, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,
29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39,
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,
65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,
77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87,
89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99,

$\ldots 10^3, \ldots 10^4, \ldots 10^5, \ldots 10^6, \ldots 10^7, \ldots 10^8, \ldots$

$\ldots 10^{10}, \ldots 10^{10^{10}}, \ldots$

$- 3, K - 2, K - 1, K, K + 1, K + 2, K + 3,$

$4, K + 5, K + 6, K + 7, K + 8, \ldots K + 10^2,$

$+ 10^3, \ldots K + 10^4, \ldots K + 10^5, \ldots K + 10^6,$

$+ 10^7, \ldots K + \ldots, \ldots K + 10 \ldots$

$+ K, K + K + 1, K + K + 2, \ldots$

К.Б. 32256
www.zavod.co.rs
600262 016713

ПРИЧЕ О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА
Миодраг Рашковић • Небојша Икодиновић

Миодраг Рашковић • Небојша Икодиновић

ПРИЧЕ О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА

О бројању, мерењу, закључивању...

Миодраг Рашковић • Небојша Икодиновић

ПРИЧЕ О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА

О БРОЈАЊУ, МЕРЕЊУ, ЗАКЉУЧИВАЊУ . . .

Београд
2010

Математичка библиотека

Рецензенти
др Жарко Мијајловић
др Зоран Марковић

Уредник
Слободан Павловић

Одговорни уредник
Слободан Г. Марковић

За издаваче
Зоран Марковић, директор Математичког института САНУ
Милољуб Албијанић, директор и главни уредник Завода за уџбенике
Бранислав Поповић, председник Друштва математичара Србије

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

511

РАШКОВИЋ, Миодраг, 1951-
Приче о малим и великим бројевима : о бројању, мерењу, закључивању --- / Миодраг Рашковић, Небојша Икодиновић. - 1. изд. - Београд : Математички институт САНУ : Завод за уџбенике : Друштво математичара Србије, 2010 (Нови Сад : Сајнос). - 326 стр. : илустр. ; 24 cm. - (Математичка библиотека)

Тираж 480. - Библиографија : стр. 323-326.

ISBN 978-86-17-16567-1 (ЗУ)
1. Икодиновић, Небојша [аутор], 1973-
а) Бројеви
COBISS.SR-ID 172431884

ISBN 978-86-17-16567-1

Садржај

ТРЕЋИ ДЕО

Посвећујемо ову књигу успомени на нашег професора Славишу В. Прешића

Предговор

Намере аутора су врло амбициозне. Пре свега, жеља нам је да попунимо велику празнину која постоји у савременој математичкој литератури на српском језику. Наиме, иако је математичка мисао у Срба достигла светски ниво (што се најчешће мери егзактно бодовима са такозване SCI листе; а, и иначе, и другим „суптилним методама"), готово да и нема расправа о самим основама математике или њених делова. Наравно, и само то питање *основа* није сасвим јасно одређено. Многи под основама математике подразумевају један њен део (најчешће математичку логику; посебно један њен поддео – теорију скупова). Ми не желимо да улазимо у детаљну расправу одакле такав став долази, али је сигурно да су те области математике настале као последица криза у математитици и жеље да се изграде њени што сигурнији темељи. Међутим, математичка логика, као и у њу укључена теорија скупова постале су посебне математичке дисциплине, које иако имају мотивацију у заснивању математике, прате „своју логику развоја" и развијају се на сличан начин како се данас ради и у свим осталим математичким дисциплинама. (Постоји више добрих књига написаних из области математичке логике на нашем језику, као што су [19, 35, 47].)

Оно што смо ми овде дали (у првом поглављу монографије) је нешто између историје и филозофије математике, а везано је, првенствено, за проблем заснивања анализе. Пре свега, нас је интересовало како (а колико је могуће и *зашто*) су се математички појмови појављивали и међусобно условљавали у развоју математичке мисли.

Други део има за циљ да дâ елементе оних делова математичке логике и математичке анализе који представљају основу за пуно разумевање првог дела. Али то не значи да се први део не може читати без другог дела, и обрнуто, други без првог. Такође, за разумевање првог дела није потребно неко посебно предзнање из филозофије математичких наука, ни из њене историје. Покушано је да се, на што је могуће популарнији начин доступан релативно широком кругу читалаца, изложе, по својој природи често тешко разумљиве мисли и идеје, везане за заснивање и развој математичких појмова. Нагласак је стављен првенствено на историјски развој појмова (разних) бесконачности и њихов узајамни дијалектички однос.

Циљ је да се читаоци заинтересују и побуде на размишљање и промишљање о самим основама математике и њеном развоју. Поред изношења властитих идеја и анализа, покушали смо да читаоцима пренесемо и размишљања многих великих (или макар значајних) математичара који су такође били и значајни мислиоци у области заснивања математике. То се, пре свега, односи на великог Лајбница, али и на Абрахама Робинсона и Петра Вопенку. Људи који су стварали математику блиску нашој основној теми, а при том и дубоко промишљали о основама математике (па и шире) сигурно заслужују пажњу.

Историја математике показује да је у математици, као и у свакој другој науци, било доста и револуционарних и радикалних промена у гледањима и схватањима. По свему судећи, биће их неминовно и убудуће.

Откриће старогрчких математичара о постојању несамерљивих дужи (тј. ирационалних бројева) представљало је прави шок за тадашње научнике. Откриће Лобачевског о постојању такозваних нееуклидских геометрија захтевало је дубоку ревизију дотадашњих гледања на простор. Још веће потресе су изазвала открића Гедела, Сколема и многих других логичара. И данас се све „гласније“ захтева ревизија математике. Наиме, компјутеризација, аутоматизација и информатика све више захтевају мењање математике у смислу њене „финитизације“.

Најранија историја математике нас учи да су бројање и мерење делатности које су створиле математику. Апстракцијом бројања истоветних предмета додавањем једног примерка настали су природни бројеви. Апстракцијом процеса мерења и упоређивања створена је представа о правој као уређеном континууму тачака која нас даље доводи до реалних бројева. И данас, природни и реални бројеви, на посредан или непосредан начин, представљају основно полазиште у скоро свим математичким разматрањима. Заправо, испоставља се да су најдубље основе математике тесно повезане како са принципом индукције, тако и са схватањем континуума. Међутим, оба концепта изазивају „horor infiniti“ (страх пред бесконачношћу).

Овом приликом нећемо много пажње посветити веома важном „рутинском“ делу математике, већ ћемо акценат ставити на посматрање основних концепата из различитих перспектива у нади да ћемо на тај начин допринети бољем сагледавању и разумевању математике. Оно што се у новије време све више наглашава јесте то да је при учењу математике поред логичке строгости веома важна и (психолошка) отвореност. Такође, указаћемо и на неке могуће правце истраживања.

Ова књига намењена је широком кругу читалаца (заинтересованим и талентованим средњошколцима, студентима математике, филозофије и физике, дипломираним математичарима, филозофима и физичарима, као и свима осталима који су заинтересовани за заснивање математике). Писана је на популаран начин, али такав да се читаоци релативно брзо и адекватно могу упутити у размишљања о основама математике.

Први део, а и већи део другог дела књиге настали су из чланака које су аутори објавили у часопису „Тангента“.

Доста је оних који су на разне начине допринели и помогли да се ова књига појави. Посебно захваљујемо онима који су читали радне верзије рукописа и дали веома корисне примедбе. Сугестије и критике Радосава Ђорђевића, Жарка Мијајловића, Зорана Марковића, Александра Перовића, Сузане Симић, Марије Станић и других значајно су допринеле побољшању текста.

Наравно, све пропусте које читалац открије треба приписати искључиво ауторима.

У Београду, 2009. године

Аутори

ПРВИ ДЕО

ПРИЧА О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА

Људи су одувек имали потребу да описују једни друге. Тако су једни називани косматима а други слабокосима (или ћелавим). И све то било је лепо и красно док људи нису почели, а морали су почети, да филозофирају. И тада се у разумевању ове поделе појавио проблем формулисан под, у филозофији познатим, називом „парадокс ћелавца“.

У чему је овај парадокс? Па, ево. Замислимо најкосматијег (и ако треба најглаватијег) човека на свету и почнимо да му чупамо влас по влас (длаку по длаку). Чупањем једне длаке статус његове косматости остаје исти, он дакле остаје космат. То ће се исто десити када му ишчупамо другу, па трећу, па четврту влас итд. Он ће остати стално космат јер напросто „длака горе, длака доле“ не значи ништа. Али, ето парадокса! Наше заморче ће на крају остати без длака, а и даље ћемо га звати косматим!

Какве сад ово има везе са математиком, упитаће се неко? Па има, најдубље могуће, одговорићемо му одмах. У циљу да то мало ближе покажемо заменимо сам скуп власи (тј. косу) њеним (кардиналним) бројем. Тако, тотално ћелав човек нема ниједну длаку, а онај најкосматији има их највише 174 888 (за овај број не гарантујемо).

Подсетимо се сада мало особина природних бројева онако како их учимо у школи. Нула је најмањи природан број (може и један) и „сви“ остали природни бројеви се могу добити тако што ће се на претходни број додати јединица. Тако долазимо до растућег низа „свих“ природних бројева 0, 1, 2, ...

Овом низу, схваћеном као целина (тј. скуп), додељује се важна особина. Наиме, сматра се да сваки његов део, тј. подскуп који је непразан има најмањи елемент. То својство се назива *принцип минималног елемента*. Назовимо овако засноване природне бројеве као „стандардни систем“ (природних бројева). Овај назив, иако уобичајен, у ствари није добар, али се овде не упуштамо у расправу око тога.

Сада наш проблем (или парадокс) можемо преформулисати у оквиру математике. Скуп $\{0, 1, ..., 174\,888\}$ поделимо у два подскупа A и B. У првом скупу A нека буду бројеви који представљају бројеве власи слабокосих људи, а у другом скупу B они остали. (Овде намерно не говоримо о ћелавцима, не због доброг васпитања, већ зато што је ћелавост такође повезана са још једним другим математичким проблемом, а то је питање облика.) Ови скупови су очигледно непразни. На основу принципа најмањег елемента, који важи за „стандардан систем", у скупу B постоји најмањи број b и он, као и остали из тог скупа, одговара броју длака косматог човека. Насупрот томе, имамо да $b-1$ одговара броју длака слабокосог човека, па то исто важи и за број b (јер се статус додавањем длаке не мења!). Контрадикција!!!

Како да превазиђемо ову контрадикцију? У принципу постоје два пута. Први је да променимо наше схватање косматости, а други је да променимо нашу математику; тачније теорију природних бројева.

Присталица искључиво „стандардног система" (а таквих је највише међу онима који и не знају да некакав други систем постоји), определивши се за први пут, вероватно би рекао: „Наш појам косматости није математички добро дефинисан. Ми морамо тачно одредити гранични број k испод кога имамо слабокосост."

Међутим, овакво решење није добро из најмање два разлога. Прво, ко је спреман и ко има времена да пребројава длаке у граничним случајевима и, друго, за нас је неприхватљиво да човек са $k-1$ длаком буде слабокос, а онај са k космат.

Може се, такође, покушати са увођењем већег броја појмова косматости (што вуче према теорији мере или теорији фазискупова), а што може само да компликује али не и да реши проблем на начин који ће задовољити наше практичне потребе.

Па шта нам онда преостаје? Одговор је: Наравно, само други пут. А то је за ову прилику (а и видећемо касније и за друге, за математику много важније, прилике) промена нашег схватања природног броја, односно „нестандардни систем" природних бројева (још гори назив).

У чему се разликује тај „нестандардни систем"? У њему се природни бројеви деле на „мале" и „велике". „Велики" природни бројеви дођу иза „малих". Подскуп „малих" бројева M нема највећи, а подскуп „великих" V нема најмањи елемент. Према томе, у овом систему не важи принцип минималног елемента.

Сада се лако види да се број длака слабокосих може интерпретирати као „мали“, а број длака косматих као „велики“ а да контрадикције нема.

Али, неко ће можда упитати: „Зар ти је број 174 888 велики? Уосталом појмови велики и мали су само психолошки. За мало дете је и 100 велики број, а деведесетих година прошлог века је и плата од 10 000 000 000 била мала“. Људи који постављају таква питања обично слепо верују у „реалност“, „природност“ и јединственост приступа природним бројевима оличене у „стандардном систему“. Они верују у неку врсту објективног, реалног постојања природних бројева и називају се обично платонисти (по старогрчком филозофу Платону који је веровао у постојање света идеја). Они чврсто верују да се математика само открива а не ствара.

Одговор на овакве и друге приговоре платониста и осталих тек ћемо касније давати. Али основни одговор је: ***Овде се ради о квалитативном решењу проблема који нам решава (огромне) квантитативне проблеме.***

Ипак за оне који воле да маштају нека замисле број P направљен помоћу броја $\pi = 3,14...$ на следећи начин. Нека му је прва цифра 3, друга 1, трећа 4 и тако даље све до краја стоте галаксије рачунате одавде. Дефинишимо сада број Q као $P^{P^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{P}}}}}\Big\}P^{P^{P}}$ (Ово је у стандардном систему, наравно, обичан и сасвим природан број!).

Замислимо сада два пријатеља од којих један почиње да броји од нула унапред, а други од Q уназад. Ако се сада ослободимо маште и окренемо се стварном бројању, када ће они стићи до истог броја? Наравно, никада!

Како се развијао „нестандардни систем“ кроз векове и у највећим дубинама људског ума тек ћемо да видимо. Пратићемо како су улагани велики напори да се он дефинитивно уклони из математике, али и како сс он увек, као феникс, враћао обогаћујући све више и више математику. На крају ћемо видети како је „нестандардни систем“ постао потпуно равноправан са „стандардним“, па у неком смислу чак и супериоран.

Осврнућемо се и на тренутни статус броја Q, као и на његову могућу даљу перспективу. Сва ова узбудљива догађања пратићете у наредним поглављима.

Грци и бесконачност – I

Први рачун са „малим“ и „великим“ бројевима створили су стари Грци. Наравно, тај рачун је био далеко од оног који су у XVII веку створили Лајбниц и други. То делује помало парадоксално када се има у виду да су Грци, начелно говорећи, били велики противници бесконачности. Они су ишли чак дотле да су њено постојање директно забрањивали! То управо чини чувена аксиома, из Еуклидових *Елемената*, која тврди да „целина мора бити већа од дела“.

Грчка реч за бесконачност била је „апејрон“, што је буквално значило неограничен, а и неодређен, недефинисан и сл. За нас је овде посебно значајно да је апејрон у основи имао негативно, па чак и пежоративно значење. Свођење на апсурд (reductio sub absurdum) најчешће је значило свођење на бесконачност (reductio sub infinitum).

Зашто су Грци имали тако негативан однос према бесконачности? Одговор се крије како у одређеним филозофским ставовима, тако вероватно и у томе што су рано уочили њену парадоксалност, везану пре свега за Зенонове парадоксе (апорије). Том односу према бесконачности је допринело (а делом из тог односа и проистекло) стварање појма „величина“. Под величином су најчешће подразумевали природан број или дуж, где је дуж општији појам јер броју одговара дуж, али не и обратно. Тако су елегантно, преко геометрије (а без увођења бесконачности) заобишли део проблема везан за корен броја 2.

Чувени Зенонови парадокси оставили су велики траг и утицај у грчкој математици. Пренели су из филозофије у математику потребу за доказивањем, и то најмање из два разлога. Прво, докази (оповргавања) из филозофије служили су за углед математичарима, и друго, парадокси су проблематизовали саме основе математике и ни у шта се више није могло веровати на слепо.

Зенонова намера је била да потврди Парменидово учење да егзистира само јединствено и непокретно биће, а да је све остало привид. Да би показао да је то тако, Зенон се послужио логичком методом свођења на противуречност. Тако су Елејци давно пре Хилберта и формалне логике егзистенцију сводили на непротивуречност! Парменид каже: „Све што знамо (тј. о чему можемо да мислимо) то и постоји, јер оно што не постоји о томе појма немамо“. У том циљу Зенон у више примера, полазећи од супротних претпоставки да постоје и кретање и мноштво током закључивања жели да дође до противуречности.

Као пример Зеноновог закључивања приказаћемо његов можда најпопуларнији парадокс: Ахил и корњача. Ту се Ахил трка са корњачом која је на одстојању s_1 испред њега. Када Ахил стигне до места на коме се налазила корњача, она се помери за s_2, када он опет стигне до тог новог места, она се помери за s_3 итд. Иако ми знамо да ће Ахил стићи корњачу, са којом се креће у истом правцу, он је и неће стићи јер се наведени бесконачан процес приближавања неће никад завршити!

Овај парадокс, као уосталом и други, није никада дословно схваћен у сврху за коју је намењен. Мало коме је падало на памет да мноштва и кретања нема, али су нуђени (а и даље се нуде) разни одговори који треба да покажу да, у ствари, парадокса и нема. Аристотел је, један век касније, понудио одговор који подразумева потенцијално бесконачну дељивост континуума, тј. у то време дужи. То становиште је данас дограђено прихватањем актуелне бесконачности ω. Читава прича се своди на проблем конвергенције, тј. на то да ће Ахил на коначном растојању $\sum s_n$ стићи корњачу за коначно време $\sum t_n$.

Овакав одговор данас задовољава већину математичара и нешто мању већину филозофа. Наравно, овим решењем проблем је само пренет у теорију (бесконачних) скупова. Али какви све парадокси и проблеми тек настају у теорији скупова, тек ћемо видети!

Да би се парадокс *Ахил и корњача* „разрешио“ помоћу појма конвергенције, мора се увести појам реалног броја (односно скупа реалних бројева) као низа рационалних бројева (односно комплетног поља, а то нас одводи до појма континуума, континуум хипотезе, па све даље и даље до других великих проблема у вези са заснивањем математике). Ипак, овакво савремено схватање реалних бројева **налазећи своју примену** у решавању Зенонових парадокса (а наравно и другде) [и то у смислу који нама одговара, тј. да кретања и мноштва ипак има, те да све то ипак није парадоксално], **налази и своје оправдање**.

Ми се можемо задовољити и са нешто другачијом (конструктивном) формулацијом парадокса *Ахил и корњача*. Она би подразумевала, а можемо сматрати да је Зенон тако и мислио, да је однос брзине Ахила v_A и корњаче v_K сталан; на пример $\dfrac{v_A}{v_K} = 100$. Полазећи од познате кинетичке формуле да је пут производ брзине и времена ($s = v \cdot t$), имамо $\dfrac{s_i}{s_{i+1}} = 100$ и $\dfrac{t_i}{t_{i+1}} = 100$. Отуда би у времену $t_1 + \dfrac{t_1}{100} + \dfrac{t_1}{100^2} + \cdots = \dfrac{100}{99} t_1$ Ахил стигао корњачу на растојању $s_1 + \dfrac{s_1}{100} + \dfrac{s_1}{100^2} + \cdots = \dfrac{100}{99} s_1$.

Ово решење би задовољило савременог математичара, па чак и конструктивисту, који прихвата савремен концепт конвергенције, али не и старе Грке. Основни услов конвергенције (реда) је да општи члан тежи нули; овде код нас, да су интервали времена и дужина „ишчезавајући“! А то је оно што они нису могли да прихвате! Разлог је у томе што су они подразумевали (све до парадокса дијагонале квадрата, о чему ће бити речи) да све сродне величине (нпр. дужи, површи, тела итд.) имају заједничку мерицу (меру, јединицу) којом су (до краја) измериве. [Уосталом то је било у основи Питагорине филозофије.] Испод те величине (тј. јединице) није се могло ићи, те би, као што бисмо ми данас рекли, она представљала „доње ограничење“, па би дати редови који описују време и дужину били „дивергентни“!!!

Али основно питање је: Како неки процес који има бесконачно епизода уопште може да се заврши? Онај који је учио математичку анализу на то се преко конвергенције навикао (што би рекао проф. Прешић: „Што дикла навикла“ или што би психолози у математици рекли: „Развио тзв. *секундарну интуицију*“), али то је очигледно морало да збуни старе Грке, макар оне до Еудикса и Архимеда.

Разуме се, слично као код парадокса ћелавца, ни овде се не ради ни о каквој бесконачности у физичком смислу, већ само о једној математичкој екстраполацији. Никаквих бесконачно много међукорака ту нема, зато што, бар према савременим физичким теоријама, постоји најкраће позитивно растојање, те процес приближавања не може ићи ad infinitum!

Прва грчка реакција на ове парадоксе ишла је другим путем. Она је ишла у правцу одбацивања чак и потенцијалне бесконачности. Зашто су се Грци одлучили за тако нешто? Могу се дати многи одговори, а основни би био (а који смо већ напоменули) да су рано уочили њену парадоксалност.

Међутим, одговор можемо потражити и у грчком схватању појма броја и мере који води порекло из Питагорине школе. Основа свега код питагорејаца су природни бројеви (а то су и једини бројеви за њих). Сваке две величине (нпр. дужи) могу се измерити неком трећом, а све скупа једном јединичном и која је уз то и најмања могућа величина. Дакле, свакој дужи одговара један природан број. Слично се односи и на површине и запремине.

Јасно је да та јединична величина мора да буде „мала“ (односно инфинитезимала) и недељива. Нешто као атом из кога се све гради.

О таквим физички недељивим величинама „атомима“ и математички недељивим величинама „америма“ ћемо више говорити у наредном поглављу. Посебно ћемо се осврнути на велики допринос атомисте Демокрита у геометрији.

Учење о „недељивим инфинитезималама“ (другим речима атомима) добија свој завршни облик у науци Хенократеса, данас доста заборављеног Платоновог наследника на Академији. А зашто је он заборављен биће нам јасније када у наредном одељку будемо срели неке ставове једног другог, кроз историју, знатно утицајнијег Платоновог ученика и данас веома познатог и признатог Аристотела.

Хенократес је сматрао да се помоћу недељивих инфинитезимала могу објаснити Зенонови парадокси. Тако Ахил у коначном броју корака стиже корњачу. Наравно, тај број корака је „велики“ (јер само „велики“ број пута „мали“ број даје коначан број), али не и бесконачан (у смислу ω), јер је бесконачан број пута „мали“ број бесконачан број! Постигнута су (по Хенократесу) два циља: објашњени су Зенонови парадокси и показано је да је сумњива бесконачност (ω) непотребна! Напоменимо да је завршни облик ове аргументације (која се данас везује за тзв. финитисте) дао наш најпознатији филозоф Брана Петронијевић.

Колико су неки од Зенонових парадокса повезани са парадоксом ћелавца, а тиме и проблемом „малих“ и „великих“ бројева најбоље говори Зенонова апорија о мноштву: „ако котарица кукурузног зрна просутог на камени под производи буку, онда то мора бити случај и када бацимо и једно зрно. Али, није тако“.

Ако број зрна која „праве буку“ означимо као „велики“ број, а онај број зрна која „не праве буку“ као „мали“ број, онда Хенократес није могао другачије да објасни ову апорију него што смо ми објаснили парадокс ћелавца.

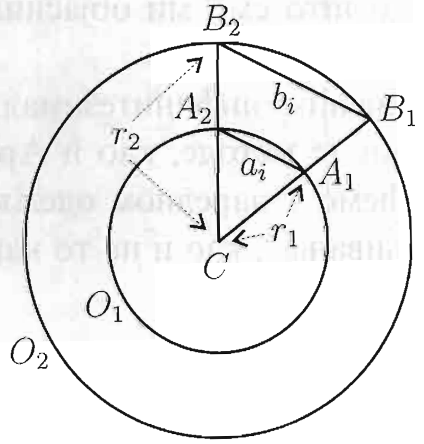
О манама Питагориног учења, првом „кориснику инфинитезималне методе“ Антифонту и Аристотеловој критици те методе, као и Аристотеловом концепту бесконачности говорићемо у наредном одељку. Осврнућемо се и на Еудоксов „метод исцрпљивања“, као и на то како га је Архимед применио.

Грци и бесконачност – II

Познато је да су Грци још од V века пре нове ере користили инфинитезимале за решавање математичких проблема. То се, пре свега, односи на атомисте који су у основу свега ставили „мале“ и недељиве атоме од којих је све састављено. Занимљиво је, иако мање познато, да атоми који нису били дељиви у физичком смислу још увек су могли бити дељиви у мислима до „математички“ недељивих амера. Такво учење атомиста је, међутим, потпуно било у складу са питагорејским схватањем „да је све број“ или, другим речима, да је све самериво најмањом величином.

Један од ретких грчких филозофа који су дали велики допринос математици био је свакако оснивач атомизма и његов најистакнутији представник Демокрит из Абдере (V на IV век). Он је помоћу инфинитезимала дошао (далеко пре Архимеда) до једног веома значајног резултата израженог на типично грчки начин као пропорција. А то је да се запремина призме и пирамиде једнаких основа и висина односе као 3 : 1.

Као илустрацију начина мишљења атомиста показаћемо како је Демокрит доказивао да се обими кругова односе као њихови полупречници. Нека су одговарајући кругови O_1 и O_2 дати као концентрични (види наредну слику). Тада су очигледно троуглови CA_1A_2 и CB_1B_2 слични. Отуда је $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{a_i}{b_i}$ за $i = 1, \ldots, n$, па је, на основу добро познате особине пропорције, $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sum a_i}{\sum b_i}$.



$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_i}{b_i}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \approx \frac{\mathrm{Obim}(O_1)}{\mathrm{Obim}(O_2)}$$

Очигледно је да би се са извођењем до овог места свако и данас сложио. Али одавде почиње „виша математика“!

Демокрит идентификује круг са полигоном са „великим“ бројем страна које су све по дужини „мале“!! Он одатле непосредно закључује да је

$$\frac{\mathrm{Obim}(O_1)}{\mathrm{Obim}(O_2)} = \frac{r_1}{r_2} \;!!!$$

Демокритов ученик и следбеник Антифон затим иде и корак даље и покушава да реши проблем квадратуре круга (тј. да за дати круг конструише, помоћу лењира и шестара, квадрат исте површине) на „атомистички начин“. Он је размишљао отприлике овако: Ако је у круг уписан многоугао (нпр. троугао или квадрат), за њега, као и за сваку праволинијску фигуру, може да се конструише помоћу лењира и шестара квадрат исте површине. То остаје тачно и за полигон са „бесконачним“ бројем страна, па тиме и за круг.

Наравно, многима се није допало овакво Антифоново закључивање. На њега се посебно обрушио Аристотел који у својој *Физици* даје квадратуру Антифона као пример за закључивање које следи из немогућих претпоставки и зато „спровођење такве квадратуре није посао за геометре“.

У познатој и веома цењеној (и од аутора ових редова) књизи *Историја математике од најстаријих времена до почетка новог века* (под уредништвом славног руског историчара Јушкевича), Башмакова, ауторка одговарајуће главе, истиче: „Стварно, при Антифоновој квадратури треба или да се претпостави да је круг многоугао са много великим бројем страна, свака од којих је много мала, или да се сматра да је број страна тог многоугла бесконачан. Ниоткуда иначе не следи да ће својство, које је тачно за многоугао са коначним бројем страна, остати испуњено и за многоугао са бесконачним бројем страна. У оба случаја расуђивање Антифона је неприхватљиво.“

Пре него што дамо „коментар на коментар“, тј. пре него се мало осврнемо на оно што су Аристотел и Башмакова рекли, желимо да донекле упознамо читаоца са појмом Аристотелове непрекидности (континуума) који је вековима био основ за разумевање простора и времена.

За разлику од атомиста који су дуж, кружну линију и слично замишљали као дискретан низ атома (који сеређају слично као природни бројеви од 1 до неког n), Аристотел је дуж (па и кружну линију) замишљао сасвим другачије. Главна разлика је била у томе што је свака (било како мала) дуж била за њега дељива, или, другим речима, између сваке две тачке на дужи могла се убацити трећа (са њима различита) тачка. То дељење дужи је код њега потенцијално бесконачно, тј. иза сваке деобе може се направити следећа али се тај бесконачни процес никада не може завршити. Овакво гледање на дуж изгледа веома природно и прихватљиво и просто је данас тешко наћи човека који се не би сложио са њим. Али можемо изнети у вези са таквим гледањем две веома значајне примедбе.

Прво, јасно је то да је хипотетички неограничено дељење физички немогуће и да представља „само један математички концепт" који, као што ћемо видети, никада није био прихватљив за све математичаре-филозофе (као, нпр. за финитисте који негирају сваку реалност бесконачности).

Друго, а у тесној вези са првим, Аристотелово схватање непрекидности је у неком смислу недовршено. Разлог томе је што се потенцијална бесконачност, која је овде дата као неки процес дељења дужи на све мање делове, у математици претвара у остварену, тзв. актуелну, бесконачност. То у нашем случају значи да је природно упитати се шта на крају, после свих тих деоба дужи, ми добијамо у пресеку тог (пребројиво) бесконачног опадајућег „низа уметнутих одсечака чије дужине теже нули".

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

Одговор може да буде и ништа, тј. празан скуп, али је за потребе математике боље да то буде тачно једна тачка.

На тај начин стижемо до појма Канторовог континуума који је довршење Аристотеловог. Али ту тек долазимо до хијерархије бесконачности и тешких проблема и парадокса у теорији скупова о којима ће тек бити речи. Ти проблеми и парадокси бацају сенку на, иначе данас веома прихваћену, Канторову теорију.

Са становишта аристотеловско-канторовског схватања непрекидности (континуума) прича коју је испричао Антифон изгледа стварно чудно ако не и сулудо. Али није све савим тако!

Прво, Антифон није имао ограничења (или бар она нису тако озбиљно била у његово време схваћена) да се конструкција може извршити само помоћу лењира и шестара. Сматра се да је за ту „строгост" у захтевима најзаслужнији био Аристотелов учитељ Платон. Свакако да то има везе са „Платоновим светом идеја" (као што су круг, дуж и др.), али о томе овде не можемо причати.

Друго, позивајући се на физику, знамо да је број атома у васиони ограничен. То ограничење се свакако односи и на број атома у графитној оловци причвршћеној на шестар којим конструишемо. Зато можемо претпоставити да приликом описивања кружне линије ми у ствари (у физичком смислу) остављамо атоме угљеника у теменима неког многоугла са великим бројем страна. Слично се односи и на повлачење дужи.

Треће, и самих конструкција помоћу лењира и шестара има две врсте: теоретских и практичних. Теоретски то је „коначан" број повлачења произвољних дужи и кружница. Практично, то нису баш тако произвољне дужи и кружнице, нити је тај њихов коначан број баш тако велики. Физичка ограничења су ту доста велика. Сада знамо, на примеру квадратуре круга, да при конструкцији немамо само физичких него и чисто принципијелних ограничења. Све то баца лоше светло на Платонов захтев.

Антифонова метода има како практичних, тако и теоретских предности над платоновско-аристотеловским захтевом за конструкцијом помоћу лењира и шестара. Практична предност је у томе што квадратуру, ако већ знамо да не можемо да постигнемо лењиром и шестаром, можемо, практично задовољавајуће, да обавимо за довољно велики многоугао који апроксимира круг.

Теоретски, тј. ако конструкцију схватимо довољно широко, Антифонова метода је могућа са становишта савремене нестандардне анализе (и то је донекле одговор Башмаковој). У њој важи тзв. принцип преливања који би адаптиран за ову прилику гласио: „Ако се нека 'конструкција' може обавити једнобразно за произвољно велики коначан правилан многоугао са 2^n страна, то се онда може обавити и за неки хиперконачан (читај 'велики') многоугао са 2^H страна, где је H хиперконачан (читај 'велики') број". Под „конструкцијом" се овде подразумева хиперконачна (читај „велика") примена лењира и шестара. Добијена квадратура ће бити бесконачно блиска траженој, па се на прихватљив начин може и идентификовати са њом.

На крају, рецимо да је Аристотел био потпуно у праву када је рекао да Антифонова квадратура није посао за геометре. Али он није знао да то важи уопште за сваку другу квадратуру круга, како су већ доказали алгебристи. Квадратура круга је посао за аналисте. Наравно, Аристотел није могао ни да сања појаву Галоа и Робинсона, као ни њихових теорија које су помогле да се ствари мало ближе осветле.

Грци и бесконачност – III

Има једна ствар, коју без обзира на све нападе, нико није оспорио Антифону. Он је очигледно претеча методе исцрпљивања (есхаустије) коју је увео Еудокс из Книдоса (408. г. пре н.е. до 355. г. пре н.е.). Еудокс је свакако био један од најзначајнијих грчких математичара који је припремио долазак Архимеда из Сиракузе (287. г. пре н.е. до 212. г. пре н.е.), круне грчке математике.

Пре него што илуструјемо методу исцрпљивања и покажемо како она „озакоњује" резултате добијене „инфинитезималном методом", позабавимо се једном, за ту методу, значајном дефиницијом која ће се касније код Архимеда претворити у аксиому. Та, Архимедова аксиома, улази у редовни курс математичке анализе и од одлучујућег је значаја за сâмо заснивање поља реалних бројева.

У петој књизи Еуклидових *Елеменаша*, чији је предмет теорија пропорција и која углавном потиче од Еудокса, дефиниција број 4 гласи: „Каже се да две величине 'имају размеру', једна спрам друге, ако могу увишестручене, прекорачити једна другу". То практично значи да ако a и b „имају размеру" и на пример a је мање од b, онда се дуж b може прекрити са довољним бројем дужи подударних са дужи a. Слично важи и за позитивне бројеве a и b „који имају размеру" и b је веће од a. Тада за неки природан број n, b је мање од na.

Занимљиво је какав је однос према овој дефиницији имао 50-их година XX века наш познати математичар и један од водећих интелектуалаца свога времена Милош Радојчић. У својој књизи *Ойшйа машемашика*, на страни 95, даје један за то време типичан, али данас чини се сумњив, коментар: „Очигледно, у геометрији, две дужи увек 'имају размеру': преношењем мање дужи на описани начин можемо увек 'прекорачити' другу дуж, ма како велика она била. То је тако очигледно, да ту чињеницу Еуклид и не помиње као једну засебну геометријску чињеницу, него само жели да дефинише израз 'имати размеру'. Но то је засебна геометријска чињеница коју би требало било доказати, било увести међу постулате. Еуклид то није приметио. Тек је Архимед то увидео и ту чињеницу поставио међу своје постулате, којима допуњава Еуклидове. Зато се у савременој геометрији, где се та чињеница обично сматра постулатом (аксиомом) она назива често Архимедовим постулатом (или чак Еудоксовим)".

По Радојчићу испада да Еудокс ни сам није знао шта је хтео, јер дефинише нешто што је увек тачно и очигледно за сваке две величине! С друге стране, то је Еуклиду толико јасно (да сваке две величине „имају размеру“) да то чак и не истиче!! А то значи јасније него на пример појам тачке, који ипак није толико јасан па га дефинише.

Морамо да кажемо да би Радојчић био потпуно у праву само под условом када инфинитезимале **не би могле да постоје**. А у то је Радојчић, очигледно опијен успесима заснивања анализе у XIX веку, и веровао. То што су ифинитезимале на успешан начин избачене из анализе, убрзо је погрешно схваћено као доказ за њихово непостојање. О томе како оне у математици постоје (и то независно од филозофије) тек ћемо чути.

Да би читава ствар читаоцу била јаснија осврнућемо се на директну везу између нетривијалности релације „имати размеру“ и постојања инфинитезимала. У ствари, лако се показује да је Архимедова аксиома (тј. сваке две величине a и b „имају размеру“) еквивалентна са непостојањем инфинитезимала.

Наиме, уколико је a инфинитезимала већа од 0, тада је a мање од $\frac{1}{n}$ за свако n из $\mathbb{N}$, па је тада na мање од 1. Отуда су a и 1 несамерљиви. Обратно, уколико су a и b већи од 0 и „немају размеру“, тада је на пример b веће од na (за свако n из $\mathbb{N}$), па је $\frac{b}{a}$ бесконачан елемент, а $\frac{a}{b}$ инфинитезимала.

Као што данас знамо, инфинитезимале **могу да постоје**, па одатле, према претходном пасусу, не морају сваке две величине бити у сразмери! Значи, премудри Еудокс није нужно увео тривијалну, и самим тим непотребну, дефиницију!!

Зашто Еудокс, иако му инфинитезимале у дотичној теорији нису биле потребне, није хтео сасвим да их заобиђе? Он је вероватно, као и Радојчић много касније, веровао у реалност математичких појмова. Отуда произлази да је он, највероватније, веровао у постојање инфинитезимала. (*Напомена.* До сличних размишљања о Еудоксовој дефиницији дошао је, независно од нас, а и наравно много пре нас, отац нестандардне анализе Абрахам Робинсон.)

Поставља се сада питање какав је то корак даље учинио, цео век касније Архимед, и зашто га није учинио већ сâм Еудокс? Зашто сâм није увео аксиому да сваке две дужи „имају размеру“, ако му инфинитезимале већ нису биле потребне?

Већ смо рекли да је Еудокс веровао да постоје инфинитезимале, а то је у његово време било прилично раширено веровање. С друге стране, математика његовог времена се још увек није могла одвојити од онтолошких разматрања (па се оно у шта се веровало није могло занемарити, јер се имала у виду **само једна истина**). Математика, иако одвојена од филозофије, још увек је са њом била тесно повезана.

Тек Платонови и Аристотелови оштри напади на атомисте су могли подстаћи Архимеда да избаци инфинитезимале. (Историчари кажу отприлике овако: Платон је водио жестоку и непомирљиву борбу са атомистима, која је ишла чак дотле да је сакупљао Демокритова дела и спаљивао их. То је сигурно један од разлога што су Демокритови радови тако ретки. Учитељеву битку против атомиста наставио је Аристотел, тако да се у то време, као и касније, о радовима атомиста знало углавном из уста Платона, Аристотела и њихових верних следбеника. Проучавање оригиналних Демокритових дела свело се само на ужи круг, углавном епикурејаца блиских атомистима.)

Нама се пак чини да је важније то што је велики Архимед почео да гледа на математику „другим очима" и да се, можда први, ослобађа питања њених „онтолошких основа". Томе су сигурно допринели његово бављење физиком и техником, као и слабљење утицаја филозофије у математици (али не и филозофа Платона и Аристотела!). Математика постаје за њега средство, инструмент, духовна направа, којим се постиже неки циљ, решава неки проблем. Он не преза ни од употребе проказаних инфинитезимала, додуше само у почетној, креативној фази.

Слично је, као што ћемо видети, двадесет векова касније, али сада уводећи инфинитезимале, поступио Лајбниц и тако успео да створи диференцијални и интегрални рачун. „Спорна питања" о постојању инфинитезимала на крају је сасвим оставио по страни.

Наравно, до **скоро потпуног** одвајања од онтологије дошло је тек крајем XIX века, после великих открића (или боље рећи стварања) у геометрији. Мисли се, пре свега, на теорију Лобачевског. Од тада имамо више, чак супротстављених теорија, али једнако могућих. Те теорије нам дају различите погледе на (јединствену?) стварност и њихова корист у примени зависи од случаја до случаја. Наравно, највећи кривац за све то је, вишезначан и у основи парадоксалан, појам бесконачности. Нешто од тога се могло прочитати већ у првом одељку, а нешто од тога ћемо чути и касније. Али прича је много дужа и дубља и не може до краја овде бити испричана.

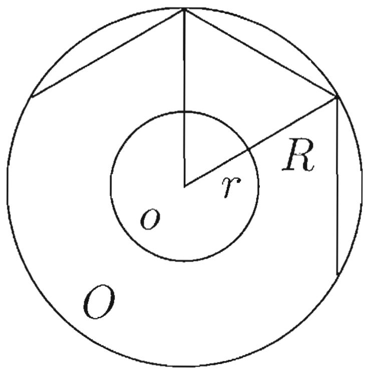
Покушајмо сада да илуструјемо *методу исцрпљивања* која је увек служила за доказивање већ претпостављеног резултата. Зато јој је приписивана, поред логичке коректности, и некреативност. Та некреативност долази пре свега од тога што њену логичку основу чине метод елиминације претпоставки и свођење на противуречност.

С друге стране, највећа вредност која се приписује овој Еудоксовој методи је да је она, као што ћемо ускоро да видимо, у потпуном складу са Аристотеловом концепцијом континуума. Ова метода и ово гледање на континуум толико се међусобно подржавају да је дуго, многима (али наравно не и свима) било сасвим незамисливо свако друго гледање.

Као илустрацију примене ове методе, покажимо да се површине P и p кругова O и o односе као квадрати њихових полупречника R и r, тј. $\dfrac{P}{p} = \dfrac{R^2}{r^2}$. До ове једнакости можемо доћи на сличан начин како су то чинили атомиста Демокрит и његови ученици.

Да би се показала једнакост довољно је показати да не важе одговарајуће неједнакости. Њих ћемо елиминисати методом свођења на противуречност.

У том циљу претпоставимо да је $\dfrac{P}{p}$ веће од $\dfrac{R^2}{r^2}$. Тада постоји површина W, тако да је $\dfrac{W}{p} = \dfrac{R^2}{r^2}$ и нека је $\varepsilon = P - W$. У кругове O и o упишимо правилне полигоне површина P_n и p_n са једнаким бројем страница и посматрајмо међуповршине изван полигона али у унутрашњости кругова.



Ако се број страница удвостручи, онда је очигледно да се разматране површине (тј. разлике површина кругова и одговарајућих полигона) смањују за више од половине. Следствено на основу „својства исцрпљивости“ (који у ствари представља реципрочан вид својства „имати размеру“), а што у суштини није ништа друго него да се r^n (где је r мање од 1) може учинити довољно малим позитивним бројем (али који није инфинитезимала), површине се са довољним повећањем броја страна могу довољно смањити тако да буде $P - P_n < \varepsilon$.

Тада, будући да је $P - W = \varepsilon$, имамо да је $P_n > W$. На основу теорема о сличности троуглова лако се показује да је $\frac{P_n}{p_n} = \frac{R^2}{r^2}$. А како је било претпостављено $\frac{W}{p} = \frac{R^2}{r^2}$, имамо $\frac{P_n}{p_n} = \frac{W}{p}$.

Ако је $P_n > W$, што смо показали, онда морамо закључити да је $p_n > p$. Међутим, то није могуће јер је p површина круга o, док је p_n површина њему уписаног полигона. Зато се претпоставка $\frac{P}{p} > \frac{R^2}{r^2}$ мора одбацити.

Слично се показује да нас и претпоставка $\frac{P}{p} < \frac{R^2}{r^2}$ води у контрадикцију. Остаје, дакле, на основу закона трихотомије који важи за релацију поретка (тј. $a > b$ или $a = b$ или $a < b$) само могућност да буде $\frac{P}{p} = \frac{R^2}{r^2}$.

Овим одељком завршавамо причу о Грцима. У следећем ћемо се придружити средњовековним схоластичарима.

Гледање на бесконачност на крају старог века, у средњем веку и на почетку новог века

После пропасти хеленистичке цивилизације, појавила се нова, јудео-хришћанска. Основна карактеристика ове нове, тек настајуће цивилизације, била је постојање једног свемогућег бога, тзв. монотеизам. То има свог одраза и у граматици тако да тог јединог бога пишемо са великим Б; Бог. (Прва монотеистичка религија појавила се у Египту, али је због снажне реакције моћног свештенства, владајуће вишебожачке религије, ускоро у корену сасечена.)

За разлику од грчких богова (а и осталих у другим религијама) који су били моћни у понеком конкретном домену, а сасвим обични у другима, често испреплетани разним „људским односима" са другим боговима, али и људима, овај нови бог је сасвим другачији. Он је пре свега апсолутан и неограничен у свим могућим позитивним особинама. Тако је он бесконачно моћан, бескрајно добар, бескрајно мудар и слично.

На рационалистичком западу, а о њему ћемо више касније, одмах се поставило следеће питање: **„Да ли Бог може да направи камен који не може да подигне?"**. Ово питање, на први поглед делује парадоксално. Јер, ако Бог може да направи такав камен онда није максимално јак, а ако не може онда није апсолутно моћан!

Наравно, одмах су нуђени разни одговори у циљу отклањања овог парадокса. Један од честих покушаја у том правцу, а који се и данас, нажалост, може чути, јесте образложење да Бог све може, па чак може и да не може?! Дај Боже да није логички противуречан!

Међутим, има и много зрелијих приступа. По нама је природније прићи Богу као нечему што не подлеже нашој *људској ограниченој логици*. Одатле следи да је парадокс у ствари само у нашој немогућности да до краја (*посебно наглашавам*: **у рационалном смислу**) дођемо до, разумемо, схватимо и слично Свевишњег Бога.

Нама свакако не пада на памет да се упуштамо у теолошка разматрања овог проблема, ни овде ни другде, ако ни због чега другог бар зато што се у то не разумемо. Ипак, ако се овај проблем погледа „са световне стране" он је у ствари један парадокс бесконачности! Одговор је сличан. Бесконачности можемо прићи са ове или оне стране, из ове или оне потребе, али је не можемо (**наравно рационално**) спознати до краја.

И то су спознали свети оци на Истоку врло рано. Али не и они на Западу, који су заједно са другим смртницима (средњим) вековима „лупали главу" око овог и сличних проблема. Познати под заједничким именом схоластичари, они нису много помогли својој цркви, као што им је свакако била намера, али су значајно утицали да се развије наука и посебно логика (па и математичка). Посебно истичемо њихов непревазиђен значај развоју метафизике бесконачног. Тешко ломећи грчку паролу: **целина мора бити већа од дела** они су, што је за нас и најважније, први утрли пут примени идеје бесконачности у математици.

Упознајмо се сада мало ближе са неким мишљењима неких истакнутих схоластичара. Прво, подсетимо се да је на целу средњовековну мисао одлучујући утицај дуго имао Аристотел, велики противник остварене (актуелне) бесконачности. Тако исто (о бесконачности) мисли и најистакнутији члан катехетске школе у Александрији, Ориген (185 или 186–254 или 255) који негира постојање актуелне бесконачности.

Али, с друге стране, један од најзначајнијих хришћанских отаца св. Августин (354–430) (или Аугустин?) у своме *Граду божијем* третира низ свих целих бројева као актуелну бесконачност. По речима Георга Кантора, не може се енергичније стремити трансфинитном (читај бесконачном) и не може се трансфинитум боље дефинисати и засновати него што је то учинио свети Августин. Немамо разлога да не верујемо творцу теорије скупова, без обзира на његову очигледну потребу за потврдом властитих ставова у мислима великих људи из прошлости. (*Напомена.* Ипак делује помало прадоксално и подоста тужно да је исти тај св. Августин изјавио: „Добар хришћанин треба да се клони математичара и свих оних који дају лажна пророчанства. Постоји опасност да су математичари већ склопили пакт са ђаволом, да помраче човеков ум и да га окују оковима Пакла."[1] Бар једно је сигурно тачно: придаје се велики значај математичарима!

О актуелном бесконачном размишљао је и други велики католички мислилац св. Тома Аквински (1224–1274) и дошао до прилично опречног става у односу на св. Августина. Анализирајући Томино дело познати историчар филозофије Фредерик Коплстон [18] отприлике каже: „У *De veritate* Светац примећује да би једино ваљани разлог да се каже да Бог није могао створити актуелно бесконачно мноштво била суштинска

[1] Видети о томе на страни 133 у књизи Милана Божића *Преглед историје и филозофије математике*, [6].

противречност у појму такве бесконачности. Али он оклева да донесе било какву одлуку у том проблему. У *Summa Theologica* он категорички тврди да не може постојати актуелно бесконачно мноштво, јер свако створено мноштво мора да има неки број, а бесконачно мноштво не представља одређен број". Међутим, анализом и неких других дела Аквинског, Коплстон закључује да св. Тома оклева око немогућности актуелног бесконачног мноштва.

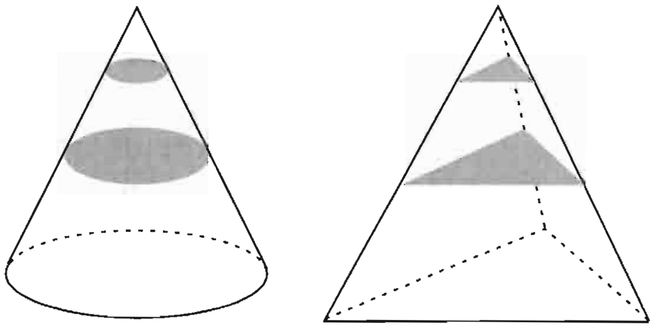
Веома је занимљиво и мишљење познатог шкотског схоластичара Јована Дунса Скота (1265–1308). Он прво тврди да Бог мора да буде бесконачан зато што познаје бесконачно много интелигибилних (тј. спознатљивих) предмета и зато даје један занимљив, на изглед врло прихватљив, разлог: „Све ствари које су потенцијално бесконачне, тако да ако се узму једна за другом не могу да имају краја, јесу бесконачно актуелно, ако су истовремено актуелне". Одатле се лако може закључити постојање скупа природних бројева, ако то већ и није била основна потка његовог размишљања!

Нови век донео је и ново гледање на појам бесконачности. Он се више не помиње само када се говори о егзистенцији Бога, мада и тога има, већ и онда када се решавају конкретни проблеми који се односе на израчунавање површина и запремина. Појам бесконачности постаје нераздвојиво везан са развојем математичке анализе и посебно испитивањем понашања многобројних кривих (тј. функција) које све развијенија пракса намеће.

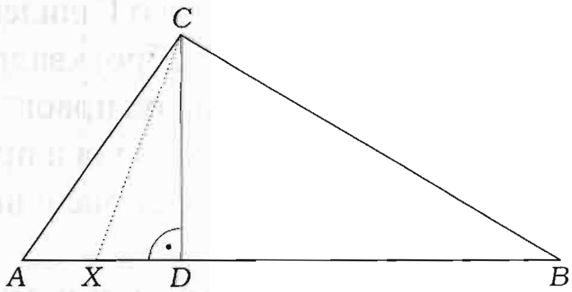
У својим беседама (*Discorsi*, 1638) Галилео Галилеј (1564–1642) кроз уста свог јунака Саливата изричито каже: „број квадрата није мањи од множине свих бројева, а ова ипак није већа од првог". Значи, целина је једнака делу!! Галилеј је ипак био веома обазрив и препоручивао да не треба без резерве преносити на бесконачност оне односе који су тачни за коначне скупове.

Да читалац не би стекао погрешан утисак и помислио да је бесконачност у XVI веку била већ прихваћена (а што се иначе никада није ни десило), напоменимо само да је велики италијански научник и познати страдалник Ђордано Бруно остао, до (трагичног) краја свог живота, финитиста, тачније атомиста. Он је чак знатно унапредио атомистичку теорију и извршио утицај на многе касније финитисте, као што је на пример и наш Бранислав Петронијевић.

Развијају се методе рада са бесконачно малим величинама и у томе предњаче Галилејеви следбеници Бонавентура Кавалијери (1598–1647) и Торичели (1608–1647). Занимљиво је видети како је Кавалијери дошао до свог познатог, а иначе потпуно тачног, *Кавалијеријевоḡ ӣринциӣа* по коме ће два тела исте висине имати исте запремине ако равни пресеци тих тела на једнаким растојањима од основа имају једнаке површине.



Ево шта о његовој методи каже познати историчар математике Стројк [44]: „Кавалијери је дао упрошћену варијанту рачуна бесконачно малих величина, која се заснива на схоластичкој представи недељивих величина, тј. таквим представама по којима тачка при кретању даје линију, а линија површ. Полазећи од тога, он је спајао дужи да би добио површ, а делове равни да би добио тело. Но, када је Торичели показао да се, полазећи од таквих представа, може доказати да се ма који троугао једном висином може поделити на два једнака дела, Кавалијери је дужи заменио 'нитима', тј. 'дужи' је претворио у делове површи веома мале ширине и тако стао на позицију атомистичке теорије".



У чему је све погрешио Кавалијери тешко је на овом месту рећи, али му је сигурно основна грешка у томе што је на недозвољив начин помешао Аристотелов континуум (данас бисмо рекли реалних бројева) са дисконтинуумом атомиста. Наиме, ако се дуж схвати на Аристотелов (а и савремен) начин, онда су сваке две дужи, како је то Кантор показао, једнакобројне, па тиме и $BD \sim DC$. Отуда то важи и за Кавалијеријеве нити, типа AX, па самим тим и површине троуглова BDC и DCA су једнаке.

Посветимо сада и неколико редова славном и генијалном француском научнику, мислиоцу и поети Блезу Паскалу (1623 – 1662). Паскал је и у чисто математичком смислу био један од претеча Лајбница и Њутна у стварању диференцијалног и интегралног рачуна. Између осталог бавио се, веома успешно, и „проблемом одређивања тангенте на криву".

Али Паскал је не мање, макар можда само на Лајбница, утицао својим блиставим поетским надахнућем. У својим *Мислима*[33], у којима се бави пре свега моралним и религиозним питањима, он, између осталог, каже: „Јединица додата бесконачном не повећава га ниуколико, као ни стопа неку бесконачну меру; коначно се ништи кад се нађе пред бесконачним, и постаје просто ништа".

Мало даље Паскал додаје: „Ми познајемо, дакле, постојање и природу коначнога зато што смо коначни и просторни, као и оно. Ми знамо да бесконачност постоји, а не знамо му природу, јер оно има просторност као и ми, али не и границе као и ми. Али ми не познајемо ни постојање ни природу Бога, зато што он нема ни просторности ни граница".

Блез Паскал, један од твораца француске књижевности, био је веома餐 песнички надахнут. Али и када на узвишен и прелеп начин говори о човеку, његовим могућностима и достојанству, он говори и о нашем односу према бесконачности: „Не треба од простора да тражим своје достојанство већ од правилности моје мисли. Нећу имати преимућство ако притежавам земљи[2]: простором, васиона ме обухвата и гута као једну тачку; мишљу ја обухватам њу". Ова Паскалова мисао из *Мисли* значајно је утицала на Лајбница тако да он примећује: „То што је он рекао о двострукој бесконачности, само је увод у мој систем".

У следећем одељку посветићемо пажњу почецима математичке анализе и посебно једном од њених твораца Готфриду Вилхелму Лајбницу (Leibnitz, 1646–1716).

---

[2]притежавам земљи $\approx$ држим се земље

Leibnitz

Од изузетног значаја за схватање и посебно улогу појма бесконачности у науци (али и филозофији) представља мисао и дело славног немачког математичара и филозофа словенског порекла Готфрида Вилхелма Лајбница (1646–1716).

Иако биографија овог великог ума заслужује посебну пажњу, овом приликом, задржаћемо се само накратко, на његовом словенском пореклу.

Први је код нас о томе писао Димитрије Нешић (професор Михајла Петровића Аласа на Великој школи), а затим Ђуро Курепа, Јова Кечкић и други. Основу за тврдњу да је Лајбниц словенског порекла представљала је порука коју је Лајбниц, пред смрт и у тренутку кризе, упутио руском цару, знаменитом, Петру Великом. Оно је објављено у једној словачкој (условно речено) енциклопедији из 60-их година XIX века. Лајбниц почиње са: „Обраћам се Вама као словен словену ...“, а затим, између осталог, тврди да је писао историју понемченог словенског племена Бодрића (тј. бодрих – храбрих). Он не тврди ту баш изричито да потиче од њих, али се то може претпоставити. (Интересантно је да се Бодрићи на најмање два начина могу повезати са Србима. Прво, део тог племена се у средњем веку, вероватно бежећи од германског прогона, населио у област Браничева, и друго, постоји историјска литература[31] на коју ми је указао мој син, Душан Рашковић, да су Бодрићи у ствари били посебан војнички сталеж у оквиру српског (Сорабског) племена. Наравно, ту су Срби схваћени у ширем смислу, скоро као синоним за словенство.) Други важан доказ за словенско порекло Лајбница је правописне природе. Наиме, у самом запису Leibnitz крије се тајна. Група tz у словенским племенима се чита као **ћ**, тако да је у питању управо Лајбнић!!! (Који је по некима изведен од Лубенић, Лубеница!). Наравно, данас се у Немачкој (а и уопште на западу) труде да избаце то ћ и краће пишу Leibniz (што се види и по бренду познатог кекса). Ипак око трећине записа његовог имена који се могу наћи путем Интернета је Leibnitz, што није ни тако лоше за овај историјски тренутак.

Сматра се да је Лајбниц дефинитивно створио математичку анализу преко своје „нове методе“. При том је био велики филозоф који је створио обиман и значајан математички систем у коме је покушао и да заснује појам бесконачно великих и бесконачно малих величина. У томе до краја није успео, а такође је код њега касније преовладало прагматично гледиште. Тако се Лајбниц оставио, како се каже „тих спорних питања" и посветио се развоју и примени своје (отклониво противречне) методе са којом је већ постигао велике успехе. И показало се да није погрешио. На тај начин је Лајбниц дефинитивно одвојио науку од филозофије „инструментализујући" појам бесконачности. Нешто слично урадио је у исто време и Њутн са појмом сила. Бесконачност је била дата само преко својих (нама корисних) особина и начина рада са њима. Њена потпуна схваћеност као и њен реалитет више нису били толико битни.

Ипак, Лајбниц је био изложен великим напорима и притисцима са свих страна и из многих разлога[3]. Један од разлога је била и та „недореченост" у вези са бесконачношћу.

Лајбниц је имао и своје пријатеље и следбенике који су га бранили. Један од њих је био и извесни Варигнон из Париза, који се нашао на муци како да брани Лајбницову теорију пред бројним противницима. Лајбниц му у томе помаже саветима и у тој прилици, што је за нас врло значајно, бива принуђен да излаже своје погледе на бесконачност.

Дајемо сада један прилично дуг цитат Лајбницовог писма Варигнону у хрватској варијанти српског језика, јер смо га у тој форми затекли. Сматрамо да ће са језичке стране читаоцима бити довољно разумљив, а затим ћемо га коментарисати.

„... није потребно да се математичка анализа учини зависном од метафизичких расправа, да, дакле није потребно тврдити да у природи има црта које су, у својој строгости бесконачно мале, нити да има таквих које су бесконачно пута веће од обичних (али су ипак ограничене. То сам могао истакнути утолико више што бесконачно у строгом смислу има своје извориште, како верујем, у неограниченом, те ја без тог потоњег појма нисам кадар да пронађем прикладан разлог да га разликујем од коначног). Да бих избегао та суптилна питања, ја сам се задовољио тиме да бесконачно – будући да сам своја размишљања хтео да учиним опште разумљивим – разјасним помоћу неупоредивог, тј. посегнем за величинама неупоредиво већим или мањим од наших величина. Тако се, наиме, добијају колико год желите многи ступњеви неупоредивих величина, уколико се један неупоредиво много мањи елемент може при

[3]То је имало за последицу и оно писмо упућено Петру Великом.

рачунању занемарити – ако се ради о установљењу једног неупоредивог много већег елемента. Тако се, на пример, делић магнетичке материје која се пробија кроз стакло не може упоредити са зрнцем песка, то се пак не може упоредити са Земљом, а Земљина се кугла не може упоредити са небеским сводом. Због тога сам ја већ пре тога у „ Acta eruditorum“ за рачун са неупоредивима поставио неке помоћне теореме које се могу да примене како на бесконачно у строгом смислу, тако и на величине које, у односу према другима, не долазе у обзир.

При томе се ипак морамо обазирати на то да неупоредиво мале величине, узевши их у њиховом сасвим популарном смислу, нипошто нису константне и одређене, него да им, штавише, будући да се могу узети тако мале како се само жели, у геометријским разматрањима припада иста улога као и бесконачностима у строгом смислу. Ако би, наиме, неки противник хтео да одрекне ваљаност нашим теоремама, онда наш рачун показује да је грешка мања од било које дане величине, јер је у нашој моћи да у ту сврху можемо да смањујемо неупоредиво мало – оно се, наиме, увек може узимати тако мало како се само хоће. То би сигурно могло бити оно што Ви подразумевате под изразом неисцрпно и, нема сумње, у томе и лежи строги доказ нашег инфинитезималног рачуна. Његова предност лежи у томе што он непосредно и очигледно, на начин који јасно показује прави извор открића, даје оно што су стари, на пример Архимед, постизали околишањем уз помоћ индиректног доказивања. Тако се бесконачне и бесконачно мале црте – све да им не признајемо метафизичку строгост и реалност ствари – могу без сумње употребљавати као идеални појмови с којима се скраћује рачун, слично такозваним имагинарним коренима у обичној анализи, као на пример $\sqrt{-2}$.“

Дали смо овај дужи цитат да бисмо показали како је Лајбниц са ипак мало речи изнео обиље информација о бесконачности и свом погледу на њу. За потпуну анализу овога текста била би потребна читава једна мања студија. Ми ћемо се овде, само задовољити са неколико мањих коментара.

Прво пада у очи да је већ сам Лајбинц у то време уочио и истакао могућност избацивања инфинитезимала из анализе и на тај начин предвидео оно што ће Вајерштрас дефинитивно да уради. Много је, међутим, значајније да је Лајбниц, кроз упоређивања која је дао, указао на **искуствено (емпиријско)** порекло лајбницовске бесконачности (тј. инфинитезимала и њихових реципрочних вредности). Она и јесу, како он то сам каже, опште разумљива зато што се слажу са нашом интуицијом. Из Лајбницовог излагања се непосредно види, да појам лајбницовске бесконачности потиче од „великости“ (или несамеривости у неком интуитивном смислу) и да је та „великост“ релативна.

Овде се још једанпут срећемо са парадоксом ћелавца. Јасно је, да се додавање или одузимање од Земље једног зрнца песка може занемарити и да после тог чина оно што настаје опет с правом називамо Земљом. Наравно, овакав приступ је парадоксалан ако претпоставимо да смо зрнце додавали „много“ пута, рецимо у $10^{1000000}$ корака. Међутим, ово је очигледно идеализација јер ми у реалности не можемо га схватити као елемент „свих остваривих природних бројева“. (Узгред, ови „сви оствариви бројеви“ су у каснијим математичким формализацијама појављују као пребројив скуп у смислу Кантора.)

Веома је важно и Лајбницово мишљење да се на инфинитезимале може гледати као на „корисне фикције“, слично као што су имагинарни корени (а осим неколико изузтака као што су e, π и слично, и скоро сви трансцедентни бројеви). На овај начин он је близак доцније Хилбертовом становишту према коме су бесконачни скупови идеални објекти придружени коначној математици.

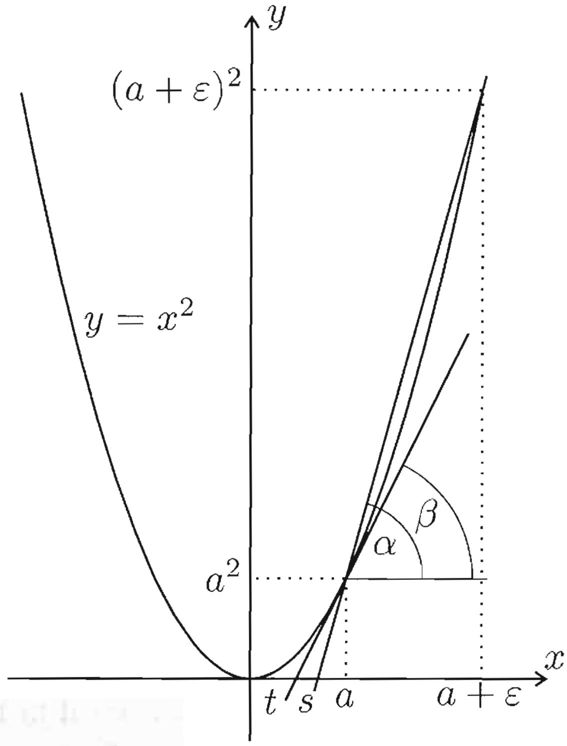
Као творац диференцијалног и интегралног рачуна Лајбниц је „на велика врата“ вратио инфинитезимале у математику. Оне су прихваћене као „праве“ бесконачности чија се егистенција не мора „учинити зависном од метафизичих расправа“, тј. како бисмо данас рекли, могу се одвојити од онтологије. Он их чак назива „корисне фикције“.

Инфинитезимале више нису као код атомиста недељиве и разликују се по степену бесконачности међу собом. Инфинитезимала a може бити бесконачно велика у односу на инфинитезималу b ако је $\frac{b}{a}$ инфинитезимала! Управо количници инфинитезимала и њихови бесконачни (ми бисмо данас рекли хиперконачни) збирови чине срж Лајбницовог инфинитезималног (диференцијално-интегралног) рачуна.

У својеврсној алгебри за рад са инфинитезималама, коју је створио, он је зналачки замењивао једне бројеве њима бесконачно блиским (тј. таквим да им је разлика инфинитезимала). Отуда се стекао утисак да је инфинитезимале, којима је иначе могао и да дели, повремено идентификовао са нулом. То је стварало касније велику забуну и додатно неповреће у његову методу. Она је у основи, тиме, постала противуречна, али као што ћемо видети та противуречност је ипак отклоњива.

Да не бисмо остали само на причи, илустроваћемо како је дејствовала та његова „нова метода“. Наравно, конкретан пример који дајемо, а односи се на такозвани „проблем тангенте“, већ је одавно био решаван на сличан начин од стране Паскала, па и раније.

Нека је дата функција $y = x^2$. Треба одредити коефицијент нагиба тангенте на ову параболу у тачки (a, a^2).



Означимо коефицијент нагиба сечице s са k_s. Тада је

$$k_s = \operatorname{tg}\alpha = \frac{(a+\varepsilon)^2 - a^2}{(a+\varepsilon) - a} = 2a + \varepsilon.$$

Када занемаримо ε, добијамо $k_t = \operatorname{tg}\beta = 2a$ као коефицијент нагиба тангенте t.

На крају, као закључак, можемо рећи да Лајбницов (а и многих других, тога доба, које он својим именом симболизује) поглед на бесконачност и континуум представља **синтезу** између Демокритовог атомизма и Аристотеловог континуума.

Развој и покушај заснивања анализе од XVII до XIX века

Оснивачима диференцијално-интегралног рачуна сматрају се, као што је мање више свима добро познато, Лајбниц и Њутн. Али њихови резултати добијени крајем XVII и почетком XVIII века представљају само најзначајнију преломну тачку у развоју математичке анализе, како се другачије назива диференцијално-интегрални рачун. Они се настављају на напоре и резултате великог броја математичара, њихових непосредних претходника или савременика, као што су били Торичели, Кавалијери, Ферма, Декарт, Паскал и др.

Док је код Њутна (1643–1727) изградња нове методе превасходно служила заснивању механике, Лајбницов приступ је пре свега схваћен као изградња „нове геометрије“ (али ово не треба да нас буни са неким другим употребама фразе „нова геометрија“; са једном од којих ћемо се мало касније такође срести). Да је и сам Лајбниц имао слично гледиште делимично се може видети и из већ цитираног писма Варигнону. Ипак, за разлику од Грка и дотадашњих математичара, уместо геометризације алгебре Лајбниц је вршио управо супротно – алгебризацију геометрије. Његов приступ је био далеко плодотворнији од Њутновог (делимично и због увођења нових појмова као што је на пример „функција“, или ознака као што су на пример dx, $\int$).

Лајбницовим путем кренули су многи математичари. Први од њих су били браћа Бернули и маркиз Де Лопитал. Велики Ојлер је, вешто користећи инфинитезимале (а понекад кажу и погрешно), својим резултатима скоро заокружио реалну анализу.

Упоредо са сличним развојем анализе јавиле су се и контроверзе са природом лајбницовске бесконачности, тј. инфинитезимала. О томе је већ било нешто речи и у претходном поглављу. Видели смо да је Лајбниц, да би себи скратио муке и усмерио пажњу јавности више на своју тако плодну методу, на крају ипак пристао да их назове „корисне фикције“ и на тај начин се удаљи од тзв. проблема онтологије (или проблема постојања). Ипак да му питање заснивања инфинитезимала није било баш неважно сведочи и чињеница да је 1702. године публиковао расправу „Оправдање рачуна са бесконачно малим величинама“. Такође је његов искрени обожавалац Француз Фонтонел радио, не баш тако успешно, на формалном заснивању лајбницовске бесконачности.

Још је мање јасан и дефинисан статус инфинитезимала код Њутна и његових, не тако бројних, настављача. Као добар опис Њутновог гледања на заснивање анализе наводимо речи Абрахама Робинсона (творца тзв. нестандардне анализе о којој ће бити речи касније) познатог америчког математичара: „Изгледа да је Њутново гледање на основе Рачуна (мисли се на математичку анализу) донекле нејасно. Он се позива понекад на инфинитезимале, понекад на моменте, понекад на лимесе и понекад, и можда најчешће, на физичке појмове“. Занимљиво је и значајно овде истаћи да је највероватније Њутн био тај који је увео појам лимеса (наравно не преко ε–δ формализма) што се данас често заборавља.

Међутим, у оквиру Лајбницове школе употреба инфинитезимала се сасвим одомаћила. Први писац уџбеника из анализе маркиз Де Лопитал већ слободно и без устезања користи појам инфинитезимале и описује њене особине. Даје правила рада са инфинитезималама без икакве расправе о њиховој егзистенцији. У уводу своје књиге он даје свој поглед на нову анализу који се често (неправедно?) приписује Лајбницу. Помало смушено изјављује (а можда и превод није најбољи): „Обична анализа ради само са коначним величинама, ова (тј. анализа у раду) улази (?) колико год бесконачност сама. Она упоређује бесконачно мале разлике коначних величина; она открива релације између коначних величина, које су, бесконачне у поређењу са бесконачно малим величинама. Неко чак може рећи да ова анализа прелази преко бесконачности: у том смислу да се не задржава само на бесконачно малим разликама већ открива релације између разлика тих разлика. . . “. Међутим, противречност Лајбницове анализе, о којој је већ било речи, а односи се пре свега на противречну улогу нуле, није било могуће лако оправдати. Велики математичари, попут Лајбница и браће Бернули, тачно су знали како ће у доказима занемарити инфинитезималу вишег реда ε у односу на инфинитезималу нижег реда δ (тј. у случају да је ε/δ бесконачно мала). Проблем је настао када су анализом почели да се баве и мање талентовани са слабијом интуицијом. Упутства за рад која су им оставили Лајбниц и маркиз Де Лопитал нису била до краја прецизна и долазило је до погрешних употреба инфинитезимала. Тек је нестандардна анализа 60-их година XX века у потпуности решила овај проблем. Ту је једнакост само идентитет док значајну улогу игра њена надрелација „бесконачно блиско“. Уместо да као Лајбниц кажемо да су a и $a+\varepsilon$ (где је a реалан број, а ε бесконачно мала) једна другом замењиве величине, ми кажемо да су оне у неком смислу еквивалентне (тј. бесконачно блиске). Оне се могу у неким, тачно дефинисаним, случајевима смењивати, а у неким не.

Овакву ситуацију у математици неки су једва дочекали. Посебно су се обрадовали теолози. Они као да су једва чекали да „нову методу" подвргну критици и исмејавању. Нарочито је предњачио у томе бискуп Беркли. Овај енглески метафизичар се посебно био окомио на Њутнове флуксије: „И шта су те флуксије? Брзине испаравајућих инкременита. А шта су ти сами исправајући инкременти? Они нису ни коначне величине, нити пак величине бесконачно мале. Нити пак ишта. Можда их треба назвати духовима ишчезлих величина.". И сад Беркли поентира (вероватно сав срећан): „Тај који може да 'свари' другу и трећу разлику не треба како се мени чини да 'закера' за било чим у теологији.".

Временом проблем заснивања анализе постаје све актуелнији и при томе се углавном настоји да се инфинитезимале заобиђу па чак и сасвим елиминишу. Значајан допринос томе дао је и Даламбер који поново афирмише појам граничне вредности (лимеса). Он сматра да нема места за инфинитезимале и ту је далеко радикалнији (захтевнији) од Кошија. Велики француски математичар и механичар створио је један формализам у раду са Тејлоровим редовима. Ипак, ово су остали само покушаји.

Често се сматра да је „избацивач" инфинитезимала и онај који је ставио анализу „на ригорозне основе" био, такође велики француски математичар, Огист Коши. Говори се да је он појам инфинитезимале елиминисао помоћу појма граничне вредности. Међутим, мало се зна да бесконачно мале величине имају још увек виталну улогу у Кошијевом систему. У свом курсу из анализе он каже: „Када говорим о непрекидности функција, ја сам обавезан дискутовати основна својства инфинитезималних квантитета, својства која конституишу основе инфинитезималног рачуна . . . ". Ипак он инфинитезимале не сматра за базичне ентитете (објекте) већ покушава да их изведе из појма променљиве: „Променљива је величина за коју се сматра да добија сукцесивно различите вредности. . . ". Отуда се инфинитезимале дефинишу на следећи начин: „када сукцесивне (тј. оне које следе једна за другом) нумеричке вредности променљиве опадају неограничено тако да постају мање од сваког задатог броја, та променљива постаје како се каже једна **инфинитезимала** или бесконачно мала величина".

Значајно је истаћи да је Коши појам инфинитезимале користио само у току доказа док га теореме нису смеле садржавати. Постоје значајне контроверзе у вези с Кошијевом употребом инфинитезимала (посебно у случају конвергенције низова функција).

Кошијево схватање инфинитезимала, као и самог појма конвергенције, са данашњег становишта необично је и не уклапа се ни у „стандардну“ ни у „нестандардну“ анализу. То се лепо види на примеру дефиниције извода. За Кошија је извод од f, кад год постоји, лимес количника

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}=\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon},$$

где је ε инфинитезимала. Значи, до границе се долази после преласка преко свих инфинитезимала!

Овакво схватање конвергенције и инфинитезимала није довољно познато (а самим тим ни схваћено) у математичкој јавности па се услед тога Кошију, како је то показао познати историчар и филозоф математике Имре Лакатош, погрешно приписују нетачности неких теорема.

Велики допринос заснивању анализе дао је и велики немачки математичар (италијанског порекла, који је живео и радио у Прагу) Болцано, мада његови резултати нису били шире познати и признати у право време.

Посао који је започео Еудокс стварајући методу исцрпљивања, а нарочито развили Коши и Болцано, завршио је у потпуности у другој половини XIX века немачки професор математике Вајерштрас. Он је доследно развио данас широко познати $\varepsilon-\delta$ метод у коме више није било места ни за какве инфинитезимале. Ипак не мала цена је плаћена. Појмови непрекидности и конвергенције су постали компликованији и мање интуитивни; на пример, тешко је ученику, почетнику, да одмах схвати значење формуле

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon),$$

тј. да је реална функција реалне променљиве f непрекидна у тачки a из $\mathbb{R}$.

Избацивању бесконачно малих превасходно је допринело заснивање (изградња) реалних бројева које је, настављајући још једну добру идеју Еудокса, реализовао Ричард Дедекинд, такође немачки математичар. Али тога не би било да се није појавио Георг Кантор (такође Немац) са својом величанственом теоријом скупова о којој ће нешто касније бити више речи. Канторова теорија је створила један (видећемо не увек баш најсјајнији) оквир за скоро читаву математику и посебно теорију реалних бројева и анализу.

Основна карактеристика Канторове теорије је рад са бесконачностима (Канторовог типа). И то рад са бесконачном хијерархијом бесконачних скупова.

Математичари који до тада нису могли да прихвате чак ни скуп природних бројева $\mathbb{N}$ (или ω; као целину, тј. актуелно) сада су олако прихватили далеко веће бесконачности. Али нису сви исто реаговали, и о томе ће бити речи нешто касније.

Реални бројеви, после Дедекинда, чине једноставно, до на изоморфизам, комплетно поље и за њих постоји, до данас, за већину математичара, снажно убеђење да чине неспоран темељ анализе. Наравно, већину „реалних бројева“ чине у ствари „трансцендентни бројеви“ (што је већ терминолошка контрадикција) од којих само коначно много има неког реалног смисла (као на пример број π, који је количник обима и пречника круга). Реалност већине трансцендентних бројева није ништа већа од реалности инфинитезимала али то зачудо мало коме данас смета.

Сам Кантор је брзо схватио велики значај који његова теорија има за заснивање анализе. У жељи да што више афирмише своју теорију он се свом жестином окомио на непопуларне инфинитезимале: „Чињеница о постојању актуелно бесконачних бројева није разлог за постојање актуелно бесконачно малих величина; управо супротно, немогућност последњих може бити доказана прецизно коришћењем прве.“. Он још додаје: „. . . такође ја не мислим да овај резултат може бити добијен ни на који други начин потпуно и строго.“.

Кантор је вероватно мислио на теорију чију су завршну форму дали његови земљаци Вајерштрас и Дедекинд. Али, наравно, они **нису показали немогућност инфинитезимала** већ су их само заобишли. А да то не може урадити ни било ко други, бар не помоћу Канторове теорије, ускоро ћемо се убедити зашто.

Значи, у Канторовој теорији скупова не само да се **не може** показати да инфинитезимала нема већ се може показати да их **можда има**, тј. да је њихово постојање непротивречно са Канторовом теоријом. А за то нам је потребна математичка логика.

„Нове геометрије“

Данас је доста распрострањено мишљење да су се у XIX веку догодиле најзначајније ствари у математици. Ако се он продужи и на првих 30 година XX века, онда можемо то исто тврдити и за читаву науку. То се све поклапа са кулминацијом западне цивилизације и почецима њеног полаганог пропадања. Развитак технологије, данас, преузима примат над развојем математике и природних наука (а да не причамо о друштвеним наукама које су у тоталној декаденцији). Ни велики број научника и радова који они продукују данас не може да се мери са богатством фундаметалних идеја из наведеног периода.

Један од судбоносних тренутака XIX века било је стварање геометрије Лобачевског (коју је наравно створио велики и храбри (у научном смислу) руски математичар из Казања Лобачевски Николај Иванович (1792–1856)).

Лобачевски је заменио познати Еуклидов V постулат, који у једној формулацији гласи: „кроз дату тачку ван дате праве може се повући тачно једна права паралелна са датом“, новом аксиомом у којој се тврди да кроз дату тачку пролазе бар **две** праве паралелне датој!!! Све остале аксиоме је задржао као код Еуклида и као последицу добио занимљиву теорију која је еквиконзистентна са Еуклидовом геометријом, што значи да се у геометрији Лобачевског може извести контрадикција ако и само ако се то може урадити у еуклидској геометрији (у шта нико не верује). Да видимо сада поближе шта ова последња аксиома значи. Показаћемо у ствари само онај проблематичнији део: геометрија Лобачевског је непротивречна ако је таква и еуклидска геометрија.

