МАТЕМАТИКА

СТРУЧНО-МЕТОДИЧКИ ЧАСОПИС

MATEMATIKA

STRUČNO-METODIČKI ČASOPIS

МАТЕМАТИКА

СТРУЧНО-МЕТОДСКО СПИСАНИЕ

MATEMATIKA

STROKOVNO-METODIČNI ČASOPIS

MATEMATIKA

REVISTË PROFESIONALE-METODIKE

MATEMATIKA

SZAK-MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

3

БЕОГРАД, 1978.

МАТЕМАТИКА

СТРУЧНО-МЕТОДИЧКИ ЧАСОПИС
STRUČNO-METODIČKI ČASOPIS
СТРУЧНО-МЕТОДСКО СПИСАНИЕ
STROKOVNO-METODIČNI ČASOPIS
REVISTË PROFESIONALE-METODIKE
SZAK-MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

БЕОГРАД, 1878.

СТРУЧНО-МЕТОДИЧКИ ЧАСОПИС „МАТЕМАТИКА" — ИЗДАЈУ:
ИП „ШКОЛСКА КЊИГА", Загреб, Масарикова 28 ● ИГКРО „СВЈЕТЛОСТ" — ООУР ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ, Сарајево, Петра Прерадовића 3 ● ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ И НАСТАВНА СРЕДСТВА, Београд, Обилићев венац 5/I ● ИП „ПРОСВЕТНО ДЕЛО" — РОЗТ за учебници, Скопје, Иво Рибар Лола бб, IV блок ● РЕПУБЛИЧКИ ЗАВОД ЗА УНАПРЕЂИВАЊЕ ШКОЛСТВА — Одељење за уџбенике, Титоград

Часопис „МАТЕМАТИКА" излази четири пута годишње. Годишња претплата је 100 динара. Цена појединог броја је 30 динара. Наруџбине се врше и претплата се уплаћује код одговарајућег републичког издавача уџбеника.

Адреса Редакције: ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ И НАСТАВНА СРЕДСТВА, за часопис „МАТЕМАТИКА", Београд, Кнеза Милоша 11/VI. Телефон: 338-536.

Штампа Београдски издавачко-графички завод, Београд, Булевар војводе Мишића 17

МАТЕМАТИКА

СТРУЧНО-МАТОДИЧКИ ЧАСОПИС

Година VII ЈУЛ — СЕПТЕМБАР Број 3

SADRŽAJ

SOMMAIRE

POLINOMI KAO CIJELE RACIONALNE FUNKCIJE

VLADIMIR G. KIRIN,
Zagreb

1. UVOD

Zna se što polinomi jesu, specijalno što su polinomi nad poljem realnih brojeva, ili realni polinomi. Kako su polinomi prilično apstraktni matematički objekti, a ipak ih spominju srednjoškolski programi, to ćemo se i ovdje naći pred poznatom zadaćom svakog nastavnika koja glasi: »Kako ću sniziti, ali ne i poniziti, svoje izlaganje?« Sretna je okolnost što je prsten polinoma nad poljem realnih brojeva izomorfan prstenu cijelih racionalnih funkcija u tom polju, tako da se na srednjoškolskoj razini ove funkcije slobodno prozovu polinomima. Na taj način uspješno se rješava gornja zadaća, ali time se ne otklanjaju sve poteškoće. U ovakvom pristupu polinomima više nije objekt uobičajeni zapis polinoma, već je to realna funkcija koju on određuje, pa moramo razlikovati polinom od njegovog zapisa ili prikaza. Naime, dva bi različita prikaza mogla određivati istu realnu funkciju. To se, doduše, neće dogoditi u polju R jer tamo vrijedi teorem identičnosti polinoma, ali ovaj ne smijemo prejudicirati.

U ovom članku raspravlja se o nabrojanim aspektima polinoma, te se navodi još jedan dokaz teorema identičnosti za njih. On ne koristi neprekidnost ni u kojem obliku, ali ipak zahtijeva da se zna kad je nekom homogenom sistemu linearnih jednadžbi ono njegovo trivijalno rješenje jedino.

2. O PRSTENU POLINOMA NAD POLJEM

Polinome možemo razviti i nad nešto slabijim algebarskim strukturama nego što su polja (npr. nad prstenima). No, mi ćemo ovdje ukratko ponoviti dobro poznatu konstrukciju prstena polinoma K^+ nad odabranim poljem K. Najprije definicija:

Svaku funkciju: $A : N \to K$, gdje je K dano polje i N skup prirodnih brojeva uzet u svom prirodnom uređenju (i u koji je 0 uključena kao minimalni element), zovemo polinomom nad K (ili elementom od K^+, gdje je K^+ oznaka za skup svih polinoma nad K) ako ona ispunjava uvjet

$$(2.1) \qquad A(k) \neq 0 \text{ za konačno prirodnih } k.$$

Pišemo a_k za vrijednost $A(k) \in K$, i taj element polaznog polja zovemo koeficijentom polinoma A indeksa k. Pomoću svojih koeficijenata, a zbog uređaja koji obavezuje u skupu N, polinom A određen je ovakvim slogom svojih koeficijenata:

$$(2.2) \qquad A=(a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots).$$

Naime, prema definiciji, svaki polinom ima prebrojivo koeficijenata, samo što su u svakom od njih, počevši od jednog koeficijenta, svi oni s većim indeksima jednaki nuli. Posljednji koeficijent u polinomu koji je još različit od nule, tj. koeficijent ovog svojstva s najvećim indeksom, zove se *vodeći koeficijent*, a njegov indeks se zove *stupanj* ili *stepen polinoma*. Tako su npr. polinomi nultog stupnja oblika $(a_0, 0, 0, \ldots)$ ako je $a_0 \neq 0$. Polinom kojem su svi koeficijenti jednaki nuli $(0, 0, 0, \ldots)$ ostavlja se obično bez stupnja.

Budući da su polinomi u K^+ funkcije koje sve imaju zajedničku domenu N i zajedničku kodomenu K, bit će dva polinoma, recimo A u (2.2) i neki $B=(b_0, \ldots, b_k, \ldots)$, jednaka u K^+ ako i samo ako budu u K jednaka svaka njihova dva odgovarajuća koeficijenta (odgovarajući su oni istog indeksa), odnosno vrijedit će $A \neq B$ ako i samo ako bude $a_k \neq b_k$ bar za jedan prirodni k.

Polinomi u K^+ postižu svoju svrhu tek kad za njih definiramo zbrajanje i množenje. To se čini ovako:

$$(2.3) \qquad A+B=(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_k+b_k, \ldots),$$

$$(2.4) \qquad A \cdot B=(a_0 \cdot b_0, a_0+b_1+a_1 b_0, \ldots, \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \ldots).$$

U polinomu $A \cdot B=C$ je npr. $c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$. Uz ove dvije operacije K^+ postaje prsten i zove se prsten polinoma nad K.[1]

Jasno je da jednoznačnost operacije $+$ slijeva u (2.3) počiva na jednoznačnosti operacije $+$ u K. Slično vrijedi i za obje operacije množenja. Operacije su, doduše, jednako označene, ali nisu jednake, jer npr. par od $+$ i $\cdot$ slijeva u (2.3) ili (2.4) djeluje u K^+, a onaj zdesna djeluje u K.

Primjer 2.1. — Ako je K polje realnih brojeva R, onda se polinomi u R^+ zovu realni polinomi. Ako ih razvijemo nad poljem kompleksnih brojeva C, zvat ćemo ih kompleksni polinomi. I nad poljem racionalnih brojeva Q mogu se razviti polinomi, pa i nad poljem Z_3. Evo opisa tog polja: u skupu $Z_3=\{0, 1, 2\}$ definirajmo zbrajanje i množenje priloženim dvjema tablicama:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

[1] K^+ nikad nije polje, a kad je K polje, K^+ biće integritetno područje, tj. struktura poput prstena cijelih brojeva.

Tako organizirani skup Z_3 je komutativni prsten. U njemu svaki od nule različit element ima multiplikativni invers. Za 1 je to očigledno 1, a za 2 je to opet 2, jer je $2 \cdot 2=1$, odn. u Z_3 vrijedi $\frac{1}{2}=2$. Stoga je Z_3 i polje.

Napomena 2.1. — Za identifikaciju dvaju polinoma u K^+, kao i za određivanje njihovog zbroja i produkta dovoljno je u svakom poznavati samo konačan početni komad svih njegovih koeficijenata, i to bilo koji u kojem će biti obuhvaćen vodeći koeficijent tog polinoma. Tako dolazimo do skraćenog zapisa polinoma, $A=(a_0, \ldots, a_n)$, gdje je a_n vodeći koeficijent. Ako prethodni zapis proširimo zdesna sa nekoliko nula, dobit ćemo opet skraćeni zapis $(a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$, ali tog istog polinoma A. Oba skraćena zapisa, $(a_0, \ldots, a_n)$ s $a_n \neq 0$ i $(b_0, \ldots, b_m)$ s $b_m \neq 0$, dovoljno je proširiti zdesna nulama sve do indeksa $M=\max\{n, m\}$ kako bismo mogli primijeniti propis o zbrajanju (2.3) i na polinome u skraćenom zapisu, a da bi bio na njih primjenjiv i propis (2.4) za množenje, dovoljno će biti da se oba zapisa prošire nulama zdesna sve do indeksa $n+m$.

Primjer 2.2. — Svakom polinomu $A \in K^+$ pridružimo onu funkciju $a : K \to K$ koja u svakom $x \in K$ djeluje po formuli

$$a(x)=a_0+a_1 \cdot x+\cdots+a_n \cdot x_n, \tag{2.5}$$

a u kojoj je a_n vodeći koeficijent polinoma A. Najprije, formulom (2.5) zaista je određena izvjesna funkcija kojoj je skup K i domena i kodomena, jer su sve operacije navedene u (2.5) izvedive sa svakim $x \in K$ na jedinstven način, pa za svaki $x \in K$ ima samo jedan $a(x) \in K$, tako da za njih bude (2.5) na snazi. Ovu funkciju često zapisujemo u obliku

$$a(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{2.6}$$

uz očigledan dogovor da u (2.6) mora izići $a(0)=a_0$. Funkcija a zove se polinomska funkcija polinoma A, ili cijela racionalna funkcija pridružena polinomu A. Naziv »racionalna funkcija« potječe otuda što su se operacije zbrajanja, množenja i dijeljenja varijabilnim elementom x polja K zvale racionalne operacije za definiranje funkcija. Racionalna funkcija može biti razlomljena (kad je dozvoljeno dijeljenje varijabilnim elementom x) i cijela, kao što je slučaj u formuli (2.5), kad je dijeljenje sa x isključeno.

Zatim, svakom se polinomu da po formuli (2.5) odrediti najviše jedna ovakva funkcija (odatle u tekstu »ona funkcija«), jer je jasno da jednakost dvaju polinoma povlači za sobom jednakost pripadnih dviju polinomskih funkcija, odn. da vrijedi: ako je $A=B$ u K^+, onda mora biti $a(x)=b(x)$, za svaki $x \in K$.

Obrat ove tvrdnje zove se teorem identičnosti polinoma, a on glasi: ako je $a(x)=b(x)$ za svaki $x \in K$, onda je $A=B$ u K^+.

O polju K ovisi hoće li obrat vrijediti ili neće. Za polja R, C i Q obrat vrijedi. Upravo ovoj činjenici zahvaljujemo što ćemo realne polinome moći definirati i kao cijele racionalne funkcije u polju R. Naime, zbog teorema identičnosti bit će pridruženje polinomima iz R^+, tj. nizovima realnih brojeva oblika (2.2), realnih funkcija oblika (2.6) bijektivno, pa ako se cijele racionalne funkcije budu pri tom pridruženju ponašale prema zbrajanju i množenju (koje je za njih i onako već ranije definirano) isto onako kako se ponašaju polinomi prema svojem zbrajanju i množenju (tj. ako budemo imali dva izomorfna prstena), bit će svejedno koji od njih zovemo prstenom realnih polinoma. Iduća točka 3 bit će posvećena zasnivanju realnih polinoma kao prstena cijelih racionalnih funkcija u polju R.

Napomena 2.2. — Teoremu identičnosti za polinome u K^+ ekvivalentna je ova tvrdnja: ako je $c(x)=0$, za svaki $x \in K$, gdje je c neka polinomska funkcija u polju K, onda je pripadni polinom $C=0$, tj. $c_k=0$, za svaki prirodni k.

Zaista, ako je $c(x)=0$ za svaki $x \in K$, a $o(x)=0$ za svaki $x \in K$također (ovdje je $o(x)=0+0 \cdot x+\cdots+0 \cdot x^n$), bit će najprije $c(x)=o(x)$ za svaki $x \in K$, a odatle izlazi po teoremu identičnosti da je $C=0$, tj. $c_k=0$ za svaki prirodni k. Vidimo da teorem identičnosti povlači za sobom da $c(x)=0$, za svaki $x \in K$, povlači $C=0$. Obrnuto, neka za $A=(a_0, \ldots, a_n)$ i $B=(b_0, \ldots, b_m)$ vrijedi $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, za svaki $x \in K$. Tada je $a(x)-b(x)=c(x)=\sum_{k=0}^{M}(a_k-b_k) x^k=0$, za svaki $x \in K$.

Ovdje smo stavili $M=\max\{n, m\}$ uzevši po potrebi nekoliko nula umjesto ranije neiskazanih koeficijenata što, dakako, ne mijenja funkcije u pitanju. Iz $c(x)=0$, za svaki $x \in K$, izlazi po pretpostavci da je $C=0$, odn. da vrijedi $c_k=a_k-b_k=0$, ili $a_k=b_k$, za svaki prirodni k, pa je $A=B$. Vidimo da podatak kako $c(x)=0$, za svaki $x \in K$, povlači $C=0$, povlači za sobom teorem identičnosti.

Primjer 2.3. — U prstenu Z_3^+ ne vrijedi teorem identičnosti. Da to uvidimo, promotrimo ove tri formule oblika (2.5): $a(x)=2x+x^3$, $b(x)=x+2x^3$ i $o(x)=0+0 \cdot x+0 \cdot x^2+0 \cdot x^3$. Svaka od njih određuje svoju funkciju, ali sve tri istu: to je konstanta 0. Zaista, jednostavan račun (uz pomoć tablica u Primjeru 2.1.) pokazuje da vrijedi: $a(0)=b(0)=o(0)=0$, $a(1)=b(1)=o(1)=0$ i $a(2)=b(2)=o(2)=0$. Kako su svi pripadni polinomi, $A=(0, 2, 0, 1, 0, \ldots)$, $B=(0, 1, 0, 2, 0, \ldots)$ i $C(0, 0, 0, 0, \ldots)$ međusobno različiti, to na temelju Napomene 2.2. uviđamo da ne može u Z_3^+ vrijediti teorem identičnosti.

Primjer 2.4. — Kaže se da je polinomu $A \in K^+$ korijen neki $\alpha \in K$ ako se u tom α poništi pripadna funkcija $a: K \rightarrow K$, tj. ako vrijedi $a(\alpha)=0$.

Daleko od toga da bi svaki polinom iz K^+ imao bar jedan korijen u K. Polinomi nultog stupnja npr. nemaju korijena ni u jednom polju K, a oni linearni imaju, i to točno jedan, u svakom polju. Poteškoće čine oni stupnja višeg od 1, jer njihovo ponašanje određuje odabrano polje K.

Često ima poneki polinom iz K^+ korijen izvan K, i to u nekom H, gdje je H barem natprsten što sadrži polje K kao svoj potprsten[2]. Potonji podatak znači da za skupove K i H vrijedi $K \subset H$, a za operacije zbrajanja i množenja u H, kad se vrše s elementima iz K, da se ne razlikuju od operacija zbrajanja i množenja u K.

---

[2] Svako polje je i neki komutativni prsten u istim dvjema operacijama iz formalnih razloga zbog kojih je i svaki kvadrat neki paralelogram.

Za bilo koji $\alpha \in H(K \subset H)$, čim je α korijen bar jednog polinoma iz K^+, kaže se da je algebraičan nad K. Neki $\alpha \in H(K \subset H)$ zvat će se transcendentnim nad K kad on ne bude algebraičan nad K, tj. kad α ne bude korijen ni od jednog polinoma iz K^+. Tako je npr. polje R natpolje polja Q i zacijelo njegov natprsten. Element $\sqrt{2} \in R$ je algebraičan nad Q jer je $\sqrt{2}$ korijen polinoma $(-2, 0, 1, 0, \ldots) \in Q^+$ pošto u R vrijedi $-2+x^2=0$ za $x=\sqrt{2}$. Brojevi π i e su transcendentni nad Q jer ni π ni e nisu korijeni ni od jednog polinoma s racionalnim koeficijentima. Međutim, i π i e su algebraični nad R jer je npr. $\pi - x=0$ za $x=\pi \in R$.

Napomena 2.3. — U (2.5) ili (2.6) x je oznaka za varijabilni element polja K, tako da zapis $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$ još ne predstavlja gotovi objekt kakav smo naučili imati pred sobom kada poznatim algoritmima množimo ili dijelimo međusobno dva polinoma. U tim algoritmima x^k predstavlja samo raniji indeks k, odnosno mjesto u polinomu na kojem se pojavljuje koeficijent a_k, i to na vrlo koristan, spretan i sugestivan način, tako da se te uloge x—a ne kanimo odreći. Takve ćemo formalne zapise zvati u slijedećoj točki 3 prikazima polinoma. Međutim, neposredno se vidi da se skup svih polinoma K^+ nad poljem K može dovesti u bijektivnu vezu sa skupom svih formalnih zapisa ili prikaza oblika $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots + a_n \cdot x^n$, gdje su svi a_i elementi polja K, na takav način da se među koeficijente prikaza a_i uzmu svi koeficijenti polinoma, onakvi kakvi jesu i u poretku u kojem dolaze zaključno sa vodećim koeficijentom polinoma a_n, i takav konačan niz snabdije plusevima i rastućim potencijama znaka x.

3. POLINOMI VIA REALNE FUNKCIJE

Ovdje ćemo, od samog početka, zvati polinomima cijele racionalne funkcije u polju R i na tako shvaćene referirati kao na polinome u smislu točke 3 za razliku od polinoma kako smo ih shvaćali u točki 2. Opravdanje za ovakav postupak uskoro će uslijediti. Naime, pokazat će se da su polinomi u smislu točke 3 izomorfni onima u smislu točke 2 ako ih razvijamo nad poljem R. Polazna će nam točka biti formule (2.5) ili (2.6), samo što sada zapis $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$ ne smijemo zvati polinomom već i zato da ne bismo prejudicirali teorem identičnosti. Naime, ni od kuda se, zasad barem, ne vidi zašto zapis $b_0+b_1 x+ \cdots +b_m \cdot x^m$, različit od prethodnog, ne bi određivao istu onu realnu funkciju koju određuje i prethodni i, dakle, isti polinom. U tu svrhu nazvat ćemo formalni zapis oblika $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots + a_n \cdot x^n$ prikaz polinoma pa definirati:

Definicija 3.1. — Svaka realna funkcija $a : R \to R$, koja ima bar jedan prikaz oblika $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$ za koji vrijedi $a(x)=a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$, za svaki $x \in R$, zove se realni polinom. Dva prikaza, $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$ i $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n+a_{n+1} \cdot x^{n+1}+ \cdots +a_m \cdot x^m$, smatraju se jednakima ako je $a_{n+1}= \cdots =a_m=0$.

Skup svih realnih polinoma u smislu Definicije 3.1. označimo sa $R[x]$.

Iz definicije se neposredno razabire da je svaki prikaz nekog polinoma određen uređenom $(n+1)$-orkom svojih koeficijenata, da polinomi nultog stupnja imaju jedinstven prikaz (to je naprosto a_0 za svaki $a_0 \in R$), a vrlo lako se jedinstvenost prikaza provjerava za linearne polinome[3]. Zaista, ako je $a_0+a_1 \cdot x = b_0+b_1 \cdot x$ za svaki $x \in R$, onda še podatak $a(0)=b(0)$ svodi na jednakost $a_0=b_0$, a podatak $a(1)=b(1)$ na jednakost $a_0+a_1=b_0+b_1$ i, dakle, na $a_1=b_1$. Naime, u svakom polju nalaze se elementi 0 i 1, te je $0 \neq 1$.

Primjer 3.1. — Zbroj dvaju realnih polinoma opet je neki realni polinom, a i produkt dvaju polinoma bit će polinom.

Budući da su nama realni polinomi sada funkcije iz Definicije 3.1, prethodni podatak je teorem i kao takav zahtijeva dokaz.

Kao što znamo, za dvije realne funkcije, $f_1 : R \to R$ i $f_2 : R \to R$, zove se njihovim zbrojem svaka ona realna funkcija $g : R \to R$ koja u čitavom R djeluje po formuli

$$g(x)=f_1(x)+f_2(x), \tag{3.1}$$

a njihovim produktom svaka ona realna funkcija $h : R \to R$ koja na čitavom R djeluje po formuli

$$h(x)=f_1(x) \cdot f_2(x). \tag{3.2}$$

Doduše, zbog jedinstvenosti zbroja i produkta dvaju realnih brojeva odmah se vidi da su i zbroj i produkt dviju realnih funkcija jedinstvene realne funkcije, tj. da ima točno jedna realna funkcija koja na čitavom R djeluje onako kako piše u (3.1) i isto tako točno jedna za koju će biti (3.2) na snazi. Zato je prirodna oznaka f_1+f_2 za onu funkciju g iz (3.1) kao i oznaka $f_1 \cdot f_2$ za onu funkciju h iz (3.2).

Dokaz osnovne tvrdnje. — Neka budu a i b dva polinom u $R[x]$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ neki prikaz prvog, $\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ neki drugog, $c \in R$ proizvoljno odabran i, određenosti radi, $n>m$. Pozivom samo na svojstva (asocijativnost i distributivnost) obiju operacija u R nalazimo da vrijedi:

$$a(c)+b(c)=(a_0+a_1 \cdot c+ \cdots +a_n \cdot c^n)+(b_0+b_1 \cdot c+ \cdots +b_m \cdot c^m+0 \cdot c^{m+1}+ \cdots +0 \cdot c^n)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)c+ \cdots +(a_m+b_m)c^m+(a_{m+1}+0)c^{m+1}+ \cdots +(a_n+0)c^n.$$

Kako je c bio proizvoljno odabran, za svaki $x \in R$ na snazi je formula

$$a(x)+b(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k. \tag{3.3}$$

---

[3] Stupanj polinoma definira se sada kao najmanji među stupnjevima svih njegovih prikaza, a za pojedini prikaz danog polinoma stupanj se definira prema vodećem koeficijentu tog prikaza. Ovoliki oprez uskoro neće biti potreban jer ćemo dokazati teorem identičnosti prema kojem svaki polinom u smislu točke 3 ima jedan jedini prikaz.

Kako zdesna u (3.3) zacijelo stoji neki prikaz polinoma, dokazali smo da je realna funkcija $a+b$, što je definirana u (3.1), realni polinom. Za produkt u proizvoljno odabranom $c \in R$ nalazimo da vrijedi:

$$a(c) \cdot b(c) = (a_0 + a_1 \cdot c + \cdots + a_n \cdot c^n) \cdot (b_0 + b_1 \cdot c + \cdots + b_m \cdot c^m) =$$

$$(a_0 b_0 + a_1 b_0 c + \cdots + a_n b_0 c^n) + (c_0 b_1 c + a_1 b_1 c^2 + \cdots + a_n b_1 c^{n+1}) +$$

$$+ \cdots + (a_0 b_m c^m + a_1 b_m c^{m+1} + \cdots + a_n b_m c^{m+n}) =$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c + \cdots + a_n b_m c^{n+m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) c^k.$$

Opet nam je za svaki $x \in R$ na snazi formula

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k, \tag{3.4}$$

a kako zdesna u (3.4) zacijelo stoji neki prikaz polinoma, dokazali smo da je realna funkcija $a \cdot b$, što je definirana u (3.2), realni polinom.

Oboružani ovim podatkom, tj. formulama (3.3) i (3.4), lako bismo provjerili da je skup $R[x]$, snabdjeven zbrajanjem i množenjem kako su definirani za realne funkcije u formulama (3.1) i (3.2), komutativni prsten.

U uvjetima Definicije 3.1. možemo dati teoremu identičnosti ovaj oblik: svaki realni polinom ima najviše jedan prikaz.

