CA}{OC \cdot OA} = \frac{OB \cdot CA}{OA \cdot OB \cdot OC}, \\ A'B' &= \frac{AB}{OA \cdot OB} = \frac{OC \cdot AB}{OA \cdot OB \cdot OC} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

и, значит,

$$B'C' : C'A' : A'B' = OA : OB : OC,$$

так как $BC = CA = AB$. Таким образом, отрезки OA, OB, OC пропорциональны сторонам $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника $A'B'C'$,

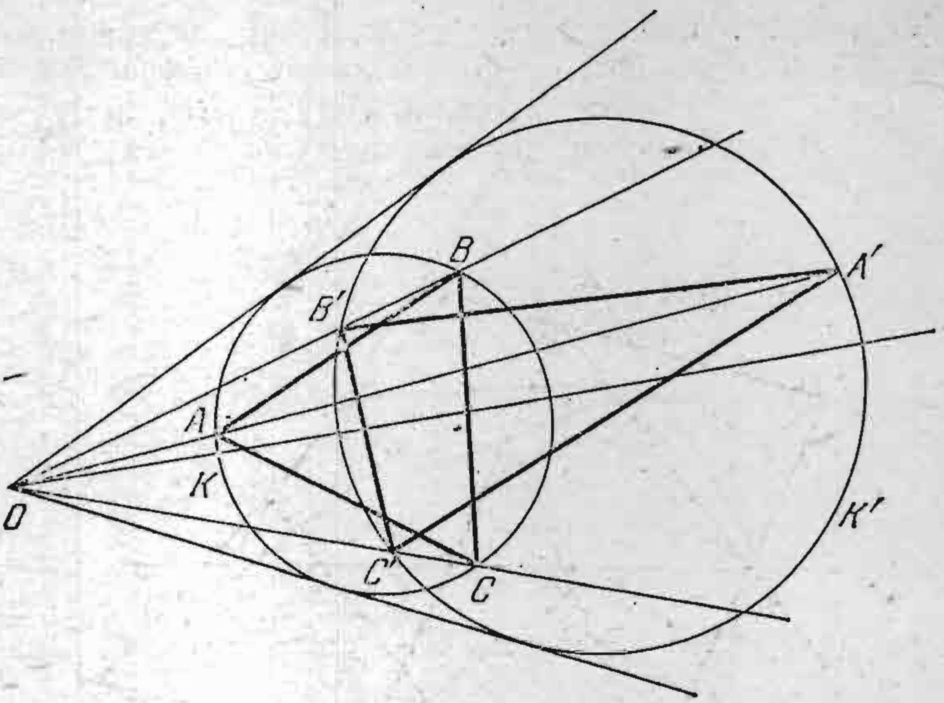


Рис. 70.

и, значит, существует треугольник со сторонами OA, OB, OC (этот треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$).

Пусть точка O лежит на окружности K, например на дуге $\overset{\smile}{AC}$, не содержащей B (рис. 71). При инверсии $[O, 1]$ окружность K перейдет в прямую K', точки A, B, C перейдут в точки A', B', C', лежащие на прямой K', причем точка B' будет лежать между точками A' и C', значит,

$$A'B' + B'C' = A'C',$$

и так как соотношения (1) имеют место и в этом случае, то

$$OB = OA + OC.$$

З а м е ч а н и е. Теорема верна, если точку O выбрать, как угодно в пространстве. Доказательство аналогично.

Пример 4. Две окружности C_1 и C_2 с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом. Прямая l касается обеих

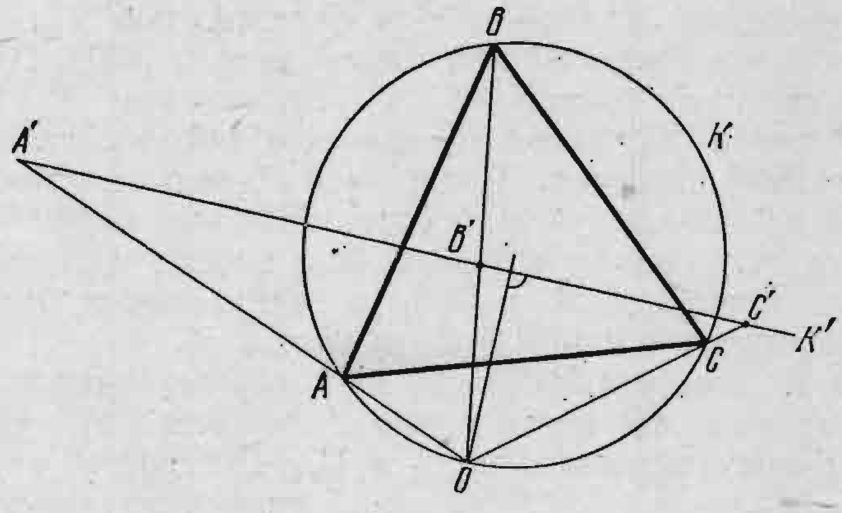


Рис. 71.

этих окружностей соответственно в различных точках A и B. Построить окружность, касающуюся двух данных и прямой l.

Решение. Рассмотрим инверсию $[A, AB^2]$. При этой инверсии окружность C_2 перейдет в себя, так как, если через точку A

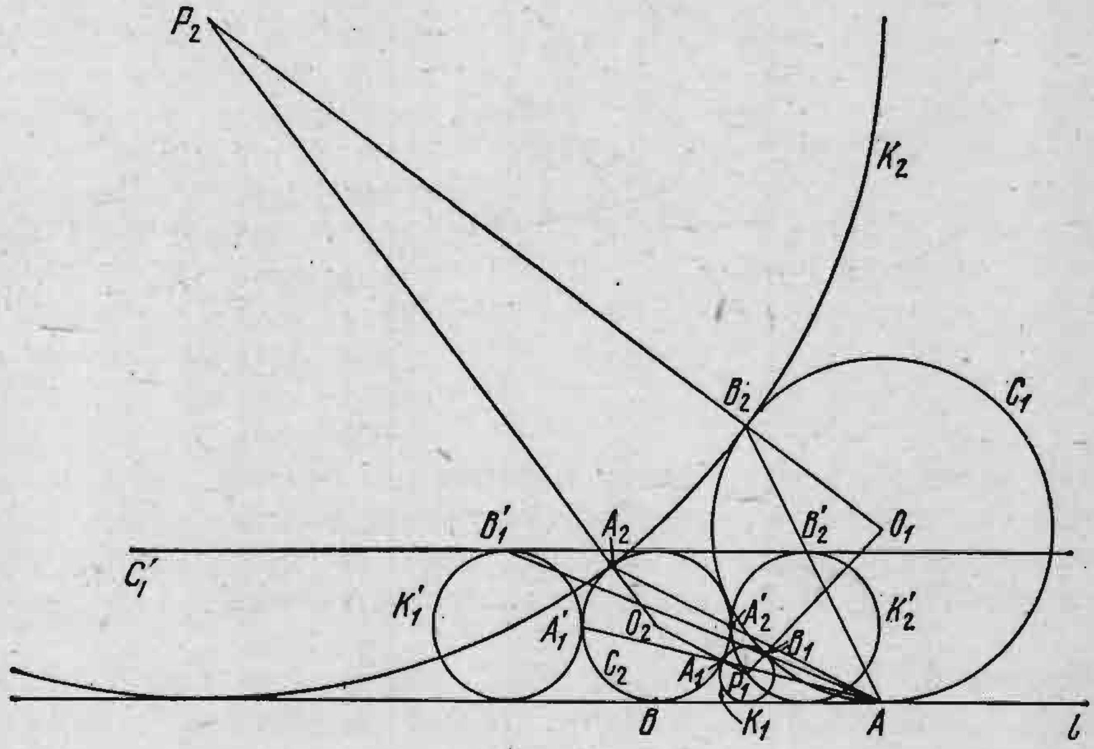


Рис. 72.

провести произвольную прямую, пересекающую окружность C_2 в точках M и M', то $AM \cdot AM' = AB^2$. Окружность C_1 перейдет в прямую C_1', параллельную прямой l и касающуюся окружности C_2 (рис. 72). Таким образом, вопрос сводится к построению окружности, касающейся окружности C_2 и двух параллельных к ней касательных l и C_1'. Таких окружностей две. Пусть K_1' — одна из этих окружностей, A_1' — точка касания окружностей K_1' и C_2, а B_1' — точка касания K_1' к прямой C_1'. Пусть A_1 — вторая точка пересечения прямой AA_1' с окружностью C_2; точка A_1 является образом точки A_1' при инверсии $[A, AB^2]$. Пусть B_1 — точка пересечения прямой AB_1' с окружностью C_1 (точка B_1 отлична от точки A); точка B_1 является образом точки B_1' при рассматриваемой инверсии. Точки A_1 и B_1 являются точками прикосновения искомой окружности соответственно с окружностями C_2 и C_1. Центр P_1 одной из искомых окружностей является точкой пересечения прямых O_2A_1 и O_1B_1, а радиус равен $P_1A_1 = P_1B_1$. Аналогично строится и вторая окружность.

Пример 5. Две окружности C_1 и C_2 пересекаются в точках A и B. На прямой AB взята точка C, отличная от точек A и B и лежащая вне окружностей C_1 и C_2. Построить окружность, проходящую через точку C и касающуюся окружностей C_1 и C_2 (рис. 73).

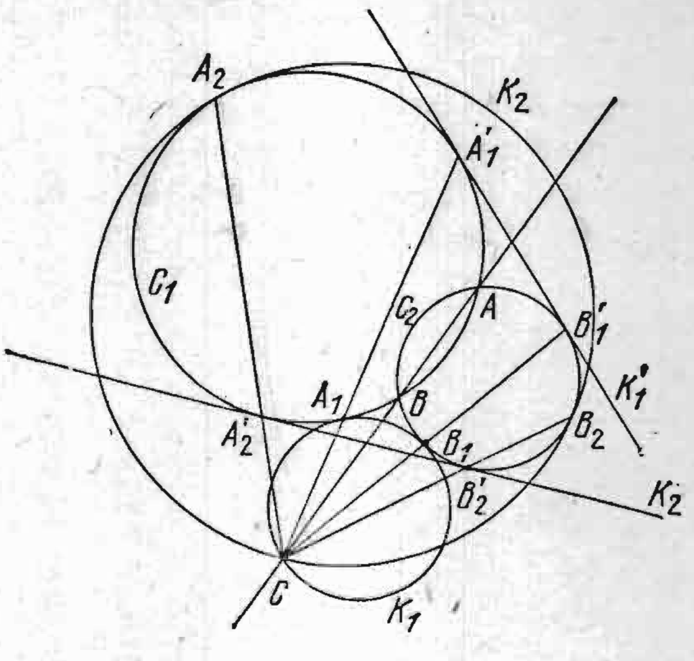


Рис. 73.

Решение. Рассмотрим инверсию $[C, k]$, где $k = CA \cdot CB$. При этой инверсии каждая из окружностей C_1 и C_2 перейдет в себя, а искомая окружность перейдет в прямую, касающуюся окружностей C_1 и C_2. Так как две пересекающиеся окружности C_1 и C_2 имеют две общие касательные K_1' и K_2', то задача имеет два решения. Пусть A_1' и B_1' — точки касания прямой K_1' с окружностями C_1 и C_2. Обозначим через A_1 вторую точку пересечения прямой CA_1' с окружностью C_1, а через B_1 вторую точку пересечения прямой CB_1' с окружностью C_2. Одна из искомых окружностей проходит через точки C, A_1 и B_1. Аналогично строится вторая окружность (рис. 73).

Пример 6. В треугольнике ABC дан радиус r вписанной и радиус R описанной окружности. Найти расстояние d между их центрами.

Решение. Если при инверсии $[O, k]$ окружность C переходит в окружность C', то окружность C переходит в окружность C' и при гомотетии $(O, k/\sigma)$, где σ — степень точки O относительно окружности C.

Рассмотрим инверсию $[P, r^2]$, где P — центр окружности, вписанной в данный треугольник, а r — ее радиус. При этой инверсии точки вписанной окружности неподвижны (так как вписанная окружность является окружностью инверсии). Вершины данного треугольника при инверсии $[P,\ r^2]$ перейдут в середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$, вершинами которого служат точки прикосновения к сторонам треугольника ABC окружности, вписанной в этот треугольник ABC (рис. 74). Радиус окружности, проходящей через середины сторон указанного треугольника, равен $r/2$. Таким образом окружность (ABC), описанная вокруг треугольника ABC, радиус которой равен R, перейдет при инверсии $[P,\ r^2]$ в окружность радиуса $r/2$. Так как степень рассматриваемой инверсии $k=r^2$, а степень точки P относительно окружности (ABC) равна $\sigma=d^2-R^2$, то

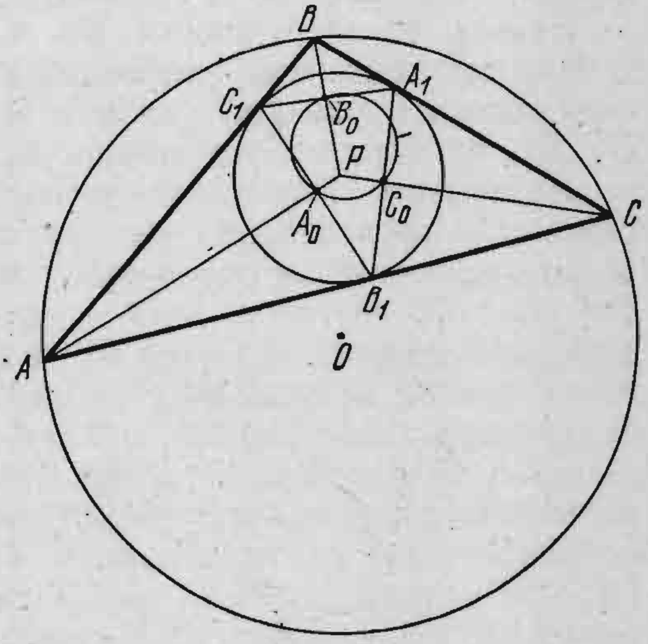


Рис. 74.

$$\frac{r/2}{R}=\frac{r^2}{|d^2-R^2|}=\frac{r^2}{R^2-d^2},$$

откуда

$$d^2=R^2-2Rr.$$

Пример 7. N и S — две диаметрально противоположные точки окружности C; l — прямая, касающаяся окружности C в точке S. Из произвольной точки O, лежащей вне окружности C,

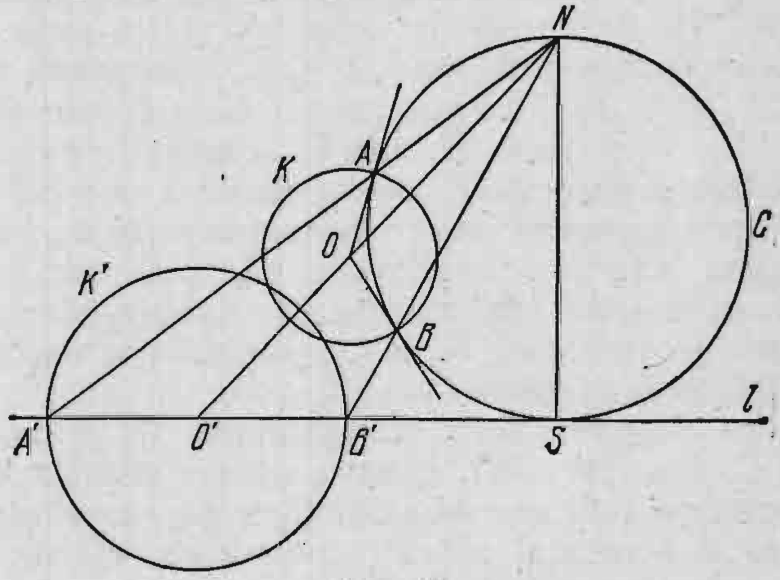


Рис. 75.

но не лежащей на касательной к окружности C в точке N, к окружности C проведены касательные OA и OB (A и B — точки касания). Пусть O', A' и B' — проекции из точки N на прямую l точек O, A и B. Доказать, что O' — середина отрезка $A'B'$ (рис. 75).

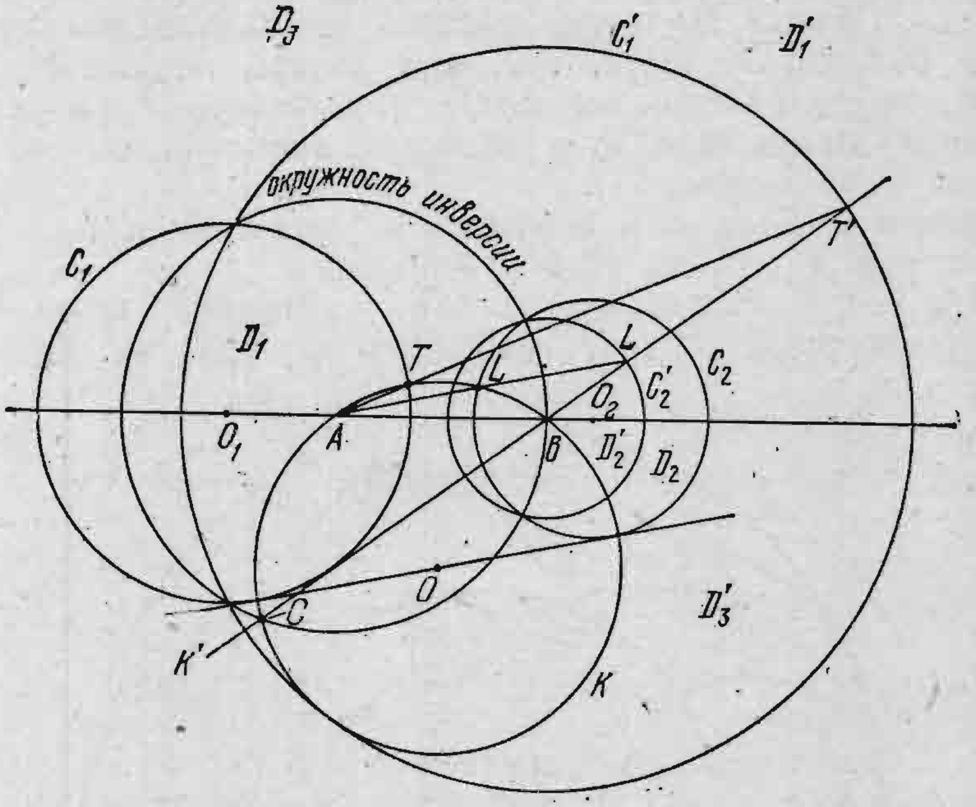
Доказательство. При инверсии $[N, NS^2]$ окружность C перейдет в прямую l, а окружность K с центром O и радиусом $OA=OB$, которая ортогональна окружности C, перейдет в окружность K', ортогональную прямой l; значит, центр окружности K' лежит на прямой l; с другой стороны, центр окружности K' лежит и на прямой NO, а потому центром окружности K' является проекция O' точки O из точки N на прямую l. Значит, $A'B'$ — диаметр окружности K', а O' — центр K', поэтому $A'O'=O'B'$.

Пример 8. Окружности C_1 и C_2 не имеют общих точек. С помощью инверсии преобразовать их в две концентрические окружности и указать, как при этом преобразуются области D_1, D_2, D_3, на которые окружности C_1, C_2 делят плоскость (рис. 76).

Решение. Построим какую-нибудь окружность K, которая пересекает ортогонально обе окружности C_1 и C_2. Для этого проведем какую-нибудь окружность M, пересекающую обе окружности C_1 и C_2 соответственно в точках P, Q и R, S. Пусть O — точка пересечения прямых PQ и RS (рис. 77). Тогда отрезки m касательных, проведенных из точки O к окружностям C_1 и C_2, будут равны между собой, и, следовательно, окружность K с центром O и радиусом m пересечет обе окружности C_1 и C_2 ортогонально. Обозначим через A и B точки пересечения окружности K с линией центров окружностей C_1 и C_2. Тогда при инверсии $[A, AB^2]$ окружности C_1 и C_2 перейдут в две концентрические окружности с центром B. В самом деле, окружность K перейдет в прямую K', проходящую через точку B, и так как окружность K ортогональна окружностям C_1 и C_2, то прямая K' будет ортогональна окружностям C_1' и C_2', в которые перейдут окружности C_1 и C_2, т. е. центры окружностей C_1' и C_2' должны лежать на прямой K'. Но они должны лежать и на прямой AB, следовательно, центры окружностей C_1' и C_2' совпадают с точкой B.

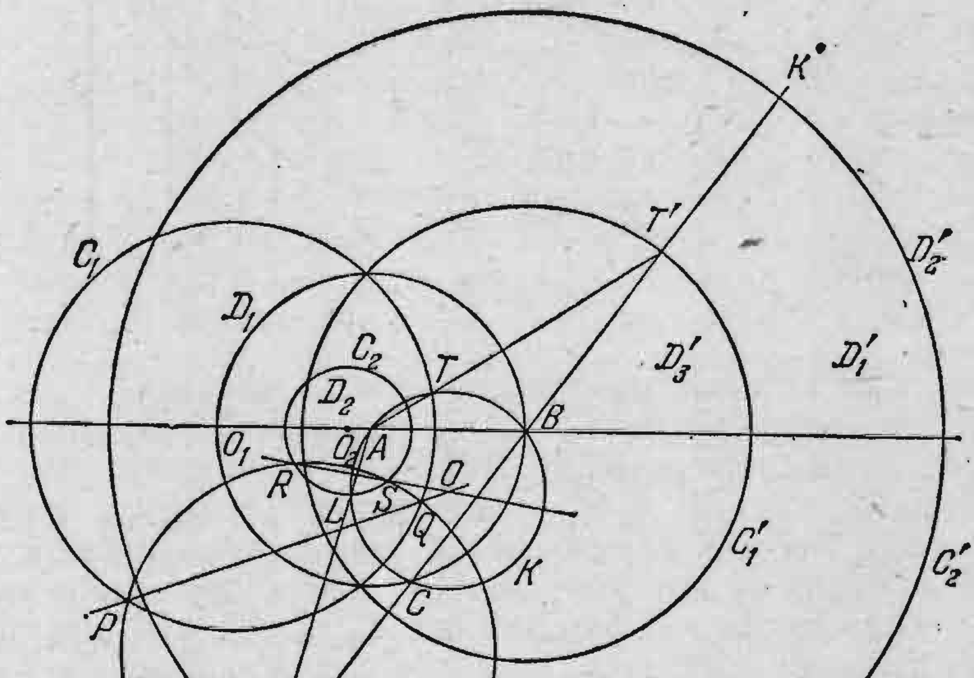
Далее (см. рис. 76), так как центр A инверсии лежит внутри окружности C_1, то область D_1 точек, лежащих внутри окружности C_1, перейдет в область D_1' точек, лежащих вне окружности C_1'. Так как центр A инверсии лежит вне окружности C_2, то область D_2 точек, лежащих внутри окружности C_2, перейдет в область D_2' точек, лежащих внутри окружности C_2'. Значит, область D_3 точек, лежащих вне окружностей C_1 и C_2, перейдет в плоское кольцо, ограниченное окружностями C_1' и C_2'.

Рассмотрим случай, когда окружность C_2 вложена внутрь окружности C_1 (см. рис. 77). В этом случае окружность K, пересекающая ортогонально окружности C_1 и C_2, перейдет в прямую $K'=BC$, где C — вторая точка пересечения окружностей K и окружности инверсии. Если T и L — точки пересечения окружности K с окружностями C_1 и C_2 и если прямые TA и LA пересекают K' в точках T' и L', то образами окружностей C_1 и C_2 будут концентрические окружности C_1', C_2' с центром B и радиусами BT' и BL'. Далее, так как точка A лежит внутри окружности C_2, то область D_2 точек, лежащих внутри окружности C_2, перейдет



D3
C1'
D1'
окружность инверсии
T'
C1
D1
T
L
L
C2'
C2
O2
O1
A
B
D2'
D2
O
D3'
C
K'
K

Рис. 76.



K
T'
C1
D2'
D1
C2
T
D3'
D1'
D2
B
O1
O2
A
R
O
L
S
Q
C1'
K
C2'
P
C
M
L'

Рис. 77.

при инверсии $[A, AB^2]$ в область D_2' точек, лежащих вне окружности C_2'. Область D_3 точек, лежащих вне окружности C_1, перейдет в область D_3' точек, лежащих внутри окружности C_1', и, значит, эксцентрическое кольцо D_1, ограниченное окружностями C_1 и C_2, перейдет в кольцо D_1', ограниченное концентрическими окружностями C_1' и C_2' (рис. 77).

Пример 9. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей C_1, C_2, C_3 (*задача Аполлония*).

Решение. Рассмотрим только тот случай, когда каждая из окружностей C_1; C_2, C_3 лежит вне двух других. Произведем

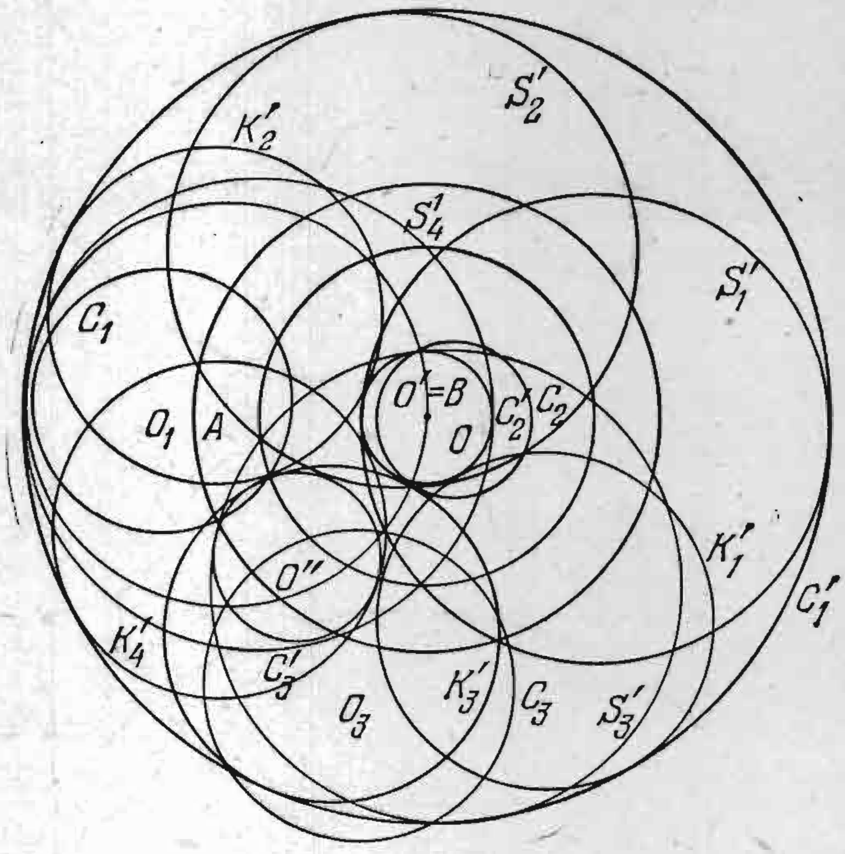


Рис. 78.

инверсию, при которой окружности C_1 и C_2 перейдут в две концентрические окружности C_1' и C_2' (пример 8). Предположим, что полюс A этой инверсии $[A, AB^2]$ лежит внутри окружности C_1; тогда $R_1' > R_2'$, где R_1' и R_2' — соответственно радиусы окружностей C_1' и C_2'. Так как окружность C_3 лежит вне окружностей C_1 и C_2, то ее образ C_3' при инверсии $[A, AB^2]$ будет лежать внутри кольца, образованного окружностями C_1' и C_2', так как точки, лежащие вне окружности C_1, перейдут в точки, лежащие внутри окружности C_1', а точки, лежащие вне окружности C_2, перейдут в точки, лежащие вне окружности C_2' (рис. 78).

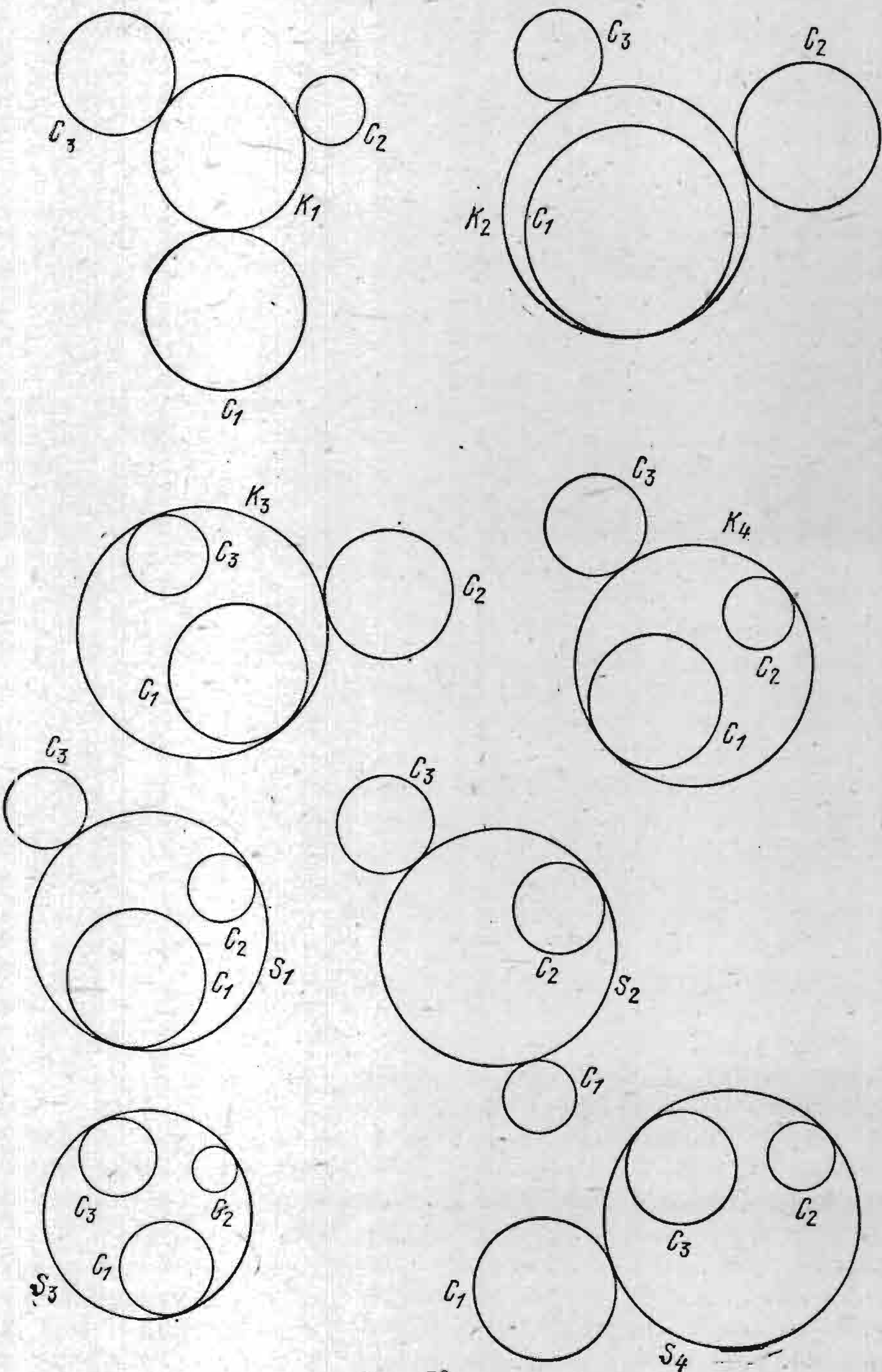
Все окружности, касающиеся концентрических окружностей C_1' и C_2', разобьем на два множества: окружности радиуса $(R_1' - R_2')/2$, каждая из которых касается окружности C_2' внешним образом, а окружности C'_1 внутренним образом, и окружности радиуса $(R'_1+R'_2)/2$, каждая из которых касается окружностей C'_1 и C'_2 внутренним образом. Среди окружностей первого множества существуют только четыре окружности K'_1, K'_2, K'_3, K'_4, первые две из которых касаются окружности C'_3 внешне, а K'_3 и K'_4 внутренне. Для построения окружностей K'_1 и K'_2 достаточно построить их центры: это точки пересечения окружностей $(O', (R'_1-R'_2)/2)$ и $(O'', R'_3+(R'_1-R'_2)/2)$, где O' и O'' — соответственно центры окружностей C'_1 (или C'_2) и C'_3. Центры окружностей K'_3 и K'_4 — это точки пересечения окружностей $(O', (R'_1-R'_2)/2)$ и $(O'', (R'_1-R'_2)/2-R'_3)$.

