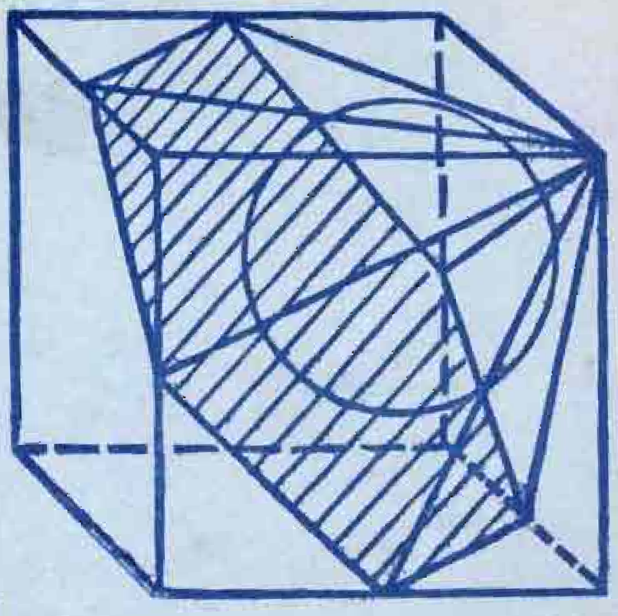
ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ



В. Б. ЛИДСКИЙ
Л. В. ОВСЯННИКОВ
А. Н. ТУЛАЙКОВ
М. И. ШАБУНИН

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

В. Б. ЛИДСКИЙ, Л. В. ОВСЯННИКОВ,
А. Н. ТУЛАЙКОВ, М. И. ШАБУНИН

ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

51
Л 55
УДК 511+512+513+514 (075.4)

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой сборник задач (повышенной трудности) по элементарной математике, снабженных указаниями и решениями. Может быть использована в работе юношеских математических школ и школьных математических кружков, а также при подготовке к приемным экзаменам в такие высшие учебные заведения, где предъявляются повышенные требования по математике.

Виктор Борисович Лидский, Лев Васильевич Овсянников, Анатолий Николаевич Тулайков, Михаил Иванович Шабунин

Задачи по элементарной математике

М., 1970 г., 416 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*
Техн. ред. *А. А. Благовещенская*,
Корректоры *Л. Н. Боровина*, *Т. С. Вайсберг*

Печать с матриц. Подписано к печати 16/III 1970 г. Бумага 84×108[1]/32
Физ. печ. л. 13. Условн. печ. л. 21,84. Уч.-изд. л. 20,22.
Тир. 100 001—200 000 (2-й завод) Цена книги 67 коп. Заказ № 272

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., д. 10.
С матриц Ордена Трудового Красного Знамени
Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

2-2-2
20-70

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга имеет целью помочь тому, кто желает углубить свои знания по элементарной математике. В книге собраны задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах поступавшим в Московский физико-технический институт. Для решения задач требуются знания в объеме средней школы (те немногие сведения, которые иногда не включаются в программы средних школ, приводятся особо). Тем не менее следует отметить, что большинство предлагаемых задач являются задачами повышенной трудности.

Книга состоит из трех разделов: «Алгебра», «Геометрия» и «Тригонометрия», каждый из которых разбит на подразделы. Внутри каждого подраздела задачи расположены в порядке возрастающей трудности.

Значительную помощь в работе над книгой авторам оказала ст. лаборант кафедры Г. Е. Пономарева, которой авторы приносят благодарность.

Авторы

ЗАДАЧИ

АЛГЕБРА

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Предварительные замечания

Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов *арифметической прогрессии*, то

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\,n}{2} = \frac{[2a_1+d(n-1)]\,n}{2}. \tag{2}$$

Если u_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов *геометрической прогрессии*, то

$$u_n = u_1 q^{n-1}, \tag{3}$$

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q-1} = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1}. \tag{4}$$

Если, наконец, S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q|<1$), то

$$S = \frac{u_1}{1-q}. \tag{5}$$

1. Доказать, что если положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, то числа

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

также образуют арифметическую прогрессию.

2. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

3. Доказать, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля и образуют арифметическую прогрессию, то

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

4. Доказать, что всякая последовательность чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих при любом $n \geqslant 3$ условию

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

образует арифметическую прогрессию.

5. Показать, что для всякой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ имеют место равенства

$$a_1-2a_2+a_3=0,$$
$$a_1-3a_2+3a_3-a_4=0,$$
$$a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0$$

и вообще при всяком $n>2$ имеем:

$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0.$$

Указание. В этой и следующей задачах полезно воспользоваться легко проверяемым тождеством

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

6. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ при $n \geqslant 3$ имеют место равенства

$$a_1^2-C_n^1a_2^2+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^2=0.$$

7. Доказать, что если числа $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ $(x \neq 1)$ образуют арифметическую прогрессию, то

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

8. Найти такую арифметическую прогрессию, у которой отношение суммы первых n членов к сумме kn последующих не зависит от n.

9. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти эту прогрессию, если

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a,\quad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=b^2.$$

Указание. В этой и следующей задачах полезно воспользоваться равенством

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10. Последовательность чисел 1, 4, 10, 19, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию. Найти n-й член и сумму первых n членов этой последовательности чисел.

11. Составим таблицу

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2,\ 3,\ 4 \\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}$$

Доказать, что сумма членов каждой горизонтальной строки равна квадрату нечетного числа.

12. В геометрической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ даны члены $a_{m+n}=A$, $a_{m-n}=B$. Найти a_m и a_n $(A\neq 0)$.

13. Пусть S_n есть сумма первых n членов геометрической прогрессии, $S_n\neq 0$, $q\neq 0$. Доказать, что

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}}.$$

14. Зная сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии и сумму $\tilde{S}_n$ обратных величин этих членов, найти произведение Π_n первых n членов прогрессии.

15. Найти сумму

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n.$$

16. Найти сумму

$$1+11+111+\ldots+111\ldots1,$$

если последнее слагаемое есть n-значное число.

17. Найти сумму

$$nx+(n-1)x^2+\ldots+2\cdot x^{n-1}+1\cdot x^n.$$

18. Найти сумму

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

19. Доказать, что числа 49, 4489, 444889, ..., получаемые вставкой 48 в середину предыдущего числа, являются квадратами целых чисел.

20. Доказать, что можно найти убывающую геометрическую прогрессию

$$1,\ q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots,$$

каждый член которой отличается от суммы всех следующих за ним членов заданным постоянным множителем k. При каких k задача возможна?

21. Бесконечная последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_n, \ldots$ $(x_1 \neq 0)$ при любом $n \geqslant 3$ удовлетворяет условию

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2)=$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)^2.$$

Доказать, что $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

Указание. Можно применить метод полной индукции.

22. Даны арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n>0$ для всех натуральных чисел n. Доказать, что $a_n<b_n$ при $n>2$.

23. Доказать, что если для геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и арифметической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_n, \ldots$ выполняются неравенства

$$a_1>0,\quad \frac{a_2}{a_1}>0,\quad b_2-b_1>0,$$

то существует такое число α, что $\log_\alpha a_n - b_n$ не зависит от n.

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Предварительные замечания

При решении предлагаемых ниже систем уравнений исходная система упрощающими преобразованиями сводится к равносильной системе, все решения которой либо известны, либо могут быть найдены известными приемами. В некоторых случаях приходится переходить к системам, которые заведомо удовлетворяются всеми решениями исходной системы, однако, вообще говоря, не только ими. В этих случаях определяемые наборы значений неизвестных следует проверять подстановкой в исходную систему.

В отдельных задачах используются *формулы Виета*, связывающие коэффициенты уравнения третьей степени

$$x^3+px^2+qx+r=0 \tag{1}$$

с его корнями x_1, x_2, x_3. Они имеют вид:

$$x_1+x_2+x_3=-p, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q, \quad x_1x_2x_3=-r. \tag{2}$$

Формулы (2) находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в тождестве

$$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

24. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=1,\\ x^2y+2xy^2+y^3&=2. \end{aligned}\right\}$$

25. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=4,\\ x+xy+y&=2. \end{aligned}\right\}$$

26. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3&=5a^3,\\ x^2y+xy^2&=a^3 \end{aligned}\right\}$$

при условии, что a вещественно и не равно 0.

27. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}&=12,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{3}. \end{aligned}\right\}$$

28. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4&=91,\\ x^2-xy+y^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

29. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^3-y^3&=19(x-y),\\ x^3+y^3&=7(x+y). \end{aligned}\right\}$$

30. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2(x+y) &= 5xy, \\ 8(x^3+y^3) &= 65. \end{aligned}\right\}$$

31. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-y^2) &= 9, \\ (x-y)(x^2+y^2) &= 5. \end{aligned}\right\}$$

32. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1, \\ x^4+y^4 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

33. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 1, \\ x^5+y^5 &= 31. \end{aligned}\right\}$$

34. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^4+y^4-x^2y^2 &= 13, \\ x^2-y^2+2xy &= 1, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющие условию

$$xy \geqslant 0.$$

35. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x^2+1)(y^2+1) &= 10, \\ (x+y)(xy-1) &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Указание. Положить $xy=v$, $x+y=u$.

36. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x^2+y^2)\frac{x}{y} &= 6, \\ (x^2-y^2)\frac{y}{x} &= 1. \end{aligned}\right\}$$

37. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= axy, \\ x^4+y^4 &= bx^2y^2. \end{aligned}\right\}$$

38. Решить уравнение (разлагая левую часть на множители)
$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0.$$

39. Решить уравнение
$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right).$$

40. Решить систему уравнений
$$\left.\begin{aligned}\frac{x+y}{xy}+\frac{xy}{x+y}&=a+\frac{1}{a},\\ \frac{x-y}{xy}+\frac{xy}{x-y}&=b+\frac{1}{b}.\end{aligned}\right\}$$

41. Найти все решения уравнения
$$(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1.$$

42. Решить систему уравнений:
$$\left.\begin{aligned}|x-1|+|y-5|&=1,\\ y&=5+|x-1|\text{*)}.\end{aligned}\right\}$$

43. Выяснить, при каких вещественных x и y имеет место равенство
$$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0.$$

44. Найти все вещественные значения x и y, удовлетворяющие уравнению
$$x^2+4x\cos(xy)+4=0.$$

45. Найти вещественные решения системы
$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=2,\\ 2xy-z^2&=4.\end{aligned}\right\}$$

46. Выяснить, при каком значении a система
$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=z,\\ x+y+z&=a\end{aligned}\right\}$$
имеет единственное вещественное решение, и найти это решение.

---

*) Абсолютной величиной числа x (обозначается через $|x|$) называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:
$$|x|=\begin{cases}-x, & \text{если } x<0;\\ x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

47. Доказать, что для любого (вообще комплексного) решения системы

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+xy+\frac{1}{xy}&=a,\\ x^4+y^4+x^2y^2-\frac{1}{x^2y^2}-2&=b^2 \end{aligned}\right\}$$

сумма x^2+y^2 вещественна при любых вещественных a и b, $a \neq 0$.

48. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=a+b+c,\\ bx+cy+az&=a+b+c,\\ cx+ay+bz&=a+b+c, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что a, b и c вещественны и $a+b+c \neq 0$.

49. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1,\\ x+ay+z&=a,\\ x+y+az&=a^2. \end{aligned}\right\}$$

50. Какому условию должны удовлетворять числа a_1, a_2, a_3, чтобы система

$$\left.\begin{aligned} (1+a_1)\,x+y+z&=1,\\ x+(1+a_2)\,y+z&=1,\\ x+y+(1+a_3)\,z&=1 \end{aligned}\right\}$$

имела решение и притом единственное?

51. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+dt&=p,\\ -bx+ay+dz-ct&=q,\\ -cx-dy+az+bt&=r,\\ -dx+cy-bz+at&=s, \end{aligned}\right\}$$

где a, b, c, d удовлетворяют условию:

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0.$$

52. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n&=a_1,\\ nx_1+x_2+2x_3+3x_4+\ldots+(n-1)\,x_n&=a_2,\\ (n-1)\,x_1+nx_2+x_3+2x_4+\ldots+(n-2)\,x_n&=a_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+\ldots+1x_n&=a_n. \end{aligned}\right\}$$

53. Доказать, что если

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0,\\ x_2+x_3+x_4&=0,\\ \ldots\ldots&\ldots\\ x_{99}+x_{100}+x_1&=0,\\ x_{100}+x_1+x_2&=0, \end{aligned}\right\}$$

то

$$x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}=0.$$

54. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz-x&=2,\\ y^2+xy+yz-y&=4,\\ z^2+xz+yz-z&=6. \end{aligned}\right\}$$

55. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=7,\\ x^2+y^2-z^2&=37,\\ x^3+y^3-z^3&=1. \end{aligned}\right\}$$

56. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{xyz}{x+y}&=2,\\ \frac{xyz}{y+z}&=\frac{6}{5},\\ \frac{xyz}{z+x}&=\frac{3}{2}. \end{aligned}\right\}$$

57. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2+w&=2,\\ v^2+w^2+u&=2,\\ w^2+u^2+v&=2. \end{aligned}\right\}$$

58. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=1,\\ x^2+xz+z^2&=4,\\ y^2+yz+z^2&=7. \end{aligned}\right\}$$

59. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_2x_3\ldots x_n}{x_1}&=a_1,\\ \frac{x_1x_3\ldots x_n}{x_2}&=a_2,\\ \ldots&\ldots\\ \frac{x_1x_2\ldots x_{n-1}}{x_n}&=a_n, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что числа $a_1, \ldots, a_n$ и $x_1, \ldots, x_n$ положительны.

60. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x+y+z)(ax+y+z)&=k^2,\\ (x+y+z)(x+ay+z)&=l^2,\\ (x+y+z)(x+y+az)&=m^2, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что a, k, l, m — действительные числа и $k^2+l^2+m^2>0$.

61. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x^2+y^2+z^2&=14,\\ xz+yz&=(xy+1)^2. \end{aligned}\right\}$$

62. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+xz+yz&=a,\\ y^2+xy+xz+yz&=b,\\ z^2+xy+xz+yz&=c, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $abc\neq 0$.

63. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x(y+z)&=a^2,\\ y(z+x)&=b^2,\\ z(x+y)&=c^2, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $abc\neq 0$.

64. Найти действительные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^3+z^3&=2a\,(yz+zx+xy),\\ z^3+x^3&=2b\,(yz+zx+xy),\\ x^3+y^3&=2c\,(yz+zx+xy). \end{aligned}\right\}$$

65. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y+2x+z&=a(x+y)\,(z+x),\\ z+2y+x&=b\,(y+z)\,(x+y),\\ x+2z+y&=c\,(z+x)\,(y+z). \end{aligned}\right\}$$

66. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=9,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=1,\\ xy+xz+yz&=27. \end{aligned}\right\}$$

67. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ xy+yz+xz&=a^2,\\ xyz&=a^3. \end{aligned}\right\}$$

68. Показать, что единственным решением системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=0,\\ yz+zx+xy-y^2&=0,\\ xy+z^2&=0 \end{aligned}\right\}$$

является решение $x=y=z=0$.

69. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=a^2,\\ x^3+y^3+z^3&=a^3. \end{aligned}\right\}$$

70. Пусть $(x,\ y,\ z)$ — решение системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=b^2,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{c}. \end{aligned}\right\}$$

Найти сумму

$$x^3+y^3+z^3.$$

71. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{aligned}\right\}$$

72. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-z)^2=a, \\ y^2+(x-z)^2=b, \\ z^2+(x-y)^2=c. \end{aligned}\right\}$$

73. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} xy+yz+zx=47, \\ x^2+y^2=z^2, \\ (z-x)(z-y)=2. \end{aligned}\right\}$$

74. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{2z^2}{1+z^2}, \\ y=\frac{2x^2}{1+x^2}, \\ z=\frac{2y^2}{1+y^2}. \end{aligned}\right\}$$

75. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_2=x_1+\frac{2}{x_1}, \\ 2x_3=x_2+\frac{2}{x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_n=x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}}, \\ 2x_1=x_n+\frac{2}{x_n}. \end{aligned}\right\}$$

76. Показать, что если a, b, c, d — попарно неравные вещественные числа и x, y, z — решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 1+x+y+z=0, \\ a+bx+cy+dz=0, \\ a^2+b^2x+c^2y+d^2z=0, \end{aligned}\right\}$$

то произведение xyz положительно.

В предлагаемых ниже уравнениях в случае корней четной степени рассматриваются лишь такие значения неизвестных, при которых подкоренное выражение неотрицательно; при этом берется только неотрицательное значение корня. В случае корней нечетной степени подкоренное выражение может быть любым вещественным числом (в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения).

77. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$$

78. Решить уравнение

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

79. Решить уравнение

$$\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}+\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}=7\sqrt{2}.$$

80. Решить уравнение

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

81. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}.$$

82. Найти все вещественные корни уравнения

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt{2}.$$

83. Решить уравнение

$$\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}.$$

При каких вещественных значениях a уравнение будет иметь решение?

84. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2}&=2(x+y),\\ x^2+y^2+4xy&=\frac{1}{5}.\end{aligned}\right\}$$

85. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}&x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right),\\ &\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.\end{aligned}\right\}$$

86. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}, \\ x+yx+y=9. \end{aligned}\right\}$$

87. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\frac{x-y}{y+1}}=3, \\ x+xy+y=7. \end{aligned}\right\}$$

88. Найти все вещественные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x+y-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{aligned}\right\}$$

89. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y+\frac{2\sqrt{x^2-12y+1}}{3}=\frac{x^2+17}{12}, \\ \frac{x}{8y}+\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{x}{3y}+\frac{1}{4}}-\frac{y}{2x}. \end{aligned}\right\}$$

90. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{17}{4}, \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52. \end{aligned}\right\}$$

91. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{aligned}\right\}$$

92. Найти вещественные решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y+\frac{4}{3}\sqrt{x^2-6y+1}=\frac{x^2+17}{6}, \\ \frac{x^2y-5}{49}=\frac{2}{y}-\frac{12}{x^2}+\frac{4}{9}. \end{aligned}\right\}$$

93. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x-y)\sqrt{y}=\frac{\sqrt{x}}{2}, \\ (x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y}. \end{aligned}\right\}$$

94. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=a,\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=a^2\end{array}\right\}(a>0).$$

95. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right),\\ x^2+xy+y^2=b^2\end{array}\right\}\quad (a>0,\ b>0).$$

3. Алгебраические неравенства

Предварительные замечания

Приведем некоторые неравенства, которые используются при решении предлагаемых ниже задач.

Для любых вещественных a и b

$$a^2+b^2\geqslant 2|ab|. \tag{1}$$

Неравенство (1) есть следствие очевидного неравенства $(a\pm b)^2\geqslant 0$. Знак равенства в (1) имеет место лишь в случае, когда $|a|=|b|$.

Если $ab>0$, то, разделив обе части неравенства (1) на ab, получим:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2. \tag{2}$$

Если $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то, положив в (1) $u=a^2$, $v=b^2$, получим:

$$\frac{u+v}{2}\geqslant\sqrt{uv}. \tag{3}$$

В неравенствах (2) и (3) знак равенства имеет место соответственно лишь при $a=b$ и $u=v$.

Отметим, кроме того, некоторые *свойства квадратного трехчлена*

$$y=ax^2+bx+c, \tag{4}$$

которые ниже используются в ряде задач.

Из представления трехчлена (4) по формуле

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \tag{5}$$

следует, что в случае, когда дискриминант трехчлена

$$D=b^2-4ac<0$$

(в этом случае корни трехчлена невещественны), трехчлен при всех x принимает значения одного и того же знака, совпадающего со знаком коэффициента a при старшем члене.

В случае $D=0$ трехчлен также сохраняет постоянный знак, обращаясь в нуль при единственном значении $x=-\frac{b}{2a}$.

Наконец, в случае $D > 0$ (в этом случае трехчлен имеет вещественные и различные корни x_1 и x_2) из разложения

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

вытекает, что лишь при условии

$$x_1 < x < x_2$$

трехчлен принимает значения, знак которых противоположен знаку a. Для всех же остальных значений x, отличных от x_1 и x_2, трехчлен имеет тот же знак, что и a.

Таким образом, трехчлен всегда сохраняет знак коэффициента при старшем члене, за исключением лишь того случая, когда корни его вещественны и

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

96. Найти все действительные значения r, при которых многочлен

$$(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 1$$

положителен для всех действительных x.

97. Доказать, что выражение

$$3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10$$

неотрицательно при любых вещественных x и y, не равных нулю.

98. При каких значениях a система неравенств

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

удовлетворяется для всех значений x?

99. Доказать, что для любых действительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd.$$

100. Найти все значения a, при которых смешанная система

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &\leqslant 1, \\ x - y + a &= 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

101. Найти пары целых чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\left.\begin{aligned} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0, \\ y+|x-1|<2. \end{aligned}\right\}$$

102. Показать, что при всяком целом $n>1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

103. Доказать, что при всяком целом положительном m справедливо неравенство

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+(2m+1)}>1.$$

104. Показать, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}.$$

105. Доказать, что при $n>2$

$$(n!)^2>n^n.$$

106. Доказать, что из трех отрезков с длинами $a>0$, $b>0$, $c>0$ можно построить треугольник тогда и только тогда, когда

$$pa^2+qb^2>pqc^2$$

для любых чисел p и q, связанных соотношением

$$p+q=1.$$

107. Доказать, что при любых вещественных x, y, z имеет место неравенство

$$4x(x+y)(x+z)(x+y+z)+y^2z^2\geqslant 0.$$

108. Доказать, что при любых вещественных x и y имеет место неравенство

$$x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4\geqslant 1.$$

109. Доказать, что при условии $2x+4y=1$ выполняется неравенство

$$x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20}.$$

110. Каким условиям должно удовлетворять число $d>0$ для того, чтобы при $R \geqslant r > 0$ имело место неравенство

$$0<\frac{d^2+R^2-r^2}{2dR} \leqslant 1?$$

111. Доказать неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

(a, b, c положительны).

112. Доказать, что если a, b, c — числа одного знака и $a<b<c$, то

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)<0.$$

113. Доказать, что если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ положительны и $a_1a_2a_3\ldots a_n=1$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

114. Доказать, что если $a+b=1$, то

$$a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}.$$

115. Доказать, что многочлен

$$x^8-x^5+x^2-x+1$$

положителен при всех вещественных x.

116. Доказать, что если $|x|<1$, то при любом целом $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$(1-x)^n+(1+x)^n<2^n.$$

117. Доказать, что

$$|x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+$$
$$+\frac{\varepsilon}{4}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и ε — произвольные вещественные числа, причем $\varepsilon>0$.

118. При каких действительных значениях x выполняется неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3?$$

119. Доказать, что при всех положительных x и y и целых положительных m и n $(n \geqslant m)$ имеет место неравенство:

$$\sqrt[m]{x^m + y^m} \geqslant \sqrt[n]{x^n + y^n}.$$

120. Доказать неравенство

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}, \quad a > 0.$$

121. Доказать неравенство

$$\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}} > \frac{1}{4}$$

при условии, что числитель левой части неравенства содержит n знаков радикала, а знаменатель содержит $n-1$ знак.

122. Доказать, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1, \end{aligned}\right\}$$

справедливо неравенство

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant 1.$$

123. Доказать, что если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны и удовлетворяют соотношению

$$x_1x_2 \ldots x_n = 1,$$

то

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n.$$

4. Логарифмические и показательные уравнения, тождества и неравенства

Предварительные замечания

По определению логарифма числа N по основанию a имеем:

$$a^{\log_a N} = N. \tag{1}$$

В этой формуле N — любое положительное число, a — произвольное основание, причем $a > 0$, $a \neq 1$.

Ниже при решении ряда задач используется следующая формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b и обратно

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \tag{2}$$

(формула доказывается логарифмированием тождества (1) по основанию b). Из формулы (1) при $N = b$, в частности, следует:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{3}$$

124. Решить уравнение

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - \frac{2\log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \log_a x.$$

125. Решить уравнение

$$\log_x 2 \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2.$$

126. Решить уравнение

$$\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1).$$

127. Решить уравнение

$$\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1.$$

128. Показать, что уравнение

$$\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right)\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$$

имеет лишь один корень, удовлетворяющий неравенству $x > 1$, и найти этот корень.

129. Решить уравнение

$$\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0.$$

130. Каким условиям должны удовлетворять числа a и b для того, чтобы уравнение

$$1 + \log_b (2\lg a - x) \log_x b = \frac{2}{\log_b x}$$

имело хотя бы одно решение? Найти затем все решения этого уравнения.

131. Решить уравнение *)

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

132. Решить уравнение

$$\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3.$$

133. Решить уравнение

$$1 + \frac{\log_a(p-x)}{\log_a(x+q)} = \frac{2-\log_{p-q} 4}{\log_{p-q}(x+q)} \qquad (p > q > 0).$$

134. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}.$$

135. Решить уравнение

$$(0{,}4)^{\lg^2 x+1} = (6{,}25)^{2-\lg x^3}.$$

136. Решить уравнение

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg \lg n - 1) \log_x 10.$$

Сколько корней имеет уравнение при данном значении n?

137. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a + 1 = 0.$$

138. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) &= 1, \\ x^2 - y^2 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

139. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^a &= y^b, \\ \log_c \frac{x}{y} &= \frac{\log_c x}{\log_c y} \end{aligned}\right\}$$

$$(a \neq b, \quad ab \neq 0).$$

---

*) Здесь и ниже корни понимаются в том смысле, как это оговорено на стр. 17.

140 Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \log_5 x + 3^{\log_3 y} &= 7, \\ x^y &= 5^{12}. \end{aligned}\right\}$$

141. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} yx^{\log_y x} &= x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \log_y (y - 3x) &= 1. \end{aligned}\right\}$$

142. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a^x b^y &= ab, \\ 2\log_a x &= \log_{\frac{1}{b}} y \log_{\sqrt{a}} b. \end{aligned}\right\}$$

143. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3\left(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y\right) &= 10, \\ xy &= 81. \end{aligned}\right\}$$

144. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \log_{12} x \left(\frac{1}{\log_x 2} + \log_2 y\right) &= \log_2 x, \\ \log_2 x \log_3 (x + y) &= 3\log_3 x. \end{aligned}\right\}$$

145. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} & x\log_2 y \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y}\,(1 - \log_x 2), \\ & \log_{y^3} 2 \log_{\sqrt{2}} x = 1. \end{aligned}\right\}$$

146. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2. \end{aligned}\right\}$$

147. Решить систему уравнений.

$$\left.\begin{aligned} \log_{0,5}(y - x) + \log_2 \frac{1}{y} &= -2, \\ x^2 + y^2 &= 25. \end{aligned}\right\}$$

148. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

149. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y} &= y^{x-y}, \\ x^2y &= 1, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $x > 0$ и $y > 0$.

150. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a^{2x} + a^{2y} &= 2b, \\ a^{x+y} &= c \end{aligned}\right\} \quad (a > 0).$$

Каким условиям должны удовлетворять b и c, чтобы решение было возможно?

151. Найти решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^{x+y} &= y^n, \\ y^{x+y} &= x^{2n}y^n, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $x > 0$, $y > 0$ и $n > 0$.

152. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (3x+y)^{x-y} &= 9, \\ \sqrt[x-y]{324} &= 18x^2 + 12xy + 2y^2. \end{aligned}\right\}$$

153. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^y &= y^x, \\ x^p &= y^q, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $x > 0$, $y > 0$ и $pq > 0$.

154. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^y &= y^x, \\ p^x &= q^y, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что $x > 0$, $y > 0$, $p > 0$, $q > 0$.

155. Доказать, что

$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\log_{c-b}a,$$

если $a^2+b^2=c^2$ и $a>0$, $b>0$, $c>0$.

156. Упростить выражение

$$(\log_b a-\log_a b)^2+\left(\log_{b^{\frac{1}{2}}} a-\log_{a^2} b\right)^2+\ldots$$

$$\ldots+\left(\log_{b^{\frac{1}{2^n}}} a-\log_{a^{2^n}} b\right)^2.$$

157. Упростить выражение $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}}$, предполагая, что все логарифмы взяты по одному и тому же основанию b.

158. Дано: $\log_a b=A$, $\log_q b=B$ и $n>0$ целое. Вычислить $\log_c b$, где c равняется произведению n членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q.

159. Доказать, что если при некотором положительном $N\neq 1$ для трех положительных чисел a, b, c выполняется соотношение

$$\frac{\log_a N}{\log_c N}=\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N},$$

то b есть средняя пропорциональная между a и c и соотношение выполняется при любом положительном $N\neq 1$.

160. Доказать тождество

$$\log_a N\log_b N+\log_b N\log_c N+\log_c N\log_a N=$$

$$=\frac{\log_a N\log_b N\log_c N}{\log_{abc} N}.$$

161. Доказать тождество

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x}=1+\log_a b.$$

162. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} x+\log_3 x>1.$$

163. Решить неравенство

$$x^{\log_a x+1}>a^2x\quad(a>1).$$

164. Решить неравенство

$$\log_a x + \log_a (x+1) < \log_a (2x+6) \quad (a > 1).$$

165. Решить неравенство

$$\log_3 (x^2 - 5x + 6) < 0.$$

166. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 x - 1} < 1.$$

167. Решить неравенство

$$x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0.$$

168. При каких вещественных x и α имеет место неравенство

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leqslant 0?$$

169. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0.$$

5. Комбинаторика и бином Ньютона

Предварительные замечания

Число *размещений* из n элементов по m определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1). \qquad (1)$$

Число *перестановок* из n элементов определяется формулой

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n = n! \qquad (2)$$

Для числа *сочетаний* из n элементов по m справедлива формула

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (3)$$

Имеет место равенство

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Для целых положительных n и любых x и a справедливо разложение

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-2} a^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n; \qquad (4)$$

общий член данного разложения равен

$$T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}. \qquad (5)$$

Из разложения (4) следуют равенства

$$1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+1=2^n,$$
$$1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^n=0.$$

170. Найти m и n, зная, что

$$C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}:C_{n+1}^{m-1}=5:5:3.$$

171. Найти коэффициент при x^8 в разложении

$$(1+x^2-x^3)^9.$$

172. Найти коэффициент при x^m в разложении по степеням x выражения

$$(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\ldots+(1+x)^n.$$

Разобрать при этом случаи $m<k$, $m\geqslant k$.

173. В разложении $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена. Найти член, не содержащий x.

174. Найти слагаемое в разложении

$$\left(1+x+\frac{6}{x}\right)^{10},$$

не содержащее x.

175. При каком значении k член T_{k+1} разложения по формуле бинома Ньютона

$$(1+\sqrt{3})^{100}$$

будет одновременно больше предыдущего и больше последующего членов этого разложения?

176. Найти условие, при котором разложение $(1+a)^n$ (n — целое положительное число) по степеням $a\neq 0$ содержит два равных последовательных слагаемых. Могут ли в разложении содержаться три равных последовательных слагаемых?

177. Найти число различных не подобных между собой членов разложения

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)^3,$$

получающихся после возведения в степень.

178. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q=p_1p_2\ldots p_n$, включая 1 и q?

179. Показать, что если каждый коэффициент в разложении $x(1+x)^n$ разделить на показатель степени x, при которой этот коэффициент стоит, то сумма полученных частных будет равна

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

180. Доказать, что при целом $n>0$

$$C_n^1x(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\ldots+nC_n^nx^n=nx.$$

181. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в первой и во второй пачке было по 2 туза?

182. Сколько можно составить телефонных номеров из пяти цифр так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?

183. Даны $2n$ элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения их на пары, причем разбиения, отличающиеся только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько существует таких различных разбиений?

184. Сколько можно сделать из n элементов перестановок, в которых два элемента a и b не стоят рядом?

185. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы: 1) ровно два из них оказались выигрышными; 2) по крайней мере, два из них оказались выигрышными. Всего в урне 50 билетов.

186. На одной из двух параллельных прямых выбрано m точек, на другой — n точек. Каждая из m точек на первой прямой соединена прямой линией с каждой из n точек на второй прямой. Найти, сколько раз пересекаются все отрезки, соединяющие точки, если известно, что нет ни одной точки, в которой пересекались бы три и более отрезков одновременно.

187. n параллельных прямых плоскости пересекаются серией из m параллельных прямых. Сколько параллелограммов можно выделить в образовавшейся сетке?

188. Некоторый алфавит состоит из шести букв, которые для передачи по телеграфу кодированы так:

·; —; · ·; — —; · —; — ·.

При передаче одного слова не сделали промежутков, отделяющих букву от буквы, так что получилась сплошная цепочка точек и тире, содержащая 12 знаков. Сколькими способами можно прочитать переданное слово?

6. Составление уравнений

189. При перемножении чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

190. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a *км* от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго велосипедиста, пройдя k-ю часть расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

191. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении. Одна машина идет со скоростью 50 *км/час*, другая — 40 *км/час*. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1,5 часа позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

192. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в B, велосипедист же повернул назад и тоже поехал в B. Пешеход, вышедший из A, пришел в B на t часов позже велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если известно, что скорость пешехода в k раз меньше скорости велосипедиста?

193. Почтальон, идя безостановочно из пункта A через пункт B в пункт C, проходил путь от A до B со скоростью 3,5 *км/час* и от B до C со скоростью 4 *км/час*. Чтобы успеть за такое же время вернуться из C в A, идя по той же дороге, он должен был проходить по 3,75 *км* в час в течение всего пути. Однако, дойдя на обратном пути с указанной скоростью до B, он задержался в этом пункте на 14 минут и, чтобы успеть в назначенное время вернуться в A, должен был от B до A проходить уже по 4 *км* в час. Найти расстояние между A и B и между B и C.

194. Дорога от A до B длиной 11,5 *км* идет сначала в гору, потом по ровному месту и затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 часа 54 минуты, а на обратную дорогу затратил 3 часа 6 минут. Скорость ходьбы: в гору 3 *км/час*, по ровному месту 4 *км/час*, под гору 5 *км/час*. На каком протяжении дорога идет по ровному месту?

195. Для испытания мотоциклов разных систем два мотоциклиста выехали одновременно из A в B и из B в A. Каждый ехал с постоянной скоростью и, приехав в конечный пункт, тут же поворачивал обратно. Первый раз они встретились в p *км* от B, второй раз — в q *км* от A через t часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорости обоих мотоциклов.

196. Самолет летел из A в B по прямой. Через некоторое время вследствие встречного ветра он уменьшил скорость до v *км/час*, в силу чего опоздал на t_1 минут. Во время второго рейса самолет по той же причине уменьшил свою скорость до той же величины, но на d *км* дальше от A, чем в первый рейс, и опоздал на t_2 минут. Найти первоначальную скорость самолета.

197. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m *кГ* и n *кГ*, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

198. Имеются два куска сплава серебра с медью. Один из них содержит $p^0/_0$ меди, другой — $q^0/_0$ меди. В каком отношении нужно брать сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий $r\%$ меди? При каких соотношениях между p, q, r задача возможна и какой максимальный вес нового сплава можно получить, если первый кусок весил P *Г*, второй — Q *Г*.

199. Рабочие A и B работали одинаковое число дней. Если бы A работал на один день меньше, а B — на 7 дней меньше, то A заработал бы 72 руб., а B — 64 руб. 80 коп. Если бы, наоборот, A работал на 7 дней меньше, а B — на один день меньше, то B заработал бы на 32 руб. 40 коп. больше A. Сколько заработал каждый в действительности?

200. По окружности в противоположных направлениях движутся два тела: первое равномерно с линейной скоростью v, а второе равноускоренно с линейным ускорением a. В начальный момент времени оба тела находились в одной точке A и скорость второго была равна нулю. Через какое время произойдет первая встреча этих тел, если вторая встреча будет снова в точке A?

201. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна через один первый кран. После этого оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытых вместе, наполняют бассейн за 3 часа 36 минут.

202. Цилиндрическая трубка с поршнем погружена в резервуар с водой; между поршнем и водой находится столб воздуха в h *м* при атмосферном давлении. Затем поршень поднимают на b *м* над уровнем воды в резервуаре. Вычислить высоту воды в трубке, зная, что высота столба жидкости в водяном барометре при атмосферном давлении равна c *м*.

203. Цилиндрическая трубка, в которой ходит поршень, погружена в чашку со ртутью. Ртуть в трубке стоит на 12 *см* выше ее уровня в чашке, а высота столбика воздуха в трубке над ртутью (до поршня) $29\frac{3}{4}$ *см*. Поршень опускают на 6 *см*. Какова будет в таком случае высота столбика ртути, если наружное давление воздуха эквивалентно 76 *см* ртутного столба?

204. Часы показывают в некоторый момент на 2 минуты меньше, чем следует, хотя и идут вперед. Если бы они показывали на 3 минуты меньше, чем следует, но уходили бы в сутки вперед на $\frac{1}{2}$ минуты больше, чем уходят, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы?

205. Два вкладчика положили в сберкассу одинаковые суммы. Первый из них взял вклад по истечении m месяцев и получил p руб., а второй, взяв вклад по истечении n месяцев, получил q руб. Сколько каждый из них положил в сберкассу и сколько процентов выплачивает сберкасса?

206. По окружности радиуса R равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный круг на t *сек* быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами точек равно T. Определить скорости этих точек.

207. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$-ю часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на p процентов. Определить исходное процентное содержание соли.

208. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 *л* каждый, содержится всего 30 *л* спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 *л* новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 *л* спирта меньше, чем в первом?

209. Трое путешественников A, B и C переправляются через водохранилище шириной s *км*: A — вплавь со скоростью v *км/час*, а B и C пользуются моторной лодкой, скорость которой v_1 *км/час*. Через некоторое время после начала переправы C решает оставшийся участок пути преодолеть вплавь (он плывет с той же скоростью, что и A). B тем временем поворачивает назад, чтобы взять с собой A; A садится в лодку и продолжает путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить продолжительность переправы.

210. Поезд вышел со станции A по направлению к B в 13.00. В 19.00 он вынужден был остановиться из-за снежного заноса. Через 2 часа путь удалось расчистить, и, чтобы наверстать потерянное время, машинист повел поезд на остальном пути со скоростью, превышающей скорость поезда до остановки на 20%. В результате поезд пришел в B с опозданием лишь на 1 час. На следующий день поезд, шедший из A в B по тому же расписанию, попал в занос на 150 *км* дальше от A, чем первый поезд. Простояв 2 часа, он тоже пошел со скоростью на 20% выше прежней, но смог наверстать лишь полчаса и опоздал в B на 1 час 30 минут. Найти расстояние между A и B.

211. Пристань A находится на расстоянии a *км* вниз по течению от пристани B. Моторная лодка совершает рейс от A до B и обратно (не задерживаясь в B) за T часов. Найти скорость лодки в стоячей воде и скорость течения, если известно, что в один из рейсов при возвращении из B

в A моторная лодка потерпела аварию на расстоянии b *км* от A, задержавшую лодку на T_0 часов и уменьшившую в дальнейшем ее скорость вдвое, в результате чего путь от B к A был пройден за такое же время, как и путь из A в B.

212. Бак объемом 425 $м^3$ наполнился водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 часов дольше второго. Если бы первый кран был открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы вдвое меньше воды, чем из второго; если открыть оба крана одновременно, то бак наполнится через 17 часов.

Учитывая все указанные условия, определить, сколько времени был открыт второй кран.

213. По графику поезд должен проходить перегон AB в 20 *км* с постоянной скоростью. Первый раз поезд прошел полпути с этой скоростью и остановился на 3 минуты; чтобы во-время прийти в B, ему пришлось остальные полпути идти на 10 *км* в час быстрее. Второй раз поезд застрял на полпути уже на 5 минут. С какой скоростью он должен был идти оставшуюся часть пути, чтобы прибыть в B по расписанию?

214. Два самолета вылетают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии a *км* от середины AB. Если бы первый самолет вылетел на b часов позже второго, то они встретились бы на середине AB. Если же, наоборот, второй самолет вылетел бы на b часов позже первого, то они встретились бы на четверти пути от B. Найти расстояние AB и скорости самолетов.

215. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

216. Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух мест, расстояние между которыми равно 20 *м*. Одно из них, находящееся позади, движется равноускоренно и проходит в первую секунду 25 *м*, а в следующую секунду на $\frac{1}{3}$ *м* более; другое тело, двигаясь равнозамедленно, проходит в первую секунду 30 *м*, а в следующую на $\frac{1}{2}$ *м* менее. Через сколько секунд первое тело нагонит второе?

217. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 *км*, а затем поднимается против течения на расстояние 6 *км*. Скорость течения реки равна 1 *км/час*. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

218. Вместимости трех кубических сосудов A, B и C относятся как $1:8:27$, а объемы налитой в них воды — как $1:2:3$. После переливания из A в B и из B в C получили во всех трех сосудах слой воды одинаковой глубины. Затем перелили из C в B $128\frac{4}{7}$ *л*, а после этого из B в A столько, что глубина воды в A стала вдвое больше, чем в B. При этом оказалось, что в A имеется на 100 *л* воды меньше, чем было первоначально. Сколько воды было вначале в каждом сосуде?

219. Найти четырехзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

220. По окружности, длина которой равна l *м*, двигаются две точки со скоростями v и $w < v$. Через сколько времени от начала движения будут происходить последовательные встречи точек, если эти точки двигаются по одному и тому же направлению и первая начала двигаться на t секунд раньше второй, отставая в начальный момент на расстояние a *м* от второй по ходу движения ($a < l$).

221. Сплав весом P *кГ* из двух металлов теряет в воде A *кГ*. Кусок первого из двух металлов, составляющих сплав, весом P *кГ* теряет в воде B *кГ*, а второго — C *кГ*. Найти вес составляющих сплав металлов и исследовать возможность решения задачи в зависимости от величин P, A, B, C.

222. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. В устье реки их взял на буксир пароход и через $17\frac{1}{8}$ суток после выхода плотов из A доставил их по озеру в пункт B. Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до B, если известно, что пароход тратил на рейс (без буксировки) от A до B 61 час и от B до A — 79 часов и что его скорость во время буксировки уменьшается вдвое?

223. На участке реки от A до B течение так слабо, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение уже достаточно сильное. Лодка покрывает расстояние вниз по течению от A до C за 6 часов, а от C до A, вверх по течению, за 7 часов. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 часа. Сколько времени в этом случае понадобилось бы на то, чтобы подняться вверх от C до A?

224. Сосуд содержит $p\%$-й раствор кислоты. Из него отлили a *л* и добавили то же количество $q\%$-го раствора кислоты ($q < p$). Затем, после перемешивания, эту операцию повторили еще $k-1$ раз, после чего получился раствор крепостью $r\%$. Найти объем сосуда.

225. Вклад в A рублей положен в сберегательную кассу из $p\%$ годовых. В конце каждого года вкладчик берет B рублей. Через сколько лет после взятия соответствующей суммы остаток будет втрое больше первоначального вклада? При каких условиях задача имеет решение?

226. На лесной делянке ежегодный прирост древесины равен $p\%$. Каждую зиму спиливается некоторое количество x древесины. Каково должно быть x для того, чтобы через n лет количество древесины на участке возросло в q раз, если начальное количество древесины равно a?

227. Первый из n одинаковых цилиндрических сосудов налит доверху спиртом, а остальные — до половины смесью спирта с водой, причем концентрация спирта в каждом сосуде в k раз меньше, чем в предыдущем. Содержимым первого сосуда долили доверху второй, затем содержимым второго — третий и т. д. до последнего. Найти полученную концентрацию спирта в последнем сосуде.

228. Рассматривается дробь (отношение двух целых чисел), знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем $\frac{1}{3}$, если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь.

7. Разные задачи

Алгебраические преобразования

229. Подсчитать сумму

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}.$$

230. Упростить выражение

$$(x+a)(x^2+a^2)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}).$$

231. Упростить выражение

$$(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\ldots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}).$$

232. Даны два ряда чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n;$$

полагая $S_k=b_1+b_2+\ldots+b_k$, показать, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=(a_1-a_2)S_1+(a_2-a_3)S_2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{n-1}-a_n)S_{n-1}+a_nS_n.$$

233. Показать, что из равенства

$$a^2+b^2+c^2=bc+ac+ab,$$

где a, b, c — вещественные числа, следует, что $a=b=c$.

234. Показать, что если $a^3+b^3+c^3=3abc$, то или $a^2+b^2+c^2=bc+ca+ab$, или $a+b+c=0$.

235. Показать, что если

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=p^2,$$
$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=q^2,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=pq$$

и $pq\neq 0$, то $a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ \ldots,\ a_n=\lambda b_n$, где $\lambda=\frac{p}{q}$. (Все величины предполагаются вещественными.)

236. Известно, что последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет при всяком n соотношению

$$a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1.$$

Выразить a_n через a_1, a_2 и n.

237. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ при $n>2$ удовлетворяет соотношению

$$a_n=(\alpha+\beta)\,a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2},$$

где α, β $(\alpha\neq\beta)$ — заданные числа. Выразить a_n через α, β, a_1, a_2.

Теорема Безу, свойства корней многочленов

238. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ таковы, что $x_1^2+x_2^2=1{,}75$. Определить a.

239. Дано уравнение $x^2+px+q=0$. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы

$$y_1=x_1^2+x_2^2,\quad y_2=x_1^3+x_2^3.$$

240. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0\qquad (ac\neq 0).$$

Не решая уравнения, выразить через его коэффициенты величины:

$$1)\ \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2};\qquad 2)\ x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4.$$

241. Каким условиям должны удовлетворять вещественные коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, чтобы выражение

$$(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2$$

было квадратом многочлена первой степени относительно x с вещественными коэффициентами?

242. Доказать, что корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами отрицательны или имеют отрицательную вещественную часть тогда и только тогда, когда $p > 0$, $q > 0$.

243. Доказать, что если оба корня уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

положительны, то корни уравнения $qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0$ положительны при всех $r \geqslant 0$. Выяснить, справедливо ли это утверждение при $r < 0$.

244. Найти все действительные значения p, при которых корни уравнения

$$(p - 3)x^2 - 2px + 6p = 0$$

вещественны и положительны.

245. При любом положительном λ все корни уравнения

$$ax^2 + bx + c + \lambda = 0$$

вещественны и положительны. Доказать, что в этом случае $a = 0$ (коэффициенты a, b и c предполагаются вещественными).

246. Доказать, что оба корня уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ удовлетворяют уравнению

$$x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = 0,$$

где m, n и p — любые целые числа.

247. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a(x^2 + y^2) + x + y - \lambda = 0, \\ x - y + \lambda = 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет вещественные решения при любом λ. Доказать, что $a = 0$.

248. Доказать, что при любых вещественных значениях a, p, q уравнение

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a^2}$$

имеет вещественные корни.

249. Доказать, что квадратное уравнение

$$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$$

не может иметь вещественных корней, если $a+b>c$ и $|a-b|<c$.

250. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3-2x^2+x+1=0.$$

Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа

$$y_1=x_2x_3, \quad y_2=x_3x_1, \quad y_3=x_1x_2.$$

251. Известно, что x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3-x^2-1=0.$$

Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа

$$y_1=x_2+x_3, \quad y_2=x_3+x_1, \quad y_3=x_1+x_2.$$

252. Выразить свободный член c кубического уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

через коэффициенты a и b, зная, что корни уравнения образуют арифметическую прогрессию.

253. Пусть известно, что все корни некоторого уравнения

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

положительны. Какому дополнительному условию должны удовлетворять его коэффициенты p, q, r для того, чтобы из отрезков, длины которых равны этим корням, можно было составить треугольник?

Указание. Рассмотреть выражение

$$(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2).$$

254. Уравнения

$$x^3+p_1x+q_1=0,$$
$$x^3+p_2x+q_2=0$$

$(p_1\neq p_2,\ q_1\neq q_2)$ имеют общий корень. Найти этот корень, а также остальные корни обоих уравнений.

255. Найти все значения λ, при которых два уравнения

$$\lambda x^3-x^2-x-(\lambda+1)=0,$$
$$\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$$

имеют общий корень, и найти этот корень.

256. Все корни многочлена

$$P(x)=x^3+px+q$$

с действительными коэффициентами и $q\neq 0$ вещественны. Доказать, что $p<0$.

257. Доказать, что уравнение

$$x^3+ax^2-b=0,$$

где a и b вещественны и $b>0$, имеет один и только один положительный корень.

258. Найти все вещественные значения a и b, при которых уравнения

$$x^3+ax^2+18=0,$$
$$x^3+bx\ \ +12=0$$

имеют два общих корня, и определить эти корни.

259. Доказать, что

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

260. Пусть a, b, c — попарно не равные между собой числа.

Доказать, что выражение

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

не равно нулю.

261. Разложить на множители выражение

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$$

262. Доказать, что если три вещественных числа a, b, c связаны соотношением

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то обязательно какие-либо два из этих чисел равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

263. Выяснить, при каких комплексных значениях p и q двучлен x^4-1 делится на квадратный трехчлен x^2+px+q.

264. При каких значениях a и n многочлен $x^n-ax^{n-1}+$ $+ax-1$ делится на $(x-1)^2$?

265. Многочлен $p(x)$ дает при делении на $x-a$ остаток A, при делении на $x-b$ — остаток B, при делении на $x-c$ — остаток C. Найти многочлен, получающийся в остатке при делении $p(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$, предполагая, что среди чисел a, b и c нет равных.

Метод математической индукции

В предлагаемых ниже задачах полезно воспользоваться методом полной математической индукции. Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для всякого натурального n, достаточно доказать, что: а) это утверждение справедливо при $n=1$; б) если это утверждение справедливо для какого-нибудь натурального числа n, то оно справедливо также и для следующего числа $n+1$.

266. Доказать, что

$$1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

267. Доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

268. Доказать, что

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

269. Доказать формулу Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

270. Доказать, что при любом целом положительном n величина $a_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, где $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, есть число целое, положительное.

271. Доказать, что если действительные числа $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяют условию $-1 < a_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то при всяком n имеет место неравенство

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

272. Обобщенная n-я степень любого числа a, обозначаемая символом $(a)_n$, определяется для целых неотрицательных n так: если $n = 0$, то $(a)_n = 1$, если $n > 0$, то $(a)_n = a(a-1)\ldots(a-n+1)$. Доказать, что для обобщенной степени суммы двух чисел справедлива формула бинома Ньютона

$$(a+b)_n = C_n^0 (a)_0 (b)_n + C_n^1 (a)_1 (b)_{n-1} + \ldots + C_n^n (a)_n (b)_0.$$

Наибольшие и наименьшие значения

Для того чтобы найти *наименьшее* значение квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

в случае $a > 0$, представляют трехчлен в виде

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{2}$$

Так как первое слагаемое в правой части неотрицательно при любом x, а второе от x вообще не зависит, то трехчлен принимает наименьшее значение при условии, что первое слагаемое равно нулю. Таким образом, наименьшее значение трехчлена равно

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \tag{3}$$

Оно достигается при

$$x_0 = -\frac{b}{2a}. \tag{4}$$

Аналогично исследуется вопрос о *наибольшем* значении трехчлена в случае $a < 0$.

273. Две прямые железные дороги AA' и BB' перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C, причем расстояния AC и BC равны соответственно a и b. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно v_1 и v_2. Через сколько времени после отправления расстояние между поездами будет наименьшим? Чему равно это наименьшее расстояние?

274. Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали, идущей с запада на восток. Пункт B находится восточнее A на 9 *км*. Из пункта A на восток выходит автомашина, двигающаяся равномерно со скоростью 40 *км/час*. Одновременно из B в том же направлении с постоянным ускорением 32 *км/час*^{2} выходит мотоцикл. Определить наибольшее расстояние между автомашиной и мотоциклом в течении первых двух часов движения.

Указание. Полезно начертить график зависимости от времени расстояния между автомашиной и мотоциклом.

275. Найти наибольшее значение выражения

$$\log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x},$$

полагая, что x изменяется между 1 и 64.

276. Найти наибольшее значение функции

$$y = \frac{x}{ax^2 + b} \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

277. Найти наименьшее значение выражения

$$\frac{1 + x^2}{1 + x}$$

при $x \geqslant 0$.

278. Найти наименьшее значение функции

$$\varphi(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|,$$

где $a < b < c < d$ — фиксированные вещественные числа, а x принимает произвольные вещественные значения.

Указание. Рассуждения удобно проводить, отметив числа a, b, c и d на числовой оси.

279. Найти все значения z, удовлетворяющие равенству
$$z^2+|z|=0$$
($|z|$ — модуль комплексного числа z).

280. Найти комплексное число z, удовлетворяющее равенствам
$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3} \text{ и } \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

281. Вычислить произведение
$$\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right].$$

282. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию
$$|z-25i|\leqslant 15,$$
найти число, имеющее наименьший аргумент. Сделать чертеж.

283. Какому условию должно удовлетворять комплексное число $a+bi$ для того, чтобы его можно было представить в виде
$$a+bi=\frac{1-ix}{1+ix},$$
где x — число вещественное?

284. Какое наибольшее значение может принимать модуль комплексного числа z, если
$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1?$$

---

285. Через точку A проведено n лучей под углами $\frac{2\pi}{n}$. На одном из них на расстоянии d от A взята точка B, из нее опущен перпендикуляр на соседний луч, из основания этого перпендикуляра снова опущен перпендикуляр на следующий луч и т. д. до бесконечности. Найти длину L получаемой таким образом бесконечно завивающейся вокруг A ломаной, а также выяснить, как будет изменяться L при увеличении числа n, в частности при неограниченном его увеличении.

286. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

287. Доказать, что если натуральное число $p = abc$ (a, b, c — цифры соответствующих разрядов) делится на 37, то и числа $q = bca$ и $r = cab$ также делятся на 37.

288. Показать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

289. Доказать, что сумма

$$S_n = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$$

при любом целом положительном n делится на 3.

290. 120 одинаковых шаров плотно уложены в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

291. В ящик вложили k ящиков. В каждый из этих k ящиков либо опять вложили k ящиков, либо не вложили ни одного и т. д. Найти число пустых ящиков, если наполненных оказалось m.

ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛАНИМЕТРИЯ

Предварительные замечания

Укажем на следующие соотношения между элементами треугольника со сторонами a, b, c и соответственно противолежащими углами A, B, C.

1. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанного круга.

2. Теорема косинусов:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Для вычисления площади S треугольника наряду с формулой

$$S=\frac{1}{2}ah_a,$$

где a — одна из сторон треугольника, а h_a — опущенная на нее высота, ниже используются следующие формулы:

формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр;

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C;\quad S=rp,$$

где r — радиус круга вписанного в треугольник, а p — полупериметр.

1. Задачи на вычисление

292. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B. По данным сторонам b и c найти a.

293. Катеты прямоугольного треугольника равны b и c. Найти длину биссектрисы прямого угла.

294. Найти третью сторону треугольника, если даны две стороны его a и b и известно, что медианы, соответствующие этим сторонам, пересекаются под прямым углом. При каких условиях такой треугольник существует?

295. Угол при вершине треугольника, боковые стороны которого равны a и b $(a < b)$, разделен на три равные части прямыми, отрезки которых внутри треугольника относятся как $m:n\,(m < n)$. Найти длины этих отрезков.

296. Данный треугольник ABC пересечь прямой DE, параллельной BC, так, чтобы площадь треугольника BDE равнялась заданной величине k^2. При каком соотношении между k^2 и площадью треугольника ABC задача разрешима и сколько она имеет решений?

297. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные его сторонам. Эти прямые разделяют площадь треугольника на шесть частей, три из которых суть треугольники с площадями, равными S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

298. Даны стороны b и c треугольника. Найти третью сторону x, зная, что она равна опущенной на нее высоте. При каком соотношении между b и c треугольник существует?

299. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, основания которых соединены между собой. Определить отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ к площади треугольника ABC, если углы треугольника ABC известны.

300. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис углов B и C проведена параллельно BC прямая MN до пересечения в точках M и N соответственно со сторонами AB и AC. Найти зависимость между отрезками MN, BM, CN.

Разобрать случаи:

1) обе биссектрисы внутренние;

2) обе биссектрисы внешние;

3) одна из биссектрис внутренняя, другая внешняя.

Когда M и N совпадут?

301. Внутри правильного треугольника ABC взята произвольная точка P, из которой опущены перпендикуляры PD, PE и PF соответственно на BC, CA и AB. Вычислить

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}.$$

302. Найти отношение площади треугольника ABC к площади другого треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

303. В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Найти радиус этого полукруга.

304. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанного около него круга относится к радиусу вписанного круга как 5:2.

305. Около данного прямоугольника описать новый прямоугольник, который имел бы заданную площадь m^2. При каком m задача разрешима?

306. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ найти такую точку E, из которой стороны AD и DC были бы видны под равными углами. При каком соотношении между сторонами прямоугольника задача разрешима?

307. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

308. Даны верхнее и нижнее основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

309. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными линиями?

310. Точки P, Q, R, S суть, соответственно, середины сторон AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми AQ, BR, CS, DP, зная, что площадь параллелограмма равна a^2.

311. Зная хорды двух дуг круга радиуса R, найти хорду дуги, равной сумме этих дуг или их разности.

312. Расстояние между центрами двух пересекающихся кругов радиусов R и r равно d. Найти площадь их общей части.

313. Три окружности радиусов r, r_1 и R касаются попарно внешним образом. Найти длину хорды, отсекаемой третьей окружностью от общей внутренней касательной первых двух окружностей.

314. Две окружности радиусов R и r $(R > r)$ имеют внутреннее касание. Найти радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и их общего диаметра.

315. Круга радиуса r касаются внешним образом три одинаковых окружности, касающиеся, кроме того, попарно между собой. Найти площади трех криволинейных треугольников, образованных указанными окружностями.

316. На отрезке длины $2a+2b$ и его частях длины $2a$ и $2b$ как на диаметрах построены полуокружности, лежащие по одну сторону от отрезка. Найти радиус окружности, касающейся трех построенных полуокружностей.

317. Даны две параллельные прямые и точка A между ними. Найти стороны прямоугольного треугольника, вершина прямого угла которого лежит в точке A, а вершины острых углов — на заданных параллельных прямых, зная, что площадь треугольника равна заданной величине k^2.

318. Внутрь правильного n-угольника со стороной a вписано n равных кругов так, что каждый круг касается двух смежных сторон многоугольника и двух других кругов. Найти площадь «звездочки», образующейся в центре многоугольника.

319. Через одну из точек C дуги AB окружности проведены две произвольные прямые, пересекающие хорду AB в точках D и E, а окружность в точках F и G. При каком положении точки C на AB вокруг четырехугольника $DEGF$ можно описать круг?

320. Внутрь острого угла вписываются круги, касающиеся друг друга. Показать, что радиусы этих кругов образуют геометрическую прогрессию. Найти зависимость между знаменателем прогрессии и величиной острого угла.

321. В точке A плоскости P расположен источник света. Над плоскостью помещено полусферическое зеркало радиуса 1, обращенное внутренней зеркальной поверхностью к плоскости, причем так, что ось симметрии зеркала перпендикулярна к плоскости P в точке A. Зная, что наименьший угол между лучами, отраженными зеркалом и плоскостью P, равен $15°$, определить расстояние от зеркала до плоскости и радиус освещенного на плоскости P круга.

322. Центры четырех кругов радиуса r расположены в вершинах квадрата со стороной a. Найти площадь S общей части всех четырех кругов, заключенной внутри квадрата.

323. Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Найти площадь трапеции, если площади треугольников, примыкающих к основаниям, равны S_1 и S_2.

324. Выразить диагонали вписанного четырехугольника через его стороны. Получить отсюда теорему Птолемея: произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

3. Задачи на построение

325. Даны две окружности разных радиусов, лежащие одна вне другой, и точка A на одной из них. Провести третью окружность, касающуюся двух данных и проходящую через точку A. Разобрать различные возможные случаи положения точки A на заданной окружности.

326. Даны окружность, прямая и точка A на прямой. Построить новую окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A. Разобрать подробно, в каких случаях сколько решений имеет задача.

327. Даны прямая, окружность и точка A на окружности. Построить новую окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A. Разобрать подробно, в каких случаях сколько решений имеет задача.

328. Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе c и высоте h, опущенной на гипотенузу. Найти длины катетов и выяснить, при каком соотношении между h и c задача разрешима.

329. Даны длины сторон AB, BC, CD и DA некоторого плоского четырехугольника. Построить этот четырехугольник, если известно, что диагональ AC делит угол A пополам.

330. Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из одной вершины, с окружностью описанного круга.

331. Описать из вершин данного треугольника, как из центров, окружности так, чтобы они попарно касались друг друга. Разобрать случаи как внешнего, так и внутреннего касания.

332. Вписать в данную окружность треугольник ABC, если известны вершина A, направление высоты h_A и точка пересечения высоты h_B с окружностью.

333. Пересечь трапецию прямой, параллельной основанию, так, чтобы ее отрезок внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

334. Построить квадрат по заданной вершине и двум точкам, которые лежат на двух сторонах или их продолжениях, не проходящих через эту вершину.

335. Через точку M, лежащую на основании AC треугольника ABC, провести прямую MN, отрезающую от треугольника такую часть, площадь которой равна $\frac{1}{k}$ площади всего треугольника. Сколько решений имеет задача?

336. В данный треугольник вписать с помощью циркуля и линейки прямоугольник, имеющий заданную диагональ.

337. Около данной окружности описать треугольник с данным углом и данной стороной, противолежащей этому углу. Найти условие разрешимости этой задачи.

338. Дана прямая CD и две точки A и B, не лежащие на ней. Найти на данной прямой точку M такую, что

$$\angle AMC = 2\angle BMD.$$

3. Задачи на доказательство

339. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

340. Доказать, что в любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны треугольника BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A.

341. Доказать, что сумма расстояний какой-либо точки, взятой внутри правильного треугольника, до сторон этого треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки.

342. Доказать, что во всяком треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

343. Доказать, что если P, Q, R суть, соответственно, точки пересечения сторон BC, CA, AB (или их продолжений) треугольника ABC с некоторой прямой, то

$$\frac{PB}{PC}\frac{QC}{QA}\frac{RA}{RB} = 1.$$

344. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 3 раза больше катета AB. Точками K и F катет AC разделен на три равные части. Доказать, что

$$\angle AKB + \angle AFB + \angle ACB = \frac{\pi}{2}.$$

345. Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.

346. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°. Доказать, что $a^3+b^3=3ab^2$.

347. Доказать, что угол треугольника будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противоположная сторона меньше, равна или больше удвоенной соответствующей медианы.

348. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен $20°$. На боковых сторонах AB и BC взяты, соответственно, точки Q и P так, что $\angle ACQ = 60°$, а $\angle CAP = 50°$. Доказать, что $\angle APQ = 80°$.

349. Доказать, что если между сторонами a, b, c треугольника существует зависимость $a^2 = b^2 + bc$, то углы A и B, противолежащие сторонам a и b, удовлетворяют равенству $\angle A = 2\angle B$.

350. Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг вершины O на $90°$, причем вершина A перешла в A_1, а вершина B — в B_1. Доказать, что в треугольнике OAB_1 медиана стороны AB_1 является высотой для $\triangle OA_1B$ (аналогично медиана стороны A_1B в $\triangle OA_1B$ является высотой для $\triangle OAB_1$).

351. Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на отрезки их от ортоцентра до вершины равна полусумме квадратов сторон. Обобщить это предложение на случай тупоугольного треугольника.

352. Пусть длины a, b, c сторон треугольника удовлетворяют неравенствам $a < b < c$, образуя арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac = 6Rr$, где R — радиус описанного, а r — радиус вписанного в треугольник круга.

353. Доказать, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания. Выяснить смысл указанного равенства в случае равнобедренного треугольника.

354. На сторонах AB и AC треугольника ABC отложено в противоположных направлениях два равных отрезка $BD = CE$. Доказать, что отрезок DE делится стороной BC в отношении, обратном отношению сторон AB и AC.

355. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

356. Доказать, что прямая, симметричная с медианой относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

357. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q, R так, что три прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке. Доказать, что

$$AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA.$$

358. Доказать, что в любом треугольнике радиус описанного круга R и радиус вписанного круга r связаны с расстоянием l между центрами этих кругов соотношением

$$l^2 = R^2 - 2Rr.$$

359. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной не превосходит $\frac{1}{2}$.

360. Доказать, что для любого прямоугольного треугольника справедливо неравенство

$$0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5,$$

где r — радиус вписанного круга, h — высота, опущенная на гипотенузу.

361. Доказать, что в любом остроугольном треугольнике $k_a + k_b + k_c = r + R$, где k_a, k_b, k_c — перпендикуляры, опущенные из центра описанной окружности на соответствующие стороны; r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

Указание. Можно выразить левую и правую части искомого равенства через стороны и углы треугольника.

362. Вершины A, B и C треугольника соединены с точками A_1, B_1, C_1, расположенными произвольно на противоположных сторонах (но не в вершинах). Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

363. Через произвольную точку O, взятую внутри треугольника ABC, проведены прямые DE, FK, MN, параллельные, соответственно, AB, AC, BC, причем F и M лежат на AB, E и K — на BC, N и D — на AC. Доказать, что

$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=1.$$

364. В треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на наибольшей стороне треугольника. Доказать неравенство $\sqrt{2}r < x < 2r$, где x — длина стороны квадрата, r — радиус круга, вписанного в данный треугольник.

365. Доказать, что середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков высот, заключенных между каждой из вершин и точкой пересечения высот, представляют собой девять точек, лежащих на одной окружности. Показать, что центр этой окружности лежит на середине отрезка, соединяющего точку пересечения высот данного треугольника с центром описанного круга, а радиус равен половине радиуса описанного круга.

366. В треугольнике из основания каждой высоты опущены перпендикуляры на две другие стороны. Доказать, что: 1) основания этих перпендикуляров являются вершинами шестиугольника, три из сторон которого параллельны сторонам треугольника; 2) вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

367. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

368. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

369. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены симметрично друг другу относительно центра их общего вписанного круга радиуса r. Доказать, что произведение площадей ABC, $A_1B_1C_1$ и шести треугольников, получившихся при пересечении сторон $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, равно r^{16}.

370. Доказать, что разность между суммой квадратов расстояний произвольной точки M плоскости до двух противоположных вершин параллелограмма $ABCD$ и суммой квадратов расстояний от той же точки до двух других вершин есть величина постоянная.

371. На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1, не перекрывающиеся с $\triangle ABC$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

372. На сторонах AB, AC, BC треугольника ABC, как на основаниях, построены три равнобедренных подобных треугольника ABP, ACQ, BCR, два первых вне данного треугольника, третий — по ту же сторону, что и данный треугольник. Доказать, что $APRQ$ — параллелограмм (или что точки A, P, R, Q лежат на одной прямой).

373. Некоторая точка O плоскости соединена с вершинами параллелограмма $ABCD$. Доказать, что площадь треугольника AOC равна сумме или разности площадей двух смежных треугольников, образованных двумя из прямых OA, OB, OC, OD и соответствующей стороной параллелограмма. Разобрать случаи, когда точка O находится внутри и вне параллелограмма.

374. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании AD равна $\frac{\pi}{2}$. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

375. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.

376. Доказать, что прямая, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, пройдет через точку пересечения диагоналей.

377. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник есть трапеция.

378. Доказать, что если диагонали двух четырехугольников соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырехугольники равновелики.

379. Доказать, что по крайней мере одно из оснований перпендикуляров, опущенных из произвольно взятой внутренней точки выпуклого многоугольника на его стороны, лежит на самой стороне, а не на ее продолжении.

380. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого равны разности соседних сторон параллелограмма.

381. Доказать, что прямые, соединяющие последовательно центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к нему извне, образуют также квадрат.

382. Доказать, что если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на окружности.

383. К окружности проведены две касательные. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из произвольной точки окружности на хорду, соединяющую точки касания, есть среднее пропорциональное между длинами перпендикуляров, опущенных из той же точки на касательные.

384. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.

385. Три равных окружности пересекаются в одной точке. Вторая точка пересечения каких-либо двух из этих окружностей и центр третьей определяют проходящую через них прямую. Доказать, что получаемые три прямые пересекаются в одной точке.

386. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Отрезок AB является диаметром большей окружности. Хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Доказать, что AC является биссектрисой треугольника ABK.

387. В сектор круга радиуса R вписана окружность радиуса r. Хорда сектора равна $2a$. Доказать, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{a}.$$

388. К окружности проведены две касательные, которые пересекают в точках A и B прямую, проходящую через центр окружности, и образуют с этой прямой равные углы. Доказать, что любая (подвижная) касательная отсекает на данных (неподвижных) касательных отрезки AC и BD, произведение которых постоянно.

389. Доказать, что сумма квадратов длин двух взаимно перпендикулярных пересекающихся хорд окружности больше квадрата ее диаметра, а сумма квадратов отрезков, на которые точка пересечения делит хорды, равна квадрату диаметра.

390. Доказать, что если разделить хорду окружности на три равные части и соединить с центром окружности концы хорды и точки деления, то соответствующий центральный угол разделится на три части, одна из которых больше двух других.

391. Доказать, что если из концов диаметра круга провести две пересекающиеся хорды, то сумма произведений каждой хорды на ее отрезок от конца диаметра до точки пересечения есть величина постоянная.

392. Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Доказать, что их линия центров параллельна данной прямой.

393. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них описать полукруг внутри данного полукруга, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра, восставленного внутри исходного полукруга из точки деления его диаметра.

394. Доказать, что если две точки лежат вне окружности и прямая, их соединяющая, не пересекает окружности, то расстояние между этими двумя точками больше разности длин касательных к окружности, проведенных из данных точек, и меньше суммы их. Показать, что одно или другое из этих неравенств не будет выполнено, если прямая пересекает окружность.

395. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (K и M находятся по одну сторону от AB), Q — точка пересечения AB и KN, P — точка пересечения AB и ML. Доказать, что $QC = CP$.

396. Окружность разделена произвольным образом на четыре части, и середины получающихся дуг соединены отрезками прямых. Показать, что среди этих отрезков два будут перпендикулярны между собой.

397. Доказать, что для любой замкнутой не пересекающей себя ломаной линии в плоскости существует круг, радиус которого составляет $\frac{1}{4}$ периметра ломаной линии и вне которого нет ни одной точки ломаной.

398. Может ли быть правильным треугольник, расстояния вершин которого до двух данных взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами?

399. В точках A и B прямой, по одну сторону от нее, восставлены два перпендикуляра $AA_1 = a$ и $BB_1 = b$. Доказать, что при сохранении величин a и b точка пересечения прямых AB_1 и A_1B будет находиться на одном и том же расстоянии от прямой AB независимо от положения точек A и B.

400. В прямой угол с вершиной A вписана окружность; B и C — точки касания. Доказать, что если к данной окружности провести касательную, пересекающую стороны AB и AC в точках M и N, то она отсечет на этих сторонах отрезки MB и NC, сумма длин которых больше, чем $\frac{1}{3}(AB+AC)$, и меньше, чем $\frac{1}{2}(AB+AC)$.

401. Окружность радиуса, равного высоте некоторого равнобедренного треугольника, катится по основанию этого треугольника. Доказать, что величина дуги, отсекаемой на окружности боковыми сторонами треугольника, остается при этом постоянной. Будет ли это предложение верно для неравнобедренного треугольника?

402. Доказать, что диагонали вписанного в круг четырехугольника относятся между собой как суммы произведений сторон, сходящихся в концах диагоналей.

403. Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

404. Доказать, что если окружность касается изнутри трех сторон четырехугольника и пересекает четвертую сторону, то сумма этой последней и противоположной стороны больше суммы двух других сторон четырехугольника.

405. Доказать, что если окружность касается изнутри трех сторон четырехугольника, четвертая сторона которого не пересекает окружности, то сумма четвертой и противоположной сторон меньше суммы двух других сторон четырехугольника.

406. Даны два равных полукруга, касающихся друг друга так, что диаметры их лежат на одной прямой. Проводим к ним общую касательную и вписываем первый круг, касающийся этой прямой и двух данных кругов; затем вписываем второй круг, касающийся первого и двух данных, затем третий круг, касающийся второго и двух данных, и т. д. до бесконечности. Пользуясь этим построением, доказать, что сумма дробей

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

при безграничном возрастании n стремится к 1, т. е.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

407. В точке A, находящейся на расстоянии a от центра круглого биллиарда радиуса R, лежит упругий шарик, размерами которого можно пренебречь. В какую точку B борта нужно его направить, чтобы, дважды отразившись от борта, он снова вернулся в точку A?

408. Из точки A, расположенной внутри угла с зеркальными сторонами, исходит луч света. Доказать, что число отражений, которое испытывает этот луч от сторон угла, всегда конечно. Найти это число, если данный угол равен α, а луч направлен под углом β к одной из его сторон. Выяснить условия, при которых луч снова пройдет через точку A.

4. Геометрические места точек

409. На окружности даны две неподвижные точки A и B и подвижная точка M. На продолжении отрезка AM вне окружности откладывается отрезок $MN = MB$. Найти геометрическое место точек N.

410. Даны две параллельные прямые и точка O, лежащая между ними. Через эту точку проводят произвольную секущую, которая пересекает параллельные прямые в точках A и A'. Найти геометрическое место концов перпендикуляра к секущей, восставленного из точки A' и имеющего длину OA.

411. Найти геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных прямых m и l равна длине a данного отрезка. Разобрать случаи пересекающихся и параллельных прямых.

412. Найти геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух данных прямых m и l равна отрезку данной длины. Разобрать случаи параллельных и пересекающихся прямых.

413. На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место точек M, обладающих тем свойством, что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна некоторой постоянной a^2.

414. Даны окружность K и ее хорда AB. Рассматриваются все треугольники, вписанные в окружность и имеющие основанием данную хорду. В каждом треугольнике взята точка пересечения высот. Найти геометрическое место этих точек.

415. Внутри данной окружности фиксирована точка A, не совпадающая с центром. Через A проведена произвольная хорда и в ее концах — касательные к окружности, пересекающиеся в точке M. Найти геометрическое место точек M.

416. Доказать, что геометрическое место точек M, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении

$$\frac{p}{q} \neq 1,$$

есть окружность с центром на прямой AB.

Выразить диаметр этой окружности через длину a отрезка AB. Исследовать также случай

$$\frac{p}{q} = 1.$$

417. Даны отрезок AB и на нем точка C. Каждая пара равных окружностей, одна из которых проходит через точки A и C, а другая — через точки C и B, имеет, кроме C, еще одну общую точку D. Найти геометрическое место точек D.

418. Стороны деформирующегося многоугольника остаются соответственно параллельными заданным направлениям, в то время как все вершины, кроме одной, скользят по заданным прямым. Найти геометрическое место положений последней вершины.

419. Даны окружность K радиуса r и ее хорда AB длиной $2a$. Пусть CD — подвижная хорда той же окружности, имеющая постоянную длину $2b$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

420. Через точку P, лежащую на данной окружности, и точку Q, лежащую на данной прямой, проводится произвольная окружность, пересекающая второй раз данную окружность в точке R, данную прямую — в точке S. Доказать, что получаемые этим построением всевозможные прямые RS пересекаются в одной точке, лежащей на данной окружности.

5. Нахождение наибольших и наименьших значений

421. Даны две параллельные прямые и точка A между ними, лежащая на расстоянии a от одной прямой и на расстоянии b от другой. Точка A служит вершиной прямых углов прямоугольных треугольников, две другие вершины которых лежат на каждой из параллельных прямых. Какой из треугольников имеет наименьшую площадь?

422. Дан прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α. Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей и определить, при каком α это отношение будет наименьшим.

423. От прямоугольника со сторонами a и b отрезан треугольник с катетами a_1 и b_1. Как надо обрезать оставшуюся часть, чтобы получить прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника.

424. На одной из сторон острого угла взяты две точки A и B. Найти на другой стороне угла точку C такую, чтобы угол ACB был наибольшим. Построить точку C с помощью циркуля и линейки.

425. Найти на данной прямой l такую точку, чтобы разность расстояний ее от двух данных точек A и B, находящихся по одну сторону от прямой, была наименьшей, а также такую точку, чтобы эта разность была наибольшей.

426. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

427. Доказать, что из всех треугольников с общим углом φ при вершине и данной суммой длин боковых сторон $a+b$ равнобедренный треугольник имеет наименьшее основание.

428. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

429. В треугольнике ABC на основании BC или на его продолжении взята произвольным образом точка D и около треугольников ACD и BCD описаны окружности. Доказать, что отношение радиусов этих окружностей есть величина постоянная. Найти такое положение точки D, для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

430. Из данного треугольника вырезать два равных круга наибольшего радиуса.

В. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания

Приведем ряд формул для вычисления объемов и поверхностей многогранников и тел вращения, полагая, что V — объем тела, $S_б$ — боковая поверхность, S — площадь основания, H — высота.

Пирамида: $V=\frac{SH}{3}$.

Усеченная пирамида: $V=\frac{H}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, где S_1 и S_2 — площади верхнего и нижнего оснований пирамиды.

Конус (прямой, круговой): $V=\frac{\pi R^2H}{3}$, где R — радиус основания конуса; $S_б=\pi Rl$, где l — образующая.

Цилиндр (прямой круговой): $V=\pi R^2H$, где R — радиус основания; $S_б=2\pi RH$.

Усеченный конус: $V=\frac{\pi H}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$, где R_1 и R_2 — радиусы оснований конуса; $S_б=\pi(R_1+R_2)l$, где l — образующая.

Шар: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $S=4\pi R^2$, где R — радиус шара.

Шаровой сектор: $V=\frac{2\pi R^2h}{3}$, где R — радиус шара, h — высота соответствующего сегмента или шарового слоя.

Шаровой сегмент: $V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$,

$$S_б=2\pi Rh,$$

где R — радиус шара, h — высота сегмента.

1. Задачи на вычисление

431. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найти сторону основания призмы.

432. Из вершины S правильной четырехугольной пирамиды на основание опущен перпендикуляр SB. Из середины O отрезка SB опущены перпендикуляр OM длиной h на боковое ребро и перпендикуляр OK длиной b на боковую грань. Найти объем пирамиды.

433. Найти поверхность правильной n-угольной пирамиды объема V, если радиус круга, вписанного в основание, равен радиусу круга, описанного вокруг сечения, параллельного основанию и отстоящего от основания на расстоянии h.

434. Правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$ пересечена плоскостью, проходящей через вершины A и C основания и середины ребер DS и ES. Найти площадь сечения, если q есть длина стороны основания пирамиды, а b — длина бокового ребра.

435. Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

436. От правильной четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, зная, что угол при вершине треугольника, получающегося в сечении, равен α.

437. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

438. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

439. Над плоским потолком зала, имеющего форму квадрата со стороной a, сделана крыша, построенная следующим образом: каждая пара смежных вершин квадрата, образующего потолок зала, соединена прямыми с серединой противолежащей стороны, на каждом из получившихся четырех треугольников, как на основании, построена пирамида, вершина которой проектируется в середину соответствующей стороны квадрата. Расположенные выше других части граней этих четырех пирамид образуют крышу. Найти объем чердака (т. е. пространства между потолком и крышей), если высота каждой из пирамид равна h.

440. Найти двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

441. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d. Найти объем этой пирамиды.

442. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны равны a и $b\,(a > b)$, а неравные отрезки диагоналей образуют угол φ. Найти объем пирамиды, зная, что высота пирамиды, опущенная из вершины, проходит через точку пересечения диагоналей основания, а двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как 2:1.

443. На плоскости P дан угол BAC в $60°$. Точка S удалена от вершины угла A на 25 *см*, от стороны AB на 7 *см* и от стороны AC на 20 *см*. Найти расстояние от точки S до плоскости P.

444. В правильной шестиугольной пирамиде с плоским углом при вершине, равным α, проведено сечение через наибольшую диагональ основания под углом β к нему. Найти отношение площади сечения к площади основания.

445. Все три плоских угла некоторого трехгранного угла являются острыми. Один из них равен α; двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны, соответственно, β и γ. Найти два других плоских угла.

446. Вычислить объем правильной пирамиды высоты h, зная, что в ее основании лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна $n\pi$, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

447. Рассматриваем куб с ребром a. Через концы каждой тройки ребер, выходящих из общей вершины, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями.

448. В правильной шестиугольной пирамиде через центр основания проведено сечение параллельно боковой грани. Найти отношение площади сечения к площади боковой грани.

449. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

450. На боковых гранях правильной четырехугольной пирамиды построены, как на основаниях, правильные тетраэдры. Найти расстояние между наружными вершинами двух смежных тетраэдров, если сторона основания пирамиды равна a.

451. Через некоторую точку диагонали куба с ребром a перпендикулярно к этой диагонали проведена плоскость.

1) Выяснить, какая фигура получается в сечении этой плоскости с гранями куба.

2) Найти длины отрезков, получающихся в сечении плоскости с гранями куба, в зависимости от расстояния x секущей плоскости от центра симметрии куба O.

452. Рассматривается проекция куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную к одной из диагоналей куба. Во сколько раз площадь проекции будет больше площади сечения куба плоскостью, проходящей через середину диагонали куба перпендикулярно к ней?

453. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, высота пирамиды h. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

454. В правильном тетраэдре $SABC$ с ребром основания a проведены три плоскости, каждая из которых проходит через одну из вершин основания тетраэдра ABC и середины двух боковых ребер. Найти объем части тетраэдра, расположенной над всеми секущими плоскостями.

455. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $AC=a$, $BD=b$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно q. Через точку A и середину K ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали основания BD. Определить площадь сечения.

456. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении $1:3$. Зная, что площадь первого сечения равна S, найти площадь второго.

457. Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найти отношение объемов этих многогранников, если известно, что секущая плоскость делит три боковые ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношении 1:2, 1:2 и 2:1, считая от вершины.

458. Найти объем треугольной пирамиды, если площади ее граней равны S_0, S_1, S_2, S_3, а двугранные углы, прилежащие к грани с площадью S_0, равны между собой.

459. Через середины двух параллельных ребер куба, не лежащих на одной грани, проведена прямая, и куб повернут вокруг нее на 90°. Определить объем общей части исходного куба и повернутого, зная, что ребро куба имеет длину a.

---

460. Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде AB длины a, стягивающей дугу основания конуса, которой соответствует центральный угол β. Найти объем конуса.

461. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7:4.

462. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, зная, что полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.

463. В конус, образующая которого l наклонена к плоскости основания под углом α, вписана правильная n-угольная призма, все ребра которой равны между собой Найти полную поверхность призмы.

464. Четыре стороны равнобочной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции. Найти угол, образуемый плоскостью трапеции с осью цилиндра, зная, что длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.

465. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр длины h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найти объем призмы.

466. В правильную n-угольную пирамиду со стороной основания a и боковым ребром b вписан шар. Найти его радиус.

467. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

468. Около шара радиуса r описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

469. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему вписанного в нее шара, зная, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, равны между собой.

470. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем шара, описанного около пирамиды, равен V, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α.

471. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом ψ. Найти объем пирамиды.

472. Две правильные n-угольные пирамиды с одинаковыми основаниями сложены этими основаниями. Найти радиус шара, вписанного внутрь получившегося многогранника, зная, что сторона общего основания пирамид равна a, а высоты пирамид равны h и H.

473. Две правильные n-угольные пирамиды с одинаковыми основаниями, но разными высотами, сложены этими основаниями, и около получившегося многогранника описан шар радиуса R. Найти высоты пирамид, зная, что сторона основания равна a. При каком соотношении между a и R задача разрешима?

474. В правильную n-угольную призму вписан шар, касающийся всех граней призмы. Вокруг призмы также описан шар. Найти отношение объемов двух шаров.

475. В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей двух шаров.

476. В правильный тетраэдр вписан шар. В шар вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объемов двух тетраэдров.

477. Даны две концентрические сферы радиусов r и R $(R > r)$. При каком соотношении между R и r можно внутри бóльшей сферы построить правильный тетраэдр так, чтобы три вершины его основания лежали на бóльшей сфере, а три боковые грани касались меньшей сферы?

478. Взяты две противоположные вершины куба и через середины шести ребер, не проходящих через эти вершины, проведена секущая плоскость, которая делит куб на две части. В каждую из этих частей помещен шар, касающийся трех граней куба и секущей плоскости. Во сколько раз объем каждого из этих шаров будет меньше объема куба?

479. Из точки сферы радиуса R проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Определить длину этих хорд.

480. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра SA, SC и SB попарно перпендикулярны, $AB = BC = a$, $BS = b$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

481. Найти двугранный угол φ между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, зная, что радиус описанного около пирамиды шара в 3 раза больше радиуса вписанного в нее шара.

482. В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и все его грани продолжены до пересечения со сферой. Линии пересечения граней тетраэдра со сферой вырезают из ее поверхности четыре сферических треугольника и несколько сферических двуугольников. Вычислить площадь каждого из этих двуугольников и треугольников.

483. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как 4:3. Найти угол при вершине конуса.

484. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, зная, что поверхность конуса относится к поверхности полусферы как 18:5.

485. В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания. Найти объем конуса.

486. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел.

При каких q задача разрешима?

487. Найти отношение объема шара к объему описанного около него прямого конуса, если полная поверхность конуса в n раз больше поверхности шара.

488. Вычислить радиусы оснований усеченного конуса, описанного около шара радиуса R, зная, что отношение полной поверхности усеченного конуса к поверхности шара равно m.

489. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, зная, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

490. В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α, вписан шар радиуса R. Найти объем части конуса, расположенной над шаром.

491. Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если известны толщина линзы $2a$, полная ее поверхность S и диаметр $2R$.

492. В конус вписан шар, причем отношение их объемов равно k. Найти отношение объемов шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостью, проходящей через линию касания шара с конусом.

493. В сферу S радиуса R вписаны восемь сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, а все вместе касаются сферы S по окружности большого круга. Затем в пространство между сферами вписана еще одна сфера S_1, которая касается всех восьми сфер меньшего радиуса и сферы S. Найти радиус ρ этой последней сферы.

494. В сферу S радиуса R вписано восемь равных сфер, каждая из которых касается трех соседних сфер и сферы S. Найти радиус вписанных сфер, зная, что их центры лежат в вершинах некоторого куба.

495. В шар вписаны два одинаковых конуса, оси которых совпадают, а вершины находятся в противоположных концах диаметра шара. Найти отношение объема общей части этих двух конусов к объему шара, зная, что отношение высоты конуса h к радиусу шара R равно k.

496. Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны S_1 и S_2, а расстояние между этими сечениями равно d. Найти площадь сечения, параллельного данным и делящего пополам расстояние между ними.

497. На плоскости P лежат три равных шара радиуса R, касающиеся друг друга. Прямой круговой конус расположен так, что его плоскость основания совпадает с P, а данные шары касаются конуса и лежат вне его. Найти радиус основания конуса, если его высота задана и равна qR.

498. Даны четыре равных шара радиуса R, из которых каждый касается трех других. Пятый шар касается каждого из данных шаров внешним образом, шестой — внутренним образом. Найти отношение объема шестого шара V_6 к объему пятого V_5.

499. На плоскости лежат три равных шара радиуса R, попарно касающихся друг друга. Четвертый шар касается плоскости и каждого из первых трех шаров. Найти радиус четвертого шара.

500. На плоскости лежат четыре равных шара радиуса R, причем три из них касаются попарно друг друга, а четвертый касается двух из этих трех. На эти шары сверху положены два равных шара меньшего радиуса, касающихся друг друга, причем каждый из них касается трех больших шаров. Найти отношение радиусов большого и малого шаров.

2. Задачи на доказательство

501. Дан усеченный конус, боковая поверхность которого равна площади круга, имеющего своим радиусом образующую усеченного конуса. Доказать, что в данный конус можно вписать шар.

502. Дан усеченный конус, у которого высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований. Доказать, что в конус можно вписать шар.

503. Доказать, что при соединении трех вершин правильного тетраэдра с серединой высоты, опущенной из четвертой вершины, получаются три попарно перпендикулярные прямые.

504. Пусть R — радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, r — радиус шара, вписанного в эту пирамиду. Доказать, что

$$\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1.$$

Указание. Выразить $\frac{R}{r}$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α — двугранный угол между основанием и боковой гранью.

505. Из точки O, лежащей в основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, проведены прямые OA', OB' и OC', соответственно параллельные ребрам SA, SB, SC, до пересечения их соответственно с гранями SBC, SCA, SAB в точках A', B', C'.

Доказать, что

$$\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=1.$$

506. Рассматриваются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, которые лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. При этом прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке O. Доказать, что продолжения соответственных сторон треугольников попарно пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой.

507. Показать, что отрезки, соединяющие вершины некоторой треугольной пирамиды с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 1:3.

508. Показать, что площадь любого треугольного сечения произвольной треугольной пирамиды не превосходит площади хотя бы одной из ее граней.

509. Одна из двух треугольных пирамид с общим основанием расположена внутри другой. Доказать, что сумма плоских углов при вершине внутренней пирамиды больше, чем сумма плоских углов при вершине внешней.

510. Четыре шара, центры которых не лежат в одной плоскости, касаются попарно друг друга. Каждые два из них определяют плоскость, перпендикулярную к их линии центров и касающуюся обоих шаров. Доказать, что возникающие таким образом шесть плоскостей имеют общую точку.

511. Доказать, что если в треугольной пирамиде сумма длин любой пары противоположных ребер одна и та же, то вершины этой пирамиды являются центрами четырех шаров, попарно касающихся друг друга.

512. Какому условию должны удовлетворять радиусы трех шаров, попарно касающихся друг друга, для того, чтобы к этим шарам можно было провести общую касательную плоскость?

513. Доказать, что если точка перемещается в плоскости основания правильной пирамиды, оставаясь внутри этого основания, то сумма расстояний этой точки от боковых граней постоянна.

514. Доказать, что две плоскости, проведенные через концы двух троек ребер параллелепипеда, исходящих из концов диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.

515. Показать, что если плоскость, проведенная через концы трех ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

516. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

517. Доказать, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то все ребра этой пирамиды также равны.

518. На двух параллельных плоскостях расположены отрезки AB и CD. Концы этих отрезков являются вершинами некоторой треугольной пирамиды. Доказать, что объем пирамиды сохраняется, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

519. Доказать, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

520. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащих в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины. Доказать, что

$$\frac{AD+BC}{2} > MN$$

(здесь AD, BC и MN — длины соответствующих отрезков).

521. Доказать, что любой плоский угол произвольного четырехгранного угла меньше суммы трех других плоских углов.

522. Доказать, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

523. Доказать, что если в треугольной пирамиде все грани равновелики, то они равны.

3. Геометрические места точек

524. Найти геометрическое место проекций данной точки пространства на плоскости, проходящей через другую данную точку.

525. Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную прямую l. Разобрать случаи, когда прямая пересекает шар, касается его или не имеет с ним общих точек.

526. Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку C. Разобрать случаи, когда данная точка находится вне шара, на поверхности шара или внутри шара.

527. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к данному шару радиуса R три касательные, образующие трехгранный угол с тремя прямыми плоскими углами.

528. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки пространства на прямые, лежащие в заданной плоскости и пересекающиеся в одной точке.

529. Дана плоскость P и две точки A и B вне ее. Через A и B проводятся всевозможные сферы, касающиеся плоскости P. Найти геометрическое место точек касания.

530. Трехгранный угол пересекается плоскостью по треугольнику ABC. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC при условии, что:

а) вершины A и B закреплены;

б) вершина A закреплена.

4. Наибольшие и наименьшие значения

531. Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?

532. В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум ее непересекающимся ребрам. Найти сечение с наибольшей площадью.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Предварительные замечания

Приведем некоторые формулы, встречающиеся в предложенных ниже задачах.

1. Тригонометрические функции сумм и разностей двух углов:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y, \tag{1}$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y, \tag{2}$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \tag{3}$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y. \tag{4}$$

2. Двойные и тройные углы:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x, \tag{5}$$
$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x, \tag{6}$$
$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x, \tag{7}$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x. \tag{8}$$

3. Сумма и разность тригонометрических функций:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{10}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{11}$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}. \tag{12}$$

4. Произведение тригонометрических функций:

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)], \tag{13}$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)], \tag{14}$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x-y)+\sin(x+y)], \tag{15}$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \tag{16}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{17}$$

5. Выражение $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{18}$$

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \tag{19}$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \tag{20}$$

6. Обратные тригонометрические функции.

а) Главные значения обратных тригонометрических функций:

$$y=\arcsin x, \text{ если } x=\sin y \text{ и } -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

$$y=\arccos x, \text{ если } x=\cos y \text{ и } 0\leqslant y\leqslant\pi, \tag{22}$$

$$y=\operatorname{arctg} x, \text{ если } x=\operatorname{tg} y \text{ и } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}, \tag{23}$$

$$y=\operatorname{arcctg} x, \text{ если } x=\operatorname{ctg} y \text{ и } 0<y<\pi. \tag{24}$$

б) Многозначные обратные тригонометрические функции:

$$\operatorname{Arcsin} x=(-1)^n\arcsin x+\pi n,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{25}$$

$$\operatorname{Arccos} x=\pm\arccos x+2\pi n, \tag{26}$$

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+\pi n, \tag{27}$$

$$\operatorname{Arcctg} x=\operatorname{arcctg} x+\pi n. \tag{28}$$

Формулы (25)—(28) определяют общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции.

1. Преобразование выражений, содержащих тригонометрические функции

533. Доказать тождество

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

534. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta.$$

535. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеет место формула

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x.$$

536. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо равенство

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

537. Доказать тождество

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

538. Доказать, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

если

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

539. Доказать, что при n целом и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ имеет место тождество

$$\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = (-1)^{n+1} 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma.$$

540. Доказать, что если $\cos(\alpha+\beta) = 0$, то

$$\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha.$$

541. Доказать, что если $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$$

при всех допустимых значениях α и β.

542. Доказать, что если $\sin\alpha = A\sin(\alpha+\beta)$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - A}$$

при всех допустимых значениях α и β.

543. Показать, что если углы α и β связаны соотношением

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{n}{m} \qquad (|m| > |n|),$$

то имеет место равенство

$$\frac{1 + \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

544. Доказать, что если $\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \neq 0$, то имеет место формула

$$\cos(x+y+z) =$$
$$= \cos x \cos y \cos z\,(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x).$$

545. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

546. Пусть $x+y+z=\frac{\pi}{2}k$. Для каких **целых** значений k сумма

$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$$

не будет зависеть от x, y, z?

547. Найти алгебраические связи между углами α, β, γ, если известно, что

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

548. Преобразовать в произведение

$$\operatorname{ctg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x - 8\cos 4x \operatorname{ctg} 4x.$$

549. Преобразовать в произведение

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 2.$$

550. Вычислить без таблиц

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ.$$

551. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

552. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

553. Вычислить без таблиц

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

554. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}.$$

2. Тригонометрические уравнения и системы уравнений

А. Тригонометрические уравнения

555. Решить уравнение

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

556. Решить уравнение

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x.$$

557. Решить уравнение

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

558. Решить уравнение

$$1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x.$$

559. Решить уравнение

$$(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

560. Решить уравнение

$$2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0.$$

561. Решить уравнение

$$\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3.$$

562. Решить уравнение

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

563. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3.$$

564. Решить уравнение

$$\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}.$$

565. Решить уравнение

$$\frac{1}{2} (\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x.$$

566. Решить уравнение

$$(1+k)\frac{\cos x\cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}=1+k\cos 2x.$$

567. Решить уравнение

$$\sin ax\sin bx=\sin cx\sin dx,$$

где a, b, c и d — последовательные положительные члены арифметической прогрессии.

568. Решить уравнение

$$2+\cos x=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

569. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x-2\sin 2x=1.$$

570. Найти $\operatorname{tg} x$ из уравнения

$$2\cos x\cos(\beta-x)=\cos\beta.$$

571. Найти $\cos\varphi$, если

$$\sin\alpha+\sin(\varphi-\alpha)+\sin(2\varphi+\alpha)=\sin(\varphi+\alpha)+\sin(2\varphi-\alpha)$$

и угол φ лежит в третьей четверти.

572. Найти $\operatorname{ctg} x$ из уравнения

$$\cos^2(\alpha+x)+\cos^2(\alpha-x)=a,$$

где $0<a<2$. Исследовать, при каких α задача имеет решение.

573. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ и угол α лежит между 0 и 45°.

574. Решить уравнение

$$\sin 2x-12(\sin x-\cos x)+12=0.$$

575. Решить уравнение

$$1+2\operatorname{cosec} x=-\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}.$$

576. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}.$$

577. Решить уравнение

$$2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$$

578. Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg} 2x - 3\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

579. Решить уравнение

$$6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

580. Решить уравнение

$$\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}.$$

581. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}.$$

582. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$$

имеет решения? Найти эти решения.

583. Определить все значения a, при которых уравнение

$$\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

584. Решить уравнение

$$\cos \pi \frac{x}{31} \cos 2\pi \frac{x}{31} \cos 4\pi \frac{x}{31} \cos 8\pi \frac{x}{31} \cos 16\pi \frac{x}{31} = \frac{1}{32}.$$

585. Решить уравнение

$$\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}\,(\cos 5x - \sin 7x).$$

586. Решить уравнение

$$2 - (7 + \sin 2x)\sin^2 x + (7 + \sin 2x)\sin^4 x = 0.$$

587. Найти $\sin x$ и $\cos x$, если

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

При каком условии относительно a, b и c задача имеет решение?

588. Решить уравнение

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a} \quad (ab\neq 0).$$

589. Решить уравнение

$$32\cos^6 x-\cos 6x=1.$$

590. Решить уравнение

$$8\sin^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1=0.$$

591. Решить уравнение

$$\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=0.$$

592. Решить уравнение

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}.$$

593. Решить уравнение

$$\sin^{10} x+\cos^{10} x=\frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

594. Решить уравнение

$$\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)^3.$$

595. Решить уравнение

$$\sin^{2n} x+\cos^{2n} x=1,$$

где n — целое положительное число.

596. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right).$$

597. Решить уравнение

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

598. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$$

599. Доказать, что уравнение

$$(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$$

не имеет решений.

600. Определить, в каких пределах можно изменять параметр λ, чтобы уравнение

$$\sec x+\operatorname{cosec} x=\lambda$$

имело корень x, удовлетворяющий неравенству $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Б. Тригонометрические системы

601. Найти все решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0,\end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющие условиям: $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

602. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin x=\operatorname{cosec} x+\sin y,\\ \cos x=\sec x+\cos y.\end{aligned}\right\}$$

603. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin^3 x=\frac{1}{2}\sin y,\\ \cos^3 x=\frac{1}{2}\cos y.\end{aligned}\right\}$$

604. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1,\\ \cos x\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\right\}$$

605. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin x\sin y=\frac{1}{4\sqrt{2}},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=\frac{1}{3}.\end{aligned}\right\}$$

606. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\varphi, \\ \cos x\cos y&=a. \end{aligned}\right\}$$

При каких a система имеет решение?

607. Найти все значения a, при которых система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x\cos 2y&=a^2+1, \\ \cos x\sin 2y&=a \end{aligned}\right\}$$

имеет решения, и решить систему.

608. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-2y)&=a\cos^3 y, \\ \sin(x-2y)&=a\cos^3 y. \end{aligned}\right\}$$

При каких значениях a система разрешима?

609. Найти $\cos(x+y)$, если x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x+\sin y&=a, \\ \cos x+\cos y&=b \end{aligned}\right\}$$

и $a^2+b^2\neq 0$.

610. При каких значениях α система

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\alpha, \\ 2(\cos 2x+\cos 2y)&=1+4\cos^2(x-y) \end{aligned}\right\}$$

имеет решения? Найти эти решения.

611. Найти все решения системы

$$\left.\begin{aligned} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1&=0, \\ x+y&=\alpha. \end{aligned}\right\}$$

При каких α решения возможны?

612. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}&=2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y+\frac{1}{\operatorname{tg} y}&=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}\right\}$$

613. Исключить x и y из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1,\\ a\cos^2 y + b\sin^2 y = 1,\\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{aligned}\right\}$$

предполагая, что система разрешима и $a \neq b$.

614. Выразить $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B при условии, что

$$\sin\alpha = A\sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta.$$

615. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y,\\ \sin x = \cos 2y. \end{aligned}\right\}$$

616. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \sin y = \sin(x+y),\\ |x| + |y| = 1. \end{aligned}\right\}$$

617. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin(y - 3x) = 2\sin^3 x,\\ \cos(y - 3x) = 2\cos^3 x. \end{aligned}\right\}$$

618. Выяснить, каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c для того, чтобы система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \sin y = 2a,\\ \cos x + \cos y = 2b,\\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c \end{aligned}\right\}$$

имела хотя бы одно решение.

3. Обратные тригонометрические функции

619. Вычислить $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$.

620. Вычислить $\arcsin\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)$.