У том циљу, поред једнакости $=$, уведимо још три предиката T, P и E, тако да $T(x)$ значи „*x је тачка*“, $P(x)$ тврди „*x је права*“ и $E(x,y)$ тврди „*x припада y*“. Погледајмо сада како се, на пример, може записати аксиома еуклидске геометрије (а и Лобачевског) у равни: „кроз сваке две различите тачке x и y пролази једна права z“. Одговарајућа предикатска формула је:

$$(1)\quad (\forall x)(\forall y)\,(T(x) \wedge T(y) \wedge x \neq y \;\Rightarrow\; (\exists z)\,(P(z) \wedge E(x,z) \wedge E(y,z)).$$

Тако нешто слично, очигледно, можемо да урадимо и са осталим заједничким аксиомама, док би спорна аксиома о паралелности у случају геометрије Лобачевског изгледала овако:

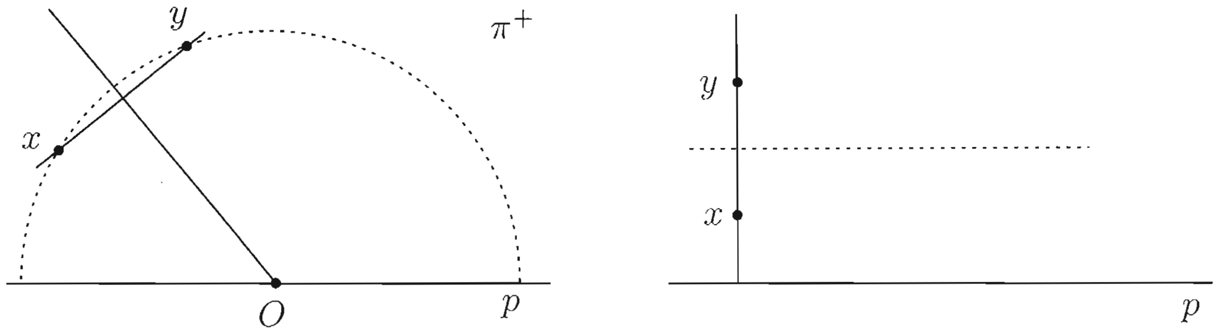
$$(2) \qquad (\forall x)(\forall y)\,(T(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists u)(\exists v)\,(u \neq v \wedge P(u) \wedge P(v) \wedge u \parallel y \wedge v \parallel y)),$$

где је $u \parallel y$ замена за формулу $\neg(\exists w)(T(w) \wedge E(w,u) \wedge E(w,v))$ и слично за $v \parallel y$.

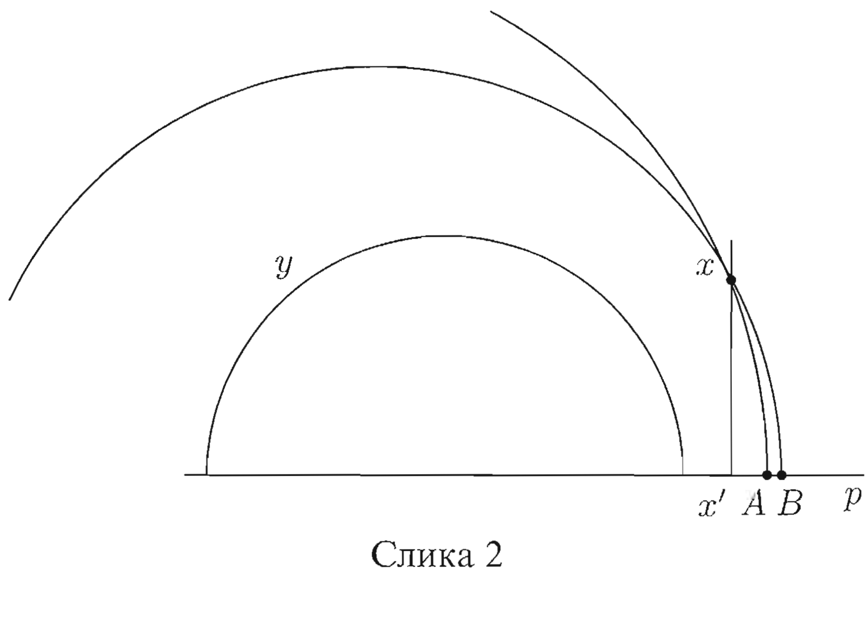
Овим преводима аксиома додајемо још два „захтева": *интересују нас само праве и тачке*, $(\forall x)\,(T(x) \vee P(x))$, и *ништа није и права и тачка у исто време*, $\neg(\exists x)\,(T(x) \wedge P(x))$.

А сада ћемо на тренутак да заборавимо на значење које предикати T, P и E имају и то само зато да бисмо им убрзо дали друго значење. Замислимо сада праву p која лежи у Еуклидовој равни π и уочимо једну од отворених полуравни које она одређује π^+. Нека сада $T(x)$ значи „*тачка x припада π^+*", а $P(x)$ значи „*x је полукруг који припада π^+ са центром на p*". Такође, нека $E(x,y)$ значи „*тачка x припада полукругу y*". Као што видимо, променили смо значење предиката P. Погледајмо сада шта нам тврде наведене аксиоме (1) и (2), (слике 1 и 2).

Прва каже: „Постоји полукруг са центром на p који пролази кроз тачке x и y".



Слика 1



Слика 2

Да бисмо се убедили да то у еуклидској геометрији важи, довољно је конструисати симетралу дужи $\overline{xy}$ и наћи њен пресек O са p. Очигледно ће круг $k(O, \overline{OX})$ имати тражено својство. У случају да је дуж $\overline{xy}$ нормална на p можемо сматрати да је центар „у бесконачности“ и да се круг „дегенерише“ у нормалу.

Аксиома (2) тада ће рећи: „за сваки полукруг y и сваку тачку x ван тог полукруга постоје бар два полукруга u и v који пролазе кроз тачку x и не секу полукруг y“.

Лако се можемо убедити да и ово представља доказиву чињеницу у оквиру Еуклидове геометрије. Довољно је наћи две довољно блиске тачке A и B подножју нормале x' повучене из x на p. Слично као у претходном случају, можемо на p одредити центре полукругова $k(O_1, O_1A)$ и $k(O_2, O_2B)$ који садрже x и не секу y.

Важно је сада напоменути да како се све аксиоме геометрије Лобачевског „преводе“ у теореме еуклидске геометрије, то онда исто важи и за све последице аксиома геометрије Лобачевског.

Ако би пак геометрија Лобачевског била противречна (тј. ако би у њој била доказива и теорема φ и њена негација $\neg\varphi$), онда би то био случај и са њеним „преводима“ у еуклидској геометрији те би и следствено (како су преводи од φ и $\neg\varphi$ једни другом негација) еуклидска геометрија била противречна.

Морамо сада дати једну веома значајну напомену. Читалац никако не би смео да помисли, имајући у виду ову интерпретацију која је једна од многих, да геометрија Лобачевског говори само о неким деловима еуклидске геометрије; мада говори и о њима. *Геометрија Лобачевског говори* (слично геометрији Еуклида) *о односу правих и тачака, али из једног другог угла.*

На овај начин Лобачевски је задао одлучан ударац Кантовој теорији по којој је еуклидска геометрија главни пример како ми суштински и на *јединствен начин* спознајемо реалност (како би он рекао синтетички и априори). Велики филозофски и посебан значај који је еуклидска геометрија имала за Канта и који је изгубила, покушали су да надокнаде нови наивни емпиричари који су јој дали привилегован положај у нашој спознаји (интуицији). Теорију Лобачевског (као и Римана) они више схватају као неку логичку могућност, која је иначе лепа и занимљива али нема много везе са реалношћу.

Наше је пак мишљење (али и других) да је наша спознаја о бесконачном (а у то спада и однос између правих као бесконачности) противречна. Различите геометрије представљају формализације (или теоријске одразе) наших различитих (супротстављених) искустава. Чињеница је пак да је еуклидска геометрија имала привилегован положај у историји, али то је само зато што је настала као компромис различитих искустава. Откриће Лобачевског имало је непроцењив значај за филозофију наука, али је веома утицало и на развој математике (и то посебно математичке логике). Математичке теорије (а оне друге, на пример физике, још пре) изгубиле су ореол *јединсшвеноī* тумачења стварности, али су оне најбоље међу њима веома применљиве у пракси (или ће тек вероватно бити).

Значај геометрије као основе за читаву математику (што је у Грчкој па све до XIV века и била; чак су и алгебарске једначине решаване геометријски), у XIX веку, што је још један парадокс, до краја је опао. То лепо примећује Абрахам Робинсон: „Иронија је судбине да одмах пошто је геометрија изгубила свој положај као база за сву математику њене аксиоматске основе су коначно добиле степен перфекције које су у јавним проценама поседовале још од Еуклида".

Другу важну карактеристику XIX века представља развитак математичке логике као самосталне математичке дисциплине али снажно повезане са осталим (математичким дисциплинама). Идеја и покушаја да се унапреди Аристотелова логика било је још код средњовековних сколастичара, али је најдубље у томе отишао Лајбниц. Нажалост, његове идеје о формализацији (тачније алгебризацији) закључивања нису могле бити значајније остварене у то време, а нису чак ни имале касније значајну улогу на развој математичке логике јер нису са латинског преведене на време. Отуда је најзначајнији допринос у самом заснивању математичке логике свакако дао енглески математичар Џорџ Бул средином XIX века. Он је показао да са исказима можемо да рачунамо на сличан начин као са бројевима. Наравно, многи догађаји из тог времена, као и они који следе касније, као што су проблеми аксиоматизација геометрија, заснивања математике у теорији скупова, појава интуиционизма и слично, знатно су утицали да се развије знаменити предикатски рачун првог реда као и његове касније надоградње. Овом приликом се нећемо систематски бавити развојем и улогом математичке логике али ћемо понешто од тога поменути када будемо дискутовали Канторову теорију скупова.

Управо смо стигли до трећег великог продора у XIX веку, до Канторове теорије скупова коју из више разлога називају „нова геометрија“. Абрахам Робинсон је једном описао, а независно од њега слично приметили Коен и Херш задивљујућу аналогију између геометрије и Канторове теорије: „У XX веку, теорија скупова је добила позицију, коју је једном имала геометрија, да је била сматрана за базичну дисциплину математике у коју други делови могу бити утопљени. И у оквиру врло кратког времена, заснивање теорије скупова прошло је кроз еволуцију која је задивљујуће слична ранијој еволуцији заснивања геометрије.

Прво, почетне претпоставке теорије скупова држане су за интуитивно јасне пошто су биле засноване на природним законима мишљења за чије потврђивање Кантор, у најмању руку, није имао потребу. Тада је теорија скупова базирана на постулатима, почев са експлицитном формулацијом најмање интуитивног међу њима, аксиоме избора. Ипак, у том тренутку је још увек требало да опишу ’реалност’, мишљену реалност једног идеалног, платонистичког света. И коначно, схватање да су подједнако конзистентни потврђивање или одбацивање неких значајнијих претпоставки теорије скупова као што су континуум хипотеза, доводи, средином шездесетих, до ситуације у којој веровање да теорија скупова описује објективну реалност бива одбачено од стране многих математичара “. Другим речима, оно што се са геометријом десило за две и по хиљаде година, то се са теоријом скупова десило за мање од сто година.

Па да видимо како изгледа та чувена и прелепа Канторова теорија скупова и шта је довело до проблема и развоја догађаја о којима надахнуто говори Робинсон. Читаоци који нису упознати са основним техничким детаљима у вези са овом теоријом упућују се на *Појмовник* на страни 91 или пак на страну 171.

Инспирација за стварање ове теорије могла се наћи на много страна (као што смо већ видели Кантор хвали светог Августина у том смислу), али кажу да је главну инспирацију Кантор добио бавећи се анализом, тачније теоријом Фуријеових редова!?! У сваком случају, Кантор је почео да ради са бесконачним колективитетима објеката, као што су скуп природних бројева $\mathbb{N}$, скуп свих правих у равни (а које су пак свака за себе биле неки скупови тачака). Већи део теорије се заснива на значајном логичком принципу, а то је *принцип свеобухватности*. Свако својство $\varphi(x)$ (на пример: „x је тругао“) на основу *принципа свеобухватности* одређује скуп свих елемената који имају својство φ, $y = \{x \mid \varphi(x)\}$.

Георг Кантор (1845–1918) прво упоређује скупове и једна од фундаменталних релација му је *еквиваленӣносӣ* (једнакобројност) скупова $\sim$. Тако је $X \sim Y$ ако и само ако $(\exists f)\,(f : X \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\rightarrow}} Y)$; или речима: скуп X је еквивалентан скупу Y ако и само ако постоји обострано–једнозначна функција f која пресликава скуп X **на** Y. На пример, $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, јер еквивалентност реализује функција $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Један од најлепших и најважнијих резултата до којих је Кантор дошао, уводећи при том у доказу нову и веома корисну методу *дијагонализације*, представља тврђење да се између природних бројева $\mathbb{N}$ и реалних бројева $\mathbb{R}$ не може успоставити еквиваленција; тј. $\neg\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ (видети страну 79 или 110). Како је пак $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, то је очигледно да је у Канторовом смислу $\mathbb{R}$ бројнији од $\mathbb{N}$.

Његова хипотеза (до сада неразрешена, нити ће вероватно икада бити) била је да за сваки X такав да је $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ важи или $\mathbb{N} \sim X$ или $X \sim \mathbb{R}$. То је чувена Канторова хипотеза.

Али, ускоро су се појавили и проблеми у виду парадокса. Сам Кантор је већ уочио неке од њих али је за илустрацију најпогоднији већ чувени Раселов парадокс. Он чак и није био директно упућен Канторовој, већ једној другој (Фрегеовој) теорији коју је срушио и на чијим је темељима Расел подигао своју теорију типова. Да принцип свеобухватности није добар Расел показује на следећи начин: уочава својство $\neg x \in x$ и пита се да ли $y = \{x \mid \neg x \in x\}$ може да буде скуп. Ако јесте, а то би на основу принципа свеобухватности требало да буде, онда из $y \in y$ следи $\neg y \in y$ и обрнуто из $\neg y \in y$ следи $y \in y$, што заједно даје да y припада y ако и само ако му не припада, а што је очигледна контрадикција.

Наравно, Канторова теорија је била превише значајна да би се могла тек тако олако да одбаци. Чињено је више покушаја да се она спасе. Они су најчешће били усмерени у правцу да се „обузда“ и „ограничи“ највећи кривац, *ӣринциӣ свеобухваӣносӣи*, а да се при том сачувају све „добре“ особине Канторове теорије скупова, као што је на пример могућност изградње математике у њој. Један од таквих покушаја, можда и најуспешнији, представља теорија **ZF**, описана у поменутом одељку на страни 171.

Важно је одмах истаћи три ствари. Прво, сви ти аксиоматски системи су (као дати у оквиру предикатског рачуна првог реда) непотпуни, тј. „смислено“ им се може додати нова аксиома. Највећи логичар XX века Курт Гедел (1906–1978) показао је да никада не можемо до краја описати формулама све особине скупова чак и да их знамо. Друго, ми их до краја **нужно** не можемо ни знати, а зашто, то ћемо донекле видети на примеру аксиоме избора. И треће, и то је показао Гедел, иако је сваки систем аксиома непотпун (значи недовољан да опише скупове), никако не можемо знати да није и противречан, тј. да из њега не следи нека контрадикција (парадокс). Према томе, ми можемо само (с правом) да верујемо да смо давањем **ZF** аксиома избегли противречност.

Договоримо се сада да све теорије настале из Канторове теорије скупова (као на пример **ZF**) назовемо канторовске теорије скупова. То је доста згодно јер ћемо једновремено продискутовати све њихове заједничке мане и врлине.

Аксиоме теорије скупова се обично деле на *аналитичке* (једнакости – екстензионалности, пара, уније, партитивног скупа итд.) и *хипотетичке* (бесконачности, аксиома избора, континуум хипотеза итд.). Аналитичке аксиоме обично нису проблематичне све док се не помешају са хипотетичким. Оне говоре о добро познатим особинама које важе за коначне скупове (као на пример аксиома пара која тврди да за свака два скупа x и y постоји скуп z чији су x и y једини чланови) а онда се некритички преносе на бесконачне.

Аксиома бесконачности спада у хипотетичке (читај проблематичне) аксиоме зато што претпоставља оно што никакво искуство из физичког света не може да потврди. На основу ње ми можемо, на пример, да набројимо (наравно само у мислима) све природне бројеве $0, 1, 2, 3, \ldots$, па да чак наставимо то бројање пишући нове бројеве $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$ Она постаје нарочито „зла“ када се комбинује са аксиомом партитивног скупа. Тако се може показати (слично као у Канторовом доказу за $\neg\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$) да $\neg\mathcal{P}(X) \sim X$ (видети страну 176), те отуда следи да је $\mathcal{P}(X)$ „веће бесконачности“ него бесконачно X. То нас води једној огромној хијерархији (скали) бесконачних скупова, све већих и већих. Тих различитих растућих бесконачности има толико много да их има више од било ког бесконачног скупа. Наравно, никаквог оправдања за посматрање **свих** подскупова датог скупа $\mathcal{P}(X) = \{y \mid y \subset x\}$ у математици, која је постојала до појаве Кантора, нема. Тако, ако посматрамо раван као скуп тачака (а што иначе није нужно) онда је у њој умесно посматрати: праве, кругове, полигоне и слично, а никако **све** подскупове. Неке од теорија канторовског типа ипак о томе воде рачуна, као на пример „теорија допустивих скупова“.

Следећа важна хипотетичка аксиома је аксиома избора. Она тврди да кад имамо бесконачну колекцију непразних скупова $\{X_i \mid i \in I\}$, онда постоји скуп X чији су елементи тачно по један елемент из сваког скупа X_i. При том у принципу не постоји поступак којим бирамо по један елемент. Ова аксиома има значајне примене у математици и неки основни ставови у анализи не могу бити доказани без ње. Применом аксиоме избора (краће **AC**) постиже се често и већа елегантност неких доказа. С друге стране, њеном применом добијају се понекад чудни и неочекивани резултати. Један од њих је и познати Банах–Тарскијев парадокс (видети страну 295) по коме се лопта може поделити на коначно много делова, који могу тако да се саставе да дају две нове лопте исте величине као полазна!?! Напоменимо да овај парадокс није типа контрадикције, где се тврде једновремено две супротне ствари (као што је на пример Раселов парадокс) већ математички резултат који противречи нашем искуству.

Гедел је показао да ако претпоставимо непротивречност **ZF** аксиома (што можемо само основано веровати), онда ће бити непротивречан и систем $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}$ (тј. када на **ZF** додамо још аксиому **AC**. Доказ који је он дао у основи је сличан већ скицираном доказу да из непротивречности геометрије Еуклида следи непротивречност геометрије Лобачевског и заснива се на интерпретацији. Американац Паул Коен је показао да ће бити непротивречно и $\mathbf{ZF}+\neg\mathbf{AC}$. Аналогија са геометријом постаје очигледна. Од тада се развијају две међусобно супротстављене теорије (можемо рећи математике). Прва је „већинска“ у оквиру $\mathbf{ZF}+\mathbf{AC}$ и друга „мањинска“ $\mathbf{ZF}+\mathbf{AD}$ (где је **AD** *аксиома детерминације* (ма шта то значило) а из које следи $\neg\mathbf{AC}$). Наравно, слично као и у геометрији, где је заједничко језгро еуклидске геометрије и геометрије Лобачевског такозвана *апсолутна геометрија*, овде је заједничко језгро оно што се добија из **ZF**. Ово није једино место где се Канторове теорије скупова разилазе. Ако са **ZFC** означимо $\mathbf{ZF}+\mathbf{AC}$, тада су од интереса и теорија $\mathbf{ZFC}+\mathbf{CH}$ и теорија $\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$. Слично се дешава код многих других хипотетичких аксиома, о којима не можемо овде говорити. Све то показује колико је наше искуство о бесконачности слабо и противречно.

Међутим, поставља се питање одакле толика наша привржeност теорији скупова и зашто нас „нико не може истерати из раја у који нас је Кантор довео“, како каже велики немачки математичар Давид Хилберт. Одговор није лако дати, а добрим делом вероватно лежи у униформности које нам ово генијално Канторово дело пружа. Скоро сви објекти доканторовске математике могу бити изграђени као делови канторовских теорија. Пример су реални бројеви и инфинитезимале. Њихове дефиниције се чак донекле и мењају да би се ускладиле са канторовским теоријама, али ће о томе бити више речи касније.

У доканторовској теорији скупова било је више врста бесконачности као што је неограничена могућност конструкције објеката неке врсте (на пример троуглова), бесконачност као неограничено растућа количина, бесконачност правих и бесконачност као место где се срећу две паралелне праве итд. Заједничко свему томе је да се потенцијална бесконачност (као један бесконачан процес) актуелизује.

Тај процес актуелизације почео је раније. То се најбоље види на примеру праве. У Еуклидовим *Елементима* (писаним пре скоро 2 350 година) права је дуж која се на обе стране (по потреби) може продужавати. Али још много пре Кантора она постаје актуелно бесконачна у оба правца. Код Кантора и Дедекинда права постаје скуп еквивалентан са $\mathbb{R}$. Према томе, све бесконачности су постале бесконачни скупови.

Захваљујући настанку Канторове теорије скупова настале су нове области математике као што су топологија, теорија мере и слично. Скоро читава математика постала је део теорије скупова. Математика која се ослања на Канторову теорију скупова постала је математика канторовске теорије скупова. Тако не да се само проблем непротивречности појединих теорија своди на непротивречност теорије скупова, већ и обратно, „проблем бесконачности" Канторове теорије скупова преводи се на проблем појединих дисциплина. Зато вреди још једном поновити речи Абрахама Робинсона: „. . . схватање да су подједнако конзистентни потврђивање и одбацивање неких значајних претпоставки теорије скупова као што су континуум хипотеза, доводи, средином 60-их, до ситуације у којој веровање да теорија скупова описује објективну реалност бива одбачено од стране многих математичара". Наравно, ни ове Робинсонове „многе математичаре" не треба превише озбиљно схватити, али код сваке важније математичке теореме поред њене лепоте и примењивости треба обратити пажњу и на нешто друго. А то је, који је то минималан (а тиме и нужан) део теорије скупова у коме се може доказати та теорема или чак изградити читава теорија. Наравно, што се мање хипотетичких аксиома користи то теорема (или теорија као скуп теорема) „поузданије" важи.

У следећем одељку видећемо како се нова ситуација у теорији скупова (како канторовских тако и неких неканторовских) одражава на проблем заснивања инфинитезималног рачуна и изворних Лајбницових идеја.

Нестандардна анализа

Данас скоро општеприхваћен Вајерштрасов ε–δ рачун изазвао је, одмах после свог настајања, бурне реакције код дела немачке математичке јавности а и шире. Као један од његових главних критичара нарочито се помиње славни немачки математичар Кронекер. Он пре свега критикује употребу актуелне бесконачности и неодговарајућу примену закона искључења трећег (тј. универзално важење формула типа $\varphi \vee \neg\varphi$). То све има за последицу неконструктиван карактер анализе.

Као математички одговор проистекао из Кронекерове критике јављају се међусобно веома блиски, Брауеров интуиционизам и конструктивизам, о чему ће бити више речи у поглављу *Мало другачија математика* (страна 233). Овом приликом истичемо само да обе ове теорије користе такозване конструктивне реалне бројеве, дате преко израчунљивих низова. Тако низу $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, одговара реалан (трансцендентан!) број e. Сваком реалном броју одговара један алгоритам, па их очигледно има само пребројиво и могу се срачунати до на произвољну децималу. Ипак чак ни њихово међусобно упоређивање није тако једноставно као у класичном случају.

Даље, дефиниције конвергенције и непрекидности (видети страну 42) схватају се конструктивно. За тачно одређено ε **израчунава се** одговарајуће $\delta(\varepsilon)$.

Занимљиво је да у оквиру ових теорија многе класичне теореме не важе. Тако, на пример, може се показати да постоји израчунљив, ограничен и монотоно растући низ рационалних бројева који нема израчунљиву горњу границу!!! Као последицу добијамо да у случају Кошијеве теореме не постоји алгоритам којим може да се одреди нула (тј. када је $f(x) = 0$) било које непрекидне израчунљиве функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ за коју је $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Очигледно је да нас овакав приступ ограничава и не дозвољава нам да правимо такав замах као у ε–δ рачуну. И то је главни разлог невелике популарности конструктивне анализе данас. Међутим, најновији радови (који нажалост нису шире познати) који повезују интуиционизам са инфинитезималама дају добру наду за већу примену конструктивизма (видети страну 262).

У то време, било је покушаја да се заснује изворни Лајбницов рачун. Отприлике у исто време када се појавила Канторова теорија скупова, Де Боис-Рејмонд и Шулц су направили занимљиве покушаје заснивања неархимедских структура. И наш, већ поменути математичар из XIX века, Димитрије Нешић дао је један занимљив прилог у том смислу. Основна идеја у свим тим покушајима била је иста и слична Кошијевој. Инфинитезимале су биле схваћене као нула функције различитих брзина опадања. Али то није било довољно и задовољавајуће. Постоји такође и трећа не тако мала група (углавном „примењених математичара“) за које инфинитезимале као да никада нису ни биле протеране и забрањене. Овде се не ради о њиховом слабом математичком образовању (мада код појединаца сигурно и тога има) већ о снажној интуицији микро и макропроцеса које се природно и лако „моделирају“ преко инфинитезимала.

* * *

Већ смо навели и коментарисали неке резултате до којих је дошао Гедел. Међутим, за нашу даљу причу, од великог је значаја његов први већи резултат (садржан у докторској дисертацији). *Став потпуности предикатског рачуна првог реда: затворена формула φ је доказива из аксиома помоћу правила извођења ако и само ако је ваљана (тј. тачна у свим интерпретацијама).*

О садржају ове теореме биће више речи у поглављу *Математичка логика* (видети страну 162). За сада, нека читаоцу као примери (затворених) формула послуже формуле (1) и (2) из претходног одељка (страна 44). Као примери интерпретација (тј. модела) за ове формуле могу послужити стандардна (еуклидска) и она дата помоћу полуравни π^+ и полукругова. Наравно, ниједна од ових формула није ваљана, у шта се лако можемо уверити ако $T(x)$ интерпретирамо као „x је природан број“, $P(x)$ као „x је прост број“, и $E(x, y)$ као „x дели y“. Док је, очигледно, формула $\varphi \Rightarrow \varphi$ ваљана.

Овај Геделов резултат имао је одлучујућу улогу да се дефинитивно прихвати Сколемова идеја да се теорија скупова заснује у оквиру предикатског рачуна првог реда. [Погледајте како су аксиоме теорије скупова формулисане (написане) помоћу формула у одељку *Теорија скупова* на страни 171.]

Ово пак „сколемовско“ заснивање Канторове теорије довело је до две веома интересантне и за саму Канторову теорију на први поглед парадоксалне последице. Прва је да ако аксиоме Канторове теорије скупова имају икакву интерпретацију (а то би била баш наша жељена теорија скупова, где интерпретирано $\in$ управо значи припадност) онда имају и интерпретацију која је пребројива. Ту не само да је $\underline{\mathbb{R}}$ пребројив него су такви и $\underline{\mathcal{P}(\mathbb{R})}$, $\underline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))}$, итд. Ова чињеница, која је од почетка збуњивала математичаре, у ствари није прави парадокс, али свакако не иде у прилог, не само „сколемовском заснивању“ већ и самој Канторовој теорији. Ствар је у томе што функција „пребројавања“ $f : \underline{\mathbb{N}} \to \underline{\mathbb{R}}$ (где је $\underline{X}$ интерпретација скупа X у датом пребројивом моделу) не припада датом моделу.

Друга последица је за нас још интересантнија. Може се наиме слично показати да ако **ZFC** има икакав модел, онда има и модел у коме се скуп свих природних бројева $\mathbb{N}$ интерпретира тако да $\mathbb{N}$ поред стандардних природних бројева $1, 2, 3, \ldots$ садржи и бесконачно велике бројеве „Лајбницовог типа“. Тиме је у потпуности пропала и отпала Канторова опаска да се помоћу његове теорије може показати да „Лајбницове бесконачности“ нема.

Ипак, то је био само почетни ударац у том правцу. Завршни се догодио почетком 60-их година прошлог века и задао га је поменути Абрахам Робинсон.

И то није случајно био он (мада је наравно то могао бити и неко други). Наиме, Абрахам Робинсон се у добром делу своје математичке каријере бавио анализом; сумирао је редове, решавао обичне и парцијалне диференцијалне једначине и слично, било за време Другог светског рата када се за потребе америчке војске бавио аеродинамиком или у неким другим приликама. Али овај велики математичар био је пре свега логичар и филозоф. Зато не чуди што је дао у основи (за професионалног логичара) једноставну примену логике на филозофски проблем заснивања анализе (са инфинитезималама).

Прецизније, ради се о примени, логичарима добро познатог, *става компактности*. Став компактности је иначе једноставна последица тзв. *проширеног става потпуности* (а који како сâмо име каже представља уопштење поменуте Геделове теореме).

Да бисмо читаоцу донекле приближили став компактности задржаћемо се на неколико уводних појмова. Под теоријом T подразумевамо скуп (било коначан или бесконачан) затворених формула. Теорија T

је непротивречна ако се из ње, као скупа хипотеза, коришћењем аксиома и правила извођења не може извести контрадикција, тј. формула $\varphi \wedge \neg\varphi$. Кажемо даље да теорија T има модел ако постоји нека математичка структура $\mathcal{A}$ у којој су испуњене (задовољене) све формуле из T. Коначно, *став компактности* гласи: *Теорија T има модел ако и само ако сваки њен коначан подскуп T_0 има модел.*

Очигледно је да ако теорија T има модел $\mathcal{A}$, онда ће и њен сваки коначан подскуп T_0 имати исти тај модел $\mathcal{A}$. Други смер је много тежи и последица је проширеног става потпуности.

Имајући на уму *став компактности* Робинсон је (логичким) формулама у потпуности описао структуру реалних бројева; међу њима нашле су се и формуле: $2+2=4$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $(\forall x)\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и сл. Означимо, зато, тај (непребројив) скуп формула са T'. Нека је даље $T'' = \left\{0 < c < \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ и $T = T' \cup T''$. Уочимо коначан подскуп $T_0 \subset T$. Тада је очигледно и $T_0'' = T_0 \cap T'' = \left\{0 < c < \dfrac{1}{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$ коначан. Нека се c интерпретира као $\underline{c} = \dfrac{1}{2}\min\left\{\dfrac{1}{n_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$. Тада ће очигледно у структури реалних бројева важити T_0. На основу *става компактности* и читав T има модел, али то не може бити структура реалних бројева. Та нова структура у којој важи T зове се структура хиперреалних бројева. У тој структури $\underline{c}$ је очигледно инфинитезимала. Том новом структуром, у ознаци $^*\mathbb{R}$, можемо се служити на сличан начин као што је то својевремено радио Лајбниц.

Робинсон је у основи показао да су Лајбницова расуђивања непротивречна под условом да је **ZFC** непротивречна. То је средином 60-их година XX века доживљено као велики успех и одмах звучно названо као „рационална реконструкција Лајбницове анализе“. Читава област се од тада зове *нестандардна анализа* (видети страну 215).

Међутим, у размаку од годину-две догодио се други велики догађај у логици. Паул Коен је показао непротивречност за **ZF** + ¬**AC** (Зермело–Френкелова теорија са негацијом аксиоме избора). На тај начин читава Канторова теорија скупова је на неки начин доведена у питање. То што је нестандардна анализа сагласна са **ZFC**, неке математичаре није задовољило и они су тражили директан и мање проблематичан приступ бесконачно малим и бесконачно великим бројевима.

Алтернативна теорија скупова

Први који је приметио да извориште лајбницовске бесконачности лежи у великој коначности био је велики руски математичар Јесењин-Вољпин. Интересантно да је он то учинио четири године пре знамените Робинсонове „рационалне реконструкције анализе“ о којој смо причали у претходном одељку.

Јесењин-Вољпин је син великог руског песника (по нама и највећег светског) Сергеја Александровича Јесењина (сетите се само његове предивне поеме „Керуша“). Син песника обично буде и сам бар помало песник. А некада, само песник, може досегнути некакве духовне висине, који се у математици очитују пре свега у стварању нових концепата (загледа).

На самом почетку свог знаменитог рада из 1957. године, Јесењин-Вољпин духовито примећује да „чувене три тачке“ у писању низа $a_1, a_2, \ldots$ треба интерпретирати, уместо са „до бесконачности“, са „до изнемоглости“. Тако он скреће пажњу на нашу идеализацију у раду са великим коначним бројевима коју назива „апстракцијом потенцијалне оствaривости“. Он додаје да та „апстракција“ не прави проблеме свуда, и ту на пример истиче примену Геделових бројева у логици, која је недопустива у теорији реално израчунљивих функција (тј. у рачунарству).

Ми се овде нећемо упуштати у његову суптилну анализу „великих коначности“ повезану са Геделовим ставовима непотпуности, модалним логикама и другим појмовима и техникама.

Оно чему желимо да посветимо пажњу у овом одељку је тзв. *алтернативна теорија скупова* (краће **AST**) чији је циљ да замени Канторову теорију скупова, као и све њене могуће формализације. Такође, **AST** треба да омогући **директно** и **природно** заснивање инфинитезималног рачуна које није било могуће у Канторовој теорији.

Творац ове теорије, настале углавном седамдесетих и осамдесетих година XX века, јесте чешки математичар Павел Вопенка. До стварања своје оригиналне теорије Вопенка се истакао у свом раду на самој Канторовој теорији скупова, тако да се у његову част једна класа **огромних** (шта год то значило) кардинала назива по њему. Као водећи истраживач у теорији скупова он је осетио сву лепоту и величину генијалног Канторовог дела. То своје одушевљење он је више пута јавно изрекао, али је упоредо задржао критички однос према слабостима Канторове теорије. (О тим слабостима било је речи у одељку „*Нове геометрије*“, стр. 44.)

Он није хтео да се бави само критиком већ да створи теорију која ће те слабости да превазиђе. При томе узимао је у обзир радове већ поменутих Лајбница, Болцана, Јесењин-Вољпина као и других математичара и филозофа.

Ми ћемо изложити део основних и најважнијих аксиома за **AST** дајући одговарајућу мотивацију за њихово извођење, а затим показати како се у оквиру **AST** могу природно засновати инфинитезимале.

Основни објекти ове теорије су класе, које означавамо великим словима: $X, Y, Z, \ldots$ Основна релација је *припадање* $\in$. Скупови су посебне класе. Они су елементи класа. Да је класа X скуп, краће записујемо $\mathrm{Set}(X)$ и према дефиницији скупа

$$\mathrm{Set}(X) \Leftrightarrow (\exists Y)(X \in Y).$$

Због једноставнијег изражавања уводимо мала слова $x, y, z, \ldots$ као ознаке за скупове. Праве класе су оне које нису скупови.

До сада је слична ситуација као и у Канторовој теорији скупова (са класама). Класе су схваћене као преобилне да би биле елементи других класа. Таква је, на пример, класа $X = \{x \mid x \notin x\}$ из чувеног Раселовог парадокса.

Полускупови су оно што одваја ову теорију од канторовских теорија скупова и због чега је она њима алтернативна. Полускупови су поткласе скупова. Чињеницу да је X полускуп краће записујемо са $\mathrm{Sms}(X)$, где је Sms скраћеница од енглеске речи semiset, што значи полускуп. Отуда,

$$\mathrm{Sms}(X) \Leftrightarrow (\exists x)(X \subset x).$$

Сваки скуп је тривијално полускуп, а полускуп који није скуп је прави полускуп. У **AST** се изричито тврди да прави полускупови постоје!

Аксиома егзистенције правог полускупа

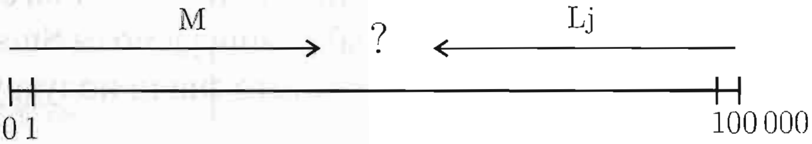
$$(\exists X)(\neg\mathrm{Set}(X) \wedge \mathrm{Sms}(X))$$

Како оправдати чињеницу да део скупа (који, како ћемо тек видети, могу бити само коначни) може бити права класа?! То делује помало збуњујуће. Међутим, уколико скупове схватимо као потпуно одређене објекте, а класе као својства скупова, онда се основни мотив за увођење полускупова тражи у чињеници да *део одређеног не мора бити одређен.* Наводимо познати Вопенкин пример са мајмуном Чарлијем и господином Чарлсом! Читалац ће сигурно у њему препознати само један облик парадокса ћелавца, али он лепо илуструје ту неодређеност полускупова, односно неодређеност релације припадања (датом полускупу).

Вопенка се наизглед помало шали са еволуционом теоријом, а у ствари је позива у помоћ! Он на почетку наводи чињеницу да постоји коначан низ мајмуна и људи, од мајмуна, назовимо га Чарли, који је живео, на пример, пре $2\,000\,000$ година и господина Чарлса (који се може презивати Дарвин, мада то Вопенка не истиче), тако да је претходник отац наредном, при чему је син мајмуна мајмун, а син човека човек. Да би то више личило на математику представимо (кодирајмо) овај низ природним бројевима. Добићемо на пример низ $0, 1, 2, 3, \ldots, 99\,999, 100\,000$. Разумно је претпоставити да чланови овог низа формирају скуп. Уосталом у канторовским теоријама скупова (а видећемо да то важи и за ову) природне бројеве можемо (на начин како је то урадио Џон фон Нојман) дефинисати тако да је

$$100\,001 = \{0, 1, \ldots, 100\,000\}.$$

Поделимо сада скуп $100\,001$ на две поткласе $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Lj}$, тако да су у $\mathbf{M}$ кодови мајмуна, а у $\mathbf{Lj}$ кодови људи. Како је Чарли мајмун, то $0 \in \mathbf{M}$, а како је Чарлс човек, то $100\,000 \in \mathbf{Lj}$. Отуда је $\mathbf{M} \cup \mathbf{Lj} = 100\,001$, $\mathbf{M} \neq \emptyset$, $\mathbf{Lj} \neq \emptyset$ и $\mathbf{M} \cap \mathbf{Lj} = \emptyset$.



На овом месту Вопенка тврди да класа $\mathbf{Lj} \subset 100\,001$ не може бити скуп (па је отуда полускуп). Јер, вели он, ако би $\mathbf{Lj}$ био скуп, имао би најмањи елемент m који би био кôд неког човека из низа, док би $m - 1$ био кôд мајмуна. Одатле би следило да је син мајмуна човек, што је немогуће. Класа $\mathbf{Lj}$, пак **не мора** имати најмањи елемент, па парадокса нема.

Скупови су формално коначни, односно за њих важи следећих шест аксиома Зермело–Френкелове теорије коначних скупова (коју ћемо краће означавати са $\mathbf{ZF}_{\text{fin}} = (\mathbf{ZF} - \infty) + \neg\infty)$[4]. Првих пет аналитичких аксиома читалац може наћи у одељку *Теорија скупова* (на страни 171), а шеста, хипотетичка представља један облик аксиоме индукције за

[4]Са ∞ је означена аксиома бесконачности (видети одељак *Теорија скупова*; страна 173).

коначне скупове. Из ових аксиома следи негација аксиоме бесконачности, али и обратно, из негације аксиоме бесконачности (и осталих пет аналитичких) следи аксиома индукције за скупове.

Аксиома екстензионалности (једнакости) за скупове

$$\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

Аксиома празног скупа. $\exists_1 x \forall y (y \notin x)$
(Напомена: $\exists_1 x$ = *постоји тачно један* x.)

Уводимо празан скуп, у ознаци $\emptyset$, на следећи начин:

$$x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y (y \notin x).$$

Аксиома пара. $\forall x \forall y \exists_1 z \forall u (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$

Аксиома уније. $\forall x \forall y \exists_1 z \forall u (u \in z \Leftrightarrow u \in x \vee u \in y)$

Дефинишимо операције $\{\ ,\ \}$ (пар) и $\cup$ (унија):

$$z = \{x, y\} \Leftrightarrow \forall u (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y),$$

$$z = x \cup y \Leftrightarrow \forall u (u \in z \Leftrightarrow u \in x \vee u \in y).$$

Следеће две аксиоме односе се на сваку скуповну формулу $\varphi(x)$ (тј. формулу у којој учествују само скуповне промењиве) .

Аксиома регуларности. $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \exists x (\varphi(x) \wedge \forall y \in x \neg \varphi(y))$

Аксиома индукције. $\varphi(\emptyset) \wedge \forall x \forall y (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\})) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$

Аксиома екстензионалности (једнакости) за класе (уопштава одговарајућу аксиому за скупове). $\forall X \forall Y (X = Y \Leftrightarrow \forall x (x \in X \Leftrightarrow \in X))$

Морсеова аксиома. За сваку формулу $\varphi(x)$ која описује неко својство скупова постоји класа чији елементи имају то својство;

$$\exists X \forall x (x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

То нам омогућује да дефинишемо $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. У канторовским теоријама ово је врло снажна аксиома и често се избегава, док је овде пак она нужна јер је значај класа у **AST** већи.

Поставља се питање због чега се у **AST** инсистира на коначним скуповима. Вопенкин одговор је јасан – нигде се у природи не могу срести бесконачни скупови! Међутим, неки од њих су велики па их „у неком смислу“ можемо сматрати (а и сматрамо их у терминологији **AST**) за бесконачне. Конкретније, за бесконачне (у смислу **AST**) скупове сматрамо оне који садрже праву поткласу или другим речима полускуп. Таквих скупова, на основу аксиоме егзистенције правог полускупа, има. Остали су коначни. Према томе, скуп је коначан ако су његове поткласе скупови. Означимо са $\mathrm{Fin}(x)$ чињеницу да је x коначан скуп;

$$\mathrm{Fin}(x) \Leftrightarrow (\forall X \subseteq x)\mathrm{Set}(X).$$

Класа је коначна ако је коначан скуп.

У оквиру **AST** се на сличан начин (као код Кантора) дефинишу природни бројеви. Тако је x природан број ако

$$\forall y \in x \forall z \in x(y \subseteq x \wedge (y \in z \vee y = x \vee z \in y)).$$

Отуда су $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$ природни бројеви. Означимо класу свих природних бројева са $\mathbb{N}$.

Помоћу аксиоме индукције можемо да покажемо да је сваки скуп еквивалентан (мисли се истобројан) са неким природним бројем, тј.

$$\forall x \exists_1 n \in \mathbb{N} \exists f(f : n \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\to}} x).$$

Отуда лако следи да бесконачним скуповима одговарају бесконачни природни бројеви. Ако са $\mathbb{FN}$ означимо класу коначних природних бројева, тада је $\mathbb{FN} = \{n \in N \mid \mathrm{Fin}(n)\}$ и $\mathbb{N} \setminus \mathbb{FN} \neq \emptyset$.

Очигледно је $\mathbb{FN}$ „почетни комад" од $\mathbb{N}$ (тј. прво дођу елементи из $\mathbb{FN}$ па онда бесконачни природни бројеви). Лако се покаже да је, слично као и $\mathbb{N}$, $\mathbb{FN}$ затворен за $+$, $\cdot$ и слично. Такође, важи и нека врста теореме индукције на коначним скуповима

$$(*) \quad (\emptyset \in Z \wedge \forall x \forall y(x \in Z \Rightarrow x \cup \{y\} \in Z)) \Rightarrow \forall x(\mathrm{Fin}(x) \Rightarrow x \in Z),$$

или речима: Ако је Z класа, таква да $\emptyset \in Z$ и $x \cup \{y\} \in Z$, за све $x \in Z$ и све y, тада је сваки коначан скуп елемент од Z.

Ако се уочи $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{FN}$, онда се лако види да је $\forall n \in \mathbb{FN}(n < \alpha)$, па је отуда $0 < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{n}$ за свако $n \in \mathbb{FN}$, тј. $\dfrac{1}{\alpha}$ је очигледно инфинитезимала. Наравно $\dfrac{1}{\alpha}$, слично као и у Канторовој теорији, кодирамо преко појма уређен пар, на пример, $(1, \alpha) = \{\{1\}, \{1, \alpha\}\}$.

У **AST** се затим уводе још три веома значајне аксиоме, које ћемо овде само поменути. То су *аксиома продужења* (пролонгације), *аксиома* *кардиналности* и *аксиома доброг уређења*. Оне нам омогућују да у оквиру **AST** заснујемо и реалне бројеве, полазећи од рационалних, а до којих (мисли се на рационалне) долазимо на сличан начин као и у Канторовој теорији. Овде поред рационалних бројева

$$\mathbb{RN} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\right\}$$

посматрамо и коначне рационалне бројеве

$$\mathbb{FRN} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{FN} \wedge n \neq 0\right\},$$

па због $\mathbb{FN} \subsetneq \mathbb{N}$, имамо и $\mathbb{FRN} \subsetneq \mathbb{RN}$. Монада нуле је

$$m(0) = \left\{x \in \mathbb{RN} \mid \forall n \in \mathbb{FN}\left(|x| < \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Све нам то омогућава да у оквиру **AST** развијемо диференцијално-интегрални рачун, теорију мере и сл.

Рецимо сада на крају нешто о домету ове теорије. На пример, шта је са бројем $10^{10^{10}}$ са почетка наше приче? Да ли је он коначан (тј. $10^{10^{10}} \in \mathbb{FN}$) или није (тј. $10^{10^{10}} \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{FN}$)?

Вопенка разликује ове две могућности. [Наравно, није овде само у питању $10^{10^{10}}$ већ било који „конкретан“ (тј. изражен преко цифара и аритметичких операција) број.] На нашу и Вопенкину жалост (али не и свих математичара) засада елементи из скупа $\mathbb{N} \setminus \mathbb{FN}$ су тек неки неодређени бројеви α, β и сл. Само у том случају, засада постоји задовољавајућа теорија, а главни кривац за то је, нама свима тако драга, аксиома индукције, овде конкретно дата више у облику своје последице – теореме $(*)$.

$*\quad *\quad *$

Да погледамо сада поближе како се формирају аритметичке операције. Све се оне дефинишу рекурзивно (тј. индуктивно). Најједноставнија од њих – сабирање – своди се на додавање јединице или, другим речима, бројање:

$$a + 0 = a, \qquad a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

Множење се своди на сабирање: $a \cdot 0 = 0,\ a \cdot 1 = a,\ a(b+1) = ab + a$. Степеновање на множење: $a^0 = 1,\ a^1 = a,\ a^{b+1} = a^b \cdot a$. За последицу имамо важење алгебарских закона (на пример, $a(b+c) = ab + ac$, $a + b = b + a$ итд.), али и

$$\forall a, b \in \mathbb{FN}(a + b, a \cdot b, a^b \in \mathbb{FN}),$$

а тиме и $10^{10^{10}} \in \mathbb{FN}$.

Али ми можемо ићи и даље, па увести нову операцију, коју ћемо назвати „солитирање", а која ће се, слично претходним, свести на степеновање

$$aS0 = 1,\ aS1 = a,\ aS(b+1) = a^{aSb}.$$

Тако је

$$5S6 = 5^{5^{5^{5^{5^{5}}}}},$$

што је прилично велики број, али такође припада $\mathbb{FN}$.

Ако ову последњу операцију напишемо мало општије (уместо aSb са $S(a,b)$), тада можемо добити још брже растућу функцију d:

$$d(a,0) = 1,\ d(a,1) = a,\ d(b+1) = S(a, d(a,b)).$$

Тако је, на пример, $d(10,3)$ „кула" која има укупно

$$\left.10^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}\right\}10$$

спратова броја 10.

Наравно, можемо да дефинишемо све брже и брже растуће функције, тако да се следећа дефинише преко претходне:

$$d_{n+1}(a,0) = 1,\ d_{n+1}(a,1) = a,\ d_{n+1}(a, b+1) = d_n(a, d_{n+1}(a,b)).$$

Тај низ функција можемо покрити једном функцијом са три аргумента $d(n,a,b) = d_n(a,b)$ и онда поставити питање какав је број

$$t = d\left(10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}\right).$$

Једино што о њему на основу $(*)$ можемо да знамо је да је коначан, тј. елемент класе $\mathbb{FN}$!!

Очигледно је да ако желимо да неки „конкретан“ број (као што је на пример овај последњи) буде бесконачан (у смислу **AST**) морамо се одрећи индукције из које следи $(*)$.

Међутим, напустити индукцију у теорији коначних скупова (а то је исто што и аритметика) значи лишити се универзалне методе за доказивање свих битних карактеристика скупова (односно бројева). Могући пут би био да се замени ова „пуна“ индукција неком својом слабијом варијантом, али и да се узму значајне и важне последице „пуне“ индукције, које ипак немају довољну јачину из које би следило да је на пример t коначан број. Пут у овом правцу већ је направио амерички математичар Јан Мисељски [30] (видети страну 228). Колико далеко се може отићи не знамо.

Како је и зашто „пропао“ предикатски рачун другог реда

Више пута, до сада, смо разматрали предикатски рачун првог реда (видети и страну 151). Тај рачун од тридесетих година XX века заузима централно место у оквиру математичке логике. Многи „нелогичари“, а који знају понешто о математичкој логици, сматрају га за једини (логички систем). Чак се и наставак „првог реда“ због тога често избацује.

Али није увек било тако! До почетка XX века предикатски рачун првог реда водио је оштру борбу за изражајнијим тзв. **предикатским рачуном другог реда** (страна 189). Међутим, убрзо се увидело да тај рачун *нема* а предикатски рачун првог реда *има* неке добре особине, веома важне за примену логике.

Па какав је тај предикатски рачун другог реда? За разлику од предикатског рачуна првог реда (краће ПРПР), предикатски рачун другог реда (краће ПРДР) дозвољава квантификовање по релацијским и функцијским симболима, што га већ на први поглед чини надмоћним.

Тако, на пример, ако би се $X(x)$ „интерпретирало“ као „елемент x је у релацији X“ и слободније записивало са $x \in X$, онда би формула $\exists X \exists x\,(x \in X)$ била тачна у свакој структури чији је универзум непразан, док би формула $\exists X (x \in X \wedge x \notin X)$ увек била нетачна.

Надаље, формула $\exists \prec (11 \prec 2)$ је тачна у природним бројевима (довољно је узети обрнути поредак: $a \prec b$ акко $b < a$, где је $<$ „природни“ поредак природних бројева), док је $\forall \prec (1 \prec 2)$ нетачна (узети исти поредак из претходног примера који „фалсификује“ важење дате формуле).

Појављивање како ПРПР тако и ПРДР се историјски гледано везује за проблем заснивања математике који се тако снажно појавио у другој половини XIX века. Посебно се то односи и на проблем аксиоматизације структуре природних бројева, као основе за даља заснивања.

Познати италијански математичар Ђузепе Пеано (1858–1932) је крајем XIX века дао следећу аксиоматизацију природних бројева (коју и данас већина сматра као савршену и завршену).

Аксиома 1. Ниједан број нема нулу као наследника (наследник броја n је $n + 1$).

Аксиома 2. Два различита броја имају два различита наследника.

Аксиома 3. Ако неко својство S важи за нулу и ако кад год важи за n важи и за $n+1$, тада S важи за сваки природан број.

Све ове три аксиоме чине тзв. Пеанову аритметику другог реда.

Прихватању и популаризацији Пеанове аксиоматизације веома је допринео Ричард Дедекинд.

Прве две Пеанове аксиоме прилично су једноставне и никада нису довођене у питање. Са трећом је ипак другачије. Да бисмо њу до краја сагледали уведимо појам индуктивног скупа. Кажемо да је скуп бројева I индуктиван ако

1. $0 \in I$,
2. $n \in I$ повлачи $n+1 \in I$.

Тако су и скупови $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ индуктивни (као и многи други).

Аксиома 3 управо тврди да је $\mathbb{N}$ најмањи индуктиван скуп, тј. садржан у сваком другом индуктивном скупу. Као „прву апроксимацију", аксиому 3 можемо записати са

$$\mathbb{N} = \bigcap \{X \mid \text{„}X \text{ је индуктиван"}\}$$

или као

$$\forall X\,(\text{„}X \text{ је индуктиван"} \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)\,.$$

Коначно у ПРДР аксиома 3, која сада „буквално" тврди да нема мањег индуктивног скупа од $\mathbb{N}$, гласи

$$(\Delta) \qquad \forall X\,((0 \in X \wedge \forall x\,(x \in X \Rightarrow x+1 \in X)) \Rightarrow \forall x(x \in X))\,.$$

Аксиома 3 се иначе назива *аксиома индукције* и представља основу за сваки доказ тзв. математичком индукцијом.

Данас је језик за Пеанову аритметику нешто шири. Додаје се константа за нулу 0 (и нула се сматра за природан број), ознаке за две нове операције $+$ и $\cdot$, као и релацијски симбол $\leqslant$.

Поред аксиоме индукције (Δ), Пеанова аритметика другог реда садржи данас и следећих шест аксиома првог реда.

(1) $\forall x(s(x) \neq 0)$ (Нула није следбеник.)
(2) $\forall x(\forall y)(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$ (Следбеник је јединствен.)

$$\left.\begin{array}{l}(3)\ \forall x(x+0=x)\\ (4)\ \forall x\forall y(x+s(y)=s(x+y))\end{array}\right\}\text{(аксиоме сабирања)}$$

$$\left.\begin{array}{l}(5)\ \forall x(x\cdot 0=0)\\ (6)\ \forall x\forall y(x\cdot s(y)=x\cdot y+x)\end{array}\right\}\text{(аксиоме множења)}$$

Прве две аксиоме су директно прве две Пеанове аксиоме. Помоћу њих Пеано је „индуктивно“ (често кажемо и рекурзивно) дефинисао сабирање и множење. Данас се то ради експлицитно (директно) преко парова аксиома (3), (4) и (5), (6). Све „добре“ особине за $+$ и $\cdot$, као што су на пример закони комутативности и асоцијативности, доказују се коришћењем аксиоме (Δ). Поредак (тзв. природни) природних бројева је изразив (кажемо дефинабилан) са

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z(y = x + z).$$

Поред константе 0, важни су и изрази (терми) $s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$ које редом означавамо са $\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \ldots$ и називамо их нумералима. То показује да је већ у нашем језику садржан скуп природних бројева.

Тако се лако могу доказати теореме типа: $\underline{2} + \underline{2} = \underline{4}$, $\underline{3} < \underline{5}$, $\neg \underline{3} < \underline{2}$ и слично. Такозвани *комплетни дијаграм* за скуп природних бројева (кад изоставимо цртицу испод).

Овде се крије једна велика опасност. Неко би могао рећи: „Па узмимо баш тај скуп $\underline{\mathbb{N}} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots\}$ за 'стандардни скуп природних бројева'. Међутим, ту се крије типичан пример логичке грешке под називом „врћење у круг“ (или латински circulus vitiosus). Ми не можемо природне бројеве дефинисати користећи природне бројеве, тако да неко посебно сазнање „о три тачке“ (тј. ...) на тај начин не добијамо. У сваком случају не можемо знати да ли је $\underline{\mathbb{N}}$ (или њему изоморфни $\mathbb{N}$; изоморфизам $n \mapsto \underline{n}$) најмањи индуктиван скуп!

Претпоставља се да аксиома математичке индукције уз помоћ осталих двеју аксиома не само важи већ и до краја (рекло би се категорички, до на изоморфизам и сл.) описује структуру природних бројева $\mathbb{N}$, али и свих његових подскупова $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Та чињеница се записује

$$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant) \models \text{„аксиома индукције“},$$

где је $s(\,)$ операција додавања јединице. Очекивало се да ниједна друга структура не задовољава аксиоме природних бројева, али и да се из тих аксиома (у оквиру ПРДР) може извести свако тврђење о природним бројевима.

Да би се то показало, нужно је било прво доказати такозвани **став потпуности** за ПРДР који гласи (примењен на Пеанову аритметику)

(∗) Све што важи за $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant)$ и изразиво је у ПРДР, може се доказати из Пеанових аксиома другог реда,

или симболички

$$(*) \qquad (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant) \models \varphi \text{ акко } \mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \varphi,$$

где је $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$ скуп од наведене три Пеанове аксиоме и φ произвољна затворена формула (реченица) у ПРДР.

Међутим, као што ћемо ми ускоро показати нити је могуће категорички, тј. јединствено описати природне бројеве, нити је могуће доказати релацију $(*)$. И то обе ствари следе једна из друге.

Доказ да не постоји став потпуности за Пеанову аритметику (па тиме и у општем случају) еквивалентан је са пропашћу покушаја да се до краја опишу природни бројеви.

Па да видимо сада мало поближе како се то може показати. Означимо са T скуп (затворених) формула у ПРПР или ПРДР који може бити и бесконачан. Кажемо да је T непротивречан ако се из њега не може (у коначно много корака) извести из аксиома помоћу правила извођења контрадикција $\varphi \wedge \neg\varphi$ (где је φ произвољна формула). То записујемо $T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$. А ако, насупрот, из T доказујемо $\varphi \wedge \neg\varphi$, онда је T противречна. Пример противречне теорије је $T = \{\varphi, \neg\varphi\}$.

Даље, кажемо да T има модел ако постоји структура (модел) $\mathfrak{A}$ у коме ће бити испуњена свака формула из T. Тако, на пример, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant)$ чини модел за све Пеанове аксиоме.

Основни став који се очекује у једној логици је **став потпуности**, који повезује непротивречност и постојање модела.

Став потпуности. Скуп формула T је непротивречан ако и само ако има модел.

Последица (Слаб став потпуности). Затворена формула φ је доказива ако и само ако је ваљана, односно тачна у сваком моделу. Симболички то пишемо: $\vdash \varphi$ акко $\models \varphi$. Значи истинитост (ваљаност) треба да се поклопи са доказивошћу!

Даље, ако логика задовољава став потпуности и сви могући докази су коначни тада важи, за примену логике, следећа веома значајна теорема.

Став компактности. Скуп формула T има модел ако и само ако сваки коначан подскуп од T има модел.

Доказ. Очигледно ако T има модел, тада ће и сваки коначан подскуп имати модел.

С друге стране, ако је T противречан скуп, онда $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ (тј. из T се доказује контрадикција). Због коначности доказа та се контрадикција може извести из неког коначног скупа $T_0 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset T$ (пишемо $T_0 \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$). Али то значи да T_0 нема модел, јер би у супротном и све последице од T_0 биле тачне у том моделу, па и $\varphi \wedge \neg\varphi$. То, наравно, није могуће.

Пример једне „добре“ логике је, како је то показао 1930. године Курт Гедел, ПРПР. Та чињеница, да за ПРПР важи став потпуности, као и немогућност тако нечега (што ћемо ускоро показати) за ПРДР, означио је победу ПРПР над ПРДР.

Па да видимо, коначно, како је показано да се став потпуности не може доказати. У том циљу формулишимо прво како би **проширени став потпуности за Пеанову аритметику** (али слично и шире) **у оквиру ПРДР гласио**:

(⋆) Нека је дат скуп формула T у оквиру ПРДР. Скуп T је непротивречан акко T има модел $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s(\,), 0, +, \cdot, \leqslant, \ldots)$, где је $\mathbb{N}$ скуп „стандардних природних бројева“, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (пун) партитивни скуп од $\mathbb{N}$ (тј. садржи *све* подскупове од $\mathbb{N}$), а три тачке су резервисане за додатне константе које се, као што ћемо видети, могу појавити.

Моделе типа које смо управо навели у $(\star)$ називаћемо „стандардан модел за $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$“.

Сада ћемо доказати, што је мало необично, да $(\star)$ не важи, а не да важи. То ћемо урадити тако што ћемо из претпоставке да $(\star)$ важи доћи до контрадикције (позната математичка метода свођења на противречност – reduction sub absurdum).

Нека је сада $T = \mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \cup C$, где је $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$ скуп свих шест аксиома за Пеанову аритметику другог реда и $C = \{\underline{0} < c, \underline{1} < c, \underline{2} < c, \ldots\}$. Уочимо $T_0 \subsetneq T$, тако да је T_0 коначан. Онда он очигледно садржи као подскуп $\{\underline{n_1} < c, \ldots, \underline{n_k} < c\}$, где је $\{n_1, \ldots, n_k\}$ коначан подскуп од $\mathbb{N}$. Нека је $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\} + 1$. Тада ће очигледно T_0 бити задовољен у стандардном моделу за $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$ ако се c интерпретира као m. На основу става компактности (који је последица од претпостављеног $(\star)$) и читав T има стандардни модел.

Међутим, са друге стране, у том добијеном моделу (интерпретација за) c се понаша као „бесконачан" елемент већи од свих коначних (стандардних) природних бројева. Значи, универзум модела (означимо га са $^*\mathbb{N}$) садржи $\mathbb{N}$ као *прави* подскуп. Што је још горе, аксиома (Δ) не важи, зато што сам универзум $^*\mathbb{N}$ није најмањи индуктиван скуп (мањи од њега је $\mathbb{N}$). Контрадикција. Значи, не важи теорема $(\star)$.

Одатле се може закључити да не постоји жељени потпун и једнозначни опис природних бројева у ПРДР.

Да ли су математички логичари дигли руке од природних бројева? Ни најмање. Истраживања су текла у два правца. Прво, појам модела је ослабљен (релаксиран). Не захтева се да универзум $^*\mathbb{N}$ буде баш $\mathbb{N}$, нити да се унарни предикати интерпретирају преко свих подскупова од $^*\mathbb{N}$ већ само њиховог дела. На тај начин настављена су истраживања у оквиру ПРДР.

Други правац је још значајнији. Уместо ПРДР прешло се на ПРПР. Аксиома (Δ) замењена је са

$$(\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))) \Rightarrow \forall x\,\varphi(x),$$

где је $\varphi(x)$ формула у језику $\mathcal{L} = \{s(\,), +, \cdot, \underline{0}, \leqslant\}$. На тај начин добијен је бесконачан скуп аксиома. Очигледно да се овде уместо „свих индуктивних скупова" разматрају само тзв. *дефинабилни*, тј. типа $X = \{x \mid \varphi(x)\}$. То је доста ужа класа (чак „само" пребројива).

Нова аритметика означена је са **PA** и постала је предмет интензивних истраживања све до данас. Ипак, до најважнијих (негативних) резултата дошао је Гедел (30-их година XX века), а што ће бити тема одељка *Чувене Геделове теореме непотпуности* (страна 185).

Он је показао да не само што немамо јединственост природних бројева (тј. што год рекли о њима, то важи и за неке друге бројеве (па ма шта били они и ти други)) већ ни потпуност. [Могуће је наћи φ тако да $\mathbf{PA} \nvdash \varphi$ и $\mathbf{PA} \nvdash \neg\varphi$.] Парис и Харингтон су пре тридесетак година пронашли „чисто математичко" тврђење (из комбинаторике) које је у **PA** неодлучиво, тј. ако то тврђење означимо са ψ, онда је $\mathbf{PA} \nvdash \psi$ и $\mathbf{PA} \nvdash \neg\psi$.

Тако, непотпуност се не односи само на „ишчашена“ Геделова тврђења типа „ја сам недоказиво тврђење“ већ и на важне математичке ставове. Што је још горе, та се ситуација не може поправити додавањем нових аксиома на задовољавајући начин (што је такође показао Гедел).

Иако Геделови (а и други) резултати изгледају, на први поглед, као пораз математике (па тиме и људских могућности уопште), математичари су убрзо претворили штету у корист. Разним питањима из основа[5] аритметике баве се данас многи истакнути математичари. Једне занима коју сазнајну вредност можемо дати теоремама (не обавезно аритметичким) зависно од средстава којима је доказана. Други се баве питањима везаним за постојање (или непостојање) поступака израчунавања, а што је у директној вези са рачунарством (computer science). Треће занима нешто треће.

Ни ПРПР није више јединствен! Појављују се поново (или су после 50-их година XX века тек створене) многе логике које по (изражајним) могућностима леже између ПРПР или ПРДР, али су „добре“ (имају **став потпуности**, **став компактности**, не баш увек и не баш у оној форми коју смо дали, и слично). Једну од таквих логика, тзв. Ω-логику, за коју се још увек не зна да ли је „добра“, увео је недавно и један од највећих математичара у области теорије скупова (поред наших Стеве Тодорчевића и Бобана Величковића) Вудин. Она се показује као кључна у решавању једног од најважнијих проблема математике – *проблем континуума* (тј. „Да ли је $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ прва непребројива кардиналност?“).

[5]Овде *основе* не значе најлакши већ најтежи део математике.

Истина као што су „два и два четири“ (или уместо Поговора)

Врло често се може чути фраза: „то је тачно, као што су два и два четири“ или „то је истина као што је један плус један једнако два“ или „то је *математички тачно*“ и слично. За обичног човека (тј. нематематичара), као и за већину математичара (неоптерећених филозофским питањима) математика је узор науке која барата са „вечним“ и „непролазним“ истинама. А у ствари веома је спорно и сложено питање колико се у математици уопште бавимо питањима као што су *истинито* и *тачно* (Ти појмови су у доброј мери данас замењени појмом *доказивости*.)

Наравно, то да је „$1 + 1 = 2$“ или „$2 + 2 = 4$“ (а зачудо не и да је „$2 + 1 = 3$“) највише користе они који треба да убеде неког у исправност својих (најчешће неубедљивих) ставова, а то су у првом реду политичари. Али ту се манипулише и са једном много дубљом људском потребом, а то је потреба за **поузданом истином, извесношћу** и **сигурним знањем**. (Ту спада и оно познато Декартово: „Мислим, дакле постојим.“.) Тражи се такозвана „тачка ослонца“, нешто поуздано од чега може да се крене. По многима је то математика, која даје извесност нашег знања пре свега у односима између узрока и последица.

Ми желимо да полемишемо о овој „неприкосновености математичких истина“ и укажемо на то да ни у математици није све баш „тачно као што је $2 + 2 = 4$“.

Наравно, у математици чак не мора бити ни $2 + 2 = 4$, већ на пример: $2 + 2 = 0$. Али то је из тривијалног разлога, јер је у питању једно друго сабирање (по модулу 4, често означено са $+_4$). [Бројеви m и n се сабирају тако што се прво обично саберу на уобичајен начин, па се затим збир $m + n$ подели са 4 и за резултат новог сабирања (по модулу 4) узме остатак при том дељењу.] Али ако се изузме то ново сабирање по модулу неког броја (на пример 4) које само донекле има везе са обичним сабирањем, а које је, узгред буди речено, и само примењено у пракси (рецимо сати се сабирају по модулу 12 или 24) остаје као ч и њ е н и ц а да је $2 + 2 = 4$.

Међутим, велики Лајбниц је ипак имао потребу да то докаже!!!

Нема никакве сумње да је прва математичка операција било бројање; да је сабирање проистекло из бројања, па самим тим и $2+2 = 4$. Шта је па то Лајбниц уопште урадио? Па управо је формализовао тај поступак и истинитост трансформисао у доказивост!?!

Он је пошао од бројања (и његовог одговарајућег записивања) и утврдио (у облику аксиома) да је $1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, \ldots$ Тада је из особина једнакости (схваћене као конгруенције) и додатне аксиоме (о сабирању из бројања) $x+(y+1)=(x+y)+1$ доказ извео на следећи начин:

$$2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4.$$

И читалац може на сличан начин, додуше преко мало компликованијег низа, доказати и да је $5+7=12$. Али, одакле нама знање да је $2+2=4$ предмет је расправе (најкасније) од Канта па до данас и у ту расправу нећемо се превише упуштати.

Наводимо само, примера ради, два супротстављена мишљења. Прво је логичара-индуктивисте (у основи емпиричара) Џона Стјуарта Мила[6], који каже да ни аритметичке истине „не могу, нити смеју, по својим начелима, бити другачије од општих ставова искуства. Настале су из емпиријске генерализације, па морају стално бити сводљиве на одређена физичка чињенична стања. Сви аритметички искази су искази о односима материјалног света који нас окружује, па су, према томе, у истом смислу случајни и променљиви као и ти односи. Неко друго окружење, у којем би човек растао, не би му донело само неку другу физику или геометрију него и неку другу аритметику. Стога, не само да није немогуће него је и вероватно да би на неком другом небеском телу, рецимо на Сиријусу, важили другачији 'закони бројева' него на нашој Земљи – да ту 2×2 не би било једнако четири, него би било једнако пет.“

На овакво мишљење „окомио се“ велики немачки филозоф (и један од оснивача математичке логике) Фреге. По њему, схватања какво је Милово, које у броју не види строг **појам** него само „представу“ људског духа, и који га, стога, срозава у круг пуког субјективнога, никада не може да доведе до истинског изграђивања учења о бројевима: такво схватање мора да остане при „аритметици медењака и облутака“...

„Искази о броју и искази о ствари су, по свом смислу, међусобно раздвојени; онај ко мишљење једних помеша са мишљењем других није образложио аритметику, него њено постојање није спознао, и кривотворио га је.“

---

[6]Преводио га је, између осталих, и Петар I Карађорђевић.

По нашем мишљењу (а оно је доста распрострањено) знање (па и аритметичко) потиче из искуства. Али када се појмови, преко судова, једном дају они дефинишу и постају a priori. То се најбоље види на примеру $2 + 2 = 4$. Поуздано је да смо до ове чињенице дошли бројањем и сабирањем (у смислу скупљања) неких једнородних предмета, на пример штапића. Међутим, ми затим можемо да изградимо „формалну" аритметику (што је, као што смо видели, први учинио Лајбниц) где на основу неких унапред (a priori) задатих правила доказујемо да је $2 + 2 = 4$. Даље развијање формалне аритметике доводи нас до такозваних нестандардних модела и богаћења нашег знања о могућим облицима бесконачности, што надилази наша непосредно могућа искуства. Ипак, значајно је и одлучујуће овде истаћи да је могућа непротивречна „аритметика" у којој би важило да је $2 + 2 = 5$, али она није од интереса зато што нема „модел" који колико-толико има везе са неким нашим нетривијалним искуством. Наравно, у модерној фази развоја математичких теорија инспирација за увођење нових дефиниција и аксиома често се црпе из првобитних, мање апстрактних, математичких теорија, а не из непосредне и нематематичке праксе, што је често у стању да завара и неке савремене филозофе да забораве на емпиријско порекло математике.

Занимљиво је још навести Раселово мишљење да је наше знање о $2 + 2 = 4$ **вербално**. Другим речима „два и два су четири" научили смо као песмицу, још давно код учитељице. Слично је и са оним фразама типа: „испред заграде минус у загради настаје мењање". Вербално знање, постаје шаблонско и онда из неког (вероватно психлошког) разлога *делује* као апсолутно и непромењиво.

Математичари су, развијајући своју науку, пошто су, на овај или онај начин, утврдили да је $2 + 2 = 4$ и $3 \cdot 3 = 9$, отишли корак напред и утврдили понешто о **свим** (шта год то значило) природним бројевима!

Једно од првих тврђења је било да је $a + b = b + a$, где су a и b природни бројеви. Поставља се питање, одакле нама то знање и како да убедимо себе и друге да нисмо можда погрешили. Наравно, када су у питању мали бројеви (као што су, на пример 1, 5, 7, 12, 17 и сл.), онда се срачунавањем збирова, са леве и десне стране једнакости, лако утврђује идентитет. Применом рачунара, у даље важење тврђења се још више убеђујемо. Али ми врло добро знамо да постоје „супер велики бројеви" чије збирове никако (и никада?) не можемо да нађемо.

Даљи развој аритметике, а у циљу потврђивања важења (између осталих и) закона комутативности довео нас је до принципа (а касније и аксиоме) индукције. Али важење индукције, као што смо видели, није ништа мање проблематично и претпоставља, бар на почетку, могућност достиживости (израчунљивости) сваког природног броја.

Међутим, методичари, у жељи да нас убеде да је стварно $a+b = b+a$, користе један „оглед“ који желимо да доведемо у питање. Наиме, по њима, ако станемо између две кутије тако да у левој буде m а у десној n куглица њихов укупан збир биће $m + n$. Ако се пак окренемо за $180°$, онда ће кутије да измене места, лева ће постати десна и обратно, те ће укупан збир бити $n + m$. Како се са кутијама (и куглицама у њима) ништа посебно није десило, то закључујемо да је $m + n = n + m$. Шта овде не ваља?

Па показаћемо да постоји једна врста бројева за коју ова прича не важи. То су такозвани ординални бројеви. Они, поред кардиналних бројева (који се узгред буди речено у савременој теорији скупова сматрају (и посматрају) као посебан случај ординалних), представљају „природно проширење“ природних бројева на бесконачност. Тако иза $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$, дође $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; први бесконачан ординал. Величина ординалних бројева одређена је поред „скупа носача“ и релацијом поретка на њему која мора бити добро уређење (тј. да сваки непразан подскуп носача има најмањи елемент).

Два ординала $(\alpha, \leqslant)$ и $(\beta, \preccurlyeq)$ су једнака, ако постоји $f : \alpha \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \beta$, тако да је $\forall x \in \alpha \forall y \in \alpha (x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y))$. Приметимо да нам оваква дефиниција једнакости ординала омогућава да неки ординал посматрамо над различитим скуповима носачима. Тако, на пример, ординал $(\alpha, \leqslant)$ је једнак ординалу $(\alpha \times \{\star\}, \boxed{\leqslant})$, при чему је уређење $\boxed{\leqslant}$ дато са

$$(a, \star) \boxed{\leqslant} (b, \star) \text{ акко } a \leqslant b \quad (a \in \alpha, b \in \beta).$$

Збир два ординала $(\gamma, \leqslant)$ и $(\delta, \preccurlyeq)$ једнак је ординалу

$$(\gamma \times \{0\} \cup \delta \times \{1\}, \lhd),$$

при чему се поредак $\lhd$ поклапа са $\boxed{\leqslant}$ на $\gamma \times \{0\}$, поклапа са $\boxed{\preccurlyeq}$ на $\delta \times \{1\}$ и сваки елемент из $\gamma \times \{0\}$ је $\lhd$-мањи од сваког елемента из $\delta \times \{1\}$.

Када је јасно о ком поретку је реч, уместо $(\alpha, \leqslant)$ пишемо само α. Тако, под ординалом ω подразумевамо да је на њему „природан“

поредак $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$ Такође, $\omega + 1$ означава ординал, за који је $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{*\}$ и $0 < 1 < 2 < \cdots < *$. Јасно је да је $1 + \omega = \omega$ (довољно је пресликати $* \mapsto 0$, $0 \mapsto 1, \ldots, n \mapsto n + 1$), а **није** $\omega + 1 = \omega$ (зато што $\omega + 1$ има највећи елемент, а ω га нема). [Тачније, али то за нас није битно, $\omega \lneqq \omega + 1$.]

Наравно, неко може ставити примедбу на ово наше разматрање и рећи да у кутији не може бити бесконачно куглица. Други, нешто озбиљнији, рећи ће да пошто је у питању и поредак, променом нашег положаја мењамо и њега те се не може очекивати исти резултат.

Међутим, иако су ове примедбе врло озбиљне оне иду, генерално, само нама у прилог пошто ми и хоћемо да доведемо у питање наше математичке генерализације као што су на пример ординални и кардинални бројеви! (У смислу да су истините као што је „2+2=4“.) Са друге стране, овај методички оглед, ипак би требало да буде довољно општи и да нас a priori (или нужно) доведе до оног што му је намера, тј. комутативности, а што он („на жалост“ оних који га пропагирају) не постиже.

Значи ли то да ми сумњамо да је $a + b = b + a$? Наравно **не**. Ми само желимо да кажемо да то **није** „истина као што су два и два четири“.

Али наше удаљавање од истине тек почиње! Видели смо да један пут од природних бројева води до ординалних и кардиналних бројева. Други, пак, води преко целих и рационалних бројева до реалних бројева.

Као што је познато целе бројеве $((\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1))$ уводимо да бисмо решили једначину $x + 3 = 2$, а рационалне $((\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1))$ да бисмо решили једначину $3 \cdot x = 2$ (која је у вези са поделом јабуке на три детета). Ипак, у односу на аритметику (природних бројева) са $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не долази до нових, сазнајних проблема. Међутим, ствар се радикално мења са појавом скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. Видели смо, како је већ појава $\sqrt{2}$ (тј. решења „сасвим природне“ једначине $x^2 = 2 = 1^2 + 1^2$ везане, преко Питагорине теореме, за једнакокрако-правоугли троугао) изазвала буру у грчкој математици. Али то и није чудно, ако се зна да је у њему (тј. $\sqrt{2}$) као појединачном броју (а не као до сада везано за скуп $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$) већ садржана (пребројива) бесконачност!?! Наиме у децималном развоју броја $\sqrt{2} = 1,41\ldots$ **хаотично** (тј. непериодично) појављује се пребројив низ цифара. Геометријски речено он се никако не може самерити (без остатка) са јединицом или неким њеним (n-тим) делом.

Ипак, главни проблем настаје увођењем свих реалних бројева. Његова сврха би била да се на елегантан и што мање компликован начин реше многи проблеми од Зенонових парадокса до проблема везаних са летом у космос. [Други пут води преко инфинитезимала, о чему смо писали.] Они су постали прави рај за људе који се баве математичком анализом. Многи су посебно поносни на јединственост, до на изоморфизам, реалних бројева. [О томе да су реални бројеви јединствени до на јединственост природних, а да се јединственост ових последњих може довести у питање, већ смо писали.] То повећава веру у њихову „реалност", иако су препуни безличних и беспредметних (тј. који не говоре ни о чему) „трансцендентних" бројева.

Крај XIX века био је веома интензиван и пун контроверзи у развоју математике и посебно у односу на питања везана за основе математике. Појава величанствене Канторове теорије скупова, у том периоду, по доста раширеном мишљењу међу математичарима, представља најзначајнији допринос у том периоду. Кантор је успео да створи један „нови свет", свет коначних и бесконачних скупова, оквир (додуше прилично прероширок) за изградњу скоро читаве математике. Најинтересантнија новина, у односу на сву дотадашњу математику, представља његово „откриће" да постоје „веће" и „мање" бесконачности!!? То се већ појављује у односу „пребројиве бесконачности" скупа природних бројева $\mathbb{N}$ и континуума реалних бројева $\mathbb{R}$.