Dokaz. — Kad to tako ne bi bilo, bar jedan bi polinom $c \in R[x]$ imao bar dva prikaza, tj. vrijedilo bi:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & c(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \\ (2) & c(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \end{array}\right\} \text{ za svaki } x \in R \text{ i pri tome}$$

(3) $\quad a_i \neq b_i$ bar za jedan i, $0 \leqslant i \leqslant M = \max\{p, m\}$.

Zbog toga će biti $\sum_{k=0}^{M} (a_k - b_k) x^k = 0$, za svaki $x \in R$. Ako stavimo $a_k - b_k = c_k$, bit će u prikazu $\sum_{k=0}^{M} c_k x^k$ ispunjeno $c_i \neq 0$ bar za jedan i, $0 \leqslant i \leqslant M$, zbog (3). Neka je najveći takav indeks i upravo n. Svakako da je $n \geqslant 1$, jer je neminovno $c_0 = 0$ ako je $n = 0$. Dakle, moralo bi biti:

$$c_n \neq 0, \; c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0, \text{ za svaki } x \in R, \text{ i } n \geqslant 1.$$

To se ne može održati. Naime, u R se sigurno nalaze ovi elementi: $0, 1, \ldots, n$. Za svaki od njih umjesto x u prethodnom podatku $c_0+c_1 x+\cdots+c_n x^n=0$ dobivamo redom ove uvjete:

$$\begin{aligned}
&c_0 &&=0\\
&c_0+c_1\cdot 1+c_2\cdot 1^2+\cdots+c_n\cdot 1^n&&=0\\
&c_0+c_1\cdot 2+c_2\cdot 2^2+\cdots+c_n\cdot 2^n&&=0\\
&\vdots && \vdots\\
&c_0+c_1\cdot n+c_2\cdot n^2+\cdots+c_n\cdot n^n&&=0.
\end{aligned}$$

Ovaj linearni homogeni sistem ima rješenje $c_0=0$, $c_1=0, \ldots, c_n=0$, koje je i jedino, ako je rang sistema jednak broju nepoznanica, odnosno ako determinanta sistema nije nula[4]. Kako je

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 1^2 & \cdots & 1^n\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^n\end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & 1^n\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{bmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)\neq 0,$$

jer je to **Vandermondeova determinanta**[5], morali bismo imati $c_n=0$.

Sad se možemo uvjeriti da se dade uspostaviti bijekcija između skupa svih realnih polinoma R^+ (ili polinoma kako smo ih shvaćali u t. 2) i skupa svih cijelih racionalnih funkcija $R[x]$ (ili realnih polinoma kako ih shvaćamo u ovoj točki).

Ako svakom realnom polinomu $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)\in R^+$ pridružimo $a_0+a_1 x+\cdots+a_n x^n$ kao odgovarajući prikaz, onda smo uspostavili bijekciju između skupa R^+ i skupa svih mogućih prikaza polinoma. To je potpuno očigledno.

---

[4] Vidi npr. [4], str. 83.

[5] Vidi npr. [4], str. 50.

Svakom takvom prikazu pridružimo onu cijelu racionalnu funkciju u R, tj. onaj polinom u smislu točke 3, koja je tim prikazom definirana. Ovo je pridruženje jednoznačno. Budući da će raznim prikazima biti pridruženi različiti polinomi u smislu točke 3 (jer vrijedi teorem identičnosti), i ovo je pridruženje bijekcija, ali između skupa svih mogućih prikaza i skupa $R[x]$. Kompozicija opisanih dvaju pridruženja je bijekcija između R^+ i $R[x]$.

Preostaje provjeriti da su R^+ i $R[x]$ izomorfni prsteni, što će reći da je zbroju (produktu) dvaju elemenata iz R^+ onom posljednjom bijekcijom zaista pridružen zbroj (produkt) u $R[x]$ onih dvaju po njoj pridruženih elemenata. Međutim, ovaj podatak izlazi iz formula (3.3) i (3.4). Promotrimo ga samo za zbroj.

Polinomu $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \in R^+$ bit će prema navedenome pridružena ona funkcija $a : R \to R$ za koju će vrijediti $a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$, za svaki $x \in R$, a polinomu $(b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ ona funkcija $b : R \to R$ za koju će vrijediti $b(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_n \cdot x^n$, za svaki $x \in R$. Zbroju $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, 0, \ldots)$ bit će pridružena ona funkcija $c : R \to R$ za koju će vrijediti:

$$c(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) \cdot x + \cdots + (a_n + b_n) x^n, \quad \text{za svaki } x \in R,$$

odnosno, bit će za nju ispunjeno:

$$c(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n) + (b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_n x^n),$$

ili

$$c(x) = a(x) + b(x), \quad \text{za svaki } x \in R.$$

Na temelju (3.3) posljednji podatak znači da je $c = a + b$, pa je zaista zbroju dvaju polinoma iz R^+ pridružen u $R[x]$ zbroj onih dviju funkcija što su u $R[x]$ pridružene svakom od njih.

To su, eto, razlozi zbog kojih u srednjoj školi slobodno govorimo o prstenu realnih polinoma kao o prstenu cijelih racionalnih funkcija polja R.

Napomena 3.1. — Moglo bi se postaviti pitanje, zašto se sâm prikaz realnog polinoma, kako je uveden pri kraju točke 2 i u početku točke 3, ne bi smio zvati polinomom u smislu točke 2. Na taj bi način otpala ona apstraktna definicija polinoma iz točke 2 u kojoj nema x. Dakako, tad bi se x morao proglasiti nepoznanicom ili neodređenicom, pa bismo računali s formalnim zapisima oblika $a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ kao gotovim objektima umjesto sa zapisima $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$. To se zaista može učiniti, ali pri tome moraju biti zadovoljena ova dva uvjeta:

(1) x mora pripadati (barem) nekom natprstenu polja R (što je vrlo prirodan zahtjev, jer kako ćemo inače odrediti npr. $x \cdot x$ i rezultat x^2, koji će ležati u tom natprstenu, pomnožiti još sa a_2) i

(2) x mora biti transcendentan nad R (jer bismo u slučaju algebraičnog x imali manje objekata oblika $a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ nego što imamo polinoma u R^+, pa izomorfizam ne bi bio moguć). Pod navedenim dvama uvjetima bit će skup svih zapisa oblika $a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$, gdje su svi a_i iz R, ako se oni budu zbrajali i množili međusobno po formulama (3.3) i (3.4), prsten što je izomorfan prstenu svih polinoma R^+.

U našem drugom pristupu polinomima, tj. kod polinoma u smislu točke 3, nepoznanica x nema tu ulogu, premda svaki prikaz određuje jedan jedini polinom. Njezina je uloga svedena na onu istu koju ima x u zapisima sin x, log x ili 2^x. To je oznaka za varijabilni element skupa R, koja se redovito koristi uz kvantifikatore »svaki« ili »bar jedan«.

Napomena 3.2. — Moglo bi se postaviti pitanje, zašto se sâm prikaz realnog polinoma, kako polinome shvaćamo u ovoj točki, ne bi smio zvati polinomom kad i onako postoji vrlo prirodna bijekcija između skupa svih takvih prikaza i skupa svih polinoma kad ih shvaćamo kao realne funkcije. To se obično čini, premda ovakav postupak nije sasvim korektan jer $a_0+a_1 \cdot x+ \cdots +a_n \cdot x^n$ nije funkcija upravo kao što ni sin x nije funkcija[6]. Pitanje poput: »Da li je onda x polinom, prikaz ili funkcija?«, onako kako je formulirano, samo zamagljuje situaciju. Što se ovdje ima na umu valjda je funkcija zvana identiteta na R, znakom i_R, koja djeluje u skupu R po formuli $i_R(x)=x$, za svaki $x \in R$, i koja je zaista polinom (u smislu točke 3), jer ima prikaz oblika $0+1 \cdot x$ za koji vrijedi $i_R(x)=x=0+1 \cdot x$, za svaki $x \in R$.

LITERATURA

U svrhu podrobnije informacije, neka čitatelj konzultira neku od ovih knjiga:

[1] A. Białnicki—Birula: *Algebra*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1971;

[2] B. Hornfeck: *Algebra*, W. de Gruyter, Berlin, 1973;

[3] V. G. Kirin: *Uvod u matematičku analizu*, skripta Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1976;

[4] А. Г. Курош: *Курс высшей алгебру*. Государственное издательство физико-математической литературу, Москва, 1962.

Jean—Louis Krivine

AKSIOMATIČKA TEORIJA SKUPOVA

»Školska knjiga«, Zagreb, 1978, format 12×20, broširano, cijena 85 dinara.

Sa francuskog preveo dr Vladimir Devidé.

Sadržaj: I. Aksiomi teorije skupova (Zermelo — Fraenkel), II. Ordinali, kardinali, III. Aksiom fundacije, IV. Shema refleksije, V. Skup formula, VI. Skupovi definabilni pomoću ordinala. Relativna konzistencija aksioma izbora, VII. Fraenkel — Mostowskijevi modeli. Relativna konzistencija negacije aksioma izbora (bez aksioma fundacije), VIII. Konstruktibilni skupovi. Relativna konzistencija generalizirane hipoteze kontinuuma. — *Dodatak:* Drugi Gödelov teorem nepotpunosti u teoriji skupova; Zadaci; Bibliografija.

[6] Naime, funkcija je sinus, znakom sin, a sin x je realan broj ako je to i x.

ОД ИНТУИТИВНОГ ДО ПРЕЦИЗИРАНОГ ПОЈМА „АЛГОРИТАМ“, I

МИЛАН ТАСИЋ,
Скопље

1. АЛГОРИТМИ У ИНТУИТИВНОМ СМИСЛУ РЕЧИ

1. У опште узев, једна широка класа проблема дискутована у смислу одређене карактеристике могућих решења допушта да буду уочене две потkласе њених елемената, у чије ће нас природе упутити два следећа примера — репрезентанта ових класа.

Први проблем одредимо приближно као начин да у комуникационом смислу сваки становник наше планете постане доступан осталим људима на њој, а његово решење је у пружању назива државе, места, улице и броја, те особног имена и презимена појединачног лица. Суштинска одлика одговора на ово питање је да он не зависи од конкретног лица, да је фразом која га исказује потпуно (коначно) описан за целу класу могућих задатака и да у том виду омогућава решење сваког партикуларног случаја.

Међутим, проблем вођења истраге на пример, коју су органи безбедности неке земље надлежни да спроводе, открива другачију природу. Сваки конкретан истражни поступак одвија се у правцу који налажу околности што се уз пут јављају — не може се прописати јединствен (потпун) метод такве врсте и принципијелно није могуће поставити захтев за општим (заједничким) решењем овог проблема.

У општем случају, нека је могуће наложити један исти захтев на елементе произвољне класе објеката, у односу на који се сваки од њих може недвосмислено да одреди. Мимо могућих различитих начина, и независно од њих, досезања тражених одговора у (бес)коначном броју партикуларних случајева, формулишемо проблем постојања општег (заједничког) метода који би, будући примењен на ма који конкретан објекат класе, омогућио одговарајући резултат постављених захтева. Такав униформни, у релацији са целом класом, метод или процедуру називамо **алгоритмом** за ту класу. Уколико је у основи бесконачна класа питања чија природа допушта одговоре типа „да“ или „не“, још се таква процедура назива и **разрешујућом процедуром** или **методом одлучивања,** а сâм проблем открића таквог метода — **проблем одлучивости** за ову класу.

Надаље, под појмом **процедуре израчунавања** или **алгоритма** (отуда — **проблем израчунавања**) подводимо сваки такав општи поступак који одговор на један индивидуалан захтев омогућава у смислу конструкције неког објекта.

2. Од симбола „∘" и „∗" начињен је (бесконачан) низ

$$* \circ \circ * \circ \circ \circ \circ * \circ \circ \circ \circ \circ \circ * \circ \circ \ldots,$$

а њиме повежимо проблем да се по индексу места одреди врста знака који то место заузима. Захтевана препознатљивост је алгоритмичка, а састоји се у томе да се утврди да ли посматрани индекс представља квадрат природног броја — када је дотично место попуњено знаком „∗"; односно знаком „∘", у другом случају.

б) Од 14 шибица постављених на столу, лица A и B се наизменично смењују у узимању (по свом нахођењу) по једну или две од њих. Игру губи лице приморано да подигне последњу шибицу. Да ли је могуће изградити стратегију игре по ономе ко игру почиње, која би овом лицу (без обзира на игру противника) прибавила сигурну победу?

Нека први потез у игри припада лицу A. Алгоритам-стратегија игре играча A је следећа: узети једну шибицу при првом потезу, а у сваком следећем $3-i$, где је i ($i \leqslant 2$) број шибица које лице B управо издвоји.

Игра се може графички да прикаже, а за сваку игру истог типа и да докаже постојање за једног од играча победничке стратегије. Графичка илустрација, која би открила најбоље стратегије за играче, начелно је могућа и у случају игара које сем победе и пораза допуштају и нерешен исход, какав представља игра шаха. Практично (но не и потенцијално) такав је алгоритамски процес неоствараљив, због врло великог броја могућности које према инструкцијама треба размотрити, но ипак је одговор на питање постојања јединственог метода, да у свакој игри овога типа буду пронађене најбоље стратегије за сваког од играча, позитиван.

ц) Историјским примером алгоритма служи тзв. **Еуклидов алгоритам.** Еуклидов алгоритам омогућава налажење највећег заједничког делиоца два природна броја (a и b), а чини га следећи списак правила:

1. Посматрати бројеве a и b. Прећи на следеће упутство.
2. Упоредити посматране бројеве ($a<b$, $a=b$ или $a>b$). Прећи на следеће упутство.
3. Ако је $a=b$, тада и a и b чине резултат. Заустављање. Ако је $a \neq b$, прећи на следеће упутство.
4. Ако је први од бројева које посматрамо мањи од другог, сменити њихова места, па продужити посматрање. Прећи на следеће упутство.
5. Одузети други број од првог и посматрати умањилац и остатак. Прећи на упутство 2.

д) За класу проблема: „Наћи решења система линеарних једначина

$$a_1x+b_1y=c_1,$$
$$a_2x+b_2y=c_2,$$

са двема непознатама", постоји алгоритмичка процедура коју представљају изрази

$$x=\frac{c_1 b_2-c_2 b_1}{a_1 b_2-a_2 b_1}, \qquad y=\frac{a_1 c_2-a_2 c_1}{a_1 b_2-a_2 b_1}.$$

е) **Диофантовом једначином** назива се свака једначина вида

$$P=0,$$

где је P полином са целим коефицијентима. Таквим се јављају једначине

$$2x^{15}-x^2+1=0,$$
$$3x^2+4y^3-5x=0.$$

На списку од 23 проблема које је 1900. године на Међународном математичком конгресу изнео Д. Хилберт, десети проблем односио се на Диофантове једначине, а формулисан у данашњим терминима гласио би: **наћи алгоритам да по произвољној једначини овога типа буде утврђена њена решивост или нерешивост међу целим бројевима.**

Недавно је приказано (1970. године Ј. Матијасевич) да такав алгоритам не постоји. Међутим, за подкласу Диофантових једначина вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

оваква разрешујућа процедура лако се открива и она се може да пропише полазећи од чињенице да је сваки целобројни корен x_0 такве једначине делилац броја a_0.

ф) Сваки коначан систем (међусобно различитих) симбола називамо **азбуком.** Елементи азбуке чине **слова,** а ма који коначан низ (комплекс или слог) слова азбуке је **реч** исте азбуке. Празна реч (реч без слова) означава се са $\wedge$. Нека су P и Q две речи азбуке A. Ако P чини део речи Q, кажемо да реч P **улази** у Q. Трансформације (прераде) једних у друге речи вршимо сменом појединих (делова) речи другим речима. (Ознака за смену: „—“). У том смислу указује се неки коначан систем правила, тзв. „**допустивих супституција**“. Две речи, P и Q, азбуке A су **еквивалентне** (ознака: $P \sim Q$) ако се вишеструким вршењем допустивих супституција реч P може прерадити у реч Q.

Асоцијативни рачун је скуп свих речи дате азбуке заједно са неким системом допустивих супституција. Најзад, за сваки асоцијативни рачун везан је **проблем речи** који гласи: „Да ли постоји алгоритам помоћу кога би било могуће утврдити еквивалентност (две произвољне) речи (датог асоцијативног рачуна)?

Азбука $\{a, b, c\}$ и систем допустивих супституција

$$ab—ba$$
$$ac—ca$$
$$bc—cb,$$

задају један асоцијативни рачун. Речи $abcba$ и $aacbb$ су еквивалентне; исто тако је и $abbca—cbaba$.

Овај асоцијативни рачун има решив проблем речи. Оне речи овог рачуна су еквивалентне које се састоје од истог броја слова и једнаког броја појављивања тих слова у свакој од њих.

3. Истичући оне црте које подвлаче његов карактер, може се на интуитивном плану да оствари следећи опис појма „алгоритам“. Најпре, алгоритамски процес могуће је засновати на тзв. „конструктивним“ („финитним“) објектима. **Финитни** су они објекти који могу бити спецификовани помоћу (неког) коначног броја информација. Природне бројеве је, на пример, могуће спецификовати указивањем одговарајућих арапских цифара (које их означавају). Објектима овога типа (од математичких ентитета) јављају се даље рационални бројеви, полиноми са рационалним коефицијентима, или матрице са рационалним члановима, сваки коначан низ финитних објеката и др.

Видимо дакле да, уопште узев, финитни објекти чине бесконачну класу елемената, таквих које је коначним средствима могуће конструисати у коначно много поступака. Бесконачност овога типа је **потенцијална** бесконачност (бесконачност **у настајању**). Стога сматрамо потенцијално остварљивим нпр. и такав конструктивни објекат — природан број 10^{12}, иако је потребно начинити 10^{12} корака да би био изграђен 10^{12}-ти члан низа 0, 1, 2, . . (а 10^{12} sec износи више од 300 000 година.

Алгоритамски процес се одвија затим кроз етапе, путем узастопних конструкција система објеката у свакој етапи, једнозначно одређених према неком пропису (програму) из система објеката изграђених на некој претходној етапи, а полазан (коначан) систем објеката је задан.

А. А. М а р к о в каже: „У математици је прихваћено да се под „алгоритмом“ подразумева тачан пропис, који детерминише рачунски процес, што води од варирајућих полазних података ка траженом резултату“ [1].

4. Одељак у коме смо описали интуитивни појам алгоритма завршићемо са неколико историјских информација. Реч „алгоритам“ потиче од имена А б у Ј а ф а р М у х а м е д и б н М у с а ал-Х о в а р и з м и — арапског математичара из IX века. Путем алгоритма омогућено је решавање на механички начин целе групе истородних проблема, док је на другој страни рад који се означава као стваралачки — такав, наиме, који у случају произвољне класе задатака захтева посебне облике инвенције при креацији сваког индивидуалног решења.

Да ли је могуће другу врсту проблема свести на прву?

Излажући своју аналитичку геометрију, Д е к а р т (Descartes) је тако желео „да створи геометрију доступну алгебарским методама израчунавања, а самим тим би се битно отишло напред на путу ка њеној алгоритмизацији“ [9].

Х и л б е р т о в програм формализације математике заснован је, такође, на идеји суштински блиској Л а ј б н и ц о в о ј (Leibniz) замисли о конструкцији универзално тачног симболичког језика („characteristica universalis“), „на коме би било могуће формулисати сва тврђења (у математици — све теореме) науке и захваљујући коме би било могуће стећи јасну представу о смислу и исправности тих тврђења“ (били изведени сви математички докази). Овакав језик треба уз то да пружи и „комбинаторни симболички критеријум“ којим би, у случају математике, била верификована исправност постигнутих доказа (цит. [8] с. 60).

2. АЛГОРИТМИ НАД АЛФАБЕТОМ

1. Што се тиче општег проблема постојања алгоритама за произвољну класу задатака, могуће је сматрати дефинитивно решеним сваки партикуларни случај такве врсте у коме би нека конкретна алгоритмичка процедура била указана. Међутим, околности су битно другачије када треба **доказати** непостојање **никаквог** алгоритма за одређену класу проблема. То захтева тачно познавање онога **што** се сматра алгоритмом, а појам алгоритма какав смо упознали, будући изграђен на интуитивном плану, показује се недовољно јасним. Сваки од израза, нпр. „пропис", „детерминисаност", „конструктивни објекат" и др. (без додатних одређења) не дају могућност за редовно препознавање, а тиме и свако математичко поступање са појмовима које означавају.

Отуда проистиче захтев за изградњом појма „алгоритам" у јасним и прецизним терминима, који би поседовали математички задовољавајућу строгост.

2. Чињеница да сваки конструктивни објект представља коначну целину оствариву на финитан начин пружа нам могућност да у означавању ових објеката пођемо од неког (коначног) система знакова. Тачније речено, будући да за једну математичку теорију природа, на пример сваког од објеката: шаховске фигуре (у проблему изградње победничке стратегије за ову игру), разне ситуације у индустријској производњи и др. које учествују у неком алгоритамском процесу, није битна, то апстраховањем (издвајањем) онога што је заједничко (опште) у најширем смислу речи за све објекте ове класе, прилазимо ка таквој могућности посматрања, при изградњи теорије алгоритама, неког алфабета у основи.

Алфабетом, као што смо рекли, називамо сваки (непразан) коначан скуп (међусобно различитих) симбола. За означавање алфабета служиће нам велика слова Φ, Ψ, $\Omega, \ldots$ грчке азбуке. Елементи скупа-алфабета су његова **слова.** Чињеницу да слово a припада алфабету Φ означавамо са $a \varepsilon \Phi$, а њену негацију са $a \varepsilon' \Phi$. Користићемо мала писана слова латинице за означавање слова неког алфабета, или пак знакове $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Ма на који начин сачињен коначни низ (слог или комплекс) од слова датог алфабета, као што је познато, представља **реч** над тим алфабетом. Речи означавамо великим штампаним словима латинице. Јасно је да је већ над алфабетом од једног члана могуће формирати бесконачно много речи, да је свако слово истовремено и реч над истим алфабетом и да је празна реч — реч над сваким алфабетом.

Ако је, затим, свако слово алфабета Φ истовремено и слово алфабета Ψ, тада је Ψ **проширење** алфабета Φ (ознака $\Phi \subseteq \Psi$). Најзад, на сваком скупу речи изводљива је операција „композиција", која омогућава да се од сваке две речи над неким алфабетом добије трећа реч над истим алфабетом.

3. Сваки се конструктивни објект може приказати као реч над неким алфабетом. Чињеница да записи многих објеката нису у виду линеарног слеђења слова није препрека оваквом третману сваког конструктивног објекта. У такав распоред слова могуће је сваки такав израз „превести" на неки допустив начин. На пример у случају конструктивног објекта — полинома $x^3 - 3x + 1$, његов могући (у односу на постојећи једнозначно одређени линеарни запис био би x^3-3x+1. Разломак $\frac{x}{y}$ је могуће писати као x/y, а сваку матрицу (шему елемената)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

као *xaybzau*, односно као реч над проширеним (словима *a* и *b*) алфабетом датог алфабета. Карактеристика, пак, сваког алгоритамског процеса је да систем објеката на једној етапи бива „прерађен“ (трансформиран) у (неки други) систем објеката у следећој етапи. Отуда видимо да ће за конструктивно одређење појма „алгоритам“ бити свакако корисно употребити математички појам пресликавања (као кореспонденције).

Стога сваку кореспонденцију којом је речима над једним алфабетом једнозначно придружена нека реч над другим алфабетом називаћемо **оператором** међу датим алфабетима (краће — **азбучни оператор**). Први се алфабет назива **улазним,** а други **излазним.** Азбучни оператор није дефинисан за оне речи над полазним алфабетом за које кореспонденција не утврђује придружну реч над другим алфабетом. Иначе, овај је оператор **дефинисан,** а скуп свих таквих речи образује његову **област дефинисаности.** Чињеница делимичне дефинисаности азбучног оператора омогућава да излазни и улазни алфабет могу бити „сједињени“, и тада се може говорити о оператору дефинисаном над (једним) одговарајућим алфабетом.

На пример, у случају преласка са децималног на дуални систем записа природних бројева улазни алфабет је $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, излазни, рецимо $\{*, |\}$ а јединствени алфабет $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *, |\}$.