621. Доказать, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

622. Доказать формулу
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

623. Показать, что при $\alpha < 1/32$ уравнение
$$(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \alpha\pi^3$$
не имеет корней.

624. Доказать формулу
$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

625. Доказать формулы
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

626. Доказать, что если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то $\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi$.

627. Доказать, что если $0 < x < 1$ и
$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}, \quad \beta = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2},$$
то $\alpha + \beta = \pi$.

628. Найти соотношение между
$$\arcsin\cos\arcsin x \quad \text{и} \quad \arccos\sin\arccos x.$$

4. Тригонометрические неравенства

629. Решить неравенство $\sin x > \cos^2 x$.

630. При каких x выполняется неравенство
$$4\sin^2 x + 3\,\mathrm{tg}\,x - 2\sec^2 x > 0?$$

631. Решить неравенство $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$, если $0 < x < \pi/2$.

632. Решить неравенство
$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$$

633. Найти все значения x, большие нуля, но меньшие 2π, для которых выполняется неравенство

$$\cos x - \sin x - \cos 2x > 0.$$

634. Решить неравенство $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

635. Решить неравенство

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}.$$

636. Доказать при $0 < \varphi < \pi/2$ неравенство

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\varphi.$$

637. Доказать справедливость неравенства

$$(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) > 0$$

для всех значений x, при которых левая часть имеет смысл.

638. Доказать справедливость неравенства

$$(\operatorname{ctg}^2 x - 1)(3\operatorname{ctg}^2 x - 1)(\operatorname{ctg} 3x \operatorname{tg} 2x - 1) \leqslant -1$$

для всех значений x, при которых левая часть имеет смысл.

639. Полагая $\operatorname{tg}\theta = n \operatorname{tg}\varphi$ $(n > 0)$, доказать, что

$$\operatorname{tg}^2(\theta - \varphi) \leqslant \frac{(n-1)^2}{4n}.$$

640. Доказать неравенство

$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

При каких значениях x достигается равенство?

641. Доказать, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ выполняется неравенство

$$\cos \sin \varphi > \sin \cos \varphi.$$

642. Пусть n — целое положительное число, большее 1, и угол α удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$. Показать, пользуясь методом полной индукции, что тогда

$$\operatorname{tg} n\alpha > n \operatorname{tg}\alpha.$$

643. Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \pi/2$. Доказать, что тогда

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

644. Доказать, что если A, B, C — углы треугольника, то

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

645. Доказать, что при $0 < x < \pi/4$ справедливо неравенство

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8.$$

5. Разные задачи

646. Вычислить $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$.

647. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то $\alpha + 2\beta = 45^\circ$ (α и β — углы первой четверти).

648. Доказать, что

$$y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$$

принимает положительные значения при всех допустимых значениях x.

649. Доказать, что равенство $\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \frac{4}{5}$ невозможно ни при каких значениях α.

650. Выразить $\sin 5x$ через $\sin x$ и с помощью полученной формулы вычислить без таблиц $\sin 36^\circ$.

651. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\varphi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

652. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 2\sin^2 x + 4\cos^2 x + 6\sin x\cos x.$$

653. При каких целых значениях n функция

$$\cos nx \sin \frac{5}{n} x$$

имеет период 3π *)?

654. Доказать, что если сумма

$$a_1 \cos(\alpha_1 + x) + a_2 \cos(\alpha_2 + x) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + x)$$

при $x = 0$ и $x = x_1 \neq k\pi$ (k — целое) обращается в нуль, то она равна нулю при всяком x.

655. Доказать, что функция $\cos \sqrt{x}$ не является периодической (т. е. не существует такого постоянного числа $T \neq 0$, чтобы при всех x было $\cos \sqrt{x+T} = \cos \sqrt{x}$).

656. Доказать формулу

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Указание. Можно воспользоваться формулой Муавра

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

657. Вычислить сумму

$$\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\cos \frac{2\pi}{4}}{2^2} + \ldots + \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{2^n}.$$

Указание. Применить формулу Муавра.

658. Рассматривается функция

$$f(x) = A \cos x + B \sin x,$$

где A и B — некоторые постоянные.

Доказать, что если $f(x)$ обращается в нуль при двух значениях аргумента x_1 и x_2 таких, что

$$x_1 - x_2 \neq k\pi$$

(k — целое число), то функция $f(x)$ тождественно равна нулю.

---

*) Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T \neq 0$ такое, что для всех допустимых значений x выполнено равенство $f(x+T) = f(x)$. Число T при этом называется периодом функции.

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

АЛГЕБРА

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. По условию задачи

$$b-a=c-b=d \text{ и } c-a=2d.$$

Пусть

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

и

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

Покажем, что $A_1=A_2$. Если $d=0$, то $a=b=c$ и $A_1=A_2=0$. Поэтому будем считать, что $d\neq 0$. Освобождаясь от иррациональности в знаменателях, получаем:

$$A_1=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{d}=\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}$$

и

$$A_2=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{d}-\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}=\frac{2\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2d}.$$

Таким образом, $A_1=A_2$, что и требовалось доказать.

2. Если разность d заданной прогрессии равна нулю, то справедливость формулы очевидна. Поэтому будем считать $d\neq 0$.

Обозначим левую часть предполагаемого равенства через S. Освобождая знаменатели от иррациональности, получаем:

$$S=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{a_2-a_1}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{a_3-a_2}+\ldots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_n-a_{n-1}}.$$

Так как по условию $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=d$, то, очевидно,

$$S=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{d}.$$

Имеем теперь

$$S=\frac{a_n-a_1}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})\,d}=\frac{(n-1)\,d}{d(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1})}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}},$$

что и требовалось доказать.

3. По условию задачи

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=d.$$

Если $d=0$, то предлагаемое равенство очевидно. Считая $d\neq 0$, будем иметь:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\frac{1}{d}+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{a_{n-2}}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{d}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_n-a_1}{da_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},$$

что и требовалось доказать.

4. При $n=3$ имеем $\frac{1}{a_1d_2}+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3}$. Отсюда $\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_1a_3}=$ $=\frac{1}{a_1a_3}-\frac{1}{a_3a_2}$ и, следовательно, $a_3-a_2=a_2-a_1$. Поэтому достаточно показать, что при любом $n\geqslant 4$

$$a_n-a_{n-1}=a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Выпишем последовательно равенство, указанное в условии, для случаев $n-2$, $n-1$ и n:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}}=\frac{n-3}{a_1a_{n-2}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}=\frac{n-2}{a_1a_{n-1}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}. \tag{3}$$

Вычитая почленно из равенства (3) равенство (2) и из (2) равенство (1), получаем:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n}-\frac{1}{a_1a_n}=(n-2)\,\frac{a_{n-1}-a_n}{a_1a_{n-1}a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}}-\frac{1}{a_1a_{n-2}}=(n-2)\,\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n-2}}.$$

Приведя к общему знаменателю, после сокращения найдем:

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\,(a_{n-1}-a_n),$$

$$a_1-a_{n-1}=(n-2)\,(a_{n-2}-a_{n-1}).$$

Следовательно, $a_{n-1}-a_n=a_{n-2}-a_{n-1}$, что и требовалось доказать.

5. Доказательство проведем методом индукции. Заметим, что при $n=2$ равенство имеет место, так как $a_2-a_1=a_3-a_2$ и, следовательно, $a_1-2a_2+a_3=0$. Допустим, что предлагаемая формула справедлива для некоторого n; иначе говоря, какова бы ни была арифметическая прогрессия $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, справедливо равенство

$$x_1-C_n^1x_2+C_n^2x_3+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x_n+(-1)^n C_n^nx_{n+1}=0. \quad (1)$$

Переходя к $n+1$, используем тождество

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

Тогда

$$a_1-C_{n+1}^1a_2+C_{n+1}^2a_3+\ldots+(-1)^n C_{n+1}^na_{n+1}+$$
$$+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}a_{n+2}=[a_1-C_n^1a_2+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}]-$$
$$-[a_2-C_n^1a_3+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_{n+1}+(-1)^nC_n^na_{n+2}].$$

По предположению индукции оба выражения, стоящие в квадратных скобках, равны нулю, так как они имеют вид (1). Поэтому предлагаемая формула справедлива и для $n+1$. Этим утверждение доказано.

6. Доказательство проведем по методу индукции. При $n=3$ легко непосредственно проверить, что

$$a_1^2-3(a_1+d)^2+3(a_1+2d)^2-(a_1+3d)^2=0.$$

Пусть уже установлено, что при некотором n и любой арифметической прогрессии $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ имеет место тождество

$$x_1^2-C_n^1x_2^2+\ldots+(-1)^nC_n^nx_{n+1}^2=0.$$

Тогда, поступая в случае $n+1$, как и в предыдущей задаче, получаем:

$$a_1^2-C_{n+1}^1a_2^2+C_{n+1}^2a_3^2+\ldots+(-1)^nC_{n+1}^na_{n+1}^2+$$
$$+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}a_{n+2}^2=[a_1^2-C_n^1a_2^2+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+1}^2]-$$
$$-[a_2^2-C_n^1a_3^2+\ldots+(-1)^nC_n^na_{n+2}^2]=0,$$

что и требуется для доказательства.

Заметим, что для арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ справедлива и более общая формула

$$a_1^k-C_n^1a_2^k+C_n^2a_3^k-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n^k+(-1)^nC_n^na_{n+1}^k=0,$$

где $k\geqslant 1$ — целое число.

7. По известному свойству членов арифметической прогрессии имеем:

$$2\log_m x=\log_n x+\log_k x.$$

Отсюда (см. (3), стр. 24)

$$\frac{2}{\log_x m}=\frac{1}{\log_x n}+\frac{1}{\log_x k}$$

и, следовательно,

$$2=\frac{\log_x m}{\log_x n}+\frac{\log_x m}{\log_x k}.$$

Используя формулу (2), данную на стр. 24, получаем:

$$2=\log_n m+\log_k m.$$

Запишем это равенство следующим образом:

$$\log_n n^2=\log_n m+\log_n (n^{\log_k m}).$$

Потенцируя, получаем $n^2=mn^{\log_k m}$, или

$$n^2=(kn)^{\log_k m},$$

что и требовалось доказать.

8. Пусть

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+kn}}=c. \tag{1}$$

Обозначим через d разность прогрессии. Интерес представляет лишь тот случай, когда $d\neq 0$, так как при $d=0$ все члены прогрессии равны между собой и равенство (1) выполняется. Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, из равенства (1) получаем:

$$\frac{n}{2}[a_1+a_1+d(n-1)]=\frac{kn}{2}[a_1+nd+a_1+(n+kn-1)d]c,$$

откуда после сокращения и перегруппировки членов находим:

$$(2a_1-2a_1kc-d+cdk)+n(d-cdk^2-2cdk)=0.$$

Так как это равенство имеет место при любом n, то

$$2a_1-2a_1kc-d+cdk=0,$$
$$d-cdk^2-2cdk=0.$$

Сократив второе из этих равенств на $d\neq 0$, будем иметь:

$$c=\frac{1}{k(k+2)}. \tag{2}$$

Первое же равенство можно представить в виде

$$(2a_1-d)(1-ck)=0.$$

В силу (2) второй множитель отличен от нуля и, следовательно, $d=2a_1$.

Таким образом, при условии $d\neq 0$ равенство (1) может иметь место при всех n лишь в случае прогрессии

$$a,\ 3a,\ 5a,\ \ldots\ (a\neq 0). \tag{3}$$

Теперь легко непосредственно проверить, что прогрессия (3) действительно удовлетворяет условию задачи. Итак, искомой является прогрессия (3).

9. Пусть d — разность прогрессии. Имеем:

$$b^2 = x_1^2 + (x_1+d)^2 + \ldots + [x_1+(n-1)\,d]^2 =$$

$$= nx_1^2 + 2x_1 d\,[1+2+\ldots+(n-1)] + d^2\,[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2] =$$

$$= nx_1^2 + n(n-1)\,x_1 d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\,d^2$$

и кроме того,

$$a = nx_1 + \frac{n(n-1)}{2}\,d.$$

Исключая из этих уравнений x_1, после несложных преобразований получаем:

$$d^2\,\frac{n(n^2-1)}{12} = b^2 - \frac{a^2}{n}.$$

Отсюда

$$d = \pm\sqrt{\frac{12\,(nb^2-a^2)}{n^2\,(n^2-1)}}\,;$$

x_1 затем определяется в каждом из двух случаев по формуле

$$x_1 = \frac{1}{n}\left[a - \frac{n(n-1)}{2}\,d\right]$$

Таким образом, поставленным условиям при $n^2b^2 - a^2 \neq 0$ удовлетворяют две прогрессии.

10. Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обладает тем свойством, что

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = 2d, \quad \ldots, \quad a_n - a_{n-1} = (n-1)\,d.$$

Сложив эти равенства, найдем, что

$$a_n = a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2}.$$

Пользуясь этой формулой, получаем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 n + \left[\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)\,n}{2}\right] d.$$

В задаче 266 доказано, что

$$\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \ldots + \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

Следовательно,

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n^2-1)}{6}\,d.$$

Для данной задачи $d=3$, $a_1=1$. Поэтому

$$a_n=1+\frac{3}{2}n(n-1) \quad \text{и} \quad S_n=\frac{1}{2}n(n^2+1).$$

11. В n-й строке стоят числа n, $n+1$, ..., $3n-3$, $3n-2$ (всего $2n-1$ чисел). Сумма этих чисел равна

$$\frac{(n+3n-2)(2n-1)}{2}=(2n-1)^2.$$

12. Пусть q — знаменатель прогрессии; тогда

$$a_{m+n}=a_1q^{m+n-1}=A,$$
$$a_{m-n}=a_1q^{m-n-1}=B.$$

Отсюда $q^{2n}=\frac{A}{B}$ и, следовательно, $q=\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Имеем теперь:

$$a_m=a_{m-n}q^n=B\left(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}}\right)^n=\sqrt{AB},$$

$$a_n=a_{m+n}q^{-m}=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}=A^{\frac{2n-m}{2n}}B^{\frac{m}{2n}}.$$

13. Имеем:

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1},$$
$$S_{2n}-S_n=a_1q^n+a_1q^{n+1}+\ldots+a_1q^{2n-1}=q^nS_n$$

и, далее,

$$S_{3n}-S_{2n}=a_1q^{2n}+a_1q^{2n+1}+\ldots+a_1q^{3n-1}=q^{2n}S_n.$$

Отсюда

$$\frac{1}{q^n}=\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{S_{2n}-S_n}{S_{3n}-S_{2n}},$$

что и требовалось доказать.

14. Имеем:

$$\Pi_n=a_1\cdot a_1q_1\cdot\ \ldots\ \cdot a_1q^{n-1}=a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(a_1q^{\frac{n-1}{2}}\right)^n.$$

Заметив, что

$$S_n=a_1+a_1q+\ldots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$\tilde{S}_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1q}+\ldots+\frac{1}{a_1q^{n-1}}=\frac{1}{a_1}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}=\frac{1}{a_1q^{n-1}}\frac{q^n-1}{q-1}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_n}{\tilde{S}_n}=a_1^2q^{n-1}=\left(a_1q^{\frac{n-1}{2}}\right)^2.$$

получаем:

$$\Pi_n=\left(\frac{S_n}{\tilde{S}_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

15. Обозначим рассматриваемую сумму через S_n. Умножим каждое слагаемое этой суммы на x и полученную величину вычтем из S_n; в результате будем иметь:

$$S_n-xS_n=1+x+x^2+\ldots+x^n-(n+1)\,x^{n+1}.$$

Суммируя входящую сюда геометрическую прогрессию, при $x\neq 1$ найдем:

$$(1-x)\,S_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)\,x^{n+1}.$$

Отсюда

$$S_n=\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-\frac{(n+1)\,x^{n+1}}{1-x}\quad (x\neq 1).$$

В случае $x=1$ имеем:

$$S_n=\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

16. Обозначим искомую сумму через S_n. Преобразуем слагаемые суммы, пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии

$$1+10=\frac{10^2-1}{9},$$

$$1+10+100=\frac{10^3-1}{9},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+10+100+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

Так как, кроме того, $1=\frac{10-1}{9}$, то сложив правые части равенств, получим

$$S_n=\frac{1}{9}\,(10+10^2+\ldots+10^n-n)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right)$$

17. Искомая сумма может быть представлена в следующем виде

$$\begin{aligned}
&(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}+x^n)+\\
&+(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1})+\\
&+(x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2})+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(x+x^2)+\\
&+x,
\end{aligned}$$

в чем легко убедиться сложением по столбцам. Складывая по строкам, находим, что при $x \neq 1$ искомая сумма равна

$$x\frac{x^n-1}{x-1}+x\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+x\frac{x^{n-2}-1}{x-1}+\ldots+x\frac{x^2-1}{x-1}+x\frac{x-1}{x-1}=$$

$$=\frac{x}{x-1}[x+x^2+\ldots+x^n-n]=\frac{x}{x-1}\left[x\frac{x^n-1}{x-1}-n\right]=$$

$$=\frac{x^2(x^n-1)}{(x-1)^2}-\frac{nx}{x-1}.$$

При $x=1$ искомая сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$ как сумма членов арифметической прогрессии.

18. Обозначим искомую сумму через S_n. Тогда

$$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}=$$

$$=1+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{2^3}+\frac{5}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)=$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}+S_n-\frac{2n-1}{2^n},$$

откуда

$$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

19. Общий вид таких чисел следующий:

$$\overbrace{44\ldots4}^{n}\,\overbrace{88\ldots89}^{n-1}=4\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}\cdot10^n+8\cdot\overbrace{11\ldots1}^{n}+1.$$

Число $\overbrace{11\ldots1}^{n}$ можно записать в виде суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем 10:

$$\overbrace{11\ldots1}^{n}=1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}=\frac{10^n-1}{9}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{4}{9}(10^n-1)\,10^n+\frac{8}{9}(10^n-1)+1=$$

$$=\frac{4}{9}\,10^{2n}+\frac{4}{9}\,10^n+\frac{1}{9}=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2.$$

20. По условию задачи $|q|<1$, и мы имеем:

$$q^n=k(q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots)=kq^{n+1}\frac{1}{1-q}. \qquad (1)$$

Отсюда $1-q=kq$ и, следовательно, если задача имеет решение, то

$$q=\frac{1}{k+1}. \qquad (2)$$

Легко, однако, видеть, что если, наоборот, из равенства (2) следует, что $|q| < 1$, то равенство (2) влечет за собой равенство (1), и соответствующая прогрессия удовлетворяет условию задачи. Таким образом, задача разрешима при любом k, удовлетворяющем неравенству $\left|\frac{1}{k+1}\right| < 1$. Это последнее имеет место при $k > 0$ или $k < -2$.

21. Доказательство проведем методом полной индукции. Рассмотрим сначала случай последовательности, состоящей из трех членов x_1, x_2, x_3. Раскрыв скобки в формуле

$$(x_1^2+x_2^2)(x_2^2+x_3^2)=(x_1x_2+x_2x_3)^2,$$

мы обнаружим, что

$$x_2^4+x_1^2x_3^2-2x_1x_2^2x_3=0,$$

откуда $(x_2^2-x_1x_3)^2=0$ и, следовательно, $x_1x_3=x_2^2$. При условии $x_1 \neq 0$ отсюда следует, что числа x_1, x_2, x_3 образуют геометрическую прогрессию. Допустим теперь, что предлагаемое утверждение доказано для случая последовательности, состоящей из k $(k \geqslant 3)$ членов:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k, \tag{1}$$

и пусть q — соответствующий знаменатель прогрессии. Рассмотрим тогда последовательность, состоящую из $k+1$ членов:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ x_{k+1}. \tag{2}$$

Запишем соответствующее условие

$$(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2+x_k^2)(x_2^2+x_3^2+\ldots+x_k^2+x_{k+1}^2)=$$
$$=(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-1}x_k+x_kx_{k+1})^2 \tag{3}$$

и положим для краткости $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2=a^2$. Заметим, что $a \neq 0$, ибо $x_1 \neq 0$. По индуктивному допущению мы имеем:

$$x_2=qx_1;\quad x_3=qx_2;\quad \ldots;\quad x_k=qx_{k-1}. \tag{4}$$

Поэтому равенство (3) можно переписать так:

$$(a^2+x_k^2)(q^2a^2+x_{k+1}^2)=(qa^2+x_kx_{k+1})^2.$$

Раскрыв здесь скобки и сгруппировав члены, мы установим, что

$$(x_kq-x_{k+1})^2a^2=0.$$

Так как $a \neq 0$, то наряду с (4) мы получаем $x_{k+1}=qx_k$. Значит, последовательность x_1, x_2, $\ldots$, x_k, x_{k+1} представляет собой геометрическую прогрессию с тем же знаменателем $q=\frac{x_2}{x_1}$.

На основании доказанного мы можем утверждать, что последовательность, составленная из n первых членов заданной последовательности, при любом натуральном n представляет собой геометрическую прогрессию. Поэтому и данная бесконечная последовательность образует прогрессию, что и требовалось доказать.

22. Пусть $a_1=b_1=a$; тогда в силу условия $a_2=b_2$ имеем:

$$a+d=aq. \qquad (1)$$

Здесь d и q — разность и знаменатель соответствующих прогрессий. Заметим, что в силу условия $a_n>0$ для всех n разность d должна быть неотрицательной. Так как, кроме того, $a_1 \neq a_2$, то $d>0$.

Из формулы (1) ввиду этого следует:

$$q=1+\frac{d}{a}>1.$$

Нам нужно доказать, что при $n>2$

$$a+(n-1)d<aq^{n-1}. \qquad (2)$$

Так как в силу равенства (1) $d=a(q-1)$, то (2) равносильно неравенству

$$a(n-1)(q-1)<a(q^{n-1}-1).$$

Деля обе части на положительную величину $a(q-1)$, получаем:

$$n-1<1+q+\ldots+q^{n-2}.$$

Так как $q>1$, то это неравенство справедливо. Задача решена.

23. По условию задачи

$$a_1>0, \ \frac{a_2}{a_1}=q>0 \quad \text{и} \quad b_2-b_1=d>0,$$

где, как обычно, q есть знаменатель геометрической прогрессии, а d — разность арифметической прогрессии. Пользуясь тем, что $a_n=a_1q^{n-1}$ и $b_n=b_1+(n-1)d$, получаем:

$$\log_\alpha a_n-b_n=(n-1)(\log_\alpha q-d)+\log_\alpha a_1-b_1.$$

Для того чтобы рассматриваемая разность не зависела от n, необходимо и достаточно, чтобы $\log_\alpha q-d=0$. Решив это уравнение, находим:

$$\alpha=q^{\frac{1}{d}}. \qquad (1)$$

Следовательно, искомое число α существует и определяется по формуле (1).

2. Алгебраические уравнения и системы уравнений

24. Записав данную систему в виде

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-xy+y^2)&=1, \\ y(x+y)^2&=2, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

разделим почленно первое уравнение на второе. Освобождаясь от знаменателя и приводя затем подобные члены, получаем:

$$y^2-3xy+2x^2=0. \qquad (3)$$

Разрешив квадратное уравнение (3) относительно y, получаем $y=x$ или $y=2x$. Решая далее каждое из этих уравнений совместно с уравнением (2), находим вещественные решения соответствующих систем. Их всего два:

$$x_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4},\quad y_1=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4};$$

$$x_2=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3},\quad y_2=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}.$$

Каждая из этих пар чисел удовлетворяет и исходной системе; в этом можно убедиться либо непосредственной подстановкой, либо проанализировав способ, которым они были найдены.

25. Преобразуем уравнения данной системы к виду

$$\left.\begin{aligned}(x+y)^2-xy&=4,\\ (x+y)+xy&=2.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$(x+y)^2+(x+y)=6$$

и, следовательно, $x+y=2$ или $x+y=-3$. Сопоставляя каждое из этих уравнений со вторым уравнением исходной системы, мы придем к следующим двум системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=2\\ xy&=0\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad\qquad \left.\begin{aligned}x+y&=-3\\ xy&=5.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Система (1) имеет два решения:

$$x_1=2,\quad y_1=0;$$

$$x_2=0,\quad y_2=2.$$

Система (2) также имеет два решения:

$$x_3=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad y_3=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2};$$

$$x_4=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2},\quad y_4=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Очевидно, что каждое решение исходной системы содержится среди решений указанных систем. Простым анализом нетрудно показать и обратное. Впрочем, в последнем еще проще убедиться непосредственной подстановкой. Таким образом, задача имеет четыре решения.

26. Преобразуем уравнения данной системы к виду

$$\left.\begin{aligned}(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]&=5a^3,\\ xy(x+y)&=a^3,\end{aligned}\right\}$$

после чего положим $x+y=u$, $xy=v$. Подставив $xy(x+y)$ из второго уравнения в первое, найдем $u^3=8a^3$. Так как нас интересуют лишь вещественные решения, то имеем $u=2a$. Из второго уравнения теперь находим:

$$v=\frac{a^3}{u}=\frac{1}{2}a^2.$$

Мы приходим, таким образом, к следующей системе относительно x и y:

$$x+y=2a, \quad xy=\frac{1}{2}a^2.$$

Решая эту систему, получаем:

$$x_1=a\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad y_1=a\frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

$$x_2=a\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad y_2=a\frac{2+\sqrt{2}}{2}.$$

Эти числа удовлетворяют и исходной системе, которая, следовательно, имеет два вещественных решения.

27. Приведя данные уравнения к общему знаменателю, преобразуем систему к виду

$$\left.\begin{aligned}(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]&=12xy,\\ 3(x+y)&=xy.\end{aligned}\right\}$$

Положим $x+y=u$, $xy=v$. Подставив $xy=v$ из второго уравнения в первое, получим:

$$u(u^2-9u)=36u. \tag{1}$$

Заметим, что $u\neq 0$ (в противном случае из второго уравнения следовало бы, что $xy=0$, а это противоречит исходному уравнению). Поэтому из уравнения (1) следует, что либо $u=12$, либо $u=-3$.

В первом случае ($u=12$) получаем систему

$$\left.\begin{aligned}x+y&=12,\\ xy&=36,\end{aligned}\right\}$$

откуда $x=y=6$.

Во втором случае ($u=-3$) имеем:

$$\left.\begin{aligned}x+y&=-3,\\ xy&=-9.\end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет два решения:

$$x=\frac{3}{2}(\pm\sqrt{5}-1), \quad y=\frac{3}{2}(\mp\sqrt{5}-1).$$

Все три найденных решения удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, система имеет всего три решения.

28. Возводя второе уравнение в квадрат и вычитая его из первого, получаем:

$$xy(x^2+y^2-xy)=21. \tag{1}$$

Отсюда, в силу второго уравнения заданной системы,

$$xy=3.$$

Подставляя y во второе уравнение системы, придем к биквадратному уравнению

$$x^4-10x^2+9=0.$$

Отсюда $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_4=-1$, а соответствующие значения y таковы: $y_1=1$, $y_2=-1$, $y_3=3$, $y_4=-3$. Проверкой убеждаемся в том, что все четыре пары чисел являются решениями исходной системы. Следовательно, система имеет четыре решения:

$$x_1=3,\quad y_1=1;\qquad x_2=-3,\quad y_2=-1;$$
$$x_3=1,\quad y_3=3;\qquad x_4=-1,\quad y_4=-3.$$

29. Преобразуем систему к виду

$$\left.\begin{aligned}(x-y)(x^2+y^2+xy-19)&=0,\\(x+y)(x^2+y^2-xy-\ \ 7)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Исходная система тем самым сводится к следующим четырем системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=0,\\x+y&=0,\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad\left.\begin{aligned}x-y&=0,\\x^2+y^2-xy-7&=0,\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy-19&=0,\\x+y&=0,\end{aligned}\right\}\quad(3)\qquad\left.\begin{aligned}x^2+y^2+xy-19&=0,\\x^2+y^2-xy-\ \ 7&=0.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Первая система имеет единственное решение: $x=0$, $y=0$. Вторая имеет два решения: $x=\pm\sqrt{7}$, $y=\pm\sqrt{7}$. Третья также имеет два решения: $x=\pm\sqrt{19}$, $y=\mp\sqrt{19}$. Переходя к четвертой системе, заметим, что, складывая оба уравнения и вычитая одно уравнение из другого, мы заменим эту систему следующей равносильной:

$$\left.\begin{aligned}xy&=6,\\x^2+y^2&=13.\end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет четыре решения:

$$x=\pm 2,\quad y=\pm 3 \text{ и } x=\pm 3,\quad y=\pm 2.$$

Таким образом, предлагаемая в задаче система имеет девять решений:

$(0,\ 0)$, $(\sqrt{7},\ \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7},\ -\sqrt{7})$, $(\sqrt{19},\ -\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19},\ \sqrt{19})$, $(2,\ 3)$, $(-2,\ -3)$, $(3,\ 2)$, $(-3,\ -2)$.

30. Преобразуем уравнения системы к виду:

$$\left.\begin{aligned}2(x+y)&=5xy,\\8(x+y)[(x+y)^2-3xy]&=65.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя $x+y$ из первого уравнения во второе и полагая $xy=v$, получим:

$$25v^3-12v^2-13=0.$$

Это уравнение, очевидно, удовлетворяется при $v=1$. Деля левую часть на $v-1$, придем к уравнению

$$25v^2+13v+13=0.$$

Последнее не имеет вещественных корней. Таким образом, остается лишь одна возможность: $v=1$. Внося это значение в первое уравнение, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} xy&=1, \\ x+y&=\frac{5}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $x_1=2$, $y_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=\frac{1}{2}$, $y_2=2$.

Обе пары чисел удовлетворяют и исходному уравнению. Таким образом, система имеет два и только два вещественных решения.

31. Складывая оба уравнения, а затем вычитая из первого уравнения второе, приходим к следующей равносильной системе:

$$\left.\begin{aligned} (x-y)(x^2+y^2+xy)&=7, \\ (x-y)\,xy&=2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Представив первое уравнение в виде

$$(x-y)^3+3xy\,(x-y)=7,$$

найдем, что в силу второго уравнения $(x-y)^3=1$.

Так как нас интересуют лишь вещественные решения, то $x-y=1$. Учитывая это, легко обнаруживаем, что $xy=2$.

Решая, далее, систему

$$\left.\begin{aligned} xy&=2, \\ x-y&=1, \end{aligned}\right\}$$

найдем два ее решения:

$$x_1=2, \quad y_1=1; \qquad x_2=-1, \quad y_2=-2.$$

Нетрудно проверить, что обе пары чисел удовлетворяют исходной системе. Таким образом, система имеет два вещественных решения.

32. Преобразуем второе уравнение к виду

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=7.$$

Полагая $x^2+y^2=u$, $xy=v$, запишем это уравнение так:

$$u^2-2v^2=7.$$

Возведя в квадрат первое уравнение системы, получим еще одно условие для u и v:

$$u+2v=1.$$

Исключив u из двух последних уравнений, получим:

$$v^2-2v-3=0,$$

откуда

$$v_1=3, \quad v_2=-1.$$

Тогда соответствующие значения u будут равны

$$u_1=-5, \quad u_2=\text{[illegible]}$$

Так как $u=x^2+y^2$ и нас интересуют лишь вещественные решения исходного уравнения, то первую пару значений u и v следует отбросить. Вторая пара приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=3,\\ xy&=-1.\end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет четыре вещественных решения:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Легко, однако, проверить, что исходной системе удовлетворяют только первые два из них. Таким образом, предложенная в задаче система имеет два вещественных решения.

33. Возводя первое уравнение в пятую степень и вычитая из полученного результата второе уравнение, получаем после упрощений

$$xy\,(x^3+y^3)+2x^2y^2+6=0. \tag{1}$$

Из первого уравнения, после возведения его в куб, следует, что $x^3+y^3=1-3xy$; в силу чего уравнение (1) принимает вид

$$x^2y^2-xy-6=0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$(xy)_1=3,\quad (xy)_2=-2.$$

Присоединяя сюда $x+y=1$, найдем четыре пары чисел:

$$(2,\ -1);\ (-1,\ 2);\ \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right);$$
$$\left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right).$$

Легко проверить, что все они удовлетворяют исходной системе уравнений.

34. Преобразуем уравнения системы к виду

$$\left.\begin{aligned} (x^2-y^2)^2+x^2y^2&=13,\\ x^2-y^2+2xy&=1.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя x^2-y^2 из второго уравнения в первое, получим:

$$5\,(xy)^2-4xy-12=0.$$

Отсюда

$$(xy)_1=2,\quad (xy)_2=-\frac{6}{5}. \tag{1}$$

Так как нас интересуют лишь те решения, для которых $xy\geqslant 0$, то имеется лишь одна возможность

$$xy=2. \tag{2}$$

Подставляя отсюда y во второе уравнение, получим:

$$x^4+3x^2-4=0.$$

Среди всех корней этого уравнения вещественными являются лишь два: $x_1=1$ и $x_2=-1$. Соответствующими значениями y в силу (2) будут: $y_1=2$ и $y_2=-2$. Обе пары чисел (x, y) удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, задача имеет два решения:

$$x_1=1,\ y_1=2; \qquad x_2=-1,\ y_2=-2.$$

35. Раскрыв скобки в уравнениях системы и положив $x+y=u$, $xy=v$, запишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2-2v&=9,\\ uv-u&=3.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Если теперь обе части второго уравнения умножить на 2, а затем прибавить и вычесть соответствующие части первого уравнения то система (1) заменится следующей равносильной:

$$\left.\begin{aligned} (u+v)^2-2(u+v)&=15,\\ (u-v)^2+2(u-v)&=3.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из первого уравнения системы (2) следует:

$$(u+v)_1=5; \quad (u+v)_2=-3.$$

Из второго уравнения получаем

$$(u-v)_1=-3; \quad (u-v)_2=1.$$

Таким образом, нахождение всех решений системы (2) сводится к решению следующих четырех систем:

$$\left.\begin{aligned} u+v&=5,\\ u-v&=-3,\end{aligned}\right\} \ (3) \qquad \left.\begin{aligned} u+v&=5,\\ u-v&=1,\end{aligned}\right\} \ (4)$$

$$\left.\begin{aligned} u+v&=-3,\\ u-v&=-3,\end{aligned}\right\} \ (5) \qquad \left.\begin{aligned} u+v&=-3,\\ u-v&=1.\end{aligned}\right\} \ (6)$$

Решение системы (3): $u_1=1$, $v_1=4$; решение системы (4): $u_2=3$, $v_2=2$; решение системы (5): $u_3=-3$, $v_3=0$ и, наконец, решение системы (6): $u_4=-1$, $v_4=-2$.

Чтобы найти все решения исходной системы, нам предстоит теперь решить следующие четыре системы второго порядка, отличающиеся лишь правыми частями:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1,\\ xy&=4,\end{aligned}\right\} \ (7) \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=3,\\ xy&=2,\end{aligned}\right\} \ (8)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-3,\\ xy&=0,\end{aligned}\right\} \ (9) \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-1,\\ xy&=-2.\end{aligned}\right\} \ (10)$$

Решив эти уравнения, найдем все решения исходной системы. Их, очевидно, всего восемь:

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}\right),$$

$$(2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ -3),\ (1,\ -2),\ (-2,\ 1).$$

36. Заметим сначала, что по смыслу задачи $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Перемножив левые и правые части данных уравнений, получим:

$$x^4 - y^4 = 6. \qquad (1)$$

Умножая каждое из уравнений на xy и складывая, будем иметь:

$$x^4 - y^4 + 2x^2y^2 = 7xy. \qquad (2)$$

В силу (1) и (2), теперь получаем:

$$2x^2y^2 - 7xy + 6 = 0,$$

откуда

$$(xy)_1 = 2; \quad (xy)_2 = \frac{3}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом, любое решение исходной системы удовлетворяет уравнению (1) и одному из уравнений (3). Можно было бы поэтому решить каждое из двух уравнений (3) совместно с уравнением (1). Это, однако, привело бы к уравнению восьмого порядка и усложнило бы окончательное решение задачи. Заметим в связи с этим следующее. Если снова умножить каждое из уравнений исходной системы на xy и затем из первого вычесть второе, то получим уравнение

$$x^4 + y^4 = 5xy, \qquad (4)$$

которому также удовлетворяет любое решение исходной системы.

Рассмотрим две возможности:

1) Пусть в соответствии с (3)

$$xy = 2. \qquad (5)$$

Тогда, в силу (4), $x^4 + y^4 = 10$. Решая это уравнение совместно с (1), найдем:

$$x^4 = 8,$$

и, следовательно,

$$x_1 = \sqrt[4]{8}, \quad x_2 = -\sqrt[4]{8}, \quad x_3 = i\sqrt[4]{8}, \quad x_4 = -i\sqrt[4]{8}.$$

В силу (5) соответствующие значения y суть

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{2}, \quad y_2 = -\sqrt[4]{2}, \quad y_3 = -i\sqrt[4]{2}, \quad y_4 = i\sqrt[4]{2}.$$

2) Во втором случае

$$xy = \frac{3}{2}. \qquad (6)$$

Уравнение (4) приводит нас тогда к соотношению $x^4 + y^4 = \frac{15}{12}$ которое вместе с (1) дает $x^4 = \frac{27}{4}$. Отсюда

$$x_5 = \sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_6 = -\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_7 = i\sqrt[4]{\frac{27}{4}}, \quad x_8 = -i\sqrt[4]{\frac{27}{4}};$$

соответствующие значения y суть

$$y_5=\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\quad y_6=-\sqrt[4]{\frac{3}{4}},\quad y_7=-i\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$y_8=i\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Таким образом, любое решение исходной системы содержится среди найденных восьми пар чисел. Легко, однако, проверить, что все найденные восемь пар чисел удовлетворяют исходной системе. Следовательно, все решения системы найдены.

37. Преобразуем второе уравнение к виду

$$(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=bx^2y^2.$$

Подставив сюда axy вместо x^2+y^2 из первого уравнения, найдем:

$$(a^2-2-b)\,x^2y^2=0.$$

Возможны два случая:

1) $a^2-2-b\neq 0$. Легко видеть, что при этом условии система имеет лишь одно решение: $x=0$, $y=0$.

2) $a^2-2-b=0$. При выполнении этого условия второе уравнение получается в результате возведения в квадрат обеих частей первого. Поэтому если x и y — любая пара чисел, удовлетворяющая первому уравнению, то она же удовлетворит и второму. Система, следовательно, имеет бесконечно много решений.

38. Преобразуем левую часть уравнения к виду

$$\frac{x+a}{x+b}\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\,\frac{x-a}{x-b}\right)+\frac{x-a}{x-b}\left(\frac{x-a}{x-b}-\frac{b}{a}\,\frac{x+a}{x+b}\right)=.$$

Замечая, что выражения в скобках отличаются множителем $-\frac{a}{b}$, получаем:

$$\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{a}{b}\,\frac{x-a}{x-b}\right)\left(\frac{x+a}{x+b}-\frac{b}{a}\,\frac{x-a}{x-b}\right)=0.$$

Отсюда при условии $a\neq b$ следует:

$$[x^2-(a+b)\,x-ab]\,[x^2+(a+b)\,x-ab]=0,$$

и мы находим четыре корня исходного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}.$$

В случае $a=b$ уравнение удовлетворяется всеми значениями x.

39. Положим $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$; тогда уравнение приводится к виду

$$3t^2-10t+8=0.$$

Отсюда

$$t_1=2 \text{ и } t_2=\frac{4}{3}.$$

Решая далее два квадратных уравнения относительно x, найдем четыре корня исходного уравнения:

$$x_1=3+\sqrt{21}, \quad x_2=3-\sqrt{21}, \quad x_3=6, \quad x_4=-2.$$

40. Положим

$$\frac{x+y}{xy}=u \quad \text{и} \quad \frac{x-y}{xy}=v. \tag{1}$$

Тогда уравнение заданной системы можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} u+\frac{1}{u}&=a+\frac{1}{a}, \\ v+\frac{1}{v}&=b+\frac{1}{b}. \end{aligned}\right\}$$

Решая каждое из этих уравнений, найдем:

$$u_1=a, \quad u_2=\frac{1}{a}, \tag{2}$$

$$v_1=b, \quad v_2=\frac{1}{b}. \tag{3}$$

Нам предстоит теперь решить четыре системы вида (1), в правых частях которых стоят всевозможные комбинации значений u и v, определяемые формулами (2) и (3). Запишем систему (1) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}&=u, \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}&=v. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x}&=\frac{1}{2}(u-v), \\ \frac{1}{y}&=\frac{1}{2}(u+v). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из формул (5) следует, что для разрешимости системы (4), а тем самым и исходной системы числа a и b должны быть подчинены дополнительным условиям, кроме условия $ab \neq 0$, которое вытекает из вида уравнений исходной системы. Пусть

$$|a| \neq |b|. \tag{6}$$

Тогда, подставляя в правые части формул (5) значения $u=a$, $v=b$, а затем $u=\frac{1}{a}$, $v=\frac{1}{b}$, найдем два решения:

$$x_1=\frac{2}{a-b}, \quad y_1=\frac{2}{a+b}; \quad x_2=\frac{2ab}{b-a}, \quad y_2=\frac{2ab}{a+b}.$$

Пусть, далее,

$$|ab| \neq 1. \tag{7}$$

Подставляя тогда в правые части формул (5) значения $u=a$, $v=\frac{1}{b}$, а затем $u=\frac{1}{a}$, $v=b$, найдем еще два решения:

$$x_3=\frac{2b}{ab-1}, \quad y_3=\frac{2b}{ab+1}; \quad x_4=\frac{2a}{1-ab}, \quad y_4=\frac{2a}{1+ab}.$$

Таким образом, если выполнены оба условия (6) и (7), то система имеет четыре решения; если одно из условий нарушено, — то только два решения; если, наконец, оба условия нарушены (это может быть лишь в случае $|a|=|b|=1$), то система вообще не имеет решений.

41. Легко видеть, что числа

$$x_1=4{,}5 \quad \text{и} \quad x_2=5{,}5$$

удовлетворяют данному уравнению. Поэтому многочлен $(x-4{,}5)^4+$ $+(x-5{,}5)^4-1$ делится на произведение $(x-4{,}5)(x-5{,}5)$ без остатка. Чтобы выполнить деление и свести вопрос к решению квадратного уравнения, удобно представить указанный многочлен в виде

$$[(x-4{,}5)^4-1]+(x-5{,}5)^4.$$

Разлагая выражение, стоящее в квадратных скобках, по формуле

$$\alpha^4-1=(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha^2+1)=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1),$$

приходим к уравнению

$$(x-5{,}5)\left\{(x-4{,}5)^3+(x-4{,}5)^2+(x-4{,}5)+1\right\}+(x-5{,}5)^4=0.$$

Выносся здесь общий множитель за скобку, будем иметь:

$$(x-5{,}5)\left\{(x-4{,}5)^3+(x-4{,}5)^2+(x-4{,}5)+1+\right.$$
$$\left.+[(x-4{,}5)-1]^3\right\}=(x-5{,}5)(x-4{,}5)\left\{2(x-4{,}5)^2-\right.$$
$$\left.-2(x-4{,}5)+4\right\}=0.$$

Отсюда

$$x_1=5{,}5, \quad x_2=4{,}5, \quad x_{3,\,4}=\frac{10\pm i\sqrt{7}}{2}.$$

42. Из второго уравнения системы находим, что $y-5=|x-1|\geqslant 0$ и, следовательно, $y\geqslant 5$. Поэтому первое уравнение может быть записано в виде

$$y-5=1-|x-1|.$$

Сложив это уравнение со вторым, получим:

$$2(y-5)=1.$$

Отсюда $y=\frac{11}{2}$.

Из второго уравнения теперь находим $|x-1|=\frac{1}{2}$ и, следовательно, $x-1=\pm\frac{1}{2}$. Поэтому $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$. Система имеет два решения:

$$x_1=\frac{1}{2},\quad y_1=\frac{11}{2};\quad x_2=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{11}{2}.$$

43. Группировкой членов приведем левую часть к виду

$$(2x+y-1)^2+(x+2y+1)^2=0.$$

Следовательно,

$$2x+y-1=0,\quad x+2y+1=0,$$

откуда

$$x=1,\quad y=-1.$$

Укажем еще один способ решения. Расположив в левой части слагаемые по убывающим степеням x, получим квадратное уравнение относительно x:

$$5x^2+(8y-2)x+(5y^2+2y+2)=0. \qquad (1)$$

Это уравнение при вещественных значениях y имеет вещественные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен, т. е.

$$(8y-2)^2-4\cdot 5(5y^2+2y+2)\geqslant 0. \qquad (2)$$

Это неравенство после раскрытия скобок принимает вид

$$-36(y+1)^2\geqslant 0.$$

Последнее возможно лишь при $y=-1$, а тогда из уравнения (1) следует, что $x=1$.

44. Преобразуем уравнение к виду

$$[x+2\cos(xy)]^2+4[1-\cos^2(xy)]=0.$$

Оба слагаемых неотрицательны, поэтому

$$x+2\cos(xy)=0,\quad \cos^2(xy)=1.$$

Отсюда $\cos(xy)=\pm 1$. В первом случае имеем систему

$$\cos(xy)=1,\quad x+2\cos(xy)=0.$$

Отсюда $x=-2$ и $y=k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Во втором случае

$$\cos(xy) = -1, \quad x + 2\cos(xy) = 0.$$

Отсюда $x=2$ и $y=\frac{\pi}{2}(2m+1)$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Таким образом, уравнение имеет две бесконечные серии различных вещественных решений, причем значение x в каждой серии одно и то же.

45. Исключив z из данной системы, будем иметь:

$$2xy-(2-x-y)^2=4$$

или

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4=0,$$

т. е.

$$(x-2)^2+(y-2)^2=0.$$

Для вещественных чисел x и y это возможно только при $x=2$ и $y=2$.

Из первого уравнения системы находим $z=-2$. Система имеет только одно вещественное решение:

$$x=2, \quad y=2, \quad z=-2.$$

46. Первое решение. Заметим, что по заданным x и y значение z определяется из первого уравнения единственным образом:

$$z=x^2+y^2. \qquad (1)$$

Подставив это значение z во второе уравнение, получим:

$$x^2+x+y^2+y=a.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Если теперь $a+\frac{1}{2}<0$, то уравнение (2) не имеет вещественных решений, так как при вещественных x и y в левой части стоит неотрицательное число. Если же $a+\frac{1}{2}>0$, то уравнение (2), а с ним и вся система, имеет, очевидно, больше одного решения.

Следовательно, единственное вещественное решение возможно только тогда, когда $a+\frac{1}{2}=0$. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0$$

и имеет единственное вещественное решение: $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. Отсюда, найдя еще z из уравнения (1), заключаем, что данная система имеет единственное вещественное решение только при $a=-\frac{1}{2}$, а именно:

$$x=-\frac{1}{2}, \quad y=-\frac{1}{2}, \quad z=\frac{1}{2}.$$

Второе решение. Легко видеть, что если данная система имеет некоторое решение $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, то она также имеет еще и такое решение: $x=y_0$, $y=x_0$, $z=z_0$. Поэтому для единственности необходимо, чтобы $x=y$. Данная система при этом условии примет вид

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2=z, \\ 2x+z=a. \end{array}\right\}$$

Исключая z, получим квадратное уравнение для x:

$$2x^2+2x-a=0.$$

Для того чтобы и это уравнение имело единственный вещественный корень, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения был равен нулю:

$$D=2^2-4\cdot 2(-a)=4(1+2a)=0.$$

Отсюда $a=-\frac{1}{2}$ и соответствующее значение $x=-\frac{1}{2}$. Мы приходим в итоге к прежнему результату.

47. Пусть x_0, y_0 — некоторое решение системы. В силу первого уравнения

$$[(x_0^2+y_0^2)-a]^2=x_0^2y_0^2+\frac{1}{x_0^2y_0^2}+2, \tag{1}$$

а согласно второму уравнению

$$(x_0^2+y_0^2)^2=x_0^2y_0^2+\frac{1}{x_0^2y_0^2}+2+b^2. \tag{2}$$

Раскрывая в левой части равенства (1) квадратные скобки и вычитая из него равенство (2), получим:

$$-2a(x_0^2+y_0^2)+a^2=-b^2.$$

Отсюда

$$x_0^2+y_0^2=\frac{a^2+b^2}{2a}.$$

Так как a и b вещественны, то утверждение доказано.

48. Легко видеть, что система всегда имеет решение

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1. \tag{1}$$

Очевидно также, что в случае

$$a=b=c \tag{2}$$

все три уравнения принимают вид $x+y+z=3$, и система обладает бесконечным числом решений.

Покажем, что если условие (2) не выполнено, т. е. если среди чисел a, b и c есть неравные, то решение (1) единственно.

Сложив сначала все три уравнения данной системы, получаем:

$$(a+b+c)(x+y+z)=3\,(a+b+c).$$

Сократив на $a+b+c$, найдем:

$$x+y+z=3. \qquad (3)$$

Отсюда $z=3-x-y$. Подставляя это выражение для z в первые два уравнения системы, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}(a-c)\,x+(b-c)\,y&=a+b-2c,\\ (b-a)\,x+(c-a)\,y&=-2a+b+c.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Умножая первое из этих уравнений на $c-a$, второе на $c-b$ и складывая, найдем:

$$[-(a-c)^2+(b-a)(c-b)]\,x=(a+b-2c)(c-a)+$$
$$+(c-b)(-2a+b+c). \qquad (5)$$

Так как уравнение (5) удовлетворяется при $x=1$, то коэффициент при x должен тождественно по a, b и c совпадать с правой частью уравнения. Раскрыв скобки в обоих выражениях, убеждаемся в том, что они действительно совпадают и равны:

$$-\frac{1}{2}[2a^2-4ac+2c^2-2bc+2b^2+2ac-2ab]=$$
$$=-\frac{1}{2}[(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2].$$

Таким образом, если среди чисел a, b и c есть неравные, то уравнение (5) удовлетворяется лишь при $x=1$. Из уравнений (4) после этого легко следует, что $y=1$, а из соотношения (3) — что $z=1$. Таким образом, при условии

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2\neq 0$$

система имеет единственное решение:

$$x=1,\quad y=1,\quad z=1.$$

49. Сложив все уравнения, получим

$$(a+2)(x+y+z)=1+a+a^2. \qquad (1)$$

Если $a\neq -2$, то

$$x+y+z=\frac{1+a+a^2}{a+2}.$$

Решая это уравнение вместе с каждым уравнением исходной системы, найдем, предполагая $a\neq 1$:

$$x=-\frac{1+a}{a+2},\quad y=\frac{1}{a+2},\quad z=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

При $a=-2$ система несовместна (равенство (1) невозможно ни при каких x, y, z). При $a=1$ система является неопределенной: любые три числа, удовлетворяющие условию $x+y+z=1$, образуют решения.

50. Легко видеть, что если среди трех чисел a_1, a_2, a_3 два числа равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений. В самом деле, пусть, например, $a_2=0$ и $a_3=0$. Положив тогда $x=0$ и выбрав y и z такими, чтобы удовлетворялось уравнение $y+z=1$, мы удовлетворим всем трем уравнениям системы.

Поэтому, отыскивая условие единственности, мы можем сразу предположить, что какие-нибудь два числа отличны от нуля. Пусть, например,

$$a_2 \neq 0 \text{ и } a_3 \neq 0. \tag{1}$$

Вычитая из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе, находим $a_1x=a_2y=a_3z$. Отсюда, в силу (1), следует:

$$y=\frac{a_1}{a_2}x, \quad z=\frac{a_1}{a_3}x. \tag{2}$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение, получим:

$$x\left(1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}\right)=1. \tag{3}$$

Это уравнение разрешимо лишь при условии, что выражение, стоящее в скобках, отлично от нуля.

Учитывая (1), мы приходим к условию

$$D=a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2a_3 \neq 0. \tag{4}$$

При выполнении этого условия из (3) и (2) находим:

$$x=\frac{a_2a_3}{D}, \quad y=\frac{a_1a_3}{D}, \quad z=\frac{a_1a_2}{D}. \tag{5}$$

Эти три числа образуют решение системы и притом, как это следует из способа их получения, единственное.

Таким образом, условие (4) является необходимым условием того, что система имеет решение и притом единственное.

Легко проверить, что если бы вначале мы предположили отличной от нуля другую пару чисел a_1, a_3 или a_1, a_2, то аналогичное рассуждение привело бы нас снова к условию (4) и к тому же решению (5). Так как, далее, из условия (4) следует, что хотя бы одна из трех пар чисел отлична от нуля, то указанное условие является не только необходимым, но и достаточным.

51. Умножаем уравнения соответственно на a, $-b$, $-c$, $-d$ и складываем. Получаем $(a^2+b^2+c^2+d^2)\,x=ap-bq-cr-ds$ или

$$x=\frac{ap-bq-cr-ds}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Аналогично находим

$$y=\frac{bp+aq-dr+cs}{a^2+b^2+c^2+d^2}; \quad z=\frac{cp+dq+ar-bs}{a^2+b^2+c^2+d^2};$$

$$t=\frac{dp-cq+br+as}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

52. Сложив все уравнения системы, найдем:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n(n+1)}. \qquad (1)$$

Правую часть этого уравнения обозначим через A. Вычитая теперь из первого уравнения второе, получаем:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)-nx_1=a_1-a_2.$$

В силу (1) имеем:

$$x_1=\frac{A-(a_1-a_2)}{n}.$$

Вообще для получения x_k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ вычтем из k-го уравнения $(k+1)$-е уравнение. Аналогично предыдущему найдем:

$$x_k=\frac{A-(a_k-a_{k+1})}{n}.$$

Наконец, вычитая из последнего уравнения первое, получим:

$$x_n=\frac{A-(a_n-a_1)}{n}.$$

Найденные значения можно объединить в единой формуле:

$$x_i=\frac{A-(a_i-a_{i+1})}{n}\ (1\leqslant i\leqslant n) \qquad (2)$$

(здесь под a_{n+1} следует понимать a_1). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что набор чисел (2) действительно удовлетворяет всем уравнениям системы. Таким образом, данная система имеет единственное решение.

53. Сложив все равенства, после деления на 3 получим:

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{100}=0. \qquad (1)$$

Левая часть этого нового равенства имеет сто слагаемых, и ее можно представить в форме

$$(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+\ldots+(x_{97}+x_{98}+x_{99})+x_{100}=0.$$

Но каждая из сумм, стоящая в скобках, равна 0 в силу исходных равенств. Поэтому $x_{100}=0$. Аналогично, переставляя x_{100} на первое место и представляя равенство (1) в форме

$$(x_{100}+x_1+x_2)+(x_3+x_4+x_5)+\ldots+(x_{96}+x_{97}+x_{98})+x_{99}=0,$$

найдем, что $x_{99}=0$. Переводя затем x_{99} на первое место и снова группируя слагаемые по три, мы убедимся в том, что $x_{98}=0$ и т. д. Таким образом,

$$x_1=x_2=\ldots=x_{100}=0,$$

что и требовалось доказать.

54. Сложив все уравнения, получим

$$(x+y+z)^2-(x+y+z)-12=0. \qquad (1)$$

Положим $x+y+z=t$, тогда из уравнения (1) найдем:

$$t_1=-3, \quad t_2=4. \tag{2}$$

Подставляя сумму $y+z=t-x$ в первое уравнение исходной системы, получаем

$$x^2+x(t-x)-x=2,$$

откуда

$$x=\frac{2}{t-1}. \tag{3}$$

Аналогично подстановка $x+z=t-y$ во второе уравнение и $x+y=t-z$ в третье уравнение исходной системы дает

$$y=\frac{4}{t-1} \tag{4}$$

и

$$z=\frac{6}{t-1}. \tag{5}$$

Подставляя два значения t в формулы (3), (4) и (5), найдем два решения исходной системы

$$\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right); \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\right).$$

55. Переписываем систему в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} x+y&=7+z, \\ x^2+y^2&=37+z^2, \\ x^3+y^3&=1+z^3. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Возводя первое из уравнений в квадрат и исключая x^2+y^2 посредством второго уравнения, находим

$$(7+z)^2=37+z^2+2xy,$$

откуда

$$xy=6+7z.$$

Далее получаем

$$(7+z)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

или

$$x^3+y^3=(7+z)^3-3(6+7z)(7+z)=z^3-18z+217. \tag{2}$$

Сравнивая (2) с последним уравнением системы (1), находим, что $z=12$. Но тогда

$$\left.\begin{aligned} x+y&=19, \\ xy&=90 \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему двух уравнений, получаем:

$$x_1=9, \quad y_1=10, \quad z_1=12 \quad \text{и} \quad x_2=10, \quad y_2=9, \quad z_2=12.$$

Легко проверить подстановкой, что эти два набора чисел удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, исходная система имеет два решения.

56. Делим первое уравнение на второе и на третье; в результате получаем

$$\frac{y+z}{x+y}=\frac{5}{3}, \quad \frac{z+x}{x+y}=\frac{4}{3}.$$

Умножая оба уравнения на $x+y$, находим

$$\left.\begin{aligned} 5x+2y-3z=0,\\ x+4y-3z=0. \end{aligned}\right\}$$

Из этих уравнений следует, что $y=2x$, $z=3x$. Подставляя отсюда y и z в первое уравнение первоначальной системы, найдем, что $x^2=1$. В результате получаем

$$x_1=1, \quad y_1=2, \quad z_1=3; \qquad x_2=-1, \quad y_2=-2, \quad z_2=-3.$$

Проверкой убеждаемся в том, что оба набора удовлетворяют и исходной системе.

57. Замечая, что разность двух уравнений предлагаемой системы разлагается на множители, образуем разности первого уравнения и второго, первого уравнения и третьего. Полученные таким образом два уравнения вместе с третьим уравнением исходной системы составят следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} (u-w)(u+w-1)=0,\\ (v-w)(v+w-1)=0,\\ w^2+u^2+v=2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Очевидно, что всякое решение исходной системы удовлетворяет системе (1). Так как, и обратно, все уравнения исходной системы могут быть получены путем сложения и вычитания уравнений системы (1), то любое решение системы (1) является решением исходной и, следовательно, эти системы равносильны.

Система (1) распадается на следующие четыре системы:

$$\left.\begin{aligned} u-w=0,\\ v-w=0,\\ w^2+u^2+v=2, \end{aligned}\right\} (2) \qquad \left.\begin{aligned} u-w=0,\\ v+w-1=0,\\ w^2+u^2+v=2, \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} u+w-1=0,\\ v-w=0,\\ w^2+u^2+v=2, \end{aligned}\right\} (4) \qquad \left.\begin{aligned} u+w-1=0,\\ v+w-1=0,\\ w^2+u^2+v=2. \end{aligned}\right\} (5)$$

В силу сказанного очевидно, что все решения этих четырех систем и только они являются решениями исходной системы. Каждая из четырех данных систем без труда сводится к квадратному уравнению и имеет два решения. Приведем соответствующие решения (u, v, w), опуская выкладки.

Решения системы (2):

$$\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right),$$
$$\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{17}}{4},\ \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right).$$

Решения системы (3):

$$(1,\ 0,\ 1),\quad \left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$$

Решения системы (4):

$$(0,\ 1,\ 1),\quad \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$$

Решения системы (5):

$$(1,\ 1,\ 0),\quad \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right).$$

Таким образом, исходная система имеет всего восемь решений.

58. Вычитая из второго уравнения первое, получаем $z^2-y^2+x(z-y)=3$, откуда $(z-y)(x+y+z)=3$. Вычитая из третьего уравнения второе, аналогично находим:

$$(y-x)(x+y+z)=3.$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$z-y=y-x. \tag{1}$$

Далее переписываем первоначальную систему в такой форме:

$$\left.\begin{aligned}(x-y)^2&=1-3xy,\\(x-z)^2&=4-3xz,\\(y-z)^2&=7-3yz.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из (1) следует, что правые части первого и третьего уравнений системы (2) равны, т. е. $1-3xy=7-3yz$, откуда

$$z-x=\frac{2}{y}. \tag{3}$$

Так как согласно (1)

$$z+x=2y, \tag{4}$$

то, решая совместно (3) и (4), находим

$$x=y-\frac{1}{y},\quad z=y+\frac{1}{y}.$$

Подставив полученное выражение для x в первое уравнение исходной системы, будем иметь

$$3y^4-4y^2+1=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\pm 1, \quad y_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В результате находим четыре набора чисел

$$(0,\ 1,\ 2), \quad (0,\ -1,\ -2);$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Проверкой убеждаемся в том, что все они удовлетворяют исходной системе.

59. Перемножив левые и правые части уравнений, получим:

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{n-2}=a_1a_2\ldots a_n,$$

откуда

$$x_1x_2\ldots x_n=\sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n}; \tag{1}$$

k-е уравнение системы перепишем в виде

$$a_kx_k^2=x_1x_2\ldots x_n.$$

Отсюда, в силу (1), имеем:

$$x_k=\sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1a_2\ldots a_n}}{a_k}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Проверкой убеждаемся, что этот набор чисел удовлетворяет исходной системе. Таким образом, задача имеет единственное решение.

60. Заметим сначала, что при $a=1$ система принимает вид

$$\left.\begin{aligned}(x+y+z)^2&=k^2,\\(x+y+z)^2&=l^2,\\(x+y+z)^2&=m^2.\end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет решение лишь при дополнительном условии

$$k^2=l^2=m^2. \tag{1}$$

При этом условии, очевидно, получается бесконечно много решений. В дальнейшем мы можем, таким образом, предположить, что

$$a\neq 1. \tag{2}$$

Сложив все уравнения системы и положив для краткости

$$x+y+z=t,$$

получим:

$$t^2(a+2)=k^2+l^2+m^2.$$

Так как по условию задачи правая часть положительна, то при $a=-2$ система вообще не имеет решений. Считая

$$a \neq -2, \tag{3}$$

находим:

$$t=\pm\sqrt{\frac{k^2+l^2+m^2}{a+2}}. \tag{4}$$

Преобразовав далее уравнения системы к виду:

$$\left.\begin{aligned} t^2+t(a-1)x=k^2, \\ t^2+t(a-1)y=l^2, \\ t^2+t(a-1)z=m^2, \end{aligned}\right\}$$

мы определим отсюда в соответствии с (4) два набора значений x и y:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\;\frac{k^2(a+1)-l^2-m^2}{(a+2)(a-1)},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\;\frac{l^2(a+1)-k^2-m^2}{(a+2)(a-1)},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{a+2}{k^2+l^2+m^2}}\;\frac{m^2(a+1)-k^2-l^2}{(a+2)(a-1)}.$$

Проверкой устанавливаем, что обе тройки чисел удовлетворяют исходной системе. Таким образом, в общем случае ($a \neq 1$, $a \neq -2$) система имеет два различных решения.

61. Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая из получившегося соотношения второе уравнение, найдем:

$$xy+yz+zx=11. \tag{1}$$

В силу третьего уравнения отсюда следует:

$$(xy)^2+3xy-10=0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$(xy)_1=2, \quad (xy)_2=-5. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь две возможности.

1) Пусть

$$xy=2. \tag{3}$$

Исключив $x+y$ из первого и третьего уравнений исходной системы, получим следующее уравнение относительно z:

$$z^2-6z+9=0.$$

Отсюда следует, что $z^{(1)}=3$.

Первое уравнение исходной системы тогда дает

$$x+y=3.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением (3), получаем:

$$x_1^{(1)}=1, \quad y_1^{(1)}=2,$$
$$x_2^{(1)}=2, \quad y_2^{(1)}=1.$$

2) Пусть теперь в соответствии с (2)

$$xy=-5. \tag{4}$$

Из первого и третьего уравнений тогда получим:

$$z^2-6z+16=0.$$

Это уравнение имеет невещественные корни, и, следовательно, дальнейшие исследования, связанные с условием (4), можно не проводить.

Таким образом, возможными вещественными решениями являются лишь следующие тройки чисел (x, y, z):

$$(1,\ 2,\ 3) \text{ и } (2,\ 1,\ 3).$$

Проверкой убеждаемся, что обе они удовлетворяют исходной системе. Таким образом, все вещественные решения системы найдены.

62. Легко заметить, что левые части уравнений могут быть разложены на множители, в результате чего система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x+z)&=a,\\ (x+y)(y+z)&=b,\\ (x+z)(y+z)&=c. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Положим для краткости

$$x+y=u, \quad x+z=v, \quad y+z=w.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} uv&=a,\\ uw&=b,\\ vw&=c. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Перемножив все уравнения, найдем:

$$(uvw)^2=abc,$$

откуда

$$uvw=\pm\sqrt{abc}. \tag{3}$$

Теперь уже нахождение всех решений системы (2) не представляет труда. Выбирая в формуле (3) сначала знак плюс, а затем минус, устанавливаем, что система (2) имеет два решения:

$$u_1=\frac{\sqrt{abc}}{c}, \quad v_1=\frac{\sqrt{abc}}{b}, \quad w_1=\frac{\sqrt{abc}}{a} \tag{4}$$

и

$$u_2=\frac{-\sqrt{abc}}{c}, \quad v_2=\frac{-\sqrt{abc}}{b}, \quad w_2=\frac{-\sqrt{abc}}{a}. \tag{5}$$

Остается решить две системы уравнений, получающиеся в результате подстановки в правые части уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=u,\\ x+z&=v,\\ y+z&=w \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

значений (4) и (5).

Сложив все уравнения (6), получим $x+y+z=\dfrac{u+v+w}{2}$. Отсюда, в силу (6), легко следует:

$$x=\frac{u+v-w}{2}, \quad y=\frac{u-v+w}{2}, \quad z=\frac{-u+v+w}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, исходная система имеет всего два решения, которые определяются формулами (7) при подстановке в них значений (4) и (5).

63. Сложив все уравнения, найдем:

$$xy+xz+yz=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}. \tag{1}$$

В силу уравнений системы теперь легко получаем:

$$\left.\begin{aligned} xy&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\alpha,\\ xz&=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}=\beta,\\ yz&=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}=\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Мы ввели здесь для удобства сокращенные обозначения для получившихся дробей. Заметим, что если исходная система имеет решение, то в наших условиях все три числа α, β и γ отличны от нуля. В самом деле, пусть, например, $\alpha=0$. Тогда $\beta\gamma=xyz^2=0$. Сложив первое уравнение системы (2) со вторым и третьим, получим:

$$a^2=\beta, \quad b^2=\gamma,$$

откуда $a^2b^2=0$, что противоречит условию задачи. Таким образом, $\alpha\beta\gamma\neq 0$. Система (2) поэтому в точности совпадает с системой (2) предыдущей задачи. Следовательно, эта система имеет два решения:

$$x_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\gamma}, \quad y_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta}, \quad z_1=\frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha}; \tag{3}$$

$$x_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\gamma}, \quad y_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta}, \quad z_2=\frac{-\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha}. \tag{4}$$

Легко проверить, что эти же два набора чисел удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, все решения системы исчерпываются решениями (3) и (4).

64 Положим
$$xy + xz + yz = t^3. \qquad (1)$$
Тогда система запишется в виде
$$\left.\begin{aligned} y^3 + z^3 &= 2at^3, \\ z^3 + x^3 &= 2bt^3, \\ x^3 + y^3 &= 2ct^3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$
Сложив все уравнения этой системы найдем, что
$$x^3 + y^3 + z^3 = (a + b + c)\, t^3. \qquad (3)$$
Вычитая из этого уравнения поочередно уравнения системы (2), получаем
$$x^3 = (b + c - a)\, t^3, \quad y^3 = (c + a - b)\, t^3, \quad z^3 = (a + b - c)\, t^3,$$
откуда
$$x = \sqrt[3]{b + c - a} \cdot t, \quad y = \sqrt[3]{c + a - b} \cdot t, \quad z = \sqrt[3]{a + b - c} \cdot t. \qquad (4)$$
Подставляя эти выражения в уравнение (1), найдем, что либо $t_1 = 0$, либо
$$t_2 = \sqrt[3]{(b + c - a)(c + a - b)} + \sqrt[3]{(b + c - a)(a + b - c)} + \\ + \sqrt[3]{(c + a - b)(a + b - c)}.$$
Подставив эти значения t в формулы (4), найдем два решения исходной системы.

65. Положим
$$x + y = u, \quad x + z = v, \quad y + z = w.$$
Тогда система запишется следующим образом:
$$\left.\begin{aligned} u + v &= auv, \\ u + w &= buw, \\ v + w &= cvw. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$
Очевидно, система (1) имеет следующее решение:
$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \qquad (2)$$
Заметим еще, что если $u = 0$, то из первого уравнения (1) следует $v = 0$, а тогда из третьего уравнения $w = 0$. Ограничимся поэтому рассмотрением тех случаев, когда
$$uvw \neq 0.$$
Из системы (1) находим:
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v} + \frac{1}{u} &= a, \\ \frac{1}{w} + \frac{1}{u} &= b, \\ \frac{1}{w} + \frac{1}{v} &= c. \end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет тот же вид, что система (6) в решении задачи 62 Применяя тот же прием, получаем:

$$\frac{1}{u}=\frac{a+b-c}{2},\quad \frac{1}{v}=\frac{a-b+c}{2},\quad \frac{1}{w}=\frac{-a+b+c}{2}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что система (1) может иметь решение, отличное от решения (2), лишь при дополнительном условии

$$\left.\begin{matrix} a+b-c=\alpha\neq 0, \quad a-b+c=\beta\neq 0, \\ -a+b+c=\gamma\neq 0 \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

Если условие (4) выполнено, то из формул (3) выводим:

$$u=\frac{2}{\alpha},\quad v=\frac{2}{\beta},\quad w=\frac{2}{\gamma}. \tag{5}$$

Для завершения остается решить две системы:

$$\left.\begin{matrix} x+y=0, \\ x+z=0, \\ y+z=0, \end{matrix}\right\} (6) \qquad \left.\begin{matrix} x+y=\frac{2}{\alpha}, \\ x+z=\frac{2}{\beta}, \\ y+z=\frac{2}{\gamma}. \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

При этом система (7) возникает лишь при выполнении условия (4). Обе системы имеют по одному решению; система (6) имеет решение

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,$$

а система (7) имеет решение

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}, \quad y=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, \\ z=-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}. \end{matrix}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, исходная система имеет лишь нулевое решение: $x=y=z=0$, а при выполнении дополнительного условия (4) еще одно, определяемое формулами (8) и (4)

66. По виду второго уравнения системы заключаем, что $x\neq 0$, $y\neq 0$ и $z\neq 0$. Приведя левую часть второго уравнения к общему знаменателю, получаем в силу третьего уравнения

$$xyz=27. \tag{1}$$

Умножив далее третье уравнение на z, будем иметь, учитывая (1):

$$27+(x+y)z^2=27z.$$

Подставив сюда $x+y=9-z$ из первого уравнения системы получим:

$$z^3-9z^2+27z-27=0,$$

или $(z-3)^3=0$. Поэтому $z=3$. Подставив это значение в первое уравнение и в (1), найдем, что $x=3$ и $y=3$. Последнее, впрочем, можно было предвидеть, так как все неизвестные входят в уравнения системы симметрично. Итак, если система имеет решение, то им может оказаться лишь тройка чисел $x=3$, $y=3$, $z=3$. Проверкой убеждаемся, что эти числа действительно образуют решение. Таким образом, система имеет (и притом единственное) решение:

$$x=3,\quad y=3,\quad z=3$$

67. Подставив $x+y$ из первого уравнения во второе, получим:

$$xy+z(a-z)=a^2.$$

Внеся отсюда xy в третье уравнение, будем иметь:

$$z^3-az^2+a^2z-a^3=0.$$

Левая часть легко разлагается на множители:

$$(z-a)(z-ai)(z+ai)=0.$$

Отсюда

$$z_1=a,\quad z_2=ai,\quad z_3=-ai.$$

Подставив $z=a$ в первое и второе уравнения, придем к системе

$$x+y=0,\quad xy=a^2.$$

Отсюда $x=\pm ia$, $y=\mp ia$, причем легко проверить, что обе тройки чисел (x, y, z):

$$(ia,\ -ia,\ a)\ \text{и}\ (-ia,\ ia,\ a)$$

удовлетворяют исходной системе. Аналогично находим еще две пары решений, соответствующих значениям z_2 и z_3:

$$(a,\ -ia,\ ia),\quad (-ia,\ a,\ ia),\quad (ia,\ a,\ -ia),\ (a,\ ia,\ -ia).$$

Таким образом, системе удовлетворяют шесть указанных нами решений и ими исчерпываются все решения системы.

К этому же результату можно прийти и более коротким путем, если обратить внимание на связь решений рассматриваемой системы с корнями кубического уравнения

$$t^3-at^2+a^2t-a^3=0. \tag{1}$$

В самом деле, согласно формулам Виета (см (2), стр. 9), три корня уравнения (1)

$$t_1=a,\quad t_2=ia,\quad t_3=-ia,$$

занумерованные в любом порядке, образуют решение рассматриваемой системы. Таким образом, мы уже имеем шесть (3!) решений. Покажем, что этими шестью решениями исчерпываются все решения системы. Действительно, пусть (x_1, y_1, z_1) — некоторое решение системы. Рассмотрим уравнение третьей степени

$$(t-x_1)(t-y_1)(t-z_1)=0, \tag{2}$$

корнями которого являются числа x_1, y_1 и z_1. Раскрыв скобки в уравнении (2) и воспользовавшись равенствами

$$x_1+y_1+z_1=a,$$
$$x_1y_1+y_1z_1+x_1z_1=a^2,$$
$$x_1y_1z_1=a^3,$$

мы обнаружим, что уравнения (2) и (1) совпадают. Следовательно, x_1, y_1 и z_1 являются корнями уравнения (1), что и требовалось доказать. Этим же замечанием можно было бы воспользоваться и при решении предыдущей задачи.

68. Подставив x из первого уравнения во второе, получим:

$$3y^2+z^2=0. \qquad (1)$$

В силу третьего уравнения отсюда следует:

$$3y^2-xy=0. \qquad (2$$

Поэтому либо $y=0$, либо $x=3y$.

В первом случае ($y=0$), согласно (1), $z=0$, а в силу первого уравнения системы и $x=0$.

Во втором случае, подставив x из равенства $x=3y$ во второе уравнение системы, получим:

$$2y^2+4yz=0. \qquad (3)$$

Если теперь $y=0$, то мы приходим к уже рассмотренному первому случаю. Если же $y=-2z$, то из условия (1) заключаем, что $z=0$, а, следовательно, $y=0$ и $x=0$ Утверждение доказано.

69. Из тождества

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz), \qquad (1)$$

в силу первого и второго уравнений системы, получаем:

$$xy+xz+yz=0. \qquad (2)$$

Рассмотрим далее тождество, получаемое возведением трехчлена в куб:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+$$
$$+3xz^2+3y^2z+3yz^2. \qquad (3)$$

Правую часть его можно представить в виде

$$x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz+yz)+3y(xy+yz+xz)+3z^2(x+y).$$

Следовательно, из тождества (3), в силу уравнений системы и равенства (2), вытекает, что

$$3z^2(x+y)=0. \qquad (4)$$

Рассмотрим в связи с этим два случая:

1) Если $z=0$, то, согласно (2), $xy=0$. Учитывая далее первое уравнение системы, мы приходим к двум наборам значений:

$$x_1=a, \quad y_1=0, \quad z_1=0, \qquad (5)$$
$$x_2=0, \quad y_2=a, \quad z_2=0. \qquad (6)$$

Легко видеть при этом, что формулы (5) и (6) определяют два решения исходной системы.

2) Если $x+y=0$, то из условия (2) снова получаем $xy=0$, и, следовательно, $x=0$, $y=0$. Из первого уравнения системы тогда следует, что $z=a$, и мы приходим к еще одному решению исходной системы:

$$x_3=0, \quad y_3=0, \quad z_3=a. \tag{7}$$

Таким образом, при условии $a \neq 0$ система имеет три различных решения, в случае же $a=0$ — лишь одно нулевое решение

70. Рассмотрим тождество

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+\\+3xz^2+3y^2z+3yz^2. \tag{1}$$

Правую часть этого тождества преобразуем к виду

$$x^3+y^3+z^3+3x(xy+xz+yz)+3y(xy+xz+yz)+\\+3z(xy+xz+yz)-3xyz.$$

Отсюда следует, что тождество (1) можно записать так:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz. \tag{2}$$

Из соотношения (2) видно, что для определения суммы $x^3+y^3+z^3$ достаточно из исходной системы выразить $xy+xz+yz$ и xyz.

Возводя первое уравнение в квадрат и вычитая второе, получаем

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}(a^2-b^2). \tag{3}$$

Запишем, далее, третье уравнение системы в виде

$$xyz=c(xy+xz+yz). \tag{4}$$

Учитывая теперь (3) и (4), из (2) окончательно найдем:

$$x^3+y^3+z^3=a^3-\frac{3}{2}a(a^2-b^2)+\frac{3}{2}c(a^2-b^2)=a^3+\frac{3}{2}(a^2-b^2)(c-a).$$

71. Раскрыв скобки, запишем второе уравнение в виде

$$x^2+y^2+z^2+3xy+3xz+3yz=1,$$

или

$$(x+y+z)^2+xy+xz+yz=1.$$

Отсюда, используя первое уравнение системы, получаем:

$$xy+xz+yz=-3. \tag{1}$$

Третье уравнение системы представим в виде

$$x(xy+xz)+y(yz+xy)+z(xz+yz)=-6.$$

Тогда, принимая во внимание (1), будем иметь:

$$x(3+yz)+y(3+xz)+z(3+xy)=6,$$

или

$$x+y+z+xyz=2,$$

т. е.

$$xyz=0.$$

Мы приходим к следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2, \\ xy+xz+yz&=-3, \\ xyz&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из последнего уравнения этой системы следует, что, по крайней мере, одно неизвестное равно нулю. Пусть $x=0$; тогда

$$y+z=2, \quad yz=-3,$$

откуда либо $y=3$, $z=-1$, либо $y=-1$, $z=3$. Аналогично рассматриваются случаи $y=0$ и $z=0$. Таким образом, получаем шесть решений (x, y, z) системы (2):

$$(0, 3, -1), \quad (-1, 0, 3), \quad (0, -1, 3),$$
$$(3, -1, 0), \quad (3, 0, -1), \quad (-1, 3, 0).$$

Легко проверить, что все эти наборы чисел удовлетворяют и исходной системе. Таким образом, задача имеет шесть решений.

72. Раскрыв скобки во всех трех уравнениях, заметим, что если из суммы первых двух уравнений вычесть третье, то получится уравнение

$$(x-y+z)^2=a-b+c. \qquad (1)$$

Поступая аналогично, найдем:

$$(x+y-z)^2=a+b-c, \qquad (2)$$
$$(y+z-x)^2=b+c-a. \qquad (3)$$

Легко убедиться в том, что и, наоборот, исходная система является следствием системы уравнений (1), (2) и (3). В самом деле, сложив, например, уравнения (2) и (3), мы получим второе уравнение исходной системы и т. д. Таким образом, исходная и полученная системы равносильны. Поэтому достаточно найти все решения системы уравнений (1), (2), (3). Положим для сокращения

$$\sqrt{b+c-a}=a_1, \quad \sqrt{a-b+c}=b_1, \quad \sqrt{a+b-c}=c_1.$$

Тогда система уравнений (1), (2), (3) равносильна следующим восьми системам первой степени:

$$\left.\begin{aligned} x-y+z&=\pm b_1, \\ x+y-z&=\pm c_1, \\ -x+y+z&=\pm a_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Выбирая в правых частях всюду знак плюс, легко найдем следующее единственное решение соответствующей системы:

$$x=\frac{b_1+c_1}{2}, \quad y=\frac{a_1+c_1}{2}, \quad z=\frac{b_1+a_1}{2}.$$

Комбинируя всеми способами знаки в правых частях, мы найдем еще семь решений:

$$\left(\frac{-b_1+c_1}{2}, \frac{a_1+c_1}{2}, \frac{-b_1+a_1}{2}\right), \left(\frac{b_1-c_1}{2}, \frac{a_1-c_1}{2}, \frac{b_1+a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{-a_1+c_1}{2}, \frac{b_1-a_1}{2}\right), \left(\frac{-b_1-c_1}{2}, \frac{a_1-c_1}{2}, \frac{-b_1+a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-b_1+c_1}{2}, \frac{-a_1+c_1}{2}, \frac{-b_1-a_1}{2}\right), \left(\frac{b_1-c_1}{2}, \frac{-a_1-c_1}{2}, \frac{b_1-a_1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-b_1-c_1}{2}, \frac{-a_1-c_1}{2}, \frac{-b_1-a_1}{2}\right).$$

Указанными восемью решениями, очевидно, исчерпываются все решения системы.

73. Перепишем третье уравнение системы в виде

$$z^2+xy-z(x+y)=2. \qquad (1)$$

Подставляя сюда z^2 из второго уравнения, а $z(x+y)$ из первого, получаем:

$$x^2+y^2+xy-47+xy=2, \text{ или } (x+y)^2=49$$

Отсюда

$$x+y=\pm 7. \qquad (2)$$

Сложим далее второе уравнение с первым, обе части которого предварительно умножим на 2. В результате получим:

$$(x+y)^2+2z(x+y)=94+z^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь два случая.

1) Пусть сначала в формуле (2) выбран знак плюс. Подставляя тогда $x+y$ из уравнения $x+y=7$ в (3), получаем $z^2-14z+45=0$. Обозначая корни этого уравнения $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$, найдем: $z_1^{(1)}=9$, $z_2^{(1)}=5$. При $z=9$ из уравнения (1) следует, что $xy=-16$. Решая это уравнение совместно с $x+y=7$, находим:

$$x_1^{(1)}=\frac{7+\sqrt{113}}{2}, \quad y_1^{(1)}=\frac{7-\sqrt{113}}{2}$$

и

$$x_2^{(1)}=\frac{7-\sqrt{113}}{2}, \quad y_2^{(1)}=\frac{7+\sqrt{113}}{2}.$$

Если же $z=5$, то из уравнения (1) следует $xy=12$. Решив систему

$$\left.\begin{aligned} xy&=12,\\ x+y&=7, \end{aligned}\right\}$$

получим $x_3^{(1)}=4$, $y_3^{(1)}=3$ и $x_4^{(1)}=3$, $y_4^{(1)}=4$.

2) В случае $x+y=-7$, поступая аналогично, получим уравнение $z^2+14z+45=0$. Его корни $z_1^{(2)}=-9$, $z_2^{(2)}=-5$. Решив

далее последовательно две системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} xy&=-16,\\ x+y&=-7 \end{aligned}\right\} \qquad (4$$

и

$$\left.\begin{aligned} xy&=12,\\ x+y&=-7, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

из системы (4) найдем

$$x_1^{(2)}=\frac{-7-\sqrt{113}}{2}, \quad y_1^{(2)}=\frac{-7+\sqrt{113}}{2}$$

и

$$x_2^{(2)}=\frac{-7+\sqrt{113}}{2}, \quad y_2^{(2)}=\frac{-7-\sqrt{113}}{2},$$

а из системы (5)

$$x_3^{(2)}=-4, \quad y_3^{(2)}=-3.$$

и

$$x_4^{(2)}=-3, \quad y_4^{(2)}=-4.$$

Из наших рассуждений следует, что решениями исходной системы могут быть лишь следующие восемь троек чисел (x, y, z):

$$\left(\frac{7+\sqrt{113}}{2}, \frac{7-\sqrt{113}}{2}, 9\right), \quad \left(\frac{7-\sqrt{113}}{2}, \frac{7+\sqrt{113}}{2}, 9\right)$$

$$(4, 3, 5), \ (3, 4, 5), \ \left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2}, \frac{-7+\sqrt{113}}{2}, -9\right),$$

$$\left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2}, \frac{-7-\sqrt{113}}{2}, -9\right), \ (-4, -3, -5),$$

$$(-3, -4, -5)$$

Проверкой убеждаемся в том, что все они являются решениями.

74. Пусть (x, y, z) — вещественное решение системы. Рассмотрим первое уравнение системы. В силу неравенства (1) стр. 19 имеем:

$$\frac{2z}{1+z^2}\leqslant 1.$$

Из первого уравнения следует тогда, что

$$x\leqslant z. \qquad (1)$$

Аналогично из второго и третьего уравнений системы получаем

$$y\leqslant x, \qquad (2)$$

$$z\leqslant y. \qquad (3)$$

Система неравенств (1)—(3) удовлетворяется лишь в случае, когда

$$x=y=z. \qquad (4)$$

Подставляя $z=x$ в первое уравнение, находим

$$x_1=0, \quad x_2=1$$

Из (4) окончательно получаем, что система имеет два вещественных решения (0, 0, 0) и (1, 1, 1).

75. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$—вещественное решение системы. Числа x_k $(k=1, \ldots, n)$, очевидно, должны быть одного знака. Предположим для определенности, что все $x_k>0$ (в противном случае мы бы могли поменять знак во всех уравнениях системы). Покажем, что

$$x_k \geqslant \sqrt{2} \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Действительно, в силу неравенства (1) стр. 19

$$x_k+\frac{2}{x_k} \geqslant 2\sqrt{x_k \cdot \frac{2}{x_k}}=2\sqrt{2}.$$

В силу уравнений системы отсюда следует неравенство (1).

Сложив теперь все уравнения системы, получим:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{2}{x_n}. \tag{2}$$

При условии (1) равенство здесь, очевидно, возможно лишь в том случае, когда все неизвестные равны $\sqrt{2}$. Так как легко проверить, что набор чисел $x_1=x_2=\ldots=x_n=\sqrt{2}$ удовлетворяет исходной системе, то система имеет положительное решение и притом лишь одно. Поменяв знак у значений неизвестных, мы получим еще одно вещественное решение

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=-\sqrt{2}.$$

Этими двумя решениями, таким образом, исчерпываются все вещественные решения.

76. Пусть x, y, z—решение системы. Выражая x из первого равенства и подставляя во второе и третье, найдем:

$$\left.\begin{aligned} (a-b)+(c-b)\,y+(d-b)\,z=0, \\ (a^2-b^2)+(c^2-b^2)\,y+(d^2-b^2)\,z=0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда путем несложных выкладок находим:

$$y=-\frac{(a-b)(a-d)}{(c-b)(c-d)}, \quad z=-\frac{(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}.$$

Подставляя найденные значения y и z в первое равенство, получаем:

$$x=-\frac{(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}.$$

Следовательно,

$$xyz=\frac{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2}{(b-c)^2(c-d)^2(d-b)^2}>0.$$

77. Если $a \neq 0$, то $x=a$ не является корнем уравнения. Деля обе части уравнения на $\sqrt[3]{(a-x)^2}$, заменим его следующим равносильным уравнением:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Полагая $t=\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$, найдем $t_1=4$, $t_2=1$. Отсюда $x_1=\frac{63}{65}a$, $x_2=0$. Если $a=0$, то исходное уравнение имеет лишь один корень $x=0$.

78. Подстановкой убеждаемся, что $x=1$ не есть корень. Поэтому после деления обеих частей уравнения на $\sqrt[m]{(1-x)^2}$ оно перейдет в равносильное:

$$\sqrt[m]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}-1=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Обозначая $\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$ через t, получим уравнение $t^2-1=t$, или $t^2-t-1=0$. Отсюда $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Так как второе значение отрицательно, то, в силу принятого соглашения о корнях, мы в случае четного показателя m должны t_2 отбросить. Таким образом, в случае четного m имеем:

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1+x}{1-x}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

и, следовательно,

$$x=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m+1}.$$

В случае нечетного m уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m+1}.$$

79. Сделаем подстановку $\sqrt{2y-5}=t\geqslant 0$. В результате получим:

$$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2+6t+9}=14.$$

Отсюда $t+1+t+3=14$ и $t=5$. Решив уравнение

$$\sqrt{2y-5}=5,$$

находим $y=15$.

80. Умножив обе части уравнения на $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, получим:

$$x-\sqrt{x^2-x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}. \qquad (1)$$

Так как $x>0$ (при $x=0$ правая часть исходного уравнения теряет смысл), то уравнение (1) равносильно уравнению

$$2\sqrt{x}-1=2\sqrt{x-1}.$$

Возведя обе его части в квадрат, убеждаемся в том, что это уравнение имеет единственный корень $x=\frac{25}{16}$; последний удовлетворяет и исходному уравнению.

81. Умножив обе части уравнения на $\sqrt{x+1}$, положим $x^2+8x=t$. Тогда получим уравнение

$$\sqrt{t}+\sqrt{t+7}=7.$$

Это уравнение имеет единственный корень $t=9$. Решив затем уравнение $x^2+8x-9=0$, найдем $x_1=-9$, $x_2=1$. Исходное уравнение, в силу принятого условия относительно значения корней, удовлетворяется лишь при $x=1$.

82. Возведя обе части уравнения в куб, получаем:

$$x-1+3\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{(x+1)^2}+x+1=2x^3.$$

Отсюда

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right)=2x^3 \qquad (1)$$

и на основании исходного уравнения

$$2x+3\sqrt[3]{x^2-1}\,x\sqrt[3]{2}=2x^3. \qquad (2)$$

После простых преобразований получаем:

$$x\sqrt[3]{x^2-1}\left[3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\right]=0.$$

Отсюда находим все числа, которые могут служить корнями исходного уравнения. Имеем сразу:

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=-1.$$

Решая далее уравнение

$$3\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{(x^2-1)^2},$$

найдем:

$$27=4(x^2-1)^2, \quad (x^2-1)^2=\frac{27}{4}, \quad x^2=1\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Так как ищутся только вещественные корни, то, следовательно

$$x^2 = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $x_4 = \sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$, $x_5 = -\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Легко проверить подстановкой, что x_1, x_2 и x_3 являются корнями исходного уравнения. Непосредственная проверка значений x_4 и x_5 вызывает известные трудности. Поступим поэтому так. Положим

$$a = \sqrt[3]{x_4 - 1}, \quad b = \sqrt[3]{x_4 + 1}$$

и

$$c = \sqrt[3]{2}\, x_4$$

и покажем, что

$$a + b = c. \tag{3}$$

Так как x_4 удовлетворяет уравнению (2), то мы имеем

$$a^3 + 3abc + b^3 = c^3, \tag{4}$$

и нам надлежит показать, что из (4) следует (3). Заметим, что если в (4) вместо c подставить $a + b$, то получится тождество. Следовательно, по теореме Безу, рассматриваемый относительно c многочлен $c^3 - 3abc - a^3 - b^3$ делится на двучлен $c - (a+b)$. Проведя деление, получим

$$c^3 - 3abc - a^3 - b^3 = [c - (a+b)]\,\{c^2 + c\,(a+b) + a^2 - ab + b^2\}. \tag{5}$$

В силу (4) левая часть (5) есть нуль; легко видеть, однако, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, и значит выражение в фигурных скобках положительно. Таким образом, равенство (3) доказано. Аналогично устанавливается, что x_5 — также корень исходного уравнения.

83. Перенеся $\sqrt{x}$ в левую часть и возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 4a + 16} = x - 2a.$$

Возведя, далее, обе части этого уравнения в квадрат, найдем, что $x = \frac{a^2}{4}$ — единственный возможный корень уравнения. Подставляя его в уравнение, получаем

$$\sqrt{a^2 - 16a + 64} = 2\sqrt{a^2 - 8a + 16} - \sqrt{a^2}.$$

или, в силу положительности радикалов,

$$|a - 8| = 2\,|a - 4| - |a|. \tag{1}$$

При $a \geqslant 8$ равенство (1) выполняется. Следовательно, первоначальное уравнение при этом условии имеет корень $x = \frac{a^2}{4}$. При $4 \leqslant a < 8$ условие (1) не выполняется, ибо

$$8 - a \neq 2\,(a - 4) - a.$$

При $0 \leqslant a < 4$ условие (1) принимает вид

$$8-a=2(4-a)-a$$

и выполняется лишь при $a=0$. Наконец, при $a<0$, условие (1) превращается в тождество $8-a=2(4-a)+a$. Следовательно, при $a \geqslant 8$ и $a \leqslant 0$ уравнение имеет единственный корень

$$x=\frac{a^2}{4}.$$

При $0<a<8$ — корней нет.

84. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и в полученное уравнение подставим x^2+y^2 из второго уравнения. В результате будем иметь:

$$36xy-1=\sqrt{-\frac{11}{5}+64xy+256(xy)^2}.$$

Возведя еще раз в квадрат обе части уравнения, получим квадратное уравнение относительно $t=xy$:

$$650t^2-85t+2=0$$

Решив это уравнение, найдем $t_1=\frac{1}{10}$, $t_2=\frac{2}{65}$. Рассмотрим теперь две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+4xy&=\frac{1}{5},\\ xy&=\frac{1}{10},\end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} x^2+y^2+4xy&=\frac{1}{5},\\ xy&=\frac{2}{65}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Очевидно, все решения исходной системы содержатся среди решений данных систем.

Решая систему (1), находим:

$$(x+y)^2=\frac{1}{5}-2xy=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=0.$$

Следовательно, $x+y=0$, и мы получаем два решения системы (1):

$$x_1=\frac{i}{\sqrt{10}}, \quad y_1=-\frac{i}{\sqrt{10}}; \quad x_2=-\frac{i}{\sqrt{10}}, \quad y_2=\frac{i}{\sqrt{10}}.$$

Система (2) преобразованием первого уравнения к виду $(x+y)^2=\frac{9}{65}$ сводится к двум следующим системам:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{3}{\sqrt{65}},\\ xy&=\frac{2}{65},\end{aligned}\right\} \quad (2') \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-\frac{3}{\sqrt{65}},\\ xy&=\frac{2}{65}.\end{aligned}\right\} \quad (2'')$$

Система (2′) имеет два решения:

$$x_3=\frac{2}{\sqrt{65}}, \quad y_3=\frac{1}{\sqrt{65}}; \qquad x_4=\frac{1}{\sqrt{65}}, \quad y_4=\frac{2}{\sqrt{65}}.$$

Система (2″) также имеет два решения:

$$x_5=-\frac{2}{\sqrt{65}},\quad y_5=-\frac{1}{\sqrt{65}};\qquad x_6=-\frac{1}{\sqrt{65}},\quad y_6=-\frac{2}{\sqrt{65}}.$$

Исходной системе, как легко проверить, удовлетворяют лишь первый, второй, третий и шестой наборы чисел. Таким образом, исходная система имеет всего четыре решения.

85. Положим

$$\sqrt[3]{x}=u,\qquad \sqrt[3]{y}=v.$$

Тогда данная система запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u^3-v^3&=\frac{7}{2}(u^2v-uv^2),\\ u-v&=3.\end{aligned}\right\}$$

Первое уравнение преобразуем к виду

$$(u-v)^2+3uv=\frac{7}{2}uv.$$

Отсюда

$$uv=18.$$

Решая данное уравнение совместно со вторым уравнением системы, найдем $u_1=6$, $v_1=3$; $u_2=-3$, $v_2=-6$. Возвращаясь к исходной системе, получим два ее решения:

$$x_1=216,\quad y_1=27;\qquad x_2=-27,\quad y_2=-216.$$

86. Первое уравнение подстановкой $\sqrt{\frac{x}{y}}=t\geqslant 0$ преобразуем к виду

$$2t^2-3t-2=0.$$

Отсюда следует, что $t=2$ (второй корень, $-\frac{1}{2}$, отбрасываем). Решив систему

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}}&=2,\\ x+xy+y&=9,\end{aligned}\right\}$$

найдем два ее решения:

$$x_1=4,\quad y_1=1;\qquad x_2=-9,\quad y_2=-\frac{9}{4},$$

которые являются решениями и исходной системы. Таким образом, исходная система имеет два решения.

87. Положим

$$\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}=t>0.$$

Тогда первое уравнение принимает вид

$$t^2-3t+2=0,$$

откуда $t_1=1$, $t_2=2$.

Рассмотрим теперь две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}&=1,\\ x+xy+y&=7,\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad \left.\begin{aligned}\sqrt{\frac{y+1}{x-y}}&=2,\\ x+xy+y&=7.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Система (1) имеет два решения:

$$(-5,\ -3),\quad (3,\ 1).$$

Система (2) также имеет два решения:

$$\left(\sqrt{10}-1,\ \frac{\sqrt{160}-5}{5}\right),\quad \left(-\sqrt{10}-1,\ \frac{-\sqrt{160}-5}{5}\right).$$

Следовательно, исходная система имеет четыре решения.

88. Принимая во внимание, что

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\frac{1}{|x-y|}\sqrt{x^2-y^2},$$

получим, умножив первое уравнение на $x-y$:

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0 \quad \text{при} \quad x-y>0$$

и

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0 \quad \text{при} \quad x-y<0.$$

Отсюда

$$\left(\pm\sqrt{x^2-y^2}\right)_1=4,\quad \left(\pm\sqrt{x^2-y^2}\right)_2=-3.$$

Рассмотрим в связи с этим две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x^2-y^2&=16,\\ xy&=15,\end{aligned}\right\}\quad(1)\qquad \left.\begin{aligned}x^2-y^2&=9,\\ xy&=15.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Система (1) имеет два вещественных решения:

$$x_1=5,\quad y_1=3;\qquad x_2=-5,\quad y_2=-3.$$

Система (2) также имеет два вещественных решения:

$$x_3=\sqrt{\frac{9+\sqrt{981}}{2}},\qquad y_3=\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}};$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{9+\sqrt{981}}{2}},\qquad y_4=-\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}.$$

Нетрудно, однако, проверить, что исходной системе удовлетворяют только две из найденных пар чисел, а именно:

$$(5,\ 3),\quad \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{981}+9}{2}},\ -\sqrt{\frac{\sqrt{981}-9}{2}}\right).$$

Таким образом, исходная система имеет два вещественных решения.

89. Положим

$$\sqrt{x^2-12y+1}=t.$$

Тогда первое уравнение можно записать в виде

$$t^2-8t+16=0.$$

Отсюда $t_{1,2}=4$, и мы получаем

$$x^2-12y=15. \tag{1}$$

Заметив далее, что $y\neq 0$, умножим второе уравнение на $\frac{2x}{y}$; в результате оно примет вид

$$\left(\frac{x}{2y}\right)^2-2\left(\frac{x}{2y}\right)\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}+\left(1+\frac{4x}{3y}\right)=0.$$

Отсюда

$$\frac{x}{2y}-\sqrt{1+\frac{4x}{3y}}=0. \tag{2}$$

После возведения в квадрат получаем уравнение

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2-16\left(\frac{x}{y}\right)-12=0,$$

из которого находим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1=6,\qquad \left(\frac{x}{y}\right)_2=-\frac{2}{3}.$$

Второе значение, очевидно, не удовлетворяет уравнению (2), поэтому можно ограничиться рассмотрением системы

$$\left.\begin{aligned} x^2-12y&=15,\\ \frac{x}{y}&=6. \end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет два решения $\left(5,\ \frac{5}{6}\right)$, $\left(-3,\ -\frac{1}{2}\right)$, которые, как легко проверить, удовлетворяют и исходной системе.

90. Освободив первое уравнение от иррациональности в знаменателях, получим:

$$\frac{4x^2-2y^2}{y^2}=\frac{17}{4}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1=\frac{5}{4} \quad \text{и} \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2=-\frac{5}{4}.$$

Во втором уравнении положим

$$\sqrt{x^2+xy+4}=t, \tag{1}$$

после чего его можно будет записать так:

$$t^2+t-56=0.$$

Отсюда $t_1=7$, $t_2=-8$. Так как в (1) $t\geqslant 0$, то второй корень приходится отбросить. В результате мы приходим к следующим двум системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{5}{4}y,\\ x^2+xy-45=0; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} x=-\frac{5}{4}y,\\ x^2+xy-45=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решения системы (2): (5, 4), (—5, —4). Решения системы (3): (15, —12), (—15, 12). Все четыре решения удовлетворяют и исходной системе.

91. Выразив x из второго уравнения и подставив в первое, получим

$$y^2+\sqrt{3y^2-\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\,\frac{2y+5}{3}+5.$$

Полагая здесь $\sqrt{\dfrac{9y^2-4y-1}{3}}=t\geqslant 0$, придем к уравнению

$$t^2+3t-18=0.$$

Отсюда

$$t_1=3, \quad t_2=-6.$$

Так как t по условию неотрицательно, то имеем лишь одно уравнение

$$9y^2-4y-28=0.$$

Решая это уравнение вместе со вторым уравнением исходной системы, находим два ее решения:

$$x_1=3, \quad y_1=2; \quad x_2=\frac{17}{27}, \quad y_2=-\frac{14}{9}.$$

92. Положим

$$\sqrt{x^2-6y+1}=t\geqslant 0.$$

Тогда первое уравнение запишется в виде

$$t^2-8t+16=0.$$

Отсюда $t=4$, и мы имеем:

$$x^2-6y-15=0. \qquad (1)$$

Если теперь во втором уравнении положить $x^2y=u$ и учесть (1), то получится уравнение

$$9u^2-241u-13\,230=0,$$

откуда $u_1=54$, $u_2=-\frac{245}{9}$.