Аналогично среди окружностей второго множества, касающихся окружностей C'_1 и C'_2 внутренним образом, существует только четыре окружности S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, касающиеся окружности C'_3 внешне (S'_1 и S'_2) и внутренне (S'_3 и S'_4). Центры окружностей S'_1 и S'_2 — это точки пересечения окружностей $(O', (R'_1+R'_2)/2)$ и $(O'', (R'_1+R'_2)/2+R'_3)$, а центры окружностей S'_3 и S'_4 — это точки пересечения окружностей $(O', (R'_1+R'_2)/2)$ и $(O'', (R'_1+R'_2)/2-R'_3)$. Все эти восемь окружностей K'_1, K'_2, K'_3, K'_4, S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 построены на рис. 78. Их образы K_1, K_2, K_3, K_4, S_1, S_2, S_3, S_4 при инверсии $[A, AB^2]$ будут касаться трех данных окружностей C_1, C_2, C_3. Таким образом, в рассмотренном случае задача имеет восемь решений.

На рис. 79 даны положения окружностей K_i и S_i относительно окружностей C_1, C_2, C_3 на отдельных восьми рисунках.

Пример 10. Доказать, что окружность Эйлера для треугольника ABC касается окружности (I), вписанной в этот треугольник, и касается трех окружностей (I_a), (I_b), (I_c), вневписанных в этот треугольник (точки касания Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 называются *точками Фейербаха*).

Решение. Пусть (I) и (I_a) — соответственно окружности, вписанная в данный треугольник и вневписанная в угол A. Обозначим через R и S точки касания окружностей (I) и (I_a) со стороной BC (рис. 80). Тогда $BS=CR$ $(=p-c$, где p — полупериметр треугольника $ABC)$. Пусть A', B', C' — соответственно середины сторон BC, CA, AB. Обозначим через A'' ортогональную проекцию точки A на сторону BC, а через Q точку пересечения стороны BC с биссектрисой II_a угла BAC. Четверка точек A, Q, I, I_a гармоническая, значит гармонической будет и четверка точек A'', Q, R, S, которые являются ортогональными проекциями точек A, Q, I, I_a на прямую BC. Точка A' является серединой отрезка RS (так как A' — середина BC и $BS=CR$), значит, $A'Q\times$ $\times A'A''=A'R^2$. Рассмотрим инверсию $[A', A'R^2]$. При этой инверсии окружности (I) и (I_a) инвариантны (так как окружность инверсии — окружность с диаметром RS обеим им ортогональна). Из соотношения $A'Q\cdot A'A''=A'R^2$ следует, что при этой инверсии точка A'' переходит в точку Q. С другой стороны, точка A'' (основание высоты из A на BC) лежит на окружности Эйлера, точка



C_3 C_2 K_1 C_1
C_3 C_2 K_2 C_1
K_3 C_3 C_2 C_1
C_3 K_4 C_2 C_1
C_3 C_2 C_1 S_1
C_3 C_2 S_2 C_1
C_3 C_2 C_1 S_3
C_3 C_2 C_1 S_4

Рис. 79.

A' (середина стороны BC) также лежит на окружности Эйлера, значит, при инверсии $[A', A'R^2]$ окружность Эйлера перейдет в прямую, проходящую через точку Q, антипараллельную прямой $B'C'$ относительно угла $C'A'B'$ [1]) или же в прямую, антипараллельную BC относительно угла CAB (так как $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, $AB \parallel A'B'$). Но прямая, проходящая через точку Q и антипараллельная прямой BC (относительно угла BAC), есть прямая, симметричная прямой BC относительно биссектрисы угла BAC, т. е.

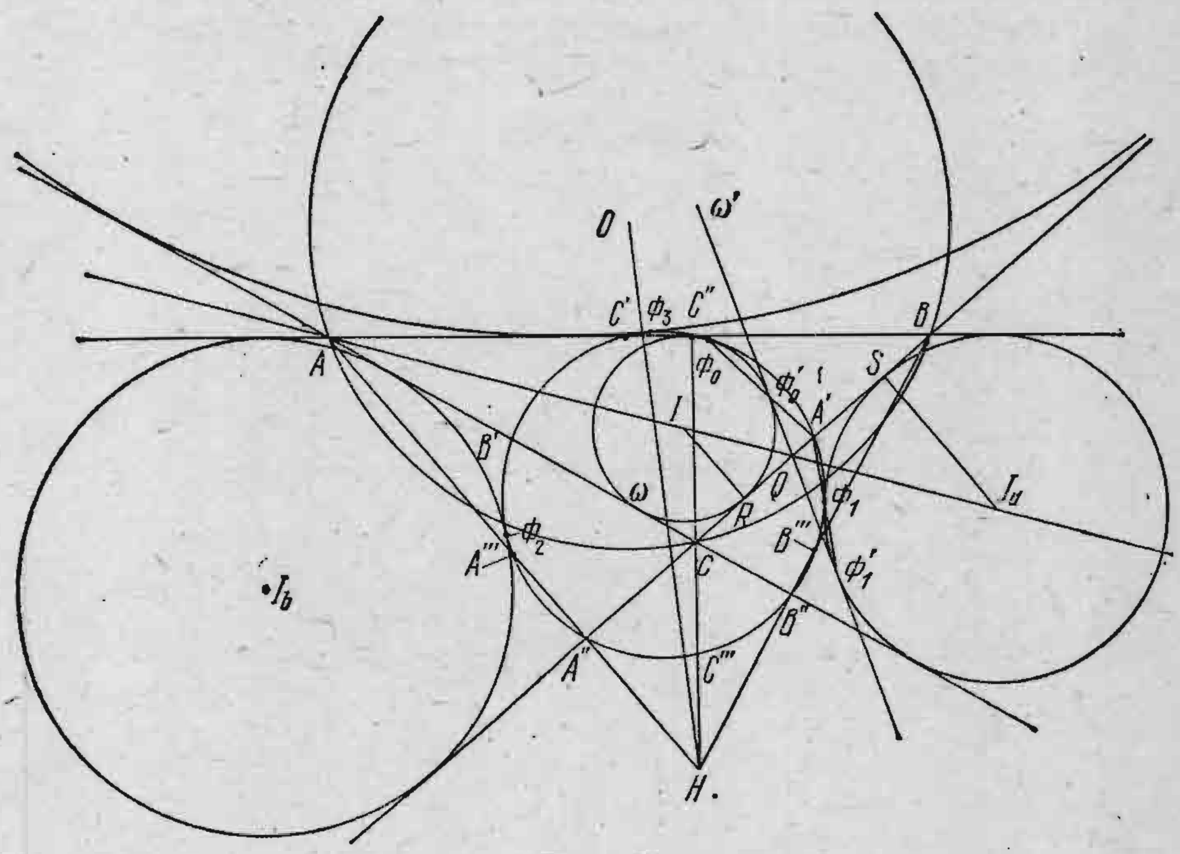


Рис. 80.

вторая общая касательная ω' (внутренняя) к окружности (I) и (I_a). Пусть Φ_0' и Φ_1' точки касания ω' с (I) и (I_a). При инверсии $[A', A'R^2]$ прямая ω' преобразуется в окружность (ω) Эйлера, а точки Φ_0' и Φ_1' — в точки Φ_0 и Φ_1, лежащие на окружностях (I) и (I_a). В этих точках Φ_0 и Φ_1 окружность Эйлера касается вписанной (I) и вневписанной окружности (I_a), так как прямая ω' касается (I) и (I_a) в точках Φ_0' и Φ_1'; Φ_0 и Φ_1 — это точки пересечения прямых $A'\Phi_0'$ и $A'\Phi_1'$ с окружностью Эйлера или вторые точки пересечения этих прямых $A'\Phi_0'$ и $A'\Phi_1'$ с окружностями (I) и (I_a). На рис. 80 построено тринадцать точек A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''', Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 (все они лежат на окружности Эйлера).

---

[1]) Прямые, симметричные относительно биссектрисы угла CAB, называются *антипараллельными* относительно этого угла.

§ 3. Отображение областей при инверсии

Пример 1. Пусть окружность C лежит вне окружности K инверсии $[O, r^2]$, где r — радиус окружности K. Пусть C' — образ окружности C при инверсии $[O, r^2]$. Тогда множество D_1 всех точек, лежащих внутри окружности C, отображается взаимно однозначно на область D_1' всех точек, лежащих внутри окружности C'; множество D_2 всех точек, лежащих вне окружностей C и K, отображается взаимно однозначно на множество D_2' всех точек, лежащих внутри окружности K, но вне окружности C'. Связная область $D_2 \cup D_2'$ инвариантна при инверсии $[O, r^2]$ (рис. 81).

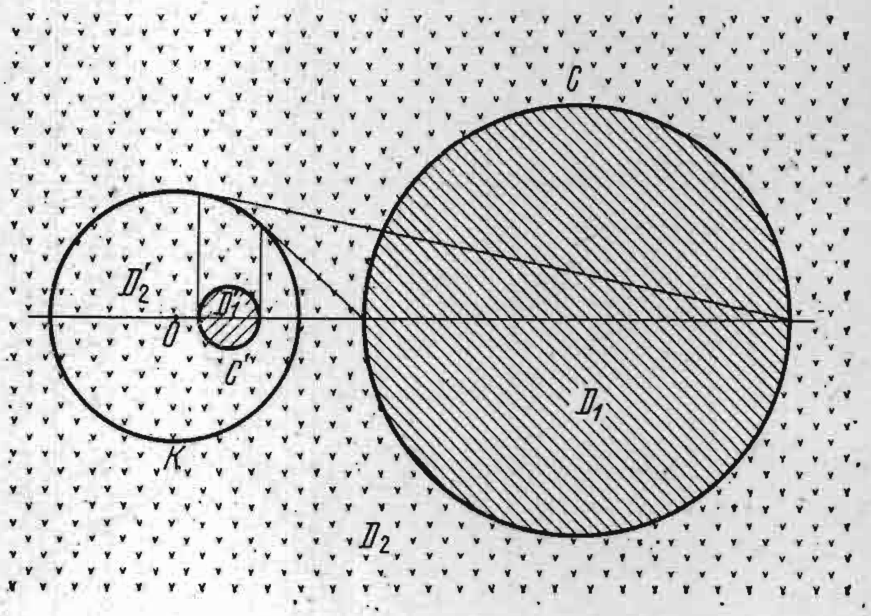


Рис. 81.

Пример 2. Окружность C касается окружности K инверсии $[O, r^2]$ внешним образом. Пусть C' — образ окружности C при этой инверсии. Соответствие областей при инверсии $[O, r^2]$ аналогично рассмотренному в примере 1 (рис. 82).

Пример 3. Окружность C пересекает окружность K инверсии $[O, r^2]$, но полюс O инверсии лежит вне окружности C. Соответствие областей при инверсии указано на рис. 83. Области $D_2 \cup D_2'$, $D_3 \cup D_3'$, $D_4 \cup D_4'$, $D_6 \cup D_6'$ односвязны и инвариантны при инверсии $[O, r^2]$. Они делятся окружностью инверсии K на области D_2, D_2'; D_3, D_3'; D_4, D_4'; D_6, D_6' переходящие друг в друга при рассматриваемой инверсии (рис. 83).

Пример 4. Окружность C проходит через центр инверсии $[O, r^2]$ и пересекает окружность K инверсии. Образом C' окружности C при инверсии $[O, r^2]$ будет прямая, проходящая через точки пересечения окружностей C и K. Соответствие областей при инверсии указано на рис. 84. Области $D_1 \cup D_1'$ и $D_5 \cup D_5'$ односвязны и инвариантны при инверсии $[O, r^2]$. Окружностью K

инверсии они делятся на области D_1 и D_1', D_5 и D_5', которые переходят друг в друга при рассматриваемой инверсии (рис. 84).

Пример 5. Окружность K инверсии лежит внутри окружности C. Образом связной области D_1, состоящей из точек, лежащих вне окружности C, будет односвязная область D_1', состоящая из точек, лежащих внутри окружности C', где C' — образ C при инверсии относительно окружности K. Образом области D_2, состоящей из точек, лежащих вне окружности K, но внутри окружности C, будет область D_2', состоящая из точек, лежащих внутри окружности K, но вне окружности C'. Связная область $D_2 \cup D_2'$ инвариантна при рассматриваемой инверсии (рис. 85).

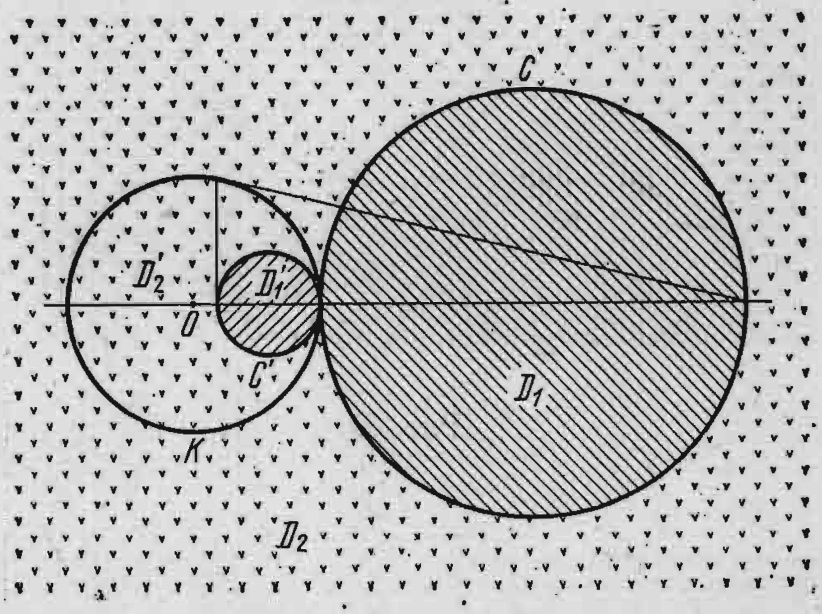


Рис. 82.

Пример 6. Окружность C пересекает ортогонально окружность K инверсии. В этом случае образ C' окружности C (при инверсии относительно окружности K) совпадает с ней самой: $C = C'$. Область D_1, состоящая из всех точек, лежащих внутри окружности C, но вне окружности K, переходит в область D_1', состоящую из всех точек, лежащих внутри окружности C и внутри окружности K. Область $D_1 \cup D_1'$, состоящая из всех точек, лежащих внутри окружности C, инвариантна при рассматриваемой инверсии. Пусть P и Q — точки, в которых пересекаются окружности C и K. Проведем лучи $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$. Область D_2', ограниченная дугой $\smile{PQ}$ окружности C и радиусами OP и OQ окружности K переходит в область D_2, ограниченную также дугой $\smile{PQ}$ окружности K (дополнительной к первой дуге этой окружности) и продолжениями радиусов OP и OQ за точки P и Q. Наконец, область D_3, состоящая из точек, лежащих вне окружности K и вне угла POQ переходит в область D_3', состоящую из всех точек, лежащих внутри окружности K, но вне угла POQ. Область $D_3 \cup D_3'$

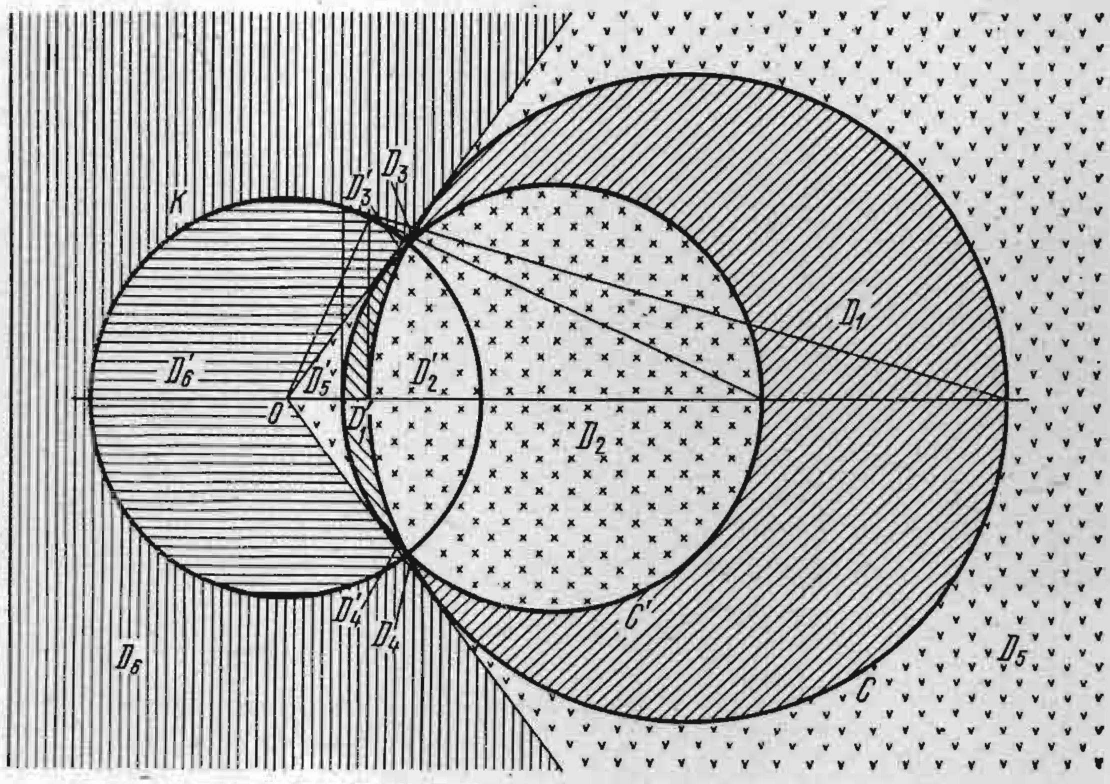

K
D_3
D_3'
D_1
D_6'
D_5'
D_2'
O
D_1'
D_2
D_4'
D_4
C'
D_6
D_5
C

Рис. 83.

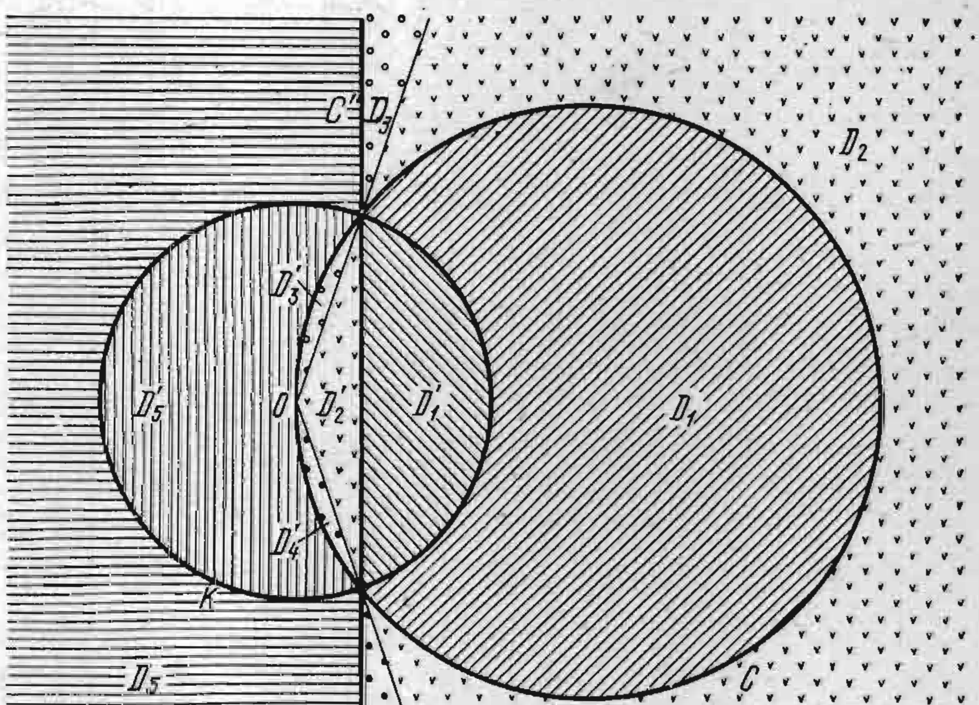

C''
D_3
D_2
D_3'
D_5'
O
D_2'
D_1'
D_1
D_4'
K
D_5
C
D_4

Рис. 84.

односвязна и инвариантна при инверсии относительно окружности K (рис. 86).

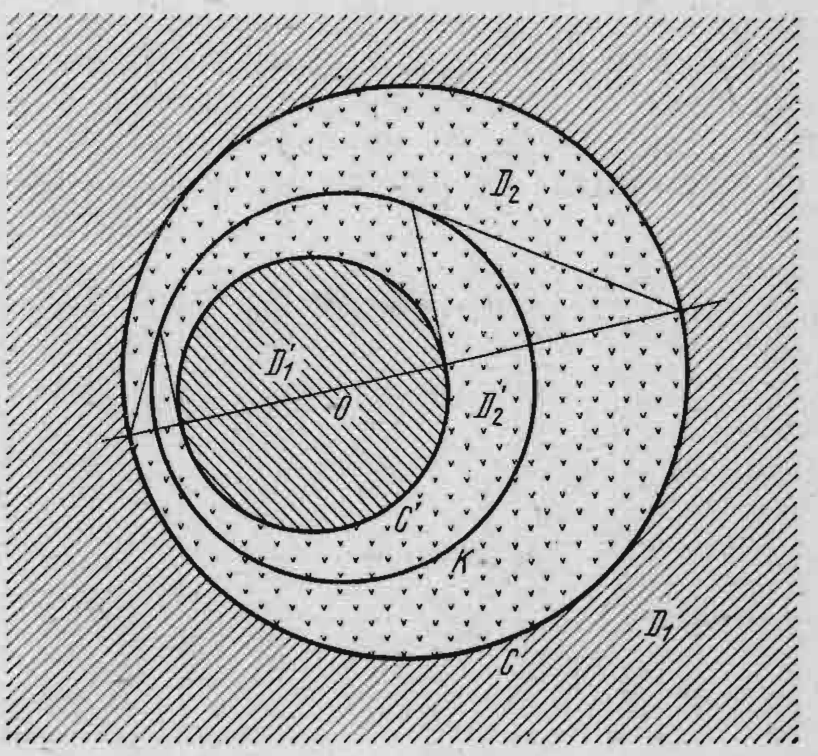


Рис. 85.

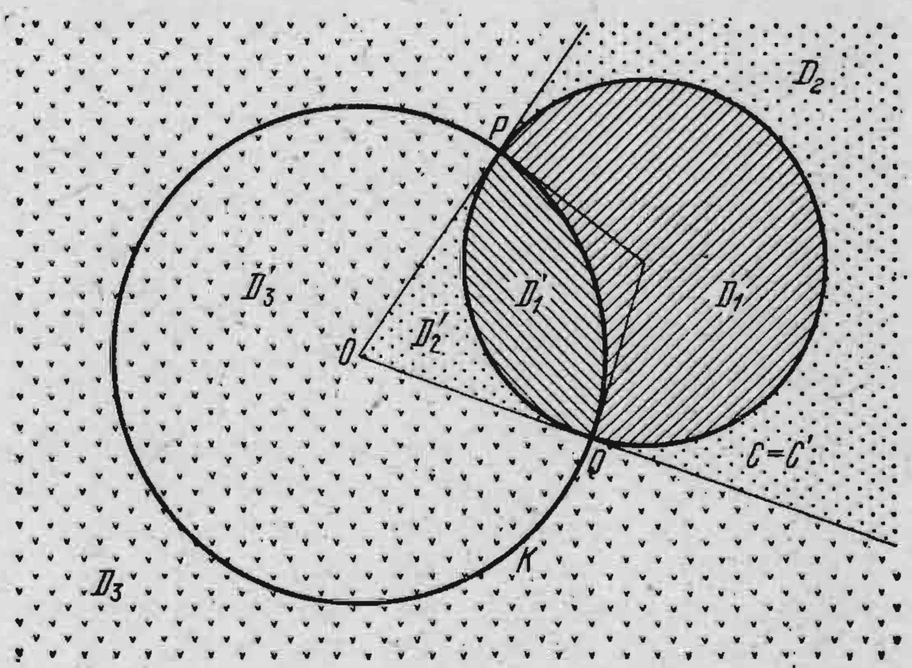


Рис. 86.

Пример 7. Окружность C проходит через центр O окружности K инверсии и лежит внутри окружности K. Образ C' окружности C есть прямая, не пересекающая окружность K.

Область D_1, состоящая из всех точек той полуплоскости от прямой C', которая не содержит окружности K, переходит во множество D_1' всех точек, лежащих внутри окружности C. Область D_2, состоящая из всех точек, лежащих вне окружности K и расположенных в той полуплоскости от прямой C', в которой расположена окружность K переходит во множество D_2' всех точек, лежащих внутри окружности K, но вне окружности C. Связная область $D_2 \cup D_2'$ инвариантна при рассматриваемой инверсии (рис. 87).

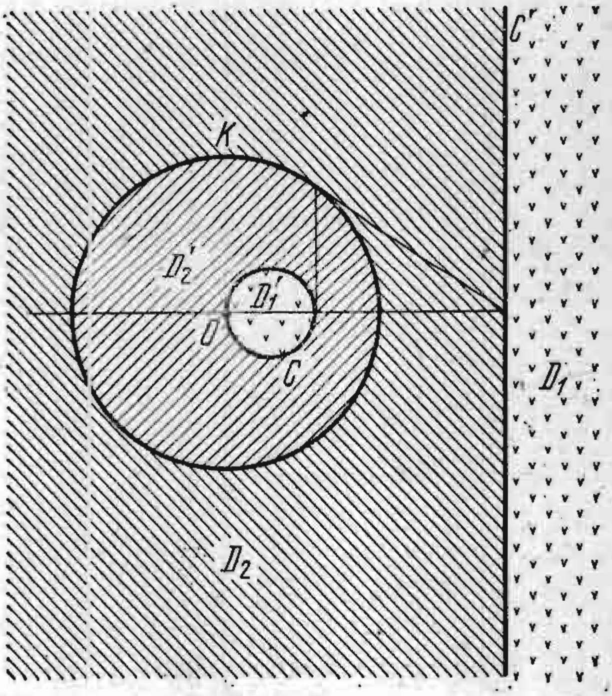


Рис. 87.

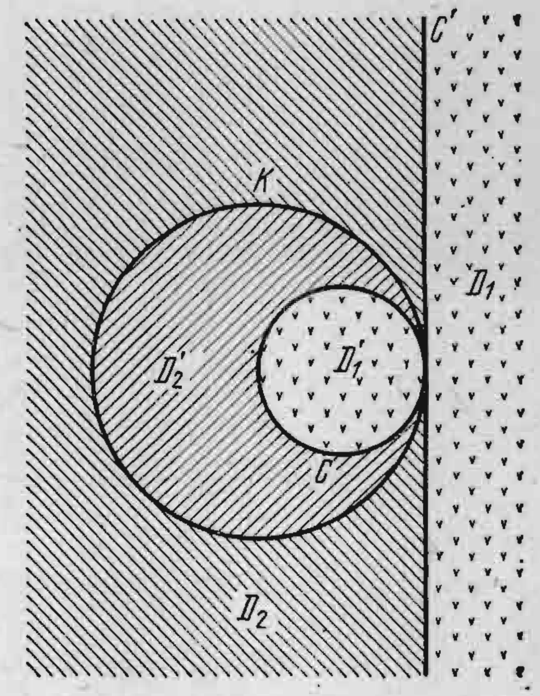


Рис. 88.

Пример 8. Окружность C проходит через центр O окружности K инверсии и касается этой окружности. Образом C' окружности C при инверсии относительно окружности K будет общая касательная к окружностям C и K. Соответствие областей D_1 и D_1', D_2 и D_2' аналогично предыдущему примеру. Область $D_2 \cup D_2'$ односвязна и инвариантна при инверсии относительно окружности K (рис. 88).

Пример 9. Окружность C пересекает окружность K инверсии и полюс O инверсии, т. е. центр окружности K, лежит внутри окружности C. Соответствие областей D_1 и D_1', D_2 и D_2', D_3 и D_3', D_4 и D_4' указано на рис. 89. Области $D_1 \cup D_1'$ и $D_4 \cup D_4'$ односвязны и инвариантны при инверсии относительно окружности K.

Пример 10. Даны три равные окружности C_1, C_2, C_3, проходящие через одну точку O и пересекающиеся под углами $\pi/3$. Примем точку O за полюс инверсии, и окружность K инверсии выберем так, чтобы она пересекала данные окружности C_1, C_2, C_3 и чтобы точки пересечения данных окружностей C_1, C_2, C_3 лежали внутри окружности K. Образы C_1', C_2', C_3' данных окружностей C_1, C_2, C_3 будут прямыми, проходящими через точки пере-

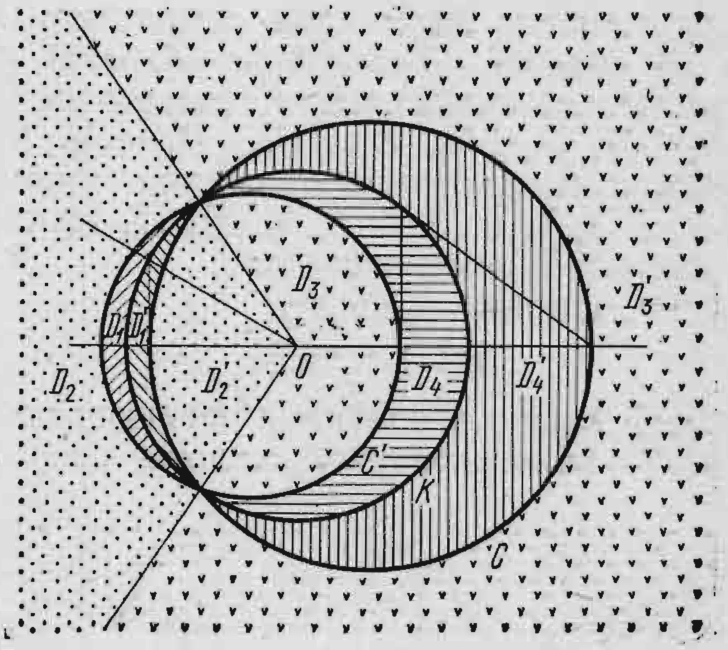

D_3
D_3'
D_1
D_1'
O
D_2'
D_2
D_4
D_4'
C'
K
C

Рис. 89.