4. Да би појам „алгоритам“ извели из појма азбучног оператора, неопходно је извршити нека даља прецизирања над овим другим. Најпре, термин „кореспонденција“, који се среће у дефиницији овога појма, довољно је широк да собом обухвати и различите поступке „неефективног“ придруживања елемената два скупа речи, а у задавању алгоритама управо се инсистира на „тачном пропису“ који омогућава **реалну** конструкцију нових величина.

На пример, кореспонденцијом

$$\alpha(x)=\begin{cases} 1 & \text{ако се у децималном развоју броја } e \text{ срећу } x \\ 0 & \text{узастопних нула, иначе} \end{cases}$$

задана је функција на скупу природних бројева са вредностима из истог скупа. Ова кореспонденција, међутим, одређује само делимично израчунљиву функцију. Будући да у развоју броја $e=2{,}718281828405\ldots$ уочавамо једну нулу, можемо одмах писати $\alpha(1)=1$; но у општем случају не располажемо никаквим „методом израчунавања“. А такав метод мора уз то бити задат неким коначним системом правила.

Другу „корекцију“ дефиниције азбучног оператора вршимо у следећем смислу. Уколико се ефективно задати азбучни оператор не може применити на неку реч — тачније ако се њиме одређени рачунски процес заснован на тој речи завршава на некој етапи не дајући резултат, дефиницију овог оператора проширимо следећом инструкцијом: „Добивши реч иза које се процес прекида не дајући резултат, поновити ту реч“.

Сада већ располажемо могућношћу да дамо следеће ближе одређење појма „алгоритам“.

Алгоритам над алфабетом Ф је сваки (коначним бројем правила) ефективно задан азбучни оператор, који будући примењен на произвољну реч над Ф, омогућава узастопну прераду ове речи у једном потенцијално остваривом бесконачном процесу.

Употребљаваћемо ознаке $\mathcal{U}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}, \ldots$, или пак $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ за алгоритме. При томе, алгоритам $\mathcal{U}$ може се **применити** на реч A ако се њиме одређени алгоритамски процес, будући заснован на речи A, завршава на некој речи B. Тада пишемо $\mathcal{U}(A)=B$. Кажемо, исто тако, да $\mathcal{U}$ **прерађује** реч A у реч B. Иначе $\mathcal{U}$ се **не може применити** на ту реч.

5. Као илустрацију уз последњу дефиницију наводимо два једноставна примера алгоритама из дела [1]. Први је алгоритам сабирања, а други алгоритам множења природних бројева.

У том смислу посматрајмо алфабет $\Psi=\{|, *\}$. Сматрамо да речи над алфабетом Ψ састављене од n знакова | представљају природан број n у интуитивном смислу, а да празна реч представља број 0; ако пак речи $A, B, C, \ldots$ представљају неке бројеве, узимамо да реч

$$(*) \qquad A * B * \cdots * C$$

представља систем тих бројева.

Лако је установити алгоритам $\mathcal{U}$ над алфабетом Ψ, који би био назван „алгоритам сабирања“. Било би то правило: „Избрисати све знакове $*$ и зауставити се“. Тако поступајући добијамо реч $AB \ldots C$, полазећи од речи $(*)$, а она, у ствари, представља број $A+B+\ldots+C$ — збир бројева $A, B, \ldots, C$. На пример, $\mathcal{U}(|*||*|||)=||||||$.

Алгоритам множења $\mathcal{B}$ природних бројева могуће је одредити као алгоритам над алфабетом $\Psi \cup \{+\}$ помоћу следећег система правила:

P1. Реч која садржи више од једног знака $*$ репродуковати неизмењену.

P2. У речи са укупно једним улажењем знака $*$, коме претходи бар једно улажење знака |, прво улажење | заменити са $+$.

P3. У речи са укупно једним улажењем $*$, коме не претходи ни једно улажење |, а садржи улажења овога знака, прво улажење | заменити са речи лево од $*$.

P4. У речи са само једним улажењем $*$ и у коју не улази | избрисати прво слово.

P5. У речи која не садржи улажења $*$, а садржи улажења $+$, заменити прво улажење $+$ са |.

P6. Кад реч не садржи ни једно улажење како знака $*$ тако и знака $+$, зауставити се.

Приметимо да и сваки други поредак правила P1 — P6 задаје исти алгоритам.

Следећа шема приказује рад алгоритма $\mathscr{B}$ у случају прераде (множења) речи $||*|||$ (система бројева 2 и 3), са одговарајућим коментаром (у коме су указана коришћена правила за измену речи из претходне етапе) на десној страни.

|	|	*	|	|	|					
+	|	*	|	|	|					P 2
+	+	*	|	|	|					P 2
+	+	*	+	+	|	|				P 3
+	+	*	+	+	+	+	|			P 3
	+	+	*	+	+	+	+	+	+	P 3
		+	*	+	+	+	+	+	+	P 4
			*	+	+	+	+	+	+	P 4
				+	+	+	+	+	+	P 4
				|	+	+	+	+	+	P 5
						.	.	.		
				|	|	|	|	|	+	P 5
				|	|	|	|	|	|	P 5
										P 6

Отуда је $\mathscr{B}(||*|||) = ||||||$, односно $2 \cdot 3 = 6$.

Pavle Dragojlović

INFORMATIKA

Uvod u suvremenu obradu informacija sa rječnikom stručne terminologije na engleskom i hrvatskom književnom jeziku.

»Školska knjiga«, Zagreb, 1977, format 17×24, tvrdi uvez, plastificirano, strana 208, cijena 70 dinara.

Recenzenti: dr Božo Težak, mr Zvonko Fabijan i dr Ivan Furlan.

Sadržaj: 1. *Kibernetika*: 1.1. Povijest i podijela, 1.2. Predmet proučavanja; 2. *Osnove teorije informacija:* 2.1. Komunikacije, 2.2. Kodiranje i količina informacija, 2.3. Primjena jedinice količine informacija; 3. *Dokumentacija:* 3.1. Uvod u povijest, 3.2. Nosioci znanstvenih i tehničkih informacija, 3.3. Sređivanje nosilaca informacija; 4. *Elektronički računski strojevi:* 4.0. Uvod, 4.1. Građa računala i njegova upotreba, 4.2. Memorija računala, 4.3. Binarni i ostali kodovi, 4.4. Logika, 4.5. Programiranje, 4.6. Operacijski sistemi, 4.7. Periferni uređaji za ulaz i izlaz, 4.8. Telekomunikacije, 5. *Primjene računala u dokumentaciji:* 5.0. Uvod, 5.1. IDIS-sistem, 5.2. Mreže i baze podataka; 6. *Standardi.*

PRIMJENA MODELA PRI FAKTORIZACIJI KVADRATNOG POLINOMA

DAMJAN JOVIČIĆ,
Zagreb

U osnovnoj školi učenici se upoznaju sa pojmovima polinoma, jednakosti polinoma, operacijama sa polinomima i rastavljanjem polinoma na faktore. Iskustvo pokazuje da u savladavanju ove materije iskrsavaju različite poteškoće. Te poteškoće dolaze do izražaja naročito pri rastavljanju polinoma na faktore i u zadacima u kojima treba primjeniti znanje rastavljanja na faktore. Evo nekih od njih:

Primjer 1. — Koliko stranica ima poligon koji ima 9 dijagonala?

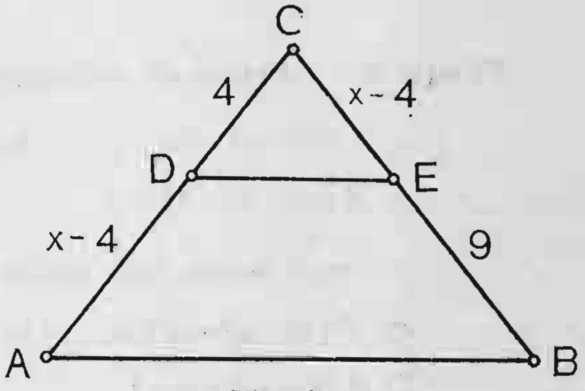
Rješenje ovog zadatka svodi se na rješavanje jednadžbe $n^2 - 3n - 18 = 0$, tj. na traženje nula polinoma $D(n) = n^2 - 3n - 18$.

Primjer 2. — Trokuti ABC i CDE su slični, odredi x!

Rješenje ovog zadatka svodi se na rješavanje jednadžbe $x^2 - 8x - 20 = 0$, tj. na traženje nula polinoma

$$P(x) = x^2 - 8x - 20.$$

Prema slici 1 na osnovi sličnosti dolazimo do razmjera $4 : x = (x - 4) : (x - 5)$, iz kojeg dobivamo $4x - 20 = x^2 - 4x$, ili $x^2 - 8x - 20 = 0$.



Slika 1

Primjer 3. — Pripremajući se za akciju »Ništa nas ne smije iznenaditi«, članovi jednog kolektiva konstatirali su da napuštajući prostorije na jedan izlaz troše 6 sekundi više nego na drugi, te da im za izlaz na oba istodobno treba 4 sekunde. Koliko vremena im treba na svakom od izlaza?

Rješavajući ovaj zadatak dolazi se do jednadžbe

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{l-6}=\frac{1}{4}=l^2-14l+24=0,$$

gdje je l vrijeme potrebno za izlaz na jednom od izlaza.

Kao i u prethodna dva primjera, zadatak možemo riješiti tek nakon rastava odgovarajućeg kvadratnog polinoma na faktore. Napomenimo da pri tome učenici ne moraju znati opću teoriju o rješavanju kvadratne jednadžbe.

Pored toga postoje i sasvim određene metodske poteškoće koje proizlaze iz toga što čitavu ovu materiju treba izložiti u relativno kratkom vremenu. Zbog toga se često griješi u prebrzom prelaženju na formuliranje generalnih činjenica, stavova i teorema. Jedan takav teorem je i ovaj o rastavu kvadratnog polinoma na faktore.

Teorem: Polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ možemo napisati u obliku $P(x)=(dx+e)(fx+g)$ onda i samo onda ako postoje cijeli brojevi m i n takvi da bude $mn=ac$ i $m+n=b$.

Pri tome su a, b i c kao i d, e, f i g cijeli brojevi. Kaže se i da je $P(x)=(dx+e)(fx+g)$ rastav od P nad skupom Z cijelih brojeva. U ovom članku ćemo se baviti rastavom kvadratnog polinoma nad skupom Z. Pokušat ćemo uz pomoć modela da olakšamo rastavljanje kvadratnog polinoma nad Z, a nađu li nastavnici u onom što slijedi i ponešto za rad u grupama sa naprednijim učenicima, smatrat ćemo da je članak opravdao svoje izlaženje.

Nakon izricanja teorema dobro je navesti nekoliko primjera kojima bi se ilustrirao sadržaj i istakli uvjeti teorema. Osnovna ideja u toj fazi obrade je da učenici nauče primjenjivati teorem u konkretnim slučajevima. Da za dati polinom mogu reći ima li ili nema rastav nad Z. U tu svrhu mogu se navesti primjeri slični ovome.

Primjer 4. — Pokaži da polinomi:

a) $P(x)=x^2-7x+12$; b) $Q(x)=x^2+3x-10$;

c) $R(x)=x^2-4x-5$

imaju rastav, a da polinomi:

d) $P(x)=x^2-x+6$; e) $Q(x)=x^2-6x-5$;

f) $R(x)=x^2-x-1$

nemaju rastav nad Z.

U slučaju a) možemo pisati:

$$(-3)+(-4)=(-7),$$

$$(-3)\cdot(-4)=12.$$

Prema tome, ako za m i n uzmemo $m=(-3)$ i $n=(-4)$ možemo reći da polinom $P(x)=x^2-7x+12$ ima rastav. Slično u slučajevima b) i c) možemo ustanoviti da postoji rastav pripadnog polinoma na faktore našavši brojeve m i n.

U slučajevima d), e) i f) nije moguće pronaći brojeve m i n traženog svojstva, pa prema tome pripadni polinomi nemaju rastav. Nakon konstatacije da određeni polinom ima rastav, prirodno se nameće pitanje kako ga i odrediti. No prije toga valja provjeriti da li svi učenici za dati polinom umiju naći brojeve m i n ukoliko oni postoje. Neke učenike pri tome trebaće podsjetiti kako se cijeli broj rastavlja na proste faktore.

Vratimo se polinomima iz primjera 4. U slučajevima a), b) i c) koeficijent od x^2 jednak je jedinici, pa se u suštini radi o polinomima oblika $P(x)=x^2+px+q$. Nakon što smo pronašli brojeve m i n, za koje je $p=m+n$ i $q=mn$, možemo pisati:

$$\begin{aligned} P(x)=x^2+px+q&=x^2+(m+n)\,x+mn \\ &=x^2+mx+nx+mn \\ &=x\,(x+m)+n\,(x+m) \\ &=(x+m)\,(x+n). \end{aligned}$$

Time je rastav polinoma $P(x)=x^2+px+q$ proveden. Presudnu ulogu u provođenju tog rastava ima pravilo distributivnosti. Podsjetimo se da je rastav $P(x)=x^2+px+q=(x+m)\,(x+n)$ specijalni slučaj rastava polinoma $P(x)=ax^2+bx+c$ dobiven uz pretpostavku da je $a=1$. Rastav u slučaju da je $a \neq 1$ promatrat ćemo nešto kasnije. Ovdje želimo naglasiti važnost distributivnosti. Korisno je da učenici uvježbaju distributivnost. Stoga valja uvježbavanje započeti konkretnim primjerima, kao što je ovaj.

Primjer 5. — Kojem polinomu pripada rastav $(x+3)\,(x-1)$?

Uz odgovarajući komentar treba od učenika tražiti da odgovore zapišu po prilici na slijedeći način.

$$\begin{aligned} (x+3)\,(x-1)&=(x+3)\,x+(x+3)\,(-1) \\ &=x^2+3x+(-1)\,x+3\,(-1) \\ &=x^2+(3+(-1))\,x+3\,(-1) \\ &=x^2+2x-3. \end{aligned}$$

Vidimo, dakle, da polinomu $P(x)=x^2+2x-3$ pripada rastav $(x+3)\,(x-1)$, tj. da vrijedi $P(x)=x^2+2x-3=(x+3)\,(x-1)$ za svako x. Ovdje dobro istaći da smo u ovom primjeru ne samo od rastava došli do pripadnog polinoma već da na njemu možemo, čitajući ga obrnutim redoslijedom, rekonstruirati rastav. Tako rastaviti polinom $P(x)=x^2+2x-3$ znači naći dva cijela broja, u našem slučaju to su brojevi 3 i -1, koji zbrojeni daju koeficijent uz x, u našem slučaju to je 2, a pomnoženi daju slobodni član, u našem slučaju to je -3. Zatim primjenom distributivnosti, asocijativnosti i ponovo distributivnosti doći do produkta $(x+3)\,(x-1)$.

Nakon nekoliko sličnih primjera može se preći na općenitiji slučaj, tj. na rastav polinoma $P(x)=ax^2+bx+c$ u slučaju da je $a \neq 1$ i u tu svrhu riješiti slijedeći primjer.

Primjer 6. — Kojem polinomu pripada rastav $(dx+e)\ (fx+g)$?

Rješenje dobivamo primjenom distributivnosti i asocijativnosti. Ako nastavnik smatra potrebnim, može najprije da riješi ovaj zadatak tako da odabere za koeficijente d, e, f i g konkretne cijele brojeve, a onda da zadatak riješi sa neodređenim koeficijentima. U tom slučaju (kada su koeficijenti d, e, f i g neodređeni) imamo

$$\begin{aligned}(dx+e)\ (fx+g)&=(dx+e)\,fx+(dx+e)\,g\\&=(df)\,x^2+efx+dgx+eg\\&=(dx)\,x^2+(ef+dg)\,x+eg.\end{aligned}$$

Prema tome, polinomu $P(x)=(df)\,x^2+(ef+dg)\,x+eg$ pripada rastav $(dx+e)\,(fx+g)$. U slučaju da je $df\neq 1$, radi se o polinomu $P(x)=ax^2+bx+c$, gdje je $a\neq 1$ i njegov rastav se svodi na slučaj kada je $a=1$, tj. na rastav polinoma $P(x)=x^2+px+q$.

Promatrajmo polinom $aP(x)=a\,(ax^2+bx+c)=a^2x^2+abx+ac$ i napišimo ga u slijedećem obliku $aP(x)=(ax)^2=b\,(ax)+ac$, koji prelazi u $aP(x)=X^2+bX+ac$, *gdje je* $X=ax$. Polinom $aP(x)=X^2+bX+ac$ znamo rastaviti ako postoje brojevi M i N takvi da vrijedi:

$$b=M+N,$$

$$ac=MN.$$

Na osnovu toga možemo pisati:

$$aP(x)=X^2+(M+N)\,X+MN=(X+M)\,(X+N).$$

Kako je $X=ax$ i kako je $X^2+(M+N)\,X+MN$ djeljivo sa a, to je jedan od faktora $(X+M)$, $(X+N)$, ili njihov produkt $(X+M)\,(X+N)$ djeljiv sa a. Prema tome, možemo pisati:

$$P(x)=(ax+m)\ (x+n)\ \text{ako je}\ X+N\ \text{djeljivo sa a,}$$

gdje je $m=M$ i $an=N$;

$$P(x)=(x+m)\ (ax+n)\ \text{ako je}\ X+M\ \text{djeljivo sa}\ a,$$

gdje je $n=N$ i $am=M$;

$$P(x)=(rx+m)\ (sx+n)\ \text{ako je}\ (X+N)\,(X+M)\ \text{djeljivo sa}\ a,$$

gdje je $cr=a$, $cm=M$, $ds=a$, $dn=N$ i $cd=a$.

Prema tome, dovoljno je znati rastavljati kvadratni polinom $P(x)=x^2+px+q$, jer se slučaj kada je koeficijent *od* x^2 različit od jedinice na gore opisani način svodi na rastavljanje polinoma kod kojega je koeficijent od x^2 jednak jedinici.

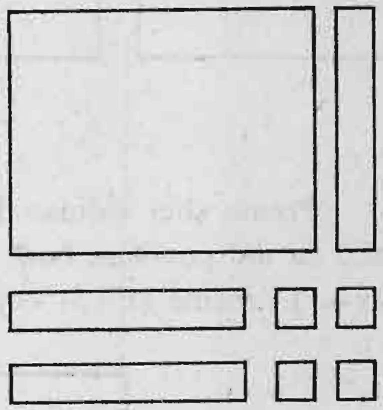
Da bi učenici uvježbali gore opisanu transformaciju, treba rješavati primjere poput ovih u zadatku 1.

Zadatak 1. — Rastavi polinome:

a) $P(x)=2x^2+5x-3$; b) $Q(x)=6x^2-13x+6$;

c) $R(x)=3x^2+5x-2$; d) $S(x)=10x^2+14x-12$.

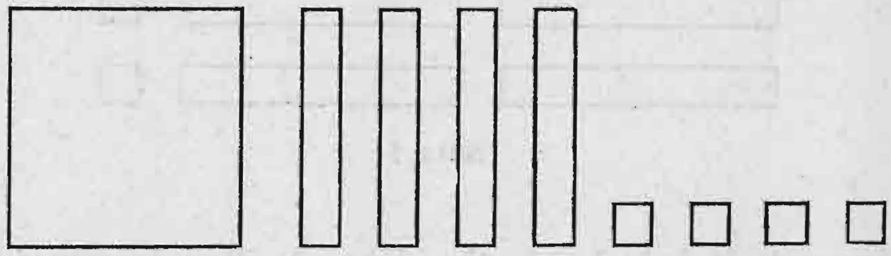
Da bismo rastavljanje polinoma $P(x)=ax^2+bx+c$ olakšali, služimo se modelima. Učenicima je poznata formula $(x+2)^2=x^2+4x+4$. Pročitamo li je zdesna nalijevo, možemo na osnovi toga reći da polinom $P(x)=x^2+4x+4$ ima rastav $(x+2)(x+2)$. Ovoj formuli možemo dati i ovaj smisao. Kvadrat kome je površina $P(x)=x^2+4x+4$ ima stranicu $(x+2)$. Tu površinu možemo predstaviti modelom kao na slici 2.



Slika 2

Vidimo da se model sastoji od jednog kvadrata stranice x, četiriju pravokutnika osnovice x i visine l, te četiri kvadrata stranice l. Ako se taj model sastavi onako kao što to prikazuje slika, imamo kvadrat stranice $(x+2)$.

Šta činiti u slučaju da je data površina kvadrata, odnosno pravokutnika, a nije nam kao u prethodnom slučaju poznata stranica, odnosno osnovica i visina? Ta zadaća je analogna onoj kad za zadati polinom tražimo rastav. Tako npr. pitanje postoji li kvadrat, odnosno pravokutnik kome je površina jednaka x^2+4x+4 odgovara pitanju postoji li rastav polinoma $P(x)=x^2+4x+4$. Na jeziku modela to znači da li se iz figura na slici 3 može sastaviti pravokutnik.



Slika 3

Da je odgovor na to pitanje potvrdan pokazuje nam slika 2, jer je na njoj od datih figura sastavljen kvadrat stranice $(x+2)$.

Nakon toga mogu se rješavati zadaci poput ovih:

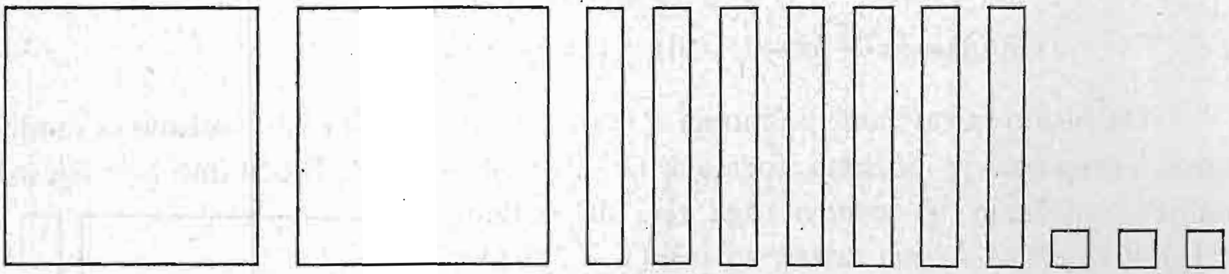
Zadatak 2. — Rastavi pomoću modela polinome:

a) $P(x)=x^2+3x+2$; b) $Q(x)=x^2+5x+6$;

c) $R(x)=x^2+7x+12$; d) $S(x)=x^2+5x+4$.

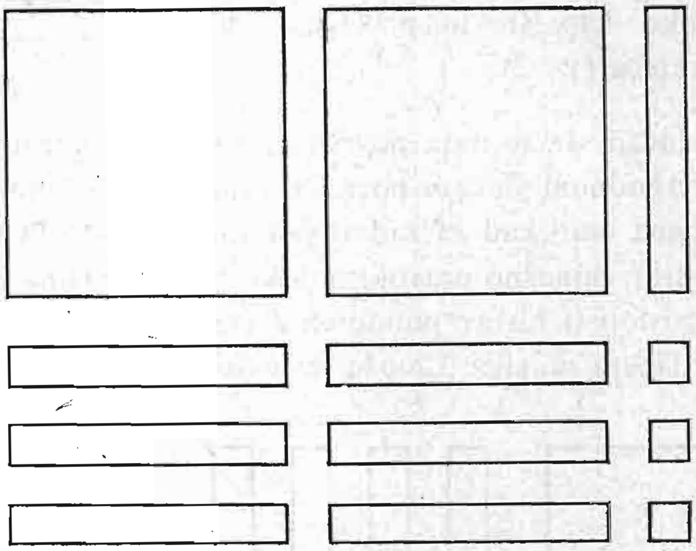
Nakon tih primjera može se postaviti i složeniji zadatak.

Primjer 6. — Može li se iz figura na slici 4 složiti pravokutnik?



Slika 4

Prema slici vidimo da je pitanje može li se odrediti stranica pravokutnika tako da mu površina bude $2x^2+7x+3$. Slaganjem se dobiva pravokutnik osnovice $(2x+1)$ i visine $(x+3)$ koji je prikazan na slici 5.



Slika 5

Dobili smo da je $2x^2+7x+3=(2x+1)\,(x+3)$. Time je pokazano da rastav polinoma $P(x)=2x^2+7x+3$ postoji, a ujedno je i proveden.