Мы приходим к двум системам уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-6y-15=0, \\ x^2y=54, \end{array}\right\} \quad (2) \qquad \left.\begin{array}{l} x^2-6y-15=0, \\ x^2y=-\frac{245}{9}. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Исключая x^2 из системы (2), получим уравнение

$$2y^2+5y-18=0,$$

откуда $y_1=2$, $y_2=-4\frac{1}{2}$. Второй корень приходится отбросить, ибо он, в силу уравнения $x^2y=54$, приводит к невещественным значениям x. Система (2), следовательно, имеет два вещественных решения:

$$x_1=\sqrt{27}, \quad y_1=2; \quad x_2=-\sqrt{27}, \quad y_2=2.$$

Система (3) приводится к уравнению

$$54y^2+135y+245=0,$$

которое не имеет вещественных решений. Таким образом, исходная система имеет два вещественных решения.

93. Положим

$$\sqrt{x}=u\geqslant 0; \quad \sqrt{y}=v\geqslant 0. \qquad (1)$$

Тогда система запишется следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} (u^2-v^2)\,v=\frac{u}{2} \\ (u^2+v^2)\,u=3v. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Система (2) имеет очевидное решение

$$u=0; \quad v=0. \qquad (3)$$

Считая в дальнейшем $u\neq 0$, а следовательно (в силу уравнений), и $v\neq 0$, получим, перемножив правые и левые части уравнений (2):

$$u^4-v^4=\frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Умножим далее первое уравнение системы (2) на v, второе — на u и сложим, в результате получим:

$$u^4-v^4+2u^2v^2=\frac{7}{2}uv.$$

В силу (4) имеем:

$$4(uv)^2-7uv+3=0. \qquad (5)$$

Отсюда

$$(uv)_1=1, \quad (uv)_2=\frac{3}{4}.$$

Рассмотрим теперь две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &uv=1,\\ &(u^2+v^2)u=3v, \end{aligned}\right\} \quad (6) \qquad \left.\begin{aligned} &uv=\frac{3}{4},\\ &(u^2+v^2)u=3v. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Очевидно, что всякое решение системы (2), отличное от (3), содержится среди решений данных систем.

Умножив второе уравнение системы (6) на u, найдем в силу первого уравнения, что $u^4=2$; отсюда, учитывая (1), получаем:

$$u=\sqrt[4]{2}, \quad v=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}.$$

Аналогично находим и решение системы (7), удовлетворяющее условию (1):

$$u=\frac{\sqrt[4]{27}}{2}, \quad v=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}.$$

Легко проверить, что оба решения удовлетворяют и системе (2). Таким образом, исходная система имеет три решения:

$$(0,\ 0); \quad \left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

94. Возведя обе части первого уравнения в квадрат, получим:

$$\sqrt{x^2-y^2}=x-\frac{a^2}{2}. \qquad (1)$$

В силу второго уравнения имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3a^2}{2}-x. \qquad (2)$$

Возведя теперь в квадрат обе части второго уравнения исходной системы, получим:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2-y^2}=\frac{a^4}{2}-x^2.$$

Отсюда в силу (1) и (2)

$$\frac{a^4}{2}-x^2=\left(x-\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3a^2}{2}-x\right).$$

Раскрыв скобки, найдем $x=\frac{5}{8}a^2$. После этого из уравнения (1) легко получим два значения y:

$$y_1=a^2\sqrt{\frac{3}{8}};\quad y_2=-a^2\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Проверкой обнаруживаем, что исходная система имеет лишь одно решение $\left(\frac{5}{8}a^2,\ a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

95. Положим

$$\sqrt{x}=u\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{y}=v\geqslant 0; \tag{1}$$

тогда система примет вид

$$\left.\begin{aligned} u^3-v^3&=a(u-v),\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта система распадается очевидно на две системы:

$$\left.\begin{aligned} u-v&=0,\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2,\end{aligned}\right\} \ (2') \quad \text{и} \quad \left.\begin{aligned} u^2+uv+v^2&=a,\\ u^4+u^2v^2+v^4&=b^2\end{aligned}\right\} \ (2'')$$

Решая систему (2′), находим $3u^4=b^2$, откуда, учитывая (1), получаем:

$$u=\frac{\sqrt{b}\sqrt[4]{27}}{3},\quad v=\frac{\sqrt{b}\sqrt[4]{27}}{3}. \tag{3}$$

Переходя к системе (2″), преобразуем оба уравнения следующим образом:

$$u^2+v^2=a-uv,\quad (u^2+v^2)^2=b^2+u^2v^2.$$

Отсюда находим uv и u^2+v^2:

$$\left.\begin{aligned} uv&=\frac{a^2-b^2}{2a},\\ u^2+v^2&=\frac{a^2+b^2}{2a}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Нетрудно показать, что система уравнений (4) равносильна системе (2″). Из уравнений (4) получаем:

$$\left.\begin{aligned} (u+v)^2&=\frac{3a^2-b^2}{2a},\\ (u-v)^2&=\frac{3b^2-a^2}{2a}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Заметим, что правая часть первого из уравнений системы (4), в силу (1), должна быть неотрицательна; неотрицательной должна быть и правая часть второго уравнения системы (5). Таким образом, мы должны предполагать выполненным условие

$$3b^2\geqslant a^2\geqslant b^2, \tag{6}$$

в противном случае система (5), а вместе с ней и система (2″), не имеет решений, удовлетворяющих условию (1).

Решая систему (5), получаем:

$$u+v=\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}, \quad u-v=\pm\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}.$$

В результате имеем:

$$u=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}\pm\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right),$$

$$v=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}\mp\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right).$$

Легко видеть, что в силу условия (6) обе пары значений (u, v) неотрицательны; действительно, так как $a^2\geqslant b^2$, то $3a^2-b^2\geqslant\geqslant 3b^2-a^2$.

Таким образом, в случае, если выполнено дополнительное условие (6), исходная система имеет три решения:

$$x_1=\frac{b}{\sqrt{3}}, \quad y_1=\frac{b}{\sqrt{3}};$$

$$x_2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}+\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2,$$

$$y_2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}-\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2;$$

$$x_3=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}-\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2,$$

$$y_3=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3a^2-b^2}{2a}}+\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{2a}}\right)^2;$$

если же условие (6) нарушено,—то только первое из них.

3. Алгебраические неравенства

96. Для того чтобы квадратный трехчлен

$$ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

был положителен при всех x, необходимо и достаточно, чтобы $a>0$ и дискриминант D трехчлена был отрицателен. В нашем случае имеем

$$a=r^2-1>0; \tag{1}$$

$$D=4(r-1)^2-4(r^2-1)=-8(r-1)<0. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) одновременно выполняются при $r>1$. Заметим еще, что при $r=1$ рассматриваемый в задаче многочлен тождественно равен 1.

Таким образом, все искомые значения r определяются неравенством

$$r \geqslant 1$$

97. Если положить

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=u$$

и заметить, что $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=u^2-2$, то данное выражение легко преобразуется к виду

$$3u^2-8u+4. \tag{1}$$

Если x и y разных знаков, то $u<0$ и трехчлен (1) положителен. Если же x и y одного знака, то легко видеть, что $u \geqslant 2$.

Так как корни квадратного трехчлена (1) равны $\frac{2}{3}$ и 2, то при $u \geqslant 2$ трехчлен неотрицателен. Таким образом, трехчлен неотрицателен при $u<0$ и при $u \geqslant 2$, а следовательно, исходное выражение неотрицательно при всех вещественных x и y, не равных нулю.

98. Заметим, что $x^2-x+1>0$ при всех значениях x, так как дискриминант квадратного трехчлена равен $-3<0$ и коэффициент при x^2 положителен; мы вправе поэтому умножить оба неравенства на знаменатель. В результате получим:

$$-3x^2+3x-3 < x^2+ax-2,$$
$$x^2+ax-2 < 2x^2-2x+2,$$

или

$$4x^2+(a-3)\,x+1>0,$$
$$x^2-(a+2)\,x+4>0.$$

Первое неравенство справедливо при всех x тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена меньше нуля, т. е. когда $(a-3)^2-16<0$. По аналогичной причине второе неравенство выполняется при условии

$$(a+2)^2-16<0.$$

Решая теперь совместно два неравенства $(a-3)^2-16<0$ и $(a+2)^2-16<0$ относительно a, получаем:

$$-4<a-3<4, \quad -1<a<7$$

и

$$-4<a+2<4, \quad -6<a<2.$$

Отсюда окончательно имеем $-1<a<2$.

99. В силу неравенства (1) стр. 19 имеем

$$a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2, \quad c^4+d^4 \geqslant 2c^2d^2.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 2\,(a^2b^2+c^2d^2). \tag{1}$$

Согласно неравенству (3) стр. 19 полагая $u=a^2b^2$ и $v=c^2d^2$ имеем

$$a^2b^2+c^2d^2 \geqslant 2\sqrt{a^2b^2c^2d^2}. \qquad (2)$$

Так как всегда $\sqrt{a^2b^2c^2d^2} \geqslant abcd$ (знак $>$ в случае, если $abcd<0$), то сопоставляя (1) и (2), приходим к доказательству предлагаемого неравенства.

100. Данная система равносильна следующей:

$$x^2+(x+a)^2+2x \leqslant 1, \quad y=x+a.$$

Неравенство

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1 \leqslant 0$$

имеет единственное решение относительно x тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена равен нулю:

$$(a+1)^2-2(a^2-1)=0,$$

т. е.

$$a^2-2a-3=0;$$

отсюда

$$a_1=3, \quad a_2=-1.$$

1) Если $a=3$, то $x^2+4x+4=0$ и $x=-2$, $y=1$.
2) Если $a=-1$, то $x^2=0$ и $x=0$, $y=-1$.

101. Запишем данную систему неравенств следующим образом:

$$y+\frac{1}{2} > |x^2-2x|,$$

$$y < 2-|x-1|.$$

Так как всегда $|x^2-2x| \geqslant 0$ и $|x-1| \geqslant 0$, то

$$-\frac{1}{2} < y < 2.$$

Единственными целыми числами y, удовлетворяющими этому неравенству, являются 0 и 1. Следовательно, данная система неравенств, рассматриваемая для целых x и y, может быть совместна лишь при значениях $y=0$ и $y=1$. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. Если $y=0$, то система неравенств принимает вид

$$|x^2-2x| < \frac{1}{2}, \quad |x-1| < 2.$$

Второму из этих неравенств удовлетворяют лишь целые числа: 0, 1 и 2. Подстановкой нетрудно убедиться, что 0 и 2 удовлетворяют и первому неравенству, а 1 ему не удовлетворяет. Итак, для случая $y=0$ найдены два решения:

$$x_1=0, \ y_1=0; \quad x_2=2, \ y_2=0.$$

Случай 2. Если $y=1$, то исходная система неравенств приводит к следующей:

$$|x^2-2x| < \frac{3}{2}, \quad |x-1| < 1.$$

Второму из этих неравенств удовлетворяет единственное целое число $x=1$, которое удовлетворяет и первому из неравенств. Итак, в этом случае имеем еще одно решение задачи: $x_3=1$, $y_3=1$. Таким образом, система неравенств удовлетворяется тремя парами целых чисел.

102. В левой части всего n слагаемых, причем первые $n-1$ слагаемых строго больше последнего. Поэтому

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

103. Обозначим через S_m левую часть доказываемого неравенства. Легко видеть, что при этом

$$S_{m+1}-S_m=\frac{1}{3m+4}+\frac{1}{3m+3}+\frac{1}{3m+2}-\frac{1}{m+1}.$$

Приведя дроби к общему знаменателю, найдем:

$$S_{m+1}-S_m=\frac{2}{(3m+2)(3m+3)(3m+4)}>0.$$

Таким образом, $S_{m+1}>S_m$. Так как

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1,$$

то, следовательно,

$$S_m>S_{m-1}>\ldots>S_2>S_1>1,$$

т. е. $S_m>1$, что и требовалось доказать.

104. Напишем ряд очевидных неравенств:

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n},$$

что и требовалось доказать.

105. Перепишем обе части доказываемого неравенства следующим образом:

$$(n!)^2=\underbrace{(1\cdot n)\,[2\cdot(n-1)]\ldots[k(n-k+1)]\ldots(n\cdot 1)}_{n\text{ множителей}},$$

$$n^n=\underbrace{n\cdot n\ldots n}_{n\text{ множителей}}.$$

Докажем, что
$$(n-k+1)\,k \geqslant n \qquad (1)$$
при $n \geqslant k \geqslant 1$. Действительно,
$$nk-k^2+k-n=k\,(n-k)-(n-k)=(n-k)\,(k-1) \geqslant 0. \qquad (2)$$
Таким образом, мы уже доказали, что
$$(n!)^2 \geqslant n^n. \qquad (3)$$
Заметим, что если число k больше единицы и меньше, чем n, то в формуле (1), как это следует из (2), имеет место строгое неравенство. Оно, очевидно, повлечет за собой строгое неравенство и в формуле (3). При $n > 2$ такое число k найдется. Следовательно, в этом случае справедливо строгое неравенство $(n!)^2 > n^n$.

106. Легко проверить, что для построения треугольника со сторонами a, b, c необходимо и достаточно, чтобы эти числа a, b, c удовлетворяли трем неравенствам:
$$\left.\begin{array}{l} a+b-c>0, \\ a+c-b>0, \\ b+c-a>0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$
Докажем, что одновременное выполнение этих неравенств эквивалентно выполнению поставленного в задаче условия. Положим
$$K=pa^2+qb^2-pqc^2$$
Так как $q=1-p$, то предыдущее выражение можно переписать в виде
$$K=pa^2+(1-p)\,b^2-p\,(1-p)\,c^2=c^2p^2+(a^2-b^2-c^2)\,p+b^2,$$
где a, b, c — постоянные, а p может принимать любые значения.

Таким образом, K представляет собой квадратный трехчлен относительно p. В общем случае, в зависимости от величины p, трехчлен K может принимать значения разных знаков. Указанное в задаче неравенство равносильно тому, что $K > 0$ при всех p. Для этого, как известно, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант трехчлена
$$D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$
был отрицателен (мы учли при этом, что коэффициент при p^2 равен $c^2 > 0$).

Дискриминант можно представить в следующей форме:
$$\begin{aligned} D&=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2= \\ &=(a^2-b^2-c^2-2bc)\,(a^2-b^2-c^2+2bc)= \\ &=[a^2-(b+c)^2]\,[a^2-(b-c)^2]= \\ &=(a+b+c)\,(a-b-c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)= \\ &=-(a+b+c)\,(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b). \end{aligned}$$
Если треугольник можно построить, то неравенства (1) выполнены и, следовательно, $D < 0$. Тем самым в одну сторону утверждение доказано.

Обратно, если $D < 0$, то

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0. \qquad (2)$$

Покажем, что отсюда следуют все три неравенства (1). Действительно, предположим, что только одна из скобок в левой части (2) положительна, а две другие отрицательны, например $a+b-c < 0$ и $b+c-a < 0$. Сложив эти неравенства, получим $2b < 0$, что невозможно. Таким образом, утверждение доказано и в другую сторону.

107. Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$4(x+y)(x+z)x(x+y+z)+y^2z^2 =$$
$$=4(x^2+xy+xz+yz)(x^2+xy+xz)+y^2z^2 =$$
$$=4(x^2+xy+xz)^2+4yz(x^2+xy+xz)+y^2z^2 =$$
$$=[2(x^2+xy+xz)+yz]^2.$$

Полученное выражение неотрицательно при любых вещественных x, y, z, что и требовалось доказать.

108. Обозначив левую часть неравенства через z, преобразуем z следующим образом:

$$z=x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4=(x+y+1)^2+2(y+1)^2+1.$$

При вещественных x и y первые два слагаемых неотрицательны, а значит, $z \geqslant 1$.

109. Так как $x=\frac{1-4y}{2}$, то подлежащее доказательству неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2 \geqslant \frac{1}{20},$$

которое легко преобразуется к следующему очевидному:

$$100y^2-40y+4=(10y-2)^2 \geqslant 0.$$

110. Так как $d > 0$ и $R \geqslant r > 0$, то

$$d^2+R^2-r^2 > 0 \quad \text{и} \quad 2dR > 0.$$

Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству

$$d^2+R^2-r^2 \leqslant 2dR.$$

Приведя его к виду $(d-R)^2 \leqslant r^2$, получим $|d-R| \leqslant r$ или $-r \leqslant d-R \leqslant r$. Следовательно,

$$R-r \leqslant d \leqslant R+r.$$

111. Умножив обе части доказываемого неравенства на $a+b+c$, получим равносильное неравенство, левая часть которого равна

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+$$
$$+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)=9+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 \geqslant 9.$$

112. Заметим, что данное выражение обращается в нуль при $b=c$, $c=a$, $a=b$. Поэтому по теореме Безу оно делится без остатка на разности $a-b$, $a-c$, $b-c$. Расположив слагаемые по убывающим степеням буквы a, получим, проведя деление на $a-b$:

$$a^3(b^2-c^2)+a^2(c^3-b^3)+b^3c^2-c^3b^2=$$
$$=(a-b)[a^2(b^2-c^2)+ac^2(c-b)+bc^2(c-b)].$$

Вынесем далее из выражения, стоящего в квадратных скобках, множитель $(b-c)$ и оставшийся многочлен разделим на $a-c$. В результате получим

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=$$
$$=-(b-a)(c-b)(c-a)[ac+bc+ab].$$

Так как по условию $a<b<c$ и a, b, c одного знака, то выражение справа отрицательно.

113. Имеем:

$$1-2\sqrt{a_k}+a_k=(1-\sqrt{a_k})^2\geqslant 0,$$

откуда

$$1+a_k\geqslant 2\sqrt{a_k}.$$

Написав эти неравенства для $k=1, 2, \ldots$ и перемножив их почленно, получим:

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n}=2^n.$$

114. Достаточно рассмотреть случай, когда a и b одного знака (т. е. положительны), так как в противном случае одно из чисел больше 1 и неравенство очевидно. Имеем:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab,$$
$$a^4+b^4=(1-2ab)^2-2a^2b^2.$$

Но если $a+b=1$, то $0\leqslant ab\leqslant\frac{1}{4}$, так как

$$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(см. формулу (3) на стр. 19).

Следовательно,

$$a^4+b^4\geqslant\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}.$$

115. Рассмотрим три случая:

1) $x\leqslant 0$; тогда $x^8-x^5+x^2-x+1>0$, ибо первые четыре слагаемых неотрицательны;

2) $0<x<1$; преобразуем многочлен к виду

$$x^8+(x^2-x^5)+(1-x)=x^8+x^2(1-x^3)+(1-x).$$

Здесь все слагаемые, очевидно, положительны, следовательно, и многочлен больше нуля;

3) $x \geqslant 1$; запишем многочлен в виде

$$x^5(x^3-1)+x(x-1)+1.$$

Первые два слагаемых неотрицательны; следовательно, и в этом случае

$$x^8-x^5+x^2-x+1>0.$$

116. Имеем:

$$(1+x)^n+(1-x)^n=2(1+C_n^2x^2+C_n^4x^4+\ldots), \tag{1}$$

причем последнее слагаемое суммы, стоящей в скобках, равно x^n, если n четно, и nx^{n-1}, если n нечетно. По условию $-1<x<1$, откуда следует, что $C_n^{2k}x^{2k}<C_n^{2k}$ для всех целых k. Поэтому

$$(1+x)^n+(1-x)^n<A_n,$$

где A_n — значение многочлена (1) при $x=\pm 1$, т. е. $A_n=2^n$.

117. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$\varepsilon^2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\pm$$
$$\pm 4\varepsilon(x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_na_n)\geqslant 0,$$

которое справедливо, так как левая часть равна

$$(\varepsilon a_1\pm 2x_1)^2+(\varepsilon a_2\pm 2x_2)^2+\ldots+(\varepsilon a_n\pm 2x_n)^2.$$

118. Подкоренное выражение должно быть $\geqslant 0$, поэтому

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}. \tag{1}$$

При значениях x, удовлетворяющих условию (1) и не равных нулю, $\sqrt{1-4x^2}<1$. Поэтому, если $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$, то указанное в задаче неравенство выполняется, ибо левая часть его отрицательна.

Если же $0<x\leqslant\frac{1}{2}$, то, освободив в левой части неравенства числитель от иррациональности, получим

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}=\frac{4x^2}{(1+\sqrt{1-4x^2})\,x}=\frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}}.$$

Легко видеть, что числитель дроби, стоящей справа, при $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ не превосходит 2, а знаменатель $\geqslant 1$. Поэтому

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\leqslant 2<3.$$

Итак, предлагаемое неравенство справедливо для значений $x\neq 0$ и удовлетворяющих условию (1). При $x=0$ и $|x|>\frac{1}{2}$ левая часть неравенства теряет смысл.

119. Пусть для определенности $x \geqslant y$. Тогда полагая $\frac{y}{x} = \alpha \leqslant 1$, получим равносильное неравенство

$$\sqrt[m]{1+\alpha^m} \geqslant \sqrt[n]{1+\alpha^n}.$$

Возведя обе части (1) в степень mn, придем к неравенству

$$(1+\alpha^m)^n \geqslant (1+\alpha^n)^m.$$

Легко видеть, что это неравенство справедливо, ибо $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а $n \geqslant m$.

120. Положим

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ радикалов}}. \qquad (1)$$

Легко видеть, что $x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}$ $(n=2, 3, \ldots)$, и, следовательно, $x_n^2 = a + x_{n-1}$. Заметим далее, что $x_n > x_{n-1}$, ибо при переходе от $n-1$ к n последний внутренний радикал $\sqrt{a}$ заменяется бо́льшим числом $\sqrt{a+\sqrt{a}}$. Ввиду этого $x_n^2 < a + x_n$ и, следовательно, интересующие нас величины удовлетворяют неравенству

$$x^2 - x - a < 0. \qquad (2)$$

Корни трехчлена, стоящего слева, равны

$$x^{(1)} = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x^{(2)} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Так как числа x_n удовлетворяют неравенству (2), то все они заключены между корнями $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ (см. стр. 20). Следовательно,

$$x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \qquad (n=2, 3, \ldots), \qquad (3)$$

что и требовалось доказать. При $n=1$ имеем $x_1 = \sqrt{a}$ и неравенство (3) очевидно.

121. Обозначим выражение, содержащее k знаков радикала, через x_k:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = x_k.$$

Заметим, что $x_k < 2$. В самом деле, заменим под знаком последнего внутреннего радикала 2 на 4. В результате все корни последовательно извлекутся и левая часть окажется равной 2. Значит, $x_k < 2$. Отсюда, в частности, следует, что числитель и знаменатель в левой части исходного неравенства отличны от нуля.

Пользуясь далее тем, что

$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}},$$

преобразуем левую часть исходного неравенства следующим образом:

$$\frac{2-\sqrt{x_{n-1}+2}}{2-x_{n-1}}=\frac{\sqrt{x_{n-1}+2}-2}{(x_{n-1}+2)-4}=\frac{1}{\sqrt{x_{n-1}+2}+2}=\frac{1}{x_n+2}.$$

Так как $x_n < 2$, то $\frac{1}{x_n+2} > \frac{1}{4}$, что и требовалось доказать.

122. Как известно, для любых вещественных чисел a и b имеет место неравенство

$$|a\cdot b|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2} \text{ (см. формулу (1) на стр. 19).}$$

Пользуясь далее тем, что абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин соответствующих слагаемых, получаем:

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant|a_1b_1|+|a_2b_2|+\ldots+|a_nb_n|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\frac{a_2^2+b_2^2}{2}+\ldots+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=$$

$$=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{2}\leqslant\frac{1+1}{2}=1,$$

что и требовалось доказать.

123. Если $n=1$, то $x_1=1$ и, следовательно, $x_1\geqslant 1$, так что утверждение верно. Пусть оно верно для всех m, где $1\leqslant m\leqslant n-1$; докажем справедливость для $m=n$. Если все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны единице, то утверждение справедливо. Если хотя бы одно из этих чисел больше единицы, то в силу равенства $x_1x_2\ldots x_n=1$ найдется другое, меньшее единицы. Пусть нумерация такова, что $x_n > 1$, $x_{n-1} < 1$. Из предположения индукции и условия

$$x_1x_2\ldots x_{n-2}(x_{n-1}x_n)=1$$

следует:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n\geqslant n-1,$$

т. е.

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n+1\geqslant n.$$

Так как $(x_n-1)(1-x_{n-1}) > 0$, то

$$x_n+x_{n-1}-x_nx_{n-1}-1 > 0$$

и, следовательно,

$$x_{n-1}+x_n > x_{n-1}x_n+1.$$

Таким образом,

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n > x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}x_n+1\geqslant n,$$

и утверждение доказано.

4. Логарифмические и показательные уравнения, тождества и неравенства

124. Как видно из уравнения, оно имеет смысл только при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$. Для решения уравнения воспользуемся формулой перехода к логарифмам с другим основанием:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

(см. формулу (2) на стр. 24). Здесь c — произвольное основание ($c > 0$, $c \neq 1$). Выбор основания c в данной задаче безразличен, нужно только все логарифмы привести к одному основанию. Можно, например, за общее основание принять a, поскольку $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\log_a x}{\log_a 2} \log_a^2 2 - 2 \log_a x \log_a \frac{1}{b} = \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt[3]{a}} \log_a x,$$

или после упрощения

$$(\log_a 2 + 2 \log_a b) \log_a x = 3 \log_a^2 x.$$

Отсюда первое решение:

$$\log_a x = 0, \quad \text{т. е.} \quad x = 1.$$

Второе решение:

$$\log_a x = \frac{1}{3} (\log_a 2 + 2 \log_a b) = \frac{1}{3} \log_a 2b^2 = \log_a \sqrt[3]{2b^2},$$

т. е.

$$x = \sqrt[3]{2b^2}.$$

125. Перейдем к логарифмам по основанию 2; используя формулу (2), стр. 24, получаем:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 x - 4} = \frac{1}{\log_2 x - 6}.$$

Это уравнение равносильно следующему:

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0.$$

Отсюда

$$(\log_2 x)_1 = 2, \quad x_1 = 4,$$
$$(\log_2 x)_2 = 3, \quad x_2 = 8.$$

126. Потенцируя по основанию 2, получаем

$$9^{x-1} + 7 = 4 (3^{x-1} + 1).$$

Отсюда

$$(3^{x-1})^2 - 4 (3^{x-1}) + 3 = 0.$$

Следовательно,

$$(3^{x-1})_1 = 3, \quad x_1 = 2; \qquad (3^{x-1})_2 = 1, \quad x_2 = 1.$$

127. Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 3. На основании формулы (2), стр. 24, будем иметь:

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1.$$

Отсюда

$$(1-\log_3 x)\,[1-(1+\log_3 x)^2]=0$$

и, следовательно,

$$(\log_3 x)_1=1, \qquad x_1=3;$$
$$(\log_3 x)_2=0, \qquad x_2=1;$$
$$(\log_3 x)_3=-2, \qquad x_3=\frac{1}{9}.$$

128. Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 2. На основании формулы (2), стр. 24, будем иметь:

$$\frac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}\log_2^2 x+\log_2^4 x=1.$$

Умножив обе части уравнения на знаменатель, перенесем все члены в левую часть и разложим ее на множители.

В результате получим:

$$(\log_2 x-1)\,(\log_2^4 x+2\log_2^3 x+\log_2^2 x+2\log_2 x+1)=0.$$

Второй из множителей при $x>1$, очевидно, положителен и в нуль не обращается. Приравнивая первый множитель нулю, мы устанавливаем, что исходное уравнение при $x>1$ имеет, и притом единственный, корень $x=2$.

129. Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию a ($a>0$ и $a\neq 1$, в противном случае выражение $\log_{\frac{1}{a}} 2x$ не имело бы смысла).

В силу формулы (2), стр. 24, получаем:

$$\frac{\log_a 2x}{\log_a a^2\sqrt{x}}+\frac{\log_a 2x}{\log_a \frac{1}{a}\,\log_a ax}=0.$$

Отсюда находим: 1) $\log_a 2x=0$, $x=\frac{1}{2}$ — не удовлетворяет исходному уравнению (логарифм по основанию 1 числа a не существует); 2) $\log_a ax=\log_a(a^2\sqrt{x})$, $x=a^2$.

Ответ: $x=a^2$.

130. Используя равенство $\log_x b=\frac{1}{\log_b x}$, преобразуем исходное уравнение в эквивалентное:

$$\log_b[x(2\lg a-x)]=2.$$

Отсюда после потенцирования получаем:

$$x^2-2\lg a\cdot x+b^2=0.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$x_{1,2}=\lg a \pm \sqrt{\lg^2 a-b^2}.$$

При $a \geqslant 10^b$ оба корня оказываются вещественными и положительными и, как нетрудно проверить, удовлетворяют исходному уравнению. При $a < 10^b$ уравнение не имеет корней.

131. Перейдя в уравнении к логарифмам по основанию a, мы приведем его к виду

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}\left(1+\frac{1}{\log_a x}\right)}+\sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}}\left(1-\frac{1}{\log_a x}\right)}=a.$$

После дальнейших преобразований получаем:

$$\sqrt{\frac{(\log_a x+1)^2}{4\log_a x}}+\sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}}=a.$$

Учитывая, что квадратные корни понимаются здесь в арифметическом смысле, можно данное уравнение записать так:

$$|\log_a x+1|+|\log_a x-1|=2a\sqrt{\log_a x}. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь два случая:

1) Предположим, что

$$\log_a x>1. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\log_a x=a\sqrt{\log_a x},$$

откуда

$$x_1=a^{a^2}.$$

Легко видеть, что условие (2) удовлетворяется при этом лишь в случае $a>1$.

2) Предположим, что

$$0<\log_a x\leqslant 1. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$2=2a\sqrt{\log_a x}.$$

Отсюда

$$x_2=a^{\frac{1}{a^2}}.$$

Заметим, что условие (3) выполняется лишь тогда, когда $a\geqslant 1$. Так как заведомо $a\neq 1$ (иначе бы исходное уравнение потеряло смысл), то и второй корень x_2 существует лишь при условии $a>1$.

Мы исчерпали все возможности, так как значения x, при которых $\log_a x\leqslant 0$, очевидно, не могут удовлетворить уравнению (1). Таким образом, при $a>1$ рассматриваемое уравнение имеет два корня: $x_1=a^{a^2}$ и $x_2=a^{\frac{1}{a^2}}$. При $0<a<1$ уравнение корней не имеет.

132. Имеем

$$\lg(\sqrt{x+1}+1)=\lg(x-40).$$

Полагая $\sqrt{x+1}=t$, получаем после потенцирования уравнение

$$t^2-t-42=0.$$

Его корни: $t_1=7$ и $t_2=-6$. Так как $t=\sqrt{x+1}\geqslant 0$, то t_2 отбрасываем. Корню t_1 соответствует значение $x=48$. Проверкой убеждаемся, что оно удовлетворяет исходному уравнению. Таким образом, уравнение имеет единственный корень $x=48$.

133. Переходя в уравнении к логарифмам по основанию a, получаем:

$$1+\frac{\log_a(p-x)}{\log_a(x+q)}=\frac{2\log_a(p-q)-\log_a 4}{\log_a(x+q)}.$$

Отсюда после упрощений и потенцирования приходим к квадратному уравнению

$$(x+q)(p-x)=\frac{1}{4}(p-q)^2.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$x_1=\frac{1}{2}(p-q)+\sqrt{pq},\quad x_2=\frac{1}{2}(p-q)-\sqrt{pq}.$$

Легко проверить, что оба корня удовлетворяют неравенству

$$p>x_{1,2}>-q,$$

а следовательно, и исходному уравнению.

134. После несложных преобразований, использующих формулу перехода от одной системы логарифмов к другой, приводим данное уравнение к виду

$$\log_{\sqrt{5}} x\sqrt{\frac{3}{\log_{\sqrt{5}} x}+3}=-\sqrt{6}.$$

Положив $\log_{\sqrt{5}} x=t$, получим после упрощений и возведения в квадрат уравнение

$$t^2+t-2=0.$$

Его корни: $t_1=-2$, $t_2=1$. Первому корню отвечает значение $x=\frac{1}{5}$, которое, как легко проверить, удовлетворяет и исходному уравнению. Второму корню отвечает значение $x=\sqrt{5}$, которое исходному уравнению не удовлетворяет.

135. Пользуясь тем, что $0{,}4=\frac{2}{5}$, а $6{,}25=\left(\frac{5}{2}\right)^2$, приведем исходное уравнение к виду

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2(\lg x^3-2)}.$$

Приравнивая показатели, получаем уравнение

$$\lg^2 x - 6\lg x + 5 = 0,$$

решив которое, найдем:

$$(\lg x)_1 = 1, \quad x_1 = 10; \qquad (\lg x)_2 = 5, \quad x_2 = 10^5.$$

136. Перейдя в уравнении к логарифмам по основанию 10, получим:

$$1 + \frac{\lg\left(\frac{4-x}{10}\right)}{\lg x} = (\lg\lg n - 1)\frac{1}{\lg x}.$$

Отсюда после простых преобразований придем к уравнению

$$\lg\left(x \cdot \frac{4-x}{10}\right) = \lg\frac{\lg n}{10}.$$

После потенцирования будем иметь:

$$x^2 - 4x + \lg n = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \lg n}.$$

Несложное исследование приводит теперь к следующим результатам.

а) Если $0 < n < 10^4$ и $n \neq 10^3$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = 2 + \sqrt{4 - \lg n} \quad \text{и} \quad x_2 = 2 - \sqrt{4 - \lg n}.$$

б) Если $n = 10^3$, то имеется лишь один корень $x = 3$ ($x = 1$ приходится отбросить); при $n = 10^4$ получаем также один корень $x = 2$.

в) Если, наконец, $n > 10^4$, то корней нет.

137. Перейдем в уравнении к логарифмам по основанию 2. В результате получим уравнение

$$\frac{1}{\log_2 \sin x}\,\frac{\log_2 a}{2\log_2 \sin x} + 1 = 0.$$

Отсюда

$$\log_2^2 \sin x = -\frac{\log_2 a}{2}.$$

Так как величина, стоящая слева, строго положительна ($\sin x \neq 1$, иначе бы символ $\log_{\sin x} 2$ потерял смысл), то $\log_2 a < 0$ и, следовательно, при $a > 1$ уравнение вообще не имеет решений. Считая $0 < a < 1$, получаем:

$$\log_2 \sin x = \pm\sqrt{-\frac{\log_2 a}{2}}.$$

Знак плюс перед радикалом отбрасываем, так как $\log_2 \sin x < 0$.

Тогда

$$\sin x = 2^{-\sqrt{-\frac{\log_2 a}{2}}}$$

и

$$x = (-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{-\frac{\log_2 a}{2}}} + \pi k \quad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

Легко видеть, что вся эта бесконечная серия значений x удовлетворяет исходному уравнению.

138. Из второго уравнения находим:

$$x + y = \frac{2}{x - y}. \qquad (1)$$

Подставив это выражение для $x+y$ в первое уравнение, получим:

$$1 - \log_2 (x-y) - \log_3 (x-y) = 1$$

или

$$\log_2 (x-y) + \log_3 (x-y) = 0.$$

Переходя к логарифмам по основанию 3, преобразуем последнее уравнение к виду

$$(\log_2 3 + 1) \log_3 (x-y) = 0.$$

Так как $\log_2 3 + 1 \neq 0$, то отсюда $\log_3 (x-y) = 0$ и $x - y = 1$. Вместе с уравнением (1) это дает систему

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2, \\ x - y &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее, получим:

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Проверкой убеждаемся в том, что найденная пара чисел является решением исходной системы.

139. Логарифмируя первое уравнение по основанию c, будем иметь:

$$a \log_c x = b \log_c y. \qquad (1)$$

Из второго уравнения находим:

$$\log_c x - \log_c y = \frac{\log_c x}{\log_c y}.$$

Подставляя сюда $\log_c y$ из уравнения (1), получаем:

$$\log_c x - \frac{a}{b} \log_c x = \frac{b}{a}, \quad \text{или} \quad \log_c x^{1-\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Потенцируя, получаем:

$$x^{\frac{b-a}{b}} = c^{\frac{b}{a}}, \quad \text{или} \quad x = c^{\frac{b^2}{a(b-a)}}.$$

Из первого уравнения системы теперь находим:

$$y = x^{\frac{a}{b}} = c^{\frac{b}{b-a}}.$$

140. Пользуясь логарифмическим тождеством $a^{\log_a b} = b$, запишем систему в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \log_5 x + y &= 7, \\ x^y &= 5^{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Потенцируя первое уравнение, получим $x \cdot 5^y = 5^7$, откуда

$$x = 5^{7-y}. \qquad (2)$$

Подставляя x из уравнения (2) во второе уравнение системы (1), получаем уравнение $5^{12+y^2-7y} = 1$, имеющее корни

$$y_1 = 4, \quad y_2 = 3.$$

В результате мы приходим к двум решениям:

$$x_1 = 125, \quad y_1 = 4; \qquad x_2 = 625, \quad y_2 = 3.$$

141. Логарифмируя первое уравнение по основанию y, получим относительно $\log_y x$ квадратное уравнение

$$2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0,$$

имеющее корни

$$\log_y x = 2, \quad \log_y x = \frac{1}{2}.$$

Если $\log_y x = 2$, то

$$x = y^2 \qquad (1)$$

Из второго уравнения, в силу тождества $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, получим $\log_y (y - 3x) = \log_y 4$, откуда

$$y - 3x = 4. \qquad (2)$$

Полученное уравнение вместе с (1) дает квадратное уравнение для определения y:

$$3y^2 - y + 4 = 0.$$

Это уравнение не имеет вещественных решений. Если же $\log_y x = \frac{1}{2}$, то $x = \sqrt{y}$ и $y = x^2$. В этом случае в силу (2) получим уравнение

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Ответ: $x = 4$, $y = 16$.

142. Логарифмируя первое уравнение по основанию a, найдем:

$$x + y\log_a b = 1 + \log_a b. \qquad (1)$$

Во втором уравнении перейдем к логарифмам по основанию a.

Тогда

$$2\log_a x=-\frac{\log_a y}{\log_a b}\,\frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}}=-2\log_a y.$$

Отсюда $x=\frac{1}{y}$. Подставив $y=\frac{1}{x}$ в (1), получим уравнение

$$x^2-x\,(1+\log_a b)+\log_a b=0,$$

имеющее корни

$$x_1=\log_a b \quad \text{и} \quad x_2=1.$$

Окончательный ответ

$$x_1=\log_a b,\quad y_1=\log_b a;\qquad x_2=1,\quad y_2=1.$$

143. В первом уравнении перейдем к основанию x; тогда уравнение примет вид

$$3\left(\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\right)=10.$$

Положив здесь $\log_x y=t$, получим уравнение

$$3t^2-10t+3=0,$$

имеющее корни $t_1=3$ и $t_2=\frac{1}{3}$. В первом случае $\log_x y=3$, $y=x^3$ и, в силу второго уравнения исходной системы, $x^4=81$. Так как $x>0$ и $y>0$, то мы получаем при этом лишь одно решение:

$$x_1=3,\quad y_1=27.$$

Полагая затем $\log_x y=\frac{1}{3}$, находим еще одно решение:

$$x_2=27,\quad y_2=3.$$

144. Перейдем в каждом уравнении системы к логарифмам по основанию 2. В результате получим систему

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\log_2 x}{\log_2 12}(\log_2 x+\log_2 y)=\log_2 x,\\ &\log_2 x\cdot\frac{\log_2 (x+y)}{\log_2 3}=3\,\frac{\log_2 x}{\log_2 3}.\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Так как $x\neq 1$ (в противном случае левая часть первого уравнения исходной системы не имела бы смысла), то $\log_2 x\neq 0$ и систему (1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}&\log_2 x+\log_2 y=\log_2 12,\\ &\log_2 (x+y)=3.\end{aligned}\right\}$$

Потенцируя, получаем:

$$xy=12,\quad x+y=8,$$

откуда

$$x_1=6,\quad y_1=2;\qquad x_2=2,\quad y_2=6.$$

145. Переходя в каждом из уравнений системы к логарифмам по основанию 2, получим:

$$\left.\begin{aligned} x\log_2 y &= y\sqrt{y}(1-\log_2 x), \\ 2\log_2 x &= 3\log_2 y. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) находим $x^2=y^3$, откуда

$$x=y^{\frac{3}{2}}. \qquad (2)$$

Используя (2), из первого уравнения найдем $y=\sqrt[5]{4}$. Следовательно,

$$x=2^{\frac{3}{5}}, \quad y=2^{\frac{2}{5}}.$$

146. Преобразуем систему, переходя в первом уравнении к основанию 2, во втором — к основанию 3 и в третьем — к основанию 4. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z &= \log_2 4, \\ \log_3 y+\frac{1}{2}\log_3 z+\frac{1}{2}\log_3 x &= \log_3 9, \\ \log_4 z+\frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{2}\log_4 y &= \log_4 16. \end{aligned}\right\}$$

Потенцируя, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} x\sqrt{yz} &= 4, \\ y\sqrt{xz} &= 9, \\ z\sqrt{xy} &= 16. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Перемножая уравнения системы (1) почленно, найдем:

$$(xyz)^2=24^2.$$

Так как $x>0$, $y>0$, $z>0$, то

$$xyz=24. \qquad (2)$$

Возводя первое уравнение системы (1) в квадрат и используя (2), получим:

$$x=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

Аналогично находим $y=\frac{27}{8}$ и $z=\frac{32}{3}$. Проверкой убеждаемся, что найденные три числа образуют решение.

147. Переходя к основанию 2 в первом уравнении, а затем потенцируя, получаем:

$$y^2-xy=4. \qquad (1)$$

Уравнение (1) вместе со вторым уравнением исходной системы даст систему

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=25,\\ y^2-xy&=4. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эта система имеет два решения, удовлетворяющие условиям $y > x$, $y > 0$, а именно:

$$x_1=-\frac{7}{\sqrt{2}},\quad y_1=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad x_2=3,\quad y_2=4.$$

148. Разделив обе части уравнения на 4^x, найдем:

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x\sqrt{3}-\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

и, следовательно,

$$x=\frac{3}{2}.$$

149. Подставив y из второго уравнения в первое, получим:

$$x^{x+\frac{1}{x^2}}=x^{-2x+\frac{2}{x^2}}.$$

Отсюда либо $x=1$, либо

$$x+\frac{1}{x^2}=-2x+\frac{2}{x^2}$$

и, следовательно,

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Ответ:

$$x_1=y_1=1,\quad x_2=\frac{1}{\sqrt[3]{3}},\quad y_2=\sqrt[3]{9}.$$

150. Положив $a^x=u$, $a^y=v$, запишем систему в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2&=2b,\\ uv&=c. \end{aligned}\right\}$$

Из этих двух уравнений следует:

$$(u+v)^2=2(b+c),\quad (u-v)^2=2(b-c).$$

Так как искомые значения u и v должны быть положительны, то первое уравнение сводится к уравнению

$$u+v=\sqrt{2(b+c)}. \tag{1}$$

Второе уравнение показывает, что для разрешимости системы необходимо потребовать, кроме положительности чисел b и c, выполнения неравенства

$$b \geqslant c. \tag{2}$$

При этом

$$u-v=\pm\sqrt{2(b-c)}. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), в случае знака плюс найдем:

$$u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}),$$

$$v_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}).$$

Во втором случае получаем:

$$u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}),$$

$$v_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}).$$

Мы нашли два решения системы (1), причем при выполнении условия (2) все значения неизвестных, очевидно, положительны. Два соответствующих решения исходной системы имеют вид

$$x_1=\log_a u_1, \quad y_1=\log_a v_1; \qquad x_2=\log_a u_2, \quad y_2=\log_a v_2.$$

Мы можем теперь утверждать, что для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы $b>0$, $c>0$ и $b \geqslant c$. При выполнении этих условий система имеет два решения.

151. Перемножив оба уравнения, получим:

$$(xy)^{x+y}=(xy)^{2n}.$$

Отсюда ввиду положительности x и y следует, что либо $xy=1$, либо $xy \neq 1$, и тогда

$$x+y=2n. \tag{1}$$

Рассмотрим сначала второй случай. Первое уравнение исходной системы принимает вид $x^{2n}=y^n$, откуда

$$y=x^2. \tag{2}$$

Подставляя y в уравнение (1), получаем

$$x^2+x-2n=0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень

$$x_1=\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}. \tag{3}$$

Соответствующее значение y находим, используя (2):

$$y_1=\frac{1}{4}(\sqrt{8n+1}-1)^2. \tag{4}$$

Во втором случае, когда $xy=1$, $y=\frac{1}{x}$, и первое уравнение исходной системы принимает вид

$$x^{\frac{1}{x}+x}=x^{-n}.$$

В силу положительности x и n это равенство возможно лишь в случае $x=1$. Таким образом, мы находим еще одно решение $x_2=1$, $y_2=1$.

152. Преобразуем систему к виду

$$\left.\begin{aligned}&(3x+y)^{x-y}=9,\\&\sqrt[x-y]{324}=2(3x+y)^2.\end{aligned}\right\}$$

Из второго уравнения находим:

$$324=2^{x-y}(3x+y)^{2(x-y)}$$

и, следовательно, в силу первого уравнения

$$324=2^{x-y}\cdot 81.$$

Отсюда $2^2=2^{x-y}$, т. е.

$$x-y=2. \tag{1}$$

Решая уравнение (1) вместе с первым уравнением исходной системы, приходим к двум системам:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=2,\\3x+y&=3.\end{aligned}\right\}\ (2)\qquad\left.\begin{aligned}x-y&=2,\\3x+y&=-3.\end{aligned}\right\}\ (3)$$

Решение системы (2): $x_1=\frac{5}{4}$, $y_1=-\frac{3}{4}$. Решение системы (3): $x_2=-\frac{1}{4}$, $y_2=-\frac{9}{4}$. Проверкой убеждаемся, что обе пары чисел удовлетворяют исходной системе.

153. Положим $\frac{q}{p}=\alpha$. Если $\alpha=1$, т. е. $p=q$, то система удовлетворяется любой парой равных положительных чисел. Будем поэтому считать $\alpha\neq 1$. Из второго уравнения получаем $x=y^{\alpha}$. Логарифмируя первое уравнение и используя это равенство, будем иметь:

$$y\lg y(\alpha-y^{\alpha-1})=0.$$

Так как $y>0$, то либо $\lg y=0$, либо $\alpha=y^{\alpha-1}$. В первом случае получаем $x_1=1$, $y_1=1$. Во втором случае $x_2=\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$, $y_2=\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}$. Обе пары чисел удовлетворяют и исходной системе.

154. Логарифмируя оба уравнения, получим систему

$$\left.\begin{aligned} y \lg x = x \lg y, \\ x \lg p = y \lg q, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

из которой определяем отношение $\frac{x}{y} = \frac{\lg q}{\lg p} = \alpha$; следовательно,

$$x = \alpha y. \qquad (2)$$

Если $p = q$, то система имеет бесконечное число решений вида $x = y = a$, где $a > 0$ любое. Если $p \neq q$, то, подставив x из формулы (2) в первое уравнение системы (1), найдем:

$$x = \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}, \quad y = \alpha^{\frac{1}{\alpha - 1}}.$$

Следовательно, при условии $p \neq q$ система имеет единственное решение.

155. Логарифмируя обе части равенства $a^2 = c^2 - b^2$, получаем:

$$2 = \log_a (c - b) + \log_a (c + b)$$

Отсюда $2 = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a}$ и, следовательно,

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

156. Используя формулу $\log_n m = \frac{1}{\log_m n}$, легко получим:

$$\log_{b^{2^{-k}}} a = 2^k \log_b a \quad \text{и} \quad \log_{a^{2^k}} b = \frac{1}{2^k} \log_a b,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (\log_{b^{2^{-k}}} a - \log_{a^{2^k}} b)^2 \text{*)} = \sum_{k=0}^{n} \left(2^k \log_b a - \frac{1}{2^k} \log_a b\right)^2 =$$

$$= \log_b^2 a \sum_{k=0}^{n} 4^k + \log_a^2 b \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} - \sum_{k=0}^{n} 2 =$$

$$= \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} \log_b^2 a + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \log_a^2 b - 2(n + 1) =$$

$$= \frac{1}{3} (4^{n+1} - 1) \log_b^2 a + \frac{1}{3} (4^{n+1} - 1) \frac{1}{4^n} \log_a^2 b - 2(n + 1) =$$

$$= \frac{1}{3} (4^{n+1} - 1) \left(\log_b^2 a + \frac{1}{4^n \log_b^2 a}\right) - 2(n + 1).$$

---

*) Символ $\sum_{k=0}^{n} a_k$ означает сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

157. $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b \log_b a} = b^{\log_b \log_b a} = \log_b a.$

158. Имеем

$$c = a_1 a_2 \ \ldots \ a_n = a \cdot aq \ \ldots \ (aq^{n-1}) = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Используя формулу перехода от одной системы логарифмов к другой, получаем:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \frac{A}{n + \frac{n(n-1)}{2} \log_a q}.$$

Но

$$\log_a q = \frac{\log_b q}{\log_b a} = \frac{\log_a b}{\log_q b} = \frac{A}{B}.$$

Поэтому

$$\log_c b = \frac{2AB}{2nB + n(n-1)A}.$$

159. Используя равенство $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, преобразуем данную формулу следующим образом:

$$\frac{\log_N c}{\log_N a} = \frac{\frac{1}{\log_N a} - \frac{1}{\log_N b}}{\frac{1}{\log_N b} - \frac{1}{\log_N c}} = \frac{\log_N \frac{b}{a}}{\log_N \frac{c}{b}} \cdot \frac{\log_N c}{\log_N a}.$$

Отсюда следует:

$$\log_N \frac{b}{a} = \log_N \frac{c}{b}, \tag{1}$$

ибо множитель $\frac{\log_N c}{\log_N a} \neq 0$. Потенцируя равенство (1), получаем:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}. \tag{2}$$

Таким образом, b есть средняя пропорциональная между a и c. Логарифмируя, далее, равенство (2) по любому основанию N и проводя выкладки в обратном порядке, мы завершим доказательство предлагаемого утверждения.

160. Следует считать, что $N \neq 1$, иначе дробь в правой части становится неопределенной. Разделив подлежащее доказательству тождество на $\log_a N \log_b N \log_c N$, мы заменим его следующим эквивалентным:

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_b N} + \frac{1}{\log_c N} = \frac{1}{\log_{abc} N}.$$

Перейдя здесь к логарифмам по основанию N, получим:

$$\log_N a + \log_N b + \log_N c = \log_N abc.$$

Так как последнее тождество, очевидно, имеет место, то задача решена.

161. Имеем:

$$\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\log_x ab}{\log_x a} = 1 + \frac{\log_x b}{\log_x a} = 1 + \log_a b,$$

что и требовалось доказать.

162. Пользуясь логарифмическим тождеством $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, преобразуем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 x = \log_3 x \left(\log_{\frac{1}{2}} 3 + 1\right) =$$

$$= \log_3 x \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} = \frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}} = -\frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} 2}.$$

Тогда данное неравенство примет вид

$$-\frac{\log_3 x}{\log_{\frac{3}{2}} 2} > 1.$$

Так как $2 > 1$ и $\frac{3}{2} > 1$ и по свойству логарифмов $\log_{\frac{3}{2}} 2 > 0$, то, следовательно, предыдущее неравенство эквивалентно неравенству

$$\log_3 x < -\log_{\frac{3}{2}} 2.$$

Отсюда, заметив еще, что по смыслу задачи $x > 0$, окончательно получаем:

$$0 < x < 3^{-\log_{\frac{3}{2}} 2}.$$

163. Так как $x > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^{\log_a x} > a^2.$$

Но $a > 1$, поэтому, логарифмируя последнее неравенство по основанию a (эта операция также приводит к равносильному неравенству), получим:

$$\log_a^2 x > 2.$$

Отсюда окончательно находим:

либо $\log_a x > \sqrt{2}$, и, следовательно, $x > a^{\sqrt{2}}$;

либо $\log_a x < -\sqrt{2}$, и тогда $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$.

164. По смыслу задачи $x > 0$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_a x(x+1) < \log_a (2x+6).$$

Так как $a > 1$, то отсюда $x(x+1) < 2x+6$, или

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Решая это квадратное неравенство при условии $x > 0$, получаем

$$0 < x < 3.$$

165. Предлагаемое неравенство равносильно следующему

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 1.$$

Так как $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, то неравенство $0 < x^2 - 5x + 6$ справедливо при

$$x < 2$$

и

$$x > 3.$$

Решая далее неравенство $x^2 - 5x + 6 < 1$, находим, что оно выполняется при

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Так как $\sqrt{5} > 2$, то $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2$, а $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3$. Поэтому исходное неравенство имеет место при

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < 2 \text{ и } 3 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

166. Приведя левую часть к общему знаменателю, находим

$$\frac{-1}{\log_2 x(\log_2 x - 1)} < 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1+\log_2 x(\log_2 x - 1)}{\log_2 x(\log_2 x - 1)} > 0.$$

Так как числитель последнего выражения положителен $\left[\text{в самом деле, } 1 + \log_2^2 x - \log_2 x = \left(\log_2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]$, то неравенство сводится к следующему

$$\log_2 x(\log_2 x-1)>0.$$

Это последнее неравенство выполняется при $x>2$ и при $0<x<1$.

167. По смыслу задачи $x>0$ и, значит, данное неравенство равносильно неравенству

$$x^{3-\log_2^2 x-2\log_2 x}>1.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 2 и положим $y=\log_2 x$; получим равносильное неравенство

$$y(3-y^2-2y)>0,$$

которое после разложения квадратного трехчлена на множители можно записать в виде

$$y(1-y)(3+y)>0.$$

Это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда либо все три сомножителя положительны, либо один из них положителен, а два других отрицательны. В первом случае, т. е. когда

$$y>0,\ 1-y>0,\ 3+y>0,$$

находим $0<y<1$ и, следовательно,

$$1<x<2. \qquad (1)$$

Второй случай подразделяется на три подслучая, причем непротиворечивая система неравенств получается только в одном подслучае, а именно когда

$$y<0,\ 1-y>0,\ 3+y<0.$$

Отсюда $y<-3$ и, значит,

$$0<x<\frac{1}{8} \qquad (2)$$

Таким образом, исходное неравенство имеет место тогда и только тогда, когда либо

$$0<x<\frac{1}{8},$$

либо

$$1<x<2.$$

168. Положив $\log_2 x=y$ и заметив, что $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}=\frac{1}{y}$, перепишем данное неравенство в виде

$$y+\frac{1}{y}+2\cos\alpha\leqslant 0. \qquad (1)$$

Число $z=y+\frac{1}{y}$ имеет тот же знак, что и число y, и $|z|\geqslant 2$ при всех y (см (2), стр. 19). Поэтому если $z>0$, то неравенство $z\leqslant\leqslant-2\cos\alpha$ может быть выполнено только в том случае, если $z=2$ $(y=1)$ и $\cos\alpha=-1$, т. е. если в исходном неравенстве $x=2$ и

$\alpha=(2k+1)\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этих значениях имеет место знак равенства.

Если же $z<0$, т. е. $y<0$, то $z \leqslant -2$ и неравенство (1) выполнено при всех α, откуда следует, что исходное неравенство выполняется, кроме уже найденных значений, при $0<x<1$ и всех вещественных значениях α.

169. Исходное неравенство равносильно следующему

$$0<\log_4(x^2-5)<1,$$

откуда $1<x^2-5<4$ или $6<x^2<9$ или $\sqrt{6}<|x|<3$.

Ответ: $\sqrt{6}<x<3$ и $-3<x<-\sqrt{6}$.

5. Комбинаторика и бином Ньютона

170. Записав отдельно отношения первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, после сокращения получим:

$$\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!} : \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} = \frac{n-m+1}{m+1},$$

$$\frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!} : \frac{(n+1)!}{(m-1)!\,(n-m+2)!} = \frac{n-m+2}{m}.$$

В силу условия задачи мы приходим к двум уравнениям:

$$\frac{n-m+1}{m+1}=1, \quad \frac{n-m+2}{m}=\frac{5}{3}.$$

Решив их совместно, найдем $m=3$, $n=6$.

171. Имеем:

$$(1+x^2-x^3)^9=1+C_9^1(x^2-x^3)+C_9^2(x^2-x^3)^2+C_9^3(x^2-x^3)^3+$$
$$+C_9^4(x^2-x^3)^4+C_9^5(x^2-x^3)^5+\ldots+(x^2-x^3)^9.$$

Рассматривая слагаемые правой части, легко заметить, что x^8 содержится лишь в четвертом и пятом членах. Используя это, без труда находим коэффициент при x^8. Он равен $3C_9^3+C_9^4$

172. Слагаемые данной суммы образуют прогрессию со знаменателем $1+x$. Поэтому

$$(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\ldots+(1+x)^n=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^k}{x}. \qquad (1)$$

Записав эту же сумму в виде многочлена

$$a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots+a_nx^n,$$

и раскрыв скобки в правой части равенства (1), получим: если $m<k$, то

$$a_m=C_{n+1}^{m+1}-C_k^{m+1};$$

если же $m \geqslant k$, то

$$a_m = C_{n+1}^{m+1}.$$

173. Из условия задачи следует:

$$C_n^2 = C_n^1 + 44, \text{ или } \frac{n(n-1)}{2} = n + 44.$$

Решив это уравнение относительно n, найдем $n = 11$.

Общий член разложения

$$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^{11}$$

можно записать в виде

$$C_{11}^m x^{\frac{3}{2}(11-m)-4m}.$$

По условию задачи $\frac{3}{2}(11-m) - 4m = 0$, откуда $m = 3$. Следовательно, искомый член равен C_{11}^3.

174. Положим $x + \frac{6}{x} = u$, тогда

$$\left(1 + x + \frac{6}{x}\right)^{10} = (1+u)^{10} = 1 + C_{10}^1 u + C_{10}^2 u^2 + \ldots + C_{10}^{10} u^{10},$$

где

$$u^k = \left(x + \frac{6}{x}\right)^k = x^k + C_k^1 x^{k-2} \cdot 6 + \ldots + C_k^s x^{k-2s} \cdot 6^s + \ldots + \frac{6^k}{x^k}. \quad (1)$$

Для слагаемого, не содержащего x в выражении (1), должно удовлетворяться условие $k - 2s = 0$; следовательно, это слагаемое будет равно $C_{2s}^s \cdot 6^s$. Собирая все такие члены, найдем, что слагаемое, не содержащее x в первоначальном выражении, будет равно

$$1 + C_{10}^2 \cdot C_2^1 \cdot 6 + C_{10}^4 \cdot C_4^2 \cdot 6^2 + C_{10}^6 \cdot C_6^3 \cdot 6^3 + C_{10}^8 \cdot C_8^4 \cdot 6^4 + C_{10}^{10} \cdot C_{10}^5 \cdot 6^5.$$

175. Неравенства $T_{k+1} > T_k$ и $T_{k+1} > T_{k+2}$ после упрощений принимают вид

$$\frac{\sqrt{3}}{k} > \frac{1}{101-k}, \quad \frac{1}{100-k} > \frac{\sqrt{3}}{k+1}.$$

Решив каждое из них относительно k, получим:

$$\frac{101\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} > k > \frac{100\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}. \quad (1)$$

Левая и правая части неравенства (1) — числа не целые, а разность между ними равна единице. Поэтому существует лишь одно целое число k, удовлетворяющее неравенству (1). Заметив, что $1{,}72 < \sqrt{3} < 1{,}73$, прямым вычислением установим что

$$64{,}64 > k > 63{,}135.$$

Следовательно, $k = 64$.

176. Общий член разложения $T_{k+1} = C_n^k a^k$. Если $T_k = T_{k+1}$, то $C_n^{k-1} a^{k-1} = C_n^k a^k$ или

$$\frac{n!\, a^{k-1}}{(k-1)!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\, a^k}{k!\,(n-k)!},$$

откуда $k = \dfrac{n+1}{1+\dfrac{1}{a}}$. Получаем искомое условие: $1+\dfrac{1}{a}$ должно быть делителем числа $n+1$

Если теперь $T_k = T_{k+1} = T_{k+2}$, то это эквивалентно равенствам

$$\frac{1}{(n-k+1)(n-k)} = \frac{a}{k(n-k)} = \frac{a^2}{k(k+1)}$$

или

$$\frac{k}{n-k+1} = a, \quad \frac{k+1}{n-k} = a,$$

что приводит к условию $n+1=0$, которое невыполнимо.

177. В разложение войдут: n членов вида x_i^3 ($i = 1, 2, \ldots, n$), $n(n-1)$ членов вида $x_i^2 x_j$ (i, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$) и, наконец, C_n^3 членов вида $x_i x_j x_k$, где i, j, k — различные числа. Таким образом, число различных не подобных членов равно

$$n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

178. Делителями числа q являются, очевидно, числа p_1, p_2, ..., p_k и всевозможные их произведения по два, по три и т. д. Число таких делителей равно

$$C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k.$$

Тот факт, что все полученные делители не равны между собой и что других делителей нет, следует из единственности представления числа в виде произведения простых чисел.

179. Подлежащее доказательству равенство имеет вид

$$1 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^k}{k+1} + \ldots + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

и равносильно равенству

$$1+(n+1)+\frac{n+1}{2}C_n^1+\frac{n+1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{n+1}{k+1}C_n^k+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n+1}{n}C_n^{n-1}+1=2^{n+1}.$$

Так как

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k=\frac{n+1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1},$$

то левая часть последнего равенства равна

$$1+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{k+1}+\ldots+C_{n+1}^n+1=(1+1)^{n+1}=2^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

180. Общий член левой части равенства может быть преобразован следующим образом:

$$kC_n^kx^k(1-x)^{n-k}=k\frac{n!}{k!\,(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$$
$$=nx\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}=$$
$$=nxC_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}.$$

Поэтому левая часть равенства может быть представлена в следующем виде:

$$nx\,[C_{n-1}^0(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2}+\ldots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]=$$
$$=nx\,[x+1-x]^{n-1}=nx.$$

181. Всякое деление колоды, указанное в условии, равносильно извлечению 16 нетузов из числа 32 нетузов и двух тузов из числа четырех тузов. Первое извлечение можно осуществить C_{32}^{16} способами, а второе C_4^2 способами. Так как каждое извлечение 16 нетузов можно скомбинировать с любым извлечением двух тузов, то общее число способов указанного деления колоды равно $C_{32}^{16}C_4^2$.

182. Искомое число номеров равно числу размещений, которые можно образовать из 10 цифр по 5, т. е. равно $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=$ $=30\,240$.

183. Занумеруем некоторые n мест и будем образовывать разбиения, последовательно заполняя каждое из указанных мест парой элементов

На первое место можно выбрать пару C_{2n}^2 способами; после того как первая пара выбрана, вторую можно выбрать C_{2n-2}^2 способами, третью C_{2n-4}^2 способами и т. д. В результате мы придем к $C_{2n}^2C_{2n-2}^2C_{2n-4}^2\ldots C_2^2$ разбиениям, в число которых войдут, однако, и все разбиения, отличающиеся порядком расположения пар.

Следовательно, число интересующих нас разбиений равно

$$\frac{C_{2n}^2 C_{2n-2}^2 \ldots C_2^2}{n!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 2\cdot 1}{2^n n!} =$$

$$= (2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1$$

Это произведение сокращенно иногда обозначают символом $(2n-1)!!$

К тому же результату можно прийти, рассуждая несколько иначе. Обозначим через k_n число разбиений для того случая, когда число элементов равно $2n$. Рассмотрим $2n$ элементов. Поскольку порядок расположения пар несуществен, можно считать первой парой ту, которая содержит первый элемент. Пары, содержащие первый элемент, можно образовать $2n-1$ способами. Остальные $2(n-1)$ элементов при выбранной первой паре можно разбить на пары k_{n-1} способами. Поэтому $k_n = (2n-1)k_{n-1}$. С помощью этого соотношения легко находим:

$$k_n = (2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1.$$

184. Из общего числа $n!$ перестановок нам надлежит вычесть те, в которых элементы a и b стоят рядом. Чтобы образовать такую перестановку, нужно взять некоторую перестановку из оставшихся $n-2$ элементов (их всего $(n-2)!$) и присоединить к выбранной перестановке два элемента a и b так, чтобы они оказались рядом. Это, очевидно, можно сделать $2(n-1)$ способами (множитель 2 здесь связан с тем, что a и b можно переставить местами). Таким образом, число перестановок, в которых a и b стоят рядом, равно $2(n-2)!(n-1)$, а интересующее нас число равно

$$n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2).$$

185. Если среди вынутых 5 билетов оказалось ровно два выигрышных, то остальные три — невыигрышные. Из 8 выигрышных билетов можно выбрать два C_8^2 способами, из $50-8=42$ невыигрышных билетов три можно выбрать C_{42}^3 способами. Каждый способ выбора двух выигрышных билетов может сочетаться с любым из способов выбора трех невыигрышных. Поэтому общее число способов равно

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{1\cdot 2\cdot 3} = 326\,240.$$

Число способов выбора 5 билетов, при которых, по крайней мере (по меньшей мере), два будут выигрышными, равно сумме числа способов, при которых вынимается ровно два выигрышных, ровно три выигрышных, ровно четыре выигрышных и ровно пять выигрышных билетов. Следовательно, это число равно

$$C_8^2 C_{42}^3 + C_8^3 C_{42}^2 + C_8^4 C_{42}^1 + C_8^5\cdot 1 =$$

$$= \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{42\cdot 41}{1\cdot 2} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{42}{1} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} =$$

$$= 326\,240 + 48\,216 + 2\,940 + 56 = 377\,452.$$

186. Первое решение. Пусть на верхней прямой расположено n точек, а на нижней m точек (рис. 1). Подразделим все соединяющие отрезки на пучки отрезков, причем в один пучок объединим все отрезки, соединяющие фиксированную точку нижней прямой (например, A) со всеми точками на верхней прямой. Ясно, что число таких пучков равно m и что число точек пересечения отрезков, принадлежащих каким-нибудь двум пучкам, одно и то же для любой пары пучков. Если это число обозначим через k_n, то общее число точек пересечения всех отрезков будет равно произведению k_n на число сочетаний пучков по два, т. е.

$$k_n C_m^2 = k_n \frac{m(m-1)}{2}.$$

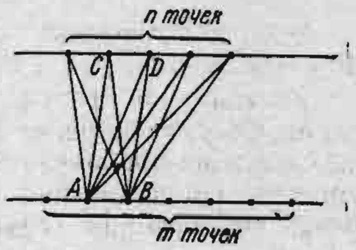


Рис. 1.

Для подсчета числа k_n подразделим все отрезки, соединяющие n точек верхней прямой с двумя точками A и B нижней прямой, на пучки отрезков, объединив в один пучок два отрезка, соединяющих фиксированную точку верхней прямой (например, C) с точками A и B. Число таких пучков равно n, а число точек пересечения отрезков, принадлежащих двум пучкам, равно единице (точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$). Поэтому

$$k_n = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, общее число точек пересечения всех отрезков, соединяющих n точек верхней прямой с m точками нижней прямой, равно

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{m(m-1)}{2}.$$

Второе решение. Каждую точку пересечения отрезков можно получить, выбрав две точки на первой прямой, что можно сделать C_m^2 способами, и две точки на второй прямой, что можно сделать C_n^2 способами. Комбинируя всевозможные пары точек, мы получим

$$C_m^2 \cdot C_n^2 = \frac{m(m-1)\, n(n-1)}{4} \text{ точек пересечения.}$$

187. Каждый параллелограмм определяется выбором двух прямых первой серии, что можно сделать C_n^2 способами, и двух прямых второй серии, что можно сделать C_m^2 способами. Таким образом, общее число параллелограммов равно

$$C_n^2 \cdot C_m^2 = \frac{n(n-1)\, m(m-1)}{4}.$$

188. Ввиду того что в данном алфавите любому отдельному знаку (точке или тире) и любой паре знаков соответствует какая-то буква, число способов, которыми можно прочитать сплошную цепочку из x знаков, не зависит от конкретного строения этой цепочки и равно числу всевозможных разбиений, образующих цепочку знаков в на группы из одного или двух рядом стоящих знаков. Обозначим это число через p_n.

Распределим всевозможные способы прочтения данной цепочки из n знаков по двум категориям.

К первой категории отнесем те способы, в которых один первый знак цепочки прочитывается как отдельная буква. Число способов первой категории равно числу способов прочтения цепочки из $n-1$ знаков (остающихся после отбрасывания первого), т. е. равно p_{n-1}.

Ко второй категории отнесем те способы, в которых два первых знака цепочки прочитываются как одна буква. Число способов второй категории равно числу способов прочтения цепочки из $n-2$ знаков (остающихся после отбрасывания первых двух), т. е. равно p_{n-2}.

Так как всякий способ прочтения данной цепочки принадлежит одной и только одной из двух указанных категорий, то общее число способов равно сумме числа способов первой категории и второй категории, т. е.

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}. \tag{1}$$

Это равенство представляет собой рекуррентную формулу, по которой можно последовательно вычислить p_n для любого n, если только знать p_1 и p_2. Но в данной задаче $p_1 = 1$ (для цепочки из одного знака есть только один способ первой категории) и $p_2 = 2$ (для цепочки из двух знаков есть два способа: один первой категории и один второй категории).

Пользуясь формулой (1), последовательно находим:

$$p_3 = p_2 + p_1 = 2 + 1 = 3,$$
$$p_4 = p_3 + p_2 = 3 + 2 = 5,$$
$$p_5 = p_4 + p_3 = 5 + 3 = 8$$

и т. д. Окончательно получаем:

$$p_{12} = 233.$$

6. Составление уравнений

189. Пусть x — меньший из сомножителей. Тогда из условий задачи непосредственно вытекает, что

$$x(x+10) - 40 = 39x + 22$$

или

$$x^2 - 29x - 62 = 0,$$

откуда $x_1 = 31$, $x_2 = -2$. Отрицательный корень отбрасываем, следовательно, множители равны 31 и 41.

190. До первой встречи первый велосипедист прошел $s + a$ *км*, второй $s - a$ *км*, где s — расстояние от A до B. До второй встречи они прошли соответственно $2s + \frac{1}{k}s$ и $2s - \frac{1}{k}s$ *км*.

Но если два тела движутся с постоянными скоростями, то отношение скоростей тел при равенстве затраченных времен равно отношению пройденных телами путей. Поэтому для нахождения s

имеем уравнение

$$\frac{s+a}{s-a}=\frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}.$$

Отсюда $s=2ak$ *км.*

191. Если два тела движутся с постоянными скоростями, то на одном и том же участке пути отношение их скоростей обратно отношению затраченных телами времен. Пусть v — скорость третьей машины, t — время движения второй машины до того момента, когда ее обогнала третья. Тогда

$$\frac{40}{v}=\frac{t-0,5}{t}, \quad \frac{50}{v}=\frac{t+1}{t+1,5}.$$

Разделив первое уравнение почленно на второе, найдем $t=\frac{3}{2}$ часа; затем определим $v=60$ *км/час.*

192. Пусть до встречи прошло x часов. Один и тот же путь от места встречи до пункта B велосипедист проехал за x часов, а пешеход прошел за $x+t$ часов. Так как при равном пути времена обратно пропорциональны скоростям, то

$$\frac{x+t}{x}=k,$$

откуда

$$x=\frac{t}{k-1}.$$

193. Обозначим расстояние от A до B через x, а расстояние от B до C через y. Тогда, учитывая, что время движения во всех случаях, о которых говорится в условиях задачи, одинаково, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{3,5}+\frac{y}{4}&=\frac{x+y}{3,75},\\ \frac{x+y}{3,75}&=\frac{14}{60}+\frac{y}{3,75}+\frac{x}{4}.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $x=14$ *км*, $y=16$ *км.*

194. Пусть x — длина дороги по ровному месту, y — длина дороги в гору. Имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{3}+\frac{x}{4}+\frac{11,5-(x+y)}{5}&=2\frac{9}{10},\\ \frac{11,5-(x+y)}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{5}&=3\frac{1}{10}.\end{aligned}\right\}$$

Сложив уравнения системы, найдем, что $x=4$.

195. Обозначим через l расстояние между пунктами A и B и через v_1, v_2 — скорости мотоциклов. За время t первый мотоцикл проехал путь, равный $p+l-q$, а второй — путь $q+l-p$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{l+p-q}{t},\\ v_2&=\frac{l+q-p}{t}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

С другой стороны, отношение скоростей равно отношению путей, пройденных до первой встречи, т. е.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{l-p}{p}.$$

Подставив сюда v_1 и v_2 из (1), получим уравнение для определения l. Решив его, найдем $l=3p-q$. Подставив это значение l в формулы (1), получим:

$$v_1=\frac{4p-2q}{t}, \qquad v_2=\frac{2p}{t}.$$

196. Разность между временами опоздания самолета в первом и втором рейсах, равная $\frac{t_1-t_2}{60}$ часов, связана с тем, что путь в d *км* был пройден с разными скоростями: в первом рейсе скорость была v *км/час*, во втором w *км/час* (на остальных участках пути скорости были соответственно равны). Отсюда получаем уравнение

$$\frac{t_1-t_2}{60}=\frac{d}{v}-\frac{d}{w},$$

из которого находим, что начальная скорость самолета равна

$$w=\frac{60vd}{60d+v(t_2-t_1)}\ \frac{км}{час}.$$

197. Обозначим вес отрезанного куска через x. Пусть первый кусок содержал 100 a% меди, а второй — 100 b% меди. Тогда весовое количество меди в первом куске после сплавления остатка от него с отрезком от второго будет равно $a(m-x)+bx$, а вес меди во втором куске после сплавления остатка от него с отрезком от первого куска будет равен $b(n-x)+ax$. По условию задачи

$$\frac{a(m-x)+bx}{m}=\frac{b(n-x)+ax}{n}.$$

Решив это уравнение, получим (учитывая, что $a\neq b$):

$$x=\frac{mn}{m+n}.$$

198. Пусть отношение весов сплавляемых кусков равно $\alpha:\beta$. Тогда

$$\frac{\frac{\alpha p}{100}+\frac{\beta q}{100}}{\alpha+\beta}=\frac{r}{100}.$$

Отсюда получаем:

$$\alpha:\beta=(r-q):(p-r).$$

Решение возможно, если $p>r>q$ или $p<r<q$.

Чтобы найти максимальный вес нового сплава, рассмотрим отношения $\frac{P}{|r-q|}$ и $\frac{Q}{|p-r|}$.

Если $\frac{P}{|r-q|}=\frac{Q}{|p-r|}$, то максимальный вес равен

$$P+Q=\frac{p-q}{r-q}P=\frac{p-q}{p-r}Q.$$

Если $\frac{P}{|r-q|}<\frac{Q}{|p-r|}$, то максимальный вес равен

$$P+\frac{p-r}{r-q}P=\frac{p-q}{r-q}P.$$

Если, наконец, $\frac{P}{|r-q|}>\frac{Q}{|p-r|}$, то максимальный вес равен

$$Q+\frac{r-q}{p-r}Q=\frac{p-q}{p-r}Q.$$

199. Пусть каждый рабочий работал по t дней и пусть A заработал x рублей, а B заработал y рублей. Из условий задачи получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (t-1)\frac{x}{t}&=72,\\ (t-7)\frac{y}{t}&=64{,}8,\\ (t-1)\frac{y}{t}-(t-7)\frac{x}{t}&=32{,}4. \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Из первых двух уравнений находим:

$$\frac{t-1}{t}=\frac{72}{x},\quad \frac{t-7}{t}=\frac{64{,}8}{y}.$$

Тогда из последнего уравнения получаем:

$$72\frac{y}{x}-64{,}8\frac{x}{y}=32{,}4,$$

или

$$20\left(\frac{y}{x}\right)^2-9\left(\frac{y}{x}\right)-18=0.$$

Отсюда $y=\frac{6}{5}x$ (отрицательный корень отбрасываем). Деля теперь второе уравнение системы (1) на первое и заменяя $\frac{y}{x}$ его значением, находим:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{t-7}{t-1} = \frac{64,8}{72}, \quad \frac{t-7}{t-1} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда $t=25$ и, следовательно,

$$x = 75 \text{ руб.}, \quad y = 90 \text{ руб.}$$

200. Обозначим через t_1 время, прошедшее до первой встречи, через t_2 — время, прошедшее до второй встречи, и через R — радиус окружности. За время t_1 первое тело прошло путь vt_1, а второе — путь $\frac{at_1^2}{2}$. Сумма этих путей равна длине окружности, так что

$$vt_1 + \frac{at_1^2}{2} = 2\pi R. \qquad (1)$$

За время t_2 каждое тело прошло один и тот же путь, равный длине окружности, так что

$$vt_2 = 2\pi R, \quad \frac{at_2^2}{2} = 2\pi R.$$

Исключая отсюда t_2, найдем $R = \frac{v^2}{\pi a}$. Подставив это значение R в (1), получим квадратное уравнение относительно t_1:

$$\frac{at_1^2}{2} + vt_1 - \frac{2v^2}{a} = 0.$$

Решив это уравнение и отбросив отрицательный корень (так как по смыслу задачи должно быть $t_1 > 0$), окончательно получим:

$$t_1 = (\sqrt{5} - 1)\frac{v}{a}.$$

201. Обозначим через q_1 и q_2 производительности кранов (в *л/мин*) и через v — объем бассейна. Время наполнения бассейна каждым из кранов будет равно

$$t_1 = \frac{v}{q_1}, \quad t_2 = \frac{v}{q_2}. \qquad (1)$$

Первое условие задачи приводит к уравнению

$$q_1 \cdot \frac{1}{3} t_2 + q_2 \cdot \frac{1}{3} t_1 = \frac{13}{18} v.$$

Используя равенства (1), получим квадратное уравнение

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 - \frac{13}{6}\frac{q_1}{q_2} + 1 = 0,$$

решениями которого будут $\frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{3}$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{3}{2}$. Из второго условия задачи следует:

$$v = (3 \cdot 60 + 36)(q_1 + q_2) = 216(q_1 + q_2).$$

Из (1) находим искомые величины:

$$t_1=\frac{216\,(q_1+q_2)}{q_1}=540 \text{ мин. (9 час.)},$$

$$t_2=\frac{216\,(q_1+q_2)}{q_2}=360 \text{ мин. (6 час.)}.$$

Есть и второе решение:

$$t_1=360 \text{ мин.}, \quad t_2=540 \text{ мин.}$$

202. Обозначим через γ удельный вес воды, а через s — площадь поперечного сечения трубки. Атмосферное давление p_a найдется по формуле

$$p_a=\gamma c.$$

Если p_1 — давление под поршнем в поднятом положении, то, по закону Бойля — Мариотта, для воздуха, заключенного между поршнем и уровнем воды, имеем $p_1(b-x)s=p_a hs$ (рис. 2). Уравнение равновесия столба жидкости имеет вид $p_a-p_1=\gamma x$. Это приводит к уравнению

$$c-\frac{hc}{b-x}=x$$

(γ сокращается), т. е. к квадратному уравнению

$$x^2-(b+c)\,x+(b-h)\,c=0.$$

Отсюда находим:

$$x=\frac{1}{2}\left[(b+c)-\sqrt{(b-c)^2+4hc}\right].$$

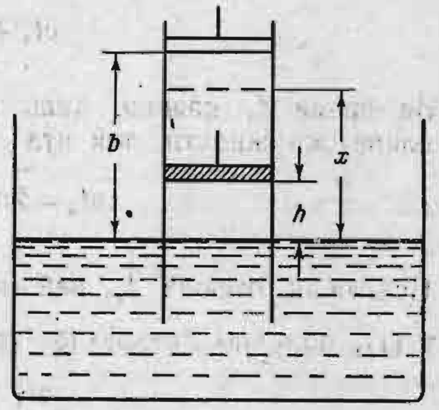


Рис. 2.

203. Пусть p_1 и p_2 — давления воздуха, находящегося под поршнем, в положениях I и II соответственно (рис. 3) и γ — удельный вес ртути. Уравнения равновесия столбов ртути высотой 12 *см* и x *см* будут соответственно

$$\left.\begin{aligned} 76\gamma-p_1&=12\gamma, \\ 76\gamma-p_2&=x\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

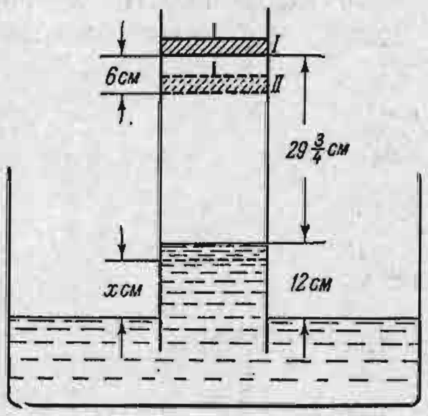


Рис. 3.

Закон Бойля — Мариотта для воздуха, находящегося под поршнем, дает уравнение

$$p_1\cdot 29\frac{3}{4}=p_2\,(36-x).$$

Подставив сюда выражения для p_1 и p_2 из (1), получим квадратное уравнение для x:

$$29\frac{3}{4}\cdot 64=(76-x)(36-x),$$

или

$$x^2-112x+832=0.$$

Отсюда $x=56\pm\sqrt{3136-832}=56\pm\sqrt{2304}=56\pm 48$, т. е. $x=$ $=8$ *см*.

204. Пусть часы спешат на x минут в сутки. Тогда они покажут верное время через $\frac{2}{x}$ суток. Если бы они показывали на 3 минуты меньше, а спешили бы на $x+\frac{1}{2}$ минут в сутки, то верное время они показали бы через $\frac{3}{x+\frac{1}{2}}$ суток. Следовательно,

$$\frac{3}{x+\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{x},$$

откуда

$$x^2+\frac{3}{2}x-1=0.$$

Решая это уравнение, найдем $x=0,5$.

205. Если x — исходные суммы вкладчиков, а y — процент, выплачиваемый сберкассой, то

$$x+x\frac{y}{100}\frac{m}{12}=p, \quad x+x\frac{y}{100}\frac{n}{12}=q.$$

Умножая первое уравнение на n, второе на m и вычитая из первого второе, найдем:

$$x=\frac{pn-qm}{n-m}.$$

Возвращаясь снова к первоначальной системе и вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$\frac{xy}{1200}(m-n)=p-q.$$

Отсюда

$$y=\frac{1200(p-q)}{qm-pn}\ {}^0/_0.$$

206. Обозначим через v_1 и v_2 скорости точек, и пусть $v_1>v_2$. Первое условие задачи запишется уравнением

$$\frac{2\pi R}{v_2}-\frac{2\pi R}{v_1}=t.$$

Второе условие означает, что за время T точка, движущаяся с бо́льшей скоростью, пройдет по окружности путь на $2\pi R$ больший, чем другая точка. Это дает второе уравнение

$$Tv_1-Tv_2=2\pi R.$$

Из второго уравнения находим:

$$v_2=v_1-\frac{2\pi R}{T}.$$

Подставив это выражение для v_2 в первое уравнение, получим квадратное уравнение для v_1:

$$v_1^2 - \frac{2\pi R}{T} v_1 - \frac{2\pi R}{T} \cdot \frac{2\pi R}{t} = 0.$$

Решив его, найдем:

$$v_1 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}}+1\right)$$

и затем

$$v_2 = \frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}}-1\right).$$

207. Пусть v — объем раствора в колбе, x — количество соли, содержащейся в растворе, в процентах.

В пробирку отливают $\frac{v}{n}$ раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое. Так как количество соли при этом не изменяется, то, следовательно, объем раствора в пробирке уменьшится вдвое и вес выпаренной воды будет равен $\frac{v}{2n}$.

После переливания выпаренного раствора обратно в колбу в колбе снова будет то же количество соли, что и раньше, т. е. $v\frac{x}{100}$, а объем раствора уменьшится на $\frac{v}{2n}$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{v\frac{x}{100}}{v-\frac{v}{2n}} = \frac{x+p}{100},$$

из которого находим:

$$x = (2n-1)\,p.$$

208. Пусть в первом сосуде было x литров спирта; тогда во втором будет $30-x$ литров. После доливания первого сосуда водой в 1 *л* полученной смеси содержалось $\frac{x}{30}$ спирта и $1-\frac{x}{30}$ воды. После переливания из первого сосуда во втором стало $30-x+\frac{x}{30}x$ литров спирта и $\left(1-\frac{x}{30}\right)x$ литров воды. Эта новая смесь такова, что в одном литре смеси содержится

$$1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2 \text{ литров спирта.}$$

После того, как 12 *л* новой смеси было отлито в первый сосуд, в нем оказалось

$$12\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]+\frac{x}{30}(30-x) \text{ литров спирта,}$$

а во втором сосуде

$$18\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \text{ литров спирта.}$$

По условию

$$18\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]+2=12\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]+x-\frac{x^2}{30},$$

откуда получаем уравнение

$$x^2-30x+200=0.$$

Это уравнение имеет корни

$$x_1=20, \quad x_2=10.$$

Итак, в первом сосуде было либо 20 *л* (и тогда во втором 10 *л*), либо 10 *л* (и тогда во втором 20 *л*).

209. Пусть x — расстояние от первого берега до того места, где C покинул лодку. Заметим сначала, что на таком же расстоянии от второго берега A сел в лодку. Действительно, способ, которым преодолели переправу A и C, отличается лишь тем, что C сначала ехал в лодке, а затем плыл, а A — наоборот. Так как они плывут с одинаковой скоростью v, причем $v \neq v_1$, и затрачивают одинаковое время на переправу, то, очевидно, указанные расстояния должны быть равны.

После этого замечания легко составить уравнение

$$\frac{x+s-2(s-x)}{v_1}=\frac{s-x}{v}.$$

Здесь левая часть выражает время, затраченное лодкой на преодоление пути до встречи с A, а правая часть — время, которое затратил A до встречи с лодкой.

Из полученного уравнения находим:

$$x=\frac{s(v+v_1)}{3v+v_1}.$$

Отсюда время переправы

$$T=\frac{s-x}{v}+\frac{x}{v_1}=\frac{s}{v_1}\,\frac{v+3v_1}{3v+v_1}.$$

Примечание. Можно было бы решить задачу и без предварительного замечания о равенстве указанных выше расстояний. При этом, однако, пришлось бы ввести несколько неизвестных и решение оказалось бы более громоздким.

210. Обозначим искомое расстояние через s *км*, скорость поезда через v *км/час*. За 6 часов до остановки, вызванной снежным заносом, поезд прошел $6v$ *км*, а оставшуюся часть пути длиной

$(s-6v)$ *км* он прошел за $\frac{5(s-6v)}{6v}$ часов, так как скорость поезда на этом участке пути была равна $\frac{6}{5}v$.

Поезд был в пути всего (с учетом двухчасовой вынужденной стоянки) $8+\frac{5(s-6v)}{6v}$ часов. Это число часов на один час больше положенных по расписанию $\frac{s}{v}$ часов. Таким образом, получаем уравнение

$$8+\frac{5(s-6v)}{6v}=1+\frac{s}{v}.$$

Проведя аналогичное рассуждение относительно второго поезда, составим еще одно уравнение:

$$\frac{s}{v}+\frac{3}{2}=8+\frac{150}{v}+\frac{5(s-6v-150)}{6v}.$$

Из этой системы находим $s=600$ *км*.

211. Обозначая через v скорость лодки в стоячей воде, а через w скорость течения, получим систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{v+w}+\frac{a}{v-w}=T, \\ \frac{a}{v-w}=T_0+\frac{a-b}{v+w}+\frac{2b}{v+w}=T_0+\frac{a+b}{v+w}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему относительно неизвестных $\frac{1}{v+w}$ и $\frac{1}{v-w}$ и беря обратные величины, находим:

$$v+w=\frac{2a+b}{T-T_0} \quad \text{и} \quad v-w=\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}.$$

Отсюда следует, что

$$v=\frac{1}{2}\left[\frac{2a+b}{T-T_0}+\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}\right],$$

$$w=\frac{1}{2}\left[\frac{2a+b}{T-T_0}-\frac{a(2a+b)}{T(a+b)+T_0a}\right].$$

212. Пусть x — время, в течение которого был открыт второй кран, v — скорость поступления воды из первого крана, w — скорость поступления воды из второго крана (v и w измеряются в $м^3/час$). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} v(x+5)+wx=425, \\ 2vx=w(x+5), \\ (v+w)\,17=425. \end{aligned}\right\}$$

Из второго и третьего уравнений получаем:

$$v = 25\,\frac{x+5}{3x+5}; \quad w = \frac{50x}{3x+5}.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение, находим:

$$3x^2 - 41x - 60 = 0,$$

откуда $x = 15$ час. (Второй корень, отрицательный, не годится.)

213. Обозначим искомую скорость поезда через *км/час*, а скорость поезда по графику — через v_1 *км/час*. Первую половину пути поезд проходил за $\frac{10}{v_1}$ часов, на преодоление второй половины и на стоянку поезд затратил в первый раз $\frac{10}{v_1+10} + \frac{1}{20}$ часов и во второй раз $\frac{10}{v} + \frac{1}{12}$ часов. Но оба раза поезд пришел в B вовремя, и поэтому

$$\frac{10}{v_1} = \frac{10}{v_1+10} + \frac{1}{20}, \quad \frac{10}{v_1} = \frac{10}{v} + \frac{1}{12}.$$

Из первого уравнения найдем v_1:

$$10\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_1+10}\right) = \frac{1}{20}, \quad \frac{100}{v_1(v_1+10)} = \frac{1}{20},$$

$$v_1^2 + 10v_1 - 2000 = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень $v_1 = 40$. Из второго уравнения найдем, что $v = 60$ *км/час*.

214. Пусть расстояние AB равно s *км*, а скорости первого и второго самолетов равны v_1 и v_2. Тогда, в силу условий задачи, имеем систему трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{2v_1} + \frac{a}{v_1} &= \frac{s}{2v_2} - \frac{a}{v_2}, \\ \frac{s}{2v_2} - \frac{s}{2v_1} &= b, \\ \frac{3s}{4v_1} - b &= \frac{s}{4v_2}. \end{aligned}\right\}$$

Положим

$$\frac{s}{2v_1} = x, \qquad \frac{s}{2v_2} = y.$$

Из второго и третьего уравнений найдем: $x = \frac{3}{2}b$, $y = \frac{5}{2}b$, а из первого: $a\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = b$. Но $\frac{v_2}{v_1} = \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$. Теперь уже нетрудно найти, что $v_1 = \frac{8a}{3b}$, $v_2 = \frac{8a}{5b}$ и $s = 8a$.

215. Пусть u — скорость катера в стоячей воде, а v — скорость течения. Тогда имеем систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{96}{u+v}+\frac{96}{u-v}=14, \\ \frac{24}{v}=\frac{96}{u+v}+\frac{72}{u-v}. \end{aligned}\right\}$$

Для ее решения положим $\frac{u}{v}=z$. Умножив обе части второго уравнения на v, найдем:

$$24=\frac{96}{z+1}+\frac{72}{z-1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$24z^2-168z=0.$$

Так как $z\neq 0$, то $z=7$. Следовательно, $u=7v$. Подставляя $u=7v$ в первое уравнение системы, находим:

$$\frac{96}{8v}+\frac{96}{6v}=14,$$

откуда

$$v=2 \text{ км/час}, \qquad u=14 \text{ км/час}.$$

216. Путь, пройденный каждым телом за t *сек*, определяется формулой

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Чтобы найти v_0 и a для каждого тела, подставляем в эту формулу приведенные в условиях задачи числовые данные:

1) для первого тела:

при $t=1$ имеем $25=v_0+\frac{a}{2}$,

при $t=2$ имеем $50\frac{1}{3}=2v_0+2a$;

отсюда $a=\frac{1}{3}$, $v_0=25-\frac{1}{6}$ и $s_1=24\frac{5}{6}t+\frac{t^2}{6}$;

2) для второго тела:

при $t=1$ имеем $30=v_0+\frac{a}{2}$,

при $t=2$ имеем $59\frac{1}{2}=2v_0+2a$;

отсюда $a=-\frac{1}{2}$, $v_0=30+\frac{1}{4}$ и $s_2=30\frac{1}{4}t-\frac{t^2}{4}$.

В тот момент, когда первое тело нагонит второе, будет $s_1 = s_2 + 20$; отсюда получаем квадратное уравнение для определения t:

$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Решая его, находим $t = 16$. Второй, отрицательный, корень отбрасываем.

217. Пусть v—собственная скорость лодки. Тогда время движения лодки равно

$$t = \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1}.$$

По условию имеем:

$$3 \leqslant \frac{10}{v+1} + \frac{6}{v-1} \leqslant 4. \qquad (1)$$

Необходимо, чтобы было $v > 1$, так как в противном случае лодка не сможет двигаться против течения. От системы неравенств (1) перейдем к равносильной системе неравенств

$$3(v^2 - 1) \leqslant 16v - 4 \leqslant 4(v^2 - 1).$$

Итак, нужно, чтобы сразу выполнялись два неравенства:

$$3v^2 - 16v + 1 \leqslant 0$$

и

$$4v^2 - 16v \geqslant 0.$$

Первое неравенство удовлетворяется, если

$$\frac{8 - \sqrt{61}}{3} \leqslant v \leqslant \frac{8 + \sqrt{61}}{3}.$$

Второе неравенство удовлетворяется, если $v < 0$ или $v > 4$. Но так как $v > 1$, то окончательно имеем:

$$4 \leqslant v \leqslant \frac{8 + \sqrt{61}}{3}.$$

218. Обозначим через x объем воды в сосуде A до переливания. Тогда первоначальный объем воды в сосудах B и C будет равен соответственно $2x$ и $3x$, а общий объем $x + 2x + 3x = 6x$.

После первого переливания из A в B и из B в C глубина во всех сосудах стала одинаковой, и поэтому объемы воды относятся как площади основания, т. е. как $1:4:9$. Поэтому после первого переливания объемы воды в сосудах A, B, C будут соответственно иметь значения

$$1 \cdot \frac{6x}{1+4+9} = \frac{3}{7}x, \qquad 4 \cdot \frac{6x}{1+4+9} = \frac{12}{7}x,$$

$$9 \cdot \frac{6x}{1+4+9} = \frac{27}{7}x.$$

После второго переливания из C в B эти объемы станут соответственно равными

$$\frac{3}{7}x, \quad \frac{12}{7}x+128\frac{4}{7}, \quad \frac{27}{7}x-128\frac{4}{7}.$$

После третьего переливания из B в A объем воды в A стал равным $x-100$, а в B — равным

$$\frac{1}{2}(x-100)\cdot 4=2(x-100).$$

Сложив объемы воды во всех сосудах, получаем уравнение первой степени относительно x:

$$(x-100)+2(x-100)+\frac{27}{7}x-128\frac{4}{7}=6x.$$

Решая это уравнение, находим:

$$x=500.$$

Итак, первоначальное количество воды во всех сосудах таково:

в A — 500 *л*,
в B — 1000 *л*,
в C — 1500 *л*.

219. Пусть искомое число имеет вид $xyzt$ (здесь буквы x, y, z, t обозначают цифры соответствующих разрядов). По условиям задачи получаем следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} x^2+t^2&=13, \\ y^2+z^2&=85, \\ xyzt-1089&=tzyx. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

В силу поразрядного вычитания в третьем уравнении системы (1) либо $t=9$, либо

$$(10+t)-9=x,$$

т. е.

$$x=t+1. \qquad (2)$$

Но из первого уравнения системы (1) следует, что $t<4$ и поэтому имеет место (2). Тогда из первого уравнения системы (1) получаем уравнение для определения t:

$$(t+1)^2+t^2=13,$$

откуда

$$t=2.$$

Из (2) следует теперь, что $x=3$, и третье уравнение системы (1) принимает вид

$$3yz2-1089=2zy3. \qquad (3)$$

Заметим далее, что $z<9$ (если $z=9$, то из (3) следует, что $y=0$, но тогда не удовлетворяется второе уравнение системы (1)). Из (3)

находим:
$$(z-1+10)-8=y,$$
т. е
$$z=y-1. \qquad (4)$$
Наконец, из второго уравнения системы (1) и (4) определяем $z=6$, $y=7$. Итак, искомое число есть 3762.

220. Сначала найдем расстояние x от начала до места первой встречи. Уравнение времен движения обоих точек имеет вид
$$\frac{a+x}{v}-t=\frac{x}{w},$$
откуда
$$x=\frac{(a-vt)\,w}{v-w}.$$
От начала движения до первой встречи прошло время, равное
$$t_1=\frac{a+x}{v}.$$
Подставив сюда найденное значение x, получим:
$$t_1=\frac{a-wt}{v-w}.$$
Пусть τ — интервал времени между двумя последовательными встречами. Тогда
$$v\tau-w\tau=l,$$
откуда
$$\tau=\frac{l}{v-w}.$$
Последовательные встречи будут происходить в моменты времени t_1, $t_1+\tau$, $t_1+2\tau$, ... Момент n-й встречи будет
$$t_n=\frac{a-wt+l(n-1)}{v-w}.$$

221. Удельный вес первого из составляющих сплав металлов обозначим через γ_1, второго — через γ_2 и воды — через γ. Пусть x — вес первого металла в сплаве. По закону Архимеда потеря веса сплава в воде равна
$$\left(\frac{x}{\gamma_1}+\frac{P-x}{\gamma_2}\right)\gamma.$$
Аналогично для чистых металлов эта потеря будет равна
$$\frac{P}{\gamma_1}\gamma \quad \text{и} \quad \frac{P}{\gamma_2}\gamma.$$
Эти потери даны и равны соответственно B и C. Отсюда находим:
$$\frac{\gamma}{\gamma_1}=\frac{B}{P};\quad \frac{\gamma}{\gamma_2}=\frac{C}{P}.$$

Следовательно, потеря веса сплава равна

$$A=\frac{B}{P}x+\frac{C}{P}(P-x).$$

Отсюда

$$x=\frac{A-C}{B-C}P.$$

Для разрешимости задачи необходимо, чтобы $B \neq C$. Далее из того, что $\frac{x}{P}$ есть число, заключенное между 0 и 1, вытекает неравенство

$$0<\frac{A-C}{B-C}<1.$$

Отсюда следует, что либо $B > A > C$, либо $C > A > B$. Итак, для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы число A было заключено между числами B и C.

222. Обозначим расстояние от пункта A до устья реки через s, расстояние от устья реки по озеру до пункта B — через s_1, скорость парохода (без буксировки) — через v, скорость течения реки через v_1. Нужно определить $\frac{2s_1}{v}=x$.

Из условий задачи составляем три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{v+v_1}+\frac{x}{2}&=61,\\ \frac{s}{v-v_1}+\frac{x}{2}&=79,\\ \frac{s}{v_1}+x&=411.\end{aligned}\right\}$$

Из первого уравнения имеем:

$$\frac{v+v_1}{s}=\frac{2}{122-x}, \tag{1}$$

из второго уравнения найдем:

$$\frac{v-v_1}{s}=\frac{2}{158-x}, \tag{2}$$

из третьего уравнения получим:

$$\frac{v_1}{s}=\frac{1}{411-x}. \tag{3}$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2) и используя равенство (3), получим уравнение относительно x:

$$\frac{1}{122-x}-\frac{1}{158-x}=\frac{1}{411-x},$$

или

$$x^2-244x+4480=0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$x_1=20, \quad x_2=224.$$

Очевидно, значение $x_2=224$ не подходит, так как в уравнении (1) левая часть не может быть отрицательна.

223. Обозначим расстояние AB через s, расстояние BC — через s_1; пусть, далее, v — скорость лодки, v_1 — скорость течения (предполагается, что s и s_1 выражены в одних и тех же единицах длины; v и v_1 — скорости, рассчитанные на час).

Для движения лодки вниз по течению от A до C имеем:

$$\frac{s}{v}+\frac{s_1}{v+v_1}=6. \qquad (1)$$

Для движения лодки вверх по течению от C до A имеем:

$$\frac{s_1}{v-v_1}+\frac{s}{v}=7. \qquad (2)$$

При условии, что на AB течение такое же, как и на BC, путь AC займет

$$\frac{s+s_1}{v+v_1}=5{,}5 \text{ часа}. \qquad (3)$$

Нужно определить отношение $\dfrac{s+s_1}{v-v_1}$.