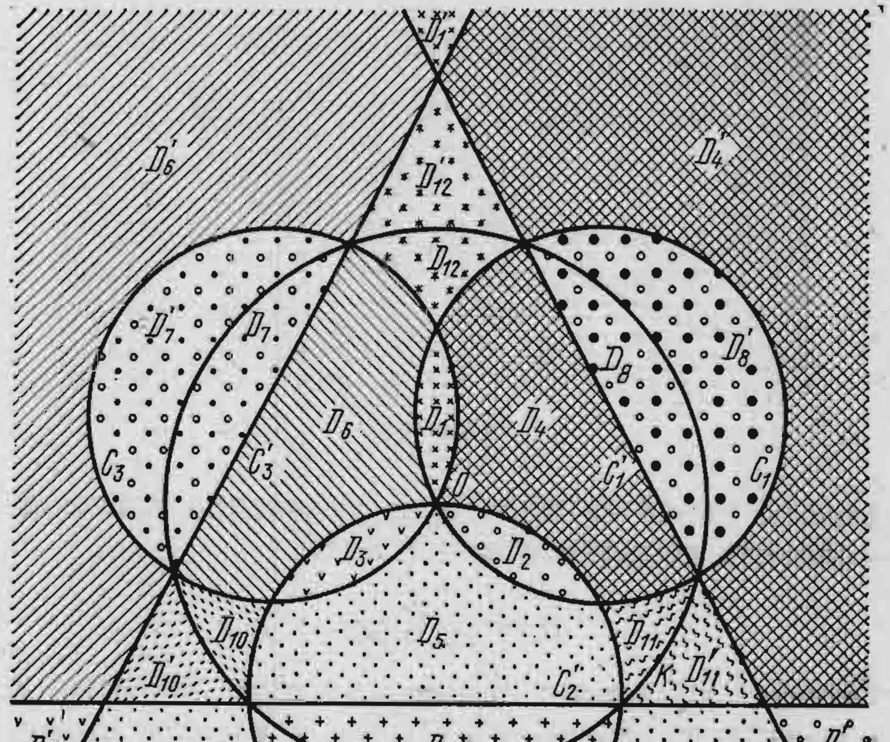

D_1'
D_6'
D_{12}'
D_4'
D_{12}
D_7'
D_7
D_8
D_8'
D_6
D_1
D_4
C_3
C_3'
C_1'
C_1
O
D_3
D_2
D_{10}
D_5
D_{11}
D_{10}'
C_2'
K
D_{11}'
D_3'
D_2'
D_9
D_9'
C_2
D_5'

Рис. 90.

сечения окружности K с каждой из окружностей C_1, C_2, C_3. Данные окружности C_1, C_2, C_3 их образы C'_1, C'_2, C'_3 (при инверсии относительно окружности K) и сама окружность K разбивают плоскость на 24 области. Соответствие областей при инверсии плоскости относительно окружности K указано на рис. 90. Области $D_7 \cup D'_7$, $D_8 \cup D'_8$, $D_9 \cup D'_9$, $D_{10} \cup D'_{10}$, $D_{11} \cup D'_{11}$, $D_{12} \cup D'_{12}$ односвязны и инвариантны при рассматриваемой инверсии. Области D_k и D'_k ($k=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) переходят друг в друга при рассматриваемой инверсии.

Пример 11. Рассмотрим кардиоиду

$$\rho = 1 + \cos\varphi,$$

уравнение которой задано в полярных координатах. При инверсии $[O, 1]$, где O — полюс полярной системы координат, образом

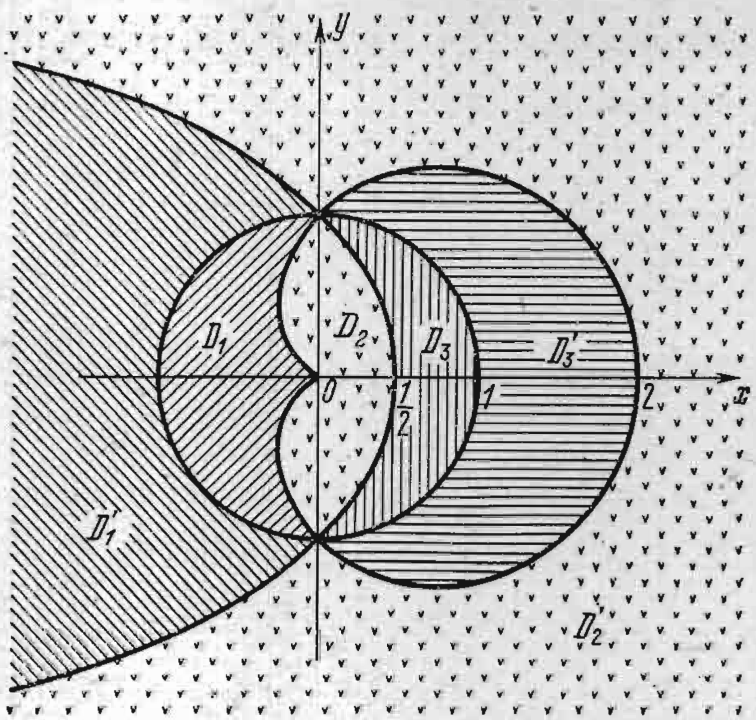


Рис. 91.

этой кардиоиды является парабола, уравнение которой в той же полярной системе координат имеет вид:

$$\rho = \frac{1}{1+\cos\varphi}.$$

Если ввести декартову прямоугольную систему координат, принимая полярную ось за ось Ox, то последнее уравнение примет вид

$$y^2 = 1 - 2x.$$

Исходя из этого уравнения построена парабола на рис. 91. Кардиоида $\rho = 1 + \cos\varphi$, парабола $y^2 = 1 - 2x$ и окружность K инверсии делят плоскости на шесть областей. Соответствие этих областей при инверсии относительно окружности K указано на рис. 91.

Области $D_1 \cup D_1'$ и $D_3 \cup D_3'$ односвязны и инвариантны при инверсии относительно окружности K ($D_1 \rightleftarrows D_1'$, $D_3 \rightleftarrows D_3'$). Область D_2, ограниченная частью кардиоиды и дугой параболы, переходит в область D_2', образованную точками, лежащими и вне кардиоиды и вне параболы. Обратно, при рассматриваемой инверсии область D_2' переходит в область D_2.

Пример 12. Рассмотрим улитку Паскаля, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = m + n\cos\varphi.$$

Будем считать, что $0 < n < m$. Тогда при всех значениях φ будем иметь $\rho > 0$, и, значит, рассматриваемая улитка Паскаля есть замкнутая линия без самопересечений, внутри которой лежит полюс O полярной системы координат. При инверсии $[O, 1]$, где O — полюс полярной системы координат, улитка Паскаля перейдет в линию, уравнение которой в той же полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{1}{m + n\cos\varphi},$$

или

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где $p = 1/m$, $e = n/m$. Так как из условий $0 < n < m$ следует, что $0 < e < 1$, то последнее уравнение является уравнением эллипса, для которого точка O — один из фокусов, p — параметр, а e — эксцентриситет.

Возьмем, например $m = 3/2$, $n = 1$. Тогда уравнение улитки Паскаля будет

$$\rho = \frac{3}{2} + \cos\varphi,$$

а уравнение эллипса, являющегося образом этой улитки при инверсии $[O, 1]$:

$$\rho = \frac{1}{\frac{3}{2} + \cos\varphi}.$$

Если ввести декартову прямоугольную систему координат, принимая полярную ось за ось Ox, то последнее уравнение преобразуется так:

$$\frac{\left(x + \frac{4}{5}\right)^2}{\frac{36}{25}} + \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$$

— это эллипс, центр которого находится в точке $(-4/5, 0)$, а полуоси равны $a = 6/5$, $b = 2/\sqrt{5}$. На рис. 92 построена рассматриваемая улитка Паскаля и этот эллипс, который пересекается с улиткой Паскаля $\rho = 1{,}5 + \cos\varphi$ при значениях φ, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{3}{2} + \cos\varphi = \frac{1}{\frac{3}{2} + \cos\varphi},$$

откуда $\cos\varphi = -1/2$, и значит, считая, что $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, будем иметь $\varphi = 2\pi/3$, $\varphi = 4\pi/3$ (две точки пересечения). При этих значениях φ величина $\rho = 1$, следовательно, окружность K инверсии проходит через точки пересечения улитки Паскаля и эллипса.

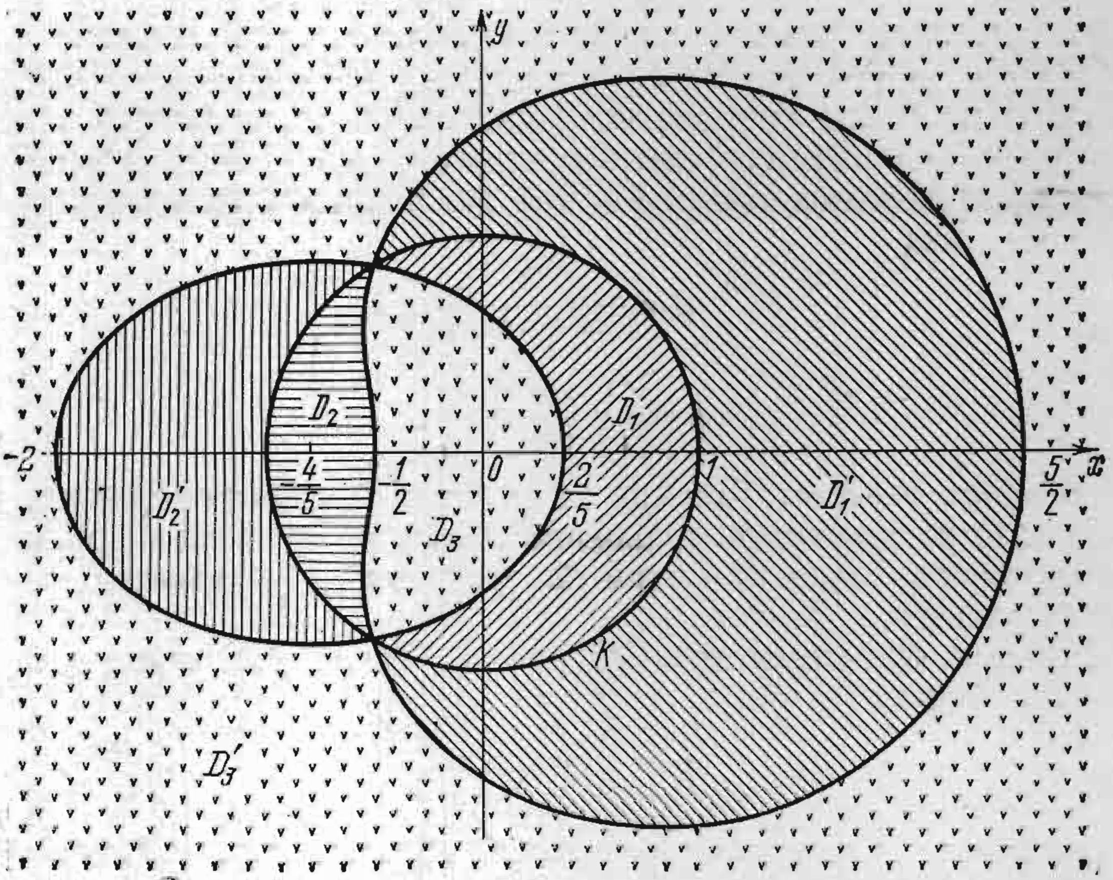


Рис. 92.

Улитка Паскаля, эллипс и окружность K инверсии делят плоскость на шесть областей. Соответствие этих областей указано на рис. 92. Области $D_1 \cup D_1'$ и $D_2 \cup D_2'$ односвязны и инвариантны при инверсии, причем при рассматриваемой инверсии они переходят друг в друга: $D_1 \rightleftarrows D_1'$, $D_2 \rightleftarrows D_2'$. Область D_3, ограниченная дугой улитки Паскаля и дугой эллипса, содержащая полюс O, переходит в область D_3', состоящую из всех точек, лежащих вне эллипса и вне улитки Паскаля. Обратно, при инверсии $[O,\ 1]$ область D_3' переходит в область D_3.

Пример 13. Рассмотрим снова улитку Паскаля, заданную уравнением в полярных координатах

$$\rho = m + n\cos\varphi,$$

но будем теперь считать, что $0<m<n$. Уравнение $\rho=0$ теперь имеет решение

$$\cos\varphi=-m/n,$$

и если считать $0\leqslant\varphi<2\pi$, то последнее уравнение дает для φ два значения:

$$\varphi=\arccos(-m/n),\quad \varphi=2\pi-\arccos(-m/n),$$

поэтому при $0<m<n$ улитка Паскаля дважды проходит через полюс; в рассматриваемом случае это кривая с самопересечением; она образует петлю, находящуюся внутри остальной части линии. При инверсии $[O,\ 1]$, где O — полюс полярной системы координат, улитка Паскаля переходит в линию, уравнение которой в той же полярной системе координат имеет вид

$$\rho=\frac{1}{m+n\cos\varphi}$$

или

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

где $p=1/m$, $e=n/m$. Так как теперь $e>1$, то линия, заданная этим уравнением, является гиперболой с эксцентриситетом e и параметром p (половина фокальной хорды).

Возьмем, например, $m=1$, $n=2$ (рис. 93). Уравнения улитки и ее образа (гиперболы) при инверсии $[O,\ 1]$ будут

$$\rho=1+2\cos\varphi,\quad \rho=\frac{1}{1+2\cos\varphi}.$$

Преобразуем уравнение гиперболы, вводя декартову прямоугольную систему координат, в которой осью Ox является полярная ось. Тогда имеем

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{1/9}-\frac{y^2}{1/3}=1.$$

Это гипербола, центр которой $(2/3,\ 0)$, а полуоси $a=1/3$, $b=1/\sqrt{3}$. Так как $b/a=\sqrt{3}$, то асимптоты гиперболы наклонены к оси Ox под углами $\pm\pi/3$. При $\varphi=\pm 2\pi/3$ в уравнении улитки $\rho=1+2\cos\varphi$ радиус-вектор ρ обращается в нуль. Поэтому асимптоты гиперболы параллельны касательным к петле улитки в начале координат. Улитка, гипербола и окружность K инверсии делят плоскость на 14 областей. Соответствие $D_k\rightleftarrows D_k'$ этих областей указано на рис. 93. Области $D_3\cup D_3'$, $D_4\cup D_4'$, $D_7\cup D_7'$ односвязны и инвариантны при рассматриваемой инверсии, причем окружность инверсии делит их на области D_3 и D_3', D_4 и D_4', D_7 и D_7', переходящие друг в друга при инверсии относительно этой окружности. Улитка и гипербола пересекаются в семи точках; три из них лежат и на окружности инверсии; четыре остальных P, P', Q, Q' не лежат на окружности инверсии и соответствуют друг другу ($P \rightleftarrows P'$, $Q \rightleftarrows Q'$) при инверсии относительно окружности K. Прямыми OPP' и OQQ' можно разбить области D_1 и D'_1 на три $\overset{*}{D}_1$, $\overset{**}{D}_1$, $\overset{***}{D}_1$ и $\overset{*}{D}'_1$, $\overset{**}{D}'_1$, $\overset{***}{D}'_1$, которые будут соответствовать друг другу при рассматриваемой инверсии. Эти же прямые делят области D_3, D'_3 и D_4, D'_4 каждую на две части, друг другу соответствующие при инверсии [0, 1].

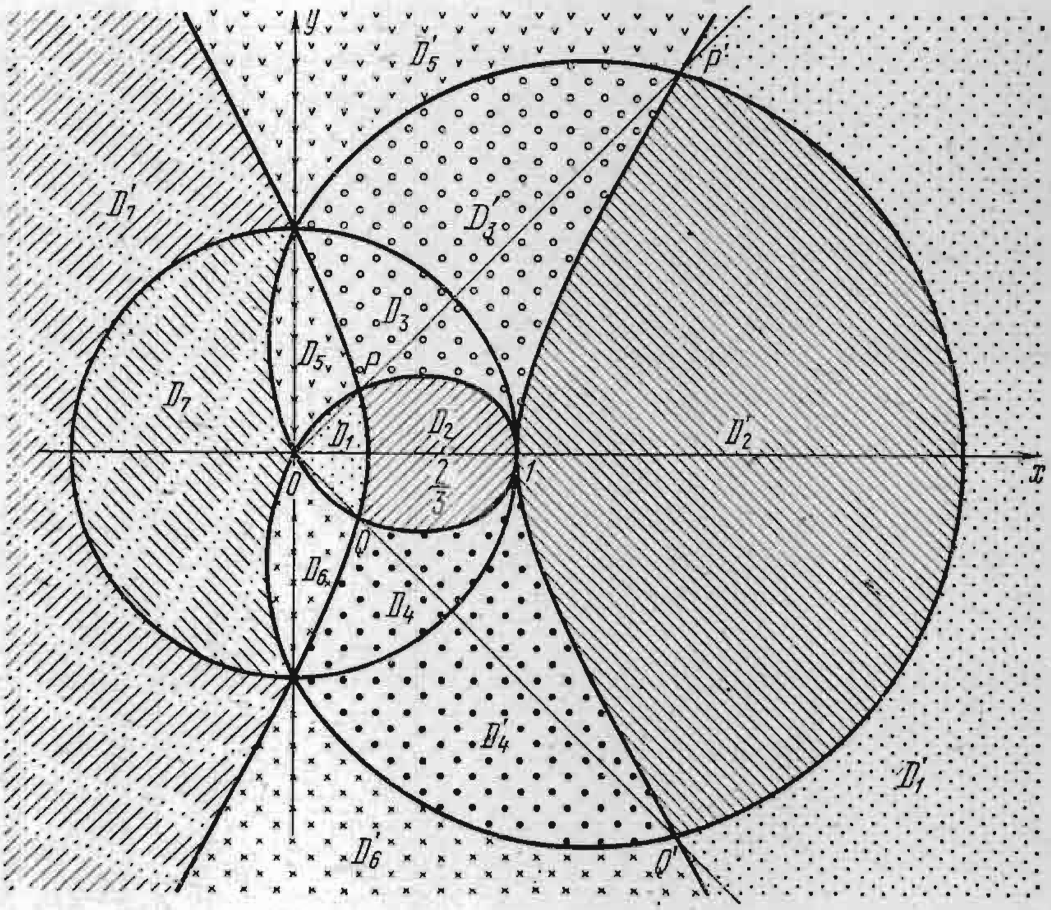


Рис. 93.

Пример 14. Уравнение циссоиды Диоклеса в полярных координатах может быть записано в виде

$$\rho = \frac{2\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{2}$$

Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой циссоиды, так как

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} \rho = +\infty,$$

а из уравнения (2) при этом следует, что

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} x = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} \rho\cos\varphi = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} (2\sin^2\varphi) = 2.$$

При инверсии $[O, 1]$ (O — полюс полярной системы координат) циссоида преобразуется в линию, уравнение которой в той же полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{\cos\varphi}{2\sin^2\varphi},$$

или

$$2y^2 = x$$

— это парабола, для которой полярная ось служит осью. Окружность K инверсии проходит через две точки, в которых пересе-

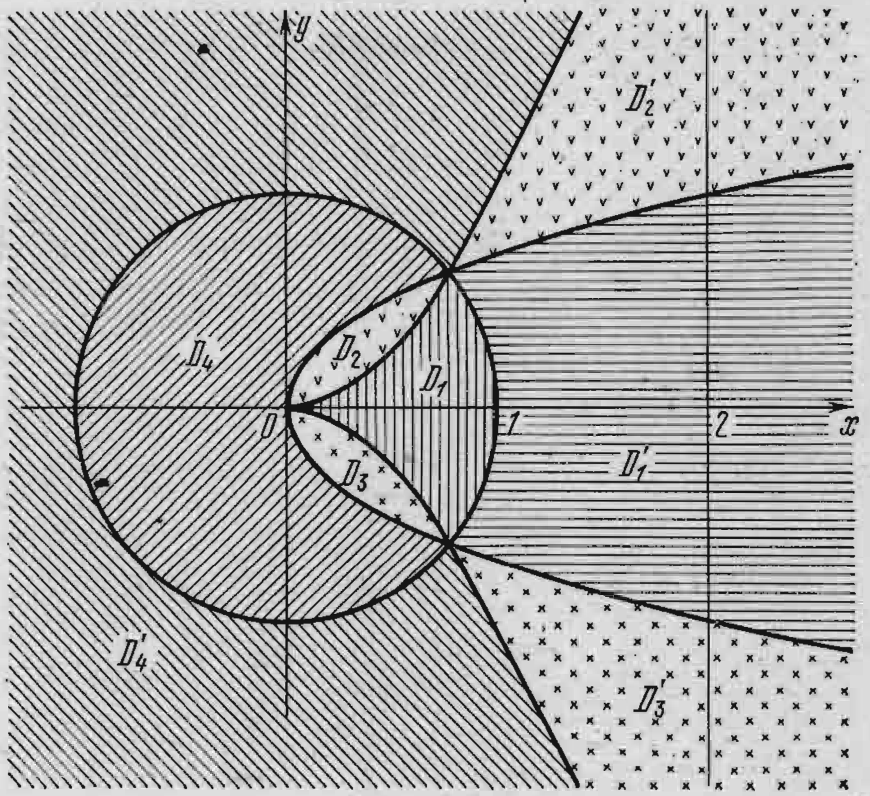


Рис. 94.

каются циссоида и парабола. (Заметим, что окружность инверсии не пересекает асимптоту $x=2$ циссоиды.) Циссоида, парабола и окружность инверсии делят плоскость на восемь областей D_k, D'_k ($k=1, 2, 3, 4$), которые переходят друг в друга при рассматриваемой инверсии: $D_k \rightleftarrows D'_k$.

Области $D_1 \cup D'_1$ и $D_4 \cup D'_4$ односвязны и инвариантны при инверсии $[O, 1]$ (рис. 94).

§ 4. Инверсоры Поселье и Гарта

Пусть $MPM'Q$ — ромб; O — точка, равноудаленная от точек P и Q. Предположим, что ромб шарнирный, точка O неподвижна и соединена шарнирами с P и Q (*инверсор Поселье*). Тогда, если точка M описывает какую-нибудь линию L, то точка M' описывает линию L', являющуюся образом линии L при инверсии $[O, OP^2 - PM^2]$ (рис. 95).

Доказательство. Точки M, M' и O находятся на равных расстояниях от точек P и Q, а потому лежат на медиатрисе отрезка PQ. Построим окружность (P, PM). Произведение $\overline{OM} \cdot \overline{OM'}$ равно $OP^2 - PM^2$. В самом деле пусть S — середина отрезка PQ, тогда

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = (\overline{OS} + \overline{SM})(\overline{OS} + \overline{SM'}) = (\overline{OS} + \overline{SM})(\overline{OS} - \overline{SM}) = \\ = OS^2 - SM^2 = OP^2 - SP^2 - (MP^2 - SP^2) = OP^2 - PM^2.$$

Отметим, что, в частности, если точка M описывает окружность, проходящую через точку O, то точка M' описывает прямую. Таким образом, инверсор Поселье позволяет механически преобразовать круговое движение в прямолинейное.

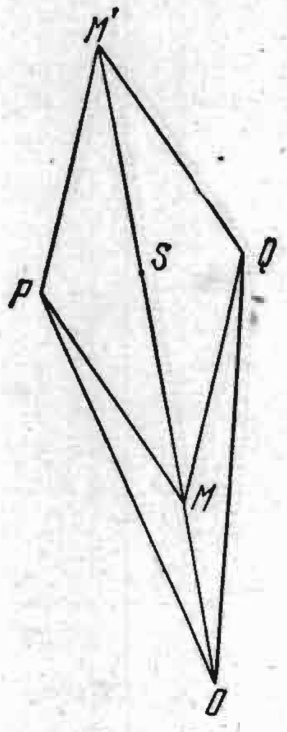


Рис. 95.

Пусть $ABCD$ — антипараллелограмм (т. е. $ABDC$ — равнобочная трапеция, BD и AC — ее параллельные стороны, AD и BC — диагонали). Фиксируем на отрезке AB точку O, на отрезке AD — точку M, а на отрезке BC — точку M' так, чтобы точки O, M и M' принадлежали одной прямой, параллельной $BD \parallel AC$. В точках A, B, C, D, O — шарниры; точка O неподвижна (*инверсор Гарта*). Если при этих условиях деформировать антипараллелограмм $ABCD$, то произведение $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ будет оставаться постоянным, т. е. если точка M описывает линию L, то точка M' описывает линию, полученную из линии L инверсией с полюсом O (рис. 96).

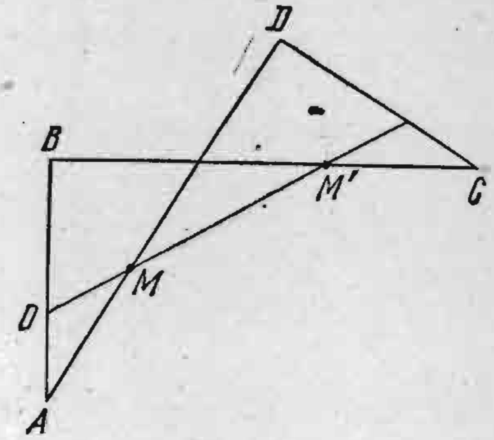


Рис. 96.

Доказательство. Если антипараллелограмм $ABCD$ шарнирный, то при его деформировании он остается антипараллелограммом (см., например. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I). С другой стороны, прямые OM и OM', параллельные основаниям BD и AC трапеции в первоначальном положении фигуры, будут все время оставаться им параллельными. В самом деле,

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AO}{AB}, \quad \frac{BM'}{BC}=\frac{BO}{AB};$$

эти пропорции при деформировании антипараллелограмма $ABCD$ сохраняются. В частности, из сказанного следует, что точки O, M и M' остаются на одной прямой. Далее из подобных треугольников находим:

$$\frac{OM}{BD}=\frac{AO}{AB}, \quad \frac{OM'}{OB}=\frac{AC}{AB};$$

отсюда

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})=OM\cdot OM'=\frac{OA\cdot OB}{AB^2}\cdot BD\cdot AC.$$

Но вокруг трапеции $ABCD$ можно описать окружность, поэтому

$$AB^2+BD\cdot AC=AD^2,$$

и, значит,

$$BD\cdot AC=AD^2-AB^2$$

и окончательно:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})=\frac{OA\cdot OB}{AB^2}(AD^2-AB^2).$$

Поэтому точка M' получается из точки M при инверсии с полюсом O и степенью

$$k=\frac{OA\cdot OB\,(AD^2-AB^2)}{AB^2}.$$

§ 5. Геометрия Маскерони

Будем считать, что прямая задана, если на плоскости фиксированы две различные точки, принадлежащие этой прямой. Окружность считается заданной, если заданы ее центр и точка, лежащая на этой окружности, или, если заданы три точки, принадлежащие этой окружности. Окружность с центром O и радиусом OM будем обозначать так: (O, OM). Окружность, заданную тремя точками A, B, C, лежащими на ней, будем обозначать так: (ABC).

Мы рассмотрим решение ряда основных задач на построение одним циркулем. Большинство решений связано с использованием инверсии.

Опираясь в основном на эти построения, датскому математику XVII века Г. Мору удалось доказать, что при помощи одного циркуля можно осуществить все построения, которые осуществимы с помощью циркуля и линейки.

Доказательство этого положения было повторено в конце XVIII века итальянским математиком Маскерони. Поэтому построения, выполняемые при помощи одного циркуля, связывают часто с именем Маскерони (геометрия Маскерони, построения Маскерони и т. д.).

Рассмотрим несколько задач на построение одним циркулем.

Задача 1. Отрезок AB задан своими граничными точками. Построить на продолжении отрезка AB за точку B такую точку C, что $AC = n \cdot AB$, где n — натуральное число.

Решение. Строим окружности $(A,\ AB)$ и $(B,\ BA)$. Пусть P — одна из точек их пересечения. Строим окружность $(P,\ PA)$; пусть Q — вторая точка пересечения этой окружности с окружностью $(B,\ BA)$. Строим окружность $(Q,\ QB)$; пусть R — вторая точка пересечения этой окружности с окружностью $(B,\ BA)$. Точка R лежит на продолжении отрезка AB за точку B, причем $AB = BR$ (рис. 97).

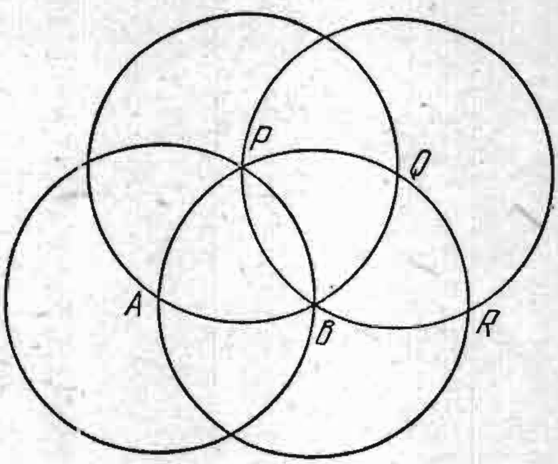


Рис. 97.

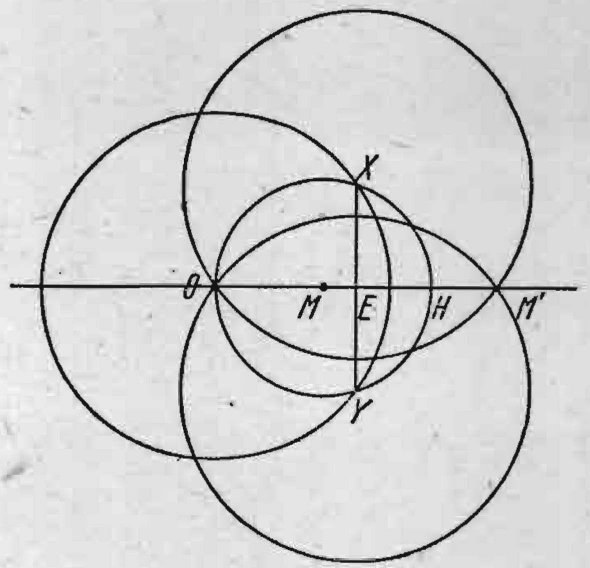


Рис. 98.

В самом деле, указанное построение дает вершину R правильного шестиугольника, противолежащую его вершине A и вписанного в окружность $(B,\ BA)$. Продолжая аналогичные построения, можно построить точку C, лежащую на продолжении отрезка AB, за точку B и такую, что $AC = n \cdot AB$, где n — любое натуральное число.

Задача 2. Построить одним циркулем образ M точки M' при инверсии $[O,\ r^2]$.