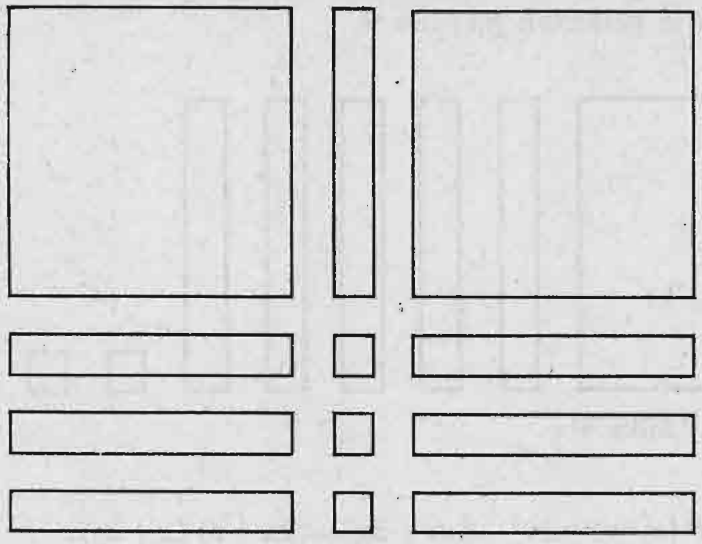
Napomenimo da postoje i druge mogućnosti sastavljanja modela, ali da su sve one ekvivalentne. Tako smo figure iz primjera 6 mogli sastaviti i onako kako to prikazuje slika 6.

Međutim, to ćemo smatrati istim rastavom jer se iz onog na slici 5 dobije premještanjem. Učenicima treba prepustiti da sami dobiju sve ostale mogućnosti.

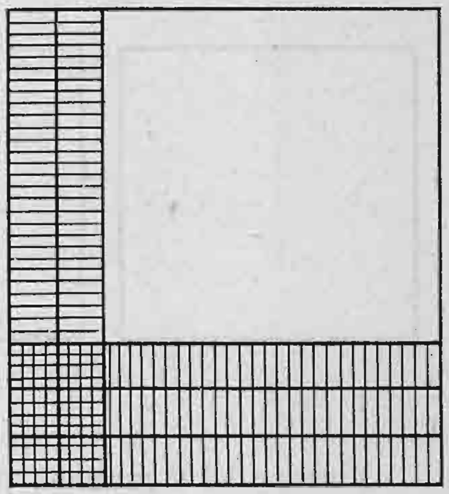
Primjer 7. — Rastavi pomoću modela polinom $P(x)=x^2-5x+6$.

U ovom slučaju slaganje modela je nešto složenije, ali je moguće. Dobiva se model koji se djelomično prekriva, kao što je to vidljivo sa slike 7.

Bit će, prema tome, $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$. Na slici 7 dvaput iscrtani dio predstavlja šest jediničnih kvadrata. Na sličan način mogu se složiti modeli kvadratnih polinoma u kojima su koeficijent uz x i slobodni član negativni brojevi.



Slika 6



Slika 7

Zadatak 3. — Pomoću modela rastavi polinome:

a) $P(x)=x^2-x-6$; b) $Q(x)=x^2+x-6$;

c) $R(x)=x^2-7x+10$; d) $S(x)=x^2-2x-3$.

Uz neznatne izmjene moguće je pomoću modela rastavljati i polinome dviju varijabli oblika $P(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$. Promatramo najprije polinome oblika $P(x, y)=x^2+pxy+qy^2$. Stavimo da je $py=my+ny$ i $qy^2=my\cdot ny$. To nam daje

$$\begin{aligned} P(x, y)&=x^2+pxy+qy^2=x^2+(my+ny)\,x+my\cdot ny\\ &=x^2+myx+nyx+my\cdot ny\\ &=x(x+my)+ny(x+my)\\ &=(x+my)(x+ny). \end{aligned}$$

U slučaju da je koeficijent uz x^2 u polinomu $P(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ različit od jedinice, analognom transformacijom onoj za polinome jedne varijable dobivamo $aP(x,y)=a^2x^2+abxy+acy^2=X^2+(My+Ny)\,X+My\cdot Ny=(X+My)(X+Ny)$, gdje je $X=ax$. Kako je $X=ax$ i kako je $X^2+(My+Ny)\,X+My\cdot Ny$ djeljivo sa a, to je jedan od faktora $(X+My)$, $(X+Ny)$ ili njihov produkt $(X+My)(X+Ny)$ djeljiv sa a. Prema tome, možemo pisati:

$$P(x, y)=(ax+my)(x+n) \text{ ako je } X+Ny \text{ djeljivo sa } a,$$

gdje je $m=M$ i $an=N$;

$$P(x, y)=(x+my)(ax+ny) \text{ ako je } X+My \text{ djeljivo sa } a,$$

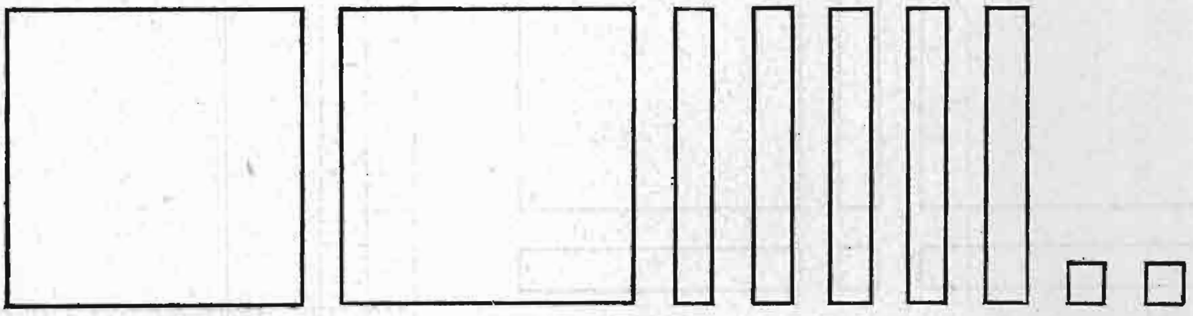
gdje je $n=N$ i $am=M$;

$$P(x, y)=(rx+my)(sx+ny) \text{ ako je } (X+My)(X+Ny) \text{ djeljivo sa } a,$$

gdje je $cr=a$, $cm=M$, $ds=a$, $dn=N$ i $cd=a$.

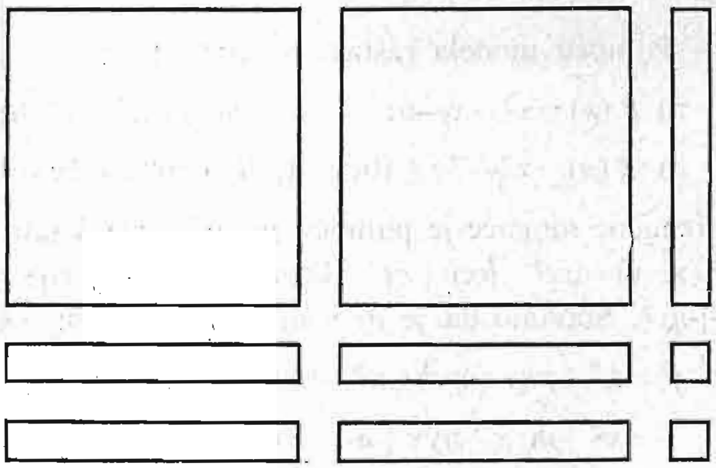
Primjer 8. — Odrediti stranice pravokutnika kome je površina $P(x, y)=2x^2+5xy+2y^2$.

Iz figura predočenih na slici 8 slaganjem modela dobivamo pravokutnik osnovice $(2x+y)$ i visine $(x+2y)$, koji je prikazan na slici 9.



Slika 8

Prema slici 9 možemo pisati $P(x, y)=2x^2+5xy+2y^2=(2x+y)(x+2y)$.



Slika 9

Prema tome, pravokutnik kome je površina $P(x, y)=2x^2+5xy+2y^2$ ima stranice $(2x+y)$ i $(x+2y)$. I ovdje je moguće model sastaviti na razne načine. Važno je da učenik uspije složiti barem jedan pravokutnik, a ostale lako dobiva razmještanjem njegovih dijelova. Na primjerima polinoma poput ovih u zadatku 4 može se vježbati rastavljanje kvadratnog polinoma od dvije varijable.

Zadatak 4. — Rastavi pomoću modela polinome:

a) $P(x, y)=x^2+3xy+2y^2$; b) $Q(x, y)=2x^2+7xy+3y^2$;

c) $R(x, y)=4x^2+9xy+2y^2$; d) $S(x, y)=6x^2+xy-12y^2$.

Napomenimo da koliko god model bio očigledan i jednostavan za korišćenje, ne bi bilo dobro u primjeni modela ići u krajnosti. Naime, model može biti prevelik, a njegovo slaganje dugo i zamorno. U tim slučajevima treba pokušati nekom drugom metodom. Ovdje ćemo ukratko opisati jednu takvu metodu. Treba npr. rastaviti polinom $P(x)=2x^2-27x-45$. Ako na neki način pogodimo jednu nulu polinoma P i označimo li je sa x_0, tada možemo pisati $P(x)=(x-x_0)(ax+b)$, gdje su a i b neodređeni koeficijenti koje treba odrediti da poslijednja jednakost vrijedi. U našem primjeru $x_0=15$ je nula polinoma $P(x)=2x^2-27x-45$, jer je $P(15)=2\cdot15^2-27\cdot15-45=0$. Prema tome, možemo napisati

$$\begin{aligned}2x^2-27x-45&=(x-15)(ax+b)\\&=ax^2+(b-15a)x-15b.\end{aligned}$$

Odavde uspoređivanjem odgovarajućih koeficijenata dobivamo

$$a=2 \text{ i } b=3.$$

Tako dolazimo do rastava $2x^2-27x-45=(x-15)(2x+3)$.

Primjer 9. — Odredi rastav polinoma $P(x)=6x^2+73x+210$.

Ovaj primjer ne možemo rješavati na gore opisani način, a primjena modela je sasvim nespretna. Naime, polinom nema cjelobrojne nule, a racionalne je teško pogoditi. Model bi bio prevelik i teško bi ga bilo sastaviti. Treba posegnuti za snažnijim sredstvom. Takvo sredstvo je teorem koji smo naveli na početku članka. Rastavivši na faktore produkt $6\cdot210$, nalazimo da je $m=45$ i $n=28$ (ili $m=28$ i $n=45$) pa možemo pisati

$$\begin{aligned}P(x)=6x^2+73x+210&=6x^2+45x+28x+210\\&=(6x^2+45x)+(28x+210)\\&=3x(2x+15)+14(2x+15)\\&=(2x+15)(3x+14).\end{aligned}$$

Zaključno o modelima recimo to da njihova upotreba omogućava da se od posebnog prijeđe ka općem, da se od rada s konkretnim objektima — pravokutnicima i kvadratima — prijeđe na apstrakciju — na simbole. Prema tome, svrha modela je, sa jedne strane, da u jednostavnijim slučajevima lakše dođemo do rastava, a sa druge strane, da u složenijim uputi na teorem koji daje nužan i dovoljan uvjet za rastav kvadratnog polinoma. Završit ćemo ovaj članak dokazom teorema. Prema svojoj formulaciji teorem je tvrdnja oblika $A \Leftrightarrow B$. Radi preglednosti uvedimo ove oznake:

Neka je A izjava: Polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ možemo napisati u obliku $(dx+e)(fx+g)$.

Neka je B izjava: Postoje cijeli brojevi m i n takvi da bude $mn=ac$ i $b=m+n$.

Dokažimo implikaciju $A \Rightarrow B$.

Pretpostavimo da je moguće polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ napisati u obliku $(xd+e)(fx+g)$. Dokažimo da tada postoje cijeli brojevi m i n takvi da je $ac=mn$ i $b=m+n$. U tu svrhu izmnožimo $dx+e$ sa $fx+g$. Imat ćemo:

$$\begin{aligned} P(x)=ax^2+bx+c=(dx+e)(fx+g)&=(dx+e)fx+(dx+e)g \\ &=(df)x^2+efx+dgx+eg \\ &=(df)x^2+(ef+dg)x+eg. \end{aligned}$$

Na osnovi teorema o jednakosti dvaju polinoma mora biti:

$$a=df; \qquad b=ef+dg; \qquad c=eg.$$

Tada je $ac=df \cdot eg=dg \cdot ef$ i $b=ef+dg=dg+ef$.

Prema tome, traženi cijeli brojevi su $m=dg$ i $n=ef$.

Time je implikacija $A \Rightarrow B$ dokazana.

Dokažimo implikaciju $B \Rightarrow A$.

Pretpostavimo da postoje cijeli brojevi m i n takvi da je $mn=ac$ i $m+n=b$. Dokažimo da je tada polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ moguće napisati u obliku $P(x)=(dx+e)(fx+g)$. Neka je $ac=mn$ i neka je $b=m+n$. Tada zbog jednoznačnosti rastava cijelog broja na faktore postoje cijeli brojevi d, e, f i g takvi da vrijedi $a=df$, $c=eg$, $m=dg$, $n=ef$.

Na osnovu toga možemo pisati:

$$\begin{aligned} P(x)=ax^2+bx+c&=dfx^2+(dg+ef)\,x+eg \\ &=dfx^2+dgx+efx+eg \\ &=dx\,(fx+g)+e\,(fx+g) \\ &=(fx+g)\,(dx+e) \\ &=(dx+e)\,(fx+g). \end{aligned}$$

Dakle, polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ možemo napisati u obliku $P(x)=(dx+e)(fx+g)$, tj. možemo ga rastaviti na faktore. Time je implikacija $B \Rightarrow A$ dokazana. Na taj način imamo dokaze obiju implikacija, $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$, a time i dokaz teorema $A \Leftrightarrow B$, tj.

> Polinom $P(x)=ax^2+bx+c$ možemo napisati u obliku $P(x)=(dx+e)(fx+g)$ onda i samo onda ako postoje cijeli brojevi m i n takvi da bude $mn=ac$ i $m+n=b$.

КОШИЈЕВА, ОЈЛЕРОВА И МАКЛОРЕНОВА НЕЈЕДНАКОСТ

СРБОЉУБ СРЕЋКОВИЋ,
Пожаревац

УВОД

Упознаћемо се, најпре, са једним доказом Кошијеве неједнакости за два и неколико доказа за три ненегативна реална броја, а затим са једним комбинаторним доказом Кошијеве неједнакости за n ненегативних реалних бројева. Овај доказ не среће се често у литератури, али је занимљив не само што представља уопштење једног доказа Кошијеве неједнакости за три ненегативна реална броја већ и због тога што у њему учествују бројеви M_k које срећемо у Ојлеровој и Маклореновој неједнакости. У доказу Ојлерове и Маклоренове неједнакости користимо нека тврђења у вези са полиномима. Та тврђења произлазе из Ролове теореме. Ролову теорему за полиноме изводимо као последицу једног тврђења о нулама непрекидне функције. У доказу тог тврђења користи се непрекидност скупа реалних бројева, коју уводимо Дедекиндовом аксиомом, као што је уобичајено у програмима математике за средњу школу. На тај начин, природно је излагање поделити на гри дела.[1]

1. КОШИЈЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

Аритметичка и геометријска средина дефинишу се у скупу ненегативних реалних бројева. У том смислу $a, b, x, y, a_1, a_2, \ldots$ означаваће нам ненегативне реалне бројеве.

У програмима математике за средње школе, поред условних неједнакости (неједначина), заступљене су и безусловне неједнакости. Међу њима значајно место заузима Кошијева неједнакост. Кошијевој неједнакости за два броја

[1] Први део реализован је у додатној настави IV разреда Гимназије „Јован Шербановић“ у Пожаревцу.

посвећено је доста пажње у уџбеницима. Неједнакост је доказана и алгебарски и геометријски. Доказа има више. Због своје краткоће и једноставности један од тих доказа заслужује да и овде буде записан:

$$T \Leftrightarrow (\forall\, a,\ b)\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall a,\ b)\ \left(a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall a,\ b)\left(\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\right),$$

где $T \Leftrightarrow A$ означава да је A став.

Неједнакост за четири броја једноставна је последица неједнакости за два броја:

$$T \Leftrightarrow (\forall a,\ b,\ c,\ d)\left(\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall a,\ b,\ c,\ d)\left(\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}\right).$$

Докази неједнакости за три броја већ нису у толикој мери једноставни. Овде се наводе четири доказа те неједнакости.

I доказ. — $T \Leftrightarrow \forall(a,\ b,\ c)\ \left(\frac{1}{4}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\right) \geqslant \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}}\right)$

$$\Leftrightarrow (\forall a,\ b,\ c)\ \left(\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[4]{abc\,\frac{a+b+c}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\forall a,\ b,\ c)\ \left(\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}\right).$$

II доказ. — За било која три броја, a, b, c, постоје три броја, x, y, z, тако да је $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Из релација:

$$x^3+y^3+z^3 = \frac{x^3+y^3}{2} + \frac{y^3+z^3}{2} + \frac{z^3+x^3}{3}$$

$$= \frac{x+y}{2}(x^2+y^2-xy) + \frac{y+z}{2}(y^2+z^2-yz) + \frac{z+x}{2}(z^2+x^2-zx)$$

$$\geqslant \frac{x+y}{2}xy + \frac{y+z}{2}yz + \frac{z+x}{2}zx$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left((x^2y+yz^2)+(z^2x+xy^2)+(y^2z+zx^2)\right)$$

$$\geqslant 3\,xyz$$

добија се неједнакост $x^3+y^3+z^3 \geqslant 3\,xyz$. Сменом $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$ у последњој неједнакости добија се Кошијева неједнакост $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

III доказ. — За било која три броја, a, b, c, постоје три броја, x, y, z, таква да је $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Тада је:

$$\begin{aligned}
T &\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 2\,(x^2+y^2+z^2)-2\,(xy+yz+zx) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)\,(2\,(x^2+y^2+z^2)-2\,(xy+yz+zx)) \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow 2\,(x^3+y^3 \times z^3)-6\,xyz \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3 \geqslant 3\,xyz\\
&\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

IV доказ. — За било која три броја, a, b, c, важе релације:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 &= \frac{a+b+c}{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\\
&= \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{1}{9}\,(a^2+b^2+c^2+2\,ab+2\,ac+2\,bc)\\
&= \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}+2\,ab+2\,ac+2\,bc\right)\\
&\geqslant \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{ab+ac+bc}{3}\\
&\geqslant \frac{1}{9}\,((a^2\,b+bc^2)+(c^2\,a+ab^2)+(b^2\,c+ca^2)+3\,abc)\\
&\geqslant abc,
\end{aligned}$$

одакле се добија Кошијева неједнакост $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

Последњи доказ може се уопштити. У том уопштењу, поред Кошијеве неједнакости за два броја, у великој мери користе се и неки елементи комбинаторике.

Доказаћемо, најпре, неједнакост:

$$(1)\qquad \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-k}\cdot\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}\geqslant\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-(k+1)}\cdot\frac{\sigma_{k+1}}{\binom{n}{k+1}},$$

$$(k-1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

где σ_k представља збир свих производа по k бројева од датих n — симетричну функцију степена k. Да бисмо доказали ову неједнакост, довољно је доказати неједнакост

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}\geqslant\frac{\sigma_{k+1}}{\binom{n}{k+1}},\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Производ $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,\sigma_k$ може се представити у облику збира чији су сабирци S_1 — збир свих производа од $k+1$ бројева — и S_2 — збир свих производа чији су чиниоци k—1 бројева и квадрат k-тог.

Како се сваки производ од $k+1$ бројева може добити на $k+1$ начин множењем сваког производа k бројева оним $k+1$-вим, онда је $S_1=(k+1)\,\sigma_{k+1}$.

Производ $(n—k)\,S_2$ може се представити у облику збира свих двочланих збирова:

$$a_1^2a_3\ldots a_{k+1}+a_2^2a_3\ldots a_{k+1},\ \ldots,\ a_1\ldots a_{k-1}a_k^2+a_1\ldots a_{k-1}a_{k+1}^2,$$

$$a_1^2a_3\ldots a_ka_{k+2}+a_2^2a_3\ldots a_ka_{k+2},\ \ldots,\ a_1\ldots a_{k-1}a_k^2+a_1\ldots a_{k-1}a_{k+2}^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-k}^2a_{n-k+2}\ldots a_n+a_{n-k+1}^2a_{n-k+2}\ldots a_n,\ \ldots,\ a_{n-k}\ldots a_{n-2}a_{n-1}^2+$$
$$+a_{n-k}\ldots a_{n-2}a_n^2.$$

Заиста, табела је формирана од сабирака збира S_2, а сваки члан збира S_2 учествује $n—k$ пута (највише једанпут у свакој врсти). Нпр. члан $a_1^2a_3\ldots a_{k+1}$ учествује у следећих $n—k$ збирова:

$$a_1^2a_3\ldots a_{k+1}+a_2^2a_3\ldots a_{k+1},\ a_1^2a_3\ldots a_{k+1}+a_3\ldots a_{k+1}a_{k+2}^2,\ \ldots,$$
$$a_1^2a_3\ldots a_{k+1}+a_3\ldots a_{k+1}a_n^2.$$

С друге стране, за свака $k+1$ броја постоји тачно $\binom{k+1}{2}$ таквих двочланих збирова (исписаних у истој врсти табеле). Сваки збир није мањи од двоструког производа $k+1$ бројева који учествују у том збиру. Нпр. за бројеве a_1, $a_2,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1}$ важе неједнакости:

$$a_1^2a_3\ldots a_{k+1}+a_2^2a_3\ldots a_{k+1}\geqslant 2a_1a_2\ldots a_{k+1},$$

$$a_1^2a_2a_4\ldots a_{k+1}+a_2a_3^2a_4\ldots a_{k+1}\geqslant 2a_1a_2\ldots a_{k+1},\ \ldots,$$

где код сваког двочланог збира на левој страни неједнакости сабирци имају $k-1$ заједничких бројева ($a_3, a_4, \ldots, a_{k+1}$, и слично). Због тога је $(n-k)S_2 \geqslant \geqslant 2\binom{k+1}{2}\sigma_{k+1}$. Тада је:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\,\sigma_k \geqslant (k+1)\,\sigma_{k+1}+\frac{(k+1)\,k}{n-1}\,\sigma_{k+1}.$$

Из последње неједнакости добија се:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\,\sigma_k \geqslant \frac{(k+1)\,n}{n-k}\,\sigma_{k+1},$$

одакле је

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{\sigma_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}.$$

Тиме је доказана и неједнакост (1).

Из неједнакости (1) добијају се неједнакости

$$\text{(2)}\qquad \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sigma_1}{\binom{n}{1}} \geqslant \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^{n-2}\cdot\frac{\sigma_2}{\binom{n}{2}}$$

$$\geqslant\cdots\geqslant \sigma_n = a_1\ldots a_n,$$

одакле се добија Кошијева неједнакост $\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Очигледно, знак једнакости долази ако и само ако $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Нека је $M_k=\dfrac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Из неједнакости (2) за $k=1$ добија се неједнакост $M_1 \geqslant M_2^{\frac{1}{2}}$. Да бисмо утврдили одговарајуће неједнакости за $k=2, 3, \ldots, n$, користићемо известан полином и неке његове особине у вези са нулама.

2. НУЛЕ ПОЛИНОМА

Доказујемо, најпре, следеће тврђење:

Ако је функција $f(x)$ непрекидна у интервалу $[a, b]$ и ако $\operatorname{sgn} f(a)\cdot\operatorname{sgn} f(b) = -1$, онда она има нулу у том интервалу.

Доказ. — Поделимо интервал $[a, b]$ на два подинтервала деоном тачком $\dfrac{a+b}{2}$ и означимо са $[a_1, b_1]$ онај од два добијена подинтервала који испуњава услов $\operatorname{sgn} a_1 \cdot \operatorname{sgn} b_1 = -1$. Овај процес можемо неограничено наставити. При томе интервал $[a_n, b_n]$ добијамо деобом интервала $[a_{n-1}, b_{n-1})$ деоном тачком $\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})$ уз услов $\operatorname{sgn} a_n \cdot \operatorname{sgn} b_n = -1$. Ако је нека од деоних тачака нула функције $f(x)$, онда је тврђење доказано. Зато претпоставимо да ни једна деона тачка није нула функције $f(x)$. Описаним поступком добија се такав низ интервала да се сваки следећи садржи у претходном и има два пута мању дужину.