Приведем уравнения (1), (2) и (3) к общему знаменателю и, умножив обе части уравнения (3) на $v\neq 0$, получим систему

$$\left.\begin{aligned}(s+s_1)\,v&=6v\,(v+v_1)-sv_1,\\ (s+s_1)\,v&=7v\,(v-v_1)+sv_1,\\ (s+s_1)\,v&=5{,}5\,(v+v_1)\,v.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Сложив первые два уравнения и используя третье, получим:

$$2\,(s+s_1)\,v=v\,(13v-v_1)=11v\,(v+v_1).$$

Отсюда $v=6v_1$. Но из третьего уравнения системы (4) имеем $\dfrac{s+s_1}{v_1}=7\cdot 5{,}5$. Следовательно,

$$\frac{s+s_1}{v-v_1}=\frac{s+s_1}{5v_1}=7{,}7 \text{ часа}.$$

224. Обозначим через v объем сосуда, и пусть α_1 — процентное содержание кислоты в нем после первого перемешивания, α_2 — процентное содержание кислоты после второго перемешивания и т. д. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{(v-a)\,p+aq}{v}&=\alpha_1,\\ \frac{(v-a)\,\alpha_1+aq}{v}&=\alpha_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{(v-a)\,\alpha_{k-2}+aq}{v}&=\alpha_{k-1},\\ \frac{(v-a)\,\alpha_{k-1}+aq}{v}&=r.\end{aligned}\right\}$$

Умножая s-е равенство на $\left(\frac{v-a}{v}\right)^{k-s}$ и складывая, получаем:

$$\left(\frac{v-a}{v}\right)^k p+\frac{a}{v} q\left[1+\frac{v-a}{v}+\left(\frac{v-a}{v}\right)^2+\ldots+\left(\frac{v-a}{v}\right)^{k-1}\right]=r.$$

Отсюда

$$\left(\frac{v-a}{v}\right)^k p+\frac{a}{v} q\,\frac{\left(\frac{v-a}{v}\right)^k-1}{\frac{v-a}{v}-1}=r$$

и, значит,

$$\left(1-\frac{a}{v}\right)^k (p-q)=r-q.$$

Ответ:

$$v=\frac{a}{1-\sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}}.$$

225. В конце первого года вклад возрос на $\frac{Ap}{100}$ рублей, а вкладчик взял B рублей. Поэтому к началу второго года вклад составил в рублях сумму

$$P_1=A\left(1+\frac{p}{100}\right)-B.$$

В конце второго года вклад составил сумму

$$P_2=P_1\left(1+\frac{p}{100}\right)-B=A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-B\left[1+\left(\frac{p}{100}+1\right)\right],$$

а в конце третьего года $P_3=Ak^3-B(1+k+k^2)$, где

$$k=1+\frac{p}{100}.$$

Очевидно, в конце n-го года сумма вклада будет равна

$$P_n=Ak^n-B(1+k+k^2+\ldots+k^{n-1}),$$

т. е.

$$P_n=\frac{Ap-100B}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^n+\frac{100B}{p}.$$

По условию задачи нужно найти такое n, чтобы $P_n\geqslant 3A$. Тогда

$$n\geqslant\frac{\lg(3Ap-100B)-\lg(Ap-100B)}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)}. \qquad (1)$$

Задача имеет смысл, если сумма вклада возрастает, т. е. если

$$Ap>100B.$$

Так как, кроме того, $p > 0$, $A > 0$, $B > 0$, то выражение, стоящее в правой части неравенства (1), имеет смысл.

226. В конце первого года на лесной делянке древесины было

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=a_1,$$

к концу второго года —

$$a_1\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=a_2,$$

к концу третьего года —

$$a_2\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=a_3$$

и т. д. Наконец, к концу n-го года было

$$a_{n-1}\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=a_n=aq$$

древесины. Нужно определить x.

Положив для сокращения записи $1+\frac{p}{100}=k$, из последнего уравнения получим $x=ka_{n-1}-aq$. Из предыдущего уравнения выразим a_{n-1}. Получим:

$$x=k(ka_{n-2}-x)-aq=k^2a_{n-2}-kx-aq.$$

Но

$$a_{n-2}=ka_{n-3}-x.$$

Следовательно,

$$x=k^3a_{n-3}-k^2x-kx-aq.$$

Продолжая далее таким же образом, мы выразим, наконец, a_2 через a_1 и получим следующее уравнение относительно x:

$$x=k^na-x(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k)-aq.$$

Отсюда

$$x=a\frac{k^n-q}{k^n-1}(k-1)=a\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-q}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}\,\frac{p}{100}.$$

227. До переливания концентрация q_i спирта была равна:

в первом сосуде $q_1=1$,

во втором сосуде $q_2=\frac{1}{k}$,

. . . .

в n-м сосуде $q_n=\frac{1}{k^{n-1}}$.

Пусть после всех переливаний концентрации стали равны соответственно: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ Тогда $p_1=1$, а p_i при $i>1$ определяется из уравнения

$$p_i=\frac{q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2}}{v}=\frac{q_i+p_{i-1}}{2}\quad (i=2, \ldots, n).$$

Это уравнение мы получаем, деля количество спирта

$$q_i\frac{v}{2}+p_{i-1}\frac{v}{2},$$

которое оказывается в i-м сосуде при переливании из $(i-1)$-го сосуда, на объем всего сосуда v.

Таким образом,

$$p_2=\frac{q_2+p_1}{2},\qquad p_3=\frac{q_3+p_2}{2},\ \ldots,\ p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}.$$

Отсюда

$$p_n=\frac{q_n+p_{n-1}}{2}=\frac{q_n+\frac{q_{n-1}+p_{n-1}}{2}}{2}=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}p_{n-2}=$$

$$=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{1}{2^2}\,\frac{q_{n-2}+p_{n-3}}{2}=$$

$$=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\frac{q_{n-2}}{2^3}+\frac{p_{n-3}}{2^3}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{q_n}{2}+\frac{q_{n-1}}{2^2}+\ldots+\frac{q_2}{2^{n-1}}+\frac{p_1}{2^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2k^{n-1}}+\frac{1}{2^2k^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}k}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Последняя сумма при $k\neq 2$ равна

$$p_n=\frac{1}{2k}\,\frac{\frac{1}{k^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2^{n-1}-k^{n-1}}{(2k)^{n-1}(2-k)}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

При $k=2$ равна

$$p_n=\frac{n-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{n-1}{2^n}+\frac{2}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}.$$

228. Дробь имеет вид $\frac{p}{p^2-1}$, где p — целое, большее нуля. Условия задачи записываются в виде неравенств

$$\frac{p+2}{p^2+1}>\frac{1}{3},\qquad 0<\frac{p-3}{p^2-4}<\frac{1}{10}.$$

Преобразуем первое неравенство к виду

$$3(p+2)>p^2+1\ \text{или}\ 0>p^2-3p-5.$$

Решая соответствующее квадратное уравнение, получим:

$$p_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}.$$

Из неравенства $0>p^2-3p-5$ получаем $p_2<p<p_1$. Но $p_2<0$, а $p>0$, поэтому

$$0<p<p_1=\frac{3+\sqrt{29}}{2}.$$

Легко видеть, что p_1 лежит между 4 и 4,5. Следовательно, из этого неравенства вытекает, что p, как число целое, может принять только одно из четырех значений: $p=1, 2, 3, 4$. Подставляя эти значения во второе неравенство

$$0<\frac{p-3}{p^2-4}<\frac{1}{10},$$

находим, что $p\neq 1$, $p\neq 2$ и $p\neq 3$. Таким образом, $p=4$, $\frac{p}{p^2-1}=\frac{4}{15}$.

7. Разные задачи

229. Имеем:

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}.$$

230. Пусть сначала $x\neq a$. Умножая и деля исследуемое произведение на $x-a$ и применяя последовательно формулу для разности квадратов двух чисел, получим:

$$\frac{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^2-a^2)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=$$
$$=\frac{(x^8-a^8)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}{x-a}=\frac{x^{2^n}-a^{2^n}}{x-a}.$$

Пусть теперь $x=a$. Тогда исследуемое произведение равно

$$2a\cdot 2a^2\cdot 2a^4\ldots 2a^{2^{n-1}}=2^n a^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}}=2^n a^{\frac{2^n-1}{2-1}}=2^n a^{2^n-1}.$$

231. Умножим и разделим данное выражение на произведение

$$(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\ldots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}),$$

которое при всех вещественных $x\neq -a$ отлично от нуля. Легко видеть, что результат можно записать следующим образом:

$$\frac{(x^3+a^3)(x^6+a^6)(x^{12}+a^{12})\dots(x^{3\cdot 2^{n-1}}+a^{3\cdot 2^{n-1}})}{(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\dots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})}.$$

В числителе и знаменателе этой дроби стоят произведения, аналогичные уже рассмотренному в предыдущей задаче. Поэтому, умножая числитель и знаменатель на произведение $(x-a)(x^3-a^3)$, мы приведем наше выражение к виду

$$\frac{x^{3\cdot 2^n}-a^{3\cdot 2^n}}{x^3-a^3}\,\frac{x-a}{x^{2^n}-a^{2^n}}=\frac{x^{2^{n+1}}+a^{2^n}x^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{x^2+ax+a^2}.$$

Наш метод теряет силу при $x=\pm a$. В этих случаях, однако, простой подсчет показывает, что при $x=-a$ произведение равно $3^n a^{2(2^n-1)}$, а при $x=a$ оно оказывается равным $a^{2(2^n-1)}$.

232. Очевидно,

$$S_k-S_{k-1}=b_k \qquad (k=2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n) \quad (1)$$

и

$$S_1=b_1. \qquad (2)$$

Подставляя в сумму

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

вместо b_1, b_2, $\dots$ b_n их значения, из (1) и (2) получим:

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+\dots$$
$$\dots+a_n(S_n-S_{n-1})=S_1(a_1-a_2)+S_2(a_2-a_3)+\dots$$
$$\dots+S_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nS_n.$$

233. Умножив обе части равенства на 2, перенесем его правую часть влево. После простых преобразований получаем:

$$2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+$$
$$+c^2+b^2-2bc+c^2=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Так как a, b, c вещественны, то это возможно только тогда, когда $a=b=c$.

234. Умножим $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ на $a+b+c$. После несложных подсчетов находим, что произведение равно a^3+b^3+ $+c^3-3abc$, т. е., согласно условию задачи, равно нулю. Отсюда вытекает справедливость утверждения задачи.

235. Так как $p\neq 0$, $q\neq 0$, то можно написать:

$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\dots+\left(\frac{a_n}{p}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\dots+\left(\frac{b_n}{q}\right)^2=1,$$
$$\frac{a_1}{p}\frac{b_1}{q}+\frac{a_2}{p}\frac{b_2}{q}+\dots+\frac{a_n}{p}\frac{b_n}{q}=1.$$

Складывая первые два из этих равенств и вычитая удвоенное третье, находим:

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}\right)^2=0.$$

Принимая во внимание вещественность всех величин, заключаем, что

$$\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}=0,\quad \frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}=0,\quad \ldots,\quad \frac{a_n}{p}-\frac{b_n}{q}=0,$$

откуда непосредственно вытекает утверждение задачи.

236. Положим $p_n=a_n-a_{n-1}$. Тогда из условия задачи следует формула $p_n=p_{n-1}+1$, показывающая, что числа p_n образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Поэтому $p_n=p_2+n-2$. Теперь находим:

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1=$$
$$=p_n+p_{n-1}+\ldots+p_2+a_1=(n-1)\,p_2+(n-2)+$$
$$+(n-3)+\ldots+1+a_1=(n-1)\,(a_2-a_1)+a_1+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2},$$

или окончательно

$$a_n=(n-1)\,a_2-(n-2)\,a_1+\frac{(n-2)\,(n-1)}{2}.$$

237. Первое решение. Заданное соотношение можно переписать в двух видах

$$a_n-\alpha a_{n-1}=\beta\,(a_{n-1}-\alpha\,a_{n-2}),$$
$$a_n-\beta a_{n-1}=\alpha\,(a_{n-1}-\beta\,a_{n-2}).$$

Полагая $a_n-\alpha\,a_{n-1}=u_n$, $a_n-\beta\,a_{n-1}=v_n$, найдем, что

$$u_n=\beta\,u_{n-1},\quad v_n=\alpha\,v_{n-1}.$$

Из последних соотношений следует, что

$$u_n=\beta^{n-2}\,u_2,\quad v_n=\alpha^{n-2}\,v_2,$$

или

$$a_n-\alpha\,a_{n-1}=\beta^{n-2}\,(a_2-\alpha\,a_1),$$
$$a_n-\beta\,a_{n-1}=\alpha^{n-2}\,(a_2-\beta\,a_1).$$

Исключая отсюда a_{n-1}, получим окончательно

$$a_n=\frac{\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}}{\beta-\alpha}\cdot a_2-\alpha\beta\,\frac{\beta^{n-2}-\alpha^{n-2}}{\beta-\alpha}\cdot a_1.$$

Второе решение. Полагая в исходном соотношении n последовательно равным 3, 4, ..., найдем

$$a_3=(\alpha+\beta)\,a_2-\alpha\beta a_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\,a_1,$$

$$a_4=(\alpha+\beta)\,a_3-\alpha\beta a_2=(\alpha+\beta)\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_1-$$
$$-\alpha\beta\,\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\,a_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}\,a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\,a_1.$$

Общую формулу

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} a_2 - \alpha\beta \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} a_1$$

легко теперь доказать методом полной индукции.

238. Имеем $x_1 + x_2 = 3a$, $x_1 x_2 = a^2$. Поэтому

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7a^2 = \frac{7}{4},$$

откуда $a^2 = \frac{1}{4}$. Следовательно, возможны два значения a, именно: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$.

239. Находим:

$$y_1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q,$$

$$y_2 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2 = -p^3 + 3pq$$

Коэффициенты квадратного уравнения $y^2 + ry + s = 0$, корнями которого являются y_1 и y_2, равны

$$r = -(y_1 + y_2) = p^3 - p^2 - 3pq + 2q,$$

$$s = y_1y_2 = (p^2 - 2q)(-p^3 + 3pq)$$

240. Имеем $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. С помощью этих формул находим:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

$$x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2 x_2^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

241. Пусть при всех x

$$(a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2 + (a_3 + b_3x)^2 = (A + Bx)^2, \qquad (1)$$

где $B \neq 0$. Полагая $x = -\frac{A}{B}$, получаем:

$$\left(a_1 - b_1\frac{A}{B}\right)^2 + \left(a_2 - b_2\frac{A}{B}\right)^2 + \left(a_3 - b_3\frac{A}{B}\right)^2 = 0.$$

Так как все величины вещественны, то отсюда следуют три равенства:

$$a_1 = \lambda b_1, \ a_2 = \lambda b_2, \ a_3 = \lambda b_3, \qquad (2)$$

где $\lambda = \frac{A}{B}$. Кроме того, при этом должно выполняться следующее условие:

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0, \qquad (3)$$

иначе все три числа были бы нулями и левая часть (1) не зависела бы от x.

Пусть теперь, наоборот, выполнены условия (2) и (3); тогда $(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+(a_3+b_3x)^2=$

$$=b_1^2(\lambda+x)^2+b_2^2(\lambda+x)^2+b_3^2(\lambda+x)^2=$$

$$=(\lambda\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\,x)^2,$$

и, следовательно, указанная в задаче сумма представляет собой квадрат многочлена первой степени. Таким образом, условия (2) и (3) являются необходимыми и достаточными.

242. Обозначим корни уравнения через x_1 и x_2. Тогда $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

Если x_1 и x_2 отрицательны, то, очевидно, $p>0$, $q>0$. Если же $x_1=\alpha+i\beta$, $\alpha<0$ и $\beta\neq 0$, то $x_2=\alpha-i\beta$, и мы получаем, что

$$p=-x_1-x_2=-2\alpha>0$$

и

$$q=x_1x_2=\alpha^2+\beta^2>0.$$

Пусть, наоборот, известно, что $p>0$ и $q>0$. Тогда в случае, когда x_1 и x_2 вещественны, из равенства $x_1\cdot x_2=q$ следует, что x_1 и x_2 одного знака, а из равенства $x_1+x_2=-p$ вытекает, что корни отрицательны. Если же $x_1=\alpha+i\beta$, $x_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$, то $x_1+x_2=-p=2\alpha$, и значит, α отрицательно.

243. Так как корни уравнения $x^2+px+q=0$ положительны, то дискриминант уравнения

$$D=p^2-4q\geqslant 0, \qquad (1)$$

а коэффициенты удовлетворяют неравенствам

$$p=-x_1-x_2<0, \qquad (2)$$

$$q=x_1x_2>0. \qquad (3)$$

Пусть теперь y_1 и y_2 — корни уравнения

$$qy^2+(p-2rq)\,y+1-pr=0. \qquad (4)$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D_1=4r^2q^2+p^2-4q$$

и в силу (1) неотрицателен при всех r. Следовательно, y_1 и y_2 вещественны при всех r. Учитывая (2) и (3), по формулам Виета при $r\geqslant 0$ получаем

$$y_1y_2=\frac{1-pr}{q}>0, \qquad (5)$$

и значит, y_1 и y_2 — одного знака. Далее,

$$y_1+y_2=-\frac{p-2rq}{q}>0 \qquad (6)$$

и следовательно, при $r\geqslant 0$ y_1 и y_2 положительны, что и требовалось доказать.

Очевидно, что утверждение остается справедливым, если потребовать, чтобы одновременно

$$1-pr>0 \text{ и } p-2rq<0,$$

то есть

$$r>\frac{1}{p}, \tag{7}$$

$$r>\frac{p}{2q}. \tag{8}$$

Итак, для отрицательных r, удовлетворяющих условиям (7) и (8), y_1 и y_2 положительны. При нарушении этих условий один или оба корня уравнения (4) неположительны.

244. Предположим сначала, что $p\neq 3$. Для того чтобы корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант D этого уравнения был неотрицателен. Имеем

$$D=4p^2-24p(p-3)=4p(18-5p).$$

Поэтому $D\geqslant 0$ при

$$0\leqslant p\leqslant 3{,}6. \tag{1}$$

Вещественные корни x_1 и x_2 будут положительны в том и только в том случае, когда их сумма и произведение будут положительны, т. е.

$$x_1+x_2=\frac{2p}{p-3}>0, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{6p}{p-3}>0. \tag{2}$$

Система неравенств (1), (2) удовлетворяется при

$$3<p\leqslant 3{,}6.$$

Заметим еще, что при $p=3$ рассматриваемое в задаче уравнение имеет единственный корень $x=3>0$. Поэтому все искомые значения определяются условием

$$3\leqslant p\leqslant 3{,}6.$$

245. Доказываем утверждение от противного. Предположим, что $a\neq 0$. Тогда для корней x_1 и x_2 имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c+\lambda)}}{2a}.$$

Рассмотрим теперь два случая:

1) Пусть $a>0$. Выберем тогда λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda>\frac{b^2}{4a}-c.$$

При этом, очевидно, $b^2-4a(c+\lambda)<0$ и, следовательно, заданное уравнение имеет невещественные корни.

2) Пусть $a<0$ Тогда при условии $\lambda>-c$ имеем:

$$-b+\sqrt{b^2-4a(c+\lambda)}>0,$$

и значит, корень

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c+\lambda)}}{2a}<0.$$

Итак, оба допущения проводят к противоречию. Утверждение доказано.

246. Корни $x_{1,2}$ уравнения $x^2+x+1=0$ удовлетворяют также уравнению $x^3-1=0$. Поэтому $x_{1,2}^{3m}=x_{1,2}^{3n}=x_{1,2}^{3p}=1$, откуда и вытекает утверждение.

247. Подставив y из второго уравнения в первое, получим уравнение

$$2ax^2+2(a\lambda+1)x+a\lambda^2=0, \qquad (1)$$

которое по условию имеет вещественные корни при всех значениях λ. Покажем, что тогда $a=0$. Предположим противное. Тогда для дискриминанта D квадратного уравнения (1) справедливо неравенство

$$D=4(a\lambda+1)^2-8a^2\lambda^2\geqslant 0 \qquad (2)$$

при всех λ. Левая часть неравенства (2), однако, имеет вид

$$-4a^2\lambda^2+8\lambda+1$$

и при достаточно больших по абсолютной величине значениях λ отрицательна. Например, при $\lambda=\frac{10}{a}$ левая часть уравнения (1) равна -321. Это приводит к противоречию.

248. В приведенной форме данное уравнение имеет вид

$$x^2-(p+q+2a^2)x+pq+(p+q)a^2=0.$$

Вычисляя дискриминант D данного квадратного уравнения, получаем:

$$D=(p+q+2a^2)^2-4[pq+(p+q)a^2]=(p-q)^2+4a^4.$$

Так как $D\geqslant 0$ при всех вещественных a, p, q, то квадратное уравнение, а вместе с ним и исходное, имеет вещественные корни.

249. Рассмотрим дискриминант данного квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}D&=(b^2+a^2-c^2)^2-4a^2b^2=\\&=(b^2+a^2-c^2-2ab)(b^2+a^2-c^2+2ab)=\\&=[(a-b)^2-c^2][(a+b)^2-c^2].\end{aligned}$$

Так как $a+b>c$ и $|a-b|<c$, то $(a+b)^2>c^2$ и $(a-b)^2<c^2$. Следовательно, $D<0$.

250. По формулам Виета (см. стр. 9) имеем:

$$x_1+x_2+x_3=2,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1,\ x_1x_2x_3=-1.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем:

$$y_1+y_2+y_3=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1,$$

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=-2,$$

$$y_1y_2y_3=(x_1x_2x_3)^2=1.$$

Следовательно, новое уравнение имеет вид

$$y^3-y^2-2y-1=0.$$

251. На основании формул Виета имеем:

$$x_1+x_2+x_3=1,$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0,$$

$$x_1x_2x_3=1.$$

В силу этих равенств

$$y_1+y_2+y_3=2(x_1+x_2+x_3)=2.$$

Так как $y_1=1-x_1$, $y_2=1-x_2$, $y_3=1-x_3$, то

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=(1-x_1)(1-x_2)+(1-x_2)(1-x_3)+$$
$$+(1-x_3)(1-x_1)=3-2(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$$

и, наконец,

$$y_1y_2y_3=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=-1.$$

Новое уравнение поэтому имеет вид

$$y^3-2y^3+y+1=0.$$

252. Пусть

$$x_1=p-d,\quad x_2=p,\quad x_3=p+d.$$

Тогда $x_1+x_2+x_3=3p$; с другой стороны, по формуле Виета $x_1+x_2+x_3=-a$. Отсюда $3p=-a$ и, следовательно,

$$x_2=p=-\frac{a}{3}.$$

Подставляя этот корень в уравнение, получаем:

$$\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

откуда

$$c=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab.$$

253. Пусть $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$ — корни заданного уравнения. Следуя указанию, рассмотрим выражение

$$(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2). \qquad (1)$$

Для того чтобы из отрезков с длинами x_1, x_2, x_3 можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы

$$(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2)>0. \qquad (2)$$

Этот факт был доказан в решении задачи 106.

Чтобы получить требуемое в задаче условие, выразим левую часть (2) через p, q и r. Для этой цели используем зависимость между корнями и коэффициентами уравнения

$$x_1+x_2+x_3=-p,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q,$$
$$x_1x_2x_3=-r.$$

Условие (2) запишем теперь следующим образом:

$$(-p-2x_3)(-p-2x_1)(-p-2x_2)>0;$$

отсюда

$$-p^3-2p^2(x_1+x_2+x_3)-4p(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-8x_1x_2x_3>0$$

и, следовательно,

$$p^3-4pq+8r>0.$$

254. Пусть x_0 — общий корень уравнений. Подставляя x_0 в оба уравнения и вычитая одно уравнение из другого, находим:

$$x_0=\frac{q_2-q_1}{p_1-p_2}\neq 0.$$

Пусть x^2+ax+b — частное от деления трехчлена $x^3+p_1x+q_1$ на $x-x_0$. Тогда

$$x^3+p_1x+q_1=(x-x_0)(x^2+ax+b).$$

Приравняв в этом тождестве коэффициенты при x^2 и свободные члены, найдем: $a=x_0$ и $b=-q_1/x_0$. Отсюда следует, что остальные два корня первого уравнения определяются формулой

$$x_{2,3}^{(1)}=\frac{-x_0\pm\sqrt{x_0^2+\frac{4q_1}{x_0}}}{2},$$

а второго уравнения — формулой

$$x_{2,3}^{(2)}=\frac{-x_0\pm\sqrt{x_0^2+\frac{4q_2}{x_0}}}{2}.$$

255. Легко проверить, что при $\lambda=0$ уравнения не имеют общего корня. Пусть x_0 — общий корень уравнений при некотором $\lambda\neq 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_0^3-x_0^2-x_0-(\lambda+1)=0,\\ \lambda x_0^2-x_0-(\lambda+1)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Умножая второе равенство на x_0 и вычитая его из первого, найдем:

$$x_0=\frac{\lambda+1}{\lambda}.\qquad(2)$$

Таким образом, если общий корень существует, то он связан с λ формулой (2). Легко теперь проверить, что дробь $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ действительно удовлетворяет обоим уравнениям (очевидно, достаточно этот факт установить лишь для второго уравнения). Итак, оба уравнения (1) имеют общий корень при всех $\lambda \neq 0$. Этот корень определяется формулой (2).

256. Первое решение. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $P(x)$. По формулам Виета имеем:

$$x_1+x_2+x_3=0,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p,$$

откуда легко следует:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2p=0.$$

Так как x_1, x_2, x_3 действительны и отличны от нуля ($q \neq 0$), то $x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$ и, следовательно, $p<0$.

Второе решение. Легко видеть, что среди трех корней многочлена $P(x)$ найдутся два неравных. В противном случае $P(x)$ представлял бы собой точный куб: $P(x) \equiv (x-x_0)^3$, что, очевидно, места не имеет.

Пусть теперь x_1 и x_2 — два неравных корня многочлена и пусть $x_1<x_2$. Предположим, напротив, что $p \geqslant 0$; тогда $x_1^3<x_2^3$ и $px_1 \leqslant px_2$. Отсюда следует:

$$P(x_1)=x_1^3+px_1+q<x_2^3+px_2+q=0,$$

так как $P(x_2)=0$. Мы приходим к заключению, что $P(x_1)<0$. Это противоречит тому, что x_1 — корень $P(x)$. Следовательно, $p<0$.

257. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного уравнения. В силу формул Виета имеем:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0, \tag{1}$$

$$x_1x_2x_3=b>0. \tag{2}$$

Предположим сначала, что все три корня вещественны. Тогда из условия (2) следует, что, по крайней мере, один из них положителен. Если бы при этом положительными оказались два корня, то из той же формулы (2) мы заключили бы, что и третий корень положителен, а это противоречит условию (1). Таким образом, в случае вещественности всех трех корней задача решена.

Пусть теперь x_1 — невещественный корень уравнения, тогда, как известно, уравнение имеет и комплексно сопряженный корень $x_2=\overline{x}_1$. Так как в этом случае $x_1x_2=x_1\overline{x}_1>0$, то из равенства (2) получаем:

$$x_3=\frac{b}{x_1\overline{x}_1}>0.$$

Утверждение тем самым доказано полностью.

258. Пусть α, β, γ_1 — корни первого уравнения и α, β, γ_2 — корни второго. В силу формул Виета имеем:

$$\alpha+\beta+\gamma_1=-a, \tag{1}$$

$$\alpha\beta\gamma_1=-18, \tag{2}$$

$$\alpha+\beta+\gamma_2=0, \tag{3}$$

$$\alpha\beta\gamma_2=-12. \tag{4}$$

Из уравнений (1) и (3) получаем:

$$\gamma_1-\gamma_2=-a, \tag{5}$$

а из уравнений (2) и (4)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{3}{2} \tag{6}$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), находим:

$$\gamma_1=-3a,\quad \gamma_2=-2a. \tag{7}$$

Таким образом, если при некоторых a и b уравнения имеют общие корни, то третьи корни этих уравнений определяются формулами (7). Подставив $\gamma_1=-3a$ в первое уравнение, а $\gamma_2=-2a$ во второе, получим:

$$-18a^3+18=0$$

и

$$-8a^3-2ab+12=0.$$

Отсюда определяется единственная пара вещественных значений

$$a=1,\quad b=2 \tag{8}$$

Подставляя эти значения в уравнения, легко найдем:

$$x^3+x^2+18=(x+3)(x^2-2x+6)$$

и

$$x^3+2x+12=(x+2)(x^2-2x+6).$$

Следовательно, уравнения при указанных значениях a и b действительно имеют два общих корня. Эти корни определяются формулой

$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{-5}$$

259. Обозначим левую часть равенства через A. Имеем:

$$A^3=20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}+$$
$$+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}+20-14\sqrt{2}=$$
$$=40+3\sqrt[3]{400-2\cdot 14^2}\,A=40+6A.$$

Таким образом, левая часть доказываемого равенства удовлетворяет кубическому уравнению

$$x^3-6x-40=0. \tag{1}$$

Легко проверить, что при $x=4$ уравнение (1) удовлетворяется. Разделив левую часть уравнения (1) на $x-4$, получим для нахождения двух других корней уравнение

$$x^2+4x+10=0.$$

Это уравнение имеет невещественные корни, так как его дискриминант $D=-24<0$. Таким образом, уравнение (1) имеет лишь один вещественный корень $x=4$, и так как A — заведомо вещественное число, то $A=4$, что и требовалось доказать.

260. Легко видеть, что рассматриваемое выражение обращается в нуль, если два какие-нибудь из чисел a, b, c равны между собой. Отсюда по теореме Безу следует, что оно должно делиться без остатка на каждую из разностей

$$(b-c),\ (c-a),\ (a-b).$$

Это наводит на мысль, что данное выражение является произведением указанных множителей. Действительно, имеем:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-$$
$$-c^2a=a^2(c-b)-a(c^2-b^2)+bc(c-b)=$$
$$=(c-b)[a^2-ac-ab+bc]=(c-b)[a(a-c)-b(a-c)]=$$
$$=(c-b)(b-a)(c-a). \qquad (1)$$

Так как a, b, c попарно различны, то утверждение доказано.

261. Заметим, что при $x=-y$ данное выражение обращается в нуль. Следовательно, по теореме Безу оно делится на $x+y$ без остатка. Чтобы провести деление, представим $x+y+z$ в виде суммы двух слагаемых: $(x+y)$ и z. Возводя сумму в куб, получаем:

$$[(x+y)+z]^3-x^3-y^3-z^3=$$
$$=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-x^3-y^3=$$
$$=3(x+y)[z^2+z(x+y)+xy].$$

Квадратный трехчлен относительно z, стоящий справа в квадратных скобках, легко разложить на множители, так как очевидно, что его корнями являются $-x$ и $-y$. В результате получаем:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(z+x)(z+y).$$

262. Умножив обе части заданного равенства на $abc(a+b+c)$, приведем его к виду

$$(ab+bc+ac)(a+b+c)-abc=0.$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$a^2b+2abc+a^2c+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2=0.$$

Левая часть этого равенства легко разлагается на множители

$$a^2(b+c)+ab(c+b)+ac(b+c)+bc(b+c)=$$
$$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(a+b)(a+c).$$

Так как последнее произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из множителей равен нулю, откуда и следует утверждение задачи.

263. Пусть α и β — корни квадратного трехчлена x^2+px+q. Если двучлен x^4-1 делится на указанный трехчлен без остатка, то и α и β являются корнями двучлена. Легко видеть, что справедливо и обратное: если α и β являются корнями двучлена x^4-1, то он разделится на x^2+px+q без остатка *).

Корнями двучлена x^4-1 являются числа 1, -1, i, $-i$. Поэтому имеет место разложение

$$(x^4-1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i). \qquad (1)$$

*) При этом, если $\alpha=\beta$, то число α должно быть кратным корнем и делимого.

В силу сказанного выше интересующими нас трехчленами могут быть лишь те, которые представляют собой произведение двух множителей, стоящих в правой части (1).

Составив всевозможные сочетания, найдем $C_4^2=6$ трехчленов:

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x+1)=x^2-1,\\
&(x-1)(x-i)=x^2-(1+i)x+i,\\
&(x-1)(x+i)=x^2-(1-i)x-i,\\
&(x+1)(x-i)=x^2+(1-i)x-i,\\
&(x+1)(x+i)=x^2+(1+i)x+i,\\
&(x-i)(x+i)=x^2+1.
\end{aligned}$$

Ими, очевидно, исчерпываются все искомые трехчлены.

264. Представив данный многочлен в виде $x^n-1-ax(x^{n-2}-1)$, разделим его на разность $x-1$, воспользовавшись формулой

$$\frac{x^{k+1}-1}{x-1}=1+x+\ldots+x^k. \qquad (1)^{*)}$$

В результате в частном получим многочлен

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1-ax(x^{n-3}+x^{n-4}+\ldots+x+1).$$

Для того чтобы этот многочлен делился на $x-1$ без остатка, в силу теоремы Безу должно выполняться равенство

$$n-a(n-2)=0.$$

Поэтому делимость имеет место при любом натуральном $n>2$ и $a=\frac{n}{n-2}$.

265. Из условий задачи следует, что

$$\left.\begin{aligned}
p(a)&=A,\\
p(b)&=B,\\
p(c)&=C.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Разделив теперь многочлен $p(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$, представим его в виде

$$p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,q(x)+r(x). \qquad (2)$$

Очевидно, что $r(x)$ — многочлен не выше второй степени. Записав его в виде

$$r(x)=lx^2+mx+n, \qquad (3)$$

подставим в тождество (2) последовательно $x=a$, $x=b$, $x=c$. В силу равенства (1) мы придем к следующей системе уравнений для определения коэффициентов l, m и n многочлена (3):

$$\left.\begin{aligned}
la^2+ma+n&=A,\\
lb^2+mb+n&=B,\\
lc^2+mc+n&=C.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

---

*) Формула (1) легко проверяется непосредственно; впрочем, она совпадает с формулой для суммы k членов геометрической прогрессии.

Решив эту систему, найдем:

$$l=\frac{(A-B)(b-c)-(B-C)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)},$$

$$m=\frac{(A-B)(b^2-c^2)-(B-C)(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$n=\frac{a^2(Bc-Cb)+a(Cb^2-Bc^2)+A(Bc^2-Cb^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Замечание. Искомый многочлен $r(x)$ при $x=a$, $x=b$, $x=c$ принимает соответственно значения A, B и C. Легко проверить, что таким многочленом не выше второй степени является следующий:

$$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}. \qquad (5)$$

Так как система (4) имеет единственное решение, то существует лишь один многочлен с указанным свойством и, следовательно, $r(x)$ совпадает с многочленом (5).

266. Очевидно, формула верна при $n=1$. Пусть формула верна для некоторого n; докажем, что тогда она будет верна и для $n+1$. Обозначив через S_n сумму, стоящую в левой части доказываемой формулы, будем иметь:

$$S_{n+1}=S_n+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][(n+1)+2]}{6}.$$

Отсюда, согласно методу и следует справедливость формулы при любом натуральном n.

267. Пусть S_n—сумма, стоящая в левой части формулы. При $n=1$ обе части формулы совпадают. Покажем, что если формула верна для некоторого n, то она верна также для $n+1$. Имеем:

$$S_{n+1}=S_n+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)[2n(n+2)+3(n+2)]}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Следовательно, формула верна при любом натуральном n.

268. Легко убедиться в справедливости утверждения при $n=1$. Пусть формула верна при некотором $n\geqslant 1$. Обозначим через S_n сумму, стоящую в левой части формулы. Имеем:

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Отсюда

$$S_{n+1}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{(n+1)[(n+1)+3]}{4[(n+1)+1][(n+1)+2]}.$$

Следовательно, формула справедлива при любом натуральном n.

269. Очевидно, формула верна при $n=1$. Пусть она верна при некотором $n\geqslant 1$, т. е.

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \qquad (1)$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы при $n+1$, умножим обе части (1) на $\cos\varphi+i\sin\varphi$. Получим согласно правилу умножения комплексных чисел

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$

$$=(\cos n\varphi\cos\varphi-\sin n\varphi\sin\varphi)+i(\cos n\varphi\sin\varphi+\sin n\varphi\cos\varphi)=$$

$$=\cos(n+1)\varphi+i\sin(n+1)\varphi.$$

Следовательно, формула справедлива при любом натуральном n.

270. Очевидно, $a+b=1$, $ab=-1$. Пользуясь этим, можно написать, что

$$a_n=a_n(a+b)=\frac{a^{n+1}-ab^n+a^nb-b^{n+1}}{\sqrt{5}}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{\sqrt{5}}-\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

или $a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$, откуда

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}.$$

Отсюда следует, что если, при некотором n, a_{n-1} и a_n суть числа целые и положительные, то и a_{n+1}, а следовательно затем и a_{n+2}, a_{n+3}, ... будут числами целыми и положительными. Но так как $a_1=1$, $a_2=1$, то, значит, при $n>2$ все a_n будут целыми и положительными.

271. При $n=1$ неравенство справедливо. Допустим, что оно верно для некоторого n. Умножая обе части его на $1+a_{n+1}>0$, находим

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)(1+a_{n+1})\geqslant$$

$$\geqslant(1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+a_{n+1})=1+a_1+a_2+\ldots+a_n+$$

$$+a_{n+1}+a_1a_{n+1}+a_2a_{n+1}+\ldots+a_na_{n+1}.$$

Так как сумма $a_1a_{n+1}+a_2a_{n+1}+\ldots+a_na_{n+1}>0$, то отсюда следует, что неравенство справедливо и для $n+1$.

272. Прежде всего убеждаемся в том, что формула верна при $n=1$. Действительно, при $n=1$ формула имеет вид

$$(a+b)_1=C_1^0(a)_0(b)_1+C_1^1(a)_1(b)_0. \qquad (1)$$

Если теперь воспользоваться определением обобщенной степени, то станет очевидным, что обе части формулы (1) равны $a+b$ и, следовательно, равенство действительно имеет место.

Предположим теперь, что формула верна для некоторого n и докажем, что она будет верна и для $n+1$. Из определения обобщенной степени имеем:

$$(a+b)_{n+1}=(a+b)_n(a+b-n)=[C_n^0(a)_0(b)_n+C_n^1(a)_1(b)_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+C_n^k(a)_k(b)_{n-k}+\ldots+C_n^n(a)_n(b)_0](a+b-n).$$

Раскрыв здесь квадратные скобки, преобразуем каждое из $n+1$ слагаемых по формуле

$$C_n^k(a)_k(b)_{n-k}(a+b-n)=C_n^k(a)_k(b)_{n-k}[(a-k)+(b-n+k)]=$$
$$=C_n^k(a)_k(a-k)(b)_{n-k}+C_n^k(a)_k(b)_{n-k}(b-n+k)=$$
$$=C_n^k(a)_{k+1}(b)_{n-k}+C_n^k(a)_k(b)_{n-k+1}\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

В результате получим:

$$(a+b)_{n+1}=C_n^0(a)_1(b)_n+C_n^0(a)_0(b)_{n+1}+C_n^1(a)_2(b)_{n-1}+$$
$$+C_n^1(a)_1(b)_n+\ldots+C_n^k(a)_{k+1}(b)_{n-k}+$$
$$+C_n^k(a)_k(b)_{n-k+1}+\ldots+C_n^n(a)_{n+1}(b)_0+C_n^n(a)_n(b)_1.$$

После приведения подобных членов будем иметь:

$$(a+b)_{n+1}=C_n^0(a)_0(b)_{n+1}+(C_n^0+C_n^1)(a)_1(b)_n+$$
$$+(C_n^1+C_n^2)(a)_2(b)_{n-1}+\ldots+(C_n^k+C_n^{k+1})(a)_{k+1}(b)_{n-k}+\ldots$$
$$\ldots+(C_n^{n-1}+C_n^n)(a)_n(b)_1+C_n^n(a)_{n+1}(b)_0.$$

Используя, далее, тот факт, что

$$C_n^0=C_{n+1}^0=1,\qquad C_n^n=C_{n+1}^{n+1}=1,$$

и легко проверяемое тождество

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},$$

получаем:

$$(a+b)_{n+1}=C_{n+1}^0(a)_0(b)_{n+1}+C_{n+1}^1(a)_1(b)_n+$$
$$+C_{n+1}^2(a)_2(b)_{n-1}+\ldots+C_{n+1}^{k+1}(a)_{k+1}(b)_{n-k}+\ldots$$
$$\ldots+C_{n+1}^n(a)_n(b)_1+C_{n+1}^{n+1}(a)_{n+1}(b)_0.$$

Следовательно, доказано, что если формула, приведенная в условии задачи, верна для некоторого n, то она верна и для $n+1$. Но она справедлива при $n=1$, следовательно, согласно принципу полной индукции, она верна при всех натуральных n.

273. Пусть $r(t)$ — расстояние между поездами в момент времени t. Тогда

$$r^2(t)=(a-v_1t)^2+(b-v_2t)^2=(v_1^2+v_2^2)t^2-2(av_1+bv_2)t+a^2+b^2.$$

Заметим, что если $r^2(t)$ имеет наименьшее значение при $t=t_0$, то и $r(t)$ также принимает наименьшее значение при $t=t_0$. Верно и обратное. Задача сводится к нахождению наименьшего значения квадратного трехчлена $r^2(t)$.

Согласно формуле (4) на стр. 46 наименьшее значение $r^2(t)$, а следовательно и $r(t)$, достигается в момент времени

$$t_0=\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Используя далее формулу (3), находим наименьшее расстояние между поездами:

$$r(t_0)=\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)(v_1^2+v_2^2)-4(av_1+bv_2)^2}{4(v_1^2+v_2^2)}}=\frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

274. В момент времени t автомашина находится на расстоянии $40\,t$ *км* от пункта A, а мотоцикл — на расстоянии $\frac{32}{2}t^2+9$ *км* от того же пункта. Следовательно, расстояние между ними равно абсолютной величине разности $16t^2+9-40t$. Обозначая эту разность через $y(t)$, начертим график квадратного трехчлена $y(t)$ (рис. 4). Он представляет собой параболу, которая пересекает ось t при $t_1=\frac{1}{4}$ и $t_2=2\frac{1}{4}$. Из графика ясно, что наибольшая по абсолютной величине ордината y при условии $0\leqslant t\leqslant 2$ соответствует вершине параболы. Вершина параболы лежит на оси симметрии, которая пересекает ось t в точке

$$t_0=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{5}{4}.$$

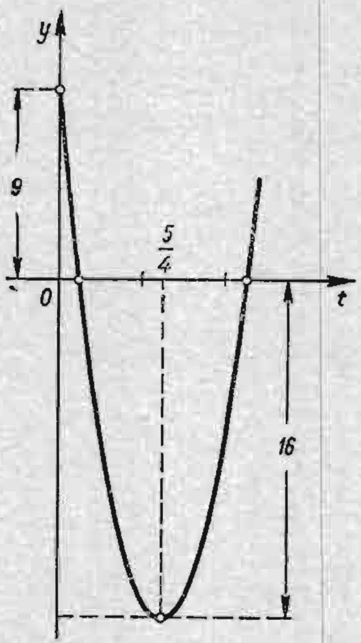


Рис. 4

Таким образом, наибольшее расстояние достигается через 1 час 15 минут после начала движения и равно 16 *км*.

275. Обозначим исследуемое выражение через y и преобразуем его следующим образом:

$$y=\log_2^4 x+12\log_2^2 x(\log_2 8-\log_2 x)=$$
$$=\log_2^2 x(\log_2^2 x-12\log_2 x+36)=\log_2^2 x(6-\log_2 x)^2.$$

Положим, далее, $\log_2 x=z$, так что $0\leqslant z\leqslant 6$. Тогда задача сводится к нахождению наибольшего значения переменной

$$y=z^2(6-z)^2.$$

Достаточно найти наибольшее значение для $z(6-z)$ при условии $0 \leqslant z \leqslant 6$, так как чем больше положительное число, тем больше и его квадрат. Квадратный трехчлен $z(6-z) = -(z-3)^2+9$ достигает наибольшего значения при $z=3$. Таким образом, наибольшее значение достигается при $z=3$ и равно 81.

276. Первое решение. Очевидно, достаточно рассматривать лишь положительные значения x. Согласно известному неравенству (3), стр. 19, имеем:

$$\frac{ax^2+b}{2} \geqslant \sqrt{ax^2b} = x\sqrt{ab} \tag{1}$$

Следовательно, для всех $x > 0$

$$y = \frac{x}{ax^2+b} \leqslant \frac{x}{2x\sqrt{ab}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}. \tag{2}$$

Так как (1) превращается в равенство при условии $ax^2 = b$, то при $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ имеем:

$$y_0 = \frac{1}{2\sqrt{ab}}. \tag{3}$$

В силу (2) это и есть наибольшее значение функции.

Второе решение. Разрешив соотношение

$$y = \frac{x}{ax^2+b} \tag{4}$$

относительно x, получим:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4aby^2}}{2ay}. \tag{5}$$

Из формулы (5) следует, что при всех вещественных x должно выполняться неравенство $1-4aby^2 \geqslant 0$. Отсюда

$$y \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}} \tag{6}$$

Так как значение $y_0 = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ функция (4) принимает при некотором вещественном значении x_0 $\left(\text{из формулы (5) находим, что } x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, то в силу (6) оно является наибольшим.

277. Путем очевидных преобразований получаем

$$\frac{x^2+1}{x+1} = x-1+\frac{2}{x+1} = -2+\left[x+1+\frac{2}{x+1}\right].$$

В силу неравенства (3) стр. 19

$$x+1+\frac{2}{x+1} \geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{(x+1)}} = 2\sqrt{2}, \tag{1}$$

причем знак равенства в (1) имеет место только в случае, когда

$$1+x=\frac{2}{x+1}, \text{ т. е. при } x_0=\sqrt{2}-1.$$

Таким образом, при всех $x_0 \geqslant 0$

$$\frac{x^2+1}{x+1} \geqslant -2+2\sqrt{2} \qquad (2)$$

и знак равенства в этой формуле имеет место при

$$x=\sqrt{2}-1.$$

278. Возьмем числовую ось и отметим на ней точки A, B, C, D, соответствующие числам a, b, c и d. Точку с переменной абсциссой

Рис. 5.

x будем обозначать через M (рис. 5). Рассмотрим следующие пять случаев.

1) $x \leqslant a$; тогда

$$\varphi(x)=MA+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

Отсюда ясно, что $\varphi(x)$ будет принимать наименьшее значение в том случае, когда точка M совпадает с точкой A, и что это значение равно

$$3AB+2BC+CD.$$

2) $a < x \leqslant b$; тогда

$$\varphi(x)=AM+MB+MC+MD=AB+2MB+2BC+CD.$$

Наименьшее значение функция $\varphi(x)$ принимает тогда, когда точка M совпадает с точкой B; это значение равно

$$AB+2BC+CD.$$

3) $b \leqslant x \leqslant c$; $\varphi(x)$ при этих значениях x постоянна и равна

$$AB+2BC+CD.$$

4) $c \leqslant x < d$; наименьшее значение функция $\varphi(x)$ принимает при $x=c$; оно равно также

$$AB+2BC+CD.$$

5) $x \geqslant d$; наименьшее значение функции $\varphi(x)$ равно

$$AB+2BC+3CD.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что наименьшее значение функции $\varphi(x)$ равно $AB+2BC+CD$, или

$$b-a+2(c-b)+d-c=d+c-b-a.$$

Это значение функция $\varphi(x)$ принимает при условии, что

$$b \leqslant x \leqslant c.$$

279. Пусть r — модуль и φ — аргумент комплексного числа z ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Тогда $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и данное уравнение принимает вид

$$r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + r = 0$$

Отсюда либо $r = 0$ и $z = z_1 = 0$, либо $r\cos 2\varphi + 1 + ir\sin 2\varphi = 0$ и, значит,

$$\left.\begin{array}{r} \sin 2\varphi = 0, \\ r\cos 2\varphi + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Первому уравнению удовлетворяют значения $\varphi = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, а так как в силу второго уравнения $\cos 2\varphi < 0$, то остаются только значения $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 3\pi/2$. При этом в обоих случаях из второго уравнения находим $r = 1$, так что получаем еще два решения:

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad z_3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

280. Представим z в виде $z = x + iy$. Тогда уравнение $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ примет вид

$$(x-4)^2 + y^2 = (x-8)^2 + y^2.$$

Отсюда $x = 6$ и, стало быть, $z = 6 + iy$. Подставляем это значение в уравнение $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$. Тогда после упрощения уравнение примет вид

$$y^2 - 25y + 136 = 0.$$

Отсюда

$$y_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4\cdot 136}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 544}}{2} = \frac{25 \pm 9}{2},$$

т. е. $y_1 = 17$; $y_2 = 8$.

Ответ: $z_1 = 6 + 17i$; $z_2 = 6 + 8i$.

281. Для сокращения записи положим $\frac{1+i}{2} = z$. Рассматриваемое произведение

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^{2^2})\ldots(1+z^{2^n})$$

имеет тот же вид, что и произведение в задаче 230. Обозначим это произведение для краткости через P.

Поступая так же, как и в задаче 230, найдем:

$$P = \frac{1 - z^{2^{n+1}}}{1 - z}.$$

Остается в данную формулу подставить вместо z его значение. Будем иметь:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{2}} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1 + i$$

и, далее,

$$1-z^{2^{n+1}}=1-\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{n+1}}=1-\left[\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]^{2^n}=1-\left(\frac{i}{2}\right)^{2^n} \qquad (1)$$

Заметим, что при $n\geqslant 2$ имеем $i^{2^n}=(i^4)^{2^{n-2}}=1$. Следовательно, в силу (1), при $n\geqslant 2$ будет $1-z^{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{2^n}}$ и $P=(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

При $n=1$ имеем:

$$1-z^{2^{n+1}}=1-\left(\frac{i}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

Ответт: $$P=(1+i)\frac{5}{4}.$$

282. Так как вычитание комплексных чисел геометрически проводится по правилу параллелограмма, то модуль разности двух комплексных чисел $|z'-z''|$ равен расстоянию между соответствующими точками комплексной плоскости. Следовательно, условию $|z-25i|\leqslant 15$ удовлетворяют точки комплексной плоскости, лежащие внутри и на границе круга с центром в точке $z_0=25i$ и радиусом 15 (рис. 6). Из чертежа видно, что числу с наименьшим аргументом соответствует точка z_1, в которой прямая, проведенная из точки O, касается окружности. Из прямоугольного треугольника Oz_1z_0 находим $x_1=12$ и $y_1=16$. Искомое число будет $z_1=12+16i$.

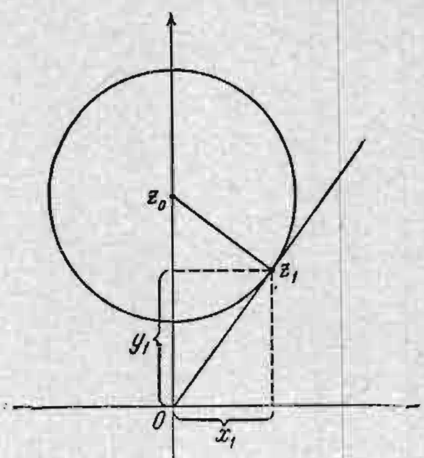


Рис. 6.

283. Докажем, что для представления комплексного числа $a+bi$ в виде

$$a+bi=\frac{1-ix}{1+ix} \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $|a+bi|=1$ и $a+bi\neq -1$.

Докажем необходимость. Пусть выполняется равенство (1). Тогда

$$|a+bi|=\frac{|1-ix|}{|1+ix|}=1,$$

так как $|1-ix|=|1+ix|=\sqrt{1+x^2}$. Далее,

$$\frac{1-ix}{1+ix}\neq -1,$$

так как в противном случае мы бы имели $1-ix=-1-ix$, т. е. $2=0$.

Докажем достаточность. Пусть $|a+bi|=1$ и $a+bi\neq -1$. Положим $\arg(a+bi)=\alpha$, где $-\pi<\alpha<\pi$. Заметим, что $\alpha\neq\pi$ в силу условия $a+bi\neq -1$. Имеем теперь:

$$a+bi=|a+bi|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha. \qquad (2)$$

Но

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя эти выражения в правую часть формулы (2), получаем

$$a+bi=\frac{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-ix}{1+ix},$$

где $x=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

284. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; тогда

$$|z^2+1|=\sqrt{(r^2\cos 2\varphi+1)^2+(r^2\sin 2\varphi)^2}=\sqrt{r^4+2r^2\cos 2\varphi+1};$$

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=\frac{|z^2+1|}{r}=1;$$

$$r^4+r^2(2\cos 2\varphi-1)+1=0.$$

Положим $r^2=t$; $|z|$ примет наибольшее значение тогда, когда наибольшее значение примет t. Имеем:

$$t=\frac{1-2\cos 2\varphi\pm\sqrt{(1-2\cos 2\varphi)^2-4}}{2}.$$

Так как нас интересует наибольшее значение t, то перед корнем нужно взять знак плюс. Легко видеть, что наибольшее значение t достигается тогда, когда $\cos 2\varphi=-1$, т. е. при $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Это значение равно $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, наибольшее значение $|z|$ равно $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

285. Угол между двумя соседними лучами равен $\frac{2\pi}{n}$. Обозначим через d_1, d_2, ... расстояния от A до оснований перпендикуляров, последовательно опускаемых на лучи, исходящие из точки A (рис. 7). Очевидно, имеем:

$$d_k=d\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^k\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Длина k-го перпендикуляра равна

$$L_k = d_{k-1} \sin \frac{2\pi}{n} = d \sin \frac{2\pi}{n} \left(\cos \frac{2\pi}{n} \right)^{k-1}.$$

Полная длина ломаной из m звеньев будет

$$d \sin \frac{2\pi}{n} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \left(\cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 + \ldots + \left(\cos \frac{2\pi}{n} \right)^{m-1} \right].$$

Длина L бесконечно завивающейся ломаной получится при неограниченном увеличении m и выразится суммой членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \cos \frac{2\pi}{n}$ и первым членом $d \sin \frac{2\pi}{n}$:

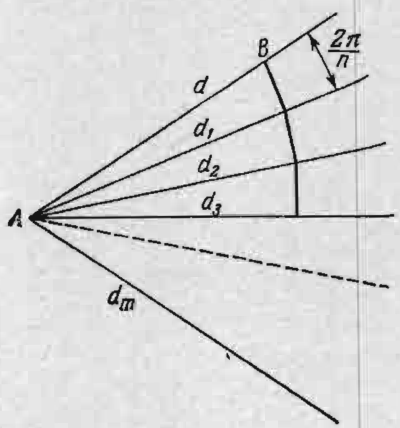


Рис. 7.

$$L = d \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}} = d \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

При увеличении n длина L растет и при неограниченном увеличении n растет неограниченно

286. Первое решение. Пусть $1abcde$ — искомое число (здесь буквы a, b, c, d, e обозначают цифры соответствующих разрядов). Очевидно, $e = 7$, так как $1abcde \times 3 = abcde1$. После умножения 7 на 3 двойка переходит в следующий разряд, поэтому произведение $d \times 3$ должно оканчиваться цифрой 5. Значит, $d = 5$. Имеем $1abc57 \cdot 3 = abc571$. Рассуждая аналогично, находим, что $c = 8$, $b = 2$ и, наконец, $a = 4$. Искомое число есть 142 857.

Второе решение. Пусть снова $1abcde$ — искомое число. Положим $abcde = x$, тогда искомое число равно $10^5 + x$. По условию задачи имеем

$$(10^5 + x) 3 = 10x + 1,$$

откуда $x = 42\,857$. Следовательно, искомое число 142 857.

287. Так как p делится на 37, то можно написать

$$p = 100a + 10b + c = 37k,$$

где k — целое. Очевидно, далее, что

$$q = 100b + 10c + a = 10p - 999a = 370k - 37 \cdot 27a.$$

Следовательно, и q делится на 37.

Аналогичные рассуждения пригодны и для числа r.

288. Имеем: $A = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$. Очевидно, достаточно показать, что $B = 3n^3 + 15n = 3n(n^2 + 5)$ делится на 9. Если $n = 3k$, k — целое, то B делится на 9. При $n = 3k + 1$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 6$; при $n = 3k + 2$, $n^2 + 5 = 9k^2 + 12k + 9$. В обоих случаях $n^2 + 5$ делится на 3. Следовательно, во всех случаях B делится на 9.

289. Первое решение. Сумму S_n можно представить в следующем виде

$$S_n = n^3 + 3(n^2 + 2n + 1) - n = (n-1)\cdot n\cdot(n+1) + 3(n+1)^2.$$

Первое слагаемое делится на 3, так как оно является произведением трех последовательных целых чисел (одно из них обязательно кратно трем). Следовательно, и S_n делится на 3.

Второе решение. Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ $S_1=12$ делится на 3. Допустим, что при каком-либо n сумма S_n делится на 3. Имеем:

$$S_{n+1} = (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) + 3 = S_n + 3(n^2 + 3n + 3).$$

Следовательно, S_{n+1} также делится на 3.

290. В основании пирамиды шары уложены в виде равностороннего треугольника. Пусть сторона этого треугольника содержит n шаров. Тогда в основании пирамиды лежит $n + (n-1) + (n-2) + \ldots$ $\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ шаров. Следующий, второй слой пирамиды содержит $(n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ шаров.

Третий слой пирамиды содержит $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ шаров и т. д. Последний, самый верхний, слой состоит из одного шара. Всего в пирамиде 120 шаров. Следовательно,

$$120 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + \ldots + \frac{3\cdot 4}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{1\cdot 2}{2}.$$

Правая часть равенства равна $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (см. задачу 266, стр. 215), следовательно, для определения n получаем уравнение

$$n(n+1)(n+2) = 720. \tag{1}$$

Это уравнение имеет очевидное решение $n=8$. Для отыскания других решений этого уравнения переносим 720 в левую часть и получающийся там многочлен делим на $n-8$. Частное от деления будет равно $n^2 + 11n + 90$. Так как корни этого последнего многочлена невещественны, то уравнение (1) не имеет других целых решений, кроме $n=8$. Итак, в основании пирамидальной фигуры лежит $\frac{n(n+1)}{2} = 36$ шаров.

291. Так как число наполненных ящиков равно m, то число вложенных ящиков будет равно mk. Отсюда вытекает, что количество всех ящиков (вместе с первым) равно $mk+1$. Следовательно, число пустых ящиков равно $mk + 1 - m = m(k-1) + 1$.

ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛАНИМЕТРИЯ

1. Задачи на вычисление

292. Проведем биссектрису угла A (см. рис. 8). Она пересечет сторону BC в точке D и разделит ее на части, пропорциональ-

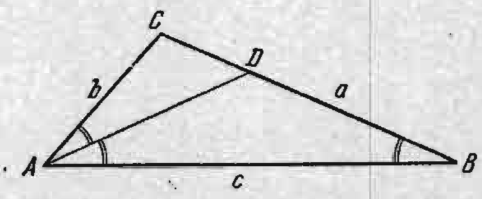


Рис. 8.

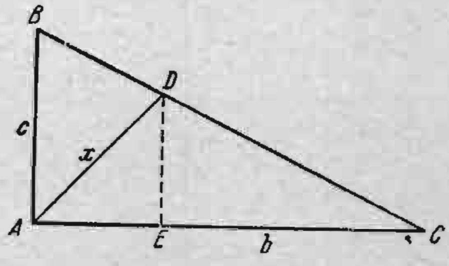


Рис. 9.

ные b и c. Заметим, далее, что $\triangle ACD$ подобен $\triangle ABC$, так как угол C у них общий, а угол CAD равен углу B. Отсюда

$$\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC} \text{ или } \frac{b}{\frac{ab}{b+c}}=\frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$a=\sqrt{b^2+bc}.$$

293. Пусть AD — биссектриса прямого угла A в $\triangle ABC$ и $DE \perp AC$ (рис. 9). Так как

$$\angle DAE=\frac{\pi}{4}, \text{ то } AE=DE=\frac{x}{\sqrt{2}},$$

где $x=AD$ — искомая длина. Очевидно,

$$\frac{ED}{AB}=\frac{CE}{CA}, \text{ или } \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{b-\frac{x}{\sqrt{2}}}{b}.$$

Отсюда

$$x=\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$$

294. В треугольнике ABC (рис. 10) O есть точка пересечения медиан AD и BE; $AC=b$, $BC=a$. Найдем $AB=c$.

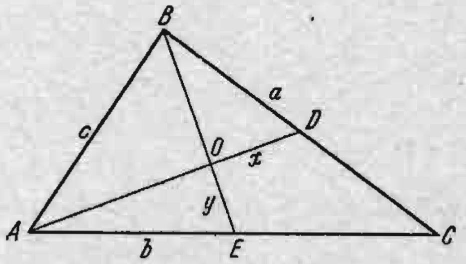


Рис. 10.

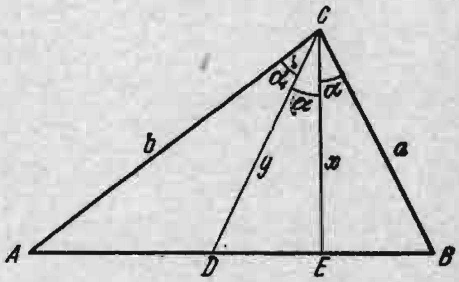


Рис. 11.

Пусть $OD=x$; $OE=y$. Используя свойство медиан, из треугольников AOB, BOD и AOE найдем:

$$4x^2+y^2=\frac{b^2}{4},\quad 4x^2+4y^2=c^2,\quad 4x^2+16y^2=a^2.$$

Исключив x и y, получим:

$$c^2=\frac{a^2+b^2}{5}.$$

Условия существования треугольника со сторонами a, b, c принимают вид

$$5(a+b)^2>a^2+b^2,\quad 5(a-b)^2<a^2+b^2.$$

Первое неравенство, очевидно, выполнено при любых a и b, а второе преобразуется в следующее:

$$a^2-\frac{5}{2}ab+b^2<0.$$

Решив это неравенство относительно $\frac{a}{b}$, окончательно получим:

$$\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<2.$$

295. Пусть $\angle ACD=\angle DCE=\angle ECB=\alpha$ и $CE=x$, $CD=y$ (рис. 11). Для площади треугольника ABC можно написать следующие три выражения:

$$S_{ACD}+S_{DCB}=\frac{1}{2}by\sin\alpha+\frac{1}{2}ay\sin 2\alpha,$$

$$S_{ACE}+S_{ECB}=\frac{1}{2}bx\sin 2\alpha+\frac{1}{2}ax\sin\alpha,$$

$$S_{ACD}+S_{DCE}+S_{ECB}=\frac{1}{2}by\sin\alpha+\frac{1}{2}xy\sin\alpha+\frac{1}{2}ax\sin\alpha.$$

Приравнивая друг другу левые части этих равенств и учитывая условие задачи, придем к системе трех уравнений:

$$2a\cos\alpha = x + a\,\frac{x}{y},$$

$$2b\cos\alpha = y + b\,\frac{y}{x},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}.$$

Решив ее, получим:

$$x = \frac{(n^2 - m^2)\,ab}{n\,(bm - an)}, \quad y = \frac{(n^2 - m^2)\,ab}{m\,(bm - an)}.$$

296. Обозначим через S площадь данного треугольника ABC (рис. 12) и положим $\frac{AD}{AB} = x$. Тогда площадь $\triangle ADE$ будет равна x^2S, а площадь $\triangle\, ABE$ равна xS. Условие задачи приводит к уравнению

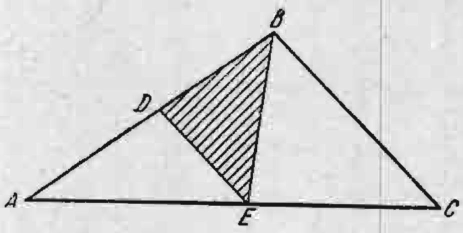


Рис. 12.

$$xS - x^2S = k^2,$$

решив которое, получим:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2}{S}}}{2}.$$

Задача разрешима, если $S \geqslant 4k^2$, и имеет два или одно решение в зависимости от того, будет ли $S > 4k^2$ или $S = 4k^2$ соответственно.

297. Обозначим через S площадь данного треугольника ABC. Полученные указанным в условии задачи построением треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 подобны $\triangle\, ABC$ (рис. 13). Поэтому их площади относятся как квадраты сходственных сторон, откуда

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{AD}{AC}, \quad \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{EC}{AC},$$

$$\sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{DE}{AC}.$$

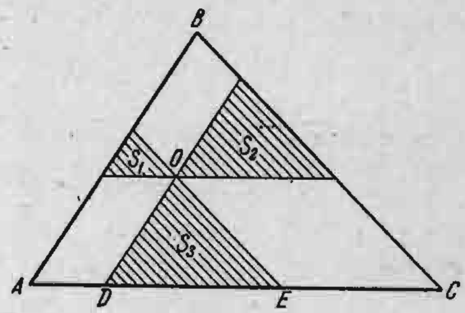


Рис. 13.

Сложив эти равенства почленно, найдем:

$$S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

298. Третью сторону треугольника, равную опущенной на нее высоте, обозначим через x. Используя два выражения для площади данного треугольника, получим уравнение

$$\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{\frac{b+c+x}{2}\cdot\frac{c+x-b}{2}\cdot\frac{x+b-c}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}}.$$

Решив его, найдем:

$$x^2=\frac{1}{5}(b^2+c^2\pm 2\sqrt{3b^2c^2-b^4-c^4}). \qquad (1)$$

Необходимым условием разрешимости задачи является условие

$$3b^2c^2\geqslant b^4+c^4. \qquad (2)$$

Если оно выполнено, то оба значения x^2 в (1) положительны. Легко проверить, что при выполнении (2) будут также выполнены неравенства

$$b+c>x\geqslant|b-c|,$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда $x=0$. Последнее имеет место, если в (1) при $b=c$ взять перед корнем знак минус. Следовательно, в случае $b=c$ задача имеет единственное решение

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}b.$$

Если $b\neq c$, то треугольник существует лишь в том случае, когда выполнено неравенство (2). Решив его относительно $\frac{b}{c}$, найдем, что оно эквивалентно следующим неравенствам:

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}}\leqslant\frac{b}{c}\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (3)$$

Следовательно, при $b\neq c$ существуют два треугольника, если оба неравенства (3) выполнены со знаком $<$, и один треугольник, если хотя бы одно из неравенств (3) выполнено со знаком $=$.

299. Сначала предположим, что $\triangle ABC$ остроугольный (рис. 14). Тогда

$$S_{ABC}-S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}. \qquad (1)$$

Имеем:

$$S_{B_1AC_1}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\sin A=\frac{1}{2}AB\cos A\cdot AC\cos A\sin A=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A\cos^2 A=S_{ABC}\cos^2 A$$

и аналогично

$$S_{C_1BA_1}=S_{ABC}\cos^2 B,\quad S_{A_1CB_1}=S_{ABC}\cos^2 C.$$

Подставив эти выражения в (1), после очевидных преобразований получим:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C. \qquad (2)$$

Если $\triangle ABC$ тупоугольный (рис. 15), то вместо (1) будем иметь:

$$S_{ABC}+S_{A_1B_1C_1}=S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1}$$

и, соответственно, вместо (2)

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1. \qquad (3)$$

Наконец, если $\triangle ABC$ прямоугольный, то $S_{A_1B_1C_1}=0$, что, как легко проверить, получается также из формул (2) или (3).

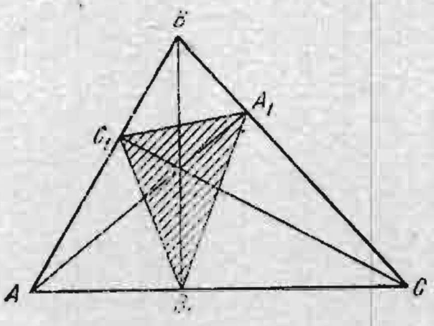


Рис. 14.

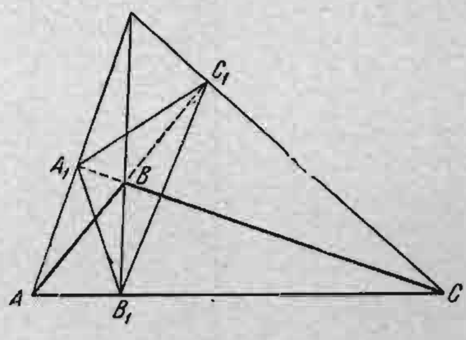


Рис. 15.

300. 1) Пусть BO и CO — биссектрисы внутренних углов $\triangle ABC$ (рис. 16). Легко видеть, что треугольники BOM и CON равнобедренные. Следовательно, $MN=BM+CN$.

2) Зависимость $MN=BM+CN$ имеет место и в случае внешних биссектрис.

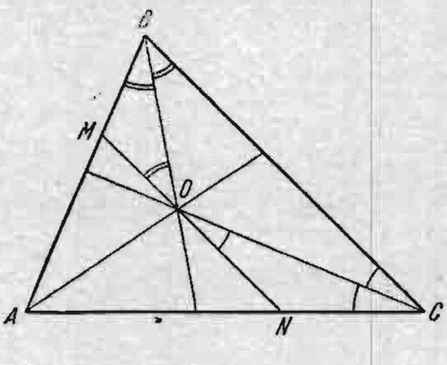
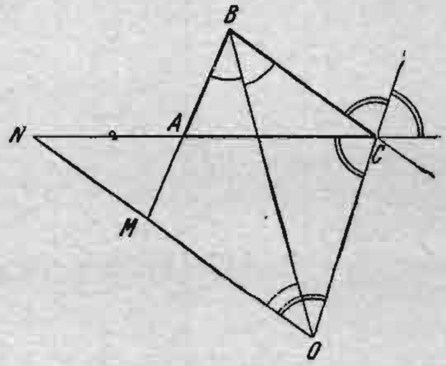


Рис. 16.



Рис

3) Если одна из биссектрис внутренняя, а другая — внешняя (рис. 17), то из внутренних треугольников BMO и CNO находим $MN=CN-BM$, когда $CN>BM$, и $MN=BM-CN$, когда $CN<BM$. Итак, в этом случае

$$MN=|CN-BM|.$$

Точки M и N совпадают только в случае (3), если $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB=AC$).

301. Проведем через точку P три прямые, параллельные сторонам треугольника (рис. 18). Три образовавшихся треугольника (заштрихованные на рисунке) также правильные, и сумма их сторон равна стороне $AB=a$ треугольника ABC. Значит и сумма их высот равна высоте $\triangle ABC$, так что

$$PD+PE+PF=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Сумма $BD+CE+AF$ равна сумме сторон заштрихованных треугольников, сложенной с суммой половин этих же сторон, так что

$$BD+CE+AF=\frac{3}{2}a.$$

Следовательно,

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

302. Пусть O — точка пересечения медиан в $\triangle ABC$ (рис. 19). На продолжении медианы BE отложим $ED=OE$. По свойству

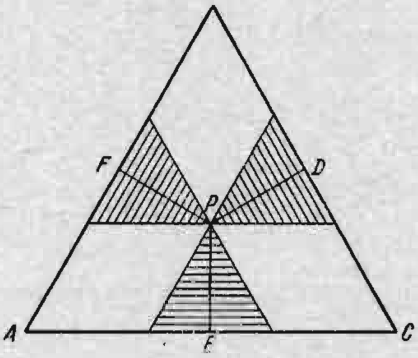


Рис. 18.

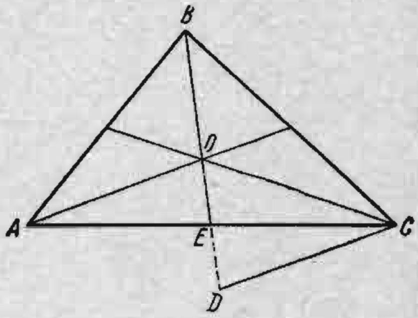


Рис. 19.

медиан сто́роны $\triangle CDO$ равны $\frac{2}{3}$ сторон треугольника, составленного из медиан. Обозначив площадь последнего через S_1, будем иметь:

$$S_1=\frac{9}{4}S_{CDO}.$$

С другой стороны, $\triangle CDO$ составлен из двух, а $\triangle ABC$ — из шести треугольников, равновеликих $\triangle CEO$. Поэтому $S_{CDO}=\frac{1}{3}S_{ABC}$. Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_{ABC}}=\frac{3}{4}.$$

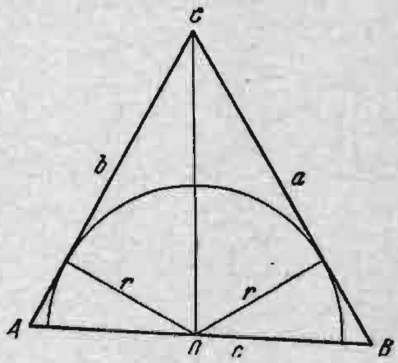


Рис. 20.

303. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 20). Площадь $\triangle COB$ равна $\frac{1}{2}ar$, а площадь $\triangle COA$ равна $\frac{1}{2}br$. Складывая эти величины и выражая площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона, получим:

$$r=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

304. Пусть R — радиус описанного круга и r — радиус вписанного. Тогда (рис. 21) $AB=2R$, а также

$$AB=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{2R}{r}=5.$$

Кроме того, $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=1$, т. е.

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}=1,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=6.$$

Следовательно, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ равны корням квадратного уравнения $x^2-5x+6=0$.

Окончательно получаем:

$$\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2},\quad \beta=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

305. Обозначим через a и b стороны данного прямоугольника и через φ — угол между стороной описанного и данного

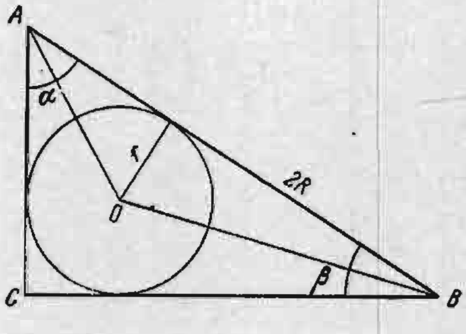


Рис. 21.

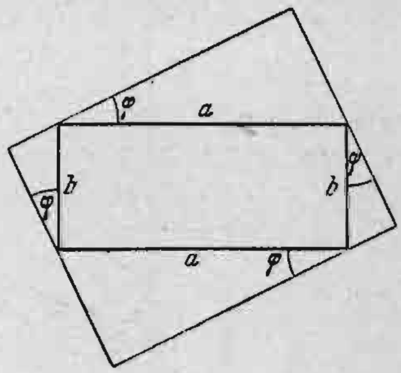


Рис. 22.

прямоугольников (рис. 22). Тогда стороны описанного прямоугольника будут равны

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi \quad \text{и} \quad a\sin\varphi+b\cos\varphi.$$

По условию задачи

$$(a\cos\varphi+b\sin\varphi)(a\sin\varphi+b\cos\varphi)=m^2,$$

откуда найдем:

$$\sin 2\varphi = \frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2}.$$

Условием разрешимости задачи будет $0 \leqslant \sin 2\varphi \leqslant 1$, что равносильно следующим неравенствам:

$$\sqrt{ab} \leqslant m \leqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

306. Если $\angle AED = \angle DEC$ (рис. 23), то также $\angle CDE = \angle DEC$, откуда $CE = CD$. Следовательно, E есть точка пересечения стороны AB с окружностью, описанной из центра C

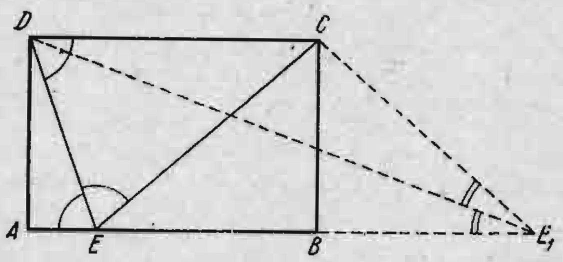


Рис. 23.

радиусом CD. Задача разрешима, если $AB \geqslant BC$, причем имеет два решения, когда $AB > BC$, и одно решение, когда $AB = BC$. (Точка E_1 на рис. 23 соответствует второму решению).

307. Боковая сторона видна из вершины нижнего основания под углом $\frac{\alpha}{2}$ (рис. 24), а средняя линия равна отрезку от этой вершины до основания высоты, опущенной из противоположной вершины, т. е. $h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, площадь трапеции

$$S = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

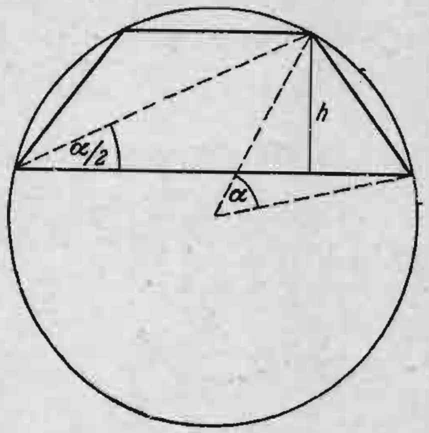


Рис. 24.

308. Середины диагоналей E и F трапеции лежат на ее средней линии MN (рис. 25). Но $ME = FN = \frac{a}{2}$. Следовательно,

$$EF = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}.$$

309. Параллелограмм составлен из 8 треугольников, равновеликих треугольнику AOE. Фигура (восьмиугольник), полученная путем указанного построения, также составлена из 8 треугольников, равновеликих $\triangle POQ$ (рис. 26). Так как $OP=\frac{1}{3}OA$ (по свойству медиан в $\triangle DAE$) и $OQ=\frac{1}{2}OE$, то

$$S_{POQ}=\frac{1}{6}S_{AOE}.$$

Следовательно, искомое отношение равно $\frac{1}{6}$.

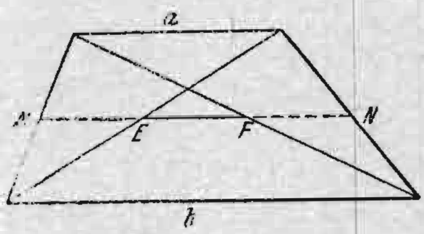


Рис. 25.

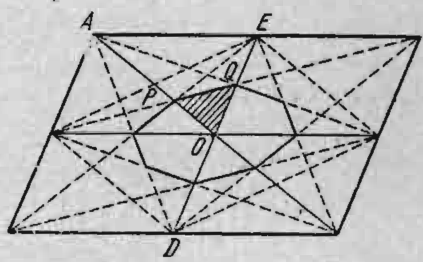


Рис. 26.

310. Очевидно, что $KLMN$ — параллелограмм (рис. 27), причем $KL=\frac{2}{5}AQ$. Следовательно,

$$S_{KLMN}=\frac{2}{5}S_{AQCS}=\frac{2}{5}\,\frac{1}{2}\,a^2=\frac{1}{5}\,a^2.$$

311. Двум данным хордам с длинами $2a$ и $2b$ соответствуют центральные углы 2α и 2β, где

$$\sin\alpha=\frac{a}{R}, \qquad \sin\beta=\frac{b}{R}.$$

Дугу, равную $2(\alpha\pm\beta)$, стягивает хорда $2c$, где

$$c=R|\sin(\alpha\pm\beta)|=\left|\frac{a}{R}\sqrt{R^2-b^2}\pm\frac{b}{R}\sqrt{R^2-a^2}\right|.$$

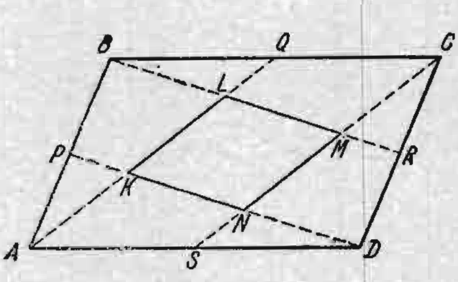


Рис. 27.

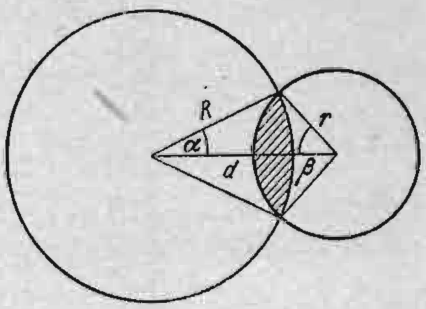


Рис. 28.

312. Искомая площадь равна сумме площадей двух секторов с углами 2α и 2β (рис. 28) без удвоенной площади треугольника со сторонами R, r, d:

$$S=R^2\alpha+r^2\beta-Rd\sin\alpha.$$

Для определения углов α и β имеем два уравнения:

$$R \sin\alpha = r \sin\beta,$$
$$R \cos\alpha + r \sin\beta = d,$$

решая которые, находим:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd},$$

$$\cos\beta = \frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd}.$$

Следовательно,

$$S = R^2 \arccos\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd} + r^2 \arccos\frac{d^2 + r^2 - R^2}{2rd} - $$
$$- Rd\sqrt{1 - \left(\frac{d^2 + R^2 - r^2}{2Rd}\right)^2}.$$

313. Пусть K — точка касания двух окружностей, имеющих радиусы r и r_1, и P — основание перпендикуляра, опущенного из центра O_2 третьей окружности на OO_1 (рис. 29). Положив $KP = x$, будем иметь:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Величина x определяется из уравнения

$$(R + r)^2 - (r + x)^2 = (R + r_1)^2 - (r_1 - x)^2$$

и равна $x = \frac{r - r_1}{r + r_1} R$. Подставив это значение в (1), получим:

$$AB = \frac{4\sqrt{rr_1}}{r + r_1} R.$$

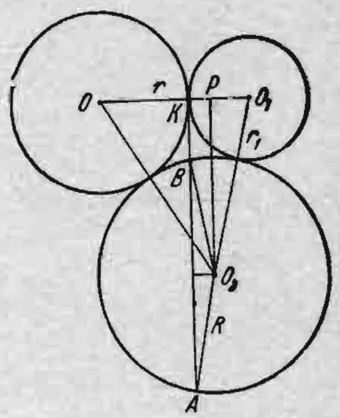


Рис. 29.

314. Пусть O_1, O_2 — центры соответственно окружностей радиусов R, r, а O_3 — центр третьей окружности. Пусть x — радиус третьей окружности и P — точка касания ее с диаметром O_1O_2 (см. рис. 30). Применив теорему Пифагора к треугольникам O_2O_3P и O_1O_3P, получим равенство

$$O_2O_3^2 = O_3P^2 + \left(O_2O_1 + \sqrt{O_1O_3^2 - O_3P^2}\right)^2.$$

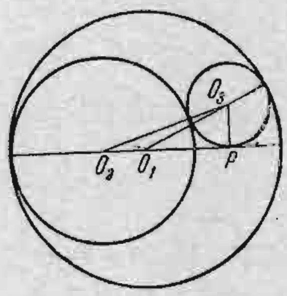


Рис. 30.

Подставив сюда значения $O_2O_3 = r + x$, $O_3P = x$, $O_2O_1 = R - r$,

$O_1O_3=R-x$, получим уравнение относительно неизвестного x:

$$(r+x)^2=x^2+\left(R-r+\sqrt{(R-x)^2-x^2}\right)^2.$$

Решив это уравнение, найдем

$$x=4Rr\frac{R-r}{(R+r)^2}.$$

315. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры трех равных окружностей и O — центр круга радиуса r (рис. 31). Обозначим через $S_{O_1O_2O_3}$ площадь $\triangle O_1O_2O_3$,

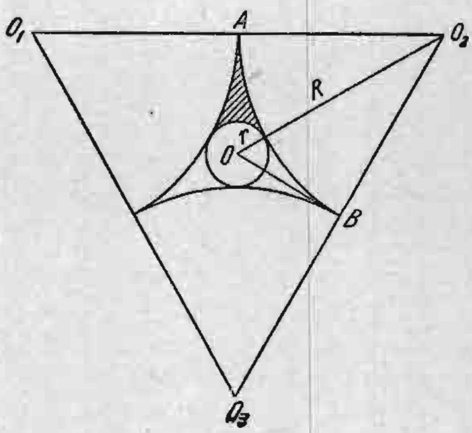


Рис. 31.

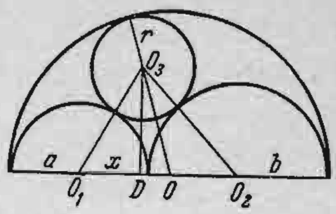


Рис. 32.

S_{AO_2B} — площадь сектора AO_2B; тогда искомая площадь будет

$$S=\frac{1}{3}(S_{O_1O_2O_3}-3S_{AO_2B}-\pi r^2). \qquad (1)$$

Если R — общий радиус трех кругов, то

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2}(R+r),$$

откуда

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}r=(3+2\sqrt{3})\,r.$$

Далее, находим:

$$S_{O_1O_2O_3}=\frac{1}{2}2RR\sqrt{3}=\sqrt{3}R^2=3(12+7\sqrt{3})\,r^2,$$

$$S_{AO_2B}=\frac{1}{6}\pi R^2=\frac{\pi}{2}(7+4\sqrt{3})\,r^2$$

и по формуле (1) окончательно получаем:

$$S=\left[12+7\sqrt{3}-\left(\frac{23}{6}+2\sqrt{3}\right)\pi\right]r^2.$$

316. Пусть $O_3D\perp O_1O_2$ (см. рис. 32). Имеем

$$OO_3^2=O_1O_3^2+O_1O^2-2O_1O\cdot O_1D=O_2O_3^2+OO_2^2-2OO_2\cdot DO_2, \qquad (1)$$

где $O_1O_3=a+r$, $O_2O_3=b+r$, $O_1O=(a+b)-a=b$, $OO_2=(a+b)-b=a$.

Положив $O_1D=x$, запишем второе равенство (1) в такой форме:

$$(a+r)^2+b^2-2bx=(b+r)^2+a^2-2a(a+b-x),$$

откуда найдем, что

$$x=a+\frac{a-b}{a+b}r.$$

Теперь первое равенство (1) примет вид уравнения с одним неизвестным r

$$(a+b-r)^2=(a+r)^2+b^2-2b\left(a+\frac{a-b}{a+b}r\right).$$

Решив это уравнение, окончательно получим

$$r=\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

317. Обозначим через a и b расстояния данной точки A от данных прямых l_1 и l_2, а через x и y — длины катетов искомого

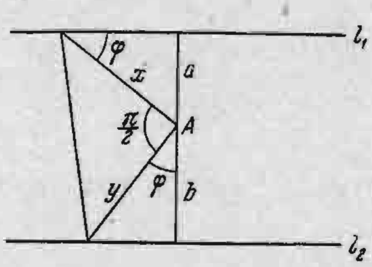


Рис. 33.

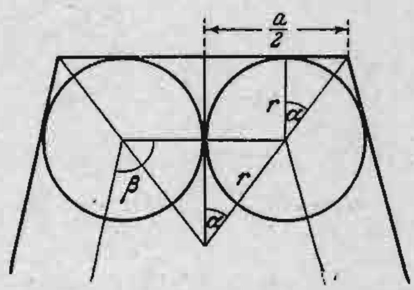


Рис. 34.

треугольника (рис. 33). Заметив, что $\frac{a}{x}=\sin\varphi$, $\frac{b}{y}=\cos\varphi$, будем иметь два уравнения:

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1, \quad \frac{1}{2}xy=k^2.$$

Преобразовав эти уравнения, придем к системе

$$\left.\begin{aligned} xy&=2k^2,\\ b^2x^2+a^2y^2&=4k^4. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее, получим

$$x=\frac{k}{b}\left|\sqrt{k^2+ab}\pm\sqrt{k^2-ab}\right|,$$

$$y=\frac{k}{a}\left|\sqrt{k^2+ab}\mp\sqrt{k^2-ab}\right|.$$

Задача разрешима при $k^2\geqslant ab$ и имеет два решения при $k^2>ab$ и одно решение при $k^2=ab$.

318. Соединив центры кругов, получим многоугольник, подобный данному. Центр полученного многоугольника совпадает с центром данного и стороны его соответственно параллельны сторонам данного (рис. 34).

Пусть r — общий радиус рассматриваемых кругов. Тогда сторона построенного нами многоугольника равна $2r$, а его площадь

$$\sigma = nr^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Пусть, далее, $\beta = \frac{\pi(n-2)}{n}$ — внутренний угол многоугольника. Для искомой площади S «звездочки» мы получаем выражение

$$S = \sigma - n\frac{r^2}{2}\beta = nr^2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - n\frac{r^2}{2}\beta.$$

Легко далее видеть (см. рис. 34), что

$$\frac{a}{2} - r = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

откуда $r = \frac{a}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)}$ и, следовательно,

$$S = \frac{a^2}{4}\,\frac{n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} - (n-2)\frac{\pi}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

319. В обозначениях рис. 35 имеем

$$\angle CGF = \frac{1}{2}(\breve{FA} + \breve{AC}), \qquad \angle CDB = \frac{1}{2}(\breve{FA} + \breve{BC}).$$

Четырехугольник $DEGF$ будет вписанным тогда и только тогда, когда $\angle CGF = \angle CDB$, т. е. когда $\breve{AC} = \breve{BC}$.

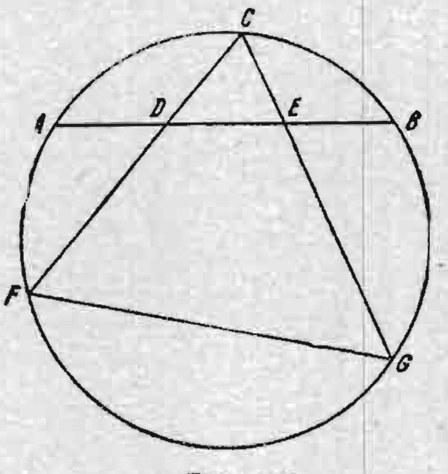


Рис. 35.

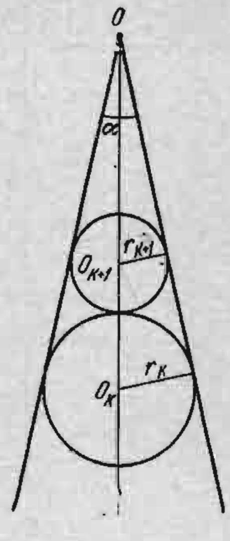


Рис. 36.

320. Пусть O — вершина острого угла α и O_k — центр k-го круга (рис. 36). Тогда

$$r_k = OO_k \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad r_{k+1} = (OO_k - r_k - r_{k+1}) \sin\frac{\alpha}{2}$$

и

$$r_{k+1}=r_k-r_k\sin\frac{\alpha}{2}-r_{k+1}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{r_{k+1}}{r_k}=\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}},$$

т. е. радиусы кругов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

321. Пусть наименьший угол между отраженными лучами и плоскостью P равен α (рис. 37). Такой угол образует луч, проходящий через край зеркала C после однократного отражения в точке B.

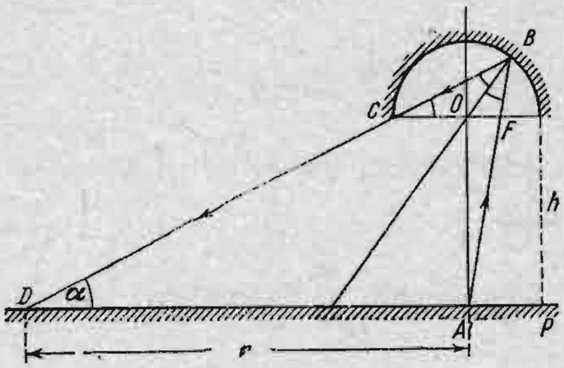


Рис. 37.

По условию задачи $CF \parallel DA$; следовательно, $\angle OCB=\angle OBC=\alpha$. Из условия отражения в точке B следует $\angle OBF=\alpha$. Поэтому в треугольнике OBF имеем:

$$\angle BOF=2\alpha, \qquad \angle OFB=180^\circ-2\alpha-\alpha=180^\circ-3\alpha.$$

Обозначим расстояние от зеркала до плоскости через h, а радиус освещенного круга AD через r. Так как радиус зеркала равен 1, то

$$\frac{h}{r-1}=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Из треугольника OBF по теореме синусов находим:

$$OF=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

В силу подобия треугольников CBF и DBA высоты в них пропорциональны сторонам, так что

$$\frac{AD}{FC}=\frac{h+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

или

$$\frac{r}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}}=\frac{h+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, находим:

$$r=\frac{2\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha-1}.$$

Подставив сюда данную в задаче величину $\alpha=15°$, получим:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3},$$

поэтому из (1) получим

$$h=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

322. Следует рассмотреть различные случаи в зависимости от величины отношения $\frac{r}{a}$.

1) $\frac{r}{a}\geqslant\sqrt{2}$. Окружности не пересекают квадрат, $S=a^2$.

2) $\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{r}{a}<\sqrt{2}$. Очевидно, в этом случае $S=a^2-8\sigma$,

где σ — площадь заштрихованного криволинейного треугольника (рис. 38). Имеем:

$$\sigma=\frac{1}{2}a\sqrt{2}x-\frac{1}{2}r^2\varphi,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{x}{r}$. Для отыскания x заметим, что

$$x\sqrt{2}+\sqrt{r^2-a^2}=a,$$

откуда

$$x=\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\sigma=\frac{1}{2}a\left(a-\sqrt{r^2-a^2}\right)-\frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{a-\sqrt{r^2-a^2}}{r\sqrt{2}}.$$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{r}{a} < \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Здесь $S=8\sigma$, где σ — площадь заштрихованного криволинейного треугольника (рис. 39). Имеем:

$$\sigma=\frac{1}{2}r^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}x,$$

где

$$\varphi=\arcsin\frac{x}{r}.$$

Замечая, что

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+x\sqrt{2},$$

находим:

$$x=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\sigma=\frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{\sqrt{4r^2-a^2}-a}{2\sqrt{2}r}-\frac{a(\sqrt{4r^2-a^2}-a)}{8}.$$

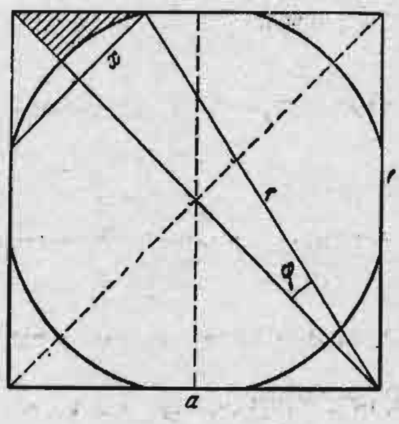


Рис. 38.

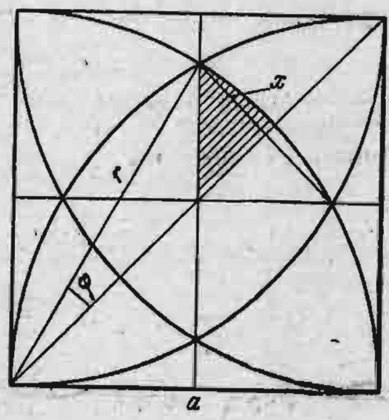


Рис. 39.

4) $\dfrac{r}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Искомая площадь равна нулю.

323. Имеем (см. рис. 40):

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4. \tag{1}$$

Далее,

$$\frac{S_3}{S_2}=\frac{S_1}{S_4}=\frac{AO}{OC},$$

откуда $S_3S_4=S_1S_2$. Но, очевидно, имеем

$$S_3+S_1=S_4+S_1,$$

так что $S_3=S_4$ и $S_3=S_4=\sqrt{S_1S_2}$.

Следовательно, из (1) получаем

$$S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2.$$

324. Обозначив через a, b, c, d длины сторон и через m, n — длины диагоналей четырехугольника (рис. 41), по теореме косинусов имеем:

$$n^2=a^2+d^2-2ad\cos\varphi,$$
$$n^2=b^2+c^2+2bc\cos\varphi.$$

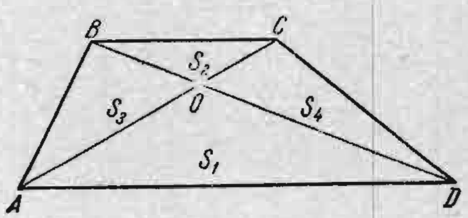


Рис. 40.

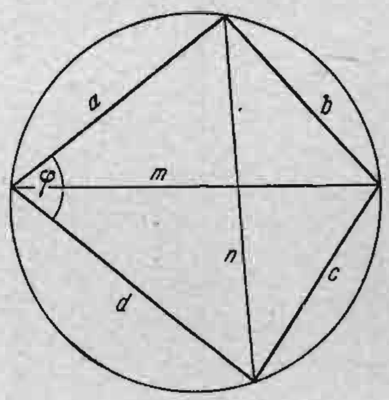


Рис. 41.

Отсюда

$$(bc+ad)n^2=(a^2+d^2)\,bc+(b^2+c^2)\,ad=(ab+cd)\,(ac+bd).$$

Следовательно,

$$n^2=\frac{ab+cd}{bc+ad}\,(ac+bd).$$

Аналогично найдем:

$$m^2=\frac{ad+bc}{ab+cd}\,(ac+bd).$$

Перемножив эти равенства, получим теорему Птолемея:

$$mn=ac+bd.$$

2. Задачи на построение

325. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Проводим прямую O_1A и через центр O_2 второй окружности прямую, параллельную O_1A, которая пересекает вторую окружность в точках M и N (рис. 42). Прямая MA пересечет вторую окружность в точке P_1. Прямая O_2P_1 пересечет O_1A в точке C_1. Из подобия треугольников MO_2P_1 и AC_1P_1 следует:

$$C_1A=C_1P_1.$$

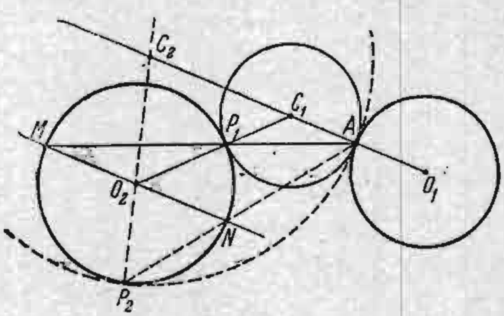


Рис. 42.

Следовательно, окружность с центром C_1 и радиусом C_1A является искомой. Второе решение получается с помощью точки N так же, как первое с помощью точки M. Если одна из прямых MA или NA будет касательной ко второй окружности, то останется одно решение, а второе даст эту касательную (центр окружности в бесконечности). Это будет тогда и только тогда, когда A совпадет с точкой касания одной из четырех общих касательных к данным окружностям.

326. Пусть O — центр данной окружности, AB — данная прямая (рис. 43). Задача решается аналогично предыдущей. В общем случае она имеет два решения. Особыми случаями будут следующие: 1) данная прямая пересекает окружность, и данная точка A совпадает с одной из точек пересечения (нет ни одного решения); 2) данная прямая касается окружности, а точка A не совпадает с точкой касания (одно решение); 3) данная прямая касается окружности, и точка A совпадает с точкой касания (бесконечно много решений).

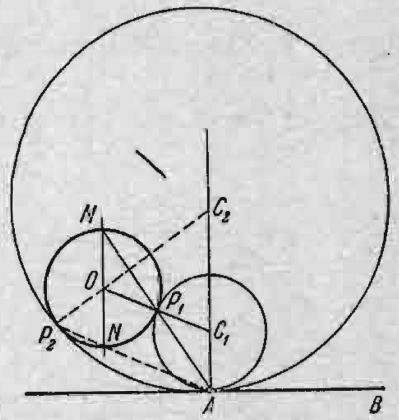


Рис. 43.

327. Через центр O данной окружности проводим прямую, перпендикулярную к данной прямой l, пересекающую окружность в точках M и N (рис. 44). Прямая MA пересечет l в точке P_1. Точка C_1 есть точка пересечения перпендикуляра к l в точке P_1 и прямой OA. Из подобия треугольников AOM и AC_1P_1 следует, что $C_1A = C_1P_1$. Следовательно, окружность с центром C_1 и радиусом C_1A является искомой. Второе решение получается с помощью точки N так же, как первое с помощью точки M. Если прямая l не проходит через одну из точек A, M, N и точка A не совпадает с M или N, то задача всегда имеет два решения.

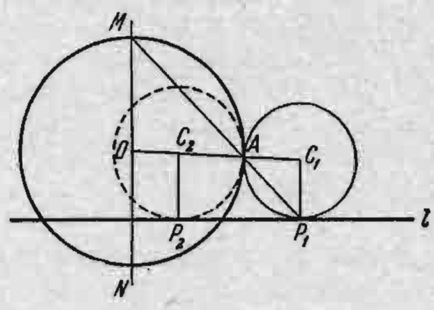


Рис. 44.

Пусть A не совпадает с M или N; если l проходит через M или через N, то задача имеет одно решение (вторая окружность совпадает с данной окружностью); если же l проходит через A, то задача не имеет ни одного решения.

Пусть A совпадает с M; если l не проходит через M или N, то задача имеет одно решение (второе переходит в прямую l); если l проходит через N, то решением будет данная окружность, а если l проходит через M, то задача имеет бесконечно много решений.