Кантор показује својом чувеном методом дијагонализације да се скуп реалних бројева не може поређати у низ (тј. не може пребројати; односно обострано једнозначно пресликати на $\mathbb{N}$).

Покушаћемо сада да размотримо шта Кантор претпоставља, како доказује и шта је то што закључује. Наравно, нас овде занима смисао свега тога. Једна од општих *метаматематичких* (и метафизичких) Канторових претпоставки је да се природни бројеви могу поређати у низ. Наравно, ни Кантору нити иком другом није пало на памет да то проба. Свакоме је јасно да процес ређања бројева не можемо неограничено убрзавати, а такође нисмо ни бесмртни. Зато је у питању само једна од *мисаоних идеализација*, те ту „Канторову претпоставку не можемо сматрати истинитом као што су два и два једнако четири". Зато Канторово тврђење: *Реални бројеви се не могу поређати у низ*, неком може изгледати тривијално тачно, јер ионако мањи скуп природних бројева не можемо исписати.

Размотримо сада Канторов доказ који је изузетно једноставан (а генијалан) и леп.

Довољно је посматрати реалне бројеве из интервала $[0, 1]$ дате у децималном развоју, при чему искључујемо могућност да се у децималном развоју броја, почев од неког места, појављују само деветке.

Претпоставимо да их можемо поређати у низ.

$$\begin{array}{ll} 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 \ldots & a^1 \\ 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 \ldots & a^2 \\ 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 \ldots & a^3 \\ \vdots & \end{array}$$

[У питању је бесконачна „матрица“ код које је једино горњи леви угао коначан. Врсте представљају бесконачне децималне развоје реалних бројева из $[0, 1]$.]

Конструишимо сада нови број $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ из $[0, 1]$ који не припада овом низу. Бирамо b_1 тако да се разликује од a_1^1, b_2 тако да се разликује од a_2^2 итд. У питању је, данас већ чувени, процес дијагонализације где се различитост постиже на елементима дијагонале $a_1^1, a_2^2, a_3^3, \ldots, a_n^n, \ldots$

Како смо добили број који није у низу, претпоставка да реалне бројеве можемо поређати у низ пропада, тј. не можемо их поређати у низ. Отуда је закључак да је бесконачност реалних бројева већа од бесконачности природних бројева.

Овај кратак и елегантан Канторов доказ најјаче је место у тријади: претпоставка, доказ, последица (тврђење). Он није директан, у питању је свођење на противречност, али има „конструктиван део“ који се састоји у „дијагоналном поступку“ бирања новог елемента. Овај поступак у ствари представља нову методу која је нашла значајну примену и у другим деловима математике.

Закључак до кога долази Кантор је био шокантан за ондашњи математички свет! Вековима су највећи светски умови расправљали да ли постоји било каква бесконачност (о чему смо већ понешто и ми писали раније). Наравно да и онима који су признавали бесконачност није падало на памет да их има различитих (а упоредивих). [Овде се наравно не мисли на бесконачности различитог типа као што су: Бог, свемир и $\mathbb{N}$.]

Сама *Канторова дијагонална метода* има за последицу два шокантна резултата у теорији скупова. Први је да различитих бесконачности има не само бесконачно, него чак толико много да не могу све заједно да формирају скуп!!! А други је да (ако претпоставимо да не важи континуум хипотеза, тј. да бесконачност од $\mathbb{R}$ није прва већа бесконачност од бесконачности од $\mathbb{N}$) онда бесконачност од $\mathbb{R}$ може да буде „скоро било која" из поменутог „обиља" бесконачности!!!!! Наравно, све зависи од „могућег света" у коме се налазимо (тј. одговарајућег математичког модела).

Постоје и други начини (рецимо преко тзв. аксиоме избора; да не помињемо друге мање познате аксиоме) да се убедимо да о нама, наизглед, тако блиским реалним бројевима, знамо тако мало. Или тако много, ако хоћете!?! Неко, разочаран у оно што је управо чуо, могао би да ускликне (речима Хераклита Мрачног): „Знање многих ствари не доприноси истини". [Узгред, Хераклитова поента је била друга: опањкавање Питагоре.]

Једно је сигурно. Расел је био у праву. Ми све мање истражујемо стварни свет, а све више могуће светове (међу којима, можда, у неком и живимо). Можда је сада читаоцима јасније, што се, вероватно почев од Лајбница, појам истине све више у математици замењује доказивошћу.

Дилеме више нема – није све у математици „истина као два и два су четири", осим наравно $2 + 2 = 4$.

Завршна напомена. Ако ова прича личи некоме на кување „клин--чорбе", сличност је случајна.

ДРУГИ ДЕО

НА ПОЧЕТКУ БЕШЕ РЕЧ

Приказ разних математичких теорија које су поменуте у првом поглављу књиге започећемо једним општим проблемом, који се можда не уклапа у уобичајену слику о математичким проблемима, бар не ону коју углавном већина створи учењем математике. Реч је о проблему који је тесно повезан са великим бројем истраживања у савременој математици (алгебри, логици или геометрији, на пример), али и рачунарству (computer science).

Такође, на почетку овог дела књиге који углавном чине математички текстови, покушаћемо бар мало да дочарамо снагу математике и њених апстрактних идеја, али и да укажемо на чињеницу да је математика „жива“ и увек „млада“ наука и да нуди веома велики простор за нова истраживања.

Трансформације речи. Претпоставимо да је задат неки *алфабет* и посматрајмо све коначне низове ових симбола (слова) – *речи*. Речи не морају саме по себи имати икакво значење. Нека је задат и известан коначан списак међусобно еквивалентних речи који ће нам омогућити да делове било које речи, који су такође неке речи, заменимо еквивалентним речима. Наравно, две идентичне (слово по слово) речи су и (тривијално) еквивалентне.

Конкретно, ако је задата наша азбука (А, Б, В, . . . , Ч, Џ, Ш) и списак: А≡АР, МА≡УМ, НОНО≡НО, ТИ≡ТЕ, ТИМА≡ЕТНО, ТЕКА≡НОСТ, ТЕМА≡Т, тада можемо *доказати* да су речи МАТЕМАТИКА и УМЕТНОСТ међусобно **еквивалентне**. Тако (подвлачећи низове слова који ће бити промењени и надвлачећи оне који су управо промењени) имамо:

$$\begin{aligned}\text{\underline{МА}ТЕМАТИКА} &\equiv \overline{\text{УМ}}\underline{\text{ТЕ}}\text{МАТИКА} \equiv \text{УМ}\underline{\overline{\text{ТИ}}\text{МА}}\text{ТИКА} \equiv \text{УМ}\overline{\text{ЕТНО}}\underline{\text{ТЕКА}} \\ &\equiv \text{УМЕТ}\underline{\text{НО}\overline{\text{НО}}}\overline{\text{СТ}} \equiv \text{УМЕТНОСТ}.\end{aligned}$$

Ову игру речима можемо наставити и доказивати да је, на пример, и НОНОНО≡НО, ТИКА≡НОНОСТ, СТЕК≡СТИК, и тако даље. У сваком случају, *еквивалентност две речи доказујемо навођењем низа трансформација које су дозвољене, тј. низа речи при чему се свака реч добија из претходне у складу са задатим списком.*

Општији проблем. Размотримо сада општији проблем. За сваке две речи у задатом „рачуну“ циљ је сазнати јесу ли еквивалентне или нису. Наравно, како има бесконачно много различитих речи, под решењем се подразумева поступак (алгоритам) који „распознаје“ еквивалентност сваког пара речи.

На пример, како ћемо сазнати јесу ли речи МАТЕМАТИКА и АРТ еквивалентне или не? Свако трагање за доказом еквивалентности ове две речи ће се безуспешно завршити! Зашто? Зато што ове две речи **нису еквивалентне** у нашем „рачуну“. Да бисмо утврдили да је немогуће добити АРТ од МАТЕМАТИКА коришћењем задатог списка поступамо на сасвим другачији начин од начина доказивања еквивалентости две речи. Најједноставније је, можда, уочити следеће: у свакој допустивој замени на нашој листи број појављивања слова Т исти је са обе стране. За реч МАТЕМАТИКА тај број је једнак 2, док је за реч АРТ тај број 1. Према томе, не постоји начин да се дозвољеним заменама добије АРТ из МАТЕМАТИКА.

О решивости општег проблема. Приметимо да када су две речи еквивалентне, можемо то показати навођењем низа трансформација које су дозвољене, док када две речи нису еквивалентне морамо прибећи аргументима **о** правилима која су нам дата.

Ако две задате речи **јесу** еквивалентне, онда то можемо утврдити „механички“ – једним систематским прављењем спискова последица једне од задатих речи у складу са задатим правилима. Тада се друга од задатих речи, уколико је еквивалентна са првом, мора наћи на неком од ових спискова. Систематско прављење спискова подразумева да за сваку реч са списка једноставно можемо дати и доказ њене еквивалентности са полазном речју. При трагању за доказом свакако је пожељно употребити и интелигенцију, али није неопходно. Овај поступак се може применити и за било који други избор почетног списка. Наравно, поступак је у извесном смислу само теоријски остварив будући да, чак и у веома једноставним рачунима, може довести до „катастрофалног“ броја случајева.

Међутим, нема таквог очигледног поступка, у општем случају, за утврђивање да две задате речи **нису** еквивалентне, и тада је неопходно да посегнемо за интелигенцијом да бисмо то и доказали. Испоставља се да не постоји јединствен поступак који се може користити универзално за све могуће изборе почетног списка, што има за последицу чињеницу да се не може алгоритамски утврдити да ли су две дате речи еквивалентне. У том смислу, **у општем случају нема алгоритамског решења проблема речи**. Постоје чак и одређени избори почетног списка за које нема алгоритма за утврђивање када две речи нису еквивалентне. Ево једног таквог списка[7] за речи над енглеском абецедом A, B, C, ..., Y, Z.

$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &\equiv \mathrm{HA} \\ \mathrm{OH} &\equiv \mathrm{HO} \\ \mathrm{AT} &\equiv \mathrm{TA} \\ \mathrm{OT} &\equiv \mathrm{TO} \\ \mathrm{TAI} &\equiv \mathrm{IT} \\ \mathrm{HOI} &\equiv \mathrm{IH} \\ \mathrm{THAT} &\equiv \mathrm{ITHE} \end{aligned}$$

Напоменимо да под појмом *алгоритам* (поступак) подразумевамо строго математички дефинисан појам (о њему ће бити више речи у одељку *Ефективна израчунљивост* на страни 117)!

За велики број проблема речи постоје „добри" алгоритми[8] који их решавају (о једном ће ускоро бити речи). Али, много је и веома „тешких" проблема речи. А већ смо видели да постоје проблеми речи који су нерешиви, те је бесмислено трагати за таквим поступцима (видети задатак 37, стр. 280).

Један решив проблем речи. Веома често се уопштава појам *речи* и *допустиве замене* у следећем смислу: осим уобичајених речи задатог алфабета узима се у обзир и *празна реч* која не садржи ниједно слово; означићемо је са Λ. Заједно са овом речи дозвољавају се и замене облика $\mathfrak{R} \equiv \Lambda$, при чему је $\mathfrak{R}$ нека фиксирана реч. Ове замене допуштају да се из речи избаци реч $\mathfrak{R}$, као и да се реч $\mathfrak{R}$ може уписати између било која два слова речи коју трансформишемо, или испред ње или иза ње.

Посматрајмо сада алфабет који садржи само два слова σ и ρ и нека је списак допустивих замена: $\sigma\sigma \equiv \Lambda$, $\rho\rho\rho \equiv \Lambda$, $\rho\sigma \equiv \sigma\rho\rho$. Поступак утврђивања еквивалентности, односно нееквивалентности, било које две речи задатог алфабета произилази из чињенице да се **свака реч**

[7] Проблем је преузет из [34].

[8] Налажење „добрих" поступака (алгоритама) вероватно је најважнији посао савремених математичара и програмера.

задатог алфабета може трансформисати у једну од следећих **шест** речи: Λ, ρ, $\rho\rho$, σ, $\sigma\rho$, $\sigma\rho\rho$. Ових шест речи назваћемо *сведене речи*. Трансформације се одвијају у следећим етапама.

1. Уколико у датој речи нема слова ρ одмах прећи на етапу 2, а уколико нема слова σ прећи на етапу 3. Ако се, пак, у датој речи појављују и слово σ и слово ρ, треба испремештати слова σ лево од слова ρ све док сва слова σ не дођу испред свих слова ρ. Читајући реч слева на десно, прво појављивање пара $\rho\sigma$ треба заменити са $\sigma\rho\rho$, те затим исти поступак примењивати на нову реч све док се не добије реч облика $\sigma\cdots\sigma\rho\cdots\rho$ коју треба пренети у другу етапу обраде.

$$\begin{aligned} &\sigma\underline{\rho\sigma}\rho\sigma\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\sigma\rho\rho\underline{\rho\sigma}\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\sigma\rho\underline{\rho\sigma}\rho\rho\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\sigma\underline{\rho\sigma}\rho\rho\rho\rho\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\sigma\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \end{aligned}$$

2. Постепено избацивати парове суседних слова σ, док год је то могуће. Уколико реч коју трансформишемо не садржи слово ρ, поступак трансформације је готов и излаз је Λ или σ. У супротном добиће се реч једног од облика $\rho\cdots\rho$ или $\sigma\rho\cdots\rho$ коју даље треба трансформисати у етапи 3.

$$\begin{aligned} &\underline{\sigma\sigma}\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \end{aligned}$$

3. Постепено избацивати тројке суседних слова ρ, док год је то могуће. На крају, добијена реч садржи највише једно слово σ и не више од два слова ρ.

$$\begin{aligned} &\sigma\underline{\rho\rho\rho}\rho\rho\rho\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\underline{\rho\rho\rho}\rho\rho\\ \equiv\ &\sigma\rho\rho \end{aligned}$$

Остаје још да се покаже да су сваке две сведене речи међусобно нееквивалентне.

Наиме, у свим допустивим заменама број појављивања слова σ на левој страни и број појављивања слова σ на десној страни је истовремено паран или истовремено непаран. То значи да је парност броја појављивања слова σ *инваријанта* за „ланце“ еквиваленција. Одавде директно следи да нека сведена реч која садржи слово σ није еквивалентна ниједној речи која не садржи слово σ.

Трагање за инваријантом повезаном са словом ρ је компликованије. Најпре, приликом трансформисања речи по описаном поступку уочавамо да је поред појављивања слова ρ у речи коју трансформишемо важно и колико слова σ стоји иза (десно од) тог слова ρ. Узмимо да је „тежина“ појављивања слова ρ у речи степен броја 2 бројем слова σ која се налазе иза (десно од) посматраног слова ρ. Под *ρ-тежином* речи подразумеваћемо збир тежина свих појављивања слова ρ у тој речи. Уколико се у речи не појављује слово ρ њена ρ-*тежина* је 0. У наредној табели дато је неколико примера одређивања ρ-*тежина* неких конкретних речи.

реч	ρ-*тежина* речи
$\sigma\sigma\sigma\rho\rho\sigma\rho\sigma\rho\rho\rho$	$2^2 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^0 + 2^0 = 13$
$\sigma\rho\rho\rho\rho\rho$	$2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0 = 5$
$\sigma\sigma$	0
Λ	0

Није тешко уочити да се применом правила $\rho\sigma \equiv \sigma\rho\rho$ не мења ρ-*тежина* речи. Лако закључујемо и то да је након примене правила $\rho\rho\rho = \Lambda$ остатак при дељењу ρ-*тежине* добијене речи са 3 једнак остатку при дељењу са 3 ρ-*тежине* речи на коју смо применили ово правило. Дакле, остатак при дељењу ρ-*тежине* са 3 је једна инваријанта за „ланце" еквиваленција. Зато, $\rho \not\equiv \Lambda$, $\rho \not\equiv \rho\rho$, $\sigma \not\equiv \sigma\rho$ и тако даље.

Дакле, свака реч је еквивалентна једној од шест набројаних речи, те су две речи еквивалентне ако и само ако се своде на исту сведену реч.

Ако неко не види смисао изложеног проблема речи и његову везу са математиком, ево конкретног примера који даје значење управо описаном рачуну са речима.

Рачуни. Већини је *рачун* прва асоцијација на математику. Ако занемаримо чињеницу да већина мисли само на рачун са бројевима, можемо рећи да је асоцијација углавном добра. Данас, поред рачуна са бројевима, модерна математика обилује рачунима са разним другим објектима. Тако, рачуна се са „истином" и „неистином", $\top \wedge \neg\bot = \top$, рачуна се са скуповима, $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \setminus \{2\} = \{3\}$, са функцијама, $(x^2)' = 2x$, и тако даље.

Испоставља се да је увођење сваког новог математичког рачуна представљао велики корак напред у историји човечанства.

Тако, први корак напред представља замена **рачуна са конкретним стварима** (овцама („две овце и две овце су четири овце"), деблима и сл.) **рачуном са (апстрактним стварима) бројевима** $(2 + 2 = 4)$!

Права ренесанса почиње када је рачун са римским бројевима замењен **рачуном са бројевима записаним у позиционом систему** (који користимо и данас). Покушајте да откријете поступак сабирања или, пак, множења два броја записана на римски начин (наравно, резултат треба да буде записан на римски начин и бројеви се не смеју преводити у позициони систем).

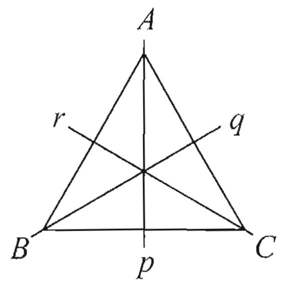
Наука је у XVIII веку почела да се развија до дотада неслућених размера када је откривен такозвани **диференцијално-интегрални рачун**.

Откриће рачунара дугујемо, између осталог, и **Буловом рачуну** (са „истином" и „неистином") и рачунима који су након њега развијени.

Рачуна се и у геометрији!

Један рачун у геометрији. Нека је ABC једнакостраничан троугао и O његов центар. Посматрајмо следеће трансформације (такозване изометријске) које овај троугао „преводе" у самог себе [реч је о *симетријама* једнакостраничног троугла]:

- осне симетрије у односу на праве које садрже једно теме троугла и његов центар, и
- ротације у смеру супротном кретању казаљке на сату за угао од 120°, 240° или 360° око центра O.



Пошто је свака од ових трансформација потпуно одређена сликама темена A, B и C, имамо:

$$\mathcal{S}_p = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \mathcal{S}_q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_r = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{O,120^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}_{O,240^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}, \mathcal{R}_{O,360^\circ} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}.$$

Будући да је свака симетрија датог троугла одређена одговарајућом трансформацијом његових темена, те да су побројане све могућности изометријских трансформација темена, закључујемо да смо набројали све могуће симетрије овог троугла.

Важно је приметити да се остваривањем било којих двеју симетрија датог троугла такође добија нека симетрија. На пример, резултат две узастопне ротације за 120° је ротација за 240°. Ако након симетрије у односу на праву p применимо ротацију за 120°, постижемо исто као да смо применили симетрију у односу на r, и тако даље. На овај начин долазимо до рачуна са трансформацијама $\mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ} = \mathcal{R}_{O,240^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r$, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{O,360^\circ} \ldots$, чију основу чини његова „*таблица множења*".

$\circ$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$
$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$
$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_q$
$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$
$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$
$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_r$	$\mathcal{S}_q$	$\mathcal{S}_p$	$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,120^\circ}$	$\mathcal{R}_{O,360^\circ}$

И као што смо навикли у рачунима са бројевима, и овога пута можемо:

- израчунавати вредности сложенијих израза $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, $\mathcal{S}_p \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r)$, $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q) \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}$, $(\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_q \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}))$, ... ;
- решавати једначине $\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ X = \mathcal{S}_r$, $\mathcal{R}_{O,240^\circ} \circ (X \circ X) = \mathcal{S}_r, \ldots$;
- откривати алгебарске законитости.
  - У изразима можемо занемаривати (избацивати, или пак премештати) заграде будући да за произвољне трансформације X, Y, Z важи једнакост $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$ – математичким језиком, операција $\circ$ је *асоцијативна*,
  - како $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$ „не мења ништа", она је *неутрални елемент*, то јест за сваку трансформацију X је $X \circ \mathcal{R}_{O,360^\circ} = X$ и $\mathcal{R}_{O,360^\circ} \circ X = X$,
  - за сваку трансформацију X постоји њој инверзна Y, тј. она са којом транформација X даје неутралну, $X \circ Y = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$ и $Y \circ X = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$,
  - трансформацијама не смемо мењати места у изразима, односно операција $\circ$ није комутативна ($\mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ} \neq \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{S}_p$).

Често се при писању израза, једноставности ради, изоставља знак операције. Ако то урадимо у нашем рачуну са трансформацијама, изрази ће буквално постати речи над алфабетом $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_q$, $\mathcal{S}_r$, $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$,

$\mathcal{R}_{O,240^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$, док нам дата таблица у ствари даје списак допустивих трансформација: $\mathcal{R}_{O,360^\circ}\mathcal{R}_{O,360^\circ} = \mathcal{R}_{O,360^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,360^\circ}\mathcal{R}_{O,120^\circ} = \mathcal{R}_{O,120^\circ}$, $\mathcal{R}_{O,360^\circ}\mathcal{R}_{O,240^\circ} = \mathcal{R}_{O,240^\circ}, \ldots$

Проблем речи и рачун са симетријама троугла. Ако се само мало боље удубимо у рачун са трансформацијама, приметићемо да се помоћу $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$ могу изразити све остале трансформације. Остављамо читаоцима да се у ово сами увере:

$$\mathcal{R}_{O,240^\circ} = \mathcal{R}_{O,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}, \quad \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{R}_{O,120^\circ}, \ldots$$

Ова чињеница нам омогућава да значајно поједноставимо наш рачун. То поједностављење ће дати конкретан геометријски смисао нашем рачуну са речима над $\{\sigma, \rho\}$.

– Пошто трансформација $\mathcal{R}_{O,360^\circ}$ ништа не мења можемо је назвати и „празном“ трансформацијом и идентификовати је са празном речју Λ.

– Ознаке $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{R}_{O,120^\circ}$ заменимо краћим ρ и σ, редом.

Уз ове нове ознаке имамо да је $\sigma\sigma = \Lambda$, $\rho\rho\rho = \Lambda$ и $\rho\sigma = \sigma\rho\rho$. Већ наслућујете да је *свака трансформација једна од сведених речи*!

Проблем речи и математика. Проблем речи, настао у неким специјалним деловима савремене математике, данас далеко превазилази оквире ове математичке дисциплине и има велико и теоријско и практично значење.

На крају, приметимо да је општи проблем речи у блиској вези са разним математичким теоријама. Свака математичка формула је заправо *реч* записана помоћу неког посебног алфабета (који садржи слова, заграде, ознаке за бројеве, ознаке за логичке операције и тако даље), те поступак извођења последице из неке претпоставке можемо описати као низ преобликовања речи на основу некаквих дозвољених замена које су, пак, у складу са *чиновима* логичког закључивања.

$$2x + 3 = 7 \equiv 2x = 7 - 4 \equiv x = 4 : 2 \equiv x = 2$$

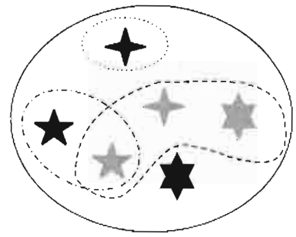
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 &\equiv (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\left(\frac{1}{n} < \varepsilon\right)\\ &\equiv \neg(\exists\varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant n_0)\left(\frac{1}{n} > \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Мали појмовник са понеким примером

СКУП. Данас се под најзначајнијим и основним математичким објектима подразумевају *скупови.* Да је заиста тако сведоче и чињенице да данас скоро да не постоји математички текст у коме се, на овакав или онакав начин, не помиње скуп. Такође, скоро сва математичка тврђења, у најширем смислу, заправо изражавају нека својства скупова.

Изједначавање математике са теоријом скупова, уз извесне изузетке, може се сматрати главним смером који је математика узела у XX веку. Скоро је немогуће наћи књигу чисто математичког садржаја која не користи језик теорије скупова. У том смислу, скупови су пресекли границе које су раздвајале геометрију, аритметику, логику, анализу, алгебру итд. Геометријски објекти (праве, равни, дужи, кружнице, кругови) постали су скупови тачака. Чак су и бројеви постали скупови.

Интуитивно, скупови одсликавају идеју окупљања некаквих ствари у целину, те је, слободније речено, скуп „ментална врећа напуњена неким стварима“.



ЕЛЕМЕНТИ И ПРИПАДАЊЕ. Свака од ствари које чине целину названу скуп назива се *елементи* тог скупа. Да је x елемент скупа X пише се $x \in X$ и чита „x је елемент скупа X“ или „x припада скупу X“. Скуп је одређен ако је познато које елементе садржи. Да x није елемент скупа X означавамо са $x \notin X$.

ПРАЗАН СКУП. За скуп је проглашена и *празна* „ментална врећа“. Овај скуп, који нема елемената, назива се *празан скуп* и означава се са $\emptyset$.

ЈЕДНАКОСТ СКУПОВА. Потпуну одређеност неког скупа својим елементима изражавамо дефиницијом једнакости два скупа: једнаки су они скупови који имају исте елементе.

ЗАДАВАЊЕ СКУПОВА НАБРАЈАЊЕМ ЕЛЕМЕНАТА. Најједноставнији примери скупова су они који имају „мали“ број елемената и које, зато, можемо задати једноставним навођењем његових елемената између витичастих заграда $\{\quad\}$ (одвајајући елементе зарезима уколико их има више од једног). Такви су, на пример, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{$тачно, нетачно, неодређено$\}$, $\{a, e, i, o, u\}$, ... У овим случајевима је сасвим једноставно потврдити или оповргнути односе $\in$ и $=$: $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, $\{a, e, i, o, u\} = \{u, a, i, e, o\}, \ldots$

СИНГЛТОНИ. Синглтони су скупови који садрже само један елемент: $\{\emptyset\}$ – скуп чији је једини елемент празан скуп, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\star\}$, $\{a\}, \ldots$

ПАРОВИ. Парови су скупови који имају два различита елемента: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\text{on}, \text{off}\}$, $\{\text{тачно}, \text{нетачно}\}, \ldots$

ОПЕРАТОР ОКУПЉАЊА. Комликованије скупове, које не можемо никако задати „елемент по елемент", чак и када „знамо" да су коначни, најчешће задајемо навођењем само *својства* помоћу којег одвајамо у скуп ствари које имају то својство од оних које га немају; на пример, скуп свих књига објављених у XX веку. Овакви скупови су довели до увођења „оператора окупљања" $\{x \mid S(x)\}$ чије је значење: „скуп свих ствари које имају својство (особину) S". Ако са $S(a)$ означимо чињеницу да „*a има својство S*", онда

$$a \in \{x \mid S(x)\} \text{ ако и само ако } S(a).$$

Иако нам се испрва чини да се задавањем било ког својства може формирати скуп објеката који имају то својство, ипак овакво окупљање није увек изводиво.

РАСЕЛОВ ПАРАДОКС. Посматрајмо својство S „*не бити сам себи елемент*" и нека је $X = \{x \mid x \notin x\}$. Дакле, X је скуп свих објеката x који нису сами себи елементи. Према тзв. *закону искључења трећег*, знамо да је сваки објекат или елемент самог себе или то није; ово важи и за X: или $X \in X$ или $X \notin X$. Међутим, ако $X \in X$, онда он има својство које имају сви његови елементи, па $X \notin X$ што је немогуће. У случају да $X \notin X$, онда он има задато својство па мора припадати самом себи, тј. $X \in X$ што је опет немогуће. Према томе, обе претпоставке, а једна мора бити тачна, воде у противречност!

Овај парадоксални резултат зове се *Раселов парадокс* у част енглеског филозофа и математичара Бертранда Расела који га је почетком XX века извео из радова оснивача теорије скупова *Георга Кантора.* Претходни пример, а може се направити још сличних, указује да наша интуиција у вези са скупом није поуздан водич у овој области, те је потребно прецизно одредити правила грађења „исправних" скупова. Има више основних принципа који омогућавају да се граде нови скупови од већ постојећих.

НАИВНА ТЕОРИЈА СКУПОВА. Реч је о „полуаксиоматском" приступу излагања основних концепата везаних за скупове, који ћемо и ми овом приликом укратко изложити. Овакав приступ је прилагођен најширем кругу читалаца за које се, наравно, претпоставља да поседују уобичајено „људско", интуитивно, разумевање шта је скуп, уз „напомену" да и скупови могу бити елементи других скупова.

ИЗДВАЈАЊЕ. Ако је X неки скуп, тада постоји скуп који садржи само оне елементе скупа X који задовољавају неко унапред задато својство.

Слободније речено, помоћу неког својства можемо издвајати елементе само из неког већ постојећег скупа. Са $\{x \in X \mid S(x)\}$ означавамо скуп свих елемената скупа X који имају својство S. На пример, ако је задат неки скуп X, тада је $X = \{x \in X \mid x = x\}$ и $\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\}$. Грубо говорећи, свако својство одређује један део, такозвани подскуп, неког задатог скупа (видети наредни појам).

Идеја окупљања коју срећемо код Раселовог парадокса овога пута нас доводи до тврдње да не постоји скуп свих скупова. Наиме, за сваки скуп X постоји скуп A који му не припада. Заиста, нека је X произвољан скуп и нека је $A = \{x \in X \mid x \notin x\}$. Дакле, $a \in A$ ако и само ако $a \in X$ и $a \notin a$. Ако би $A \in X$ било тачно, добили бисмо контрадикцију (стављањем A уместо a у претходну еквиваленцију). Закључак је једноставан – $A \notin X$.

ПОДСКУП. За скуп који је образован од неких елемената датог скупа X, каже се да је *подскуп* од X. Прецизније, скуп A је *подскуп* скупа X, у ознаци $A \subseteq X$, уколико сваки елемент скупа A такође припада и скупу X. Однос означен са $\subseteq$ назива се *инклузија* или „бити подскуп“. „Логичном“ анализом дефиниције инклузије (заправо њене формулације), закључујемо да је сваки скуп подскуп самог себе: $X \subseteq X$, за сваки скуп X. Такође, ако је $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, онда је и $X = Y$. Из $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ следи $X \subseteq Z$. Поред ових чињеница, важно је истаћи и да су *припадање* ($\in$) и *инклузија* ($\subseteq$) концептуално веома различите ствари.

ПРЕСЕК И РАЗЛИКА. Принцип издвајања нам омогућава и да уведемо скуповне операције познате као *пресек* и *разлика* будући да су то скупови које одговарајуће својство издваја из неког задатог скупа. Пресек скупова X и Y је скуп, у ознаци $X \cap Y$, који садржи само оне елементе који припадају и једном и другом скупу и других елемената нема; $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in Y\}$. Може и $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in Y \mid x \in X\}$, као и $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$. Разлику скупа X од скупа Y означавамо са $X \setminus Y$ и дефинишемо са $X \setminus Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \notin Y\}$.

Следеће особине једноставно следе из самих дефиниција уведених операција. За произвољне скупове X, Y и Z

- $X \cap X = X$,
- $X \cap Y \subseteq X, X \cap Y \subseteq Y$,
- $X \setminus X = \emptyset$,
- $\emptyset \setminus X = \emptyset$,
- $X \cap \emptyset = \emptyset$,
- ако је $Z \subseteq X$ и $Z \subseteq Y$, онда је $Z \subseteq X \cap Y$,
- $X \setminus \emptyset = X$,
- $X \setminus Y \subseteq X$.

КОМПЛЕМЕНТ. Специјално, разлика скупа од неког његовог подскупа назива се *комплемент* тог подскупа. Ако је $A \subseteq X$, скуп $X \setminus A$ се назива и *комплемент* скупа A у односу на скуп X. Уколико је јасно о ком скупу X је реч, често се користи ознака A^c. Тако, ако су A и B произвољни подскупови од X, онда је:

- $(A^c)^c = A$,
- ако је $A \subseteq B$, онда је $B^c \subseteq A^c$.

[Ако $x \in B^c$, тада $x \notin B$, па како је $A \subseteq B$, следи да $x \notin A$, тј. $x \in A^c$.]

ПАР СКУПОВА. Ако су A и B неки скупови, онда је и $\{A, B\}$ скуп и његови једини елементи су скуп A и скуп B. Специјално, за сваки скуп A постоји и сиглтон $\{A\}$; $\{A, A\} = \{A\}$.

УРЕЂЕН ПАР. Претходни принцип нам омогућава да уведемо појам *уређеног пара* – „објекта који чине неке две ствари, при чему знамо која је 'прва' ('лево' наведена) и која је 'друга' ('десно')". Будући да је уређен пар одређен уколико су нам познати елементи који га чине као и који је од њих проглашен за 'први', уређен пар x и y можемо дефинисати као скуп $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

ТЕОРЕМА. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ако и само ако је $a = x$ и $b = y$.

Доказ. $(\leftarrow)$ Ако је $a = x$ и $b = y$, онда је $\{a\} = \{x\}$ и $\{a, b\} = \{x, y\}$, па је $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(\rightarrow)$ Ако претпоставимо да је $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, тј. да ови скупови имају исте елементе, постоје две могућности.

Први случај: $\{a\} = \{x\}$ и $\{a, b\} = \{x, y\}$. Из прве једнакости следи да је $a = x$, а тада из друге и да је $b = y$.

Други случај: $\{a\} = \{x, y\}$ и $\{a, b\} = \{x\}$. Из прве једнакости следи да је $a = x = y$, а из друге да је $a = b = x$. Дакле, $a = b = x = y$. $\square$

Уређен пар $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ се често краће означава са (a, b); елемент a се назива *прва*, а елемент b *друга координата* уређеног пара (a, b). Из претходне теореме следи да је: $(a, b) = (x, y)$ акко $a = x$ и $b = y$. Приметимо да у случају да је $a \neq b$, онда је $(a, b) \neq (b, a)$, док је $\{a, b\} = \{b, a\}$.

УРЕЂЕНА ТРОЈКА. Уређену тројку дефинишемо са $(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} ((a, b), c)$. Није тешко уочити да је $(a, b, c) = (x, y, z)$ ако и само ако је $a = x$, $b = y$, $c = z$. Аналогно се дефинишу уређене четворке, петорке и тако даље.

ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД СКУПОВА. Декартов производ два скупа X и Y, у ознаци $X \times Y$, јесте скуп свих уређених парова чија прва координата припада скупу X, а друга координата скупу Y, тј. $X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$.

Аналогно се дефинишу и Декартови производи више од два скупа. На пример, $X \times Y \times Z \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \mid x \in X \text{ и } y \in Y \text{ и } z \in Z\}$. Специјално, Декартови производи истих скупова називају се Декартови степени и краће се означавају: $X \times X$ са X^2, $X \times X \times X$ са X^3 итд.

УНИЈА СКУПОВА. Унија скупова X и Y, у ознаци $X \cup Y$, јесте скуп коме припадају сви елементи скупа X и сви елементи скупа Y и других елемената у $X \cup Y$ нема; $X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

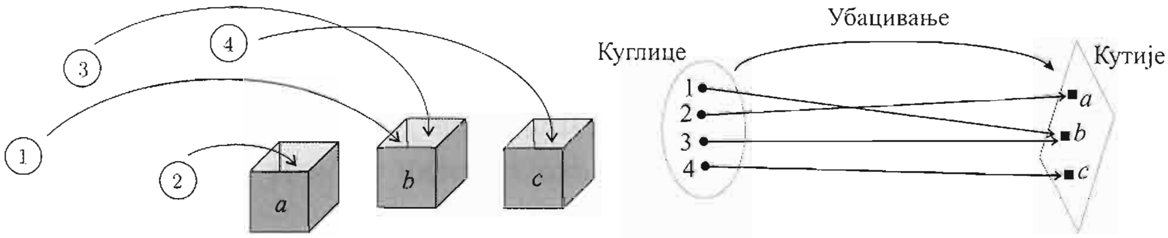
- $\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\}$,
- $X \cup \emptyset = X$,
- $X \cup X = X$,
- ако је $X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$, онда је $X \cup Y \subseteq Z$.

Уопште, ако је $\mathcal{X}$ неки скуп чији су елементи скупови, онда је $\cup\mathcal{X}$ скуп коме припадају сви елементи скупова из $\mathcal{X}$ и других елемената поред ових нема.

ПАРТИТИВНИ СКУП. Партитивни скуп скупа X, у ознаци $\mathcal{P}(X)$, јесте скуп свих подскупова скупа X, тј. $\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \subseteq X\}$.

ПРИНЦИПИ ДЕФИНИСАЊА СКУПОВА. Све дефиниције наведених појмова, почев од појма „издвајање", можемо схватити као принципе изградње нових скупова од већ постојећих. Тако, полазећи од једног скупа, на пример празног, можемо на основу ових принципа изградити неограничено много нових:
$\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}, \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}), \ldots$
$\{x \in \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \mid \emptyset \in x\} = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = (\{\emptyset\}, \emptyset), \ldots$
$\{\emptyset\} \times \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{\emptyset\})\}, \ldots$

ФУНКЦИЈЕ (или ПРЕСЛИКАВАЊА). Оно што је можда највише утицало на скуповно теоријски „изглед" математике јесте чињеница да је и успостављање веза међу скуповима такође репрезентовано неким скуповима. Наиме, поменуте везе схваћене су као *придруживања* која сваком елементу неког скупа додељују тачно један елемент неког другог скупа.



Успостављање везе између скупа $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и скупа $B = \{a, b, c\}$, приказано на претходној слици, представља пример једног пресликавања A у B. Ако ово пресликавање означимо са f, онда га уместо сликом, можемо и краће описати следећим записом

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & a & b & c \end{pmatrix}.$$

Скуповно окружење нам „намеће" да и f схватимо као скуп:

$$f = \{(1, b), (2, a), (3, b), (4, c)\}.$$

Тако, скуп f је пресликавање (функција) скупа X у скуп Y, у ознаци $f : X \to Y$, уколико су испуњена следећа два услова:

1) $f \subseteq X \times Y$,

2) за сваки елемент x из X постоји тачно један елемент y из Y тако да $(x, y) \in f$.

Ако је $f : X \to Y$, скуп X се назива *домен*, а скуп Y *кодомен* функције f. Уместо $(x, y) \in f$, најчешће се користи ознака $f(x) = y$, али је у употреби и ознака $x \stackrel{f}{\mapsto} y$. Дакле, у наведеном примеру, пишемо $f(1) = b$ или $1 \stackrel{f}{\mapsto} b$.

Наравно, сваком елементу неког скупа можемо додељивати и елементе тог истог скупа, тј. посматрати функције $f : X \to X$.

Напомена. Има и оних који сматрају да се представљањем функција једним „статичким" објектом као што је скуп губе „оперативни" и „динамички" аспекти овог концепта, те да је функција схваћена као скуп уређених парова само један теоретски модел интуитивне идеје о овом појму који не покрива његово пуно значење.

ИДЕНТИЧКО ПРЕСЛИКАВАЊЕ. Функција $i_X : X \to X$ дефинисана са $i_X(x) = x$, назива се *идентичко пресликавање* скупа X.

ЈЕДНАКОСТ ФУНКЦИЈА. Функције $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ су једнаке, $f = g$, уколико је $f(x) = g(x)$, за сваки елемент x из X.

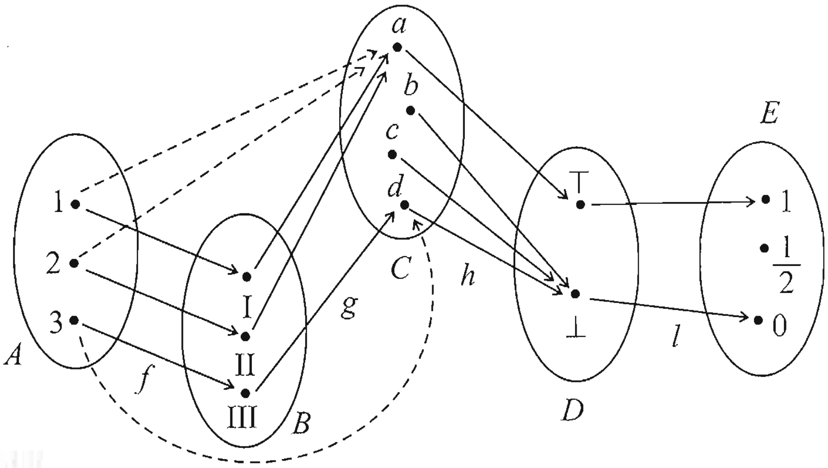
СЛАГАЊЕ (КОМПОЗИЦИЈА) ФУНКЦИЈА. Ако је $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, функција $g \circ f : X \to Y$ дефинисана са $g \circ f(x) = g(f(x))$ назива се *композиција* функција f и g.

Ако је $f : X \to Y$, онда је $f \circ i_X = f$ и $i_Y \circ f = f$.

1–1 ФУНКЦИЈЕ или ИНЈЕКЦИЈЕ. Функција $f : X \to Y$ је 1–1 функција или инјекција, у ознаци $f : X \overset{1-1}{\to} Y$, ако за свака два елемента x_1 и x_2 домена функције f, из $f(x_1) = f(x_2)$ следи да је $x_1 = x_2$.

НА-ФУНКЦИЈЕ или СИРЈЕКЦИЈЕ. Функција $f : X \to Y$ је **на**-функција или сирјекција, у ознаци $f : X \overset{\text{na}}{\to} Y$, ако за сваки елемент y из Y, постоји елемент x из X тако да је $f(x) = y$.

ОБОСТРАНО-ЈЕДНОЗНАЧНА ПРЕСЛИКАВАЊА или БИЈЕКЦИЈЕ. Функција $f : X \to Y$ је *бијекција* или *обострано-једнозначно пресликавање*, у ознаци $f : X \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} Y$, уколико је f 1–1 и **на**-функција.



На претходној слици представљене су функције:

- $f : A \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} B$;
- $g : B \to C$, која није 1–1 функција [$g(\mathrm{I}) = g(\mathrm{II})$, $\mathrm{I} \neq \mathrm{II}$] нити је **на**-функција [b није слика ниједног елемента домена];

• $h : C \to D$, која није 1–1 функција, али јесте **на**;
• $l : D \to E$, која јесте 1–1 функција, али није **на**.
Од ових функција можемо „сложити“ доста нових, функцију $g \circ f : A \to C$, при чему је, на пример, $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(\mathrm{I}) = a$, затим функције $h \circ g : B \to D$, $l \circ h : C \to E$, $(h \circ g) \circ f : A \to D$, $(l \circ h) \circ (g \circ f) : A \to E$, и тако даље. △

КАРДИНАЛНОСТ СКУПА. *Могућност успостављања бијекције* између два скупа схвата се као *истобројност* тих скупова.

Каже се да скупови X и Y имају исти број елемената или да су исте кардиналности, у ознаци $|X| = |Y|$, уколико постоји бијекција $f : X \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\rightarrow}} Y$.

ПРИМЕР. Да бисмо утврдили да имамо једнак број прстију на обе руке, не морамо бројати прсте на једној, па на другој, па онда упоређивати добијене бројеве. Довољно је поставити шаке тако да се додирују врхови одговарајућих прстију (палац са палцем, кажипрст са кажипрстом итд.), односно успоставити обострано-једнозначно пресликавање међу прстима. △

УНАРНА ОПЕРАЦИЈА. Свака функција $F : X \to X$ назива се и *унарна операција* скупа X.

БИНАРНА ОПЕРАЦИЈА. Свака функција $* : X \times X \to X$ назива се *бинарна операција* на скупу X. На скуповима са „малим“ бројем елемената бинарне операције се најчешће задају такозваним Кејлијевим таблицама.

ПРИМЕР. Бинарну операцију $* : \{a,b,c\} \times \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ скупа $\{a,b,c\}$ дату са

$$* = \begin{pmatrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (b,a) & (b,b) & (b,c) & (c,a) & (c,b) & (c,c) \\ a & a & b & b & c & a & a & c & a \end{pmatrix}$$

представљамо Кејлијевом таблицом.

$*$	a	b	c
a	a	a	b
b	b	c	a
c	a	c	a

Када је дефинисана бинарна операција на неком скупу, тада
• рачунамо: $(a * b) * ((c * c) * b) = a * (a * b) = a * a = a$;
• решавамо једначине: решења једначине $x * b = c$ су b и c ($x = b$ или $x = c$);
• трагамо за законима које задовољава дата операција: за сваки x из $\{a,b,c\}$ важи $(x * x) * x = ((x * x) * x) * x$. △

КОМУТАТИВНОСТ. Бинарна операција $* : X \times X \to X$ је *комутативна* ако је $x * y = y * x$, за све x и y из X.

АСОЦИЈАТИВНОСТ. Бинарна операција $* : X \times X \to X$ је *асоцијативна* ако је $x * (y * z) = (x * y) * z$, за све x, y и z из X.

ДИСТРИБУТИВНОСТ. Бинарна операција $*: X \times X \rightarrow X$ је *дистрибутивна* према бинарној операцији $\star : X \times X \rightarrow X$ ако је $x*(y \star z) = (x*y)\star(x*z)$ и $(y \star z) * x = (y * x) \star (z * x)$, за све x, y и z из X.

Пример. На партитивном скупу било ког скупа важне бинарне операције су *пресек* и *унија*. Обе операције су и комутативне и асоцијативне, и свака је дистрибутивна према оној другој: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ и $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. △

ТЕРНАРНА ОПЕРАЦИЈА. Свака функција $G : X^3 \rightarrow X$ је *тернарна операција* на X.

УНАРНА РЕЛАЦИЈА. „Раздвајање" елемената скупа на оне који имају неко својство и оне који га немају доводи нас до још једног важног примера пресликавања. Наиме, за сваки скуп X и свако својство σ можемо дефинисати функцију $f : X \rightarrow \{\text{тачно}, \text{нетачно}\}$ на следећи начин

$$f(x) = \begin{cases} \text{тачно}, & x \text{ задовољава својство } \sigma, \\ \text{нетачно}, & x \text{ не задовољава својство } \sigma. \end{cases}$$

Одавно се за речи „тачно" и „нетачно" употребљавају редом знаци $\top$ и $\perp$, а у последње време све више и знаци 1 и 0.

Свака функција $f : X \rightarrow \{0,1\}$ назива се и *унарна релација* на скупу X. Приметимо да свакој унарној релацији $f : X \rightarrow \{0,1\}$ на неком скупу X одговара тачно један његов подскуп $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Важи и обрнуто, сваки подскуп од X одређује једну унарну релацију на X, будући да он „раздваја" елементе скупа X на два дела: на оне који припадају том подскупу и оне који му не припадају.

КАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦИЈА. Ако је A подскуп скупа X, онда се функција $\chi_A : X \rightarrow \{0,1\}$ дефинисана са

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

назива *карактеристична функција* подскупа A.

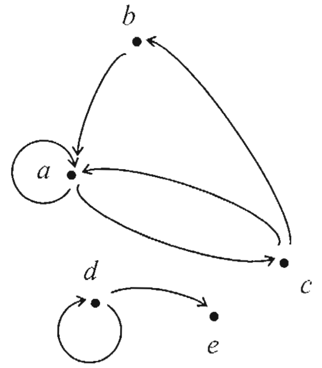
Пример. Ако је $X = \{a,b,c,d,e\}$, тада је $\chi_{\{a,b,d\}} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_\emptyset = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_X = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ... △

Приметимо да су унарне релације и карактеристичне функције, у суштини, једно исто!

БИНАРНА РЕЛАЦИЈА. Свака функција $f : X \times X \rightarrow \{0,1\}$ назива се *бинарна релација* на скупу X. Како свака бинарна релација на X одређује један подскуп од $X \times X$, али и сваки подскуп од $X \times X$ одређује једну бинарну релацију, бинарне релације на X можемо дефинисати и као подскупове од $X \times X$. Тако, на неком скупу са „малим“ бројем елемената, бинарну релацију можемо задати на разне начине.

$$\rho = \{(a,a),(a,c),(b,a), (c,a),(c,b),(d,d),(d,e)\}$$

ρ	a	b	c	d	e
a	1	0	1	0	0
b	1	0	0	0	0
c	1	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	0



РЕФЛЕКСИВНОСТ. Бинарна релација $\rho \subseteq X \times X$ је *рефлексивна* ако $(x,x) \in X$, за све x из X.

СИМЕТРИЧНОСТ. Бинарна релација $\rho \subseteq X \times X$ је *симетрична* ако из $(x,y) \in \rho$ следи $(y,x) \in \rho$, за све елементе x и y скупа X.

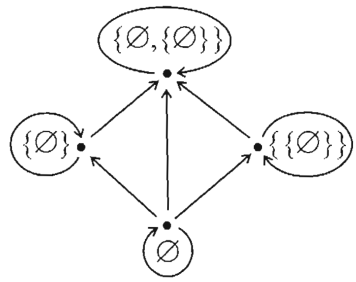
АНТИСИМЕТРИЧНОСТ. Бинарна релација $\rho \subseteq X \times X$ је *антисиметрична* ако из $(x,y) \in \rho$ и $(y,x) \in \rho$ следи $x = y$, за све елементе x и y скупа X. Својство „бити антисиметрична релација“ је сасвим различито од својства „не бити симетрична релација“!

ТРАНЗИТИВНОСТ. Бинарна релација $\rho \subseteq X \times X$ је *транзитивна* уколико из $(x,y) \in \rho$ и $(y,z) \in \rho$ следи $(x,z) \in \rho$, за све елементе x, y и z скупа X.

ЛИНЕАРНОСТ. Бинарна релација $\rho \subseteq X \times X$ је *линеарна* ако $(x,y) \in \rho$ или $(y,x) \in \rho$, за све елементе x и y скупа X.

ПОРЕДАК или УРЕЂЕЊЕ. Бинарна релација на скупу X је *релација поретка* или *уређење* скупа X уколико је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Пример. На партитивном скупу било ког скупа инклузија одређује једну релацију поретка. Релација инклузије на скупу $\mathcal{P}(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})$, представљена на датој слици, није линеарна јер је $\{\emptyset\} \nsubseteq \{\{\emptyset\}\}$ и $\{\{\emptyset\}\} \nsubseteq \{\emptyset\}$. △



НАЈВЕЋИ ЕЛЕМЕНТ. Елемент n неког скупа X је највећи у односу на уређење $\leqslant$ на X уколико је $x \leqslant n$, за **сваки** елемент x из X.

Аналогно се дефинише **НАЈМАЊИ ЕЛЕМЕНТ.**

МАКСИМАЛАН ЕЛЕМЕНТ. Елемент m из X је максималан у односу на уређење $\leqslant$ уколико **не постоји** елемент x из X различит од m такав да је $m \leqslant x$. Важно је приметити разлике између ова два концепта. Највећи елемент, уколико постоји, уједно је и максималан елемент, док максималан елемент не мора бити и највећи. Максималан елемент не мора бити „упоредив“ са осталим елементима скупа, већ је важно само да „иза“ њега нема других елемената.

Аналогно се дефинише **МИНИМАЛАН ЕЛЕМЕНТ.**

ГОРЊЕ ОГРАНИЧЕЊЕ или МАЈОРАНТА. Ако је $\leqslant$ релација поретка на X и $A \subseteq X$, елемент x из X је горње ограничење (или мајоранта) скупа A уколико је $a \leqslant x$ за сваки елемент a из A.

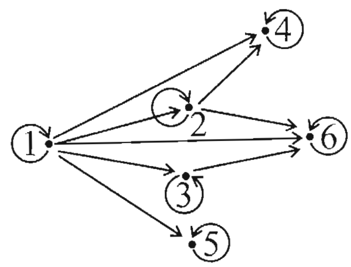
Аналогно се дефинише **ДОЊЕ ОГРАНИЧЕЊЕ или МИНОРАНТА.**

СУПРЕМУМ. Ако је $\leqslant$ релација поретка на X и $A \subseteq X$, елемент x из X је супремум скупа A, у ознаци $x = \sup A$, уколико је x најмање горње ограничење скупа A, тј. за свако горње ограничење y скупа A важи $x \leqslant y$.

Аналогно се дефинише **ИНФИМУМ.**

Пример. Највећи, па уједно и максимални, елемент скупа $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ у односу на релацију $\subseteq$ је $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. △

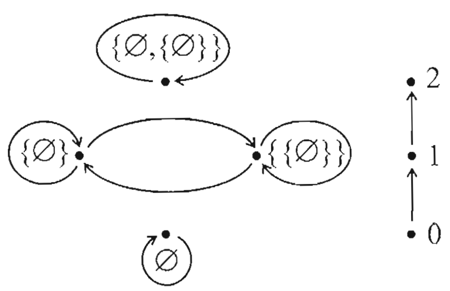
Пример. Дељивост на скупу $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ одређује једно уређење овог скупа (слика десно). Најмањи, па и минимални, елемент датог скупа у односу на ово уређење је 1. Највећи елемент у овом случају не постоји, док максималних елемената има више и то су 4, 5 и 6. △



ДОБРО УРЕЂЕЊЕ. Релација поретка на неком скупу је *добро* уређење тог скупа уколико *сваки непразан подскуп скупа има најмањи елемент.* Приметимо да је свако добро уређење линеарно.

РЕЛАЦИЈЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ. Бинарна релација на скупу X је *релација еквиваленције* скупа X, уколико је рефлексивна, симетрична и транзитивна. Релације еквиваленције представљају веома важан појам у математици будући да „моделују“ процес *идентификације* или *изједначавања* елемената скупа. Наравно, најважнији пример релације еквиваленције је једнакост.

Пример. На партитивном скупу $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ једна релација еквиваленције је „идентификација по могућности успостављања бијекције међу подскуповима“ или краће: X и Y су „изједначени“ ако и само ако је $|X| = |Y|$. △



Грубо говорећи, изједначавање илустровано у претходном једноставном примеру, довело је до појма *броја*. *Пар птица на грани, истина и лаж,* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ итд. су целине које имају нешто заједничко изражено бројем 2.

СКУПОВИ БРОЈЕВА И ПРИНЦИП ПЕРМАНЕНЦИЈЕ

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ. Природни бројеви $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ [9], вероватно, представљају најстарије математичке појмове и са њима се упознајемо већ у првим данима школовања (па стечено знање о њима обично не подвргавамо критици током даљег школовања и живота). Као такви, они се налазе и у основи данашње математике. Ови бројеви су за нас посебни математички (апстрактни) објекти лишени сваке материјалности.

Да се и сваки број може схватити као скуп говорићемо касније (одељак *Теорија скупова*, страна 174). Неформално, природан број је скуп свих својих претходника, тј. $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. За сада ћемо се ослонити на „интуитивну" представу читаоца о појму природног броја и о одређивању броја елемената коначног скупа, односно о значењу реченице „скуп X има n елемената, при чему је n неки природан број". Мало строжије, X има n елемената уколико се може успоставити бијекција између скупа X и скупа који репрезентује број n; пише се $|X| = n$.

Са бесконачношћу се први пут срећемо када окупимо све природне бројеве у скуп.

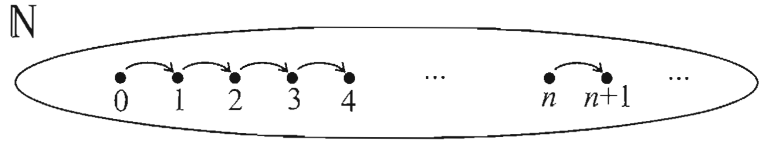
На основу принципа изградње скупова које смо увели никако не можемо формирати скуп који чине сви природни бројеви. Стандардни курсеви математике (XX века), почевши од основне школе, преко средње, до разних „виших" математика (I, II, III, ...) на факултетима конципирани су тако да са мање или више строгости упознају слушаоца са принципима које смо ми до сада изложили, „убеђујући нас" да и сви природни бројеви чине један скуп, који стандардно означавамо са $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Прихватањем скупа $\mathbb{N}$ „лако" се прихвата и постојање бесконачних скупова, најчешће у следећем смислу: „скуп X је коначан ако постоји природан број n такав да је $|X| = n$; у супротном је бесконачан".

И тако почињемо да радимо са бесконачним скуповима.

Операција бројања (додавања по један) нас доводи до функције (унарне операције) „додељивања непосредног следбеника" – функције међу бесконачним скуповима.



[9] Нулу ћемо такође сматрати природним бројем.

Функција $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тзв. *следбеник*, јесте 1–1 функција и није **на**[10]:
1. постоји елемент који није следбеник ниједног природног броја, тј. постоји тзв. први елемент у скупу природних бројева који означавамо са 0,
2. ако је $s(m) = s(n)$, за неке m и n из $\mathbb{N}$, онда је $m = n$.
Полазећи од елемента 0, функција s генерише природне бројеве:

$$0,\ s(0) = 1,\ s(s(0)) = 2,\ s(s(s(0))) = 3,\ \ldots$$

При помисли на бројеве, већини су прве асоцијације операције са њима, пре свих сабирање и множење, тј. функције (бинарне операције): $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Поступци израчунавања збира $(m + n)$ и производа $(m \cdot n)$ природних бројева (m и n), научени још на почетку школовања, данас су претпоставка елементарне писмености. При томе се научени поступци често скраћују применом разних особина ових операција. За било које природне бројеве k, m, n важи:
• (комутативност) $k + m = m + k$, $k \cdot m = m \cdot k$,
• (асоцијативност) $(k + m) + n = k + (m + n)$, $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$,
• (дистрибутивност $\cdot$ према $+$) $k \cdot (m + n) = (k \cdot m) + (k \cdot n)$,
• (закон скраћивања) из $k + m = k + n$, следи да је $m = n$, из $k \cdot m = k \cdot n$, следи да је $m = n, \ldots$

Такође, подразумева се и строги поредак, тј. релација $< \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, тзв. *строго уређење природних бројева*:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$$

Ту је и релација *уређења* $\leqslant$ дефинисана уобичајено: $m \leqslant n$ ако је $m < n$ или $m = n$. Најважнија својства ове релације су да за било које природне бројеве k, m, n важи:
• (рефлексивност) $n \leqslant n$,
• (антисиметричност) ако је $k \leqslant m$ и $m \leqslant k$, онда је $k = m$,
• (транзитивност поретка) ако је $k \leqslant m$ и $m \leqslant n$, онда је $k \leqslant n$,
• (линеарност) $n \leqslant m$ или $m \leqslant n$,
• (сагласност са сабирањем) $m \leqslant n$ акко $m + k \leqslant n + k$,
• (сагласност са множењем) $m \leqslant n$ акко $m \cdot k \leqslant n \cdot k, \ldots$

Али ту је и својство коме је посвећен добар део ове књиге будући да је на њему заснован велики део математике. Овде ћемо га само навести. Приметите да се оно доста разликује од претходно набројаних својстава.

Принцип најмањег елемента. Сваки непразан подскуп S скупа $\mathbb{N}$ има најмањи елемент, тј. за неки елемент n из S важи $n \leqslant x$, за произвољно x из S. Другим речима, релација $\leqslant$ је *добро* уређење скупа $\mathbb{N}$.

[10]Ако је X **коначан** скуп, тада за сваку функцију $f : X \to X$ важи еквиваленција: $f : X \overset{1-1}{\to} X$ ако и само ако $f : X \overset{\text{na}}{\to} X$.

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ. Ако су m и n природни бројеви такви да је $m \leqslant n$, онда **постоји само један**[11] природан број k такав да је $n = m+k$; овај број означавамо са $n - m$ и називамо разликом природних бројева n и m. Уколико је пак $n < m$, тада **не постоји** природан број k који можемо додати броју m да бисмо добили n. Другим речима, једначине по x, као што су на пример $2 + x = 1$, $13 + x = 8$,..., немају решења међу природним бројевима. Ово се најчешће узима као главни разлог увођења негативних бројева: -1 [као решење једначина $1 + x = 0$, $2 + x = 1$, $3 + x = 2, \dots$], $-2, -3, \dots$ Ови нови бројеви заједно са природним чине целини названу *скуп целих бројева*.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Операције сабирања и множења целих бројева су дефинисане тако да када се оне примене на природне бројеве (који су садржани у $\mathbb{Z}$) дају исте резултате као и већ одређено сабирање и множење природних бројева. Ово је у складу са такозваним *принципом перманенције*, који је 1867. године јасно изрекао Хенкел: *При грађењу неке нове врсте бројева захтева се да операције и релације уведене за нове бројеве „поштују" операције и релације старих бројева, што значи да треба сачувати рад са старим бројевима.*

Иако у суштини нове операције, сабирање и множење целих бројева се означавају такође симболима $+$ и $\cdot$, будући да су оне проширења која задржавају усвојене поступке сабирања и множења природних бројева. Тако, поступци сабирања нових бројева могу се изразити на следећи начин: ако су m и n природни бројеви већи од 0, онда је

$$(-m) + (-n) = -(m+n), \quad m + (-n) = \begin{cases} m - n, & m \leqslant n, \\ -(n - m), & m < n, \end{cases},$$

$$(-m) + n = n + (-m), \quad 0 + (-m) = (-m) + 0 = -m.$$

Поступак множења природних бројева проширујемо „правилима": „минус пута минус даје плус", „минус пута плус даје минус"... Обе нове операције $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ су и комутативне и асоцијативне, а множење је дистрибутивно према сабирању.

Поредак целих бројева $\cdots \leqslant -3 \leqslant -2 \leqslant -1 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3 \leqslant \cdots$ сагласан је и са сабирањем и са множењем у смислу да за произвољне целе бројеве k, m, n важи:

• (сагласност са сабирањем) $m \leqslant n$ акко $m + k \leqslant n + k$,

• (сагласност са множењем) из $m \leqslant n$ и $0 \leqslant k$, следи да је $m \cdot k \leqslant n \cdot k, \dots$

Међутим, ово уређење није *добро*, јер подскуп негативних бројева, на пример, нема најмањи елемент.

[11] *Само један* због закона скраћивања збира.

РАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ. У скупу целих бројева, дакле, имају решења све једначине по x облика $a + x = b$, где су a и b произвољни фиксирани цели бројеви. Али, не постоји цео број x такав да је, на пример, $2 \cdot x = 1$ [или да је $12 \cdot x = -7$ итд.]. Ето разлога за проширењем скупа целих бројева до скупа *рационалних бројева* – $\mathbb{Q}$. Скуп $\mathbb{Q}$ садржи све целе бројеве, али и нове које стандардно представљамо у облику разломка $\frac{p}{q}$, при чему $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+$ је скуп свих природних бројева већих од 0). Будући да и целе бројеве можемо записати у облику разломка, $p = \frac{p}{1}$, $p \in \mathbb{Z}$, уобичајено је да се пише

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Принцип перманенције је испоштован и овог пута. Поступци сабирања и множења рационалних бројева дати су следећим једнакостима

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Особине **Sk**, **Sa**, ..., **UM**, дате на страни 136, важе за произвољне рационалне бројеве x, y, z и представљају најважније особине операција $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ и релације $\leqslant$ на скупу $\mathbb{Q}$.

Из свакодневног живота знамо да су много више у употреби рационални бројеви представљени у децималном запису: $a_0, c_1c_2c_3c_4\ldots$ при чему је $a_0 \in \mathbb{Z}$, док су $c_1, c_2, c_3, \ldots$ цифре декадног система $0, 1, 2, \ldots, 9$. Испоставља се да је низ цифара иза децималног зареза *периодичан* почев од неког места. Тако је децимални запис сваког рационалног броја облика

$$a_0, c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots c_{n+k}c_{n+1}\cdots c_{n+k}c_{n+1}\cdots c_{n+k}\cdots,$$

за неке природне бројеве n и k од којих је бар један већи од 1.

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ. У скупу рационалних бројева имају решења све линеарне једначине – једначине облика $a \cdot x + b = c$, при чему су a, b, c неки фиксирани рационални бројеви и $a \neq 0$. Међутим, и најједноставније квадратне једначине немају решења. На пример, не постоји рационалан број x такав да је $x^2 = 2$. Ова једначина је, преко Питагорине теореме, повезана са проблемом одређивања дужине дијагонале јединичног квадрата. Дакле, *рационалним бројевима се не може тачно изразити дужина сваке дужи.*

ТЕОРЕМА. Не постоји рационалан број који помножен са самим собом (тј. подигнут на квадрат) даје резултат 2.

Доказ. Претпоставимо да такав број постоји и да је позитиван, тј. да постоје природни бројеви p и q, различити од 0, такви да је $\frac{p^2}{q^2} = 2$, односно $p^2 = 2q^2$.

Пре него што се упустимо у доказ, подсећамо на једно једноставно тврђење везано за парне природне бројеве: *ако је квадрат неког природног броја паран број, онда је и тај број паран.*

Из претпостављене једнакости $p^2 = 2q^2$ следи да је p^2 паран број, па је и p паран број, тј. $p = 2p_1$ за неки природан број p_1 различит од 0. Дакле, $(2p_1)^2 = 2q^2$, тј. $2p_1^2 = q^2$. Из последње једнакости закључујемо да је и q паран број, тј. $q = 2q_1$ за неки природан број q_1 различит од 0. Поступак настављамо аналогно: из $p_1^2 = 2q_1^2$ следи да је $p_1 = 2p_2$, за неки природан број p_2 различит од 0, па је $2p_2^2 = q_1^2$, одакле је $q_1 = 2q_2$, за неки природан број q_2 различит од 0, и тако даље.

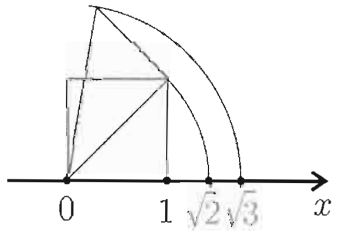
На овај начин долазимо до два низа све мањих и мањих природних бројева

$$p > p_1 > p_2 > \cdots \quad \text{и} \quad q > q_1 > q_2 > \cdots$$

што противречи принципу најмањег елемента. □

Дакле, потребни су нам неки нови бројеви – бројеви којима ћемо, након избора јединице мере, моћи да изразимо дужине свих дужи. Рационалним бројевима се додају такозвани *ирационални бројеви* у које спадају већ поменути $\sqrt{2}$, али и $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, као и број π који се појављује при мерењу дужине кружне линије итд.

Видећемо касније (страна 203) како је уочени недостатак скупа рационалних бројева наметнут начином мерења дужина имао одлучујућу улогу у изградњи скупа *реалних бројева* $\mathbb{R}$, који чине рационални и ирационални бројеви.



Овога пута, истичемо само да је интуитивно схватање реалних бројева тесно повезано са геометријским схватањем броја као дужине еуклидске дужи, те се реални бројеви често интерпретирају тачкама *бројне осе* – еуклидске праве на којој је фиксирана тачка, дефинисана оријентација и дата јединична дуж.

Задовољавајућим представљањем ирационалних бројева сматрају се бесконачни децимални записи облика: $a_0, c_1c_2c_3c_4\dots$ при чему је $a_0 \in \mathbb{Z}$, док је $c_1, c_2, c_3, \dots$ низ цифара декадног система који **није периодичан**. Немогућност да „до краја“ представимо неки ирационалан број нас приморава да практично радимо са неком „задовољавајућом“ *приближном вредношћу* која је заправо рационалан број: a_0, c_1; a_0, c_1c_2; $a_0, c_1c_2c_3$; $a_0, c_1c_2c_3c_4$; ... Наравно, потребно је да имамо поступак којим се „генеришу“ цифре из децималног зареза. Таквих поступака има доста.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1,\underline{414213}5623730\dots \\
-\underline{1} \\
\quad 100|2\underline{4}\cdot\underline{4} \\
\quad \underline{-96} \\
\qquad 400|28\underline{1}\cdot\underline{1} \\
\quad\; -\underline{281} \\
\qquad 11900|282\underline{4}\cdot\underline{4} \\
\quad\; -\underline{11296} \\
\qquad\quad 60400|2828\underline{2}\cdot\underline{2} \\
\qquad\; -\underline{56564} \\
\qquad\qquad 383600|28284\underline{1}\cdot\underline{1} \\
\qquad\quad -\underline{282841} \\
\qquad\qquad 10075900|282842\underline{3}\cdot\underline{3} \\
\qquad\quad\; -\underline{8485269} \\
\qquad\qquad\qquad \dots
\end{array}
$$

Међутим, природно је поставити питање да ли за сваки ирационалан број постоји бар један поступак за генерисање цифара његовог децималног записа. Е, ту настају нови проблеми. Испоставља се да „реалних бројева има много више него поступака“, те постоје ирационални бројеви које ниједан поступак не може да „произведе“. Ово је често и разлог за филозофска питања везана за „реалност“ скупа свих реалних бројева.

ОПЕРАЦИЈСКО-РЕЛАЦИЈСКЕ СТРУКТУРЕ.[12] Операцијско-релацијску структуру над неким скупом чини тај скуп заједно са неким својим операцијама, релацијама и елементима. Структуре задајемо тако што „нанижемо“ (у низ) све оно што је чини. Тако када говоримо о природним бројевима најчешће подразумевамо и све оне основне ствари које са њима могу обављати (упоређивање, сабирање, множење и сл.), тј. мислимо на структуру $(\mathbb{N}, \leqslant, +, \cdot, s, 0)$. Наравно, остављена је могућност да нас занимају, на пример, само операције и константе те у том случају посматрамо операцијске структуре – такозване *алгебре*. У другим приликама нас могу занимати само релације.

ГРУПОИДИ. Најједноставније алгебре су групоиди – структуре које чини скуп заједно са неком својом бинарном операцијом.

Најпознатији су бројевни групоиди: адитивни групоиди (природних, целих, рационалних, реалних) бројева $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ и мултипликативни групоиди $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$. Наравно, на скуповима бројева можемо посматрати и многе друге бинарне операције: $(\mathbb{N}, \max)$, $(\mathbb{R}, *)$, при чему је $x*y \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ и тако даље. Поред ових размтарају се и групоиди који се не односе на скупове бројева. На пример, све симетрије једнакостраничног троугла са операцијом $\circ$ образују један групоид. Такође, скуп $\{a, b, c, d\}$ са

[12]Идеја структуре је прилично стара. У неком смислу била је позната и Лајбницу, али се ипак верује да је Шредер 1895. године први пут дефинисао појам апстрактне структуре.

сваком од операција задатих Кејлијевим таблицама

$$\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ c & a & a & c \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \star & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & c & a \\ c & a & c & b \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \diamond & a & b & c \\ \hline a & b & b & b \\ b & c & c & c \\ c & a & a & a \end{array}, \ldots$$

образује један групоид: $(\{a,b,c,d\},*)$, $(\{a,b,c,d\},\star)$, $(\{a,b,c,d\},\diamond)$, ...

ГРУПЕ. Алгебре облика $(X,*,{}^{\sim 1},e)$, при чему је $*$ бинарна, а ${}^{\sim 1}$ унарна операција скупа X и $e \in X$, називамо групама уколико важе следеће законитости:

- $*$ је асоцијативна операција,
- e је неутрални елемент за операцију $*$, тј. за сваки елемент x из X важи $x * e = x$ и $e * x = x$,
- $x * x^{\sim 1} = e$ и $x^{\sim 1} * x = e$ за сваки елемент x из X.

Тако имамо адитивне групе бројева $(\mathbb{Z},+,-,0)$, $(\mathbb{Q},+,-,0)$, $(\mathbb{R},+,-,0)$ и мултипликативне $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot,{}^{-1},1)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot,{}^{-1},1)$. Такође, све симетрије неког једнакостраничног троугла, са операцијом $\circ$, одговарајућом унарном операцијом ${}^{-1}$ и ротацијом за 360° образују једну групу (видети страну 88).

ЛИНЕАРНА УРЕЂЕЊА. Под линеарним уређењем се подразумева структура $(X,\leqslant)$, при чему је $\leqslant$ линеарна релација поретка.

МРЕЖЕ. Мрежа је структура $(M,\curlywedge,\curlyvee)$, при чему су $\curlywedge$ и $\curlyvee$ бинарне операције на скупу M такве да за произвољне елементе x, y, z из M важе једнакости:

$$\begin{array}{lll} x\curlywedge y = y\curlywedge x, & x\curlyvee y = y\curlyvee x, & [\text{комутативност}] \\ x\curlywedge(y\curlywedge z) = (x\curlywedge y)\curlywedge z, & x\curlyvee(y\curlyvee z) = (x\curlyvee y)\curlyvee z, & [\text{асоцијативност}] \\ x\curlywedge(x\curlyvee y) = x, & x\curlyvee(x\curlywedge y) = x. & [\text{закони апсорпције}] \end{array}$$

У свакој мрежи се дефинише и једна релација на скупу M: $x \preccurlyeq y$ ако и само ако $x\curlywedge y = x$. Може се показати да је $\preccurlyeq$ релација поретка на M, као и да су $x\curlywedge y$ и $x\curlyvee y$ редом инфимум и супремум скупа $\{x,y\}$ у односу на ово уређење. Уколико постоје, најмањи и највећи елементи мреже су јединствено одређени и често се означавају са 0 (за свако x из M је $0 \preccurlyeq x$) и 1 (за свако x из M је $x \preccurlyeq 1$). Мреже у којима постоје овакви елементи називамо *ограничене мреже*.

ТИП СТРУКТУРЕ И ИЗОМОРФИЗАМ. Изоморфизам[13] је веома важан однос међу структурама које су истог типа. За две структуре кажемо да су истог типа уколико су изграђене од истог броја релација, операција и константи при чему су одговарајуће релације и операције исте арности, тј. међу скуповима релација, операција и константи који граде једну структуру може

[13]реч је грчког порекла: 'изос'= *неизмењен, сталан, једнак*; 'морфе'= *облик*.

се успоставити обострано-једнозначно пресликавање са одговарајућим скуповима који чине другу и при том то пресликавање „чува" арност релација и операција. На пример, следеће три структуре су истог типа.

- $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, +, \cdot, s, 0)$.
- $\mathbf{A} = (\{1,2,3\}, \triangleleft, *, \star, \sim, 1)$, при чему је:

$$\triangleleft = \{(1,1)(2,3)\}, \quad \begin{array}{c|ccc} * & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \star & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} x & \sim x \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{array}.$$

- $\mathbf{B} = (\{a,b,c\}, \prec, \triangle, \triangledown, ', a)$, при чему је:

$$\prec = \{(a,a)(b,c)\}, \quad \begin{array}{c|ccc} \triangle & a & b & c \\ \hline a & b & b & c \\ b & b & c & c \\ c & b & c & a \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \triangledown & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ c & a & a & c \end{array}, \quad \begin{array}{c|c} x & x' \\ \hline a & b \\ b & c \\ c & a \end{array}.$$

Напоменимо да смо структуре $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ изабрали сасвим произвољно, као и да се над неким трочланим скупом може укупно формирати $2^{3\cdot 3} \cdot 3^{3\cdot 3} \cdot 3^{3\cdot 3} \cdot 3^3 \cdot 3$, тј. 16 067 102 519 808 структура овог типа, док је број оваквих структура над $\mathbb{N}$ бесконачан.

Међутим, осим истоветности начина изградње ових структура, тешко је оправдати још неку сличност структуре $\mathbf{N}$ са било којом од структура $\mathbf{A}$ или $\mathbf{B}$. С друге стране пак, разлике између $\mathbf{A}$ или $\mathbf{B}$ су само „привидне" у смислу да се разликују само у ознакама чланова домена. Свака од њих се може добити преозначавањем друге: $1 \leftrightsquigarrow a$, $2 \leftrightsquigarrow b$, $3 \leftrightsquigarrow c$, па је природно рећи да су структуре $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ изоморфне (у ознаци $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$). Прецизније, поменуто преозначавање заправо представља успостављање бијекције међу доменима која чува читаву структуру: $f : \{1,2,3\} \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\rightarrow}} \{a,b,c\}$,

$$x \triangleleft y \;\Leftrightarrow\; f(x) \prec f(y),\; f(x * y) = f(x) \triangle f(y),$$

$$f(x \star y) = f(x) \triangledown f(y),\; f(\sim x) = f(x)',\; f(1) = a.$$

Иако међу изоморфним структурама нема суштинских разлика, строга математика их ипак не може назвати само *једнаким*, већ додаје *до на изоморфизам*.

НЕКЕ ДРУГЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТРУКТУРЕ. Постоје структуре које нису операцијско-релацијске. Овакве структуре, такође, образује скуп са неким другим скуповима који су са њим у вези.

ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ. Скуп X заједно са колекцијом $\mathcal{T}$ својих подскупова која задовољава следеће услове:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ и $X \in \mathcal{T}$,
- ако $U \in \mathcal{T}$ и $V \in \mathcal{T}$, онда $U \cap V \in \mathcal{T}$,
- ако $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, онда и $\cup\mathcal{U} \in \mathcal{T}$,

образује *тополошки простор*, у ознаци $(X, \mathcal{T})$.

ПРЕБРОЈИВИ СКУПОВИ. Скупови које је могуће обострано-једнозначно (бијективно) пресликати на скуп $\mathbb{N}$ су *пребројиви* скупови. Дакле, скуп X је пребројив, ако је $|X| = |\mathbb{N}|$. Уместо „X је пребројив“, каже се и „X има исти број елемената као и скуп $\mathbb{N}$“ или „X је кардиналности $\aleph_0$ (читај: алеф нула)“ и пише се $|X| = \aleph_0$. Да се овако дефинисана истобројност у случају бесконачних скупова прилично разликује од доживљавања истобројности коначних скупова говоре следећи најједноставнији примери:

– парних природних бројева има исто колико и свих природних бројева;

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

– непарних природних бројева има исто колико и свих природних бројева;

– природних бројева који су потпуни квадрати има исто колико и свих природних бројева;

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

– простих бројева има исто колико и свих природних бројева;

– целих бројева има исто колико и природних бројева.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots & n & -n & \cdots \end{array}$$

Чињеница коју можемо да уочимо у овим примерима често се узима за дефиницију бесконачног скупа. Скуп X је бесконачан ако је истобројан са неким својим правим подскупом, тј. постоји подскуп A од X такав да је $A \neq X$ и $|A| = |X|$.