У скупу реалних бројева можемо конструисати Дедекиндов пресек на следећи начин: у класу A ставићемо све реалне бројеве који су мањи од неког члана низа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, у класу B — све остале реалне бројеве. Очигледно, класа A нема највећи број. Због тога класа B има најмањи број x_0. Како је функција $f(x)$ непрекидна у тачки x_0, онда је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Вредност $f(x_0)$ не може бити нити позитивна нити негативна јер би, према дефиницији граничне вредности функције, постојао довољно мали реалан број $\delta > 0$ такав да је $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$ за свако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Међутим, интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ садржи неки интервал $[a_n, b_n]$ у коме је $\operatorname{sgn} f(a_n) \cdot \operatorname{sgn} f(b_n) = -1$. Дакле, $f(x_0) = 0$.

Полином је непрекидна функција па доказано тврђење можемо без ограничења примењивати на полиноме. Применићемо га у тврђењу да се између сваке две нуле полинома налази бар једна нула његовог извода. Довољно је доказати да се између две узастопне нуле полинома налази бар једна нула извода тог полинома.

Нека су a и b узастопне нуле (једноструке или вишеструке) полинома $f(x)$. Полином $f(x)$ може се представити у облику $f(x) = (x-a)^s (x-b)^t f_1(x)$, где је s ред нуле a, а t ред нуле b. Извод полинома $f(x)$ је полином $f'(x) = (x-a)^{s-1} (x-b)^{t-1} f_2(x)$, где је $f_2(x) = (s(x-b) + t(x-a)) f_1(x) + (x-a)(x-b) f'_1(x)$. Полином $f'(x)$ има нулу у интервалу (a, b) ако и само ако полином $f_2(x)$ има нулу у том интервалу. Како је $f_2(a) = s(a-b) f_1(a)$, $f_2(b) = t(b-a) f_1(b)$ и $\operatorname{sgn} f_1(a) = \operatorname{sgn} f_1(b)$, јер полином $f(x)$ нема нула у интервалу (a, b), онда је $\operatorname{sgn} f_2(a) \cdot \operatorname{sgn} f_2(b) = -1$. Дакле, полином $f_2(x)$ има нулу у интервалу (a, b). Тиме смо утврдили да и полином $f'(x)$ има нулу у интервалу (a, b).

Полином $f(x)$ степена n који има све реалне нуле има n реалних нула. Његове једноструке нуле нису нуле полинома $f'(x)$, а свака вишеструка нула је нула полинома $f'(x)$ за јединицу нижег реда. С друге стране, између сваке две узастопне нуле полинома $f(x)$ полином $f'(x)$ има бар једну нулу. Због тога полином $f'(x)$ има између сваке две узастопне нуле полинома $f(x)$ тачно по једну једноструку нулу, јер не може имати више од $n-1$ нула.

3. ОЈЛЕРОВА И МАКЛОРЕНОВА НЕЈЕДНАКОСТ

У вези са раније дефинисаним бројевима M_k доказујемо, најпре, Ојлерову неједнакост:

(3) $$M_{k-1} M_{k+1} \leqslant M_k^2 \quad (2 \leqslant k \leqslant n-1,\ n \geqslant 3)$$

са знаком једнакости ако и само ако $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Полином

$$P(x) = (x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n) = x^n + \binom{n}{1} M_1 x^{n-1} + \dots$$

$$+\binom{n}{k-1} M_{k-1} x^{n-k+1} + \binom{n}{k} M_k x^{n-k} + \binom{n}{k+1} M_{k+1} x^{n-k-1} + \dots + M_n$$

има све реалне нуле. Његов извод реда $n—k—1$ гласи:

$$Q(x) = (n-k-1)!\left(\binom{n}{n-k-1} x^{k+1} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-k-1} M_1 x^k + \dots +\right.$$

$$\left. + \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{n-k-1} M_{k-1} x^2 + \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-k-1} M_k x + \binom{n}{k+1} M_{k+1}\right),$$

и има, такође, све реалне нуле.

Полином $R(x) = x^{k+1} Q\left(\frac{1}{x}\right)$ има све реалне нуле. Његов извод реда $k-1$ гласи:

$$R^{(k-1)}(x) = \frac{1}{2} n! \; (M_{k-1} + 2 M_k x + M_{k+1} x^2),$$

и има, такође, реалне нуле. Због тога је $M_k^2 — M_{k-1} M_{k+1} \geqslant 0$. Тиме је неједнакост (3) доказана.

Ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, онда $M_k = a^k$, па у (3) долази знак једнакости. Обрнуто, ако у (3) важи знак једнакости, онда полином $R^{k-1}(x)$ има двоструку нулу. Због тога полином $P(x)$ не може имати две различите нуле, па је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Маклоренова неједнакост гласи:

$$(4) \qquad M_1 \geqslant M_2^{\frac{1}{2}} \geqslant M_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \dots \geqslant M_k^{\frac{1}{k}} \geqslant \dots \geqslant M_n^{\frac{1}{n}}$$

са знаком једнакости ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Неједнакост ћемо доказати математичком потпуном индукцијом. Већ смо доказали да неједнакост важи за $k=1$. Претпоставимо да неједнакост важи за $k=i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, тј. $M_i^{\frac{1}{i}} \leqslant M_{i+1}^{\frac{1}{i+1}}$. Тада, према (3), $M_{i+1} \geqslant$

$\geqslant M_i^{\frac{1}{2}} \cdot M_{i+2}^{\frac{1}{2}}$. На основу последње неједнакости и индуктивне претпоставке добија се неједнакост $M_{i+1} \geqslant M_{i+1}^{\frac{i}{2i+2}} \cdot M_{i+2}^{\frac{1}{2}}$, одакле се добија неједнакост $M_{i+1}^{\frac{1}{i+1}} \geqslant M_{i+2}^{\frac{1}{i+2}}$. Тиме је неједнакост (4) доказана.

Ако $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, онда $M_k = a^k$, па у (4) долази знак једнакости. Обрнуто, ако у (4) долази знак једнакости, онда $M_{k+1}^{k} = M_k^{k-1}$ и $M_k^{k+1} = M_{k+1}^{k}$. Из претходних једнакости добија се једнакост $M_{k-1} M_{k+1} = M_k^2$, а из доказа Ојлерове неједнакости следи $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Mirko Radić

SISTEMI LINEARNIH JEDNADŽBI I LINEARNO PROGRAMIRANJE

»Školska knjiga», Zagreb, 1974, format 14 × 20, broširano, strana 232, cijena 65 dinara. Recenzenti: Vojna Erak i Stjepan Mintaković.

Sadržaj I. *Pregled nekih važnijih pojmova o jednadžbama i nejednadžbama:* § 1. Općenito o jednažbama i nejednadžbama, § 2. O rješavanju sistema jednadžbi i nekim pojmovima s tim u vezi, § 3. Prostor uređenih n-torki realnih brojeva; II. *Neke važnije metode rješavanja sistema linearnih jednadžbi:* §. 1 Metoda supstitucije, § 2. Metoda komparacije, § 3 Gaussova metoda, § 4. Jordanova metoda; III. *Uvjet rješivosti i rješenje sistema linearnih jednadžbi. Matrice i vektori:* § 1. Homogeni sistemi, § 2. Matrice i vektori. § 3. Pisanje sistema jednadžbi u matričnom obliku, § 4. Linearna zavisnost vektora, § 5. Vektorski prostori, § 6. Uvjet rješivosti sistema linearnih jednadžbi. Rang matrice, § 7. Skalarni produkt vektora. Prostor rješenja homogenog sistema i rješenje nehomogenog sistema; IV. *Determinante i rješenje sistema linearnih jndnadžbi:* § 1. Determinante drugog i trećeg reda, 2. Pojam inverzije, § 3. Definicija determinante, § 4. Osnovna svojstva determinante, § 5. Sistem od n nepoznanica; V. *Rješavanje jednadžbi i nejednadžbi u nenegativnim i cijelim brojevima:* § 1. Nenegativna rješenja jednadžbi, § 2. Rješavanje sistema linearnih jednadžbi u nenegativnim brojevima; VI. *Linearno programiranje:* § 1. Osnovni zadatak, § 2. Jedna eksperimentalna metoda u linearnom programiranju, § 3. Simpleks-metoda, §. 4 Shematizirana simpleks-metoda, § 5. Dualni zadaci i teorem dualnosti, § 6. Teorija matričnih igara.

NEPREKIDNOST FUNKCIJE

HAMID DRLJEVIĆ,
Mostar

Neprekidnost funkcije je topološki pojam. Kad govorimo o neprekidnosti funkcije, govorimo, zapravo, o njenoj neprekidnosti u odnosu na datu topologiju. Tako, realna funkcija neprekidna u uobičajnom smislu (u smislu obične topologije) ne mora biti neprekidna u odnosu na neku drugu topologiju realne prave. U tom smislu bit će dati neki jednostavni primjeri.

Prisjetimo se, najprije, što je topološki prostor (odnosno topologija), baza topologije i neprekidno preslikavanje.

Definicija 1. — Par $(X, \mathcal{U})$, skupa X i familije $\mathcal{U}$, podskupova od X, nazivamo topološki prostor, ako vrijedi:

1. Unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$;

2. Presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$;

3. $\varnothing$ i X pripadaju familiji $\mathcal{U}$.

Ako vrijedi 1, 2 i 3, govorimo o topološkom prostoru X sa topologijom $\mathcal{U}$.

Članove familije $\mathcal{U}$ nazivamo otvorenim skupovima.

Ako je topologija $\mathcal{U}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$ dobivena iz neke metrike d, onda kažemo da je topologija $\mathcal{U}$ *metrizabilna.*

Navedimo primjer topologije i topološkog prostora.

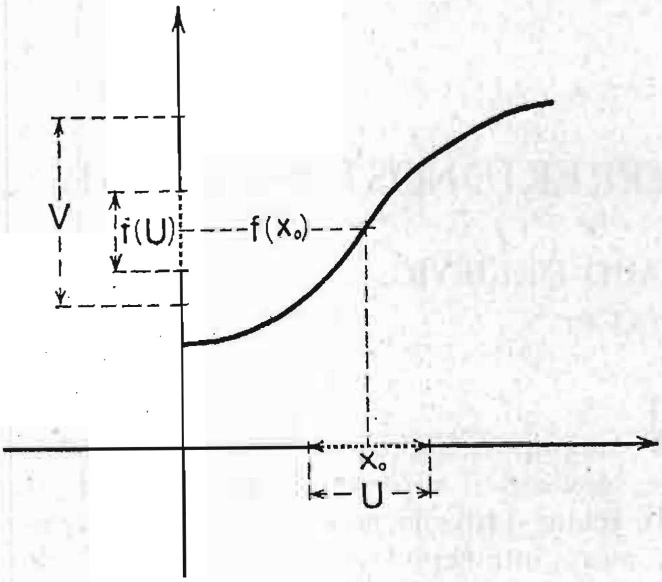
Neka je dat skup $X=\{a, b, c, d, e\}$ i familija podskupova skupa X, tj. familija $\mathcal{U}=\{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$. Provjeriti da je familija $\mathcal{U}$ topologija, odnosno da je par $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor.

Zaista, unija svake familije iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$, presjek konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$ je član iz $\mathcal{U}$. $\varnothing$ i X su elementi familije $\mathcal{U}$, te je, prema tome, familija $\mathcal{U}$ topologija, a par $(X, \mathcal{U})$ je topološki prostor.

Definicija 2. — Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Baza topologije $\mathcal{U}$ je familija $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{U}$ otvorenih skupova koja ima osobinu da se svaki otvoren skup $U\in\mathcal{U}$ može prikazati kao unija neke familije iz $\mathcal{B}$.

Za navedeni primjer topologije i topološkog prostora familija otvorenih skupova $\mathcal{B}=\{\varnothing, \{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ predstavlja bazu topologije $\mathcal{U}$.

Definicija 3. — Neka su X i Y topološki prostori sa topologijama $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ i neka je $f: X \rightarrow Y$ preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje neprekidno (kontinuirano) u tački $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V tačke $f(x_0)$ u Y postoji okolina tačke x_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$.



Slika 1

Navedimo bez dokaza dvije ekvivalentne tvrdnje.

1. f je neprekidno preslikavanje;

2. za svaki otvoren skup $V \subseteq Y$, skup $f^{-1}(V)$ je otvoren u X.

Zadržimo se na topologijama realne prave R. Posmatrajmo onu topologiju realne prave R koja je dobivena iz metrike

$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in R.$$

Baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{U}$ su otvoreni intervali (a, b) $(a, b \in R)$, a topologija $\mathcal{U}$ zove se *obična topologija* realne prave R.

U odnosu na ovu topologiju realne prave R, nama dobro poznata „ε-definicija" neprekidnosti funkcije saglasna je sa navedenom definicijom neprekidnosti.

Navedimo drugi primjer topologije τ realne prave R, sa bazom $\mathcal{B}$, čiji su članovi otvoreni skupovi oblika $(a, b]$ $(a, b \in R)$. Topolopija τ zove se *topologija sa gornjim ograničenjem*.

Treći primjer topologije realne prave R je takozvana *diskretna topologija* $\mathcal{D}$. Za bazu $\mathcal{B}$ te topologije uzimamo jednočlane skupove, tj. baza $\mathcal{B}$ ima oblik $\{\{p\} \mid p \in R\}$.

Navedimo primjere funkcija koje su neprekidne u odnosu na običnu topologiju $\mathcal{U}$ realne prave R, a prekidne u odnosu na topologiju sa gornjim ograničenjem τ realne prave R, i obratno.

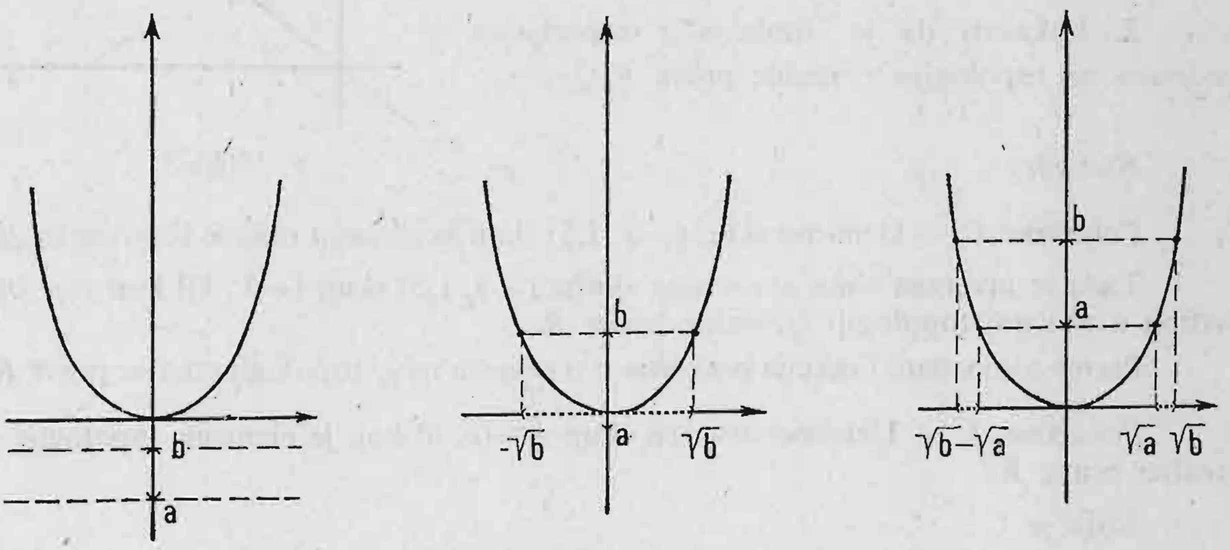
U navedenim primjerima pretpostavit ćemo da su topologije u prostorima originala odnosno slika iste.

Primjer 1. — Funkcija $f(x)=x^2$, $\forall\, x \in R$ je:

1. Neprekidna u odnosu na običnu topolopiju $\mathcal{U}$ realne prave R.

2. Prekidna u odnosu na τ topologiju realne prave R.

Rješenje:



Slika 2

Pokažimo 1. — U tom cilju uzmimo skup $A=(a,\ b)$ koji pripada topologiji $\mathcal{U}$. Tada je

$$f^{-1}(A)=\begin{cases} \varnothing, & a<b\leqslant 0 \\ (-\sqrt{b},\ \sqrt{b}), & a<0<b \\ (-\sqrt{b},\ -\sqrt{a})\cup(\sqrt{a},\ \sqrt{b}), & 0\leqslant a<b. \end{cases}$$

Odavde vidimo da je inverzna slika otvorenog skupa otvoren skup, te je, prema tome, data funkcija neprekidna u odnosu na običnu topologiju $\mathcal{U}$ realne prave R.

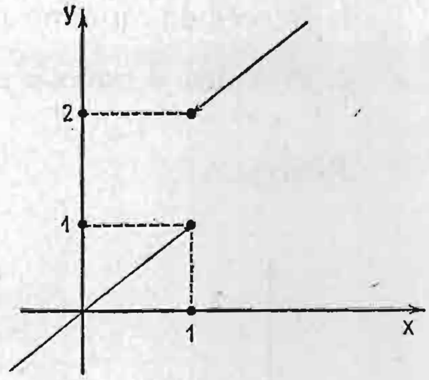
Pokažimo 2. — U tom cilju uzmimo skup $A=(a,\ b]$ koji pripada topologiji τ. Tada je

$$f^{-1}(A)=\begin{cases} \varnothing, & a<b\leqslant 0 \\ [-\sqrt{b},\ \sqrt{b}], & a<0<b \\ [-\sqrt{b},\ -\sqrt{a})\cup(\sqrt{a},\ \sqrt{b}], & 0\leqslant a<b. \end{cases}$$

Odavde vidimo da inverzna slika otvorenog skupa nije uvijek otvoren skup, te je, prema tome, data funkcija prekidna u odnosu na topologiju τ realne prave R.

Primjer 2. — Neka je data funkcija $f : R \to R$, definisana sa

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \leqslant 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$$



Slika 3

1. Pokazati da je funkcija f prekidna u odnosu na običnu topologiju $\mathcal{U}$ realne prave R.

2. Pokazati da je funkcija f neprekidna u odnosu na topologiju τ realne prave R.

Rješenje:

Pokažimo 1. — Uzmimo skup (—3; 1,5) koji je element obične topologije $\mathcal{U}$.

Tada je inverzna slika otvorenog skupa (—3; 1,5) skup (—3; 1)] koji nije otvoren u običnoj topologiji $\mathcal{U}$ realne prave R.

Prema tome, data funkcija prekidna je u odnosu na $\mathcal{U}$ topologiju realne prave R.

Pokažimo 2. — Uzmimo otvoren skup $A=(a, b]$ koji je element topologije τ realne prave R.

Tada je

$$f^{-i}(A)=\begin{cases} (a, b], & a<b\leqslant 1 \\ (a, 1], & a<1<b\leqslant 2 \\ (a, b-1], & a<1<2<b \\ \varnothing, & 1\leqslant a<b\leqslant 2 \\ (1, b-1], & 1\leqslant a<2<b \\ (a-1, b-1] & 2\leqslant a<b. \end{cases}$$

U svim slučajevima $f^{-1}(A)$ je τ otvoren. Otuda je funkcija f τ neprekidna.

N a p o m e n a. — U odnosu na diskretnu topologiju $\mathcal{D}$ realne prave R svaka funkcija $f : R \to R$ je neprekidna.

Posmatrajmo na primjerima neprekidnost funkcije kada topologije u prostorima originala i slika nisu iste.

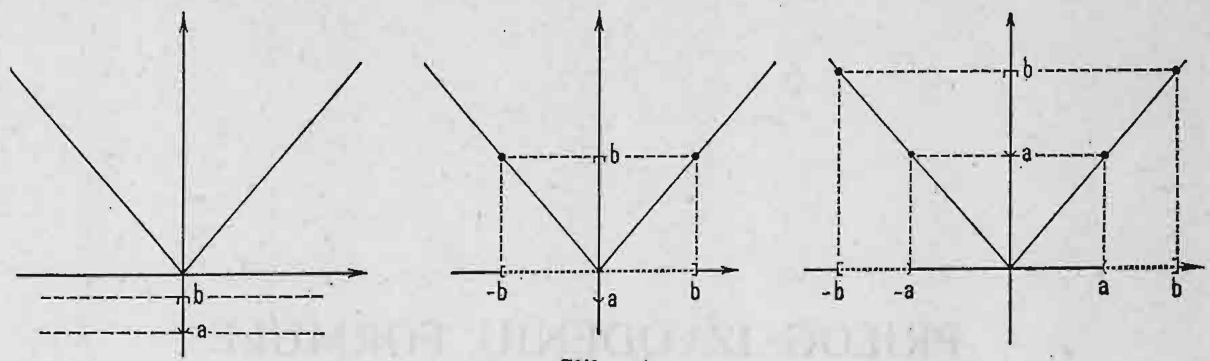
Neka je u prostoru originala zadata obična topologija $\mathcal{U}$ realne prave R, a u prostoru slika topologija sa gornjim ograničenjem τ realne prave R.

Primjer 3. — Ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x)=|x|, \ \forall x \in R$$

u odnosu na gore navedene topologije realne prave R.

Rješenje:



Slika 4

Da bismo ispitali neprekidnost navedene funkcije, u tom cilju uzmimo otvoren skup $A=(a,\ b]$, koji je element topologije τ (topologije sa gornjim ograničenjem realne prave R).

Potražimo njegovu inverznu sliku. Imamo

$$f^{-1}(A)=\begin{cases}\varnothing, & a<b\leqslant 0\\ [-b,\ b], & a<0<b\\ [-b,\ -a)\cup(a,\ b], & 0\leqslant a<b.\end{cases}$$

Odavde vidimo da inverzna slika otvorenog skupa (u odnosu na topologiju τ sa gornjim ograničenjem) nije uvijek otvoren skup (u odnosu na običnu topologiju $\mathcal{U}$), te je, prema tome, data funkcija prekidna u odnosu na posmatrane topologije.

Zadaci

1. Ispitati neprekidnost funkcije $f(x)=x,\ \forall x\in R$:

a) kada su u prostorima originala i slika iste topologije (npr. obična topologija U ili topologija sa gornjim ograničenjem τ);

b) kada su u prostorima originala i slika različite topologije (u prostoru originala npr. obična topologija $\mathcal{U}$, a u prostoru slika topologija sa gornjim ograničenjem τ).

2. Dokazati da je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 3\\ \frac{1}{2}(x+5), & x>3\end{cases}$$

a) prekidna u odnosu na topologiju $\mathcal{U}$ realne prave R;

b) neprekidna u odnosu na topologiju τ realne prave R.

U oba slučaja pretpostaviti da su u prostorima originala i slika iste topologije.

LITERATURA

1. Sibe Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru* — prvi dio, Zagreb, 1974.

2. General Topology — Including 200 solved problems by seymour LIPSCHUTZ, Ph. D.

PRILOG IZVOĐENJU FORMULE $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

KAJETAN ŠEPER,
Zagreb

Branku Pavloviću
umjesto rastanka.

Ova zanimljiva formula primijenjuje se ne samo u *vektorskoj algebri* nego i u *vektorskoj analizi* (pri formalnom računanju sa nabla-operatorom), te u različitim naučnim područjima (npr. u geometriji i mehanici).

Primjeri pokazuju da vektorsko množenje *nije* asocijativno — navedi jedan takav primjer! — pa se može postaviti i pitanje o izračunavanju »*otklona*« *od asocijativnosti* $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}-\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$; takva bi formula davala, također, nužan i dovoljan uvjet asocijativnosti tog množenja.

Suština *vektorske metode* je *direktno* računanje sa vektorima, sa vektorskim veličinama, bilo da se oni tumače geometrijski bilo fizikalno, i odatle proizlazi njezina sočnost i plodnost. Prijelaz na koordinate vektora (koordinatizacija) s obzirom na zadani koordinatni sistem (bazu) *sekundaran* je, iako taj prijelaz zajedno sa *primarnim* direktnim poimanjem vektora i direktnim računanjem sa vektorima omogućava i povećava djelotvornost (operativnost) i omogućava poopćivanje (generalizaciju) (tenzori različitih vrsta).