Решение. 1°. $OM > r/2$. Если точка M лежит на круге инверсии, то ее образ M' совпадает с ней самой. Поэтому предположим, что точка M лежит либо внутри круга инверсии (рис. 98), либо вне его (рис, 99). В обоих случаях строим окружность $(M,\ MO)$. Пусть X и Y — точки пересечения этой окружности с окружностью инверсии. Строим окружности $(X,\ XO)$ и $(Y,\ YO)$, вторая точка пересечения этих окружностей есть точка M'. В самом деле, так как точки X и Y симметричны относительно прямой MO, а окружности $(X,\ XO)$, $(Y,\ YO)$ конгруэнтны, то вторая точка M' их пересечения лежит на луче $\overrightarrow{OM}$. Далее если H — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности (M, MO), а E — точка пересечения XY и OM (E — середина отрезка OM'; ни точку H, ни точку E строить не нужно, они вводятся лишь для доказательства), то

$$r^2 = OX^2 = OH \cdot OE = OM \cdot OM'.$$

2°. $OM < r/2$. В этом случае окружность (M, MO) не пересечет окружность инверсии. Строим на луче $\overrightarrow{OM}$ точку N такую, что $n \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ и что $ON > r/2$. Строим точку N', полученную

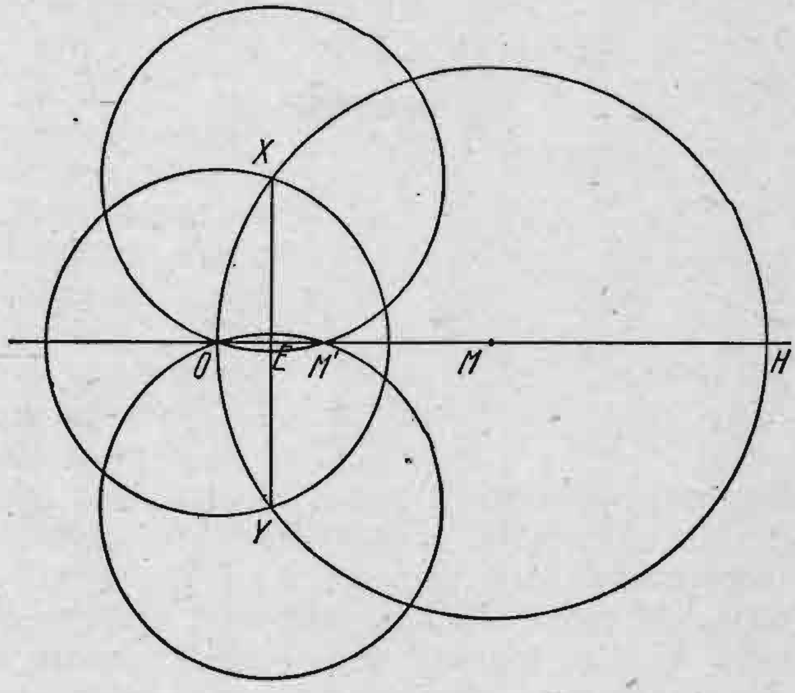


Рис. 99.

инверсией $[O, r^2]$ из точки N (случай 1°), и затем строим на луче $\overrightarrow{ON'}$ точку M' такую, что $\overrightarrow{OM'} = n \cdot \overrightarrow{ON'}$, тогда

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \frac{\overline{ON}}{n} \cdot n\overline{ON'} = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} = r^2.$$

Из решения этой задачи вытекает возможность построить одним циркулем точку C, лежащую на отрезке AB и такую, что $n \cdot AC = AB$. В самом деле, построим на продолжении отрезка AB за точку B точку C' такую, что $AC' = n \cdot AB$ (задача 1). Пусть C — образ точки C' при инверсии $[A, AB^2]$ (задача 2). Точка C — искомая. В самом деле:

$$\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = AB^2, \quad AC \cdot nAB = AB^2, \quad nAC = AB.$$

Задача 3. Построить одним циркулем окружность C', являющуюся образом при инверсии $[O, r^2]$ прямой C, не проходящей через полюс O этой инверсии. Прямая предполагается заданной двумя различными точками X и Y, лежащими на ней.

Решение. Окружность C' проходит через точку O. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей (X, XO) и (Y, YO). Тогда точка P симметрична точке O относительно прямой XY. Строим (одним циркулем) образ P' точки P при инверсии $[O, r^2]$. Искомая окружность C' есть окружность $(P', P'O)$ (рис. 100).

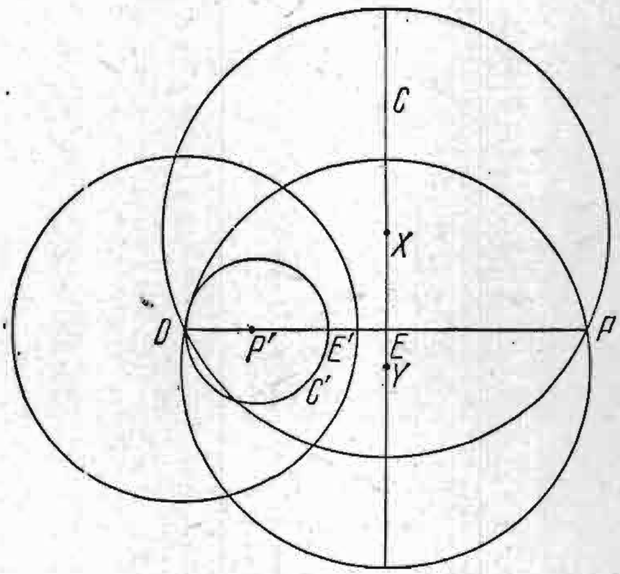


Рис. 100.

В самом деле, если E — точка пересечения прямых XY и OP (E — середина OP, а E' — точка, диаметрально противоположная точке O на окружности $(P', P'O)$), то

$$r^2 = OP \cdot OP' = OE \cdot OE'.$$

Задача 4. Построить одним циркулем точку пересечения двух прямых, одна из которых задана точками A и B, а другая — точками C и D.

Решение. Построим на плоскости произвольную окружность S. Построим (одним циркулем) окружности K_1 и K_2, являющиеся образами данных прямых при инверсии относительно окружности S. Пусть M' — точка пересечения окружностей K_1 и K_2. Построим (одним циркулем) образ M точки M' при инверсии относительно окружности S. Точка M и есть точка пересечения данных прямых.

Задача 5. Построить одним циркулем центр окружности, заданной тремя точками A, B, C, лежащими на этой окружности (сама окружность не проведена).

Решение. Пусть P и Q — точки пересечения окружностей (A, AB) и (B, BA). Прямая PQ — медиатриса отрезка AB. Пусть L и M — точки пересечения окружностей (B, BC) и (C, CB). Прямая LM — медиатриса отрезка BC. Центр O окружности (ABC) есть точка пересечения прямых PQ и LM (задача 4).

Задача 6. На прямой, заданной двумя точками A и B, от точки B отложить отрезки BC_1 и BC_2, равные данному отрезку PQ.

Решение. Построим окружность (B, PQ). Вопрос сводится к отысканию точек пересечения этой окружности с прямой AB. Построим (одним циркулем) образы K_1 и K_2 прямой AB и окружности (B, PQ) при инверсии относительно произвольной окружности. Пусть C_1' и C_2' — точки пересечения окружностей K_1 и K_2. Образы C_1 и C_2 точек C_1' и C_2' при рассматриваемой инверсии и есть искомые точки.

Задача 7. К трем данным отрезкам PQ, MN, RS построить четвертый им пропорциональный, т. е. такой, что

$$PQ \cdot MN = RS \cdot XY.$$

Решение. 1°. $PQ \neq MN$. Построим окружности (O, PQ) и (O, MN), где O — произвольная точка плоскости. Выберем на окружности (O, PQ) произвольную точку A и построим (одним циркулем) точку B, в которой прямая OA пересекает окружность (O, MN) (возьмем ту точку B, которая лежит на луче $\overrightarrow{OA}$). Построим окружность (O, RS) и возьмем на ней произвольную точку C. Построим окружность (ABC) (задача 5). Пусть D — вторая точка пересечения этой окружности с прямой OC (она строится одним циркулем). Тогда

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD,$$

или

$$PQ \cdot MN = RS \cdot OD;$$

OD — искомый отрезок.

2°. $PQ = MN$. В этом случае рассмотрим отрезки PQ и $2MN$ (отрезок $2MN$ строится одним циркулем). Построим (одним циркулем) отрезок X_1Y_1 такой, что

$$PQ \cdot 2MN = RS \cdot X_1Y_1 \quad \text{(случай 1°)}.$$

Искомый отрезок $XY = \frac{X_1Y_1}{2}$ строится одним циркулем (см. замечание в конце решения задачи 2).

Задача 8. На плоскости даны две точки A и B. Построить (одним циркулем) какую-нибудь точку C такую, чтобы угол ABC был равен 90°.

Решение. На прямой AB строим (одним циркулем) отрезок $BD = AB$. Пусть C — любая из точек пересечения окружностей (A, AD) и (D, DA). Точка C — искомая.

Задача 9. Дан отрезок AB точками A и B. Пусть n — произвольное натуральное число, не являющееся квадратом натурального числа. Построить отрезок $AB\sqrt{n}$.

Решение. Построим (одним циркулем) точку C такую, что $\angle ABC = 90°$. Найдем точку P пересечения BC с окружностью (B, BA). Тогда $AP = AB\sqrt{2}$. Далее построим (одним циркулем) точку D такую, что $\angle APD = 90°$, и построим точку Q пересечения прямой PD с окружностью (P, AB). Тогда $PQ = AB\sqrt{3}$ и т. д.

Из результатов этой задачи следует, что на окружности (заданной тремя своими точками) одним циркулем можно построить вершины правильного треугольника, квадрата, правильного пятиугольника и шестиугольника.

§ 6. Инверсия пространства

Инверсия $[O, k]$ пространства определяется так же, как и инверсия плоскости. Инверсии $[O, k]$ пространства, так же как и инверсии плоскости, делятся в зависимости от знака степени k инверсии на положительные $(k > 0)$ и отрицательные $(k < 0)$.

При положительной инверсии $[O, k]$ сфера S_0 с центром O и радиусом $\sqrt{k}$ состоит из инвариантных точек.

Множество точек, лежащих вне сферы S_0, отображается во множество внутренних точек сферы S_0, а множество всех точек, лежащих внутри сферы S_0, отображается на множество всех точек, лежащих вне сферы S_0.

Если $k<0$, то сфера с центром O и радиусом $\sqrt{|k|}$ инвариантна, причем каждая ее точка отображается в точку, ей диаметрально противоположную, на сфере S_0.

Если инверсия $[O, k]$ положительна, то все сферы, пересекающие сферу S_0 инверсии ортогонально, и только такие сферы, инвариантны.

При инверсии пространства образом сферы, не проходящей через полюс инверсии, является сфера.

При инверсии сохраняется касание сфер и касание сферы с плоскостью.

Если сфера (S) проходит через полюс O инверсии, то ее образ при инверсии $[O, k]$ есть плоскость, ортогональная прямой OS, не проходящая через полюс инверсии, и обратно.

Инверсия пространства есть конформное преобразование, т. е. при инверсии сохраняются углы между касательными плоскостями в точках пересечения двух сфер.

При инверсии пространства окружность, не проходящая через полюс инверсии, переходит в окружность. В самом деле, всякую такую окружность можно рассматривать как линию пересечения двух сфер, не проходящих через полюс инверсии.

При инверсии пространства сохраняются углы между пересекающимися окружностями (лежащими, вообще говоря, в разных плоскостях). В самом деле, пусть a и b — касательные к окружностям C_1 и C_2 в точке M их пересечения. Достаточно доказать, что при инверсии $[O, k]$ сохранится угол между прямыми a и b. Рассмотрим только тот случай, когда прямые a и b не проходят через полюс O инверсии. Пусть a^* и b^* — прямые, соответственно параллельные прямым a и b, и проходящие через полюс O инверсии. При инверсии $[O, k]$ прямые a и b перейдут в окружности a' и b', касающиеся соответственно прямых a^* и b^* в точке O. Поэтому угол между окружностями a' и b' равен углу между прямыми a^* и b^*, т. е. равен углу между прямыми a и b, так как $a^* \| a$, $b^* \| b$.

* * *

Здесь даются некоторые геометрические построения и аналитические выводы, связанные со стереографической проекцией, в связи с применением этого отображения сферы на плоскость при построении карт Земли. Внимание уделяется только геометрическому построению изображения сети меридианов и параллелей и аналитическому исследованию характера их спектров (при стереографической проекции).

Напомним основные определения и свойства стереографической проекции в связи с преобразованием инверсии.

Пусть A и B — концы какого-нибудь диаметра AB сферы Ω_1; a_1 и b_1 — плоскости, касающиеся сферы Ω_1 в точках A и B. Пусть M — произвольная точка сферы Ω_1, отличная от точки A. Обозначим через M' точку, в которой прямая AM пересекает плоскость b_1. Соответствие, при котором точке M ставится в соответствие точка M', называется *стереографической проекцией* сферы Ω_1 на плоскость b_1 (рис. 101).

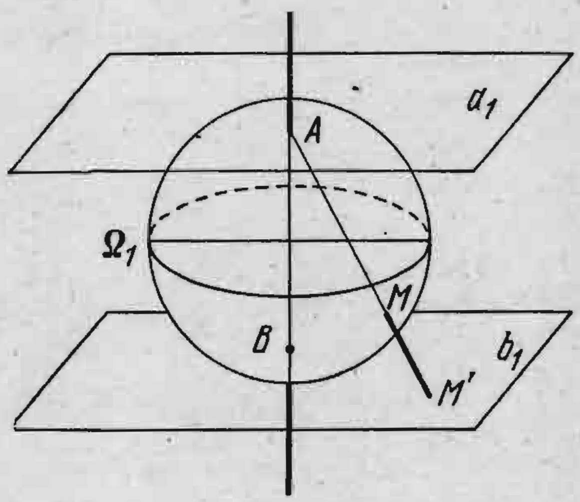


Рис. 101.

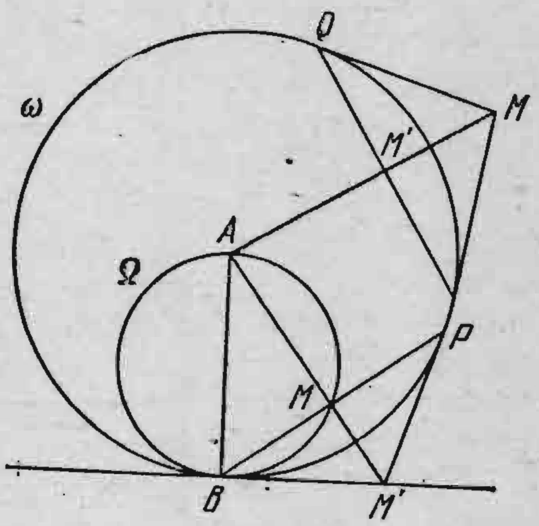


Рис. 102.

Рассмотрим сечение Ω сферы Ω_1 плоскостью ABM (рис. 102). Из подобия треугольников ABM и ABM' находим

$$AM \cdot AM' = AB^2.$$

Из этого соотношения следует, что образ M' точки M при стереографической проекции сферы Ω_1 на плоскость b_1 является вместе с тем образом точки M при инверсии $I = [A, AB^2]$ с полюсом A и степенью инверсии, равной AB^2; иначе: точка M' является образом точки M при инверсии относительно сферы ω_1 с центром в точке A и радиусом, равным AB. Для построения образа M' точки M при инверсии I удобно сначала построить сечения Ω и ω сфер Ω_1 и ω_1 плоскостью ABM. Далее, соединяем точку M с точкой A и проводим прямую, проходящую через точку M перпендикулярно прямой AM. Пусть P — точка, в которой эта прямая пересекает окружность ω; тогда касательная к окружности ω в точке P пересечет прямую AM в точке M'. Это построение верно для любой точки M, лежащей внутри окружности ω. Если точка M лежит на окружности ω, то ее образом является сама эта точка M. Если точка M лежит вне окружности ω, то для построения ее образа M' при инверсии относительно окружности ω построим касательную MQ, проведенную из точки M к окружности ω (Q — точка касания); ортогональная проекция M' точки Q на прямую AM и будет образом точки M при инверсии I. Все эти построения можно выполнить в любом сечении Ω сферы Ω_1 плоскостью, проходящей через прямую AB. Впрочем, их можно выполнить и в пространстве, проводя соответствующие касательные не к окружностям Ω и ω, а к сферам Ω_1 и ω_1.

Из всего сказанного мы приходим к следующему важному выводу: на множестве всех точек сферы Ω_1 (исключая точку A) стереографическая проекция совпадает с инверсией, полюсом которой является центр проектирования A, а степень инверсии равна квадрату диаметра сферы Ω_1; иначе: стереографическая проекция на множестве всех точек сферы Ω_1 (исключая точку A) совпадает с инверсией относительно сферы ω_1, центром которой является точка A, а радиус равен диаметру сферы Ω_1.

Отсюда следует, что геометрические свойства стереографической проекции можно получить из известных свойств инверсии, а именно: при интерсии (а следовательно, и при стереографической проекции) окружности, лежащие на сфере Ω_1 и не проходящие через точку A, переходят в окружности (лежащие на плоскости b_1). Так как инверсия есть конформное преобразование (т. е. при инверсии сохраняются углы), то тем же свойством обладает и стереографическая проекция, так что применение стереографической проекции дает возможность построить конформную карту Земли [1]).

Укажем, как строится центр окружности C', в которую отображается окружность C, лежащая на сфере Ω_1 и не проходящая через точку A. Сначала предположим, что C не является большим кругом сферы Ω_1. Построим конус K, который касается сферы Ω_1 по окружности C. Пусть P — вершина этого конуса. Построим сферу T с центром P, которая проходит через окружность C (рис. 103). Эта сфера пересекается со сферой Ω_1 ортогонально. При инверсии $I=[A, AB^2]$ сфера Ω_1 перейдет в плоскость b_1, а сфера T перейдет в сферу T', которая будет пересекать плоскость b_1 ортогонально. Отсюда следует, что центр M' сферы T' должен лежать на плоскости b_1; но, с другой стороны, центр сферы T' должен лежать и на прямой AP, так как сфера T' является образом сферы T при инверсии $[A, AB^2]$. Таким образом, центр M' сферы T' есть точка, в которой прямая AP пересекает плоскость b_1. Далее, окружность C является линией пересечения сфер Ω_1 и T, значит, образ C' окружности C (и при инверсии I и при рассматриваемой стереографической проекции) является пересечением сферы T' и плоскости b_1. Но так как центр M' сферы T' лежит на плоскости b_1, то C' — большой круг сферы T' и, значит, центр окружности C' совпадает с центром M' сферы T', т. е. является проекцией M' на плоскость b_1 вершины P конуса K, касающегося сферы Ω_1 по окружности C.

Заметим, что проекция M' точки P на плоскость b_1 не является образом точки P при инверсии $I=[A, AB^2]$.

---

[1]) Построить такую карту Земли, в которой сохранялись бы расстояния, невозможно.

Для построения центра и радиуса окружности C' рассмотрим сечение Ω сферы Ω_1 плоскостью ABP (рис. 104). Пусть T_1', M, T_2' — центральные проекции точек T_1, P, T_2 из точки A на прямую b (T_1 и T_2 — точки касания касательных, проведенных из

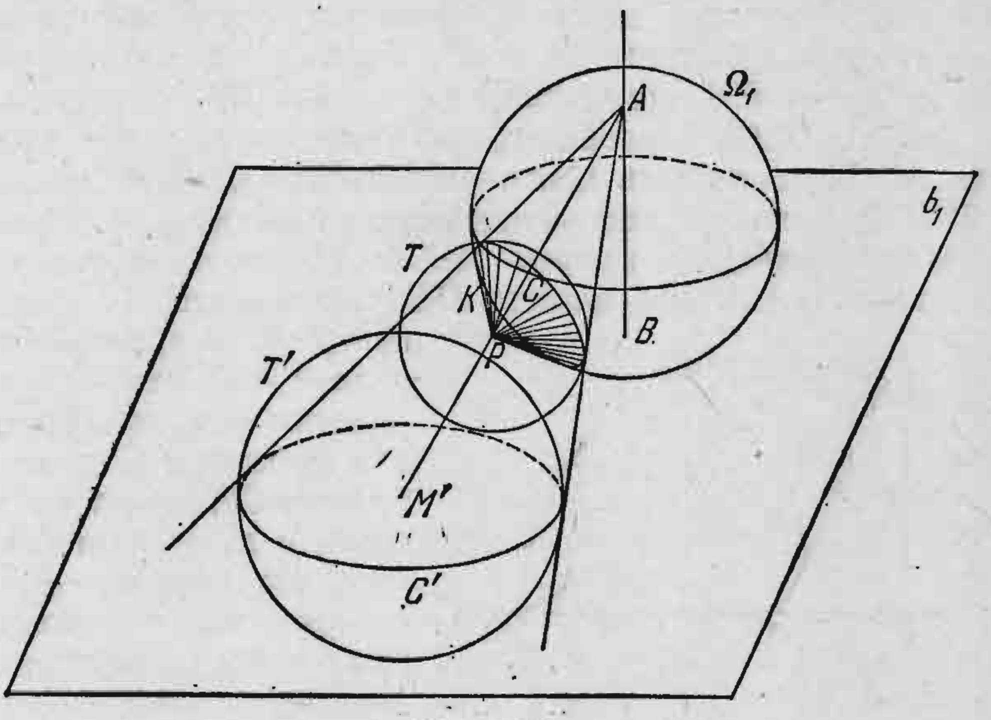


Рис. 103.

точки P к окружности Ω). Тогда M — центр окружности C', а ее радиус равен $MT_1' = MT_2'$.

Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда окружность C является большим кругом сферы Ω_1, не проходящим через точку A. В этом случае, на основании общих свойств инверсии, стереографическая проекция C' окружности C на плоскость b_1 будет снова окружность. Укажем, как геометрически строится ее центр и радиус: плоскость π, в которой лежит окружность C, при инверсии $I = [A, AB^2]$ перейдет в сферу π', центр которой лежит на прямой, проходящей через

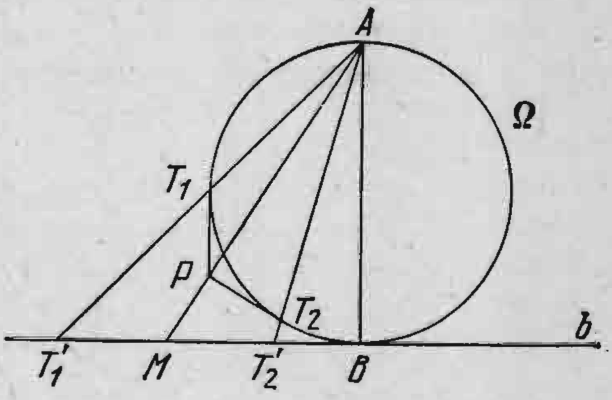


Рис. 104.

точку A перпендикулярно плоскости π. С другой стороны, так как плоскость π ортогональна сфере Ω_1, то сфера π' должна быть ортогональна плоскости b_1, и, значит, центр M сферы π' должен лежать на плоскости b_1. Итак центр M сферы π', а значит, и окружности C' (являющейся большим кругом сферы π') есть точка пересечения с плоскостью b_1 прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к плоскости π, в которой лежит окружность C.

На рис. 105 дано сечение Ω сферы Ω_1 плоскостью, проходящей через прямую AB и через перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость π, в которой лежит окружность C; DE — диаметр окружности C, по которому проведенная плоскость пересекает этот круг C. Соединяя точку A с точками D и E получим в пересечении с прямой b точки D' и E', являющиеся изображениями концов диаметра DE окружности C; прямая AL, перпендикулярная к диаметру DE, пересекает, как установлено выше, прямую b в точке M', которая есть центр окружности C'. Так как $M'D' = M'E' = M'A$, то для построения центра и радиуса окружности C' можно и не проводить прямые AD и AE: опустив перпендикуляр AL из точки A на диаметр DE окружности C, получаем и центр M' окружности C' и радиус AM' этой окружности. Заметим еще, что ортогональная проекция L точки A на прямую DE лежит на окружности с диаметром OA (O — середина отрезка AB). Это соображение использовано ниже при геометрическом построении спектра меридианов при построении карт западного и восточного полушарий Земли.

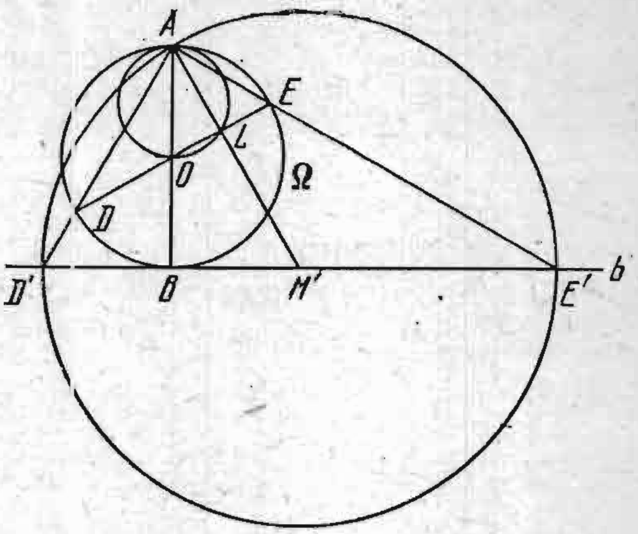


Рис. 105.

Остается рассмотреть случай, когда окружность C проходит через центр A проектирования. В этом случае стереографической проекцией окружности C является прямая C', по которой плоскость b_1 пересекается с плоскостью π, в которой лежит окружность C (рис. 106).

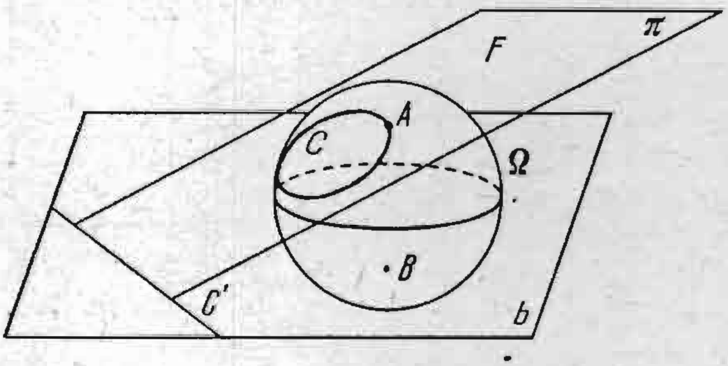


Рис. 106.

Перейдем к рассмотрению построения карт.

Географическими координатами точки, лежащей на поверхности Земли, называются ее широта φ и долгота θ. Линии, на каждой из которых широта φ имеет одно и то же значение: $\varphi = \text{const}$, называются параллелями: это сечения Земли плоскостями, перпендикулярными к оси NS полюсов. Линии, на каждой из которых долгота θ имеет одно и то же значение: $\theta = \text{const}$, называются меридианами Земли: это полуокружности больших кругов Земли, граничными точками которых являются полюсы N и S. Сеть меридианов и параллелей на поверхности Земли — ортогональная. На рис. 107 дано в аксонометрии изображение параллелей и меридианов сферы.

При построении карты Земли с использованием стереографической проекции обычно применяют два способа; в одном из них строится карта северного и южного полушарий следующим способом: пусть N и S — соответственно северный и южный полюсы, а n и s — плоскости, касательные к Земле в этих полюсах. Для построения стереографической проекции северного полушария

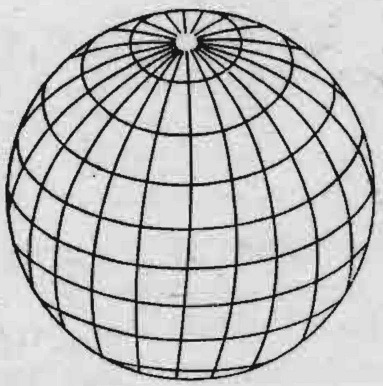


Рис. 107.

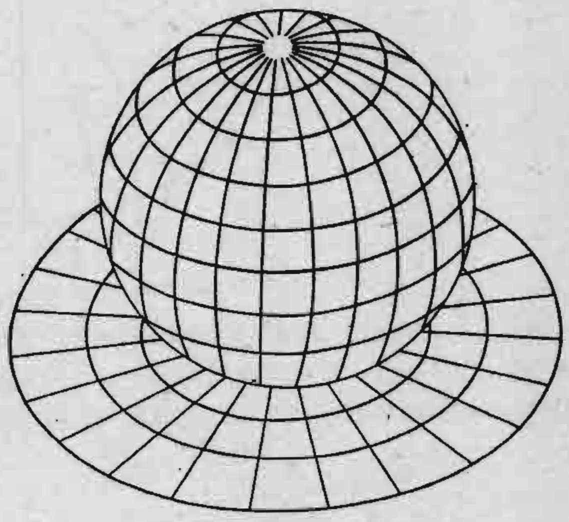


Рис. 108.

проектируют это полушарие из южного полюса S на плоскость, касательную к Земле в северном полюсе, а для построения карты южного полушария проектируют это полушарие из точки N на плоскость s. Получается карта, состоящая из двух кругов; один из них — карта северного полушария, другой — карта южного. Конечно, указанное построение подвергается подобному преобразованию. На рис. 108 в аксонометрии дано описанное построение карты южного полушария.

При таком построении карты Земли параллели, например, южного полушария проектируются в концентрические окружности, лежащие на плоскости s и имеющие общий центр S; экватор σ_1 проектируется в окружность σ, внутри которой заключены проекции всех параллелей. Полумеридианы южного полушария (аналогично и северного) проектируются в радиусы окружности (на картах это построение дополняется, конечно, еще подобным преобразованием). Если изменять долготу θ через равные промежутки (от 0° до 180°), то соответствующие радиусы окружности σ будут поворачиваться последовательно на один и тот же угол. На рис. 109 дано построение изображений меридианов при изменении долготы θ на 15°. Для построения изображений параллелей, соответствующих одинаковым промежуткам изменения широты (от 0°

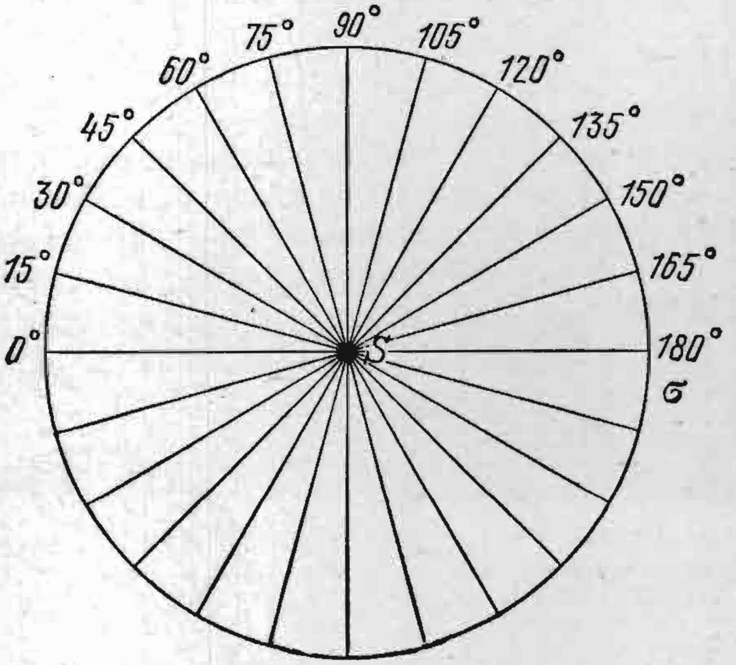


Рис. 109.