328. На данной гипотенузе $AB = c$, как на диаметре, построим окружность с центром в точке O (рис. 45). Проведем $OE \perp AB$ и на OE отложим $OF = h$. Прямая, параллельная AB и проходящая через F, пересечет окружность в искомой точке C. Задача разрешима, если $h \leqslant \frac{c}{2}$. Длины катетов a, b найдутся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2&=c^2,\\ ab&=hc. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, получим:

$$a=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2hc}+\sqrt{c^2-2hc}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2hc}-\sqrt{c^2-2hc}\right).$$

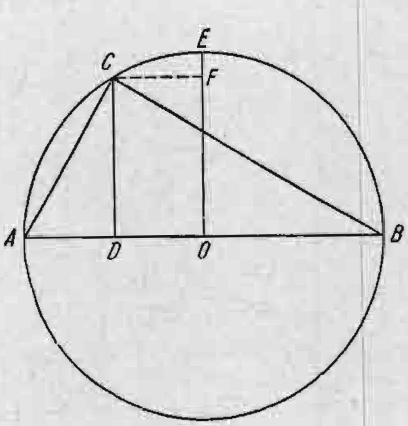


Рис. 45.

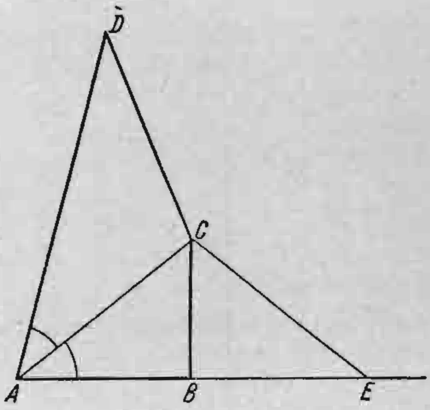


Рис. 46.

329. Берем отрезок AB и на прямой AB от точки A в сторону B откладываем отрезок $AE=AD$ (рис. 46). Строим $\triangle BCE$ на основании BE со сторонами BC и $EC=CD$. На отрезке AC, как на основании, строим $\triangle ACD$ со сторонами AD и CD. Четырехугольник $ABCD$ искомый, так как он имеет данные стороны и $\angle DAC=$ $=\angle CAE$ (треугольники ACD и ACE по построению равны).

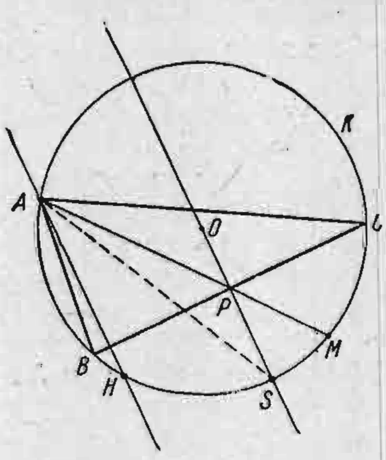


Рис. 47.

330. Пусть H, S, M — точки пересечения высоты, биссектрисы и медианы соответственно с описанной окружностью K, имеющей центр O (рис. 47). Проведем прямую SO и через H — прямую, параллельную SO, которая второй раз пересечет K в точке A. Проведем прямую AM, которая пересечет SO в точке P. Через P проведем прямую, перпендикулярную к SO, которая пересечет окружность в точках B и C. Треугольник ABC искомый, так как $AH\perp BC$, $\smile BS=\smile SC$ и $BP=PC$. Задача разрешима тогда и только тогда, когда H, S, M не лежат на одной прямой, касательная к K в точке H не параллельна SO, точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO, но не на одном диаметре круга K.

331. А. Случай внешнего касания. Из точки O пересечения биссектрис внутренних углов треугольника ABC опустим перпендикуляры OM, ON, OP на стороны треугольника (рис. 48).

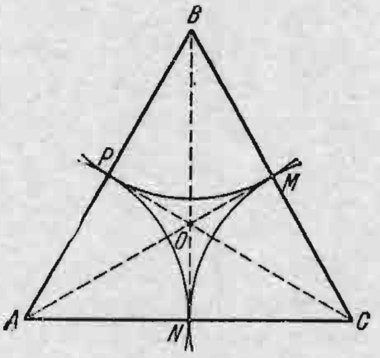


Рис. 48.

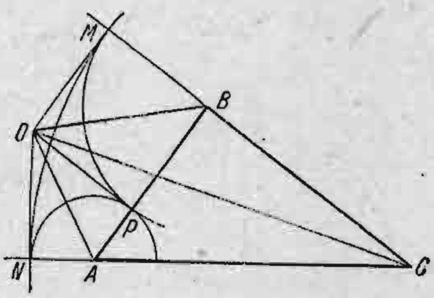


Рис. 49.

Тогда $AP = AN$, $BP = BM$, $CM = CN$. Следовательно, окружности радиусов AP, BM, CN с центрами в A, B, C будут касаться друг друга в точках P, M, N.

Б. Случай внутреннего касания. Из точки O пересечения биссектрисы угла C и биссектрис внешних углов A и B опустим перпендикуляры OM, ON и OP на стороны (или на продолжения сторон) треугольника ABC (рис. 49). Тогда

$$AP = AN, \quad BP = BM, \quad CM = CN.$$

Следовательно, окружности радиусов AP, BM, CN с центрами A, B, C будут касаться друг друга в точках P, M, N.

Еще два решения получим, беря биссектрисы внутреннего угла A и внешних B и C или внутреннего угла B и внешних A и C.

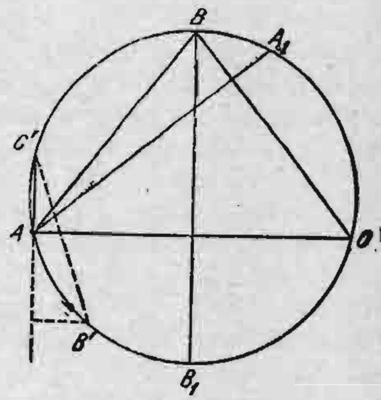


Рис. 50.

332. Решение основано на следующем свойстве: если высоты h_A и h_B вписанного треугольника ABC пересекают окружность в точках A_1 и B_1, то вершина C делит дугу A_1B_1 пополам (рис. 50). Это следует из равенства углов $\angle A_1AC$ и $\angle B_1BC$, каждый из которых равен $\frac{\pi}{2} - \angle ACB$.

Построение. Через A проводим прямую в данном направлении до пересечения с окружностью в точке A_1; пусть B_1 — точка пересечения высоты h_B с окружностью; находим середину C дуги A_1B_1 и проводим AC; проводим $B_1B \perp AC$; треугольник ABC искомый.

Второе решение $AB'C'$ получится, если взять середину C' второй из дуг A_1B_1.

333. Середину E основания AB соединим с вершиной C и найдем точку Q пересечения прямых EC и AD (рис. 51). Прямая $PQMN$, параллельная AB, — искомая. Действительно,

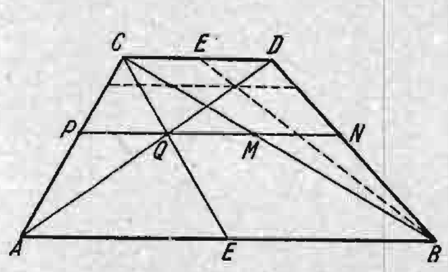


Рис. 51.

$$\frac{PQ}{QM}=\frac{AE}{EB}=1,$$

откуда $PQ=QM$; далее,

$$\frac{MN}{CD}=\frac{PQ}{CD},$$

откуда $MN=PQ$. Второе решение получается с помощью середины E' основания CD так же, как первое — с помощью E.

334. Пусть квадрат $ABCD$ построен, причем B — заданная вершина, E и F — данные точки (рис. 52). Вершина D должна лежать на окружности, построенной на EF, как на диаметре. Пусть BD пересекает окружность в точке K. Тогда $\overset{\frown}{EK}=\overset{\frown}{KF}$, так как $\angle ADB=\angle BDC$.

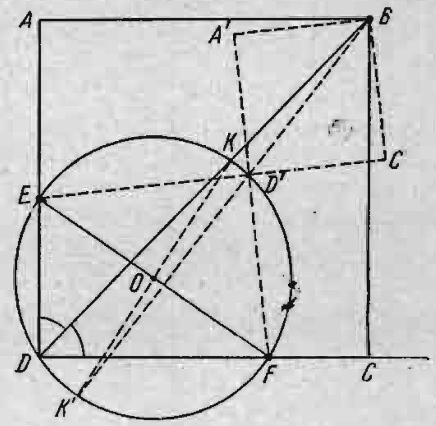


Рис. 52.

Построение. На EF, как на диаметре, построим окружность и из ее центра восставим перпендикуляр к EF до пересечения с окружностью в точках K и K'; соединим B с K и продолжим BK до пересечения с окружностью в точке D; проведем прямые DE и DF и через точку B — перпендикулярные к ним BA и BC. $ABCD$ — искомый квадрат. Второе решение получим, используя точку K'. Задача всегда имеет два решения, кроме того случая, когда точка B лежит на окружности с диаметром EF. В этом последнем случае задача решений не имеет, если точка B не совпадает с одной из точек K, K'.

335. Первое решение. Проводим $AD \parallel MB$ до пересечения с продолжением BC в точке D (рис. 53). На отрезке CD находим точку N такую, чтобы

$$\frac{CD}{CN}=k.$$

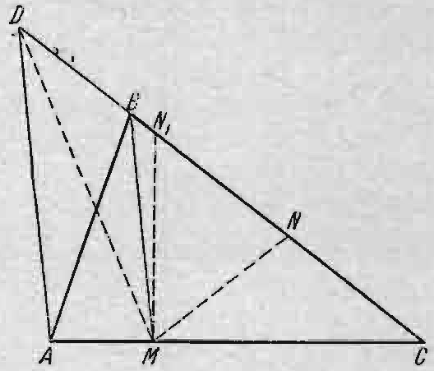


Рис. 53.

Прямая MN искомая, так как площадь $S_{ABM}=S_{DBM}$, следовательно, $S_{ABC}=S_{DMC}$ и по построению $S_{DMC}=kS_{NMC}$.

Второе решение получим, используя точку N_1 такую, что

$$\frac{CD}{N_1D}=k.$$

Тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABN_1M}}=k.$$

Учитывая возможность аналогичного построения, исходящего из вершины C (вместо A), легко убедиться в том, что при $k \neq 2$ задача всегда имеет два решения, а при $k=2$ — только одно.

336. Для построения достаточно знать высоту $h=KL$ прямоугольника.

Пусть прямоугольник $KLMN$ искомый, KN лежит на AC (рис. 54). Если перемещать вершину B параллельно основанию AC и сохранять при этом величину h неизменной, то будут сохраняться также величины основания и диагонали прямоугольника (ибо LM составляет ту же часть AC, какую составляет $BH-h$ от BH). Значит, для нахождения h можно данный треугольник ABC заменить любым другим с тем же основанием AC и той же высотой BH. Удобнее всего взять треугольник с прямым углом при основании. Отсюда получаем следующее построение. Проводим через B прямую, параллельную AC, а через C — прямую, перпендикулярную к AC; из вершины прямого угла C раствором циркуля, равным длине d данной диагонали, делаем засечку L_1 на гипотенузе AB_1; через L_1 проводим прямую параллельно AC; точки ее пересечения L и M со сторонами AB и BC являются вершинами искомого прямоугольника. Смотря по тому, будет ли высота треугольника AB_1C, опущенная из C, меньше, равна или больше данной величины d, задача будет иметь два решения, одно или ни одного.

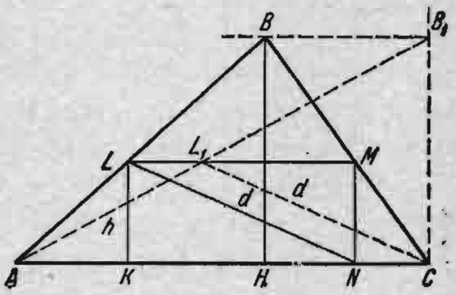


Рис. 54.

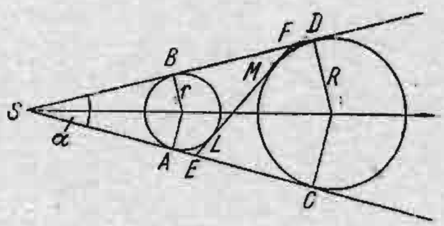


Рис. 55.

337. В данный угол впишем данную окружность. От точек касания A и B на сторонах угла отложим по направлению от вершины отрезки AC и BD, равные данной стороне треугольника (рис. 55).

Впишем в данный угол вторую окружность так, чтобы она касалась сторон угла в точках C и D. Проведем общую касательную EF к построенным окружностям. Докажем, что полученный таким образом $\triangle SEF$ есть искомый. Для этого достаточно доказать, что $AC=FE$. Нетрудно убедиться в том, что периметр $\triangle SEF$

равен $2SC$; с другой стороны, он, очевидно, равен $2(SA+EL+LF)$. Итак, $SC=SA+EL+LF$, $SA+AC=SA+EF$, т. е.

$$AC=EF,$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что задача имеет два решения, если окружности не пересекаются, и одно,— если они касаются. Задача не разрешима, если окружности пересекаются. Пусть α — данный угол, r и R — радиусы окружностей, a — данная сторона треугольника. Расстояние между центрами окружностей равно $\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; для разрешимости задачи требуется, чтобы

$$R+r \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Но

$$R=r+a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

и, следовательно, должно быть

$$2r+a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

или

$$\frac{2r}{a} \geqslant \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

338. Проводим окружность с центром в точке B, касающуюся прямой CD (рис. 56). Из точки A (если A и B лежат по разные стороны от CD, или из точки A', симметричной с A относительно

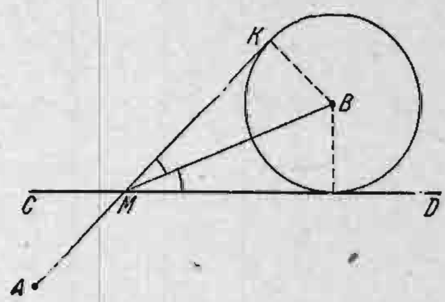


Рис. 56.

CD, если A и B лежат по одну сторону от CD) проводим касательную AK к построенной окружности. Точка M, в которой AK (или $A'K$) пересечет CD, и есть искомая. Действительно,

$$\angle AMC=\angle KMD=2\angle BMD.$$

3. Задачи на доказательство

339. Пусть BO — медиана в треугольнике ABC; достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 57). Из треугольника BCD имеем $2BO < BC + CD$, и так как $CD = AB$, то

$$BO < \frac{AB + BC}{2}.$$

Из $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ имеем:

$$BO + \frac{AC}{2} > AB,$$

$$BO + \frac{AC}{2} > BC.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$BO > \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2}.$$

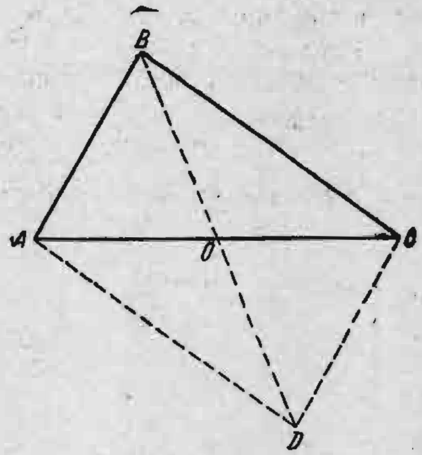


Рис. 57.

340. Пусть D — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, E и F — середины сторон BC и AC (рис. 58). Треугольники ADB и EOF подобны, так как $\angle ABD = \angle OFE$ и $\angle BAD = \angle OEF$ (как углы с параллельными сторонами). Следовательно,

$$\frac{OE}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}.$$

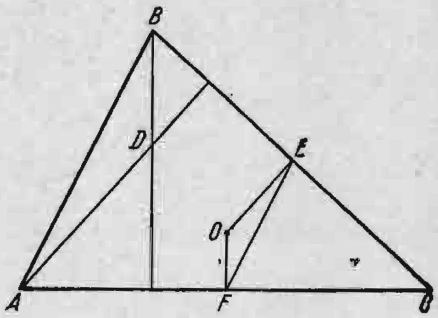


Рис. 58.

341. См. решение задачи 301.

342. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, лежащих соответственно против углов A, B, C. Докажем, что длина l_A биссектрисы угла A выражается формулой

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \qquad (1)$$

Действительно, площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_A\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_A\sin\frac{A}{2}.$$

Отсюда следует формула (1). Аналогично для биссектрисы l_B угла B получим формулу

$$l_B = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}. \qquad (2)$$

Пусть $a > b$; тогда $\angle A > \angle B$, и так как, кроме того, $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{A}{2} < \cos\frac{B}{2}$. Итак, числитель дроби (1) меньше числителя дроби (2). Далее, знаменатель $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ дроби (1) больше знаменателя $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ дроби (2), так как $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Следовательно, $l_A < l_B$.

343. Пусть $\angle CPQ=\alpha$, $\angle PQC=\beta$ (рис. 59). По теореме синусов имеем:

$$\frac{RB}{\sin\alpha}=\frac{BP}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \frac{PC}{\sin\beta}=\frac{CQ}{\sin\alpha},$$

$$\frac{AQ}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AR}{\sin\beta}.$$

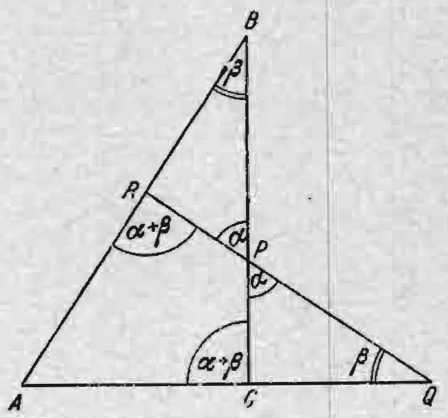


Рис. 59.

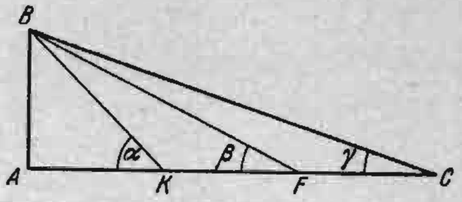


Рис. 60.

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$RB\cdot PC\cdot QA=PB\cdot QC\cdot RA.$$

344. Пусть $\angle AKB=\alpha$, $\angle AFB=\beta$, $\angle ACB=\gamma$ (рис. 60). Имеем $\alpha=\frac{\pi}{4}$, и так как

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3},$$

то

$$\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

Отсюда $\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ и $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

345. Воспользуемся теоремой, обратной теореме Пифагора: если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то этот треугольник прямоугольный. В данном случае соотношение

$$(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$$

выполнено, так как оно эквивалентно очевидному равенству $ab=ch$.

346. Первое решение. Проведем AE так, чтобы $\angle EAC = 20°$ и $BD \perp AE$ (рис. 61). Так как $\triangle CAE \sim \triangle ABC$, то

$$\frac{CE}{a} = \frac{a}{b},$$

откуда $CE = \frac{a^2}{b}$ и $BE = b - \frac{a^2}{b}$.

С другой стороны, $\angle BAD = 60°$, в силу чего

$$BD = \frac{\sqrt{3}}{2} b, \quad AD = \frac{b}{2},$$

и так как $AE = a$, то $ED = \frac{b}{2} - a$. Поэтому

$$BE = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + \frac{3}{4} b^2}.$$

Следовательно,

$$b - \frac{a^2}{b} = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + \frac{3}{4} b^2}.$$

Возведя обе части в квадрат и сделав упрощения, найдем, что это соотношение равносильно доказываемому.

Второе решение. Так как $a = 2b \sin 10°$, то доказываемое соотношение равносильно следующему:

$$1 + 8 \sin^3 10° = 6 \sin 10°.$$

или

$$\sin 30° = 3 \sin 10° - 4 \sin^3 10°.$$

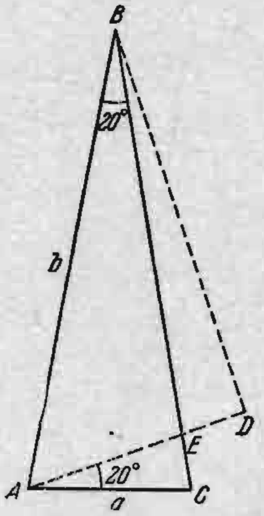


Рис. 61.

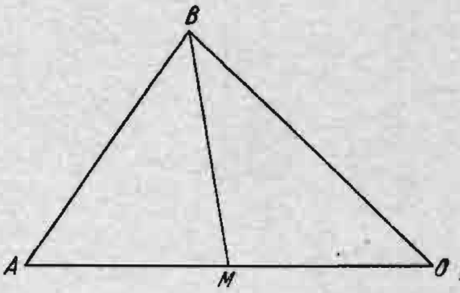


Рис. 62.

Последнее равенство выполнено в силу общей формулы

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

347. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Поэтому, если в $\triangle ABC$ (рис. 62)

$$AC < 2BM,$$

что равносильно двум неравенствам:

$$AM < BM, \quad MC < BM,$$

то

$$\angle ABM < \angle BAM, \quad \angle MBC < \angle BCM.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$\angle ABC < \angle BAM + \angle BCM = \pi - \angle ABC,$$

откуда $2\angle ABC < \pi$ или $\angle ABC < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично рассматриваются случаи $AC \geqslant 2BM$.

348. Первое решение. Пусть $QQ' \parallel AC$ и N — точка пересечения AQ' и QC (рис. 63). Сплошными дугами на рисунке обозначены углы, значения которых очевидны.

Покажем, что

$$QP \perp AQ'. \tag{1}$$

Действительно, $NC = AC$; но $AC = PC$, ибо $\triangle ACP$ — равнобедренный. Поэтому $NC = PC$, следовательно, $\triangle NCP$ также равнобедренный и значит

$$\angle CNP = \angle NPC = 80°.$$

Отсюда уже легко получаем, что $\angle Q'NP = 180° - 60° - 80° = 40°$, и так как $\angle NQ'P = 40°$, то треугольники $QQ'P$ и QNP равны.

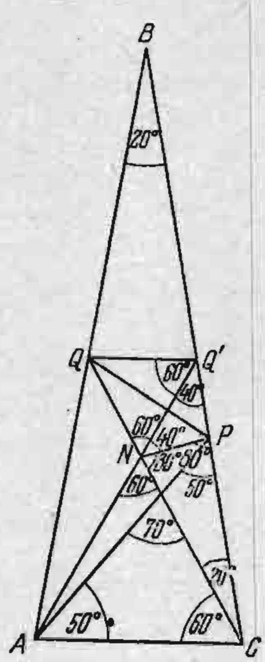


Рис. 63.

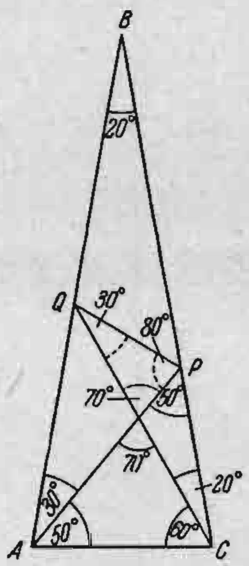


Рис. 64.

Отсюда следует (1). Теперь уже ясно, что $\angle Q'PQ = 50°$ и, следовательно, $\angle QPA = 180° - 50° - 50° = 80°$.

Второе решение (см. рис. 64). Легко видеть, что угол $P = 80°$ в том и только в том случае, если $\triangle ABP \backsim \triangle PCQ$ (сплошными дугами на рисунке отмечены углы, величины которых прямо следуют из условий задачи). Докажем, что эти треугольники действительно подобны. Для этого ввиду равенства углов ABP и PCQ достаточно проверить, что

$$\frac{AB}{CQ} = \frac{PB}{CP}. \tag{1}$$

Положим $AB = l$; тогда из равнобедренного треугольника CQB имеем:

$$CQ = \frac{l}{2\cos 20°}.$$

С другой стороны, так как $PC = AC$, то

$$PC = 2l \sin 10°, \text{ а } BP = l - 2l \sin 10°.$$

Подставив эти выражения в (1), придем к равносильному равенству:

$$4 \sin 10° \cos 20° = 1 - 2 \sin 10°. \qquad (2)$$

Справедливость последнего легко обнаружить, заметив, что

$$\sin 10° \cos 20° = \frac{\sin(10° + 20°) + \sin(10° - 20°)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin 10°.$$

349. Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 65). На продолжении стороны AC отложим $AD = c$. Из равенства $a^2 = b^2 + bc$ следует:

$$\frac{a}{b} = \frac{b + c}{a}.$$

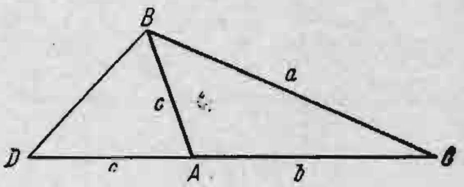


Рис. 65.

Это означает, что треугольники CAB и CBD подобны и $\angle A = \angle CBD$. Кроме того, $\angle B = \angle BDA = \angle DBA$. Следовательно, $\angle A = \angle B + \angle DBA = 2 \angle B$.

350. Пусть OC — медиана в $\triangle OAB_1$. Пусть точка D лежит на продолжении OC, причем $OC = CD$ (см. рис. 66). Покажем, что $\triangle AOD = \triangle OA_1B$. Действительно, $AO = OA_1$ по построению. Далее, AOB_1D — параллелограмм, в силу чего $AD = OB_1 = OB$. Наконец $\angle OAD = \angle A_1OB$, так как стороны этих углов взаимно перпендикулярны: $AO \perp OA_1$ и $OB_1 \perp OB$ по построению, а $AD \parallel OB_1$. Следовательно, $\triangle AOD = \triangle OA_1B$ и две из сторон одного из них перпендикулярны, соответственно, двум сторонам другого. Поэтому третьи стороны также перпендикулярны, т. е. $OD \perp A_1B$.

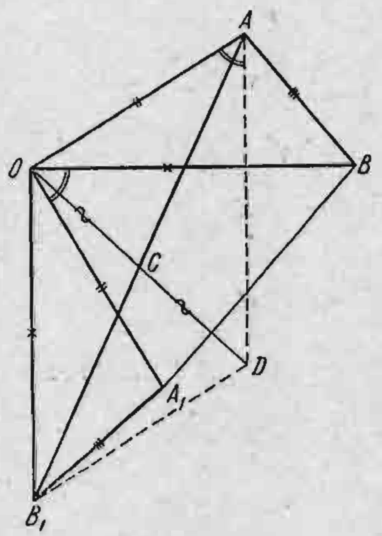


Рис. 66.

351. Пусть ABC — остроугольный треугольник и AD, BE, CF — его высоты, пересекающиеся в точке O (рис. 67). Каждый из четырехугольников $BDOF$, $CEOD$, $AFOE$ является вписанным в некоторую окружность. По теореме о произведении секущей на ее внешнюю часть имеем:

$$AD \cdot AO = AB \cdot AF = AC \cdot AE, \quad BE \cdot BO = BC \cdot BD = BA \cdot BF,$$
$$CF \cdot CO = CA \cdot CE = CB \cdot CD.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$2(AD\cdot AO+BE\cdot BO+CF\cdot CO)=$$
$$=AB\cdot AF+BC\cdot BD+CA\cdot CE+AC\cdot AE+BA\cdot BF+CB\cdot CD=$$
$$=AB(AF+BF)+BC(BD+CD)+CA(CE+AE)=$$
$$=(AB)^2+(BC)^2+(CA)^2,$$

что и требовалось доказать. В случае тупоугольного треугольника, произведение, соответствующее тупому углу, надо взять со знаком минус.

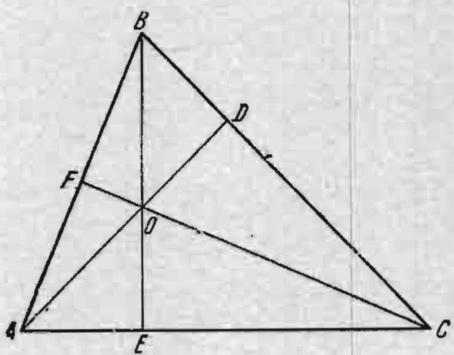


Рис. 67.

352. По условию $b-a=c-b$, или $a+c=2b$. Для вычисления произведения Rr воспользуемся выражениями для площади S треугольника через радиус описанного или вписанного круга и стороны. Известно, что $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, а по теореме синусов $\sin A=\frac{a}{2R}$, откуда

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

С другой стороны, $S=rp$, где p — полупериметр. Приравняв оба выражения, будем иметь:

$$rR=\frac{abc}{4p}. \qquad (1)$$

В условиях данной задачи

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}b.$$

Подставим это значение p в (1), получим:

$$6rR=ac.$$

353. Пусть z — длина биссектрисы, m, n — длины отрезков, на которые она делит основание треугольника (рис. 68). По теореме косинусов

$$a^2=z^2+m^2-2mz\cos\alpha,$$
$$b^2=z^2+n^2+2nz\cos\alpha.$$

Умножив первое из этих равенств на n, второе на m и сложив, получим:

$$na^2+mb^2=(m+n)(z^2+mn). \qquad (1)$$

В силу соотношения $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$ имеем:

$$na^2+mb^2=na\frac{mb}{n}+mb\frac{na}{m}=ab(m+n).$$

Подставив это выражение в (1), получим требуемое равенство

$$ab=z^2+mn.$$

В случае $a=b$, $m=n$ доказанное равенство выражает теорему Пифагора: $a^2=z^2+m^2$.

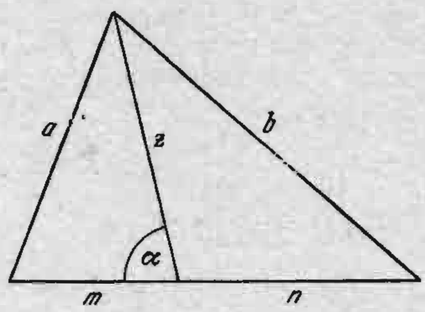


Рис. 68.

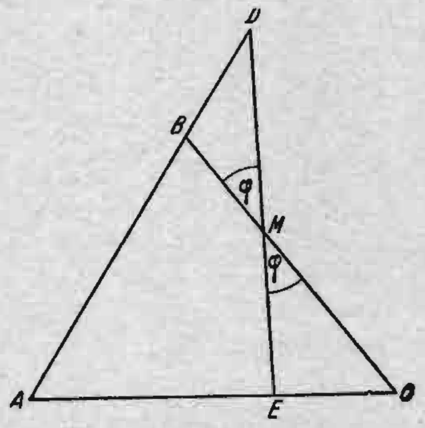


Рис. 69.

354. По условию $BD=EC$ (рис. 69). Если M — точка пересечения BC и DE, то из $\triangle BDM$ и $\triangle ECM$ имеем:

$$\frac{BD}{\sin\varphi}=\frac{DM}{\sin B}, \quad \frac{EC}{\sin\varphi}=\frac{ME}{\sin C},$$

откуда

$$\frac{DM}{ME}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

Но в $\triangle ABC$

$$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}.$$

Следовательно,

$$\frac{DM}{ME}=\frac{AC}{AB}.$$

355. Пусть BD, BE и BF суть соответственно высота, биссектриса и медиана в $\triangle ABC$. Предположим, что $AB<BC$. Тогда

$$\angle A>\angle C, \quad \angle CBD>\angle ABD,$$

откуда

$$\angle CBD>\frac{1}{2}(\angle ABD+\angle CBD)=\frac{1}{2}\angle B,$$

т. е. $\angle CBD>\angle CBE$. Значит, биссектриса BE проходит внутри $\angle CBD$ и точка E лежит между D и C.

Далее, $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}<1$, $AE<EC$, откуда

$$AE<\frac{1}{2}(AE+EC)=\frac{1}{2}AC,$$

т. е. $AE<AF$. Значит, точка F лежит между E и C. Таким образом, точка E лежит между D и F, что и требовалось доказать.

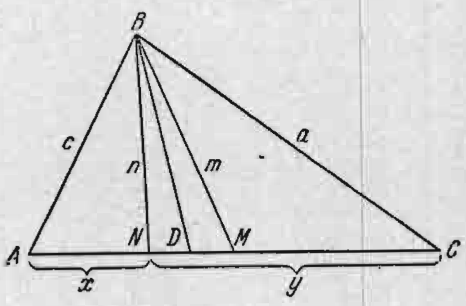


Рис. 70.

356. В треугольнике ABC пусть BD—биссектриса, BM—медиана и BN—прямая, симметричная с BM относительно BD (рис. 70). Если S_{ABN} и S_{MBC}—площади соответствующих треугольников, то

$$2S_{ABN}=xh_B=nc\sin\angle ABN,$$

$$2S_{MBC}=\frac{x+y}{2}h_B=$$
$$=ma\sin\angle MBC,$$

где h_B—высота, опущенная из вершины B на AC. Так как $\angle ABN=$ $=\angle MBC$, то отсюда

$$x=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{nc}{ma}. \qquad (1)$$

Аналогично

$$2S_{NBC}=yh_B=na\sin\angle NBC,$$

$$2S_{ABM}=\frac{x+y}{2}h_B=mc\sin\angle ABM.$$

Так как $\angle NBC=\angle ABM$, то отсюда

$$y=\frac{x+y}{2}\cdot\frac{na}{mc}.$$

Поделив почленно (1) и (2), получим:

$$\frac{x}{y}=\frac{c^2}{a^2},$$

что и требовалось доказать.

357. Прямые AP, BQ и CR разбивают треугольник ABC на шесть треугольников: $\triangle AOR$, $\triangle ROB$, $\triangle BOP$, $\triangle POC$, $\triangle COQ$, $\triangle QOA$ (рис. 71). Применяя теорему синусов к каждому из них, получаем:

$$\frac{AR}{\sin\varphi}=\frac{AO}{\sin\gamma}, \qquad \frac{AO}{\sin\beta}=\frac{AQ}{\sin\psi},$$

$$\frac{BO}{\sin\gamma}=\frac{BR}{\sin(\varphi+\psi)}, \qquad \frac{BP}{\sin\psi}=\frac{BO}{\sin\alpha},$$

$$\frac{CQ}{\sin(\varphi+\psi)}=\frac{CO}{\sin\beta}, \qquad \frac{CO}{\sin\alpha}=\frac{CP}{\sin\varphi}.$$

Перемножив почленно все эти равенства, находим:

$$AR \cdot BP \cdot CQ = BR \cdot AQ \cdot CP.$$

358. Пусть K и O — центры описанного и вписанного в $\triangle ABC$ кругов и D — середина дуги AC (см. рис. 72). Каждый из углов,

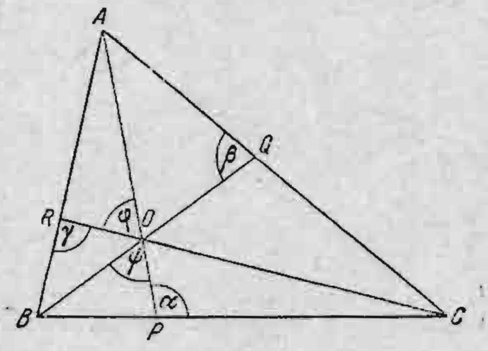


Рис. 71.

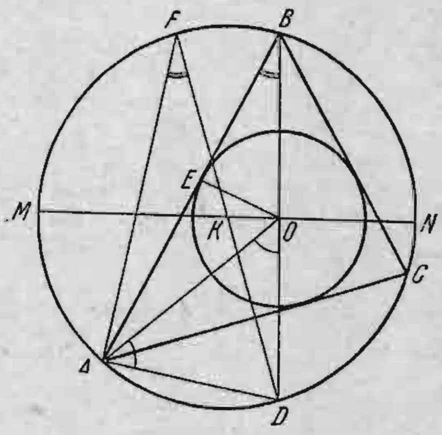


Рис. 72.

$\angle OAD$ и $\angle AOD$, равен половине суммы углов при вершинах A и B треугольника ABC. Отсюда следует, что $OD = AD$.

По теореме о хордах, пересекающихся внутри круга, имеем

$$MO \cdot ON = BO \cdot OD.$$

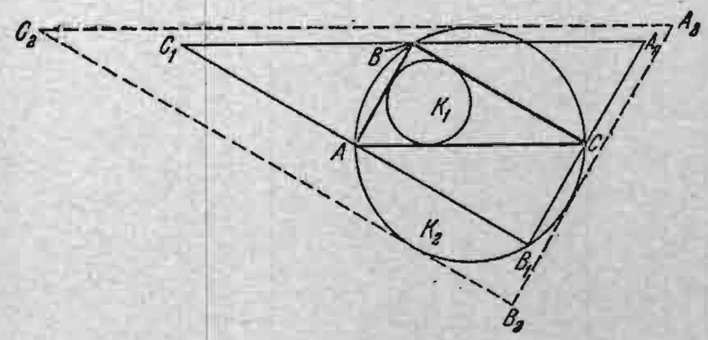
Далее, если $OE \perp AB$ и FD — диаметр, то треугольники BOE и FDA подобны, откуда $BO:OE = FD:AD$, так что $BO \cdot AD = OE \cdot FD$ или, так как $AD = OD$, $BO \cdot OD = OE \cdot FD$. Следовательно,

$$MO \cdot ON = OE \cdot FD.$$

Подставив в это равенство значения $MO = R + l$, $ON = R - l$, $OE = r$, $FD = 2R$, получим $R^2 - l^2 = 2Rr$, что и требовалось доказать.

359. Первое решение. Пусть ABC — данный треугольник, K_1 — вписанная окружность радиуса r и K_2 — описанная окружность радиуса R. Построим вспомогательный треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его стороны были параллельны сторонам $\triangle ABC$ и проходили через вершины $\triangle ABC$ (рис. 73). Проведем касательные к окружности K_2, параллельные сторонам $\triangle A_1B_1C_1$, руководствуясь следующим правилом: касательная A_2B_2, параллельная стороне A_1B_1, касается K_2 в точке, лежащей на той же дуге $\overset{\frown}{AB}$, на которой лежит вершина C и т. д. Отрезки проведенных касательных образуют $\triangle A_2B_2C_2$.

Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ лежит внутри $\triangle A_2B_2C_2$ и эти два треугольника подобны. Поэтому радиус R' окружности, вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$, не больше радиуса R окружности K_2, вписанной в $\triangle A_2B_2C_2$, т. е. $R' \leqslant R$; с другой стороны, отношение радиусов окружностей, вписанных в подобные треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC, равно отношению сходственных сторон этих треугольников, т. е. $\frac{A_1B_1}{AB}=2$. Таким



, 73.

образом, $R'=2r$. Сопоставляя это равенство с неравенством $R'\leqslant R$, окончательно получаем:

$$2r\leqslant R.$$

Второе решение. Пусть r, R — радиусы вписанной и описанной окружностей, S — площадь данного треугольника, p — полупериметр, a, b — стороны. Тогда

$$\frac{r}{R}=\frac{S}{pR}=\frac{1}{2}\,\frac{ab\sin C}{pR}=\frac{2R\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

Но

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+$$
$$+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Задача сводится к доказательству неравенства

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

(см. задачу 644).

Третье решение. Из формулы $l^2=R^2-2Rr$, доказанной в предыдущей задаче, следует, что $R^2-2Rr\geqslant 0$, откуда $R\geqslant 2r$.

360. Пусть a, b — длины катетов и c — длина гипотенузы. Сравнив два выражения для площади треугольника, получаем:

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\,r=\frac{1}{2}hc,$$

откуда

$$\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}. \tag{1}$$

Так как $a+b>c$, то

$$\frac{r}{h}<\frac{c}{c+c}=0,5.$$

Далее, неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ в силу соотношения $c^2=a^2+b^2$ равносильно неравенству $2c^2\geqslant(a+b)^2$, или $a+b\leqslant c\sqrt{2}$. Поэтому

$$\frac{r}{h}\geqslant\frac{c}{c\sqrt{2}+c}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0,4.$$

361. Пусть A, B, C — углы треугольника, a, b, c — противолежащие им стороны и $P=a+b+c$. Требуемое соотношение следует из равенств

$$ak_a+bk_b+ck_c=Pr, \tag{1}$$

$$(b+c)\,k_a+(c+a)\,k_b+(a+b)\,k_c=PR, \tag{2}$$

сложив которые, получим

$$k_a+k_b+k_c=r+R.$$

Равенство (1) верно в силу того, что его левая и правая части равны удвоенной площади треугольника. Для доказательства (2) заметим, что

$$k_a=R\cos A,\quad k_b=R\cos B,\quad k_c=R\cos C \tag{3}$$

и что

$$b\cos C+c\cos B=a,$$
$$c\cos A+a\cos C=b,$$
$$a\cos B+b\cos A=c,$$

откуда почленным сложением получим равенство

$$(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=P,$$

которое после умножения на R и использования (3) совпадает с (2).

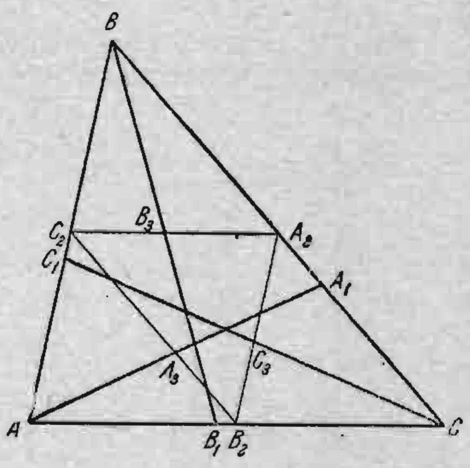


Рис. 74.

362. Пусть A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 — средние линии в $\triangle ABC$, A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 74). Точки A_3, B_3, C_3 лежат на средних линиях $\triangle ABC$ и притом не на концах этих линий, так как в противном случае по крайней мере одна из точек A_1, B_1, C_1 совпала бы с вершиной $\triangle ABC$. Так как всякая прямая, не проходящая через вершины треугольника $A_2B_2C_2$, не пересекает одновременно все три его стороны, то точки A_3, B_3, C_3 не лежат на одной прямой.

363. Если h_1 — высота $\triangle DON$, h_B — высота $\triangle ABC$, а S_{AOC} и S_{ABC} — площади соответствующих треугольников, то (рис. 75)

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{h_1}{h_B}=\frac{OD}{AB}=\frac{AF}{AB}$$

и аналогично

$$\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}, \quad \frac{S_{COB}}{S_{ABC}}=\frac{CN}{CA}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{CA}=\frac{S_{AOC}+S_{BOC}+S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

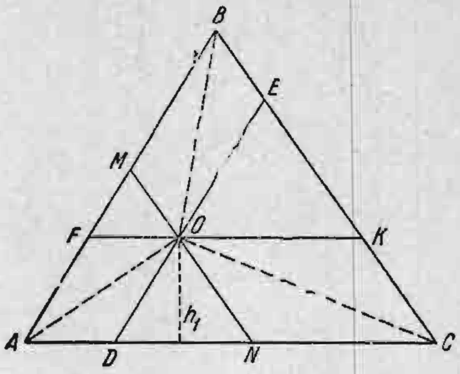


Рис. 75.

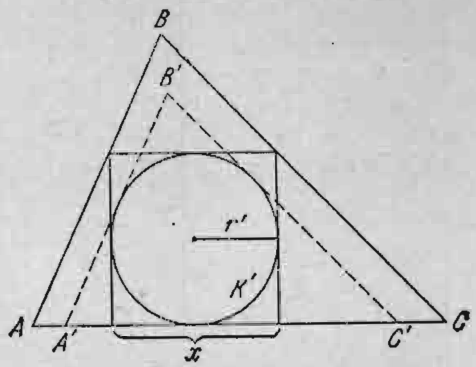


Рис. 76.

364. 1) Рассмотрим окружность K' радиуса r', вписанную в квадрат, и проведем к ней касательные $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ (рис. 76). Ясно, что $\triangle A'B'C'$ лежит внутри $\triangle ABC$, и поэтому $A'C' < AC$. Так как

$$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC,$$

то $\frac{r'}{r}=\frac{A'C'}{AC}<1$, откуда $x = 2r' < 2r$.

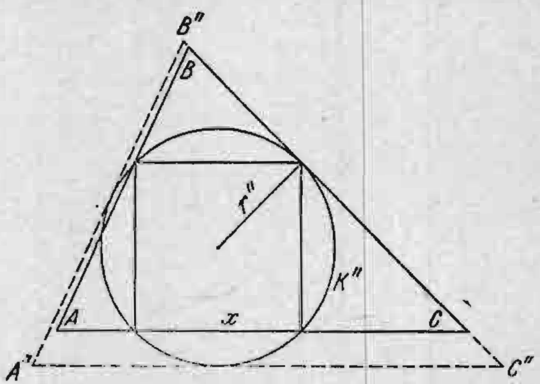


Рис. 77.

2) Рассмотрим окружность K'' радиуса r'', описанную около квадрата, и проведем к ней касательные $A''B'' \parallel AB$, $B''C'' \parallel BC$ и $A''C'' \parallel AC$ (рис. 77). Ясно, что $\triangle ABC$ лежит внутри $\triangle A''B''C''$ и поэтому $A''C'' > AC$. Так как

$$\triangle A''B''C'' \backsim \triangle ABC,$$

то $\frac{r'}{r}=\frac{A''C''}{AC}>1$, откуда

$$x=\sqrt{2}\,r' > \sqrt{2}\,r.$$

365. Пусть в $\triangle ABC$ точка M есть точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1; P — центр описанного круга радиуса R; C_2, A_2, B_2 — середины сторон AB, BC, AC; $OM = OP$; $ON \perp AC$; A_3, B_3, C_3 — середины AM, BM, CM (рис. 78). Докажем, что точка O находится на равном расстоянии от A_i, B_i, C_i, где $i = 1, 2, 3$. Так как ON — средняя линия в трапеции MB_1B_2P, то $OB_1 = OB_2$. Из подобия треугольников AMB и PA_2B_2 находим $BM = 2PB_2$, поэтому $B_3M = PB_2$. Из параллелограмма MB_3PB_2 имеем $OB_3 = OB_2$. Но

$$OB_3 = \frac{1}{2} BP = \frac{R}{2}$$

(как средняя линия в треугольнике PMB). Следовательно,

$$OB_3 = OB_2 = OB_1 = \frac{R}{2}.$$

Точно так же доказывается, что

$$OA_1 = OA_2 = OA_3 = OC_1 = OC_2 = OC_3 = \frac{R}{2}.$$

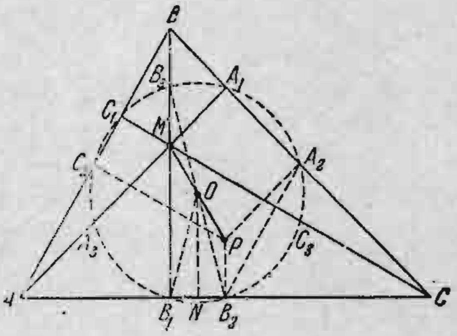


Рис. 78.

366. В $\triangle ABC$ пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты, пересекающиеся в точке O, $C_1M \parallel B_1N \perp BC$, $A_1P \parallel C_1Q \perp AC$, $B_1R \parallel A_1S \perp AB$ (рис. 79).

1) Докажем, что $SM \parallel AC$. Имеем $\triangle BA_1A \backsim BC_1C$ как прямоугольные треугольники с общим острым углом ABC. Поэтому

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}.$$

Следовательно, $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$ и $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. В $\triangle A_1BC_1$ отрезки A_1S и C_1M — высоты. Поэтому, повторив предыдущее рассуждение, покажем, что $\angle BSM = \angle BA_1C_1$. Следовательно, $\angle BSM = \angle BAC$ и $SM \parallel AC$. Аналогично доказывается, что $PN \parallel AB$ и $RQ \parallel BC$.

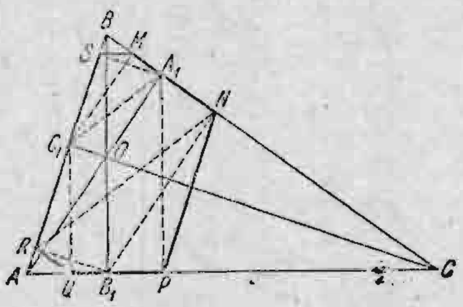


Рис. 79.

2) Для доказательства того, что вершины шестиугольника $MNPQRS$ лежат на одной окружности, достаточно доказать, что любые четыре его последовательные вершины лежат на одной окружности. Это следует из того, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести только одну окружность. Имеются четверки последовательных вершин рассматриваемого шестиугольника двух типов: такие, в которых средние точки лежат на разных сторонах $\triangle ABC$ ($RSMN$, $MNPQ$, $PQRS$), и такие, в которых средние точки лежат на одной стороне $\triangle ABC$ ($NPQR$, $QRSM$, $SMNP$).

Рассмотрим четверки $RSMN$ и $NPQR$ (разных типов). Из очевидной пропорциональности

$$\frac{BC_1}{BR}=\frac{BO}{BB_1}=\frac{BA_1}{BN}$$

следует, что $NR \parallel A_1C_1$. Поэтому

$$\angle MNR = \angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle BSM.$$

Значит, $\angle MNR + \angle MSR = \pi$ и точки R, S, M, N лежат на одной окружности. Далее,

$$\angle PNR + \angle PQR = \pi - (\angle PNC + \angle BNR) + \\ + \pi - \angle AQR = 2\pi - (\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB) = \pi,$$

откуда следует, что точки N, P, Q, R также лежат на одной окружности. Аналогично проводится доказательство для остальных четверок.

367. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанного круга со сторонами $\triangle ABC$, D — центр вписанного круга (рис. 80). Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то

$$CA_1 = CB_1, \quad BA_1 = BC_1, \quad AB_1 = AC_1.$$

Кроме того,

$$DB_1 = CA_1, \quad B_1C = A_1D.$$

Следовательно,

$$AC + BC = CA_1 + A_1B + CB_1 + B_1A = \\ = B_1D + A_1D + BC_1 + AC_1 = 2r + 2R,$$

где r — радиус вписанного, а R — радиус описанного круга.

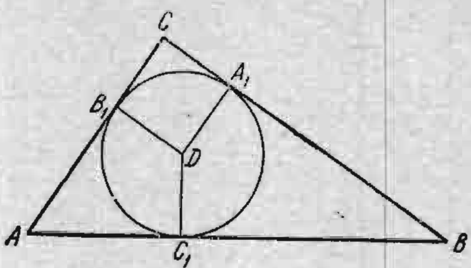


Рис. 80.

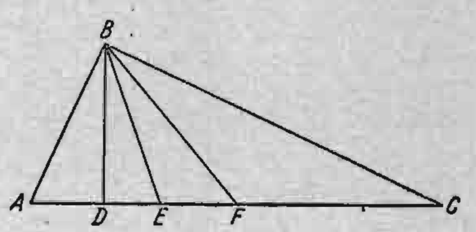


Рис. 81.

368. Пусть в $\triangle ABC$ угол ABC прямой, BD — высота, BE — биссектриса и BF — медиана (рис. 81). Так как $BF = FC$, то $\angle CBF = \angle ACB$. Но

$$\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \angle BAD = \angle ACB.$$

Следовательно, $\angle ABD = \angle CBF$ и

$$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \angle CBE - \angle CBF = \angle FBE,$$

что и требовалось доказать.

369. Симметрия в расположении ABC и $A_1B_1C_1$ относительно центра вписанного круга O означает, что соответствующие точки $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ лежат на одной прямой с O и находятся на равном расстоянии от O (рис. 82). В частности, $OC=OC_1$, $OB=OB_1$ и BCB_1C_1 — параллелограмм; значит, $BC=B_1C_1$. Аналогично $AC = A_1C_1$, $AB=A_1B_1$ и $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. Рассматривая параллелограммы ABA_1B_1, BDB_1D_1, ACA_1C_1 и ECE_1C_1, находим, что $AD = A_1D_1$, $AE=A_1E_1$, а так как $\angle A=\angle A_1$, то $\triangle ADE=\triangle A_1D_1E_1$. Аналогично $\triangle B_1EK_1=\triangle BE_1K$ и $\triangle DC_1K=\triangle D_1CK_1$.

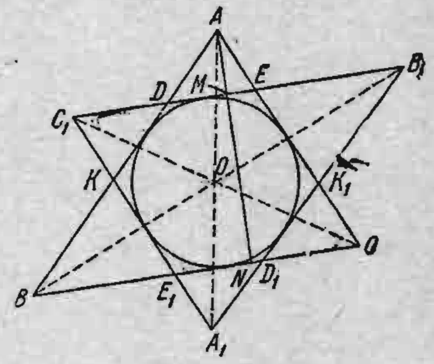


Рис. 82.

Введем обозначения:

S — площадь $\triangle ABC$,
S_1 — площадь $\triangle ADE$,
S_2 — площадь $\triangle DC_1K$,
S_3 — площадь $\triangle KBE_1$,

$$AB=c,\quad BC=a,\quad AC=b,$$

h_A, h_B, h_C — высоты, опущенные из вершин A, B, C. Тогда

$$S=pr=\frac{ah_A}{2}=\frac{bh_B}{2}=\frac{ch_C}{2}.$$

Пусть AM — высота в $\triangle ADE$, AN — высота в $\triangle ABC$; тогда

$$S_1=\frac{DE\cdot AM}{2}.$$

Из подобия треугольников ABC и ADE находим:

$$DE=\frac{a(h_A-2r)}{h_A}.$$

Следовательно,

$$S_1=\frac{a(h_A-2r)^2}{2h_A}=\frac{a\left(\frac{2pr}{a}-2r\right)^2}{2h_A}=\frac{r^2(p-a)^2}{S}.$$

Аналогично

$$S_2=\frac{r^2(p-c)^2}{S},\quad S_3=\frac{r^2(p-b)^2}{S}.$$

Используя формулу Герона, получаем:

$$S^2S_1^2S_2^2S_3^2=\frac{r^{12}(p-a)^4(p-b)^4(p-c)^4S^2}{S^6}=r^{12}\frac{S^4}{p^4}=r^{16}.$$

370. В обозначениях рис. 83 имеем:

$$MA^2=MO^2+AO^2-2MO\cdot AO\cos\alpha,$$
$$MC^2=MO^2+CO^2+2MO\cdot CO\cos\alpha.$$

Так как $AO=CO$, то, сложив эти равенства, получим:

$$MA^2+MC^2=2MO^2+2AO^2. \qquad (1)$$

Аналогично
$$MB^2+MD^2=2MO^2+2BO^2.$$
Следовательно, разность
$$(MA^2+MC^2)-(MB^2+MD^2)=2(AO^2-BO^2)$$
не зависит от положения точки M.

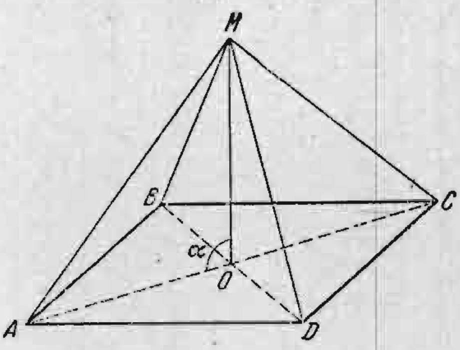


Рис. 83.

371. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и CC_1 (см. рис. 84). Задача будет решена, если будет доказано, что
$$\angle AOB+\angle AOB_1=180^\circ. \qquad (1)$$
Заметим, что $\triangle C_1BC=\triangle ABA_1$, так как $C_1B=AB$, $BC=BA_1$ и $\angle C_1BC=60^\circ+\angle ABC=\angle ABA_1$. Поэтому $\angle OC_1B=\angle OAB$ и четырехугольник OAC_1B вписан в некоторую окружность. Следовательно, $\angle AOB=120^\circ$. Аналогично покажем, что $\angle BOC=120^\circ$. Но тогда и $\angle AOC=120$, откуда следует, что четырехугольник $AOCB_1$ вписан в некоторую окружность. Но отсюда следует, что $\angle AOB_1=\angle ACB_1=60^\circ$. Поэтому (1) верно.

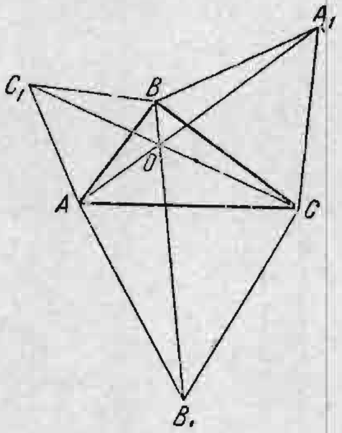


Рис. 84.

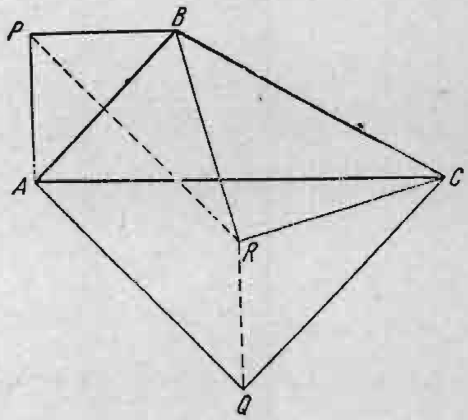


Рис. 85.

372. В обозначениях рис. 85 имеем:
$$\angle PBR=\angle ABC$$
и
$$\frac{PB}{AB}=\frac{BR}{BC}.$$
Поэтому $\triangle PBR \sim \triangle ABC$ и аналогично $\triangle QRC \sim \triangle ABC$. Пользуясь этим получим:
$$\angle APR=\angle APB-\angle BPR=\angle APB-\angle BAC,$$
поэтому
$$\angle APR+\angle PAQ=\angle APB+2\angle PAB=\pi,$$
так что $PR \parallel AQ$. Аналогично докажем, что $QR \parallel AP$.

373. Обозначим через h_B, h_C и h_D расстояния от вершин B, C и D параллелограмма до прямой AO (рис. 86). Тогда имеет место следующее свойство: наибольшее из этих трех расстояний равно сумме двух других. Например, если AO пересекает сторону BC (как на рис. 86), то, проведя $BE \parallel AO$ и $CE \perp AO$, из равенства треугольников BEC и $AD'D$ найдем:

$$h_D = h_B + h_C.$$

Аналогично, если AO пересекает сторону CD то $h_B = h_C + h_D$; если AO не пересекает сторон BC и CD, то $h_C = h_B + h_D$. Из этого свойства для случая, показанного на рис. 86, сразу следует равенство для площадей треугольников:

$$S_{AOC} = S_{AOD} - S_{AOB}.$$

Вообще, очевидно, можно написать формулу

$$S_{AOC} = |S_{AOD} \pm S_{AOB}|,$$

где берется знак плюс, если точки B и D лежат по одну сторону от AO, и знак минус, если точки B и D лежат по разные стороны от AO.

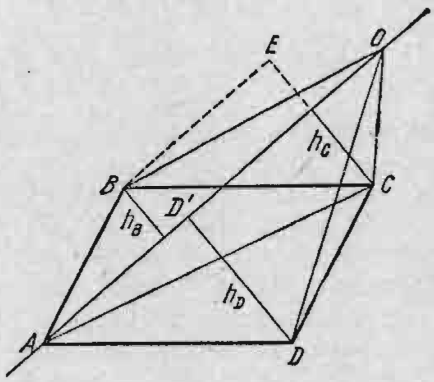


Рис. 86.

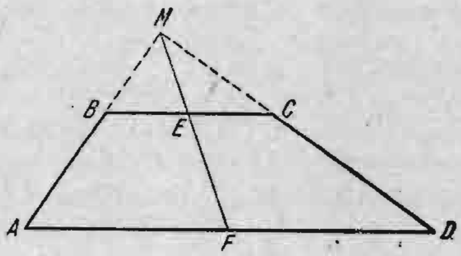


Рис. 87.

Повторение этого рассуждения для прямой CO вместо AO приводит к аналогичной формуле

$$S_{AOC} = |S_{COD} \pm S_{COB}|$$

с тем же правилом выбора знаков, но относительно прямой CO.

374. Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника AMD и соединим M с серединой F основания AD (рис. 87). Тогда

$$ME = \frac{BC}{2}, \quad MF = \frac{AD}{2}.$$

Следовательно,

$$EF = \frac{AD - BC}{2}.$$

375. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AD и BC и пусть $BE \perp AD$, $CF \perp AD$ (рис. 88). Имеем:

$$AC^2-AF^2=CD^2-FD^2,$$
$$BD^2-ED^2=AB^2-AE^2.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+AF^2-FD^2+ED^2-AE^2=$$
$$=AB^2+CD^2+AD\,(AF-FD+ED-AE)=$$
$$=AB^2+CD^2+AD\cdot 2EF=AB^2+CD^2+2AD\cdot BC.$$

376. Пусть дана трапеция $ABCD$ с параллельными основаниями AD и BC, E — середина BC, F — середина AD и O — точка

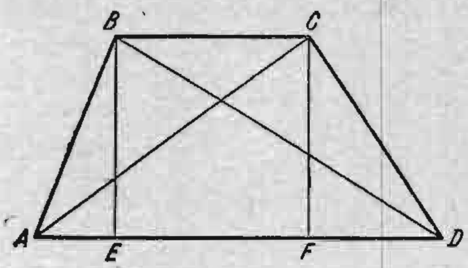


Рис. 88.

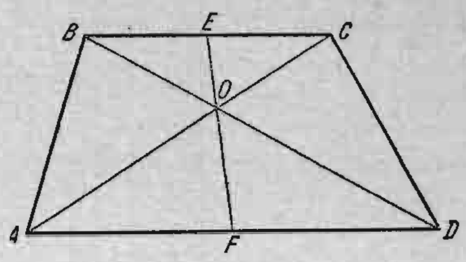


Рис. 89.

пересечения диагоналей (рис. 89). Треугольники AOF и COE подобны (это следует из подобия треугольников AOD и COB). Поэтому $\angle AOF=\angle COE$, т. е. EOF — прямая.

377. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник и точки M, N являются серединами сторон, соответственно, AB и CD (см. рис. 90). Повернем четырехугольник $AMND$ в плоскости рисунка вокруг вершины N на $180°$. Тогда вершина D совпадает с C, а вершины M,

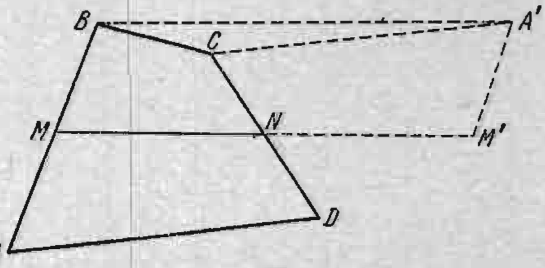


Рис. 90.

A займут положение M', A'. При этом точки M, N, M' расположатся на одной прямой и, кроме того, будет $M'A' \parallel MB$ и $M'A'=MB$. Поэтому $MBA'M'$ — параллелограмм и $A'B=M'M=2MN$. Так как, по условию $BC+AD=2MN$, то $BC+CA'=A'B$. Следовательно, точка C лежит на отрезке $A'B$: в противном случае в $\triangle BCA'$ мы имели бы $BC+CA'>A'B$. Отсюда следует, что $BC \parallel MN \parallel AD$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

378. Найдем выражение для площади четырехугольника через диагонали и угол между диагоналями. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ и $\angle BOA = \alpha$ (рис. 91). Тогда площадь данного четырехугольника равна

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{AOD} + S_{BOC} = \\ = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\alpha + \\ + \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} AO \cdot OD \sin\alpha = \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \sin\alpha.$$

Из этой формулы и следует справедливость доказываемого утверждения.

379. Пусть M — внутренняя точка выпуклого многоугольника, а AB — его сторона, наименее удаленная от M. Докажем, что основание перпендикуляра P, опущенного из M на AB, лежит на AB, а не на ее продолжении (рис. 92). Действительно, если P лежит вне AB, то MP пересечет некоторую сторону l многоугольника

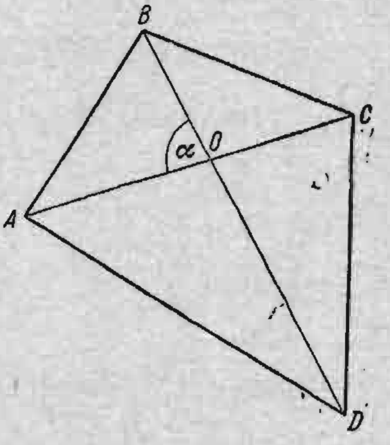


Рис. 91.

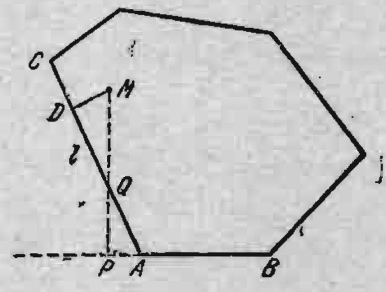


Рис. 92.

в точке Q, причем, в силу выпуклости многоугольника, $MQ < MP$. Но расстояние DM от M до l меньше MQ, а значит и меньше MP, что противоречит выбору стороны AB.

380. Пусть AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$, образующие в пересечении четырехугольник $PQRS$ (рис. 93). Очевидно, $BB_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 \parallel CC_1$. Кроме того,

$$\angle APB = \pi - (\angle BAP + \angle ABP) = \\ = \pi - \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \\ = \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi,$$

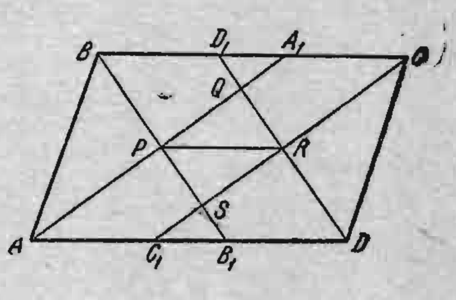


Рис. 93.

так что $PQRS$ — прямоугольник. Треугольники BAB_1 и CDC_1 — равнобедренные, так как в них биссектрисы перпендикулярны основаниям. Поэтому $BP = PB_1$, $D_1R = RD$ и, следовательно, $PR \parallel AD$.

Таким образом, $PRDB_1$ — параллелограмм и

$$PR = B_1D = AD - AB_1 = AD - AB.$$

381. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 94). Имеем:

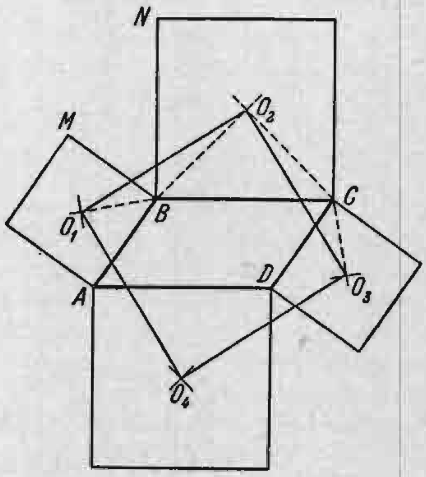


Рис. 94.

$$\triangle O_1BO_2 = \triangle O_3CO_2,$$

так как $O_1B = O_3C$, $BO_2 = CO_2$ и

$$\angle O_1BO_2 = \angle MBN + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \angle DCB + \frac{\pi}{2} = \angle O_3CO_2.$$

Следовательно, $O_1O_2 = O_3O_2$ и

$$\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2B + \angle BO_2C -$$

$$- \angle O_3O_2C = \angle BO_2C = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается, что $O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ и

$$\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.

382. Пусть AP, BQ, CR и DS — биссектрисы внутренних углов четырехугольника $ABCD$ (рис. 95). Пусть A, B, C, D — величины этих углов. Тогда

$$\angle ASD = \pi - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D,$$

$$\angle BQC = \pi - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C.$$

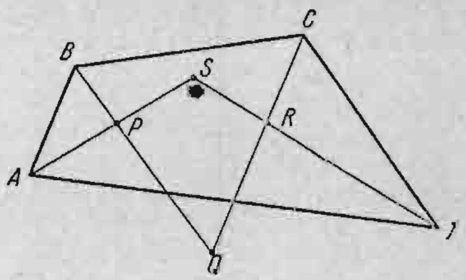


Рис. 95.

Сложив эти равенства, получим:

$$\angle ASD + \angle BQC = 2\pi - \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 2\pi - \frac{1}{2}2\pi = \pi.$$

Следовательно, точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

383. Пусть A и B — точки касания, M — произвольная точка окружности и $MN \perp AB$, $MD \perp AC$, $ME \perp BC$ (см. рис. 96). Докажем, что треугольники DMN и NME подобны. Для этого заметим, что вокруг четырехугольников $ADMN$ и $NMEB$ можно описать окружности, так как

$$\angle MNA + \angle ADM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

и

$$\angle MEB + \angle BNM = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Поэтому $\angle MND = \angle MAD$ и $\angle MEN = \angle MBN$. Но $\angle MAD = \angle MBN$, так как каждый из них измеряется половиной дуги AM. Итак, $\angle MND = \angle MEN$. Аналогично устанавливается равенство $\angle NDM = \angle ENM$.

Из подобия треугольников DMN и NME получаем

$$\frac{DM}{MN} = \frac{MN}{ME},$$

что и требовалось доказать.

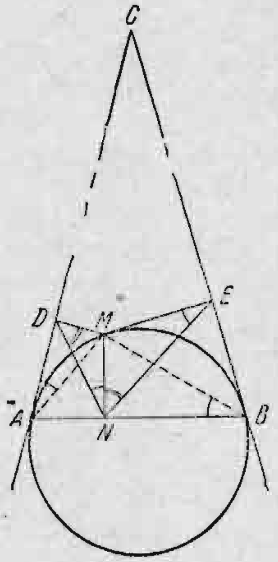


Рис. 96.

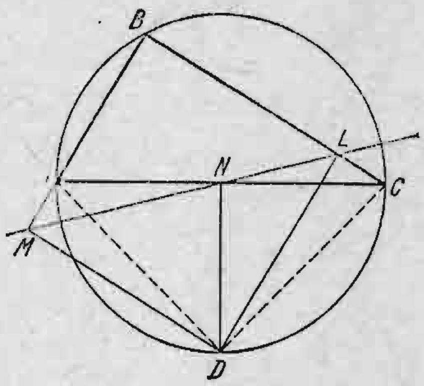


Рис. 97.

384. Пусть ABC — вписанный в окружность треугольник, D — точка окружности, L, M, N — основания перпендикуляров (рис. 97). Соединим точки M с N и N с L и докажем, что углы ANM и LNC равны.

Заметим для этого, что

$$\angle ANM = \angle ADM, \tag{1}$$

так как около четырехугольника $MAND$ можно описать окружность. По той же причине

$$\angle LNC = \angle LDC; \tag{2}$$

с другой стороны,

$$\angle ADC = \angle MDL. \tag{3}$$

Действительно, $\angle ADC + \angle B = 180°$, так как эти два угла в сумме опираются на полную окружность; в то же время $\angle MDL + \angle B = 180°$, так как около четырехугольника $MBLD$ можно описать окружность. Следовательно, равенство (3) справедливо. Из чертежа ясно, что в таком случае

$$\angle LDC = \angle ADM,$$

а тогда из (1) и (2) вытекает равенство

$$\angle ANM = \angle LNC,$$

которое и требовалось доказать.

385. Докажем, что каждые два из трех отрезков O_1A_1, O_2A_2 и O_3A_3 в точке их пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что все три указанные отрезка пересекаются в одной точке. Например, докажем, что отрезки O_1A_1 и O_2A_2 в точке их пересечения B делятся пополам (см. рис. 98). В силу равенства окружностей заключаем, что $O_2A_1O_3O$ — ромб и $O_1A_2O_3O$ — ромб. Отсюда вытекает, что отрезки O_2A_1, OO_3 и O_1A_2 параллельны и равны. Поэтому $O_1A_2A_1O_2$ — параллелограмм и его диагонали O_1A_1 и O_2A_2 в точке пересечения B делятся пополам.

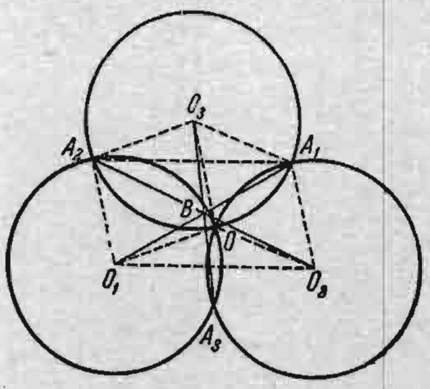


Рис. 98.

386. Пусть O — центр меньшей окружности (рис. 99). Тогда $AK \parallel OC$, так как $AK \perp BK$ и $OC \perp BK$. Кроме того, $OA = OC$. Следовательно,

$$\angle KAC = \angle ACO = \angle CAO.$$

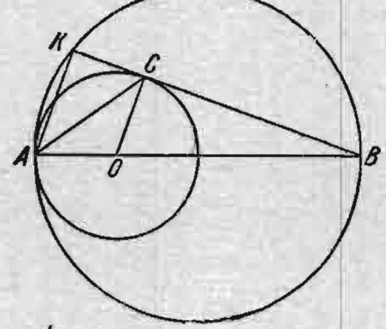


Рис. 99.

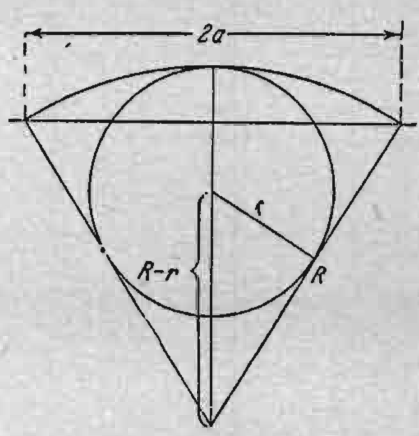


Рис. 100.

387. Из рассмотрения рис. 100 ясно, что

$$\frac{R-r}{r} = \frac{R}{a},$$

а это равносильно равенству

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

388. Возможны три случая. Они изображены на рис. 101, *а*, *б*, *в*. В первом случае неподвижные касательные параллельны, угол $COD = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, поэтому $CE \cdot ED = OE^2$, т. е. $AC \cdot BD = r^2$, где r — радиус окружности. Во втором и третьем случаях, пользуясь обозначениями, легко понятными из рисунка, находим, что $\alpha + \beta \pm \pm \gamma = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha \pm \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$, откуда следует, что $\triangle AOC$

подобен $\triangle BDO$ и потому

$$\frac{AC}{AO}=\frac{OB}{BD}.$$

Следовательно,

$$AC\cdot BD=AO^2=r^2.$$

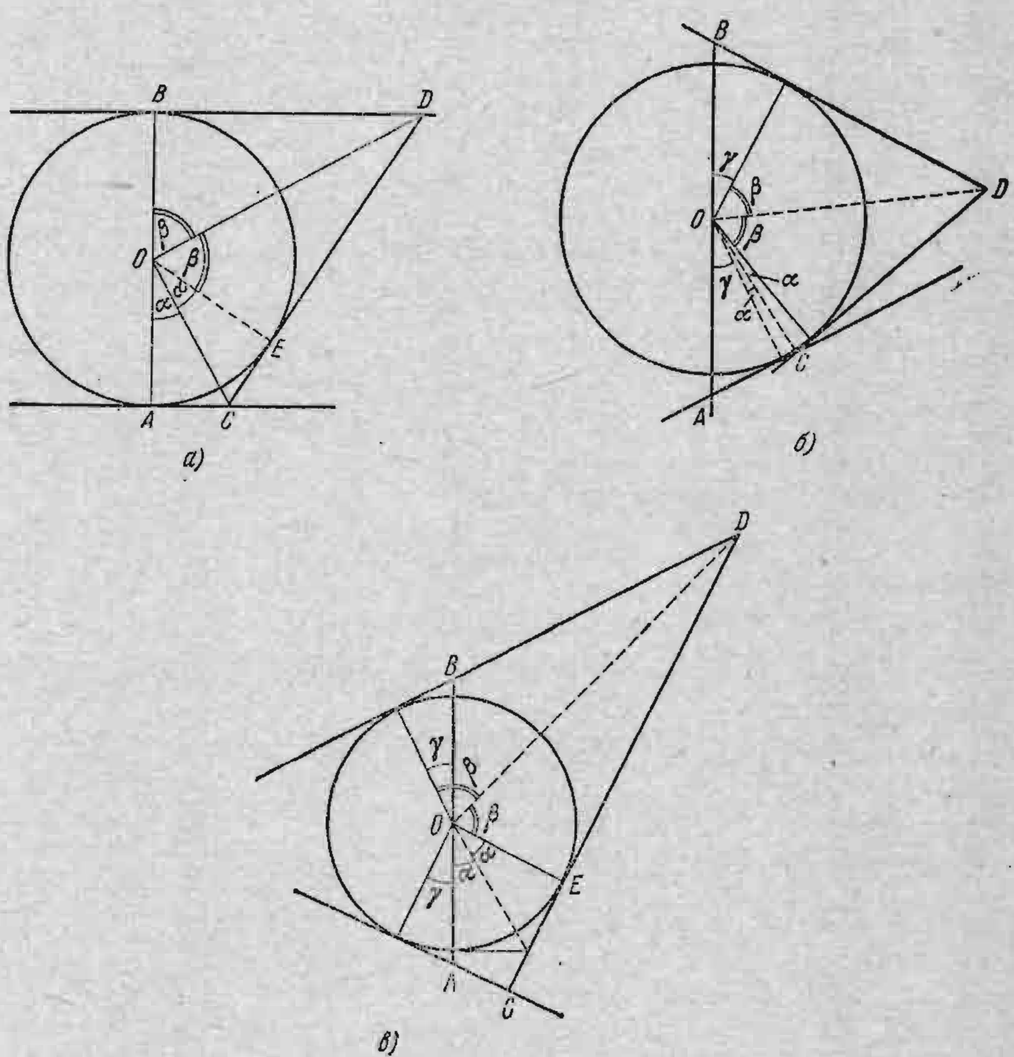


Рис. 101.

389. Пусть M — точка пересечения взаимно перпендикулярных хорд AB и CD (рис. 102). Проведем $AK \parallel CD$, тогда BK — диаметр, $AK < CD$ и

$$BK^2=AB^2+AK^2 < AB^2+CD^2.$$

Далее, $KD=AC$, так что

$$KB^2=BD^2+KD^2=BM^2+DM^2+AM^2+CM^2.$$

390. Пусть $AC=CD=DB$ (рис. 103). Проведем $OE \perp AB$. Тогда OE — высота, а OC — медиана в $\triangle AOD$. Так как биссектриса $\angle AOD$ лежит между медианой и высотой (см. задачу 355), то

$$\angle AOC < \angle COD.$$

391. Пусть AB — диаметр круга и E — точка пересечения хорд AD и BC (рис. 104). Имеем:

$$AE \cdot AD = AE^2 + AE \cdot ED = AC^2 + EC^2 + AE \cdot ED.$$

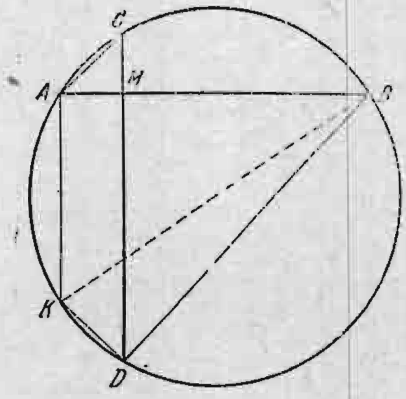


Рис. 102.

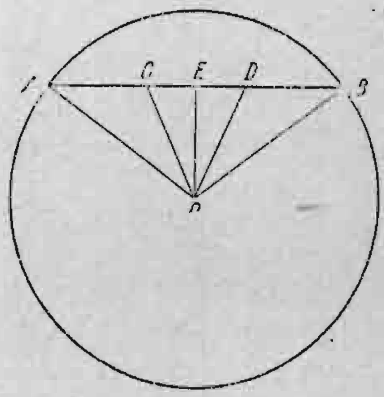


Рис. 103.

По свойству пересекающихся хорд

$$AE \cdot ED = BE \cdot EC.$$

Поэтому

$$AE \cdot AD = AC^2 + EC^2 + BE \cdot EC = AC^2 + EC \cdot BC =$$
$$= AC^2 + (BC - BE)\,BC = AC^2 + BC^2 - BE \cdot BC,$$

или окончательно

$$AE \cdot AD + BE \cdot BC = AB^2.$$

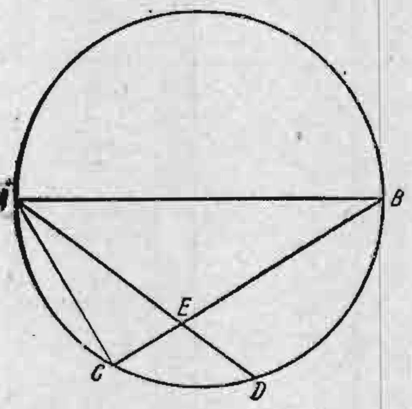


Рис. 104.

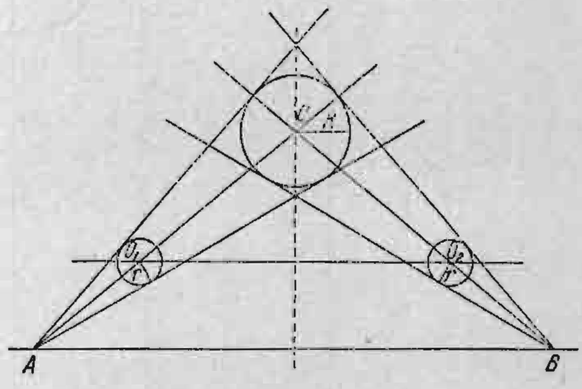


Рис. 105.

392. Пусть A, B — данные точки, O — центр данной окружности, R — радиус данной окружности и r — радиус равных вписанных окружностей с центрами O_1 и O_2 (рис 105). Тогда

$$\frac{R}{r} = \frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_2B}.$$

Взяв производную пропорцию, получим:

$$\frac{OA}{OO_1}=\frac{OB}{OO_2}.$$

Следовательно, $O_1O_2 \parallel AB$.

393. Пусть r_1 и r_2 — радиусы полуокружностей, вписанных в данную полуокружность радиуса R (рис. 106). Так как $R=r_1+r_2$, то заштрихованная площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2-\frac{1}{2}\pi r_2^2=\frac{1}{2}\pi\left[(r_1+r_2)^2-r_1^2-r_2^2\right]=\pi r_1 r_2.$$

Но

$$h^2=2r_1\cdot 2r_2=4r_1r_2.$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{4}\pi h^2.$$

394. Если прямая, соединяющая точки A и B, *не пересекает* данной окружности, то касательные AC и BD можно провести так,

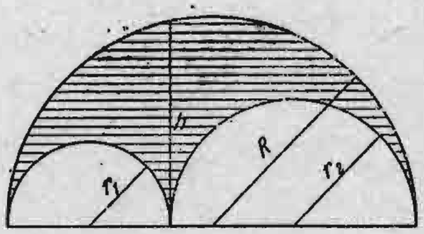


Рис. 106.

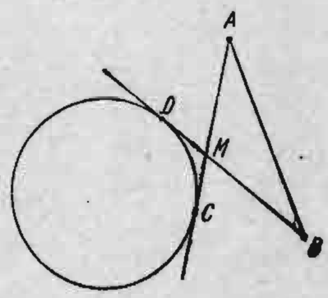


Рис. 107.

что точка их пересечения M будет лежать на отрезках AC и BD (рис. 107). В $\triangle AMB$ имеем:

$$AM+BM > AB > |AM-BM|,$$

и так как

$$AC > AM,\ BD > BM,\ MC=MD,$$

то

$$AC+BD > AB > |AC-BD|.$$

Если прямая AB *пересекает* окружность, то возможны два случая: а) хорда, отсекаемая окружностью на прямой AB, лежит на отрезке AB; б) эта хорда лежит вне отрезка AB.

В случае а) (рис 108) имеем:

$$AB > AE+BF > AC+BD,$$

так как гипотенузы AE, BF в прямоугольных треугольниках AEC и BFD больше катетов AC и BD.

В случае б) отрезок AB лежит внутри угла CAC' (рис. 109). Проведем через B окружность, концентрическую с данной. Пусть

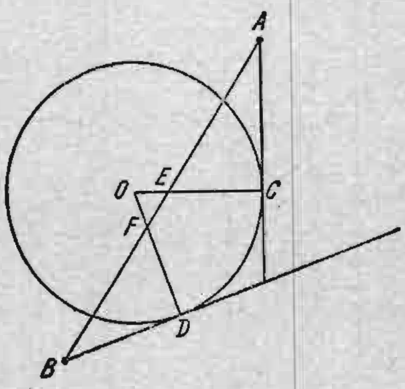


Рис. 108.

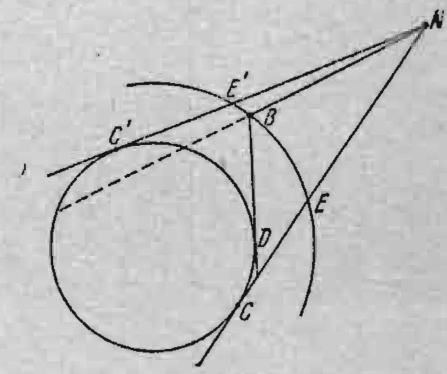


Рис. 109.

она пересечет AC и AC' в точках E и E'. Тогда $EC=BD$ и $AE > AB$. Следовательно,

$$AB < AE = AC - EC = AC - BD.$$

395. Введем обозначения (рис. 110):

$$\angle PCM = \angle QCN = \alpha, \quad \angle NML = \angle NKL = \gamma,$$
$$\angle LCP = \angle QCK = \beta,$$
$$QC = x, \quad PC = y, \quad AC = CB = a.$$

По теореме об отрезках пересекающихся хорд окружности

$$NQ \cdot QK = AQ \cdot QB = a^2 - x^2.$$

Применяя теорему синусов к треугольникам NQC и QCK, получаем:

$$NQ = \frac{x \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad QK = \frac{x \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Следовательно,

$$NQ \cdot QK = \frac{x^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)} = a^2 - x^2,$$

откуда

$$x^2 = \frac{a^2 \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\beta + \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Аналогично вычисляется

$$y^2 = \frac{a^2 \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \sin\beta + \sin\gamma \sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Таким образом, $x = y$.

396. Пусть B_1, B_2, B_3, B_4 — середины дуг A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 (рис. 111). Пусть α_i — центральный угол, соответствующий

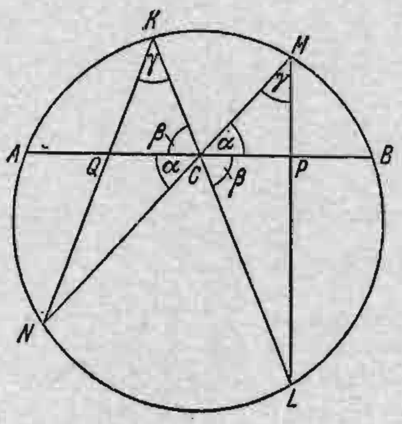


Рис. 110.

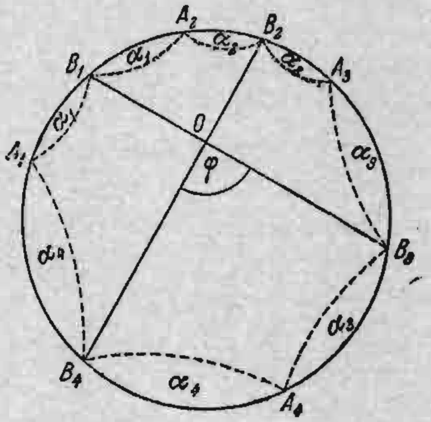


Рис. 111.

дуге A_iB_i ($i=1$, 2, 3, 4). Обозначим через φ угол, образованный отрезками B_1B_3 и B_2B_4. Тогда

$$\varphi=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2},$$

а так как

$$2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4=2\pi,$$

то $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

397. Выберем точки A и B на ломаной так, чтобы они делили периметр на две равные части. Пусть O — середина отрезка AB, проведем окружность с центром в O радиуса $\frac{p}{4}$, где p — периметр всей ломаной. Докажем, что эта окружность искомая. Допустим противное, т. е. что существует точка M ломаной, лежащая вне построенного круга. Длина той части ломаной, которая содержит M, не меньше, чем $AM+BM$, т. е. $AM+BM\leqslant\frac{p}{2}$. Но

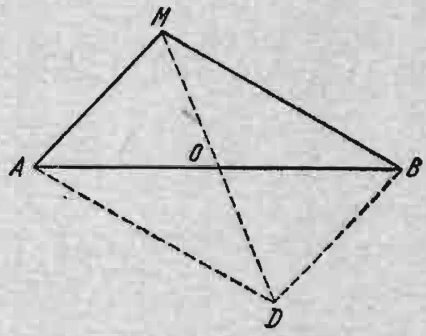


Рис. 112.

$$AM+BM\geqslant 2MO.$$

Действительно, из параллелограмма $AMBD$ (рис. 112) имеем:

$$DM=2MO<BM+BD=AM+BM.$$

Так как $MO>\frac{p}{4}$, то из неравенства $AM+BM\geqslant 2MO$ следует, что $AM+BM>\frac{p}{2}$. Получаем противоречие.

398. Проведем через вершину A данного $\triangle ABC$ прямую AD, параллельную одной из данных прямых x и y и не пересекающую треугольник, и опустим из точек B и C перпендикуляры BP и CQ на AD (рис. 113). Предположим, что расстояния вершин треугольника ABC от прямых x и y выражаются целыми числами. Тогда длины отрезков AP, AQ, BP, CQ также будут выражаться целыми числами. В силу этого

$$\operatorname{tg} \angle BAP = \frac{BP}{AP} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \angle CAQ = \frac{CQ}{AQ}$$

будут числами рациональными, а значит, будет рациональным и число

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\operatorname{tg} \angle BAP - \operatorname{tg} \angle CAQ}{1 + \operatorname{tg} \angle BAP \operatorname{tg} \angle CAQ} = \frac{\frac{BP}{AP} - \frac{CQ}{AQ}}{1 + \frac{BP}{AP}\frac{CQ}{AQ}}.$$

Поэтому невозможно, чтобы $\angle BAC = 60°$, так как $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ есть число иррациональное. Следовательно, $\triangle ABC$ не может быть правильным.

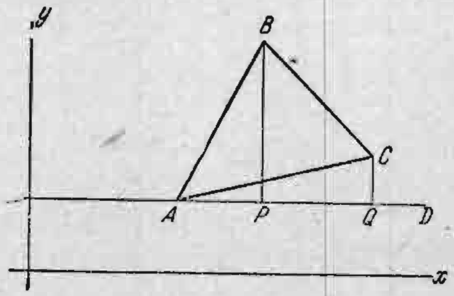


Рис. 113.

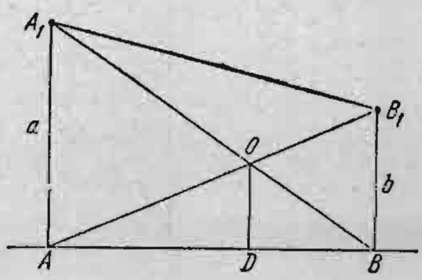


Рис. 114.

399. Пусть прямые A_1B и AB_1 пересекаются в точке O и $OD \perp AB$ (рис. 114). Так как $\triangle ABA_1 \backsim \triangle DBO$ и $\triangle BAB_1 \backsim \triangle DAO$, то

$$\frac{OD}{a} = \frac{BD}{AB}, \quad \frac{OD}{b} = \frac{AD}{AB}.$$

Отсюда

$$OD\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{AD + BD}{AB} = 1.$$

Следовательно, расстояние

$$OD = \frac{ab}{a+b}$$

не зависит от положения точек A и B (при сохранении величин a и b).

400. Если K — точка касания отрезка MN с окружностью (рис. 115), то $BM = MK$, $KN = NC$, откуда

$$MN = BM + CN. \tag{1}$$

Но $MN < AM + AN$. Поэтому

$$2MN < BM + AM + CN + AN = AB + AC,$$

откуда

$$MN < \frac{AB + AC}{2}.$$

С другой стороны, $MN > AN$ и $MN > AM$, так как MN — гипотенуза в треугольнике AMN. Поэтому $2MN > AN + AM$ и, в силу (1), $3MN > AN + NC + AM + MB = AB + AC$.

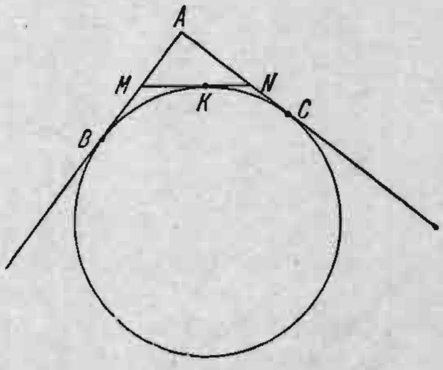


Рис. 115.

Следовательно,

$$MN > \frac{AB + AC}{3}.$$

401. Пусть ABC — данный треугольник, $AB = BC$, $BO \parallel AC$, O — центр окружности, касающейся AC; D и E — точки пересечения этой окружности с AB и BC (рис. 116). Продолжим AB до второго пересечения с окружностью в точке F. Докажем, что $FE \perp BO$. Заметим, что $\angle OBF = \angle OBE$, так как эти углы равны углам при основании AC в треугольнике ABC. Далее $BF = BE$; действительно, если бы было $BF > BE$, то, отложив на BF отрезок $BE' = BE$, мы имели бы равные треугольники OBE и OBE' и $OE' = OE$, что невозможно, так как точка E' лежит внутри окружности радиуса OE; аналогично докажем, что невозможно неравенство $BF < BE$. Но биссектриса BO в равнобедренном треугольнике FBE должна быть и высотой, что и требовалось доказать.

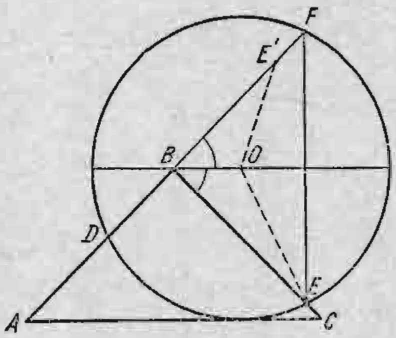


Рис. 116.

Поэтому $\angle DFE = \frac{1}{2} \angle ABC$ не зависит от положения точки O на прямой BO. Следовательно, величина дуги DE, половиной которой измеряется $\angle DFE$, остается при качении окружности постоянной.

402. Пользуясь обозначениями, введенными при решении задачи 324, находим:

$$n^2 = \frac{ab + cd}{bc + ad}(ac + bd), \qquad m^2 = \frac{bc + ad}{ab + cd}(ac + bd).$$

Разделив почленно эти равенства, получаем:

$$\frac{n}{m} = \frac{ab + cd}{bc + ad}$$

403. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной a и r_1, r_2, r_3 — расстояния от точки M описанной окружности до вершин треугольника (рис. 117). Сначала заметим, что при указанном на рис. 117 положении точки M будет

$$r_1 = r_2 + r_3.$$

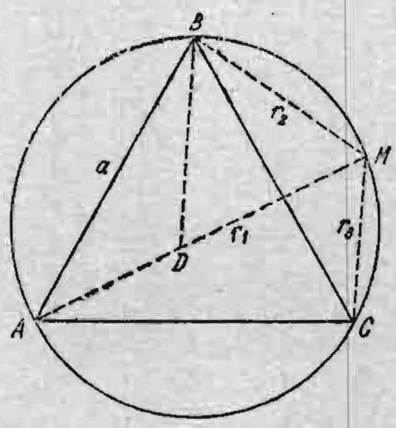


Рис. 117.

Действительно, если отложить $DM = r_2$, то получится равносторонний треугольник BMD. Отсюда следует, что $\angle ABD = \angle CBM$, в силу чего $\triangle ABD = \triangle CBM$, так что $AD = r_3$. Применив к $\triangle BMC$ теорему косинусов, получим:

$$a^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2r_3 \cos 120° = r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3.$$

Следовательно,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_2 + r_3)^2 + r_2^2 + r_3^2 = 2(r_2^2 + r_3^2 + r_2r_3) = 2a^2.$$

404. Пусть сторона AB четырехугольника $ABCD$ пересекает окружность, а стороны BC, CD, DA касаются ее в точках E, F, G (рис. 118). Так как $CE = CF$ и $DF = DG$, то неравенство

$$AB + CD > BC + DA$$

равносильно неравенству

$$AE > BE + AG,$$

а это неравенство доказано в решении задачи 394.

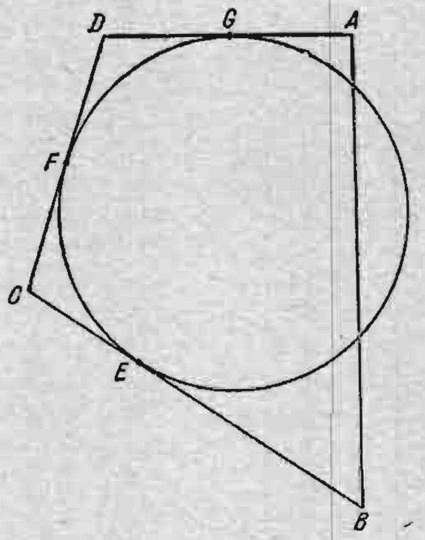


Рис. 118.

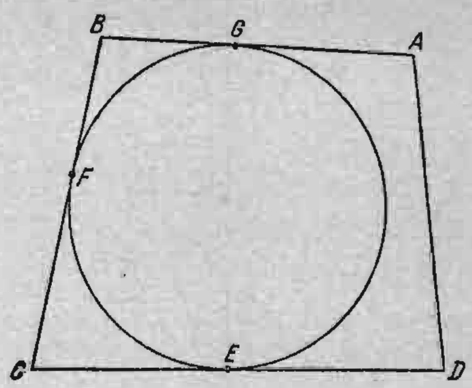


Рис. 119.

405. Пусть сторона AD четырехугольника $ABCD$ не пересекает окружности, а стороны BC, CD, BA касаются ее в точках F, E, G (рис. 119). Неравенство

$$AD + CB < DC + BA$$

равносильно неравенству

$$AD < DE + AG,$$

которое доказано в решении задачи 394.

406. Пусть R — радиус данных полуокружностей. Если $r_1, r_2, \dots, r_n$ — радиусы вписываемых кругов, $d_1, d_2, \dots, d_n$ — их диаметры

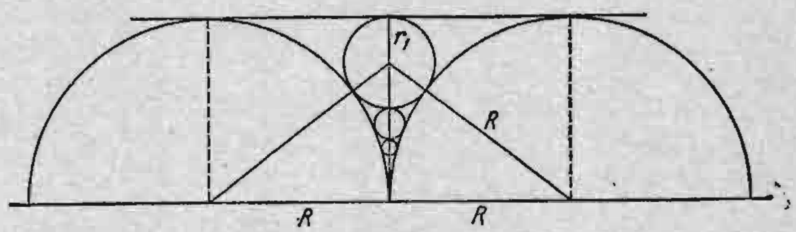


Рис. 120.

(рис. 120), то ясно, что при безграничном возрастании n сумма $d_1+d_2+\dots+d_n$ стремится к R, т. е

$$d_1+d_2+\dots+d_n+\dots=R. \qquad (1)$$

Кроме того, имеем:

$$(R+r_1)^2=R^2+(R-r_1)^2, \qquad 2r_1=d_1=\frac{R}{1\cdot 2};$$

$$(R+r_2)^2=R^2+(R-d_1-r_2)^2, \quad 2r_2=d_2=\frac{R}{2\cdot 3}.$$

Пусть $d_n=\frac{R}{n(n+1)}$. Докажем, что $d_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}$.