U svrhu izvoda gornje formule pretpostavljamo poznavanje svojstava skalarnog (in-, nutarnjeg), vektorskog (ex-, vanjskog) i mješovitog trostrukog (ex-in-) produkta: geometrijski jezik i računska pravila. Posebno, u izvođenju koristit ćemo se Lagrengeovim identitetom $(\vec{a}\times\vec{b})^2=(ab)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

Lako se uočavaju dvije činjenice o ex-ex-produktu $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ vektora, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Prvo, vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ su *okomiti* (normalni, ortogonalni) na vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ (simbolički se okomitost označava sa $\perp$), pa su, dakle, *komplanarni* (linearno zavisni). Računski se to dobije ovako:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\underset{\uparrow}{\cdot}[(\vec{a}\times\vec{b})\underset{\uparrow}{\times}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{c}=0,$$

pri čemu povezane strelice pokazuju dopuštenu međusobnu zamjenu in- i ex-produkta.

Drugo, ako vektori $\vec{a}, \vec{b}$ *nisu kolinearni* (ako su linearno nezavisni), tada se vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ može rastaviti na vektore $\vec{a}, \vec{b}$ (u obliku njihove linearne kombinacije), tj. tada postoje skalari (realni brojevi) α, β, tako da je

$$(1) \qquad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}.$$

Stvarni zadatak tek sada počinje: pretpostavljajući da vektori $\vec{a}, \vec{b}$ *nisu kolinearni*, treba odrediti skalare — nepoznanice α, β u zavisnosti od vektora-podataka $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. (Suprotni slučaj, ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni*, razmotrit ćemo na kraju.)

Ideja i zamka. — Jednadžbu (1) pomnožiti skalarno vektorom $\vec{c}\perp(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Time se dobija linearna jednadžba za nepoznanice α, β:

$$(2) \qquad \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{c})+\beta\,(\vec{b}\cdot\vec{c})=0.$$

Kako će se dobiti još jedna takva jednadžba? Hoće li se *već* tada moći *jednostavno* odrediti obje nepoznanice?

Prvi način izvođenja. — Da bismo dobili posebice jednu linearnu jednadžbu samo za nepoznanicu β, odnosno jednu samo za α, pomnožit ćemo jednadžbu (1) skalarno vektorom $\vec{n}\perp\vec{a}$, odnosno vektorom $\vec{m}\perp\vec{b}$:

$$(3a) \qquad \vec{n}\cdot\vec{b}=\vec{n}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}],$$

$$(3b) \qquad \vec{m}\cdot\vec{a}=\vec{m}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}],$$

ali tako da se in-produkti $\vec{n}\cdot\vec{b}$, $\vec{n}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]$, odnosno $\vec{m}\cdot\vec{a}$, $\vec{m}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]$ mogu *jednostavno* izračunati *u zavisnosti od zadanih vektora* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Ta nas ideja vodi na ovaj izbor vektora $\vec{n}$:

$$(4a) \qquad \vec{n}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}\ \perp\vec{a})$$

i na pripadni račun:

$$\beta\,[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\cdot\vec{b}=[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}],$$

$$(5a) \qquad \beta\,(\vec{a}\times\vec{b})^2=\{[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\times(\vec{a}\times\vec{b})\}\cdot\vec{c}.$$

Daljnje zaključivanje i računanje odnosi se na vektor u viticama — označimo ga sa $\vec{B}$, ex-ex-produkt posebnog oblika, u kojemu su ne samo prvi i treći član jednaki, kao što je i u ex-ex-produktu $\vec{n}$, nego svaki taj član sadrži i njegov srednji član kao svoj prvi faktor. Zbog toga lako dokazujemo da je vektor $\vec{B}$ kolinearan (zapravo još više, da je paralelan (istog smjera, istog smjera i smisla)) sa vektorom $\vec{a}$: triedar $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$ je ortogonalan, pa je (cikličkom zamjenom) i triedar $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}$ ortogonalan, a ortogonalan je i triedar $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{B}$. Zato imamo:

$$\vec{B}=\mu\,\vec{a},$$

a odatle skalarnim množenjem sa vektorom $\vec{a}$ i primjenom Lagrangeovog identiteta, dobijamo

$$\mu=(\vec{a}\times\vec{b})^2,$$

pa je, dakle,

(6a) $$\vec{B}=(\vec{a}\times\vec{b})^2\,\vec{a}.$$

Sada iz (5a) i (6a) dobijamo

(7a) $$\beta=\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Ista ideja vodi nas na izbor vektora $\vec{m}$:

(4b) $$\vec{m}=(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{b}\perp\vec{b},$$

i nakon sličnog zaključivanja i računa dobijamo

(7b) $$\alpha=-\vec{b}\cdot\vec{c},$$

a sa tim i konačno rješenje zadatka

(8) $$\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})\perp\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Druga formula za ex-ex-produkt

(9) $$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

izvodi se tada iz (8) vrlo lako, tako da možemo postaviti ovo opće pravilo:

Ex-ex-produkt tri vektora jednak je razlici **srednjeg** *vektora pomnoženog sa in-produktom preostala dva i* **krajnjeg** *vektora, koji je sa njime u zagradama, pomnoženog sa in-produktom preostala dva.*

Formula (8), dakle i (9), vrijedi i ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ *kolinearni.* Tada je lijeva strana formule (8) $\vec{0}$, a desna, *u slučaju* ako je $\vec{a}$ ili $\vec{b}\neq\vec{0}$, npr. ako je $\vec{a}\neq\vec{0}$, zbog $\vec{b}=\lambda\,\vec{a}$, kako se lako izračuna, također $\vec{0}$; desna strana je očito $\vec{0}$ i u *suprotnom slučaju* ako je $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$. **Qed.**

O zamci s jednadžbom (2). Ako se (7a) uvrsti u (2), dobija se

$$\alpha(\vec{a}\cdot\vec{c})+(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{c})=0,$$

a odatle se, skraćivanjem sa $\vec{a}\cdot\vec{c}$, dobije

$$\alpha=-\vec{b}\cdot\vec{c},$$

ali samo *uz pretpostavku* $\vec{a}\cdot\vec{c}\neq 0$. Slučaj $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ morao bi se posebno izučiti — kako? Mogli bismo (7b) uvrstiti u (2), i odatle, nakon skraćivanja sa $\vec{b}\cdot\vec{c}$, dobiti $\beta=\vec{a}\cdot\vec{c}$, *uz pretpostavku* $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$. *Suprotni slučaj* $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ trivijalno se rješava. No time *ne* bismo izbjegli gornja izračunavanja, stoga se svjesno *nismo* koristili jednadžbom (2).

Drugi način izvođenja. — Nakon što dobijemo (5a) i (5b) — izvedi ovu drugu formulu! — možemo poći i drugim putem: izvedimo *pomoćnu* formulu za ex-ex-produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$, u kojem su prvi i treći član jednaki.

Postavljajući u jednadžbi (1) $\vec{c}=\vec{a}$, dobijamo umjesto (5a), primjenom Lagrangeovog identiteta, jednadžbu

$$\beta(\vec{a}\times\vec{b})^2=(\vec{a}\times\vec{b})^2a^2$$

i odatle

$$\beta=a^2.$$

Tako dobijamo formulu

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=\alpha\vec{a}+a^2\vec{b}.$$

Njezinom primjenom, umjesto (5b), dobijamo na sličan način jednadžbu

$$-\alpha(\vec{a}\times\vec{b})^2=\{\alpha_1(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{a})^2\vec{b}\}\cdot\vec{a}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})^2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

i odatle

$$\alpha=-\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Tako, konačno, dobijamo tu pomoćnu formulu:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=\vec{b}a^2-\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Primijenimo li je na (5a), odnosno (5b), dobijamo lako β i α, tj. (7a) i (7b).

Primjedba: — Iz bilježaka za predavanje i sjećanja ustanovljavamo da smo prvi put i svaki put kada smo dokazivali formulu iz naslova pošli putem *linije najmanjeg otpora*, tj. koristiti smo se *koordinatama* i *metodom* »*Računaj*« ([2], str. 48; [6], str. 48) ili »*Provjeri*« ([3], str. 457—458; [5], str. 236—237); također ustanovljavamo da smo kasnije imali zabilježen dokaz te formule *bez* koordinata na *Drugi način*. Tek nedavno, kada smo, možda ponovno nakon studentskih dana, vidjeli dokaz u ([1], str. 63—64), i slično u ([4], str. 29—30), sproveli smo navedeni *Prvi način*. Taj dokaz u ([1), c. c.) oslanja se na nekoliko mjesta na »očiglednost sa slike«, a posebno, i na definicijska svojstva geometrijske definicije in- i ex-prcdukta. To ne spominjemo kao manu. Ali se, ipak, taj dokaz, a također dokaz u ([4], b. b.) treba *upotpuniti* ili *preinačiti* — usp. taj dokaz sa dijelovima *Ideja i zamka* i *O zamci* u ovom članku.

Zadatak (*nužan i dovoljan uvjet asocijativnosti vektorskog množenja*). — Ex-produkt je asocijativan, tj. za vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vrijedi $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ *ako i samo* ako su $\vec{a}, \vec{c}$ okomiti na $\vec{b}$ *ili* $\vec{a}$ kolinearan sa $\vec{c}$.

Problem (*poopćavanje formule za ex-ex-produkt u* V_3). Izvedi formulu za ex-ex-prcdukt u V_4, odnosno V_n, $n\geqslant 2$,

$$ex\,(ex\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \vec{d}, \vec{e}),$$

odnosno

$$ex\,(ex\,(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}), \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_{n-1}).$$

Napomena. — U V_2 može se lako definirati ex-produkt (jednog) vektora i dokazati formula $exex\,\vec{a}=-\vec{a}$. U V_1 bi se mogao, također, lako definirati ex-produkt »nijednog« vektora, ali budući da bi to bio vektor, iteracija ne bi bila moguća.

Za metodičko razmišljanje. — *Definira* li se ex-produkt nezavisno o koordinatama, uvijek se *izvodi* ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zadani svojim koordinatama

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

i poznata formula za taj produkt

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

i uz tu formulu povezuje se neka mnemotehnika, npr. formula se navodi u simboličkom determinantskom obliku. Jedina poteškoća koja se ovdje pojavljuje je dokaz, izvanredno koristan!, zakona distributivnosti vektorskog množenja prema zbrajanju, koje svojstvo se u izvodu upotrebljava. No poznata je izreka: »*Bez muke nema nauke*«.

Iznimno, a u novije doba možda i češće, ta se formula (10) uzima za *definiciju* ex-produkta. Tada nema poteškoća oko izračunavanja ex-ex-produkta: računa se i primijenjuje mala doskočica, dodaje se i oduzima jedan te isti član ([2], [6], l. c.). U ([3], [5], l. c.) primijenjuje se mala doskočica drugačijeg tipa: koordinatni sistem se uvodi nakon što su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ zadani, i to tako da $\vec{i}$ bude kolinearan sa $\vec{a}$, a $\vec{j}$ komplanaran sa $\vec{a}, \vec{b}$. Tada se opet računa, ali sada u smislu provjeravanja formule.

Sve su to dobre *vježbe za uvježbavanje* računanja po formuli za ex-produkt i slično. (Sličan položaj u nastavi matematike ima i pradavna formula

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

a nadasve je poučno njezino demaskiranje i demistificiranje.)

Nakon što se u prošlom stoljeću logika »algebrizirala« (zapravo samo jedan njezin djelić), »svela« na formalni račun, poznata je bila izreka da se poslije toga »*svakog magarca može naučiti logika*«. Poznata je i duhovita razglednica na kojoj je naslikan *majmun s računskom vrpcom oko vrata kako tipka na računalu*. Protumačite to kako izvolite. Moje tumačenje je ovo: Smisao je te izreke i razglednice, i poruka ne samo nastavnicima nego čitavom kulturnom čovječanstvu, u ironičnom i čak sarkastičnom obliku, da nijednu logiku bez velikog truda ne može naučiti ni svaki čovjek, odnosno da ima mnogo tipkača koji, doduše, tipkaju, ali ne računaju, o čemu nas uči sveukupno iskustvo.

LITERATURA

[1] Anđelić, T. P.: *Teorija vektora*, 2. dopunjeno izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1949.

[2] Marković, Ž.: *Uvod u višu analizu, II*, Školska knjiga, Zagreb, 1952.

[3] Blanuša, D.: *Viša matematika, I—1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.

[4] Akivis, M. A. i V. V. Goldberg: *Tenzornoe isčislenie*, »Nauka«, Moskva, 1972.

[5] Myškis A. D.: *Introductory Mathematics for Engineers*, Lectures in Higher Mathematics, Mir, Moskva, 1972.

[6] Kurepa, S.: *Uvod u linearnu algebru*, Vektori — Matrice — Grupe, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

ИЛУСТРАЦИЈА ЗА АРИТМЕТИЧКУ, ГЕОМЕТРИЈСКУ И ХАРМОНИЈСКУ СРЕДИНУ

МИРКО СТОЈАКОВИЋ,
Нови Сад

Иако је о правоуглом троуглу све познато, ипак се и данас понешто ново или бар „мање познато" и ту може рећи. У литератури се правоугли троугао користи за илустрацију односа између аритметичке и геометријске средине два броја. Показаћемо да се на истој слици „види" и хармонијска средина.Важи наиме

Став. — Ако је хипотенуза неког правоуглог троугла једнака аритметичкој средини два броја (позитивна), а једна катета полуразлици та два броја, онда је друга катета једнака геометријској средини та два броја, а ближи одсечак тој катети једнак је хармонијској средини истих бројева.

Доказ. — Нека је хипотенуза једнака аритметичкој средини два броја, α, β, и $\alpha > \beta$. Хипотенуза је, дакле, полузбир та два броја

$$c = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Нека је једна катета, означимо је са a, једнака полуразлици та два броја, дакле,

$$a = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Тада је друга катета, b, према Питагориној теореми,

$$b = \sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2} = \sqrt{\alpha\beta},$$

дакле једнака геометријској средини иста она два броја, α, β, и како је хипотенуза већа од катете, излази неједнакост

$$c = \frac{\alpha + \beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta} = a.$$

Ближи одсечак катети b, означимо га са d, једнак је

$$d=\frac{b_2}{c}=\frac{\alpha\beta}{\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}},$$

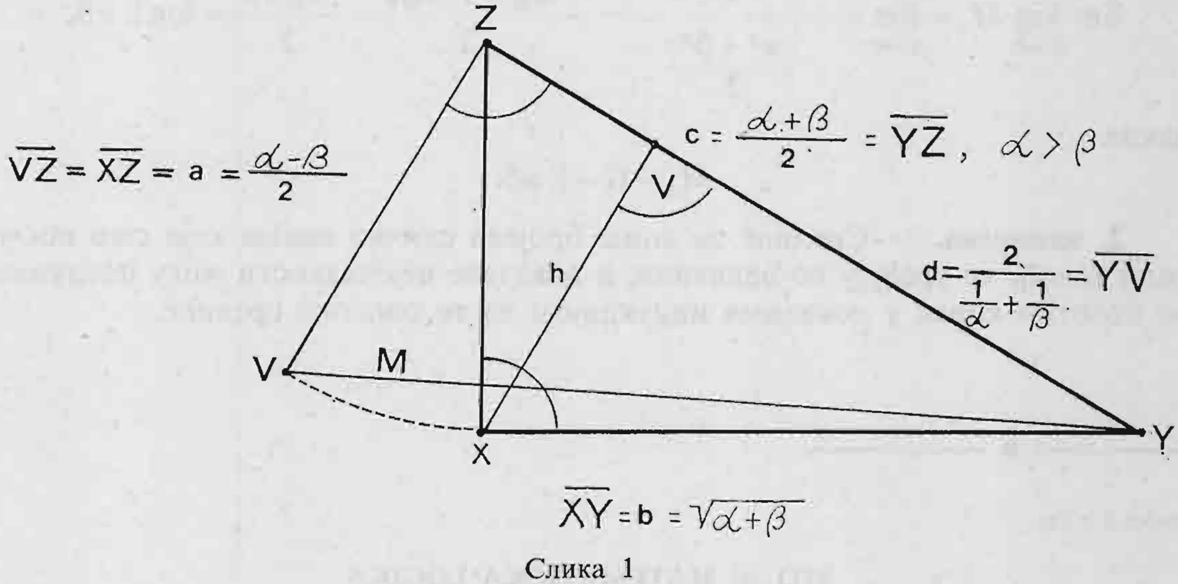
па је једнак хармонијској средини бројева α, β, а како је тај ближи одсечак d катета у троуглу који чини страница b као хипотенуза, висина троугла h као једна и d као друга катета, то је тај одсечак d мањи од катете b, па је

$$b=\sqrt{\alpha\beta}>\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}=d.$$

Означимо ли аритметичку средину са A, геометријску са G а хармонијску са H, излази да је позната неједнакост

$$A>G>H$$

у ствари узастопно примењена чињеница да је катета правоуглог троугла мања од хипотенузе:



Слика 1

то јест, неједнакост $A>G>H$ исто је што и $c>b>d$.

Приметимо да се у сваком правоуглом троуглу са страницама a, b, c могу наћи бројеви α, β који задовољавају наведене услове, а да једнакост поменутих средина наступа само кад троугао дегенерише: једна му је „катета“ (a) нула, друга (b) једнака „хипотенузи“ (c) која је истовремено и „ближи одсечак“ (d).

Ако се полуразлика и полузбир бројева узму за катете правоуглог троугла, хипотенуза тог троугла даће и четврту средину M:

$$M=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}.$$

Та је средина највећа, јер је и ту принцип „хипотенуза већа од катете" применљив. Тако је низ тих средина по величини уређен овако:

$$M \geqslant A \geqslant G \geqslant H.$$

1. напомена. — Све ове средине могу се извести из једне једине. Нека је

$$M_x = \left(\frac{\alpha^x + \beta^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Тада за $x=2$ имамо M, за $x=1$ имамо A, за $x=-1$ имамо H. Геометријска средина G добија се за случај $x=0$ као минес:

$$\lim_{x \to 0} M_x = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Уместо M посматрамо $\log M_x$. Биће

$$\log M_x = \frac{1}{x} \log \frac{\alpha^x + \beta^x}{2},$$

па је

$$\lim_{x \to 0} \log M_x = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\alpha^x \log \alpha + \beta^x \log \beta}{2}}{\dfrac{\alpha^x + \beta^x}{2}} = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2} = \frac{\log \alpha\beta}{2} = \log \sqrt{\alpha\beta},$$

одакле

$$M_0 = G = \sqrt{\alpha\beta}.$$

2. напомена. — Средине за више бројева сличне овима које смо посматрали такође се уређују по величини, а доказане неједнакости могу послужити као почетни корак у доказима индукцијом за те општије средине.

Kalužnin

ŠTO JE MATEMATIČKA LOGIKA

»Školska knjiga«, Zagreb, 1973. I izdanje, 1975. II izdanje, format 12×20, broširano, strana 142, cijena 60 dinara.

S ruskog preveo: Domagoj Stošić.

Sadržaj: Glava I — *Algebra sudova:* 1. Elementi algebre sudova, 2. Logičke operacije, 3. Booleove funkcije, 4. Normalne forme. Booleova algebra, 5. Primjene algebre sudova u teoriji relejno-kontaktnih shema i teoriji automata; Glava II — *Identički istinite formule algebre sudova:* 1. Važnost identički istinitih formula za algebru sudova, 2. Primjeri identički istinitih formula algebre sudova, 3. Formalni izvod identički istinitih formula algebre sudova; Glava III — *Algebra predikata:* 1. Predikati, 2. Primjena operacija algebre sudova na predikate, 3. Kvantifikatori, 4. Transformacije formula algebre predikata. Preneksna normalna formula, 5. Sudovi i silogizmi, 6. Primjena izraza algebre predikata na opisivanje nekih relacija; *Zaključak:* Osnove matematike i matematička logika.

ПРИКАЗ КЊИГЕ „АКСИОМАТИЧКА ТЕОРИЈА СКУПОВА“

ЖАРКО МИЈАЈЛОВИЋ
Београд

Већ дуже време у оквиру библиотеке *Модерна математика* издају се математичка дела у којима се на приступачан начин излажу области математике које обично нису заступљене у стандардним универзитетским уџбеницима. Наиме, чини се да ова библиотека испуњава два значајна циља. Један од њих је да се попуне празнине у нашој иначе доста сиромашној математичкој литератури, док се, са друге стране, пружа могућност и онима који нису специјалисти, односно свима који воле и које интересује математика, да се брзо и на мало страница упознају са модерном математичком мисли.

Међу најновије књиге ове библиотеке спада дело *Аксиоматичка теорија скупова*, познатог француског математичара-логичара Jean-Louis Krivine, у преводу Владимира Девидéа, једног од првих заступника математичке логике у нас. У овој књизи излаже се једна од најпознатијих и свакако највише проучаваних аксиоматика теорије скупова, такозвана ZF (Зермело—Фреанкелова) теорија скупова, која вероватно највише одговара представи интуитивних скупова.

Подробније, овде се разматра једна посебна проблематика, наиме, излажу се класични резултати о релативној конзистенцији различитих аксиома (хипотеза, исказа) теорије скупова. Главни метод који се овом приликом користи је конструкција одговарајућих (тзв. унутрашњих) модела на основу неког утврђеног модела, тј. извесног хипотетичког универзума U.

У припремном делу, у прве две главе, уводе се аксиоме теорије ZF, основни појмови и развија неопходан део теорије потребан у доказима релативне конзистенције.

Посебно се развија ординална и кардинална аритметика и указује се на метод дефинисања индукцијом по ординалима, општије по добро заснованој релацији, који се показује касније као једним од основних средстава у конструисању, односно у доказима егзистенције скупова са одређеним својствима.

Пажљив читалац већ на првим страницама примећује да главно место има бинарна релација $\in$, чије је полазно значење „релација припадања“. Разлог за то је јасан, будући да се аксиоме ZF теорије односе управо на ту релацију, и уз помоћ логичких симбола могу се изразити једино помоћу ње, док се остале релације и појмови теорије скупова затим уводе, тј. дефинишу. Одатле није тешко доћи до закључка — уколико се прихвати претпоставка да ZF теорија скупова заиста покрива интуицију скупова, а то ће рећи да је одговарајући медијум у којем се излажу највећи део математике (алгебра, анализа, топологија, итд.) — да су за запис највећег броја математичких чињеница довољни логички знаци и један посебан знак $\in$. Ова идеја је стално присутна, па се тако постепено (у оквиру ZF теорије) уводе, односно изражавају фундаментални појмови математике, иначе потребни за изучавање модела ове теорије, као што су природни бројеви, коначни и бесконачни скупови, формуле, релација задовољења у моделима, итд.

У овој књизи посебно се разматра релативна конзистенција аксиоме фундације (аксиоме добре заснованости, аксиоме регуларности), аксиоме избора и континуум хипотезе. Тако се у вези са аксиомом фундације разматра кумулативна хијерархија скупова V_α, док се за релативну непротивречност негације аксиоме избора (без аксиоме фундације) користе Fraenkel—Mostowskievi modeli. Ови модели су важни будући да је P. Cohen 1963. године комбинујући ову идеју са форсингом, управо добио релативну непротивречност аксиоме избора (и такође других исказа) са теоријом ZF.

Такође се разматра конструктибилна хијерархија L_α, конструктибилни универзум L и одговарајућа аксиома конструктибилности $V=L$, која исказује да је сваки скуп конструктибилан, тј. елемент универзума L. Затим се доказује релативна непротивречност аксиоме $V=L$ са теоријом ZF (њу управо задовољава конструктибилни универзум L) и, такође, да она повлачи аксиому избора и генералисану континуум хипотезу. У овом случају посебно се користе својства апсолутних исказа (формула посебног облика), те је између осталог доказано и то да се у доказима (у оквиру теорије ZF) аритметичких исказа могу елиминисати јаке аксиоме теорије ZF: аксиома конструктибилности, аксиома избора и генералисана континуум хипотеза, наравно уколико су оне уопште коришћене. Та својства аритметичких исказа су од опште (математичке) важности, јер се показује да су разна математичка тврђења аритметичког карактера, док се у познатим доказима за њих експлицитно користе неке од поменутих јаких аксиома. Претходно тврђење указује макар на **принципијелну** могућност елиминације ових хипотеза у случају аритметичких исказа. (Неки примери аритметичких исказа су: „Теорија T је непротивречна“, „Теорија T је комплетна“ уколико је T представљива рекурзивним скупом аксиома.)