Први рад из теорије скупова Кантор, оснивач ове теорије, објављује 1873. У њему доказује да рационалних бројева има колико и природних. На наредном дијаграму приказан је начин на који се сви рационални бројеви могу поређати у бесконачну табелу. Дакле, све рационалне бројеве можемо „пребројати" природним (што значи поређати у низ).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{0}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{1} & & -\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{2}{1} & & -\frac{2}{1} & \longrightarrow & \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{0}{2} & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & -\frac{2}{2} & & \dots \\
\downarrow & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{0}{3} & & \frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{0}{4} & & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & -\frac{2}{4} & & \dots \\
\downarrow & \swarrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Аналогно Канторовом доказу можемо доказати и да је скуп $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (свих уређених парова природних бројева) пребројив, као и да је $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ и тако даље. Штавише, **свих коначних низова неког пребројивог скупа има пребројиво много**. Међутим, свих низова (коначних и бесконачних), на пример, скупа природних бројева има много више – непребројиво много.

НЕПРЕБРОЈИВИ СКУПОВИ. Бесконачан скуп који се не може бијективно пресликати на скуп $\mathbb{N}$ је *непребројив*.

Крајем 1873. године Кантор чувеним *дијагоналним аргументом* доказује да скуп *реалних* бројева није пребројив. Ако би скуп реалних бројева био пребројив, то би значило да се сви реални бројеви, рецимо из интервала $(0, 1)$, могу поређати у низ: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ Ако формирамо децималне записе сваког од реалних бројева у низу, добијамо бесконачну табелу.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
a_1 = 0, & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & \dots \\
a_2 = 0, & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & \dots \\
\vdots & & & & & \\
a_n = 0, & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

Формирајмо број $a = 0,d_1d_2\dots d_n\dots$ који се од a_1 разликује на првој децимали ($d_1 \neq d_{11}$) и узмимо[14] да је $d_1 \neq 9$, од a_2 на другој децимали ($d_2 \neq d_{22}, d_2 \neq 9$), од a_3 на трећој и тако даље ($d_n \neq d_{nn}, d_n \neq 9$). Очигледно је a реалан број из интервала $(0,1)$ различит од свих бројева у низу $a_1, a_2, \dots$, Према томе, реални бројеви из интервала $(0,1)$, па ни сви реални бројеви, не могу се поређати у низ.

На потпуно исти начин се може доказати да је непребројив скуп свих низова скупа природних бројева.

УЧЕЊЕ МАТЕМАТИКЕ. Сваку од теорија које су приказане у наставку прихватите *условно* у смислу да она важи само под извесним „класичним" претпоставкама (које нећемо експлицитно наводити, а тичу се логичких законитости које употребљавамо при доношењу закључака, затим „универзума" скупова са којима ћемо радити и тако даље).

Иако је реч о претпоставкама које се углавном у математичкој литератури подразумевају као неоспорне, потпуно одређене и јасне, наглашавамо да променом полазних претпоставки све може поново изгледати смислено, али и сасвим другачије!

[14] да би се избегло појављивање истих бројева који имају два децимална записа попут $0,199999999\dots$ и $0,2$

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Структура природних бројева

Будући да се подразумева да природне бројеве сабирамо, множимо и упоређујемо, када говоримо о природним бројевима најчешће мислимо на структуру:

$$\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \leqslant, +, \cdot, s, 0).$$

Већ смо видели да је кључно својство структуре $\mathbf{N}$ познато као **принцип најмањег елемента**. Сваки непразан подскуп S скупа $\mathbb{N}$ има најмањи елемент, тј. за неки елемент n из S важи $n \leqslant x$, за произвољно x из S. Другим речима, скуп $\mathbb{N}$ је *добро* уређен релацијом $\leqslant$.

Овај принцип има и своју важну еквивалентну формулацију познату као **принцип математичке индукције**. За сваки подскуп S од $\mathbb{N}$, ако

(IB) $0 \in S$, и

(IK) за свако n из $\mathbb{N}$, ако $n \in S$, онда $s(n) \in S$,

онда је $S = \mathbb{N}$.

Узимајући у обзир основна својства природних бројева (страна 102) Дедекинд и Пеано су, тек крајем XIX века, дали прву *аксиоматику* природних бројева, тј. дефинисали скуп $\mathbb{N}$ као скуп који садржи неки елемент 0 и за који постоји функција $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, таква да је:

(P1) за сваки елемент n из $\mathbb{N}$, $s(n) \neq 0$,

(P2) за све m и n из $\mathbb{N}$, ако је $s(m) = s(n)$, онда је $m = n$,

(P3) за сваки подскуп S од $\mathbb{N}$ ако важе следећа својства

> **(IB)** $0 \in S$,
>
> **(IK)** за свако n из $\mathbb{N}$, ако $n \in S$, онда $s(n) \in S$,

онда је $S = \mathbb{N}$.

Наведена својства $(\mathbf{P1}), (\mathbf{P2}), (\mathbf{P3})$ позната су као *Пеанове аксиоме природних бројева,* по италијанском математичару Пеану (1858–1913) (чиме је учињена мала историјска неправда према великом математичару Дедекинду). Теорија, са свим својим теоремама, која се може изградити на овим аксиомама назива се *(Пеанова) аритметика.*

НАПОМЕНА. Математика се у XIX веку развила до неслућених размера. Осим што су се јако развиле класичне математичке дисциплине, као што су *геометрија, алгебра, анализа*, појавио се велики број нових: *нееуклидске геометрије, диференцијална геометрија, комплексна анализа, топологија и тако даље.* Вођени Еуклидовом идејом (Еуклид је увођењем аксиома „средио" геометрију) математичари су пожелели да за разне математичке области пронађу одговарајуће спискове аксиома и правила закључивања који би били довољни да обухвате све врсте ваљаног математичког расуђивања и сва истинита тврђења те области. Највећа пажња је усмерена на *аритметику*, будући да је *структура природних бројева* дубоко у основама математике. Кључно питање је било: *„Какав систем аксиома захтева структура природних бројева, тј. аритметика?"*. Природан, али и непрецизан, одговор је: *аксиоме су формуле аритметике које изражавају најзначајнија својства структуре природних бројева.* Данас се сматра да су (крајем XIX века) италијански математичар Ђузепе Пеано и немачки математичар Рихард Дедекинд нашли најзначајнија својства структуре природних бројева.

Поред тога што је принцип индукције јако моћно средство за доказивање теорема о природним бројевима, он омогућава и да се дефинишу и уводе нови математички објекти. Дефиниције засноване на принципу индукције називамо *индуктивним* или *рекурзивним* дефиницијама.

ТЕОРЕМА РЕКУРЗИЈЕ. Нека је X произвољан непразан скуп, x неки изабрани елемент скупа X и $g : \mathbb{N} \times X \to X$ дато пресликавање. Тада постоји јединствена функција $h : \mathbb{N} \to X$ таква да је

$$(\mathrm{Rec}) \qquad h(0) = x \ \text{ и } \ h(s(n)) = g(n, h(n)), \ \text{ за свако } n \text{ из } \mathbb{N}.$$

Неформалан опис функције h је[15]:

$$0 \overset{h}{\mapsto} x,\ 1 \overset{h}{\mapsto} g(0,x),\ 2 \overset{h}{\mapsto} g(1, g(0,x)),\ 3 \overset{h}{\mapsto} g(2, g(1, g(0,x))), \ldots$$

Доказ претходне теореме се може наћи, на пример, у [26].

[15]За функцију h *рекурзивно дефинисану* помоћу формула (Rec) често кажемо да је дефинисана *рекурентним* формулама (везама) (Rec).

Последица. За *сваки* непразан скуп X, *сваки* елемент x и сваку функцију $g : X \to X$, постоји јединствена функција $h : \mathbb{N} \to X$ таква да је $h(0) = x$ и $h(s(n)) = g(h(n))$.

Ова последица говори да структура $(\mathbb{N}, s, 0)$ има неку врсту *универзалне улоге*, у смислу да омогућава да се „нешто" постигне за сваку уређену тројку (X, g, x).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "h"] & \mathbb{N} \arrow[d, dotted, "h"] \\ \{\star\} \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & & \\ & X \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

(Елемент a било ког скупа A можемо окарактерисати, видети одељак *Категорије*, страна 246, пресликавањем неког једночланог скупа, на пример $\{\star\}$, у скуп A тако да је $\star \mapsto a$.)

Ако би још нека тројка $(M, s_{\mathrm{M}}, 0_{\mathrm{M}})$ имала поменуто универзално својство, онда стављајући у претходни дијаграм да је $x = 0_{\mathrm{M}}$, $X = M$, $g = s_{\mathrm{M}}$ долазимо да функције $h : \mathbb{N} \to M$, за коју је $h(0) = 0_{\mathrm{M}}$, $h(s(n)) = s_{\mathrm{M}}(h(n))$, $n \in \mathbb{N}$. Обрнемо ли улоге скуповима $\mathbb{N}$ и M долазимо до чињенице да је h бијекција. Заиста, ако је $h' : M \to \mathbb{N}$ функција за коју је $h'(0_{\mathrm{M}}) = 0$, $h'(s_{\mathrm{M}}(n)) = s(h'(n))$, можемо (уз помоћ индукције) доказати да је $h \circ h' = 1_M$ и $h' \circ h = 1_{\mathbb{N}}$. То заправо значи да ово *универзално својство* карактерише тројку $(\mathbb{N}, s, 0)$, тј. да *Пеанове аксиоме* одређују, под извесним условима(!), природне бројеве *до на изоморфизам*.

Теорема. Ако је $\mathbf{M} = (M, s_{\mathrm{M}}, 0_{\mathrm{M}})$ структура која задовољава *Пеанове аксиоме* **(P1–3)**, тада је $\mathbf{M}$ изоморфно стандардној (уобичајеној) структури природних бројева, $(\mathbb{N}, s, 0) \cong (M, s_{\mathrm{M}}, 0_{\mathrm{M}})$.

С обзиром на чињеницу да изоморфизам у ствари значи поседовање истих својстава, чини се да Пеанова аритметика решава питање аксиоматског заснивања природних бројева. Ипак, испоставља се да то можемо тврдити само при одређеним претпоставкама. Наиме, појам скупа је веома битно садржан у Пеановим аксиомама, односно Пеанова аксиоматика је у суштини скуповна. Овом приликом нећемо наводити неопходне претпоставке о скуповима већ ћемо само рећи да се ове претпоставке могу прецизирати тако да теорема важи.

Теорема рекурзије омогућава да се дефинишу основне аритметичке функције: сабирање, множење, степеновање, ... (страна 126).

Једна од веома значајних теорема је *теорема о остатку*, будући да се у њој истовремено појављују сабирање, множење и поредак природних бројева (и нула).

Теорема о остатку. Нека је n било који природан број већи од 0. За сваки природан број m постоје јединствени бројеви q и r из $\mathbb{N}$, такви да је

$$(*)\qquad m = n \cdot q + r, \quad 0 \leqslant r < n.$$

За дате n и m, јединствено одређени бројеви q и r, за које важи $(*)$ називају се редом *количник* и *остатак* при (еуклидском) дељењу броја m природним бројем n. Пресликавања $\kappa : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\rho : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинишемо са $\kappa(n, m) =$ „*количник при дељењу броја m бројем n*" и $\rho(n, m) =$ „*остатак при дељењу броја m бројем n*"[16]. Уместо $\kappa(n, m)$ често се пише $\left[\dfrac{m}{n}\right]$; дакле, $m = n \cdot \left[\dfrac{m}{n}\right] + \rho(n, m)$. Такође, корисно је некада, проширити функцију ρ следећом једнакошћу $\rho(0, m) = m$.

Ако су m и n природни бројеви и $n \geqslant 1$ такви да је $\rho(n, m) = 0$, кажемо да је број m дељив бројем n, односно да је n делилац броја m, и пишемо $n \mid m$. Посебно су важни *прости* бројеви, тј. они који су дељиви **само** бројем 1 и самим собом; такви су: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ Још су старогрчки математичари показали да постоји бесконачно много простих бројева.

Једна од последица претходне теореме је и чувени *Еуклидов алгоритам*[17] – поступак за одређивање највећег заједничког делиоца два дата природна броја.

Могућност представљања бројева у позиционој нотацији у датој бројевној бази такође дугујемо *теореми о остатку*. Ако је $b > 1$ дати природан број, тада за сваки природан број a постоје јединствени природни бројеви $n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ такви да је

$$(**)\qquad \begin{cases} a = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0, \\ 0 \leqslant a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} < b,\ 1 \leqslant a_n < b. \end{cases}$$

Природни бројеви $0, 1, \ldots, b-1$ тада се означавају посебним знацима, које називамо цифрама у бројевној бази b, па ако су $c_0, c_1, \ldots, c_n$ знаци који одговарају бројевима $a_0, a_1, \ldots, a_n$ у представљању $(**)$, тада пишемо $a = (c_n \ldots c_1 c_0)_b$.

---

[16] $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

[17] Овај алгоритам се налази описан још у Еуклидовим *Елементима* (300. г. пре н.е.) и сматра се да је то најстарији нетривијалан алгоритам који је остао непромењен до данашњих дана.

О значају теореме о јединственом растављању природног броја на просте чиниоце (факторе) говори чињеница да је она некада називана *основном теоремом аритметике*.

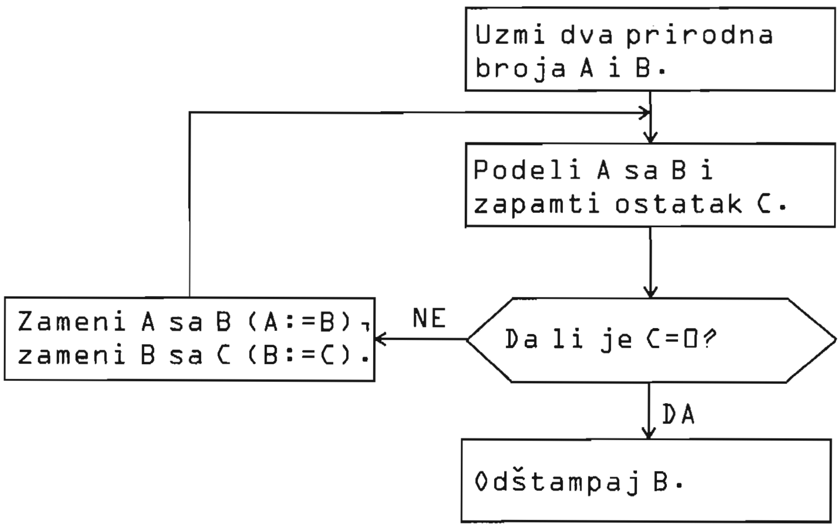
ТЕОРЕМА О РАСТАВЉАЊУ НА ПРОСТЕ ЧИНИОЦЕ. Ако је n природан број већи од 1, онда постоје јединствени прости бројеви $q_1, q_2, \ldots, q_k$ такви да је $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ и јединствени природни бројеви $m_1, m_2, \ldots, m_k$ већи од 0 такви да је $n = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_k^{m_k}$.

Ефективна израчунљивост

Појам алгоритма

Појам *алгоритма* вековима постоји у математици без прецизне дефиниције. Неформално, данас се често под алгоритмом подразумева *механички процес који се корак по корак изводи над коначним скупом података, при чему је сваки корак недвосмислено дефинисан, изводи се у коначном времену и у ограниченом делу простора.* Иако наведена реченица доста добро одговара свакодневној употреби овог појма, она се не може узети за (строгу) математичку дефиницију.

Примери алгоритама су познати практично у свим областима математике при чему неки потичу још из античког доба.



Први покушаји да се дâ строга формална анализа и математички модел појма алгоритма одиграли су се тек у XX веку, првенствено као резултат рада на основама математике и покушаја да се реше неки одатле произашли проблеми, а убрзо затим и у вези са брзим развојем електронских рачунских машина. Грубо речено, истраживања у овом правцу највише су била мотивисана потребом да се изучавају проблеми типа: *показати да не постоји алгоритам за решавање неког проблема*. Пред задацима оваквог типа интуитивни појам алгоритма је потпуно немоћан (бескористан).

Постоји више формалних система у оквиру којих се математичким средствима дефинише и анализира појам алгоритма. Сви они су базирани на следећим суштинским својствима неформалног појма алгоритма [41].

1. Сваки алгоритам дат је као *коначан низ инструкција*.
2. Постоји *рачунско средство* које интерпретира и изводи инструкције алгоритама.
3. Постоји *меморијски простор* у којем се чувају (привремено или стално) сви подаци који се јављају приликом израчунавања.
4. Израчунавање по датом алгоритму је *дискретне природе*, тј. изводи се корак по корак и без коришћења непрекидних метода или аналогних средстава.
5. Израчунавање по датом алгоритму је *детерминисано*, тј. изводи се без коришћења случајних метода или средстава (поновљене примене алгоритма на исте улазне величине производе исте излазне величине).
6. Не постоје *никаква ограничења* на величину улаза, број инструкција, величину меморије, као ни на дужину рачуна који се изводи за конкретан улаз.
7. Алгоритам *не мора давати резултат за све улазе*, тј. израчунавање помоћу алгоритма може да се никада не заврши.
8. Постоји *универзалан алгоритам* који симулира израчунавање по сваком алгоритму.
9. Алгоритама и објеката на којима се они изводе има *пребројиво много*.
10. Алгоритми, улазни и излазни симболи могу да се *ефективно кодирају* у скупу природних бројева.

Кодирање

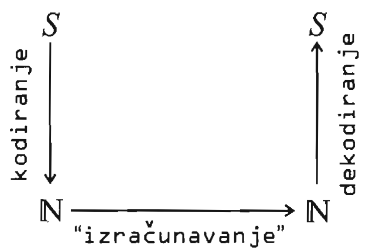
Будући да је интуиција израчунљивости по природи аритметичка, математичко заснивање идеје ефективности превасходно подразумева њену аритметичку формулацију при којој се сваки алгоритам представља неком функцијом дефинисаном на природним бројевима.

С друге стране, неформални појам алгоритма се односи на поступке са много општијом врстом улаза и излаза (као што су, на пример, поступак трансформације речи над неким алфабетом, поступак диференцирања елементарних функција итд.). Међутим, уколико је појам алгоритма формулисан у контексту природних бројева, о њему се може говорити и у било ком другом контексту који се може одговарајућим поступком превести на природне бројеве. Један такав поступак је „етикетирање" природним бројевима ненумеричких објеката (коначних дискретних објеката који су могући улази и излази). Другим речима, задати скуп (ненумеричких улаза и излаза) можемо, избором неке 1–1 функције, пресликати у скуп природних бројева. Овакво пресликавање се назива *кодирање* или *геделизација* [у част Курта Гедела – једног од најзначајнијих логичара XX века – о коме ће касније бити још речи]. Бројеви који су „етикете" називају се *кодови*.

Наравно, пре свега, подразумева се да постоји и поступак који „препознаје" објекте који чине тај ненумерички скуп. У том случају,

– кодирање се задаје неким неформалним алгоритмом „етикетирања" задатих објеката природним бројевима и

– увек заједно са *декодирањем* – неформалним алгоритмом препознавања природних бројева који су кодови и налажења (ненумеричких) објеката који су означени тим природним бројевима.



Прецизније, под кодирањем неког скупа S подразумевамо пресликавање $g : S \to \mathbb{N}$, које испуњава следеће услове:

1. ни која два елемента скупа S немају исти придружени број (g је 1–1 пресликавање),

2. за сваки елемент из S може се у коначном броју корака одредити њему придружени број,

3. за дати природан број може се у коначном броју корака проверити да ли је то кôд неког елемента из S и, ако јесте, наћи одговарајући елемент.

У већини случајева скуп S је дат на ефективан начин, што значи да постоји поступак којим се у коначно много корака може одредити да ли је нешто елемент скупа S или није.

Дакле, у овом смислу, сваки алгоритам чији су улази и излази из S може се изразити као (израчунљива) функција дефинисана над природним бројевима.

Пример 1. Искодирајмо скуп $\mathcal{W}_S$ свих речи (коначних низова) над алфабетом $S = \{\clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$. Нека је $g = \begin{pmatrix} \clubsuit & \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. Уз помоћ функције g и теореме о разлагању на просте чиниоце можемо дефинисати кôд сваког коначног низа елемената из S. Ако је $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ низ елемената из S, тада је кôд овог низа

$$\widehat{g}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = p_1^{g(z_1)} p_2^{g(z_2)} \cdots p_n^{g(z_n)},$$

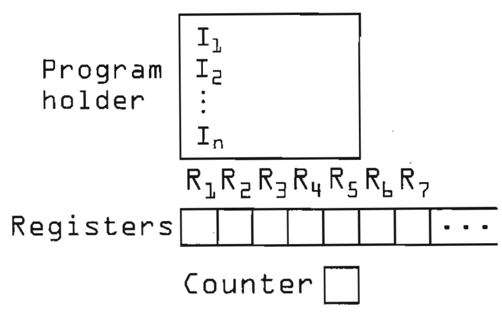
при чему је p_1, p_2, ..., p_n почетни сегмент низа простих бројева у растућем поретку ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$). На пример, $\widehat{g}(\spadesuit) = 2^9$, $\widehat{g}(\spadesuit\spadesuit) = 2^9 \cdot 3^9$, $\widehat{g}(\clubsuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\clubsuit) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7^5 \cdot 11^3$ итд.

Основно својство овако дефинисаног кодирања је да се из $\widehat{g}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ може реконструисати цео низ $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Заиста, из разлагања природног броја на просте чиниоце можемо прочитати да ли је он кôд неке речи задатог алфабета и, ако јесте, можемо одредити ту реч. На пример, број 12 ($12 = 2^2 \cdot 3$) није кôд нити једне речи, док број 864 ($864 = 2^5 \cdot 3^3$) јесте кôд речи $\heartsuit\clubsuit$. $\triangle$

Идеални рачунар

Парадигму идеје израчунавања представља *идеални рачунар*. Он се од реалног разликује само у томе што, макар потенцијално, нема никаквих ограничења на меморијски простор и величину улазних података.

Описаћемо машину за израчунавање коју ћемо назвати *идеални рачунар* или *основна машина*. Машину идеализујемо у смислу да има неограничену меморију и да никада не прави грешке. Осим ових претпоставки остале су такве да се чини да машина не може бити једноставнија.



Опис идеалног рачунара

Идеални рачунар има неограничен број регистара $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ који у сваком тренутку садрже (памте) природне бројеве; ови бројеви се могу мењати током процеса израчунавања.

Идеални рачунар има и (program holder) простор који чува коначан низ *инструкција* ($I_1, I_2, \ldots, I_n$), такозвани *програм*. Идеални рачунар је способан да интерпретира и изводи инструкције. Инструкције су, у складу са редоследом навођења у програму, нумерисане природним бројевима. Идеални рачунар има и *бројач* (counter) који у сваком тренутку садржи природан број – редни број инструкције коју треба да изврши у том тренутку. Свака инструкција поред тога што изводи неку једноставну „калкулацију“ са природним бројевима упућује и на редни број инструкције програма коју треба следећу извршити.

Како ради идеални рачунар?

Након уношења програма и одређеног (коначног) броја природних бројева у регистре идеални рачунар можемо пустити у рад. Стартовање машине подразумева упис броја 1 у *бројач* и почетак извршавања инструкција унетог програма. Идеални рачунар, у сваком тренутку, извршава инструкцију програма чији је редни број записан у *бројачу*. Тако, идеални рачунар завршава извршавање сваке инструкције уписујући у *бројач* редни број инструкције коју треба следећу извршити. Идеални рачунар престаје са радом у оном тренутку када је у *бројачу* уписан број који је већи од броја инструкција које чине програм. Ако се ово никада не догоди, машина наставља извршавање инструкција заувек.

Инструкције које извршава идеални рачунар

Идеални рачунар препознаје и извршава следећа четири типа инструкција.

Нула инструкције. $Z(1), Z(2), Z(3), Z(4), Z(5), \ldots$

Ако је $Z(n)$ ($n \geqslant 1$) у неком програму i-та инструкција ($i \geqslant 1$), идеални рачунар је извршава тако што у регистар R_n уноси број 0, а све друге регистре оставља непромењеним, и након тога у *бројач* уписује број $i + 1$.

Инструкције следбеника. $S(1), S(2), S(3), S(4), S(5), \ldots$

Ако је $S(n)$ ($n \geqslant 1$) у неком програму i-та инструкција ($i \geqslant 1$), идеални рачунар је извршава тако што број у регистру R_n увећава за 1, а све друге регистре оставља непромењеним, и након тога у *бројач* уписује број $i + 1$.

ИНСТРУКЦИЈЕ ПРЕНОСА. $T(1,1), T(1,2), \ldots, T(2,1), T(2,2), \ldots$

Ако је $T(m,n)$ $(m,n \geqslant 1)$ у неком програму i-та инструкција $(i \geqslant 1)$, идеални рачунар је извршава тако што број у регистру R_n замењује садржајем регистра R_m, а све друге регистре, укључујући и R_m, оставља непромењеним, и након тога у *бројач* уписује број $i+1$.

ИНСТРУКЦИЈЕ ПРЕЛАЗА. $J(1,1,1), J(1,1,2), \ldots, J(1,2,1), \ldots$

Ако је $J(m,n,k)$ $(m,n,k \geqslant 1)$ у неком програму i-та инструкција $(i \geqslant 1)$, идеални рачунар је извршава тако што садржаје свих регистара оставља непромењене и само у *бројач* уписује број на следећи начин: ако су садржаји регистара R_m и R_n једнаки, рачунар у *бројач* уписује број k, а ако су садржаји регистара R_m и R_n различити, рачунар у бројач уписује број $i+1$.

Нека је P неки програм и n неки природан број, $n \geqslant 1$.

Након уношења природних бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ редом у регистре $R_1, R_2, \ldots, R_n$, при чему је у свим осталим регистрима (аутоматски) уписана нула, ако идеални рачунар **заврши** израчунавање по програму P, кажемо да *програм P конвергира за улаз* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пишемо $P(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$. Под резултатом израчунавања, односно *излазом*, у случају $P(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$, сматрамо број који је остао уписан у R_1 након заустављања рада рачунара; ако је то y пишемо $P(x_1, \ldots, x_n) \downarrow y$. Уколико се идеални рачунар никада не заустави при извршавању програма P за улаз $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кажемо да *програм P дивергира за улаз* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пишемо $P(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$.

ПРИМЕР 2.Нека је P програм задат следећим низом инструкција.

$$\begin{aligned} I_1 &: J(3,2,5) \\ I_2 &: S(1) \\ I_3 &: S(3) \\ I_4 &: J(1,1,1) \end{aligned}$$

На наредној страни приказан је рад идеалног рачунара за различите улазе.

Дакле, $P(3,2) \downarrow 5$, $P(3,2,1) \downarrow 4$, док се лако види да $P(3,2,3) \uparrow$. Уопште, $P(x,y) \downarrow x+y$, за било која два природна броја x и y. Такође, ако су x, y, z произвољни природни бројеви, тада $P(x,y,z) \downarrow x+y-z$ уколико је $z \leqslant y$, док $P(x,y,z) \uparrow$ ако је $z > y$. $\triangle$

I_1 J(3, 2, 5)
I_2 S(1)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 1, 1)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	
3	2	0	0	0	0	0	···
			1				
3	2	0	0	0	0	0	···
			2				
4	2	0	0	0	0	0	···
			3				
4	2	1	0	0	0	0	···
			4				
4	2	1	0	0	0	0	···
			1				
4	2	1	0	0	0	0	···
			2				
5	2	1	0	0	0	0	···
			3				
5	2	2	0	0	0	0	···
			4				
5	2	2	0	0	0	0	···
			1				
5	2	2	0	0	0	0	···
			5				

I_1 J(3, 2, 5)
I_2 S(1)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 1, 1)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	
3	2	1	0	0	0	0	···
			1				
3	2	1	0	0	0	0	···
			2				
4	2	1	0	0	0	0	···
			3				
4	2	2	0	0	0	0	···
			4				
4	2	2	0	0	0	0	···
			1				
4	2	2	0	0	0	0	···
			5				

I_1 J(3, 2, 5)
I_2 S(1)
I_3 S(3)
I_4 J(1, 1, 1)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	
3	2	3	0	0	0	0	···
			1				

На овај начин, сваки програм P и природан број n, $n \geqslant 1$, одређују једну функцију f_n^P (n-арну парцијално дефинисану операцију скупа природних бројева)

$$f_n^P(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} y, & \text{ако } P(x_1,\dots,x_n)\downarrow y, \\ \textit{недефинисано}, & \text{ако } P(x_1,\dots,x_n)\uparrow . \end{cases}$$

Очигледно, домен функције f_n^P је подскуп од $\mathbb{N}^n$ коме припадају само оне уређене n-торке природних бројева које представљају улазе за које програм P конвергира.

Само оне функције које се могу дефинисати на овај начин сматрамо *израчунљивим*. Прецизније, функција $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$ $(D \subseteq \mathbb{N}^n)$ је *израчунљива*, ако постоји програм P такав да

$$P(x_1,\dots,x_n)\downarrow y \text{ акко } (x_1,\dots,x_n) \in D \text{ и } f(x_1,\dots,x_n) = y.$$

Наставак примера 2. Програм P нам доказује да су израчунљиве следеће функције: $f_2^P(x,y) = x+y$, $x,y \in \mathbb{N}$,

$$f_3^P(x,y,z) = \begin{cases} x+y-z, & z \leqslant y \\ \textit{недефинисано}, & z > y \end{cases}$$

али и

$$f_4^P(x,y,z,u) = \begin{cases} x+y-z, & z \leqslant y \\ \textit{недефинисано}, & z > y \end{cases}$$

и тако даље. △

Теорема. Функције:
- *нула-функција* $z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $z(x) = 0$,
- *функција следбеника* $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $s(x) = x+1$ и
- *све пројекције* $P_i^n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, $P_i^n(x_1,\dots,x_n) = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

су израчунљиве функције.

Доказ. Ове функције одговарају инструкцијама које препознаје идеални рачунар, те програм који доказује израчунљивост неке од њих чини само једна инструкција.
- Функција z је израчунљива по програму $Z(1)$.
- Функција s је израчунљива по програму $S(1)$.
- Функција P_i^n је израчунљива по програму $T(i,1)$. □

Класа израчунљивих функција – аритметичка формулација

Веома значајно откриће је да нас до израчунљивих функција доводе извесни типови дефинисања функција. Пре него што наведемо ове типове, даћемо неколико напомена у вези са ознакама.

Наиме, често се функција $f : D \to \mathbb{N}$, где је $D \subseteq \mathbb{N}^k$ $(k \geqslant 1)$ означава и са $f(x_1, \ldots, x_k)$, при чему $x_1, \ldots, x_k$ треба схватити као „чуваре“ места на која треба поставити аргументе из одговарајућег домена. Тако ће, у овом поглављу, $f(x_1, \ldots, x_k)$ означавати и саму функцију $f : D \to \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{N}^k$, чији домен D не морамо експлицитно наводити јер га одређује контекст у коме се говори о функцији f или се, пак, само претпоставља да је познат. Једнакост $f(x_1, \ldots, x_k) = g(x_1, \ldots, x_k)$ треба схватити у смислу да ако је за $(x_1, \ldots, x_k)$ дефинисана једна од функција онда је дефинисана и друга и оне имају исте вредности.

Супституција. Функција $f(x_1, \ldots, x_n)$ добијена је *супституцијом* функција $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots$, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ у функцију $h(y_1, \ldots, y_k)$ ако је

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Рекурзија. Функција $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ добијена је *рекурзијом* из функција $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ ако је

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n), \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Минимизација. Функција $f(x_1, \ldots, x_n)$ добијена је *минимизацијом* функције $g(x_1, \ldots, x_n, y)$, ако је $f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$, при чему је

$$\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) = \begin{cases} y, & y \text{ је најмањи природан број такав да је } g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \text{ ако такав број постоји и ако је } g(x_1, \ldots, x_n, z) \text{ дефинисано за све } z \text{ такве да је } z \leqslant y, \\ \textit{недефинисано}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интуитивно, поступак израчунавања $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ је следећи: рачунамо $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$, $g(x_1, \ldots, x_n, 1)$, $g(x_1, \ldots, x_n, 2)$, ... све док не добијемо први природан број z такав да је $g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$ и тада је $\mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0) = z$.

ТЕОРЕМА. Скуп израчунљивих функција је најмањи (у смислу инклузије) скуп који садржи *основне функције* (z, s и P_i^n, $1 \leqslant i \leqslant n$) и затворен је за *суйсйийуцију*, *рекурзију* и *минимизацију*.

Претходна теорема нам заправо омогућава и другачију дефиницију израчунљивости. Функција f је *израчунљива* ако постоји низ функција $f_1, \ldots, f_n$ такав да је $f_n = f$ и за свако i, $i \leqslant n$, f_i је основна функција или се f_i може добити применом супституције или рекурзије или минимизације на неке од функција $f_1, \ldots, f_{i-1}$. Израчунавање вредности таквих функција своди се на израчунавање основних функција и примену правила супституције, рекурзије и минимизације. Доказ да је израчунљива свака функција одређена на овај начин спроводи се кодирањем свих израчунљивих функција. Више детаља у вези са претходном теоремом читалац може пронаћи у [8, 47].

Приметимо да је могућност и исправност оваквог дефинисања класе израчунљивих функција у блиској вези са индуктивном дефиницијом природних бројева коју су увели Дедекинд и Пеано.

ПРИМЕР 3. а) *Сабирање* $f_1(x, y) = x + y$ је израчунљива функција, јер је $f_1(x, 0) = x$, $f_1(x, s(y)) = s(f_1(x, y))$ (односно $x + 0 = x$, $x + s(y) = s(x + y)$).

б) *Множење* $f_2(x, y) = x \cdot y$ је израчунљива функција, јер је $f_2(x, 0) = 0$, $f_2(x, s(y)) = f_1(x, f_2(x, y))$ (или $x \cdot 0 = x$, $x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x$).

в) *Сшейеновење* $f_3(x, y) = x^y$ је израчунљива функција, јер је $f_3(x, 0) = 1$, $f_3(x, s(y)) = f_2(x, f_3(x, y))$ ($x^0 = 1$, $x^{s(y)} = x^y \cdot x$).

г) Израчунљива је и функција $f_4(x, y) = x^{\left.x^{\cdot^{\cdot^{x}}}\right\} y \text{ пута}}$ дефинисана са $f_4(x, 0) = 1$, $f_4(x, s(y)) = f_3(x, f_4(x, y))$. Израчунљива је и функција f_5 дата са f_5, $f_5(x, 0) = 1$, $f_5(x, s(y)) = f_4(x, f_5(x, y))$, итд.

д) Веома важна израчунљива функција је и

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ако је } x \geqslant y, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

при чему је „$-$“ ознака за *одузимање* (уобичајену парцијално дефинисану бинарну операцију скупа природних бројева).

ђ) Функција $g(x, y) = |x - y^2|$ је израчунљива ($|x - y^2| = (x \dot{-} y^2) + (y^2 \dot{-} x)$).

е) Функција $f(x) = \mu y(|x - y^2| = 0)$ је израчунљива. Приметимо да је

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ако је } x \text{ квадрат природног броја,} \\ \textit{недефинисано}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

као и да је, на пример, $f(4) \downarrow 2$, $f(2) \uparrow$. △

За подскуп A скупа природних бројева $\mathbb{N}$ кажемо да је *рекурзиван* (*одлучив*) ако је његова карактеристична функција $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинисана са

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x \in A, \\ 0, & \text{ако је } x \notin A, \end{cases}$$

израчунљива функција. Слично, за подскуп R скупа $\mathbb{N}^k$ кажемо да је *рекурзивна* (k-арна) релација ако је њена карактеристична функција $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ израчунљива.

Упоредо са рекурзивним скуповима (релацијама) природно се јављају и такозвани *рекурзивно набројиви* скупови (релације). Као што им име каже, то су скупови чије елементе „набрајају“ израчунљиве функције, тј. скупови који су кодомени израчунљивих функција.

Дефиниција. Непразан скуп A, $A \subseteq \mathbb{N}$, је *рекурзивно набројив* ако постоји израчунљива функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да је $A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$.

Теорема. Постоји рекурзивно набројив скуп који није рекурзиван.

Пример рекурзивно набројивог скупа који није рекурзиван навешћемо касније (скуп Δ на страни 132).

λ-рачун

Једна од првих дефиниција израчунљивих функција дата је у оквиру λ-рачуна који је увео Алонсо Черч 30-их година XX века. Наводимо га, између осталог, и због чињенице да доста добро илуструје снагу апстрактних идеја у математици.

Черчов λ-рачун се може назвати и *најмањи универзални програмски језик*. Универзалан је у смислу да се све израчунљиве функције могу изразити и њихове вредности „израчунавати“ уз помоћ овог формализма. Напоменимо да су у λ-рачуну функције схваћене, у старинском смислу, као „процеси преласка од аргумента до вредности“ или, у савременој терминологији, као „програми који за задате улазе дају некакве излазе“.

Изрази представљају основне појмове. Дефинишемо их рекурзивно полазећи од неограниченог скупа *имена*, које можемо звати и *променљивама*,

$$a, b, c, \dots, x, y, z, a', b', c', \dots, z', a'', b'', \dots, a''', \dots$$

Корисно је замишљати да свако од слова означава неку функцију (математичку операцију).

1. Свака променљива представља израз.
2. Ако су E и F неки изрази, онда је и (EF) израз.
3. Ако је x променљива и E израз, онда је $(\lambda x.E)$ такође израз.
4. Изрази се могу добити само применом претходна три правила коначан број пута.

При састављању израза можемо изостављати заграде да бисмо, у неким случајевима, олакшали његову „читљивост"; тако, на пример, скоро увек ћемо изостављати спољашње заграде (ако је (E) израз, онда је и E израз). Такође, да би се избегло нагомилавање заграда, усваја се и договор да функцију примењујемо слева, то јест да израз $E_1E_2 \cdots E_n$ означава израз $(\cdots((E_1E_2)E_3)\cdots)E_n$. Такође, приликом дефинисања израза правилом 3, уместо $\lambda x.E$, пише се $\lambda x.[E]$.

Два основна „поступка" су *апликација* и *апстракција* (тачке 2 и 3 претходне дефиниције).

Тако, када напишемо $a = bc$ сматрамо да функција b „делује" на функцију c и даје резултат који је нека трећа функција a. Слично, у изразу $(fp)q$, f схватамо као функцију две променљиве p и q (резултат примене функције (fp) на функцију q).

Грчко слово λ (иза којег следи променљива са тачком) схватамо као „произвољна (променљива)"; на појаву променљиве иза тачке можемо гледати као на „празнину" у коју се може убацити било шта.

Ако напишемо $\lambda x.[fx]$, означили смо функцију која примењена, на пример, на a даје резултат fa,

$$\lambda x.[fx]a = fa.$$

Другим речима, $\lambda x.[fx]$ је једноставно функција f. Слично, $\lambda f.[f(f(x))]$ представља функцију која, када делује на неку другу функцију g, даје g примењено два пута на x, тј.

$$\lambda f.[f(f(x))]g = g(g(x)).$$

Такође, могли смо „апстраховати“ прво x, а затим и f, и тада бисмо добили

$$\lambda f.[\lambda x.[f(f(x))]] \text{ или краће } \lambda fx.[f(f(x))].$$

Ово је поступак који када се примени на g, даје „двоструку примену функције g“. Заправо, ово је функција коју Черч идентификује са природним бројем 2:

$$\mathbf{2} = \lambda fx.[f(f(x))].$$

Дакле, $(\mathbf{2}g)a = g(g(a))$. Слично се дефинишу остали природни бројеви. На пример,

$$\mathbf{3} = \lambda fx.[f(f(f(x)))],\ \mathbf{4} = \lambda fx.[f(f(f(f(x))))],\ \ldots$$

заједно са $\mathbf{1} = \lambda fx.[f(x)]$ и $\mathbf{0} = \lambda fx.[x]$.

Черчово $\mathbf{2}$ је налик изразу „двапут“, његово $\mathbf{3}$ изразу „трипут“ итд. Тако је деловање $\mathbf{3}$ на функцију f, односно $\mathbf{3}f$, поступак „поновити f три пута“.

Погледајмо сада како се функција следбеник – додавање броја $\mathbf{1}$ – може изразити у Черчовом формализму. Нека је

$$S = \lambda abc.[b((ab)c)].$$

Тада је, на пример,

$$S\mathbf{2} = \lambda abc.[b((ab)c)]\mathbf{2} = \lambda bc.[b((\mathbf{2}b)c)] = \lambda bc.[b(b(b(c)))] = \mathbf{3}.$$

Основне аритметичке операције сабирање, множење и степеновање можемо редом представити на следећи начин:

$$A = \lambda abcd.[((ac)(bc))d], \quad M = \lambda abc.[a(bc)], \quad P = \lambda ab[ab].$$

На пример,

$$\begin{aligned}(A\mathbf{3})\mathbf{2} &= (\lambda abcd.[((ac)(bc))d]\mathbf{3})\mathbf{2} = \lambda bcd.[((\mathbf{3}c)(bc))d]\mathbf{2}\\ &= \lambda bcd.[(c(c(c(bc)))d]\mathbf{2} = \lambda cd.[(c(c(c((\mathbf{2}c)))d]\\ &= \lambda cd.[(c(c(c(c(c(d))))))] = \mathbf{5}.\end{aligned}$$

И да поновимо, све израчунљиве функције се могу представити у λ-рачуну! Последњих година λ-рачун је постао веома инетересантан, јер се испоставило да овај формализам представља веома моћну основу за (функционалне) програмске језике.

Черчова теза

Велики број савремених математичара сматра да интуитивну идеју ефективности у потпуности одређује скуп израчунљивих функција. То уверење се изражава **Черчовом тезом** (формулисаном 1936. године): *свака интуитивно израчунљива функција припада скупу израчунљивих функција.* Како се подразумева да су израчунљиве функције и интуитивно израчунљиве, у Черчовој тези се тврди да је класа свих *интуитивно израчунљивих* функција једнака скупу свих *израчунљивих функција*. У овој хипотези се један нематематички појам, класа интуитивно израчунљивих функција, изједначава са конкретним математичким објектом – скупом израчунљивих функција, те се она најчешће схвата као математичка дефиниција ефективног поступка: *ефективан је сваки поступак који се може описати израчунљивом функцијом.* Потврда за тезу налази се у чињеници да до данас ниједан систем израчунљивости није дао неки шири скуп израчунљивих функција од оног који је овде дефинисан.

Черчова теза оправдава претпоставку да је сваки алгоритам $\mathbf{A}$ у потпуности репрезентован неком рекурзивном функцијом $f_{\mathbf{A}}$, и обрнуто, да сваку рекурзивну функцију f можемо схватити као алгоритам (програм) $\mathbf{A}_f$ који за `ULAZ`$:= (x_1, \ldots, x_k)$ или даје `IZLAZ`$:= f(x_1, \ldots, x_k)$ или, уколико је $f(x_1, \ldots, x_k)$ *недефинисано*, $\mathbf{A}_f$ се „заглави“ у израчунавању, рецимо упадањем у „бесконачну петљу“, не дајући нам икакав `IZLAZ`.

Проблем заустављања

Поступак одређивања резултата (тј. излаза) израчунавања по неком програму P за задати улаз $(x_1, \ldots, x_n)$ можемо представити функцијом $\mathrm{Universal} : \mathcal{P} \times \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$, при чему је $\mathcal{P}$ скуп свих програма и $\mathbb{N}^{<\omega}$ скуп свих коначних низова природних бројева,

$$\mathrm{Universal}(P, (x_1, \ldots, x_n)) = \begin{cases} y, & \text{ако } P(x_1, \ldots, x_n) \downarrow y, \\ \textit{недефинисано}\,, & \text{ако } P(x_1, \ldots, x_n) \uparrow . \end{cases}$$

Будући да је реч о поступку са ненумеричким аргументима (аргументи поступка су облика (програм, уређена n-торка)), погодним кодирањем га можемо превести у поступак израчунавања вредности функције $\mathrm{U}(n, m)$, где су n и m природни бројеви. Под погодним кодирањем подразумевамо кодирање које омогућава *ефективно набрајање* свих програма (тј. израчунљивих функција). Наиме, може се дефинисати функција $\kappa : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ тако да се сваком програму једнозначно и ефективно додељује јединствен природан број (кôд тог програма), као и да се за сваки природан број n може ефективно одредити програм P такав да је $\kappa(P) = n$. Овакво бијективно кодирање допушта, пре свега, *ефективно набрајање* свих програма $P_1, P_2, P_3, \ldots$, односно свих израчунљивих функција $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Слободније речено, *ефективно именовање* природним бројевима сваке израчунљиве функције. Ефективно набрајење свих израчунљивих функција је кључна идеја теорије израчунљивости уопште.

Такође, поступком који је сасвим сличан поступку кодирања приказаном у примеру 1 (на страни 120), можемо искодирати све коначне низове природних бројева (тј. све улазе).

Дакле, на прву координату аргумента (n, m) на који се примењује функција U гледамо као на ознаку неког програма (тј. израчунљиве функције), а на другу као на ознаку неког коначног низа природних бројева. Тако, уколико тражимо вредност $\mathrm{U}(n, m)$, значи да нас занима резултат израчунавања по програму (чији је кôд) n за улаз (чији је кôд) m. Оно што је најзначајније је чињеница да је U израчунљива функција. Функција U се назива *универзални алгоритам*[18] јер у извесном смислу „опонаша“ сваки програм:

- ако је $P_n(x_1, \ldots, x_n) \downarrow y$, онда је и $\mathrm{U}(n, \text{кôд}(x_1, \ldots, x_n)) \downarrow y$, а
- ако је $P_n(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$, онда је и $\mathrm{U}(n, \text{кôд}(x_1, \ldots, x_n)) \uparrow$.

Даље, природно је и да се запитамо о статусу релације $\downarrow$, па тиме и њене негације $\uparrow$, са становишта теорије израчунљивости. Да ли постоји ефективан поступак за одређивање шта уписати, $\downarrow$ или $\uparrow$, иза произвољно изабраног и задатог пара $(P, (x_1, \ldots, x_n))$? Односно, да ли постоји ефективан поступак који за било који задати пар $(P, (x_1, \ldots, x_n))$ даје одговор „да“ уколико је $P(x_1, \ldots, x_n) \downarrow$ и одговор „не“ ако је $P(x_1, \ldots, x_n) \uparrow$. Проблем постојања оваквог поступка назива се *проблем заустављања* или *халтинг проблем*. Тјуринг је показао да не постоји алгоритам који се захтева у проблему заустављања.

[18] Грубо говорећи, сваки савремени рачунар „ради“ по универзалном алгоритму, тј. опонаша сваки алгоритам – довољно је само да му задамо кôд тог алгоритма.

Будући да се проблем заустављања може формулисати и питањем: „Да ли је одговарајућа функција Halt : $\mathcal{P}\times\mathbb{N}^{<\omega} \to \{\downarrow, \uparrow\}$ израчунљива?“, његово решавање се кодирањем своди на питање израчунљивости функције

$$\mathrm{H}(n,m) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \mathrm{U}(n,m)\downarrow, \\ 0, & \text{ако } \mathrm{U}(n,m)\uparrow. \end{cases}$$

Да не постоји алгоритам који захтева проблем заустављања, односно да H није израчунљива функција, директно следи из чињенице да скуп $\Delta = \{n \mid \mathrm{U}(n,n)\downarrow\}$ није рекурзиван, односно да његова карактеристична функција

$$\chi_\Delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathrm{U}(n,n)\downarrow, \\ 0, & \text{ако је } \mathrm{U}(n,n)\uparrow, \end{cases}$$

није израчунљива. Кључна идеја доказа је чувени Канторов дијагонални аргумент.

Да бисмо доказали да функција χ_Δ није израчунљива, претпоставићемо управо супротно. Ако би χ_Δ била израчунљива функција, таква би била и функција h дефинисана са

$$h(n) = \begin{cases} \uparrow, & \text{ако је } \chi_\Delta(n) = 1, \\ 1, & \text{ако је } \chi_\Delta(n) = 0. \end{cases}$$

(Користећи програм за χ_Δ једноставно добијамо програм за h; приметите да програм за h треба да „упадне“ у бесконачну петљу када је $\chi_\Delta(n) = 1$, односно $\mathrm{U}(n,n)\downarrow$.) Као израчунљива, функција h се налази на ефективном списку свих таквих функција, па је $h = f_m$, за неки природан број m. Припада ли m скупу Δ или не?

Ако $m \in \Delta$, онда је $\mathrm{U}(m,m)\downarrow$, односно $f_m(m)\downarrow$, па и $h(m)\downarrow$, одакле следи да је $\chi_\Delta(m) = 0$, што није могуће јер $m \in \Delta$ ($\chi_\Delta(m) = 1$). Ако $m \notin \Delta$, онда је $\mathrm{U}(m,m)\uparrow$, односно $f_m(m)\uparrow$, па и $h(m)\uparrow$, одакле следи да је $\chi_\Delta(m) = 1$, што је немогуће јер $m \notin \Delta$ ($\chi_\Delta(m) = 0$).

Проблем заустављања има важну улогу у теорији рекурзија, јер се неодлучивост многих других проблема доказује на основу неодлучивости проблема заустављања.

РЕАЛНИ БРОЈЕВИ

Структура реалних бројева

Поред структуре природних бројева, за математику је од великог значаја и *структура реалних бројева* $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$.

Проблеми везани за строго дефинисање појма реалног (пре свега ирационалног – нерационалног) броја дубоко су уткани у историју математике и значајно су утицали на њен развој. Историјски, први ирационалан број који се појавио је чувени $\sqrt{2}$, и то након открића несамерљивих дужи (видети страну 104); прецизније, открићем да страница квадрата и његова дијагонала нису самерљиве дужи у смислу да однос мерних бројева њихових дужина није једнак односу нека два природна броја. Брзо су се појављивали нови ирационални бројеви: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... Тако је настала *питагорејска раван* као проширење *рационалне равни* тачкама које се могу конструисати лењиром и шестаром. Али, испоставило се (појавом бројева $\sqrt[3]{2}, \pi, \dots$) да *еуклидска раван* садржи још много тачака које не леже у *питагорејској равни*. Проблем *како дефинисати нове бројеве* остајао је без задовољавајућег решења све до краја XIX века када су, скоро независно један од другог, Вајерштрас, Дедекинд и Кантор изградили савремену теорију реалних бројева. Вајерштрас је реалне бројеве увео као (децималне) записе облика $\pm d_0, d_1 d_2 d_3 \dots$, где је d_0 (децимални) запис неког природног броја, а $d_1, d_2, d_3, \dots$ су *децимале*, тј. чланови скупа $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Кантор је своју теорију засновао на *Кошијевим низовима* рационалних бројева (видети страну 203); неки реалан број r је у потпуности одређен низом (r_n) „све бољих и бољих“ апроксимација из $\mathbb{Q}$. По Дедекинду, реалан број r је окарактерисан паром (L_r, D_r) скупова рационалних бројева, где је L_r скуп свих рационалних бројева који су мањи од r и D_r скуп свих рационалних бројева већих од r. Као што видимо, скуп реалних бројева се изграђује, углавном, помоћу подскупова рационалних бројева.

Пример 1. Дедекиндова конструкција реалних бројева. Историчари математике корене Дедекиндове конструкције[19] налазе у Еудоксовој теорији размера (видети одељак *Грци и бесконачнос̄т – III*, страна 24), коју је Еуклид изложио у петој књизи *Елемена̄та*.

Подскуп α скупа $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је *Дедекиндов ӣресек*, ако су испуњени следећи услови:

- $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- за свако q из α, из $x \in \mathbb{Q}$ и $x < q$ следи $x \in \alpha$,
- у скупу α не постоји највећи елемент.

Приметимо, најпре, да за сваки рационалан број q скуп $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, који ћемо овом приликом означавати са $\langle \leftarrow, q\rangle$, јесте један Дедекиндов пресек. Међутим, постоје и Дедекиндови пресеци који нису облика $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$, $q \in \mathbb{Q}$; такав је, на пример, скуп $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$. Означимо са $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ скуп свих Дедекиндових пресека. Пресликавање $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$, дато са $f(q) = \langle \leftarrow, q\rangle$, $q \in \mathbb{Q}$, јесте 1–1, али није **на**.

Уређење скупа $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$: $\alpha \preccurlyeq \beta$ акко $\alpha \subseteq \beta$; $\alpha \prec \beta$ акко $\alpha \preccurlyeq \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

Особине. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$:

(**Ur**) $\alpha \preccurlyeq \alpha$,
(**Ua**) ако $\alpha \preccurlyeq \beta$ и $\beta \preccurlyeq \alpha$, онда $\alpha = \beta$,
(**Ut**) ако $\alpha \preccurlyeq \beta$ и $\beta \preccurlyeq \gamma$, онда $\alpha \preccurlyeq \gamma$,
(**Ul**) $\alpha \preccurlyeq \beta$ или $\beta \preccurlyeq \alpha$.

Операција (сабирања) $\oplus$ у скупу $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$: $\alpha \oplus \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \mid a \in \alpha, b \in \beta\}$.

Особине. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$:

(**S**) $\alpha \oplus \beta \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$, (**Sk**) $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$,
(**Sa**) $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$, (**Sn**) $\alpha \oplus \langle \leftarrow, 0\rangle = \alpha$,
(**US**) из $\alpha \preccurlyeq \beta$, следи $\alpha \oplus \gamma \preccurlyeq \beta \oplus \gamma$.

Инверз за $\oplus$: $\sim \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{-x \mid x \notin \alpha, x$ није најмањи елемент скупа $\mathbb{Q} \setminus \alpha\}$.

Особине. За произвољан елемент α из $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$:

(**Si0**) $\sim \alpha \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$, (**Si**) $\alpha \oplus (\sim \alpha) = \langle \leftarrow, 0\rangle$,
(**Si1**) из $\alpha \prec \langle \leftarrow, 0\rangle$, следи $\langle \leftarrow, 0\rangle \prec \sim \alpha$, (**Si2**) $\sim (\sim \alpha) = \alpha$,
(**Si3**) из $\langle \leftarrow, 0\rangle \prec \alpha$, следи $\sim \alpha \prec \langle \leftarrow, 0\rangle$.

[19] Дедекинд је, према сопственом сведочењу, конструисао реалне бројеве за један дан (24. новембра 1858. године) тражећи начин да добро заснује курс Calculus-а на Циришкој политехничкој школи, [20].

Операција (множења) $\odot$ у скупу $\mathbb{R}_\mathrm{D}$: ако је $\langle\leftarrow, 0\rangle \prec \alpha$ и $\langle\leftarrow, 0\rangle \prec \beta$, онда је $\alpha \odot \beta \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\} \cup \{a \cdot b \mid a \in \alpha, b \in \beta, 0 < a, 0 < b\}$, док је

$$\alpha \odot \beta = \begin{cases} \langle\leftarrow, 0\rangle, & \alpha = \langle\leftarrow, 0\rangle \text{ или } \beta = \langle\leftarrow, 0\rangle, \\ (\sim \alpha) \odot (\sim \beta), & \alpha \prec \langle\leftarrow, 0\rangle, \beta \prec \langle\leftarrow, 0\rangle, \\ \sim ((\sim \alpha) \odot \beta), & \alpha \prec \langle\leftarrow, 0\rangle, \langle\leftarrow, 0\rangle \prec \beta, \\ \sim (\alpha \odot (\sim \beta)), & \beta \prec \langle\leftarrow, 0\rangle, \langle\leftarrow, 0\rangle \prec \alpha. \end{cases}$$

ОСОБИНЕ. За произвољне елементе α, β, γ из $\mathbb{R}_\mathrm{D}$:

(**M**) $\alpha \odot \beta \in \mathbb{R}_\mathrm{D}$,
(**Mk**) $\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha$,
(**Ma**) $\alpha \odot (\beta \odot \gamma) = (\alpha \odot \beta) \odot \gamma$,
(**Mn**) $\alpha \odot \langle\leftarrow, 1\rangle = \alpha$,
(**SM**) $(\alpha \oplus \beta) \odot \gamma = (\alpha \odot \gamma) \oplus (\alpha \odot \gamma)$,
(**UM**) из $\langle\leftarrow, 0\rangle \prec \alpha$ и $\langle\leftarrow, 0\rangle \prec \beta$, следи $\langle\leftarrow, 0\rangle \prec \alpha \odot \beta$.

Како за све рационалне бројеве a и b важе једнакости:

$$\langle\leftarrow, a\rangle \oplus \langle\leftarrow, b\rangle = \langle\leftarrow, a+b\rangle, \sim \langle\leftarrow, a\rangle = \langle\leftarrow, -a\rangle, \langle\leftarrow, a\rangle \odot \langle\leftarrow, b\rangle = \langle\leftarrow, a \cdot b\rangle,$$

односно $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$, $f(-a) = \sim f(a)$, $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$, као и еквиваленција

$$\langle\leftarrow, a\rangle \preccurlyeq \langle\leftarrow, b\rangle \text{ акко } a \leqslant b, \ \text{ тј. } f(a) \preccurlyeq f(b) \text{ акко } a \leqslant b,$$

операције $\oplus$, $\sim$, $\oplus$ и уређење $\preccurlyeq$ можемо сматрати редом проширењима операција $+$, $-$, $\cdot$ и уређења $\leqslant$ скупа $\mathbb{Q}$. Ова чињеница оправдава коришћење истих ознака $+$, $-$, $\cdot$ и $\leqslant$ за одговарајуће операције и уређење скупа $\mathbb{R}_\mathrm{D}$. Природно се може проширити и парцијална операција *инверза у односу на множење*:

$$\langle\leftarrow, a\rangle^{-1} \overset{\text{def}}{=} \langle\leftarrow, a^{-1}\rangle, \ a \in \mathbb{Q},$$

а ако је $\alpha \neq \langle\leftarrow, a\rangle$ за свако $a \in \mathbb{Q}$, онда је

$$\alpha^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\} \cup \{x^{-1} \mid x > 0, x \notin \alpha\}, \text{ у случају да је } \langle\leftarrow, 0\rangle < a$$

и $\alpha^{-1} \overset{\text{def}}{=} -(-\alpha)^{-1}$ уколико је $a < \langle\leftarrow, 0\rangle$. Није тешко проверити:
(**Mi**) ако је $\alpha \neq \langle\leftarrow, 0\rangle$, онда је $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \langle\leftarrow, 1\rangle$.

Дакле, изграђена структура $\mathbf{R}_\mathrm{D} = (\mathbb{R}_\mathrm{D}, \leqslant, +, \cdot, \langle\leftarrow, 0\rangle, \langle\leftarrow, 1\rangle)$ је наследила све основне особине операција и уређења структуре рационалних бројева $\mathbf{Q} = (\mathbb{Q}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$. Испоштован је принцип перманенције (видети страну 103), те се $\mathbf{R}_\mathrm{D}$ може сматрати правим проширењем структуре $\mathbf{Q}$. $\triangle$

Дедекиндова конструкција (као и Канторова и Вајерштрасова) доводи нас до структуре која је *уређено поље* и која проширује структуру рационалних бројева.

Дефиниција. *Уређено поље* је структура $\mathbf{F} = (F, \leqslant_{\mathbf{F}}, +_{\mathbf{F}}, \cdot_{\mathbf{F}}, 0_{\mathbf{F}}, 1_{\mathbf{F}})$, где је $(F, +_{\mathbf{F}}, \cdot_{\mathbf{F}}, 0_{\mathbf{F}}, 1_{\mathbf{F}})$ поље, а $\leqslant_{\mathbf{F}}$ линеарно уређење на F сагласно са операцијама $+_{\mathbf{F}}$ и $\cdot_{\mathbf{F}}$ (тј. са сабирањем и множењем у пољу), односно структура која задовољава следећа својства, такозване *аксиоме за уређено поље* (индекс $\mathbf{F}$ у ознакама за релацију, операције и константе изостављамо, што ћемо и убудуће често чинити, остављајући да контекст одреди на који скуп се ови објекти односе). За произвољне елементе $x, y, z \in F$

(Sk) $x + y = y + x$,
(Sa) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(Sn) $x + 0 = x$,
(Si) постоји x' из F такав да је $x + x' = 0$,
(Mk) $x \cdot y = y \cdot x$,
(Ma) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
(Mn) $x \cdot 1 = x$,
(Mi) ако је $x \neq 0$ онда постоји x' из F да је $x \cdot x' = 1$,
(SM) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,
(01) $0 \neq 1$,
(Ur) $x \leqslant x$,
(Ua) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, следи $x = y$,
(Ut) из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, следи $x \leqslant z$,
(Ul) $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$,
(US) из $x \leqslant y$, следи $x + z \leqslant y + z$,
(UM) из $x \leqslant y$ и $0 \leqslant z$, следи $x \cdot z \leqslant y \cdot z$.

Пре свега, структура рационалних бројева $\mathbf{Q} = (\mathbb{Q}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$ јесте једно уређено поље и у класи свих уређених поља, има специјалан статус: $\mathbf{Q}$ представља *минимално* уређено поље, у смислу да свако уређено поље $\mathbf{F}$ садржи **изоморфну копију** уређеног поља рационалних бројева. Сасвим природно је ово очекивати, будући да у грађењу поља $\mathbf{Q}$ учествује само „грађа“ коју добијамо из аксиома уређеног поља; слободније речено, рационални бројеви настају од бројева 0 и 1 применом четири основне рачунске операције $+$, $\cdot$, $-$ и $^{-1}$. Уверимо се у ово и директно.

Приметимо најпре да свако уређено поље $\mathbf{F}$ садржи елементе

$$0_{\mathbf{F}},\ 1_{\mathbf{F}},\ 1_{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} 1_{\mathbf{F}},\ 1_{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} 1_{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} 1_{\mathbf{F}},\ \ldots,$$

тј. за сваки природан број n, F садржи елемент $n_{\mathbf{F}}$ који представља збир $\underbrace{1_{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} \cdots +_{\mathbf{F}} 1_{\mathbf{F}}}_{n \text{ пута}}$. Није тешко показати да су сви издвојени елементи међусобно различити, то јест да за све природне n и m, из $m \neq n$ следи да је $m_{\mathbf{F}} \neq n_{\mathbf{F}}$ (свако уређено поље је карактеристике 0), те да скуп $\mathbb{N}_{\mathbf{F}} = \{n_{\mathbf{F}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ заједно са функцијом $s_{\mathbf{F}} : \mathbb{N}_{\mathbf{F}} \to \mathbb{N}_{\mathbf{F}}$, $s_{\mathbf{F}}(x) = x +_{\mathbf{F}} 1_{\mathbf{F}}$, и константом $0_{\mathbf{F}}$ задовољава све Пеанове аксиоме и, у том смислу, представља природне бројеве. Даље, ако за негативан цео број n ставимо да је $n_{\mathbf{F}} = -m_{\mathbf{F}}$, где је $m = -n$, добићемо целе бројеве посматраног уређеног поља, тј. једну копију скупа целих бројева $\mathbb{Z}$: $\ldots, -2_{\mathbf{F}}, -1_{\mathbf{F}}, 0_{\mathbf{F}}, 1_{\mathbf{F}}, 2_{\mathbf{F}}, \ldots$ Најзад, сваки рационалан број $\dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^{+}$, има своју слику $m_{\mathbf{F}} \cdot_{\mathbf{F}} n_{\mathbf{F}}^{-1}$ у F. Прецизније, може се показати да је пресликавање $f : \mathbb{Q} \to F$, дефинисано са $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = m_{\mathbf{F}} \cdot_{\mathbf{F}} n_{\mathbf{F}}^{-1}$, **јединствено утапање** уређеног поља $\mathbf{Q}$ у $\mathbf{F}$. Ова чињеница нам даје за право да скуп (уређено поље) рационалних бројева $\mathbb{Q}$ ($\mathbf{Q}$) сматрамо једним подскупом (потпољем) од F ($\mathbf{F}$), иако је подскуп (у правом смислу) заправо слика, у ознаци $\mathbb{Q}_{\mathbf{F}}$, скупа $\mathbb{Q}$ у $\mathbf{F}$.

Приметимо да је Дедекиндова конструкција заправо изградња уређеног поља $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$ које је право проширење уређеног поља $\mathbf{Q}$.

Можемо ли неким својством издвојити структуру $\mathbf{R}$ из класе свих уређених поља? Испоставља се да, попут принципа индукције у случају природних бројева, кључно својство у карактеризацији реалних бројева је својство *комплетности*.

($\mathbf{Sup}$) **Сваки одозго ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има супремум**[20]!

НАСТАВАК ПРИМЕРА 1. Уређено поље $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$ задовољава својство ($\mathbf{Sup}$)!
Доказ. Нека је X произвољан одозго ограничен подскуп од $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$. Није тешко доказати да је $\widehat{\xi} = \bigcup_{\xi \in X} \xi$ Дедекиндов пресек, као и да је $\widehat{\xi}$ горње ограничење скупа X. При том, за свако друго горње ограничење α скупа X, будући да је $\xi \leqslant \alpha$, $\xi \in X$, важи $\widehat{\xi} \leqslant \alpha$, што значи $\widehat{\xi} = \sup X$. △

[20]Супремум скупа је најмање горње ограничење тог скупа.

Својство (**Sup**) познато је и као *аксиома комплетности* или *аксиома непрекидности* или пак *аксиома супремума*. Као у случају структуре природних бројева, тј. уз извесне претпоставке о скуповима са којима радимо (видети [7]), ова аксиома структуру реалних бројева издваја као једино уређено поље које задовољава овај принцип. Другим речима, реченица „*Структура* **R** *је комплетно уређено поље.*" (до на изоморфизам) описује структуру реалних бројева, те се често (на разним курсевима математике) ова реченица узима за дефиницију реалних бројева, то јест реални бојеви се уводе као структура $(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$ која задовољава *аксиоме за комплетно уређено поље*, односно (**Sk**) $\cdots$ (**UM**) + (**Sup**) (а уверили смо се да овакве структуре постоје; таква је $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$). Узимање овог скупа аксиома за дефиницију структуре реалних бројева оправдава наредна теорема.

Теорема. Свака два комплетно уређена поља су изоморфна.

Заиста, ако су **F** и **K** два комплетно уређена поља, може се показати да је пресликавање $f : F \to K$ дефинисано еквиваленцијом:

$$f(a) = b \text{ акко } \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leqslant_{\mathbf{F}} a\} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leqslant_{\mathbf{K}} b\},\ a \in F, b \in K,$$

један изоморфизам $f : \mathbf{F} \cong \mathbf{K}$. Нагласимо да смо ознаку $\mathbb{Q}$ у дефиницији пресликавања f употребили како за скуп $\mathbb{Q}_{\mathbf{F}}$, тако и за $\mathbb{Q}_{\mathbf{K}}$, што ћемо и у будуће чинити у сличним ситуацијама.

Идеја о аксиоматском приступу при дефинисању реалних бројева припада Хилберту. Овакав приступ је постао могућ тек након радова Дедекинда, Кантора и Вајерштраса у којима су дати докази егзистенције комплетно уређеног поља и доказа да су свака два комплетно уређена поља изоморфна.

На крају, приметимо да се *принцип комплетности* битно разликује од аксиома уређених поља, баш као што се и *принцип индукције* разликује од осталих Пеанових аксиома. Ови принципи **не изражавају својства елемената домена одговарајуће структуре** ($\mathbb{R}$, односно $\mathbb{N}$), **већ својства подскупова домена**!

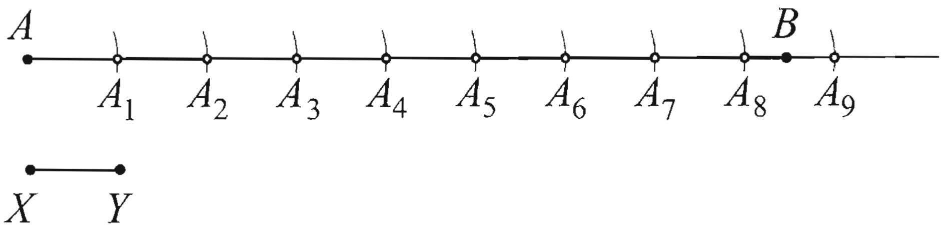
Бројевна права – реални континуум

Под *еуклидском геометријом* данас се подразумева геометрија коју је строго засновао Хилберт, узимајући *тачке*, *праве* и *равни* за основне геометријске појмове (објекте) које треба замишљати у међусобним односима одређеним речима *припада*, *између*, *подударно*, *паралелно* и *непрекидно*. Опис ових односа дају *аксиоме геометрије* подељене у пет група – за сваки однос по један скуп аксиома.

Верујемо да је свима позната узбудљива историја односа *паралелно* (са којом се читалац детаљније може упознати у скоро свим књигама које се баве нееуклидским геометријама; о једној таквој геометрији било је речи у одељку „*Нове геометрије*“ на страни 44). Међутим, аксиоме у вези са односом *непрекидно* спадају у подједнако важне. Узбуђења везана за концепт *паралелно* мање-више су спласла, док узбуђења везана за концепт *непрекидно* можда тек предстоје.

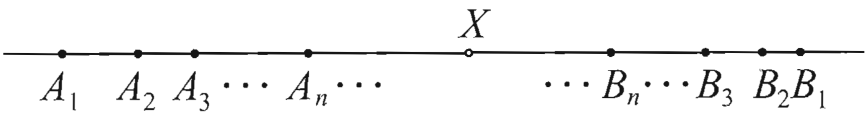
Аксиоме непрекидности се у Еуклидовим *Елементима* не наводе али се подразумевају. Данас, непрекидност се описује двема аксиомама.

Архимедова аксиома или **Архимед–Еудоксова аксиома**. Ако су AB и XY две произвољне дужи, тада на полуправој са теменом A која садржи тачку B постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таквих да је $A_1 - A_2 - \cdots - A_n$, при чему је свака од дужи $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ подударна дужи XY и $A - B - A_n$.



Другим речима, коначним бројем „преношења“ задате дужи на задату полуправу може се „стићи и престићи“ свака њена тачка.

Канторова аксиома. Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ низ дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тог низа.



Према овој аксиоми је, грубо речено, права „густо испуњена“ тачкама. Ова непрекидност „у малом“ има за последицу, на пример, **тврђење** према којем кружница која има тачака са разних страна неке праве, сече ту праву.

Аксиоме непрекидности су основна претпоставка мерења геометријских фигура. На то указују две основне последице аксиома комплетно уређеног поља, односно два основна својства структуре реалних бројева, будући да реалним бројевима изражавамо резултате мерења.

АРХИМЕДОВО СВОЈСТВО. Нека је x произвољан позитиван реалан број. Тада за сваки реалан број a постоји природан број n такав да је $a < nx$.

Доказ ове теореме се базира на два фундаментална својства уређења природних бројева и уређења реалних бројева: принципу најмањег елемента и аксиоми комплетности.

КАНТОРОВО СВОЈСТВО. Ако су $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, затворени интервали такви да је

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \cdots,$$

тада постоји реалан број x који припада свим овим интервалима, односно $x \in [a_n, b_n]$, за сваки природан број n (тј. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$).

Већ смо истакли да интуитивну основу за увођење реалних бројева даје представа о *правој* као уређеном континууму тачака. Просудите сами да ли овако уведени реални бројеви одсликавају на прави начин и виђење континуума неких великих мислилаца и математичара. Цитати су углавном преузети из [4].

АРИСТОТЕЛ: *Континуум не може бити саграђен од недељивих, уз претпоставке да је права непрекидна и да су тачке недељиве.*

ЛАЈБНИЦ: *Тачку можда не треба сматрати делом праве.*

КАНТ: *Простор и време јесу quanta continua ... сваки део простора или времена може бити дат само тако да је он опет простор или време ... тачке и моменти су само просте позиције из којих, уколико су дати пре простора или времена, не може да се састави ни простор ни време.*

ПОЕНКАРЕ: *Међу елементима конинуума постоји врста присне везе која их повезује у целину, па тачке не претходе правој већ права тачки.*

ВЕЈЛ: *Прецизне временске или просторне тачке нису крајњи, основни и недељиви елементи трајања или простирања који су нам дати путем нашег искуства.*

Прави континуум је нешто повезано у себи и не може бити раздвојено на делове; то противречи његовој природи.

БРАУЕР: *Линеаран континуум не може се исцрпети уметањем нових јединица и као такав не може се замишљати као проста колекција јединица.*

РЕНЕ ТОМ: *... прави континуум нема тачака.*

Архимедово и Канторово својство

Комплетно уређено поље, тј. структура реалних бројева, задовољава и Архимедово и Канторово својство. Оба ова својства можемо разматрати у било ком уређеном пољу.

Дефиниција. Уређено поље $\mathbf{F}$ је *архимедско поље* ако задовољава *Архимедово својство* (Архимедову аксиому):

$(\mathbf{Arh})$ За сваки a из F постоји природан број n тако да је $a \leqslant n_{\mathbf{F}}$.

Није тешко видети да уређено поље рационалних бројева $\mathbf{Q}$ задовољава Архимедово својство, али не и аксиому комплетности.

Теорема 1. Постоји уређено поље у коме важи Архимедово својство, али не важи аксиома комплетности. Другим речима, Архимедово својство је логички слабије од аксиоме комплетности.

Слично стоје ствари и са Канторовим својством.

Теорема 2. Постоји уређено поље у коме важи Канторово својство, али не важи аксиома комплетности. Другим речима, Канторово својство је логички слабије од аксиоме комплетности.

Заправо, Архимедово и Канторово својство здружени су еквивалентни аксиоми комплетности!

Теорема 3. Уређено поље је комплетно ако и само ако задовољава и Архимедово и Канторово својство.

Доказ ове теореме може се наћи у [20, 36].

Размотрићемо, овом приликом, уређена поља која задовољавају Архимедово својство и она која га не задовољавају, тзв. *неархимедска поља.*

Међу свим архимедски уређеним пољима, уређена поља $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ имају специјалан статус: $\mathbf{Q}$ је најмање, а $\mathbf{R}$ највеће архимедско поље.

Теорема. Ако је $\mathbf{F}$ архимедски уређено поље, тада се између свака два различита елемента из F налази неки рационалан број, тј. за све a и b из Fтакве да је $a <_{\mathbf{F}} b$ постоји рационалан број q (из $\mathbb{Q}_{\mathbf{F}}$) тако да је $a <_{\mathbf{F}} q <_{\mathbf{F}} b$.

Другим речима, скуп рационалних бројева је *густ* у сваком архимедском пољу.

Доказ. И овога пута изостављамо индекс $\mathbf{F}$. Из $a < b$, следи да је $0 < b-a$, па постоји природан број n такав да је $0 < \dfrac{1}{b-a} < n$, одакле је $0 < \dfrac{1}{n} < b-a$. Ако је $0 < b$, нека је m најмањи природан број такав да је $a < \dfrac{m}{n}$. Тада је $\dfrac{m-1}{n} \leqslant a$, тј. $\dfrac{m}{n} \leqslant a + \dfrac{1}{n}$, па је $a < \dfrac{m}{n} < b$. Ако је $b \leqslant 0$, онда је $0 < -b < -a$, па, према управо доказаном, постоји рационалан број q такав да је $-b < q < -a$, тј. $a < -q < b$. □

ТЕОРЕМА. Свако архимедски уређено поље се утапа у $\mathbf{R}$, и то на јединствен начин.

Доказ ове теореме се базира на чињеници да је сваки елемент a неког архимедски уређеног поља $\mathbf{F}$ супремум рационалних бројева мањих од a, тј. $a = \sup_{\mathbf{F}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leqslant_{\mathbf{F}} a\}$. Утапање $f : F \to \mathbb{R}$ дефинишемо са $f(a) = \sup_{\mathbf{R}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q \leqslant_{\mathbf{F}} a\}$, $a \in F$.

Питагорејска права је такође једно архимедски уређено поље. Међутим, постоје уређена поља која не задовољавају Архимедову аксиому.

ДЕФИНИЦИЈА. Уређено поље $\mathbf{F}$ је *неархимедско* ако није архимедско, односно ако постоји елемент a из F такав да за све природне бројеве n важи $n_{\mathbf{F}} <_{\mathbf{F}} a$. [Овакав елемент a се назива бесконачан елемент поља.]

ПРИМЕР 2. Нека је $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ скуп свих рационалних израза облика

$$f(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} = \frac{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_m\varepsilon^m}{b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots + b_n\varepsilon^n},$$

где се $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ могу схватити као полиноми по ε са рационалним коефицијентима, при чему нису сви коефицијенти у $B(\varepsilon)$ једнаки нули. Ако је b_ℓ, $\ell \geqslant 0$, први, слева надесно, коефицијент у $B(\varepsilon)$ различит од нуле, тада ако сваки коефицијент бројиоца и имениоца поделимо са b_ℓ добијамо тзв. нормиран облик елемента $f(\varepsilon)$:

$$(1) \qquad f(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} = \frac{a_0' + a_1'\varepsilon + a_2'\varepsilon^2 + \cdots + a_m'\varepsilon^m}{\varepsilon^\ell + b_{\ell+1}'\varepsilon^{\ell+1} + \cdots + b_n'\varepsilon^n}.$$

Није тешко показати да скуп $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ заједно са уобичајеним операцијама $+$ и $\cdot$ над рационалним изразима образује једно поље. Приметимо да је $f(\varepsilon) = 0$ ако и само ако је $a_0' = a_1' = \cdots = a_m' = 0$, а такође и да се сваки рационалан број q (па тиме и 0 и 1) може записати у облику $\dfrac{q}{1}$, па је $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Уређење на $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ дефинисаћемо уз помоћ позитивних елемената: $f(\varepsilon) > 0$ акко $a_k' > 0$, при чему је $f(\varepsilon)$ записан у нормалном облику и a_k', $k \geqslant 0$, први је коефицијент слева надесно у бројиоцу развоја (1), који је различит од 0. Нека је $f(\varepsilon) \leqslant g(\varepsilon)$ акко је $g(\varepsilon) - f(\varepsilon) > 0$ или $f(\varepsilon) = g(\varepsilon)$. Није тешко показати да је једно овако дефинисано уређење линеарно, да је сагласно са операцијама $+$ и $\cdot$, али да није архимедско: ако је $p(\varepsilon) = \varepsilon$, тада за сваки природан број n имамо да је $\dfrac{1}{n} - p(\varepsilon) = \dfrac{\frac{1}{n} - \varepsilon}{1} > 0$, одакле је $n < \dfrac{1}{\varepsilon}$, за сваки природан број n, односно $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{n}$, за сваки природан број n.