Имеем:

$$(R+r_{n+1})^2=R^2+(R-d_1-d_2-\dots-d_n-r_{n+1})^2. \qquad (2)$$

Но

$$d_1+d_2+\dots+d_n=R\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=$$

$$=R\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=R\frac{n}{n+1}.$$

Подставив это выражение в (2), найдем:

$$d_{n+1}=2r_{n+1}=\frac{R}{(n+1)(n+2)}.$$

Положив в равенстве (1) $R=1$, получим:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=1.$$

407. Пусть O — центр биллиарда, B — первая точка отражения и C — вторая точка отражения. Докажем, что если $\angle ABC\neq 0$, то $\triangle ABC$ равнобедренный (рис. 121). Действительно, $\triangle BOC$ равнобедренный, значит, $\angle OBC=\angle OCB$. По закону отражения (угол падения равен углу отражения) $\angle OBC=\angle OBA$ и $\angle OCB=\angle OCA$. Поэтому $\angle ABC=\angle ACB$. Следовательно, центр O лежит на

высоте AD, проведенной к стороне BC. Положение точки B, в которую надо направить шарик, чтобы после отражения в B и C он прошел через точку A, можно фиксировать заданием угла $\angle BOD = \alpha$. Имеем:

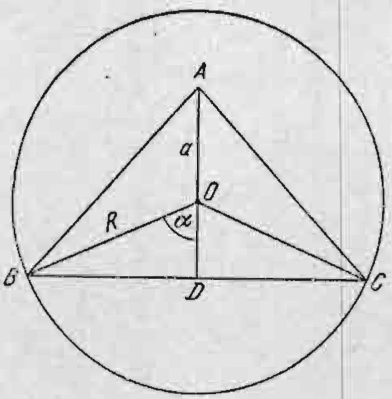


Рис. 121

$$OD = R\cos\alpha, \quad BD = R\sin\alpha,$$

$$BA = \frac{BD}{\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = -\frac{BD}{\cos 2\alpha}.$$

Так как BO — биссектриса угла B в $\triangle ABD$, то

$$\frac{BD}{BA} = \frac{OD}{OA}$$

или

$$-\cos 2\alpha = \frac{R\cos\alpha}{a},$$

откуда для $\cos\alpha$ получаем уравнение

$$\cos^2\alpha + \frac{R}{2a}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0.$$

Решив его, найдем:

$$\cos\alpha = -\frac{R}{4a} + \sqrt{\left(\frac{R}{4a}\right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

Второй корень отброшен, так как в силу $R > a$ он дает значение $\cos\alpha < -1$.

Если мы теперь предположим, что $\angle ABC = 0$, то получим второе решение задачи: точки B и C находятся на концах диаметра, проходящего через точку A.

408. Пусть S — вершина данного угла α, A_1 — точка первой встречи луча с зеркалом, SB_1 — та сторона угла, на которой лежит точка A_1, и SB_0 — другая его сторона. Последующие точки встречи луча со сторонами угла обозначим через A_2, A_3, ..., так что путь луча внутри угла будет иметь вид ломаной $AA_1A_2A_3\ldots$ (рис. 122).

В направлении вращения от SB_0 к SB_1 построим последовательно углы B_1SB_2, B_2SB_3, ..., равные углу $\alpha = \angle B_0SB_1$. На стороне SB_m $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ отложим отрезок $SA'_m = SA_m$ (точки A'_1 и A_1 совпадают) и докажем, что точки A'_1, A'_2, ... лежат на одной прямой. Для этого достаточно доказать, что каждые три последовательные точки A'_m, A'_{m+1}, A'_{m+2} лежат на одной прямой (мы полагаем здесь $m = 0, 1, 2, \ldots$). Для этого заметим, что $\triangle A'_mSA'_{m+1} = \triangle A_mSA_{m+1}$, в силу чего

$$\angle A'_m A'_{m+1} S = \angle A_m A_{m+1} S.$$

Аналогично $\triangle A'_{m+1}SA'_{m+2} = \triangle A_{m+1}SA_{m+2}$ и, значит,

$$\angle SA'_{m+1}A'_{m+2} = \angle SA_{m+1}A_{m+2}.$$

Но по закону отражения (угол падения равен углу отражения)

$$\angle SA_{m+1}A_{m+2} = \angle A_mA_{m+1}B.$$

Следовательно,

$$\angle A_m A_{m+1} S + \angle S A'_{m+1} A'_{m+2} = \angle A_m A_{m+1} S + \angle A_m A_{m+1} B = \pi.$$

Таким образом, путь луча — ломаная $AA_1A_2\ldots$ — оказался развернутым в прямую $l(AA'_1A'_2\ldots)$. Так как эта прямая может пересечь лишь конечное число сторон SB_m, то, следовательно, число отражений луча конечно.

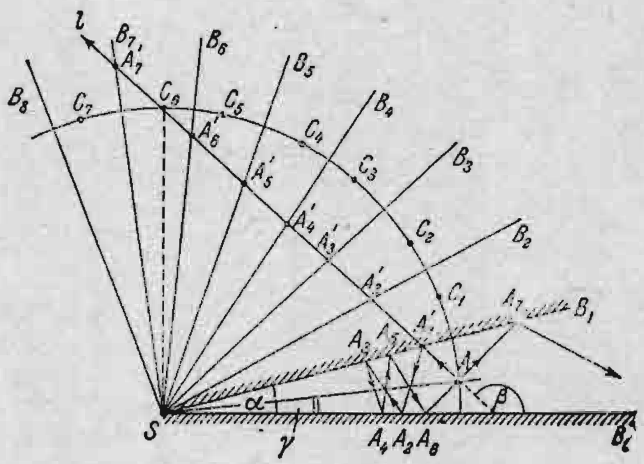


Рис. 122.

Ясно, что если SB_n — последняя из сторон, которую пересекает прямая l, то $n\alpha < \beta$, а $(n+1)\alpha \geqslant \beta$. Таким образом, число отражений равно такому целому числу n, которое удовлетворяет неравенствам

$$n < \frac{\beta}{\alpha} \leqslant n+1.$$

Для того чтобы выяснить условия, при которых луч после некоторого числа отражений снова пройдет через точку A, построим ряд точек $C_1, C_2, \ldots$ так, чтобы точка C_1 была симметрична точке A относительно SB_1, точка C_2 симметрична точке C_1 относительно SB_2 и т. д., вообще, чтобы точка C_m была симметрична точке C_{m-1} относительно SB_m. Ясно, что прохождение луча снова через точку A равносильно прохождению прямой l через одну из точек $C_m (m = 1, 2, \ldots)$.

Для аналитической формулировки этого условия введем угол $\gamma = \angle ASB_0$ и будем различать два случая:

а) точка C_k, через которую проходит прямая l, такова, что k — четное число;

б) точка C_k такова, что k — нечетное число.

В случае а) (этот случай изображен на рис. 122, где $k=6$) $\angle ASC_k = k\alpha$. Так как $\triangle ASC_k$ равнобедренный, то

$$\angle SAC_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\alpha}{2}.$$

С другой стороны, тот же угол равен $\gamma+\pi-\beta$, следовательно,

$$\frac{\pi}{2}-\frac{k\alpha}{2}=\gamma+\pi-\beta,$$

откуда

$$k=\frac{2\beta-2\gamma-\pi}{\alpha}. \qquad (1)$$

В случае б) будем иметь

$$\angle ASC_k=(k+1)\alpha-2\gamma$$

и, как и выше, придем к соотношению

$$\frac{\pi}{2}-\frac{(k+1)\alpha-2\gamma}{2}=\gamma+\pi-\beta,$$

откуда

$$k+1=\frac{2\beta-\pi}{\alpha}. \qquad (2)$$

Проведя рассуждение в обратном порядке, легко убедиться в том, что выполнение одного из соотношений (1) или (2) при целом значении k влечет прохождение прямой l через точку C_k. Следовательно, луч снова пройдет через точку A тогда и только тогда, когда одно из чисел (1) или (2) будет целым четным числом

4. Геометрические места точек

409. Искомое геометрическое место состоит из двух дуг окружностей: дуги BE с центром в середине C дуги AB данной окружности и дуги BF с центром в середине второй дуги AB данной окружности, причем EAF — касательная в точке A к данной окружности (рис. 123).

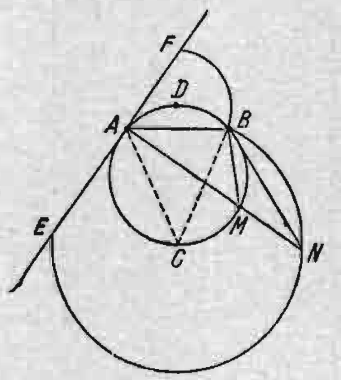


Рис. 123

Доказательство. Пусть N — точка искомого геометрического места, полученная с помощью точки M, взятой на нижней дуге AB. По построению $\triangle NMB$ равнобедренный, откуда

$$\angle BNA=\frac{1}{2}\angle BMA=\frac{1}{2}\angle BCA.$$

Следовательно, точка N лежит на окружности с центром C, проходящей через точки A и B. Далее, точка N должна находиться внутри $\angle BAE$, т. е. она лежит на дуге BE окружности с центром C. Обратно, если N лежит на этой дуге, то

$$\angle BNA=\frac{1}{2}\angle BCA=\frac{1}{2}\angle BMA,$$

откуда следует, что $\angle BNA=\angle NBM$ и $\triangle NMB$ равнобедренный. Значит, точка N получается указанным построением. Аналогично проводится доказательство в случае, когда точка M будет на верхней дуге AB.

410. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых l и k, симметрично расположенных относительно общего перпендикуляра BB' к данным параллельным прямым, проведенного через точку O. Прямая l проходит через точку C перпендикулярно к OC, причем $B'C=OB$ (рис. 124).

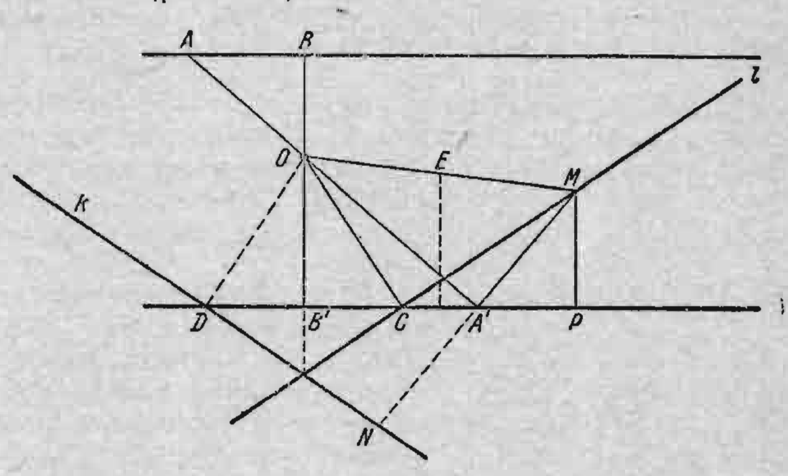


Рис. 124.

Доказательство. Пусть M и N — точки, полученные при построении с помощью секущей AA'. Доказательство проведем только для точки M (для N оно проводится аналогично). Пусть $MP \perp B'C$; тогда $\angle OAB = \angle A'MP$ (как углы с перпендикулярными сторонами). Поэтому прямоугольные треугольники OAB и $A'MP$, имеющие равные гипотенузы OA и $A'M$, равны. Значит, $A'P=OB=B'C$. Отсюда следует, что если E — середина OM, то точки M, A', C, O лежат на одной окружности с центром E и, следовательно, $MC \perp OC$, т. е. точка M лежит на прямой l. Обратно, если M — какая-нибудь точка прямой l и $\angle MA'O$ прямой, то $A'P=B'C=OB$, откуда следует равенство треугольников OAB и $A'MP$ и, наконец, равенство $OA=A'M$. Следовательно, точка M получается рассматриваемым построением.

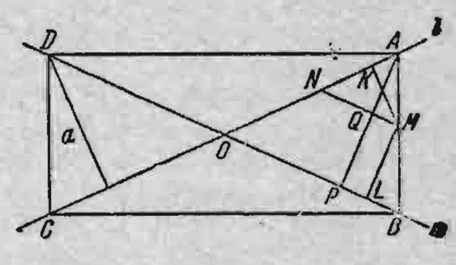


Рис. 125.

411. В случае *пересекающихся* прямых искомое геометрическое место состоит из четырех отрезков, образующих прямоугольник $ABCD$, вершины которого лежат на данных прямых l, m и находятся от них на данном расстоянии a (рис. 125).

Доказательство. Пусть точка M такова, что $MK \perp l$, $ML \perp m$ и $MK+ML=a$, где a — длина данного отрезка. Проведем через M прямую AB так, чтобы $OA=OB$ и $MN \parallel OB$. Пусть $AP \perp OB$ и Q — точка пересечения AP и MN. Из равенства $AN = MN$ следует, что $MK=AQ$ и, значит,

$$AP=AQ+QP=MK+ML=a.$$

Следовательно, точка A является вершиной упомянутого прямоугольника. То же верно и для точки B, так что M лежит на стороне этого прямоугольника. Обратно, если M лежит на стороне этого прямоугольника, то, проведя рассуждение в обратном порядке, получим, что $MK+ML=AP=a$.

Если данные прямые l и m *параллельны* и расстояние между ними равно h, то искомое геометрическое место существует только тогда, когда $a \geqslant h$, и представляет собой пару прямых, параллельных данным, при $a > h$ или всю полосу между l и m при $a=h$

412. В случае *пересекающихся* прямых искомое геометрическое место состоит из восьми полупрямых, являющихся продолжениями сторон прямоугольника $ABCD$, указанного в решении задачи 411 (рис. 126). Доказательство аналогично тому, которое дано в решении этой задачи.

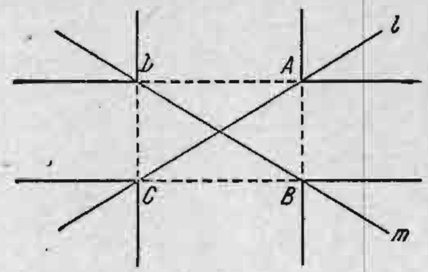


Рис. 126.

Если данные прямые l и m *параллельны* и расстояние между ними равно h, то искомое геометрическое место существует только тогда, когда $a \leqslant h$, и представляет собой пару прямых, параллельных данным, при $a < h$ или часть плоскости, лежащую вне полосы между l и m, при $a=h$.

413. Если отрезок AB лежит на прямой l, а CD — на прямой m, то искомое геометрическое место состоит из четырех отрезков, образующих параллелограмм $PQRS$, в котором l и m — диагонали, а положение вершин P и Q определяется из соотношений

$$h_P CD = a^2, \quad h_Q AB = a^2, \tag{1}$$

где h_P и h_Q — расстояния точек P и Q от прямых m и l (рис. 127).

Доказательство. Заметим, что при фиксированных l и m искомое геометрическое место вполне определяется заданием длин отрезков AB и CD и постоянной a, но не зависит от положения этих отрезков на прямых l и m. Действительно, при изменении этого положения площади треугольников AMB и CMD не меняются. Поэтому достаточно рассмотреть частный случай, когда отрезки AB и CD имеют общий конец в точке пересечения прямых l и m. В этом случае отрезки AB и CD будут сторонами треугольника, третья сторона которого лежит в одном из четырех углов, образующихся при пересечении прямых l и m. Например, на рис. 127 совмещены концы A и C и третьей стороной является BD.

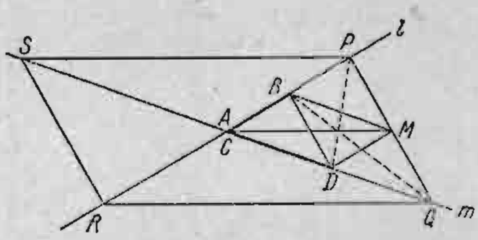


Рис. 127.

Пусть M — точка искомого геометрического места, лежащая внутри угла BAD. Тогда площадь $\triangle BMD$ равна

$$S_{BMD} = |S_{AMB} + S_{CMD} - S_{ABD}| = |a^2 - S_{ABD}|.$$

Отсюда следует, что расстояние точки M от прямой BD не зависит от ее положения на прямой $PQ \parallel BD$. Для точек P и Q выполнены соотношения (1).

Обратно, пусть M—какая-нибудь точка на прямой PQ, где точки P и Q построены согласно (1). Из соотношений

$$\frac{AP}{AB}=\frac{S_{APD}}{S_{ABD}}=\frac{a^2}{S_{ABD}}, \quad \frac{CQ}{CD}=\frac{S_{CQB}}{S_{CDB}}=\frac{a^2}{S_{ABD}}$$

следует:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{CQ}{CD},$$

т. е. $PQ \parallel BD$. Поэтому

$$S_{AMB}+S_{CMD}=S_{ABD}+S_{BMD}=S_{ABD}+S_{BPD}=S_{APD}=a^2.$$

Следовательно, точка M принадлежит искомому геометрическому месту. Остальные стороны параллелограмма $PQRS$ получаются аналогично при совмещении других концов отрезков, а именно: QR при $B \equiv C$ RS при $B \equiv D$ и SP при $A \equiv D$.

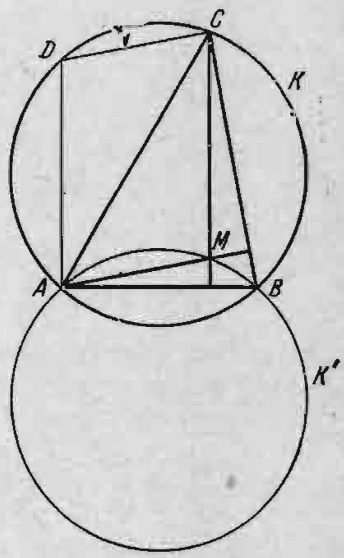


Рис. 128.

414. Искомым геометрическим местом является окружность, симметричная с данной окружностью K относительно данной хорды AB (рис. 128).

Доказательство. Построим в окружности K хорду $AD \perp AB$. Пусть $\triangle ABC$ вписан в K и M—точка пересечения его высот. Легко видеть, что $AMCD$—параллелограмм: $DA \parallel CM$ как перпендикуляры к AB, а $DC \parallel AM$ как перпендикуляры к BC ($DC \perp BC$, так как BD—диаметр в K). Поэтому точка M лежит на окружности K', получаемой из окружности K сдвигом на расстояние AD в направлении хорды DA. Ясно, что эта окружность K' симметрична с K относительно AB. Обратно, пусть M—точка на K' и $MC \perp AB$. Так как $MC = AD$, то $AMCD$—параллелограмм и, значит, $AM \parallel DC$. Но $DC \perp BC$, так как $ABCD$ вписан в K и угол BAD прямой. Поэтому $AM \perp BC$ и M—точка пересечения высот в $\triangle ABC$. Следовательно, M принадлежит искомому геометрическому месту.

415. Пусть O—центр и R—радиус данной окружности (рис. 129). Искомым геометрическим местом является прямая l, перпендикулярная к прямой OA и пересекающая эту прямую в точке B такой, что

$$OB=\frac{R^2}{OA} \qquad (1)$$

Доказательство. Проведем через точку M прямую $l \perp OA$, которая пересечет прямую OA в точке B. Пусть C — точка пересечения отрезка OM с хордой KL. Из подобия треугольников OAC и OMB следует:

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OM}{OA},$$

откуда

$$OB=\frac{OM\cdot OC}{OA}. \qquad (2)$$

По построению KC есть высота в прямоугольном треугольнике OKM, следовательно,

$$OM\cdot OC=R^2.$$

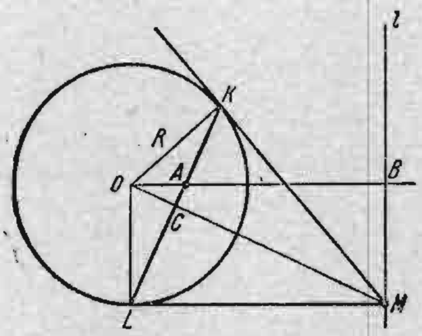


Рис. 129.

Подставив это выражение в (2), получим равенство (1).

Обратно, пусть M — какая-нибудь точка прямой l, перпендикулярной к OA и такой, что OB определяется равенством (1). Проведем касательную MK и $KC \perp OM$. Пусть KC пересечет прямую OA в точке A'. Тогда, повторив первую часть доказательства, найдем, что OB определяется формулой (1) с OA' вместо OA. Отсюда получим $OA'=OA$, т. е. точка A' совпадет с A, а это означает, что точка M принадлежит искомому геометрическому месту.

416. Пусть

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}>1.$$

Проведем биссектрисы MP и MQ двух смежных углов с вершиной M и сторонами MA и MB (рис. 130). Тогда по свойству биссектрис будем иметь:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q} \quad \text{и} \quad \frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

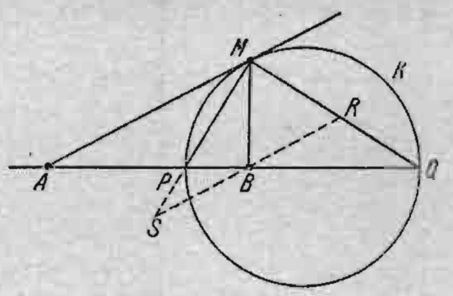


Рис. 130.

Отсюда следует, что положение точек P и Q не зависит от положения точки M. Так как, кроме того, $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$, то точка M лежит на окружности K с диаметром PQ. Обратно, пусть точки P и Q построены согласно (1) и K — окружность с диаметром PQ. Если точка M лежит на этой окружности, то $\angle PMQ=\frac{\pi}{2}$. Через точку B проведем $RS \parallel AM$, тогда

$$\frac{AM}{BR}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{p}{q}, \quad \frac{AM}{BS}=\frac{AP}{BP}=\frac{p}{q}, \qquad (2)$$

откуда $BR=BS$ и BM — медиана в $\triangle RMS$. Так как $\triangle RMS$ — прямоугольный, то $BM=BR$ и в силу (2)

$$\frac{AM}{BM}=\frac{p}{q}.$$

Поэтому точка M принадлежит рассматриваемому геометрическому месту.

Чтобы выразить диаметр PQ через длину a отрезка AB из соотношений

$$PB = AB - AP = a - \frac{p}{q} PB,$$

$$BQ = AQ - AB = \frac{p}{q} BQ - a,$$

находим:

$$PB = a\frac{q}{p+q}, \qquad BQ = a\frac{q}{p-q},$$

откуда

$$PQ = \frac{2a}{\frac{p}{q} - \frac{q}{p}}.$$

Если $p = q$, то искомым геометрическим местом будет, очевидно, перпендикуляр к прямой AB, проведенный через середину отрезка AB.

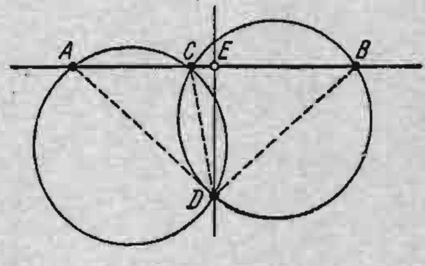


Рис. 131.

417. Искомое геометрическое место есть перпендикуляр к отрезку AB, проведенный через его середину E, с выброшенной точкой E.

Доказательство. Треугольник ADB — равнобедренный, так как $\angle CAD = \angle CBD$, ибо эти углы опираются в равных окружностях на равные дуги CD (рис. 131). Поэтому точка D лежит на перпендикуляре к отрезку AB, проведенному через его середину E. Наоборот, если взять любую точку D на этом перпендикуляре, не совпадающую с точкой E, то окружности, проходящие через ACD и BCD, равны. Это следует, например, из равенств

$$R_1 = \frac{CD}{2\sin\alpha} = \frac{CD}{2\sin\beta} = R_2,$$

где $\alpha = \angle BAD$ и $\beta = \angle CBD$.

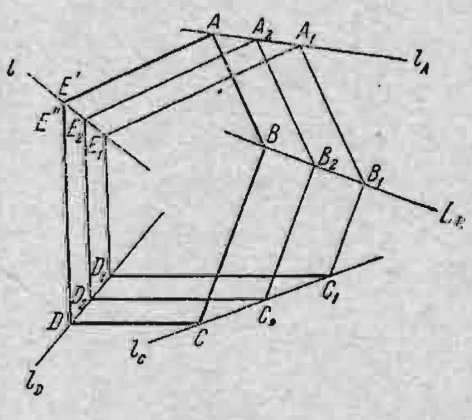


Рис. 132.

418. Искомое геометрическое место есть прямая, проведенная через какие-нибудь два различных положения последней вершины.

Доказательство. Пусть, например, $A_1B_1C_1D_1E_1$ — одно и $A_2B_2C_2D_2E_2$ — другое положения деформирующегося многоугольника, вершины A, B, C, D которого скользят соответственно по прямым l_A, l_B, l_C, l_D (рис. 132). Через положения E_1 и E_2 последней вершины проведем прямую l. Пусть вершина на прямой l_A заняла положение A, а на l_D—соответствующее положение D. Сторона, параллельная A_2E_2, пересечет l в точке E', а сторона, параллельная D_2E_2,—в точке E''. По построению

$$\frac{E'E_2}{E_2E_1}=\frac{AA_2}{A_2A_1}=\frac{BB_2}{B_2B_1}=\frac{CC_2}{C_2C_1}=\frac{DD_2}{D_2D_1}=\frac{E''E_2}{E_2E_1},$$

откуда

$$E'E_2=E''E_2,$$

т. е. точки E' и E'' совпадают. Это означает, что последняя вершина будет лежать на прямой l в точке $E\equiv E'\equiv E''$.

Обратное очевидно, так как положение деформированного многоугольника можно построить, начиная с любой точки E на прямой l.

419. Искомое геометрическое место есть окружность, проходящая через концы хорды AB и одну из точек M_1, получаемых указанным в условии построением.

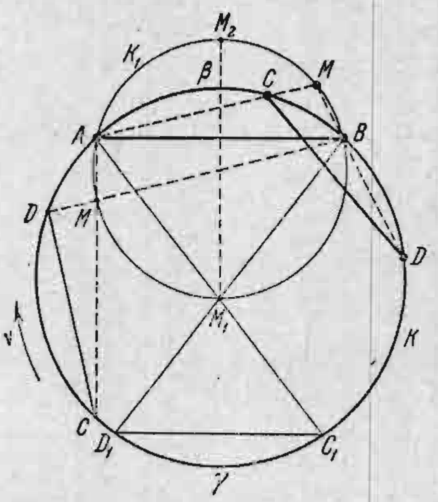


Рис. 133

Доказательство. Предварительно введем некоторые обозначения. Найдется одно и только одно такое положение C_1D_1 хорды CD, когда $C_1D_1 \| AB$ и когда на данной окружности K можно выбрать такое направление обхода ν, при движении в котором концы хорд будут встречаться в последовательности A, B, C_1, D_1 (этот выбор может не быть определенным только в случае равенства $AB=CD$, когда прямые AC и BD параллельны). Обозначим через α ту из дуг AB данной окружности K, на которой лежат точки C_1, D_1, через β—другую дугу AB и через γ—ту из дуг C_1D_1, на которой нет точек A, B. Далее, обозначим через M_1 точку пересечения прямых AC_1 и BD_1. Точка M_1 лежит внутри K. Пусть K_1—окружность, описанная около $\triangle ABM_1$ (рис. 133). Докажем, что при любом сдвинутом положении хорды CD точка пересечения прямых AC и BD будет находиться на K_1.

Пока обе точки C, D лежат на дуге α, точка M будет находиться внутри K, а тогда

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\beta+\gamma). \tag{1}$$

Если же хотя бы одна из точек C, D попадет на дугу β, то точка M будет лежать вне K и тогда

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma). \tag{2}$$

В первом случае M лежит на дуге AM_1B окружности K_1, так как согласно (1) $\angle AMB$ не зависит от положения CD и, значит, равен

$\angle AM_1B$. Во втором случае, ввиду того что сумма правых частей (1) и (2) равна

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi,$$

точка M лежит на внешней относительно K дуге AB окружности K_1.

Очевидно, верно и обратное, т. е. любая точка M окружности K_1 может быть получена при надлежащем выборе положения хорды CD.

420. Обозначим данную окружность через O и данную прямую через L (рис. 134). Пусть M — вторая точка пересечения прямой PQ с O. Возьмем какую-нибудь проходящую через точки P и Q окружность O_1, которая пересекает второй раз окружность O в точке R и прямую L в точке S. Пусть N — вторая точка пересечения прямой RS с окружностью O.

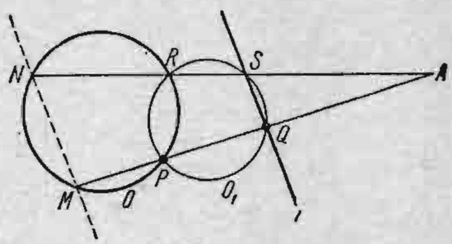


Рис. 134.

Докажем, что $MN \parallel L$. Для этого воспользуемся следующей известной теоремой планиметрии: если даны окружность и точка A, то для любой прямой, проходящей через A и пересекающей эту окружность в точках A_1 и A_2, произведение отрезков $AA_1 \cdot AA_2$ есть величина постоянная, не зависящая от выбора прямой.

Обозначим через A точку пересечения прямых PQ и RS. Сначала применим упомянутую теорему к окружности O, точке A и прямым AP и AR. Так как AP пересекает второй раз O в точке M, а AR в точке N, то

$$AM\cdot AP=AN\cdot AR. \qquad (1)$$

Теперь применим ту же теорему к окружности O_1, точке A и тем же прямым. Так как AP пересекает второй раз O_1 в точке Q, а AR в точке S, то

$$AQ\cdot AP=AS\cdot AR. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует равенство

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AQ}{AS}. \qquad (3)$$

Из равенства (3) в силу теоремы, обратной теореме о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, следует, что $MN \parallel QS$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для любой окружности типа O_1 точка N может быть определена как вторая точка пересечения прямой, проходящей через M и параллельной L, с окружностью O. Это построение определяет точку N однозначно независимо от выбора окружности O_1. Следовательно, всевозможные прямые RS, получаемые для различных окружностей O_1, пересекают окружность O в точке N.

Исключительные случаи, когда из (1) и (2) не следует (3), а именно когда совпадают точки R и P или точки Q и S или когда $PQ \parallel RS$, можно рассматривать как предельные для общего случая и пользоваться соображениями непрерывности.

5. Нахождение наибольших и наименьших значений

421. Если A — вершина прямого угла в $\triangle ABC$, а C и B лежат на заданных параллельных прямых l_1 и l_2 (рис. 135), то

$$AB=\frac{a}{\sin\varphi},\quad AC=\frac{b}{\cos\varphi}.$$

Следовательно, площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{ab}{\sin 2\varphi}.$$

Отсюда следует, что S_{ABC} примет наименьшее значение, равное ab, при $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

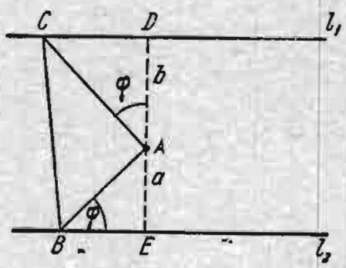


Рис. 135.

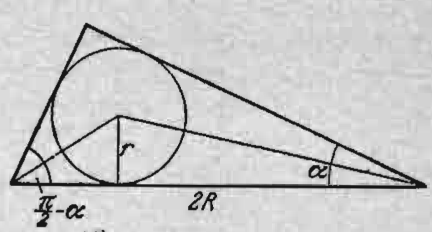


Рис. 136.

422. Если R — радиус описанной, а r — радиус вписанной окружности (рис. 136), то

$$2R=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Заметив, что

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1},$$

получаем:

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}.$$

Величина $\frac{R}{r}$ имеет наименьшее значение, когда $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ $=1$, т. е. $\left(\text{в силу ограничения } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ когда $\alpha=\frac{\pi}{4}$; в этом случае

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

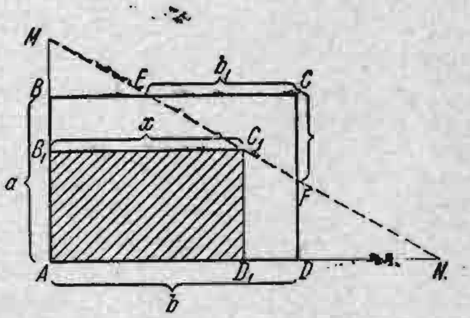


Рис. 137.

423. Пусть от прямоугольника $ABCD$ отсечен треугольник с вершиной C так, что получился пятиугольник $ABEFD$ (рис. 137). Ясно, что искомый прямоугольник $AB_1C_1D_1$ должен иметь вершину C_1 на отрезке EF. Задача состоит в том, чтобы найти положение этой вершины.

Чтобы найти точку C_1, продолжим стороны AB и AD прямоугольника до пересечения с продолжением отрезка EF, образовав треугольник AMN. Пусть

$$AM=m, \quad AN=n$$

и

$$B_1C_1=AD_1=x.$$

Из подобия треугольников AMN и D_1C_1N имеем:

$$\frac{C_1D_1}{m}=\frac{n-x}{n},$$

откуда

$$C_1D_1=\frac{m}{n}(n-x).$$

Следовательно, для площади S прямоугольника $AB_1C_1D_1$, равной $AD_1\cdot C_1D_1$, получаем выражение

$$S=\frac{m}{n}(n-x)\,x.$$

Преобразовав это выражение к виду

$$S=\frac{m}{n}\left[\frac{n^2}{4}-\left(\frac{n}{2}-x\right)^2\right], \qquad (1)$$

заключаем, что наибольшее значение S будет иметь тогда, когда $\frac{n}{2}-x=0$, т. е. при $x=\frac{n}{2}$. Обозначим через C_0 положение вершины C_1, соответствующее $x=\frac{n}{2}$.

Заметив, что выражение (1) для S убывает с возрастанием $\left|\frac{n}{2}-x\right|$, т. е. при движении точки C_1 от точки C_0 к вершине M или к вершине F, находим, что возможны следующие три случая:

1) Точка C_0 лежит на отрезке EF; тогда вершина C_1 искомого прямоугольника совпадает с C_0.

2) Точка C_0 лежит на отрезке ME; тогда C_1 надо взять совпадающей с E.

3) Точка C_0 лежит на отрезке FN; тогда C_1 надо взять совпадающей с F.

Остается найти критерий для различения этих случаев с помощью данных в условии задачи величин a, a_1, b, b_1.

Сначала найдем величину n. Из подобия треугольников ECF и NDF имеем:

$$\frac{n-b}{a-a_1}=\frac{b_1}{a_1},$$

откуда

$$n=b+\frac{b_1}{a_1}(a-a_1). \qquad (2)$$

Теперь заметим, что точка C_0 попадет внутрь отрезка EF, если выполняются неравенства

$$b-b_1 < x < b.$$

Подставив сюда $x=\frac{n}{2}$ с известным значением n, получим:

$$b-b_1 < \frac{b}{2}+\frac{b_1}{2a_1}(a-a_1) < b.$$

Эти неравенства нетрудно преобразовать к виду

$$-1 < \frac{a}{a_1}-\frac{b}{b_1} < 1. \qquad (3)$$

При нарушении левого неравенства точка C_0 попадает на отрезок ME, а правого — на FN.

Окончательно получаем следующий результат: если для данных a, b, a_1, b_1 выполнены оба неравенства (3), то вершина C_1 прямоугольника наибольшей площади лежит внутри отрезка EF, а сторона x этого прямоугольника вычисляется по формуле

$$x=\frac{b}{2}+\frac{b}{2a_1}(a-a_1);$$

если нарушается левое неравенство (3), то вершина C_1 совпадает с точкой E, а если правое, — то с точкой F.

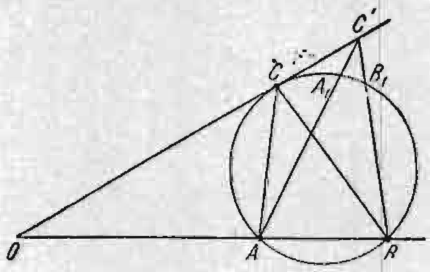


Рис. 138.

424. Проведем окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся второй стороны угла (рис. 138). Точка касания и будет искомой, так как для любой точки C' на этой прямой угол $AC'B$ измеряется полуразностью дуг AB и A_1B_1, тогда как $\angle ACB$ измеряется половиной дуги AB.

Заметим далее, что $(OC)^2=OB\cdot OA$. Следовательно, задача свелась к известному построению среднего геометрического длин двух данных отрезков OA и OB.

425. Рассмотрим три возможных случая расположения отрезка AB относительно l.

а) $AB \parallel l$. Для любой точки M прямой l имеем $|AM-BM| \geqslant 0$, причем существует точка M_0, для которой $|AM_0-BM_0|=0$. Эта точка является основанием перпендикуляра, опущенного из середины отрезка AB на l. Точки M, для которой величина $|AM-BM|$ имела бы наибольшее значение, не существует. Это следует из того, что $|AM-BM| \leqslant AB$ и равенство возможно лишь в случае, когда A, B и M лежат на одной прямой.

б) $AB \perp l$. Так как $|AM-BM| \leqslant AB$, то для точки пересечения прямой l с прямой AB величина $|AM-BM|$ примет наибольшее значение, равное длине AB. Точки M, для которой величина $|AM-BM|$ была бы наименьшей, не существует.

в) Прямая AB не параллельна и не перпендикулярна к l. Ясно, что $|AM-BM|$ примет наименьшее значение, если M есть точка пересечения l с перпендикуляром к отрезку AB в его середине. Наибольшее значение $|AM-BM|$ примет тогда, когда точка M будет точкой пересечения AB с l.

426. Пусть MN — какое-нибудь положение секущей, $AP \parallel ON$ и $AQ \parallel OM$ (рис. 139).

Введем следующие обозначения:

$x=$ площадь $\triangle APM$,

$y=$ площадь $\triangle AQN$,

$\sigma=$ площадь $\triangle APQ$,

$S=$ площадь $\triangle OMN$,

$a=AM \quad b=AN$

Имеем:

$$S=2\sigma+x+y$$

Ясно, что

$$\frac{x}{\sigma}=\frac{a}{b}, \quad \frac{y}{\sigma}=\frac{b}{a}.$$

Следовательно,

$$S=\sigma\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=4\sigma+\sigma\,\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Наименьшее значение $S=4\sigma$ получается при $a=b$, что и требовалось доказать.

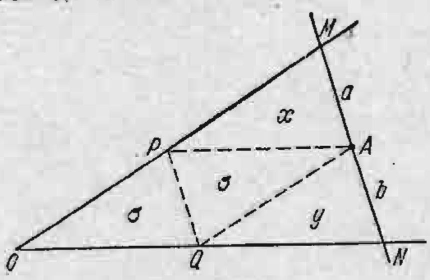


Рис. 139.

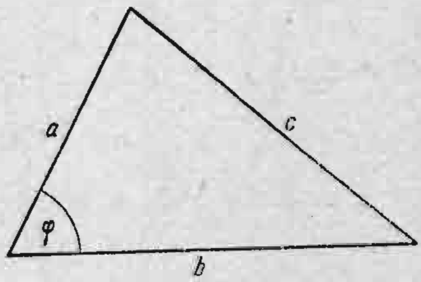


Рис. 140.

427. Пусть $a+b=q$ (рис. 140). По теореме косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi=a^2+(q-a)^2-2a(q-a)\cos\varphi=$$
$$=q^2+2a^2(1+\cos\varphi)-2aq(1+\cos\varphi)=$$
$$=q^2\,\frac{1-\cos\varphi}{2}+2(1+\cos\varphi)\left(a-\frac{q}{2}\right)^2.$$

Так как q и φ неизменны, то наименьшее значение c будет при $a=\frac{q}{2}=\frac{a+b}{2}$, т. е. при $a=b$.

428. Первое решение. Рассмотрим $\triangle ABC$ с основанием AC и обозначим через a, b, c длины сторон, противолежащих соответственно углам A, B, C; положим $a+b+c=p$.

Из соотношений

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin(A+B)}=\frac{b}{\sin B}$$

находим:

$$p=b+b\frac{\sin A}{\sin B}+b\frac{\sin(A+B)}{\sin B}=b+\frac{b}{\sin\frac{B}{2}}\sin\left(A+\frac{B}{2}\right).$$

Так как $b>0$ и $\sin\frac{B}{2}>0$, то p примет наибольшее значение при

$$A+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

В этом случае $A=C$ и $\triangle ABC$ равнобедренный.

Второе решение. Построим на данном основании AB сегмент, вмещающий данный угол φ (рис. 141), и рассмотрим два треугольника, вписанных в этот сегмент: равнобедренный $\triangle ADB$, неравнобедренный $\triangle ACB$. Из точки D радиусом $AD=DB$ опишем окружность, продолжим AC до пересечения с окружностью в точке M и соединим M с D и B. Получим:

$$AD+DB=AD+DM>AM=AC+CM.$$

Но в $\triangle BCM$

$$\angle CBM=\angle ACB-\angle CMB=\angle CMB,$$

так как $\angle ACB=\angle ADB$ и измеряется дугой AB, а $\angle AMB$ измеряется половиной дуги AB. Следовательно, $CM=CB$ и $AD+DB>AC+CB$.

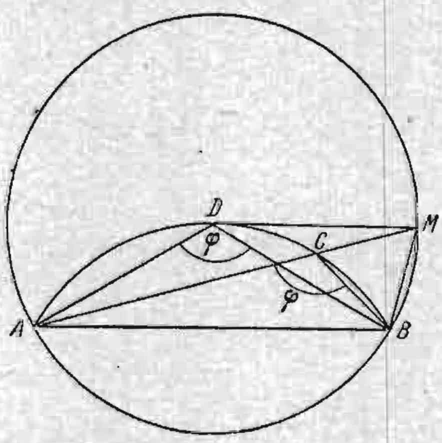


Рис. 141.

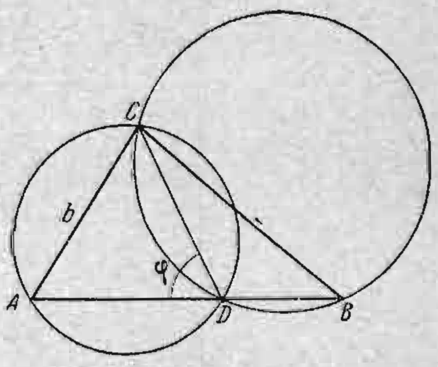


Рис. 142

429. Обозначим через R_1 и R_2 радиусы окружностей, описанных соответственно около $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, а также положим $\angle ADC=\varphi$,

$AC=b$, $BC=a$ (рис. 142). Имеем:

$$2R_1=\frac{b}{\sin\varphi},$$

$$2R_2=\frac{a}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{a}{\sin\varphi}.$$

Отсюда $\frac{R_1}{R_2}=\frac{b}{a}$. Радиусы R_1 и R_2 будут наименьшими тогда, когда $\varphi=\frac{\pi}{2}$; в этом случае D—основание высоты CD

430. Каждый из вырезаемых кругов должен касаться двух сторон $\triangle ABC$ (см. рис. 143); кроме того, круги должны касаться друг друга. В противном случае радиус можно увеличить. Поэтому центры кругов лежат на двух биссектрисах внутренних углов, например, AO и CO, где O—центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Если r—радиус вписанного в $\triangle ABC$ круга и ρ—радиус вырезанных кругов, то из $\triangle AOC$ имеем

$$\frac{r-\rho}{2\rho}=\frac{r}{b},$$

откуда находим

$$\frac{\rho}{r}=\frac{b}{b+2r}=1-\frac{2r}{b+2r}.$$

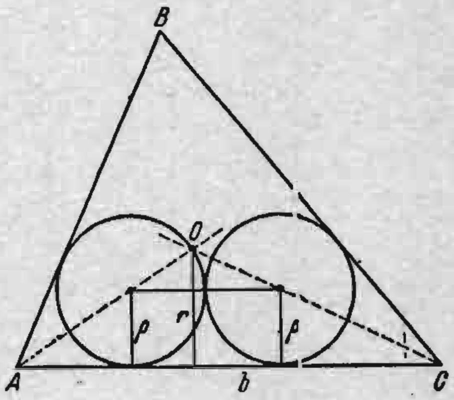


Рис. 143.

Из этой формулы следует, что ρ будет наибольшим, когда в качестве b взята наибольшая сторона.

Б. СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. Задачи на вычисление

431. Пусть a—сторона основания, d—диагональ боковой грани призмы, l—боковое ребро (рис. 144). Имеем:

$$v=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}l.$$

Из $\triangle A_1BC_1$ следует, что $\frac{1}{2}a=d\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$$l=\sqrt{d^2-a^2}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

и, следовательно,

$$v=\frac{a^3\sqrt{3}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда

$$a=\sqrt[3]{\frac{8v\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}.$$

432. Пусть H — высота пирамиды, a — длина стороны основания.

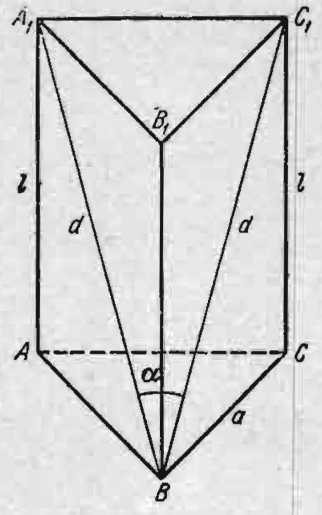


Рис. 144.

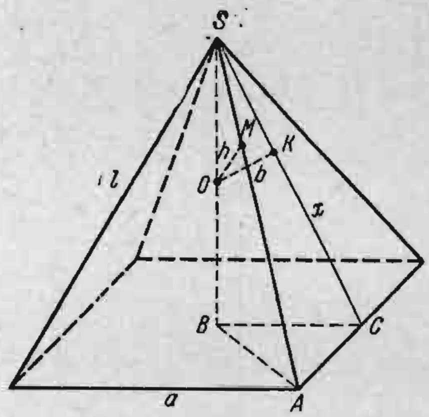


Рис. 145.

Рассматривая подобные треугольники OMS и ABS (рис. 145), найдем:

$$\frac{h}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-h^2}}{H}. \qquad (1)$$

Аналогично из треугольников OKS и CBS получим:

$$\frac{b}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}H^2-b^2}}{H}. \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (1) на (2), будем иметь:

$$\sqrt{\frac{H^2-4h^2}{H^2-4b^2}}=\frac{h}{b\sqrt{2}},$$

откуда

$$H=\frac{2bh}{\sqrt{2b^2-h^2}}.$$

Подставив это выражение в (1), легко найдем:

$$a^2=\frac{8b^2h^2}{h^2-b^2}.$$

В итоге для объема V получаем выражение

$$V=\frac{16}{3}\frac{b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}.$$

433. Пусть H—высота пирамиды, x—высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды, R—радиус круга, вписанного в основание, r—радиус круга, описанного около основания, a—сторона основания. Из подобия треугольников CA_1B_1 и CAB (рис. 146) получаем:

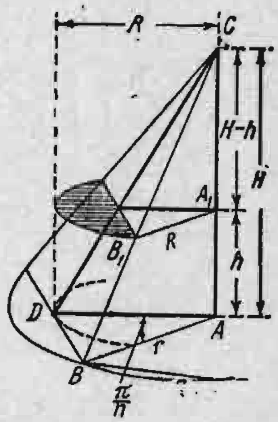


Рис. 146.

$$\frac{H-h}{H}=\frac{R}{r},$$

отсюда

$$H=\frac{hr}{r-R}.$$

Но из $\triangle ADB$ имеем $r=\dfrac{R}{\cos\frac{\pi}{n}}$, и поэтому

$$H=\frac{h}{1-\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Так как, далее, для площади основания и объема имеем следующие формулы:

$$S_{\text{осн}}=n\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H,$$

то

$$r^2=\frac{6V}{Hn\sin\frac{2\pi}{n}}.$$

Подставляя сюда найденное выражение для H, находим:

$$r=\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\sin\frac{2\pi}{n}}}.$$

Так как, далее, $x=\sqrt{R^2+H^2}$ и $\frac{a}{2}=r\sin\frac{\pi}{n}$, то боковая поверхность равна

$$n\frac{1}{2}xa=nr\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2+H^2},$$

или окончательно

$S_{бок}=$

$$=n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{6V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\sin\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{3V\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{nh\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}+\frac{h^2}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\right]}.$$

434. Пусть M и N — середины ребер ES и DS (рис. 147); легко видеть, что $AMNC$ — трапеция, ибо $MN \parallel ED$, а $ED \parallel AC$. Очевидно также, что

$$MN=\frac{1}{2}q.$$

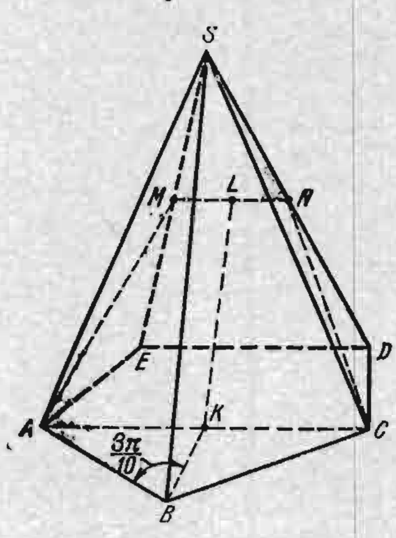


Рис. 147.

Используя формулу (1) для квадрата медианы треугольника в решении задачи 370, найдем:

$$CN=\frac{\sqrt{b^2+2q^2}}{2}.$$

Далее,

$$KC=\frac{AC}{2}=q\sin\frac{3\pi}{10},$$

ибо $\angle ABK=\frac{3\pi}{10}$. Если KL — отрезок, соединяющий середины оснований трапеции $ACNM$, то

$$KL=\sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4}-\left(q\sin\frac{3\pi}{10}-\frac{q}{4}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2+2q^2}{4}-q^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2+3q^2}}{4}$$

$\left(\text{мы воспользовались здесь тем, что } \sin\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$. Таким образом, искомая площадь

$$S_{сеч}=\frac{1}{2}(MN+AC)KL=\frac{q}{16}(2+\sqrt{5})\sqrt{4b^2+3q^2}.$$

435. Пусть E и F — середины ребер правильной треугольной пирамиды $SABC$, D — середина отрезка EF (рис. 148). Так как сечение перпендикулярно грани CSA, то $\angle SDB$ — прямой. Продолжив SD до пересечения с прямой AC в точке M, рассмотрим треугольник MBS. Точка D, очевидно, делит отрезок SM пополам. Так как, кроме того, $BD \perp MS$, то треугольник MBS равнобедренный; $SB=MB$.

Пусть сторона основания пирамиды равна a. Тогда

$$SB = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Высота боковой грани

$$SM = \sqrt{SC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому

$$S_{бок} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4},$$

и так как площадь основания

$$S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

то

$$\frac{S_{бок}}{S_{осн}} = \sqrt{6}.$$

436. Пусть a — длина стороны квадрата, лежащего в основании призмы, l — длина бокового ребра призмы, d — диагональ боковой

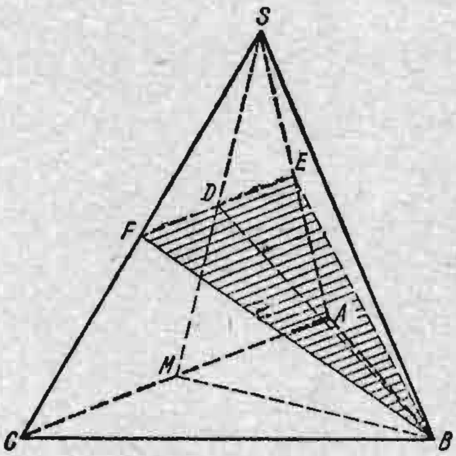


Рис. 148.

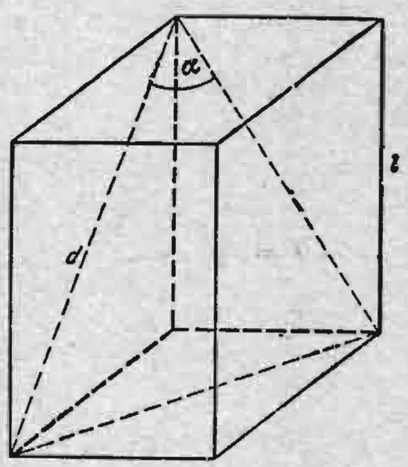


Рис. 149.

грани (рис. 149). Обозначим через $S_{сеч}$ площадь сечения; легко видеть, что полная поверхность призмы равна $4(S - S_{сеч})$; поэтому достаточно определить $S_{сеч}$. Имеем:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha; \quad a = d\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$l = \sqrt{d^2 - a^2} = d\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = d\sqrt{\cos\alpha}.$$

Далее,

$$S=S_{\text{сеч}}+\frac{a^2}{2}+2\frac{la}{2}=d^2\left(\frac{\sin\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right).$$

Отсюда

$$d^2=\frac{2S}{\sin\alpha+2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$$

и, значит,

$$S_{\text{сеч}}=\frac{S\sin\alpha}{\sin\alpha+2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

В итоге после упрощений находим, что полная поверхность призмы равна

$$S_{\text{полн. пр}}=4(S-S_{\text{сеч}})=$$

$$=4S\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2\cos\alpha}}.$$

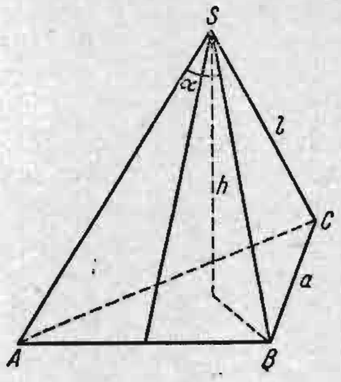


Рис. 150.

437. Сторона основания пирамиды равна $a=2r\sin\alpha$ (по известной лемме к теореме синусов). Боковое ребро (рис. 150)

$$l=\frac{a}{2}\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому высота пирамиды равна

$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=2r\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin^2\alpha}{3}},$$

и следовательно, объем пирамиды равен

$$V=\frac{1}{3}h\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}r^3\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}.$$

438. Пусть $ABC'D'$ — указанное сечение пирамиды $OABCD$. Через вершину O пирамиды и середину ее ребер AB и CD проведем вспомогательную плоскость OPN (рис. 151).

Легко видеть, что плоскость OPN перпендикулярна к AB и CD, а отрезки OP и ON равны.

Применяя теорему синусов к треугольнику OPM, находим:

$$\frac{OM}{OP}=\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Так как $D'C' \parallel DC$, то

$$D'C' = DC\frac{OM}{ON} = a\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику PMN, находим

$$\frac{PM}{PN} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\pi - 3\alpha)},$$

откуда

$$PM = a\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Теперь получаем искомую площадь сечения $ABC'D'$:

$$S = \frac{1}{2}(AB + D'C')\,PM = \frac{1}{2}\left(a + a\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}\right)a\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = a^2\,\frac{\sin^2 2\alpha\cos\alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

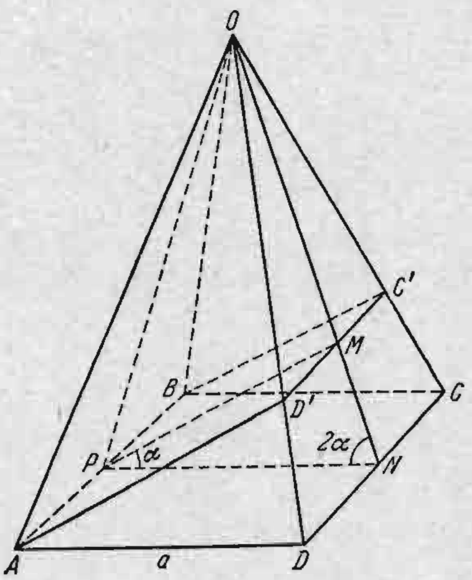


Рис. 151.

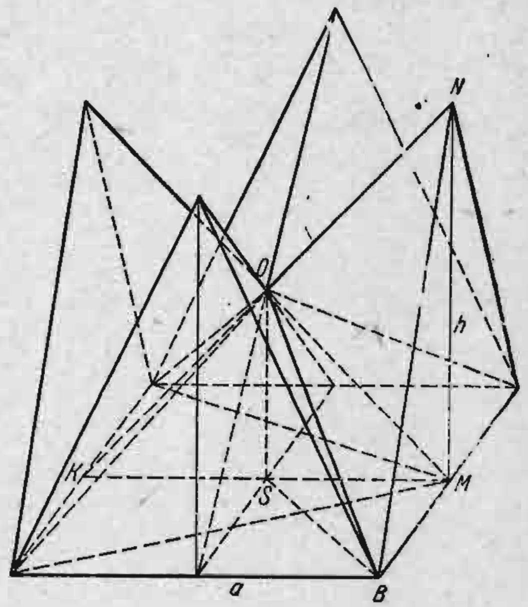


Рис. 152.

439. Пользуясь обозначениями рис. 152, рассмотрим $\frac{1}{8}$ часть чердака $OSBMN$. Она состоит из двух пирамид. Первая пирамида имеет основание SBM и вершину O; ее объем равен

$$V_1 = \frac{1}{3}SO\cdot S_{SBM} = \frac{a^2h}{48}.$$

Вторая пирамида имеет основание BMN и вершину O; ее объем будет $V_2 = \frac{a^2h}{24}$. Таким образом, объем чердака равен

$$V = 8(V_1 + V_2) = \frac{a^2h}{2}.$$

440. Пусть BM и CM — перпендикуляры, опущенные из вершин основания B и C (см. рис. 153) на боковое ребро SA. Образованный ими $\angle BMC$ является искомым. Обозначим его через β. Очевидно,

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{BK}{BM}. \tag{1}$$

Пусть a — сторона основания пирамиды. Тогда $SK=\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$;

$$SB=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{6\cos\alpha}\sqrt{3(1+3\cos^2\alpha)}.$$

Из равнобедренного треугольника ASB легко находим его высоту BM:

$$BM=\frac{a}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

Таким образом, в силу (1)

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$$

и, следовательно,

$$\beta=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

441. Проведем плоскость через ребро SA и точку N — основание перпендикуляра AN к отрезку BC (рис. 154). Пусть NM — высота

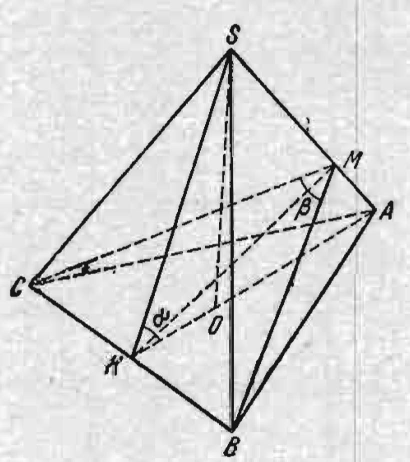


Рис. 153.

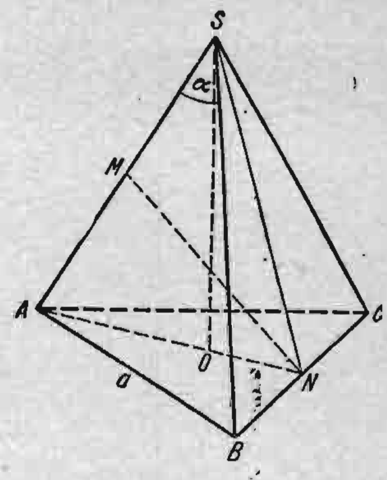


Рис. 154.

треугольника ASN. Отрезок NM, будучи перпендикулярен к AS и BC, очевидно, равен d. Обозначим через a сторону основания пирамиды. Тогда

$$SA=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а высота пирамиды равна

$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{a}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $AN\cdot SO=AS\cdot d$, то

$$a=\frac{6d}{\sqrt{3}\sqrt{9-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

В результате имеем:

$$V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}SO=\frac{d^3}{3\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

442. Пусть $AD=a$, $BC=b$ (рис. 155). Проведем отрезок EF, соединяющий середины оснований трапеции. Очевидно, что двугранный

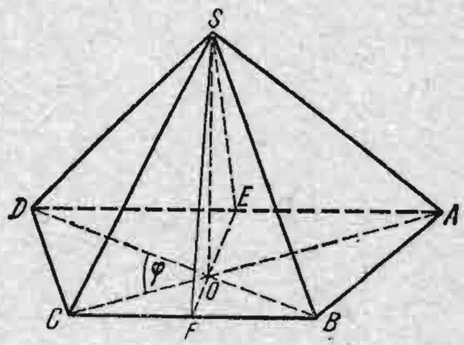


Рис. 155.

угол, прилегающий к AD, меньше угла, прилежащего к BC. Пусть $\angle SEO=\alpha$; тогда $\angle SFO=2\alpha$.

Имеем:

$$SO=OF\cdot\operatorname{tg}2\alpha=OE\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Но

$$OF=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},\ OE=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

и мы приходим к уравнению $a\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}2\alpha$, решив которое, найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{a-2b}{a}}\ ^{*)}.$$

*) Этот результат показывает, что в случае $a\leqslant 2b$ задача теряет смысл.

Далее, получаем:

$$SO = OE \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}};$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a+b}{2}(OE+OF) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

и, наконец, объем пирамиды равен

$$V = \frac{(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{a(a-2b)}.$$

443. Пусть $SL \perp AB$, $SK \perp AC$ и SM — перпендикуляр к плоскости P (рис. 156). По условию $SA = 25$ *см*, $SL = 7$ *см* и $SK = 20$ *см*. По теореме Пифагора легко находим, что $AK = 15$ *см* и $AL = 24$ *см*. Продолжим отрезок KM до пересечения в точке Q со стороной AB. Легко видеть, что $\angle AQK = 30°$, следовательно, $AQ = 30$ *см*. Поэтому $LQ = 6$ *см*, а

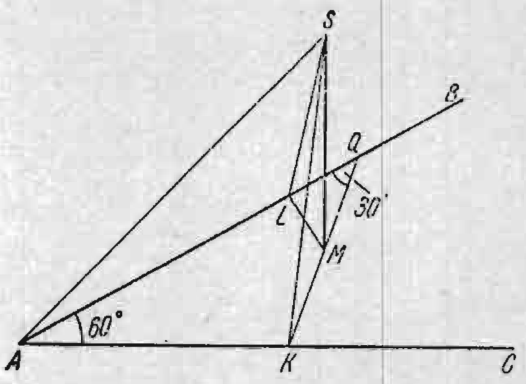


Рис. 156.

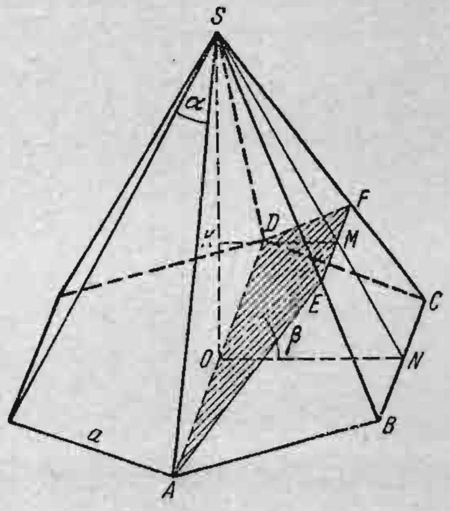


Рис. 157.

$$LM = 6 \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \text{ см}.$$

Из прямоугольного треугольника SML теперь находим, что

$$SM = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{37} \text{ см}.$$

444. Пусть S — вершина пирамиды, SO — высота, $BN = NC$ (рис. 157). Обозначим сторону основания пирамиды через a. Временно положим $\frac{SM}{SN} = \lambda$. Тогда из подобия треугольников легко находим, что

$$EF = a\lambda, \quad KM = a\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,$$

а из $\triangle MKO$ получаем

$$OM = \frac{KM}{\cos \beta} = \frac{a\lambda}{2\cos \beta}\sqrt{3}.$$

Площадь сечения равна

$$\frac{1}{2}(AD+EF)\,OM=\frac{1}{2}(2a+\lambda a)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\lambda}{\cos\beta}a=\frac{\sqrt{3}}{4\cos\beta}\lambda(\lambda+2)\,a^2.$$

Площадь основания, как площадь правильного шестиугольника со стороной a, равна $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а искомое отношение площадей равно

$$\frac{1}{6\cos\beta}\lambda(\lambda+2). \tag{2}$$

Следовательно, задача сводится к нахождению λ. Для этой цели положим $\angle SNO=\varphi$. Тогда по теореме синусов из $\triangle SOM$ получим:

$$SM=SO\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin(\beta+\varphi)}=SO\frac{\cos\beta}{\sin(\beta+\varphi)}.$$

Так как $SO=SN\cdot\sin\varphi$, то

$$\lambda=\frac{SM}{SN}=\frac{\cos\beta\sin\varphi}{\sin(\beta+\varphi)}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\varphi}. \tag{3}$$

Остается найти $\operatorname{ctg}\varphi$. Заметим для этого, что

$$SN=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\quad ON=\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{ON}{SO}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}.$$

Подставив это значение в формулу (3), получим:

$$\lambda=\frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}.$$

445. Из некоторой точки S, отличной от вершины C и лежащей на том из ребер трехгранного угла, которое не является стороной плоского угла α, опустим перпендикуляры SB и SD на стороны указанного плоского угла и перпендикуляр SA на соответствующую грань (рис. 158). Обозначим искомые углы через β_1 и γ_1:

$$\angle SCB=\gamma_1,\quad \angle SCD=\beta_1.$$

Пусть, далее, $\angle ACB = \alpha'$, $\angle ACD = \alpha''$. Полагая $CA = a$, из прямоугольных треугольников CBA, SBA и SBC находим:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{SB}{CB} = \frac{a \sin \alpha'}{a \cos \gamma \cos \alpha'} = \sec \gamma \operatorname{tg} \alpha'.$$

Аналогично получаем:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \sec \beta \operatorname{tg} \alpha''.$$

Задача свелась, следовательно, к нахождению $\operatorname{tg} \alpha'$ и $\operatorname{tg} \alpha''$. Имеем $\alpha' + \alpha'' = \alpha$. Вычисляя разными способами отрезок SA, находим:

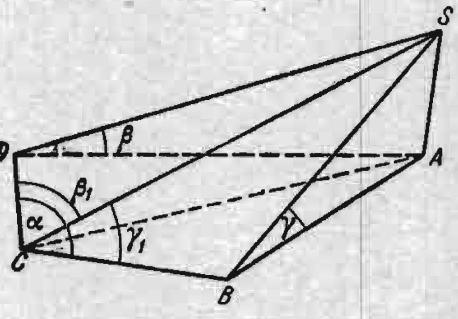


Рис. 158.

$$SA = a \sin \alpha' \operatorname{tg} \gamma$$

и

$$SA = a \sin \alpha'' \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда $\sin \alpha' = \sin \alpha'' \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$ и, следовательно,

$$\sin \alpha' = \sin (\alpha - \alpha') \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma} =$$

$$= (\sin \alpha \cos \alpha' - \cos \alpha \sin \alpha') \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma.$$

В результате, разделив на $\cos \alpha'$ обе части последнего равенства, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma}.$$

Меняя местами β и γ, найдем:

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}.$$

Таким образом, в итоге получаем:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} \gamma}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \gamma};$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{cosec} \beta}{1 + \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta}.$$

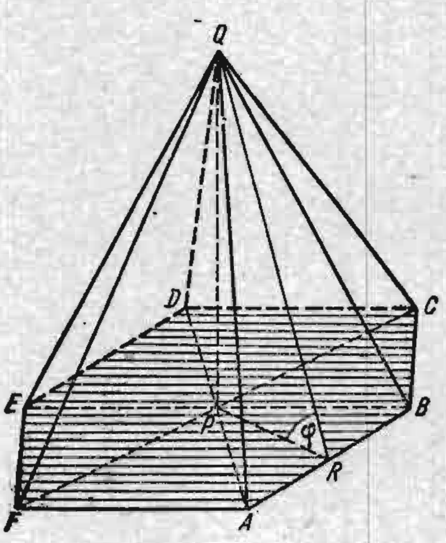


Рис. 159.

446. Так как сумма внутренних углов правильного многоугольника равна πn, то число сторон многоугольника равно $n+2$. Пусть PQ — высота пирамиды (рис. 159). Рассмотрим какую-нибудь боковую грань пирамиды ΔQAB и ее проекцию на основание, т. е. ΔPAB. Из условия задачи следует:

$$\frac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta QAB}} = \frac{1}{k}.$$

Так как площади данных треугольников относятся как их высоты, опущенные на общее основание AB, то для косинуса двугранного угла при основании имеем:

$$\cos\varphi = \frac{PR}{QR} = \frac{1}{k}.$$

Отсюда следует, что апофема основания пирамиды равна

$$d = h \operatorname{ctg}\varphi = h\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

Далее, находим сторону основания

$$a = \frac{2h}{\sqrt{k^2-1}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

Так как площадь основания

$$S = \frac{1}{2}(n+2)\,ad,$$

то объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\frac{(n+2)h^3}{k^2-1}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}.$$

447. Полученное тело есть октаэдр, вершины которого находятся в центрах симметрии граней куба (рис. 160). Объем октаэдра равен удвоенному объему правильной четырехугольной пирамиды $EABCD$ высоты $\frac{a}{2}$ с площадью основания $ABCD$, равной $\frac{1}{2}a^2$. Следовательно, искомый объем равен

$$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

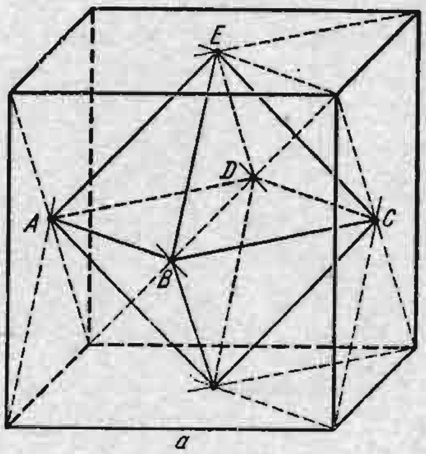


Рис. 160.

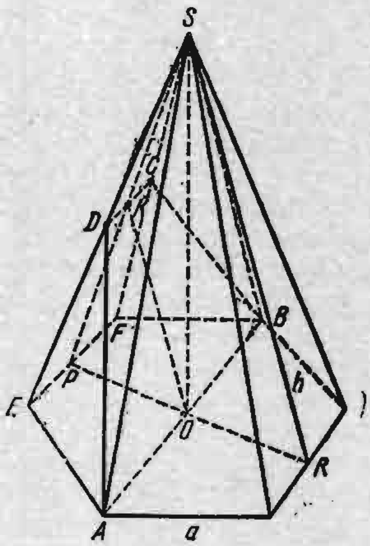


Рис. 161.

448. Легко видеть, что в сечении получится равнобочная трапеция $ABCD$ (см. рис. 161). Пусть P — середина стороны EF основания пирамиды. Рассмотрим $\triangle SPR$, содержащий высоту SO пирамиды. Отрезок KO, очевидно, является высотой трапеции $ABCD$. Так как $KO \parallel SR$, то $KO = \frac{1}{2}h$, где h — апофема пирамиды.

Очевидно также, что $AB=2a$, где a — длина стороны основания пирамиды и $DC=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}a$. Поэтому

$$S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}\left(2a+\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}=\frac{5ah}{8}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}ah\right),$$

и, следовательно, искомое отношение равно $\frac{5}{4}$.

449. Пусть A_1BC_1D — данный тетраэдр, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, полученный указанным построением. Легко сообразить, что ребра тетраэдра являются диагоналями боковых граней параллелепипеда (рис. 162). Тетраэдр может быть получен удалением из параллелепипеда четырех равновеликих пирамид: $ABDA_1$, $BDCC_1$, $A_1B_1C_1B$ и $A_1D_1C_1D$. Так как объем каждой из пирамид, очевидно, равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, то отношение объема $V_{\text{п}}$ параллелепипеда к объему $V_{\text{т}}$ тетраэдра равно

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{т}}}=\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{п}}-\frac{4}{6}V_{\text{п}}}=3.$$

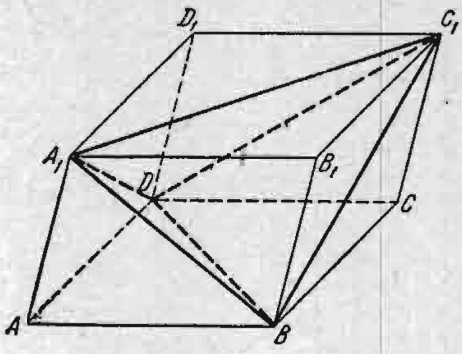


Рис. 162.

450. Легко видеть, что наружные вершины тетраэдров лежат в вершинах некоторого квадрата. Чтобы определить длину его стороны, проведем через вершину S пирамиды и через наружную вершину A одного из тетраэдров плоскость, перпендикулярную к основанию четырехугольной пирамиды (рис. 163). Последняя пройдет через основание O высоты пирамиды, через основание Q высоты тетраэдра и через середину M ребра KL. Опустив на плоскость основания пирамиды перпендикуляр AB, рассмотрим четырехугольник $SOBA$. Его сторона OB является половиной диагонали упомянутого квадрата и подлежит определению. Легко, однако, обнаружить, что $SOBA$ — прямоугольник. В самом деле, положив $\angle OMS=\alpha$, $\angle ASM=\beta$, находим:

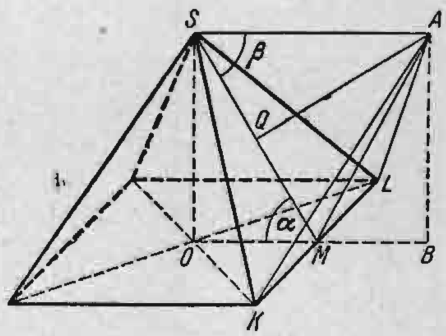


Рис. 163.

$$\cos\alpha=\frac{OM}{MS}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

и

$$\cos\beta=\frac{QS}{SA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Поэтому SA и OB параллельны и, следовательно,

$$OB=SA=a.$$

Таким образом, искомое расстояние равно $a\sqrt{2}$.

451. Предположим, что секущая плоскость проведена через некоторую точку диагонали HP данного куба (рис. 164). Рассмотрим сначала те сечения, которые пересекают диагональ в точках отрезка OP. Выделим сечение QRS, проходящее через три вершины куба; оно, очевидно, принадлежит рассматриваемой совокупности. Это равносторонний треугольник со стороной $a\sqrt{2}$. Нетрудно вычислить, что расстояние данного сечения от центра куба равно $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Очевидно, что при $x\geqslant\frac{a\sqrt{3}}{6}$ в сечении получаются равносторонние треугольники. Так как отношение сторон рассматриваемых треугольников равно отношению их расстояний до точки P, то

$$\frac{MN}{QR}=\frac{OP-x}{OP-\frac{a\sqrt{3}}{6}}.$$

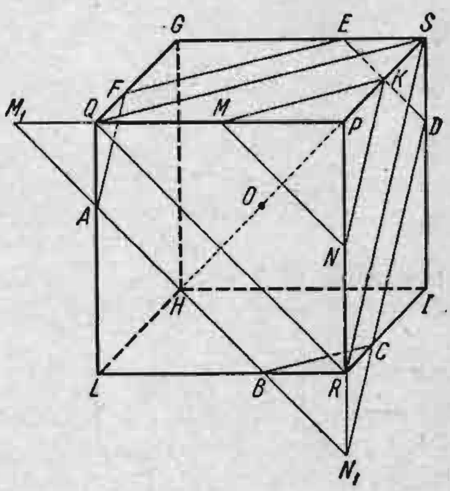


Рис. 164.

Отсюда, принимая во внимание, что $QR=a\sqrt{2}$ и $OP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, находим:

$$MN=\frac{3}{2}\sqrt{2}a-x\sqrt{6}. \qquad (1)$$

Если же $\frac{a\sqrt{3}}{6}>x\geqslant 0$, то в сечении получаются шестиугольники $ABCDEF$.

Стороны шестиугольника AB, FE и CD соответственно параллельны сторонам QR, QS и RS равностороннего треугольника QRS. Поэтому при продолжении, пересекаясь, они образуют углы в 60°. Учитывая еще, что $AF\parallel CD$ и т. д., мы приходим к заключению, что все углы шестиугольника равны 120°. Легко видеть также, что $AB=CD=EF$ и $BC=DE=AF$ (следует принять в расчет, что стороны шестиугольника отсекают на гранях равнобедренные треугольники).

Для того чтобы найти длины сторон шестиугольника, продолжим сторону AB шестиугольника до пересечения в точках M_1 и N_1 с продолжениями ребер PQ и PR. Длина отрезка M_1N_1 может быть, очевидно, вычислена по формуле (1). Зная M_1N_1, находим отрезок

$$BN_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}M_1N_1-a\right)\sqrt{2}=\frac{a}{2}\sqrt{2}-x\sqrt{6}.$$

Отсюда

$$AB=M_1N_1-2BN_1=\frac{a}{2}\sqrt{2}+x\sqrt{6}. \qquad (2)$$

Сторону BC можно было бы определить аналогично. Нетрудно, однако, сообразить, что $BC=BN_1$ и, следовательно,

$$BC=\frac{a}{2}\sqrt{2}-x\sqrt{6}. \qquad (3)$$

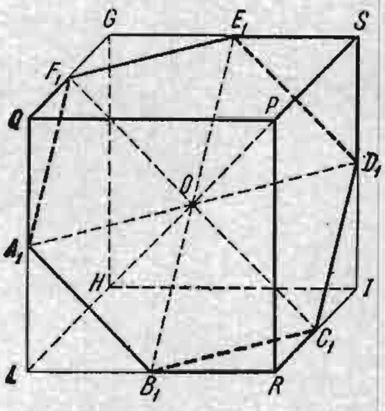


Рис. 165.

Отметим, что в сечении с плоскостью π, проходящей через точку O, получается правильный шестиугольник (см. формулы (2) и (3) при $x=0$). Вершины этого шестиугольника лежат в серединах ребер куба (рис. 165). Легко видеть, что если одну из двух частей, на которые плоскость π разбивает куб, повернуть на 60° около диагонали OP, то шестиугольник совпадает с самим собой, и мы получим два симметрично расположенных относительно плоскости π многогранника. Следовательно, сечение, пересекающее диагональ в точках отрезка HO на расстоянии x от точки O, получается из соответствующего сечения уже рассмотренной совокупности секущих плоскостей поворотом на 60°.

452. В проекции получится правильный шестиугольник со стороной, равной $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Чтобы в этом убедиться, удобно представить себе результат проектирования всевозможных сечений куба, рассмотренных в задаче 451 (см. рис. 164). Все указанные сечения проектируются без изменения размеров, и мы получим фигуру, показанную на рис. 166.

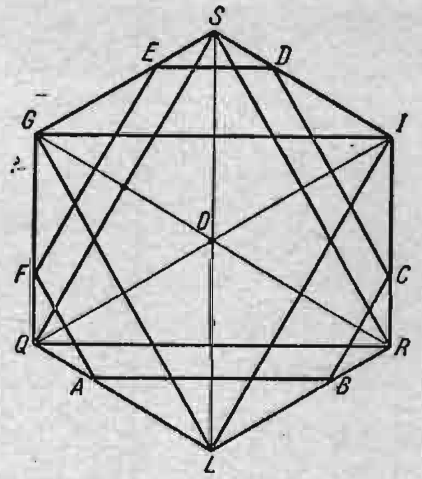


Рис. 166.

Пользуясь тем, что сторона треугольника RQS равна $a\sqrt{2}$, из треугольника GOS находим:

$$GS\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

откуда $GS=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Так как далее сторона правильного шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (см. рис. 165) равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, то искомое отношение площадей оказывается равным

$$\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

453. Пусть $AEFD$ — получающаяся в сечении равнобочная трапеция и пусть G и H — середины ее оснований (см. рис. 167). Опустим из точки H перпендикуляр HK на основание пирамиды. Так как H — середина SN, то

$$HK = \frac{h}{2}, \quad KN = \frac{a}{4}, \quad GK = \frac{3a}{4} \qquad (1)$$

Определим, далее, длины отрезков QO и QS. Так как

$$\frac{QO}{HK} = \frac{GO}{GK},$$

то, учитывая (1), получаем

$$QO = \frac{h}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{3a} = \frac{h}{3}.$$

Отсюда $QS = \frac{2}{3}h$,

$$GQ = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2}. \qquad (2)$$

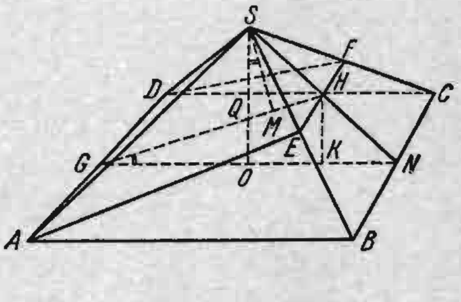


Рис. 167.

Опустим из точки S перпендикуляр SM на GH. Тогда из подобия треугольников SMQ и GOQ имеем

$$\frac{SM}{QS} = \frac{GO}{GQ},$$

и, следовательно, искомое расстояние равно

$$SM = QS \cdot \frac{GO}{GQ} = \frac{2ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

454. Рассматриваемое тело составлено из двух пирамид с общим основанием KMN (рис. 168). Высоту OR нижней пирамиды легко

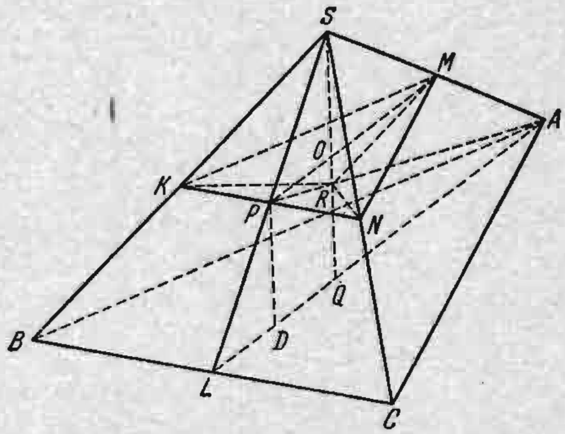


Рис. 168.

найти, опустив из точки P (середины стороны KN) перпендикуляр PD на основание пирамиды. Точка D при этом разделит отрезок QL

пополам. Используя этот факт, из $\triangle APD$ получаем:

$$\frac{PD}{RQ}=\frac{DA}{QA}=\frac{5}{4}.$$

Отсюда $RQ=\frac{4}{5}PD$, и, следовательно,

$$OR=\frac{1}{5}PD=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{30}.$$

Мы воспользовались здесь тем, что в правильном тетраэдре высота равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Искомый объем равен $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{80}$.

455. Пусть $AMKN$ — четырехугольник, получающийся в сечении, и Q — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 169). Рассматривая $\triangle SAC$, легко заметить, что Q лежит на пересечении медиан этого треугольника. Поэтому

$$\frac{MN}{BD}=\frac{SQ}{SO}=\frac{2}{3},$$

и значит, $MN=\frac{2}{3}b$. Далее из прямоугольного треугольника SAC находим

$$AK=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{q^2+a^2}.$$

Так как $AK\perp MN$, то

$$S_{\text{сеч}}=\frac{1}{2}AK\cdot MN=\frac{b}{6}\sqrt{q^2+a^2}.$$

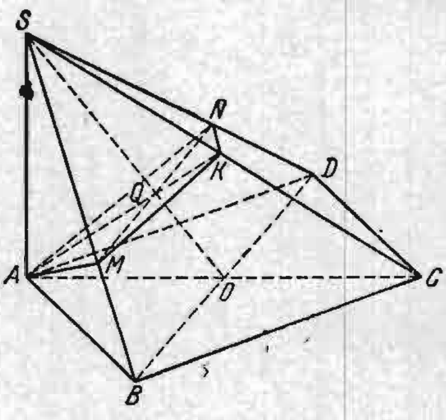


Рис. 169.

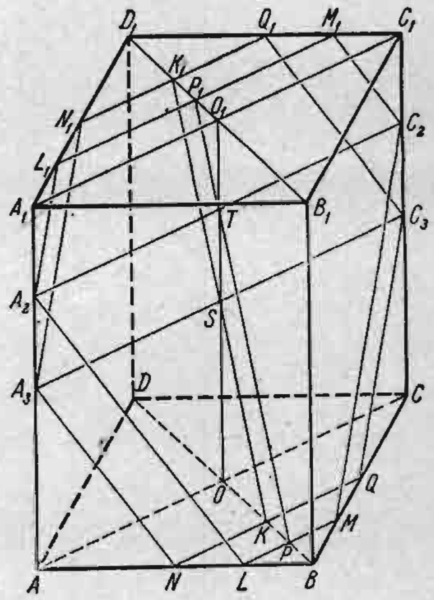


Рис. 170.

456. Пусть NQN_1Q_1 и LML_1M_1 — параллельные сечения призмы (рис. 170), a — длина диагонали AC основания, H — длина отрезка KK_1. Тогда площадь первого сечения равна

$$S=\frac{H}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{4}Ha.$$

Площадь второго сечения будет

$$S'=\frac{1}{2}PT(A_2C_2+LM)+\frac{1}{2}P_1T(A_2C_2+L_1M_1).$$

Но

$$A_2C_2=a,\quad LM=\frac{a}{4},\quad L_1M_1=\frac{3}{4}a,\quad PT=\frac{3}{4}H,\quad P_1T=\frac{1}{4}H,$$

что легко усматривается из подобия соответствующих треугольников. В силу этого получаем:

$$S'=\frac{11}{16}aH$$

и, следовательно,

$$S'=\frac{11}{12}S.$$

Замечание. Эта задача может быть весьма просто решена другим путем, если принять во внимание формулу

$$S_{\text{пр}}=S\cos\varphi, \qquad (1)$$

где S — площадь некоторого многоугольника, расположенного в плоскости P, $S_{\text{пр}}$ — площадь проекции этого многоугольника на плоскость Q, φ — угол между плоскостями P и Q.

Согласно формуле (1) площади рассматриваемых в задаче параллельных сечений относятся как площади их проекций. И наша задача сводится к нахождению площадей двух фигур: $L_1'M_1'CMLA$ и $N_1'Q_1'CQNA$ (рис. 171) (буквы со штрихами обозначают проекции соответствующих точек на основание призмы).

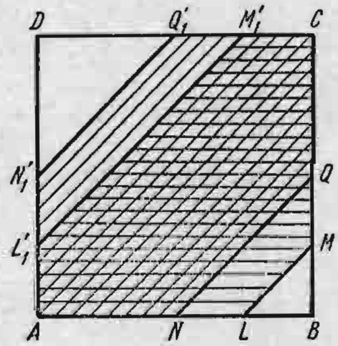


Рис. 171.

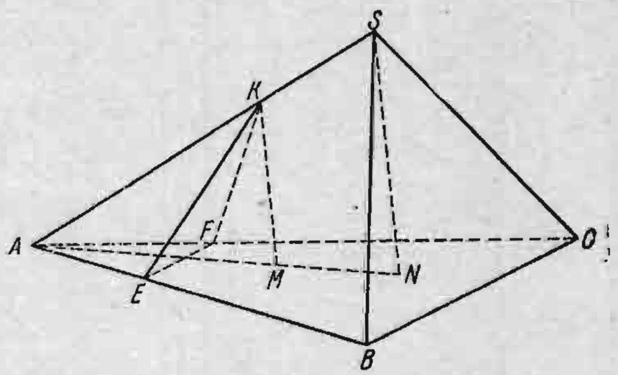


Рис. 172.

457. Рассмотрим пирамиду $KAEF$, являющуюся одним из многогранников (см. рис. 172). Мы считаем, что

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3},$$

и, следовательно,

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}. \qquad (1)$$

Пусть, далее, KM и SN — высоты пирамид $KAEF$ и $SABC$. Легко видеть, что

$$\frac{KM}{SN}=\frac{AK}{AS}=\frac{2}{3}.$$

Поэтому $KM=\frac{2}{3}SN$ и, учитывая (1), мы получаем, что

$$V_{KAEF}=\frac{2}{27}V_{SABC}.$$

Искомое отношение равно $\frac{2}{25}$.

458. Примем грань с площадью S_0 за основание ABC данной пирамиды $ABCD$. Пусть DO — высота пирамиды, а DA_1, DB_1, DC_1 — высоты боковых граней (рис. 173).

По теореме о трех перпендикулярах $OC_1 \perp AB$, $OA_1 \perp BC$ и $OB_1 \perp AC$, в силу чего углы $\angle DC_1O$, $\angle DA_1O$ и $\angle DB_1O$ являются линейными углами соответствующих двугранных углов и по условию задачи равны. Отсюда следует равенство треугольников DOC_1, DOA_1 и DOB_1. Для удобства вычислений введем следующие обозначения:

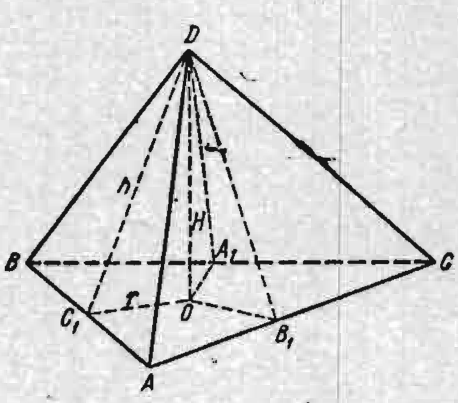


Рис. 173.

$$DO=H, \qquad DC_1=DA_1=DB_1=h,$$
$$OC_1=OA_1=OB_1=r,$$
$$S_1+S_2+S_3=S$$

Очевидно, что r есть радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V=\frac{1}{3}S_0H. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника DOC_1 получим:

$$H=\sqrt{h^2-r^2}. \qquad (2)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению апофемы h и радиуса r. Из формулы $S_3=\frac{1}{2}ABh$ и ей аналогичных найдем выражения для сторон треугольника ABC:

$$AB=\frac{2S_3}{h}, \quad BC=\frac{2S_1}{h}, \quad AC=\frac{2S_2}{h}.$$

Следовательно, полупериметр будет

$$p=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=\frac{S_3}{h}+\frac{S_1}{h}+\frac{S_2}{h}=\frac{S}{h}.$$

Далее,

$$p-AB=\frac{S}{h}-\frac{2S_3}{h}=\frac{S-2S_3}{h},$$

$$p-BC=\frac{S-2S_1}{h}, \quad p-AC=\frac{S-2S_2}{h},$$

и по формуле Герона

$$S_0^2=p(p-AB)(p-BC)(p-AC)=$$

$$=\frac{S}{h}\cdot\frac{S-2S_1}{h}\cdot\frac{S-2S_2}{h}\cdot\frac{S-2S_3}{h}=\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4}.$$

Отсюда

$$h=\frac{\sqrt[4]{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}}{\sqrt{S_0}}. \tag{3}$$

Радиус r вписанной окружности найдем из формулы, выражающей площадь S_0 треугольника ABC через этот радиус и полупериметр:

$$S_0=pr=\frac{S}{h}r,$$

откуда

$$r=h\frac{S_0}{S}.$$

Подставив это значение в формулу (2), получим:

$$H=\sqrt{h^2-h^2\frac{S_0^2}{S^2}}=\frac{h}{S}\sqrt{S^2-S_0^2}.$$

Подставив сюда значение h из равенства (3) и внеся полученный результат в формулу (1), окончательно получим:

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2-S_0^2)}\sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}.$$

459. Разрежем куб пополам диагональной плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, и получившийся многогранник повернем на 90°. В результате возникнет изображенная на рис. 174 конфигурация.

Общая часть складывается из прямоугольного параллелепипеда $ABCDD_1A_1B_1C_1$ и правильной пирамиды $SABCD$. Высоту параллелепипеда находим из $\triangle BB_1T$:

$$h=B_1T=\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}.$$

Высота пирамиды

$$H=\frac{a\sqrt{2}}{2}-h=\frac{a}{2}.$$

Площадь общего основания параллелепипеда и пирамиды равна a^2.

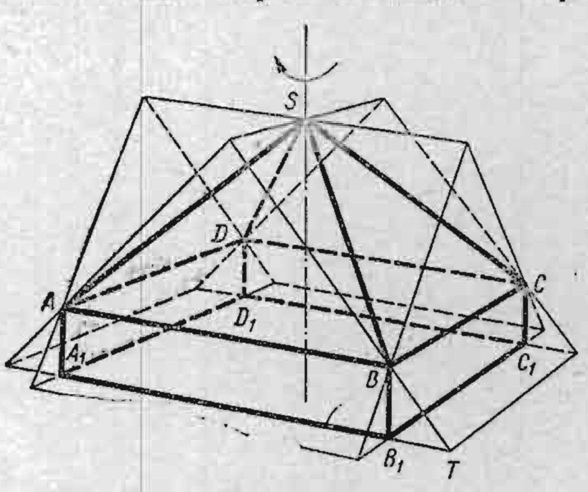


Рис. 174.

Таким образом, искомый объем общей части равен

$$V=2\left[a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2}\right)+a^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\right],$$

или

$$V=a^3\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right).$$

460. Пусть S — вершина конуса, $SO=h$ — высота конуса, ASB — треугольник, получившийся в сечении, C — середина хорды AB, $AO=r$ (рис. 175). Замечая, что $\angle AOC=\frac{\beta}{2}$, находим:

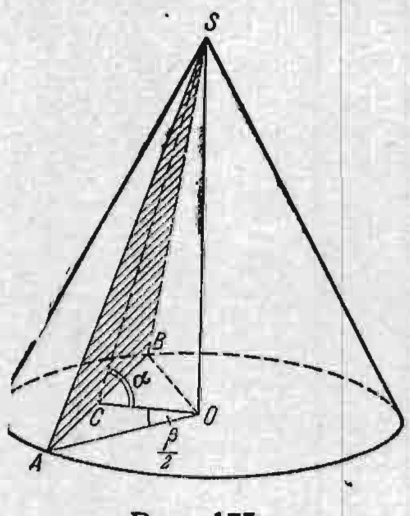


Рис. 175.

$$CO=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad h=CO\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \quad r=\frac{a}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Поэтому объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi a^3}{24}\frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\beta}{2}}{\sin^3\frac{\beta}{2}}.$$

461. Пусть α — искомый угол, l — образующая цилиндра, l_1 — образующая конуса, r — радиус оснований конуса и цилиндра (рис. 176). По условию

$$\frac{2\pi r\,(r+l)}{\pi r\,(r+l_1)}=\frac{7}{4},$$

$$\frac{r+l}{r+l_1}=\frac{7}{8}.$$

Следовательно,

$$\frac{1+\frac{l}{r}}{1+\frac{l_1}{r}}=\frac{7}{8}, \quad \text{или} \quad \frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{7}{8},$$

и, значит,

$$\sin\alpha+8\cos\alpha-7=0.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}, \quad \alpha=\arcsin\frac{3}{5}.$$

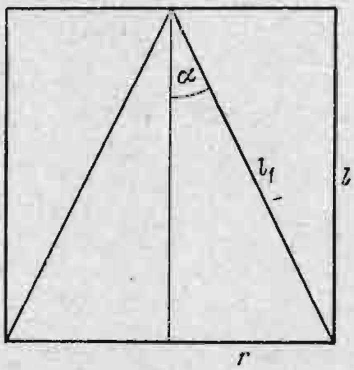


Рис. 176.

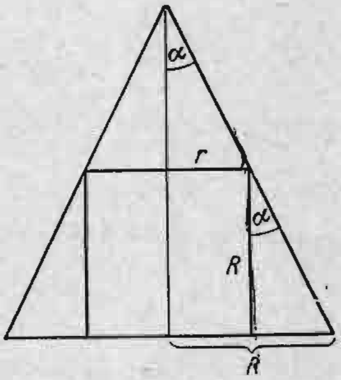


Рис. 177.

462. Пусть α — искомый угол, R — радиус основания конуса, r — радиус основания цилиндра (рис. 177). Имеем:

$$\frac{2\pi r^2+2\pi rR}{\pi R^2}=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}=\frac{3}{2}.$$

Но $\frac{R-r}{R}=\operatorname{tg}\alpha$ и, значит, $\frac{r}{R}=1-\operatorname{tg}\alpha$. В результате получаем уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$:

$$4\operatorname{tg}^2\alpha-12\operatorname{tg}\alpha+5=0.$$

Решив его, находим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

Легко видеть, однако, что $\operatorname{tg}\alpha=\frac{R-r}{R}<1$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

и, следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

463. Пусть l — длина образующей и R — радиус основания конуса, x — длина ребра призмы, r — радиус круга, описанного около основания призмы (рис. 178). Рассмотрим треугольник, образованный высотой конуса, образующей конуса, проходящей через одну из вершин призмы, и проекцией этой образующей на основание конуса. Имеем:

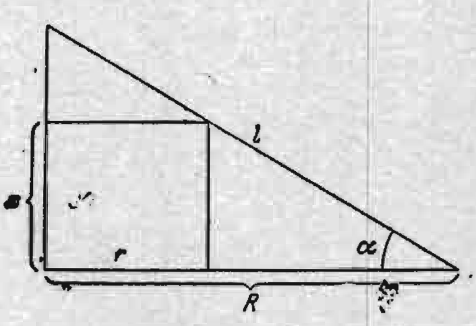


Рис. 178.

$$\frac{l \sin \alpha}{l \sin \alpha - x} = \frac{R}{r}.$$

Так как $r = \dfrac{x}{2 \sin \dfrac{\pi}{n}}$ и $R = l \cos \alpha$,

то мы получим:

$$x = \frac{2l \sin \alpha \sin \dfrac{\pi}{n}}{2 \sin \dfrac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Следовательно, полная поверхность призмы будет равна

$$S = \frac{1}{2} nx^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} + nx^2 = n \left(\frac{2l \sin \alpha \sin \dfrac{\pi}{n}}{2 \sin \dfrac{\pi}{n} + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \right).$$

464. Рассмотрим равнобочную трапецию AB_1C_1D, получающуюся в результате проектирования данной трапеции $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную к оси цилиндра (рис. 179). Так как последняя описана около окружности, то

$$AB_1 = AK + KB_1 = $$

$$= AM + B_1N_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника APB_1 получаем:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + h^2 \sin^2 \alpha.$$

Отсюда

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{ab}}{h} \text{ и } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{ab}}{h}.$$

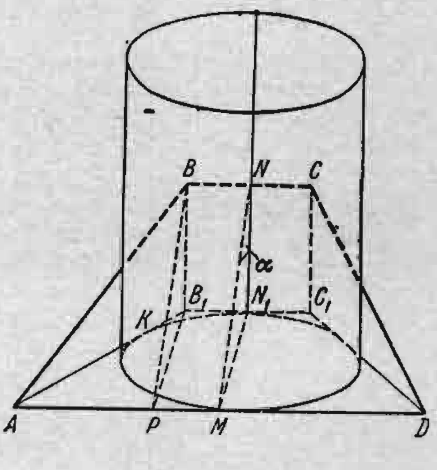


Рис. 179.

465. Пусть R — радиус шара и пусть a, b и c — соответственно катеты и гипотенуза треугольника ABC, лежащего в основании (рис. 180). Имеем:

$$a=\frac{h}{\cos\alpha},\quad b=\frac{h}{\sin\alpha},\quad c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{h}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Очевидно, радиус R равен радиусу круга, вписанного в $\triangle ABC$. Поэтому

$$R=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=$$

$$=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{h}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

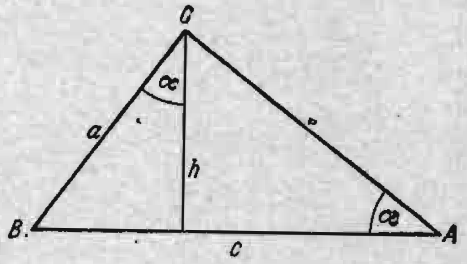


Рис. 180.

и, следовательно, объем призмы равен

$$V=S_{\triangle ABC}2R=$$

$$=\frac{2h^3}{\sin 2\alpha\,(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}.$$

466. Объем пирамиды равен сумме объемов пирамид, которые получатся, если соединить центр вписанного шара O со всеми вершинами пирамиды. Высота каждой такой пирамиды равна радиусу r шара, вписанного в данную пирамиду. Если S—площадь основания пирамиды, S_1—боковая поверхность, то объем пирамиды будет

$$V=\frac{1}{3}(S_1+S)\,r. \qquad (1)$$

Так как, с другой стороны,

$$V=\frac{1}{3}hS,$$

то для r получаем формулу

$$r=\frac{hS}{S_1+S}. \qquad (2)$$

Из условий задачи следует:

$$S=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},$$

$$S_1=\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}},$$

$$h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Подставляя эти выражения в (2), находим:

$$r=\frac{na^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}}{4\left(\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}+\frac{na}{2}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\right)}=\frac{a\sqrt{4b^2-a^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{n}}}{2\left(a+\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\sqrt{4b^2-a^2}\right)}.$$

467. Обозначим через r радиус вписанного шара и через a длину отрезка OE (рис. 181). Тогда

$$r = a \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — половина искомого угла (см. рис. 181). Следовательно, объем шара равен

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

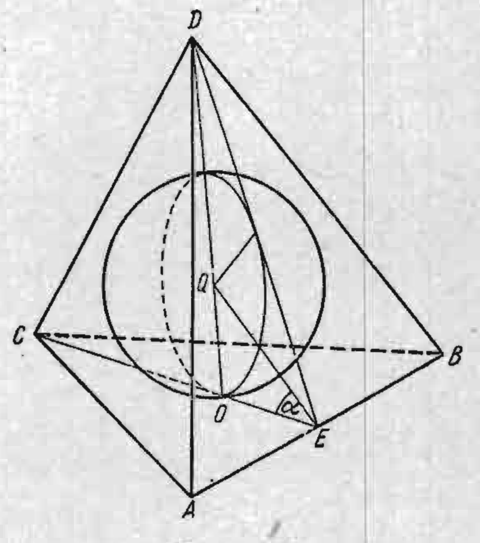


Рис. 181.