до 90°), можно поступать так: построим сечение сферы (рис. 110) какой-нибудь плоскостью, проходящей через прямую NS. Рассмотрим, например, южное полушарие. Пусть PSQ — полуокружность южного полушария, по которой проведенная плоскость пересекает это полушарие, а s — прямая пересечения этой плоскости с плоскостью s_1. Разделим полуокружность PSQ на несколько равных частей (на рис. 110 отмечены точки с широтами 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°), тогда проекции точек деления из точки N на прямую s с одинаковыми широтами (0°0°, 15°15°, 30°30°, 45°45°, 60°,60°, 75°75°, 90°90°) дадут изображения диаметров параллелей. Построение параллелей можно совместить с построением изображения меридианов. Такое построение и выполнено на рис. 110.

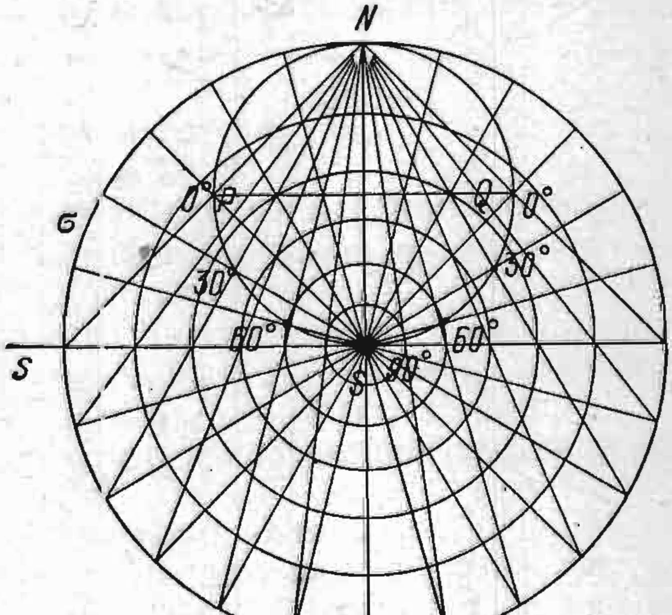


Рис. 110.

Так как окружность σ (изображение экватора) гомотетична окружности (NS) с диаметром NS (коэффициент гомотетии равен 2), то при построении изображений меридианов и параллелей можно и не строить окружность (NS). Такое построение выполнено на рис. 111 (для обоих полушарий).

Этот геометрический способ построения меридианов и параллелей приводит к тому заключению, что спектр меридианов — равномерный, а спектр параллелей — расширяющийся по мере

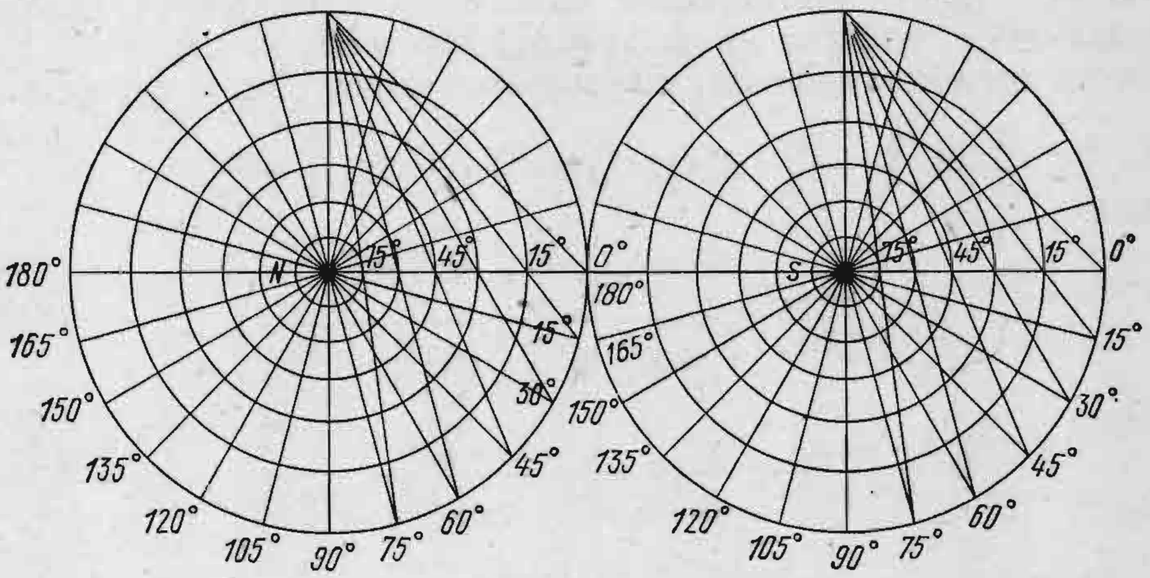


Рис. 111.

приближения к изображению σ экватора (для параллелей это свойство мы отмечаем пока визуально). Дадим аналитическое доказательство того, что спектр параллелей расширяется вблизи изображения экватора.

Пусть M произвольная точка сферы Ω_1, φ — широта точки M, M' — стереографическая проекция точки M из точки N на плос-

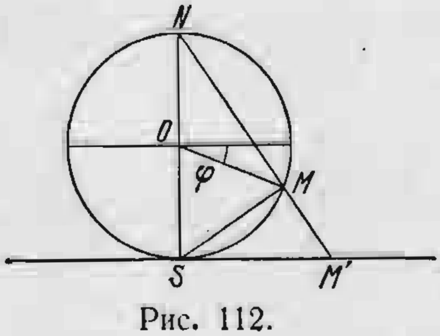


Рис. 112.

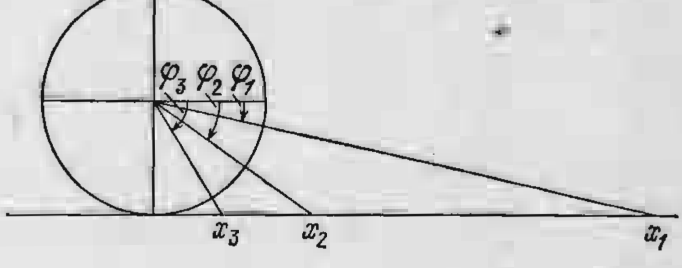


Рис. 113.

кость s_1. Построим сечение сферы Ω_1 плоскостью NSM (рис. 112). Так как

$$\angle SOM = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \text{то} \quad \angle SNM = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

и, следовательно (считаем, что $NS = 1$):

$$x = SM' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Докажем теперь, что если взять три точки с широтами: $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ такими, что $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2$, то соответствующие значения функции x, т. е.

$$x_1 = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right), \quad x_2 = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right), \quad x_3 = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_3}{2}\right)$$

будут связаны соотношением: $x_1 - x_2 > x_2 - x_3$. Этим и будет доказано, что спектр изображения параллелей расширяется вблизи изображения экватора (рис. 113). Неравенство $x_1 - x_2 > x_2 - x_3$, которое мы хотим доказать, эквивалентно такому: $2x_2 < x_1 + x_3$ или

$$2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right) < \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_3}{2}\right),$$

или

$$2\frac{1 - \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} < \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_3}{2}\right)},$$

или

$$2\frac{1 - \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} < \frac{2\cos\varphi_2}{\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}\right)},$$

$$\frac{1 - \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} < \frac{\cos\varphi_2}{\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} + \sin\varphi_2}.$$

Так как $\cos\varphi_2 > 0$, $\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} > 0$, $\sin\varphi_2 > 0$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$(1 - \sin\varphi_2)\left(\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} + \sin\varphi_2\right) < \cos^2\varphi_2,$$

или

$$\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} + \sin\varphi_2 < 1 + \sin\varphi_2,$$

$$\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} < 1.$$

Последнее неравенство верно, так как $0° < \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} < 90°$; неравенство $x_1 - x_2 > x_2 - x_3$ ему эквивалентно, следовательно, и оно верно.

Замечание. Тот же результат можно получить, используя производные. Имеем

$$x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$x' = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} < 0,$$

следовательно, на сегменте $[0, \pi/2]$ функция $x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$

убывающая. Далее,

$$x'' = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} > 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2),$$

следовательно, на сегменте $[0, \pi/2]$ график функции $x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ имеет выпуклость вниз, а значит, на этом сегменте выполняется *неравенство Йенсена*

$$x_2 < \frac{x_1+x_3}{2},$$

т. е. $x_1 - x_2 > x_2 - x_3 > 0$ ($x_1 - x_2 > 0$, $x_2 - x_3 > 0$, так как $0° \leqslant \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \leqslant 90°$, а на сегменте $[0, \pi/2]$ функция $x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ убывающая).

Установленный факт разрежения спектра параллелей по мере приближения к экватору подтверждается и приближенно: в следующей таблице даны значения функции $x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ для следующих значений φ: 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90° и значения $\Delta x = x_i - x_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Мы видим, что значения Δx убывают по мере увеличения широты, т. е. по мере удаления от изображения экватора.

φ	x	Δx
0°	1,0000	
		0,2327
15°	0,7673	
		0,1899
30°	0,5774	
		0,1632
45°	0,4142	
		0,1463
60°	0,2679	
		0,1362
75°	0,1317	
		0,1317
90°	0,0000	

Рассмотрим еще стереографическую проекцию западного и восточного полушарий. Пусть α — меридиан, от которого ведется отсчет долгот θ; WV — диаметр Земли, перпендикулярный плоскости, в которой лежит меридиан α. Стереографическую проекцию западного полушария (на рис. 114 это нижняя часть сферы) получим, проектируя западное полушарие из точки W на плоскость β, касательную к западному полушарию в точке V. Так как такое проектирование для точек сферы Ω_1 совпадает с инверсией $I=[W, WV^2]$, то меридианы и параллели, как образующие ортогональную сеть на Земле, спроектируются в ортогональную же сеть окружностей на плоскости β. При этом меридианы каждого из полушарий (у нас на рис. 114 западного полушария) спроектируются в дуги окружностей, проходящих через точки N и S, для которых эти точки служат граничными. Заметим, что спектр изображений меридианов (любого из полушарий) в точности такой же, как и спектр параллелей при рассмотренной выше стереографической проекции параллелей северного и южного полушарий. Однако центры дуг, изображающих меридианы каждого из полушарий, должны быть построены в соответствии с рис. 115.

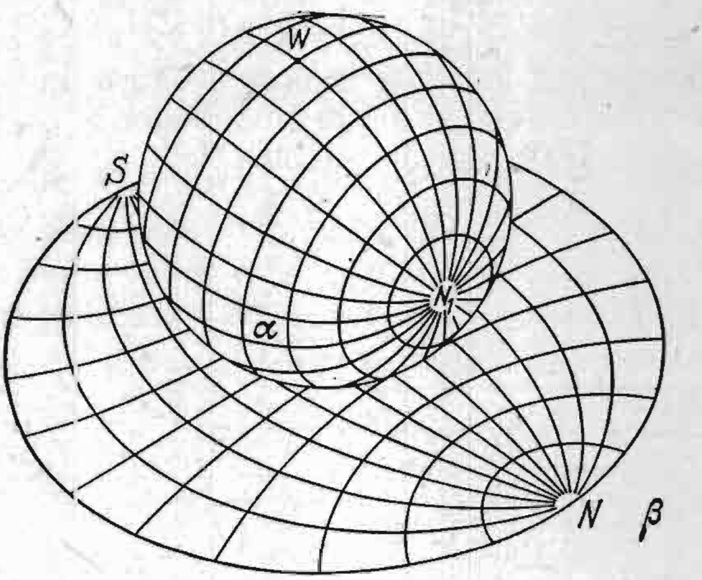


Рис. 114.

На рис. 115 дано это построение (карта западного и восточного полушарий). Что касается параллелей, то их надо строить, исходя из таких соображений: так как меридианы и параллели образуют ортогональную сеть, то эта сеть должна остаться ортогональной и в изображении сферы при стереографической проекции. В частности, изображения параллелей должны быть ортогональны изображению их основного меридиана α. Кроме того, центры изображения параллелей лежат на изображении оси NS полюсов N и S. Отсюда получаем следующий способ геометрического построения изображения параллели, проходящей через заданную точку M основного меридиана α: проводим в точке M касательную к окружности α (к изображению основного меридиана). Пусть P — точка, в которой эта касательная пересекается с прямой NS; тогда окружность с центром в точке P радиусом PM и будет изображением параллели, проходящей через точку M (рис. 116). На рис. 117 построены таким образом изображения параллелей (и изображения меридианов в соответствии с рис. 115, соответствующих значениям широты 0°, 15°,

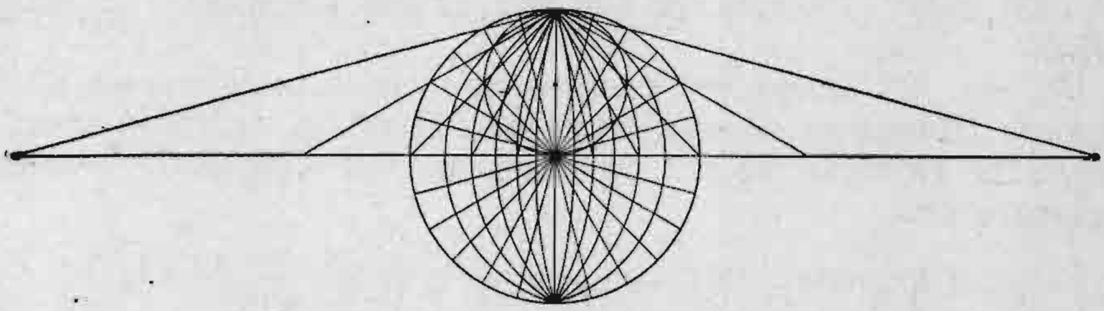


Рис. 115.

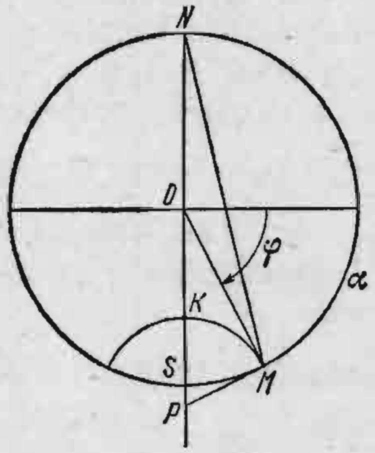


Рис. 116.

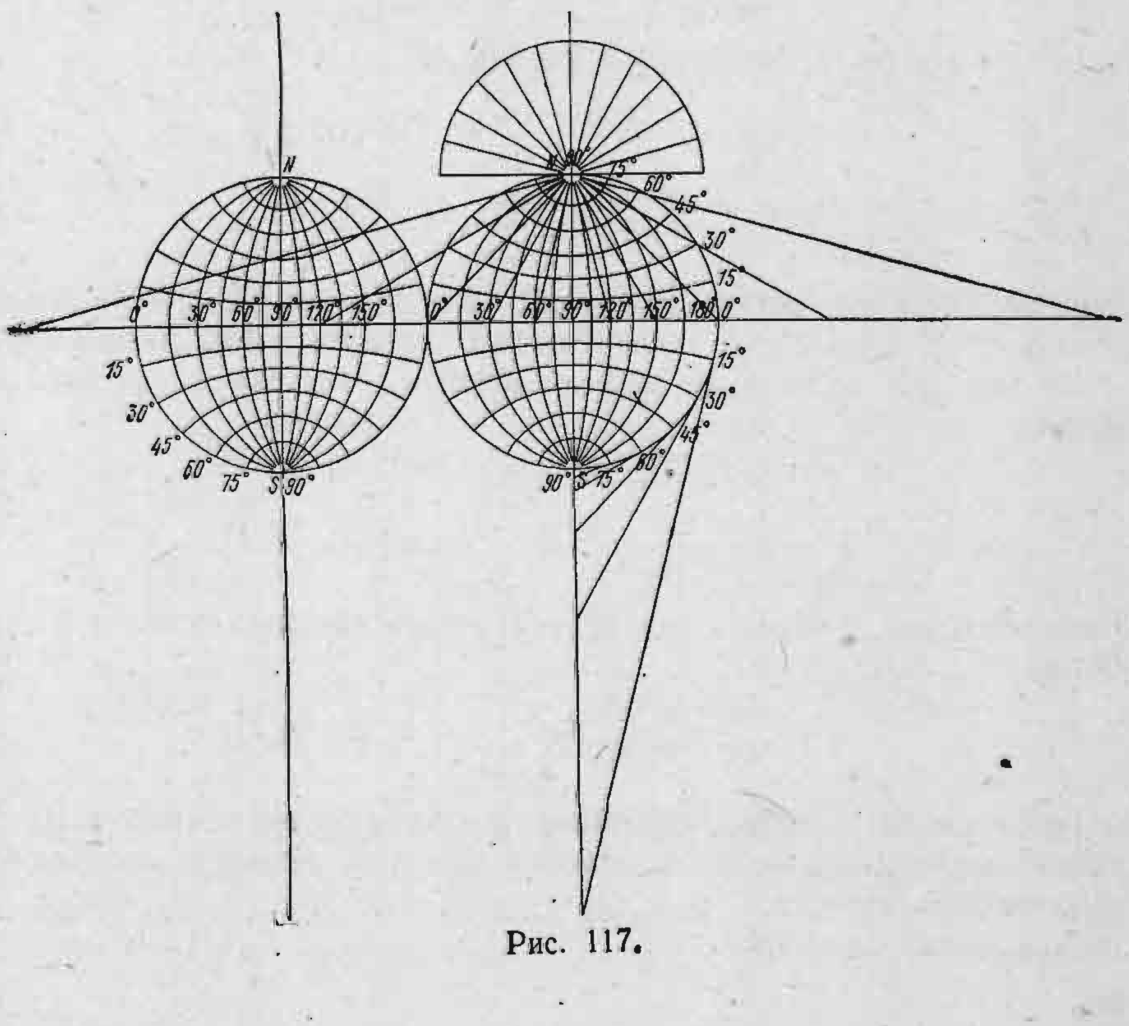


Рис. 117.

30°, 45°, 60°, 75° для обоих полушарий (западного и восточного)).

Из рис. 117 видно, что спектр параллелей расширяется вблизи полюсов. Докажем это аналитически. Пусть φ — широта точки M (рис. 116). Полагая $NS=2$, будем иметь: $PM=\operatorname{ctg}\varphi$, $OP=\operatorname{cosec}\varphi$, следовательно,

$$y=OK=OP-PM=\operatorname{cosec}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Эта функция $y=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ возрастающая на сегменте $[0, \pi/2]$ и при изменении φ от 0 до $\pi/2$ функция $y=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ возрастает от 0 до 1. Докажем, что значениям широт φ_1, φ_2, φ_3, имеющих равные приращения (на сегменте $0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3\leqslant\pi/2$) $(\varphi_2-\varphi_1=$ $=\varphi_3-\varphi_2>0)$, т. е. $\varphi_2=(\varphi_1+\varphi_3)/2$, соответствуют значения функции

$$y_1=\operatorname{tg}(\varphi_1/2),\quad y_2=\operatorname{tg}(\varphi_2/2),\quad y_3=\operatorname{tg}(\varphi_3/2)$$

такие, что $y_2-y_1<y_3-y_2$ или что $2y_2<y_1+y_3$. Этим и будет доказано, что спектр параллелей разряжается вблизи полюсов. Итак, надо доказать, что

$$2\operatorname{tg}(\varphi_2/2)<\operatorname{tg}(\varphi_1/2)+\operatorname{tg}(\varphi_2/2),$$

$$2\frac{\sin(\varphi_2/2)}{\cos(\varphi_2/2)}<\frac{\sin((\varphi_1+\varphi_3)/2)}{\cos(\varphi_1/2)\cos(\varphi_3/2)},$$

$$2\frac{\sin(\varphi_2/2)}{\cos(\varphi_2/2)}<\frac{\sin\varphi_2}{\cos(\varphi_1/2)\cos(\varphi_3/2)},$$

$$\cos(\varphi_1/2)\cos(\varphi_3/2)<\cos^2(\varphi_2/2),$$

$$\cos\varphi_2+\cos\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}<1+\cos\varphi_2,$$

$$\cos\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}<1.$$

Это неравенство верное, так как $0<(\varphi_3-\varphi_1)/2<\pi/2$; неравенство $y_2<(y_1+y_3)/2$ ему эквивалентно, следовательно, и оно верное.

К тем же значениям можно прийти, используя производные. Имеем

$$y=\operatorname{tg}(\varphi/2),$$

$$y'=\frac{1}{2\cos^2(\varphi/2)}>0,\qquad \varphi\in[0,\ \pi/2],$$

следовательно, функция $y=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ возрастает на сегменте $[0, \pi/2]$. Далее

$$y''=\frac{\sin(\varphi/2)}{2\cos^3(\varphi/2)}>0,\qquad \varphi\in[0,\ \pi/2],$$

следовательно, график функции $y=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ на сегменте $[0, \pi/2]$ имеет выпуклость вниз, и поэтому на этом сегменте выполняется неравенство Йенсена: $y_2<(y_1+y_3)/2$, где y_1, y_2, y_3 имеют указанные выше значения.

Наконец, в том, что спектр параллелей расширяется вблизи полюсов, подтверждает и следующая таблица, в которой даны значения функции $y = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ через 15° изменения широты и значения $\Delta y = y_{i+1} - y_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

φ	y	Δy
0°	0,0000	
		0,1317
15°	0,1317	
		0,1362
30°	0,2679	
		0,1463
45°	0,4142	
		0,1632
60°	0,5774	
		0,1899
75°	0,7673	
		0,2327
90°	1,0000	

Впрочем, все это сразу следует и из того, что спектр функции $y = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ повторяет при изменении φ от 0° до 90° «в обратном направлении» спектр функции

$$x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

(сравните таблицы значений функций $y = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$).

Если дополнить изображения меридианов и параллелей при построении карт западного и восточного полушарий (в стереографической проекции) до полных окружностей, то получим множество всех окружностей, проходящих через точки N и S (меридианы) и множество всех окружностей, ортогональных к изображениям меридианов (параллели) (рис. 118).

Множество всех окружностей, проходящих через две фиксированные точки N и S, называется *эллиптическим пучком окруж-*

ностей; точки N и S при этом называются *базисными*. Множество всех окружностей, каждая из которых ортогональна всем окружностям эллиптического пучка с базисными точками N и S, называется *гиперболическим пучком окружностей*, союзным с рассматриваемым эллиптическим; точки N и S называются *предельными точками* гиперболического пучка или *точками Понселе* такого

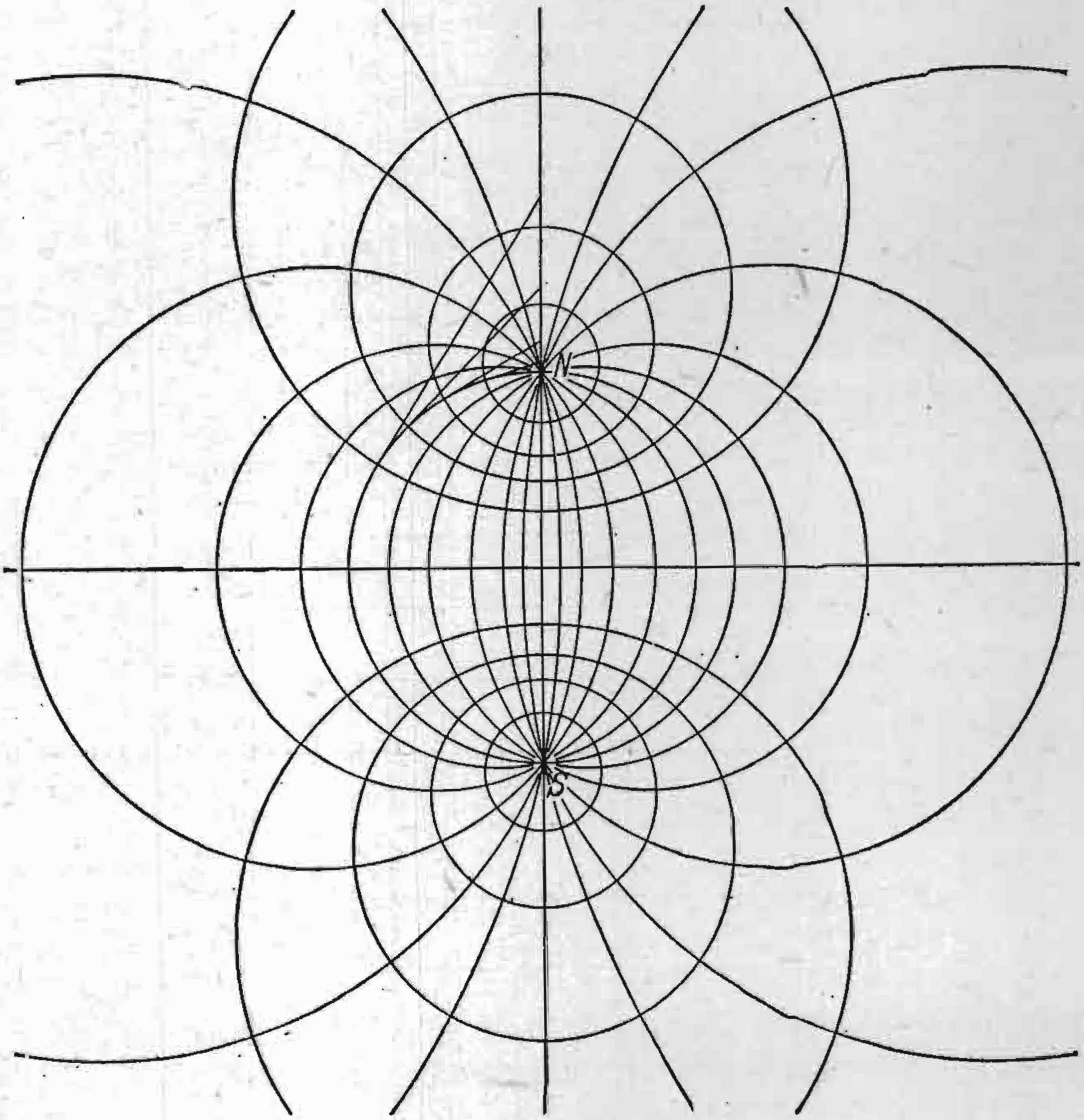


Рис. 118.

пучка. При изображении сети меридианов и параллелей при стереографической проекции западного и восточного полушарий из эллиптического пучка окружностей и союзного с ним гиперболического пучка надо выделить часть, заключенную внутри окружности эллиптического пучка, диаметром которой является отрезок NS, где N и S — базисные точки эллиптического пучка.

Стереографическую проекцию сети меридианов и параллелей можно осуществить, выбирая на сфере две любые диаметрально противоположные точки A и B и проектируя сферу из точки A на плоскость, касательную к сфере Ω_1 в точке B. Так как стереографическая проекция есть конформное отображение сферы на плоскость, то ортогональная сеть меридианов и параллелей отобразится в ортогональную же сеть двух пучков окружностей: меридианы отобразятся в эллиптический пучок с базисными точками N и S, а параллели в союзный с ним гиперболический пучок с предельными точками N и S. Проекция основного меридиана будет некоторой окружностью K, проходящей через точки N и S, причем NS будет хордой этой окружности. Карта одного из полушарий (западного и восточного) будет заключена внутри окружности K. Аналогично строится карта другого полушария.

Если из гиперболического пучка окружностей выделить любую из них α, считая ее изображением экватора (а точку Понселе, лежащую внутри выделенной окружности α, считать изображением полюса), то получим карту северного или южного полушария. Изображениями параллелей будут все окружности гиперболического пучка, лежащие внутри окружности α, а полумеридианами — дуги союзного эллиптического пучка, заключенные внутри окружности α и выходящие из полюса (расположенного внутри α). При этом эти полумеридианы будут соединяться в дугу одной окружности, если сумма долгот (восточной и западной) равна $180°$ (или иначе: если разность положительной и отрицательной долготы равна $180°$).

Такова качественная картина изображения меридианов и параллелей при произвольной стереографической проекции западного, восточного, северного и южного полушарий.

Покажем, как выполнить точно геометрически построение спектра меридианов и параллелей при произвольной стереографической проекции.

Начнем с построения спектра меридианов и параллелей при изображении западного (или восточного) полушария, считая, что широта и долгота меняются, например, через $15°$. Рассмотрим сечение $\Omega = ANBS$ сферы Ω_1 плоскостью, проходящей через диаметры AB и SN (рис. 119). Пусть N и S — проекции точек N и S из точки A на касательную к сечению Ω в точке B. Так как при вращении сферы Ω_1 вокруг оси SN меридианы переходят один в другой (а параллели инвариантны), то в качестве изображения α основного меридиана с дополнением этого меридиана до полной окружности можно взять любую окружность с хордой NS. Так как стереографическая проекция является конформным отображением сферы на плоскость, то для построения изображения меридианов через равные промежутки долгот следует построить дуги окружностей, центры которых лежат на медиатрисе отрезка NS, которые заключены внутри изображения α основного меридиана и образуют последовательно друг с другом равные углы. Так, например, если изменять долготу через $15°$, то получим указанным образом изображения тринадцати меридианов (окружность α — это изображение двух меридианов с долготами $0°$ и $180°$), которые последовательно пересекаются под углами равными $15°$.