Неархимедско поље $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ представља најмање поље које се добија додавањем једне позитивне инфинитезимале ε пољу рационалних бројева. $\triangle$

Дефиниција. Нека је $\mathbf{F}$ уређено поље и нека су a и b неки елементи из F. Тада:

- a је *бесконачан* акко за сваки природан број n важи $n \leqslant |a|$;
- a је *коначан* акко a није бесконачан;
- a је *инфинитезимала* акко за сваки природан број n важи $n \cdot |a| < 1$;
- $a \approx b$ акко је $a - b$ инфинитезимала. Формулу $a \approx b$ читамо *a је бесконачно блиско b*.

Претходне дефиниције очигледно имају смисла једино у неархимедским пољима, јер су у сваком архимедском пољу сви елементи коначни а једина инфинитезимала је нула. Полазећи од ових дефиниција лако се доказују следеће чињенице.

– Уређено поље реалних бројева $\mathbf{R}$ нема бесконачних елемената и 0 је једина инфинитезимала у њему.

– Елемент a неког уређеног поља $\mathbf{F}$ је коначан акко за неки природан број n важи $|a| \leqslant n$.

– Уређено поље $\mathbf{F}$ има бесконачне елементе акко је $\mathbf{F}$ неархимедско поље.

– Релација $\approx$ је релација еквиваленције на домену F неког уређеног поља $\mathbf{F}$, тј. за све елементе a, b, c из F важи: $a \approx a$, $a \approx b \Rightarrow b \approx a$, $(a \approx b \wedge b \approx c) \Rightarrow a \approx c$.

Теорема. Свако уређено поље $\mathbf{F}$ које је право проширење уређеног поља $\mathbf{R}$ је неархимедско поље.

Доказ. Нека је $a \in F \setminus \mathbb{R}$. Разликујемо следеће случајеве.

1° Ако за сваки природан број n важи $n < a$, онда $\mathbf{F}$ има бесконачне елементе. До истог закључка долазимо уколико је за сваки природан број n испуњено $a < -n$. Дакле, у оба случаја, $\mathbf{F}$ је неархимедско поље.

2° Ако постоји природан број n тако да је $|a| \leqslant n$, тј. $-n \leqslant a \leqslant n$, онда је скуп $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbf{F}} a\}$ непразан и ограничен подскуп од $\mathbb{R}$, па постоји r из $\mathbb{R}$ тако да је $r = \sup_{\mathbf{R}} S$. Међутим, између елемената r и a (из F) нема рационалних бројева, одакле опет следи да $\mathbf{F}$ не може бити архимедско поље. $\square$

МАТЕМАТИЧКА ЛОГИКА

Иако су логика и математика одувек биле сродне дисциплине, у XIX веку однос међу њима почиње да се мења, када је енглески математичар Џорџ Бул законе логике (бар оне које је посматрао, а који се тичу, савременим језиком речено, исказног рачуна) свео на једноставну алгебарску структуру која је данас по њему названа *Булова алгебра.*

Дефиниција. *Булова алгебра* је структура $(B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ коју чине неки скуп B, две бинарне операције $\curlyvee$, $\curlywedge : B \times B \to B$, једна унарна $' : B \to B$ и два издвојена елемента 0 и 1 из B, при чему произвољни елементи x, y, z из B испуњавају следеће услове:

B1	$x \curlyvee (y \curlyvee z) = (x \curlyvee y) \curlyvee z$	**B2**	$x \curlywedge (y \curlywedge z) = (x \curlywedge y) \curlywedge z$
B3	$x \curlyvee y = y \curlyvee x$	**B4**	$x \curlywedge y = y \curlywedge x$
B5	$x \curlyvee x = x$	**B6**	$x \curlywedge x = x$
B7	$x \curlyvee (x \curlywedge y) = x$	**B8**	$x \curlywedge (x \curlyvee y) = x$
B9	$x \curlyvee (y \curlywedge z) = (x \curlyvee y) \curlywedge (x \curlyvee z)$	**B10**	$x \curlywedge (y \curlyvee z) = (x \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge z)$
B11	$x \curlyvee x' = 1$	**B12**	$x \curlywedge x' = 0$
B13	$x \curlyvee 0 = x$	**B14**	$x \curlywedge 0 = 0$
B15	$x \curlyvee 1 = 1$	**B16**	$x \curlywedge 1 = x.$

Још је Бул истакао да постоји више начина на које се ова алгебра може посматрати.

Пример 1. **Алгебра скупова**. Ако је $\mathcal{P}(X)$ скуп свих подскупова неког скупа X, тада је $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X)$ Булова алгебра, при чему су $\cup$ и $\cap$ редом операције уније и пресека, а ^{c} операција комплементирања, $A^c = X \setminus A$. На пример, ако је $X = \{\emptyset\}$, тада је $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

$\cup$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$

$\cap$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\emptyset\}$	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$

	$'$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\{\emptyset\}$	$\emptyset$

Пример 2. Уобичајено је да се под *исказима* подразумевају само оне реченице којима можемо доделити тачно једно од својстава: „*тачно*" („*истинито*", $\top$) или „*нетачно*" („*лажно*", $\perp$). Стандардно додељивање ових својстава исказима који су настали везивањем два исказа речима „**и**", „**или**", односно негирањем неког исказа речима „**није**", „**не**" . . . може се схватити као извођење операција над скупом истинитосних вредности.

или	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

и	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

	није
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Једноставно се проверава да је $(\{\perp, \top\}$, **или**, **и**, **није**, $\perp, \top)$ Булова алгебра. $\triangle$

На тај начин, Бул је први јасно раздвојио појмове који се данас називају *синтакса* и *семантика*: „У алгебри ваљаност анализе не зависи од интерпретације који су предмет те анализе, већ само од закона на основу којих се ти симболи спајају и раздвајају."

Тако је логика, после две хиљаде година спорог развоја, кренула другим правцем, сасвим другачијим од традиционалног. Логика је математици указала на низ проблема који су се до тада сматрали искључиво логичким, а те проблеме је математика открила и у својим сопственим основама и почела је да их изучава. Математика је исто тако преузела низ појмова, претпоставки и захтева који су се формирали у логици. С друге стране, логика користи математичке методе у доказивању својих тврђења, те се често посматра као једна од математичких теорија у чијем оквиру је развијен један број математичких метода које се по природи битно не разликују од метода алгебре, анализе или топологије, односно по природи су математичке и служе за решавање математичких проблема. Резултати који су постигнути у испитивању основа математике дали су врло много материјала логичким истраживањима о природи логичког мишљења.

Један од основних задатака у проучавању основа математике јесте да се опишу и анализирају појмови „интуитивне" математике. Први корак у том проучавању је често „превођење" интуитивне математике на формални језик. Разуме се, природа тог језика зависи од начина на који смо разумели појмове интуитивне математике, али и анализа тих појмова зависи од могућности које пружа изабрани језик. Могло би се тврдити да је разумевање интуитивних појмова важније јер, ма колико били прецизни формални системи које користимо, они не могу отклонити недостатке наших интуитивних појмова, мада омогућују да се ти недостаци открију. Ипак, логика је незаобилазан метод за решавање многих математичких проблема који се не могу решити, а често ни добро разумети, без одговарајуће логичке анализе. Другим речима, логика се никако не сме схватити само као контекст у коме се постојеће теорије могу ригорозно изложити, али који са становишта конкретних резултата не доноси практично ништа ново.

Математичка логика је настала из интересовања за природу и могућности тзв. (рационалног) математичког мишљења, као и из жеље да се прецизирају и систематизују начини изражавања разних математичких концепата. Између осталог, сврха ове књиге јесте и да то покаже.

Своја тврђења математичари исказују најчешће на говорним језицима (српски, енглески итд.) трудећи се да избегну све нејасноће и непрецизности свакодневног говора. Тако, пре свега, **стандардизовани** су везници *и*, *или*, *не*, *ако ..., онда ...*, *ако и само ако*, у смислу да је, на пример, исказ сачињен од два исказа повезана везником *и* тачан уколико су оба исказа тачна и једино у том случају.[21]

Следећи Була, везнике схватамо као операције над скупом истинитосних вредности $\{\top, \bot\}$, где $\top$ означава „*тачно*", а $\bot$ знак за „*нетачно*". Ако уведемо ознаке $\wedge$ за *и*, $\vee$ за *или*, $\neg$ за *не*, $\Rightarrow$ за *ако ..., онда ...*, $\Leftrightarrow$ за *ако и само ако*, онда стандардизација подразумева дефиниције ових везника таблицама које следе.

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

$$\neg\top = \bot \qquad \neg\bot = \top$$

Речи „*сваки*" и „*неки*" представљају следећи важан корак у анализи математичког језика. Да ли реченица „***Сваки младић воли извесну девојку***" значи да (1) „*постоји нека девојка коју воли сваки младић*" или да (2) „*за сваког младића се може пронаћи нека девојка коју он воли*"? Потреба да се елиминишу двосмислености природног језика довела је, поред осталог, до увођења **формалних језика**. Сваки формални језик (укључујући и било који програмски језик) уводимо према неким утврђеним правилима. Најпре бирамо *алфабет*, скуп неких знакова, тј. симбола, који је погодан за изражавање одређених својстава, а затим,

[21]Приметимо да је при оваквој стандардизацији везника *и* потпуно занемарено временско значење које овај везник може да има у обичном говору: „*Лаза се разболео и лекар је Лази преписао лек.*", „*Лекар је Лази преписао лек и Лаза се разболео.*".

такође на стандардизован начин, градимо *формуле* као коначне низове симбола. Улога алфабета у математици (логици), слична је улози коју азбука (абецеда) има у неком говорном језику. Формуле, које одговарају реченицама свакодневног говора, само су неки низови симбола алфабета баш као што су реченице само неки низови слова.

Пример 3. Ако алфабет неког формалног језика садржи симболе са значењем датим у загради: $\forall$ (сваки), $\exists$ (неки), $\wedge$ (и), $\Rightarrow$ (ако... онда), $M(\cdot)$ ($(\cdot)$ је младић), $D(\cdot)$ ($(\cdot)$ је девојка), $\heartsuit(\circ, \bullet)$ ($\circ$ воли $\bullet$) и $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ (променљиве – симболи којима означавамо произвољно људско биће – мала су слова латинице, као и индексирана слова $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ која су потребна пошто не желимо да ограничимо број променљивих које се могу појавити у реченици), као и помоћне знаке десну) и леву (заграду и запету, тада различите формуле:

$$\exists x(D(x) \wedge \forall y(M(y) \Rightarrow \heartsuit(y, x))) \text{ и } \forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge \heartsuit(x, y))),$$

одговарају, редом реченицама (1) и (2). $\triangle$

Пример 4. Који алфабет је погодан за изражавање својстава структуре природних бројева? Он, пре свега, мора бити погодан за обележавање природних бројева; ми ћемо користити уобичајене арапске ознаке: $0, 1, \ldots, 10, 11 \ldots$[22]. Такође, увешћемо мала слова (енглеске абецеде) са индексима да означе произвољне природне бројеве, такозване **променљиве**: $w, x, y, z, w_1, x_1, \ldots$ Изабрани алфабет би морао да садржи и ознаке за основне аритметичке операције $+$, $\cdot$, степеновање итд, основне релације $=$ и $\leqslant$. За изражавање сложенијих својстава неопходне су нам и ознаке за *логичке везнике* попут $\wedge$ (и), $\neg$ (не) итд, али и квантификаторе $\forall$ (сваки) и $\exists$ (постоји). Најзад, употребљаваћемо и помоћне знаке: десну) и леву (заграду.

На пример, овим алфабетом можемо исказати тврђење као што је *Фермаова последња теорема*:

$$\neg\exists w\exists x\exists y\exists z\,(3 \leqslant w \wedge 1 \leqslant x \wedge 1 \leqslant y \wedge 1 \leqslant z \wedge x^w + y^w = z^w),$$

које се чита: „*није тачно да постоје природни бројеви w, x, y, z такви да је* ...“.

[22] Мада смо могли да изаберемо и неки други начин обележавања природних бројева; на пример: $0, /, //, ///, ////, \ldots$

Тврдње исказане овако изабраним алфабетом често означавамо малим грчким словима: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, и називамо их **формулама**. Тако, писаћемо, на пример,

$$\varphi := \neg\exists w \exists x \exists y \exists z\, (3 \leqslant w \wedge 1 \leqslant x \wedge 1 \leqslant y \wedge 1 \leqslant z \wedge x^w + y^w = z^w).$$

Приметимо да тврдње могу да зависе од једне или више променљивих; на пример, може нас занимати Фермаово тврђење за неки *конкретан степен* w:

$$\varphi(w) := \neg\exists x \exists y \exists z\, (3 \leqslant w \wedge 1 \leqslant x \wedge 1 \leqslant y \wedge 1 \leqslant z \wedge x^w + y^w = z^w).^{23} \quad \triangle$$

Нераздвојив од математичких тврђења је концепт *математичког доказа.* При сваком кораку доказа математичари пишу нешто налик на

„*Из* $\ldots$ *и* $\_\_\_$ *(директно) закључујемо* $\sim\sim\sim$ “,

при чему се подразумева да **истинитост** тврдњи $\ldots$ и $\_\_\_$ **обезбеђује истинитост** тврђења $\sim\sim\sim$.

Наставак примера 3. Из формуле која одговара реченици (2), можемо ***закључити*** да се и *за неког конкретног нашег познаника који је младић може пронаћи девојка коју он воли.* Тако и младић Laza воли бар једну девојку; прецизније

$$\text{из } M(\text{Laza}) \text{ и } \forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge \heartsuit(x,y)))$$
$$\text{закључујемо}$$
$$\exists y(D(y) \wedge \heartsuit(\text{Laza}, y)).$$

Такође,

$$\text{из } \exists x(D(x) \wedge \forall y(M(y) \Rightarrow \heartsuit(y,x)))$$
$$\text{закључујемо}$$
$$\forall x(M(x) \Rightarrow \exists y(D(y) \wedge \heartsuit(x,y)))$$

док из друге формуле *не можемо* извести прву формулу. $\triangle$

Наставак примера 4. Из $\varphi := \neg\exists w \exists x \exists y \exists z(\cdots)$ можемо закључити $\forall w \varphi(w) := \forall w \neg\exists x \exists y \exists z(\cdots)$, али и обрнуто, из $\forall w \varphi(w)$ закључујемо φ. $\triangle$

[23] Пре него што је доказано да је тврдња φ тачна (тек 1995. године, након вишевековних покушаја) биле су познате истинитости само појединачних тврђења $\varphi(3), \varphi(4), \ldots, \varphi(125000)$.

Наравно, закључивање се не обавља произвољно већ према неким правилима или упутствима које логика настоји да опише и утврди. При сваком закључивању полазимо од неких тврдњи које називамо *премисе* и изводимо путем неког правила неки исказ који се зове *закључак*. Математичка логика проучава готово искључиво *дедуктивно закључивање* чија правила не наносе штету истинитости: **ако се правило примењује на истините премисе, онда је и закључак истинит**. Теорија доказа, која се бави оваквим проблемима, заузима истакнуто место у математичкој логици.

Важнији задаци које је себи поставила математичка логика[24] јесу и трагања за одговорима на бројна питања типа: „Какве математичке структуре најприродније 'изолују' одговарајући математички појам?", затим „На ком језику је најбоље говорити о датом својству, односно описивати одговарајуће (изабране) структуре?", као и „Који математички концепти су имплицитно садржани и претпостављени у опису појма и какви облици резоновања су легитимни?" итд. Оваква питања довела су до формирања разних *логичких система* које, углавном, чине:

• колекција $\mathfrak{M}$ неких математичких структура (које ћемо најчешће означавати великим масним словима латинице: $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \ldots$),

• колекција $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$ формалних реченица над неким језиком $\mathcal{L}$ погодним за описивање и изражавање својстава датих структура (реченице ћемо означавати малим словима грчког алфабета $\alpha, \beta, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$) и

• задовољење $\models$ дефинисано као однос између структура из $\mathfrak{M}$ и реченица из $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$:

$\mathbf{M} \models \varphi$ акко „φ је тачна (задовољена) реченица у структури $\mathbf{M}$"
акко „структура $\mathbf{M}$ задовољава реченицу φ".

Нарочито су значајне оне реченице језика $\mathcal{L}$ које су тачне у свим структурама из $\mathfrak{M}$; за такве реченице каже се да су *ваљане реченице* одабраног логичког система. Један од главних проблема везаних за неки логички систем је тзв. *проблем потпуности*: *„Постоји ли неки* ***ефективан*** *списак ваљаних реченица (аксиома) и списак (такође ефективан) неких правила извођења која заједно са аксиомама генеришу* ***све*** *ваљане реченице?"*.

---

[24]Које углавном реализује кроз своје подобласти као што су *апстрактна теорија модела* и *модел-теоретска логика*.

Проблем потпуности је постао један од централних проблема математичке логике од када је Курт Гедел, у својој докторској дисертацији, доказао теорему потпуности за, данас, најпознатији логички систем – *предикатски рачун првог реда*.

Предикатски рачун првог реда – ПР$^{\mathrm{I}}$

Којим математичким структурама је прилагођен ПР$^{\mathrm{I}}$?

Предикатски рачун првог реда је логички систем прилагођен проучавању операцијско-релацијских математичких структура (видети страну 106). Поновимо, *операцијско-релацијску структуру* схватамо као уређену четворку $\mathbf{M} = (M, \mathcal{R}, \mathcal{F}, C)$, при чему је M неки непразан скуп, $\mathcal{R}$ скуп неких релација скупа M, $\mathcal{F}$ скуп неких операција скупа M и $C \subseteq M$. Скуп M се назива *доменом*, док се елементи скупа C називају *константама* структуре $\mathbf{M}$.

На ком језику ПР$^{\mathrm{I}}$ описује операцијско-релацијске структуре?

Језик, који користи предикатски рачун првог реда у описивању операцијско-релацијских структура, **садржи**, пре свега, знаке за *(класичне исказне) везнике*: *и*, *или*, *не*, *ако ...* , *онда ...* , *ако и само ако*, и знаке за *квантификаторе*: *сваки* и *постоји*, односно следеће **логичке симболе**:
(i) бесконачан скуп промењљивих: $Var = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$;
(ii) знаке за исказне везнике: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$;
(iii) универзални и егзистенцијални квантификатор: $\forall$ и $\exists$;
(iv) знак једнакости: $=$;
(v) помоћне знаке: зарез ,) десну заграду и (леву заграду.
Будући да је најједноставнија класификација уведених структура према броју и врсти (арности) релација, операција и константи које учествују у њиховом грађењу, језик садржи и **нелогичке симболе**, тј. *релацијске знаке*, *операцијске знаке* и *симболе константи*, при чему се подразумева да је дефинисана и функција ar која сваком релацијском и сваком операцијском знаку додељује неки природан број, такозвану *арност* или *дужину*. Како је избор нелогичких симбола променљив и зависи од типа структура које нас занимају (док је скуп логичких симбола фиксиран), одговарајући језик $\mathcal{L}$ задајемо навођењем само нелогичких симбола, тј. под језиком $\mathcal{L}$ подразумевамо унију три међусобно дисјунктна скупа $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}}$ и $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}}$ заједно са функцијом $\mathrm{ar} : \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} \cup \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}$.

Пример 5. О структури реалних бројева предикатски рачун говори на језику $\mathcal{L}' = \{\leqslant, +, \cdot, 0, 1\}$, при чему је $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}'} = \{\leqslant\}$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}'} = \{+, \cdot\}$, $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}'} = \{0, 1\}$ и $\mathrm{ar}(\leqslant) = \mathrm{ar}(+) = \mathrm{ar}(\cdot) = 2$. Нагласимо да $\leqslant$ у запису $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$ означава **конкретну бинарну релацију скупа реалних бројева**, док $\leqslant$ у дефиницији језика $\mathcal{L}'$ означава само **знак који називамо релацијским и коме је придружен природан број** 2 и ништа више; иста напомена важи и за знаке $+, \cdot, 0, 1$. Уведени језик може да послужи за описивање великог броја сасвим другачијих структура које су истог типа као структура $\mathbb{R}$, тј. сваке структуре коју чине једна бинарна релација, две бинарне операције и два конкретна елемента домена. На пример[25], структуру $\mathbf{X} = (\{a, b, c\}, \lhd, *, \circ, a, b)$, где је $\lhd = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,c), (a,c)\}$, а операције $*$ и $\circ$ су задате таблицама.

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

У овом случају, релацијски знак $\leqslant$ дужине 2 *тумачи* се (*интерпретира*) у скупу $X = \{a, b, c\}$ као бинарна релација $\lhd$ скупа X, операцијски знаци $+$ и $\cdot$ дужине 2 редом као бинарне операције $*$ и $\circ$ скупа X, а симболи константи 0 и 1 као елементи a и b скупа X. Тада кажемо да је језик $\mathcal{L}'$ *интерпретиран* на скупу X, и пишемо: $\leqslant^{\mathbf{X}} = \lhd$, $+^{\mathbf{X}} = *$, $\cdot^{\mathbf{X}} = \circ$, $0^{\mathbf{X}} = a$ и $1^{\mathbf{X}} = b$. $\triangle$

Каквим реченицама ПР$^{\mathrm{I}}$ описује операцијско-релацијске структуре?

Скуп реченица предикатског рачуна првог реда над језиком $\mathcal{L}$, у ознаци $\mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$, дефинише се као подскуп једног ширег скупа $\mathrm{For}_{\mathcal{L}}$, скупа предикатских формула над језиком $\mathcal{L}$.

Најпре дефинишемо шта је израз (терм).

(i) Променљиве и симболи константи језика $\mathcal{L}$ су изрази.

(ii) Ако су $t_1, \ldots, t_n$ изрази и F операцијски знак дужине n језика $\mathcal{L}$, онда је $F(t_1, \ldots, t_n)$ израз.

(iii) Изрази се могу добити само применом (i) и (ii) коначан број пута.

Затим дефинишемо елементарне (атомичне) формуле. То су формуле облика $u = v$ и $R(t_1, \ldots, t_n)$, где су u, v, $t_1, \ldots, t_n$ неки изрази, а R релацијски знак дужине n језика $\mathcal{L}$.

[25]Приметимо да је ово једна од 1 785 233 613 312 могућих интерпретација језика $\mathcal{L}'$ у X. Наравно, осим оног стандардног, овај језик можемо интерпретирати у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ на неограничен број начина.

Најзад, дефинишемо предикатске формуле, или, краће, формуле.

(i) Елементарне формуле су формуле.

(ii) Ако су φ и ψ формуле и v нека променљива, онда су $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\exists v\varphi$ и $\forall v\varphi$ такође формуле.

(iii) Формуле се могу добити само применом (i) и (ii) коначан број пута.

Приметимо да су дефиниције израза и предикатске формуле индуктивне, и да су скупови израза и формула различити за различите изборе садржаја језика $\mathcal{L}$.

При писању формула примењују се разни договори ради једноставнијег и прегледнијег записа. Претпостављамо да је читалац упознат са основним конвенцијама о писању формула, као што су правила о брисању заграда, приоритети логичких везника итд.

Међу свим променљивим које се јављају у једној формули над неким језиком, неке су под дејством квантификатора и називају се везаним, а неке нису и називају се слободним. У наредној формули, језика $\mathcal{L}'$ из примера 3, означене су променљиве на које делује одговарајући квантификатор, док стрелице показују слободна појављивања променљивих.

$$\exists y\big(\forall x(x + y = x + z) \vee \forall y(y \cdot y = z) \Rightarrow \neg y \leqslant x \vee y + x = 0\big) \wedge \neg z \leqslant y$$

Ако је φ нека формула језика $\mathcal{L}$, запис $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ користи се да се означи чињеница да су све слободне променљиве формуле φ неке од променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Формуле које немају слободне променљиве називају се реченице.

Формуле $\forall x(\neg(x = 0) \Rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$, $\forall x\forall y(x + y = y + x)$, $0 = 1$, су само неки примери реченица језика $\mathcal{L}'$ из примера 5.

Релација задовољења

Остаје још да прецизирамо шта значи „*реченица φ је тачна (истинита) у моделу* $\mathbf{A}$“, односно да дефинишемо релацију задовољења $\models$, тј. $\mathbf{A} \models \varphi$. Кључна ствар у одређивању истинитости неке формуле у одговарајућој структури $\mathbf{A}$ је интерпретација (нелогичких симбола) језика $\mathcal{L}$ у $\mathbf{A}$, при чему тачност (истинитост) неке формуле која има слободне променљиве $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ у структури $\mathbf{A}$, у којој је интерпретиран језик, зависи и од доделе вредности њеним слободним променљивим:

$$\mu = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \qquad a_1, \ldots, a_n \in A,$$

тј. од *валуације* слободних променљивих формуле φ. Да је формула φ *тачна у моделу* $\mathbf{A}$ *за валуацију* μ, у ознаци $\mathbf{A} \models \varphi[\mu]$, утврђујемо уз помоћ истинитосних таблица за везнике $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$:

– $\mathbf{A} \models (\psi \wedge \theta)[\mu]$ акко $\mathbf{A} \models \psi[\mu]$ **и** $\mathbf{A} \models \theta[\mu]$, итд.

и следећих правила за кванторе:

– $\mathbf{A} \models \forall x \varphi[\mu]$ акко $\mathbf{A} \models \varphi[\mu\binom{x}{a}]$ за **свако** a из A,

– $\mathbf{A} \models \exists x \varphi[\mu]$ акко $\mathbf{A} \models \varphi[\mu\binom{x}{a}]$ за **неко** a из A,

где је $\mu\binom{x}{a}$ валуација која променљивама додељује исте вредности као и валуација μ, осим променљивој x којој додељује вредност a.

Пример 6. Имајући у виду дефиницију релације задовољења, видимо да $\varphi(x, y) := \forall z(x + z \leqslant y)$ не важи у структури реалних бројева $(\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, 0, 1)$, при валуацији $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 5 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$, јер *није тачно да је* $5 + r \leqslant 1$, *за сваки реалан број* r. Међутим, у структури $\mathbf{X} = (\{a, b, c\}, \lhd, *, \circ, a, b)$ из примера 5, при валуацији $\nu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ a & c & \cdots \end{pmatrix}$ формула $\varphi(x, y)$ јесте тачна, $\mathbf{X} \models \varphi(x, y)[\nu]$ или $\mathbf{X} \models \varphi[a, c]$. Заиста, *тачно је да је* $a * x \lhd c$, *за сваки* x *из* X. Ипак, $\mathbf{X} \not\models \varphi[b, b]$, јер $b * b \not\lhd b$. △

Пошто реченице неког језика немају слободних променљивих, њихово важење у неком моделу не зависи од избора валуације. Другим речима, за сваку реченицу језика $\mathcal{L}$ и сваки модел $\mathbf{M}$ истог језика или $\mathbf{M} \models \varphi$ или $\mathbf{M} \models \neg\varphi$.

Пример 7. Реченица $\psi := \exists x \forall y(x \leqslant y)$ не важи у структури реалних бројева (у скупу реалних бројева не постоји најмањи елемент), али важи у структури $\mathbf{X}$: $a \lhd a$, $a \lhd b$, $a \lhd c$. Реченица $\theta := \forall y \exists x(x \leqslant y)$ важи у обе структуре. △

Реченица φ језика $\mathcal{L}$ је *ваљана* или *логичка истина предикатског рачуна*, у ознаци $\models \varphi$, ако φ важи у сваком моделу језика $\mathcal{L}$. Реченица φ језика $\mathcal{L}$ је *контрадикција* ако не постоји модел језика $\mathcal{L}$ у коме важи φ.

Пример 8. Реченице $\forall x(x = x)$, $\neg\forall x(0 \leqslant x) \Rightarrow \exists x(\neg 0 \leqslant x)$, језика структуре реалних бројева, ваљане су формуле јер важе у свим структурама овог језика. △

Поступак за проверу истинитости неке реченице у свим структурама немамо, јер свака реченица може имати бесконачно много неизоморфних модела. Може се доказати да, у општем случају, не постоји алгоритам који за сваку реченицу може проверити да ли јесте или није ваљана формула (логичка истина). О томе ће бити речи у једном од наредних одељака (страна 180).

Логичке последице

Релација задовољења нам омогућава да дефинишемо, веома значајан, појам *логичке* („логичне“) *последице*. Ако је Γ скуп формула и φ формула, кажемо да је формула φ *логичка последица* скупа формула Γ, у ознаци $\Gamma \models \varphi$, ако формула φ важи у сваком моделу у коме важе све формуле скупа Γ. Наравно, уместо $\emptyset \models \varphi$ пишемо $\models \varphi$, што је у складу са претходно уведеним означавањем ваљаних формула.

ПРИМЕР 9. Посматрајмо тврђење

„*У свакој групи важи леви закон канцелације (скраћивања)*“.

Сетимо се да је група свака структура $\mathbf{G} = (G, *, ^{\sim 1}, e)$ у којој важе следеће реченице: $\forall x \forall y \forall z(x * (y * z) = (x * y) * z)$, $\forall x(x * e = x)$, $\forall x(x * x^{\sim 1} = e)$. Означимо ове реченице са Γ_{gr}. Леви закон канцелације, на језику група, можемо изразити реченицом $\sigma := \forall x \forall y \forall z(x * y = x * z \Rightarrow y = z)$. Уз ове ознаке, $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \sigma$ каже исто што и наведено тврђење. Уобичајен доказ тече овако.

Нека је $(G, *, ^{\sim 1}, e)$ произвољна група (модел за Γ_{gr}).

1. Изаберимо произвољне елементе x, y, z из G, такве да је $x * y = x * z$.

Тада је

2. $x^{\sim 1} * (x * y) = x^{\sim 1} * (x * z)$, [јер је $*$ добро дефинисана функција]

3. $(x^{\sim 1} * x) * y = (x^{\sim 1} * x) * z$, [из претходног према закону асоцијативности]

4. $e * y = e * z$, [из претходног јер је $x^{\sim 1} * x = e$]

5. $y = z$, [из претходног јер је $e * y = y$ и $e * z = z$]

6. $\forall x \forall y \forall z(x * y = x * z \Rightarrow y = z)$. [јер су x, y, z произвољни елементи]

Нека је $\varsigma := \forall x \forall y \forall z(x * (x * y) = x * (x * z) \Rightarrow y = z)$. Лако видимо да $\models \sigma \Rightarrow \varsigma$, и одмах закључујемо да $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \varsigma$ без икаквог додатног доказа. $\triangle$

У претходном примеру, илустровано је правило

$$\text{из } \Gamma \models \sigma \text{ и } \Gamma \models \sigma \Rightarrow \varsigma, \text{ следи } \Gamma \models \varsigma,$$

које се врло често користи у математици. Дугачак је списак сличних, подразумеваних, правила:

– ако је $\Gamma \subset \Upsilon$ и $\Gamma \models \sigma$, онда је и $\Upsilon \models \sigma$,

– ако је $\Gamma, \sigma \models \varsigma$, онда је $\Gamma \models \sigma \Rightarrow \varsigma$,

– ако је $\Gamma \models \sigma \wedge \varsigma$, онда је $\Gamma \models \sigma$, итд.

Формуле φ и ψ су *логички еквивалентне*, у ознаци $\varphi \equiv \psi$, уколико је $\varphi \models \psi$ и $\psi \models \varphi$. Другим речима, формуле φ и ψ су логички еквивалентне уколико су тачне у истим моделима, тј. ако је $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$. Није тешко утврдити логичку еквивалентност следећих парова формула: $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$, $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$, $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall\psi, \ldots$

Ево још једног правила: ако је $\Gamma \models \varphi$ и $\varphi \equiv \psi$, онда је и $\Gamma \models \psi$.

Преименовање везаних променљивих

Имајући у виду дефиницију релације задовољења, видимо да формуле $\forall x\,(x = x)$ и $\forall y\,(y = y)$, иако нису идентичне (нису исти низови симбола) изражавају исту ствар, уосталом као и свака формула настала уписивањем било које променљиве на сва три места „шаблона“ $\forall\_\,(\_ = \_)$. Слично, свака од формула:

$$\forall x \exists y(x+y = 0),\ \forall y \exists z(y+z = 0),\ \forall z_1 \exists z_5(z_1+z_5 = 0), \ldots\ [\forall\_\exists\smile\,(\_+\smile)],$$

језика структуре реалних бројева изражава исто: *сваки елемент има свој инверз у односу на операцију* $+$. Примећујемо да *преименовањем* везаних променљивих добијамо формуле са истим значењем. Ипак, преименовање променљивих не можемо вршити баш потпуно произвољно. На пример, $\exists z(z + x = 0)$ и $\exists y(y + x = 0)$ имају исто значење, али сасвим различито од формуле $(\exists x)x + x = 0$; наиме, у $\exists z(z + x = 0)$ везану променљиву z можемо заменити било којом променљивом, **осим** променљивом x.

Пар формула φ и φ' називаћемо α-еквивалентним, уколико се φ' добија преименовањем (неких или пак свих) везаних променљивих у φ новим променљивама тако да ниједна од слободних променљивих формуле φ није постала везана. Није тешко утврдити да су α-еквивалентне формуле и логички еквивалентне.

Замена слободних променљивих неким изразом

Често је потребно слободне променљиве формуле заменити неким изразом. Једини захтев при оваквим заменама јесте *да све променљиве које учествују у грађењу израза буду слободне у формули добијеној након замене.*

Пример 10. Слободну променљиву x формуле $\varphi(x) := \exists y(y \leqslant x)$ *слободно* (директно) можемо заменити изразима $z, x+z, 0+z_1$, и изградити нове формуле $\exists y(y \leqslant z)$, $\exists y(y \leqslant x+z)$, $\exists y(y \leqslant 0+z_1)$, које ћемо означавати редом са $\varphi(x := z)$, $\varphi(x := x+z)$, $\varphi(x := 0+z_1)$. Изразе у чијем грађењу учествује променљива y, као што су y, $y+x$, $y+0$, ... не смемо директно заменити (јер бисмо, на пример, дирекном заменом променљиве x са y добили реченицу $\exists y(y \leqslant y)$). Међутим, ако *преименујемо* везану променљиву формуле $\exists y(y \leqslant x)$ неком променљивом која не учествује у грађењу одговарајућег израза, на пример, $\exists z_7(z_7 \leqslant x)$, добићемо формулу са истим значењем, али у којој можемо x директно заменити сваким од израза y, $y+x$, $y+0$. $\triangle$

Ако је φ нека формула и t неки израз, са $\varphi(x := t)$ означавамо сваку од формула која је добијена тако што се **најпре** преименују неке везане променљиве формуле φ новим променљивим тако да све везане променљиве добијене формуле буду различите од свих слободних променљивих формуле φ и свих променљивих коју учествују у грађењу израза t, а **затим** се изразом t замени свако слободно појављивање променљиве x у формули добијеној након преименовања.

Пример 11. Ако је $\varphi(z) := \forall x(\neg x = z \Rightarrow \exists y(x = y \vee z = y))$, са $\varphi(z := x+y)$ означавамо сваку од формула:

$$\forall x_1(\neg x_1 = x+y \Rightarrow \exists y_2(x_1 = y_2 \vee x+y = y_2)),$$

$$\forall x_2(\neg x_2 = x+y \Rightarrow \exists x_3(x_2 = x_3 \vee x+y = x_3)),$$

$$\vdots$$

Приметимо да има неограничено много могућности. $\triangle$

Иако је $\varphi(x := t)$ заправо ознака за читаву класу формула, њоме можемо означавати и било коју формулу из те класе јер су све такве формуле међусобно *логички еквивалентне*. Једноставно се показује, на пример, да важи и следеће правило:

– ако је $\Gamma \models \forall v\sigma$, онда је $\Gamma \models \sigma(v := t)$.

Системи за дедукцију у ПР$^{\mathrm{I}}$

Пример 11, из претходног одељка, указује на типичан начин на који се изграђују математичке теорије. Након избора полазних претпоставки о неким објектима (Γ_{gr}), тежи се откривању последица тих претпоставки ($\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \sigma, \Gamma_{\mathrm{gr}} \models \varsigma, \ldots$). Свака *откривена последица некаквих претпоставки* подразумева *математички доказ*. Анализом начина на који се у математици доказује уочавамо да се сваки доказ одвија у етапама. Свака етапа доказа даје неку последицу претпоставки.

Наставак примера 11. Са једне етапе доказа за $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \sigma$ у примеру 11 прелазили смо на другу коришћењем претпоставки из Γ_{gr} (закон асоцијативности, ...), неких општих особина операција (добра дефинисаност) и једнакости (транзитивност, симетричност, ...), као и законитости које проистичу из схватања везника *и*, *ако... онда*, ... и квантификатора *сваки*.

Доказали смо $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \forall x \forall y \forall z(x * y = x * z \Rightarrow y = z)$, тако што смо најпре доказали $\Gamma_{\mathrm{gr}}, x * y = x * z \models y = z$, одакле смо извели закључке $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models x * y = x * z \Rightarrow y = z$ и $\Gamma_{\mathrm{gr}} \models \forall x \forall y \forall z(x * y = x * z \Rightarrow y = z)$. $\triangle$

Истакнимо нешто што се просто намеће у доказима тврђења облика $\Gamma \models \varphi$: при таквим доказима немамо на уму никакве конкретне структуре (групе, на пример), већ само разне предикатске формуле и везе међу њима. С друге стране, однос $\Gamma \models \varphi$ између *претпоставки* (хипотеза) Γ и последице φ је дефинисан помоћу математичких структура и релације задовољења. Можемо ли логичке последице неког скупа хипотеза тражити не улазећи у значења формула? Можемо! На сасвим другачији начин, посматрањем формула искључиво као низова симбола, дефинисаћемо однос $\vdash$ између скупа хипотеза Γ и неке његове последице φ.

Најпре, скупу формула (ма ког језика) прикључујемо још једну формулу, тзв. *логичку константу*, коју ћемо означавати са $\bot$. Формула $\bot$ не важи ни у једном моделу. Такође, сматраћемо да је $\alpha \Leftrightarrow \beta$ скраћени запис формуле $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.

Секвент је пар који чине неки коначан скуп формула Γ и нека формула σ. Означаваћемо га са $\Gamma \vdash \sigma$ (симбол $\vdash$ се најчешће чита „*рампа*“). Формуле скупа Γ називамо *хипотезама секвента*, а формулу σ *последицом секвента*. Секвент $\Gamma \vdash \sigma$ је *доказив* уколико се може добити применом коначно много правила извођења датих на наредној страни.

Аксиома

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}\ (\mathrm{ax})$$

Слабљење

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \gamma \vdash \varphi}\ (\mathrm{slab})$$

Увођење импликације

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow_{\mathrm{U}})$$

Елиминација импликације

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\Rightarrow_{\mathrm{E}})$$

Увођење конјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}\ (\wedge_{\mathrm{U}})$$

Елиминација конјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{l}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{d}})$$

Увођење дисјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{l}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{d}})$$

Елиминација дисјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta}\ (\wedge_{\mathrm{E}})$$

Увођење негације

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi}\ (\neg_{\mathrm{U}})$$

Елиминација негације

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\varphi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg_{\mathrm{E}})$$

Увођење универзалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad v \text{ није слободно у формулама скупа } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall v \varphi}\ (\forall_{\mathrm{U}})$$

Елиминација универзалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \forall v \varphi}{\Gamma \vdash \varphi(v := t)}\ (\forall_{\mathrm{E}})$$

Увођење егзистенцијалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi(v := t)}{\Gamma \vdash \exists v \varphi}\ (\exists_{\mathrm{U}})$$

Елиминација егзистенцијалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \exists v \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \theta \quad v \text{ није слободно у формулама скупа } \Gamma \cup \{\theta\}}{\Gamma \vdash \theta}\ (\exists_{\mathrm{U}})$$

Увођење једнакости

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}\ (=_{\mathrm{U}})$$

Елиминација једнакости

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi(v := t) \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash \varphi(v := u)}\ (=_{\mathrm{E}})$$

Класична противречност

$$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot_{\mathrm{c}})$$

Правила извођења су „шаблони“ који омогућавају доказивање секвената. Свако правило се састоји од:

- скупа (могуће и празног) секвената које називамо *премисе правила*,
- секвента који називамо *закључак правила*,
- хоризонталне линије која раздваја хипотезе правила (записане изнад линије) и закључак правила (записан испод линије) и са чије десне стране стоји име правила.

Сва правила можемо читати (схватити) на два начина:

– *одозго надоле*: ако смо доказали хипотезе правила, можемо доказати и секвент који се налази испод хоризонталне линије; овако схватамо правило када треба саставити доказ (синтеза);

– *одоздо нагоре*: да бисмо доказали применом правила секвент који је његов закључак, довољно је доказати хипотезе правила; овако схватамо правило када трагамо за неким доказом (анализа).

Приметимо да сваком логичком знаку одговарају две врсте правила:

– *правило увођења*, које омогућава доказивање секвената чији је закључак формула која као главни има тај логички знак,

– *правило елиминације*, које при доказивању омогућава коришћење формула које имају као главни тај логички знак.

Формула σ је доказива, у ознаци $\vdash \sigma$, ако је доказив секвент $\emptyset \vdash \sigma$.

Пример 12. Ево доказа да је $\vdash \neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \bot)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\alpha,\alpha\vdash\neg\alpha}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{}{\neg\alpha,\alpha\vdash\alpha}\,(\mathrm{ax})}{\neg\alpha,\alpha\vdash\bot}\,(\neg_{\mathrm{E}})}{\neg\alpha\vdash\alpha\Rightarrow\bot}\,(\Rightarrow_{\mathrm{U}})}{\vdash\neg\alpha\Rightarrow(\alpha\Rightarrow\bot)}\,(\Rightarrow_{\mathrm{U}}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha\Rightarrow\bot,\alpha\vdash\alpha\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{ax}) \qquad \dfrac{}{\alpha\Rightarrow\bot,\alpha\vdash\alpha}\,(\mathrm{ax})}{\alpha\Rightarrow\bot,\alpha\vdash\bot}\,(\Rightarrow_{\mathrm{E}})}{\alpha\Rightarrow\bot\vdash\neg\alpha}\,(\neg_{\mathrm{U}})}{\vdash(\alpha\Rightarrow\bot)\Rightarrow\neg\alpha}\,(\Rightarrow_{\mathrm{U}})}{\vdash\neg\alpha\Leftrightarrow(\alpha\Rightarrow\bot)}\,(\wedge_{\mathrm{U}})$$

Уобичајеније је да се доказ, уместо као „дрво“, запише линеарно (нумерисани редови један испод другог).

1. $\neg\alpha, \alpha \vdash \neg\alpha$ (ax)
2. $\neg\alpha, \alpha \vdash \alpha$ (ax)
3. $\neg\alpha, \alpha \vdash \bot$ из 1 и 2 према $\neg_E$
4. $\neg\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \bot$ из 3 према $\Rightarrow_U$
5. $\vdash \neg\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \bot)$ из 4 према $\Rightarrow_U$
6. $\alpha \Rightarrow \bot, \alpha \vdash \alpha \Rightarrow \bot$ (ax)
7. $\alpha \Rightarrow \bot, \alpha \vdash \alpha$ (ax)
8. $\alpha \Rightarrow \bot, \alpha \vdash \bot$ из 6 и 7 према $\Rightarrow_E$
9. $\alpha \Rightarrow \bot \vdash \neg\alpha$ из 8 према $\neg_U$
10. $\vdash (\alpha \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\alpha$ из 9 према $\Rightarrow_U$
11. $\vdash \neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \bot)$ из 5 и 10 $\triangle$

Поред постојећих правила, користимо и доста *изведених правила* (видети задатак 52 на страни 292), као што су:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}(\mathrm{cut}^{26})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \gamma}(\Rightarrow_L)$$

$$\frac{\Gamma, \forall v\alpha, \alpha(v := t) \vdash \gamma}{\Gamma, \forall v\alpha \vdash \gamma}(\forall_L) \ \cdots$$

На пример, докажимо правило (cut).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdots}{\Gamma, \alpha \vdash \beta}}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}(\Rightarrow_U) \qquad \cfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \beta}(\Rightarrow_E)$$

Због неодлучивости предикатског рачуна посебан значај има чињеница да постоји начин на који се описују све његове истине. Постоје и други (еквивалентни) начини увођења појма *доказивости* (видети [21]).

---

[26] енгл. cut – сечење

Теорема. (Хилбертов систем за дедукцију.) $\Gamma \vdash \varphi$ ако и само ако постоји коначан низ формула $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са следећим својствима:
1. φ_n је формула φ;
2. свака формула φ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, задовољава један од следећих услова
   2.1. $\varphi_i \in \mathcal{A}$, или
   2.2. $\varphi_i \in \Gamma$, или
   2.3. φ_i је непосредна последица неког од правила из $\mathcal{R}$ чије премисе припадају скупу $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}\}$,

при чему је $\mathcal{A}$ бесконачан скуп формула одређених схемама

(**H1**)	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$,	(**H2**)	$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$,
(**H3**)	$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$,	(**H4**)	$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$,
(**H5**)	$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta)$,	(**H6**)	$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$,
(**H7**)	$\beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$,	(**H8**)	$(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma))$,
(**H9**)	$\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \bot)$,	(**H10**)	$(\alpha \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\alpha$,
(**H11**)	$\bot \Rightarrow \alpha$,	(**H12**)	$\alpha \vee \neg\alpha$,
(**H13**)	$\alpha(x := t) \Rightarrow \exists x\alpha$,	(**H14**)	$\forall x\alpha \Rightarrow \alpha(x := t)$,

док $\mathcal{R}$ чине правила:

($\mathbf{R}_{\Rightarrow}$) β је непосредна последица формула α и $\alpha \Rightarrow \beta$, за произвољне формуле α и β;

($\mathbf{R}_{\forall}$) $\gamma \Rightarrow \forall x\alpha$ је непосредна последица формуле $\gamma \Rightarrow \alpha$, за произвољну формулу α, било коју променљиву x и сваку формулу γ у којој x није слободна променљива;

($\mathbf{R}_{\exists}$) $\exists x\alpha \Rightarrow \gamma$ је непосредна последица формуле $\alpha \Rightarrow \gamma$, за произвољну формулу α, било коју променљиву x и сваку формулу γ у којој x није слободна променљива.

Сваки низ формула $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ који задовољава услове **1** и **2** претходне теореме називамо Γ-доказом, односно *доказом формуле* φ_n *из скупа претпоставки* Γ.

Да смо успели у замисли од које смо кренули потврђује *теорема потпуности*, о којој ће бити више речи у наредном одељку.

Теорема потпуности

Како својства операцијско-релацијских структура изражавају реченице одговарајућег језика, скупове реченица називамо *теоријама*. Дакле, T је теорија језика $\mathcal{L}$, ако је $T \subset \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}}$. Често се елементи теорије T називају *аксиоме* теорије T.

Једна од главних инспирација за увођење и проучавање неке теорије јесте описивање математичких структура одређеног типа. Структура $\mathbf{M}$ је *модел* теорије T, у ознаци $\mathbf{M} \models T$, уколико свака реченица из T важи у моделу $\mathbf{M}$. На пример, *групе* смо дефинисали управо као моделе теорије Γ_{gr} (пример 9, страна 155). Приметимо да неке теорије уопште немају моделе – такве су, на пример, све теорије које садрже неку од реченица: $\perp$, $\exists x(\neg x = x)$, $\theta \wedge \neg\theta$, за било коју реченицу θ, итд. Наравно, нас ће искључиво занимати теорије које имају моделе.

ПРИМЕРИ ТЕОРИЈА.**Теорија уређених поља.** Све *аксиоме за уређено поље* (наведене на страни 136) исказујемо реченицама језика $\mathcal{L}_{\mathrm{FO}} = \{\leqslant, +, \cdot, -, 0, 1\}$: $\forall x \forall y \forall z(x + y = y + x)$, $\cdots$, $\forall x \forall y \forall z(x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z)$. Скуп ових шеснаест реченица назива се *теорија уређених поља*, и означава се са $\mathbf{FO}$.

Теорија структуре. Релација задовољења омогућава да се дефинише *теорија* неке конкретне *структуре* $\mathbf{M}$ језика $\mathcal{L}$: $\mathrm{Th}(\mathbf{M}) = \{\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathcal{L}} : \mathbf{M} \models \varphi\}$. Приметимо да је $\mathrm{Th}(\mathbf{M})$ једна *комплетна* теорија, што значи да за сваку реченицу φ или $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbf{M})$ или $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbf{M})$, али не оба (наравно). $\triangle$

Сама природа ствари о којима говоримо указује да су кључне последице теорије T: како *логичке последице теорије* T – реченице које важе у свим моделима теорије T ($T \models ?$), тако и *теореме теорије* T – реченице које су доказиве из скупа претпоставки T ($T \vdash ?$).

Теорема потпуности заправо изједначава ова два концепта: скуп логичких последица неке теорије једнак је скупу теорема те теорије.

ТЕОРЕМА ПОТПУНОСТИ I. (Курт Гедел) Нека је T теорија у језику $\mathcal{L}$ и φ реченица у истом језику. Реченица φ важи у свим моделима теорије T ако и само ако је φ теорема теорије T, тј.

$$T \models \varphi \text{ ако и само ако } T \vdash \varphi.$$

Интересантан је следећи специјалан случај претходне теореме: $T \models \perp$ ако и само ако $T \vdash \perp$. Како $\perp$ не важи ни у једном моделу, добијамо да T нема модел ако и само ако $T \vdash \perp$.

Теорија T је *противречна* (*неконзистентна*) ако је $T \vdash \perp$, а *непротивречна* (*конзистентна*) уколико $T \nvdash \perp$.

Дакле, наредна теорема је директна последица претходне.

ТЕОРЕМА ПОТПУНОСТИ II. Теорија има модел ако и само ако је непротивречна.

Испоставља се да су ове две варијанте теореме потпуности, заправо, међусобно еквивалентне. Доказ да из варијенте II следи варијанта I је такође једноставан.

$$\begin{aligned} T \models \varphi & \text{ акко сви модели теорије } T \text{ задовољавају } \varphi \\ & \text{ акко ниједан модел теорије } T \text{ не задовољава } \neg\varphi \\ & \text{ акко } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ нема модел} \\ & \text{ акко } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ је противречна теорија} \\ & \text{ акко } T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\ & \text{ акко } T \vdash \varphi \end{aligned}$$

НАПОМЕНА. У наведеној литератури [9, 11, 27, 47] најчешће се може наћи *доказ* теореме потпуности I.

Доказ да је непротивречна свака теорија која има модел[27] представља једноставнији део. Довољно је, имајући у виду Хилбертов систем за дедукцију, показати да су ваљане све формуле из $\mathcal{A}$, као и да правила извођења „чувају" ваљаност (правило извођења примењено на ваљане формуле даје ваљану формулу). Овај део доказа, иако једноставан, прилично је заморан.

Доказ да свака непротивречна теорија има модел није нимало једноставан и најчешће се спроводи такозваном *Хенкиновом методом константи*. Најпре се конструише нова теорија T^* у проширењу $\mathcal{L}^*$ језика теорије T, тако да је:
– $T \subset T^*$,
– T^* је комплетна теорија, тј. за сваку реченицу φ, или $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \neg\varphi$,
– за сваку формулу $\varphi(x)$ у језику $\mathcal{L}^*$ која има само једну слободну променљиву, постоји симбол константе c_φ језика $\mathcal{L}^*$ такав да $T^* \vdash \exists x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x := c_\varphi)$.
Након тога, дефинише се модел $\mathbf{M}$ теорије T^*.
– Домен модела је скуп $M = \mathrm{E}/\sim$, где је E скуп свих израза језика $\mathcal{L}^*$ који не садрже променљиве, а $\sim$ релација еквиваленције на E дефинисана са: $t_1 \sim t_2$ акко $T^* \vdash t_1 = t_2$.
– Ако $R \in \mathrm{Rel}_{\mathcal{L}^*}$, $\mathrm{ar}(R) = n$, онда: $R^{\mathbf{M}}([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim)$ акко $T^* \vdash R(t_1, \ldots, t_n)$.
– Ако $F \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{L}^*}$, $\mathrm{ar}(F) = n$, онда је $F^{\mathbf{M}}([t_1]_\sim, \ldots, [t_n]_\sim) = [F(t_1, \ldots, t_n)]_\sim$.
– Ако $c \in \mathrm{Const}_{\mathcal{L}^*}$, онда је $c^{\mathbf{M}} = [c]_\sim$.

Дефинисани модел јесте модел теорије T^*, а тиме и модел теорије T. $\triangle$

Испоставља се да је једна од последица доказа теореме потпуности и наредна теорема.

ЛЕВЕНХАЈМ–СКОЛЕМОВА ТЕОРЕМА. Свака непротивречна и највише пребројива теорија T има пребројив модел.

[27] Овај део теореме потпуности често се назива и *теорема сагласности*.

Теорема компактности

Прве примене математичке логике у осталим областима математике биле су управо примене *теореме компактности* у алгебри (Малцев, 1936. године).

Теорема компактности[28]. Нека је T теорија језика првог реда $\mathcal{L}$. Ако сваки коначан подскуп од T има модел, онда и T има модел.

Доказ. Претпоставимо да сваки коначан подскуп од T има модел, али да T нема модел. Тада према теореми потпуности (II) теорија T је противречна, тј. постоји коначно много реченица $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ из T из којих се може доказати контрадикција. Тада је $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ коначан противречан подскуп од T, па нема модел, што је супротно претпоставци. $\square$

Неархимедска поља

Појам *елементарне еквиваленције* је веома важан за испитивање односа математичких структура ако се за мерило узме језик у ком изражавамо њихова својства. Две структуре $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ над истим језиком $\mathcal{L}$ су *елементарно еквивалентне*, у ознаци $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ако за сваку реченицу φ језика $\mathcal{L}$,

$$\mathbf{A} \models \varphi \text{ акко } \mathbf{B} \models \varphi,$$

тј. ако структуре $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имају иста својства изражена у предикатском рачуну првог реда над језиком $\mathcal{L}$.

Лако се види да је

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \text{ акко } \mathrm{Th}(\mathbf{A}) = \mathrm{Th}(\mathbf{B}) \text{ акко } \mathbf{A} \models \mathrm{Th}(\mathbf{B}) \text{ акко } \mathbf{B} \models \mathrm{Th}(\mathbf{A}).$$

Није тешко показати да су изоморфне структуре и елементарно еквивалентне. Међутим, обрнуто није тачно.

Теорема. Постоји неархимедско поље елементарно еквивалентно уређеном пољу реалних бројева $\mathbf{R} = (\mathbb{R}, \leqslant, +, \cdot, -, 0, 1)$.

Доказ. Додавањем новог симбола константе c језику $\mathcal{L}_{\mathrm{FO}}$ добијамо један шири језик првог реда, $\mathcal{L}_{\mathrm{FO}}^{\clubsuit} = \{\leqslant, +, \cdot, -, 0, 1, c\}$.

[28]Назив овог тврђења потиче из формулације ове теореме која подсећа на неке тополошке теореме.

Доказаћемо, применом теореме компактности, да теорија (при чему је $t_1 < t_2$ краћи запис формуле $t_1 \leqslant t_2 \wedge \neg t_1 = t_2$)

$$T = \mathrm{Th}(\mathbf{R}) \cup \{0 < c, 1 < c, 1+1 < c, 1+1+1 < c, \ldots, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} < c, \ldots\}$$

језика $\mathcal{L}_{\mathrm{FO}}^{\clubsuit}$ има модел, тј. показаћемо да сваки коначан подскуп од T има модел.

Нека је T_0 произвољан коначан подскуп од T. Тада се у T_0 налази само коначно много реченица облика $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} < c$, $n \in \mathbb{N}$; нека су то реченице:

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n_1} < c, \ \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n_2} < c, \ldots, \ \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n_k} < c$$

за неке природне бројеве $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Изаберимо било који реалан број r већи од свих $n_1, n_2, \ldots, n_k$; на пример, нека је $r = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} + 1$. Сада није тешто видети да је структура $\mathbf{R}^{\clubsuit} = (\mathbb{R}, \leqslant, +, -, \cdot, 0, 1, r)$, при чему је $c^{\mathbf{R}^{\clubsuit}} = r$, један модел скупа реченица T_0.

Према теореми компактности теорија T има модел. Нека је структура $\mathbf{F}^{\clubsuit} = (F, \preccurlyeq, \oplus, \odot, \ominus, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty)$ модел теорије T. Како је $\mathbf{F}^{\clubsuit} \models \mathrm{Th}(\mathbf{R})$, закључујемо да је $\mathbf{F} = (F, \preccurlyeq, \oplus, \odot, \ominus, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ једно уређено поље (будући да је $\mathbf{FO} \subset \mathrm{Th}(\mathbf{R})$) и то елементарно еквивалентно уређеном пољу реалних бројева.

Даље, из $c^{\mathbf{F}^{\clubsuit}} = \infty$ и

$$\mathbf{F}^{\clubsuit} \models \{0 < c, 1 < c, 1+1 < c, 1+1+1 < c, \ldots, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} < c, \ldots\},$$

следи да је ∞ елемент домена F који задовољава неједнакости

$$\mathbf{0} \prec \infty, \mathbf{1} \prec \infty, \ldots, \underbrace{\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1}}_{n} \prec \infty, \ldots$$

Дакле, уређено поље $\mathbf{F}$ је неархимедско и као такво није изоморфно структури реалних бројева. □

Из претходне теореме закључујемо да није могуће средствима предикатског рачуна првог реда дати јединствен опис уређеног поља реалних бројева. Исто је и са структуром природних бројева.

Ипак, слаба изражајна моћ предикатског рачуна има и пријатних последица. На пример, чињеница да се архимедска поља не могу описати неком теоријом првог реда[29] има за последицу постојање неархимедских поља. Коришћењем сличних метода могу се добити структуре које су елементарно еквивалентне уређеном пољу реалних бројева **R**, али које поред реалних бројева садрже и бесконачно велике елементе и бесконачно мале елементе (тзв. инфинитезимале). Такве структуре се користе у заснивању анализе без ε–δ технике. О овим структурама ћемо говорити у одељку *Нестандардна анализа*, страна 215.

Пеанова аритметика

Пеанова аритметика (првог реда), у ознаци **PA**, јесте теорија на језику $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} = \{\leqslant, +, \cdot, S, 0\}$[30], која садржи следеће реченице

PA1 $\forall x \neg 0 = S(x)$,
PA2 $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$,
PA3 $\forall x (x + 0 = x)$,
PA4 $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$,
PA5 $\forall x (x \cdot 0 = 0)$,
PA6 $\forall x \forall y (x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$,
PA7 $\forall x \forall y (x \leqslant y \Leftrightarrow \exists z (z + x = y))$,
PA8 $(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(S(x)))) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$.

Приметимо да је *принцип индукције* (**PA8**) исказан бесконачним списком аксиома – за сваку формулу $\varphi(x)$ уведена је по једна аксиома.

Пример 13. **PA** $\vdash \forall x (x = 0 \vee \exists y (x = S(y)))$

1. $\vdash 0 = 0$ $(=_{\mathrm{U}})$
2. $\vdash 0 = 0 \vee \exists y (0 = S(y))$ $(\vee^{\mathrm{l}}_{\mathrm{U}})$
3. $x = 0 \vee \exists y (x = S(y)) \vdash S(x) = S(x)$ $(=_{\mathrm{U}})$
4. $x = 0 \vee \exists y (x = S(y)) \vdash \exists y (S(x) = S(y))$ $(\exists_{\mathrm{U}})$
5. $x = 0 \vee \exists y (x = S(y)) \vdash S(x) = 0 \vee \exists y (S(x) = S(y))$ $(\vee^{\mathrm{d}}_{\mathrm{U}})$
6. $\vdash x = 0 \vee \exists y (x = S(y)) \Rightarrow S(x) = 0 \vee \exists y (S(x) = S(y))$ $(\Rightarrow_{\mathrm{U}})$
7. $\vdash \forall x (x = 0 \vee \exists y (x = S(y)) \Rightarrow S(x) = 0 \vee \exists y (S(x) = S(y)))$ $(\forall_{\mathrm{U}})$

[29] Класа архимедских поља није аксиоматизабилна.

[30] $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}} = \{\leqslant\}$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}} = \{+, \cdot, S\}$, $\mathrm{ar}(\leqslant) = \mathrm{ar}(+) = \mathrm{ar}(\cdot) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = 1$, $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}} = \{0\}$

Означимо са $\varphi(x)$ формулу $x = 0 \vee \exists y(x = S(y))$.

8. $\vdash \varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(S(x)))$ $(\wedge_{\mathrm{U}})$
9. $\vdash (\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(S(x)))) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$ **(PA8)**
10. $\vdash \forall x(x = 0 \vee \exists y(x = S(y)))$ $(\Rightarrow_{\mathrm{E}})$ $\triangle$

Нумерали $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n}, \ldots$ су редом краће ознаке за изразе

$$S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots, \underbrace{S(S(\cdots S(0)\cdots))}_{n \text{ пута}}, \ldots$$

Није тешко видети да нумерали репрезентују стандардне природне бројеве $0, 1, 2, \ldots$, па у стандардном моделу за **PA**, израз $\overline{n}$ управо добија значење природног броја n. У **PA** се могу репрезентовати и многе уобичајене релације и функције природних бројева.

ПРИМЕР 14. У поглављу *Природни бројеви* било је речи о функцији ρ (страна 116) која сваком пару природних бројева n и m додељује остатак при дељењу m са n. Формула $\varphi_\rho(x, y, z) := ((z < y) \wedge \exists u(x = u \cdot y + z)) \vee (y = 0 \wedge z = x)$ репрезентује у **PA** функцију ρ у смислу да за све природне бројеве n, m, r,

$$\rho(n, m) = k \text{ акко } \mathbf{PA} \vdash \varphi_\rho(x := \overline{m}, y := \overline{n}, z := \overline{k}),$$

и

$$\rho(n, m) \neq k \text{ акко } \mathbf{PA} \vdash \neg\varphi_\rho(x := \overline{m}, y := \overline{n}, z := \overline{k}). \qquad \triangle$$

Као што ћемо видети, од великог значаја је наредна теорема.

ТЕОРЕМА. За сваку израчунљиву функцију f са k аргумената постоји формула $\varphi_f(v, v_1, \ldots, v_k)$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ таква да је за све природне бројеве $n, n_1, \ldots, n_k$,

$$f(n_1, \ldots, n_k) = n \text{ акко } \mathbf{PA} \vdash \varphi_f(\overline{n}, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}),$$

$$f(n_1, \ldots, n_k) \neq n \text{ акко } \mathbf{PA} \vdash \neg\varphi_f(\overline{n}, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$$

и при том је

$$\mathbf{PA} \vdash \exists x \varphi_f(x, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \wedge \\ \wedge \forall x \forall y(\varphi_f(x, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \wedge \varphi_f(y, \overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k}) \Rightarrow x = y).$$

Другим речима, израчунљиве су оне и само оне функције које се могу представити у **PA**. На тај начин, теорија **PA** нам заправо даје још једну репрезентацију класе израчунљивих функција.

Нестандардни модели аритметике

Веома важно је имати у виду да поред структуре $\mathbf{N}$ постоје и други модели теорије $\mathbf{PA}$ који нису изоморфни са $\mathbf{N}$. Штавише, постоје и модели теорије $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$ који нису изоморфни са $\mathbf{N}$.

Теорија $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$, која се састоји од свих реченица језика $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ које су истините у моделу $\mathbf{N}$, назива се *комплетна аритметика*. Јасно, структура $\mathbf{N}$ је модел теорије $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$ и њу називамо *стандардни модел аритметике*. Свака друга структура која је модел за $\mathrm{Th}(\mathbf{N})$ и није изоморфна са $\mathbf{N}$ је *нестандардни модел аритметике*.

ТЕОРЕМА. Постоји пребројив нестандардан модел комплетне аритметике.

Доказ. Проширимо језик $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ новим симболом константе c. Нека је за сваки природан број n, $\overline{n} < c$ скраћење за формулу $\overline{n} \leqslant c \wedge \neg\, \overline{n} = c$. Посматрајмо теорију

$$T = \mathrm{Th}(\mathbf{N}) \cup \{\overline{0} < c, \overline{1} < c, \overline{2} < c, \ldots, \overline{n} < c, \ldots\}$$

у језику $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}} \cup \{c\}$.

Сваки коначан подскуп T_0 од T садржи само коначно много реченица облика $\overline{n} < c$, $n \in \mathbb{N}$; нека су то: $\overline{n_1} < c$, $\overline{n_2} < c$, $\ldots$, $\overline{n_k} < c$, за неке природне бројеве $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Тада је очигледно

$$T_0 \subset \mathrm{Th}(\mathbf{N}) \cup \{\overline{n_1} < c,\ \overline{n_2} < c,\ \ldots,\ \overline{n_k} < c\}.$$

Нека је m било који природан број већи од свих $n_1, n_2, \ldots, n_k$; на пример, $m = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} + 1$. Тада је

$$\mathbf{N}^{\spadesuit} = (\mathbb{N}, \leqslant, +, \cdot, s, 0, m) \models \mathrm{Th}(\mathbf{N}) \cup \{\overline{n_1} < c,\ \overline{n_2} < c,\ \ldots,\ \overline{n_k} < c\},$$

при чему је $c^{\mathbf{N}^{\spadesuit}} = m$, па је и $\mathbf{N}^{\spadesuit} \models T_0$.

Дакле, сваки коначан подскуп од T има модел, па према ставу компактности и T има модел, а према Левенхајм–Сколемовој теореми T има и пребројив модел. Нека је $\mathbf{M}^{\spadesuit} = (M, \preccurlyeq, \oplus, \odot, S^{\mathbf{M}}, \mathbf{0}, m)$ пребројив модел теорије T. Тада је структура $\mathbf{M} = (M, \preccurlyeq, \oplus, \odot, S^{\mathbf{M}}, \mathbf{0})$ **пребројив нестандардан модел аритметике**. □

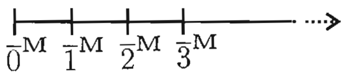
Како „изгледа“ нестандардни модел добијен у доказу претходне теореме?

Пођимо од следећих реченица које важе у стандардном моделу $\mathbf{N}$.

$$\forall x(\bar{0} = x \vee \bar{0} < x)$$

$$\bar{0} < \bar{1} \wedge \forall x(\bar{0} < x \Rightarrow (\bar{1} = x \vee \bar{1} < x))$$
$$\bar{1} < \bar{2} \wedge \forall x(\bar{1} < x \Rightarrow (\bar{2} = x \vee \bar{2} < x))$$
$$\bar{2} < \bar{3} \wedge \forall x(\bar{2} < x \Rightarrow (\bar{2} = x \vee \bar{3} < x))$$
$$\vdots$$

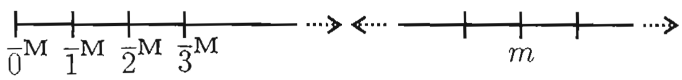
Оне кажу да је 0 најмањи елемент, затим да је 1 следећи најмањи после 0, па да је 2 следећи најмањи после 1, и тако даље. Како су ове реченице истините у стандардном моделу $\mathbf{N}$, па тиме и у нестандардном моделу $\mathbf{M}$, почетни сегмент од $\mathbf{M}$ изгледа овако:



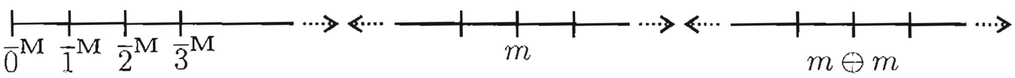
Међутим, скуп M садржи и елемент m који се налази „иза“ (у смислу уређења $\preccurlyeq$) свих елемената $\bar{0}^{\mathbf{M}}$, $\bar{1}^{\mathbf{M}}$, $\bar{2}^{\mathbf{M}}$, ... Како стандардни модел $\mathbf{N}$ задовољава реченицу

$$\forall x(\exists y(S(x) = y) \wedge (\neg x = 0 \Rightarrow \exists z(S(z) = x))),$$

која каже да сваки елемент има непосредног следбеника и сваки елемент различит од нуле непосредног претходника, скуп M поред елемента m садржи још бесконачно много нових елемената који су заједно са m поређани уређењем $\preccurlyeq$ као цели бројеви:



Ако узмемо у обзир елемент $m \oplus m$ добијамо нове елементе из M:



тј. нову копију целих бројева. Није тешко показати да се између сваке две копије уређења целих бројева $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ у $\mathbf{M}$ налази нова таква копија.

Теорија скупова

Почетком XX века немачки математичари *Цермело* (1871–1953) и *Френкел* (1891–1965) дали су систем аксиома за теорију скупова назван **ZF** по почетним словима њихових презимена. Сасвим слично систему аксиома геометрије који не даје дефиниције *тачке* и *праве* већ описује шта можемо учинити са овим објектима, и у овом случају теорија **ZF** не одговора на питање *шта је скуп*, већ аксиоматизује наша (интуитивно стечена) знања о скуповима. Другим речима, **ZF** изражава својства скупова једним прецизним математичко-логичким језиком.

Следећи нашу интуитивну представу о скуповима као објектима који имају *елементе* основну улогу има својство *бити елемент* односно релација $\in$. Дакле, језик теорије скупова $\mathcal{L}_{\mathbf{ZF}} = \{\in\}$ садржи само један релацијски знак дужине два. У математици се скупови чији су сви елементи такође скупови највише проучавају. Показало се да су они у већини математичких теорија сасвим довољни и да никакви други објекти нису потребни. Практично, испоставља се да је довољно узети празан скуп као полазни објекат помоћу кога је могуће изградити све остале скупове.

У оквиру прегледа самих аксиома описаћемо и како се помоћу њих уводе неки основни математички појмови у нади да ћемо бар мало дочарати поступак заснивања стандардне математике у оквиру теорије **ZF**.

Аксиома екстензионалности. *Скупови x и y су једнаки ако и само ако имају исте елементе,* тј. $x = y \Leftrightarrow \forall v\,(v \in x \Leftrightarrow v \in y)$.

У овој аксиоми препознајемо формулу која се у неформалним разматрањима назива дефиницијом једнакости скупова. У овом случају, ову аксиому треба схватити као формулу која повезује основне релације $=$ и $\in$, и представља критеријум за једнакост скупова. Поред ове две основне важна је и релација „бити подскуп“: $x \subseteq y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v\,(v \in x \Rightarrow v \in y)$. Није тешко показати да важи еквиваленција: $x = y \Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x$.

Аксиома празног скупа. *Постоји скуп који нема елемената,* односно $\exists x\, \forall v\, \neg(v \in x)$.

Ова аксиома, заједно са претходном, нам омогућава да дефинишемо *празан скуп*: $x = \emptyset \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v\, \neg\, v \in x$ (према аксиоми празног скупа овакав скуп x постоји, док је према аксиоми екстензионалности он јединствен). Може се показати да за сваки скуп x важи $\emptyset \subseteq x$.

Аксиома пара. *За свака два скупа* x *и* y *постоји скуп* z *чији су једини елементи* x *и* y, тј. $\forall x \forall y \exists z \forall v\,(v \in z \Leftrightarrow v = x \vee v = y)$.

Из аксиоме пара и аксиоме екстензионалности следи исправност дефиниције $z = \{x, y\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v\,(v \in z \Leftrightarrow v = x \vee v = y)$. Овим смо дефинисали један бинарни операцијски знак $\{\cdot, \cdot\}$, и тиме теорију скупова уз већ дефинисану константу $\emptyset$ обогатили још и једном операцијом, тј. правилом формирања скупова. На основу ове аксиоме можемо утврдити постојање многих скупова. Једночлан скуп (тзв. *синглтон*) $\{x\}$ јесте скуп $\{x, x\}$. Уређен пар (x, y) дефинише се као скуп $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Није тешко показати да је $(a, b) = (x, y)$ акко је $a = x$ и $b = y$. Поред празног скупа, сада имамо и скупове $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$

Аксиома партитивног скупа. *За сваки скуп* x *постоји скуп* y *свих његових подскупова*, тј. $\forall x \exists y \forall v\,(v \in y \Leftrightarrow v \subseteq x)$.

За скуп y уводимо ознаку $\mathcal{P}(x)$: $y = \mathcal{P}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v\,(v \in y \Leftrightarrow v \subseteq x)$. И ова дефиниција је, слично као и претходна, коректна. На основу аксиоме партитивног скупа, $\mathcal{P}(x)$ постоји за сваки скуп x, а на основу аксиоме екстензионалности он је јединствен. Овим је уведен унарни операцијски знак $\mathcal{P}(\cdot)$.

Аксиома подскупа (сепарације). *За сваки скуп* x *и свако својство* S *постоји подскуп* y *скупа* x *који садржи тачно оне елементе* v *који задовољавају* S, тј. $\forall x \exists y \forall v\,(v \in y \Leftrightarrow v \in x \wedge S(v))$.

Ова аксиома тврди постојање (за свако својство S) скупа свих v за које важи $S(v)$ али *који припадају* x; ово је у ствари аксиома окупљања. Она не изазива Раселов парадокс јер се према њој окупљање врши само у оквиру неког већ датог скупа, тј. уведено је ограничење које спречава произвољна окупљања. Према аксиоми подскупа и аксиоми екстензионалности скуп y је јединствен па је дефиниција $y = \{v \mid v \in x \wedge S(v)\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall v\,(v \in y \Leftrightarrow v \in x \wedge S(v))$ исправна. Њоме се строго уводи оператор окупљања, $\{\ \mid\ \}$. Сада лако уводимо пресек, $x \cap y \overset{\text{def}}{=} \{v \mid v \in x \wedge v \in y\}$, и разлику, $x \setminus y \overset{\text{def}}{=} \{v \mid v \in x \wedge v \notin y\}$, два скупа. Међутим, ову аксиому не можемо искористити за дефинисање уније, јер су и пресек и разлика два скупа подскупови једног од њих, а унија то није.

Аксиома уније. *За сваки скуп* x *постоји скуп* y *који садржи све елементе елемената скупа* x, тј. $\forall x \exists y \forall v\,(v \in y \Leftrightarrow \exists z\,(v \in z \wedge z \in x))$.

Овај скуп y се означава са $\cup x$ или $\cup_{v \in x} v$. Уз помоћ ове аксиоме можемо, специјално, стићи до уније два скупа. Према аксиоми пара за свака два скупа x и y постоји скуп $\{x, y\}$. Према претходној аксиоми постоји унија скупа $\{x, y\}$, тј. $\cup\{x, y\}$ или $x \cup y$. Овај скуп је скуп свих елемената скупова x и y.

Коришћењем до сада уведених аксиома могу се дефинисати многи важни математички појмови. На пример, помоћу аксиома уније, партитивног скупа и сепарације може се дефинисати Декартов производ $x \times y$ скупова x и y са $x \times y \stackrel{\text{def}}{=} \{(u,v) \mid u \in x \wedge v \in y\}$. Нећемо строго оправдавати ову дефиницију, већ ћемо само доказати да је $x \times y \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. Заиста, из $(a,b) \in x \times y$, следи да $a \in x$ и $b \in y$, па $a, b \in x \cup y$, односно $\{a\}, \{a,b\} \subseteq x \cup y$, тј. $\{a\}, \{a,b\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$. Дакле, $\{\{a\}, \{a,b\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$, па одавде $\{\{a\}, \{a,b\}\} = (a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$. На основу до сада уведених аксиома, за задати скуп x, могу се формулисати и појмови као што су *релација еквиваленције* скупа x, *релација поретка* скупа x и слично. Такође, уводи се и један од најзначајнијих појмова математике – појам *функције*. Кажемо да је *скуп f функција скупа a у скуп b*, и пишемо $f : a \to b$, ако и само ако је $f \subseteq a \times b$ и за сваки x из a постоји јединствен y из b такав да $(x,y) \in f$, тј.

$$f : a \to b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1^\circ & f \subseteq a \times b, \\ 2^\circ & (\forall x \in a)(\exists y \in b)\,(x,y) \in f, \\ 3^\circ & (\forall x \in a)(\forall y \in b)(\forall z \in b)\,((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \;\Rightarrow\; y = z). \end{cases}$$

Уобичајено је да се уместо $(x,y) \in f$ пише $f(x) = y$. Такође, дефинишемо и следеће веома важне врсте функција: 1–1 функције (тзв. *инјекције*), **на**-функције (тзв. *сирјекције*), као и обострано-једнозначне функције (тзв. *бијекције*).

Уведене врсте функција користимо, између осталог, за дефиницију бесконачних скупова: *скуп x је бесконачан ако и само ако постоји бар једна* 1–1 *функција $f : x \stackrel{1-1}{\to} x$ која није* **на**. На основу до сада уведених аксиома не може се показати да бесконачан скуп постоји.

Аксиома бесконачности. *Постоји скуп који није празан и који са сваким својим елементом y садржи још један елемент $y \cup \{y\}$, различит од y,* тј. $\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \;\Rightarrow\; y \cup \{y\} \in x))$.

Овом аксиомом се тврди да постоји бесконачан скуп. Скуп x је баш такав, „нема краја“, тј. x са сваким својим елементом y садржи и елемент $y \cup \{y\}$ који је различит од y. Тако, елементи скупа x су $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \ldots$

Аксиома замене. Овом аксиомом се интуитивно тврди да ако неке од елемената скупа x заменимо произвољним скуповима, сваки елемент једним скупом, резултат такве замене јесте скуп.

Са овом аксиомом се завршава списак аксиома који формализује својства скупова на која се свакодневно позивамо у свим областима математике. Уобичајено је да се теорија базирана на овима аксиомама назива и *наивна теорија скупова*. Наведене аксиоме теорије скупова утврђују углавном опште познате чињенице које и математичар неупућен у ову теорију често користи.

Теорија **ZF** садржи још једну аксиому, **аксиому регуларности**, која превасходно има теоријски значај и служи да елиминише одређене патолошке објекте. Ова аксиома обезбеђује да се не могу појавити циклуси облика $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$ или бесконачни опадајући низови облика $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \cdots$ или скуп x такав да је $x = \{x\}$.