Так как $DO = a \operatorname{tg} 2\alpha$, а $AB = 2\sqrt{3}a$, то объем пирамиды будет

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} DO \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \sqrt{3}\, a^3 \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Так как по условию задачи

$$\frac{V_{\text{пир}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi},$$

то, выражая $\operatorname{tg} 2\alpha$ через $\operatorname{tg} \alpha$, получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{2}{9}.$$

Отсюда $(\operatorname{tg} \alpha)_1^2 = \frac{1}{3}$ и $(\operatorname{tg} \alpha)_2^2 = \frac{2}{3}$. Учитывая, что α — острый угол, находим:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$$

и

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

468. Пусть a — сторона и b — апофема правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды, H — высота пирамиды. Тогда (рис. 182, *а* и *б*)

$$b = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

$$a = 2b \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = 2r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n};$$

площадь основания равна

$$S_{\text{осн}} = n \frac{ab}{2} = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Далее, $H = b \operatorname{tg}\alpha = r \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Отсюда объем пирамиды

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} nr^3 \operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Так как объем шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, то

$$\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{пир}}} = \frac{4\pi}{n} \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

469. Пусть a — сторона основания пирамиды, b — апофема основания, R — радиус окружности, описанной около основания, h — высота пирамиды, r — радиус вписанного в пирамиду шара, y — высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды (рис. 183, *а* и *б*). Тогда

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{n}, \quad b = R\cos\frac{\pi}{n},$$

кроме того

$$y = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R\left(1 + \cos\frac{\pi}{n}\right),$$

$$h = \sqrt{y^2 - b^2} = R\sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Из уравнения

$$\frac{r}{h-r} = \frac{b}{y}$$

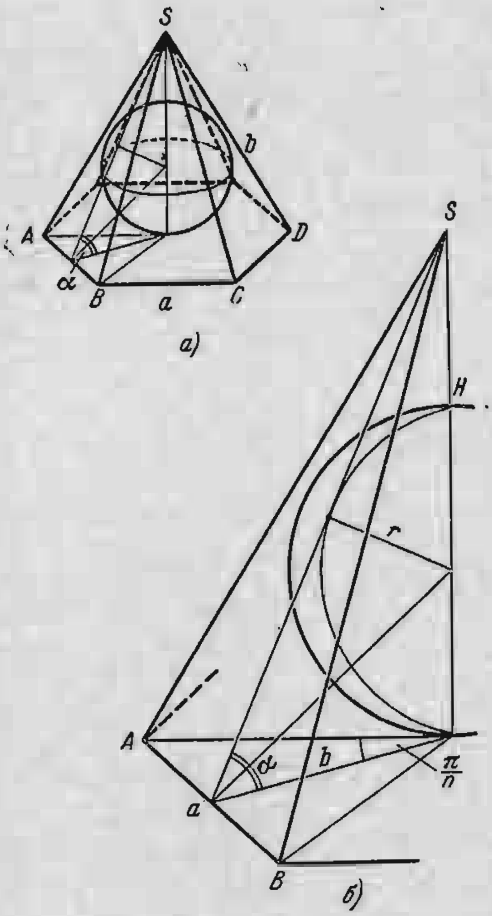


Рис. 182.

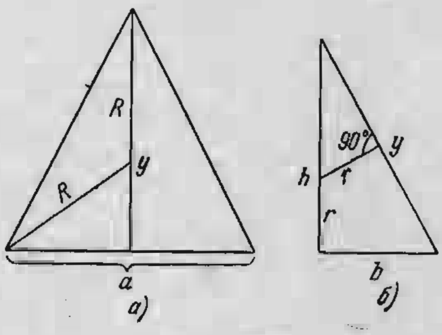


Рис. 183.

(см. рис. 183, *б*) находим:

$$r = \frac{hb}{y+b} = \frac{R\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{1 + 2\cos\frac{\pi}{n}}}{1 + 2\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{\frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}nab}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{n\sin\frac{\pi}{n}\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{4\pi\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

470. Пусть a — сторона основания пирамиды $SABCD$, h — высота пирамиды, r — радиус шара, описанного около пирамиды (рис. 184). Тогда

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

и

$$r=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Если SE — диаметр описанного шара, то из прямоугольного треугольника SBE следует:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=h\,(2r-h).$$

Так как, однако, из треугольника FO_1S имеем $\frac{a}{2}=h\operatorname{ctg}\alpha$, то, исключая a, находим:

$$h=\frac{2r}{2\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=\frac{1}{1+2\operatorname{ctg}^2\alpha}\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

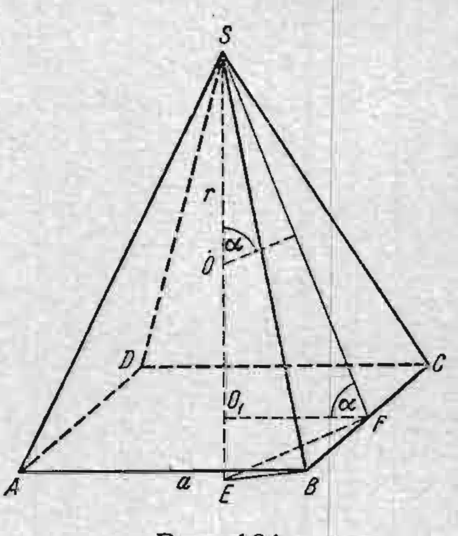


Рис. 184.

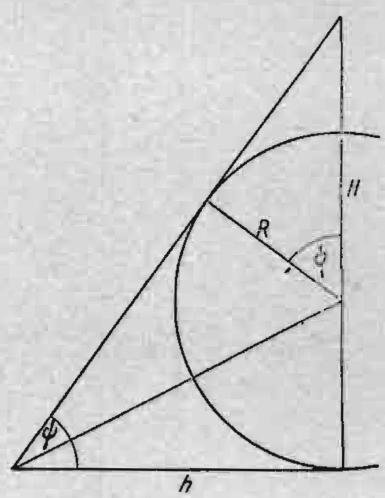


Рис. 185.

471. Используя равенство двугранных углов, как и в задаче 458 нетрудно показать, что перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, проектируется в центр симметрии ромба. Легко также видеть, что центр вписанного шара лежит на указанном перпендикуляре.

Пусть a — сторона ромба, $2h$ — высота ромба, H — высота пирамиды (рис. 185). Тогда площадь основания $S=a^2\sin\alpha$ или, так как $a=\frac{2h}{\sin\alpha}$,

$$S=\frac{4h^2}{\sin\alpha}.$$

Но $h=R\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$ (см. рис. 185, где изображено сечение, проходящее через высоту пирамиды и высоту ромба). Ясно также, что

$$H=R+\frac{R}{\cos\psi}=R\,\frac{2\cos^2\frac{\psi}{2}}{\cos\psi}.$$

В результате получаем объем призмы

$$V=\frac{8}{3}R^3\,\frac{\cos^4\frac{\psi}{2}}{\sin\alpha\cos\psi\sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

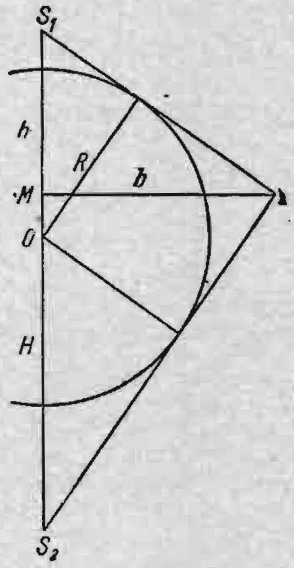


Рис. 186.

472. Проведем плоскость через вершины S_1 и S_2 пирамид и середину A одной из сторон основания (рис. 186). Радиус полукруга, вписанного в треугольник AS_1S_2 так, что его диаметр лежит на S_1S_2, очевидно, равен радиусу вписанного шара. Пусть O — центр полукруга. Обозначим через b высоту в треугольнике AS_1S_2, опущенную на сторону S_1S_2. Так как b есть апофема правильного n-угольника, то

$$b=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}.$$

Радиус шара R найдем, подсчитав двумя способами площадь S треугольника AS_1S_2. С одной стороны,

$$S=\frac{b}{2}(H+h),$$

с другой стороны,

$$S=\frac{R}{2}S_1A+\frac{R}{2}S_2A=\frac{R}{2}\left(\sqrt{h^2+b^2}+\sqrt{H^2+b^2}\right).$$

В итоге получаем окончательную формулу

$$R=\frac{\frac{1}{2}a(H+h)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}+\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}}.$$

473. Пусть h_1 и h_2—высоты пирамид, r—радиус круга, описанного около основания (рис. 187). Тогда

$$\frac{a}{2}=r\sin\frac{\pi}{n}.$$

Из прямоугольного треугольника S_1AS_2, вершинами которого являются вершины данных пирамид и одна из вершин основания, найдем

$$h_1h_2=r^2=\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}.$$

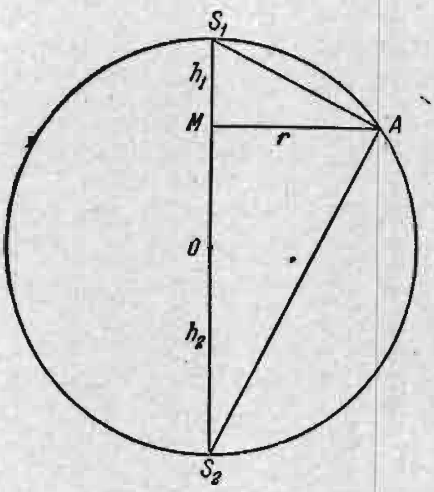


Рис. 187.

Но

$$h_1+h_2=2R.$$

Отсюда

$$h_1=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$h_2=R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Решение возможно, если $R\geqslant\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$.

474. Легко доказать, что середина отрезка, соединяющего центры оснований призмы, является центром вписанного и описанного шаров. Радиус круга, вписанного в основание, равен радиусу вписанного шара. Пусть r—радиус вписанного шара, R—радиус описанного шара. Рассмотрим прямоугольный треугольник, вершинами которого являются одна из вершин основания, центр основания и центр шаров. Имеем $R^2=r^2+r_1^2$, где $r_1=\frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}}$. Отсюда

$$R=r\sqrt{1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Отношение объема описанного шара к объему вписанного шара равно

$$\frac{R^3}{r^3}=\left(1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

475. Радиусы описанного и вписанного шаров равны отрезкам высоты тетраэдра, на которые она делится общим центром этих шаров. Легко обнаружить, что отношение этих отрезков равно 3:1.

В самом деле, из подобных треугольников BQO и BPK (рис. 188) имеем:

$$\frac{R}{r}=\frac{BK}{PK},$$

но

$$\frac{BK}{PK}=\frac{BK}{QK}=3.$$

Так как поверхности шаров относятся как квадраты их радиусов, то искомое отношение равно 9.

476. Объемы правильных тетраэдров относятся как кубы радиусов вписанных в них шаров. Так как шар, вписанный в больший тетраэдр, является описанным вокруг меньшего тетраэдра, то отношение упомянутых радиусов вписанных шаров (см. решение задачи 475) равно 3:1. Следовательно, искомое отношение объемов равно $3^3=27$.

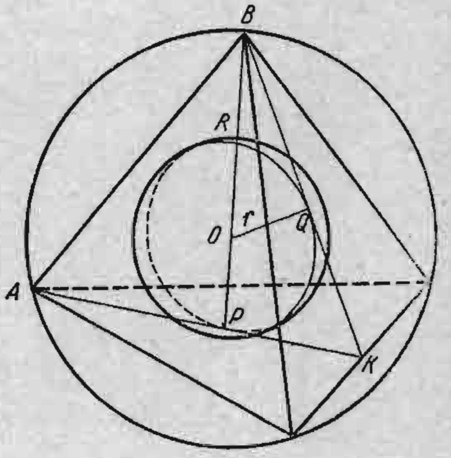


Рис. 188.

477. Допустим, что задача разрешима. Проведем плоскость $A_1B_1C_1$ (см. рис. 189, *а*), касающуюся меньшего шара и параллельную основанию ABC данного тетраэдра. Тетраэдр $SA_1B_1C_1$ описан около шара радиуса r. Легко найти, что высота его $SQ_1=4r$ (см. задачу 475).

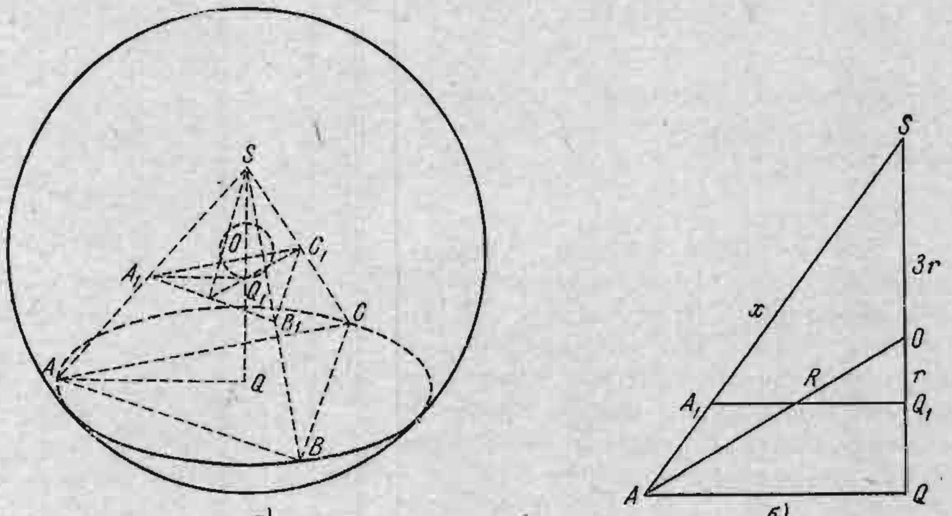


Рис. 189.

Пусть длина ребра тетраэдра $SABC$ равна x. Тогда отрезок $AQ=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, а высота $SQ=x\frac{\sqrt{6}}{3}$. Далее (см. рис. 189, *б*) имеем

$QO = \frac{x\sqrt{6}}{3} - 3r$ и из прямоугольного треугольника AQO следует, что

$$\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(x\frac{\sqrt{6}}{3} - 3r\right)^2 = R^2$$

Решив квадратное уравнение, найдем

$$x_{1,\,2} = r\sqrt{6} \pm \sqrt{R^2 - 3r^2}.$$

В этой формуле следует взять лишь корень со знаком плюс, ибо SA во всяком случае больше, чем $3r$, а $3r > r\sqrt{6}$. Очевидно, что задача возможна при условии $R \geqslant \sqrt{3}r$.

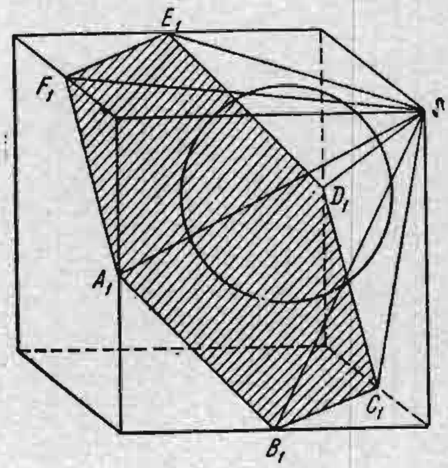


Рис. 190.

478. Пусть $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник, полученный в сечении куба. Задача сводится к определению радиуса шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 190). Сторона основания пирамиды равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а высота равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Пользуясь тем, что радиус шара, вписанного в пирамиду, равен утроенному объему пирамиды, деленному на ее полную поверхность (см. формулу (1) в решении задачи 466), находим:

$$r = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{4}.$$

Следовательно, искомое отношение равно $\frac{2(3+\sqrt{3})^3}{9\pi}$.

479. Пусть O — центр сферы, а AS, BS и CS — данные хорды. Очевидно, что треугольник ABC равносторонний (рис. 191). Легко видеть также, что перпендикуляр SO_1 на плоскость ABC при продолжении проходит через центр сферы O, так как точка O_1 является центром круга, описанного около $\triangle ABC$.

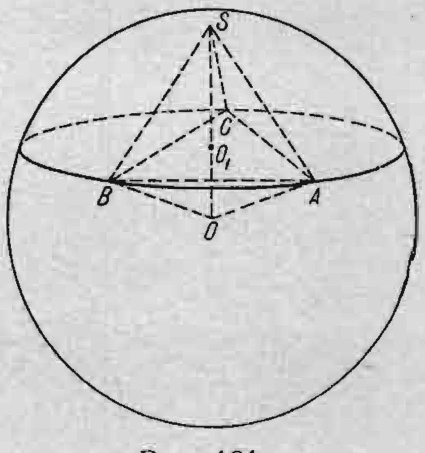


Рис. 191.

Обозначим после этих замечаний через d искомую длину хорд. Из треугольника SAB находим

$$AB = 2d\sin\frac{\alpha}{2}$$

и, следовательно,

$$O_1A = AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,d\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Вычисляя двумя способами площадь равнобедренного треугольника SOA, получаем:

$$\frac{1}{2} R \frac{2}{3} \sqrt{3} d \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} d \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Отсюда

$$d = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

480. Радиус вписанного шара r мы найдем по формуле (ср. формулу (1) в решении задачи 466)

$$r = \frac{3V}{S},$$

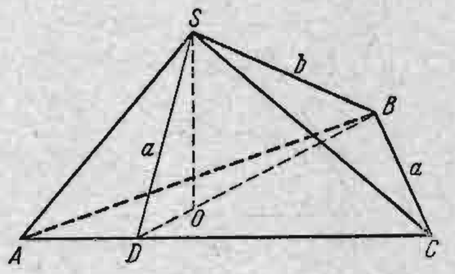


Рис. 192.

где V — объем пирамиды, а S — ее полная поверхность. Найдем сначала объем пирамиды. Заметим для этого, что прямоугольные треугольники BSC и BSA (рис. 192) равны по равным гипотенузам и общему катету. Ввиду этого прямоугольный треугольник ASC является равнобедренным. Так как

$$AS = CS = \sqrt{a^2 - b^2},$$

то, следовательно,

$$V = \frac{1}{3} BS \cdot S_{\triangle ASC} = \frac{1}{3} b \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{2}.$$

Очевидно также, что

$$AD = \sqrt{a^2 - b^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

и, значит,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - b^4}.$$

В итоге после сокращения получаем:

$$r = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

481. Обозначим через r радиус вписанного шара, а через R радиус описанного шара.

Рассмотрим сначала треугольник SFE, одна из сторон которого SF является высотой пирамиды, а другая SE — высотой боковой грани (рис. 193, *а*). Пусть O — центр вписанного шара. Из треугольников SFE и OFE (рис. 193, *б*) имеем:

$$FE = r \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

$$SF = r \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}\varphi.$$

Очевидно, далее, что

$$DF = EF \cdot \sqrt{2} = r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{2}.$$

Обращаясь к рис. 193, *в*, где изображено сечение, проведенное

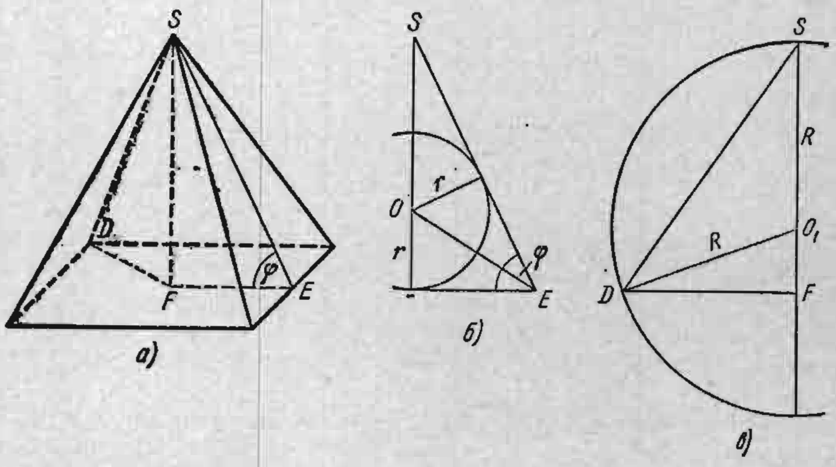


Рис. 193.

через ось пирамиды и ее боковое ребро, мы легко найдем:

$$DO_1^2 = O_1F^2 + DF^2$$

или

$$R^2 = (SF - R)^2 + DF^2.$$

Отсюда

$$R = \frac{SF^2 + DF^2}{2SF}. \qquad (1)$$

Так как $R = 3r$, то, подставляя сюда найденные ранее выражения для SF и DF, получаем уравнение относительно φ:

$$3r = \frac{r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2}{2r \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi},$$

или после упрощения

$$6 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi = 2 + \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Положим, далее, $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$. Заметив, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2z}{1 - z^2}$, мы приходим к уравнению

$$7z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

Отсюда

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}}.$$

Так как $z > 0$, то возможны лишь два ответа:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{7}}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{7}}.$$

482. Всего получается 6 двуугольников (по числу ребер) и 4 треугольника (рис. 194). Обозначим через S_1 площадь каждого из треугольников и через S_2 — площадь каждого из двуугольников. Имеем:

$$4S_1 + 6S_2 = 4\pi R^2. \qquad (1)$$

Пусть S_0 — сумма площадей одного треугольника и трех прилежащих к нему двуугольников. S_0 есть площадь сферического сегмента, отсеченного плоскостью грани тетраэдра. Эта площадь равна $2\pi Rh$, где h — высота сегмента. Так как высота тетраэдра делится центром сферы в отношении 3:1 (см. задачу 475), то

$$H = R + \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R,$$

откуда находим $h = 2R - \frac{4}{3}R = \frac{2}{3}R$.

Далее,

$$S_1 + 3S_2 = 2\pi R\cdot\frac{2}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^2. \qquad (2)$$

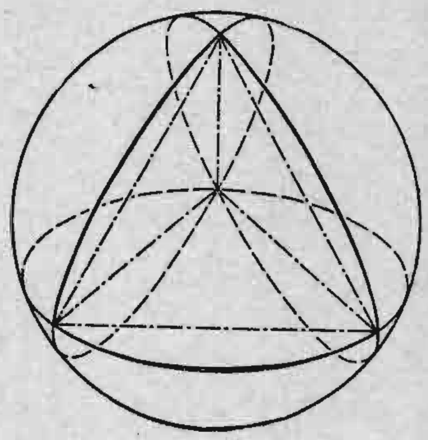


Рис. 194.

Решив систему, состоящую из уравнений (1) и (2), относительно неизвестных S_1 и S_2, получаем:

$$S_1 = \frac{2}{3}\pi R^2, \qquad S_2 = \frac{2}{9}\pi R^2.$$

483. Пусть R — радиус основания конуса, α — угол между осью конуса и образующей, r — радиус вписанного шара. В осевом сечении конуса имеем равнобедренный треугольник ABC (рис. 195). Радиус круга, вписанного в этот треугольник, равен радиусу r вписанного в конус шара. Пусть O — центр круга, $\angle OCA = \beta$. Тогда очевидно, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{R}$. Но по условию задачи

$$\frac{4\pi r^2}{\pi R^2} = 4\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Так как, кроме того, $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, искомый угол $2\alpha = \frac{\pi}{3}$.

484. Пусть r — радиус полусферы, R — радиус основания конуса, l — образующая конуса, α — угол между осью конуса и образующей.

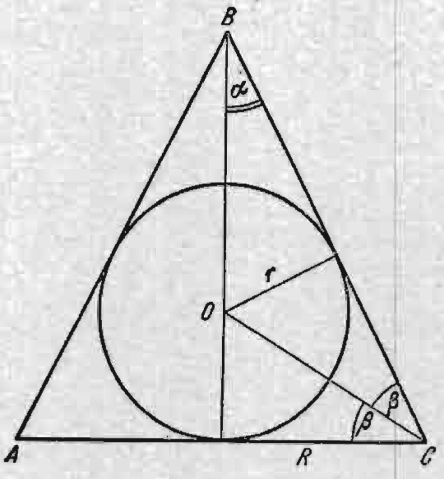


Рис. 195.

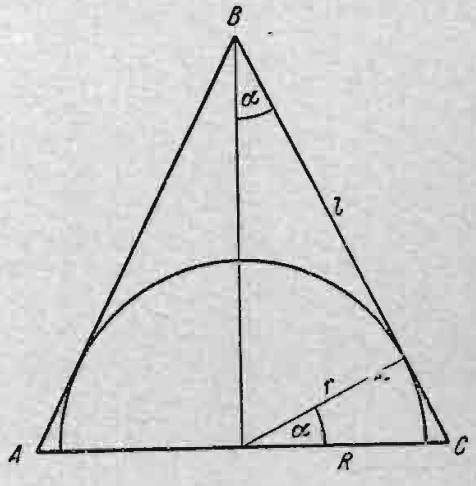


Рис. 196.

По условию задачи имеем

$$\frac{\pi R(l+R)}{2\pi r^2}=\frac{18}{5}. \qquad (1)$$

Введем в это равенство угол α. Для этого рассмотрим равнобедренный $\triangle ABC$ (рис. 196), получающийся в осевом сечении конуса. Из $\triangle ABC$ находим

$$R=l\sin\alpha, \quad r=R\cos\alpha=l\sin\alpha\cos\alpha.$$

Подставляя эти выражения в левую часть (1), получаем

$$\frac{1}{2}\,\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\frac{18}{5}.$$

Так как $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, то, сократив дробь на $1+\sin\alpha$, будем иметь

$$36\sin^2\alpha-36\sin\alpha+5=0,$$

откуда

$$\sin\alpha_1=\frac{5}{6} \quad \text{и} \quad \sin\alpha_2=\frac{1}{6}.$$

Следовательно, искомый угол при вершине конуса равен $2\arcsin\frac{5}{6}$ или $2\arcsin\frac{1}{6}$.

485. Пусть h — высота конуса, r — радиус основания, l — образующая конуса и α — угол между образующей и высотой (рис. 197). По условию задачи имеем $\pi rl=k\pi r^2$; отсюда $l=kr$ и, следовательно,

$\sin\alpha=\frac{1}{k}$. Из прямоугольного треугольника ABS получаем:

$$r=2R\cos\alpha\sin\alpha=2R\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2},$$

$$h=2R\cos\alpha\cos\alpha=2R\,\frac{k^2-1}{k^2}.$$

Искомый объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{8}{3}\pi R^3\left(\frac{k^2-1}{k^3}\right)^2.$$

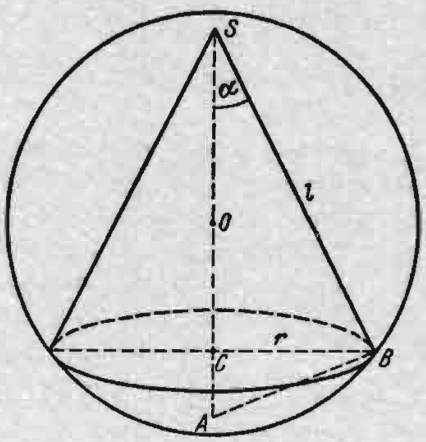


Рис. 197.

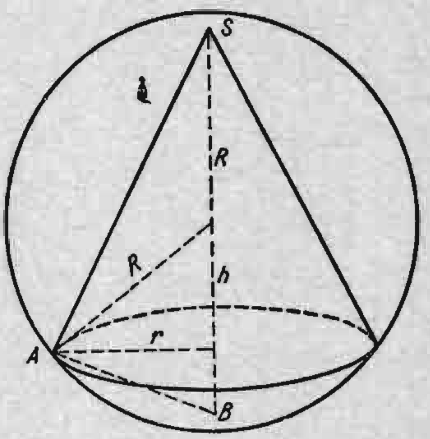


Рис. 198.

486. Пусть R — радиус шара, h — высота конуса, r — радиус основания конуса. Отношение объема конуса к объему шара равно

$$x=\frac{r^2h}{4R^3}=\frac{q}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Из треугольника SBA (рис. 198) имеем $r^2=h(2R-h)$. Отсюда

$$\frac{r^2}{R^2}=\frac{h}{R}\left(2-\frac{h}{R}\right)=q\,(2-q)$$

и, следовательно,

$$x=\frac{q^2}{4}\,(2-q).$$

Задача разрешима, очевидно, тогда, когда $0<q<2$.

487. Пусть R — радиус шара, $S_ш$ и $V_ш$ — поверхность и объем шара, $S_к$ и $V_к$ — полная поверхность и объем конуса, h — высота конуса, r — радиус основания конуса (рис. 199). Тогда

$$\frac{V_ш}{V_к}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{4R^3}{r^2h},$$

$$\frac{S_ш}{S_к}=\frac{4\pi R^2}{\pi r\,(l+r)}=\frac{4R^2}{r\,(l+r)}.$$

Заметим, однако, что

$$\frac{l}{r}=\frac{h-R}{R}=\frac{h}{R}-1$$

и, следовательно,

$$\frac{l+r}{r}=\frac{h}{R},$$

получаем:

$$\frac{V_ш}{V_к}=\frac{S_ш}{S_к}=\frac{1}{n}.$$

Замечание: К тому же результату можно прийти и более коротким путем, если воспользоваться следующей формулой:

$$V_к=\frac{1}{3}S_к R, \qquad (1)$$

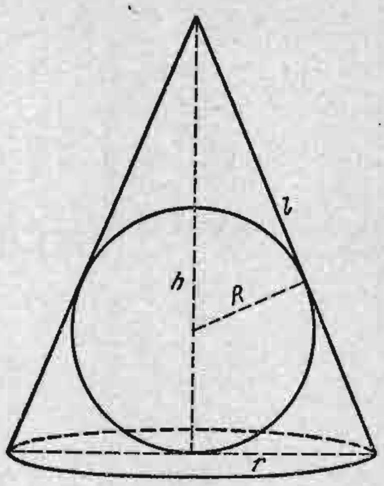


Рис. 199.

где $S_к$ — полная поверхность конуса, а R — радиус вписанного в него шара. Формула (1) легко получается из соответствующей формулы для пирамиды (см. решение задачи 466) предельным переходом. Действительно, так как, очевидно,

$$V_ш=\frac{1}{3}S_ш\cdot R, \qquad (2)$$

то, разделив (2) на (1), получим

$$\frac{V_ш}{V_к}=\frac{S_ш}{S_к}=\frac{1}{n}.$$

488. Пусть S — полная поверхность конуса, S_1 — поверхность шара, r_1 и r — радиусы верхнего и нижнего оснований конуса, l — длина его образующей. Пусть далее $CMDL$ — трапеция, полученная в осевом сечении конуса, O — центр вписанного шара, $AB \perp LD$ и $OF \perp MD$ (рис. 200). Имеем:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi l(r+r_1)+\pi r_1^2+\pi r^2}{4\pi R^2}=m. \qquad (1)$$

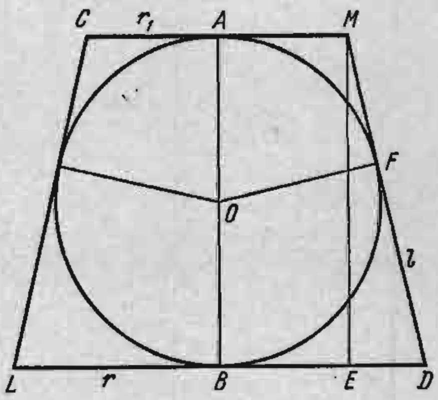


Рис. 200.

Легко видеть, что $AM=MF$ и $BD=FD$, так как O — центр вписанного в трапецию круга, поэтому

$$l=r+r_1. \qquad (2)$$

Воспользовавшись этим равенством, из равенства (1) получим:

$$l^2+r_1^2+r^2=4mR^2. \qquad (3)$$

Из треугольника MED, далее, следует:

$$l^2=(r-r_1)^2+4R^2. \qquad (4)$$

Исключая l из равенств (2) и (4), найдем:

$$rr_1 = R^2. \tag{5}$$

С помощью этого равенства, исключив l из (2) и (3), мы получим:

$$r^2 + r_1^2 = R^2(2m-1). \tag{6}$$

Решив теперь систему (5), (6), найдем:

$$r = \frac{R}{2}\left(\sqrt{2m+1} + \sqrt{2m-3}\right);$$

$$r_1 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-3}\right).$$

Таким образом, при $m < \frac{3}{2}$ задача не имеет решения; при $m = \frac{3}{2}$ усеченный конус превращается в цилиндр.

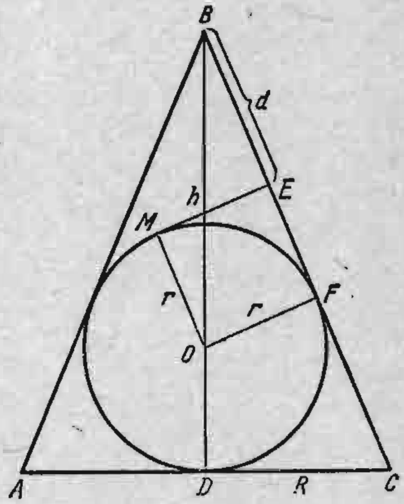


Рис. 201.

489. Возможны два случая: 1) вершина конуса и шар лежат по разные стороны от касательной плоскости; 2) вершина конуса и шар лежат по одну сторону от касательной плоскости.

Рассмотрим первый случай. Проведем плоскость через ось конуса и образующую конуса BC, о которой говорится в условии задачи (рис. 201). Эта плоскость в сечении с конусом даст треугольник ABC, в сечении с шаром — окружность с центром O; плоскость, перпендикулярная к BC, будет пересечена по прямой ME (M — точка касания). Проведем $BD \perp AC$ и $OF \perp BC$. Пусть $BD = h$, $OD = OF = r$, $CD = R$. Очевидно, $OMEF$ — квадрат, поэтому

$$h = r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}.$$

Далее,

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{d+r}, \qquad R = \frac{hr}{d+r}.$$

Итак, в первом случае объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^3 r^2}{(d+r)^2} = \frac{\pi r^2 \left(r + \sqrt{r^2 + (d+r)^2}\right)^3}{3(d+r)^2}.$$

Во втором случае задача решается аналогично. Объем конуса оказывается равным

$$\frac{\pi r^2 \left(r + \sqrt{r^2 + (d-r)^2}\right)^3}{3(d-r)^2}.$$

490. Рассмотрим осевое сечение ABC конуса. Пусть BF — высота в треугольнике ABC, N и M — точки касания круга, вписанного в треугольник ABC, со сторонами AB и BC, O — центр круга, E — точка пересечения меньшей дуги MN с отрезком BF, D — точка пересечения отрезков MN и BF (рис. 202). Положим $DM=r$, $DE=H$, $BD=h$. Искомый объем равен

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h-\frac{1}{3}\pi H^2(3R-H).$$

Но

$$h=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=R\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=R\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и

$$H=R-R\sin\frac{\alpha}{2};$$

следовательно,

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

491. Обозначим через r и r_1 радиусы шаров и рассмотрим сечение шаров плоскостью, проходящей через их центры O и O_1; пусть $AA_1=2a$, $KS=R$ и $AS=x$ (рис. 203); тогда $A_1S=2a-x$. Полная поверхность линзы равна

$$2xar_1+(2a-x)\,2ar=S. \qquad (1)$$

Из треугольника OKS имеем $r^2=R^2+[r-(2a-x)]^2$ или

$$R^2-2r(2a-x)+(2a-x)^2=0. \qquad (2)$$

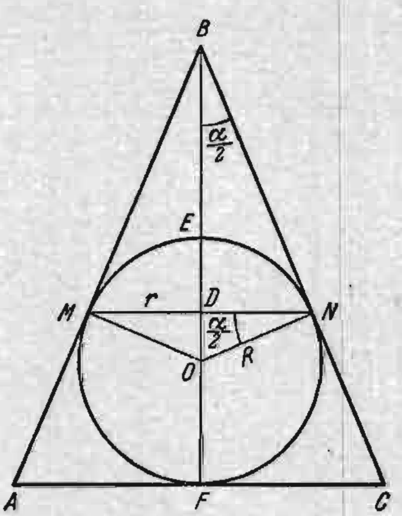


Рис. 202.

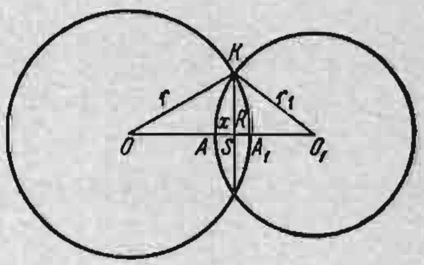


Рис. 203.

Аналогично из треугольника O_1KS имеем $r_1^2=R^2+(r_1-x)^2$ или

$$R^2-2r_1x+x^2=0. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) находим:

$$r=\frac{R^2+(2a-x)^2}{2(2a-x)},\qquad r_1=\frac{R^2+x^2}{2x}. \qquad (4)$$

Подставив эти выражения для r и r_1 в равенство (1), получим уравнение

$$\pi(R^2+x^2)+\pi[R^2+(2a-x)^2]=S$$

или

$$x^2-2ax+R^2+2a^2-\frac{S}{2\pi}=0,$$

откуда

$$x=a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}. \qquad (5)$$

Подставив это значение x в формулы (4), после упрощений получим:

$$r=\frac{\frac{S}{4\pi}-a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a-\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}},$$

$$r_1=\frac{\frac{S}{4\pi}+a\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}{a+\sqrt{\frac{S}{2\pi}-R^2-a^2}}.$$

Выбор другого знака перед корнем в (5) сводится к перемене обозначений r и r_1.

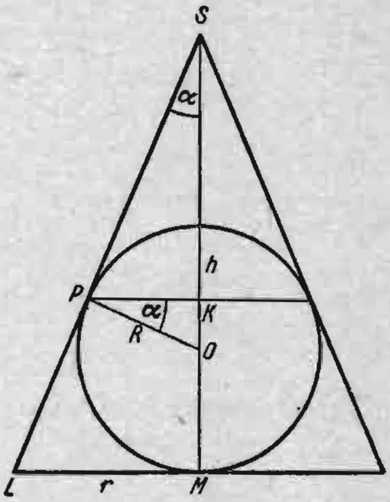


Рис. 204.

492. Пусть V_1 и V_2 суть соответственно объемы меньшего и большего шаровых сегментов, на которые разбивает шар плоскость, проходящая через линию касания шара с конусом. Пусть, далее, R — радиус шара, h — высота меньшего сегмента, H — высота конуса, r — радиус его основания (рис. 204). Тогда

$$V_1=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h), \qquad V_2=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{\pi}{3}h^2(3R-h).$$

Задача сводится к нахождению отношения $\frac{h}{R}$. Обозначив через α угол между осью конуса и образующей, из $\triangle PKO$ находим:

$$\frac{R-h}{R}=\sin\alpha,$$

откуда

$$\frac{h}{R}=1-\sin\alpha.$$

Далее, по условию задачи

$$k=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 H}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{4}\frac{r^2H}{R^3}.$$

Выразим теперь r и H через R и α. Имеем:

$$H=\frac{R}{\sin\alpha}+R=R\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha},$$

$$r=H\operatorname{tg}\alpha=R\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$k=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Подставляя сюда $\sin\alpha=1-\frac{h}{R}$, получаем уравнение относительно $\frac{h}{r}=z$:

$$k=\frac{1}{4}\frac{(2-z)^2}{(1-z)z}$$

или после упрощения

$$z^2(4k+1)-4(k+1)z+4=0.$$

Решая, получаем:

$$z_{1,2}=\frac{2(k+1)\pm2\sqrt{k(k-2)}}{4k+1}. \qquad (1)$$

В заключение находим:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{z_{1,2}^2(3-z_{1,2})}{4-z_{1,2}^2(3-z_{1,2})}.$$

Задача имеет два решения, так как оба корня квадратного уравнения при $k>2$ имеют смысл.

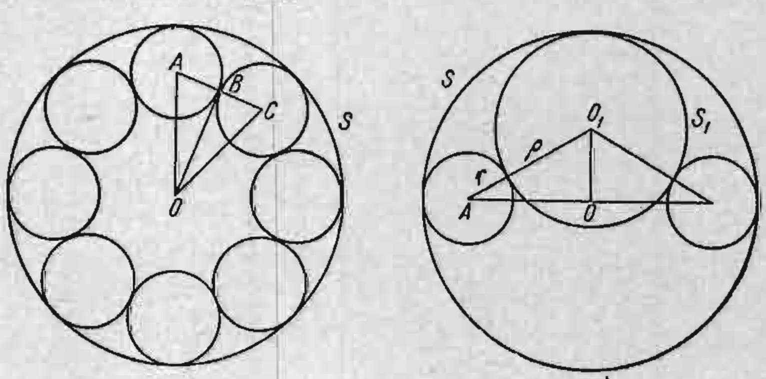


Рис. 205.

493. Радиус r каждой из восьми вписанных сфер мы найдем, рассмотрев треугольник AOC в плоскости, проходящей через центры этих сфер и центр O сферы S (рис. 205, a). Имеем:

$$\frac{AB}{AO}=\frac{r}{R-r}=\sin\frac{\pi}{8}.$$

Отсюда

$$r = R\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}+1}.$$

Проведя сечение через центр O сферы S, центр O_1 сферы S_1 и центры двух противолежащих сфер радиуса r (рис. 205, *б*), мы получим из прямоугольного треугольника AOO_1:

$$AO_1^2 = AO^2 + OO_1^2$$

или

$$(r+\rho)^2 = (R-r)^2 + (R-\rho)^2.$$

Отсюда

$$\rho = R\cdot\frac{R-r}{R+r},$$

или

$$\rho = R\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}+1} = \frac{R}{\sqrt{2-\sqrt{2}}+1}.$$

494. Так как вписанные сферы равны между собой, то их центры одинаково удалены от центра O сферы S. Следовательно, центр симметрии указанного в условии задачи куба совпадает с центром O сферы S (рис. 206). Пусть x — искомый радиус сфер. Легко видеть, что тогда ребро куба будет $AB = 2x$, а половина диагонали куба

$$AO = CO - CA = R - x.$$

Так как, с другой стороны,

$$AO = \frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{3},$$

то получаем уравнение $R - x = x\sqrt{3}$, откуда

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}+1}.$$

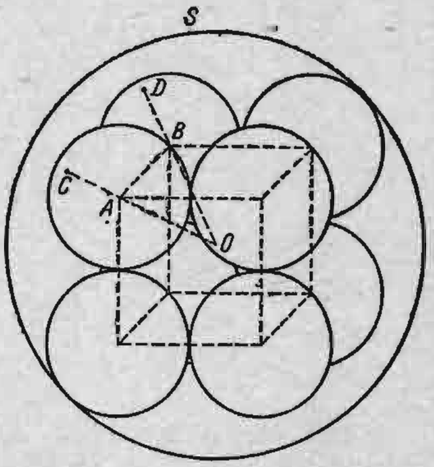


Рис. 206.

495. Пусть r — радиус основания каждого из двух вписанных конусов. Их общая часть состоит из двух равных усеченных конусов. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса и через H — его высоту. Искомое отношение объемов равно

$$q = \frac{H\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)}{2R^3}.$$

Из подобия треугольников AQZ, AOS, APC (рис. 207) имеем:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R-H}{R} \quad\text{и}\quad \frac{r_2}{r} = \frac{R}{h}.$$

Так как, кроме того, $H=h-R$ и

$$r=\sqrt{R^2-H^2}=\sqrt{2Rh-h^2},$$

то два предыдущих равенства позволяют выразить r_1 и r_2 через R и h:

$$r_2=\frac{R\sqrt{2Rh-h^2}}{h}, \quad r_1=r_2\frac{2R-h}{R}.$$

Так как по условию задачи $\frac{h}{R}=k$, то

$$q=\frac{(h-R)\left\{r_2^2\frac{(2R-h)^2}{R^2}+r_2^2\frac{2R-h}{R}+r_2^2\right\}}{2R^3}=$$

$$=\frac{1}{2}(k-1)\left(\frac{2}{k}-1\right)(k^2-5k+7).$$

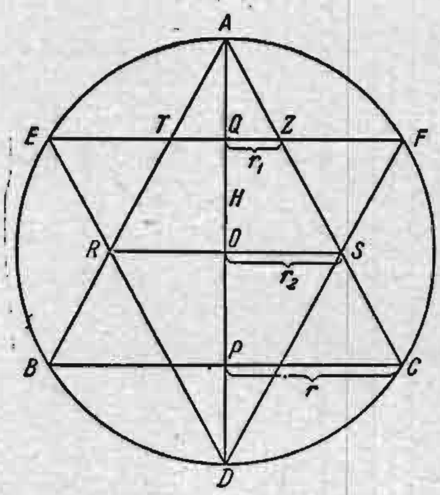


Рис. 207.

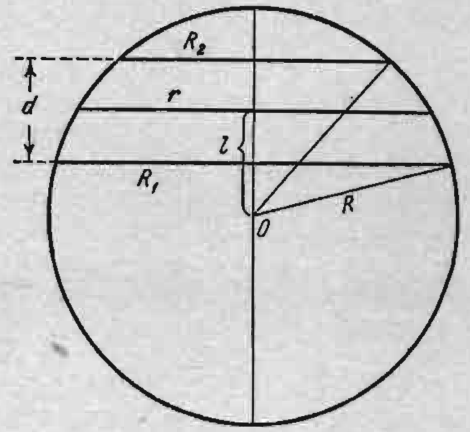


Рис. 208.

496. Пусть радиусы круговых сечений с площадями S_1 и S_2 равны R_1 и R_2, а расстояния от центра шара до этих сечений соответственно равны l_1 и $l_2\,(l_1<l_2)$. Обозначим через R радиус шара, через r — радиус искомого сечения, а через l — расстояние от этого сечения до центра шара. Тогда (рис. 208)

$$l_2-l_1=d \tag{1}$$

и $l_1^2+R_1^2=l_2^2+R_2^2=R^2$. Из этих двух уравнений находим:

$$l_2+l_1=\frac{R_1^2-R_2^2}{d}$$

и, следовательно,

$$l_2+l_1=\frac{S_1-S_2}{\pi d}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$l_2=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}+\frac{d}{2}, \quad l=\frac{S_1-S_2}{2\pi d}.$$

Поэтому искомая площадь равна

$$S=\pi r^2=\pi(R^2-l^2)=\pi\left(R_2^2+l_2^2-l^2\right)=\frac{1}{2}\left(S_1+S_2+\frac{1}{2}\pi d^2\right).$$

497. Обозначим через r искомый радиус основания конуса. Рассмотрим фигуру, получающуюся в сечении, проведенном через центр одного из шаров и ось конуса (рис. 209). Заметим, что расстояние между центрами двух касающихся шаров равно $2R$. Используя легко доказуемый факт, что центр основания конуса A расположен на одинаковом расстоянии от всех трех точек касания сфер с плоскостью P, находим:

$$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$$

Легко видеть, что $\angle SBA = \angle CO_1D=2\beta$ и, следовательно,

$$2\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

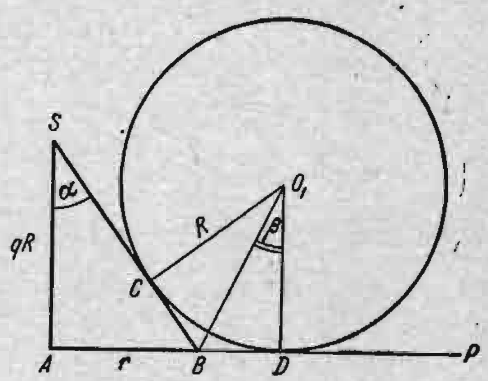


Рис. 209.

Взяв тангенсы углов, стоящих в обеих частях этого равенства, получаем:

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}^2\,\beta}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}. \qquad (1)$$

Из рис. 209 видно, что $\mathrm{tg}\,\beta=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R-r\right):R$ и $\mathrm{tg}\,\alpha=r:qR$.

Если теперь положить $\frac{r}{R}=x$, то равенство (1) приведет нас к следующему уравнению относительно x:

$$3(q-2)x^2-4\sqrt{3}(q-1)x+q=0.$$

Отсюда при $q=2$ получаем $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$, следовательно, $r=\frac{\sqrt{3}}{6}R$. Если же $q\neq 2$, то

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}(q-1)\mp\sqrt{9q^2-18q+12}}{3(q-2)}.$$

Так как $0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$, то в указанной формуле следует взять знак минус. Второй корень при $q>2$, как нетрудно показать, больше, чем $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, и отвечает конусу, касающемуся сфер извне; при $q < 2$ второй корень отрицателен.

498. Центры четырех первых шаров лежат в вершинах правильного тетраэдра, так как расстояния между центрами любых двух касающихся шаров равны $2R$. Нетрудно показать, что центры пятого и шестого шаров совпадают с центром тяжести тетраэдра (рис. 210). Пусть r — радиус пятого (большего) шара, а ρ — радиус шестого шара. Очевидно,

$$r = \rho + 2R. \qquad (1)$$

Пользуясь тем, что расстояние от центра тяжести до вершины рассматриваемого тетраэдра равно $\frac{\sqrt{6}}{2}R$, получаем:

$$\rho + R = \frac{\sqrt{6}}{2}R. \qquad (2)$$

Отсюда $\rho = R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$, а из формулы (1) $r = R\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)$.

Таким образом, искомое отношение объемов равно

$$\frac{V_6}{V_5} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}\right)^3 = (5 - 2\sqrt{6})^3 = 485 - 198\sqrt{6}.$$

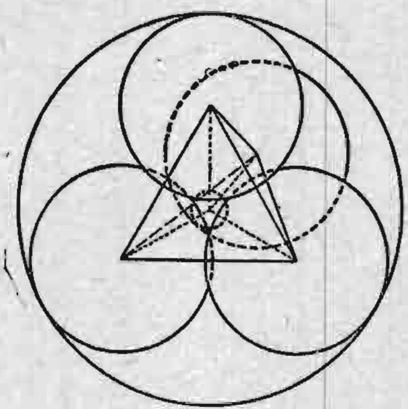


Рис. 210.

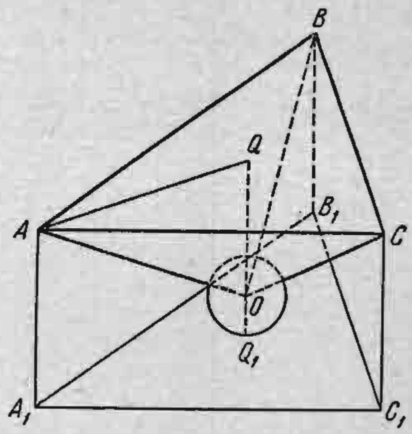


Рис. 211.

499. Пусть A, B, C — центры шаров радиуса R, A_1, B_1, C_1 — проекции этих центров на плоскость, O — центр четвертого шара, радиус r которого нужно найти (рис. 211). Соединив центры всех шаров, мы получим, очевидно, правильную треугольную пирамиду $OABC$, у которой $AB = BC = AC = 2R$, $AO = BO = CO = R + r$, $OQ = R - r$. Отрезок AQ есть радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности, поэтому

$$AQ = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Из треугольника AQO по теореме Пифагора находим:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2+(R-r)^2=(R+r)^2.$$

Решив это уравнение, получаем $r=\frac{R}{3}$.

500. Пусть A, B, C, D—центры больших шаров. Рассмотрим проекцию всех шаров на плоскость A, B, C, D (рис. 212). Так как центры малых шаров равноудалены от центров соответствующих больших шаров, они спроектируются в центры тяжести O_1 и O_2 равносторонних треугольников ABC и BCD. Так как, кроме того, радиусы малых шаров по условию равны, то отрезок, соединяющий их центры, параллелен рассматриваемой плоскости и делится точкой касания шаров пополам. Ввиду этого проекция точки касания окажется на отрезке BC. Отсюда следует, что малые шары спроектируются в круги, вписанные в треугольники ABC и BCD. Поэтому радиус малых шаров равен

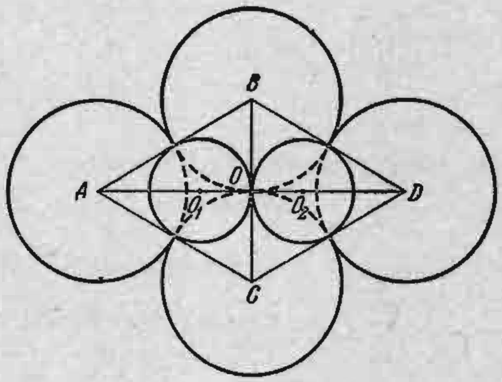


Рис. 212.

$$r=\frac{AB\sqrt{3}}{6}=\frac{2R\sqrt{3}}{6}; \text{ откуда } \frac{R}{r}=\sqrt{3}.$$

2. Задачи на доказательство

501. Пусть E и F—середины оснований трапеции $ABCD$, полученной в осевом сечении конуса (рис. 213). Проведем через середину O отрезка EF прямые $OM \perp CD$, $ON \perp EF$, $CP \perp AD$. Положим для сокращения письма $CD=l$, $EF=h$, $OM=x$, $EC=r$, $DF=R$, $\angle MON=\angle PCD=\alpha$.

Для доказательства достаточно установить, что $x=\frac{h}{2}$. По условию $\pi l\,(R+r)=\pi l^2$ и, следовательно, $R+r=l$. Так как, однако, из треугольников OMN и CPD имеем:

$$x=\frac{R+r}{2}\cos\alpha \quad \text{и} \quad h=l\cos\alpha,$$

то $x=\frac{h}{2}$, что и требовалось доказать *).

---

*) Из полученного выше равенства $R+r=l$ следует, что $2R+2r=l+l$. Это означает, что суммы противоположных сторон рассматриваемого четырехугольника равны. Последнее уже достаточно для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность. Мы, однако, не опираемся на этот факт.

502. Рассмотрим трапецию $ABCD$, получающуюся в осевом сечении конуса (см. рис. 213); пусть E и F — середины ее оснований O — середина EF.

$$OM \perp CD, \ ON \perp EF, \ CP \perp AD, \ \angle MON = \angle PCD = \alpha.$$

Для решения задачи достаточно показать, что $OM = OE$. Введем обозначения:

$$EC = r, \quad DF = R, \quad OM = x, \quad OE = \frac{h}{2}.$$

Тогда

$$x = ON \cos\alpha = \frac{R+r}{2}\cos\alpha.$$

Из треугольника CPD имеем:

$$h = CD\cos\alpha = \sqrt{(R-r)^2 + CP^2}\cos\alpha.$$

Но так как по условию $CP^2 = 4Rr$, то

$$h = \sqrt{(R-r)^2 + 4Rr}\cos\alpha = (R+r)\cos\alpha.$$

Таким образом, $x = \frac{h}{2}$, что и требовалось доказать.

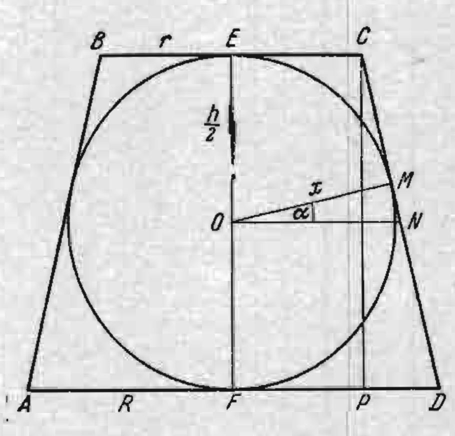


Рис. 213.

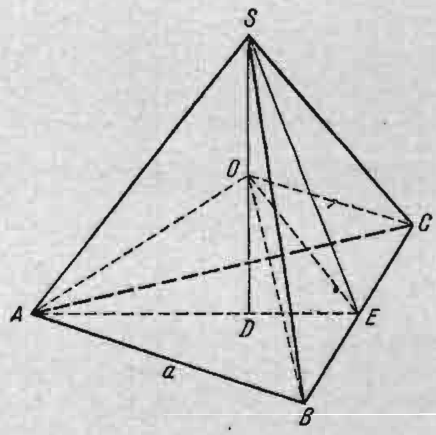


Рис. 214.

503. Пусть SD — высота пирамиды $SABC$, O — середина высоты, E — середина отрезка BC, длину которого мы обозначим через a (рис. 214).

Имеем:

$$DE = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$SD = \sqrt{SE^2 - DE^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$OD = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Отсюда

$$OE=\sqrt{OD^2+DE^2}=\frac{a}{2}.$$

Следовательно, $OE=BE=EC$ и, значит, $\angle BOC=90°$.

504. Пусть a — сторона основания данной пирамиды $SABCD$, α — двугранный угол между боковой гранью и основанием, H — высота SO — пирамиды (рис. 215). Тогда

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Кроме того (см. формулу (1) в решении задачи 481),

$$R=\frac{H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2H}.$$

Следовательно,

$$R=\frac{a}{4}\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2}{\operatorname{tg}\alpha}$$

и, значит,

$$\frac{R}{r}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Положив $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, получаем:

$$\frac{R}{r}=\frac{1+x^4}{2x^2(1-x^2)}.$$

Полагая еще $x^2=t$, мы сведем задачу к доказательству неравенства

$$\frac{1+t^2}{2t(1-t)}\geqslant 1+\sqrt{2}$$

при $0<t<1$.

Умножив на знаменатель обе части неравенства и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$(2\sqrt{2}+3)t^2-2(\sqrt{2}+1)t+\\+1\geqslant 0$$

для квадратного трехчлена. Вычисляя дискриминант трехчлена, обнаруживаем, что он равен нулю. Следовательно, трехчлен не изменяет знака вообще при любых значениях t. Так как при $t=0$ он положителен, то неравенство доказано.

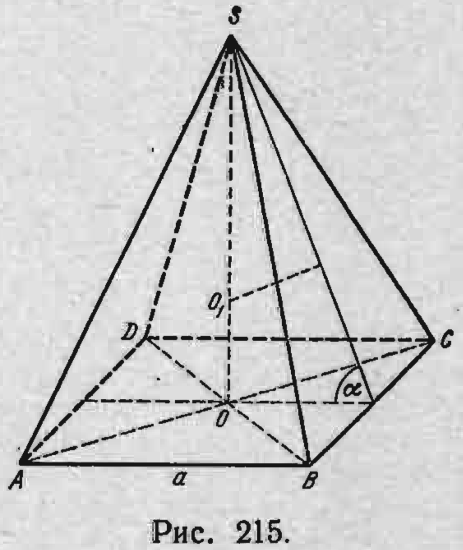


Рис. 215.

505. Пирамиды $ASBC$ и $OSBC$ имеют общее основание SBC (рис. 216), поэтому их объемы относятся как высоты, опущенные на их общее основание. Так как $OA' \parallel AS$, то отношение высот пирамид $ASBC$ и $OSBC$, опущенных на основание SBC, равно отношению SA к OA'. Следовательно, отношение их объемов равно

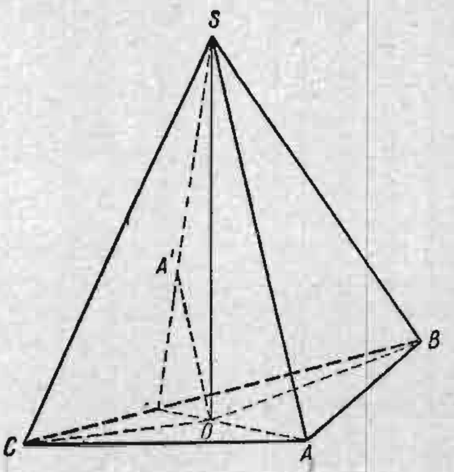


Рис. 216.

$$\frac{V_{OSBC}}{V_{ASBC}} = \frac{OA'}{SA}.$$

Аналогично

$$\frac{V_{OSCA}}{V_{ASBC}} = \frac{OC'}{SC}, \quad \frac{V_{OSAB}}{V_{ASBC}} = \frac{OB'}{SB}.$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC} = 1.$$

506. Пусть P есть плоскость треугольника ABC, P_1 — плоскость треугольника $A_1B_1C_1$, l — линия пересечения P и P_1 (рис. 217). Обозначим через Q_{AB} плоскость, проходящую через A, B и O. Прямая A_1B_1 лежит в Q_{AB} и, будучи непараллельной прямой AB, пересекается с ней в точке T_{AB}. Эта точка лежит в плоскостях P и P_1 и, значит, на прямой l. Аналогично докажем, что прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке T_{BC}, лежащей на l, а прямые AC и A_1C_1 — в точке T_{AC}, лежащей также на l.

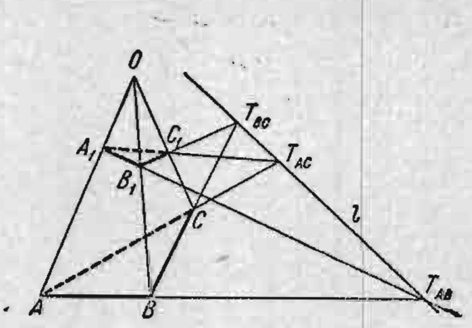


Рис. 217.

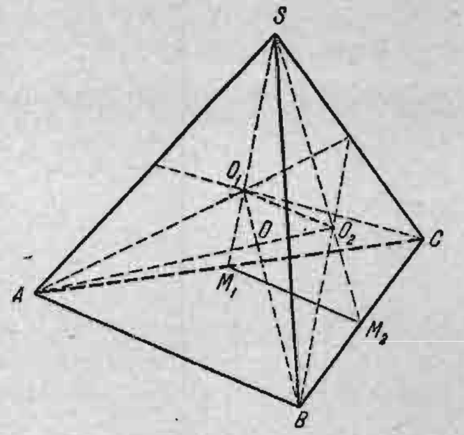


Рис. 218.

507. Пусть O_1 — центр тяжести грани ASC, BO_1 — один из рассматриваемых в задаче отрезков. Возьмем еще какую-нибудь грань, например BSC; обозначим ее центр тяжести через O_2 и докажем, что отрезок AO_2 пересекает отрезок BO_1 и при этом точка пересечения отрезков O делит отрезок BO_1 в отношении 1:3, считая от точки O_1. В самом деле, если M_1 и M_2 — середины отрезков AC и BC (рис. 218), то очевидно, что $AB \parallel M_1M_2$; легко также видеть, что $O_1O_2 \parallel M_1M_2$, так как точки O_1 и O_2 делят соответственно отрезки M_1S и M_2S в одном и том же отношении. Поэтому $AB \parallel O_1O_2$, фигура ABO_2O_1 — трапеция и, стало быть, ее диагонали BO_1 и AO_2 пересекаются. Обозначим точку пересечения диагоналей через O. Имеем:

$$\frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{2}; \quad \frac{O_1O_2}{M_1M_2}=\frac{2}{3}.$$

Перемножив эти равенства, получим $\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{1}{3}$. Но из подобия треугольников AOB и O_1OO_2 следует $\frac{O_1O}{OB}=\frac{O_1O_2}{AB}$. Таким образом,

$$\frac{O_1O}{OB}=\frac{1}{3},$$

что и утверждалось. Если мы теперь возьмем центр тяжести еще на одной грани и построим соответствующий отрезок, то он, в силу доказанного, также пересечет отрезок BO_1 и притом в точке, которая разделит BO_1 в отношении $\frac{1}{3}$, т. е. в точке O. Следовательно, все рассматриваемые отрезки пересекаются в точке O. Очевидно также, что точка O делит любой из них в отношении 1:3, что и требовалось доказать.

508. Проведем сначала одно вспомогательное рассуждение. Пусть PP_1 и QQ_1 — две скрещивающиеся прямые, A, B и C — три точки на прямой QQ_1, причем точка B лежит между точками A и C, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, B, C на прямую PP_1. Обозначим через h_A, h_B, h_C расстояния точек A, B и C от прямой PP_1. Докажем, что h_B меньше, по крайней мере, одного из расстояний h_A или h_C.

Для этого спроектируем изображенную на рис. 219 фигуру на плоскость π, перпендикулярную к прямой PP_1. Тогда прямая PP_1 спроектируется в точку O, а отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 спроектируются без изменения длины, так как все они параллельны плоскости π. При этом точка B' окажется между точками A' и C'. Обращаясь теперь к треугольнику $A'OC'$, мы можем утверждать, что наклонная OB' короче одной из наклонных OA' или OC'. Действительно, опустить еще из точки O перпендикуляр на $A'C'$ (на рис. 219 он не показан), мы установим, что точка B' расположена ближе к основанию перпендикуляра, чем одна из двух других точек A' или C'. Отсюда уже следует, что h_B меньше, чем h_A или h_C.

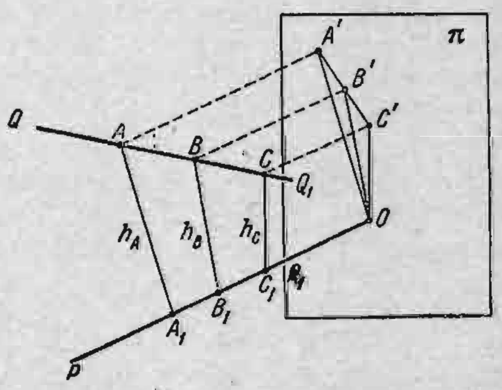


Рис. 219.

Пусть теперь $ABCD$ — произвольная треугольная пирамида и EFG — такое треугольное сечение, что, по крайней мере, одна из вершин F не является вершиной пирамиды. Докажем, что тогда площадь треугольника EFG меньше площади одного из треугольников AEG или DEG (рис. 220).

Действительно, все три треугольника имеют общую сторону EG, а по ранее доказанному расстояние от F до прямой EG меньше расстояния от A или D до этой прямой. Если $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle AEG}$, то все доказано Если же $S_{\triangle EFG} < S_{\triangle DEG}$ и, например, точка E не является вершиной пирамиды, то применим предыдущее рассуждение к $\triangle DEG$, сравнивая его площадь с площадями треугольников DGA и BDG. Применив то же самое рассуждение в случае необходимости еще раз по отношению к $\triangle BDG$, докажем утверждение, содержащееся в задаче. Из изложенного решения ясно, что если сечение пирамиды не совпадает с ее гранью, то оно по площади строго меньше площади одной из граней

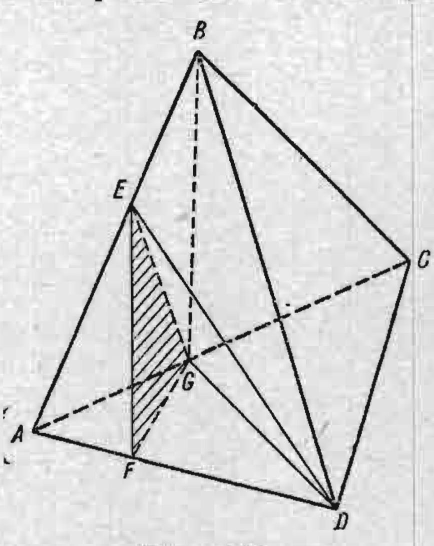


Рис. 220.

509. Вместо того чтобы сравнивать суммы плоских углов при вершинах S и S', сравним между собой суммы плоских углов боковых граней обеих пирамид при каждой из трех вершин общего основания. Докажем, что каждая такая сумма углов внешней пирамиды больше соответствующей суммы углов внутренней. Докажем, например, что (рис. 221)

$$\angle ACS + \angle SCB > \angle ACS' + \angle S'CB. \quad (1)$$

Из неравенства (1) и ему аналогичных (при вершинах A и B) мы получим решение задачи. Действительно, сложив все три указанных неравенства, мы установим, что сумма $\sum$ всех шести плоских углов боковых граней при основании внешней пирамиды больше соответствующей суммы $\sum'$ для внутренней пирамиды:

$$\sum > \sum'. \quad (2)$$

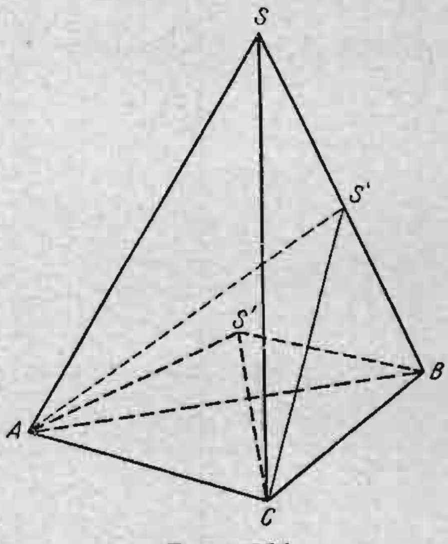


Рис. 221.

Но интересующие нас в задаче величины дополняют $\sum$ и $\sum'$ до $540°$ ($= 180° \cdot 3$) и, следовательно, для них имеет место неравенство противоположного смысла. Таким образом, остается доказать справедливость (1).

Продолжим плоскость ACS' до пересечения с внешней пирамидой. Рассматривая трехгранный угол $CS'S''B$, заключаем, что

$$\angle S'CS'' + \angle S''CB > \angle S'CB. \quad (3)$$

Прибавив к обеим частям неравенства $\angle ACS'$, получим:

$$\angle ACS'' + \angle S''CB > \angle ACS' + \angle S'CB. \qquad (4)$$

Но для трехгранного угла $CASS''$ имеем:

$$\angle ACS + \angle SCS'' > \angle ACS''. \qquad (5)$$

Заменив в неравенстве (4) $\angle ACS''$ большей величиной, согласно (5), получим:

$$\angle ACS + (\angle SCS'' + \angle S''CB) > \angle ACS' + \angle S'CB,$$

т. е. неравенство (1).

510. Обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4 центры данных шаров и через P_{ik}—общую касательную плоскость для шаров с центрами O_i и O_k $(i < k)$. Таких плоскостей всего шесть: P_{12}, P_{13}, P_{23}, P_{14}, P_{24}, P_{34}.

Сначала докажем, что плоскости P_{12}, P_{13} и P_{23} пересекаются по одной прямой. Действительно, каждая из этих плоскостей

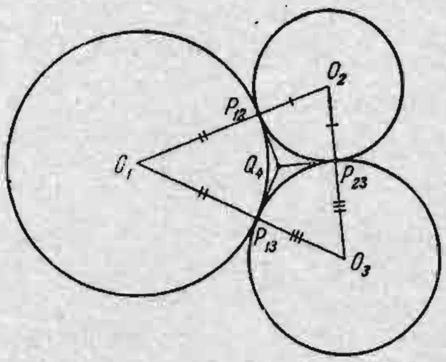


Рис. 222.

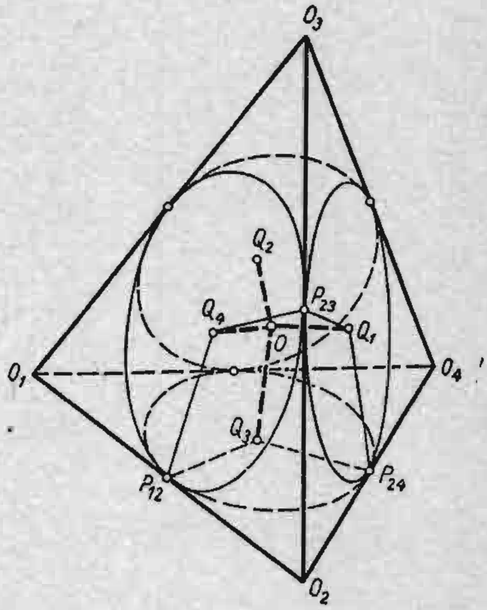


Рис. 223.

перпендикулярна к плоскости $O_1O_2O_3$, так как она перпендикулярна к линии центров разделяемых ею шаров, лежащей в этой плоскости.

Кроме того, легко видеть, что рассматриваемые плоскости (рис. 222) проходят через точку Q_4 пересечения биссектрис $\triangle O_1O_2O_3$. Таким образом, плоскости P_{12}, P_{13} и P_{23} действительно пересекаются по некоторой прямой, которая, как мы попутно установили, перпендикулярна к плоскости центров $O_1O_2O_3$ и проходит через центр вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$ окружности. Обозначим эту прямую через L_4.

Совершенно так же доказывается, что плоскости P_{23}, P_{24} и P_{34} определяют общую им прямую L_1, перпендикулярную к плоскости треугольника $O_2O_3O_4$ и проходящую через центр вписанной в него окружности и т. д. В результате мы приходим к следующей задаче (рис. 223): в каждую грань треугольной пирамиды $O_1O_2O_3O_4$ вписана окружность и через ее центр проведен перпендикуляр к грани. Нужно доказать, что все четыре перпендикуляра L_1, L_2, L_3 и L_4 имеют общую точку, если известно, что точки касания двух окружностей с одним и тем же ребром совпадают.

Этот факт почти очевиден. Обозначим через O точку пересечения прямых L_1 и L_4; последние пересекаются, так как лежат в одной плоскости P_{23} и не параллельны. Докажем теперь, что прямые L_3 и L_2 также проходят через точку O. Действительно, точка O лежит на линии пересечения плоскостей P_{12} и P_{24}, так как прямая L_4 принадлежит плоскости P_{12}, а прямая L_1 — плоскости P_{24}. Но линия пересечения P_{12} и P_{24} есть прямая L_3. Следовательно, L_3 проходит через точку O. Аналогично показываем, что прямая L_2 проходит через точку O.

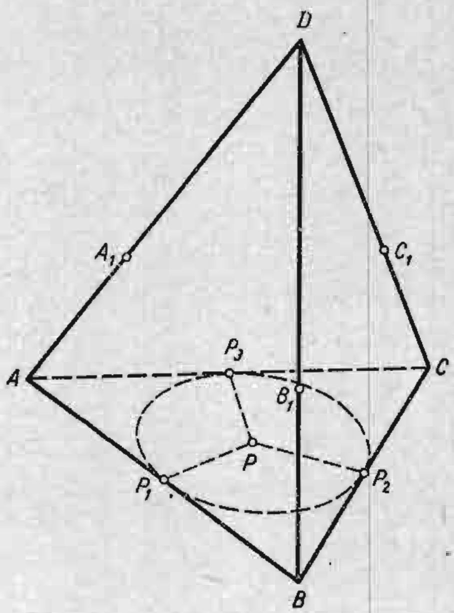


Рис. 224.

511. Если даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то эти точки служат центрами трех шаров, попарно касающихся друг друга. Действительно, если P — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$ и P_1, P_2, P_3 — основания перпендикуляров, опущенных из P соответственно на стороны AB, BC и CA, то

$$AP_1 = AP_3, \quad BP_1 = BP_2, \quad CP_2 = CP_3$$

и шары с центрами A, B, C и радиусами, соответственно равными

$$r_A = AP_1, \quad r_B = BP_2, \quad r_C = CP_3,$$

попарно касаются друг друга.

Пусть $ABCD$ — данная пирамида (рис. 224). Рассмотрим три шара радиусов r_A, r_B, r_C с центрами в A, B, C, попарно касающихся друг друга. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки, в которых поверхности шаров пересекаются с ребрами AD, BD и CD, и докажем, что $A_1D = B_1D = C_1D$.

По условию задачи

$$AD + BC = BD + AC.$$

По построению

$$AD = r_A + A_1D; \quad BC = r_B + r_C;$$
$$BD = r_B + B_1D; \quad AC = r_A + r_C.$$

Подставив четыре последних выражения в предыдущее равенство, получим:

$$A_1D = B_1D.$$

Аналогично, используя равенство

$$BD + AC = CD + AB,$$

найдем:

$$B_1D = C_1D.$$

Следовательно, шар с центром D и радиусом

$$r_D = A_1D = B_1D = C_1D$$

касается каждого из первых трех шаров, а значит, все четыре построенных шара касаются попарно друг друга.

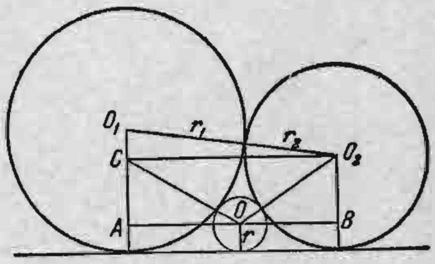


Рис. 225.

512. Обозначим радиусы шаров через r_1, r_2, r_3 и пусть $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Проведем к первым двум шарам касательную плоскость. Кроме того, через центры этих шаров проведем плоскость, перпендикулярную к касательной плоскости, и рассмотрим окружность радиуса r, касающуюся двух получившихся в сечении больших кругов и их общей касательной прямой (рис. 225). Третий шар может, очевидно, касаться первых двух шаров и касающейся их плоскости, если он «не очень мал», а именно, если $r_3 \geqslant r$. Мы имеем (см. рис. 225)

$$\sqrt{O_1O_2^2 - O_1C^2} = AO + OB$$

или

$$\sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2} = \sqrt{(r_1+r)^2 - (r_1 - r)^2} + \sqrt{(r_2+r)^2 - (r_2-r)^2}.$$

Из этого уравнения найдем:

$$r = \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}.$$

Следовательно, радиусы шаров должны удовлетворять соотношению

$$r_3 \geqslant \frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}.$$

513. Пусть число боковых граней пирамиды равно n. Соединим произвольную точку O, взятую в плоскости ее основания, со всеми вершинами и рассмотрим n треугольных пирамид с общей вершиной в точке O. Очевидно, что объем V данной пирамиды равен сумме объемов получившихся треугольных пирамид. Имеем:

$$V = \frac{1}{3} S (r_1 + r_2 + \ldots + r_n),$$

где r_1, r_2, ..., r_n — расстояния от точки O до боковых граней, а S — площадь боковой грани.

Следовательно, $r_1+r_2+\ldots+r_n=\frac{3V}{S}$ есть величина постоянная, не зависящая от положения точки O в плоскости основания, что и требовалось доказать.

514. Рассмотрим две плоскости, заштрихованные на рис. 226, и треугольник ADE в плоскости P, проходящей через вершины A, D, H, E данного параллелепипеда. Плоскость P пересекает плоскость $\triangle BCD$ по прямой KD, которая проходит через точку K пересечения диагоналей параллелограмма $ABEC$, и следовательно, отрезок KD есть медиана $\triangle AED$. Очевидно, что AO есть также медиана $\triangle AED$. Поэтому интересующая нас точка S есть точка пересечения медиан $\triangle AED$ и, значит,

$$AS=\frac{2}{3}AO=\frac{1}{3}AH,$$

что и требуется.

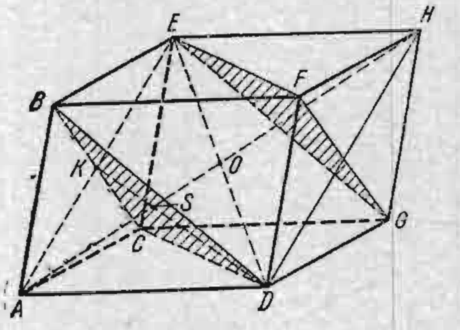


Рис 226.

515. Проведем указанную в задаче плоскость через вершины B, D, F (рис. 227) и параллельную ей плоскость через вершины C, E, G. Обе плоскости образуют в пересечении с параллелепипедом равносторонние и равные треугольники. Длину стороны каждого из этих треугольников обозначим через a. Если теперь, через середину одного из шести ребер, соединяющих вершины двух указанных треугольников, например через середину N ребра BC, — провести плоскость, параллельную двум указанным плоскостям, то она даст в сечении с параллелепипедом шестиугольник $MNPQRS$, все стороны которого, очевидно, окажутся равными $\frac{a}{2}$. Заметим еще, что $MN \parallel DF$ и $NP \parallel BD$. Поэтому $\angle MNP$ дополняет $\angle BDF$ до 180° и, следовательно, $\angle MNP=120°$. Аналогично устанавливаем, что и остальные углы шестиугольника равны 120°.

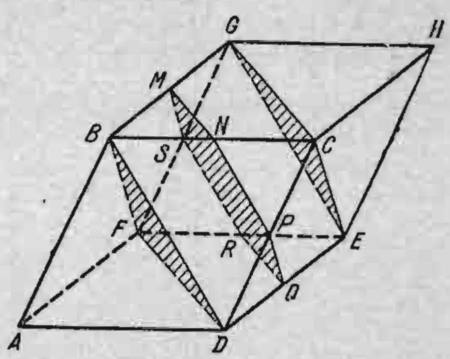


Рис. 227.

516. Пусть $SABC$ — данный тетраэдр, P и Q — середины противоположных ребер AC и SB, $MPNQ$ — некоторое сечение тетраэдра, содержащее отрезок PQ (рис. 228). Рассмотрим плоское сечение SPB, которое, очевидно, разбивает тетраэдр на две равновеликие части. Задача будет решена, если мы докажем, что пирамиды $SPQN$ и $MPQB$ равновелики.

Опустим на плоскость SPB перпендикуляры из точек M и N и их основания обозначим соответственно через K и L. Так как треугольники PQB и SPQ равновелики, то для решения задачи достаточно показать, что $LN = MK$. Мы установим это равенство, доказав, что

$$MO = NO. \tag{1}$$

Рассмотрим с этой целью пару параллельных плоскостей, в которых лежат скрещивающиеся прямые SC и AB (рис. 229). Так как

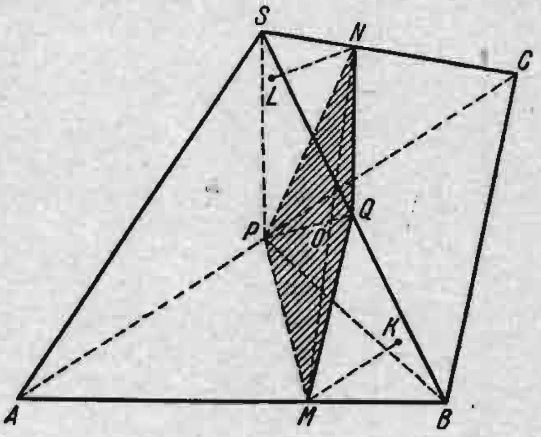


Рис. 228.

отрезок PQ соединяет середины отрезков AC и SB, то он, очевидно, лежит в плоскости, параллельной данным плоскостям и

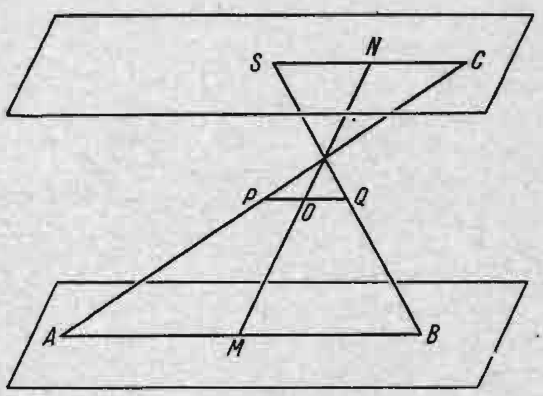


Рис. 229.

отстоящей от них на равном расстоянии. В силу этого отрезок MN, пересекаясь с отрезком PQ, разделится точкой пересечения пополам.

517. Пусть $SABC$—данная пирамида (рис. 230). Опустим из вершины S на грань ABC высоту SP и проведем, кроме того, из той же вершины высоты SD, SE и SF остальных трех граней. Легко видеть, что треугольники SPD, SPE и SPF в силу равенства углов SDP, SEP и SFP равны между собой (ср. с задачей 458).

Проведем далее через ребра AB, BC и AC плоскости, делящие соответствующие двугранные углы пополам. Эти плоскости пересекаются в точке O, равноудаленной от всех четырех граней пирамиды и, следовательно, являющейся центром вписанного в пирамиду шара. Легко видеть, что в рассматриваемом случае в силу отмеченного равенства треугольников точка O окажется на высоте пирамиды SP. Повторяя рассуждения, мы установим, что все высоты пирамиды пересекаются в точке O. Используя этот факт, мы можем утверждать, что, например, треугольники APS и SPE лежат в одной плоскости и, следовательно, отрезки AP и PE расположены на одной прямой. Поэтому AE есть одновременно биссектриса и высота $\triangle ABC$. По аналогичной причине и остальные биссектрисы $\triangle ABC$ являются его высотами. Следовательно, $\triangle ABC$ равносторонний. Повторяя рассуждение, мы установим, что все грани пирамиды представляют собой равносторонние треугольники, что и завершает доказательство.

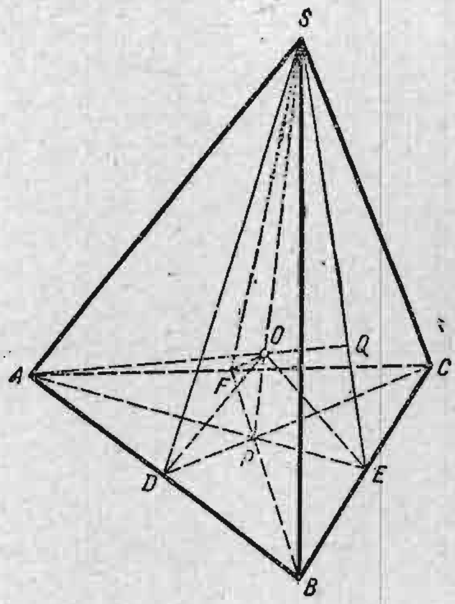


Рис. 230.

518. Пусть отрезок AB лежит в плоскости Q, а отрезок CD — в плоскости P и пусть $P \parallel Q$ (рис. 231). Проведем через точку A прямую, параллельную CD, и отложим отрезок $AA_1 = CD$. На сторонах AB и AA_1 построим параллелограмм ABB_1A_1. Аналогичное построение сделаем в плоскости P. Соединив A с C, B с C_1, A_1 с D и B_1 с D_1, получим параллелепипед $ABB_1A_1DCC_1D_1$. Рассматривая грань ACB в качестве основания пирамиды $DACB$, мы видим, что объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Так как, однако, объем параллелепипеда сохраняется при перемещении отрезков (не изменяются площадь основания ABB_1A_1 и высота — расстояние между плоскостями P и Q), то сохраняется и объем пирамиды.

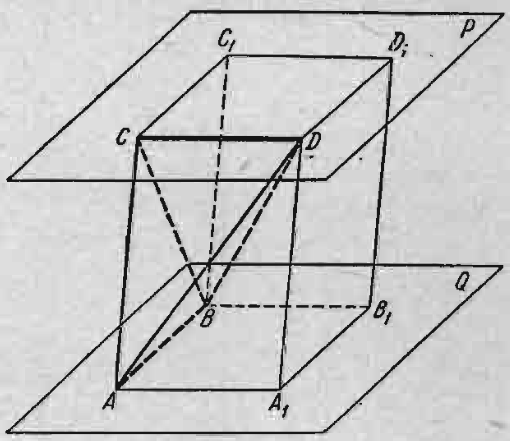


Рис. 231.

519. Пусть P и Q — точки пересечения данной прямой с гранями CBA и DBA двугранного угла (рис. 232). Проведем через ребро AB биссекторную плоскость ABE, а затем через точку O ее пересечения с прямой PQ проведем плоскость $C_1B_1D_1$, перпенди-

кулярную к ребру AB. Пусть, далее, $OM \perp B_1D_1$, $ON \perp B_1C_1$ и пусть SR—проекция PQ на плоскость $D_1B_1C_1$, так что при этом $QS \perp B_1D_1$, а $PR \perp B_1C_1$. Если точки P и Q одинаково удалены от ребра, т. е.

$$B_1R = B_1S, \qquad (1)$$

то треугольник B_1RS—равнобедренный, $SO = RO$ и, следовательно, $QO = PO$ как наклонные, имеющие равные проекции. Учитывая еще, что по построению

$$MO = NO, \qquad (2)$$

мы сможем заключить, что треугольники OMQ и ONP прямоугольные и равные. Отсюда следует равенство углов:

$$\angle MQO = \angle NPO. \qquad (3)$$

Итак, в одну сторону утверждение доказано.

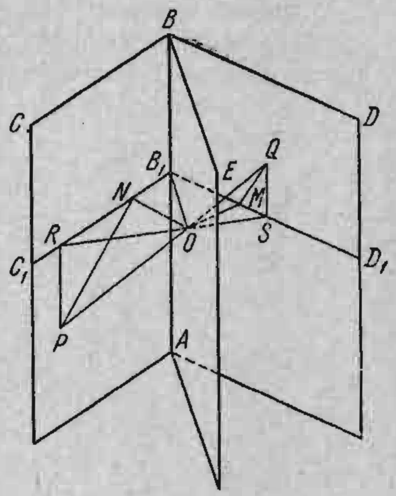


Рис. 232.

Если, наоборот, выполнено равенство углов (3), то в силу (2) имеет место равенство треугольников QMO и PNO. Вследствие этого $QO = PO$ и, значит, $SO = OR$. Отсюда уже следует равенство (1).

520. Соединим точки B и C, A и D отрезками прямых (рис. 233). Через точку A проведем прямую параллельно MN до встречи в точке K с прямой, проходящей через B и N. Заметим, что $AK = 2MN$, так как MN—средняя линия в треугольнике ABK. Далее, $\triangle BNC = \triangle KND$, ибо $BN = NK$, $CN = ND$ и $\angle BNC = \angle KND$. Поэтому $DK = BC$. Из треугольника ADK следует:

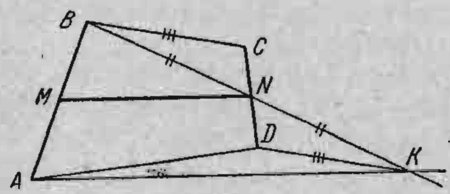


Рис. 233.

$$DK + AD > AK = 2MN$$

(здесь существенно, что точка D не лежит на прямой AK, иначе пришлось бы поставить знак $\geqslant$). Итак,

$$BC + AD > 2MN,$$

что и требовалось доказать.

521. Пусть A, B, C и D—произвольные точки, лежащие на ребрах четырехгранного угла с вершиной E (рис. 234). Докажем, например, что

$$\angle CED < \angle CEA + \angle AEB + \angle BED. \qquad (1)$$

Проведем плоскость CEB. По свойству плоских углов трехгранного угла

$$\angle CED < \angle CEB + \angle BED \qquad (2)$$

и по той же причине

$$\angle CEB < \angle CEA + \angle AEB. \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует (1). Неравенство (1), таким образом, доказано.

Легко понять, что наше рассуждение сохраняет силу и в том случае, когда четырехгранный угол не является выпуклым, т. е. когда ребро ED оказывается по другую сторону плоскости CEB.

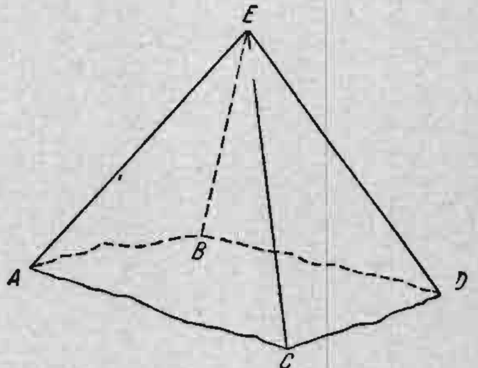


Рис. 234.

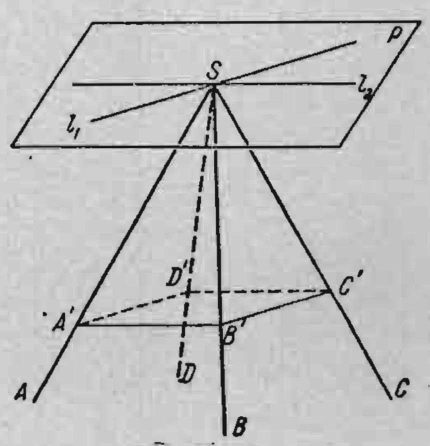


Рис. 235.

522. Пусть дан выпуклый четырехгранный угол с вершиной S (рис. 235). Продолжим плоскости BSC и ASD до их пересечения по прямой l_1. Плоскости ASB и DSC продолжим до пересечения по прямой l_2. Прямые l_1 и l_2, очевидно, не совпадают (в противном случае все грани при продолжении проходили бы через одну прямую). Обозначим через P плоскость, содержащую прямые l_1 и l_2. Легко показать, используя выпуклость четырехгранного угла, что плоскость P имеет с данным углом лишь одну общую точку пересечения S, так что весь угол располагается по одну сторону от плоскости P (впрочем, этот факт почти очевиден). Покажем теперь, что всякая пересекающая угол плоскость, параллельная плоскости P, образует с ним в сечении параллелограмм. В самом деле, такая плоскость пересечет, в силу сказанного, все четыре ребра четырехгранного угла. Обозначив соответствующие точки пересечения через A', B', C', D', заметим, что $A'D' \parallel B'C'$, так как оба эти отрезка порознь параллельны l_1; по аналогичной причине $A'B' \parallel D'C'$.

Следовательно, четырехугольник $A'B'C'D'$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

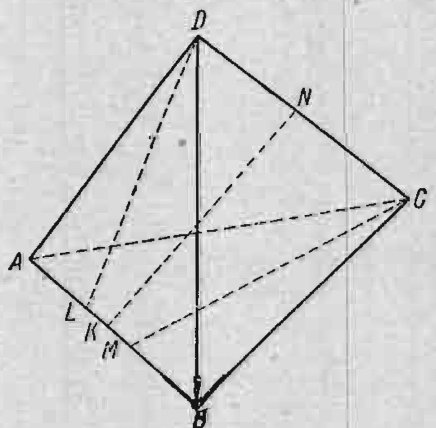


Рис. 236.

523. Пусть DL и CM — высоты треугольников ADB и ACB, опущенные на общее основание AB (рис. 236). Так как эти треугольники равновелики, то $DL = CM$. Пусть еще KN — общий перпендикуляр к скрещивающимся ребрам AB и DC.

Проведем через отрезок KN плоскость P, перпендикулярную ребру AB. Четырехугольник $LMCD$ спроектируем на плоскость P

(рис. 237). Так как отрезки DL и CM проектируются без изменения длин (они параллельны плоскости P), а отрезок LM — в точку, то в проекции получается равнобедренный треугольник KD_1C_1. По построению $KN \perp DC$, следовательно, $KN \perp D_1C_1$, и значит, KN — высота $\triangle KD_1C_1$. Поэтому N — середина отрезка D_1C_1, а значит, и отрезка DC.

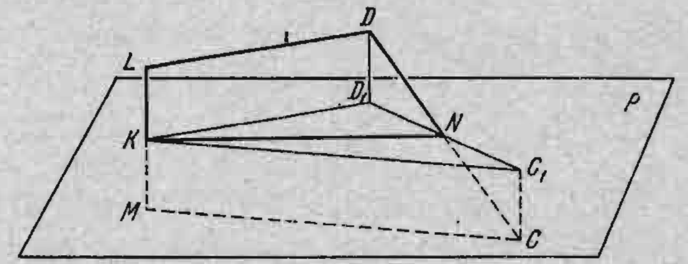


Рис. 237.

Таким образом, в условиях задачи основание общего перпендикуляра к двум скрещивающимся ребрам пирамиды делит эти ребра пополам.

Из рис. 237 легко заметить, что $LK = KM$, ибо $DD_1 = CC_1$. Поэтому (см. рис. 236) $AL = BM$ и из равенства прямоугольных треугольников ALD и BMC следует, что

$$AD = BC.$$

Аналогично доказывается, что $AC = BD$ и $AB = DC$. Следовательно, все грани равны между собой, как треугольники, имеющие по три равные стороны.

3. Геометрические места точек

524. Пусть P — одна из плоскостей, проходящих через данную точку A, а M — проекция данной точки B на плоскость P. Пусть, далее, C — середина отрезка AB (рис. 238). Так как треугольник AMB прямоугольный, то $CM = \frac{1}{2} AB$. Таким образом, все точки M находятся от точки C на одном и том же расстоянии $\frac{1}{2} AB$ и, следовательно, расположены на сфере радиуса $\frac{1}{2} AB$ с центром в точке C. Легко видеть, кроме того, что любая точка указанной сферы совпадает с одной из проекций точки B. Таким образом, искомое геометрическое место есть сфера с диаметром AB.

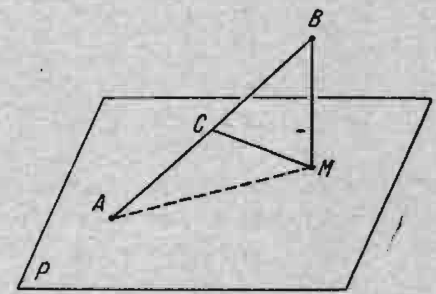


Рис. 238.

525. Пусть O — центр данного шара. Проведем через данную прямую l некоторую плоскость P, пересекающую сферу по окружности с центром в точке M (рис. 239). Как известно, $OM \perp P$. Проведем, далее, через точку O плоскость P_1, перпендикулярную к прямой l. Точку пересечения плоскости P_1 и прямой l обозначим через C. Так как плоскости P_1 и P перпендикулярны, то отрезок OM содержится в плоскости P_1. Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник OMC. Точка C не зависит от выбора секущей плоскости P, и гипотенуза OC прямоугольного треугольника OMC есть величина постоянная. Если D — середина OC, то $MD=\frac{OC}{2}$. Следовательно, если l не имеет со сферой общих точек, то искомое геометрическое место есть часть дуги окружности радиуса $\frac{OC}{2}$, заключенная внутри сферы (дуга лежит в плоскости P_1 и проходит через центр сферы). Если l касается сферы, то искомое геометрическое место — окружность радиуса $\frac{R}{2}$, где R — радиус сферы. Наконец, если l пересекает сферу, то геометрическое место точек M — окружность радиуса $\frac{OC}{2}$.

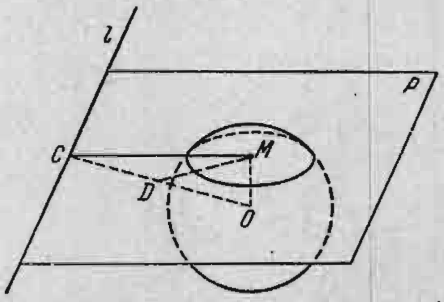


Рис. 239.

526. Искомым геометрическим местом является поверхность вращения, которая получается в результате вращения дуги окружности или полной окружности (см. решение предыдущей задачи) вокруг ее диаметра OC.

527. Докажем, что искомое геометрическое место есть сфера радиуса $R\frac{\sqrt{6}}{2}$ и что центр этой сферы совпадает с центром данной сферы.

Пусть M — произвольная точка искомого геометрического места; отрезки MA, MB и MC (рис. 240), будучи отрезками касательных, проведенных к сфере из одной общей точки, равны между собой. Поэтому прямоугольные треугольники AMC, CMB и AMB равны. Следовательно, $\triangle ABC$ равносторонний. Очевидно, что отрезок OM пересечет его в центре тяжести O_1. Пусть $AM=a$, тогда $AC=a\sqrt{2}$ и $AO_1=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Подставляя эти значения в равенство

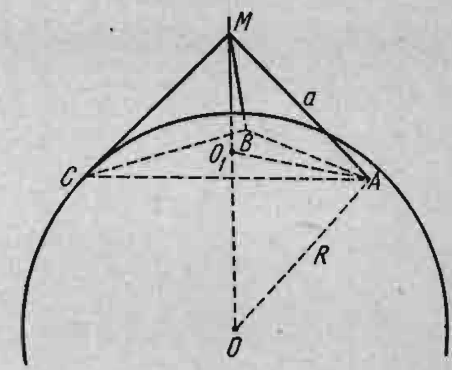


Рис. 240.

$$OM\cdot AO_1=OA\cdot AM$$

(мы пользуемся здесь тем, что $\triangle OAM$ прямоугольный, и записываем двумя способами его площадь), получим:

$$OM \cdot a \frac{\sqrt{6}}{3} = Ra.$$

Отсюда

$$OM = \frac{\sqrt{6}}{2} R.$$

Таким образом, точка M лежит на указанной выше сфере. Вращая данный шар вместе с касательными AM, CM и BM вокруг центра O, мы убедимся в том, что любая точка сферы принадлежит рассматриваемому геометрическому месту.

528. Данную точку пространства обозначим через A, точку пересечения прямых — через B, основание перпендикуляра, опущенного из A на плоскость, — через C. Возьмем, далее, любую прямую, проходящую через точку B, и опустим на нее перпендикуляр AD (рис. 241). Тогда по известной теореме $CD \perp BD$.