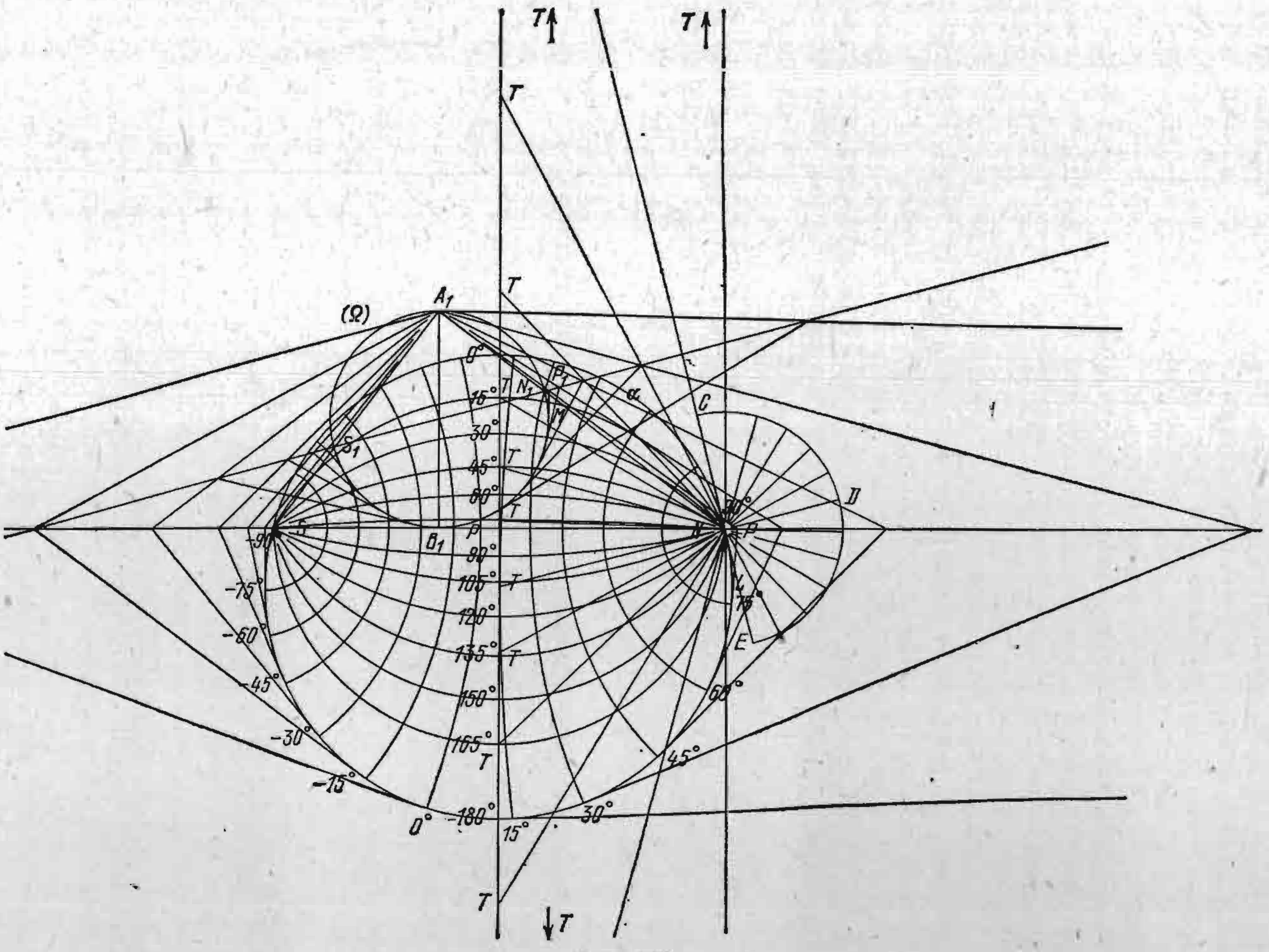

T
T
T
T
(Ω)
A_1
P_1
N_1
M
S_1
S
B_1
P
N
C
D
E
α
0°
15°
30°
45°
60°
75°
90°
105°
120°
135°
150°
165°
−180°
−90°
−75°
−60°
−45°
−30°
−15°
0°
15°
30°
45°
60°
75°

Рис. 119.

На рис. 120 построения выполнены в совмещенных плоскостях: плоскость окружности Ω совмещена с плоскостью, касательной к сфере Ω_1 в точке B (совмещение достигается поворотом вокруг прямой, по которой пересекаются эти две плоскости).

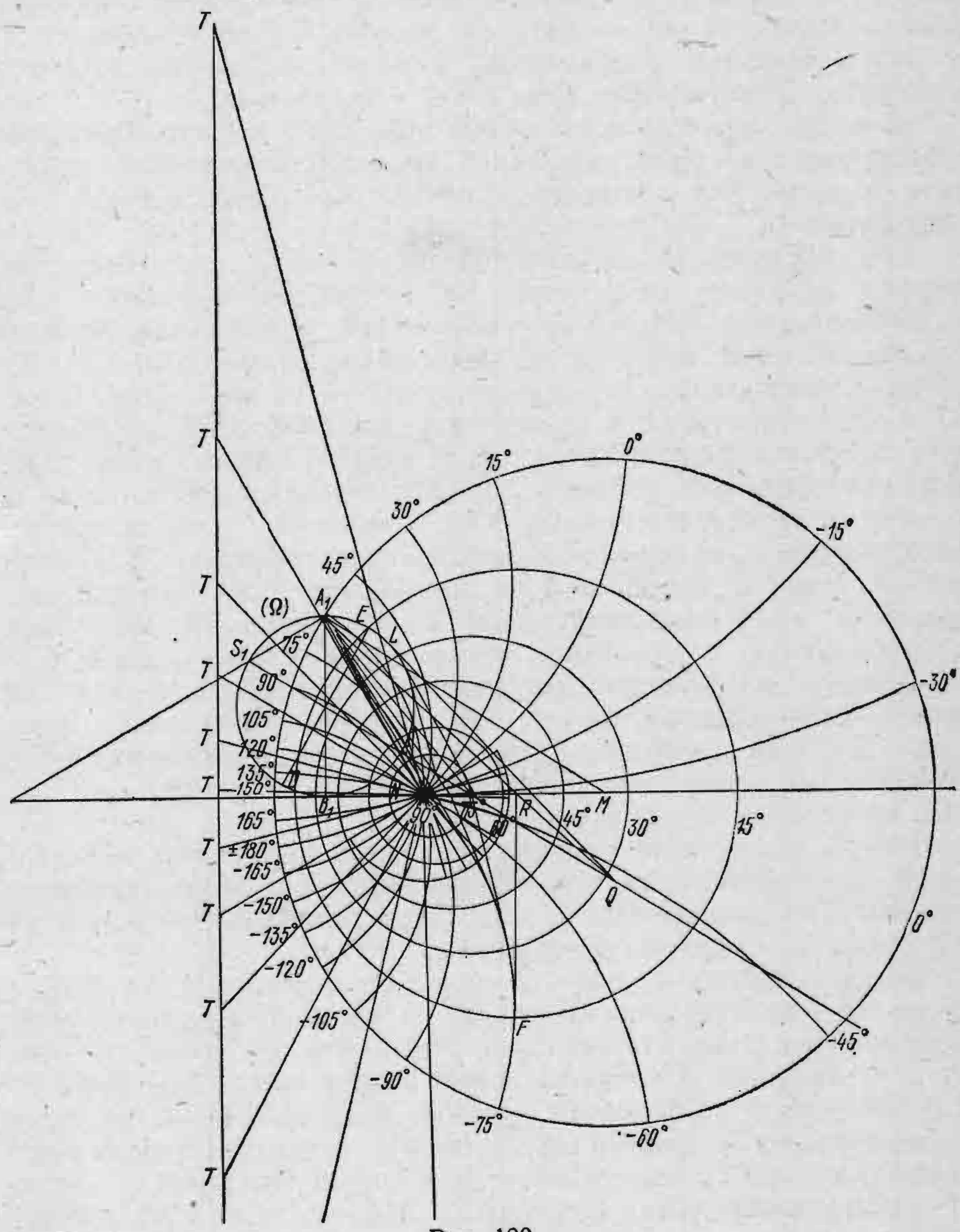


Рис. 120.

Для геометрического построения изображения этих меридианов заметим, что угол между двумя пересекающимися окружностями равен углу между их радиусами, проведенными в точку пересечения окружностей. Поэтому для построения радиусов и центров изображений меридианов следует поворачивать радиус NO окружности α вокруг точки N последовательно, например, на угол 15°. Для этого построим полуокружность CDE с центром N, диаметр CE которой касается окружности α в точке N (см. рис. 119). Дугу CDE делим на 12 равных частей и точки деления проектируем из точки N на медиатрису отрезка NS. Эти проекции T и будут центрами изображений меридианов (соответствующих изменению долготы через 15°), а TN — их радиусы.

Заметим, что использованное в этом построении соображение о конформности стереографической проекции можно было применить и выше для построения спектра меридианов в более простом случае.

Для построения изображений параллелей при изменении широты, например, также через 15° следует воспользоваться способом построения центра стереографической проекции окружности, указанным выше при произвольном расположении диаметра AB сферы Ω_1 относительно окружности, лежащей на этой сфере. Пусть OT — радиус окружности Ω, перпендикулярный к S_1N_1. Разделим дугу S_1TN_1 на 12 равных частей. Пусть M — одна из точек деления (например, ближайшая к N_1). Касательная к окружности Ω в точке M пересекает прямую S_1N_1 в вершине P конуса, касающегося сферы Ω_1 по параллели, проходящей через точку M. Проекция P' точки P из точки A на прямую NS будет центром изображения этой параллели. Если PL — касательная, например, к изображению α основного меридиана (L — точка касания), то PL — радиус изображения рассматриваемой параллели (а P — ее центр). Таким образом, на рис. 120 построены изображения половин параллелей и половины экватора (центром изображения экватора служит точка пересечения прямой NS с прямой, проходящей через точку A параллельно N_1S_1).

Теперь рассмотрим построение спектра меридианов и параллелей при выполнении стереографической проекции, например северного полушария при произвольном расположении диаметра AB сферы Ω_1 относительно экватора.

Построим опять сечение Ω сферы Ω_1 плоскостью AN_1BS_1, и пусть DE — диаметр окружности Ω, по которому плоскость сечения пересечет плоскость экватора. Пусть N и S — проекции точек N_1 и S_1 из точки A на касательную к окружности Ω в точке B. Для построения изображения экватора надо из точки A опустить перпендикуляр на диаметр DE. Пусть M — точка пересечения этого перпендикуляра с касательной к окружности Ω в точке B. Тогда M — центр изображения экватора, а MA — радиус этого изображения.

Все последующие построения мы будем выполнять в совмещенных плоскостях: плоскости окружности Ω с плоскостью, касательной к сфере Ω_1 в точке B (совмещение, как и выше, достигается поворотом вокруг прямой, по которой пересекаются эти две плоскости).

Для построения изображений параллелей при изменении широты, например через 15°, разделим дугу EN_1 окружности Ω на 6 равных частей. Пусть L — одна из точек деления (например, ближайшая к E). Если Q — точка пересечения касательной к окружности Ω в точке L с прямой S_1N_1, то Q — вершина конуса, касающегося сферы Ω_1 по параллели, проходящей через точку L. Проекция R точки Q на прямую BN из точки A является центром изображения параллели, проходящей через точку L. Радиус же изображения этой параллели равен отрезку RF касательной, проведенной к изображению любого меридиана (т. е. к любой окружности, проходящей через точки N и S). Указанным выше способом построены параллели северного полушария для широт от 90° до 0° через равные промежутки 15°.

Для построения изображения меридианов заметим (о чем уже говорилось выше), что при вращении сферы вокруг оси N_1S_1 меридианы переходят друг в друга (а параллели инвариантны). Поэтому для построения полумеридианов можно в качестве двух основных полумеридианов, соответствующих долготам 0° и 180° и образующих одну дугу окружности, выбрать любую дугу окружности, проходящую через точки N и S, лежащую внутри изображения экватора.

Построим полуокружность с центром N, разделим ее, например, на 12 равных частей и точки деления спроектируем из точки N на медиатрису отрезка SN (точно так же строились выше изображения меридианов при стереографической проекции западного и восточного полушарий). Проекции будут центрами полумеридианов, выходящих из точки N и образующих последовательно друг с другом углы 15°. Полумеридианы, разность долгот которых равна 180° ($180° - 0° = 180°$, $165° - (-15°) = 180°$, $150° - (-30°) = 180°$ и т. д.) соединяются при изображении в одну дугу окружности, лежащую внутри изображения экватора. Это имеет место, например, и в простейшем случае, изображенном на рисунке, где изображения меридианов, т. е. радиусы окружности, для значений долгот, разность которых равна 180°, соединяются в диаметр окружности, являющейся изображением экватора. Конечно, то же самое имеет место и на сфере Ω_1 на любом из двух полушарий: северном или южном.

ГЛАВА V

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ

§ 1. Определители третьего порядка

Определитель третьего порядка вводится следующим соотношением:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2. \quad (1)$$

a_i, b_i, c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ называются *элементами* определителя.

Основные свойства:

1°. Определитель не меняется при *транспонировании*, т. е. при замене строк столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

2°. При перестановке двух любых столбцов определитель меняет знак, сохраняя абсолютную величину, например:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Определитель не меняется при круговой перестановке его столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

и меняет знак при нарушении кругового порядка его столбцов (см. (3)).

3°. Если в определителе два столбца одинаковые, то он равен нулю.

4°. Если все элементы какого-нибудь столбца определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

5°. Определитель является линейной функцией своих столбцов. Это означает, что выполняются следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 + \mu k_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 + \mu k_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 + \mu k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

и аналогичные соотношения для второго и третьего столбцов.

6°. Определитель не меняется, если к любому его столбцу прибавить линейную комбинацию двух других столбцов, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1+\lambda b_1+\mu c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\lambda b_2+\mu c_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda b_3+\mu c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

и аналогично для второго и третьего столбцов. В частности, определитель не меняется, если к любому его столбцу прибавить или отнять другой столбец.

7°. Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его столбцы были линейно зависимы, т. е. чтобы существовали числа λ, μ, ν, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что

$$\begin{aligned} \lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1&=0, \\ \lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2&=0, \\ \lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3&=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Иначе, для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы один из его столбцов был линейной комбинацией двух других, например:

$$\begin{aligned} c_1&=\lambda a_1+\mu b_1, \\ c_2&=\lambda a_2+\mu b_2, \\ c_3&=\lambda a_3+\mu b_3. \end{aligned} \tag{8}$$

8°. При умножении определителей можно пользоваться формулой

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 & a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3 & a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3 \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 & a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3 & a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 & a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3 & a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Так как определитель не меняется при транспонировании, то можно получить еще три способа умножения определителей, если транспонировать один из множителей левой части равенства (9).

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется коэффициент при этом элементе в формуле (1).

Например, алгебраическое дополнение C_1 элемента c_1 определителя (1) есть

$$C_1=a_2b_3-a_3b_2.$$

Алгебраическое дополнение A_2 элемента a_2 определителя (1) есть

$$A_2=b_3c_1-b_1c_3$$

и т. д. (всего 9 алгебраических дополнений A_i, B_i, C_i $(i=1, 2, 3)$).

Всякий определитель равен сумме произведений элементов любого столбца на соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

и аналогично для второго и третьего столбцов.

Всякий определитель равен сумме произведений элементов любой строки на соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

и аналогично для второй и третьей строк.

Сумма произведений элементов любого столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю, например:

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0$$

(и еще 5 аналогичных соотношений).

Сумма произведений элементов любой строки на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю, например:

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$$

(и еще 5 аналогичных соотношений).

Минором элемента определителя называется определитель, который получится, если из данного определителя вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых расположен этот элемент.

Например, минором элемента c_1 определителя (1) является определитель

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2,$$

минором элемента a_2 определителя (1) является определитель

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - b_3c_1 \quad \text{и т. д.}$$

Алгебраическое дополнение A любого элемента определителя равно минору M этого элемента, умноженному на $(-1)^{i+j}$, где i и j — соответственно номер строки и номер столбца, на пересечении которых расположен этот элемент:

$$A = (-1)^{i+j} M.$$

§ 2. Векторная алгебра

Вектором называется направленный отрезок. Обозначаются векторы так: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{r}$, ... или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$, ...

Вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*, если точки A и B различны; вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым*, если точки A и B совпадают.

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *коллинеарными*, если прямые AB и CD коллинеарны, т. е. или параллельны, или совпадают. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то мы будем писать $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены в одну сторону, то мы будем писать $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, а если в противоположные, то $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначения модуля: $|\overrightarrow{AB}|$, AB, $|\boldsymbol{a}|$, a.

Ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *равными*, если $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$ и $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$. Нулевой вектор считается отличным от ненулевого. Нулевые векторы считаются равными.

Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ называются *компланарными*, если прямые AB, CD и EF компланарны одной и той же плоскости (*прямая и плоскость* называются *компланарными*, если прямая или параллельна, или лежит на плоскости). Если среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ есть хотя бы один нулевой, то они считаются компланарными.

Отложить вектор $\boldsymbol{a}$ от данной точки A — это значит построить направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\boldsymbol{a}$.

Вектором, *симметричным* с вектором $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, называется вектор $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA}$.

Суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор, который строится так: от произвольной точки A откладываем вектор $\boldsymbol{a}$:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a},$$

от точки B откладываем вектор $\boldsymbol{b}$:

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b},$$

тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Свойства суммы векторов:

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0,$$
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.$$

Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{x}$, что $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. Для построения разности $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ следует отложить векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ от одной и той же точки O:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA}$.

Произведением $\lambda \boldsymbol{a}$ *числа* $\lambda \neq 0$ *на вектор* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ называется вектор, который определяется так: $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| |\boldsymbol{a}|$, причем $\lambda \boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$, если $\lambda > 0$, и $\lambda\boldsymbol{a}\downarrow\uparrow\boldsymbol{a}$, если $\lambda < 0$. Если или $\lambda = 0$, или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то по определению $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Свойства произведения числа на вектор:

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a},\\
\lambda(\mu\boldsymbol{a}) &= (\lambda\mu)\boldsymbol{a},\\
\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\\
(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} &= \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.
\end{aligned}
$$

Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, то *отношением* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ называется такое число λ, что $\lambda\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, то $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\pm\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$, причем в правой части берется знак $+$, если $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$, и знак $-$, если $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, то $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=0$.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \ldots$ называется сумма $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}+\ldots$

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \ldots$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа λ, μ, $\nu, \ldots$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}+\ldots=\boldsymbol{0}$. Если это равенство возможно только при $\lambda=\mu=\nu=\ldots=0$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \ldots$ называются *линейно независимыми*.

Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимыми.

Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимыми.

Базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ на плоскости называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, компланарных этой плоскости. Если векторы базиса единичные и взаимно перпендикулярные, то базис называется *ортонормальным*. Векторы ортонормального базиса обозначаются обычно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}, \qquad |\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1.$$

Пусть на плоскости введен базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор, компланарный этой плоскости. Существует и притом только одна пара чисел x, y таких, что

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2.$$

Коэффициенты x и y при $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в этом разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ имеет координаты x, y, то пишут $\boldsymbol{a}=\{x, y\}$ или $\boldsymbol{a}\{x, y\}$.

Базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Если векторы базиса единичные и попарно ортогональные, то базис называется *ортонормальным*. Векторы ортонормального базиса обозначаются обычно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{i}, \quad |\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=|\boldsymbol{k}|=1.$$

Если в пространстве введен базис e_1, e_2, e_3 и a — произвольный вектор, то существует и притом только одна тройка чисел x, y, z таких, что

$$a = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Числа x, y, z называются *координатами* вектора a в базисе e_1, e_2, e_3. Если вектор a имеет координаты x, y, z, то пишут $a = \{x, y, z\}$ или $a\{x, y, z\}$.

Два вектора a и b *равны* тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Если в базисе e_1, e_2

$$a = \{x, y\}, \quad b = \{x', y'\},$$

то

$$\begin{aligned} a + b &= \{x + x', \ y + y'\}, \\ a - b &= \{x - x', \ y - y'\}, \\ \lambda a &= \{\lambda x, \ \lambda y\}. \end{aligned}$$

Если в базисе e_1, e_2, e_3

$$a = \{x, y, z\}, \qquad b = \{x', y', z'\},$$

то

$$\begin{aligned} a + b &= \{x + x', \ y + y', \ z + z'\}, \\ a - b &= \{x - x', \ y - y', \ z - z'\}, \\ \lambda a &= \{\lambda x, \ \lambda y, \ \lambda z\}. \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $a = \{x, y\}$ и $b = \{x', y'\}$ на плоскости является равенство

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов $a = \{x, y, z\}$ и $b = \{x', y', z'\}$ в пространстве является условие:

$$\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 0.$$

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов

$$a = \{x, y, z\}, \quad b = \{x', y', z'\}, \quad c = \{x'', y'', z''\}$$

является равенство

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & \lambda'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Скалярным произведением (a, b) ненулевых векторов a и b называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$(a, b) = |a|\,|b| \cos \varphi.$$

Если $a = 0$ или $b = 0$, то по определению $(a, b) = 0$.

Свойства скалярного произведения двух векторов:

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) > 0, \text{ если } \boldsymbol{a} \neq 0, \quad (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0, \text{ если } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}),$$

$$(\lambda \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}).$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})$ иногда обозначают так: $\boldsymbol{a}^2$ и называют скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$.

Если в ортонормальном базисе $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}$ на плоскости

$$\boldsymbol{a} = \{x,\ y\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x',\ y'\},$$

то

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = xx' + yy',$$

а если

$$\boldsymbol{a} = \{x,\ y\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x',\ y'\}$$

в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$, то

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = g_{11}xx' + g_{12}(xy' + x'y) + g_{22}yy',$$

где

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j).$$

Совокупность скалярных произведений $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$ базисных векторов $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ называется *фундаментальным тензором* этого базиса.

Если в ортонормальном базисе $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{a} = \{x,\ y,\ z\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x',\ y',\ z'\},$$

то

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = xx' + yy' + zz',$$

а если

$$\boldsymbol{a} = \{x,\ y,\ z\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x',\ y',\ z'\}$$

в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$, то

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = g_{11}xx' + g_{22}yy' + g_{33}zz' + \\ + g_{12}(xy' + x'y) + g_{23}(yz' + y'z) + g_{31}(zx' + z'x),$$

где $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$ (*фундаментальный тензор базиса* $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$).

Плоскость называется *ориентированной*, если на ней введен базис $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$.

Если упорядоченная пара $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет ориентацию, одинаковую с базисом $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$:

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \uparrow\uparrow \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,$$

то эта упорядоченная пара $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ называется *правой* или *парой, имеющей положительную ориентацию*. Если же $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ имеют противоположную ориентацию:

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \uparrow\downarrow \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,$$

то упорядоченная пара $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ называется *левой* или *парой, имеющей отрицательную ориентацию*.

Пусть неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ лежат на ориентированной плоскости. *Смешанным* или *псевдоскалярным произведением* $\boldsymbol{ab}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется число, абсолютная величина которого равна площади параллелограмма со сторонами $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ и которое положительно, если упорядоченная пара $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — правая, и отрицательно, если эта пара — левая. Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то по определению $\boldsymbol{ab}=0$.

Свойства смешанного (псевдоскалярного) произведения:

$$\boldsymbol{ab}=-\boldsymbol{ba},$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{ab}).$$

Пусть на ориентированной плоскости заданы два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, угол между которыми равен α. *Углом* φ *от вектора* $\boldsymbol{a}$ *до вектора* $\boldsymbol{b}$ называется угол $\varphi=\alpha$, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — правая пара, и угол $\varphi=-\alpha$, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — левая пара.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые и $\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$, то по определению $\varphi=0$, а если $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$, то по определению $\varphi=\pi$. Угол φ от вектора $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ до вектора $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ определяется из соотношений

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|},\qquad \sin\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

Если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y\},\qquad \boldsymbol{b}=\{x',\ y'\}$$

в ортонормальном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, то

$$\cos\varphi=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Если ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то

$$\cos\varphi=\frac{g_{11}xx'+g_{12}(xy'+x'y)+g_{22}yy'}{\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}\,\sqrt{g_{11}x'^2+2g_{12}x'y'+g_{22}y'^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{g}\,(xy'-x'y)}{\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}\,\sqrt{g_{11}x'^2+2g_{12}x'y'+g_{22}y'^2}},$$

где g — *определитель Грама*:

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)^2.$$

Обычно для φ берется цепочка значений $\varphi+2k\pi$, где k принимает все целые значения, а φ — одно из значений угла от вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{b}$.

Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ лежит на плоскости, ориентированной базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$. *Вектором* $\boldsymbol{a}_\varphi$ называется вектор, полученный поворотом вектора $\boldsymbol{a}$ на угол φ (если $0<\varphi<\pi$, то пара $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_\varphi$ правая, если $-\pi<\varphi<0$, то левая; если $\varphi=0$, то $\boldsymbol{a}_\varphi=\boldsymbol{a}$, если $\varphi=\pi$, то $\boldsymbol{a}_\varphi=-\boldsymbol{a}$).

Вектор, полученный поворотом вектора $\boldsymbol{a}$ на угол $\pi/2$, обозначается так: $[\boldsymbol{a}]$.

Имеет место формула

$$\boldsymbol{ab}=([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b}).$$

Если в ортонормальном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y\},\qquad \boldsymbol{b}=\{x',\ y'\},$$

то

$$\boldsymbol{a}_\varphi=\{x\cos\varphi-y\sin\varphi,\ x\sin\varphi+y\cos\varphi\},$$

$$[\boldsymbol{a}]=\{-y,\ x\},$$

$$\boldsymbol{ab}=\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

Если векторы $\boldsymbol{a}=\{x,\ y\}$ и $\boldsymbol{b}=\{x',\ y'\}$ заданы в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, то

$$\boldsymbol{ab}=\sqrt{g}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

Два базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ на плоскости называются *взаимными*, если

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}^j)=\delta_i^j=\begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j. \end{cases}$$

Векторы взаимных базисов связаны соотношениями

$$\boldsymbol{e}^1=\frac{[\boldsymbol{e}_2]}{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1},\qquad \boldsymbol{e}^2=\frac{[\boldsymbol{e}_1]}{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2},\qquad \boldsymbol{e}_1=\frac{[\boldsymbol{e}^2]}{\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^1},\qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{[\boldsymbol{e}^1]}{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2}.$$

В других обозначениях: векторы взаимных базисов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$ связаны соотношениями

$$\boldsymbol{aa}^*=\boldsymbol{bb}^*=1,\qquad \boldsymbol{ab}^*=\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}=0,$$

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{[\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{ba}},\qquad \boldsymbol{b}^*=\frac{[\boldsymbol{a}]}{\boldsymbol{ab}},\qquad \boldsymbol{a}=\frac{[\boldsymbol{b}^*]}{\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{a}^*},\qquad \boldsymbol{b}=\frac{[\boldsymbol{a}^*]}{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*}.$$

Разложения произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$ имеют вид

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^1)\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^2)\,\boldsymbol{e}_2,$$

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}^1+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}^2$$

(формулы Гиббса).

Числа $a^1=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^1)$, $a^2=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^2)$, т. е. коэффициенты при $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ в разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, называются *контравариантными координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а числа $a_1=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_1)$, $a_2=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_2)$, т. е. коэффициенты при $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$

в разложении вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, называются *ковариантными координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Если один из векторов задан в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ своими контравариантными координатами:

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = \{x, y\}$$

а другой — ковариантными координатами:

$$\boldsymbol{b} = x'\boldsymbol{e}^1 + y'\boldsymbol{e}^2 = [x', y'],$$

то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = xx' + yy',$$

$$[a] = \sqrt{g}\,[-y, x],$$

$$\boldsymbol{a}_\varphi = \left[xg_{11}\cos\varphi + y\left(g_{12}\cos\varphi - \sqrt{g}\sin\varphi\right),\ x\left(g_{12}\cos\varphi + \sqrt{g}\sin\varphi\right) + yg_{22}\cos\varphi\right]$$

(при $\varphi = \pi/2$ получается предыдущая формула).

Пространство называется *ориентированным*, если в нем введен базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Если упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов одинаково ориентирована с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, то она называется *правой тройкой* или *тройкой, имеющей положительную ориентацию*. Если же упорядоченные тройки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеют противоположную ориентацию, то тройку $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называют *левой* или *тройкой, имеющей отрицательную ориентацию*.

Смешанным произведением $\boldsymbol{abc}$ упорядоченной тройки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарных векторов, лежащих в ориентированном пространстве, называется число, абсолютная величина которого равна объему параллелепипеда с ребрами $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ (O — произвольная точка) и которое положительно, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая, и отрицательно, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — левая. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то по определению $\boldsymbol{abc} = 0$.

Свойства смешанного произведения трех векторов:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab} = -\boldsymbol{bac},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{cd} = \lambda\,(\boldsymbol{acd}) + \mu\,(\boldsymbol{bcd})$$

(и аналогично для второго и третьего множителей).

Если пространство ориентировано ортонормальным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и в этом базисе

$$\boldsymbol{a} = \{x, y, z\}, \quad \boldsymbol{b} = \{x', y', z'\}, \quad \boldsymbol{c} = \{x'', y'', z''\},$$

то

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

а в произвольном базисе

$$\boldsymbol{abc} = \sqrt{g}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

где g — *определитель Грама:*

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}=(e_1e_2e_3)^2.$$

Пусть в ориентированном пространстве заданы два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторным произведением $[\boldsymbol{ab}]$ вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектор, определяемый следующими условиями:

1) $|[\boldsymbol{ab}]|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, где φ — угол от вектора $\boldsymbol{a}$ до вектора $\boldsymbol{b}$;
2) $[\boldsymbol{ab}]\perp\boldsymbol{a}$, $[\boldsymbol{ab}]\perp\boldsymbol{b}$;
3) упорядоченная тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{ab}]$ — правая.

Если $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, то по определению $[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{0}$.

Свойства векторного произведения:

$$[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}],$$
$$[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}],$$
$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}],$$
$$([\boldsymbol{ab}],\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{bc}])=\boldsymbol{abc}.$$

Если в ортонормальном базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{a}=\{x,\ y,\ z\},\qquad \boldsymbol{b}=\{x',\ y',\ z'\},$$

то

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right\}.$$

Два базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$ называются *взаимными*, если

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}^j)=\delta_i^j=\begin{cases} 1 & \text{при}\quad i=j, \\ 0 & \text{при}\quad i\neq j. \end{cases}$$

Векторы взаимных базисов связаны соотношениями

$$\boldsymbol{e}^1=\frac{[\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3]}{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3},\qquad \boldsymbol{e}^2=\frac{[\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1]}{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3},\qquad \boldsymbol{e}^3=\frac{[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2]}{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3},$$
$$\boldsymbol{e}_1=\frac{[\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3]}{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3},\qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{[\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}^1]}{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3},\qquad \boldsymbol{e}_3=\frac{[\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2]}{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}^3}.$$

Другие обозначения: взаимные базисы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}^*$, $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{c}^*$ определяются соотношениями

$$\boldsymbol{aa}^*=\boldsymbol{bb}^*=\boldsymbol{cc}^*=1,$$
$$\boldsymbol{ab}^*=\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{bc}^*=\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ca}^*=\boldsymbol{ac}^*=0,$$

и, далее,

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{[\boldsymbol{bc}]}{\boldsymbol{abc}},\qquad \boldsymbol{b}^*=\frac{[\boldsymbol{ca}]}{\boldsymbol{abc}},\qquad \boldsymbol{c}^*=\frac{[\boldsymbol{ab}]}{\boldsymbol{abc}},$$
$$\boldsymbol{a}=\frac{[\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*]}{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*},\qquad \boldsymbol{b}=\frac{[\boldsymbol{c}^*\boldsymbol{a}^*]}{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*},\qquad \boldsymbol{c}=\frac{[\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*]}{\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}^*\boldsymbol{c}^*}.$$

Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ по базисам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}^1$, $\boldsymbol{e}^2$, $\boldsymbol{e}^3$, разлагается следующим образом:

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^1)\,\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^2)\,\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^3)\,\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_1)\,\boldsymbol{e}^1+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_2)\,\boldsymbol{e}^2+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_3)\,\boldsymbol{e}^3$$

(*формулы Гиббса*).

Числа $a^i=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}^i)$ называются *контравариантными координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, а числа $a_i=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_i)$ называются *ковариантными координатами вектора* $\boldsymbol{a}$ в том же базисе.

Если в произвольном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы контравариантными координатами:

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3=\{x,\ y,\ z\},$$
$$\boldsymbol{b}=x'\boldsymbol{e}_1+y'\boldsymbol{e}_2+z'\boldsymbol{e}_3=\{x',\ y',\ z'\},$$

то ковариантные координаты векторного произведения:

$$[\boldsymbol{ab}]=\sqrt{g}\left[\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right].$$

Отметим еще несколько тождеств:

$$(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d}) \end{vmatrix},\qquad ([\boldsymbol{ab}],\ [\boldsymbol{cd}])=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d}) \end{vmatrix},$$

$$[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]]=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),\qquad [\boldsymbol{ab}]^2+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2,$$

$$[[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}]]=\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{abd})-\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{acd})-\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bcd}),$$

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bcd})+\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{cad})+\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{bda})+\boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{acb})=0,$$

$$(\boldsymbol{abc})\,(\boldsymbol{xyz})=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{z}) \end{vmatrix},$$

$$(\boldsymbol{abc})^2=\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c}) \end{vmatrix},$$

$$[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{bc}]\,[\boldsymbol{ca}]=(\boldsymbol{abc})^2.$$

В приводимых задачах даны вопросы, связанные с понятием скользящего вектора.