Напоменимо да се у овој књизи често уместо природних бројева користе такозвани наследно-коначни скупови, нпр. када је реч о геделизацији, будући да се синтакса једноставније аритметизује уколико се користе ови скупови. Овде ће се наћи и доказ теореме рефлексије, те као последицу да теорија ZF није коначно аксиоматизабилна. Такође је доказан други Gödelov stav непотпуности и, у вези са тим, да се у оквиру ZF теорије не може доказати непротивречност саме теорије ZF и, исто тако, да се не може доказати егзистенција недостижних кардинала.

Читалац ће једноставније пратити ову књигу уколико познаје неке основне појмове математичке логике, као што су: формуле, модел (релацијска структура), релација задовољења, геделизација, итд. Чини се да је релација задовољења дата на помало замршен начин, те ако се читалац први пут среће са тим, имаће проблема да разуме о чему се ради. С обзиром да се у књизи уводе многи појмови и скраћенице, индекс појмова би помогао да се читалац брже снађе, нарочито уколико га интересују само извесни делови. Понегде су уз важније теореме изостављена имена њихових аутора, нпр. у схеми рефлексије R. Montague и A. Levy, уз тзв. теорему колапсирања (стр. 44) име A. Мостовског.

Ова књига представља изванредан увод у проучавање модела теорије скупова. На заиста мало простора, на релативно приступачан и врло егзактан начин, тј. са потпуним доказима, наведене су класичне методе у овој проблематици, из периода пре него што је P. Cohen увео форсинг, D. Scott и R. Soloway боолеовско-вредносне моделе, а R. B. Jensen своје идеје из бесконачне комбинаторике. У сваком случају, да би се могло разумети шта се данас ради у теорији скупова, неопходно је познавање управо једног оваквог материјала. Тим пре што је овде указано на многе од идеја присутних у савременој теорији скупова, па су и докази и терминологија прилагођени том духу. Вредност књиге посебно повећава више задатака са упутствима, којима се делимично допуњује основни текст, а такође се пружа могућност да се и сâм читалац испроба у овој области математике.

Књига има 120 страна. Издавач *Школска књига*, Загреб, 1978.

Žarko Dadić

RAZVOJ MATEMATIKE

Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju.

»Školska knjiga«, Zagreb, 1975, format 12×20, strana 252, broširano, cijena 75 dinara.

Recenzent: dr Vladimir Devidé.

Sadržaj: 1. Uvod, 2. Prapovijest, 3. Prve civilizacije, 4. Znanstvene koncepcije starog vijeka, 5. Srednjovjekovna shvaćanja, 6. Početak novog doba, 7. Razdoblje stvaranja novih sustava i metoda, 8. Trijumf analize i pokusa, 9. Strogo formuliranje znanstvenih pojmova, 10. Kriza klasične fizike, 11. Pogovor.

* * *

Hardy Zsigmond — dr Sólyom Mihály

PRISTUP MODERNOJ ALGEBRI

»Školska knjiga«, Zagreb, 1976, format 12×20, strana 276, broširano, cijena 140 dinara.

S mađarskog preveo: Petar Römer. Recenzent: Dragutin Svrtan.

Sadržaj: 1. Matematika i logika. Logičke operacije i logički simboli, 2. Skupovi i relacije, 3. Polugrupa i grupa, 4. Mreža, prsten, polje, 5. Zadaci.

PRIKAZ JEDNOG SEMINARA

JOSIP ŠURAN,
Rijeka

Od 3. do 8. rujna 1978. godine održan je u Umagu (Istra) seminar za nastavnike matematike osnovnih škola riječke regije. Seminaru je prisustvovalo 120 nastavnika iz 24 općine, a smještaj i prostor za rad za učesnike seminara rezerviran je u hotelu »Istra« — Katoro i depandansama istog hotela.

Seminari za nastavnike matematike, koje organizira Zavod za prosvjetno-pedagošku službu zajednica općina Gospić i Rijeka nisu rijetki, ali su inicijatori i organizatori (nastavnici matematike — voditelji stručnih aktiva općina riječke regije i prosvjetni savjetnici za matematiku) ovaj puta dali seminaru radni karakter.

120 nastavnika, podijeljeni u 11 grupa koje su sastavljene od 10, 11 ili 12 članova, nastavnika iz različitih krajeva regije, izradili su u toku seminara stručno-metodički pristup svih nastavnih cjelina matematike za sedmi i osmi razred.

Temeljite pripreme za ovakav rad na ovom seminaru izvršene su na vrijeme i obavljene na stručnim aktivima svih općina riječke regije. Razmatrao se tekst *Nacrta stručno-metodičkog pristupa razrade nastavnih jedinica iz matematike za sedmi i osmi razred osnovne škole.* Prva izrada teksta *Nacrta* povjerena je prosvjetnim savjetnicima za matematiku: J. Šuranu i S. Jergeru i prosvjetnom savjetniku, pedagogu mr I. Bubalu. Isti su tekst dobili na uvid profesori dr Velimir Penavin, i autori udžbenika matematike za sedmi i osmi razred dr Željko Pauše i mr Damjan Jovičić.

Profesor Penavin uveo je učesnike seminara u rad izlaganjem kritičke analize *Nacrta* i posebnim detaljnijim osvrtom na cilj i zadatke nastave matematike. Ostalo vrijeme radilo se u grupama. Pomoć svojim stručnim savjetima grupama pružali su u toku seminara Penavin i Damjan Jovičić. Autor Željko Pauše iz opravdanih razloga nije mogao prisustvovati seminaru.

O radu i rezultatima rada svake grupe vodili su posebnu brigu voditelji: Zlatko Daskijević, Ivan Eberling, Dragica Ivšić, Nedjeljka Jelenković, Elvira Ježić, Sonja Kaplan, Smilja Lugonja, Lucijan Peršić, Aura Šikić, Ivanka Šneler i Anica Vivoda. Osim navedenih voditelja pojedinih grupa, posebni zadatak — objedinjavanje rada svih grupa za pojedini razred — imali su glavni voditelji: za sedmi razred Drago Dojčinović i za osmi razred Đurđa Vidas.

Učesnici seminara ponijeli su sa sobom udžbenike matematike za VII i VIII razred, zbirke zadataka, pripreme, ispite znanja, geometrijski pribor i ostalu pogodnu literaturu. Imali su i potpuniji uvid u matematičku literaturu, jer je »Školska knjiga« postavila izložbu odgovarajućih knjiga. Nastavnici su se izloženim knjigama služili na, njima, najpogodniji način. U radu seminara aktivno je učestvovao i urednik »Školske knjige« Z. Š p o r e r.

I, da bi čitalac ove informacije bio potpunije upoznat što je i kako je trebalo da radi svaki član grupe, izlaže se i *Nacrt* u cjelini na primjeru iz VII razreda za nastavnu jedinicu: *Zbrajanje cijelih brojeva*[1].

Razred: Sedmi.

Nastavna cjelina: treća — cijeli brojevi.

Naziv nastavne jedinice: (prema udžbeniku, strana od do).

1.4. Zbrajanje cijelih brojeva, 10—15.

SADRŽAJ

POPIS ČINJENICA

Zbrajanje cijelih brojeva: definicija zbrajanja. Grafički prikaz zbrajanja cijelih brojeva pomoću usmjerenih dužina. Zbrajanje cijelih brojeva kao funkcija sa $Z \times Z$ u Z. Svojstva zbrajanja.

POPIS GENERALIZACIJA

1. Za svaki negativan broj $-b$ ($b \in N$) pišemo $a-b$ umjesto $a+(-b)$. Od broja $a \in Z$ oduzeti prirodan broj b znači pribrojiti broju a negativan broj $-b$.

2. Ako je ispred zagrade minus (—), zagradu ispustiti, a brojeve u zagradi zamijeniti suprotnim brojevima.

POPIS SIMBOLA

Cijeli broj $(a+b)$, znak $\bar{a}$ (čitaj a potez), $\leq$, $<$ znaci za uređajnu, odnosno strogo uređajnu relaciju, te $\Rightarrow$ znak implikacije.

NIVOI USVOJENOSTI GRADIVA

Automatizacija: Operacija zbrajanja u skupu cijelih brojeva.

Reprodukcija: Definicije (str. 10, 11, 13, 14. i 15).

Prepoznavanje:

[1] Tekst ove nastavne jedinice napisao je J. Š u r a n.

ZADACI

Materijalni

Učenici će naučiti definiciju zbrajanja cijelih brojeva (1, 2, 3, 4 i 5— str. 10. i 11). Naučit će zbrajati cijele brojeve. Naučit će pisati (i izgovarati izreke) za uređene parove $(a, b) \rightarrow a+b$. Ukazat će im se na važnost i snagu svojstva zbrajanja (I, II, III, IV, V i VI).

Funkcionalni

Od učenika će se zahtijevati samostalan rad pomoću rada s udžbenikom. Analizirat će zbrajanje cijelih brojeva putem grafičkog prikaza (str. 11, sl. 6). Naučit će zbrajati cijele brojeve (jednostavnije primjere) »napamet«.

Odgojni

Razvijat će se volja učenika da računaju brzo i okretno sa cijelim brojevima. Ukazivat će im se na praktičnu vrijednost usvajanja ovog nastavnog gradiva na nivou automatizacije.

METODE I METODIČKI OBLICI

1. Metoda usmenog izlaganja (oblik: objašnjenje). Na prirodan način uvest će se učenika u obradu novog gradiva. Kako učenici za sada još ne znaju zbrajati negativne brojeve, treba im ukazati na tu mogućnost i objasniti potrebu uvođenja definicije zbrajanja cijelih brojeva. (Može ih se informirati i sa nekim zanimljivim povijesnim činjenicama.)

2. Metoda crtanja (oblik: kao način izražavanja). Učenici će prikazati svojim — novim primjerom po analogiji zbrajanje cijelih brojeva — grafički (analogno sl. 6 na str. 11).

3. Metoda čitanja i rada na tekstu. Učenici će iz udžbenika čitati: činjenice označene brojevima 1, 2, 3, 4 i 5, te generalizacije (na str. 13. i 15).

4. Metoda pisanja. Učenici će ispuniti tablicu naznačenu u udžbeniku na str. 14. Radi se o zadatku 14.

5. Oblik samostalnog pisanog rada. Učenici će izraditi kontrolni ispit znanja.

NASTAVNA SREDSTVA I POMAGALA

Udžbenik, zbirka zadataka, kreda u boji, grafoskop, nastavni listići, kontrolni ispit znanja, ploča.

Napomena: ploču treba isticati samo onda ako se koristi u svrhu objašnjenja bilo da to čini nastavnik ili učenik.

TOK RADA

Ukupan broj časova za nastavnu jedinicu:	Prva var. 4	Druga var. 5
Tip nastavnog sata		
Pripremanje	1/2	0
Obrada	3/2	2
Uvježbavanje	1	1
Ponavljanje	1/2	1
Provjeravanje	1/2	1

DOMINANTNI TIPOVI NASTAVNIH SATOVA

Obrada i uvježbavanje.

OPIS TOKA FAZA RADA

Uvod

Ponoviti znanje o orijentiranim veličinama: Da li znaju da su orijentirane veličine takve veličine kod kojih se mogu razlikovati dva suprotna smisla orijentacije? Da li se radi i o zahtjevu praktične potrebe uz teorijske razloge (proširenja pojma prirodnog broja)? Znaju li navesti neke primjere takvih veličina (gibanje: lijevo — desno, gore — dolje, naprijed — natrag, vrijeme, temperatura, primitak — izdatak, dobitak — gubitak i sl.)?

Ponoviti 1.3. — Uređaj u skupu Z. Obavezno istaći relaciju »$<$« kao tranzitivnu relaciju na skupu Z. Napomena: samo na konkretnim primjerima! Učenike treba usmjeriti na upotrebu udžbenika, i to na detalje:

1. (str. 9): »... da je svaki negativan cijeli broj manji od nule i od svakog pozitivnog cijelog broja, i da je od dva različita negativna cijela broja manji onaj koji ima veći modul.«

2. (str. 9): »Ako su a, b i c cijeli brojevi i pri tome je $a<b$ i $b<c$, onda je $a<c$. Kažemo da je b između a i c i pišemo: $a<b<c$. Relacija »$<$« je tranzitivna relacija na skupu Z.

Glavni dio rada

a) Definicija zbrajanja.

1. Projicirati grafoskopom (ili demonstrirati na drugi način, sl. 6 iz udžbenika na str. 11).

2. Istovremeno uz nastavnikovo objašnjenje učenici će se koristiti i udžbenikom (paralelno promatranje projekcije i slike iz udžbenika).

3. Provjeriti (radom učenika na ploči) shvaćanje i usvojenost na drugim konkretnim primjerima.

4. Svaki će učenik nacrtati u svojoj bilježnici prikaz zbrajanja cijelih brojeva — grafički, ali vlastitim izborom orijentiranih dužina (»kopija«, sl. 6).

5. Učenici će pažljivo i sa razumijevanjem pročitati (svih pet slučajeva) definicije zbrajanja cijelih brojeva (str. 10. i 11).

6. Nastavnik će objasniti sl. 7 (udžb. str. 12). Tražit će se da zapisuju odgovarajućom simbolikom nekoliko primjera (na ploči), a ostale primjere samo u svojim bilježnicama time da se istovremeno i usmeno izražavaju — korektno.

b) Svojstva zbrajanja.

7. Metodom čitanja i rada na tekstu učenici će samostalno usvajati gradivo: **I, II, III, IV,** V i VI.

8. Učenici će uvježbavati gradivo (radom u svojim bilježnicama) koje je usvojeno čitanjem teksta (vidi točku 7).

Zaključak (rezime)

Povratnom informacijom saznati od učenika: Što su učinili? Što su naučili? Na koji su način učili?

1. Treba provjeriti metodom razgovora (oblik: slobodan oblik razgovora) da li su usvojili svih pet slučajeva definicije zbrajanja cijelih brojeva.

2. Da li brzo, okretno i »napamet« zbrajaju jednostavnije primjere cijelih brojeva.

3. Da li su sposobni da izvode grafičku interpretaciju cijelih brojeva.

4. Provjeriti na jednom od dva primjera kako primjenjuju praktično računanje.

5. Provjeriti shvaćaju li cijele brojeve (negativne, nulu i pozitivne: signirane brojeve) kao odraz objektivno postojećeg kvantitativnog svojstva prostiranja orijentiranih veličina.

6. Da li su shvatili da se u skupu Z ne govori o oduzimanju kao o posebnoj računskoj operaciji (funkciji)?

IZBOR ZADATAKA ZA:

Pripremu

1. Izjednačiti ove razlomke sa cijelim brojevima:

0/6= , 0/7= , 0/9= , 6/1= , 6/2= , 6/3= .

2. Pročitaj (naglas):

$-7<2 \quad -1<1, \quad -2<0, \quad 0<5, \quad 8<10, \quad 3>1, \quad 14<-14.$

Napomena. — Ponekad je dobro da se svjesno zada zadatak sa pogreškom kako bi se od učenika tražilo da bude pažljiv i kritičan!

3. Zaokruži skup koji ima najveći element

a) N, b) N_0, c) Z^-.

4. Dopuni rečenice:

a) 1 (jedan) je naj *manji prirodan broj;*
b) 0 (nula) je naj *manji element skupa* N_0;
c) Od dva različita negativna cijela broja manji je onaj koji ima *veći modul.*

Obradu

Nastavnik može koristiti primjere iz udžbenika, zbirke, ili pripremiti vlastite primjere prilikom pripremanja za nastavni sat.

Uvježbavanje

Nastavnik će odabrati prikladne primjere iz zbirke zadataka za VII razred osnovne škole. Na primjer, napiši broj koji je:

a) za 8 veći od a .... $(a+8)$;
b) za 5 manji od c .... $(c-5)$;
c) za a veći od x .... $(x+a)$;
d) za n manji od t .... $(t-n)$.

Naznači:

a) da broju a treba pribrojiti sumu brojeva a i c, b i c.... $a+(b+c)$;
b) da sumi brojeva b i c treba pribrojiti broj a...... $(b+c)+a$;
c) da od sume brojeva a i b treba oduzeti diferenciju tih brojeva...... $(a+b)-(a-b)$.

Ponavljanje

Učenici će rješavati zadatke koristeći nastavne listiće. Nastavni listići razvrstani su u tri grupe: *A*, *B* i *C*. Osnovna je karakteristika nastavnih listića jedne grupe: težina i složenost zadataka.

Grupa A:

1. Proširenjem skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva, prirodnim brojevima (u ovom skupu) dajemo novi naziv.
Zovemo ih: *pozitivni cijeli brojevi.* Zašto?
Da bismo istakli njihovu suprotnost prema novouvedenim — negativnim brojevima.

2. Navedi po tri cijela broja:

a) negativna: —10, —3, —1;
b) nenegativna: 10, 0, 2;
c) pozitivna: +3, +5, +10.

3. Je li $<Z$ strogo linearno uređajna relacija?

Zaokruži: DA — NE

Zašto? Ako i samo ako ima ova tri svojstva:

1. R je tranzitivna relacija;
2. R je antisimetrična relacija;
3. ni za jedan $x \in S$ nije xRx.

4. Napiši kako se čita:

$a \prec b$ *a je ispred b;*

$a < b$ *a je manje od b ili a je strogo manje od b.*

5. Napiši rezultat:

$10-\{5-[3-(2-1)]\}=7.$

6. Popuni tablicu:

x	$\lvert x+1\rvert$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert x\rvert+1$	$\lvert x\rvert-2$
0				
1				
-1				
2				
-2				
5				
-12				

Provjeravanje

Za provjeravanje koristit će se kontrolni ispit znanja. Rad treba da je potpuno samostalan.

Zadaci:

1. Uzmimo da su $a \in Z$ i $b \in Z$ zadani brojevi. Napiši cijeli broj koji je jednak njihovom zbroju. $(a+b)$

2. Koji je suprotan broj od sume brojeva 12 i -45? (33)

3. Zadani su brojevi -5 i 3. Da li je ova izjava istinita? Zbroj njihovih modula jednak je modulu njihova zbroja. Odgovor napiši pomoću odgovarajućih matematičkih simbola. $|-5|+|3|\neq|-5+3|$

4. Koliko treba dodati broju 198 da bi se dobilo 80? (-118)

5. Izračunaj: $7-[4+(9-2)]+[-3(3-5)+12]=.$ (10)

6. Nastavi započeto:

$a+(b+c)=$ (asocijativnost) $(a+b)+c$;

$a+b=$ (komutativnost) $b+a$;

$a+0=$ (0 je neutralni element) $0+a=a$;

$a+(-a)=$ ($-a$ je suprotni element od a) $(-a)+a=0$.

Napomena. — Nastavnik treba da u toku rada obilazi učenike da bi dobio uvid u uspješnost njihovog rada, a nastojat će da prije završetka nastavnog sata informira učenike o uspješnosti njihovog rada.

PRIMJEDBE I KOMENTAR

Nastavna jedinica. — „Zbrajanje cijelih brojeva“ — može se razraditi u okviru četiri ili pet nastavnih časova (vidi varijante). Nastavnik treba da odmjeri brzinu rada, da izvodi sve nastavne časove punim hodom i da razvija smisao kod svakog učenika da se radi ozbiljno, odgovorno i efikasno. NACRTOM predviđeni detalji ukazuju nastavniku na složenost nastavnog rada, na važnost nastavne jedinice u cjelini i pojedinostima. Iako je istaknuto npr. u NIVOIMA, da treba operaciju zbrajanja u skupu cijelih brojeva da svaki učenik usvoji na nivou automatizacije, ipak cilj nije dril, već sistematski pristup stručnim i metodičkim pitanjima i sadržajima koji su istaknuti u NACRTU.

Redoslijed realizacije ne mora u svim nijansama doslovce biti realiziran, kao i to da se predloženi izbor, npr. metoda i metodički oblik, može izmijeniti, pa i reducirati. Uopće, nastavnik će prilikom realizacije nastavne jedinice zbrajanja cijelih brojeva koristiti ovaj predložak samo kao ideju, kao koncept, kao poticaj za razmišljanje kako da se pripremi svaki nastavni sat posebno.

Važno je da se za vrijeme izvođenja nastave matematike radi tako da se riješi dovoljno matematičkih zadataka. NACRTOM se predviđaju zadaci za svaki tip nastavnog sata, od pripreme do provjeravanja. Predloženo je da se pri tom radi i sa nastavnim listićima i da se izvede kontrolni ispit znanja. Kontrolni ispit znanja je priređen samo u jednoj varijanti, za sve učenike u odjeljenju, dok je skup zadataka koje će učenici rješavati pomoću nastavnih listića razrađen u tri skupine: *A*, *B* i *C*. Zadaci iz *A* skupine namijenjeni su samo onima koji se ističu u matematici ili su uključeni u dodatnu nastavu, *B* skupina — za najveći broj učenika u razredu (za »srednjake«), a skupina *C* — za sve one učenike kojima takav rad ide teže i sporije, pa se zbog toga vrlo često uključuju u dopunsku nastavu. Posebno je važno da se realizira iz OPISA TOKA FAZA RADA veoma savjesno UVOD I ZAKLJUČAK (REZIME).

U okviru navedenih četiri ili pet časova nastavnik može informirati svoje učenike na najprikladniji način sa izvjesnim zanimljivim povijesnim podacima. Npr.: . . . da o negativnim brojevima u smislu brojeva koji označavaju dug ili gubitak, nasuprot pozitivnim, koji označavaju imovinu ili dobitak, ima tragova već kod starih indijskih i kineskih matematičara. Kinezi su npr. za obilježavanje ovih brojeva upotrebljavali boje. Za pozitivne brojeve služili su se crvenom, a za negativne — crnom. Dugo vremena je ljudima izgledalo neshvatljivo da se veći broj može oduzimati od manjeg, odnosno da bi se nešto moglo oduzimati od nule. Najstarija istraživanja u oblasti negativnih brojeva zapaža se kod Inda još u VII stoljeću. To su, uglavnom, računi primanja i dugovanja. Povijesni podaci nas upućuju da je od prvog saznanja za ove brojeve do njihovog definitivnog usvajanja proteklo tisuću godina. U Evropi su se ti brojevi dugo nazivali »lažnima«, »besmislenima«, »apsurdnima«, izmišljenima«. Počeli su se uzimati u obzir tek u XVI stoljeću. Veliku zaslugu treba pripisati Dekartu i njegovoj školi, Ojleru i drugima. Ipak, uza sve, prepirka oko negativnih brojeva trajala je stotinu godina.

Bitno je da učenik shvati i razumije teškoće u razvoju i da se prošireni skup prirodnih brojeva (nulu i negativne brojeve) i računske operacije sa njima treba objašnjavati polazeći od konkretnih primjera i da se za to kao najbolje sredstvo preporučuje brojevni pravac.

LITERATURA

1. Željko Pauše: *Matematika za sedmi razred osnovne škole*
2. Pauše — Krčmar: *Zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole*
3. Vinko Bajrović — Vinko Pavlović i Milan Pehar: *Zbirka zadataka za sedmi razred osnovne škole*
4. Vera Schmid: *Zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole*
5. *Matematika* — Priručnik za stručno usavršavanje nastavnika osnovnih škola, ŠK, Zagreb 1973.
6. Dr M. Radić: *Za mlade matematičare*, knjiga I, Rijeka, 1971.
7. *Matematika* — Stručno-metodički časopis, br. 1/76, 3/76.
8. Zlatko Šporer: *Repetitorij matematike*, ŠK, Zagreb, 1977.

STRUČNO-METODIČKE BELEŠKE

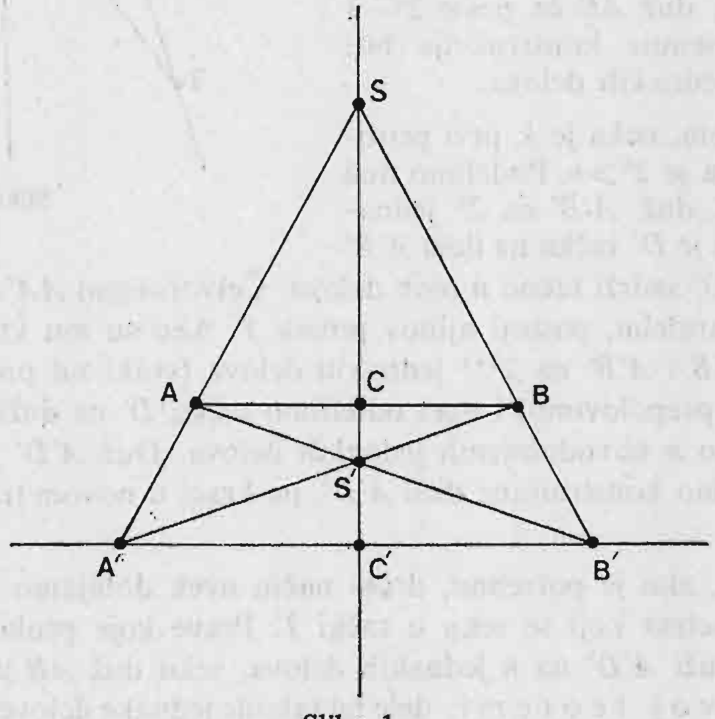
16. Pripremio *Milan Božić*, Beograd.