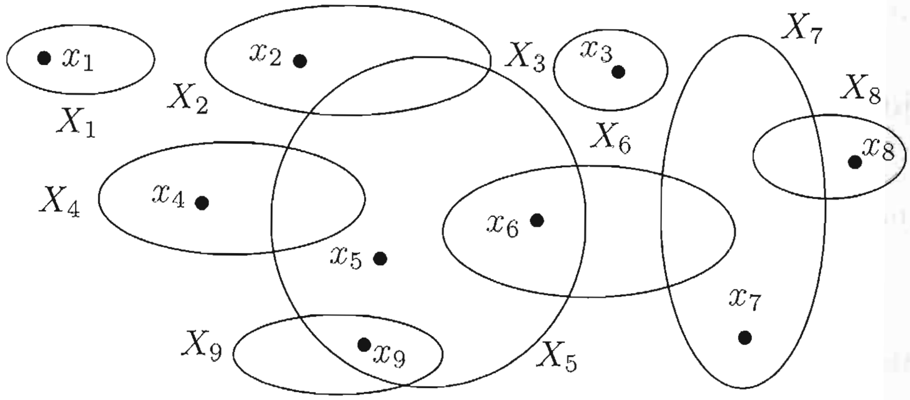
У **ZF** се могу дефинисати све уобичајене математичке структуре бројева (нама нарочито важни примери бесконачних скупова). На пример, дефиниције природних бројева су $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{0\}, \{\{0\}\}\}$, $3 = \{0, 1, 2\}, \ldots, n + 1 = n \cup \{n\}$; дакле, сваки природан број је (коначан!) скуп свих природних бројева који му претходе, $n + 1 = \{0, 1, \ldots, n\}$. Захваљујући аксиоми бесконачности и аксиоми сепарације, постоји и (бесконачан!) скуп свих природних бројева $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Уобичајено строго уређење $<$ скупа природних бројева је, при овим дефиницијама, преозначена релација $\in$: $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$. Полазећи од природних бројева, конструишемо и све остале врсте бројева, тј. (бесконачне) скупове целих $\mathbb{Z}$, рационалних $\mathbb{Q}$, реалних $\mathbb{R}$ бројева.

Осим аксиома теорије **ZF**, у математици се користи и тзв. **аксиома избора**. Ова аксиома се разликује од осталих по томе што тврди постојање одређеног скупа који истовремено и не дефинише. На пример, аксиоме подскупа, пара, уније, партитивног скупа, бесконачности и замене експлицитно дефинишу скупове чије постојање тврде. Из тих разлога, аксиома избора има посебно место у теорији скупова и математици уопште. Већина математичара само овај скуповни принцип назива аксиомом (јер не представља „очигледну чињеницу"), а све друге аксиоме се у свакодневној математици уопште и не помињу. Наиме, при разним конструкцијама срећемо следећи проблем.

Дата је колекција (синоним за скуп) $\{X_i \mid i \in I\}$ непразних скупова и потребно је из сваког од њих изабрати по елемент и формирати *скуп представника*, тзв. *изборни скуп*, у коме ће сваки X_i бити заступљен неким својим елементом x_i.

Аксиома избора. *За сваку колекцију скупова постоји скуп који садржи по тачно један елемент сваког скупа из колекције.*

Аксиому избора често означавамо са (AC)[31], док се са **ZFC** означава теорија која се добија када аксиомама **ZF** додамо (AC).



$$\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$$

У неким једноставним случајевима постојање изборног скупа се може доказати и у теорији **ZF**; на пример, за колекцију једночланих скупова или за сваку коначну колекцију непразних скупова. Међутим, постојање изборног скупа неке бесконачне колекције се не може доказати чак ни уз претпоставку да је сваки елемент те колекције коначан скуп. Велики делови савремене математике изгледали би сасвим другачије без аксиоме избора (нарочито у топологији, алгебри, функционалној анализи, теорији мере). Чак и тако елементарна ствар као што је еквиваленција, у реалној анализи, двеју дефиниција граничне вредности (преко низова и преко околина) непосредно зависи од аксиоме избора. Интересантно је поменути да „постоји математика" у којој аксиома избора не важи и у којој, на пример, те две дефиниције граничне вредности нису еквивалентне. Ипак, велики број математичара се позива на ову аксиому. Позивањем на ову аксиому, поред великог броја значајних математичких резултата, добијамо и низ резултата који противрече нашој геометријској интуицији. Неки од њих изгледали су тако да је један број математичара озбиљно посумњао у оправданост прихватања ове аксиоме. Пример таквог резултата, до кога су дошли Хауздорф, Банах и Тарски, јесте *разлагање јединичне лопте на коначан број (пет) делова од којих се, кретањем у простору, могу склопити две јединичне лопте* (видети пример 61 на страни 295).

[31] Скраћеница (AC) потиче од енглеског назива Axiom of Choice.

Теорија **ZFC** нам омогућава да упоређујемо и бесконачне скупове по њиховој величини или по „броју" елемената, ако се за меру узме могућност успостављања обострано-једнозначне функције[32]. Тако, за произвољне скупове x и y кажемо да су *једнаки по величини* или *исте кардиналности* или *еквипотентни*, и пишемо $|x| = |y|$ (или $x \sim y$), ако **постоји** скуп f који је обострано-једнозначна функција скупа x **на** скуп y, тј. постоји f тако да је $f : x \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\to}} y$. Лако се доказује да за произвољне скупове x, y, z важи: $|x| = |x|$; $|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x|$; $|x| = |y| \wedge |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z|$. Слично, кажемо да је скуп x *мање кардиналности* од скупа y, и пишемо $|x| \leqslant |y|$ (или $x \preccurlyeq y$), ако и само ако **постоји** скуп f који је 1–1-функција скупа x у скуп y, тј. постоји f тако да је $f : x \overset{1-1}{\to} y$. Лако се види да из $x \subseteq y$ следи да је $|x| \leqslant |y|$. Такође, помоћу аксиома **ZF**, може се доказати: *из* $|x| \leqslant |y|$ *и* $|y| \leqslant |x|$ *следи да је* $|x| = |y|$. Ово тврђење се назива Шредер–Бернштајнова теорема. *Строги* поредак по кардиналности међу скуповима уводимо на уобичајен начин: $|x| < |y|$ ако и само ако $|x| \leqslant |y|$ и $|x| \neq |y|$. Ако је x прави подскуп неког коначног скупа y ($x \subseteq y$ и $x \neq y$), тада је $|x| < |y|$. Може се показати: *скуп y је бесконачан ако и само ако постоји прави подскуп x скупа y такав да је $|x| = |y|$*. Скуп $\mathbb{N}$ је бесконачан: скуп парних бројева $2\mathbb{N}$ је прави подскуп од $\mathbb{N}$ и важи $|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$; $f : \mathbb{N} \overset{1-1}{\underset{\text{на}}{\to}} 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$.

Значајно тврђење **ZF** теорије је и да *за сваки скуп x,* $|x| < |\mathcal{P}(x)|$ (тј. $|x| \leqslant |\mathcal{P}(x)|$ и $|x| \neq |\mathcal{P}(x)|$). Да је $|x| \leqslant |\mathcal{P}(x)|$ није тешко показати: $f : x \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(x)$, $f(a) = \{a\}$, $a \in x$. Међутим, било која фукција скупа x у $\mathcal{P}(x)$ није **на**, тј. не постоји обострано-једнозначна функција скупа x **на** скуп $\mathcal{P}(x)$. Заиста, ако је $g : x \to \mathcal{P}(x)$ било која функција, тада скуп $y = \{v \mid v \in x \wedge v \notin g(v)\}$ није g-слика ниједног елемента из x. У супротном, ако би постојао v из x такав да је $g(v) = y$, имали бисмо да $v \in y$ ако и само ако $v \notin y$, што је немогуће. Овај доказ је стар преко сто година. Важна непосредна последица овог тврђења је да не постоји скуп свих скупова. Ако би постојао такав скуп V, тада бисмо имали да је $\mathcal{P}(V) \subseteq V$ (јер је сваки подскуп од V истовремено и елемент V) па и $|\mathcal{P}(V)| \leqslant |V|$. Такође, сви једночлани скупови не образују скуп, јер ако би K био скуп свих једночланих скупова, тада би **за сваки**

[32]Дефинисање бијекције међу скуповима је апстрахован процес пребројавања елемената неког коначног скупа.

скуп x било $x \in \{x\} \in K$, тј. $x \in \cup K$, па би скуп $\cup K$ садржавао све скупове. Интересантно је, такође, размотрити какве последице има неједнакост $|x| < |\mathcal{P}(x)|$, уколико је x бесконачан скуп. Као што смо већ поменули, упоређивање скупова бројева по кардиналности је главни „кривац" настанка теорије скупова јер се њеним првим резултатима сматрају Канторове теореме $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ и $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Слободније речено, последња неједнакост нам говори да постоји нека врста бесконачности вишег реда, тј. да и од бесконачних скупова има строго „бројнијих", будући да је скуп $\mathbb{N}$ бесконачан. Штавише, користећи доказану неједнакост $|x| < |\mathcal{P}(x)|$, можемо конструисати бесконачан, строго растући по кардиналности, низ бесконачних скупова.

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots < |\underbrace{\mathcal{P}(\cdots\mathcal{P}(\mathcal{P}}_{n}(\mathbb{N}))\cdots)| < \cdots$$

Кажемо да је бесконачан скуп x *пребројив* ако и само ако је $|x| = |\mathbb{N}|$; остале бесконачне скупове називамо *непребројивим.* Наведени низ је сведок бескрајне скале бесконачности које су непребројиве. Како је $\mathbb{R}$ непребројив скуп природно је поставити питање: „Да ли у горњем низу бесконачних скупова постоји неки који је еквипотентан скупу реалних бројева $\mathbb{R}$?". Може се показати да је $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. За скуп x који је исте кардиналности као $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (тј. $\mathbb{R}$) кажемо да је кардиналности *континуума.* Дуго је математичаре мучило питање: „Да ли постоји скуп x такав да је $|\mathbb{N}| < |x| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$?". Исказ

не постоји скуп x такав да је $|\mathbb{N}| < |x| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

зове се **хипотеза континуума** и означава се са **CH**. У теорији **ZFC** не може се доказати ни постојање ни непостојање таквог скупа x, па је однос **CH** према овом систему аксиома једнак односу V Еуклидовог постулата према систему аксиома апсолутне геометрије. Дакле, и **CH** и $\neg$**CH** се може додати систему **ZFC**.

Слично природним бројевима који нам служе за одређивање величине неког коначног скупа (на пример, $|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}| = 3$), уз помоћ аксиоме избора може се дефинисати бесконачно много скупова, тзв. *(трансфинитних) кардиналних бројева* или краће *кардинала*, који служе за изражавање величине, односно „бројности", бесконачних скупова. Један бесконачан кардинал, у ознаци $\aleph_0$ (читамо: алеф нула), одређује скуп природних бројева и карактерише пребројиве скупове; на пример,

$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Најмањи непребројив кардинал, тј. први кардинал већи од $\aleph_0$, означавамо са $\aleph_1$, најмањи већи од њега са $\aleph_2$, и слично даље[33]. Иако сви кардинали не образују скуп, аритметичке операције (сабирање, множење, степеновање, бесконачне суме и производи) могу се, у извесном смислу, проширити и на ове „бесконачне бројеве", па је у оквиру теорије **ZFC** развијена тзв. *кардинална аритметика*. Тако је, на пример, за сваки природан број n: $n + \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$, $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, и тако даље. Приметимо да је проблем континуума „елементаран" проблем кардиналне аритметике: којем од алефа је једнак кардиналан број континуума, тј. ком алефу је једнако $2^{\aleph_0}$ $(= |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|)$? Хипотеза континуума јесте да је $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Теорија **ZFC** нам даје само неједнакост $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Дакле, иако довољно јака (и погодна) да се у њој изразе практично сви данас значајни математички принципи[34], теорија **ZFC** ипак нема одговоре на један број важних и природних питања (**CH**). Новији резултати из теорије скупова и математичке логике показују да је наше математичко искуство још увек недовољно да би се дали одговори на многа слична питања.

Комбинаторни универзум

Са структуром природних бројева нераздвојиво су повезани разни коначни комбинаторни објекти, тј. коначни скупови и финитарне операције над њима. Сви ови (али и неки бесконачни) објекти могу се изградити у унији низа скупова V_n, $n \in \mathbb{N}$, дефинасаног на следећи начин $V_0 = \emptyset$ и $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Скуп $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ називамо *домен коначне комбинаторике*.

У теорији **ZF** се може доказати да је V скуп свих *стриктно коначних скупова*. Скуп x је стриктно коначан уколико је коначан сваки скуп у сваком ланцу $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x$. Такође, у оквиру исте теорије се може доказати да $(V, \in)$ задовољава све аксиоме теорије **ZF** осим аксиоме бесконачности; уместо ње задовољава њену негацију.

Следећа својства скупа V нам дају довољно разлога да V заиста сматрамо комбинаторним универзумом.

---

[33]до $\aleph_\omega$; затим следе $\aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$

[34]Постоје и други начини прецизног заснивања математике који су еквивалентни са поменутим заснивањем у теорији скупова; један од њих је у оквиру теорије категорија.

1. Ако $x \in V$ и $y \in x$, онда $y \in V$.
2. Ако $x_1, \ldots, x_n \in V$, онда $\{x_1, \ldots, x_n\} \in V$.
3. Ако $x, y \in V$, онда $(x, y) \in V$ $((x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\})$.
4. Ако $x \in V$, онда $\cup x \in V$.
5. Ако $x, y \in V$, онда $x \times y \in V$.
6. Ако $x, y \in V$ и $f : x \to y$, онда $f \in V$.
7. Ако $x, y \in V$, онда $x^y \in V$, при чему је $x^y = \{f \mid f : x \to y\}$.
8. Ако $x \in V$, онда $\mathcal{P}(x) \in V$.
9. Ако $x \in V$ и $\mathbf{x}$ је модел над x неког коначног језика, онда $\mathbf{x} \in V$.

Комбинаторни универзум је веома близак структури природних бројева. Уведимо бинарну релацију ϵ у скупу природних бројева на следећи начин:

$x \epsilon y$ акко „x се појављује у бинарном развоју за y".

Дакле, ако је $y = \sum_{i=1}^{n} 2^{z_i}$ бинарни развој за y, онда $x \epsilon y$ ако и само ако $x \in \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. На пример, $5 \epsilon 41$, јер је $41 = 2^1 + 2^3 + 2^5$.

Нека је $\Phi : \mathbb{N} \to V$ пресликавање дефинисано на следећи начин: $\Phi(0) = \emptyset$ и ако је $x \in \mathbb{N}$, $x > 0$ и $x = \sum_{i=1}^{n} 2^{x_i}$ бинарни развој за x, нека је $\Phi(x) = \{\Phi(x_1), \Phi(x_2), \ldots, \Phi(x_n)\}$. Може се, применом теореме рекурзије, доказати да је Φ добро дефинисано.

Теорема. $\Phi : (\mathbb{N}, \epsilon) \to (V, \in)$ је изоморфизам.

Пресликавање $\Psi : V \to \mathbb{N}$ дефинисано са

$$\Psi(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\Psi(x_i)}, \qquad \Psi(\emptyset) = 0$$

је инверзно пресликавању Φ, $\Psi = \Phi^{-1}$.

Дакле, свака конструкција, дефиниција, теорема, ... **у** или **о** структури $(V, \in)$ има своју аналогну конструкцију, дефиницију, теорему, ... у структури природних бројева. Другим речима, можемо узети да се аксиоме теорије **ZF** без аксиоме бесконачности односе на природне бројеве – само на други начин.

Постоји ли алгоритам за утврђивање логичких истина?

Прихватајући теорије $\mathbf{PA}$ и $\mathbf{ZF}$ математичари су, практично, трагање за одговорима на питања: „Шта су природни бројеви?“, односно „Шта су скупови?“ заменили проналажењем начина за упознавање њихових особина, тј. питањима „Које особине природних бројева се могу доказати?“, односно „Које особине скупова се могу доказати?“.

Занимљива паралела, дата у [9], указује на сличне оквире размишљања и у другим наукама. У физици, на пример, скоро је неважно знати, у филозофском смислу, шта је светлост, електрон, кварк, ако постоје средства да се делује на светлост итд. А таква средства постоје, и свакодневно се користе: умемо да „производимо“ светлост, електроне, кваркове. Као што су Пеанове аксиоме средство за доказивање истина о природним бројевима, исто тако су и Максвелове једначине основа теорија које омогућавају да се разумеју светлост, електрон, кварк итд, и да се, дакле, дејствује на њих.

У време када су откривени (задовољавајући) начини доказивања особина природних бројева ($\mathbf{PA} \vdash \cdots$) или скупова ($\mathbf{ZF} \vdash \cdots$), веровало се да је могуће пронаћи и „аутоматске“ начине (алгоритме, програме) доказивања тих особина. Данас је познато да такви алгоритми у општем случају не постоје. Тако, на пример, не постоји алгоритам који, у општем случају, за сваку реченицу може проверити да ли она јесте или није ваљана формула (логичка истина), односно да ли је теорема предикатског рачуна. (У неким специјалним случајевима, за реченице одређеног типа, поступак за проверу истинитости постоји.)

Испоставило се да је идеја кодирања била пресудна у решавању многобројних проблема математичке логике. Гедел је први користио кодирање за анализу логичких појмова као што су израз, формула, доказ, теорема.

Постоји ли алгоритам који са ДА или НЕ одговара на питање: „Да ли је нека задата формула доказива из PA?“

Будући да је језик $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ коначан скуп, а скупови израза, формула и коначних низова формула су ефективно дати (постоји поступак којим се у коначно много корака утврђује да ли је нешто израз, формула или коначан низ формула језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$), све поменуте објекте можемо кодирати (слично као у примеру 1 на страни 120).

Сваком симболу језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ доделићемо један непаран природан број

$$g : \begin{pmatrix} \leqslant & + & \cdot & S & 0 & \wedge & \vee & \neg & \Rightarrow & \forall & \exists & = & (&) & v_i \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31+2i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Пошто су сви терми и све формуле језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ коначни низови неких симбола који чине домен функције g, можемо једноставно и њих кодирати. Ако су, на пример, $g_1, g_2, \ldots, g_k$ природни бројеви придружени редом симболима који граде формулу φ, за кôд формуле φ можемо узети

$$\ulcorner \varphi \urcorner = p_1^{g_1} \cdot p_2^{g_2} \cdots p_k^{g_k},$$

где је $p_1, p_2, \ldots, p_k$ почетни сегмент низа простих бројева у растућем поретку ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$). На пример,

$$\ulcorner \forall v_1 \exists v_2 (S(v_1) = v_2) \urcorner = 2^{21} \cdot 3^{33} \cdot 5^{23} \cdot 7^{35} \cdot 11^{27} \cdot 13^{33} \cdot 17^{9} \cdot 19^{25} \cdot 23^{35} \cdot 29^{29}.$$

Даље, и низове формула можемо кодирати на исти начин,

$$\ulcorner \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \urcorner = p_1^{\ulcorner \varphi_1 \urcorner} \cdot p_2^{\ulcorner \varphi_2 \urcorner} \cdots p_k^{\ulcorner \varphi_k \urcorner}.$$

На пример, $\ulcorner v_1 \leqslant v_2, v_1 = v_3 \urcorner = 2^{\ulcorner v_1 \leqslant v_2 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner v_1 = v_3 \urcorner} = 2^{2^{33} \cdot 3^{3} \cdot 5^{35}} \cdot 3^{2^{33} \cdot 3^{25} \cdot 5^{37}}$.

Дакле, кодирање нам омогућава да сваком изразу, свакој формули и сваком низу формула придружимо по један природан број. Међутим, постоји ли поступак (алгоритам) којим можемо (наравно, у коначно много корака) да утврдимо да ли је неки природан број кôд неког од објеката које смо кодирали и ако јесте, можемо ли експлицитно и да одредимо тај објекат (израз, формулу, низ формула)? Одговор је потврдан. Такав Алгоритам постоји!

Пример 15. Задајмо Алгоритму да утврди да ли је `ULAZ`$= 2700000000000$ кôд и ако јесте чији. Најпре, треба овај број раставити на чиниоце: $2^{11} \cdot 3^{3} \cdot 5^{11}$. Како су кодови израза и формула парни бројеви у чијим је канонским факторизацијама број 2 степенован непарним бројем, док су кодови низова формула парни бројеви у чијим је канонским факторизацијама број 2 степенован парним бројем, закључујемо да `ULAZ` може бити само кôд неког низа симбола (израза или формуле), те треба потражити симболе, ако они постоје, s_1, s_2, s_3 чији су кодови редом $11, 3, 11$ (изложиоци простих бројева у растављању броја `ULAZ`). Како је $\ulcorner 0 \urcorner = 11$ и $\ulcorner \leqslant \urcorner = 3$, следи да је ULAZ кôд низа симбола $0 \leqslant 0$, који јесте једна формула. Дакле, `IZLAZ` је реченица „*Број* `ULAZ` *је кôд формуле* $0 \leqslant 0$“.

Ако је $\mathtt{ULAZ}= 12$, Алгоритам ће дати $\mathtt{IZLAZ}$: *„Број* $\mathtt{ULAZ}$ *није кôд некоī израза или неке формуле, нити је кôд некоī низа формула.“*.

Ако је $\mathtt{ULAZ}= 2^{2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^{11}} \cdot 3^{2^{33}\cdot 3^5\cdot 5^{11}\cdot 7^9\cdot 11^{25}\cdot 13^{33}\cdot 17^9}$, $\mathtt{IZLAZ}$ ће бити: *„Број* $\mathtt{ULAZ}$ *је кôд низа формула* $0 = 0, v_1 + S(0) = S(v_1)$.“. $\triangle$

Веома важно је приметити да Алгоритам садржи као своје делове следеће основне алгоритме (или процедуре, како се често овакви алгоритми називају):
– алгоритам Израз којим се утврђује да ли је неки низ логичких симбола и симбола језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ израз тог језика, као и
– алгоритам Формула којим се утврђује да ли је неки низ логичких симбола и симбола језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ формула тог језика.

Претпостављајући да је интуитивно јасно да постоје алгоритми Израз и Формула (позваћемо се и на Черчову тезу), закључујемо да су функције $f_{\text{Izraz}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $f_{\text{Formula}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисане са

$$f_{\text{Izraz}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \text{ кôд неког израза језика} \mathcal{L}_{\mathbf{PA}}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и

$$f_{\text{Formula}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \text{ кôд неке формуле језика} \mathcal{L}_{\mathbf{PA}}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

рекурзивне.

Постоји ли алгоритам којим се утврђује, у складу са Хилбертовим системом за дедукцију (страна 162), да ли неки коначан низ формула језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ представља $\mathbf{PA}$-доказ (односно доказ последње формуле тог низа из скупа претпоставки $\mathbf{PA}$)? Одговор на ово питање зависи од тога да ли постоје алгоритми којима се утврђује да ли је свака формула тог низа:

– из скупа $\mathcal{A}$, или
– из скупа $\mathbf{PA}$, или је
– непосредна последица неких од (коначно много) формула низа које јој претходе.

Интуитивно, сви управо наведени алгоритми постоје: треба само проверити да ли је формула неког од облика које нам даје коначан број схема аксиома за $\mathcal{A}$ и $\mathbf{PA}$, или је непосредна последица неких од коначно много формула применом неког од правила из $\mathcal{R}$ (којих такође има коначно много). Сада је једноставно уочити да постоји и алгоритам Доказ који утврђује да ли је неки коначан низ формула $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ доказ неке дате формуле φ: треба проверити да ли је $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ један **PA**-доказ и, ако јесте, да ли су формуле φ_n и φ исте. Дакле, рекурзивна је и функција $f_{\text{Dokaz}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисана са

$$f_{\text{Dokaz}}(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } m \text{ кôд доказа формуле чији је кôд } n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Кодирањем се у контекст природних бројева преводи и проблем постојања алгоритма који даје одговор „**да**“ (1) или „**не**“ (0) на питање: *„Да ли је формула φ последица скупа* **PA**?“. Преведен, проблем гласи:

- „Да ли је скуп $\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \mathbf{PA} \vdash \varphi\}$ рекурзиван?“, односно
- „Да ли је функција $f_{\mathbf{PA}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисана са:

$$f_{\mathbf{PA}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n \text{ кôд формуле која је} \\ & \text{доказива из скупа претпоставки } \mathbf{PA}, \\ 0, & \text{иначе ,} \end{cases}$$

  рекурзивна (израчунљива)?“

Одговор на претходна питања је негативан!

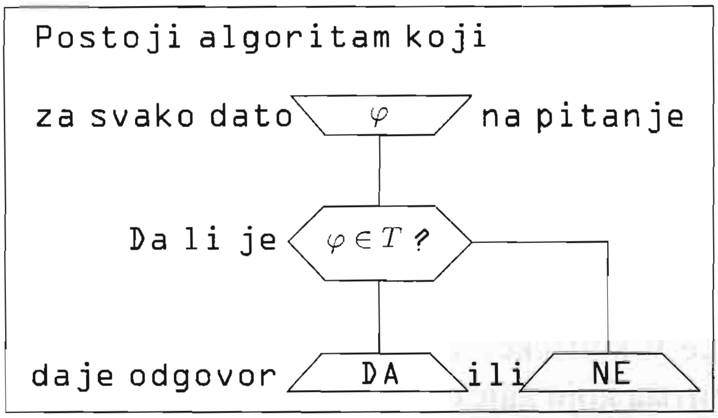
Рекурзивне и одлучиве теорије

На исти начин се могу проучавати особине и других скупова формула, пре свега оних који су *ефективно задати*, односно који су *рекурзивни*. Скуп формула T је *рекурзиван* уколико постоји алгоритам који даје одговор „**да**“ или „**не**“ на питање: *„Да ли формула φ припада T?“*. Другим речима, скуп формула је рекурзиван ако знамо које формуле му припадају, а које не.

Теорије **FO**, **ZF**, као и **PA** су рекурзивне; тачно знамо које им реченице припадају, односно које реченице су узете за аксиоме.

Комплетна аритметика $\mathbf{Th}(\mathbf{N})$ није рекурзивна. Другим речима, скуп свих реченица језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ које важе у структури $\mathbf{N}$ није рекурзиван. *Доказ* ове чињенице директно следи из неодлучивости проблема заустављања (страна 130) и чињенице да за сваку унарну израчунљиву функцију f постоји формула $\varphi_f(x)$ у језику $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ таква да за сваки природан број n важи еквиваленција

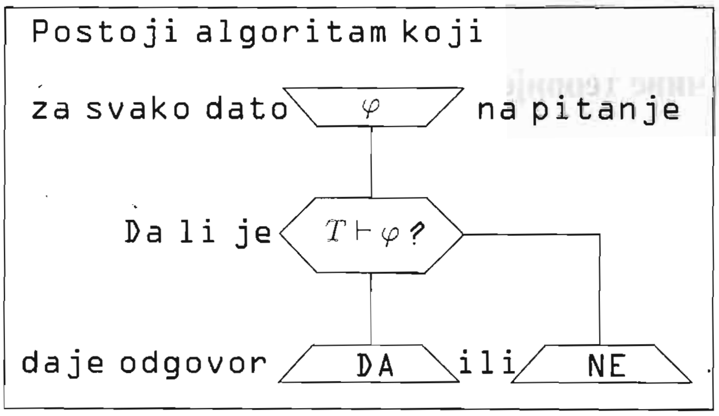
$$f(n)\downarrow \Leftrightarrow \mathbf{N} \models \varphi_f(x := \overline{n}).$$



Поред рекурзивности, веома је значајна (са практичног становишта) и *одлучивост* неког скупа формула.

Скуп формула T је *одлучив* ако постоји алгоритам који даје одговор „**да**" или „**не**" на питање: „*Да ли је формула* φ *последица скупа* T?". Другим речима, скуп формула је одлучив ако знамо које су формуле доказиве, а које нису. Формула φ је *одлучива* у T, ако је $T \vdash \varphi$ или је $T \vdash \neg\varphi$.

Многе важне (рекурзивне) теорије, као што су, на пример, **FO**, **PA**, **ZF**, нису одлучиве. Неодлучиве су и теорија група и теорија поља.



Наравно, има и одлучивих теорија: предикатски рачун над празним језиком ($\mathcal{L} = \emptyset$), теорија линеарног уређења, теорија Абелових група.

Интересантно је да је одлучива и *Презбургерова аритметика*, аритметика у којој је „забрањено" множење. Прецизније, за сваку реченицу у језику $\{\leqslant, +, S, 0\}$ одлучив је проблем њеног важења у $\mathbf{N}$. Ово, на пример, има за последицу чињеницу да не постоји формула $\varphi(x, y, z)$ на језику $\{\leqslant, +, S, 0\}$ која репрезентује множење, тј. таква да за све k, m, n: $k \cdot m = n$ ако и само ако $\mathbf{N} \models \varphi[k, m, n]$.

Чувене Геделове теореме непотпуности

У време када је настајала аксиоматизација природних бројева, постојала је нада да се на овај начин могу пронаћи *све истине о структури природних бројева* исказане изабраним алфабетом. Остваривање оваквог задатка требало је, по мишљењу Давида Хилберта, вероватно најутицајнијег математичара своје епохе, да буде један од приоритетних задатака математике XX века. Наиме, на Другом светском конгресу математичара, одржаном у Паризу 1900. године, Хилберт је (испоставило се веома видовито) навео 23 проблема којима математичари треба да се баве у будућности. У то време, многи су очекивали да се за сваку аритметичку тврдњу α – реченицу исказану на језику $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ – из $\mathbf{PA}$ може доказати или α или $\neg\alpha$, тј. да $\mathbf{PA}$ може да *потврди* или *оповргне* свако аритметичко тврђење. Наравно, да би све ово имало смисла, основна претпоставка је *непротивречност* списка аксиома и правила извођења, тј. да се не може истовремено доказати и θ и $\neg\theta$, за неко тврђење θ.

Све наде су биле срушене када је, 1931. године двадесетпетогодишњи Аустријанац, Курт Гедел, изложио доказ своје запањујуће теореме. Испоставило се да постоје истинита тврђења о структури природних бројева која се могу исказати формулама аритметике, али која се не могу доказати у $\mathbf{PA}$.

Гедел је у доказу прве теореме непотпуности генијално искористио познати *парадокс лажова*.

„Ова реченица је неистинита!“

Ако је истинита, онда је неистинита, и обрнуто, ако је неистинита, онда је истинита. Иначе, овај парадокс се приписује Крићанину Епимениду који је, наводно, тврдио да је све што Крићани кажу лаж!

Велики део Геделовог доказа је веома компликован, и у њега нећемо улазити. Покушаћемо да изложимо суштину доказа.

Као што смо видели, геделизација (кодирање) омогућава да се алфабетом аритметике изражавају тврђења у вези са објектима којима су додељени Геделови кодови. Другим речима, средствима аритметике се могу анализирати својства кодираних објеката.

Посматрајмо формуле у чијем грађењу учествује само *једна* промењљива. Геделизација нам омогућава да све овакве формуле поређамо у низ

$$(*) \qquad \alpha_0(x),\ \alpha_1(x),\ \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x), \ldots$$

Такође, и то је кључно, геделизација омогућава да се тврдња са једном променљивом:

$\alpha_x(x)$ **није теорема Пеанове аритметике**

изрази у језику $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$! То, даље, значи да је она на списку $(*)$ оваквих формула; нека је то $\alpha_m(x)$, за неко m.

Тада формула $\alpha_m(m)$ тврди: „$\alpha_m(m)$ **није теорема Пеанове аритметике.**“. Дакле, ако би $\alpha_m(m)$ била теорема Пеанове аритметике, онда она не би била теорема Пеанове аритметике. Обрнуто, ако би њена негација $\neg\alpha_m(m)$ била теорема Пеанове аритметике, то би значило да **није тачно** да: „**Формула** $\alpha_m(m)$ **није теорема Пеанове аритметике**“. Дакле, $\alpha_m(m)$ би била теорема Пеанове аритметике. Одавде произлази да би и $\alpha_m(m)$ и $\neg\alpha_m(m)$ биле теореме Пеанове аритметике, што противречи претпоставци о њеној непротивречности. Дакле, нити је $\alpha_m(m)$ нити је $\neg\alpha_m(m)$ теорема Пеанове аритметике. Другим речима, изабраним алфабетом се може исказати тврдња која није теорема нити је њена негација теорема, тј. Пеанова аритметика је *непотпуна*. И више, ма колико ширили Пеанову аритметику новим истинама о природним бројевима, никада нећемо моћи да добијемо теорију која за теореме има све истините исказе о природним бројевима!

Приметимо да тврдња $\alpha_m(m)$ из Геделовог доказа управо *говори сама о себи*, односно *тврди да је истинита ако и само ако је недоказива*.

Тврђења налик на $\alpha_m(m)$ изгледају веома сложено, када се напишу у потпуности, и прилично чудно јер нису чисто аритметичког карактера. Међутим, последњих година појавило се неколико истинитих тврђења (исказаних алфабетом Пеанове аритметике!) о природним бројевима која су математичког карактера а која се не могу доказати у Пеановој аритметици. Први такав пример, из комбинаторне теорије бројева, пронађен је 1978. године. Реч је о једној варијанти Ремзијеве теореме, која је истинита у структури природних бројева а која није доказива у формалној аритметици. Други пример је веома интересантна комбинаторна теорема Париса и Кирбија, позната као *Херкул и хидра* (видети [2]).

Још један пример недоказиве тврдње у **PA** је „**PA** *је непротивречан скуп формула.*“. О томе говори друга Геделова теорема непотпуности. Ова теорема је одговор другом Хилбертовом проблему: „*Доказати да је Пеанова аритметика непротивречна, тј. да се полазећи од наведеног списка аксиома коначним бројем примена правила закључивања не може доћи до тврђења која противрече једно другом.*“. Гедел је доказао: *непротивречност Пеанове аритметике се не може доказати средствима саме аритметике.* Кључна чињеница је да се тврдња „**PA** *је непротивречна теорија*“ може исказати на изабраном алфабету аритметике, формулом која се, стандардно, означава са $\mathrm{Con}(\mathbf{PA})$ и да $\mathrm{Con}(\mathbf{PA})$ није теорема Пеанове аритметике.

Поменимо, на крају, да је Роџер Пенроуз, у фантастичној научно-популарној књизи *Царев нови ум*, искористио Геделову теорему о некомплетности као аргумент за тезу да рачунар **не може** да функционише као људски мозак.

Мало више датаља у вези са првом Геделовом теоремом непотпуности

Кодирање (геделизација) основни је поступак који је Гедел користио у доказима теорема непотпуности. На потпуно аналоган начин можемо терме и формуле кодирати, не природним бројевима, већ нумералима. Овакво кодирање омогућава анализу логичких појмова (као што су терм, формула, доказ, теорема, ...) аритметичким средствима. Од великог значаја за доказ теорема непотпуности је и чињеница да се све израчунљиве функције могу представити у формалној аритметици (видети страну 168).

Представљивост израчунљивих функција у **PA** заједно са поступком кодирања омогућава изучавање особина ове теорије њеним сопственим средствима. На пример, при задатом кодирању симбола језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ подскуп од $\mathbb{N}$ одређен својством „*n је кôд неке формуле језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$*“ рекурзиван је (тј. његова карактеристична функција је израчунљива), па у језику $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ постоји формула φ_{For} којом је овај скуп представљен. О овоме је већ било речи на страни 180). Дакле, постоје формуле $\varphi_{\mathrm{Term}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{For}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{Dokaz}}(x,y)$ у језику $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$, такве да је:
$\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{Term}}(x := \overline{n})$ акко „*n је кôд неког терма језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$*“,
$\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{For}}(x := \overline{n})$ акко „*n је кôд неке формуле језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$*“,
$\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{Dokaz}}(x := \overline{n}, y := \overline{m})$ акко „*n је кôд доказа формуле чији је кôд m*“.

Нарочито значајна је формула $\exists y \varphi_{\mathrm{Dokaz}}(x,y)$ коју ћемо означити са $\varphi_{\mathrm{T}}(x)$. Формула $\varphi_{\mathrm{T}}(x := \ulcorner\psi\urcorner)$ се може интерпретирати као „*формула ψ је доказива у формалној аритметици*“, због еквиваленције

$$\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(x := \overline{n}) \text{ акко „} n \textit{ је kôд теореме формалне аритметике} \text{“.}$$

У наставку ћемо уместо $\varphi_{\mathrm{T}}(x := \ulcorner\psi\urcorner)$ краће писати $\varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$, а да при томе увек подразумевамо да је реч о формули добијеној из формуле φ_{T} заменом променљиве x нумералом који одговара kôду $\ulcorner\psi\urcorner$.

За даљу причу веома је значајно следеће тврђење.

Теорема. Ако су ψ и θ било које реченице језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$, тада су испуњени следећи услови[35]:

(**HBL1**) Ако је $\mathbf{PA} \vdash \psi$, онда је $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)$;

(**HBL2**) $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$;

(**HBL3**) $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi \Rightarrow \theta\urcorner) \Rightarrow (\varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\theta\urcorner))$.

Може се одредити израз $\mathrm{Zamena}(x,y)$ језика аритметике, такав да је за сваку формулу $\psi(x)$ и сваки n

$$\mathbf{PA} \vdash \mathrm{Zamena}(\ulcorner\psi(x)\urcorner, \overline{n}) = \ulcorner\psi(x := \overline{n})\urcorner.$$

Лема о дијагонализацији. Нека је $\psi(x)$ формула језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ која има као слободну променљиву x. Тада постоји реченица θ таква да је $\mathbf{PA} \vdash \theta \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\theta\urcorner)$.

Доказ. Нека је $\sigma(x)$ формула $\psi(\mathrm{Zamena}(x,x))$, $n = \ulcorner\sigma(x)\urcorner$ и θ реченица $\sigma(\overline{n})$. Тада су у $\mathbf{PA}$ доказиве следеће еквиваленције

$$\begin{aligned}\theta &\Leftrightarrow \sigma(\overline{n}) \Leftrightarrow \psi(\mathrm{Zamena}(\overline{n},\overline{n})) \Leftrightarrow \psi(\mathrm{Zamena}(\ulcorner\sigma(x)\urcorner,\overline{n})) \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\sigma(\overline{n})\urcorner) \\ &\Leftrightarrow \psi(\ulcorner\theta\urcorner). \qquad \square\end{aligned}$$

Лема о дијагонализацији се понекад назива и лема о самоуказивању или лема о фиксној тачки. Ову лему, узимајући за формулу $\psi(x)$ формулу $\neg\varphi_{\mathrm{T}}(x)$, имамо у виду при формулацији наредне теореме. Приметимо да се дијагонализацијом формуле $\neg\varphi_{\mathrm{T}}(x)$ добија реченица θ језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ таква да је $\mathbf{PA} \vdash \theta \Leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\ulcorner\theta\urcorner)$. Реченица θ тврди „*ја нисам доказива*“. Ако се претпостави да је $\mathbf{PA}$ непротивречна теорија, реченица θ је у праву, тј. она заиста није доказива у теорији $\mathbf{PA}$.

[35] Наведени услови су варијанта Хилберт–Бернајс–Лебових „услова изводљивости“.

Прва теорема непотпуности. Нека је θ реченица језика $\mathcal{L}_{\mathbf{PA}}$ таква да је $\mathbf{PA} \vdash \theta \Leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$. Ако је $\mathbf{PA}$ непротивречна теорија, тада се у $\mathbf{PA}$ не могу доказати ни θ нити $\neg\theta$, тј. $\mathbf{PA} \nvdash \theta$ и $\mathbf{PA} \nvdash \neg\theta$.

Доказ. Претпоставимо супротно.

Ако би било $\mathbf{PA} \vdash \theta$, из **HBL1**, добили бисмо да је $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$, што није могуће због претпоставке о непротивречности теорије $\mathbf{PA}$, будући да би из $\mathbf{PA} \vdash \theta \Leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$ (и $\mathbf{PA} \vdash \theta$) следило да је и $\mathbf{PA} \vdash \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$. Дакле, $\mathbf{PA} \nvdash \theta$.

Ако је $\mathbf{PA} \vdash \neg\theta$, тада, према **HBL1**, важи $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\neg\theta\rceil)$, тј. $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta \Rightarrow \perp\rceil)$, односно $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta \Rightarrow 0 = S(0)\rceil)$. На основу **HBL3** важи $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta \Rightarrow 0 = S(0)\rceil) \Rightarrow (\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil) \Rightarrow \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil 0 = S(0)\rceil))$, па, на основу претходног, и $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil) \Rightarrow \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil 0 = S(0)\rceil)$. Због непротивречности теорије $\mathbf{PA}$ имамо $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil 0 = S(0)\rceil) \Leftrightarrow \perp$, одакле следи $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil) \Rightarrow \perp$ и, даље, $\mathbf{PA} \vdash \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$. С друге стране, због претпостављене особине формуле θ ($\mathbf{PA} \vdash \theta \Leftrightarrow \neg\varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$) и претпоставке $\mathbf{PA} \vdash \neg\theta$, следи да је $\mathbf{PA} \vdash \varphi_{\mathrm{T}}(\lceil\theta\rceil)$, што је немогуће уколико је $\mathbf{PA}$ непротивречна теорија. □

Логике вишег реда

У формулацији принципа најмањег елемента (индукције) врши се квантификација преко *свих* подскупова скупа природних бројева: „*сваки непразан подскуп скупа природних бројева има најмањи елемент*“, што можемо записати и помоћу следеће формуле

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x(x \in X \wedge \forall n(n \in X \Rightarrow x \leqslant n))).$$

Последња формула, међутим, није формула језика аритметике. У ком језику можемо да је искажемо? Једна могућност је да ову формулу посматрамо у оквиру много шире теорије – теорије скупова **ZF**. Друга могућност, коју ћемо овом приликом размотрити, јесте разматрање у оквиру логичког система који разликује типове математичких објеката (формуле, природни бројеви, реални бројеви, скупови природних бројева, функције, ...), што више одговара нашој интуицији.

Типови репрезентују различите „нивое“ објеката. На пример, за рад у аритметици, увешћемо тип ω за природне бројеве; прецизније, сваки природан број је објекат типа ω. Свака функција скупа природних бројева у себе је типа $\omega \to \omega$. Даље, на пример, свакој функцији f, типа $\omega \to \omega$, можемо придружити $f(1)$; тада је функција (такозвани функционал) $f \mapsto f(1)$ типа $(\omega \to \omega) \to \omega$. Бинарне операције (сабирање, множење, ...) природних бројева су типа $\omega \times \omega \to \omega$ или $\omega \to (\omega \to \omega)$ итд[36].

Наравно, веома важни објекти при сваком проучавању јесу реченице (затворене формуле) којима описујемо својства изабраних објеката. Уопштеније говорећи, свака формула представља израз који за дату валуацију промењљивих узима једну од две вредности: 0 (*нетачно*) или 1 (*тачно*). На пример, вредност формуле $x + x \leqslant y$ у структури природних бројева за валуацију $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \dots \\ 2 & 5 & \dots \end{pmatrix}$ јесте 1, $(x + x \leqslant y)[\mu] = 1$, те можемо писати $(x + x \leqslant y) : \omega \times \omega \to \{0, 1\}$. Како свако својство објеката који су истог типа одређује неки подскуп скупа свих објеката тог типа, подскупови скупа природних бројева су типа $\omega \to \{0, 1\}$. Сетимо се и да смо сваком подскупу X скупа $\mathbb{N}$ обострано-једнозначно придруживали карактеристичну функцију $\chi_X : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Бинарне релације (уређење, дељивост итд.) природних бројева су типа $\omega \times \omega \to \{0, 1\}$ или $\omega \to (\omega \to \{0, 1\})$ итд. Све ово указује на нови тип, тип Ω. Иако ћемо у овом одељку под типом Ω подразумевати $\{0, 1\}$, касније ћемо видети да има смисла и оправдања под Ω подразумевати и штошта друго различито од „класичног“ типа $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

У општем случају, најпре треба изабрати скуп *основних типова* Type_0 који не садржи тип Ω. Скуп типова, Type, које разматрамо дефинишемо индуктивно на следећи начин:

- тип Ω и основни типови припадају Type,
- ако су t и t' типови, онда је и $t \to t'$ тип.

Тип $t \to t'$ описује скуп функција које објектима типа t додељују објекте типа t'.

Језик логике вишег реда садржи само симболе константи, при чему је за сваки од њих дат и његов тип. *Језик вишег реда* је скуп $\mathcal{L}$ свих

[36] За сваку функцију $f : \omega \times \omega \to \omega$ и свако a типа ω дефинисана је функција $f_a : \omega \to \omega$ са $f_a(x) = f(a, x)$, тј. функција $\widehat{f} : \omega \to (\omega \to \omega)$, $\widehat{f}(a) = f_a$. И обрнуто, свакој функцији $g : \omega \to (\omega \to \omega)$ одговара функција $\overline{g} : \omega \times \omega \to \omega$ дефинисана са $\overline{g}(x, y) = g(x)(y)$. Приметите да $g(x) : \omega \to \omega$.

парова (c, t), где је c симбол константе и $t \in \text{Type}$. За сваки тип t дат је и пребројив скуп променљивих $\text{Var}_t = \{x^t, y^t, z^t, x_1^t, \ldots\}$, који се користи за означавање произвољних објеката типа t. Кад год буде било јасно из контекста ког је типа нека променљива изостављаћемо горњи индекс.

Логика вишег реда је одређена тројком $(\text{Type}_0, \mathcal{L}, \mathcal{Q})$ коју чине скуп основних типова из Type_0, скуп изабраних симбола константи $\mathcal{L}$ и скуп $\mathcal{Q}$ ($\mathcal{Q} \subset \text{Type}$) који садржи типове променљивих по којима је дозвољена квантификација. Скуп свих израза одређеног типа дефинишемо, индуктивно, на следећи начин:

	Напомене
1. ако је (c, t) у $\mathcal{L}$, онда је c израз типа t,	
2. променљиве из Var_t су изрази типа t,	
3. ако је e израз типа $t \to t'$ и u израз типа t, онда је $e(u)$ израз типа t',	Применом функције e типа $t \to t'$ на аргумент u типа t добијамо резултат $e(u)$ типа t'
4. ако је e израз типа t', онда је $x^t \mapsto e$ израз типа $t \to t'$,	$x^t \mapsto e$ репрезентује функцију која објекту x^t типа t додељује израз e типа t'. Тако, на пример, $x^t \mapsto x^t$ представља идентично пресликавање типа $t \to t$.
5. $\perp$ је израз типа Ω,	Можемо претпоставити $(\perp, \Omega) \in \mathcal{L}$.
6. ако је e израз типа Ω, онда је $\neg e$ израз типа Ω,	Можемо претпоставити да $(\neg, \Omega \to \Omega)$ припада $\mathcal{L}$.
7. ако су e и e' изрази типа Ω, онда су и $e \wedge e'$, $e \vee e'$, $e \Rightarrow e'$ такође изрази типа Ω,	Можемо претпоставити да константе $(\wedge, \Omega \to (\Omega \to \Omega))$, $(\vee, \Omega \to (\Omega \to \Omega))$, $(\Rightarrow, \Omega \to (\Omega \to \Omega))$ припадају $\mathcal{L}$.
8. ако је e израз типа Ω и $t \in \mathcal{Q}$, онда су $\forall x^t e$ и $\exists x^t e$ изрази типа Ω.	Можемо увести и константе $\forall^t$ и $\exists^t$ типа $(t \to \Omega) \to \Omega$ и писати $Q^t(x^t \mapsto e)$ уместо $Qx^t e$, при чему $Q \in \{\forall, \exists\}$, уз претпоставку да $(\forall^t, (t \to \Omega) \to \Omega)$ и $(\exists^t, (t \to \Omega) \to \Omega)$ припадају $\mathcal{L}$, за свако t из $\mathcal{Q}$.

Да је израз e типа t означаваћемо са $e : t$. Објекте типа Ω називамо формулама.

Ако је $e : t_1 \to (t_2 \to \cdots \to (t_n \to t)\cdots)$, $u_1 : t_1, \ldots, u_n : t_n$, писаћемо $e(u_1, \ldots, u_n)$ уместо $e(u_1)\cdots(u_n)$. У складу са овим, тип $t_1 \to (t_2 \to \cdots \to (t_n \to t)\cdots)$ означаваћемо и са $t_1 \times t_2 \times \ldots \times t_n \to t$, а $\underbrace{t \times t \times \cdots \times t}_{k} \to t'$ и са $t^k \to t'$.

Изразом $(x^t \mapsto e)(u)$ (тачке 3 и 4 претходне дефиниције) је, у суштини, представљена уобичајена операција замене аргумента у „телу" функције[37]. Тако, ако је $u : t$, са $e[x^t := u]$ означавамо израз који је истог типа као и e, а који је добијен заменом x^t са u у изразу e. Кажемо да је израз f' *редукт* израза f уколико се f' добија из f заменом неког подизраза од f који је облика $(x^t \mapsto e)(u)$ изразом $e[x^t := u]$. Вршењем редукције неколико пута доћи ћемо до израза који не садржи подизразе облика $(x^t \mapsto e)(u)$.

ТЕОРЕМА. За сваки израз постоји јединствени редукт који не садржи подизразе облика $(x^t \mapsto e)(u)$.

Најједноставнија класификација логика вишег реда је према *реду* типова константи из $\mathcal{L}$ и реду типова из $\mathcal{Q}$. Ред типа дефинише се на следећи начин:

– $\mathrm{red}(\Omega) = 2$,

– $\mathrm{red}(t_0) = 1$, $t_0 \in \mathrm{Type}_0$,

– $\mathrm{red}(t \to t') = \max\{\mathrm{red}(t) + 1, \mathrm{red}(t')\}$.

На пример, ако је $\mathrm{Type}_0 = \{\omega\}$, онда је $\mathrm{red}(\omega \to (\omega \to \omega)) = 2$, $\mathrm{red}(\omega \to (\omega \to \Omega)) = 2$, док је $\mathrm{red}((\omega \to \omega) \to \omega) = 3$.

Логику другог реда одређује тројка $(\mathrm{Type}_0, \mathcal{L}, \mathcal{Q})$, при чему језик $\mathcal{L}$ не садржи константе чији су типови реда већег од 2, нити $\mathcal{Q}$ садржи типове реда већег од 2.

ПРИМЕР 16. **Предикатски рачун првог реда**, односно логика првог реда, јесте специјалан случај логике вишег реда. Заиста, изаберимо $\mathrm{Type}_0 = \{o\}$, где o репрезентује објекте првог реда. Језик $\mathcal{L}$ бирамо тако да садржи само симболе константи типа $o^n \to \Omega$ (релацијске знаке), затим симболе константе типа $o^n \to o$ (операцијске знаке) и најзад симболе константи типа o. Како је квантификација дозвољена само по објектима првог реда, узимамо да је $\mathcal{Q} = \mathrm{Type}_0 = \{o\}$. △

[37] На пример, уместо $f(4) = 16$, где је $f(x) = x^2$, можемо писати и $(x \mapsto x^2)(4) = 16$.

ПРИМЕР 17. **Векторски простори** су структуре облика $(\mathbf{V},\mathbf{F},\bullet)$, при чему је $\mathbf{V}$ комутативна група $(V,+^{\mathbf{V}},-^{\mathbf{V}},0^{\mathbf{V}})$, $\mathbf{F}=(F,+^{\mathbf{F}},\cdot^{\mathbf{F}},-^{\mathbf{F}},0^{\mathbf{F}},1^{\mathbf{F}})$ поље и $\bullet : F\times V\to V$ множење скаларом које задовољава следеће особине: за произвољне скаларе α,β из F и произвољне векторе x,y из V,

$$\begin{aligned}
\alpha\bullet(x+^{\mathbf{V}}y) &= (\alpha\bullet x)+^{\mathbf{V}}(\alpha\bullet y),\\
(\alpha\cdot^{\mathbf{F}}\beta)\bullet x &= \alpha\bullet(\beta\bullet x),\\
(\alpha+^{\mathbf{F}}\beta)\bullet x &= (\alpha\bullet x)+^{\mathbf{V}}(\beta\bullet x),\\
1^{\mathbf{F}}\bullet x &= x.
\end{aligned}$$

Ове структуре поседују две врсте објеката: векторе (елементе домена групе $\mathbf{V}$) и скаларе (елементе домена поља $\mathbf{F}$) и лепо се могу описати такозваном вишесортном логиком првог реда:

- $\mathrm{Type}_0=\{v,s\}$, при чему је v тип вектора, а s тип скалара,
- $\mathcal{L}$ садржи константе $(0^v,v)$, $(+^v,v^2\to v)$, $(-^v,v\to v)$, $(=_v,v^2\to\Omega)$ (језик група), $(0^s,s)$, $(1^s,s)$, $(+^s,s^2\to s)$, $(\cdot^s,s^2\to s)$, $(-^s,s\to s)$, $(=_s,s^2\to\Omega)$ (језик поља) и $(\bullet,s\to(v\to v))$, и
- $\mathcal{Q}=\{v,s\}$.

Ако узмемо да је $\mathrm{Var}_v=\{x,y,z,\ldots\}$, $\mathrm{Var}_s=\{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\}$, није тешко написати аксиоме којима су одређени векторски простори:
$\forall x(x+^v 0^v=_v x), \forall\alpha\forall x\forall y(\alpha\bullet(x+^v y)=_v(\alpha\bullet x)+^v(\alpha\bullet y)),\ldots$ △

ПРИМЕР 18. **Тополошки простор** над неким скупом X одређен је колекцијом $\mathcal{T}$ подскупова од X која садржи $\emptyset$ и X ($\emptyset, X\in\mathcal{T}$) и која је затворена за произвољне уније ($U_i\in\mathcal{T}, i\in I\Rightarrow\bigcup_{i\in I}U_i\in\mathcal{T}$) и коначне пресеке ($U_1,U_2\in\mathcal{T}\Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{T}$). Елементи колекције $\mathcal{T}$ називају се *отворени скупови*.

Тополошки простори могу бити описани у логици вишег реда на језику који садржи два симбола константи: $X:t\to\Omega$ и $O:(t\to\Omega)\to\Omega$, при чему за A типа $t\to\Omega$, $O(A)$ значи „A је отворен“. Формула

$$\begin{aligned}
&O(X)\ \wedge\ O(x\mapsto\bot)\wedge\\
&\qquad\wedge\ \forall U^{t\to\Omega}\forall V^{t\to\Omega}(O(U)\wedge O(V)\Rightarrow O(x\mapsto U(x)\wedge V(x)))\wedge\\
&\qquad\wedge\ \forall I^{(t\to\Omega)\to\Omega}(\forall U^{t\to\Omega}(I(U)\Rightarrow O(U))\Rightarrow O(x\mapsto\exists U^{t\to\Omega}(I(U)\wedge U(x))))
\end{aligned}$$

дефинише тополошке просторе. Приметимо да је празан скуп окарактерисан унарним предикатом $x\mapsto\bot$, да $x\mapsto U(x)\wedge V(x)$ репрезентује пресек U и V, док $x\mapsto\exists U^{t\to\Omega}(I(U)\wedge U(x))$ представља унију колекције отворених скупова описане са $\forall U^{t\to\Omega}(I(U)\Rightarrow O(U))$. △

Пример 19. **Проста теорија типова** (Черча) јесте теорија логике одређене на следећи начин:

- $\mathrm{Type}_0 = \{\omega\}$, где је ω типа природног броја,
- $\mathcal{L} = \{(0, \omega), (S, \omega \to \omega)\}$, где 0 представља нулу, а S функцију следбеника и
- $\mathcal{Q} = \mathrm{Type}$, тј. квантификација је дозвољена по природним бојевима, скуповима природних бројева, итд.

Ево неколико формула на језику просте теорије типова.

Формула $\forall X^{\omega \to \Omega}(X(s) \Rightarrow X(u))$ краће се означава са $s \equiv_\omega u$. Она указује да за сваки објекат X типа $\omega \to \Omega$, тј. за сваки унарни предикат (подскуп) објеката типа ω, ако s задовољава X, онда и u задовољава X. Заправо, овом формулом се дефинише релација позната као *Лајбницова једнакост*.

Формулу $\forall x^\omega(X(x) \Rightarrow Y(x))$, где су X и Y променљиве типа $\omega \to \Omega$, означићемо са $X \sqsubset_\omega Y$. Обратите пажњу на разлику између формула $X \equiv_\omega Y$ и $X \sqsubset_\omega Y \wedge Y \sqsubset_\omega X$!

Означимо формулу $\forall X^{\omega \to \Omega}(X(0) \Rightarrow \forall y^\omega(X(y) \Rightarrow X(Sy)) \Rightarrow X(x))$ са $\mathrm{Nat}(x)$. Овом формулом су дефинисани „прави" природни бројеви. Другим речима, $\mathrm{Nat}(x)$ каже да се x налази у свим скуповима X који садрже 0 ($X(0)$) и који су затворени за функцију следбеник ($\forall y^\omega(X(y) \Rightarrow X(Sy))$).

Формулу $\forall X^{\omega \to \Omega}(X(x) \Rightarrow (\forall y^\omega(X(y) \Rightarrow X(Sy)) \Rightarrow X(z)))$ можемо означити са $x \leqslant z$ будући да она указује на то да је x мање или једнако z. Приметимо да су формуле $0 \leqslant x$ и $\mathrm{Nat}(x)$ идентичне.

Формула

$$\forall X^{\omega \to \Omega}((\exists x^\omega X(x) \wedge X \sqsubset_\omega \mathrm{Nat}) \Rightarrow \exists y^\omega(X(y) \wedge \forall x^\omega(X(x) \Rightarrow y \leqslant x)))$$

тврди да сваки непразан скуп природних бројева садржи најмањи елемент.

Формулу

$$\begin{aligned}\forall X^{\omega^3 \to \Omega}(\forall k^\omega X(k, 0, k) \Rightarrow (\forall \ell^\omega \forall m^\omega \forall n^\omega(X(\ell, m, n) \Rightarrow X(\ell, Sm\,, Sn)) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(x, y, z)))\end{aligned}$$

означићемо са $\mathrm{Add}(x, y, z)$, будући да она указује на то да је z збир бројева x и y. Наиме, сабирање се може схватити као најмања тернарна релација за коју важи $\forall k^\omega \mathrm{Add}(k, 0, k)$ и $\forall \ell^\omega \forall m^\omega \forall n^\omega(\mathrm{Add}(\ell, m, n) \Rightarrow \mathrm{Add}(\ell, Sm, Sn))$. $\triangle$

У логици вишег реда доказујемо потпуно исто као и у оквиру предикатског рачуна (страна 158). Једино треба водити рачуна о правилима за квантификаторе у којима одговарајући објекти морају бити исправног типа. На пример, правилом $\forall_{\mathrm{E}}$ можемо извести $a[x^t := u]$ из $\forall x^t a$ **једино** ако је $u : t$.

Замена израза облика $(x^t \mapsto e)(u)$ са $e[x^t := u]$ представља својеврстан *рачун* којим добијамо „једнаке" изразе. Тако, на пример, изразе $(x^\omega \mapsto SSx)(S0)$ и $(x^\omega \mapsto Sx)(SS0)$ можемо сматрати „једнаким", заправо β-еквивалентним, јер имају исти редукт $SSS0$. Уопште, изрази f и f' су β-еквивалентни уколико имају исти редукт. Неформално (без увођења неког правила извођења у правом смислу) у доказима ћемо користити „рачун по модулу" β-еквивалентности; те етапе доказа означаваћемо са β.

Пример 20. Докажимо да је Лајбницова $=_t$ једнакост релација еквиваленције.

Рефлексивност

$$X(x) \vdash X(x) \qquad \text{(ax)}$$

$$\vdash \forall X^{t\to\Omega}(X(x) \Rightarrow X(x)) \qquad \forall_{\mathrm{U}}, \Rightarrow_{\mathrm{U}}$$

$$\vdash \forall x^t(x =_t x)$$

Транзитивност

$$X(x), X(y), X(z) \vdash X(z) \qquad \text{(ax)}$$

$$X(x) \Rightarrow X(y), X(y) \Rightarrow X(z), X(x) \vdash X(z) \qquad \Rightarrow_{\mathrm{L}} \times 2$$

$$x =_t y, y =_t z, X(x) \vdash X(z) \qquad \forall_{\mathrm{L}}[X]$$

$$x =_t y, y =_t z \vdash x =_t z \qquad \forall_{\mathrm{U}}, \Rightarrow_{\mathrm{U}}$$

$$\vdash \forall x^t \forall y^t \forall z^t (x =_t y \Rightarrow (y =_t z \Rightarrow x =_t z)) \qquad \forall_{\mathrm{U}} \times 3, \Rightarrow_{\mathrm{U}} \times 2$$

Симетричност

$$X(x) \vdash X(x) \qquad \text{(ax)}$$

$$(1)\, (X(x) \Rightarrow X(x)) \Rightarrow (X(y) \Rightarrow X(x)), X(x) \Rightarrow X(x), X(y) \vdash X(x) \qquad \Rightarrow_{\mathrm{L}} \times 2$$

$$(2)\, (X(x) \Rightarrow X(x)) \Rightarrow (X(y) \Rightarrow X(x)), X(y) \vdash X(x) \Rightarrow X(x) \qquad \Rightarrow_{\mathrm{U}}, \text{(ax)}$$

$$(X(x) \Rightarrow X(x)) \Rightarrow (X(y) \Rightarrow X(x)), X(y) \vdash X(x) \qquad \mathrm{cut}(1)(2)$$

$$(X(x) \Rightarrow X(y))[X := z^t \mapsto (X(z) \Rightarrow X(x))], X(y) \vdash X(x) \qquad \beta$$

$$x =_t y, X(y) \vdash X(x) \qquad \forall_{\mathrm{L}}[X]$$

$$x =_t y \vdash y =_t x \qquad \forall_{\mathrm{U}}, \Rightarrow_{\mathrm{U}}$$

$$\vdash \forall x^t \forall y^t (x =_t y \Rightarrow y =_t x) \qquad \forall_{\mathrm{U}} \times 2, \Rightarrow_{\mathrm{U}} \triangle$$

Аритметика другог реда

Аритметика другог реда, $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$, много снажнија од $\mathbf{PA}$, јесте теорија логике другог реда одређене тројком $(\mathrm{Type}_0, \mathcal{L}, \mathcal{Q})$, где је

- $\mathrm{Type}_0 = \{\omega\}$,
- $\mathcal{L} = \{(0, \omega), (S, \omega \to \omega)\}$,
- $\mathcal{Q} = \{\omega, \Omega\} \cup \{\omega^k \to \Omega \mid k \geqslant 1\} \cup \{\omega^k \to \omega \mid k \geqslant 1\}$.

Аксиоме аритметике другог реда су

$$\forall x^\omega \neg(0 =_\omega Sx) \quad \text{и} \quad \forall x^\omega \forall y^\omega (Sx =_\omega Sy \Rightarrow x =_\omega y).$$

У овој теорији се веома једноставно могу дефинисати основне операције и релације над скупом природних бројева. Сетимо се формула $\mathrm{Nat}(x)$, $x \leqslant y$, $\mathrm{Add}(x, y, z)$. Остављамо читаоцу да дефинише множење одговарајућом формулом $\mathrm{Mult}(x, y, z)$.

Ако уведемо квантификатор „постоји тачно један“ на уобичајен начин, $\exists! x^t a(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists x^t (a(x) \wedge \forall y^t (a(y) \Rightarrow x =_t y))$, лако се може доказати

$$\mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \forall x^\omega \forall y^\omega (\mathrm{Nat}(x) \wedge \mathrm{Nat}(y) \Rightarrow \exists! z^\omega (\mathrm{Nat}(z) \wedge \mathrm{Add}(x, y, z))),$$

као и

$$\mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \forall x^\omega \forall y^\omega (\mathrm{Nat}(x) \wedge \mathrm{Nat}(y) \Rightarrow \exists! z^\omega (\mathrm{Nat}(z) \wedge \mathrm{Mult}(x, y, z))).$$

Надмоћ аритметике другог реда над $\mathbf{PA}$ следи из чињенице да је $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \mathbf{PA}$, будући да су доказиве све аксиоме теорије $\mathbf{PA}$ чије су променљиве „ограничене“ на Nat. На пример, у $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$ се може доказати и одговарајућа форма принципа тоталне математичке индукције:

$$\begin{aligned}\mathbf{PA}^{\mathrm{II}} \vdash \forall X^{\omega \to \Omega} ((\forall x^\omega (\mathrm{Nat}(x) \wedge \forall y^\omega (\mathrm{Nat}(y) \wedge y \leqslant x \Rightarrow X(y)) \Rightarrow \\ \Rightarrow X(Sx))) \Rightarrow \forall x^\omega (\mathrm{Nat}(x) \Rightarrow X(x)).\end{aligned}$$

Веома значајна је и чињеница да се у аритметици другог реда могу дефинисати и реални бројеви. То је и разлог што се она назива и *анализа*. Једна од уобичајених конструкција је помоћу Дедекиндових пресека (страна 134). Сетимо се да је Дедекиндов пресек почетни комад од $\mathbb{Q}$, тј. скуп A рационалних бројева, $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, такав да ако $x \in A$ и $y < x$, онда и $y \in A$. Интуитивно, реалан број придружен Дедекиндовом пресеку је заправо најмање горње ограничење тог пресека. Међутим, овде не можемо спровести уобичајену конструкцију која захтева дефиниције скупова целих и рационалних бројева јер за то типови другог реда нису довољни. Аналогна, али и директнија конструкција је могућа. Наиме, реалан број може бити репрезентован скупом уређених тројки природних бројева (тј. предикатом типа $\omega^3 \to \Omega$). Предикат X репрезентује реалан број α у следећем интуитивном смислу: $X(k,\ell,n)$ ако и само ако $\dfrac{k-\ell}{n} < \alpha$. Прецизније, X има улогу непразног почетног комада рационалних бројева (видети формулу $\mathrm{Ini}(X)$) који је ограничен одозго (видети формулу $\mathrm{Maj}(X)$) и који је отворен (видети формулу $\mathrm{Open}(X)$). Неопходно је разматрати само отворене комаде да би била обезбеђена јединственост репрезентације.

У наредним формулама, подразумеваћемо да су све променљиве типа ω и да су ограничене предикатом Nat, те ћемо краће писати $\forall n F$ уместо $\forall n^\omega(\mathrm{Nat}(n) \Rightarrow F)$, односно $\exists n F$ уместо $\exists n^\omega(\mathrm{Nat}(n) \wedge F)$.

Најпре је потребно изразити неједнакост међу рационалним бројевима, тј. да рационалан број $\dfrac{k-\ell}{n}$ није већи од $\dfrac{k'-\ell'}{n'}$. Није тешко доћи до одговарајуће формуле

$$\mathrm{Ord}(k,\ell,n,k',\ell',n') \stackrel{\mathrm{def}}{=} (k\cdot n' + \ell'\cdot n) \leqslant (k'\cdot n + \ell\cdot n'),$$

при чему је $(k\cdot n' + \ell'\cdot n) \leqslant (k'\cdot n + \ell\cdot n')$ скраћење за

$$\forall m \forall p \forall q \forall m' \forall p' \forall q' (\mathrm{Mult}(k,n',m) \wedge \mathrm{Mult}(\ell',n,p) \wedge \mathrm{Add}(m,p,q) \wedge \\ \wedge \mathrm{Mult}(k',n,m') \wedge \mathrm{Mult}(\ell,n',p') \wedge \mathrm{Add}(m',p',q') \Rightarrow q \leqslant q').$$

Реалан број је, дакле, предикат X типа $\omega^3 \to \Omega$, који задовољава услов

$$\mathrm{Real}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists k \exists \ell \exists n X(k,\ell,n) \wedge \mathrm{Ini}(X) \wedge \mathrm{Maj}(X) \wedge \mathrm{Open}(X),$$

при чему је $\mathrm{Ini}(X)$ формула

$$\forall k \forall \ell \forall n \forall k' \forall \ell' \forall n' (X(k,\ell,n) \Rightarrow (\mathrm{Ord}(k',\ell',n',k,\ell,n) \Rightarrow X(k',\ell',n'))),$$

док је

$\mathrm{Maj}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists k \exists \ell \exists n \forall k' \forall \ell' \forall n' (X(k',\ell',n') \Rightarrow \mathrm{Ord}(k',\ell',n',k,\ell,n))$, и

$\mathrm{Open}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \neg \exists k \exists \ell \exists n \forall k' \forall \ell' \forall n' (X(k',\ell',n') \Leftrightarrow \mathrm{Ord}(k',\ell',n',k,\ell,n))$.

Како је дозвољена квантификација реалним бројевима, можемо почети са изградњом анализе. Будући да не можемо квантификовати по функцијама из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$, јер су то објекти типа $(\omega^3 \to \Omega) \to (\omega^3 \to \Omega)$, теореме типа „за сваку функцију ... “ у логици другог реда биће схеме теорема (а не једна теорема), што и није нека сметња. *Проста теорија типова*, наравно, попуњава недостатке $\mathbf{PA}^{\mathrm{II}}$, јер је дозвољена квантификација по свим типовима. Аксиоме су исте као аксиоме аритметике другог реда, $\forall x^\omega (0 =_\omega Sx)$ и $\forall x^\omega \forall y^\omega (Sx =_\omega Sy \Rightarrow x =_\omega y)$.

Семантика

Модели логике вишег реда су уопштења модела за предикатски рачун првог реда. Ипак, укратко ћемо изложити основне концепте.

Прамодел неке логике вишег реда $(\mathrm{Type}_0, \mathcal{L}, \mathcal{Q})$ одређују:
– за сваки тип t, по један скуп D_t, при чему је:
- $D_\Omega = \{0, 1\}$ (0 представља *лаж*, 1 преставља *истину*),
- $D_{t \to t'} \subseteq D_{t'}^{D_t}$ (скуп $D_{t'}^{D_t}$ је скуп свих функција скупа D_t у скуп $D_{t'}$),

– за сваки (c, t) из $\mathcal{L}$, по један елемент $c^{\mathcal{I}}$ из D_t.

Неки прамодел је *пун*, уколико је $D_{t \to t'} = D_{t'}^{D_t}$, за произвољне типове t и t'. Приметимо да су скупови D_t, $t \in \mathrm{Type}$, неког пуног прамодела потпуно одређени задавањем скупова D_t, $t \in \mathrm{Type}_0$.

Валуација μ скупу промењљивих Var_t, за сваки тип t, додељује елементе скупа D_t. Ако је μ валуација и $d \in D_t$, са $\mu\binom{x^t}{d}$ означавамо валуацију која свим промењљивама додељује исте вредности као и валуација μ, осим промењљивој x^t којој додељује вредност d. Вредност израза e за валуацију μ означавамо са $e[\mu]$. Дефиниција је стандардна:

- $c[\mu] = c^{\mathcal{I}}$, ако $(c, t) \in \mathcal{L}$,
- $x^t[\mu] = \mu(x^t)$,
- $f(u)[\mu] = f[\mu](u[\mu])$,
- $(x^t \mapsto u)[\mu]$ је функција која пресликава D_t у неки $D_{t'}$ (t' је тип израза u), при чему сваком d из D_t додељује вредност $u[\mu\binom{x^t}{d}]$,
- $\perp[\mu] = 0$,
- $(F \wedge F')[\mu] = 1$ акко $F[\mu] = 1$ и $F'[\mu] = 1$,

- $(F \vee F')[\mu] = 1$ акко $F[\mu] = 1$ или $F'[\mu] = 1$,
- $(F \Rightarrow F')[\mu] = 1$ акко $F[\mu] = 0$ или $F'[\mu] = 1$,
- $(\forall x^t F)[\mu] = 1$ акко $F[\mu\binom{x^t}{d}] = 1$, за **свако** d из D_t,
- $(\exists x^t F)[\mu] = 1$ акко $F[\mu\binom{x^t}{d}] = 1$, за **неко** d из D_t.

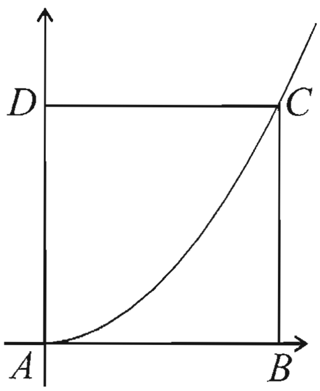
Прамодел је *модел* уколико за сваки израз e чији тип t припада $\mathcal{Q}$ и за сваку валуацију μ важи $e[\mu] \in D_t$. Модел задовољава формулу F ако за сваку валуацију μ важи $F[\mu] = 1$.

ТЕОРЕМА ПОТПУНОСТИ. Формула је доказива ако и само ако је задовољена у свим моделима.

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

Много математичких дисциплина има своје корене у проблемима повезаним са начинима премеравања реалног света посматраног као простор који је Еуклид описао у свом чувеном делу *Елементи*. Један од најзначајнијих задатака математике дуго је био усаглашавање начина на који посматрамо ствари које треба измерити и начина на који схватамо бројеве, тј. оно чиме треба изразити резултате мерења. А природа је непрестано нудила све више ствари које треба премерити: обим и површину круга, површину и запремину лопте, брзине кретања неког тела, брзине заустављања тела и тако даље. И поред опасности да претерамо, рећи ћемо да су математичку анализу (као и геометрију) створили човек и природа у међусобном односу названом *мерење*.

Један од првих резултата математичке анализе сматра се Архимедово решење *проблема квадратуре параболе*.

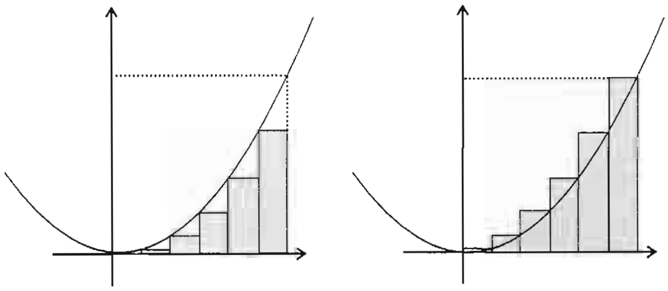


Проблем квадратуре параболе. Дата је парабола $y = x^2$ и квадрат чија су темена $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$. Парабола дели квадрат $ABCD$ на две фигуре чије се површине односе као $1 : 2$. Другим речима, треба показати да је површина фигуре „испод“ параболе једнака $\dfrac{1}{3}$.

Површина квадрата $ABCD$ једнака је 1 (мерних јединица). Ако је P површина фигуре ограничене дужима AB и BC и делом лука параболе од A до C, довољно је доказати да је $P = \frac{1}{3}$.

Нека је n природан број већи од 1. Поделимо одсечак $[0,1]$ осе Ox на n једнаких делова: $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\dots$, $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$, тачкама $A_1\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $A_2\left(\frac{2}{n}, 0\right)$, $\dots$, $A_{n-1}\left(\frac{n-1}{n}, 0\right)$. Сваки од одсечака AA_1, A_1A_2, $\dots$, $A_{n-1}B$ има дужину $\frac{1}{n}$. Над сваким од њих конструишимо два правоугаоника: *описани*, чије горње десно теме припада параболи, и *уписани*, чије лево горње теме припада параболи.

„Висине“ уписаних правоугаоника једнаке су редом $0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, док су „висине“ описаних правоугаоника $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, 1$.



Збир p_n површина уписаних правоугаоника је једнак:

$$p_n = \frac{1}{n}\cdot 0 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right) = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2},$$

док је збир P_n површина описаних правоугаоника једнак:

$$P_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\cdot 1 = \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2},$$

Очигледно је $p_n < P < P_n$, за сваки природан број n. На пример,

$$p_{10000} = \frac{66656667}{200000000} \approx 0,333283 < P < P_{10000} = \frac{66676667}{200000000} \approx 0,333383.$$

Приметимо да за сваки природан број n важи:

- $P_n - p_n = \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) - \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{n}$,
- $-\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < P - \frac{1}{3} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$,
- $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{n}$. Дакле,

$$\left|P - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{n},\ \textbf{за сваки природан број}\ n,$$

па је $P = \frac{1}{3}$. △

Данас овакве проблеме решавамо помоћу одређеног интеграла који је, у суштини, и сам Архимед (око 287–212 г. пре н. е.) користио. Ипак, да би били „откривени“, интеграли ће морати да сачекају Њутна (1643–1727) и Лајбница (1646–1716). Ова два велика математичара увела су у математику и изводе (диференцијале) стварајући диференцијално-интегрални рачун који је даље омогућио буран развој математике и отворио неслућене могућности њене примене у физици и осталим природним наукама.

Међутим, Њутнов и Лајбницов *Рачун* подразумевао је и рад са бројевима који су били *бесконачно мали*. Став да су, за разлику од извода и интеграла, *инфинитезимале неприхватљиве*[38], временом је добијао све више присталица. Не схватајући како „безбедно“ да раде са инфинитезималама, математичари су били принуђени да смисле неки другачији начин изградње величанственог *Рачуна* (тј. анализе).

Класична реална математичка анализа

Почетком XIX века, скоро истовремено, Болцано (1781–1848) и Коши (1789–1857) елиминисали су инфинитезимале увођењем појма граничне вредности. Њихова порука је била: „*Уместо о инфинитезималама размишљајте о низовима све мањих и мањих величина које се приближавају нули*“.

n	10	100	$\cdots$	1 000 000	$\cdots$
$1/n$	$0,1$	$0,01$	$\cdots$	$0,000001$	$\cdots$

Ова порука постаје мото огромног броја математичара, те *гранични процеси* засновани на аксиомама комплетно уређеног поља и данас представљају суштину *(класичне реалне) математичке анализе*.

Пример 1. Канторова конструкција реалних бројева. Видели смо да се при мерењу дужине дијагонале јединичног квадрата добија низ рационалних бројева који представљају приближне вредности стварног резултата – при претпоставци да стварни резултат постоји. Ако стварни резултат означимо са d, тада се све финијим и финијим мерењем долази до низа рационалних бројева $d_1, d_2, \ldots$ који су све боље и боље апроксимације од d.

[38] Што су својевремено били и: *ирационални*, *негативни* или *комплексни* бројеви.

У том духу, реалан број d је потпуно одређен једним низом (d_n) „све бољих и бољих“ приближних вредности из $\mathbb{Q}$. Овакво стање одмах намеће више питања.

1. Како из скупа $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ свих низова рационалних бројева издвојити оне низове који могу представљати „све боље и боље“ приближне вредности неке величине? На пример, интуитивно је јасно да низ $(1,1;2,2;3,3;\ldots;123,123,\ldots)$ не може представљати „све боље и боље“ приближне вредности неке величине, док низ $(0,1;0,12;0,123;0,1234,\ldots)$ то може.