Скользящий вектор есть также направленный отрезок, однако равенство таких векторов определяется следующим образом: два ненулевых скользящих вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если равны длины отрезков AB и CD, если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ направлены в одну сторону и если они лежат на одной и той же прямой; эта прямая называется *суппортом скользящего вектора*. Скользящий вектор $\boldsymbol{\omega}$ на плоскости задается его координатами x, y и моментом $z=\boldsymbol{r\omega}$ относительно какой-либо точки O ($\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$, где M — произвольная точка суппорта; $\boldsymbol{r\omega}$ — смешанное (или псевдоскалярное) произведение).

§ 3. Аналитическая геометрия

Фиксируем на плоскости точку O и базис e_1, e_2. Отложим векторы e_1, e_2 от точки O:

$$\overrightarrow{OE_1}=e_1, \qquad \overrightarrow{OE_2}=e_2.$$

Совокупность прямых $Ox=OE_1$, $Oy=OE_2$, на которых от точки O отложены векторы e_1, e_2 базиса, называется *общей декартовой системой координат на плоскости; Ox* называется *осью абсцисс*; *Oy — осью ординат*. Точка O называется *началом координат; Ox* и *Oy — осями координат*.

Аналогично определяется общая декартова система координат $Oxyz$ в пространстве.

Если на плоскости (соответственно в пространстве) вводится ортонормальный базис i, j (соответственно i, j, k) и фиксируется точка O, то соответствующая система координат называется *декартовой прямоугольной*.

Радиус-вектором r точки M называется направленный отрезок

$$r=\overrightarrow{OM}.$$

Общими декартовыми координатами x, y *точки* M в общей декартовой системе координат (O, e_1, e_2) на плоскости называются координаты ее радиус-вектора $r=\overrightarrow{OM}$ в базисе e_1, e_2:

$$r=xe_1+ye_2.$$

Координатами точки M в декартовой прямоугольной системе координат (O, i, j) на плоскости называются координаты x, y ее радиус-вектора $r=\overrightarrow{OM}$ в базисе i, j:

$$r=xi+yj.$$

Аналогично определяются общие декартовы и декартовы прямоугольные координаты x, y, z точки M в пространстве:

$$r=\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3,$$

$$r=\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk.$$

Если точка M имеет координаты x, y, то пишут $M(x, y)$ или $M=(x, y)$ (в пространстве: $M(x, y, z)$ или $M=(x, y, z)$).

Если r_1 и r_2 — радиус-векторы точек A и B, то

$$\overrightarrow{AB}=r_2-r_1;$$

в координатах

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\} \qquad \text{(на плоскости)},$$

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\} \qquad \text{(в пространстве)},$$

где $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ (на плоскости), $A=(x_1, y_1, z_1)$, $B=(x_2, y_2, z_2)$ (в пространстве).

Длина d отрезка AB, концы которого заданы радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, вычисляется по формуле

$$d = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|.$$

В декартовой прямоугольной системе координат

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(на плоскости)},$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{(в пространстве)}.$$

В общей декартовой системе координат

$$d = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2} \quad \text{(на плоскости)},$$

$$d^2 = g_{11}(x_2 - x_1)^2 + g_{22}(y_2 - y_1)^2 + g_{33}(z_2 - z_1)^2 + \\ + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + 2g_{23}(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) + \\ + 2g_{31}(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) \quad \text{(в пространстве)}.$$

В частности, расстояние r от точки до начала координат в декартовой прямоугольной системе координат:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(на плоскости)},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{(в пространстве)},$$

а в общей декартовой системе координат:

$$r = \sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2} \quad \text{(на плоскости)},$$

$$r = \sqrt{g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + 2g_{12}xy + 2g_{23}yz + 2g_{31}zx} \quad \text{(в пространстве)}.$$

Пусть на плоскости введена декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим произвольную точку M, отличную от начала координат. *Первой полярной координатой* точки M называется длина ρ отрезка OM. *Второй полярной координатой* точки M называется угол φ от вектора $\boldsymbol{i}$ до радиус-вектора $\overline{OM}$ точки M.

Если x, y — координаты точки M в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Для начала координат по определению: $\rho = 0$, φ — любое число.

Отношением λ, в котором точка $M \neq M_2$ делит ненулевой направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, называется число

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}.$$

Каково бы ни было число $\lambda \neq -1$ и каков бы ни был ненулевой направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, существует и притом только одна точка M, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ.

Если $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы точек M_1 и M_2, то радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M определяется соотношением

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}.$$

В частности, радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиус-векторов его концов:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}.$$

В общей декартовой системе координат координаты точки M через координаты точек M_1 и M_2 выражаются соотношениями

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad \text{(на плоскости)},$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\quad \text{(в пространстве)},$$

а координаты середины отрезка:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad \text{(на плоскости)},$$

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\quad \text{(в пространстве)}.$$

Точки A, B, C, ... называются *коллинеарными*, если существует прямая, на которой все они расположены.

Точки A, B, C, D, ... называются *компланарными*, если существует плоскость, на которой все они расположены.

Если $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B, C, то необходимое и достаточное условие их коллинеарности имеет вид

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)=0,$$

а в общей декартовой системе координат:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

где $A=(x_1,\ y_1)$, $B=(x_2,\ y_2)$, $C=(x_3,\ y_3)$.

Если $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$ — радиус-векторы точек A, B, C, D, то необходимое и достаточное условие их компланарности имеет вид

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4)=0,$$

а в общей декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}=0,$$

где

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B=(x_2,\ y_2,\ z_2),\ C=(x_3,\ y_3,\ z_3),\ D=(x_4,\ y_4,\ z_4).$$

Треугольником ABC называется совокупность трех точек A, B, C. *Ориентированным треугольником* $\overrightarrow{ABC}$ называется упорядоченная совокупность трех точек A, B, C. Если точки A, B, C неколлинеарны, то треугольник $\overrightarrow{ABC}$ называется *невырожденным*, а если коллинеарны, то *вырожденным*.

Площадью $\overline{ABC}$ невырожденного ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$, лежащего на ориентированной плоскости, называется число, абсолютная величина которого равна площади треугольника $\overrightarrow{ABC}$ и которое положительно, если треугольник $\overrightarrow{ABC}$ имеет правую ориентацию (т. е. правую ориентацию имеет упорядоченная пара $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$), и отрицательно, если $\overrightarrow{ABC}$ имеет левую ориентацию.

Если точки A, B, C коллинеарны, то по определению считаем, что $\overline{ABC}=0$.

Площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ вычисляется по формулам

$$\overline{ABC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB},\qquad \overline{ABC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)$$

($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы точек A, B, C).

В общей декартовой системе координат

$$\overline{ABC}=\frac{\sqrt{g}}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{g}}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$\overline{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади S треугольника ABC правые части надо взять по модулю:

$$S=\frac{\sqrt{g}}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{g}}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

В последних формулах $A=(x_1,\ y_1)$, $B=(x_2,\ y_2)$, $C=(x_3,\ y_3)$.

Отношением

$$\frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}}$$

невырожденных треугольников $\overrightarrow{PQR}$ и $\overrightarrow{ABC}$, лежащих на плоскости, называется число, абсолютная величина которого равна отношению площади треугольника PQR к площади треугольника ABC и которое положительно, если $\overrightarrow{PQR}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют одинаковую ориентацию (т. е. $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{RQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$), и отрицательно, если треугольники $\overrightarrow{PQR}$ и $\overrightarrow{ABC}$ имеют противоположную ориентацию. Если $\overrightarrow{PQR}$ — вырожденный треугольник, а $\overrightarrow{ABC}$ — невырожденный, то по определению

$$\frac{\overline{\overrightarrow{PQR}}}{\overline{\overrightarrow{ABC}}} = 0.$$

Имеет место формула

$$\frac{\overline{\overrightarrow{PQR}}}{\overline{\overrightarrow{ABC}}} = \frac{\overline{PQR}}{\overline{ABC}}$$

(если треугольники $\overrightarrow{PQR}$ и $\overrightarrow{ABC}$ лежат на ориентированной плоскости).

Барицентрическими координатами α, β, γ точки M относительно невырожденного ориентированного треугольника называются числа

$$\alpha = \frac{\overline{\overrightarrow{MBC}}}{\overline{\overrightarrow{ABC}}}, \quad \beta = \frac{\overline{\overrightarrow{AMC}}}{\overline{\overrightarrow{ABC}}}, \quad \gamma = \frac{\overline{\overrightarrow{ABM}}}{\overline{\overrightarrow{ABC}}}.$$

Тетраэдром $ABCD$ называется совокупность четырех точек A, B, C, D пространства. *Ориентированным тетраэдром* $\overrightarrow{ABCD}$ называется упорядоченная совокупность A, B, C, D четырех точек пространства. Если точки A, B, C, D некомпланарны, то тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ называется *невырожденным*, а если компланарны, то *вырожденным*.

Если невырожденный тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ лежит в ориентированном пространстве, то он имеет *правую* или *положительную ориентацию*, если упорядоченные тройки векторов $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ имеют одинаковую ориентацию. Если же эти упорядоченные тройки векторов имеют противоположную ориентацию, то тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет *левую* или *отрицательную ориентацию*.

Объемом $\overline{\overrightarrow{ABCD}}$ невырожденного ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, лежащего в ориентированном пространстве, называется число, абсолютная величина которого равна объему тетраэдра $ABCD$ и которое положительно, если тетраэдр $\overrightarrow{ABCD}$ имеет правую ориентацию, и отрицательно, если левую. Если $\overrightarrow{ABCD}$ — вырожденный тетраэдр, то по определению полагаем, что $\overline{\overrightarrow{ABCD}} = 0$.

Объем $\overline{\overrightarrow{ABCD}}$ ориентированного тетраэдра $\overrightarrow{ABCD}$, лежащего в ориентированном пространстве, вычисляется по формуле:

$$\overline{\overrightarrow{ABCD}} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DA}\,\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{DC}.$$

Если $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$ — радиус-векторы точек A, B, C, D, то

$$\overline{ABCD} = \frac{1}{6}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_4)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_4).$$

В координатах (в общей декартовой системе координат)

$$\overline{ABCD} = \frac{\sqrt{g}}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{g}}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$\overline{ABCD} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

В последних формулах

$$A = (x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B = (x_2,\ y_2,\ z_2),\quad C = (x_3,\ y_3,\ z_3),\quad D = (x_4,\ y_4,\ z_4).$$

Отношением

$$\frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}}$$

невырожденного ориентированного тетраэдра $\overline{PQRS}$ к невырожденному ориентированному тетраэдру $\overline{ABCD}$ называется число, абсолютная величина которого равна отношению объема тетраэдра $PQRS$ к объему тетраэдра $ABCD$ и которое положительно, если $\overline{PQRS}$ и $\overline{ABCD}$ имеют одинаковую ориентацию (т. е. упорядоченные тройки $\overline{SP}$, $\overline{SQ}$, $\overline{SR}$ и $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ имеют одинаковую ориентацию), и отрицательно, если $\overline{PQRS}$ и $\overline{ABCD}$ имеют противоположную ориентацию. Если $\overline{PQRS}$ — вырожденный тетраэдр, а $\overline{ABCD}$ — невырожденный, то по определению считаем, что

$$\frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}} = 0.$$

Если тетраэдры $\overline{PQRS}$ и $\overline{ABCD}$ лежат в ориентированном пространстве, то

$$\frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}} = \frac{\overline{PQRS}}{\overline{ABCD}}.$$

Барицентрическими координатами α, β, γ, δ точки M относительно невырожденного ориентированного тетраэдра $\overline{ABCD}$ называются числа

$$\alpha = \frac{\overline{MBCD}}{\overline{ABCD}},\quad \beta = \frac{\overline{AMCD}}{\overline{ABCD}},\quad \gamma = \frac{\overline{ABMD}}{\overline{ABCD}},\quad \delta = \frac{\overline{ABCM}}{\overline{ABCD}}.$$

Площадь S треугольника ABC в пространстве, вершины которого заданы радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{[(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)]^2}.$$

В декартовой прямоугольной системе координат:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2},$$

где

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}$$

а в общей декартовой системе координат

$$S=\frac{\sqrt{g}}{2}\sqrt{g^{11}\Delta_1^2+g^{22}\Delta_2^2+g^{33}\Delta_3^2+2g^{12}\Delta_1\Delta_2+2g^{23}\Delta_2\Delta_3+2g^{31}\Delta_3\Delta_1}.$$

В последних формулах

$$A=(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad B=(x_2,\ y_2,\ z_2),\ C=(x_3,\ y_3,\ z_3),\quad g^{ij}=(e^i,\ e^j).$$

Если на плоскости введена общая декартова система координат, то *уравнение любой прямой*, лежащей на этой плоскости, есть уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0$$

и, обратно, любое уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0$$

в любой общей декартовой системе координат является уравнением прямой.

Направляющим вектором $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{PQ}$ прямой p называется всякий ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой (вектор $\overrightarrow{PQ}\neq 0$ и прямая p называются *коллинеарными*, если прямые PQ и p коллинеарны, т. е. или параллельны, или совпадают. Нулевой вектор считается коллинеарным любой прямой).

Для прямой, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением

$$Ax+By+C=0,$$

вектор $\boldsymbol{a}=\{-B,\ A\}$ является направляющим.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности вектора $\boldsymbol{a}=\{l,\ m\}$ и прямой $Ax+By+C=0$ в общей декартовой системе координат имеет вид

$$Al+Bm=0.$$

Для координат всех точек $(x,\ y)$, лежащих по одну сторону от прямой, заданной уравнением

$$Ax+By+C=0$$

относительно общей декартовой системы координат, выполняется неравенство

$$Ax+By+C>0$$

(*положительная полуплоскость*), а для координат x, y всех точек (x, y), лежащих по другую сторону от этой прямой, выполняется неравенство

$$Ax+By+C<0$$

(*отрицательная полуплоскость*).

Вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ называется *главным вектором прямой*, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением $Ax+By+C=0$. Если его отложить от любой точки M_0 рассматриваемой прямой: $\overrightarrow{M_0P}=\boldsymbol{n}$, то точка P попадет в положительную полуплоскость.

Если A и B рассматривать как ковариантные координаты вектора, то вектор $[A, B]$ является *нормальным* к прямой, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением $Ax+By+C=0$.

В декартовой прямоугольной системе координат главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$ прямой $Ax+By+C=0$ является нормальным вектором к этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, определяемую радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1$, и имеющую направляющий вектор $\boldsymbol{a}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}=0.$$

Если в общей декартовой системе координат $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, $M_1=(x_1, y_1)$, то последнее уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ l & m \end{vmatrix}=0$$

или

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$$

(если $l=0$, то эту запись надо понимать так: $x-x_1=0$, а если $m=0$, то так: $y-y_1=0$).

Если $l\neq 0$, то последнее уравнение можно переписать в виде

$$y-y_1=k(x-x_1),$$

где $k=m/l$ называется *угловым коэффициентом прямой* (в общей декартовой системе координат). Угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и неколлинеарной оси Oy, вычисляется по формуле

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(в общей декартовой системе координат).

В декартовой прямоугольной системе координат угловой коэффициент равен

$$k=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол от оси Ox до рассматриваемой прямой.

Уравнение прямой, пересекающей ось Oy в точке $(0, b)$ и имеющей угловой коэффициент k, в общей декартовой системе координат имеет вид

$$y=kx+b.$$

Уравнение прямой, не проходящей через начало координат и пересекающей оси координат в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$, имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(*уравнение прямой в отрезках*).

Если прямая проходит через точку M_1, заданную радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1$, и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{a}$, то радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ любой ее точки может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{a},$$

где t принимает все действительные значения. Это уравнение называется *параметрическим уравнением прямой*. Число t является *координатой* точки M на рассматриваемой прямой при условии, что M_1 – начало координат, а $\boldsymbol{a}$ – базисный вектор:

$$t=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{\boldsymbol{a}}=\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\boldsymbol{a}}.$$

Пусть в общей декартовой системе координат $\boldsymbol{r}=\{x, y\}$, $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$; тогда получаем параметрические уравнения прямой в виде

$$x=x_1+lt, \quad y=y_1+mt.$$

Пусть $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ – радиус-векторы двух различных точек M_1 и M_2. Тогда уравнение прямой M_1M_2 имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0.$$

В общей декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

(если какой-либо из знаменателей равен нулю, то эту запись надо понимать, что равен нулю соответствующий числитель).

Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, определяемую радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1$ и имеющую нормальный вектор $\boldsymbol{n}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0.$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,\ y_1\}$, $\boldsymbol{n}=\{A,\ B\}$, $\boldsymbol{r}=\{x,\ y\}$, то уравнение $(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$ принимает вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0.$$

Такой же вид имеет уравнение $(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$ в общей декартовой системе координат, если $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,\ y_1\}$, $\boldsymbol{r}=\{x,\ y\}$, но $\boldsymbol{n}=[A,\ B]$ (координаты ковариантные).

Необходимым и достаточным условием того, что две прямые, заданные уравнениями

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекаются, параллельны, совпадают, является соответственно то, что эта система уравнений имеет только одно решение, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений.

Если рассматриваемые прямые пересекаются, то для нахождения координат точки их пересечения надо решить систему уравнений

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0.$$

Пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через одну и ту же точку S (*собственный пучок*). Точка S называется *центром пучка*. *Несобственным пучком прямых* называется множество всех параллельных между собою прямых.

Если относительно общей декартовой системы координат заданы уравнения двух прямых

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

пересекающихся в точке S, то уравнение пучка с центром S имеет вид

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A'x+B'y+C')=0,$$

где α и β принимают всевозможные значения, причем хотя бы одно из них отлично от нуля.

Если прямые

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0$$

параллельны, то предыдущее уравнение есть уравнение несобственного пучка, которому принадлежат данные прямые, причем для α и β берутся всевозможные значения, но такие, чтобы среди коэффициентов при x и y:

$$\alpha A+\beta A', \qquad \alpha B+\beta B'$$

хотя бы один был отличен от нуля.

Необходимым и достаточным условием принадлежности одному пучку трех прямых, заданных относительно общей декартовой системы координат уравнениями

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$
$$A''x+B''y+C''=0,$$

является равенство

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}=0.$$

При этом рассматриваемые прямые принадлежат одному собственному пучку, если хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & B'' \\ A & B \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, и одному несобственному пучку, если все эти определители равны нулю.

Если относительно декартовой прямоугольной системы координат две прямые заданы уравнениями

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

то косинусы углов $\varphi_{1,2}$ между ними определяются по формуле:

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

В общей декартовой системе координат

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{g_{11}AA'+g_{12}(AB'+A'B)+g_{22}BB'}{\sqrt{g_{11}A^2+2g_{12}AB+g_{22}B^2}\sqrt{g_{11}A'^2+2g_{12}A'B'+g_{22}B'^2}}.$$

Угол φ от прямой $Ax+By+C=0$ до прямой $A'x+B'y+C'=0$ в декартовой прямоугольной системе координат определяется из соотношений

$$\cos\varphi=\frac{AA'+BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}, \qquad \sin\varphi=\frac{AB'-A'B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}},$$

а если прямые не перпендикулярны, то достаточно знать только значение $\operatorname{tg}\varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{AB'-A'B}{AA'+BB'}.$$

В общей декартовой системе координат

$$\cos\varphi=\frac{g^{11}AA'+g^{12}(AB'+A'B)+g^{22}BB'}{\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}\sqrt{g^{11}A'^2+2g^{12}A'B'+g^{22}B'^2}}=$$

$$=\frac{g_{22}AA'-2g_{12}(AB'+A'B)+g_{11}BB'}{\sqrt{g_{22}A^2-2g_{12}AB+g_{11}B^2}\sqrt{g_{22}A'^2-2g_{12}A'B'+g_{11}B'^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{AB'-A'B}{\sqrt{g}\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}\sqrt{g^{11}A'^2+2g^{12}A'B'+g^{22}B'^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{g}(AB'-A'B)}{\sqrt{g_{22}A^2-2g_{12}AB+g_{11}B^2}\sqrt{g_{22}A'^2-2g_{12}A'B'+g_{11}B'^2}},$$

а если прямые не взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg}\varphi=$$

$$=\frac{AB'-A'B}{\sqrt{g}(g^{11}AA'+g^{12}(AB'+A'B)+g^{22}BB')}=\frac{\sqrt{g}(AB'-A'B)}{g_{22}AA'-2g_{12}(AB'+A'B)+g_{11}BB'}.$$

Обычно для угла от прямой $Ax+By+C=0$ до прямой $A'x+$ $+B'y+C'=0$ берется цепочка значений $\varphi+k\pi$ (k принимает все целые значения), где φ — одно из значений угла от первой прямой до второй.

Если в декартовой прямоугольной системе координат прямые p и p' имеют угловые коэффициенты k и k' и если прямые p и p' не взаимно перпендикулярны, то тангенсы углов $\varphi_{1,2}$ между прямыми p и p' вычисляются по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{k'-k}{1+kk'},$$

а в общей декартовой системе координат

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{g}(k'-k)}{g_{11}-g_{12}(k+k')+g_{22}kk'}.$$

Тангенс угла φ от прямой p до прямой p':

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k'-k}{1+kk'},$$

а в общей декартовой системе координат

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{g}(k'-k)}{g_{11}-g_{12}(k+k')+g_{22}kk'}.$$

Если прямые p и p' имеют в общей декартовой системе координат угловые коэффициенты k и k', то необходимое и достаточное условие их *коллинеарности* имеет вид

$$k=k'.$$

Необходимое и достаточное условие *перпендикулярности* имеет вид

$$g_{11}-g_{12}(k+k')+g_{22}kk'=0,$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$1+kk'=0.$$

Если прямая задана уравнением $Ax+By+C=0$ относительно декартовой прямоугольной системы координат, то расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$, нормальный к рассматриваемой прямой, единичный: $A^2+B^2=1$ (в этом случае уравнение $Ax+By+C=0$ называется *нормальным*), то

$$d=|Ax_0+By_0+C|.$$

В общей декартовой системе координат

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}}=\sqrt{g}\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{g_{22}A^2-2g_{12}AB+g_{11}B^2}},$$

а если вектор $[A, B]$ единичный, то

$$d=|Ax_0+By_0+C|.$$

Если прямая задана уравнением

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0,$$

то расстояние d от точки M_0, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$, до этой прямой равно

$$d=\frac{|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|}{|\boldsymbol{a}|},$$

а если $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, то

$$d=|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|.$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$, $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0\}$, $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1\}$, то

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2+m^2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный ($l^2+m^2=1$), то

$$d=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}.$$

В общей декартовой системе координат

$$d=\frac{\sqrt{g}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}}{\sqrt{g_{11}l^2+2g_{12}lm+g_{22}m^2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m\}$ единичный, то

$$d=\sqrt{g}\,\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}.$$

Если прямая задана уравнением

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0,$$

то расстояние d от точки M_0, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$, до этой прямой вычисляется по формуле

$$d=\frac{|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|}{|\boldsymbol{n}|},$$

а если вектор $\boldsymbol{n}$ единичный, то

$$d=|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)|.$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат $\boldsymbol{r}_0=\{x_0, y_0\}$, $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1\}$, $\boldsymbol{n}=\{A, B\}$, то

$$d=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

а если вектор $\{A, B\}$ единичный, то

$$d=|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|.$$

В общей декартовой системе координат

$$d=\frac{|g_{11}A(x_1-x_0)+g_{12}[A(y_1-y_0)+B(x_1-x_0)]+g_{22}B(y_1-y_0)|}{\sqrt{g_{11}A^2+2g_{12}AB+g_{22}B^2}},$$

а если $|\{A, B\}|=1$, то

$$d=|g_{11}A(x_1-x_0)+g_{12}[A(y_1-y_0)+B(x_1-x_0)]+g_{22}B(y_1-y_0)|.$$

Если вектор $\boldsymbol{n}$ задан ковариантными координатами: $\boldsymbol{n}=[A, B]$ то

$$d=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{g^{11}A^2+2g^{12}AB+g^{22}B^2}}=\sqrt{g}\,\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|}{\sqrt{g_{22}A^2-2g_{12}AB+g_{11}B^2}},$$

и если $|\boldsymbol{n}|=1$, то

$$d=|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)|.$$

Площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$, стороны которого заданы относительно общей декартовой системы координат уравнениями

(BC): $A_1x+B_1y+C_1=0$,
(CA): $A_2x+B_2y+C_2=0$,
(AB): $A_3x+B_3y+C_3=0$,

вычисляется по формуле

$$\overline{ABC}=\frac{\sqrt{g}}{2}\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$\overline{ABC}=\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Площадь S треугольника ABC:

$$S=\frac{\sqrt{g}}{2}\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}^2}{\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)},$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$S=\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}^2}{\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_3 & B_3\\ A_1 & B_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)}.$$

Если в пространстве введена общая декартова система координат $Oxyz$, то уравнением всякой плоскости является уравнение первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и, обратно, любое уравнение первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0$$

в любой общей декартовой системе координат является уравнением плоскости.

Для координат всех точек (x, y, z), лежащих по одну сторону от плоскости, заданной относительно общей декартовой системы координат уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

выполняется неравенство

$$Ax+By+Cz+D>0$$

(*положительное полупространство*), а для координат всех точек (x, y, z), лежащих по другую сторону от этой плоскости, выполняется неравенство

$$Ax+By+Cz+D<0$$

(*отрицательное полупространство*).

Вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ называется *главным вектором плоскости*, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Если его отложить от любой точки M_0 этой плоскости: $\overline{M_0P}=\boldsymbol{n}$, то точка P попадет в положительное полупространство.

Если A, B, C рассматривать как ковариантные координаты, то вектор $[A, B, C]$ является нормальным к плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

В декартовой прямоугольной системе координат главный вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, является вектором, нормальным к этой плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1, определяемую радиус-вектором $\boldsymbol{r}_1$, и нормальной к вектору $\boldsymbol{n}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0.$$

Если в общей декартовой системе координат $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{n}=[A, B, C]$, $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$, то уравнение $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=0$ примет вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

В декартовой прямоугольной системе координат

$$\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}=[A, B, C].$$

Вектор $\overline{PQ}\neq 0$ и плоскость π называются *компланарными*, если прямая PQ или параллельна, или лежит на плоскости π. Нулевой вектор считается компланарным любой плоскости.

Для того чтобы вектор $\boldsymbol{a}=\{l, m, n\}$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$Al+Bm+Cn=0$$

(система координат общая декартова).

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и компланарной двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0.$$

В общей декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0,$$

где $\boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\}$, $\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ и компланарной вектору $\boldsymbol{a} \nparallel \overline{M_1M_2}$, имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{a}=0.$$

В обшей декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,$$

где $M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ $\boldsymbol{a}=\{l,\ m,\ n\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, имеет вид

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3)=0,$$

а в общей декартовой системе координат

$$\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

где $M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3=(x_3,\ y_3,\ z_3)$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и компланарной двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, может быть записано в параметрическом виде:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}.$$

В этом уравнении u, v — координаты точки M в общей декартовой системе координат, на рассматриваемой плоскости, в которой началом координат является точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, а базисом $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Параметрические уравнения плоскости в общей декартовой системе координат:

$$x=x_1+ul_1+vl_2,$$
$$y=y_1+um_1+vm_2,$$
$$z=z_1+un_1+vn_2,$$

где $\boldsymbol{r}_1=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\boldsymbol{a}=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $\boldsymbol{b}=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$.

Параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ и компланарной вектору $\boldsymbol{a} \nparallel \overline{M_1M_2}$, имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+u\boldsymbol{a}+v(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1).$$

В координатах (в общей декартовой системе координат)

$$x = x_1 + ul + v(x_2 - x_1),$$
$$y = y_1 + um + v(y_2 - y_1),$$
$$z = z_1 + un + v(z_2 - z_1),$$

где $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\boldsymbol{a} = \{l, m, n\}$.

Параметрическое уравнение плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 + u(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) + v(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3),$$

а в общей декартовой системе координат

$$x = x_3 + u(x_1 - x_3) + v(x_2 - x_3),$$
$$y = y_3 + u(y_1 - y_3) + v(y_2 - y_3),$$
$$z = z_3 + u(z_1 - z_3) + v(z_2 - z_3),$$

где $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

Если плоскость не проходит через начало координат общей декартовой системы координат и пересекает оси координат в точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(*уравнение плоскости в отрезках*).

Для того чтобы две плоскости, заданные уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

относительно общей декартовой системы координат, пересекались, необходимо и достаточно, чтобы вектор

$$\boldsymbol{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right\}$$

был отличен от нуля: $\boldsymbol{a} \neq 0$. В этом случае ($\boldsymbol{a} \neq 0$) вектор $\boldsymbol{a}$ является направляющим вектором прямой, по которой пересекаются рассматриваемые плоскости.

Для того чтобы две плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\boldsymbol{a}$ был равен нулю, но хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A & D \\ A' & D' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B & D \\ B' & D' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C & D \\ C' & D' \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

Для того чтобы две плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты уравнений этих плоскостей были пропорциональны:

$$A'=kA, \quad B'=kB, \quad C'=kC, \quad D'=kD.$$

Три плоскости, заданные относительно общей декартовой системы координат уравнениями

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0,$$

имеют только одну общую точку в том и только в том случае, когда выполняется неравенство

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для нахождения координат этой точки надо решить систему уравнений трех данных плоскостей.

Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну прямую l (*собственный пучок*). Прямая l называется *осью пучка*. *Несобственным пучком* плоскостей называется множество всех параллельных между собою плоскостей.

Если две плоскости, заданные уравнениями относительно общей декартовой системы координат:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$

пересекаются по прямой l, то уравнение пучка плоскостей с осью l имеет вид

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0,$$

где α и β принимают всевозможные значения, причем хотя бы одно из них отлично от нуля.

Если рассматриваемые плоскости параллельны, то последнее уравнение является уравнением несобственного пучка плоскостей, которому они принадлежат, причем для α и β берутся всевозможные значения, исключая те, при которых все коэффициенты при x, y, z, т. е.

$$\alpha A+\beta A', \quad \alpha B+\beta B', \quad \alpha C+\beta C',$$

равны нулю.

Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же точку S (*собственная связка*).

Точка S называется *центром связки*. *Несобственной связкой* плоскостей называется множество всех плоскостей, компланарных одной и той же прямой.

Если три плоскости, заданные уравнениями относительно общей декартовой системы координат:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0,$$

имеют только одну общую точку S, то уравнение связки плоскостей с центром S имеет вид

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')+$$
$$+\gamma(A''x+B''y+C''z+D'')=0,$$

где α, β, γ принимают всевозможные значения, причем по крайней мере одно из них отлично от нуля.