U *Matematici* br. 2/1977. objavljen je, u rubrici zadataka pod brojem 57, stav:

Prava koja sadrži presek krakova i presek dijagonala trapeza polovi osnovice tog trapeza.

Ovaj stav može se iskoristiti pri rešavanju sledećeg konstruktivnog zadatka. U ravni su dati prava i njoj paralelna duž. Koristeći se samo lenjirom, podeliti duž na dva jednaka dela.

Rešenje. — Označimo pravu sa l, a krajeve duži sa A i B.



Slika 1

Neka je S tačka u ravni odabrana tako da se nalazi sa one strane prave AB sa koje nije prava l. Prave SA i SB seku pravu l u tačkama A' i B' tim redom. Četvorougao $AA'B'B$ je trapez. Neka je S' presek njegovih krakova AB' i BA'. Prava SS' seče duži AB i $A'B'$ u tačkama C i C', tim redom i prema prethodnom stavu polovi ih (sl. 1).

Iz prethodnog proizlazi da se tačke C i C' dobijaju u preseku prave SS' sa dužima AB i $A'B'$. Da bi se ove tačke odredile, dovoljno je konstruisati prave SA, SB, AB', BA' i SS'. Za to je dovoljan lenjir.

Zanimljivo je sledeće uopštenje upravo rešenog konstruktivnog zadatka.

U ravni su dati prava i njoj paralelna duž. Koristeći se samo lenjirom podeliti duž na n jednakih delova.

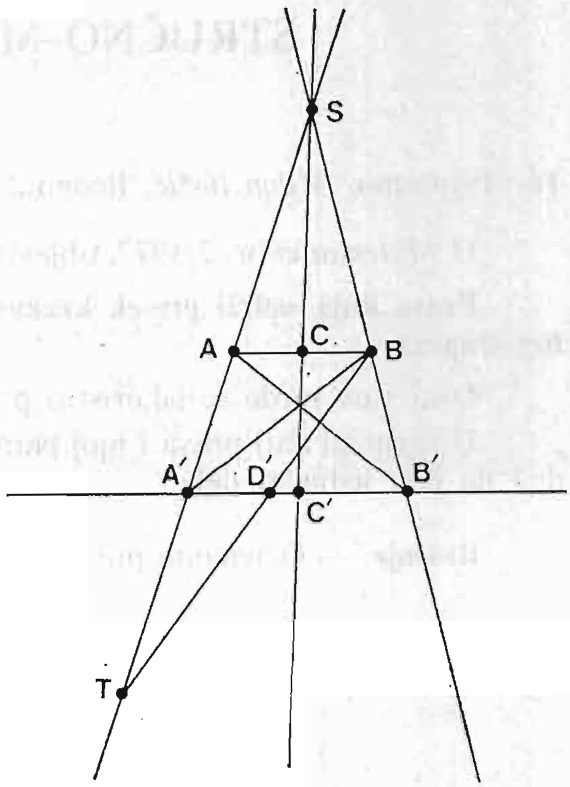
Rešenje. — Koristimo oznake kao i u prethodnom zadatku i na isti način određujemo tačku S.

Navedenim postupkom, tačkama C i C', delimo duži AB i $A'B'$ na dva jednaka dela. Zatim, ponavljajući konstrukciju, sa istom tačkom S, delimo duži AC i $A'C'$, odnosno CB i $C'B'$ na po dva jednaka dela, i tako dalje.

Na ovaj način, deleći svaku od dobijenih podeonih duži na po dva dela, možemo polaznu duž AB i njenu projekciju $A'B'$ podeliti na $2, 4, \ldots, 2^k, \ldots$ delova.

Ako je n stepen broja 2, tj. ako je za neko $kn = 2^k$, duž AB će posle $2^k - 1$ ponavljanja pomenute konstrukcije biti podeljena na n jednakih delova.

U suprotnom, neka je k prvi prirodan broj takav da je $2^k > n$. Podelimo duž AB i, sledstveno, duž $A'B'$ na 2^k jednakih delova. Neka je D' tačka na duži $A'B'$ takva da duž $A'D'$ sadrži tačno n ovih delova. Četvorougao $AA'D'B$ je trapez. Ako mu kraci nisu paralelni, postoji njihov presek T. Ako su mu kraci ipak paralelni, podelimo duži AB i $A'B'$ na 2^{k+1} jednakih delova (svaki od prethodno dobijenih delova, u stvari, prepolovimo) i opet odredimo tačku D' na duži $A'B'$ tako da duž $A'D'$ sadrži tačno n novodobijenih jednakih delova. Duž $A'D'$ je u ovom slučaju polovina prethodno konstruisane duži $A'D'$, pa kraci u novom trapezu sigurno nisu paralelni.



Slika 2

Na prvi ili, ako je potrebno, drugi način uvek dobijamo tvapez $AA'D'B$ sa neparalelnim kracima koji se seku u tački T. Prave koje prolaze kroz tačku T i podeone tačke duži $A'D'$ na n jednakih delova, seku duž AB u tačkama koje je, prema T a l e s o v o j t e o r e m i, dele na takođe jednake delove, a njih je, jasno, n.

Ovom konstrukcijom duž AB je podeljena na n jednakih delova.

Sve tačke pomenute u prethodnom izlaganju dobijaju se u preseku pravih određenih tačkama koje se konstruišu ponavljanjem postupka iz prvog zadatka. Tako se ova konstrukcija sastoji iz ponavljanja elementarnih konstrukcija, ako tako nazovemo konstrukciju iz prethodnog zadatka. Za to je dovoljan lenjir.

17. *O nazivima deljenik, delilac, umanjenik, umanjilac i sl.*

Pripremio *Slaviša Prešić.*

Neka su a, b, c prirodni brojevi i neka važi jednakost

$$a-b=c.$$

Kao što znamo a se naziva **umanjenik**, b — **umanjilac**, a c — **razlika** (broja a sa brojem b). Slično, ako važi jednakost oblika

$$a:b=d,$$

tada a zovemo **deljenik**, b — **delilac**, a d — **količnik** (a sa b). Da li su ti nazivi svrsishodni, imajući na kraju na umu i okolnost da se ne pamte potpuno lako? Pre odgovaranja, razmišljanje nastavimo ovako. Neka je S izvestan neprazan skup i $*$ jedna njegova binarna operacija — slučaj koji se u savremenoj algebri sreće skoro na svakom koraku. Pretpostavimo, dalje, da za članove a, b skupa S vredi jednakost

$$a*b=c,$$

tj. da je c odgovarajući rezultat operacije. Sledeći već pomenute nazive deljenik, delilac, umanjenik, umanjilac šta bismo sada rekli za a i b? Možda (?!): **zvezdanik** i **zvezdilac.** Tako smo došli do, slobodnije rečeno, jezičke zbrke. Po našem mišljenju, nazive kao umanjenik, umanjilac i sl. **ne treba** upotrebljavati, nego umesto njih treba govoriti ovako: **prvi broj** (opštije **prvi član**), **drugi broj** (odnosno **drugi član**) i **rezultat** (tj. **ishod**) operacije. Tako, neki zadaci uz korišćenje tih naziva glase:

— Prvi član razlike iznosi 8, sama razlika je 3, koji je drugi član?

— Količnik dva broja je 5, a drugi među njima je 2. Koji je prvi član tog količnika?

ZADACI

PROBLEMI ZA REŠAVANJE

72. Postavio *Milan Božić*, Beograd.

Za koje realne brojeve x, y, z je tačna formula

$$\urcorner(x+y+z<3a \Rightarrow x<a \wedge y<a \wedge z<a),$$

gde je a poznat (realan broj)?

73. Postavio *Slaviša Prešić*, Beograd.

Odrediti iskaznu formulu $F(p, q)$ — građenu slovima p, q i znacima logičkih operacija $\wedge$, $\vee$, $\urcorner$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ – iz uslova da je

$$(*) \qquad F(p, q) \wedge F(q, r) \Rightarrow F(p, r)$$

tautologija. Recimo, formula $p \Rightarrow q$ je jedan primer takve formule $F(p, q)$.

74. Dokazati da je uslov $c^2 \leqslant a^2+b^2$ potreban i dovoljan da bi bila moguća po x (iz skupa R) jednačina $a \sin x+b \cos x=c$.

75. Rešiti po x (iz R) jednačinu $\varphi(x)+\varphi(1-x)=1$, gde je φ funkcija određena ovako

$$\varphi(x)=|x| \text{ ako } x \leqslant 1/2, \quad \varphi(x)=1-x \text{ ako } x>1/2.$$

REŠENJA RANIJE POSTAVLJENIH PROBLEMA

Problem 56. — Postavio *Hamid Kulosman*, Sarajevo.

Ako je n prirodan broj, a α oštar ugao, tada važi

$$n^n(\mathrm{tg}^n\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)^{n+1} \geqslant 2^n(n^2+1).$$

Dokazati.

Rješenje. *I. Kujundžića,* Zvornik.

Posmatrajmo funkciju $y = f(\alpha) = \operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ u intervalu $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Funkcija je, očigledno, pozitivna, a na krajevima intervala teži ka $+\infty$. Pošto je i neprekidna, onda mora imati donju granicu.

$$y' = n \operatorname{tg}^{n-1} \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 0 \Rightarrow n \operatorname{tg}^{n+1} \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = n^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Dakle,

$$y_{\min} = \left(n^{-\frac{1}{n+1}}\right)^n + n^{\frac{1}{n+1}} = n^{-\frac{n}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) n^{\frac{1}{n+1}},$$

pa je

(1) $$\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n^{\frac{1}{n+1}}.$$

Označimo

$L = n^n (\operatorname{tg}^n \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^{n+1}$, $D = 2^n (n^2 + 1)$. Na osnovu (1) možemo pisati:

$$L \geqslant n^n \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) n^{\frac{1}{n+1}}\right]^{n+1} = n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot n = n^{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1)^{n+1}.$$

Dakle,

(2) $$L \geqslant (n+1)^{n+1}.$$

Treba još dokazati da je

$$(n+1)^{n+1} \geqslant D \text{ za } n = 1, 2, 3, \ldots$$

U stvari, za $n = 1$ je $(n+1)^{n+1} = D$. Dokazaćemo da je

$$(n+1)^{n+1} > D \text{ za } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Za $n = 2$, nejednakost je ispunjena:

$$3^3 = 27 > 2^2 (2^2 + 1) = 20.$$

Pretpostavimo da je za neko fiksirano n:

$$(n+1)^{n+1} > 2^n (n^2 + 1).$$

Pomnožimo obje strane sa $2(n+1)$. Dobijamo

(3) $$2(n+1)^{n+2} > 2^{n+1} (n^2 + 1)(n+1).$$

Važe i slijedeće nejednakosti:

(4) $$2^{n+1} (n^2 + 1)(n+1) > 2^{n+1} [(n+1)^2 + 1], \quad n = 2, 3, \ldots$$

(5) $$(n+2)^{n+2} > 2(n+1)^{n+2} \quad n = 2, 3, \ldots$$

Nejednakost (4) je očigledna, dok nejednakost (5) slijedi iz:

$$(n+2)^{n+2}=[(n+1)+1]^{n+2}=(n+1)^{n+2}+(n+2)(n+1)^{n+1}+\cdots+1$$
$$>(n+1)^{n+2}+(n+1)(n+1)^{n+1}=2(n+1)^{n+2}.$$

Iz nejednakosti (3), (4) i (5) imamo

$$(n+2)^{n+2}>2^{n+1}[(n+1)^2+1],$$

i time smo, indukcijom, dokazali nejednakost

$$(n+1)^{n+1}\geqslant 2^n(n^2+1), \text{ za } n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{6}$$

Sada, iz (2) i (6) imamo

$$L\geqslant 2^n(n^2+1), \text{ ili } L\geqslant D.$$

Problem su, takođe, rešili *Š. Arslanagić*, Trebinje, i *D. Jocić*, Foča.

Problem 57. — Postavila *Miljana Ignjatović*, Niš.

Prava prolazi kroz presjek dijagonala i presjek produženih krakova trapeza. Dokazati da ona polovi osnovice tog trapeza.

Dokaz *Izeta Kujundžića*, Zvornik.

$\triangle S_1MD\sim\triangle S_1NA\Rightarrow$

$\Rightarrow DM:AN=S_1M:S_1N,$

$\triangle S_1MC\sim\triangle S_1NB\Rightarrow$

$\Rightarrow CM:BN=S_1M:S_1N.$

Iz ovih proporcija izlazi:

$\underline{DM:AN=CM:BN.}$

$\triangle S_2MD\sim\triangle S_2NB\Rightarrow$

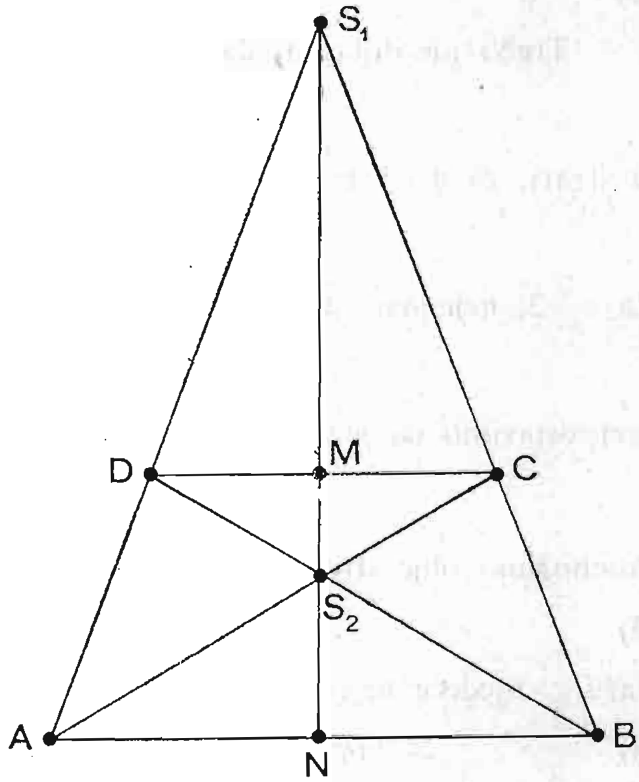
$\Rightarrow DM:BN=S_2M:S_2N,$

$\triangle S_2MC\sim\triangle S_2NA\Rightarrow$

$\Rightarrow CM:AN=S_2M:S_2N.$

Iz poslednje dvije proporcije izlazi:

$\underline{DM:BN=CM:AN.}$



Slika 1

Iz podvučenih proporcija izlazi:

(1) $$DM \cdot BN = AN \cdot BM,$$

(2) $$DM \cdot AN = BN \cdot CM.$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo:

$$DM \cdot \underline{BN} \cdot DM \cdot \underline{AN} = \underline{AN} \cdot CM \cdot \underline{BN} \cdot CM,$$

$$DM^2 = CM^2,$$

$$DM = CM,$$

a onda je iz (1) ili (2) i $BN = AN$. Dokaz je završen.

Problem su, takođe, rešili *Š. Arslanagić* i *D. Jocić.*

Problem 58. — Neka su x, y, z oznake realnih brojeva. Formulu $x + y = 1$ riješiti:

a) po x, y; b) po x, y, z; c) po x; d) po z.

Riješenje: *Š. Arslanagića*, Trebinje.

a) Formulu $x + y = 1$ prevedimo na oblik:

$$y = 1 - x.$$

Na osnovu toga sva riješenja su određena formulama $x = a$, $y = 1 - a$, gdje je a ma koji realan broj; znači, imamo beskonačno riješenja.

b) Možemo pisati:

$$(x + y = 1) \wedge z = z,$$

$$(y = 1 - x) \wedge z = z,$$

$$(x = a, \quad y = 1 - a) \wedge z = z.$$

Dakle, sva riješenja su određena formulama: $x = a$, $y = 1 - a$ (a — ma koji realan broj, z — ma kakav realan broj.

c) $x = 1 - y$, y — parametar. Postoji tačno jedno riješenje.

d) Možemo pisati:

$$(x + y = 1) \wedge z = z.$$

Uslov $x + y = 1$ (za parametre x, y) je potreban i dovoljan da postoji riješenje po z. Ako taj uslov vrijedi, z može biti na koji broj.

Problem 59. — Koja relacija nezavisna od a, b postoji između rešenja jednačine

$$(a+b)x^2+i(a-b)x+c=0 \qquad (i=\sqrt{-1})$$

ako $a>0$, $b>0$ a c je harmonijska sredina od a i b?

Rješenje *Adema Huskića*, Tešanj.

Prema Vièteovim pravilima je

(1) $$x_1+x_2=-i\frac{a-b}{a+b},$$

(2) $$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a+b},$$

a prema uslovu zadatka $c=\dfrac{2\,ab}{a+b}$, pa (2) postaje

(3) $$x_1\,x_2=\frac{2\,ab}{(a+b)^2}.$$

Kvadriranjem (1) dobijamo

$$(x_1+x_2)^2=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=-\frac{a^2-2\,ab+b^2}{(a+b)^2}=\frac{2\,ab}{(a+b)^2}-\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=$$

$$=\frac{2\,ab}{(a+b)^2}-\frac{(a+b)^2-2\,ab}{(a+b)^2}=2\,\frac{2\,ab}{(a+b)^2}-1,$$

pa prema (3) konačno dobijamo

$$(x_1+x_2)^2=2\,x_1\,x_2-1,$$

odnosno

$$x_1^2+x_2^2=-1.$$

Problem su, takođe, rešili *Š. Arslanagić, D. Jocić, I. Kujundžić.*

Problem 60. — Postavio *Dragoljub Milošević*, Pranjani.

Dokazati nejednakost

$$(a+3\,b)^n+(3\,a+b)^n\geqslant 2^{n+1}(a+b)^n,$$

gdje su a, b pozitivni, a n prirodan broj.

Rešenje *D. Jocića*, Foča.

Dokažimo prvo lemu $2^{n-1}(A^n+B^n)\geqslant(A+B)^n$. Dokažimo to matematičkom indukcijom. Lema važi za $u=2$ zbog $(A-B)^2\geqslant 0$. Pretpostavimo da važi i za $n=k$, tj. da je $2^{k-1}(A^k+B^k)\geqslant(A+B)^k/(A+B)$:

$$2^{k-1}(A^{k+1}+B^{k+1}+A^k B+AB^k)\geqslant(A+B)^{k+1}.$$

Kako je $A^{k+1}+B^{k+1}\geqslant A^k B+AB^k$ zbog $(AB)(A^k-B^k)\geqslant 0$, to je $A^{k+1}+B^{k+1}+A^k B+AB^k\leqslant 2(A^{k+1}+B^{k+1})$, tj.

$$2^{(k+1)-1}(A^{k+1}+B^{k+1})\geqslant(A+B)^{k+1}.$$

Time je lema dokazana.

Za $A=3a+b$ i $B=3b+a$ nejednačina postaje $2^{n-1}[(3a+b)^n+(a+3b)]\geqslant [3a+b+a+3b)^n$, tj.

$$2^{n-1}[(3a+b)^n+(a+3b)^n]\geqslant 2^{2n}(a+b),$$

$$(3a+b)^n+(a+3b)^n\geqslant 2^{n+1}(a+b).$$

Time je nejednakost dokazana.

Problem su, takođe, rešili *Š. Arslanagić*, *Zeka Naser*, *I. Kujundžić* i *A. Huskić*.

ZNAČAJNIJA IZDANJA IZ MATEMATIKE U POSLJEDNJIH DESET GODINA

IGKRO »SVJETLOST«, OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE, SARAJEVO

Radivoje Kašanin: *VIŠA MATEMATIKA I*, 1969, strana XI+836, ilustrovano, format 24×17 cm 50 din.

Silvio Elazar: *MATEMATIČKA STATISTIKA*, 1972, strana 320, ilustrovano, format 24×17 cm 80 din.

Silvio Elazar: *UVOĐENJE U MATEMATIČKE TEORIJE* (Dokazi u matematici), 1976, strana 160, ilustrovano, format 20×14 cm 90 din.

V. Vuletić i Ć. Ljubović: *PROGRAMIRANJE* (Fortran), 1978 (II izdanje), strana 224, ilustrovano, format 24×17 cm 120 din.

Suad Alagić: *PRINCIPI PROGRAMIRANJA*, 1976, strana 214, ilustrovano, format 24×17 cm 100 din.

Veselin Perić i Miloš Tomić: *ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE II*, sveska 1: *DIFERENCIJALNE JEDNAČINE*, 1975, strana 139, ilustrovano, format 24×16,5 cm 80 din.

V. Perić, M. Tomić i P. Karačić: *ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE II*, sveska 2: *DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, VIŠESTRUKI, LINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI, VEKTORSKA ANALIZA*, 1976, ilustrovano, strana 250, format 24×17 cm 130 din.

V. Perić, M. Tomić i P. Karačić: *ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE II*, sveska 3: *FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE, REDOVI, LAPLASOVA TRANSFORMACIJA*, 1976, strana 260, ilustrovano, format 23,5×16,5 cm 120 din.

Lj. Jarnjak, A. Rašidagić-Finci i M. Vuković: *ZBIRKA ZADATAKA IZ TEORIJE FUNKCIJA KOMPLEKSNE PROMJENLJIVE*, 1975, strana 272, ilustrovano, format 24×17 cm 120 din.

Mirko Kulišić: *ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE I — NEODREĐENI INTEGRAL*, 1978, strana 120, format 23,5×17 cm 80 din.

S. Prešić i B. Alimpić: *ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE* (sa uputama i rješenjima) za I razred srednjih škola, 1977, strana 270, ilustrovano, format 23,5×17 cm 55 din.

S. Mintaković: *ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE* (sa uputama i rezultatima) za II razred srednjih škola, 1977, strana 338, format 23,5×16,5 cm 55 din.

M. Šnajder i S. Tomić: *METODIČKA ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE* (za sve razrede srednjih škola), 1978 (XIII izdanje), strana 293, format 23,5×16,5 cm 36 din.

Mirjana Malenica i Hatidža Đulić-Mulahalilović: *ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE SA RJEŠENJIMA* (sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini i sa prijemnih ispita na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu), 1975, strana 239, ilustrovano, format 20×14 cm 10 din.

R. Džananović: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za I razred osnovne škole, 1978 (II izdanje), strana 138+1, format 23,5×16,5 cm 55 din.

S. Gorušanin i A. Užičanin: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za II razred, 1978, strana 147, format 24×17 cm 55 din.

K. Mijatović: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za III razred, 1978 (II izdanje), strana 149, format 24×17 cm 55 din.

M. Trninić: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za IV razred, 1978 (III izdanje), strana 148+3, format 24×17 cm 40 din.

M. Radić: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za V razred, 1977, strana 92, format 23,5×16,5 cm 40 din.

M. Radić: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za VI razred, 1977, strana 72, format 23,5×16,5 cm 40 din.

Ž. Pauše: *PRIRUČNIK UZ UDŽBENIK MATEMATIKE* za VII razred, 1978, strana 76, format 23,5×16,5 cm 40 din.

Slaviša Prešić i Branka Alimpić: *O MATEMATIČKOJ LOGICI, BROJEVIMA I GEOMETRIJI* u I razredu srednjih škola — priručnik za profesore, 1977, strana 84, ilustrovano, format 20×14 cm 40 din.

Pretplatnicima časopisa *MATEMATIKA* »*SVJETLOST*« odobrava 10% popusta za izdanja iz ovog popisa. Pismene narudžbine izdavaču dostaviti uz priloženi kupon na adresu *IGKRO* »*SVJETLOST*« OOUR Marketing, poslovnica za udžbenike, 71000 Sarajevo, P. Preradovića 3. Knjige se šalju pouzećem.

KUPON: STRUČNO-METODIČKI ČASOPIS »MATEMATIKA«

Pretplatnik: ______________________________

Adresa: ______________________________