2. Да ли нека два низа „све бољих и бољих“ приближних вредности могу одређивати исту величину? На пример, једноставно се „види“ да би низови $(0,1;0,123;0,12345,\ldots)$ и $(0,12;0,1234;0,123456,\ldots)$ требало да одређују исту величину, и то ону коју одређује и низ $(0,1;0,12;0,123;0,1234,\ldots)$.

3. Како изводити операције са апроксимацијама? На пример, ако мерењем две дужи a и b добијемо низове (a_n) и (b_n), да ли тада можемо сматрати да низ $(a_n+b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots)$ репрезентује дужину дужи добијену надовезивањем дужи a и b?

Дајемо одговоре.

1. Стално побољшање приближних вредности се, поред осталог, огледа и у томе да се чланови одговарајућег низа (x_n) са рашћењем n све мање и мање међусобно разликују, тј. да је разлика $|x_m-x_n|$ све мања и мања када се m и n све више повећавају. По Кошију су названи сви низови са овом особином.

Низ (x_n) рационалних бројева је Кошијев уколико за сваки позитиван рационалан број ε постоји природан број n_0, тако да се сви чланови индекса већег или једнаког n_0, тј. $a_{n_0},a_{n_0+1},a_{n_0+2},\ldots$ међусобно разликују мање од ε. Овај услов се може и овако записати

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}^+\exists n_0\in\mathbb{N}\forall m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}(m\geqslant n_0\land n\geqslant n_0\ \Rightarrow\ |x_m-x_n|<\varepsilon),$$

где је са $\mathbb{Q}^+$ означен скуп свих позитивних рационалних бројева.

Означимо са C скуп свих Кошијевих низова. Уколико су (a_n) и (b_n) Кошијеви низови, може се показати да су Кошијеви и низови (a_n+b_n), $(a_n\cdot b_n)$, $(-a_n)$ и $(a_n^{\sim1})$, при чему је

$$a_n^{\sim1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n}, & a_n\neq0,\\ 0, & a_n=0.\end{cases}$$

Сваки константан низ $(q,q,q,\ldots)$, $q\in\mathbb{Q}$, је Кошијев.

2. Два Кошијева низа, односно два низа „све бољих и бољих" приближних вредности, (a_n) и (b_n) могу да буду резултати (два независна) мерења једне исте величине уколико је разлика $|a_n - b_n|$ све мања и мања са повећањем индекса n.

$$(a_n) \approx (b_n) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon).$$

Може се показати да релација $\approx$ испуњава следећа три својства:

- $(a_n) \approx (a_n)$,
- $(a_n) \approx (b_n) \Rightarrow (b_n) \approx (a_n)$,
- $(a_n) \approx (b_n) \wedge (b_n) \approx (c_n) \Rightarrow (a_n) \approx (c_n)$,

као и да се $\approx$ слаже са основним операцијама над рационалним бројевима:

- $(a_n) \approx (c_n) \wedge (b_n) \approx (d_n) \Rightarrow (a_n + b_n) \approx (c_n + d_n)$,
- $(a_n) \approx (c_n) \wedge (b_n) \approx (d_n) \Rightarrow (a_n \cdot b_n) \approx (c_n \cdot d_n)$,
- $(a_n) \approx (c_n) \Rightarrow (-a_n) \approx (-c_n)$ и
- $(a_n) \approx (c_n) \Rightarrow (a_n^{\sim 1}) \approx (c_n^{\sim 1})$.

Све ове особине нас доводе до следеће идеје: *ако је (x_n) Кошијев низ добијен мерењем неке величине чија је стварна вредност x, онда ту стварну вредност x може репрезентовати и било који други Кошијев низ који је у релацији $\approx$ са (x_n).* Другим речима, за сваки (x_n) из C, скуп $\{(r_n) \mid (r_n) \approx (x_n)\}$ представља стварну вредност одговарајуће мерене величине. Ако овај скуп означимо са $\rho_{(x_n)}$, онда $\{\rho_{(x_n)} \mid (x_n) \in \mathrm{C}\}$ представља скуп свих стварних вредности величина, тј. скуп свих реалних бројева.

3. У скупу $\mathbb{R}_{\mathrm{C}} = \{\rho_{(x_n)} \mid (x_n) \in \mathrm{C}\}$ рачунамо на следећи начин:

$$\rho_{(x_n)} \oplus \rho_{(y_n)} \overset{\text{def}}{=} \rho_{(x_n + y_n)}, \ \rho_{(x_n)} \odot \rho_{(y_n)} \overset{\text{def}}{=} \rho_{(x_n \cdot y_n)}, \ \sim \rho_{(x_n)} \overset{\text{def}}{=} \rho_{(-x_n)}.$$

Ако са $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ редом означимо константне низове $(0, 0, \ldots)$ и $(1, 1, \ldots)$, онда структура $(\mathbb{R}_{\mathrm{C}}, \oplus, \odot, \rho_{\mathbf{0}}, \rho_{\mathbf{1}})$, представља једно поље, при чему је за $\rho_{(x_n)} \neq \rho_{\mathbf{0}}$ (тј. $(x_n) \not\approx \mathbf{0}$), $\rho_{(x_n)} \odot \rho_{(x_n^{\sim 1})} = \rho_{\mathbf{1}}$.

Добијено поље можемо уредити релацијом $\preccurlyeq$

$$\rho_{(x_n)} \preccurlyeq \rho_{(y_n)} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x_n) \approx (y_n) \vee \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n \geqslant n_0 \Rightarrow y_n - x_n \geqslant \varepsilon).$$

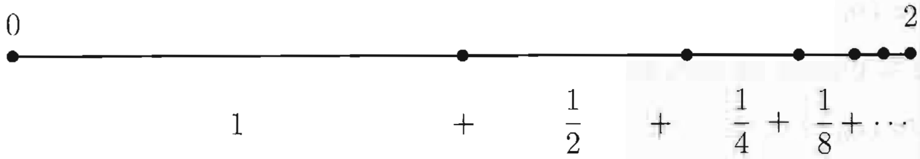
Да смо заиста на овај начин конструисали реалне бројеве, оправдава чињеница да је $(\mathbb{R}_{\mathrm{C}}, \preccurlyeq, \oplus, \odot, \rho_{\mathbf{0}}, \rho_{\mathbf{1}})$ *комплетно уређено поље* (видети страну 136). $\triangle$

Гранична вредност низа

Пример 2. Концепт граничних вредности је постао брзо опште прихваћен, будући да је представљао „оружје“ које је математичарима омогућило и победу над „изразима“ облика

$$(\bigstar) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

тзв. бесконачним редовима. Док је геометријска интуиција јасно указивала да бесконачан збир ($\bigstar$) „мора“ да буде једнак 2,



тачкице „···“ су овај збир чиниле битно различитим од неког коначног збира: захтевале су додавање нових бројева бесконачно много пута. Борба, у којој су математичари (чак и Ојлер) често били побеђени, окончана је увођењем граничних вредности у следећи мисаони оквир: ако бисмо започели испуњавање немогућег задатка – додавање збиру новог сабирка бесконачно много пута – добићемо међурезултате:

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},\ldots,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n},\ldots$$

Дакле, уколико верујемо да је збир ($\bigstar$) једнак 2, примећујемо да смо после додавања $n+1$-ог сабирка начинили грешку једнаку $\frac{1}{2^n}$. Када n постаје све веће, број 2^n се много више повећава, док $\frac{1}{2^n}$ постаје веома мали. Заправо, само треба да замислимо **довољно велико** n, да бисмо учинили да број $\frac{1}{2^n}$ буде **произвољно мали**. У XIX веку овакве ствари су се записивале отприлике овако: у збиру са $n+1$ сабирака ставимо да је $n=\infty$, тада је лева страна збир $\infty+1$ сабирака, а како је $\infty+1=\infty$, добијамо збир ($\bigstar$). С друге стране, десна страна је $2-\frac{1}{2^\infty}=2-\frac{1}{\infty}=2-0=2$, чиме је „доказано“ да је збир једнак 2. Наравно да изложени „доказ“ није прихватљив из много разлога, али добро одсликава интуитивну представу о граничним процесима.

Могућност да грешку при сабирању можемо учинити колико хоћемо малом, наравно уз услов да имамо стрпљења за довољан број корака, дала је смисао изразима облика ($\bigstar$) и довела до дефиниције граничних вредности. $\triangle$

Дефиниција граничне вредности низа. Низ (x_n) тежи броју ℓ (тј. ℓ је гранична вредност овог низа), у ознаци $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$, ако *је разлика* $|x_n - \ell|$ *произвољно мала, за довољно велико* n, тј. за задат позитиван број ε можемо наћи природан број n_0 такав да је $|x_n - \ell| < \varepsilon$, за свако n веће од или једнако n_0.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon)$$

Из Архимедовог својства директно следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, тј. да је $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, *низ све мањих и мањих величина које се приближавају нули.* Важно је поменути да је Архимедово својство заправо еквивалентно формули $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Појам граничне вредности нам омогућава и да „појачамо“ Канторово својство.

Канторова теорема. Ако су $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, затворени интервали такви да је

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}] \supset \cdots$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, тада *постоји јединствен* реалан број x који припада свим овим одсечцима, односно $x \in [a_n, b_n]$, за сваки природан број n (тј. $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$). При том је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x$.

Гранични процес, тј. операција $\lim\limits_{n\to\infty}$ која се примењује на низове реалних бројева, лепо се „слаже“ са алгебарским операцијама и уређењем реалних бројева:

- ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \leqslant b_n$ за свако n почев од неког n_0, онда је $a \leqslant b$, итд.

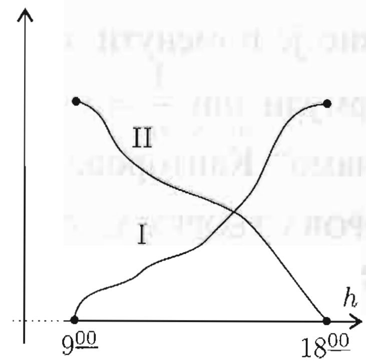
Концепт граничне вредности проширен на реалне функције омогућио је строгу дефиницију *непрекидних (континуираних) функција.*

Непрекидност

ПРИМЕР 3. У понедељак, тачно у 9 часова човек је почео, утабаном стазом, да се пење на планински врх, и освојио га је тачно у 18 часова. Провео је ноћ на њему. Сутрадан, опет у 9 часова, почео је да силази, истом стазом, и био је на подножју тачно у 18 часова. Докажимо да је алпиниста у одређеном тренутку, оба дана у исто време, био на истој надморској висини.

Следећа мисао може да нам сугерише одговор: замислимо да је другог дана други алпиниста почео да се пење утврђеном стазом на врх, у тренутку када је први почео да силази, тј. тачно у 9 часова. Како први силази а други се пење, обојица истом стазом, они се у одређеном тренутку морају срести, тј. у исто време бити на истој надморској висини.

Непрекидна линија I, која одговара путањи алпинисте првог дана, а која спаја тачку $(9, \text{подножје})$ са тачком $(18, \text{врх})$, мора сећи такође непрекидну линију II која одговара путањи алпинисте другог дана, која спаја тачку $(9, \text{врх})$ са тачком $(18, \text{подножје})$. △

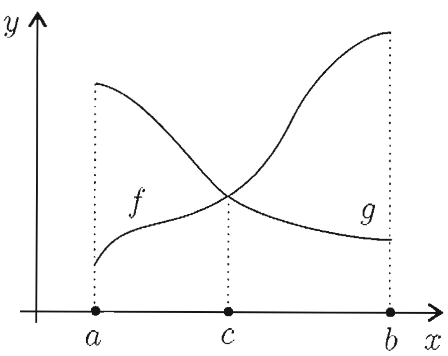


Решење задатка из претходног примера можемо преформулисати у теорему математичке анализе.

ТЕОРЕМА. Ако су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ две непрекидне функције, такве да за a и b, $a < b$, важи

$$f(a) < g(a) \text{ и } f(b) > g(b),$$

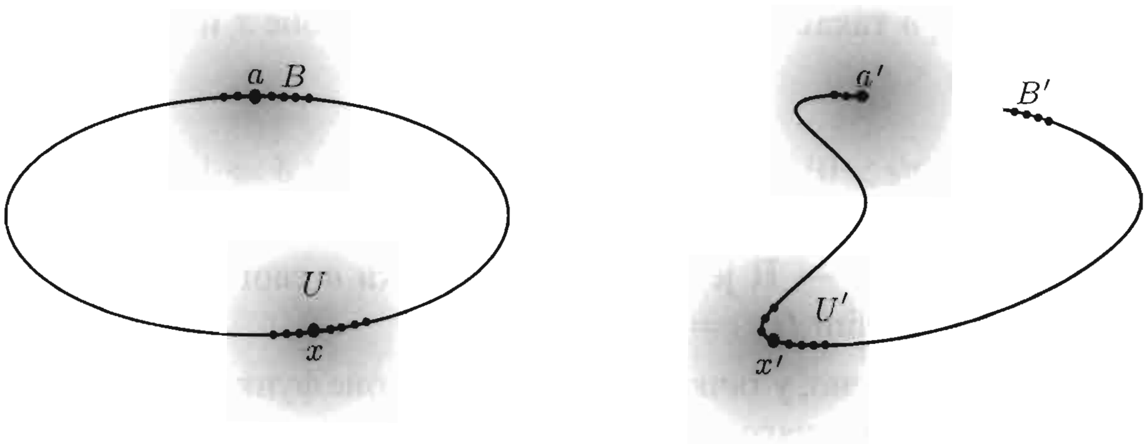
тада постоји c између a и b, тј. $a < c < b$, тако да је $f(c) = g(c)$.



Интуитивно, претходно тврђење је потпуно јасно – баш као и чињеница да неку праву мора сећи свака непрекидна линија којом спајамо тачку с једне стране те праве са тачком која је са њене друге стране.

Иако постоји веома развијена интуиција везана за појам *непрекидности* и низ „очигледно јасних“ особина непрекидних функција, неопходна је строга дефиниција овог концепта. До ове дефиниције довела је анализа супротног процеса – процеса (пре)кидања.

Пример 4. Шта се дешава приликом кидања обичне гумице која се користи у домаћинству?



Један њен део B који је био „близак“ тачки a после прекида (тај део сада означимо са B') не налази се више „близу“ тачке a' (нови положај тачке a). Дакле, прекид у тачки a је такав догађај код кога је неки део B фигуре, који је раније био близак тачки a (писаћемо $B \sim a$), постао далек новом положају a' тачке a ($B' \not\sim a'$). $\triangle$

Негација особине *имати прекид у тачки* a довела је до дефиниције која *непрекидност* неке функције $f : X \to Y$ *у тачки* a види као својство да се сваки део B од X који је близак тачки a (тј. $B \sim a$) након пресликавања заузима положај B' близак тачки $a' = f(a)$ (тј. $B' \sim a'$). Другим речима: функција $f : X \to Y$ је непрекидна у тачки a ако се за x које се „мало“ разликује од a, вредности $f(x)$ и $f(a)$ такође „мало“ разликују једна од друге.

Дефиниција. Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је *непрекидна у тачки* a из D, ако за произвољан позитиван број ε постоји позитиван број δ, тако да за било које x које је од a удаљено за мање од δ, одговарајуће вредности $f(x)$ и $f(a)$ удаљене су међусобно мање од ε, односно за сваки позитиван број ε, постоји позитиван број δ, такав да је $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, за све оне x из D за које важи $|x - a| < \delta$. Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је *непрекидна* (на свом домену) уколико је непрекидна у свакој тачки из D.

Овако виђена непрекидност, може да се опише проширивањем појма граничне вредности низова.

Дефиниција граничне вредности функције. Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања скупа D ($D \subseteq \mathbb{R}$) ако за сваки позитиван број ε скуп $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D$ садржи бар још једну тачку различиту од a. Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ функција реалне промењиве и a *тачка нагомилавања* њеног домена D[39]. Функција f има *граничну вредност* или *лимес* L у тачки a, у ознаци $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ такав да је $|f(x) - L| < \varepsilon$, за све оне x из D за које је $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је *непрекидна у тачки* a свог домена D ако постоји $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Слободније речено, у тачки a су непрекидне оне функције $f : D \to \mathbb{R}$ код којих је a тачка нагомилавања домена D и које могу да замене место, комутирају, са $\lim\limits_{x\to a}$: „$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x) = f(a)$“. Непрекидне функције се „слажу“ и са граничним вредностима низова.

ТЕОРЕМА. Ако је функција $f : D \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки a и ако је (a_n) низ елемената домена D такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда је $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Докажимо сада веома значајну особину непрекидних функција, чија је једноставна последица теорема која је „објашњавала“ сусрет алпиниста из уводног примера.

ТЕОРЕМА. Ако је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака ($f(a) \cdot f(b) < 0$), тада функција f има нулу у интервалу (a, b), тј. постоји c из (a, b) такво да је $f(c) = 0$.

Доказ. Без губљења општости можемо претпоставити да је $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

Нека је $c = \dfrac{b-a}{2}$. Ако је $f(c) \neq 0$, онда је $f(c) > 0$ или је $f(c) < 0$, па на крајевима једног од интервала $[a, c]$ или $[c, b]$ функција f има вредности различитог знака; означимо тај интервал са $[a_1, b_1]$ (ако је $f(c) > 0$, стављамо да је $a_1 = a$ и $b_1 = c$, а у случају да је $f(c) < 0$, онда је $a_1 = c$ и $b_1 = b$). У сваком случају је $f(a_1) < 0$ и $f(b_1) > 0$. Процес настављамо даље: ако је $c_1 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$, тада је $f(c_1) = 0$ или функција f на крајевима једног од интервала $[a_1, c_1]$ или $[c_1, b_1]$ има вредности различитог знака; тај интервал означићемо са $[a_2, b_2]$...

Свакако или у неком кораку добијамо c из $[a, b]$ да је $f(c) = 0$ или добијамо низ уметнутих интервала $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ чије дужине

[39] Тачка нагомилавања скупа D може, али не мора, припадати скупу D.

$\frac{b-a}{2} < \frac{b-a}{2^2} < \cdots < \frac{b-a}{2^n} < \cdots$ теже нули. У другом случају, према Канторовој теореми, постоји јединствена тачка c која припада свим интервалима добијеног низа. Крајеви ових интервала образују два низа (a_n) и (b_n) таква да је $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. На основу својстава граничних вредности и дефиниције непрекидности добијамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geqslant 0$. Дакле, $f(c) = 0$. $\square$

Класичан диференцијално-интегрални рачун

Појам граничне вредности функција се доста развио захваљујући и покушајима да се опишу разне појаве у физици. Тако, теорија граничних вредности је постала главни оквир за дефинисање појмова као што су *тренутна брзина, тренутно убрзање* и разне друге брзине промена.

Пример 5. Нека се материјална тачка креће праволинијски по закону $s = f(t)$, тј. нека се у тренутку t налази на растојању $s = f(t)$ од почетног положаја. Средња брзина у **временском интервалу** $[t_0, t_0 + \Delta t]$ јесте количник промене (прираштаја) пута који пређе тачка и одговарајућег прираштаја времена, $v_{\mathrm{sr}} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Тренутна брзина у **тренутку** t_0 је гранична вредност количника пређеног пута и протеклог времена, када протекло време тежи нули,

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Треба приметити да, иако је тренутна брзина „локална" карактеристика (јер се односи на одређени тренутак) при њеном дефинисању се **подразумева** кретање у неком временском интервалу који садржи одговарајући тренутак.

На потпуно сличан начин се дефинише и појам тангенте (страна 38). $\triangle$

При потпуној аналогији са дефиницијом у претходном примеру уводи се појам извода у тачки произвољне реалне функције.

Дефиниција. Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ и x_0 елемент домена такав да је $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$, за неко позитивно δ. Функција f је *диференцијабилна (глатка) у тачки* x_0 ако постоји гранична вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

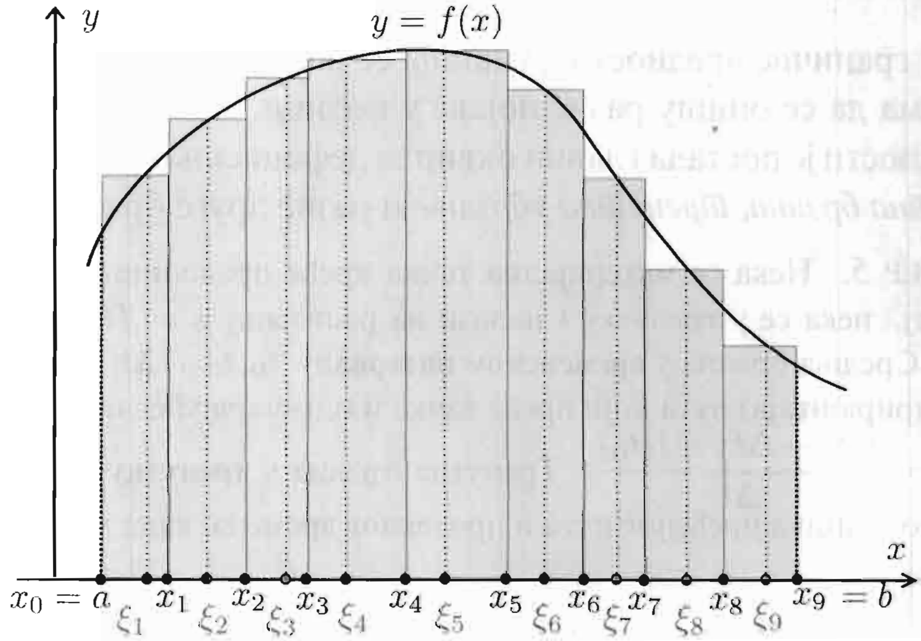
Ако постоји, ову граничну вредност називамо *извод* функције f у тачки x_0 и означавамо са $f'(x_0)$.

Пример 6. Ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, из

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_0 + \Delta x)^2 - 2x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0^2 + 4x_0 \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x_0^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x_0 + 2\Delta x) = 4x_0$$

имамо да је $f'(x_0) = 4x_0$, за сваки реалан број x_0. $\triangle$

Архимедово решење *проблема квадратуре параболе* директно нас води до дефиниције одређеног интеграла неке функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.



Подела Π одсечка $[a, b]$ $(a < b)$ је коначан скуп тачака $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ такав да је $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; $\Pi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Параметар поделе $\Pi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, у ознаци $d(\Pi)$, јесте највећи елемент скупа $\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$, при чему је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$; $d(\Pi) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$.

Подела одсечка $[a, b]$ *са означеним тачкама* је пар (Π, Ξ), при чему је $\Pi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ подела одсечка $[a, b]$ и Ξ уређена n-торка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ таква да $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Ако је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ дата функција, онда се збир

$$\sigma(f; (\Pi, \Xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

назива *интегрална сума* функције f која одговара подели са означеним тачкама (Π, Ξ).

Дефиниција. Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ задата функција. Реалан број I је *одређени интеграл функције* f *на* $[a, b]$ ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ такав да за сваку поделу са означеним тачкама (Π, Ξ), одсечка $[a, b]$, за коју је $d(\Pi) < \delta$, важи $|I - \sigma(f; (\Pi, \Xi))| < \varepsilon$.

Дефиниција одређеног интеграла I функције f на одсечку $[a, b]$ записује се и на следећи начин $I = \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \sigma(f; (\Pi, \Xi))$. Број I, ако постоји, зависи само од функције f и одсечка $[a, b]$ и означава се са

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

За фиксирану функцију f дефинишемо пресликавање $\mathcal{I}_f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ чији је домен скуп $\mathcal{P}$ свих подела са означеним тачкама на следећи начин $\mathcal{I}_f(\Pi, \Xi) = \sigma(f; (\Pi, \Xi))$. Дакле, ради се о граничној вредности функције $\mathcal{I}_f$. О каквом лимесу је овде реч биће ближе објашњено у наредном одељку. Иначе, ова врста лимеса се може заобићи у случају непрекидних функција, тј. релативно лако се могу директно одређивати одређени интеграли непрекидних функција.

Теорема. Нека је f непрекидна функција на одсечку $[a, b]$. Тада је

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right).$$

У вези са одређеним интегралом поменимо и то да се он користи за прецизно и строго дефинисање појмова као што су *површина* и *запремина*.

Иако су дефиниције извода и интеграла на први поглед сасвим различите (и различито мотивисане), реч је о два веома блиска концепта.

Теорема. Ако је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ x \in [a, b],$$

онда је $F'(x) = f(x)$, за свако x из (a, b).

Теорема. Њутн–Лајбницова формула. Ако је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и $F'(x) = f(x)$, за свако x из (a, b), онда је

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Граничне вредности по филтеру

Размотримо најзад сличности међу поменутим врстама граничних вредности (низова, реалних функција реалне променљиве и интегралних сума).

У дефиницији граничне вредности низа реалних бројева $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ кључну улогу су имали следећи подскупови домена функције f:

$$\mathcal{B}_{niz} = \{[n, +\infty) \cap \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\{n, n+1, n+2, \dots\} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

будући да је

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{B}_{niz})(\forall n \in U)|f_n - \ell| < \varepsilon.$$

Слично, из дефиниције граничне вредности функције види се да су од великог значаја околине тачке из којих је искључена сама та тачка. Тако, ако $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, a је тачка нагомилавања скупа D и

$$\mathcal{B}_{fun} = \{((a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)) \cap D \mid \delta > 0\},$$

тада је

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{B}_{fun})(\forall x \in U)|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Већ смо поменули да гранична вредност функције $\mathcal{I}_f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, при чему је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{P}$ скуп свих подела са означеним тачкама интервала $[a, b]$, даје одређени интеграл. Нека је

$$\mathcal{B}_{int} = \{B_\delta \mid \delta > 0\},$$

при чему је B_δ скуп свих подела са означеним тачкама (Π, Ξ) за које је $d(\Pi) < \delta$. Тада је

$$I = \lim_{d(\Pi)\to 0} I_f(\Pi, \Xi) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{B}_{int})(\forall (\Pi, \Xi) \in U)|I_f(\Pi, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

Ове сличности су разлог за увођење појма *граничне вредности по бази*. Наиме, ако је $\mathcal{B}$ било који од скупова $\mathcal{B}_{niz}$, $\mathcal{B}_{fun}$, $\mathcal{B}_{int}$ тада је:

1. $\mathcal{B}$ непразан скуп неких подскупова домена одговарајуће функције,

2. за свака два скупа U и V из $\mathcal{B}$ постоји скуп W такође из $\mathcal{B}$ такав да је $W \subseteq U \cap V$.

Кажемо да су $\mathcal{B}_{niz}$, $\mathcal{B}_{fun}$, $\mathcal{B}_{int}$ редом *базе* у $\mathbb{N}$, D, $\mathcal{P}$. Својства **1** и **2** дефинишу базу на било ком скупу.

Дефиниција. Нека је $f : X \to \mathbb{R}$ дата функција и $\mathcal{B}$ база у X. Реалан број L је гранична вредност функције $f : X \to \mathbb{R}$ по бази $\mathcal{B}$, у ознаци $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$, ако за сваки позитиван број ε постоји елемент U базе $\mathcal{B}$, такав да је $|f(x) - A| < \varepsilon$, за свако x из U. Логичким симболима записано

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{B})(\forall x \in U)\,|f(x) - A| < \varepsilon.$$

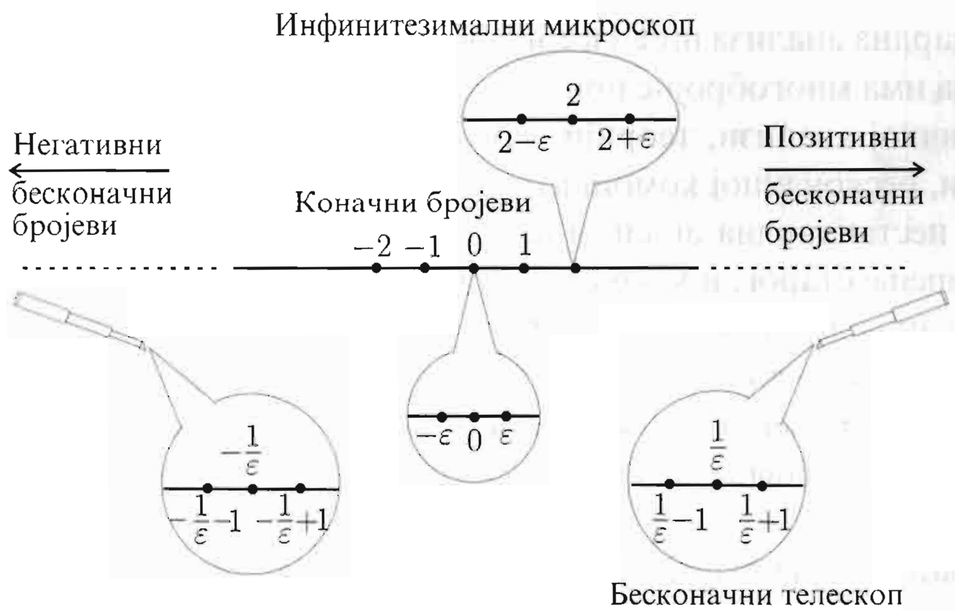
Нестандардна анализа

Нестандардна анализа није засебна област математике, већ пре свега техника која има многобројне примене у великом броју других области (у математичкој анализи, теорији вероватноће, економији, математичкој физици, бесконачној комбинаторици итд.). Својевремено, када је откривена, нестандардна анализа је најчешће представљана као изненађујуће решење старог, и како се дуго веровало нерешивог, проблема логичког заснивања „инфинитезималне методе“ у анализи. Међутим, она је постала много више од пуке реформулације *Рачуна*. Важност ове технике огледа се првенствено у томе што најчешће нуди једноставније и интуитивније сагледавање великог броја појмова и метода у поменутим областима.

Нестандардну анализу је створио Абрахам Робинсон, релативно скоро (1961. године), користећи старе идеје, пре свега, Готфрида Лајбница. Основна идеја при овом заснивању је добро позната у математици: увођење *нових* („*идеалних*“) елемената у циљу поједностављења неке теорије о извесним математичким објектима. Дефиниција непрекидности функције коју омогућава нестандардна анализа много боље изражава нашу интуитивну представу: функција f је непрекидна у тачки c ако се вредности $f(c)$ и $f(c')$ „мало“ разликују једна од друге за свако c' „блиско“ броју c. Наиме, нестандардна анализа отклања невоље које смо имали са структуром реалних бројева не могавши на задовољавајући начин да дефинишемо релације „бити близак“ или „мало се разликовати“, јер никоја два реална броја нису довољно блиска. Овде, овај проблем превазилазимо проширивањем скупа реалних бројева. Сетимо се да смо слично поступали при отклањању „тешкоћа“ које смо имали са скуповима бројева $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$.

Хиперреална права

Увешћемо један нов скуп бројева, који поред реалних садржи и бесконачно мале и бесконачно велике бројеве. Бројеви овог скупа називају се *хиперреални бројеви*. Скуп хиперреалних бројева означавамо са $^*\mathbb{R}$ и конструишемо (дефинишемо) га помоћу скупа реалних бројева $\mathbb{R}$, слично као што скуп $\mathbb{R}$ конструишемо помоћу рационалних бројева. Конструкцију ћемо изложити на крају овог одељка. Пре тога, истаћи ћемо својства хиперреалних бројева која су нам потребна за „рачун". Уосталом, на исти начин се у школама упознајемо и са структуром реалних бројева.



Круг представља „инфинитезимални микроскоп" који је довољно моћан да нам покаже бесконачно мале делове хиперреалне праве. Скуп $\mathbb{R}$ је расут међу коначним бројевима. Део хиперреалне праве који садржи бесконачне бројеве можемо видети „бесконачним телескопом".

Сваки реалан број је елемент скупа $^*\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$), али скуп $^*\mathbb{R}$ има и других елемената (који нису реални бројеви). Број ε је *бесконачно мали* или *инфинитезимала*, уколико је $-a < \varepsilon < a$, за сваки позитиван реалан број a. Једини реалан број који је инфинитезимала је 0. Постоје три врсте инфинитезимала у $^*\mathbb{R}$: позитивне, негативне и нула. Малим (индексираним) грчким словима ε, δ, ... означаваћемо инфинитезимале. Постојање инфинитезимала, тј. бесконачно малих бројева, има за последицу постојање и бесконачно великих хиперреалних бројева. Ако је ε позитивна инфинитезимала, тада је $-\varepsilon$ негативна инфинитезимала, али је $\frac{1}{\varepsilon}$ *бесконачан позитиван број*, тј. *хиперреалан број већи од сваког реалног броја*, док је $-\frac{1}{\varepsilon}$ *бесконачан негативан број*, тј. *хиперреалан број мањи од сваког реалног броја.* Хиперреални бројеви који нису бесконачни називају се *коначни хиперреални бројеви.*

Целокупан рачун са хиперреалним бројевима је заснован са три основна принципа који повезују реалне и хиперреалне бројеве: принцип екстензије (проширења), принцип трансфера (преноса) и принцип стандардног дела.

Принцип екстензије

(а) Скуп реалних бројева је подскуп скупа хиперреалних бројева, односно реална права је део хиперреалне праве.

(б) Уређење скупа хиперреалних бројева је проширење уобичајеног уређења $<$ скупа $\mathbb{R}$.

(в) Постоји хиперреалан број већи од нуле и мањи од сваког позитивног реалног броја. Другим речима, постоји бар једна позитивна инфинитезимала, па постоје и хиперреални бројеви који нису реални!

(г) Основне операције скупа $^*\mathbb{R}$ су сабирање $(+)$ и множење $(\cdot)$ и задовољавају сва алгебарска својства операција $+$ и $\cdot$ скупа $\mathbb{R}$.[40]

(д) Свакој реалној функцији реалне променљиве $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, одговара хиперреална функција $^*f : {}^*D \to {}^*\mathbb{R}$, за неки скуп $^*D$, $D \subset {}^*D \subset {}^*\mathbb{R}$. Функцију $^*f$ зваћемо *природна екстензија* (проширење) функције f, а разлог за то навешћемо касније.

Принцип трансфера. Све особине исказане формулама првог реда и које важе за реалне бројеве важе и за хиперреалне бројеве. Тако, одговарајућа структура над скупом $^*\mathbb{R}$ образује једно уређено поље, додуше неархимедско. Такође, сви услови којим је одређена дефинисаност неког реалног израза представљају услове за дефинисаност

[40]Поменуте операције примењене на реалне бројеве своде се на уобичајено сабирање и множење.

одговарајућих хиперреалних израза. На пример, за произвољне хиперреалне бројеве x и y важи:

- $x + y = y + x$,
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$,
- израз $\dfrac{x}{0}$ није дефинисан,
- ако је $0 < x < y$, онда је $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$,
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- ако је $x > 0$ и $y > 0$, онда је $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$ итд.

Према принципу трансфера следи да свака реална функција и њена природна екстензија имају исте вредности када се примене на реалне бројеве, што је разлог за назив „природна екстензија", али и за изостављање * као префикса. На пример, уместо $^*\sin\varepsilon$, $^*\sqrt[3]{x+\varepsilon}$ (и сл.) писаћемо једноставно $\sin\varepsilon$, $\sqrt[3]{x+\varepsilon}$, остављајући да аргументи на које се примењује функција одреде да ли је реч о „обичној" реалној функцији или њеној природној екстензији. Принцип трансфера је користан и при рачунању са инфинитезималама. Тако, полазећи од неке инфинитезимале ε, можемо добити још бесконачно много инфинитезимала. На пример, ε^2 је позитивна инфинитезимала мања од ε, $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon$, што следи према принципу трансфера јер је $0 < x^2 < x$, за сваки реалан број x између 0 и 1. Ево још неких инфинитезимала (у растућем поретку ако је $\varepsilon > 0$): $\varepsilon^3, \varepsilon^2, \dfrac{\varepsilon}{100}, 73\varepsilon, 100\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$. Такође, добијамо и негативне инфинитезимале као што су $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2, \dots$, али и многе друге хиперреалне бројеве: $1 + \sqrt[3]{\varepsilon}$, $(10 - \varepsilon)^2$, $\dfrac{2}{\varepsilon}, \dots$

Нека правила рачунања са хиперреалним бројевима. Нека су ε, δ произвољне инфинитезимале, b и c коначни хиперреални бројеви који нису инфинитезимале, H и K бесконачни хиперреални бројеви и n произвољан природан број.

(1) Супротни бројеви	**(2) Реципрочне вредности**
$-\varepsilon$ је инфинитезимала;	Ако је $\varepsilon \neq 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon}$ је бесконачан;
$-b$ је коначан	$\dfrac{1}{b}$ је коначан;
и није инфинитезимала;	и није инфинитезимала;
$-H$ је бесконачан.	$\dfrac{1}{H}$ је инфинитезимала.

(3) Збир
$\varepsilon + \delta$ је инфинитезимала;
$b + \varepsilon$ је коначан
и није инфинитезимала;
$b + c$ је коначан
(можда и инфинитезимала);
$H + \varepsilon$ и $H + b$ су бесконачни.

(4) Производ
$\varepsilon \cdot \delta$ је инфинитезимала;
$\varepsilon \cdot b$ је инфинитезимала;
$b \cdot c$ је коначан
и није инфинитезимала;
$H \cdot b$ и $H \cdot K$ су бесконачни.

(5) Количник
$\dfrac{\varepsilon}{b}$ и $\dfrac{\varepsilon}{H}$ су инфинитезимале;
$\dfrac{b}{c}$ је коначан
и није инфинитезимала;
$\dfrac{b}{\varepsilon}$, $\dfrac{H}{\varepsilon}$ и $\dfrac{H}{b}$ су бесконачни ($\varepsilon \neq 0$).

(6) Корен
Ако је $\varepsilon > 0$,
$\sqrt[n]{\varepsilon}$ је инфинитезимала;
ако је $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ је коначан и
није инфинитезимала;
ако је $H > 0$, $\sqrt[n]{H}$ је бесконачан.

Приметимо да нису дата правила за следеће могућности: $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$ (количник две инфинитезимале), $\dfrac{H}{K}$ (количник два бесконачна броја), $\varepsilon \cdot H$ (производ инфинитезимале и бесконачног броја) и $H + K$ (збир два бесконачна броја). Наиме, при свакој од ових могућности можемо добити инфинитезималу, коначан број који није инфинитезимала или неки бесконачан број, зависно од избора бројева ε, δ, H и K. Ево, на пример, три сасвим различита количника две инфинитезимале: $\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$ је инфинитезимала (једнака ε), $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon}$ коначан број (једнак 1) који није инфинитезимала, $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2}$ је бесконачан број.

Свако од наведених правила је и интуитивно јасно. На пример, ако је ε инфинитезимала а a коначан број, тада је $a \cdot \varepsilon$ инфинитезимала – површина „бесконачно танког“ правоугаоника је бесконачно мала.

Такође, из искустава знамо да је реципрочна вредност малог броја велика, па је природно да је за инфинитезималу $\varepsilon \neq 0$, број $\dfrac{1}{\varepsilon}$ бесконачан број. Ни строг доказ није тежак: за сваки позитиван реалан број r, ако је ε позитивна инфинитезимала, онда је $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{r}$, одакле следи да је $r < \dfrac{1}{\varepsilon}$; дакле, $\dfrac{1}{\varepsilon}$ је већи од сваког позитивног реалног броја.

Није тешко доказати да важе следећа правила о уређењу хиперреалних бројева.

(а) Сваки хиперреалан број који се налази између две инфинитезимале је инфинитезимала.

(б) Сваки хиперреалан број који је између два коначна хиперреална броја је коначан.

(в) Сваки хиперреалан број већи од неког позитивног бесконачног броја је позитиван бесконачан број.

(г) Сваки хиперреалан број мањи од неког негативног бесконачног броја је негативан бесконачан број.

Докази су заиста једноставни. На пример, докажимо (в). Ако је H позитиван бесконачан број и $H < K$, тада је $r < H < K$, за сваки реалан број r, па је и $r < K$, те је K бесконачан позитиван број.

Важна релација на скупу $^*\mathbb{R}$ је релација „бесконачно блиско" $\approx$. Два хиперреална броја b и c су *бесконачно блиска*, у ознаци $b \approx c$, ако је њихова разлика $b - c$ инфинитезимала. На пример, ако је b произвољан хиперреалан број и ε инфинитезимала, тада је $\varepsilon \approx 0$, $b \approx b + \varepsilon$, итд. Лако се доказује да је $\approx$ релација еквиваленције на скупу $^*\mathbb{R}$. Такође, ако је $a \approx b$ и a је инфинитезимала (коначан, бесконачан број), онда је и b инфинитезимала (коначан, бесконачан број). Поменимо и да за свака два реална броја a и b из $a \approx b$ следи да је $a = b$.

Принцип стандардног дела. Сваки коначан хиперреалан број је бесконачно близак тачно једном реалном броју. Ако је b коначан хиперреалан број, јединствен реалан број који је бесконачно близак овом броју означавамо са $\mathrm{st}(b)$ и називамо га *стандардан део* од b. Бесконачни хиперреални бројеви немају стандардан део.

Из претходне дефиниције директно следи да је за сваки коначан хиперреалан број b,

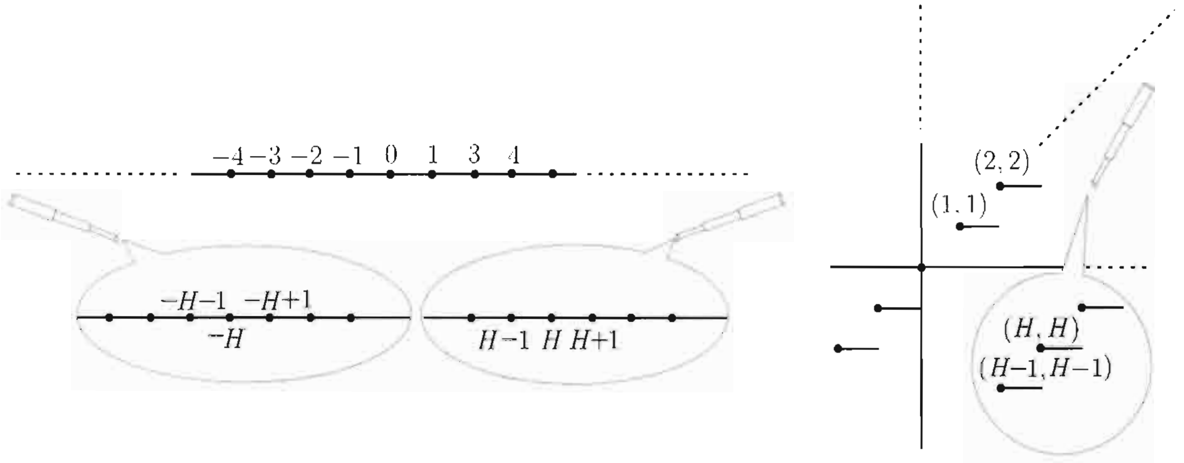
- $\mathrm{st}(b)$ реалан број,
- $b = \mathrm{st}(b) + \varepsilon$, за неку инфинитезималу ε,
- $b = \mathrm{st}(b)$, уколико је b реалан број.

Правила рачунања стандардног дела. Нека су a и b коначни хиперреални бројеви и n природан број. Тада је

(1) $\operatorname{st}(-a) = -\operatorname{st}(a)$; (2) $\operatorname{st}(a+b) = \operatorname{st}(a) + \operatorname{st}(b)$;
(3) $\operatorname{st}(a-b) = \operatorname{st}(a) - \operatorname{st}(b)$; (4) $\operatorname{st}(a \cdot b) = \operatorname{st}(a) \cdot \operatorname{st}(b)$;
(5) $\operatorname{st}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\operatorname{st}(a)}{\operatorname{st}(b)}$, $\operatorname{st}(b) \neq 0$; (6) $\operatorname{st}(a^n) = (\operatorname{st}(a))^n$;
(7) $\operatorname{st}(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{\operatorname{st}(a)}$, $a \geqslant 0$; (8) $a \leqslant b \Rightarrow \operatorname{st}(a) \leqslant \operatorname{st}(b)$.

Као илустрацију, доказаћемо једнакост (4). Претпоставимо да је $r = \operatorname{st}(a)$ и $s = \operatorname{st}(b)$. Тада је $a = r + \varepsilon$ и $b = s + \delta$, за неке инфинитезимале ε и δ, па је $ab = (r+\varepsilon)(s+\delta) = rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta$, одакле је $\operatorname{st}(ab) = \operatorname{st}(rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta) = rs = \operatorname{st}(a)\operatorname{st}(b)$.

У скупу ${}^*\mathbb{R}$ посебно се издвајају хиперцели бројеви који представљају проширење скупа целих бројева. Скуп хиперцелих бројева садржи уобичајене (коначне) целе бројеве, али и бесконачне позитивне и негативне хиперцеле бројеве. Хиперцели бројеви задовољавају исте алгебарске законе као и цели бројеви и распоређени су дуж целе хиперреалне праве.



Скуп хиперцелих бројева је скуп слика функције *цео део* са доменом ${}^*\mathbb{R}$. Ако је x неки хиперреалан број, $[x]$ је највећи хиперцео број y такав да је $y \leqslant x$. Према принципу трансфера, сваки хиперреалан број x налази се између два хиперцела броја: $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Такође, збир, разлика, производ хиперцелих бројева је хиперцео број. Једно од најважнијих тврђења је да се за сваки позитиван бесконачан хиперцео број H сваки низ $(a_n)_{n \leqslant H} = (a_1, a_2, \ldots, a_H)$ хиперреалних бројева, у одређеном смислу, понаша као обичан коначан низ реалних бројева; на пример, *сваки овакав низ има највећи и најмањи елеменш* итд.

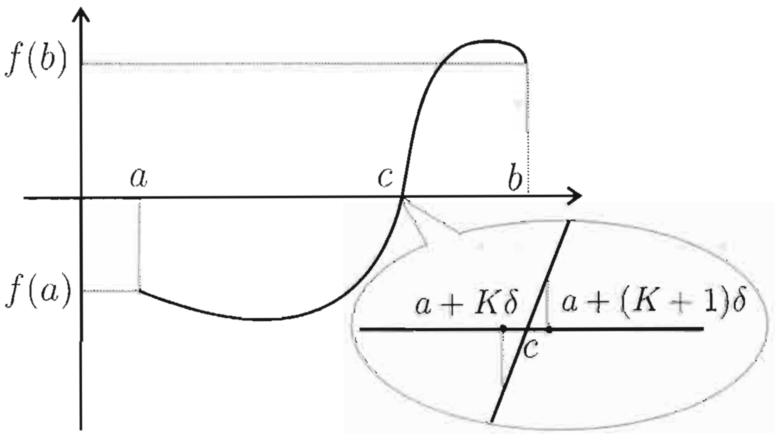
Непрекидност

Кажемо да је функција f *непрекидна* у тачки c ако је за сваки хиперреалан број x (из ${}^*D$) бесконачно близак тачки c, $f(x)$ бесконачно блиско броју $f(c)$, тј. $x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c)$. Или еквивалентно, за сваку инфинитезималу ε важи $\operatorname{st}(f(c+\varepsilon)) = f(c)$. Према особинама функције st, из непрекидности функције f у тачки c следи и непрекидност функција $x \mapsto f(x)+g(x), x \mapsto f(x)-g(x), x \mapsto f(x)\cdot g(x), x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(c) \neq 0)$, $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ $(f(c) > 0)$ у тачки c.

ТЕОРЕМА. Нека је f реална функција непрекидна у свакој тачки затвореног интервала $[a,b]$, таква да су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака. Тада функција f има нулу у интервалу (a,b), тј. постоји c из (a,b) такво да је $f(c)=0$.

Доказ. Претпоставимо да је $f(a) < 0 < f(b)$. Нека је H неки бесконачан позитиван хиперцео број. Поделимо ${}^*[a,b]$ на H подинтервала једнаких, инфинитезималних, дужина $\delta = \dfrac{b-a}{H}$:

$$[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \ldots, [a+(K-1)\delta, a+K\delta], \ldots, [a+(H-1)\delta, b].$$



Приметимо да за сваки хиперреалан број x, $a < x < b$ постоји јединствен хиперцео број L, $1 < L < H$, такав да је $a+(L-1)\delta \leqslant x < a+L\delta$. Нека је $a+K\delta$ највећа подеона тачка таква да је $f(a+K\delta) < 0$. Тада је

$$f(a+K\delta) < 0 \leqslant f(a+(K+1)\delta).$$

Како је f непрекидна у свакој тачки из $[a,b]$, имамо $f(a+K\delta) \approx f(a+(K+1)\delta)$, па је $f(a+K\delta) \approx 0$. Ако ставимо да је $c = \operatorname{st}(a+K\delta)$, добијамо да је $f(c) = \operatorname{st}(f(a+K\delta)) = 0$. □

Конструкција хиперреалних бројева

Конструкција скупа ${}^*\mathbb{R}$ доста подсећа на конструкцију скупа реалних бројева помоћу Кошијевих низова рационалних бројева. Овога пута поћи ћемо од $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, скупа свих низова реалних бројева и следити поменуту стратегију. Полазак од *свих низова реалних бројева* представља једну веома битну разлику између конструкције реалних и конструкције хиперреалних бројаве. Наиме, при конструкцији реалних бројева узети су у обзир *само Кошијеви низови*, док су одбачени сви низови рационалних бројева који немају „пристојно“ асимптотско понашање.

На $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ дефинисаћемо једну релацију еквиваленције $\sim$ и посматрати скупове $\varrho_{(x_n)} = \{(r_n) \mid (r_n) \sim (x_n)\}$. Скуп $\{\varrho_{(x_n)} \mid (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ назваћемо скупом хиперреалних бројева и означити га са ${}^*\mathbb{R}$. Ради једноставнијег писања скуп свих низова који су у релацији $\sim$ са неким фиксираним низом (x_n) уместо са $\varrho_{(x_n)}$ краће ћемо означавати са $\langle x_n\rangle$.

Операције на скупу ${}^*\mathbb{R}$ дефинишемо, као и раније, по координатама:

$$\langle x_n\rangle \oplus \langle y_n\rangle = \langle x_n + y_n\rangle,\ \langle x_n\rangle \odot \langle y_n\rangle = \langle x_n \cdot y_n\rangle,\ \ominus\langle x_n\rangle = \langle -x_n\rangle.$$

при чему $+, \cdot, -$ означавају стандардне операције скупа реалних бројева. Наравно, желимо да скуп ${}^*\mathbb{R}$ садржи реалне бројеве, али и више, да над ${}^*\mathbb{R}$ изградимо структуру која ће у одређеном смислу проширивати структуру реалних бројева. Реалне бројеве у ${}^*\mathbb{R}$ ће одређивати константни низови, тј. реалан број a идентификујемо са $\langle a, a, \ldots\rangle$ – скупом који је одређен константним низом реалних бројева. Наравно, да би нам пресликавање $a \mapsto \langle a, a, \ldots\rangle$ пренело реалне бројеве у ${}^*\mathbb{R}$ мора да буде и 1–1 и сагласно са одговарајућим операцијама.

Структуру коју желимо да изградимо

$$({}^*\mathbb{R}, \oplus, \odot, \ominus, \langle 0, 0, \ldots\rangle, \langle 1, 1, \ldots\rangle)$$

добро ћемо алгебарски „организовати“ тако да она буде поље. Такође, трудићемо се и да ово ново поље линеарно уредимо поретком који се слаже са уведеним операцијама. Крајњи циљ је, дакле, да добијсмо уређено поље над ${}^*\mathbb{R}$. Остаје још да се дефинише релација $\sim$. Но, пре сваке дефиниције, неколико речи о „филозофији“ која се крије иза ње је увек корисно.

Када смо правили реалне бројеве од рационалних, једино смо желели да уведемо граничне вредности за све „природно“ конвергентне низове.

Пошто су граничне вредности биле све што нас занима, међу Кошијевим низовима рационалних бројева смо идентификовали све низове који су имали исту граничну вредност. При том, никаква пажња није била посвећена *брзини* конвергенције. Тако су, на пример, низови $\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ идентификовани са истим реалним бројем[41], са 0, иако ови низови конвергирају ка 0 различитим брзинама. Наредна таблица илуструје наше „интуитивно“ уверење да низ $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *брже* тежи ка 0 од низа $\left(\frac{1}{n}\right)$.

n	10	100	1000	$\dots$
$\frac{1}{n}$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$\dots$
$\frac{1}{n^2}$	$0,01$	$0,0001$	$0,000001$	$\dots$

При конструкцији $^*\mathbb{R}$ од $\mathbb{R}$ (тј. од $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) трудићемо се да нови елементи „кодирају“ не само границе низова већ и њихове брзине. Да бисмо ово постигли мало ћемо променити стратегију и покушати да идентификујемо што је могуће мање низова. Иако тривијална идентификација (једнакост по координатама) – $(x_n) \sim (y_n)$ акко $x_n = y_n$ за сваки n – највише одговара управо поменутом захтеву, она не одговара нашој жељи да структура коју градимо има „добре“ алгебарске особине. На пример, тривијалном идентификацијом добили бисмо структуру са правим делиоцима нуле: $(a_n) = (1,0,1,0,1,0,\dots)$ и $(b_n) = (0,1,0,1,0,1,\dots)$ били би различити од 0, тј. од $(0,0,\dots)$, а њихов производ једнак 0, $(a_n)\cdot(b_n) = 0$. Дакле, релација $\sim$ требало би да буде бар толико „јака“ да избегнемо проблем правих делилаца нуле.

Испоставља се да овај проблем решавамо слабљењем тривијалне идентификације, тј. релацијом чија је „интуитивна“ дефиниција

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ акко } \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\} \text{ је } \textit{велики} \text{ скуп.}$$

Поделу подскупова од $\mathbb{N}$ на *велике* и *мале* математички изражавамо пресликавањем $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ које има следећа својства:
(i) $\mu(\mathbb{N}) = 1$,
(ii) $\mu(A) = 0$, за сваки коначан подскуп A од $\mathbb{N}$,
(iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, за свака два дисјунктна подскупа A и B од $\mathbb{N}$.

[41] $\rho_{\left(\frac{1}{n}\right)} = \rho_{\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \rho_{(0,0,\dots)} = \mathbf{0}$, $\left(\frac{1}{n}\right) \approx \left(\frac{1}{n^2}\right)$

Једно овакво пресликавање називамо *мером* јер има својства слична мерама на које смо навикли, осим што овог пута мере не изражавамо бројевима већ речима *велико* (1) и *мало* (0). Дакле, великим подскуповима од $\mathbb{N}$ сматрамо оне чија је мера 1. На пример, поред скупа $\mathbb{N}$, велики су сви скупови чији су комплементи коначни. Важно је приметити да је сваки подскуп A од $\mathbb{N}$ велики или је његов комплемент велики, и никако то нису оба. Зато на пример, само један од скупова $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ и $2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, \ldots\}$ може бити велики; од дефиниције мере зависи који.

Овом приликом нећемо експлицитно дефинисати меру јер нам то неће бити неопходно. Једноставно, у даљем тексту ћемо подразумевати једну фиксирану меру μ. Иначе, постојање овакве мере, тј. могућност да се дефинише једна оваква функција, обезбеђује аксиома избора. Ову врсту непрезицности нам дозвољава чињеница да ће структуре хиперреалних бројева настале од различитих мера имати исте кључне особине и да ове особине следе из (кључних) особина било које мере. Једну од тих особина мере смо већ поменули:

• за сваки подскуп A од $\mathbb{N}$, или је $\mu(A) = 1$ или је $\mu(\mathbb{N} \setminus A) = 1$, и никако оба.

Следеће три особине су једноставне последице полазних особина мере. Наиме, за било која два подскупа A и B од $\mathbb{N}$:

• ако је $\mu(A) = 1$ и $\mu(B) = 1$, онда је и $\mu(A \cap B) = 1$ (пресек великих скупова је велики скуп);

• ако је $\mu(A) = 1$ и $A \subseteq B$, онда је и $\mu(B) = 1$ (надскуп великог скупа је велики);

• ако је $\mu(A \cup B) = 1$, онда је $\mu(A) = 1$ или $\mu(B) = 1$ (ако је унија два скупа велики скуп, онда је бар један од њих велики).

Сада можемо прецизно дефинисати релацију $\sim$.

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ акко } \mu\left(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\}\right) = 1.$$

Релација $\sim$ је релација еквиваленције. Ознака $(x_n) \sim (y_n)$ често се чита „(x_n) је једнако (y_n) скоро свуда“. Једнакост међу хиперреалним бројевима зависи од релације $\sim$, односно мере μ:

$$\langle x_n \rangle = \langle y_n \rangle \text{ акко } (x_n) \sim (y_n) \text{ акко } \mu\left(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\}\right) = 1.$$

На пример, $\langle 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots \rangle = \langle 99, 98, 97, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots \rangle$.

Ако овако дефинишемо изједначавање низова, проблем делитеља нуле нестаје. Из $\langle x_n\rangle \odot \langle y_n\rangle = \langle 0,0,\ldots\rangle$, тј. $\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \cdot y_n = 0\}) = 1$, и $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \cdot y_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid y_n = 0\}$ следи да један од скупова $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0\}$ или $\{n \in \mathbb{N} \mid y_n = 0\}$ има меру 1, па је $\langle x_n\rangle = \langle 0,0,\ldots\rangle$ или је $\langle y_n\rangle = \langle 0,0,\ldots\rangle$. Дакле, ако је производ два хиперреална броја једнак нули, онда је бар један од њих нула.

Може се показати да је структура $({}^*\mathbb{R}, \oplus, \odot, \ominus, \langle 0,0,\ldots\rangle, \langle 1,1,\ldots\rangle)$ поље. И више. Ако поредак на скупу ${}^*\mathbb{R}$ дефинишемо са:

$$\langle x_n\rangle \precsim \langle y_n\rangle \text{ акко } \mu(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leqslant y_n\}) = 1,$$

претходна структура са овом релацијом биће уређено поље.

Примера ради, доказаћемо да из $0 \prec x$ и $y \prec z$ следи $xy \prec xz$, за произвољне x, y, z из ${}^*\mathbb{R}$. Ако $x, y, z \in {}^*\mathbb{R}$, онда је за неке низове (x_n), (y_n), (z_n), $x = \langle x_n\rangle$, $y = \langle y_n\rangle$, $z = \langle z_n\rangle$. Нека је $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < x_n\}$ и $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid y_n < z_n\}$. Ако $n \in X \cap Y$, онда је $x_n y_n < x_n z_n$, па је $X \cap Y \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n y_n < x_n z_n\}$. Претпоставке $0 \prec x$ и $y \prec z$ су редом еквивалентне са $\mu(X) = 1$ и $\mu(Y) = 1$, па због особина мере μ следи да је $\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid x_n y_n < x_n z_n\}) = 1$, односно $xy \prec xz$.

Успешно проширење структуре реалних бројева нам омогућава да стандардне ознаке за операције $+$, $\cdot$, $-$ и реалцију $\leqslant$ користимо за означавање редом операција $\oplus$, $\odot$, $\ominus$ и релације $\precsim$ над хиперреалним бројевима, јер се ове последње примењене на реалне бројеве своде на претходне. При том, када у контексту хиперреалних бројева говоримо о неком реалном броју a подразумевамо заправо $\langle a, a, a, \ldots\rangle$.

Лако се види да је уређено поље над ${}^*\mathbb{R}$ право проширење уређеног поља реалних бројева, па као такво не може бити архимедско (видети теорему на страни 143). Дакле, међу хиперреалним бројевима има и оних који су инфинитезимале (и због којих смо и изводили ову конструкцију), али и бесконачно великих елемената. На пример, инфинитезимале у ${}^*\mathbb{R}$ су $\left\langle \frac{1}{n}\right\rangle$ и $\left\langle \frac{1}{n^2}\right\rangle$. Ако је $\varepsilon = \left\langle \frac{1}{n}\right\rangle$, тада је $\varepsilon < a$, за сваки позитиван реалан број a ($\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\rangle < \langle a, a, a, \ldots, a, \ldots\rangle$, јер је $\mu\left(\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < a\}\right) = 1$, будући да је $\frac{1}{n} < a$ за све n осим за њих коначно много). Слично је, $\varepsilon^2 < a$ ($\varepsilon^2 = \left\langle \frac{1}{n^2}\right\rangle$) за сваки позитиван реалан број a. Иако је очигледно, наглашавамо да је $\varepsilon \neq \varepsilon^2$ ($\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n^2}$ за свако n веће од 1). Пример бесконачно великог хиперреалног броја је $\frac{1}{\varepsilon}$, јер је $\frac{1}{\varepsilon} > a$ ($\langle 1, 2, \ldots, n, \ldots\rangle > \langle a, a, a, \ldots\rangle$), за сваки реалан број a.

Fin6 индуктивне дефиниције свих примитивно рекурзивних функција:
$x + 0 = x, \quad x + S(y) = S(x + y),$
$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x,$
$\exp_2(0) = S(0), \quad \exp_2(S(x)) = 2 \cdot \exp_2(x), \qquad [\exp_2(x) = 2^x]$
$\vdots$

Није тешко приметити да сваки коначан подскуп теорије **Fin** има модел над доменом $\mathbf{n} = \{0, 1, \dots, n\}$ за неки (довољно велики) природан број n:
$0^{\mathbf{n}} = 0, S^{\mathbf{n}}(k) = \begin{cases} k+1, & k < n, \\ n, & k = n, \end{cases}, 0 <^{\mathbf{n}} 1 <^{\mathbf{n}} \dots <^{\mathbf{n}} n, \omega_p^{\mathbf{n}} = n (p \in \mathbb{Q}), \dots$
Конзистентност теорије **Fin** је доказива у Пеановој аритметици првог реда.

Константе ω_p је немогуће јасно „видети“: ако је $\mathbf{Fin} \vdash \varphi(\omega_{p_1}, \dots, \omega_{p_n})$, при чему је $p_1 < \dots < p_n$ и φ не садржи друге симболе константи ω_p, онда је $\mathbf{Fin} \vdash \varphi(\omega_{q_1}, \dots, \omega_{q_n})$ за произвољан растући низ рационалних бројева $q_1 < \dots < q_n$.

Обогаћивање теорије **Fin** јачим аксиомама (од аксиоме 4) било би слично проширивању теорије **ZFC** аксиомама о великим кардиналима.

Да бисмо могли да изводимо уобичајене скуповне конструкције, у **Fin** дефинишемо фрагмент структуре $(V, \in)$ (*Комбинаторни универзум*, страна 178). Користићемо већ уведену интерпретацију „припадања“ (уместо $x \epsilon y$ овога пута ћемо писати $x \in y$)

$$x \in y \Leftrightarrow \exists z \exists t (y = z \cdot 2^{S(x)} + 2^x + t \wedge t < 2^x).$$

Теорема. 1. За сваку формулу φ и сваки рационалан број p,

$$\mathbf{Fin} \vdash \exists x \forall y (y \in x \Leftrightarrow y < \omega_p \wedge \varphi).$$

2. $\mathbf{Fin} \vdash x < \omega_p \Rightarrow \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \forall t (t \in z \Rightarrow t \in x))$ (при чему је уобичајено да се формула $\forall t (t \in z \Rightarrow t \in x)$ краће записује $z \subseteq x$).

Претходна теорема и њој сличне нам омогућавају да дефинишемо уобичајене дефиниционе екстензије термима $\{x \mid x < \omega_p \wedge \varphi\}$ и да изводимо уобичајене конструкције уређених парова, функција, негативних целих бројева, скупа разломака $\pm\dfrac{x}{y}$, где је $y \neq 0, x, y < \omega_p$, и аритметичких операција и релација међу њима итд.

Слова a, b, c користићемо за означавање разломака, а k, m, n за означавање целих бројева уколико другачије није речено.

Дефиниција. За произвољне рационалне бројеве p и q, $p < q$,

(i) $\mathbb{Q}_p = \left\{\dfrac{k}{\omega_p!} \mid |k| \leqslant (\omega_p!)^2\right\}$;

(ii) $\mathbb{Z}_p = \{k \mid |k| \leqslant \omega_p!\}$;

(iii) $\varepsilon_p = \dfrac{1}{\omega_p}$;

(iv) $a =_p b \Leftrightarrow |a - b| < \varepsilon_p$;

(v) функција $f : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_q$ је tu-нормална, при чему је $t < u \leqslant p$, ако је $f(\mathbb{Q}_t^n) \subseteq \mathbb{Q}_u$

Што је p веће, скуп $\mathbb{Q}_p$ представља бољу апроксимацију реалне праве. Са практичног становишта, сваки $\mathbb{Q}_p$ је довољно богат. Наравно, у овој теорији је $\sup = \max$ и $\inf = \min$. Важно је приметити и да из $p < q$ следи да је $\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbb{Q}_q$.

Релација $=_p$ је рефлексивна и симетрична, али није транзитивна. Међутим, ако је $p \geqslant q > t$ тада је

$$a =_p b \wedge b =_q c \Rightarrow a =_t c,$$

јер је $\varepsilon_p + \varepsilon_q < \varepsilon_t$. Дакле, током доказа индекс p у релацијама $=_p$ ће опадати што нема никаквог утицаја на нумеричке процене.

Ако је $f : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_q$ рационална функција са коефицијентима и експонентима у $\mathbb{Q}_t$ и $n \in \mathbb{Q}_t$, при чему је $t < u \leqslant p$, онда је она tu-нормална.

Лема. Нека је $s < r$. Ако је $ab =_r 0$, онда је $a =_s 0$ или $b =_s 0$.

Доказ. Ако би било $|a| \geqslant \varepsilon_s$ и $|b| \geqslant \varepsilon_s$, имали бисмо да је $|ab| \geqslant \varepsilon_s^2 > \varepsilon_r$, што је супротно претпоставци. □

Индекси $p, q, r, \ldots$ означавају неке рационалне бројеве и све дефиниције и теореме које следе су заправо схеме дефиниција и схеме теорема.

Дефиниција. Нека је $s < r < p$, $s < q$ и $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_q$.

1. Функција f је rs-непрекидна, ако је за све a, b из $\mathbb{Q}_p$ тачна импликација

$$a =_r b \Rightarrow f(a) =_s f(b).$$

2. Функција f је rs-диференцијабилна, ако из $0 \neq h_1 =_r 0$ и $0 \neq h_2 =_r 0$ следи

$$\frac{f(a + h_1) - f(a)}{h_1} =_s \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2},$$

за кад год су a, $a + h_1$ и $a + h_2$ у $\mathbb{Q}_p$.

Природно се дефинише rs-непрекидност и rs-диференцијабилност функција на интервалима скупа $\mathbb{Q}_p$: $[a,b)_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid a \leqslant x < b\}$, $(a,b]_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid a < x \leqslant b\}$, $(a,b)_p = (a,b]_p \cap [a,b)_p$, $[a,b]_p = (a,b]_p \cup [a,b)_p$.

Уводимо и следеће ознаке. Ако $x \in \mathbb{Q}_p$ и $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_q$, онда је

$$x^+ = x + \frac{1}{\omega_p!},\ x < \omega_p!,\ (\omega_p!)^+ = \omega_p!,$$

$$x^- = x - \frac{1}{\omega_p!},\ x > -\omega_p!,\ (-\omega_p!)^- = -\omega_p!,$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_p!(f(x^+) - f(x)) \text{ и } \int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\omega_p!} \sum_{x \in [a,b)_p} f(x).$$

Теорема. Нека је $s < r < p$ и $t < r < q$. Уколико је функција $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_q$ rs-диференцијабилна и $f'(x) < \omega_t$, тада је ова функција rt-непрекидна.

Доказ. Из $a =_r b$, $a \neq b$, због rs-диференцијабилности, следи да је

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} =_s f'(x).$$

Дакле, $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon_r(|f'(x)| + \varepsilon_s) < 2\varepsilon_r\omega_t < \varepsilon_t$. $\square$

Теорема. Нека је $s < r < p$ и $r < q$. Ако је функција $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_q$ rs-непрекидна, онда је функција $x \mapsto \int\limits_a^x f(y)dy$ rs-диференцијабилна и важи

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(y)dy = f(x).$$

Скица доказа. Ако је $x =_r y$ и $x > y \geqslant a$, тада је

$$\frac{1}{x - y}\left(\int\limits_a^x f(z)dz - \int\limits_a^y f(z)dz\right) = \frac{1}{\omega_p!(x - y)} \sum_{z \in [x,y)_p} f(z) =_s f(x). \quad \square$$

МАЛО ДРУГАЧИЈА МАТЕМАТИКА

„Конструисан сам, дакле постојим"

Док је теорија скупова убрзо након свог настанка постизала енормну популарност међу математичарима[44] било је и оних који су критиковали како саму теорију тако и математику која је настајала на њеним темељима. Најкритикованије је било третирање актуелне бесконачности као објекта који је подложан математичким истраживањима. Нека бесконачна колекција постала је „ствар по себи" која може да послужи као елемент неке друге колекције. Појам броја је проширен са подручја коначног на бесконачно развијањем теорије *трансфинитних* кардиналних и ординалних бројева над којима је извођење операција подразумевало операције са бесконачним скуповима. Канторов став је био да док год су тврђења граматички коректна а њихови докази логички сагласни, она имају концептуални значај, чак и ако одударају од наше основне интуиције о коначним колекцијама.

Кронекер, творац чувене изреке „Бог је створио природне бројеве, а људи све остало", одбацивао је велики број појмова заснованих на бесконачним скуповима. Он је сматрао да логичка коректност теорија не имплицира постојање објеката које оне описују. Заправо, објекти су, сматрао је Кронекер, лишени било каквог значаја ако се не могу „стварно произвести". Тако, свака дефиниција мора експлицитно да да̂ начин на који се конструише дефинисани објекат и то коришћењем само објеката за које се већ зна да постоје. Овакав став имплицира, на пример, одбацивање свих реалних бројева за које не постоји алгоритамски поступак генерисања његових цифара.

[44]Давид Хилберт: „Нико нас неће истерати из раја који нам је Кантор створио."

Пример 1. Број π је легитимно конструисан реалан број јер постоји поступак којим се генеришу његове цифре.

Нека је $f(0) = 3$ и за n веће од 0 нека је

$$f(n) = n\text{-та цифра иза зареза у децималном развоју броја } \pi.$$

Поступак за израчунавање вредности $f(n)$, за задато n ($f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 1$, $f(4) = 5, \dots$) нам може дати следећи бесконачан ред

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{12}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots\right) + \\
&\quad + \frac{14}{25}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{50}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{50}\right)^2 + \dots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!2^n)^2}{(2n+1)!}\left(\frac{12}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{14}{25}\left(\frac{1}{50}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n.
\end{aligned}$$

Рационални бројеви p_k, $p_k = \sum\limits_{n=0}^{k} s_n$, добре су апроксимације броја π, будући да се могу доказати неједнакости $p_k < \pi < p_k + \frac{1}{10^k}$.

Поступак за израчунавање вредности $f(n)$, за задато n је: „Нађи први m такав да је $m \geqslant n + 1$ и да у децималном развоју броја p_m

$$p_m = c_0, c_1 c_2 \cdots c_n c_{n+1} \cdots c_m \cdots$$

нису све цифре $c_{n+1}, \dots, c_m$ једнаке 9. (Овакво m постоји јер би се у супротном децимални развој броја π завршавао низом деветки па би био рационалан.) Затим, стави да је $f(n) = c_n$.“.

Поступак је исправан, јер ако је $c_\ell \neq 9$, $n < \ell \leqslant m$, онда је

$$p_m < \pi < p_m + \frac{1}{10^m} < p_m + \frac{1}{10^\ell},$$

па је $c_0, c_1 \cdots c_n \cdots c_m \cdots < \pi < c_0, c_1 \cdots c_n \cdots (c_m + 1) \cdots$, одакле се види да је n-та цифра иза зареза у децималном развоју броја π заиста једнака c_n.

Према Черчовој тези функција f је израчунљива. $\triangle$

Сличне ставове је заступао и Поенкаре. Реагујући на парадоксе у теорији скупова, специјално на Раселов парадокс, он је сматрао да проблеми проистичу из употребе „самоуказујућих“ дефиниција – дефиниција које одређују неки објекат X помоћу објеката чије постојање зависи од постојања објекта X. Према Поенкареу, овакве дефиниције су недопустиве и, специјално, скуп није одређен док год није одређен сваки његов елемент. Конструктивистички ставови у погледима Кронекера и Поенкареа нашли су прави одраз у филозофији интуиционизма.

Интуиционизам

Оцем интуиционизма сматра се холандски математичар Брауер. Он не само да је одбацио неконструктивне аргументе и бесконачне колекције као „ствари за себе“ већ је отишао корак даље одбацујући и традиционалну логику као „правог“ представника математичког резоновања. Имајући у виду историју логике, Брауер је закључио да су традиционални логички закони настали апстракцијом структура математичких аргумантација из времена када су се оне односиле на свет коначног. Добијајући a priori независан статус, ови логички принципи су, без икаквих ограничења, примењени на све теорије укључујући и теорије бесконачних скупова. По Брауеру, највећи проблем је тај што је савремена математика базирана на принципима који су ваљани на много ужем домену проучавања.

Да бисмо добили право математичко знање и открили које су методе резоновања коректне, морамо се, према Брауеру, вратити оригиналном извору математике. Брауеров став је да се овај извор налази у нашој примарној интуицији о математичким објектима. За њега, математика је самостална и самодовољна активност независна од језика. Суштина ове активности лежи у менталном делању које изводи математичар, тј. у менталним конструкцијама интуитивних система објеката.

Језик је секундаран и служи једино да би се комуницирало о математичком разумевању. Он се појављује формирањем вербалних паралела математичком мишљењу. Тада се језик анализира и одатле се развијају формални језици и аксиоматски системи. Тако, логика анализира језичке структуре које су паралелне математичком мишљењу. Ни на какву језичку активност не може се гледати као на део саме математике. Она има практичну функцију у описивању и комуникацији, али никакву при извођењу менталних конструкција. Суштински садржај математике је интуитивни, никако формални. Логичке законитости су секундарне у односу на *математичке (менталне) конструкције*[45]. Логичке законитости су изведене апстракцијом односа на које у математици наилазимо при поменутим конструкцијама. То су, дакле, чињенице (констатације) о неким околностима које се појављују при математичким конструкцијама, а не неки примарни и апсолутни принципи који имају опште

[45]Читава математика је производ менталних конструкција; бројеви, геометријски објекти (тачке, праве, . . .), докази и тако даље – све су то менталне конструкције.

важење. Математички искази описују нешто чије постојање зависи од људског ума, нешто што тај ум конструише, при чему се претпоставља да људски ум може конструисати само нешто коначно. Тако је за интуиционисте егзистенција неког математичког објекта еквивалентна познавању методе којом се тај објекат може (у мислима) конструисати[46].

Одбацујући класичну логику, па тиме и велики део класичне математике, Брауер је изградио сопствену позитивну и снажну филозофију.

Основно убеђење је да људски ум поседује интуицију природног броја и да на њој, ефективним (алгоритамским) и експлицитним менталним поступцима гради све остале математичке објекте. Примерима ћемо илустровати интуиционистичку математику.

ПРИМЕР 2. Упоредимо следеће две дефиниције два природна броја:
(I) нека је k највећи прост број такав да је $k-1$ такође прост број, или је $k=1$ уколико не постоји највећи прост број чији је претходник такође прост број;
(II) нека је ℓ највећи прост број такав да је $\ell-2$ такође прост број, или је $\ell=1$ уколико не постоји највећи прост број такав да је претходник његовог претходника такође прост број.

Дефиниција (I) је потпуно прихватљива за интуиционисте, јер се k може заиста и одредити, $k=3$, док дефиниција (II) није прихватљива будући да не поседујемо (засада) метод за експлицитно одређивање броја ℓ. Тренутно нам није познато да ли је низ парова простих бројева близанаца $(p, p+2)$ коначан или није. △

Закон искључења трећег није прихватљив за интуиционисте!

ПРИМЕР 3. Размотримо следећи доказ тврђења: „*Постоје ирационални бројеви a и b такви да је a^b рационалан број.*“.

„Ако је број $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационалан, онда ирационални бројеви a и b, за које је $a=b=\sqrt{2}$, задовољавају тврђење. Ако $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ није рационалан број, онда задати услов задовољавају бројеви a и b такви да је $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b=\sqrt{2}$, јер је

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

тј. a^b је рационалан број.“

[46] У интуиционизму, појам „(експлицитна) конструкција“ није увек био сасвим јасно дефинисан, због чега је он можда и највише критикован. За решавање овог проблема може се искористити класа израчунљивих функција.

Овакав доказ није прихватљив за интуиционисте. Иако су у наведеном доказу размотрена оба могућа случаја, не зна се који је од њих истинит. Заправо, *закон искључења трећег*, $\varphi \vee \neg\varphi$ (tertium non datur), није прихватљив у интуиционистичкој математици. $\triangle$

Тврђење облика $\varphi \vee \neg\varphi$ захтева познавање опште методе за решавање сваког проблема, тј. општи метод који за свако тврђење φ обезбеђује или потврђивање за φ или за $\neg\varphi$. Како не поседујемо такав метод, немамо права ни да се позивамо на овај закон.

Закон двојне негације није прихватљив за интуиционисте!

ПРИМЕР 4. (**Брауер**) Доказ да „*не може да не важи неко својство*“ не значи да је то својство доказано.

Започнимо са исписивањем децималног развоја броја π (по поступку описаном у примеру 1, на страни 234), $\pi = 3,14159\cdots$, и децималног записа броја ρ формираног по следећем поступку: након сваке записане цифре иза зареза у децималном развоју броја π, запису броја ρ дописујемо по једну тројку, прекидајући дописивање када се низ цифара 0123456789 појави у запису броја π, под претпоставком[47] да *не знамо да ли ће се икада низ* 0123456789 *појавити у децималном развоју броја* π. Ако је цифра 9 низа 0123456789 на k-том месту иза зареза у децималном развоју броја π, онда је $\rho = \dfrac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$. Означимо са φ реченицу „*ρ је рационалан број*“. Класично, φ је тачна реченица, јер је ρ једнак једном од бројева $\dfrac{1}{3}$, $0,3$, $0,33$, $0,333$, ... Интуиционистички φ се интерпретира на следећи начин: „*Постоји конструкција целих бројева m и n таквих да је $\rho = \dfrac{m}{n}$*“, односно, имајући у виду дефиницију броја ρ: „*Постоји алгоритам (поступак) којим је могуће утврдити појављује ли се низ цифара* 0123456789 *у развоју броја π и на ком месту је у том развоју цифра 9 датог низа*“. Ако претпоставимо: „*немогуће је да постоји поменута конструкција целих бројева* ...“, имаћемо „*немогуће је да постоји поменути алгоритам* ...“, односно не може бити $\rho = \dfrac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$ за неко k, па је $\rho = \dfrac{1}{3}$, супротно почетној претпоставци. Дакле, *не можемо тврдити да не постоји конструкција целих бројева m и n таквих да је $\rho = \dfrac{m}{n}$*. Добијеним закључком се заправо тврди да важи $\neg\neg\varphi$.