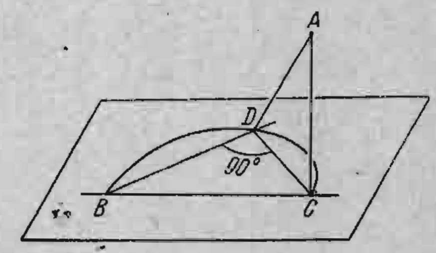


Рис. 241.

Следовательно, точка D лежит на окружности, диаметром которой является отрезок BC. Легко показать, что и, обратно, любая точка указанной окружности есть основание перпендикуляра, опущенного из точки A на некоторую прямую рассматриваемого семейства. Поэтому искомое геометрическое место есть окружность с диаметром BC.

529. Возможны два случая. 1) Прямая AB не параллельна рассматриваемой плоскости P. Обозначим через D соответствующую точку пересечения AB и P (рис. 242). Пусть M — точка касания

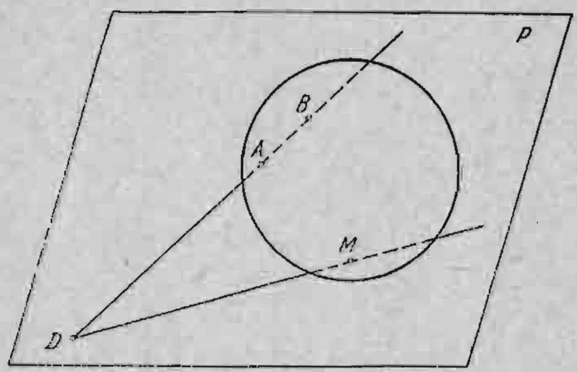


Рис. 242.

плоскости с одной из сфер рассматриваемой совокупности. Через прямые AB и DM проведем плоскость. Последняя пересечет сферу по окружности, касающейся прямой DM в точке M. По известному свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $DB \cdot DA = DM^2$. Следовательно, отрезок DM имеет постоянную длину $\sqrt{DB \cdot DA}$, не зависящую от выбора сферы, и, значит, все точки M лежат на окружности радиуса $r = \sqrt{DB \cdot DA}$ с центром в точке D. Обозначим эту окружность через C. Пусть теперь, наоборот, M есть некоторая точка окружности C; докажем, что она принадлежит рассматриваемому геометрическому месту.

Проведем через точки A, B и M вспомогательную окружность и центр ее обозначим через O_1 (рис. 243). Так как в наших условиях $DB \cdot DA = DM^2$, то прямая DM является касательной к этой

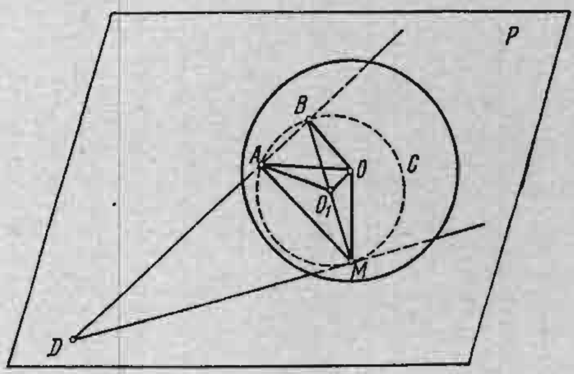


Рис. 243.

окружности и, следовательно, $O_1M \perp DM$. Восставим теперь в точке M перпендикуляр к плоскости P, а в точке O_1 — перпендикуляр к плоскости вспомогательной окружности. Эти два перпендикуляра лежат в плоскости, перпендикулярной к прямой DM в точке M и не параллельны (в противном случае точка O_1, а вместе с ней и точки A и B оказались бы в плоскости P). Поэтому эти перпендикуляры пересекаются в некоторой точке O. Легко видеть, что $OA = OB = OM$, ибо проекции этих отрезков O_1A, O_1B и O_1M равны между собой как радиусы окружности. Поэтому если построить сферу с центром в точке O и радиусом OM, то она коснется плоскости P и пройдет через точки A и B. Таким образом, обратно, любая точка окружности C принадлежит нашему геометрическому месту. Следовательно, искомое геометрическое место есть окружность C.

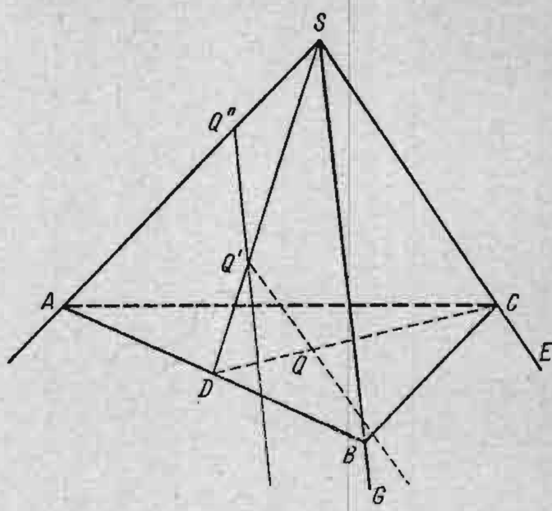


Рис. 244.

2) В случае, когда прямая AB параллельна плоскости, искомое геометрическое место представляет собой прямую, которая лежит в плоскости P, перпендикулярна к проекции отрезка AB на плоскость P и делит ее пополам.

530. Случай а). Пусть D—середина отрезка AB (рис. 244), C—подвижная точка, Q—центр тяжести $\triangle ABC$, Q'—центр тяжести $\triangle ASB$. Так как точка Q делит отрезок DC в отношении $1:2$, то геометрическое место этих точек есть, очевидно, луч, параллельный ребру SE и проходящий через точку Q'—центр тяжести $\triangle ASB$.

Случай б). Если теперь и точка B перемещается по ребру SG, то центры тяжести Q' треугольников ASB расположатся на луче, параллельном ребру SG и проходящем через точку Q'', которая делит отрезок AS в отношении $2:1$, считая от A к S, а соответствующие каждому фиксированному положению точки B лучи, рассмотренные в случае а), заполнят сечение трехгранного угла плоскостью, проходящей через точку Q'' параллельно ребрам SG и SE.

4. Наибольшие и наименьшие значения

531. Не нарушая общности, можно считать, что секущая плоскость пересекается с ребром куба CE (рис. 245). Легко видеть, что в сечении всегда получается некоторый параллелограмм $AMBN$. Площадь S параллелограмма может быть найдена по формуле

$$S=AB\cdot MK,$$

где через MK обозначен перпендикуляр, опущенный из точки M ребра CE на диагональ AB. Таким образом, площадь S будет наименьшей вместе с длиной отрезка MK. Но среди отрезков, соединяющих точки двух скрещивающихся прямых CE и AB, наименьшую длину имеет общий к ним перпендикуляр. Нетрудно сообразить, что общим перпендикуляром к указанным прямым является отрезок $M'O$, соединяющий середину ребра CE и диагонали AB. Действительно, $\triangle AM'B$ равнобедренный и поэтому $M'O \perp AB$. Так как и $\triangle COE$ равнобедренный, то $M'O \perp CE$. Таким образом, наименьшую площадь имеет сечение, делящее ребро CE пополам; соответствующая площадь $S=a\sqrt{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. Эту же задачу можно решить и иначе, если воспользоваться следующей теоремой: квадрат площади плоского многоугольника равен сумме квадратов площадей его проекций на три взаимно перпендикулярные плоскости. Эта теорема без большого труда доказывается на основании формулы, по которой площадь проекции плоского многоугольника на плоскость равна площади многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостями (см. формулу (1) в решении задачи 456).

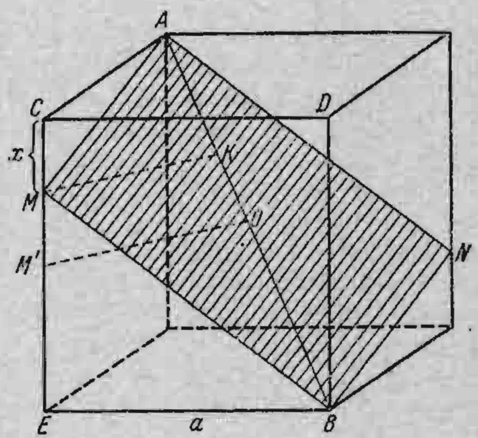


Рис. 245.

Считая эту теорему доказанной, обозначим через x длину отрезка CM (см. рис. 245). Проекции интересующего нас параллелограмма на плоскости ACD, $ECDB$ и BDN изображены в соответствующем порядке на рис. 246, *а*, *б* и *в*. Площади проекций соответственно равны a^2, ax, a^2-ax, так что в силу упомянутой теоремы $S^2=(a^2)^2+(ax)^2+(a^2-ax)^2=2a^2(x^2-ax+a^2)$. Представив квадратный трехчлен x^2-ax+a^2 в виде $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2$, находим (ср. (1), стр. 48), что наименьшее значение S^2 будет иметь при $x=\frac{a}{2}$, а минимум площади равен $S_{\min}=\sqrt{2a^2\frac{3}{4}a^2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

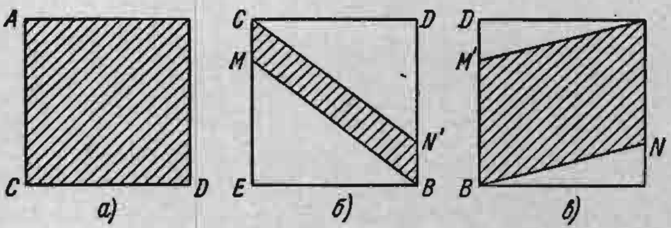


Рис. 246.

532. Четырехугольник $MNKL$, полученный в сечении пирамиды $ABCD$ (рис. 247), есть параллелограмм, так как $LK \parallel CD$ и $MN \parallel CD$; следовательно, $LK \parallel MN$ и, аналогично, $LM \parallel KN$. Если $\angle LKN=\alpha$, то площадь параллелограмма по известной формуле равна

$$S=KN\cdot KL\sin\alpha.$$

Так как $\angle LKN$ равен углу между скрещивающимися прямыми AB и CD, то его синус есть величина постоянная для всех рассматриваемых параллельных сечений. Таким образом, площадь сечения зависит только от величины произведения $KN\cdot KL$. Обозначим длину отрезка AK через x. Тогда, в силу подобия треугольников, имеем:

$$\frac{KN}{AB}=\frac{AD-x}{AD};\quad \frac{KL}{CD}=\frac{x}{AD}.$$

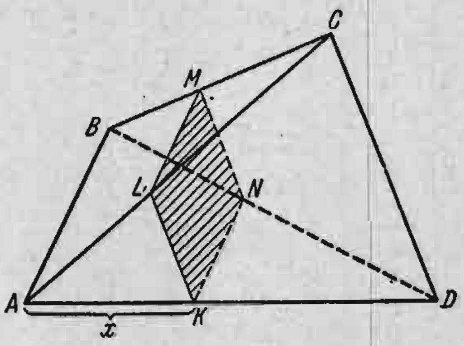


Рис. 247.

Перемножим эти равенства:

$$KN\cdot KL=\frac{AB\cdot CD}{AD^2}(AD-x)\,x.$$

Так как $\frac{AB\cdot CD}{AD^2}$ есть величина постоянная, то из предыдущей формулы следует, что интересующее нас произведение $KN\cdot KL$ принимает наибольшее значение вместе с произведением $(AD-x)\,x$.

Рассматривая это произведение как квадратный трехчлен $-x^2+ADx$ и представляя его в виде $-\left(x-\frac{AD}{2}\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2$, убеждаемся в том, что наибольшее его значение достигается при $x=AD/2$ (ср. (1), стр. 46).

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Преобразование выражений, содержащих тригонометрические функции

533. Применив формулу

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab],$$

получим

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-$$

$$-3\sin^2 x\cos^2 x]=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

534. Обозначим левую часть тождества через S и заменим произведение $2\cos\alpha\cos\beta$ по формуле (14) стр. 81 суммой $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. Тогда S запишется в следующем виде

$$S=\cos^2\alpha-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Применяя снова формулу (14), находим

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta).$$

Если теперь заменить $\cos^2\alpha$ на $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, то окончательно получим

$$S=\frac{1-\cos 2\beta}{2}=\sin^2\beta,$$

что и требовалось доказать.

535. Из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)[1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta],$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

Полагая в последнем равенстве $\alpha=x$, $\beta=2x$, получаем нужную нам формулу.

536. Имеем

$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$$
$$=\operatorname{tg}x\,\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x\,(3-\operatorname{tg}^2x)}{1-3\operatorname{tg}^2x}. \quad (1)$$

С другой стороны, применив повторно формулу для тангенса суммы двух углов, легко найдем, что

$$\operatorname{tg}3x=\frac{\operatorname{tg}x\,(3-\operatorname{tg}^2x)}{1-3\operatorname{tg}^2x}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), приходим к решению задачи.

З а м е ч а н и е: Формулу (2) можно вывести также из формул (7) и (8) стр. 81.

537. Пользуясь формулами для суммы и разности синусов, представим левую часть тождества в следующем виде

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].$$

Отсюда, применив формулу для разности косинусов, легко получим, что левая часть тождества совпадает с правой.

538. Используя тождество задачи 537, получим

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=$$
$$=4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

так как

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2},\quad \frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}.$$

539. Используя тождество, указанное в задаче 537, получим

$$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=$$
$$=4\sin n(\alpha+\beta)\cdot\sin n(\beta+\gamma)\cdot\sin n(\gamma+\alpha). \quad (1)$$

Имеем далее

$$\sin n(\alpha+\beta)=\sin n(\pi-\gamma)=(-1)^{n+1}\sin n\gamma.$$

Преобразуя аналогично два других множителя в правой части (1), приходим к решению задачи.

540. Для доказательства умножаем обе части равенства $\cos(\alpha+\beta)=0$ на $2\sin\beta$ и применяем формулу (15) стр. 81.

541. Допустимые значения аргументов определяются условием $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)\neq 0$. Заметим, что равенство

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

подлежащее доказательству, содержит аргументы $\alpha+\beta$ и α. Естественно поэтому ввести эти же аргументы и в исходное равенство. Имеем

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha,\quad 2\alpha+\beta=(\alpha+\beta)+\alpha.$$

Подставляя эти выражения для β и $2\alpha+\beta$ в исходное равенство

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta) \tag{2}$$

и пользуясь формулами для синуса суммы и разности углов, преобразуем (2) к следующему виду

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha. \tag{3}$$

Разделив обе части (3) на $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)$, получим (1).

542. Допустимыми являются все значения α и β, кроме тех, при которых $\cos(\alpha+\beta)=0$, $\cos\beta=A$. Заметив, что $\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta-\beta)$, запишем исходное равенство в следующем виде

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=A\sin(\alpha+\beta). \tag{1}$$

Разделив обе части (1) на $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, получим $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin\beta=A\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Выражая отсюда $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, придем к требуемому равенству.

543. Легко проверить, что в силу условий задачи $\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $|m|\leqslant|n|$. Поэтому равенство, которое нужно доказать, имеет смысл. Это равенство представляем в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{m+n}{m-n}\operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

В соотношении (2) заменим тангенсы углов α и $\alpha+\beta$ через синусы и косинусы, приведем дроби к общему знаменателю и отбросим общий знаменатель. Получим

$$m[\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)]-\\ -n[\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)]=0 \tag{3}$$

или

$$m\sin\beta-n\sin(2\alpha+\beta)=0. \tag{4}$$

Итак, доказательство сводится к доказательству соотношения (4). Так как соотношение (4) выполняется по условию задачи, то имеет место (3), а следовательно, и (2).

Но из (2) следует (1), а из (1) следует соотношение

$$\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n},$$

которое и нужно было доказать.

544. Рассмотрим тождество

$$\cos(x+y+z)=\cos(x+y)\cos z-\sin(x+y)\sin z=$$
$$=\cos x\cos y\cos z-\cos z\sin x\sin y-\cos y\sin x\sin z-$$
$$-\cos x\sin y\sin z.$$

Так как по условию задачи $\cos x\cos y\cos z\neq 0$, то из этого тождества следует, что

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z\,(1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x).$$

545. Первое решение. По условию задачи

$$0<\alpha<\pi,\quad 0<\beta<\pi,\quad 0<\gamma<\pi \quad \text{и} \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi. \tag{1}$$

Поэтому из (1) следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}. \tag{2}$$

С другой стороны, по формуле тангенса суммы

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}}. \tag{3}$$

Приравнивая правые части равенств (2) и (3) и освобождаясь от знаменателей, получаем требуемое равенство.

Второе решение. Из формулы

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=$$
$$=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),$$

доказанной в предыдущей задаче, сразу находим, что

$$1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0,$$

так как

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

546. По смыслу рассматриваемого в задаче выражения $\cos x\cos y\cos z\neq 0$. Поэтому из формулы, полученной в задаче 544,

находим

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y+\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z+\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x=1-\frac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}=$$

$$=1-\frac{\cos\frac{\pi}{2}k}{\cos x\cos y\cos z}.$$

Если k нечетно, то исследуемое выражение равно 1 и не зависит от x, y, z. При четном k оно зависит от x, y, z.

547. Первое решение. Заметим сначала, что $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\neq 1$, так как в противном случае мы имели бы $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=0$, что несовместно с равенством $\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1$. Поэтому из условия задачи вытекает, что

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=-\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(-\beta-\gamma),$$

откуда находим $\alpha=k\pi-\beta-\gamma$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$.

Второе решение. В задаче 544 доказана формула для косинуса суммы трех углов. Аналогично можно получить формулу

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma),$$

предполагая, что $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$. Из этой формулы находим, что, в условиях данной задачи,

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0, \text{ т. е. } \alpha+\beta+\gamma=k\pi.$$

548. Обозначим данную сумму через S. Первые два слагаемых преобразуем следующим образом

$$\operatorname{ctg}^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x=\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}-\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}=$$

$$=\frac{\cos^4 2x-\sin^4 2x}{\sin^2 2x\cos^2 2x}=\frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 4x}=\frac{4\cos 4x}{\sin^2 4x}.$$

Следовательно,

$$S=\frac{4\cos 4x}{\sin^2 4x}(1-2\sin 4x\cos 4x)=\frac{4\cos 4x}{\sin^2 4x}(1-\sin 8x).$$

Так как $1-\sin 8x=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$, то окончательно получаем

$$S=\frac{8\cos 4x\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)}{\sin^2 4x}.$$

549. Обозначим рассматриваемое выражение через S. Первые два слагаемые преобразуем по формуле (16) стр. 81, а произведение $\cos\alpha\cos\beta$ заменим суммой по формуле (14) стр. 81, наконец, заменим $\sin^2\gamma$ на $1-\cos^2\gamma$. Тогда получим

$$S=-\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)-\cos^2\gamma+[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cos\gamma.$$

Преобразуя сумму $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$ в произведение и раскрывая квадратные скобки, получаем

$$S=-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^2\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma+\\+\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma.$$

Группируя слагаемые в S, находим, что

$$S=-[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma][\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma].$$

Следовательно,

$$S=4\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

550. Исследуемое выражение можно преобразовать так (см. (13) стр. 81).

$$\frac{1-4\sin 10^\circ\sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ=1.$$

551. В силу формулы (12), приведенной на стр. 81, левая часть тождества равна

$$2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}. \qquad (1)$$

Умножив и разделив (1) на $2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$ и пользуясь формулой для $\sin 2\alpha$, получим

$$2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}.$$

Но

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\sin\frac{3\pi}{5},$$

а

$$\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\frac{\pi}{5}.$$

Следовательно, левая часть тождества равна $\frac{1}{2}$.

552. Умножив и разделив левую часть тождества на $2\sin\frac{\pi}{7}$ и пользуясь формулами, выражающими произведения тригонометрических функций через суммы, найдем:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая сумма равна $-\frac{1}{2}$.

553. Применив ко всем слагаемым исследуемой суммы S сначала формулу (16), а затем (17) стр. 81, найдем, что

$$S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right).$$

Суммы, стоящие в скобках, равны нулю, так как

$$\cos\frac{\pi}{8}=-\cos\frac{7\pi}{8},\quad \cos\frac{3\pi}{8}=-\cos\frac{5\pi}{8},$$
$$\cos\frac{\pi}{4}=-\cos\frac{3\pi}{4},\quad \cos\frac{5\pi}{4}=-\cos\frac{7\pi}{4}.$$

Следовательно, $S=\frac{3}{2}$.

554. Если в тождестве

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha \tag{1}$$

положить $\alpha=20^\circ$ (см. задачу 536), то сразу получаем

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}. \tag{2}$$

Приведем другое решение, не использующее формулу (1). Преобразуем отдельно произведения синусов и косинусов. Используя формулы (13) и (15) стр. 81, получим

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\sin 80^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 100^\circ+\sin 60^\circ}{2}-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right).$$

Замечая, что

$$\sin 100^\circ=\sin 80^\circ,$$

находим

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \qquad (3)$$

Далее,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Итак,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) следует (2).

2. Тригонометрические уравнения и системы уравнений

555. Уравнение можно записать так:

$$4\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 1$$

или

$$-2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x = 1.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

556. Уравнение теряет смысл при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ и $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, а при прочих x оно равносильно следующему:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 1 + \sin 2x.$$

После простых преобразований получаем

$$\sin x (3 + \sin 2x + \cos 2x) = 0.$$

Уравнение $\sin 2x + \cos 2x + 3 = 0$, очевидно, не имеет решений, поэтому исходное уравнение сводится к уравнению $\sin x = 0$.

Ответ $x = k\pi$.

557. Уравнение можно записать в следующем виде:

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

или

$$(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0.$$

Приравнивая каждую из скобок нулю, находим все корни.

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

558. Перепишем данное уравнение следующим образом:

$$\sin x+1-\cos 2x=\cos x-\cos 3x+\sin 2x.$$

После понятных преобразований получаем

$$\sin x+2\sin^2 x=2\sin 2x\cdot\sin x+\sin 2x$$

и, следовательно,

$$\sin x\,(1+2\sin x)\,(1-2\cos x)=0.$$

Ответ: $x_1=k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1}+k\pi,\quad x_3=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi.$

559. Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2-\frac{1}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{5}{4}=0$$

или

$$4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-5=0. \qquad (1)$$

Решая квадратное уравнение (1), находим

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1,\quad x=\frac{7\pi}{12}+k\pi.$$

Второй корень квадратного уравнения (1), равный $\frac{5}{4}$, не дает решений, так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$.

560. Разделив обе части уравнения на 2, приведем его к виду

$$\sin 17x+\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

откуда

$$2\sin\left(11x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)=0.$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{66}+\frac{k\pi}{11},\quad x_2=\frac{\pi}{36}+\frac{(2k+1)\pi}{12}.$

561. Данное уравнение теряет смысл, когда $\cos x=0$; поэтому можно считать, что $\cos x\neq 0$. Заметив, что правая часть уравнения равна $3\sin x\cos x+3\cos^2 x$, и разделив обе части на $\cos^2 x$, получим

$$\operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{tg} x+1)=3\,(\operatorname{tg} x+1),$$

или

$$(\operatorname{tg}^2 x-3)\,(\operatorname{tg} x+1)=0.$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ x_3=-\frac{\pi}{3}+k\pi.$

562. Пользуясь формулой для суммы кубов двух чисел, преобразуем левую часть уравнения следующим образом

$$(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x).$$

Исходное уравнение, следовательно, принимает вид

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x-1)=0.$$

Первая скобка вообще не обращается в нуль. Поэтому достаточно рассмотреть уравнение $\sin x+\cos x-1=0$. Последнее приводится к виду

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x_1=2\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$

563. Пользуясь известными формулами, запишем уравнение в следующем виде

$$\operatorname{cosec}^2 x-\sec^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x=-3. \qquad (1)$$

Так как $\operatorname{cosec}^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x$, $\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$, то уравнение (1) приводится к виду

$$\operatorname{tg}^2 x=1.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}.$

564. Используя тождество

$$\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=$$
$$=\left(\sin^2\frac{x}{3}+\cos^2\frac{x}{3}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{2}{3}x,$$

преобразуем уравнение к виду $\sin^2\frac{2x}{3}=\frac{3}{4}$.

Ответ: $x=\frac{3n\pm 1}{2}\pi \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$

565. Используя тождество, содержащееся в решении предыдущей задачи, получим уравнение

$$\sin^2 2x+\sin 2x-1=0.$$

Решая его, находим

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $x=(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{k\pi}{2}.$

566. Запишем данное уравнение в виде

$$(1+k)\cos x\cos(2x-\alpha)=\cos(x-\alpha)+k\cos 2x\cos(x-\alpha). \qquad (1)$$

Так как

$$\cos x\cos(2x-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x-\alpha)],$$

$$\cos(x-\alpha)\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(3x-\alpha)+\cos(x+\alpha)],$$

то уравнение (1) примет вид

$$k[\cos(x-\alpha)-\cos(x+\alpha)]=\cos(x-\alpha)-\cos(3x-\alpha)$$

или

$$k\sin x\sin\alpha=\sin(2x-\alpha)\sin x. \qquad (2)$$

Уравнение (2) распадается на два:

а) $\sin x=0$; тогда $x=l\pi$;
б) $\sin(2x-\alpha)=k\sin\alpha$;

тогда

$$x=\frac{\alpha}{2}+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\arcsin(k\sin\alpha)+\frac{\pi}{2}n.$$

Для того чтобы последнее выражение имело смысл, k и α должны быть связаны условием

$$|k\sin\alpha|\leqslant 1.$$

567. Так как числа a, b, c, d являются последовательными членами арифметической прогрессии, то можно положить $b=a+r$, $c=a+2r$, $d=a+3r$ (r — разность прогрессии). Пользуясь формулой

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

представим уравнение в виде

$$\cos(2a+r)x-\cos(2a+5r)x=0$$

или

$$\sin(2a+3r)x\cdot\sin 2rx=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{k\pi}{2a+3r}, \qquad x_2=\frac{k\pi}{2r}.$$

Написанные формулы имеют смысл, так как

$$2a+3r=b+c>0 \text{ и } r\neq 0.$$

568. Уравнение запишем в следующем виде

$$\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-1\right)$$

или, после несложных преобразований, в виде

$$\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(3\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Уравнение $3\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$ равносильно следующему: $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0$ и не имеет вещественных решений.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

569. Первое решение. Уравнение теряет смысл при $x=k\pi$, а при прочих x оно равносильно следующему:

$$\cos x-\sin x=2\sin 2x\cdot\sin x. \qquad (1)$$

Заменяя произведение, стоящее в правой части (1), на сумму, по формуле (13) стр. 81, получаем

$$\cos x-\sin x=\cos x-\cos 3x, \qquad \sin x=\cos 3x,$$

откуда $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ и, следовательно,

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Ответ:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, \qquad (2)$$

$$x_2=\frac{3\pi}{4}+k\pi.$$

Второе решение. Применяя формулу (20), стр. 82, и полагая $\operatorname{tg} x=t$, получаем уравнение

$$t^3+3t^2+t-1=0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем

$$(t+1)(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})=0,$$

откуда

$$(\operatorname{tg} x)_1=-1, \quad (\operatorname{tg} x)_2=\sqrt{2}-1, \quad (\operatorname{tg} x)_3=-1-\sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1=\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)+k\pi$,

$$x_3=-\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2})+k\pi.$$

Замечание: Две последние серии решений можно записать одной формулой (2).

570. Применяя к левой части уравнения формулу (14), стр. 81, получаем

$$\cos(2x-\beta)+\cos\beta=\cos\beta,$$

откуда

$$\cos(2x-\beta)=0.$$

Следовательно,

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi+\frac{\beta}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\pm\frac{\pi}{4}\right).$$

571. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin\alpha+[\sin(2\varphi+\alpha)-\sin(2\varphi-\alpha)]=\sin(\varphi+\alpha)-\sin(\varphi-\alpha),$$

или, после простых преобразований, в виде

$$\sin\alpha+2\sin\alpha\cos 2\varphi=2\sin\alpha\cdot\cos\varphi.$$

Предполагая $\sin\alpha\neq 0$ (в противном случае $\cos\varphi$ не определяется), получаем

$$1+2\cos 2\varphi-2\cos\varphi=0, \quad 4\cos^2\varphi-2\cos\varphi-1=0,$$

$$\cos\varphi=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

Так как угол φ лежит в третьей четверти, то $\cos\varphi<0$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

572. Применив формулу $\cos^2\varphi=\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$, запишем уравнение в виде

$$\cos 2(\alpha+x)+\cos 2(\alpha-x)=2a-2$$

или

$$\cos 2\alpha\cos 2x=a-1,$$

откуда

$$\cos 2x=\frac{a-1}{\cos 2\alpha}. \qquad (1)$$

Так как, с другой стороны,

$$\operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}},$$

то из (1) находим

$$\operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{\frac{a-1+\cos 2\alpha}{1-a+\cos 2\alpha}}.$$

Из формулы (1) следует, что задача имеет решения лишь при условии, что

$$|\cos 2\alpha|\geqslant|a-1|.$$

573. Используя формулы (18) и (19), стр. 82, приведем данное соотношение $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ к виду

$$(2+\sqrt{7})\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-(2-\sqrt{7})=0.$$

Разрешая это уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, получим

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1=\frac{3}{2+\sqrt{7}}=\sqrt{7}-2$$

и

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2=\frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ условиям задачи.

Так как $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{8}$, то

$$0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1.$$

Значение $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$ удовлетворяет условию задачи, так как $\frac{\sqrt{7}-2}{3}<\sqrt{2}-1$. Корень $\sqrt{7}-2$ следует отбросить, ибо

$$\sqrt{7}-2>\sqrt{2}-1.$$

574. Положив $\sin x-\cos x=t$ и используя тождество $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$, запишем исходное уравнение в виде

$$t^2+12t-13=0.$$

Это уравнение имеет корни $t_1=-13$, $t_2=1$. Но $t=\sin x-\cos x=$ $=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, откуда $|t|\leqslant\sqrt{2}$, следовательно, корень $t_1=-13$ можно не рассматривать. Поэтому исходное уравнение сводится к следующему:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x_1=\pi+2k\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

575. Данное уравнение преобразуем к виду

$$2\cos^2\frac{x}{2}(2+\sin x)+\sin x=0.$$

Используя формулу $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$ и раскрывая скобки, получаем

$$2+2(\sin x+\cos x)+\sin x\cdot\cos x=0. \qquad (1)$$

Это уравнение того же типа, что и в задаче 574. Подстановкой $\sin x+\cos x=t$ уравнение (1) сводится к квадратному уравнению

$t^2+4t+3=0$, имеющему корни $t_1=-1$, $t_2=-3$. Так как $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$, то исходному уравнению могут удовлетворять лишь корни уравнения

$$\sin x+\cos x=-1. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), получаем

$$x_1=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

$$x_2=(2k+1)\pi.$$

Вторую серию корней следует отбросить, ибо $\sin x_2=0$ и исходное уравнение теряет смысл.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

576. Данное уравнение теряет смысл при $x=k\pi$, а при $x\neq k\pi$ может быть записано в виде

$$\cos^3 x+\cos^2 x=\sin^3 x+\sin^2 x.$$

Перенося все члены уравнения налево и разлагая на множители, получаем $(\cos x-\sin x)(\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin x+\cos x)=0$. Отсюда вытекают две возможности:

а) $\sin x-\cos x=0$, тогда

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi; \qquad (1)$$

б) $\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin x+\cos x=0 \qquad (2)$

Уравнение (2) аналогично рассмотренному в задаче 574 и имеет решения

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad (3)$$

и

$$x_3=(2k+1)\pi. \qquad (4)$$

Но значения x, содержащиеся в формуле (4), не являются корнями исходного уравнения, так как при $x=n\pi$ исходное уравнение теряет смысл. Следовательно, уравнение имеет корни, определяемые формулами (1) и (3).

577. Запишем уравнение следующим образом

$$2\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+1\right).$$

Приводя дроби к общему знаменателю и отбрасывая его, получим уравнение

$$2(\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x)\cos 2x=$$
$$=\sin 2x(\sin 2x\sin 3x+\cos 2x\cos 3x).$$

Но выражение, стоящее в скобке слева, равно $\sin x$, а стоящее в скобке справа равно $\cos x$. Поэтому мы приходим к уравнению

$$2 \sin x (\cos 2x - \cos^2 x) = -2 \sin^3 x = 0,$$

откуда $x = k\pi$.

578. Данное уравнение можно записать в виде

$$3\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

или

$$\frac{3 \sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x}.$$

Заметим, что это уравнение имеет смысл, если

$$\sin 2x \neq 0, \quad \sin 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0.$$

Для тех x, при которых уравнение (1) имеет смысл,

$$3 \sin x \cos 2x = \sin 3x,$$

или

$$\sin x (3 - 4 \sin^2 x - 3 \cos 2x) = 0,$$

или

$$2 \sin^3 x = 0.$$

Так как последнее уравнение равносильно уравнению $\sin x = 0$, то ввиду сделанного выше замечания исходное уравнение решений не имеет.

579. Уравнение записываем в виде

$$6 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x,$$

после чего преобразуем следующим образом:

$$6\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

или

$$\frac{6 \cos 2x}{\cos x \sin 3x} = \frac{\cos x}{\cos 2x \sin 3x};$$

$$6 \cos^2 2x = \cos^2 x;$$

$$12 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0.$$

Решив последнее уравнение, найдем

$$\cos 2x = \frac{1 \pm 7}{24},$$

откуда

$$1) \cos 2x = \frac{1}{3}, \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi;$$

$$2) \cos 2x = -\frac{1}{4}, \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi.$$

В процессе решения было произведено умножение обеих частей уравнения на $\cos x \cos 2x \sin 3x$. Но легко видеть, что ни при одном из найденных значений x это произведение не обращается в нуль. Следовательно, все найденные значения для x являются корнями исходного уравнения.

580. Приведя к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части уравнения, и применив формулу

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

получим

$$\sin x \cos x (\sin x - \cos x)(\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) = \sin x - \cos x.$$

Отсюда следует, что либо

$$\sin x - \cos x = 0, \qquad (1)$$

либо

$$\sin x \cos x (\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x) - 1 = 0. \qquad (2)$$

Преобразуем теперь уравнение (2), пользуясь тем, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

а

$$\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \sin x \cos x.$$

Положив еще в уравнении (2) $\sin x \cos x = y$, запишем уравнение (2) в виде

$$y^3-y^2-y+1=0 \qquad (3)$$

или (после разложения левой части на множители) в виде

$$(y-1)^2(y+1)=0.$$

Если $y=1$, т. е. $\sin x \cos x = 1$, то $\sin 2x = 2$, что невозможно. Если же $y=-1$, то $\sin 2x = -2$, что также невозможно.

Итак, уравнение (2) не имеет корней. Следовательно, корни исходного уравнения суть корни уравнения (1), т. е. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

581. Правая часть уравнения теряет смысл при $x=k\pi$ и при $x=\frac{\pi}{2}+m\pi$, так как при $x=2l\pi$ не определена функция $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, при $x=(2l+1)\pi$ не определена функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а при $x=\frac{\pi}{2}+m\pi$ знаменатель правой части обращается в нуль. При $x \neq k\pi$ имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{2\cos x}{\sin x}.$$

Следовательно, при $x \neq k\pi$ и $x \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$ (k, m — любые целые числа) правая часть уравнения равна $-2\sin x\cos x$.

Левая часть уравнения не имеет смысла при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ и $x=\frac{\pi}{4}+l\cdot\frac{\pi}{2}$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а при прочих значениях равна $-\operatorname{tg} x$, так как

$$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Итак, если $x\neq k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ и $x\neq\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2}$, то исходное уравнение имеет вид

$$\operatorname{tg} x=2\sin x\cos x.$$

Это уравнение имеет корни

$$x=k\pi \text{ и } x=\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что исходное уравнение не имеет корней.

582. Умножая правую часть уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, приведем его к виду

$$(1-a)\sin^2 x-\sin x\cos x-(a+2)\cos^2 x=0. \qquad (1)$$

Предположим сначала, что $a\neq 1$. Тогда из (1) следует, что $\cos x\neq 0$, так как в противном случае мы имели бы $\sin x=\cos x=0$, что невозможно. Разделив обе части (1) на $\cos^2 x$ и положив $\operatorname{tg} x=t$, получим уравнение

$$(1-a)t^2-t-(a+2)=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) имеет решения в том и только том случае, когда корни уравнения (2) вещественны, т. е. когда его дискриминант

$$D=-4a^2-4a+9\geqslant 0. \qquad (3)$$

Решая неравенство (3), находим

$$-\frac{\sqrt{10}+1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\sqrt{10}-1}{2}. \qquad (4)$$

Пусть t_1 и t_2 — корни уравнения (2). Тогда соответствующие решения уравнения (1) имеют вид

$$x_1=\operatorname{arctg} t_1+k\pi, \quad x_2=\operatorname{arctg} t_2+k\pi.$$

Рассмотрим теперь случай $a=1$.

В этом случае уравнение (1) записывается в виде

$$\cos x(\sin x+3\cos x)=0$$

и имеет следующие решения:

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad x_2=-\operatorname{arctg}3+k\pi.$$

583. Применив формулы

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2,\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

и положив $\cos 2x=t$, запишем данное уравнение в следующем виде

$$t^2-6t+4a^2-3=0. \qquad (1)$$

Исходное уравнение будет иметь решения при тех и только при тех значениях a, при которых корни t_1 и t_2 уравнения (1) вещественны и по крайней мере один из этих корней по абсолютной величине не превосходит единицы.

Решая уравнение (1), находим

$$t_1=3-2\sqrt{3-a^2},\quad t_2=3+2\sqrt{3-a^2}.$$

Следовательно, корни уравнения (1) вещественны, если

$$|a|\leqslant\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Если условие (2) выполнено, то $t_2>1$ и поэтому этот корень можно отбросить. Таким образом, задача сводится к отысканию тех значений a, удовлетворяющих условию (2), при которых $|t_1|\leqslant 1$, т. е.

$$-1\leqslant 3-2\sqrt{3-a^2}\leqslant 1. \qquad (3)$$

Из (3) находим

$$-4\leqslant -2\sqrt{3-a^2}\leqslant -2,$$

откуда

$$2\geqslant\sqrt{3-a^2}\geqslant 1. \qquad (4)$$

Так как неравенство $2\geqslant\sqrt{3-a^2}$ выполняется при $|a|\leqslant\sqrt{3}$, то система неравенств (4) сводится к неравенству

$$\sqrt{3-a^2}\geqslant 1,$$

откуда находим $|a|\leqslant\sqrt{2}$.

Итак, исходное уравнение разрешимо, если $|a|\leqslant\sqrt{2}$, и имеет решения

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-2\sqrt{3-a^2}\right)+k\pi.$$

584. Преобразуем данное уравнение, умножая обе части его на $32\sin\frac{\pi x}{31}$. Применив несколько раз формулу $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, получим:

$$\sin\frac{32}{31}\pi x=\sin\frac{\pi x}{31}$$

или

$$\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{33}{62}\pi x=0. \qquad (1)$$

Отсюда находим две серии корней:

$$x_1=2n, \qquad x_2=\frac{31}{33}(2n+1) \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Так как в процессе решения производилось умножение обеих частей данного уравнения на множитель $32\sin\frac{\pi x}{31}$, который может обращаться в нуль, то уравнение (1) может иметь корни, являющиеся посторонними для исходного уравнения. Посторонними корнями будут те и только те корни уравнения

$$\sin\frac{\pi x}{31}=0, \qquad (2)$$

которые не удовлетворяют исходному уравнению.

Корни уравнения (2) даются формулой

$$x=31k \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots) \qquad (3)$$

и, как легко видеть, не удовлетворяют исходному уравнению. Поэтому из найденной серии корней уравнения (1) следует исключить все те, которые имеют вид (3). Для корней первой серии это приводит к равенству $2n=31k$, возможному только при четном k, т. е. при $k=2l$ и $n=31l$ $(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Для корней второй серии аналогично получаем равенство $\frac{31}{33}(2n+1)=31k$ или $2n+1=33k$, возможное только при нечетном k, т. е. при $k=2l+1$ и $n=33l+16$ $(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Итак, корни исходного уравнения таковы:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=2n, \quad \text{где } n\neq 31l,\\ &x_2=\frac{31}{33}(2n+1), \quad \text{где } n\neq 33l+16. \end{aligned}\right\}\ l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

585. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x,$$

или

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 7x=\sin\frac{\pi}{3}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x,$$

т. е.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+5x\right).$$

Но $\sin\alpha=\sin\beta$ тогда и только тогда, когда либо $\alpha-\beta=2k\pi$, либо $\alpha+\beta=(2m+1)\pi$ $(k,\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$. Следовательно,

$$\frac{\pi}{6}+7x-\frac{\pi}{3}-5x=2k\pi$$

или

$$\frac{\pi}{6}+7x+\frac{\pi}{3}+5x=(2m+1)\,\pi.$$

Таким образом, корнями уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{\pi}{12}(12k+1), \\ x&=\frac{\pi}{24}(4m+1) \end{aligned}\right\} (k,\ m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

586. Так как левая часть уравнения равна

$2-(7+\sin 2x)(\sin^2 x-\sin^4 x)=$

$$=2-(7+\sin 2x)\sin^2 x\cos^2 x=2-(7+\sin 2x)\frac{1}{4}\sin^2 2x,$$

то, положив $t=\sin 2x$, запишем уравнение в виде

$$t^3+7t^2-8=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет очевидный корень $t_1=1$. Два других его корня находятся из уравнения

$$t^2+8t+8=0. \qquad (2)$$

Они равны

$$-4+2\sqrt{2} \text{ и } -4-2\sqrt{2}.$$

Оба эти значения не годятся, так как они по абсолютной величине больше единицы. Следовательно, корни исходного уравнения суть корни уравнения $\sin 2x=1$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

587. Можно считать, что $a^2+b^2\neq 0$, так как в противном случае уравнение принимает вид $c=0$ и не позволяет найти $\sin x$ и $\cos x$. Известно, что если $a^2+b^2\neq 0$, то всегда существует угол φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$, такой, что

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (1)$$

Разделив данное уравнение почленно на $\sqrt{a^2+b^2}$ и используя (1), получим равносильное уравнение

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Так как всегда $|\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$, то это уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $|c|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ или когда $c^2\leqslant a^2+b^2$. Это и есть условие разрешимости задачи. Далее, находим:

$$\cos(x+\varphi)=\pm\sqrt{1-\sin^2(x+\varphi)}=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Заметив, что

$$\sin x = \sin(x+\varphi-\varphi) = \sin(x+\varphi)\cos\varphi - \cos(x+\varphi)\sin\varphi,$$
$$\cos x = \cos(x+\varphi-\varphi) = \cos(x+\varphi)\cos\varphi + \sin(x+\varphi)\sin\varphi,$$

и подставив в правую часть выражения (1), (2) и (3), окончательно получим два решения:

$$\text{а)}\ \sin x = \frac{bc - a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x = \frac{ac + b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};$$

$$\text{б)}\ \sin x = \frac{bc + a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},$$

$$\cos x = \frac{ac - b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

588. Заметив, что $(b\cos x + a)(b\sin x + a) \neq 0$ (в противном случае уравнение теряет смысл), освобождаемся от знаменателей. В результате получаем:

$$ab\sin^2 x + (a^2+b^2)\sin x + ab = ab\cos^2 x + (a^2+b^2)\cos x + ab,$$

откуда

$$(a^2+b^2)(\sin x - \cos x) - ab(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0,$$

и уравнение распадается на два:

$$1^\circ.\ \sin x = \cos x, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

и

$$2^\circ.\ \sin x + \cos x = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Но последнее уравнение не имеет решений, так как $\frac{a^2+b^2}{|ab|} \geq 2$, в то время как

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\left|\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right| =$$
$$= \sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leq \sqrt{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

589. Пользуясь тождеством

$$\cos^6 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)$$

и формулой

$$\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$$

(см. (8) стр. 81),

приведем уравнение к виду

$$4\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Из (1) находим

$$(\cos 2x)_1 = -1, \qquad (\cos 2x)_2 = -\frac{1}{4}.$$

Ответ:

$$x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi;$$

$$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi.$$

590. Применив формулы

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \text{ и } \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

представим уравнение в виде

$$(1-\cos 2x)^3 + 3\cos 2x + 2(2\cos^2 2x - 1) + 1 = 0,$$

или

$$7\cos^2 2x - \cos^3 2x = 0,$$

откуда

$$\cos 2x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

591. Из формул для $\sin 3x$ и $\cos 3x$ найдем:

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}, \qquad \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.$$

Следовательно, уравнение можно представить в виде

$$\cos 3x(\cos 3x + 3\cos x) + \sin 3x(3\sin x - \sin 3x) = 0,$$

или

$$3(\cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = 0,$$

или

$$3\cos 2x + \cos 6x = 0. \qquad (1)$$

Но так как $\cos^3 2x = \frac{\cos 6x + 3\cos 2x}{4}$, то уравнение (1) примет вид

$$4\cos^3 2x = 0,$$

откуда

$$\cos 2x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n.$$

592. Используя тождество $(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1$, получим:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

откуда

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{17}{32},$$

$$1-\sin^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{17}{32}, \quad \sin^4 2x-8\sin^2 2x+\frac{15}{4}=0.$$

Решая полученное биквадратное уравнение, найдем:

$$\sin^2 2x=4\pm\frac{7}{2}, \quad \sin^2 2x=\frac{1}{2}, \quad 2x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};$$

отсюда

$$x=\frac{2k+1}{8}\pi.$$

593. Заменяя $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ соответственно через $\frac{1-\cos 2x}{2}$ и $\frac{1+\cos 2x}{2}$, перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

или

$$(1-\cos 2x)^5+(1+\cos 2x)^5=58\cos^4 2x.$$

Положив $\cos 2x=y$, после простых преобразований придем к биквадратному уравнению относительно y:

$$24y^4-10y^2-1=0.$$

Это уравнение имеет только два вещественных корня: $y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $\cos 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, где $k=0$, ± 1, ± 2, ...

594. Используя тождество, полученное в задаче 261, запишем исходное уравнение в виде

$$(\sin x+\sin 2x)(\sin 2x+\sin 3x)(\sin x+\sin 3x)=0,$$

или, после разложения сумм синусов в произведение, в виде

$$\sin\frac{3x}{2}\sin 2x\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Приравнивая нулю каждый из сомножителей, получим пять серий решений

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n^2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi;$$

$$4)\ x=\frac{2n_4+1}{2}\pi;\quad 5)\ x=(2n_5+1)\pi,$$

где n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 — любые целые числа.

Заметив, что решения серий 4) и 5) содержатся в серии 2), окончательно получим следующие три серии решений:

$$1)\ x=\frac{2n_1}{3}\pi;\quad 2)\ x=\frac{n_2}{2}\pi;\quad 3)\ x=\frac{2n_3}{5}\pi,$$

где n_1, n_2, n_3 — любые целые числа.

595. Первое решение. При $n=1$ уравнение превращается в тождество. Если $n>1$, то из тождества

$$1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^n=\sin^{2n} x+C_n^1 \sin^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots$$
$$\ldots+C_n^{n-1}\sin^2 x\cos^{2(n-1)} x+\cos^{2n} x$$

в силу данного уравнения получаем

$$C_n^1 \sin^{2(n-1)} x\cos^2 x+\ldots+C_n^{n-1}\sin^2 x\cos^{2(n-1)} x=0.$$

Так как все слагаемые неотрицательны, то либо $\sin^2 x=0$, либо $\cos^2 x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}k$.

Второе решение. Очевидно, уравнение удовлетворяется, если x принимает значения, кратные $\frac{\pi}{2}$, т. е. если $x=\frac{\pi}{2}k$ (k — целое число). Покажем, что уравнение

$$\sin^{2n} x+\cos^{2n} x=1$$

не имеет других корней. Пусть $x_0\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$; тогда $\sin^2 x_0<1$ и $\cos^2 x_0<1$, откуда следует, что при $n>1$ будет $\sin^{2n} x_0<\sin^2 x_0$ и $\cos^{2n} x_0<\cos^2 x_0$ и, значит, $\sin^{2n} x_0+\cos^{2n} x_0<\sin^2 x_0+\cos^2 x_0=1$. Этим доказательство завершается.

596. Положим $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=y$, тогда $\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-3\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\pi-3y$ и уравнение примет вид

$$\sin 3y=2\sin y.$$

Последнее уравнение с помощью формулы (7), стр. 81, можно записать так:

$$\sin y\,(4\sin^2 y-1)=0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет следующие решения:

$$y_1=k\pi,\quad y_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad y_3=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k.$$

Возвращаясь к аргументу x по формуле $x=\frac{3\pi}{5}-2y$, окончательно получим три серии решений исходного уравнения

$$x_1=\frac{3\pi}{5}-2k\pi,\quad x_2=\frac{3\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}-\pi k,$$

$$x_3=\frac{3\pi}{5}+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}-\pi k.$$

597. Так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$, $\sin\alpha\geqslant -1$, то

$$|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant 2,\quad \sin 3x+5\geqslant 4.$$

Итак, левая часть уравнения не превосходит 4, правая часть не меньше 4. Следовательно, $|\cos 4x-\cos 2x|=+2$ (и тогда либо $\cos 4x=-1$ и $\cos 2x=1$, либо $\cos 4x=1$ и $\cos 2x=-1$) и $\sin 3x=$ $=-1$. Рассмотрим возможные случаи.

а) $\cos 4x=-1,\quad x=\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi;$

$\cos 2x=1,\quad x=\pi k;$

$\sin 3x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}l.$

Общих корней нет.

б) $\cos 4x=1,\quad x=\frac{\pi n}{2};$

$\cos 2x=-1,\quad x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi;$

$\sin 3x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l=\frac{4l-1}{6}\pi.$

Общие корни: $x=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

598. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2\sin x\cos x},$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}$$

или

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x=1. \qquad (1)$$

Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то (1) имеет место, если либо

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1 \text{ и } \sin 2x=-1,$$

либо

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \text{и} \quad \sin 2x=1.$$

Но первые два уравнения не имеют общих корней, а вторые два уравнения имеют общие корни $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Следовательно, данное уравнение имеет корни $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

599. Разделив данное уравнение почленно на 2 и заметив, что $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$, получим равносильное уравнение

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin 4x=1.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, когда $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$ и $\sin 4x=\pm 1$, откуда

$$x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \text{и} \quad x=\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\pi}{2}+2m\pi\right),$$

где n, m — целые числа. Приравняв оба значения, придем после сокращения на π к равенству

$$-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}+2n=\pm\frac{1}{8}+\frac{m}{2},$$

или после умножения на 24

$$12m-48n=-8\pm 9.$$

При любых целых m и n слева стоит четное целое число, а справа — нечетное (1 или —17). Последнее равенство при целых m, n невозможно, что и требовалось доказать.

600. Первое решение. Задача равносильна следующей: какие значения может принимать функция $\lambda=\sec x+\operatorname{cosec} x$, если аргумент x меняется в пределах $0<x<\frac{\pi}{2}$?

Рассмотрим функцию

$$\lambda^2=(\sec x+\operatorname{cosec} x)^2=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sin x\cos x}+\frac{1}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\frac{2}{\sin x\cos x}=\frac{4}{\sin^2 2x}+\frac{4}{\sin 2x}.$$

Каждое из слагаемых, стоящих справа, при возрастании x от нуля до $\frac{\pi}{2}$ ведет себя следующим образом: сначала убывает от $+\infty$ до 4 $\left(\text{когда } 0<x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$; затем возрастает от 4 до

$+\infty$ $\left(\text{когда } \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right)$; оба слагаемых при $x=\frac{\pi}{4}$ одновременно принимают наименьшие значения, значит, и сумма будет иметь наименьшее значение при $x=\frac{\pi}{4}$. При этом $\lambda^2=8$. Поэтому, если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\lambda^2 \geqslant 8$, а так как $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ в первой четверти положительны, то $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$. График функции $\lambda(x)$ показан на рис. 248.

Второе решение. Заметим сразу, что мы должны ограничиться рассмотрением лишь положительных значений λ, ибо при $0<x<\frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ положительны. Преобразовав уравнение к виду

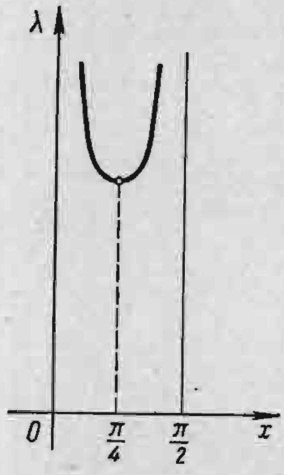


Рис. 248.

$$\sin x+\cos x=\lambda \sin x \cos x,$$

возведем обе части его в квадрат; в результате получим:

$$1+2 \sin x \cos x=\lambda^2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Полагая теперь $\sin 2x=z$, будем иметь:

$$\lambda^2 z^2-4z-4=0,$$

откуда

$$z_{1,2}=\frac{2 \pm \sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}. \qquad (1)$$

Так как по условию $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $z=\sin 2x>0$, и мы должны взять в равенстве (1) знак плюс, т. е.

$$z=\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}.$$

Если теперь нам удастся удовлетворить неравенству

$$\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2} \leqslant 1, \qquad (2)$$

то уравнение

$$\sin 2x=\frac{2+\sqrt{4+4\lambda^2}}{\lambda^2}$$

будет иметь решение x такое, что $0<x<\frac{\pi}{2}$. Это последнее удовлетворит и исходному уравнению, в чем легко убедиться. Если же неравенство (2) не удовлетворяется, то нужного решения не существует. Итак вся задача свелась к решению неравенства (2). Освободив его от знаменателя, легко получаем $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$.

601. Из данной системы сразу получаем

$$x+y=k\pi, \qquad x-y=l\pi.$$

Отсюда

$$x=\frac{k+l}{2}\pi, \qquad y=\frac{k-l}{2}\pi.$$

По условию задачи $0 \leqslant k+l \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant k-l \leqslant 2.$

Этим неравенствам удовлетворяют следующие 5 пар значений k и l:

1) $k=0, \quad l=0$; 2) $k=1, \quad l=0$;
3) $k=1, \quad l=-1$; 4) $k=1, \quad l=1$;
5) $k=2, \quad l=0$.

Ответ: $x_1=0, \quad y_1=0; \quad x_2=\frac{\pi}{2}, \ y_2=\frac{\pi}{2};$

$$x_3=0, \quad y_3=\pi;$$
$$x_4=\pi, \quad y_4=0;$$
$$x_5=\pi, \quad y_5=\pi.$$

602. Преобразуем систему к виду

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 x &= 1+\sin x \sin y, \\ \cos^2 x &= 1+\cos x \cos y. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Складывая и вычитая уравнения системы (1), получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x-\cos(x+y) &= 0, \\ 1+\cos(x-y) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Первое из уравнений системы (2) можно записать так:

$$\cos 2x-\cos(x+y)=2\sin\left(\frac{3x+y}{2}\right)\sin(y-x)=0.$$

Если $\sin(x-y)=0$, то $x-y=k\pi$. Но из второго уравнения системы (2) находим:

$$\cos(x-y)=-1, \quad x-y=(2n+1)\pi.$$

Следовательно, в этом случае имеем бесчисленное множество решений: $x-y=(2n+1)\pi$.

Если $\sin\left(\frac{3x+y}{2}\right)=0$, то $3x+y=2k\pi$. Но $x-y=(2n+1)\pi$. Следовательно,

$$x=\frac{2k+2n+1}{4}\pi, \qquad y=\frac{2k-6n-3}{4}\pi.$$

603. Возведем оба уравнения в квадрат, сложим почленно и воспользуемся тождеством

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

(см. задачу 533). Получим: $\sin^2 2x=1$. Если $\sin 2x=1$, то либо

$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, либо $x=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$. В первом случае из исходной системы найдем $\sin y=\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, а во втором случае $\sin y=\cos y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Аналогично рассматривается случай $\sin 2x=-1$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad y_1=\frac{\pi}{4}+2l\pi;$

$$x_2=\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi, \quad y_2=\frac{\pi}{4}+(2l+1)\pi;$$

$$x_3=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \quad y_3=\frac{3\pi}{4}+2l\pi;$$

$$x_4=\frac{3}{4}\pi+(2k+1)\pi, \quad y_4=\frac{3}{4}\pi+(2l+1)\pi.$$

604. Первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=1,$$

откуда в силу второго уравнения получаем:

$$\sin(x+y)=\cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, либо

$$x+y=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \qquad (1)$$

либо

$$x+y=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi. \qquad (2)$$

Второе уравнение исходной системы преобразуем так:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\sqrt{2}.$$

Отсюда

$$\cos(x-y)=\sqrt{2}-\cos(x+y). \qquad (3)$$

Если имеет место (1), то $\cos(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, и из (3) находим

$$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi.$$

Если имеет место (2), то $\cos(x+y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos(x-y)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, что невозможно.

Итак, для нахождения x и y мы получили систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \\ x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

В соответствии с выбором знака во втором уравнении системы (4) получим две серии решений $x_1=\frac{\pi}{4}+(k+l)\pi$, $y_1=(k-l)\pi$ и

$$x_2=(k+l)\pi, \quad y_2=\frac{\pi}{4}+(k-l)\pi.$$

605. Разделив первое уравнение почленно на второе, получим

$$\cos x\cos y=\frac{3}{4\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Складывая это уравнение с первым и вычитая из (1) первое уравнение, получим систему, равносильную исходной:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y)&=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos(x+y)&=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi, \\ x+y&=\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2l\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В соответствии с выбором знаков в уравнениях (2) получаем следующие четыре серии решений

а) $x_1=(k+l)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$,

$y_1=(l-k)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$.

б) $x_2=(k+l)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$,

$y_2=(l-k)\pi+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$;

в) $x_3=(k+l)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$,

$y_3=(l-k)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$;

г) $x_4=(k+l)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}$,

$y_4=(l-k)\pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}$.

606. Преобразуем второе уравнение к виду

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=a.$$

Но так как $x+y=\varphi$, то $\cos(x-y)=2a-\cos\varphi$. Получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x+y=\varphi, \\ &x-y=\pm\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi. \end{aligned}\right\}$$

Ответ:

$$x=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)+k\pi,$$

$$y=\frac{\varphi}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos\varphi)-k\pi,$$

причем a и φ должны быть связаны условием $|2a-\cos\varphi|\leqslant 1$.

607. Так как левая часть первого уравнения системы не превосходит единицы, то система может иметь решения лишь при $a=0$. Полагая $a=0$, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} &\sin x\cdot\cos 2y=1, \\ &\cos x\cdot\sin 2y=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из второго уравнения системы (1) следует, что либо $\cos x=0$, либо $\sin 2y=0$. Если $\cos x=0$, то при $x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi$ из первого уравнения находим $y_1=n\pi$, а при $x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ получаем $y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi$. Случай $\sin 2y=0$ не дает новых решений. Итак, система уравнений разрешима лишь при $a=0$ и имеет две следующие серии решений

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2m\pi, \qquad y_1=n\pi;$$

$$x_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \qquad y_2=\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

608. Заметим, что $\cos y$ не может быть равен нулю. Действительно, если $\cos y=0$, то $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$ и

$$\cos(x-2y)=\cos(x-\pi)=-\cos x=0,$$
$$\sin(x-2y)=\sin(x-\pi)=-\sin x=0.$$

Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть одновременно равны нулю, так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Очевидно, $a\neq 0$ (в противном случае $\cos(x-2y)=\sin(x-2y)=0$).

Разделив второе уравнение на первое почленно (в силу сделанных выше замечаний деление возможно), получим:

$$\operatorname{tg}(x-2y)=1, \quad x-2y=\frac{\pi}{4}+k\pi. \tag{1}$$

Рассмотрим два случая:

а) k четное. В этом случае

$$\cos(x-2y)=\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y, \qquad \cos y=\sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}}=\lambda;$$

$$y=\pm\arccos\lambda+2m\pi.$$

Подставляя это значение y в (1), получаем:

$$x=\pm 2\arccos\lambda+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

б) k нечетное. Тогда $\cos(x-2y)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=a\cos^3 y$,

$$y=\pm\arccos(-\lambda)+2m\pi.$$

Из (1) найдем:

$$x=\pm 2\arccos(-\lambda)+(4m+k)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

Система разрешима при $a>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

609. Возводя данные соотношения в квадрат, получим:

$$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y=a^2, \qquad (1)$$

$$\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=b^2. \qquad (2)$$

Складывая и вычитая (1) и (2) почленно, найдем:

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2, \qquad (3)$$

$$\cos 2x+\cos 2y+2\cos(x+y)=b^2-a^2. \qquad (4)$$

Уравнение (4) можно преобразовать к виду

$$2\cos(x+y)[\cos(x-y)+1]=b^2-a^2. \qquad (5)$$

Из (3) и (5) найдем:

$$\cos(x+y)=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}.$$

610. Пользуясь формулой

$$\cos 2x+\cos 2y=2\cos(x+y)\cos(x-y),$$

запишем второе уравнение системы в виде

$$4\cos(x-y)\cos(x+y)=1+4\cos^2(x-y).$$

Исходную систему можно заменить следующей эквивалентной:

$$\left.\begin{array}{c} 4\cos\alpha\cos(x+y)=1+4\cos^2\alpha, \\ x-y=\alpha. \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array}$$

Сравним левую и правую части уравнения (1).

Имеем

$$|4\cos\alpha\cdot\cos(x+y)|\leqslant 4|\cos\alpha|.$$

С другой стороны, из неравенства $(1\pm 2\cos\alpha)^2\geqslant 0$ следует, что

$$4|\cos\alpha|\leqslant 1+4\cos^2\alpha,$$

причем знак равенства здесь имеет место лишь в случае $2|\cos\alpha|=1$. Следовательно, система (1)—(2) может иметь решения лишь при условии, что $|\cos\alpha|=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим две возможности:

а) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Из (1) находим, что $\cos(x+y)=1$, т. е.

$$x+y=2k\pi. \tag{3}$$

Решая систему (2)—(3), получаем

$$x_1=\frac{\alpha}{2}+k\pi,\quad y_1=k\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

б) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

Поступая аналогично, находим

$$x_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{\alpha}{2},\quad y_2=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

611. Эта задача аналогична предыдущей. Приведем, однако, несколько иное решение. Применив формулу (14) стр. 81, представим первое уравнение системы в виде

$$4\cos^2(x-y)+4\cos(x+y)\cos(x-y)+1=0.$$

Положив $\cos(x-y)=t$ и пользуясь тем, что $x+y=\alpha$, получим уравнение

$$4t^2+4t\cos\alpha+1=0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет вещественные корни лишь при условии, что $D=16(\cos^2\alpha-1)\geqslant 0$, т. е. когда $|\cos\alpha|=1$. Рассмотрим два возможных случая: $\cos\alpha=1$ и $\cos\alpha=-1$. Если $\cos\alpha=1$, то из (1) следует, что

$$t=\cos(x-y)=-\frac{1}{2}.$$

Получаем систему

$$\left.\begin{aligned} x-y&=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\\ x+y&=\alpha,\end{aligned}\right\}$$

из которой находим

$$x_1 = \pm\frac{\pi}{3}+k\pi+\frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = \mp\frac{\pi}{3}-k\pi+\frac{\alpha}{2}.$$

Если $\cos\alpha=-1$, то, поступая аналогично, получим

$$x_2 = k\pi+\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\pi}{6}, \quad y_2 = \frac{\alpha}{2}-k\pi\mp\frac{\pi}{6}.$$

612. Рассмотрим первое уравнение системы.

В силу неравенства (1) стр. 19, имеем $\left|\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right|\geqslant 2$, причем знак равенства имеет место лишь в случае $\operatorname{tg}x=1$ и $\operatorname{tg}x=-1$. Так как правая часть первого уравнения удовлетворяет условию $\left|2\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 2$, то первое уравнение системы может удовлетворяться лишь в следующих случаях:

$$\text{а) } \left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}x=1,\\ &\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=1,\end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \text{б) } \left.\begin{aligned}&\operatorname{tg}x=-1,\\ &\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=-1.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Система (1) имеет следующие решения:

$$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad y_1=\frac{\pi}{4}+2l\pi, \tag{3}$$

а система (2) — решения

$$x_2=-\frac{\pi}{4}+m\pi, \quad y_2=-\frac{3\pi}{4}+2n\pi. \tag{4}$$

Легко проверить, что решения, определяемые формулами (3), не удовлетворяют второму уравнению исходной системы, а решения, задаваемые формулами (4), удовлетворяют второму уравнению (а значит, и всей системе) лишь при нечетном m. Полагая в (4) $m=2k+1$, записываем решения исходной системы в виде

$$x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi,$$

$$y=-\frac{3}{4}\pi+2n\pi.$$

613. Заметим, что $\cos x\neq 0$, $\cos y\neq 0$, так как в противном случае третье уравнение системы не имеет смысла. Поэтому первые два уравнения можно преобразовать к виду

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x=1-b, \tag{1}$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y=1-a. \tag{2}$$

Но $a \neq 1$, так как если $a=1$, то из (1) будем иметь $b=1$, что противоречит условию $a \neq b$. Аналогично, если $b=1$, то и $a=1$. Следовательно, (1) можно почленно разделить на (2). Разделив, получим:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Убедимся еще в том, что $a \neq 0$. Действительно, если $a=0$, то из второго уравнения получим, что $\sin y \neq 0$, а из третьего тогда получим, что $b=0$, т. е. $a=b=0$, что невозможно.

В силу этого замечания можем из третьего уравнения найти

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Если $\frac{b}{a}=\frac{1-b}{1-a}$, то $a=b$, что невозможно.

Если же $\frac{b}{a}=-\frac{1-b}{1-a}$, то $a+b=2ab$.

Ответ: $a+b=2ab$.

614. Второе соотношение можно, в силу первого, переписать так:

$$\frac{A \sin \beta}{\cos \alpha}=\frac{B \sin \beta}{\cos \beta}$$

или

$$\sin \beta\,(A \cos \beta-B \cos \alpha)=0.$$

Это соотношение может быть выполнено либо при $\sin \beta=0$ и тогда также $\sin \alpha=0$, $\cos \beta= \pm 1$, $\cos \alpha= \pm 1$, либо при $A \cos \beta-B \cos \alpha=0$. В этом последнем случае получаем систему

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= A \sin \beta, \\ A \cos \beta &= B \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Возведя каждое из этих уравнений в квадрат и сделав замену по формулам $\sin^2 \alpha=1-\cos^2 \alpha$ и $\cos^2 \beta=1-\sin^2 \beta$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \alpha+A^2 \sin^2 \beta &= 1, \\ B^2 \cos^2 \alpha+A^2 \sin^2 \beta &= A^2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Отсюда $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \beta$ находятся единственным образом тогда и только тогда, когда $A^2(1-B^2) \neq 0$ в этом случае

$$\cos \alpha= \pm \sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}, \quad \sin \beta= \pm \frac{1}{A} \sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}.$$

Рассмотрим особые случаи, когда $A^2(1-B^2)=0$. Если $A=0$, то из (1) получаем $\cos\alpha=\pm 1$ и $B=0$; в этом случае $\cos\alpha=\pm 1$, $\sin\beta$ остается неопределенным. Если $B^2=1$, то из (2) получаем также $A^2=1$, и данные уравнения не содержат параметров A и B; поэтому задача о выражении $\cos\alpha$ и $\sin\beta$ через A и B теряет смысл.

615. Из второго уравнения заключаем, что

$$\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right),$$

и, следовательно, либо

$$x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi, \tag{1}$$

либо

$$x=2y-\frac{\pi}{2}+(2l+1)\pi. \tag{2}$$

Обращаясь к первому уравнению данной системы, в случае (1) находим:

$$\operatorname{ctg} 2y=\operatorname{tg}^3 y \quad\text{или}\quad \frac{1-\operatorname{tg}^2 y}{2\operatorname{tg} y}=\operatorname{tg}^3 y.$$

Решив биквадратное уравнение, получим $\operatorname{tg} y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Во втором случае, внося x из формулы (2) в уравнение $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y$, убеждаемся в отсутствии вещественных решений. Итак,

$$\operatorname{tg} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\text{и}\quad x=\frac{\pi}{2}-2y+2k\pi,$$

откуда

$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi,\quad x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

и

$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-2\pi n$$

или

$$x_1=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi$$

и

$$x_2=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+2m\pi,$$
$$y_2=-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+n\pi,$$

где m, n — любые целые числа.

616. Преобразуя левую и правую части первого уравнения, получим:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0.$$

Это уравнение удовлетворяется в следующих случаях:

1°. $x=-y+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$.

2°. $y=2l\pi$, x — любое число $(l=0, \pm 1, \ldots)$.

3°. $x=2m\pi$, y — любое число $(m=0, \pm 1, \ldots)$.

Соотношение 1° совместимо со вторым уравнением системы $|x|+|y|=1$ лишь при условии $k=0$; действительно, из 1° следует неравенство

$$|x|+|y|\geqslant 2|k|\pi,$$

которое при условии $|x|+|y|=1$ возможно лишь в случае $k=0$.

Решая тогда систему

$$x=-y, \quad |x|+|y|=1,$$

находим два решения:

$$x_1=\frac{1}{2}, \; y_1=-\frac{1}{2} \text{ и } x_2=-\frac{1}{2}, \; y_2=\frac{1}{2}.$$

Рассуждая аналогично в случаях 2° и 3°, находим еще две пары решений:

$$x_3=1, \; y_3=0; \qquad x_4=-1, \; y_4=0,$$

а также

$$x_5=0, \; y_5=1; \qquad x_6=0, \; y_6=-1.$$

Таким образом, рассматриваемая в задаче система имеет шесть указанных решений.

617. Возведем обе части каждого уравнения системы в квадрат и, сложив полученные равенства, будем иметь:

$$\sin^2(y-3x)+\cos^2(y-3x)=4(\sin^6 x+\cos^6 x),$$

т. е.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Рассмотрим тождество

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x, \qquad (2)$$

доказанное в задаче 533.

Сравнивая (1) и (2), находим:

$$\sin^2 2x=1, \; \sin 2x=\pm 1,$$

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1) \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Перемножив уравнения заданной системы, будем иметь:

$$\sin(y-3x)\cos(y-3x)=4\sin^3 x\cos^3 x,$$

т. е.

$$\sin 2(y-3x)=\sin^3 2x.$$

Но $\sin 2x=\pm 1$, поэтому

$$\sin 2(y-3x)=\pm 1,$$

$$y-3x=\frac{\pi}{4}(2m+1) \qquad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Следовательно,

$$y=\frac{3\pi}{4}(2n+1)+\frac{\pi}{4}(2m+1).$$

В процессе решения системы производилось умножение обеих частей уравнений на выражения, содержащие неизвестные, поэтому могли получиться посторонние решения. Проверим, все ли найденные пары значений x и y являются решениями. Должно быть:

$$\sin\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\sin^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=2\cos^3\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

или, полагая

$$\sin\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi m}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}$$

и

$$\cos\frac{\pi}{4}(2m+1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi m}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi m}{2},$$

и делая аналогичную замену в правой части, получим после сокращения на постоянный множитель:

$$\sin\frac{\pi m}{2}+\cos\frac{\pi m}{2}=\left(\sin\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi m}{2}-\sin\frac{\pi m}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)^3.$$

Так как основание степени в правой части этих новых равенств может принимать при целых n только значения 0, $+1$, -1 и эти значения не изменяются при возведении в третью степень, то

$$\sin\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}=\left(\sin\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)^3,$$

$$\cos\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}=\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\sin\frac{\pi n}{2}\right)^3;$$

отсюда получаем:

$$\sin\frac{\pi}{2}m-\sin\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m,$$

$$-\sin\frac{\pi}{2}m+\sin\frac{\pi}{2}n=\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m.$$

Складывая и вычитая последние соотношения, получим:

$$\sin\frac{\pi}{2}m-\sin\frac{\pi}{2}n=0,$$

$$\cos\frac{\pi}{2}n-\cos\frac{\pi}{2}m=0, \qquad (3)$$

или

$$\sin\frac{\pi}{4}(m-n)\cos\frac{\pi}{4}(m+n)=0,$$

$$\sin\frac{\pi}{4}(m-n)\sin\frac{\pi}{4}(m+n)=0.$$

Ток как $\cos\frac{\pi}{4}(m+n)$ и $\sin\frac{\pi}{4}(m+n)$ одновременно в нуль не обращаются, то полученная система равносильна уравнению $\sin\frac{\pi}{4}(m-n)=0$, откуда

$$m-n=4k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \qquad (4)$$

Таким образом, полученные пары значений x и y

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \qquad y=\frac{3\pi}{4}(2n+1)+\frac{\pi}{4}(2m+1)$$

дают решения системы тогда и только тогда, когда целые числа n и m связаны соотношением (4). Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

$$y=\frac{\pi}{4}[3(2n+1)+2(n+4k)+1]=\pi[2(n+k)+1].$$

Но $n+k$ есть произвольное целое число. Обозначив его через p, будем иметь окончательно

$$x=\frac{\pi}{4}(2n+1), \qquad y=\pi(2p+1) \qquad (n,\ p=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

618. Возведя в квадрат обе части первого и второго уравнений и переписав третье уравнение без изменений, придем к системе:

$$\left.\begin{aligned}(\sin x+\sin y)^2&=4a^2,\\ (\cos x+\cos y)^2&=4b^2,\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y&=c.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Будем искать условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c, чтобы система (1) имела хотя бы одно решение. Так как данную систему мы заменяем не равносильной ей системой (1), то надо показать, что обе системы имеют хотя бы одно решение при одних и тех же условиях, наложенных на числа a, b, c.

Если данная система при некоторых a, b, c имеет решение, то, очевидно, при тех же a, b, c имеет решение и система (1). Верно и обратное утверждение: если при некоторых a, b, c система (1) имеет решение, то при тех же значениях a, b, c имеет решение и данная система.

В самом деле, пусть x_1, y_1 есть решение системы (1); тогда осуществляется одна из четырех возможностей:

либо

$$\sin x_1 + \sin y_1 = 2a, \qquad \cos x_1 + \cos y_1 = 2b,$$

либо

$$\sin x_1 + \sin y_1 = -2a, \qquad \cos x_1 + \cos y_1 = 2b,$$

либо

$$\sin x_1 + \sin y_1 = -2a, \qquad \cos x_1 + \cos y_1 = -2b,$$

либо

$$\sin x_1 + \sin y_1 = 2a, \qquad \cos x_1 + \cos y_1 = -2b$$

Если имеет место первый случай, то x_1, y_1 есть решение данной системы; во втором случае данная система имеет, например, решение $-x_1$, $-y_1$; в третьем случае — решение $\pi + x_1$, $\pi + y_1$; в четвертом — решение $\pi - x_1$, $\pi - y_1$. Следовательно, данная система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда имеет хотя бы одно решение система (1).

Когда же система (1) имеет решение? Складывая и вычитая первое и второе уравнения системы (1), найдем:

$$\cos(x-y) = 2(a^2+b^2) - 1,$$
$$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y) = 4(b^2 - a^2),$$

или

$$\cos(x-y) = 2(a^2+b^2) - 1,$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2(b^2 - a^2),$$

откуда

$$\cos(x-y) = 2(a^2+b^2) - 1,$$
$$(a^2+b^2)\cos(x+y) = b^2 - a^2.$$

Мы пришли к системе

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y) &= 2(a^2+b^2) - 1, \\ (a^2+b^2)\cos(x+y) &= b^2 - a^2, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y &= c, \end{aligned}\right\}$$

равносильной системе (1).

Если $a^2 + b^2 = 0$, то второе уравнение удовлетворяется при любых x и y. Из первого уравнения получаем: $x - y = \pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), третье уравнение дает $\operatorname{tg}(y + \pi + 2k\pi)\operatorname{tg} y = c$

или $\operatorname{tg}^2 y=c$. Последнее уравнение имеет решение при любом $c \geqslant 0$. Если $a^2+b^2 \neq 0$, то имеем:

$$\left.\begin{aligned} \cos(x-y) &= 2(a^2+b^2)-1, \\ \cos(x+y) &= \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$|2(a^2+b^2)-1| \leqslant 1, \qquad (3)$$

$$\left|\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\right| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Неравенство (4) при наличии условия

$$a^2+b^2 \neq 0,$$

очевидно, справедливо, а неравенство (3) равносильно следующему:

$$0 < a^2+b^2 \leqslant 1$$

Представим левую часть третьего уравнения системы (1) следующим образом:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]} \qquad (5)$$

и подставим в (5) значения $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$ из (2). В результате получим, что решение системы (2) будет удовлетворять третьему уравнению исходной системы, если

$$c = \frac{2(a^2+b^2)-1-\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}+2(a^2+b^2)-1} = \frac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}.$$

Мы пришли к следующему результату: данная система имеет хотя бы одно решение в двух случаях:

1) $0 < a^2+b^2 \leqslant 1$ и $c = \dfrac{(a^2+b^2)^2-b^2}{(a^2+b^2)^2-a^2}$;

2) $a=b=0$ и c — любое неотрицательное число.

3. Обратные тригонометрические функции

619. Из определения главных значений обратных тригонометрических функций следует, что

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Чтобы использовать эту формулу, заменим $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ с помощью формул приведения на косинус угла, заключенного между 0 и π. Напишем следующие равенства:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=-\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}.$$

В итоге получаем:

$$\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]=\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\frac{9\pi}{14}.$$

620. По аналогии с решением предыдущей задачи имеем:

$$\cos\frac{33}{5}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\frac{3}{5}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{5}\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Следовательно,

$$\arcsin\left(\cos\frac{33}{5}\pi\right)=\arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right]=-\frac{\pi}{10}.$$

621. Пусть $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha_1$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha_2$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\alpha_3$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\alpha_4$. Очевидно, $0<\alpha_i<\frac{\pi}{4}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Поэтому

$$0<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4<\pi.$$

Для доказательства тождества достаточно установить, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=1.$$

Так как $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{4}{7}$, $\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)=\frac{3}{11}$, то

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)+\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}{1-\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{tg}(\alpha_3+\alpha_4)}=1.$$

622. Положив $\arcsin x=\alpha$, $\arccos x=\beta$, будем иметь:

$$x=\sin\alpha \text{ и } x=\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

По определению главных значений имеем $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $0\leqslant\beta\leqslant\pi$. Из последнего неравенства следует неравенство $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Значит $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$, так как углы α и $\frac{\pi}{2}-\beta$ заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и синусы этих углов равны. Формула доказана.

623. Пользуясь тем, что $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ (см. решение задачи 622), преобразуем уравнение к виду

$$12\pi t^2-6\pi^2 t+(1-8\alpha)\pi^3=0, \qquad (1)$$

где $t=\arcsin x$. При $\alpha<\frac{1}{32}$ дискриминант этого уравнения

$$D=36\pi^4-48\pi^4(1-8\alpha)<0.$$

Следовательно, корни уравнения (1) невещественны и поэтому исходное уравнение при $\alpha<\frac{1}{32}$ не имеет решений.

624. Положим $\arccos x=\alpha$, $\arcsin\sqrt{1-x^2}=\beta$.

а) Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ (так как $0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$). Остается лишь убедиться в том, что $\sin\alpha=\sin\beta$. Но в силу неравенства $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\alpha=+\sqrt{1-x^2}$

С другой стороны, при всех y ($|y|\leqslant 1$) имеем $\sin\arcsin y=y$; в частности, $\sin\beta=\sin\arcsin\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}$. Следовательно, при $0\leqslant x\leqslant 1$ имеет место формула

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

б) Если $-1\leqslant x\leqslant 0$, то $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-\beta\leqslant\pi$.

Так как, кроме того, $\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$ и $\sin(\pi-\beta)=\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$, то $\alpha=\pi-\beta$, т. е. при $-1\leqslant x\leqslant 0$ имеет место формула

$$\arccos x=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

625. Докажем, что $\arcsin(-x)=-\arcsin x$. Положим $\arcsin(-x)=\alpha$; тогда $-x=\sin\alpha$ и, по определению главных значений,

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Так как $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha=x$ и так как из неравенства (1) следует неравенство $-\frac{\pi}{2}\leqslant-\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $-\alpha=\arcsin x$, откуда $\alpha=-\arcsin x$, т. е. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

Аналогично доказывается формула $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

626. Из определения главных значений обратных тригонометрических функций следует, что $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$, если $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Если $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, то $-\frac{\pi}{2}\leqslant x-2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$. Но тогда $\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(x-2k\pi)]=x-2k\pi$.

627. По условию задачи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+x}{1-x}. \qquad (1)$$

Пользуясь формулой $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$, получим в силу (1)

$$\sin\alpha=\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

откуда

$$y=\arcsin(\sin\alpha)=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}=\beta. \qquad (2)$$

Так как $0<x<1$, то $\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}<\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Тогда

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi\leqslant 0$$

и

$$\arcsin[\sin(\alpha-\pi)]=\arcsin(-\sin\alpha)=-\arcsin(\sin\alpha)=-y.$$

Но угол $\alpha-\pi$ лежит в пределах главного значения $\operatorname{Arcsin} x$. Следовательно,

$$y=\arcsin(\sin\alpha)=\pi-\alpha. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) получаем, что $\alpha+\beta=\pi$.

628. В формулах $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$ берутся главные значения обратных тригонометрических функций. Рассмотрим $\cos\arcsin x$. Это косинус дуги, синус которой равен x. Значит,

$$\cos\arcsin x=+\sqrt{1-x^2},\ \text{где}\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Здесь, конечно, существенно, что $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Аналогично

$$\sin\arccos x=+\sqrt{1-x^2},\ \text{где}\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Обозначим $y=+\sqrt{1-x^2}$; тогда $0\leqslant y\leqslant 1$.

Таким образом, надо найти соотношение между $\arcsin y$ и $\arccos y$ при $0\leqslant y\leqslant 1$. Эти два угла дополняют друг друга до $\dfrac{\pi}{2}$ (см. решение задачи 622). Таким образом,

$$\arcsin\cos\arcsin x+\arccos\sin\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

4. Тригонометрические неравенства

629. Неравенство равносильно следующему

$$\sin^2 x+\sin x-1>0. \qquad (1)$$

Разложив квадратный трехчлен, стоящий в левой части (1), на множители, получим

$$\left(\sin x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)>0. \qquad (2)$$

Но $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ и поэтому $\sin x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Следовательно, исходное неравенство равносильно следующему: $\sin x > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и имеет решения $2k\pi + \varphi < x < \pi - \varphi + 2k\pi$, где $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

630. Исследуемое выражение не имеет смысла при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. При прочих значениях x умножим обе части неравенства на $\cos^2 x$. Получим равносильное неравенство

$$\sin 2x)^2 + \frac{3}{2} \sin 2x - 2 > 0.$$

Решив полученное квадратное неравенство, найдем, что либо $\sin 2x < \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$, либо $\sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}$. Первое из этих неравенств не может выполняться. Следовательно,

$$k\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41}-3}{4} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41}-3}{4} + k\pi.$$

631. Преобразуя произведение синусов в сумму, заменим данное неравенство следующим равносильным

$$\cos 3x > \cos 7x \quad \text{или} \quad \sin 5x \sin 2x > 0.$$

Но при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin 2x > 0$ и, следовательно, исходное неравенство равносильно следующему: $\sin 5x > 0$.

Ответ: $0 < x < \frac{\pi}{5}$ и $\frac{2}{5}\pi < x < \frac{\pi}{2}$.

632. Выражение, стоящее в знаменателе левой части неравенства, положительно, так как $|\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$. Поэтому неравенство равносильно следующему:

$$\sin^2 x > \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad |\sin x| > \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi$.

633. Запишем неравенство в виде

$$(\cos x - \sin x)[1 - (\cos x + \sin x)] =$$
$$= 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) (\cos x - \sin x) > 0. \qquad (1)$$

Но $\sin\frac{x}{2} > 0$, так как $0 < x < 2\pi$. Рассмотрим два возможных случая, при которых выполняется неравенство (1)

Случай 1.

$$\left.\begin{aligned}\cos x - \sin x > 0,\\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

По условию $0 < x < 2\pi$. Учитывая это, из (2) находим, что первое неравенство выполняется при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ или $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$, второе — при $\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$. Следовательно, в этом случае $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$.

Случай 2.

$$\left.\begin{aligned}\cos x - \sin x < 0\\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} < 0.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) с учетом того, что $0 < x < 2\pi$, удовлетворяется при $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Ответ:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi.$$

634. Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда неравенство примет вид

$$t > \frac{2t - 2 + 2t^2}{2t + 2 - 2t^2}$$

или

$$\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2-t-1} > 0. \qquad (1)$$

Так как $t^2+t+1 > 0$ при всех действительных значениях t, то неравенство (1) равносильно неравенству

$$\frac{t-1}{t^2-t-1} > 0. \qquad (2)$$

Трехчлен t^2-t-1 имеет корни $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Решив (2), найдем, что либо $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, либо $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1$.

Ответ: а) $2k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \pi + 2k\pi$.

б) $2k\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

635. Из формул для $\sin 3x$ и $\cos 3x$ (см. стр. 81) находим:

$$\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}, \quad \sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.$$

Пользуясь этими формулами, запишем данное неравенство в виде

$$(\cos 3x+3\cos x)\cos 3x-(3\sin x-\sin 3x)\sin 3x>\frac{5}{2}$$

или $$\sin^2 3x+\cos^2 3x+3(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x)>\frac{5}{2},$$ или

$\cos 4x>\frac{1}{2}$, откуда $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, или

$$-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi n<x<\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\pi n \quad (n=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots).$$

636. Неравенство, которое нужно доказать, можно записать в виде

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

Но $\sin\varphi>0$ при $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, поэтому, после умножения обеих частей неравенства (1) на $\sin\varphi$, получим равносильное неравенство

$$2\cos^2\frac{\varphi}{2}>\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi$$

или $1>\sin\varphi$. Последнее неравенство при $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ выполняется; следовательно, справедливо и исходное неравенство.

637. Положив $\operatorname{tg} x=t$, получим:

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{tg} 3x=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$$

Левая часть теряет смысл для тех значений x, при которых $t^2=1$, $t^2=\frac{1}{3}$. При прочих значениях x левая часть неравенства равна t^4+2t^2+1 и, следовательно, принимает положительные значения.

638. В силу того что

$$\operatorname{ctg}^2 x-1=\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}, \quad 3\operatorname{ctg}^2 x-1=\frac{3\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x},$$

$$\operatorname{ctg} 3x\cdot\operatorname{tg} 2x-1=\frac{\cos 3x\sin 2x-\sin 3x\cos 2x}{\sin 3x\cos 2x}=-\frac{\sin x}{\sin 3x\cos 2x},$$

левая часть неравенства может быть записана в виде

$$-\frac{\sin x\,(3\cos^2 x-\sin^2 x)}{\sin^4 x\,\sin 3x}.$$

Но

$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=$

$$=\sin x\,(3\cos^2 x-\sin^2 x),$$

поэтому заданное неравенство сводится к очевидному неравенству

$$-\frac{1}{\sin^4 x}\leqslant -1.$$

639. Используя формулу $\operatorname{tg}(\theta-\varphi)=\dfrac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi}$ и условие $\operatorname{tg}\theta=n\operatorname{tg}\varphi$, получим:

$$\operatorname{tg}^2(\theta-\varphi)=\frac{(n-1)^2\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+n\operatorname{tg}^2\varphi)^2}=\frac{(n-1)^2}{(\operatorname{ctg}\varphi+n\operatorname{tg}\varphi)^2}.$$

Нужно доказать, что

$$(\operatorname{ctg}\varphi+n\operatorname{tg}\varphi)^2\geqslant 4n \text{ или } (1+n\operatorname{tg}^2\varphi)^2\geqslant 4n\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Приходим, таким образом, к очевидному неравенству

$$(1-n\operatorname{tg}^2\varphi)^2\geqslant 0.$$

640. Данное неравенство можно записать в виде

$$\frac{1}{2}+\frac{1-\sin x}{2-\sin x}-\frac{2-\sin x}{3-\sin x}\geqslant 0$$

и, умножая на $2(2-\sin x)(3-\sin x)>0$, заменить следующим равносильным: $\sin^2 x-5\sin x+4\geqslant 0$ или

$$(4-\sin x)(1-\sin x)\geqslant 0. \qquad (1)$$

Из (1) заключаем, что последнее неравенство, а вместе с ним и исходное, выполняется при всех x, причем равенство достигается при $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

641. Установим сначала, что

$$|\sin x|\leqslant|x|.$$

Рассмотрим тригонометрический круг радиуса 1 и предположим, что x обозначает радианную меру некоторого положительного или отрицательного угла AOM (рис. 249). При любом положении точки M

$$\overset{\frown}{AM}=|x|\cdot OA=|x|,$$
$$|BM|=|\sin x|.$$

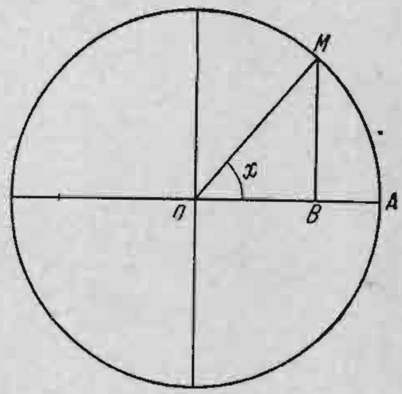


Рис. 249.

Так как $|BM|\leqslant\overset{\frown}{AM}$, то $|\sin x|\leqslant|x|$ (равенство имеем лишь при $x=0$). После этого заключаем, что, если $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, т. е. если

$0 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\cos\varphi < \cos\varphi$. Но $0 \leqslant \sin\varphi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\cos\varphi \leqslant \cos\sin\varphi$. Окончательно имеем $\cos\sin\varphi \geqslant \cos\varphi > > \sin\cos\varphi$.

Неравенство доказано.

642. Воспользуемся методом полной индукции. Пусть $n=2$, тогда $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 2\operatorname{tg}\alpha,$$

так как $0 < 1-\operatorname{tg}^2\alpha < 1$. Пусть

$$\operatorname{tg} n\alpha > n\operatorname{tg}\alpha \qquad (1)$$

при условии

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}. \qquad (2)$$

Докажем, что $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$.

Применим формулу

$$\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} n\alpha}. \qquad (3)$$

Так как неравенство (1) выполняется при условии (2), то оно тем более будет иметь место при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$. Но

$$0 < \operatorname{tg}\alpha < 1, \qquad (4)$$

и так как $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$, то

$$0 < \operatorname{tg} n\alpha < 1. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получим:

$$0 < 1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} n\alpha < 1. \qquad (6)$$

Из (6) и (3) следует $\operatorname{tg}(n+1)\alpha > (n+1)\operatorname{tg}\alpha$, что и требовалось доказать.

643. Так как большему углу первой четверти соответствует большее значение тангенса, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n \qquad (1)$$

для $i=1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $\cos\alpha_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Поэтому неравенства (1) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\alpha_1\cos\alpha_i < \sin\alpha_i < \operatorname{tg}\alpha_n\cos\alpha_i. \qquad (2)$$

Будем в неравенстве (2) придавать i значения $1, 2, \ldots, n$ и сложим все полученные неравенства. Находим:

$$\operatorname{tg}\alpha_1(\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n) < \sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n < \\ < \operatorname{tg}\alpha_n(\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n). \qquad (3)$$

Разделив все части неравенства (3) на $\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n$ (что возможно, так как $\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n>0$), будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha_1<\frac{\sin\alpha_1+\ldots+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1+\ldots+\cos\alpha_n}<\operatorname{tg}\alpha_n.$$

644. Обозначим левую часть рассматриваемого неравенства через t. Тогда

$$t=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{A+B}{2},$$

так как

$$\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}.$$

Положив

$$\cos\frac{A+B}{2}=x,$$

после очевидных преобразований получим:

$$t=-\frac{1}{2}\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$t\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

645. Преобразуем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)}=\frac{1}{\sin^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1-\operatorname{tg}x)}=$$
$$=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x(1-\operatorname{tg}x)}.$$

Для сокращения записи положим $\operatorname{tg}x=t$. Так как $0<x<\frac{\pi}{4}$, то

$$0<t<1. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к доказательству неравенства

$$\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>8$$

при условии $0<t<1$. Но в силу неравенства (1) стр. 19, имеем $\frac{1+t^2}{t}>2$. Кроме того, $t(1-t)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$. Следовательно, $\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{1}{t(1-t)}>2\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=8$, что и требовалось доказать.

5. Разные задачи

646. Положим $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}=\beta$ и рассмотрим $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$. Пользуясь формулой для тангенса разности двух углов, получаем:

$$\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (1)$$

Но так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$, то $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12}$. Подставляя $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ в формулу (1), находим $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)=0$. Тогда

$$\sin(2\alpha-\beta)=\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)=0.$$

647. Покажем, что $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=1$. Для нахождения $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$ применим формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}. \qquad (1)$$

Предварительно вычислим $\operatorname{tg}2\beta$ по формуле

$$\operatorname{tg}2\beta=\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos 2\beta}.$$

Нужно найти $\cos\beta$ и $\cos 2\beta$. Но $\cos\beta=+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ (так как β — угол первой четверти), а $\cos 2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\beta=\frac{4}{5}$. Следовательно, $\operatorname{tg}2\beta={}^3/_4$. Подставив найденное значение $\operatorname{tg}2\beta$ в (1), получим

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=1.$$

Докажем теперь, что $\alpha+2\beta=\pi/4$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{3}$ и, кроме того, по условию задачи α и β — углы первой четверти, то $0<\alpha<\pi/4$ и $0<\beta<\pi/4$. Отсюда находим, что $0<\alpha+2\beta<3/4\,\pi$. Но единственный угол, заключенный между 0 и $3/4\pi$, тангенс которого равен 1, есть угол $\pi/4$. Итак, $\alpha+2\beta=\pi/4$.

648. Необходимо, чтобы $\cos x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, $\sin x\neq -1$, откуда $x\neq k\pi/2$ (k — целое). При всех значениях x, кроме $x=k\pi/2$, y имеет смысл и

$$y=\frac{\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)}=\frac{\sin^2 x(1+\cos x)}{\cos^2 x(1+\sin x)}. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что $y>0$, так как при $x\neq k\pi/2$

$$\cos x<1 \text{ и } \sin x<1.$$

649. Преобразуя произведение $\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$ в сумму, по формуле (13) стр. 81, получим

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)=$$
$$=\frac{1}{4}\sin 4\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{2}<\frac{4}{5}.$$

650. Так как $\sin 5x=\sin 3x\cos 2x+\cos 3x\sin 2x$, то используя формулы (5)—(8) стр. 81, найдем после несложных вычислений

$$\sin 5x=5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x. \qquad (1)$$

Полагая в формуле (1) $x=36°$, получим уравнение $16t^5-20t^3+$ $+5t=0$ для определения $\sin 36°$. Это уравнение имеет следующие корни

$$t_1=0,\ t_2=+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},\quad t_3=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}},$$
$$t_4=+\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\ \text{и}\ t_5=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Из них положительными являются корни t_2 и t_4. Но $\sin 36°\neq t_2$, ибо $\frac{5+\sqrt{5}}{8}>\frac{1}{2}$ и, следовательно, $t_2>\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом,

$$\sin 36°=t_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

651. Используя тождество, доказанное в задаче 533, получим $\varphi(x)=\frac{1+3\cos^2 2x}{4}$, откуда следует, что наибольшее значение $\varphi(x)$ равно 1, а наименьшее 1/4.

652. В результате простых преобразований получаем

$$y=1-\cos 2x+2(1+\cos 2x)+3\sin 2x=3+3\sin 2x+\cos 2x.$$

Вводя вспомогательный угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, будем иметь

$$y=3+\sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x\right)=3+\sqrt{10}\sin(2x+\varphi).$$

Следовательно, наибольшее значение y равно $3+\sqrt{10}$, а наименьшее равно $3-\sqrt{10}$.

653. Если n—целое число, удовлетворяющее условию задачи, то при всех x имеем:

$$\cos n(x+3\pi)\cdot\sin\frac{5}{n}(x+3\pi)=\cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x. \qquad (1)$$

Полагая, в частности, $x=0$, мы из (1) заключаем, что n должно удовлетворять уравнению $\sin\frac{15\pi}{n}=0$. Этому уравнению удовлетворяют только те целые числа, которые являются делителями числа 15.

$$n=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15. \qquad (2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что при каждом из этих значений функция $\cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x$ имеет период 3π. Формулой (2) исчерпываются все искомые значения n.

654. Так как исследуемая сумма равна нулю при $x=x_1$, то

$$a_1\cos(\alpha_1+x_1)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x_1)=(a_1\cos\alpha_1+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x_1-(a_1\sin\alpha_1+\ldots+a_n\sin\alpha_n)\sin x_1=0. \qquad (1)$$

Но по условию задачи

$$a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n=0. \qquad (2)$$

Кроме того, $\sin x_1\neq 0$, так как $x_1\neq k\pi$. Из (1) и (2) получаем

$$a_1\sin\alpha_1+\ldots+a_n\sin\alpha_n=0. \qquad (3)$$

Пусть теперь x — любое число. Тогда

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x)=$$
$$=(a_1\cos\alpha_1+\ldots+a_n\cos\alpha_n)\cos x-(a_1\sin\alpha_1+\ldots+a_n\sin\alpha_n)\sin x=0,$$

так как в силу (2) и (3) суммы, стоящие в скобках, равны нулю.

655. Предположим противное, т. е. допустим, что существует $T\neq 0$ такое, что при всех $x\geqslant 0$ будет

$$\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x} \qquad (1)$$

(ограничение $x\geqslant 0$ необходимо потому, что при $x<0$ радикал $\sqrt{x}$ будет мнимым). Положим сначала в формуле (1) $x=0$; тогда

$$\cos\sqrt{T}=\cos 0=1 \qquad (2)$$

и, стало быть,

$$\sqrt{T}=2k\pi. \qquad (3)$$

Затем подставим в (1) значение $x=T$. Тогда, очевидно, будем иметь согласно (1) и (2): $\cos\sqrt{2T}=\cos\sqrt{T}=1$, откуда

$$\sqrt{2T}=2l\pi.$$

Так как по предположению $T\neq 0$, то, разделив (4) на (3), получим $\sqrt{2}=\frac{l}{k}$, где l и k — целые числа. Последнее, как известно, невозможно.

656. Первое решение. Рассмотрим сумму

$$S=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+(\cos nx+i\sin nx)$$

и, пользуясь формулой Муавра, $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$, вычислим S как сумму геометрической прогрессии. Получим

$$S=\frac{(\cos x+i\sin x)^{n+1}-(\cos x+i\sin x)}{\cos x+i\sin x-1}.$$

Сумма $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$ равна мнимой части S.

Второе решение. Умножив левую часть на $2\sin\frac{x}{2}$ и применив формулу (13) стр. 81, получим

$$\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\right)+\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x=$$
$$=2\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x,$$

откуда и следует нужная формула

657. Обозначим искомую сумму через A и прибавим к ней вторую сумму

$$B=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{4}}{2^2}+\ldots+\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{2^n},$$

умножив ее предварительно на i. Получим

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2^2}\left(\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\sin n\frac{\pi}{4}\right).$$

Применив формулу Муавра, находим

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

В последнем выражении использована формула для суммы членов геометрической прогрессии. Искомая сумма A может быть найдена как вещественная часть полученного выражения. Заметив, что

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

последовательно находим

$$A+Bi=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\,\frac{1-\frac{1}{2^n}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\sin n\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{i}{2\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{(1+i)\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\sin n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)-i\right]}=$$

$$=\frac{(1+i)(2\sqrt{2}-1+i)}{2^n\left[(2\sqrt{2}-1)^2+1\right]}\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\sin n\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{\left[(2\sqrt{2}-2)+2i\sqrt{2}\right]\left[\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)-i\sin n\frac{\pi}{4}\right]}{2^n(10-4\sqrt{2})}.$$

Выделяя вещественную часть, получаем

$$A=\frac{(\sqrt{2}-1)\left(2^n-\cos n\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin n\frac{\pi}{4}}{2^n(5-2\sqrt{2})}.$$

658. Утверждение будет доказано, если мы установим, что $A=B=0$. Пусть $A^2+B^2\neq 0$, т. е. по крайней мере одно из чисел A, B отлично от нуля. Тогда

$$f(x)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right)\sqrt{A^2+B^2}=$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi),$$

где $\sin\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пусть теперь x_1 и x_2 — два указанных в задаче значения аргумента; тогда $f(x_1)=f(x_2)=0$, и так как $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$, то $\sin(x_1+\varphi)=\sin(x_2+\varphi)=0$. Отсюда $x_1+\varphi=m\pi$, $x_2+\varphi=n\pi$ и, следовательно, $x_1-x_2=k\pi$ при некотором целом k. Это равенство приводит к противоречию, так как по условию $x_1-x_2\neq k\pi$.

Следовательно, $A^2+B^2=0$, откуда $A=B=0$.