Если три указанные плоскости компланарны одной и той же прямой, но не проходят через одну прямую, то последнее уравнение является уравнением *несобственной связки*, которой принадлежат три данные плоскости, причем для α, β, γ берутся всевозможные значения, за исключением тех, при которых все коэффициенты при x, y, z, т. е.

$$\alpha A+\beta A'+\gamma A'', \quad \alpha B+\beta B'+\gamma B'', \quad \alpha C+\beta C'+\gamma C'',$$

равны нулю.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{n}=\{A, B, C\}$ единичный (уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ в этом случае называется *нормальным*), то

$$d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|.$$

В общей декартовой системе координат

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{12}AB+2g^{23}BC+2g^{31}CA}}=$$
$$=\frac{\sqrt{g}\,|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\left(-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}},$$

а если вектор $[A, B, C]$ единичный, то

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|.$$

Расстояние d от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до плоскости, заданной уравнением $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|}{|\boldsymbol{n}|},$$

а если $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, то

$$d = |(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|.$$

Если в общей декартовой системе координат вектор $\boldsymbol{n}$ задан ковариантными координатами: $\boldsymbol{n} = [A, B, C]$, а векторы $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}_1$ — контравариантными координатами:

$$\boldsymbol{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \boldsymbol{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\},$$

то

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{g^{11}A^2 + g^{22}B^2 + g^{33}C^2 + 2g^{12}AB + 2g^{23}BC + 2g^{31}CA}} =$$

$$= \frac{\sqrt{g}\,|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\left(-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{n} = [A, B, C]$ единичный, то

$$d = |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|.$$

В декартовой прямоугольной системе координат

$$d = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

а если вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\} = [A, B, C]$ единичный, то

$$d = |A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|.$$

Косинусы углов $\varphi_{1,2}$ между двумя плоскостями, заданными уравнениями

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0, \qquad (\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2) = 0,$$

вычисляются по формуле

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}.$$

Если плоскости заданы уравнениями

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат, то

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

а в общей декартовой системе координат

$$\cos\varphi_{1,2}=\pm\frac{([A,\ B,\ C],\ [A',\ B',\ C'])}{|[A,\ B,\ C]|\ |[A',\ B',\ C']|};$$

$$([A,\ B,\ C],\ [A',\ B',\ C'])=g^{11}AA'+g^{22}BB'+g^{33}CC'+$$
$$+g^{12}(AB'+A'B)+g^{23}(BC'+B'C)+g^{31}(CA'+C'A)=$$
$$=-\frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A' & B' & C' & 0 \end{vmatrix},$$

$$|[A,\ B,\ C]|=\sqrt{g^{11}A^2+g^{22}B^2+g^{33}C^2+2g^{12}AB+2g^{23}BC+2g^{31}CA}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2},$$

$$|[A',\ B',\ C']|=$$
$$=\sqrt{g^{11}A'^2+g^{22}B'^2+g^{33}C'^2+2g^{12}A'B'+2g^{23}B'C'+2g^{31}C'A'}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left|-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A' \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B' \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C' \\ A' & B' & C' & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}.$$

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и имеющей направляющий вектор $\boldsymbol{a}$, имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{a},$$

где t — координата точки $M(\boldsymbol{r})$ на рассматриваемой прямой, если за начало координат принята точка $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, а за базисный вектор — вектор $\boldsymbol{a}$:

$$t=\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\boldsymbol{a}}.$$

В общей декартовой системе координат параметрические уравнения прямой записываются в виде

$$x=x_1+tl,$$
$$y=y_1+tm,$$
$$z=z_1+tn,$$

где $M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{a}=\{l,\ m,\ n\}$.

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1),$$

а в координатах (в общей декартовой системе координат)

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1),$$
$$y = y_1 + t(y_2 - y_1),$$
$$z = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Две прямые называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости.

Для того чтобы две прямые

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{b}$$

были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = 0$$

или, в общей декартовой системе координат,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $M_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\boldsymbol{a} = \{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $\boldsymbol{b} = \{l_2,\ m_2,\ n_2\}$.

Замечание. Уравнения прямой часто записывают в виде

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

(*канонические уравнения прямой*). Если один из знаменателей равен нулю, то эту запись надо понимать так: равен нулю соответствующий числитель. Например, систему уравнений

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-1}{4}$$

надо понимать так:

$$y - 5 = 0,$$
$$\frac{x-2}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

Расстояние d от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0,\ \boldsymbol{a})|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

В декартовой прямоугольной системе координат

$$d = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix},$$

а в общей декартовой системе координат

$$d=\sqrt{g}\,\frac{\sqrt{g^{11}\Delta_1^2+g^{22}\Delta_2^2+g^{33}\Delta_3^2+2g^{12}\Delta_1\Delta_2+2g^{23}\Delta_2\Delta_3+2g^{31}\Delta_3\Delta_1}}{\sqrt{g_{11}l^2+g_{22}m^2+g_{33}n^2+2g_{12}lm+2g_{23}mn+2g_{31}nl}}=$$

$$=\frac{\left(-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \Delta_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \Delta_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \Delta_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}}{\sqrt{g_{11}l^2+g_{22}m^2+g_{33}n^2+2g_{12}lm+2g_{23}mn+2g_{31}nl}}.$$

Кратчайшее расстояние d между неколлинеарными прямыми

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+t\boldsymbol{b}$$

равно

$$d=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}|}{|[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]|}.$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат

$$\boldsymbol{r}_1=\{x_1, y_1, z_1\}, \quad \boldsymbol{r}_2=\{x_2, y_2, z_2\}, \quad \boldsymbol{a}=\{l_1, m_1, n_1\}, \quad \boldsymbol{b}=\{l_2, m_2, n_2\},$$

то

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2}},$$

где

$$\delta_1=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad \delta_2=\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, \quad \delta_3=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix},$$

а в общей декартовой системе координат

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{g}\,\sqrt{g^{11}\delta_1^2+g^{22}\delta_2^2+g^{33}\delta_3^2+2g^{12}\delta_1\delta_2+2g^{23}\delta_2\delta_3+2g^{31}\delta_3\delta_1}}=$$

$$=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\left(-\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \delta_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \delta_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \delta_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}}.$$

Прямая в пространстве может быть задана уравнениями двух пересекающихся плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

(система координат общая декартова).

Ее направляющий вектор

$$a=\left\{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}\right\}.$$

Для приведения уравнений прямой

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

к параметрическому виду надо найти какое-нибудь решение x_1, y_1, z_1 этой системы, и тогда параметрические уравнения данной прямой:

$$x=x_1+t\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix},$$
$$y=y_1+t\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix},$$
$$z=z_1+t\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix},$$

а канонические:

$$\frac{x-x_1}{\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}}=\frac{y-y_1}{\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}}=\frac{z-z_1}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}.$$

Необходимым и достаточным условием того, что плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$, $z=z_1+nt$, заданные уравнениями относительно общей декартовой системы координат:

	является условие
пересекаются	$Al+Bm+Cn\neq 0$
параллельны	$Al+Bm+Cn=0$ $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$
прямая лежит на плоскости	$Al+Bm+Cn=0$ $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$

Угол между прямой

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\boldsymbol{a}$$

и плоскостью

$$(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

определяется из формулы

$$\sin\varphi=\frac{|(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат прямая задана уравнениями

$$x = x_1 + lt,$$
$$y = y_1 + mt,$$
$$z = z_1 + nt,$$

а плоскость — уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

В общей декартовой системе координат

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}},$$

где

$$T_1 = g^{11}A^2 + g^{22}B^2 + g^{33}C^2 + 2g^{12}AB + 2g^{23}BC + 2g^{31}CA =$$
$$= -\frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_2 = g_{11}l^2 + g_{22}m^2 + g_{33}n^2 + 2g_{12}lm + 2g_{23}mn + 2g_{31}nl.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид

$$[A,\ B,\ C] \parallel \{l,\ m,\ n\}$$

или

$$\{Ag^{11} + Bg^{12} + Cg^{13},\ Ag^{21} + Bg^{22} + Cg^{23},\ Ag^{31} + Bg^{32} + Cg^{33}\} \parallel \{l, m, n\},$$

или

$$Ag^{11} + Bg^{12} + Cg^{13} = kl,$$
$$Ag^{21} + Bg^{22} + Cg^{23} = km, \qquad k \neq 0,$$
$$Ag^{31} + Bg^{32} + Cg^{33} = kn,$$

или

$$g_{11}l + g_{12}m + g_{13}n = kA,$$
$$g_{21}l + g_{22}m + g_{23}n = kB, \qquad k \neq 0,$$
$$g_{31}l + g_{32}m + g_{33}n = kC,$$

а в декартовой прямоугольной системе координат

$$A = kl,\ B = km,\ C = kn.$$

Уравнение окружности $(C,\ r)$ с центром $C(a,\ b)$ и радиусом r в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

а если центром окружности является начало координат, то

$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Иногда точку $C(a, b)$ рассматривают как окружность нулевого радиуса (*нулевая окружность*). Уравнение нулевой окружности $C(a, b)$ в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=0.$$

Для координат x, y любой точки (x, y), лежащей вне окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$

имеет место неравенство

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2>0,$$

а для всех точек $M(x, y)$, лежащих внутри этой окружности,

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2<0.$$

Число σ называется *степенью точки $M(x, y)$ относительно окружности* (C, r); оно равно

$$\sigma=d^2-r^2,$$

где d — расстояние от точки M до центра C окружности (C, r). Если провести через точку M произвольную прямую, пересекающую окружность (C, r) в точках A и B, то

$$\sigma=(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})=\overline{MA}\cdot\overline{MB}.$$

Уравнение сферы (S, r) с центром $S(a, b, c)$ и радиусом r в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

а если центр сферы лежит в начале координат, то

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0.$$

Уравнения нулевых сфер:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Для координат x, y, z любой точки M, лежащей вне сферы

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

выполняется неравенство

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)-r^2>0,$$

а для всех точек $M(x, y, z)$, лежащих внутри рассматриваемой сферы:

$$\sigma=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2<0.$$

Число σ называется *степенью точки M относительно сферы* (S, r); оно равно

$$\sigma = d^2 - r^2 = (\overline{MA}, \overline{MB}) = \overline{MA} \cdot \overline{MB},$$

где d — расстояние между точками S и M, а A и B — точки, в которых произвольная прямая, проходящая через точку M, пересекает сферу (S, r).

§ 4. Комплексные числа

Во множестве комплексных чисел $x + yi$ (x и y принимают всевозможные действительные значения) равенство

$$x + yi = x' + y'i$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$x = x', \quad y = y',$$

сумма и произведение определяются так:

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x' + x') + (y + y')i,$$
$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)\,i.$$

Примем дополнительные соглашения:

$$0 + yi = yi, \quad 0 \cdot i = 0, \quad 1 \cdot i = i.$$

Во множестве комплексных чисел содержатся все действительные числа ($x + 0 \cdot i = x + 0 = x$) и число i ($0 + 1 \cdot i = 1 \cdot i = i$), квадрат которого в силу определения произведения комплексных чисел равен -1:

$$i^2 = -1.$$

Операции вычитания и деления определяются как операции, обратные сложению и умножению.

Свойства:

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'',$$
$$z + 0 = z,$$
$$z + (-z) = 0\ ^{1)},$$
$$z + z' = z' + z,$$
$$z(z'z'') = (zz')z'',$$
$$zz' = z'z,$$
$$z(z' + z'') = zz' + zz'',$$

где z, z', z'' — произвольные комплексные числа.

---

1) Если $z = x + yi$, то $-z = (-x) + (-y)\,i$.

Модулем $|z| = \rho$ комплексного числа $z = x + yi$ называется арифметическое значение $\sqrt{x^2+y^2}$:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Аргументом $\varphi = \arg z$ комплексного числа $z = x + yi \neq 0$ называется число φ, определяемое соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Аргумент числа $z \neq 0$ имеет бесконечное множество значений. Если φ — одно из значений аргумента $z \neq 0$, то все значения $\arg z$ заключены в формуле

$$\arg z = \varphi + 2k\pi,$$

где k принимает все целые значения.

Последнее соотношение часто записывают так:

$$\arg z \equiv \varphi \pmod{2\pi}$$

(читается так: «аргумент z сравним с φ по модулю 2π»).

Если $z = 0$, то $\rho = 0$, а φ — любое число.

Для того чтобы два комплексных числа $z \neq 0$ и $z' \neq 0$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны их модули:

$$|z| = |z'|$$

и чтобы их аргументы были сравнимы по модулю 2π:

$$\arg z \equiv \arg z' \pmod{2\pi}.$$

Из предыдущих формул следует, что

$$z = x + yi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

— *тригонометрическая форма комплексного числа.*

Имеют место следующие формулы: если

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z' = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

то

$$zz' = \rho\rho'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')],$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')], \qquad z' \neq 0,$$

$$|zz'| = |z|\,|z'|,$$

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \pmod{2\pi},$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|},$$

$$\arg\frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}, \qquad z' \neq 0,$$

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(n — целое число); в частности, если $|z| = \rho = 1$, то

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad (\textit{формула Муавра}).$$

Если $z \neq 0$, а n — натуральное число, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Комплексные числа $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются *сопряженными*. Свойства сопряженности:

$$\bar{\bar{z}} = z,$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}',$$

$$\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}',$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

Если $u = \frac{z}{z'}$ $(z' \neq 0)$, то $\bar{u} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$,

$$|z| = |\bar{z}|,$$

$$\arg\bar{z} \equiv -\arg z \pmod{2\pi}.$$

Пусть на плоскости введена декартова прямоугольная система координат. Поставим в соответствие комплексному числу $z = x + yi$ точку $M(x, y)$. Это соответствие взаимно однозначно.

Число z называется *аффиксом точки* M. Точку, имеющую аффикс z, будем обозначать так: $M(z)$ или $M = (z)$.

Если $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $z_3 = x_3 + y_3 i$ — аффиксы точек A, B, C в декартовой прямоугольной системе координат, то площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overline{ABC}$ вычисляется по формуле

$$\overline{ABC} = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

В частности, необходимое и достаточное условие коллинеарности трех точек $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразование, при котором точке $M(z)$ ставится в соответствие точка $M'(z')$, где

$$z' = az + b,$$

является *преобразованием подобия первого рода* (т. е. преобразованием, не меняющим ориентации плоскости). В самом деле,

$$z'=a\left(z+\frac{b}{a}\right),$$

и переход от точки $M(z)$ к точке $M'(z')$ совершается в результате переноса $z_1=z+\frac{b}{a}$ и преобразования $z'=az_1$, состоящего в повороте вокруг начала координат на угол $\arg a$ и гомотетии с центром O и коэффициентом $|a|$. Все это — подобные преобразования первого рода.

Преобразование, при котором точке $M(z)$ ставится в соответствие точка $M'(z')$, где $z'=a\bar{z}+b$, является *подобным преобразованием второго рода* (т. е. преобразованием, меняющим ориентацию на противоположную). В самом деле, это преобразование состоит из симметрии $z_1=\bar{z}$ в оси Ox и преобразования $z'=az_1+b$, которое сводится к переносу, повороту и гомотетии. Из всех этих преобразований только симметрия в оси Ox меняет ориентацию плоскости.

Из сказанного следует, что если заданы два треугольника $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{PQR}$ аффиксами своих вершин:

$$A=(z_1),\quad B=(z_2),\quad C=(z_3),$$
$$P=(u_1),\quad Q=(u_2),\quad R=(u_3),$$

то необходимое и достаточное условие того, что эти треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{PQR}$ подобны и одинаково ориентированы, имеет вид

$$\begin{vmatrix} z_1 & u_1 & 1\\ z_2 & u_2 & 1\\ z_3 & u_3 & 1\end{vmatrix}=0,$$

а необходимое и достаточное условие того, что треугольники $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{PQR}$ подобны, но противоположно ориентированы:

$$\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & u_1 & 1\\ \bar{z}_2 & u_2 & 1\\ \bar{z}_3 & u_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Рассмотрим две различные точки $M_1(z_1)$ и $M_2(z_2)$. На основании предыдущего точка $M(z)$ лежит на прямой M_1M_2 тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1\\ z_1 & \bar{z}_1 & 1\\ z_2 & \bar{z}_2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Поэтому это уравнение можно назвать уравнением прямой M_1M_2. Оно может быть преобразовано к виду

$$z-z_1=\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}(\bar{z}-\bar{z}_1).$$

Отношение

$$\varkappa = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

будем называть *комплексным угловым коэффициентом прямой* M_1M_2. Заметим, что

$$|\varkappa| = \left| \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \right| = 1.$$

Итак, уравнение прямой M_1M_2 можно записать в виде

$$z - z_1 = \varkappa (\bar{z} - \bar{z}_1),$$

где $|\varkappa| = 1$.

Обратно, всякое уравнение вида

$$z - z_1 = \varkappa (\bar{z} - \bar{z}_1),$$

где $|\varkappa| = 1$, является уравнением прямой. В самом деле, так как $|\varkappa| = 1$, то

$$\varkappa = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Составляя уравнение прямой, проходящей через две точки с аффиксами z_1 и $z_1 + \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}$, мы получим уравнение

$$z - z_1 = \varkappa (\bar{z} - \bar{z}_1).$$

Отметим, в частности, уравнение прямой, проходящей через начало координат:

$$z = \varkappa \bar{z},$$

где

$$\varkappa = \cos \varphi + i \sin \varphi = \frac{z_1}{\bar{z}_1},$$

причем $z_1 \neq 0$ есть аффикс любой точки (z_1) рассматриваемой прямой.

Отметим, что прямая

$$z = \varkappa \bar{z}$$

проходит через точки единичной окружности[1]) с аффиксами $\sqrt{\varkappa}$ ($\sqrt{\varkappa}$ имеет всегда два значения; эти значения $\sqrt{\varkappa}$ являются аффиксами концов диаметра единичной окружности). В самом деле, если $\sqrt{\varkappa}$ — любое из двух значений этого радикала, то при $z = \sqrt{\varkappa}$ уравнение $z = \varkappa \bar{z}$ обращается в равенство (левая часть $\sqrt{\varkappa}$; правая $\varkappa \overline{\sqrt{\varkappa}} = \sqrt{\varkappa}$).

[1]) *Единичной окружностью* называется окружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1.

Две прямые

$$z - z_1 = \varkappa(\bar{z} - \bar{z}_1), \qquad |\varkappa| = 1,$$

$$z - z_2 = \varkappa'(\bar{z} - \bar{z}_2), \qquad |\varkappa'| = 1,$$

коллинеарны тогда и только тогда, когда $\varkappa = \varkappa'$. В самом деле, эти прямые коллинеарны тогда и только тогда, когда система уравнений

$$z - \varkappa\bar{z} = z_1 - \varkappa\bar{z}_1,$$

$$z - \varkappa'\bar{z} = z_2 - \varkappa\bar{z}_2$$

относительно z, $\bar{z}$ или не имеет решений, или имеет бесконечное множество решений, а это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 1 & -\varkappa \\ 1 & -\varkappa' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \varkappa = \varkappa'.$$

Две прямые p и q, заданные уравнениями

$$z - z_1 = \varkappa(\bar{z} - \bar{z}_1), \qquad |\varkappa| = 1,$$

$$z - z_2 = \varkappa'(\bar{z} - \bar{z}_2), \qquad |\varkappa'| = 1,$$

перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\varkappa + \varkappa' = 0.$$

В самом деле, рассмотрим прямые p' и q', соответственно коллинеарные прямым p и q, но проходящие через начало координат:

$$p': \qquad z = \varkappa\bar{z},$$

$$q': \qquad z = \varkappa'\bar{z}.$$

Прямые p и q перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны прямые p' и q'. Предположим, что прямые p' и q' перпендикулярны. Возьмем на прямой p' точку с аффиксом $z_0 \neq 0$. Тогда в силу соотношения

$$\arg(iz_0) \equiv \arg i + \arg z_0 \equiv \frac{\pi}{2} + \arg z_0 \pmod{2\pi}$$

точка с аффиксом iz_0 лежит на прямой q'. Имеем

$$z_0 = \varkappa\bar{z}_0, \qquad iz_0 = \varkappa'\overline{iz_0}$$

или

$$z_0 = \varkappa\bar{z}_0, \quad iz_0 = -\varkappa' i\bar{z}_0,$$

или

$$z_0 = \varkappa\bar{z}_0, \quad z_0 = -\varkappa'\bar{z}_0,$$

следовательно, $\varkappa\bar{z}_0 = -\varkappa'\bar{z}_0$, и так как $z_0 \neq 0$, то $\varkappa = -\varkappa'$, откуда $\varkappa + \varkappa' = 0$.

Обратно, пусть $\varkappa + \varkappa' = 0$. Докажем, что прямые p' и q' взаимно перпендикулярны. Проведем через начало координат прямую p^*, перпендикулярную прямой q', и пусть $\varkappa^*$ — комплексный угловой коэффициент прямой p^*. Тогда $\varkappa^* + \varkappa' = 0$, а так как $\varkappa + \varkappa' = 0$, то $\varkappa = \varkappa^*$ и, значит, прямые p^* и p' совпадают, т. е. $p' \perp q'$, откуда $p \perp q$.

Замечание. В аналитической геометрии *угловым коэффициентом* k прямой, неколлинеарной оси Oy, называется тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox. Если комплексный угловой коэффициент прямой неколлинеарной оси Oy равен

$$\varkappa = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

то угол α наклона этой прямой к оси Ox равен $\varphi/2$ (так как прямая, проходящая через начало координат и имеющая комплексный угловой коэффициент $\varkappa$, проходит через точки с аффиксами $\sqrt{\varkappa}$).

Далее находим

$$\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} = -i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -ik,$$

следовательно,

$$k = i\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}.$$

Обратно,

$$\varkappa = \frac{i-k}{i+k}.$$

Угол от прямой

$$z - z_1 = \varkappa(\bar{z} - \bar{z}_1)$$

до прямой

$$z - z_2 = \varkappa'(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

равен

$$\arg\frac{\sqrt{\varkappa'}}{\sqrt{\varkappa}} \pmod{\pi}.$$

В самом деле, прямые $z = \varkappa\bar{z}$, $z = \varkappa'\bar{z}$, коллинеарные данным, проходят соответственно через точки с аффиксами $\sqrt{\varkappa}$ и $\sqrt{\varkappa'}$, поэтому угол от первой прямой до второй равен

$$\arg\sqrt{\varkappa'} - \arg\sqrt{\varkappa} \equiv \arg\frac{\sqrt{\varkappa'}}{\sqrt{\varkappa}} \pmod{\pi}.$$

Уравнение всякой прямой может быть записано в виде

$$Az + B\bar{z} + C = 0,$$

где C — действительное число и $B = \bar{A} \neq 0$. Обратно, всякое такое уравнение при условии, что C — действительное число, а $B = \bar{A} \neq 0$, есть уравнение прямой.

Доказательство. Пусть $Px+Qy+R=0$ — уравнение прямой в декартовой прямоугольной системе координат. Так как

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),$$

$$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=\frac{i}{2}(\bar{z}-z),$$

то его можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}P(z+\bar{z})+\frac{i}{2}Q(\bar{z}-z)+R=0$$

или

$$\frac{P-Qi}{2}z+\frac{P+Qi}{2}\bar{z}+R=0,$$

или

$$Az+\bar{A}\bar{z}+C=0 \qquad (C=2R).$$

Обратно, полагая

$$A=P-Qi,\ \bar{A}=B=P+Q\,i,$$

перепишем уравнение

$$Az+B\bar{z}+C=0$$

в виде

$$(P-Qi)(x+yi)+(P+Qi)(x-yi)+C=0,$$

или

$$2Px+2Qy+C=0$$

— уравнение первой степени.

Уравнение

$$Az+\bar{A}\bar{z}+C=0$$

называют *автосопряженным уравнением прямой*, так как левая часть этого уравнения — действительная функция от x и y:

$$u=Az+\bar{A}\bar{z}+C,$$
$$\bar{u}=\bar{A}\bar{z}+Az+C=u.$$

Если прямая задана автосопряженным уравнением

$$Az+B\bar{z}+C=0$$

($B=\bar{A}\neq 0$, C — действительное число), то расстояние d от точки (z_0) до этой прямой вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Az_0+B\bar{z}_0+C|}{2|A|}.$$

В самом деле, уравнение прямой, проходящей через точку (z_0) перпендикулярно данной прямой, имеет вид

$$z - z_0 = \frac{B}{A}(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

или

$$Az - B\bar{z} - z_0 A + \bar{z}_0 B = 0.$$

Из системы

$$Az + B\bar{z} + C = 0,$$

$$Az - B\bar{z} - Az_0 + B\bar{z}_0 = 0$$

находим аффикс проекции точки (z_0) на данную прямую:

$$z' = \frac{Az_0 - B\bar{z}_0 - C}{2A}.$$

Отсюда

$$z_0 - z' = \frac{Az_0 + B\bar{z}_0 + C}{2A}$$

и, следовательно,

$$d = |z_0 - z'| = \frac{|Az_0 + B\bar{z}_0 + C|}{2|A|}.$$

Если прямая задана автосопряженным уравнением

$$Az + B\bar{z} + C = 0$$

($B = A \neq 0$, C — действительное число), то для всех точек (z), лежащих по одну сторону от этой прямой:

$$Az + B\bar{z} + C > 0$$

(положительная полуплоскость), а для всех точек (z), лежащих по другую сторону от этой прямой:

$$Az + B\bar{z} + C < 0$$

(отрицательная полуплоскость).

Если (z_0) — любая точка, лежащая на прямой

$$Az + B\bar{z} + C = 0$$

($B = \bar{A} \neq 0$, C — действительное число), то точка $(z_0 + B)$ лежит в положительной полуплоскости, так как

$$A(z_0 + B) + B(\bar{z}_0 + \bar{B}) + C = Az_0 + B\bar{z}_0 + C + AB + B\bar{B} =$$
$$= AB + B\bar{B} = \bar{B}B + B\bar{B} = 2B\bar{B} = 2|B|^2 > 0.$$

Если стороны треугольника ABC заданы автосопряженными уравнениями

$$(BC):\ A_1 z + B_1 \bar{z} + C_1 = 0,$$
$$(CA):\ A_2 z + B_2 \bar{z} + C_2 = 0,$$
$$(AB):\ A_3 z + B_3 \bar{z} + C_3 = 0,$$

где C_k — действительные числа, а $B_k = \bar{A}_k \neq 0$, то площадь $\overline{ABC}$ ориентированного треугольника $\overrightarrow{ABC}$ вычисляется по формуле

$$\overline{ABC} = \frac{i}{4}\,\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Результат не изменится, если левые части уравнений (BC), (CA), (AB) умножить на любые комплексные числа, отличные от нуля. Площадь S треугольника ABC вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{4}\cdot\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2}{\operatorname{mod}\left(\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)}.$$

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\boldsymbol{a}$	— вектор	306
$\overrightarrow{AB}$	— вектор, имеющий начало в точке A и конец в точке B	306
$\boldsymbol{0}$	— нулевой вектор	307
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	— модуль вектора $\boldsymbol{a}$	307
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = AB$	— модуль вектора $\overrightarrow{AB}$	307
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$	— векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны	307
$\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \downarrow\downarrow \boldsymbol{b}$	— векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и одинаково направлены	307
$\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}$	— векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны и направлены в противоположные стороны	307
$\boldsymbol{a}_\varphi$	— вектор, полученный из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол φ в ориентированной плоскости	312
$[\boldsymbol{a}]$	— вектор, полученный из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол $\pi/2$ в ориентированной плоскости	3, 312
$\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	— псевдоскалярное (смешанное) произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ на ориентированной плоскости	3, 311
$\boldsymbol{abc}$	— смешанное произведение трех векторов в ориентированном пространстве	313
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	— скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	309
$\boldsymbol{a}^2$	— скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$	310
$[\boldsymbol{ab}]$	— векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ в ориентированном пространстве	314
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$	— общий базис векторов на плоскости	308
$\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2$	— базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$	312
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$	— общий базис векторов в пространстве	308
$\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$	— базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$	314
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$	— ортонормированный базис векторов на плоскости	308
$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$	— ортонормированный базис векторов в пространстве	308
$\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*$	— базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ на плоскости	3, 312
$\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$	— базис, взаимный с базисом $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ в пространстве	314
$(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$	— общая декартова система координат на плоскости	316

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $x^2+px+q=0; \quad x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$

$ax^2+bx+c=0; \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0).$

$ax^2+2kx+c=0; \quad x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a} \quad (a\neq 0).$

2. Формулы Виета:

$$x_1+x_2=-p=-\frac{b}{a}; \quad x_1x_2=q=\frac{c}{a}.$$

3. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2);$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$

ПРОГРЕССИИ

а) Арифметическая прогрессия.

1. Общий член арифметической прогрессии:

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

2. Сумма n членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)n=\left[\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\right]n,$$

где d — разность.

б) Геометрическая прогрессия.

1. Общий член геометрической прогрессии:

$$u_n=u_1q^{n-1}.$$

2. Сумма n членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{u_1-u_nq}{1-q}=u_1\frac{1-q^n}{1-q}=u_1\frac{q^n-1}{q-1},$$

где q — знаменатель прогрессии ($q\neq 1$).

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{u_1}{1-q}.$$

ЛОГАРИФМЫ

1. Запись $\log_a N = x$ равносильна записи $a^x = N$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$, так что $a^{\log_a N} = N$.

2. $\log_a 1 = 0$. 3. $\log_a a = 1$.

4. $\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$.

5. $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$.

6. $\log_a N^n = n \log_a N$ $(N > 0)$.

7. $\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a N$.

8. $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.
3. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.
4. $\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1$.
5. $\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$.
6. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
7. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$.
8. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$.

Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

Название функции	Четверти				I					II	III	IV
	I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	+	+	−	−	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos \alpha$	+	−	−	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	+	−	+	−	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	−	+	−	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Таблица формул приведения

Функция \ Угол	$-\alpha$	$90° \mp \alpha$	$180° \mp \alpha$	$270° \mp \alpha$	$360° k \mp \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$
cos	$+\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$

3. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

4. $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

5. $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$

6. $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$

$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

7. $\cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x];$

$\sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$

$\sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x].$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin(\arcsin x) = x$.

2. $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, $\cos(\arccos x) = x$.

3. $-\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

4. $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$.
2. $\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$.
3. $\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$.
4. $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$.

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Для трех чисел z_1, z_2, z_3

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$
$$\sigma_2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1,$$
$$\sigma_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Для четырех чисел z_1, z_2, z_3, z_4

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4,$$
$$\sigma_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4,$$
$$\sigma_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4,$$
$$\sigma_4 = z_1 z_2 z_3 z_4.$$

СИМВОЛ КРОНЕКЕРА

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968.

Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. Ч. I. — М.: Гостехиздат, 1950. Ч. II. — М.: Гостехиздат, 1952.

Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975.

Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. — М.: Наука, 1975.

Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.

Моденов П. С. Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1969.

Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.

Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. — М.: Изд-во МГУ, 1961.

Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1977.

Яглом И. М. Геометрические преобразования. Т. I. — М.: Гостехиздат, 1955. Т. II. — М.: Гостехиздат, 1956.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Петр Сергеевич Моденов

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

М., 1979 г., 368 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Е. В. Сидоркина, В. П. Сорокина*

ИБ № 11238

Сдано в набор 30.10.78. Подписано к печати 21.03.79. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 20,67. Тираж 175 000 экз. Заказ № 260. Цена книги 70 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26.