[47] Уколико је неком читаоцу познато да ли се низ цифара 0123456789 појављује у запису броја π, нека одабере неки други низ $c_1 c_2 \ldots c_m$ цифара, произвољне дужине, за који не зна има ли га у развоју броја π; могућност избора је неограничена.

Можемо ли интуиционистички тврдити φ? Не! Уколико бисмо тврдили φ, то би значило да можемо ефективно одредити целе бројеве m и n тако да је $\rho = \frac{m}{n}$, тј. да можемо утврдити има ли низа 0123456789 у развоју броја π или показати да се овај низ не појављује.

Дакле, не можемо тврдити да $\neg\neg\varphi \to \varphi$. Овакав начин размишљања неминовно нас доводи до једне „строжије" логике од оне (класичне) која се користи у математичкој пракси. $\triangle$

Иако се одбацује $\neg\neg\varphi \to \varphi$, прихвата се $\varphi \to \neg\neg\varphi$.

Како интуиционисти интерпретирају логичке везнике?

Једна од главних разлика између класичне и интуиционистичке математике је у схватању *негације*. Интуиционисти сматрају да се класичној математици реч ***не*** често злоупотребљава, те да се недопустиво меша *негација „de jure"* и *негација „de facto"*. Прва, јача негација „de jure" је једина прихватљива у математици, и као таква може се назвати *математичком негацијом*. Њу изражавамо изразима као што су: *„немогуће је да ... "*, *„не може бити да ... "*, итд. Негација „de facto", којом пре свега изражавамо само тренутно стање наших могућности иразима: *„немамо права да тврдимо да ... "*, *„нико не зна да је ... "* итд, у супротности је са принципом конструктивности и не може се користити у формулацији математичких тврђења.

Како свако тврђење φ интуиционистичке математике може (и мора) бити исказано (исказиво) у облику

Извршио сам менталну конструкцију Φ,

његова математичка негација $\neg\varphi$ је

Извршио сам менталну конструкцију Ψ која изводи контрадикцију из претпоставке да је конструкција Φ доведена до краја,

док реченица (φ негирана негацијом „de facto")

Немам (не умем да изведем) менталну конструкцију Φ

није математичко тврђење.

Интерпретација осталих логичких везника $\wedge$, $\vee$ и $\Rightarrow$ је природна:

- можемо тврдити $\varphi \wedge \psi$ акко и φ и ψ могу бити потврђена, тј. поседујемо одговарајуће менталне конструкције Φ и Ψ које потврђују оба тврђења φ и ψ;

- можемо тврдити $\varphi \vee \psi$ акко бар једна од реченица φ и ψ може бити потврђена;

- можемо тврдити $\varphi \Rightarrow \psi$ акко имамо конструкцију Θ коју можемо надовезати на конструкцију Φ за φ (за коју се не претпоставља да је извршена али ће можда некада бити) и тиме добити конструкцију Ψ која потврђује ψ.

Иако је главна разлика између класичне и интуиционистичке логике у својствима негације, ове логике се не поклапају ни у погледу формула које не садрже знак $\neg$. На пример, $(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi)$ је класична ваљана формула, док интуиционистичка логика одбацује ову формулу.

Такође, интуиционизам одбацује $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$, али прихвата $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$. У примеру 5 који следи (страна 241) оправдано је одбацивање последње формуле.

Реални бројеви у интуиционизму

Ако занемаримо филозофске ставове, интуиционистичка аритметика рационалних бројева је идентична класичној. Међутим, када је реч о реалним бројевима, сасвим је другачије. Реални бројеви су само они за које постоји алгоритам конструисања цифара, па по интуиционистима, реалних бројева има само пребројиво много, колико и алгоритама. Као и у класичној математици, постоји више еквивалентних начина увођења реалних бројева. Један од њих је помоћу тзв. израчунљивих Кошијевих низова. *Низ рационалних бројева* (a_n) *је израчунљив Кошијев низ ако за сваки природан број* k *можемо ефективно одредити природан број* n $(n = n(k))$ *такав да је* $|a_{n+p} - a_n| < \dfrac{1}{k}$ *за сваки природан број* p, односно *ако постоји израчунљива функција* $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *таква да је за све природне бројеве* k *и* p *испуњена неједнакост* $|a_{n(k)+p} - a_{n(k)}| < \dfrac{1}{k}$. На пример, низ $a_n = 2^{-n}$ је израчунљив Кошијев низ. Сваки израчунљив Кошијев низ рационалних бројева називаћемо *генератором реалног броја.*

Два генератора реалних бројева $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ *подударају* су, у ознаци $a = b$, ако за свако k можемо *ефективно* одредити природан број n $(n = n(k))$ такав да је $|a_{n+p} - b_{n+p}| < \dfrac{1}{k}$ за свако p. Није тешко показати да је релација „подударати се“ релација еквиваленције међу генераторима реалних бројева. Нећемо улазити у детаље дефиниције реалног броја и избећи ћемо је речима: *реалан број је скуп генератора који се међусобом подударају*.

Ако имамо у виду природу интуиционистичке математичке негације, не изненађује засебна дефиниција релације *неједнакости*, или боље и прецизније речено, *разликовања* (генератора) реалних бројева.

Два генератора реалних бројева $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ *разликују* се, у ознаци $a\#b$, ако можемо *ефективно* одредити природне бројеве k и n такве да је $|a_{n+p} - b_{n+p}| > \dfrac{1}{k}$ за свако p.

Очигледно, из $a\#b$ следи $\neg(a = b)$, тј. ако се a и b разликују онда се они не могу подударати. Међутим, ако подударност генератора реалних бројева a и b води у контрадикцију, то још увек не значи да a и b можемо разликовати, тј. из $\neg(a = b)$ *не следи* $a\#b$. Другим речима, услов $a\#b$ је јачи од $\neg(a = b)$; $a\#b$ захтева ефективно одређивање бројева k и n, док $\neg(a = b)$ тврдимо уколико имамо доказ контрадикције из $a = b$. Уместо $\neg(a = b)$ писаћемо и $a \neq b$.

Није тешко показати следеће особине релације $\#$:

- ако је $a\#b$, онда је $b\#a$;
- ако је $a\#b$ и $a = a'$, онда је $a'\#b$;
- ако је $a\#b$, онда је $a\#c$ или $b\#c$ за сваки генератор реалног броја c;
- ако је $\neg(a\#b)$, онда је $a = b$.

Докажимо последње тврђење. Нека је k неки природан број. Одредимо природан број n такав да је $|a_{n+p} - a_n| < \dfrac{1}{4k}$ и $|b_{n+p} - b_n| < \dfrac{1}{4k}$ за сваки p, при чему је $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$. Ако би било $|a_n - b_n| \geqslant \dfrac{1}{k}$, имали бисмо да је $|a_{n+p} - b_{n+p}| \geqslant \dfrac{1}{2k}$ за сваки p, односно да се за дато k може одредити n тако да последња неједнакост важи за све p, те би било $a\#b$, што је супротно претпоставци. Дакле, $|a_n - b_n| < \dfrac{1}{k}$. Из неједнакости $|a_{n+p} - b_{n+p}| \leqslant |a_{n+p} - a_n| + |b_{n+p} - b_n| + |a_n - b_n| < \dfrac{2}{k}$, добијамо да је $a = b$.

Са генераторима можемо изводити уобичајене операције. Тако, ако су $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ генаратори реалних бројева, тада су низови $a + b = (a_n + b_n)$, $a \cdot b = (a_n \cdot b_n)$, $-a = (-a_n)$ и

$$a^{-1} = \begin{cases} a_n^{-1}, & a_n \neq 0, \\ 0, & a_n = 0, \end{cases} \quad \text{уколико је } a\#0$$

такође генаратори реалних бројева.[48]

Ево и најављеног примера који оправдава одбацивање формуле $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Пример 5. Нека је φ тврђење $a \neq b$, а ψ тврђење $a\#b$. Према доказаној особини релације $\#$, из $\neg\psi$ следи да је $a = b$, па тиме и $\neg\neg(a = b)$, односно $\neg\varphi$. Међутим, како смо већ приметили, из φ **не следи** ψ. $\triangle$

Конструктивисти, природно, интересовање за истинитост математичких исказа замењују интересовањем за њихову доказивост, те је интуиционизам довео до настанка многих модерних математичких теорија.

Интуиционистичка логика

Аренд Хејтинг је први формализовао интуиционистичко резоновање[49] и данас се често његова формализација сматра интуиционистичком логиком.

Наравно, интуиционисти формалне системе прихватају једино као несавршена, али и недовршена, оруђа за описивање и комуникацију. Они остављају отворену могућност да ће се за њихова интуитивна разматрања можда једнога дана открити нови, данас непознати, принципи резоновања. Према Хејтингу, „у принципу је немогуће поставити формални систем који би био еквивалентан интуиционистичкој математици … нити је могуће доказати математичком строгошћу да такав систем аксиома заиста обухвата све ваљане методе доказивања." Сам Брауер је истицао да је свака логика историјски условљена: *„Не постоји логика која би обавезивала све људе у свим временима."*

[48] За рационалне бројеве нема разлике између релација $\#$ и $\neq$.

[49] Чему се, иначе, Брауер жестоко противио, будући да је био велики противник логицизма.

Ипак, истраживања интуиционистичке логике су дала велики допринос у откривању веза између интуиционистичких принципа и тополошких концепата, рекурзивних функција и израчунљивости, модела теорије скупова (форсинг) и теорије категорија. Без обзира на то какав став имамо према конструктивистичким погледима на математичку реалност, Брауеров рад значајно је допринео разјашњењу и објашњењу начина људског мишљења.

Грубо речено, у интуиционистичкој логици могуће је спроводити само „директне“ доказе. На пример, у класичној математици дисјункцију $\varphi \vee \psi$ можемо доказати на два начина

– **директно**, применом правила $\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{l}}$ и $\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{d}}$, тј. доказујући φ или доказујући ψ, и

– **индиректно**, претпостављајући $\neg\varphi$ и $\neg\psi$ (тј. да φ и ψ нису тачни) доказати контрадикцију (применом правила $\perp_c$) или пак претпостављајући $\neg\varphi$ доказати ψ.

Слично, да бисмо доказали $\exists x\varphi$, доказ можемо спровести

– **директно**, употребом правила $\exists_{\mathrm{U}}$, тј. доказујући $\varphi(x := t)$, за неки експлицитно дат израз t, и

– **индиректно**, претпостављајући $\neg\exists x\varphi$, тј. да је $\neg\varphi(x := t)$ за сваки израз t, доказати контрадикцију.

Кључна претпоставка у индиректним доказима је да је неко тврђење или истинито или лажно, независно од степена нашег знања, те слободно можемо примењивати правило $\perp_{\mathrm{c}}$.

Једина правила извођења, уведена у поглављу *Математичка логика* (пододељак *Системи за дедукцију*, стр. 158), у којима се појављује $\perp$, јесу $\neg_{\mathrm{U}}$, $\neg_{\mathrm{E}}$ и $\perp_{\mathrm{c}}$. Еквиваленција (доказана на стр.160) $\neg\alpha \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \perp)$, у чијем доказу нисмо примењивали правило $\perp_{\mathrm{c}}$, омогућава нам да негацију $\neg\alpha$ уведемо помоћу формуле $\alpha \Rightarrow \perp$, и самим тим из списка основних правила елиминишемо $\neg_{\mathrm{U}}$ и $\neg_{\mathrm{E}}$, будући да су она последица правила $\Rightarrow_{\mathrm{U}}$ и $\Rightarrow_{\mathrm{E}}$. Међутим, то није случај и са правилом $\perp_{\mathrm{c}}$.

Правила извођења интуиционистичке логике су сва правила класичне логике, **осим** правила $\perp_{\mathrm{c}}$, које је замењено правилом:

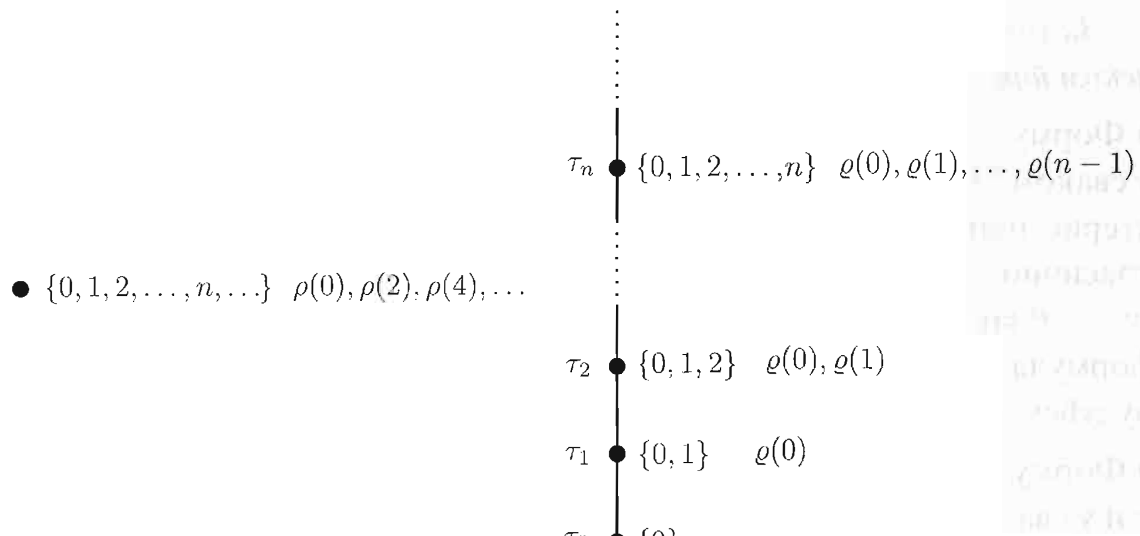
$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}\,(\perp_{\mathrm{i}}).$$

Са $T \vdash_i \varphi$ ћемо означавати чињеницу да се секвент $T \vdash \varphi$ може доказати само применом правила интуиционистичке логике. О доказивању у интуиционистичкој логици видети задатке на странама 305–309.

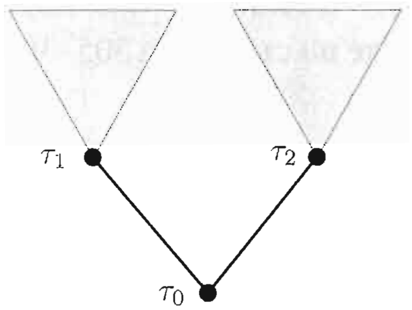
Крипкеови модели за интуционистичку логику

Значење формула у интуиционистичкој логици најчешће се даје у такозваним *Крипкеовим моделима*. Док су у моделима класичне логике објекти фиксирани и њихове особине се не мењају, Крипкеов модел се изграђује постепено, „нарастањем“ изабраног базног скупа и повећањем броја особина одговарајућих елемената у зависности од неког параметра који је најпогодније замишљати као *време*. Крипкеов модел можда највише подсећа на неког математичара који током времена шири свој универзум објеката, али и своје знање – да ли је неко тврђење истинито може му бити непознато у извесном тренутку, али да му, у неким будућим тренуцима, буде позната његова истинитост.

ПРИМЕР 6. Интерпретацију језика $\mathcal{L} = \{R\}$, који садржи само један унарни релацијски симбол, у класичној логици одређујемо фиксирањем неког скупа и избором једне унарне релације на том скупу. На пример, изаберемо ли скуп $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, и унарну релацију „*бити паран број*“, $\rho = \{0, 2, 4, \ldots\}$, изграђен је модел $(\mathbb{N}, \rho)$.



У интуиционистичкој логици, један Крипкеов модел језика $\mathcal{L}$ може изгледати као на претходној слици са десне стране. Скупови придружени тренуцима често се називају *световима* модела. △



Параметар, који ћемо и даље замишљати као временски тренутак, „варира“ скупом који не мора бити линеарно уређен. Наиме, у сваком тренутку може постојати више могућности које наступају. Наравно, сваки од могућих светова може имати своје истине! [Много је исказа који су тачни једино у земаљским условима (тј. тачни су на планети Земљи), док у неком другачијем свету могуће је да они нису истинити.]

Како одређујемо да ли је нека формула φ истинита у неком Крипкеовом моделу у тренутку τ? И овога пута, истинитост формуле зависи од истинитости њених потформула.

За логичке везнике $\wedge$ и $\vee$ и квантификатор $\exists$ истинитост зависи од „садашњег“ тренутка τ.

• Формула $\theta \wedge \phi$ је истинита у тренутку τ ако и само ако су обе формуле θ и ϕ истините у том тренутку.

• Формула $\theta \vee \phi$ је истинита у тренутку τ ако и само ако је бар једна од формула θ или ϕ истинита у том тренутку.

• Формула $\exists x \theta$ је истинита у тренутку τ ако и само ако постоји објекат a из света у том тренутку такав да је истинито $\theta[a]$.

За (преостале) *логичке везнике $\neg$ и $\Rightarrow$ и квантификатор $\forall$ истина у неком тренутку зависи и од „садашњости“ и од „будућности“.*

• Формула $\neg\theta$ је истинита у тренутку τ, ако и само ако у тренутку τ и у сваком будућем тренутку формула θ није истинита. Ово је и најкарактеристичнија разлика између класичне и интуиционистичке логике. У класичној логици, ако формула није неистинита, онда је она истинита (из $\neg\neg\theta$ закључујемо θ). У интуиционистичкој логици, у неком тренутку формула може да не буде неистинита нити да буде истинита, а да у неком будућем тренутку, на пример, буде (препозната као) неистинита.

• Формула $\theta \Rightarrow \phi$ је истинита у тренутку τ ако и само ако је у тренутку τ и у сваком будућем тренутку кад год је θ истинито такође је истинито и ϕ.

• Формула $\forall x \theta$ је истинита у тренутку τ ако и само ако је и у сваком будућем тренутку, за сваки објекат a који „постоји“ у том тренутку $\theta[a]$ истинито.

Чињеницу да је нека реченица φ истинита у неком Крипкеовом моделу у тренутку τ означавамо са $\tau \Vdash \varphi$. Често се каже да је *у тренутку τ реализована реченица* φ или, краће, да τ *форсира* φ. Реченица φ је реализована у читавом моделу уколико је реализована у том моделу у сваком тренутку.

НАСТАВАК ПРИМЕРА 6. Да ли је реченица $\forall x(R(x) \vee \neg R(x))$ – „очигледна истина" класичне логике – истинита у Крипкеовом моделу датом у претходном примеру? Није! Будући да за сваки природан број n, $\tau_n \not\Vdash R(n)$ и $\tau_n \not\Vdash \neg R(n)$, имамо да $\tau_n \not\Vdash R(n) \vee \neg R(n)$. Дакле, $\tau_n \not\Vdash \forall x(R(x) \vee \neg R(x))$, за сваки природан број n. Значи, у овом моделу важи $\neg \forall x(R(x) \vee \neg R(x))$. $\triangle$

Сходно претходним ознакама, $T \Vdash \varphi$ означава да је реченица φ реализована у сваком Крипкеовом моделу у коме су реализоване све реченице теорије T. И овога пута, синтакса и семантика се потпуно слажу.

ТЕОРЕМА. $T \vdash_i \varphi$ ако и само ако $T \Vdash \varphi$.

Правци интересовања и истраживања интуиционистичке логике слични су онима у класичној. У „истакнуте" теорије спада скуп реченица **PA**. Ако ознака **PA** $\vdash \varphi$, и даље, подразумева доказивост применом правила класичне логике, са **HA** $\vdash \varphi$ ћемо означити **PA** $\vdash_i \varphi$, тј. доказивост која подразумева примену искључиво правила интуиционистичке логике[50]. Нећемо улазити у детаљно описивање односа између **PA** $\vdash \varphi$ и **HA** $\vdash \varphi$, већ ћемо само истаћи у чему се огледа конструктивност интуиционистичке аритметике.

ТЕОРЕМА. **1.** **HA** $\vdash \theta \vee \phi$ ако и само ако **HA** $\vdash \theta$ или **HA** $\vdash \phi$.
2. **HA** $\vdash \exists x\theta$ ако и само ако постоји природан број n да **HA** $\vdash \theta[x := \overline{n}]$.

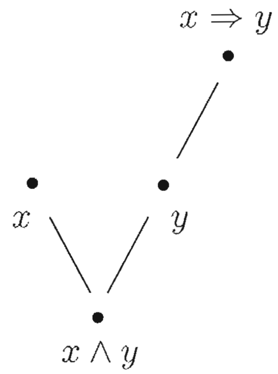
Тополошка семантика интуиционистичке логике

Стон и Тарски су први приметили да алгебра отворених скупова није Булова, већ да се понаша по правилима интуиционистичких логичких везника. Пошто је таква правила први формулисао, већ поменути интуиционста, Хејтинг, одговарајућа алгебра се назива Хејтинговом.

Хејтингова алгебра (или Брауерова мрежа) је ограничена (са 0 и 1) мрежа таква да за сваки пар елемената x, y постоји степен y^x, или како се чешће означава $x \Rightarrow y$, и важи: $z \leqslant (x \Rightarrow y)$ акко $z \wedge x \leqslant y$.

[50]**HA** – Хејтингова аритметика

Колекција свих отворених скупова $\mathcal{T}$, неког тополошког простора $(X,\mathcal{T})$, образује Хејтингову алгебру.



Заиста, $(\mathcal{T}, \subseteq)$ је ограничена (са $\emptyset$ и X) мрежа, а за свака два отворена скупа U и V, $U \Rightarrow V$ се дефинише као унија $\bigcup_i W_i$ свих отворених скупова W_i таквих да је $W_i \cap U \subseteq V$.

Теорема. За произвољне елементе x, y, z неке Хејтингове алгебре важи:

H1 $(x \Rightarrow x) = 1$,

H2 $x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y, y \wedge (x \Rightarrow y) = y$,

H3 $x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow z)$.

Обрнуто, ако бинарна операција $\Rightarrow$ неке ограничене (са 0 и 1) мреже L задовољава услове (**H1**) – (**H3**), онда је та мрежа Хејтингова алгебра са импликацијом $\Rightarrow$. Поменимо да се негација у Хејтингову алгебру уводи са: $\neg x \stackrel{\text{def}}{=} (x \Rightarrow 0)$.

Категорије

За разлику од теорије скупова, где пресликавања међу датим скуповима представљају такође скупове дефинисане помоћу датих, у теорији категорија пресликавања имају независан статус (у односу на објекте између којих су успостављена), те постоји већа слобода у одређивању (избору) шта тачно пресликавања могу да буду.

Теорија категорија или „рачун стрелица“ даје нов, у основи алгебарски формализам за изучавање многих математичких дисциплина, од алгебре и топологије, па све до математичке логике и рачунарства. Нарочито су значајне категорије затворене за важне математичке конструкције као што су Декартови производи, простори пресликавања, карактеристичне функције, ... Такве су многобројне, на први поглед сасвим различите, категорије које се појављују у геометрији, топологији, алгебарској геометрији, теорији група, теорији скупова. Већина ових категорија има више заједничких својства која се узимају за дефиницију најважнијих категорија – топоса.

Дефиниција. Категорија $\mathfrak{C}$ је одређена двема класама $\mathbf{Ob}(\mathfrak{C})$ и $\mathbf{Arr}(\mathfrak{C})$, класом $\mathfrak{C}$-објеката и класом $\mathfrak{C}$-стрелица (морфизама), при чему се узима да ове две класе задовољавају следеће услове.

- Свакој $\mathfrak{C}$-стрелици f придружен је пар $\mathfrak{C}$-објеката *домен* и *кодомен* од f, са ознакама $\mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{cod}(f)$, редом. Да бисмо изразили чињеницу да су X и Y редом домен и кодомен стрелице f, пишемо $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.
- Сваком $\mathfrak{C}$-објекту је придружена $\mathfrak{C}$-стрелица $1_X : X \to X$, тзв. *јединична* стрелица на X.
- Сваком пару $\mathfrak{C}$-стрелица f и g таквих да је $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$ придружена је стрелица $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{cod}(g)$, тзв. *композиција* од f и g. Дакле, ако $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, тада $g \circ f : X \to Z$; писаћемо и $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.
- Ако су дефинисане композиције парова $\mathfrak{C}$-стрелица f и g, односно g и h, тада је $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- За сваку $\mathfrak{C}$-стрелицу $f : X \to Y$ важи $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.

Префикс $\mathfrak{C}$- ћемо изостављати када год нема опасности од забуне, односно кад год је јасно о којој категорији $\mathfrak{C}$ је реч.

Пример 7. Објекти категорије $\mathbf{Sets}$ су скупови, а стрелице пресликавања скупова (композиција стрелица је уобичајено слагање пресликавања). $\triangle$

Пример 8. Тополошки простори и непрекидна пресликавања међу њима формирају једну категорију.

Такође, категорије образују и групе са хоморфизмима међу њима и векторски простори са линеарним пресликавањима. $\triangle$

Пример 9. Сваки уређен скуп $(P, \leqslant)$ може се посматрати као једна категорија: елементи скупа P су објекти са тачно по једном стрелицом из p у q ако и само ако је $p \leqslant q$. $\triangle$

ПРИМЕР 10. Сваку групу можемо посматрати као категорију. Наиме, категорија која одговара групи $(G, *)$ има само један објекат, означимо га са $\star$, док сваки елемент из G представља једну стрелицу $\star \to \star$, при чему се $*$ узима као композиција стрелица. $\triangle$

Својства исказана у задацима 13 и 14 (на страни 270), у теорији категорија користимо за дефиниције веома важних врста стрелица.

- Стрелица $f : X \to Y$ је *ињекција* (*мономорфизам*), у ознаци $X \rightarrowtail Y$, ако за сваки пар стрелица $g, h : Z \to X$, из $f \circ g = f \circ h$, следи $g = h$.

- Стрелица $f : X \to Y$ је *сирјекција* (*епиморфизам*), у ознаци $X \twoheadrightarrow Y$, ако за сваки пар стрелица $g, h : Y \to Z$, из $g \circ f = h \circ f$, следи $g = h$.

- Стрелица $f : X \to Y$ је *бијекција* (*изоморфизам*), у ознаци $X \cong Y$, ако постоји стрелица $g : Y \to X$, таква да је $f \circ g = 1_Y$ и $g \circ f = 1_X$.

Специјалну и веома значајну врсту скупова (објеката у категорији $\mathbf{Sets}$) представљају тзв. *синглтони* или једночлани скупови. Са становишта теорије категорија, значајно је истаћи следеће својство синглтона: *ако је* $\mathbf{1}$ *синглтон, тада за сваки скуп* X *постоји тачно једно пресликавање скупа* X *у* $\mathbf{1}$.

ДЕФИНИЦИЈА. Објекат K категорије $\mathfrak{C}$ је *терминални* (крајњи) *објекат* у $\mathfrak{C}$, ако за сваки објекат X постоји **тачно једна** стрелица $X \to K$.

ТЕОРЕМА. Ако су K_1 и K_2 терминални објекти неке категорије $\mathfrak{C}$, тада постоји тачно једна стрелица $K_1 \to K_2$ која је изоморфизам.

Доказ. Из дефиниције терминалног објекта следи да постоји тачно по једна стрелица $f : K_1 \to K_2$ и $g : K_2 \to K_1$. Такође, 1_{K_1} је једина стрелица из K_1 у K_1, док је 1_{K_2} једина стрелица из K_2 у K_2. Дакле, композиција $K_1 \xrightarrow{f} K_2 \xrightarrow{g} K_1$, тј. $g \circ f : K_1 \to K_1$, мора бити једнака 1_{K_1}, а композиција $K_2 \xrightarrow{g} K_1 \xrightarrow{f} K_2$, тј. $f \circ g : K_2 \to K_2$, једнака 1_{K_2}. Из једнакости $g \circ f = 1_{K_1}$ и $f \circ g = 1_{K_2}$ следи да је f (као и g) изоморфизам. $\square$

Претходна теорема каже да су свака два терминална објекта у истој категорији изоморфна, и при томе између свака два постоји тачно један изоморфизам. Зато, често бирамо само један терминалан објекат, у категоријама које га имају, и означавамо га са $\mathbf{1}$. Ово ћемо често чинити и убудуће при извођењу других „*универзалних*“ конструкција.

Дефиниција. Нека је $\mathbf{1}$ терминалан објекат категорије $\mathfrak{C}$ и X било који објекат у $\mathfrak{C}$. Свака стрелица $\mathbf{1}\xrightarrow{x}X$ назива се *елеменӣ* (или тачка) објекта X. (Уколико је $\mathbf{1} = \{\text{Ја}\}$, онда $\mathbf{1}\xrightarrow{x}X$ може да значи и „*Ја сам изабрао (уочио) елеменӣ x објекӣа X*".)

Нарочито су значајне категорије у којима можемо изводити основне математичке конструкције. Једна од најзначајнијих је конструкција *(Декарӣовоӣ) ӣроизвода*.

Дефиниција. Објекат P је *ӣроизвод* објеката A_1 и A_2 уколико постоје стрелице $P\xrightarrow{\pi_1}A_1$ и $P\xrightarrow{\pi_2}A_2$ такве да за сваки објекат X и стрелице $X\xrightarrow{f_1}A_1$ и $X\xrightarrow{f_2}A_2$ постоји јединствена стрелица $X\xrightarrow{f}P$ да је $f_1 = \pi_1 \circ f$ и $f_2 = \pi_2 \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

Стрелице π_1 и π_2 називају се *ӣројекције* производа P. Како је стрелица f у претходној дефиницији јединствено одређена стрелицама f_1, f_2, често се означава са (f_1, f_2). Специјално, ако производ P објеката A_1 и A_2 постоји, тада за објекат P (по дефиницији, као и за било који други објекат X) и стрелице $P\xrightarrow{\pi_1}A_1$ и $P\xrightarrow{\pi_2}A_2$ постоји јединствена стрелица $(\pi_1, \pi_2) : P \to P$ таква да је $\pi_1 = \pi_1 \circ (\pi_1, \pi_2)$ и $\pi_2 = \pi_2 \circ (\pi_1, \pi_2)$. Будући да и за стрелицу $1_P : P \to P$ важе једнакости $\pi_1 = \pi_1 \circ 1_P$ и $\pi_2 = \pi_2 \circ 1_P$, закључујемо да је $(\pi_1, \pi_2) = 1_P$.

Може се показати да су, уколико постоје, сви производи два објекта међусобно изоморфни. Заиста, ако претпоставимо да су P и P' производи објеката A_1 и A_2, тада постоје стрелице $P\xrightarrow{\pi_1}A_1$ и $P\xrightarrow{\pi_2}A_2$, као и $P'\xrightarrow{\pi_1'}A_1$ и $P'\xrightarrow{\pi_2'}A_2$ са одговарајућим својствима. Тада, пошто је P производ, за објекат P' и стрелице $P'\xrightarrow{\pi_1'}A_1$ и $P'\xrightarrow{\pi_2'}A_2$ постоји јединствена стрелица $\pi' : P' \to P$, таква да је $\pi_1' = \pi_1 \circ \pi'$ и $\pi_2' = \pi_2 \circ \pi'$.

$$\begin{tikzcd}
& P' \arrow[dl, "\pi_1'"'] \arrow[d, shift right, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi_2'"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, shift right, "\pi"'] & A_2 \\
& P \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[u, "1_P"'] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Такође, и P' је производ, па за објекат P и стрелице $P\xrightarrow{\pi_1}A_1$ и $P\xrightarrow{\pi_2}A_2$ постоји јединствена стрелица $\pi : P \to P'$, таква да је $\pi_1 = \pi_1' \circ \pi$ и $\pi_2 = \pi_2' \circ \pi$. Из последње четири једнакости следи $\pi_1 \circ \pi' \circ \pi = \pi_1$ и $\pi_2 \circ \pi' \circ \pi = \pi_2$, као и $\pi_1' \circ \pi \circ \pi' = \pi_1'$ и $\pi_1' \circ \pi \circ \pi' = \pi_1'$. Дакле, закључујемо да је $\pi' \circ \pi = 1_P$ и $\pi \circ \pi' = 1_{P'}$, одакле следи да су π и π' бијекције, односно да су објекти P и P' изоморфни. Другим речима, производ два објекта, уколико постоји, јединствен је до на изоморфизам, што нам омогућава да изаберемо и посматрамо само један међу изоморфним производима обејката A_1 и A_2. Изабрани производ означавамо са $A_1 \times A_2$.

Од сада ћемо подразумевати, осим ако не нагласимо другачије, да све категорије о којима будемо говорили имају терминални објекат и да су затворене за производе, тј. да за свака два објекта из посматране категорије постоји објекат који је њихов производ.

Стрелице ка производу $A_1 \times A_2$ је једноставно описати у смислу да су све стрелице $X \to A_1 \times A_2$ строго одређене паром стрелица $X \to A_1$ и $X \to A_2$ те их можемо проучавати без формирања производа.

Сасвим је другачије са стрелицама чији је домен производ $A_1 \times A_2$. Наиме, стрелица $A_1 \times A_2 \to X$ се најчешће не може представити преко неких стрелица са доменима A_1 и A_2, будући да свака њена вредност зависи од својеврсне „интеракције" два аргумента.

Стрелице чији су домени производи неких објеката веома су значајне и често се појављују у математици. Најједноставнији примери оваквих стрелица су *бинарне операције*: свака стрелица $X \times X \to X$ је нека бинарна операција над објектом X. Такође, важан пример стрелица чији су домени производи представљају стрелице облика $X \times B \to X$, такозвана *дејства* објекта B на X.

Задржаћемо се на најопштијем случају; нека је $T \times X \xrightarrow{f} Y$. Приметимо, најпре, да сваки елемент $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ одређује једну стрелицу $T \xrightarrow{f(\cdot,x)} Y$, па f можемо посматрати као једну фамилију стрелица $T \to Y$ индексираних елементима објекта X. Заиста, сваки елемент $\mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ одређује једну (константну) стрелицу $\overline{x} : T \xrightarrow{!_T} \mathbf{1} \xrightarrow{x} X$ ($\overline{x} = !_T \circ x$) која дефинише стрелицу $f(\cdot, x) : T \to Y$, као композицију $T \xrightarrow{(1_T, \overline{x})} T \times X \xrightarrow{f} Y$. (Стрелица $!_T : T \to \mathbf{1}$ је јединствена стрелица из T у $\mathbf{1}$.)

У категорији $\mathbf{Sets}$ за све задате објекте (у овом случају скупове) T и Y постоји објекат (скуп) X довољно велики да постоји пресликавање $f : T \times X \to Y$ које параметризује (индексира) **сва** пресликавања скупа T у Y. [Свака стрелица из T у Y је облика $f(\cdot, x)$, за неко x из X.]

Чувени Канторов дијагонални аргумент каже да: *скуп T, у општем случају, није довољно велики да би параметризовао сва пресликавања из T у неки Y.*

Дијагонални аргумент

Наредне две теореме важе у свакој категорији која садржи терминални објекат и која је затворена за производе.

Теорема дијагонализације. Ако је Y објекат такав да постоји објекат T са довољно елемената да параметризује све стрелице из T у Y, неком стрелицом $T \times T \xrightarrow{f} Y$, тада Y има *својство фиксне тачке*, тј. за сваку стрелицу $Y \xrightarrow{g} Y$ постоји бар један елемент $\mathbf{1} \xrightarrow{y} Y$ такав да је $g \circ y = y$.

Доказ. Нека су дати Y, T, f и g онако како је то формулисано у теореми. Означимо са δ_T, тзв. *дијагонално пресликавање*, стрелицу $(1_T, 1_T) : T \to T \times T$. Нека је $h : T \to Y$ дефинисано са $h = g \circ f \circ \delta_T$.

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\ T \arrow[u, "\delta_T = (1_T, 1_T)"] \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd}$$

Тада за сваки елемент $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$ важи:

$$h \circ t = g \circ f \circ \delta_T \circ t. \tag{1}$$

Рецимо, због нотације на коју смо навикли, да претходну једнакост можемо записати и у облику $h(t) = g(f(t, t))$.

Из претпоставке да се све стрелице из T у Y могу параметризовати елементима из T, следи да је стрелица h једнака стрелици $f(\cdot, t_0) : T \to Y$ за неко $t_0 : \mathbf{1} \to T$, па је за свако $t : \mathbf{1} \to T$: $h \circ t = f(\cdot, t_0) \circ t$, тј. $h(t) = f(t, t_0)$.

Специјално, биће и $h \circ t_0 = f(\cdot, t_0) \circ t_0$, тј. $h(t_0) = f(t_0, t_0)$, па и (због једнакости (1)):

$$g \circ f \circ \delta_T \circ t_0 = f(\cdot, t_0) \circ t_0, \quad \text{тј.} \quad g(f(t_0, t_0)) = f(t_0, t_0).$$

Ако узмемо да је y_0 стрелица $f \circ \delta_T \circ t_0 : \mathbf{1} \to Y$, добићемо фиксну тачку стрелице g, јер је $g \circ y_0 = y_0$. $\square$

Иако је Канторов доказ познат као *дијагонални аргумент* због улоге дијагоналног пресликавања, улога пресликавања g у претходном доказу је такође веома значајна при конструкцији стрелице h из f. Ово се нарочито види уколико претходну теорему формулишемо у следећем облику.

Канторова контрапозитивна последица. Ако је Y објекат за који постоји бар једна стрелица $g : Y \to Y$ која нема фиксну тачку, тада за сваки објекат T и сваки „покушај“ $f : T \times T \to Y$ параметризације стрелица из T у Y, постоји бар једна стрелица $T \to Y$ која је ван одговарајуће фамилије, тј. није једнака некој стрелици $f(\cdot, t) : T \to Y$ ни за један елемент $t : \mathbf{1} \to T$.

У категорији скупова **Sets** постоји објекат (скуп) Y који нема одговарајуће својство фиксне тачке. То је најобичнији двочлани скуп, означимо га са $\mathbf{2}$; ако његове елементе назовемо „*тачно*“ и „*нетачно*“ тада је „*класична негација*“ стрелица без фиксне тачке.

$$\neg : \{\top, \bot\} \to \{\top, \bot\}, \qquad \neg : \begin{pmatrix} \top & \bot \\ \bot & \top \end{pmatrix}.$$

Применом Канторове теореме закључујемо да ниједно пресликавање $T \times T \to \mathbf{2}$ не може параметризовати сва пресликавања $T \to \mathbf{2}$. Ово се најчешће формулише у следећем облику: *за сваки скуп T, $T < \mathbf{2}^T$, где је $\mathbf{2}^T$ скуп који параметризује сва пресликавања $T \to \mathbf{2}$.*

Други важан пример оваквог објекта Y је, на пример, скуп природних бројева. Функција следбеника $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, нема фиксну тачку, па је $T < \mathbb{N}^T$, за сваки скуп T, при чему је $\mathbb{N}^T$ скуп за који постоји пресликавање $T \times \mathbb{N}^T \to \mathbb{N}$ које параметризује сва пресликавања $T \to \mathbb{N}$.

Као што смо већ видели у поглављу о теорији скупова, Кантор је извео закључак да за сваки бесконачан скуп T постоји низ

$$T < \mathbf{2}^T < 2^{\mathbf{2}^T} < 2^{2^{\mathbf{2}^T}} < \cdots$$

све „бесконачнијих и бесконачнијих“ скупова.

Канторова теорема дијагонализације је веома блиска и Геделовим теоремама непотпуности, с тим што је Гедел у извесном смислу „конструктивистички“ гледао на ствари:
(1) полазећи од неког формалног система (неког скупа формула и правила доказивања)
(2) разматрао је само она пресликавања која потпуно могу бити описана формулама и
(3) сматрао једнаким једино она пресликавања за која се у датом формалном систему може доказати еквивалентност формула којима су задата.

Овакво становиште доводи до категорија које су на неки начин сличне категорији **Sets**, али, у извесном смислу, и прилично различите. Наиме, као што ћемо касније видети, у већини категорија (релевантних) истинитосних вредности има више од две и све оне образују један објекат Ω те категорије. У „Геделовим категоријама" истинитосне вредности $\mathbf{1} \to \Omega$ су саме формуле.

На пример, нека су x и y формуле које именују елементе објекта (типа) X, φ формула која одређује неко својство елемената типа X, а u и v редом композиције $\varphi \circ x$ и $\varphi \circ y$ (у обичном говорном језику, x и y могу бити неке именице (субјекти), φ неки предикат, а u и v одговарајуће реченице).

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathbf{1} \arrow[ur, shift left, "x"] \arrow[ur, shift right, "y"'] \arrow[rr, shift left, "u"] \arrow[rr, shift right, "v"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

Уколико се у изабраном формалном систему не може доказати еквивалентност формула u и v, у категорији ће бити $u \neq v$; при том је могуће да се не може доказати да је u еквивалентно ни са *тачно* $: \mathbf{1} \to \Omega$ нити са *нетачно* $: \mathbf{1} \to \Omega$. Геделови резултати показују да је чест случај да формални системи допуштају четири и више нееквивалентних истинитосних вредности $\mathbf{1} \to \Omega$ у одговарајућим категоријама.

Како је повезана Канторова теорема дијагонализације са овим категоријама? Ако је T неки објекат који чине природни бројеви (или речи, формуле, докази, ...) често је могуће наћи пресликавање $T \times T \xrightarrow{f} \Omega$ које, у извесном смислу, описује (параметризује, индексира) сва *описива* својства $T \to \Omega$. То се постиже Геделовим кодирањем којим елементи објекта T добијају двоструку улогу: с једне стране они су имена „ствари" о којима причамо, а са друге стране представљају и имена за својства $T \to \Omega$. Тако, на пример,

$$\begin{tikzcd}
 & T \times T \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbf{1} \arrow[ur, "{(2,2)}"] \arrow[rr, "{f(2,2)}"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

$f(2,2)$ је реченица која каже да број 2 има својство $\lceil 2 \rceil$. Корисно је замислити да су сва својства (описива у неком датом формалном систему) набројана на неки одређен начин тако да можемо говорити о „својству $\lceil 2 \rceil$"; на пример,

$$\begin{array}{ll} \lceil 0 \rceil & x^2 = x \\ \lceil 1 \rceil & x^2 = 2x \\ \lceil 2 \rceil & x + 1 = 3 \\ \lceil 3 \rceil & x^3 = x^2 + x + 1 \\ \vdots & \end{array}$$

При оваквом набрајању можемо рећи да је $f(2,1) = f(2,2)$, јер је

$$f(2,1) = \lceil 1 \rceil(2) = „2^2 = 2 \cdot 2\text{“} = \textit{тачно}$$

и

$$f(2,2) = \lceil 2 \rceil(2) = „2 + 1 = 3\text{“} = \textit{тачно},$$

као и да је $f(2,0) = f(2,3)$, јер је

$$f(2,0) = \lceil 0 \rceil(2) = „2^2 = 2\text{“} = \textit{нетачно}$$

и

$$f(2,3) = \lceil 3 \rceil(2) = „2^3 = 2 \cdot 2 + 2 + 1\text{“} = \textit{нетачно}.$$

Међутим, на нашој листи се може наћи неко прилично компликовано својство, на пример, $\lceil 47 \rceil$ за које се у формалном систему не може доказати ни да 2 има нити да нема то својство. У том случају је $\mathbf{1} \xrightarrow{f(2,47)} \Omega$ елемент у Ω који је различит и од *тачно* и од *нетачно*.

Дакле, узимајући неко Геделово кодирање дефинишемо $T \times T \xrightarrow{f} \Omega$ тако да се свако својство $T \xrightarrow{\varphi} \Omega$ може представити неким $f(\cdot, x)$, при чему ће за свако $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$ бити

$$(G) \qquad \begin{array}{l} f(t,x) = \textit{тачно} \text{ ако и само ако је } \varphi(t) = \textit{тачно}, \\ f(t,x) = \textit{нетачно} \text{ ако и само ако је } \varphi(t) = \textit{нетачно}. \end{array}$$

Не можемо тврдити да је $f(\cdot, x) = \varphi$, јер је могуће $f(t,x) \neq \varphi(t)$ за оно t за које $f(t,x)$ или $\varphi(t)$ нису ни *тачно* ни *нетачно*. Заправо, Геделов резултат је да, у категоријама ове врсте, мора постојати реченица $\mathbf{1} \to \Omega$ за коју се не може доказати да је еквивалентна ни са *тачно* ни са *нетачно*.

У случају када је $\Omega = \{\textit{тачно}, \textit{нетачно}\}$, тада за свако $T \xrightarrow{\varphi} \Omega$, постоји име $\mathbf{1} \xrightarrow{x} T$, у смислу (G), да је $f(t,x) = \varphi(t)$ за свако $\mathbf{1} \xrightarrow{t} T$. Међутим, сада трпимо последице Канторове дијагоналне теореме, које су супротстављене чињеници да $\neg : \Omega \to \Omega$ *нема фиксну тачку*.

Универзалне конструкције

Многе опште дефиниције и конструкције у теорији категорија могу бити „дуализоване“ окретањем (заменом места домена и кодомена) стрелица и композиција које се у тој дефиницији појављују.

Тако појму терминалног објекта дуалан је појам иницијалног објекта.

Дефиниција. Објекат I категорије $\mathfrak{C}$ је *иницијални* (почетни) *објекат* у $\mathfrak{C}$, ако за сваки објекат X постоји **тачно једна** стрелица $I \to X$.

Може се показати да су иницијални објекти у свакој категорији, у којој постоје, међусобно изоморфни. Поступајући као у случају терминалног објекта и овога пута бирамо један који ћемо означити са $\mathbf{0}$. Приметимо, на пример, да је иницијални објекат у категорији $\mathbf{Sets}$ празан скуп $\emptyset$.

Дуалан појам појму производа јесте *копроизвод* или *сума*.

Дефиниција. Објекат S је *копроизвод* објеката A_1 и A_2 уколико постоје стрелице $A_1 \xrightarrow{j_1} S$ и $A_2 \xrightarrow{j_2} S$ такве да за сваки објекат X и стрелице $A_1 \xrightarrow{g_1} X$ и $A_2 \xrightarrow{g_2} X$ постоји јединствена стрелица $S \xrightarrow{g} X$ да је $g_1 = g \circ j_1$ и $g_2 = g \circ j_2$.

Као и у случају производа, једну од међусобно изоморфних сума објеката A_1 и A_2 означавамо са $A_1 + A_2$.

Као што се може наслутити из претходног одељка, веома важну конструкцију представља конструкција *степена*, тј. објекта којим је могуће параметризовати све стрелице $X \to Y$, за дате објекте X и Y. Дефинишимо најпре *производ стрелица*.

Дефиниција. Производ стрелица $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$ је јединствена стрелица $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ одређена једнакошћу $f_1 \times f_2 = (f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "f_1 \times f_2"] & \\
X_1 \arrow[d, "f_1"'] & & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "\pi_1'"] \arrow[r, "\pi_2'"'] & Y_2
\end{tikzcd}
$$

Дефиниција. За дате објекте T и Y (у категорији са производом) објекат E заједно за стрелицом $\mathrm{ev} : T \times E \to Y$ назива се *објекат стре-*

лица из T у Y са евалуацијом ev, ако за сваки објекат X и сваку стрелицу $f : T \times X \to Y$ постоји **јединствена** стрелица $\ulcorner f \urcorner : X \to E$ таква да је $f = \mathrm{ev} \circ (1_T \times \ulcorner f \urcorner)$.

$$\begin{tikzcd}
T \times X \arrow[r, "1_T \times \ulcorner f \urcorner"] \arrow[dr, "f"'] & T \times E \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

Уколико категорија има терминални објекат, тада за свака два елемента $\mathbf{1}\xrightarrow{t}T$ и $\mathbf{1}\xrightarrow{x}X$ важи $f \circ (t,x) = \mathrm{ev} \circ (1_T \times \ulcorner f \urcorner) \circ (t,x)$, или у другој нотацији $f(t,x) = \mathrm{ev}(t, \ulcorner f \urcorner(x))$. Приметимо и да је $\ulcorner \mathrm{ev} \urcorner = 1_E$.

Може се показати да уколико су E_1, ev_1 и E_2, ev_2 два објекта стрелица из T у Y са одговарајућим евалуацијама, тада постоји јединствен изоморфизам $f : E_1 \cong E_2$ који је сагласан са евалуацијама ev_1 и ev_2; за јединствени, до на изоморфизам, објекат E уводимо ознаку Y^T заједно са $T \times Y^T \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y$. Стрелица $\ulcorner f \urcorner$, јединствено одређена стрелицом f, назива се често *име за* f. Процес је инвертибилан. Ако је E објекат и $T \times E \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y$, свакој стрелици $X \xrightarrow{g} Y^T$ можемо придружити стрелицу $T \times X \xrightarrow{\widehat{g}} Y$ дефинисану композицијом $T \times X \xrightarrow{1_T \times g} T \times Y^T \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y$. Ова инвертибилност се често записује на следећи начин:

$$(E) \qquad \frac{X \to Y^T}{T \times X \to Y} \downarrow\uparrow,$$

при чему се хоризонтална линија интерпретира као *природан* процес који свакој стрелици типа назначеног изнад линије придружује једну стрелицу типа назначеног испод линије и одговарајући *природан* процес „одоздо нагоре“; природни процеси су придруживања: $g \overset{\downarrow}{\rightsquigarrow} \widehat{g}$ и $f \overset{\uparrow}{\rightsquigarrow} \ulcorner f \urcorner$. Краће, стрелице из X у Y^T „исто“ су што и стрелице из $T \times X$ у Y.

Слични „процеси“ постоје и за производе и за копроизводе. На пример, за производ

$$(P) \qquad \frac{X \to Y_1 \times Y_2}{X \to Y_1, X \to Y_2} \downarrow\uparrow,$$

природни процеси су:

$$\frac{X \xrightarrow{f} Y_1 \times Y_2}{X \xrightarrow{\pi_1 \circ f} Y_1, X \xrightarrow{\pi_2 \circ f} Y_2} \downarrow \quad \text{и} \quad \frac{X \xrightarrow{(f_1, f_2)} Y_1 \times Y_2}{X \xrightarrow{f_1} Y_1, X \xrightarrow{f_2} Y_2} \uparrow .$$

Инвертибилан процес за копроизводе записујемо овако:

$$(S) \qquad \frac{X_1 \to Y, X_2 \to Y}{X_1 + X_2 \to Y} \downarrow\uparrow .$$

У наредном примеру ћемо илустровати значај ових дијаграма.

ПРИМЕР 11. Нека је $\mathfrak{C}$ категорија затворена за производе, копроизводе и степене. Суштину доказа да је, на пример, $(Y_1 \times Y_2)^T \cong Y_1^T \times Y_2^T$ представља следеће „израчунавање“

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{X \to (Y_1 \times Y_2)^T}{T \times X \to Y_1 \times Y_2}(E)}{T \times X \to Y_1, T \times X \to Y_2}(P)}{\cfrac{X \to Y_1^T, X \to Y_2^T}{X \to Y_1^T \times Y_2^T}(P)}(E)$$

које нам даје

$$\frac{X \to (Y_1 \times Y_2)^T}{X \to Y_1^T \times Y_2^T} \downarrow\uparrow,$$

тј. кореспонденцију између стрелица $X \to (Y_1 \times Y_2)^T$ и стрелица $X \to Y_1^T \times Y_2^T$. Тако, стављајући најпре $(Y_1 \times Y_2)^T$ на место X, добијамо да стрелици $1_{(Y_1 \times Y_2)^T}$ одговара нека стрелица $f^* : (Y_1 \times Y_2)^T \to Y_1^T \times Y_2^T$. С друге стране, стваљајући $Y_1^T \times Y_2^T$ на место X, добијамо стрелицу $f_* : Y_1^T \times Y_2^T \to (Y_1 \times Y_2)^T$ која одговара $1_{Y_1^T \times Y_2^T}$. Остаје још да се покаже да су добијене стрелице једна другој инверзне, тј. да је $f^* \circ f_* = 1_{Y_1^T \times Y_2^T}$ и $f_* \circ f^* = 1_{(Y_1 \times Y_2)^T}$. $\triangle$

Најзад, позабавимо се и *йодобјекшима* датог објекта X у некој категорији и конструкцијом такозваног *йаршишивноī* објекта $\mathrm{P}(X)$.

У категорији **Sets** неки подскуп S од X се може описати на различите начине, *инклузионим йресликава ем* $i : S \rightarrowtail X$ или пак *карактеристичном функцијом* $\chi_S : X \to \mathbf{2}$, где је $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ двочлани скуп чије смо елементе већ често звали *шачно* (1) и *нешачно* (0). Ако је $\{\star\}$ неки синглтон и $\top : \{\star\} \to \mathbf{2}$, тако да је $\top(\star) = 1$, тада за подскуп S од X важи:

$$\chi_S \circ i = \top \circ !_S,$$

при чему је $!_S : S \to \{\star\}$ јединствена стрелица из S у $\{\star\}$.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "i"'] & \{\star\} \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "\chi_S"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}
$$

И у произвољној категорији *подобјекти* објекта X одређени су ињекцијама са кодоменом X. Али, има ли свака категорија истакнути део последњег дијаграма тако да за сваку ињекцију $i : S \rightarrowtail X$ важи одговарајућа једнакост? Оне које га имају су нарочито важне категорије и од великог су значаја у математици. Као што смо већ наговестили, у пододељку о дијагоналном аргументу, не мора свака категорија за истинитосне вредности да има само елементе уобичајеног двочланог скупа. Наиме, постоји много категорија које поседују објекат Ω, различит од $\mathbf{1}+\mathbf{1}$, заједно са стрелицом $\top : \mathbf{1} \to \Omega$, тако да за сваки подобјекат од X одређен са $i : S \rightarrowtail X$ постоји *јединствена* стрелица $\chi_S : X \to \Omega$ таква да је за сваку стрелицу $x_T : T {\to} X$ (x_T можемо замислити као „*фигуру у X облика T*“, тј. као неку врсту „*уопштеног елемента*“ од X) испуњено:

$$\chi_S \circ x_T = \top \circ\, !_T$$

ако и само ако

$$\text{постоји инклузија } j : T \rightarrowtail S \text{ да је } x_T = i \circ j,$$

(акко је „*уопштени елемент x_T укључен и у објекат S*“).

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, "!_T"] \arrow[dr, dotted, tail, "j"'] \arrow[ddr, "x_T"'] & & \\
& S \arrow[r, "!_S"] \arrow[d, tail, "i"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
& X \arrow[r, "\chi_S"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Овакав објекат, уколико постоји, јединствен је до на изоморфизам и заједно са стрелицом $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ назива се *класификатор подобјеката*.

Постојање оваквог објекта омогућава да се прича о подобјектима од X пребаци на причу о стрелицама из X у Ω. Другим речима, стрелице $X \to \Omega$ су „исто“ што и подобјекти од X, па се партитивним објектом $\mathrm{P}(X)$ сматра Ω^X.

Пример 12. Нека је $\mathbf{G}$-$\mathbf{Sets}$ категорија свих *репрезентација* неке фиксиране групе $\mathbf{G}$. Репрезентацију групе $\mathbf{G}$ чини неки скуп X заједно са (десним) дејством $\mu : X \times G \to X$ групе $\mathbf{G}$ на скуп X. Дејство се најчешће означава тачкицом, $\mu(x,g) = x \cdot g$. Захтева се да једнакости $x \cdot 1 = x$ и $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ важе за све x из X и g, h из G. Морфизам (стрелица) међу репрезентацијама (X, μ) и (Y, ν) је свака функција $f : X \to Y$ која чува дејство у смислу да је $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$, за све x из X и g из G. У овој категорији, подобјекат од (X, μ) је одређен подскупом S од X који је затворен за дејство: ако $s \in S$, тада $s \cdot g \in S$ за свако g из G. Комплемент оваквог S у односу на X такође је затворен за дејство: ако $s \in X \setminus S$, а за неко g_0 из G, $s \cdot g_0 \in S$, онда бисмо (због затворености скупа S за дејство) имали да $(s \cdot g_0) \cdot g_0^{-1} = s \in S$, што није могуће. Дакле, у овом случају можемо користити уобичајене карактеристичне функције $\chi_S : X \to \mathbf{2}$, тј. $\mathbf{2}$ као класификатор подобјеката заједно са стрелицом $\top : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$, при чему $\mathbf{G}$ дејствује тривијално и на $\mathbf{1}$ и на $\mathbf{2}$.

Посматрајмо сада категорију $\mathbf{M}$-$\mathbf{Sets}$, где је $\mathbf{M}$ произвољан моноид: објекти су (X, μ), при чему је X неки скуп, а $\mu : X \times M \to X$ дејство моноида $\mathbf{M}$ на X, док су стрелице између (X, μ) и (Y, ν) пресликавања $f : X \to Y$ која чувају дејства. Подобјекте неког (X, μ) одређују подскупови од X затворени за дејство μ. Међутим, стандардни скуповни комплемент у односу на X неког подобјекта S од (X, μ) (S је затворен за дејство) **не мора** да буде затворен за дејство. Овде, карактеристичну функцију χ_S можемо увести као придруживање које сваком x из Xдодељује скуп $L_x = \{\ell \in M \mid x \cdot \ell \in S\}$, тј. један „*десни идеал*“ моноида $\mathbf{M}$. За класификатор подобјеката можемо узети (Ω, ω), где је Ω скуп десних идеала моноида $\mathbf{M}$, а $\omega : \Omega \times M \to \Omega$ дејство дефинисано са

$$L \cdot m = \{k \in M \mid mk \in L\},\ L \in \Omega, m \in M.$$

Тада је свака стрелица $\chi_S : X \to \Omega$ карактеристична функција од S која нам „каже“ да је S у извесном смислу инверзна слика максималног десног идеала M. Стрелица класификатора подобјеката је $\top : \mathbf{1} \to \Omega$, која једини елемент објекта $\mathbf{1}$ слика у максималан идеал M. $\triangle$

Сумирајмо најзад заједничка својства „типичних“ категорија:

1. имају $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ и затворене су за производе, копроизводе и степене;
2. поседују класификатор подобјеката.

У категорији скупова партитивни скуп образује једну Булову алгебру – алгебру класичне логике. Ако је $\mathfrak{T}$ нека типична категорија, природно је поставити питање каква је веза партитивних објеката ове категорије са логиком. Формирајмо, у једној таквој категорији, производ $\Omega \times \Omega$ и стрелицу $\mathbf{1} \xrightarrow{(\top,\top)} \Omega \times \Omega$. Ова стрелица је инјекција (јер је таква свака стрелица чији је домен $\mathbf{1}$) па одређује један подобјекат чију ћемо карактеристичну функцију означити са $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ и назвати је *конјункцијом*.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[d, "(\top,\top)"] \arrow[dr, "\top"] & \\
T \arrow[ur, "!_T"] \arrow[r, "(b,c)"] \arrow[rr, bend right, "b \wedge c"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Наиме, за сваку стрелицу $a : T \to \Omega \times \Omega$, ако је $a = (b, c)$ за неке стрелице b и c из T у Ω, важиће

$$\wedge \circ (b, c) = \top \circ !_T \text{ акко је } b = \top \circ !_T \text{ и } c = \top \circ !_T,$$

или

$$b \wedge c = \textit{тачно} \text{ акко је } b = \textit{тачно} \text{ и } c = \textit{тачно}.$$

Како су b и c стрелице са кодоменом Ω оне одређују (класификују) неке подобјекте $B \rightarrowtail T$ и $C \rightarrowtail T$. Подобјекат одређен (класификован) стрелицом $b \wedge c : T \to \Omega$ назива се *пресеком* ових подобјеката.

Уводе се и логичке операције $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ и $\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$. Илустрације ради, рецимо (грубо и не довољно прецизно) да се *импликација* уводи као карактеристична функција подобјекта $S \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ одређеног паровима (u, v) из $\Omega \times \Omega$ таквим да је u „$\subseteq$“ v.

Уведене логичке операције $\wedge, \Rightarrow, \vee$ потпуно су аналогне конструкцијама *производа, степена, копроизвода*, редом, о чему сведоче природни процеси

$$\frac{X \to Y_1 \times Y_2}{X \to Y_1, X \to Y_2}, \quad \frac{X \to Y^T}{T \times X \to Y}, \quad \frac{X_1 \to Y, X_2 \to Y}{X_1 + X_2 \to Y},$$

односно

$$\frac{x \subseteq y_1 \wedge y_2}{x \subseteq y_1, x \subseteq y_2}, \quad \frac{x \subseteq (t \Rightarrow y)}{t \wedge x \subseteq y}, \quad \frac{x_1 \subseteq y, x_2 \subseteq y}{x_1 \vee x_2 \subseteq y},$$

који су опет у блиској вези са *логичким правилима*

$$\frac{\xi \vdash \upsilon_1 \wedge \upsilon_2}{\xi \vdash \upsilon_1, \xi \vdash \upsilon_2}, \quad \frac{\xi \vdash \tau \Rightarrow \upsilon}{\tau \wedge \xi \vdash \upsilon}, \quad \frac{\xi_1 \vdash \upsilon, \xi_2 \vdash \upsilon}{\xi_1 \vee \xi_2 \vdash \upsilon}.$$

Топоси, веома значајни примери категорија, спадају у типичне категорије. Једна од најважнијих особина топоса је да партитивни објекат $\mathrm{P}(X)$ образује једну Хејтингову алгебру (алгебру интуиционистичке логике дефинисану на страни 245). Наиме, кажемо да је неки објекат L топоса $\mathfrak{T}$ *интерна мрежа* ако постоје стрелице

$$\wedge : L \times L \to L \text{ и } \vee : L \times L \to L$$

које задовољавају дефиниционе једнакости за мреже преведене на језик категорија. На пример, закон апсорпције $x \wedge (y \vee x) = x = x \vee (y \wedge x)$ изражен је следећим комутативним дијаграмом

$$\begin{tikzcd}
L & & L \times L \arrow[ll, "\wedge"'] \\
L \times L \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[r, "\delta \times \mathbf{1}_L"'] & L \times L \times L \arrow[r, "\mathbf{1}_L \times \tau"'] & L \times L \times L \arrow[u, "\mathbf{1}_L \times \vee"'] \arrow[d, "\wedge \times \mathbf{1}_L"] \\
L & & L \times L \arrow[ll, "\vee"]
\end{tikzcd}$$

где је $\delta : L \to L \times L$ дијагонално пресликавање, а $\tau : L \times L \to L \times L$ пресликавање које „замењује координате одговарајућих парова“. Горњи правоугаоник претходног дијаграма одговара левој страни закона апсорпције, док доњи одговара десној. Даље, кажемо да интерна мрежа L има јединицу и нулу ако постоје стрелице

$$\top : \mathbf{1} \to L \text{ и } \perp : \mathbf{1} \to L$$

које задовољавају идентитете $x \vee \perp = x$ и $x \vee \top = x$, тј. обе композиције

$$L \cong L \times \mathbf{1} \overset{\mathbf{1}_L \times \perp}{\to} L \times L \overset{\vee}{\to} L \text{ и } L \cong L \times \mathbf{1} \overset{\mathbf{1}_L \times \top}{\to} L \times L \overset{\wedge}{\to} L$$

представљају јединичне стрелице. Ако постоји и стрелица $\Rightarrow : L \times L \to L$ која задовољава дијаграмске верзије идентитета теореме са стране 246, тада кажемо да је L *интерна Хејтингова алгебра*.

Теорема. Партитивни објекат $\mathrm{P}(X)$, ма ког објекта X у неком топосу, јесте интернална Хејтингова алгебра, што је специјално и класификатор подобјеката $\Omega = \mathrm{P}(\mathbf{1})$, са нулом $\perp : \mathbf{1} \to \Omega$ и јединицом $\top : \mathbf{1} \to \Omega$.

Кажемо да је топос $\mathfrak{T}$ **Булов** ако је класификатор подобјеката Ω интернална Булова алгебра. Топос $\mathbf{Sets}$ је један Булов топос.

Глатка инфинитезимална анализа

Глатка инфинитезимална анализа је изванредно математичко откриће XX века, које покрива велики део научно применљиве класичне анализе без прибегавања граничним вредностима (лимесима). Кључно „супротстављање“ глатке инфинитезималне анализе класичној анализи је у схватању континуума. За разлику од класичног (скуповног) схватања континуума, овде је прихваћен *нетачкаст* континуум (видети цитате на страни 140).

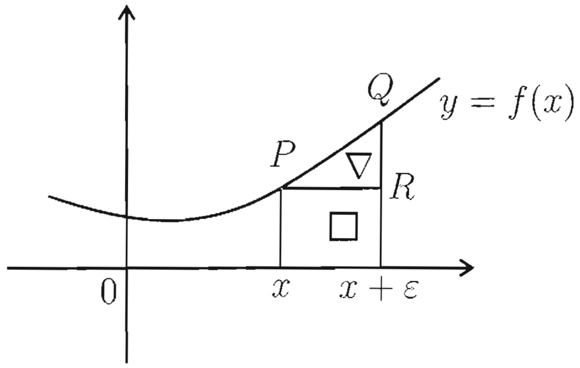
Глатка инфинитезимална анализа разматра континуум заједно са „глатким објектима“ на којима и међу којима су сва пресликавања непрекидна и имају непрекидне изводе сваког реда[51]. И овде се појављују инфинитезималне величине оживљавајући „интуитивну анализу“– анализу пре XIX века, односно пре открића лимеса. За разлику од Робинсонових инвертибилних инфинитезимала, овде су инфинитезимале нилквадратне (па тиме и нилпотентне): *иако оне саме нису (доказиво) једнаке нули, њихови квадрати (па тиме и остали степени) једнаки су* 0.

Нилквадратне инфинитезимале су настале из следеће две старе идеје инфинитезимала.

Идеја праволинијског инфинитезималног дела, тј. микросегмента криве по којој је дужина криве између две њене тачке једнака збиру дужина „микросегмената“ који чине тај део криве.

[51] Лајбниц: Natura non facit saltus – Природа не чини скокове.

Архимедова идеја о мерењу површине фигуре испод неке криве сабирањем површина инфинитезимално танких правоугаоника.



„Дефект површине“ ∇ је пропорционалан са ε^2. Дакле, ако је $\nabla = 0$, морамо узети да је $\varepsilon^2 = 0$.

Као што ћемо видети, рад са оваквим величинама захтева повлачење у интуиционистичку логику[52] и тиме, између осталог, напуштање закона искључења трећег. Тако, *није свака величина једнака нули или различита од нуле*. Због оваквог „слабљења“ логике, глатка инфинитезимална анализа своју непротивречност показује у моделу дефинисаном у теорији категорија, специјално топоса. Нећемо улазити у конструкцију једног оваквог модела, већ ћемо претпоставити да постоји, изабрати један, означити га са $\mathfrak{S}$ и назвати га *глатким светом*. Заинтересованог читаоца упућујемо на [4, 13].

Главни објекат у глатком свету $\mathfrak{S}$ је *глатка реална линија* $\mathbb{R}$.

Основни делови глатке реалне линије $\mathbb{R}$ су *тачке* или, боље, *места*; за означавање тачака (места) користићемо мала слова: $a, b, \ldots, x, y, \ldots,$ $\alpha, \beta, \ldots$ Међу основним деловима глатке реалне праве дефинисана је релација $=$ *једнакости тачака* или *коинциденције места*. Писаћемо $a \neq b$ за **није** $a = b$ у смислу „*тачке (места) a и b можемо разликовати*“. Важно је напоменути да у овом случају **не претпостављамо** да за произвољне a и b важи $a = b$ или $a \neq b$; допуштена је могућност да о овим тачкама (местима) немамо довољно информација које би нам омогућиле да утврдимо њихову једнакост односно различитост.

Две нарочито значајне тачке у $\mathbb{R}$ означићемо са 0 и 1 и назвати их, како је то уобичајено, редом *нула* и *јединица*.

[52] Сетимо се да је у основи Робинсонове нестандардне анализе класична логика.

У глатком свету $\mathfrak{S}$ можемо формирати производе: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\ldots, \mathbb{R}^n, \ldots$ ($\mathbb{R}^n$ је, уобичајен, n-димензионалан простор чија свака тачка може бити идентификована са n-торком $(a_1, \ldots, a_n)$ тачака из $\mathbb{R}$). Две тачке $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ су *различите*, у ознаци $a \neq b$, ако је $a_i \neq b_i$ за неко одређено i из $\{1, \ldots, n\}$.

Такође, у глатком свету $\mathfrak{S}$ можемо сабирати, одузимати, множити и делити елементе из $\mathbb{R}$, при чему, наравно, у случају дељења делимо само елементима различитим од нуле. Сва уобичајена својства операција $+$ и $\cdot$ над $\mathbb{R}$ важе: $0+a=a$, $a-a=0$, $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $0\cdot a=0$, $1\cdot a=a$, $a\cdot b=b\cdot a$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, ако је $a\neq 0$ онда је $\frac{a}{a}=1$. Међутим, из $ab=0$ **не следи** да је $a=0$ или $b=0$.

Тачке у $\mathbb{R}$ су поређане *релацијом строгог уређења* коју означавамо са $<$ и за коју претпостављамо да задовољава следеће услове:

(1) из $a<b$ и $b<c$ следи $a<c$;

(2) није $a<a$;

(3) из $a<b$ следи да је $a+c<b+c$ за свако c;

(4) из $a<b$ и $0<c$ следи да је $ac<bc$;

(5) или је $0<a$ или је $a<1$;

(6) из $a\neq b$ следи да је $a<b$ или $b<a$.

Услов (1) изражава транзитивност релације $<$, услов (2) „строгост" уређења $<$, а услови (3) и (4) сагласност уређења $<$ са операцијама $+$ и $\cdot$. Услов (5) изражава чињеницу да је 0 довољно „лево" од 1, тј. да је свака тачка или строго десно од 0 или строго лево од 1. Приметимо да из (5) и (2) следи да је $0<1$. Посебно наглашавамо да из (6) **не следи** да релација $<$ задовољава закон трихотомије: за произвољне a, b или је $a<b$ или је $a=b$ или је $b<a$. И релација једнакости „није одлучива": не важи $x=y \vee x\neq y$.

Релацију $\leqslant$ на $\mathbb{R}$ дефинишемо на следећи начин:

$$a \leqslant b \text{ акко } \textit{није}\ b < a.$$

Отворен интервал (a,b) чине све тачке x за које важи $a<x$ и $x<b$, док се *затворени интервал* $[a,b]$ састоји од свих тачака x за које је $a\leqslant x$ и $x\leqslant b$.

У глатком свету $\mathfrak{S}$ можемо изводити и операцију „извлачења" квадратног корена: за свако a такво да је $0 \leqslant a$, постоји b да је $b^2 = a$. Понављамо да у $\mathfrak{S}$, постоји могућност да је $a^2 = 0$, а да при томе нисмо у могућности да утврдимо да је $a = 0$. Ово нам омогућава да дефинишемо део Δ од $\mathbb{R}$ који чине све тачке x за које је $x^2 = 0$, а да се, у $\mathfrak{S}$, овај део не своди на $\{0\}$. Део $\Delta = \{x \mid x^2 = 0\}$ од $\mathbb{R}$ називамо *микроолколина тачке* 0, а његове елементе *инфинитезималама* (или *микровеличинама*).

Функције из $\mathbb{R}$ или из неког затвореног интервала у $\mathbb{R}$ поистовећујемо са кривама у равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ на уобичајен начин. Са њима у вези је и најважнија претпоставка о свету $\mathfrak{S}$, такозвани *принцип микроафиности*. Неформално, принцип микроафиности каже да се све поменуте функције локално понашају као полиноми $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, при чему је $f(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon$ за свако ε из Δ. Другим речима, график функције f рестрикован на Δ је јединствени микросегмент око тачке $(0, f(0))$ и одређује тангенту на одговарајућу криву у тој тачки.

Принцип микроафиности. За свако пресликавања $f : \Delta \to \mathbb{R}$ постоји јединствен a из $\mathbb{R}$ такав да је за сваки ε из Δ,

$$f(\varepsilon) = f(0) + a \cdot \varepsilon.$$

Овај принцип је сагласан са веровањем да је нека крива *глатка* у некој тачки ако и само ако је у тој тачки *локално линеарна*, тј. ако и само ако је у околини посматране тачке „делић" јединствене праве линије (одређене одговарајућим коефицијентом правца – нагибом). Микрооколина Δ нуле понаша се као „крути прут", односно као генерички тангентни вектор кривих у равни $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ који можемо транслирати и ротирати, али га не можемо кривити и развлачити.

Ево неких последица принципа микроафиности.

1. Није за сваки ε из Δ, $\varepsilon = 0$, тј. микроолколина нуле Δ није $\{0\}$.

Доказ. Посматрајмо функцију $f : \Delta \to \mathbb{R}$ дефинисану са $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Ако би Δ било $\{0\}$, тада би важило:

$$f(\varepsilon) = f(0) + 0 \cdot \varepsilon, \quad \text{за свако } \varepsilon \text{ из } \Delta,$$

али и

$$f(\varepsilon) = f(0) + 1 \cdot \varepsilon, \quad \text{за свако } \varepsilon \text{ из } \Delta,$$

што је у супротности са принципом микроафиности, тј. супротно јединствености нагиба, будући да је $0 \neq 1$. □

2. За сваки ε из Δ, **није** $\varepsilon \neq 0$.

Доказ. Ако би било $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon^2 = 0$, имали бисмо да је $\frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$, али и $0 = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$, што није могуће. $\square$

Ова чињеница је и суштински разлог нашег повлачења у интуиционистичку логику.

Претпостављамо и да у $\mathfrak{S}$ постоји објекат $\mathbb{R}^\Delta$ који чине све функције из Δ у $\mathbb{R}$. Ако сваком пару (a, b) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ придружимо функцију $\psi_{a,b} : \Delta \to \mathbb{R}$ дефинисану са $\psi_{a,b} = a + b\varepsilon$, тада је принцип микроафиности еквивалентан тврђењу да је пресликавање Ψ које сваком (a, b) додељује $\psi_{a,b}$ бијекција између $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^\Delta$. И више, ако су $\oplus$ и $\odot$ бинарне операције на $\mathbb{R}^\Delta$ дефинисане са

$$(f \oplus g)(\varepsilon) = f(\varepsilon) + g(e), (f \odot g)(\varepsilon) = f(\varepsilon) \cdot g(e),$$

а $\boxplus$ и $\boxdot$ операције на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ дефинисане са

$$(a, b) \boxplus (c, d) = (a + b, c + d), (a, b) \boxdot (c, d) = (a \cdot c, a \cdot d + b \cdot c),$$

онда се лако може показати да је Ψ изоморфизам међу прстенима $(\mathbb{R}^\Delta, \oplus, \odot)$ и $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \boxplus, \boxdot)$.

Принцип микроканцелације. За све x, y из $\mathbb{R}$

$$\text{ако је за све } \varepsilon \text{ из } \Delta, x \cdot \varepsilon = y \cdot \varepsilon, \text{ онда је } x = y.$$

Доказ. Нека су x и y произвољни из $\mathbb{R}$. Из јединствености нагиба функције $f : \Delta \to \mathbb{R}$ дефинисане са $f(\varepsilon) = x \cdot \varepsilon$, следи да је $x = y$. $\square$

Принцип микроафиности нам омогућава једноставну дефиницију извода функције. Ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тада за свако фиксирано x, дефинишемо функцију $g_x : \Delta \to \mathbb{R}$, $g_x(\varepsilon) = f(x + \varepsilon)$. Према принципу микроафиности, постоји јединствени a_x такав да је

$$f(x + \varepsilon) = g_x(\varepsilon) = g_x(0) + a_x \cdot \varepsilon, \text{ за све } \varepsilon \text{ из } \Delta.$$

Функцију $x \mapsto a_x$ називамо *извод* функције f и означавамо је са f'. Дакле,

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x) \cdot \varepsilon.$$

Пример 13. Ако је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$, из

$$2(x + \varepsilon)^2 = 2x^2 + (2x^2)'\varepsilon, \text{ за свако } \varepsilon \text{ из } \Delta$$

имамо да је $2x^2 + 4x\varepsilon + 2\varepsilon^2 = 2x^2 + (2x^2)'\varepsilon$, односно (из $\varepsilon^2 = 0$) да је $4x\varepsilon = (2x^2)'\varepsilon$, за свако ε из Δ. Применом принципа микроканцелације добијамо да је $(2x^2)' = 4x$. $\triangle$

Приметимо да, у $\mathfrak{S}$, све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имају извод, а тиме и изводе произвољног реда: $f'', f''', f^{(4)}, \ldots$ Извод $n-$тог реда произвољне функције f дефинисан је рекурзивно:

$$f^{(n-1)}(x + \varepsilon) = f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x) \cdot \varepsilon, \; n \geqslant 1,$$

при чему је $f^{(0)}$ функција f.

Да бисмо развили интегрални, тиме и читав диференцијално-интегрални рачун потребан нам је још један принцип.

Принцип интеграције. За сваку функцију $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ постоји јединствена функција $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ таква да је $g' = f$ и $g(0) = 0$.

Као што је већ уобичајено, уместо $g(x)$ пишемо $\int_0^x f(t)\, dt$.

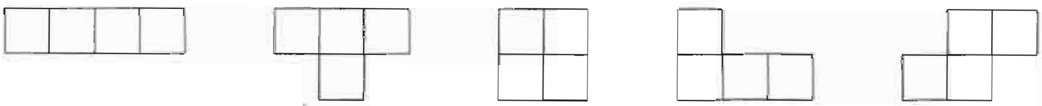
Даље, можемо развијати анализу функција више реалних променљивих са стандардним применама у геометрији (дужине лукова, површине и запремине), физици итд.

ЗБИРКА ПРИМЕРА И ЗАДАТАКА

1. Замислите да су вам повезане очи и да се испред вас на столу налази гомила од x новчића. Саопштено вам је да се међу њима налази тачно y новчића који су окренути писмом горе. Да ли можете, повезаних очију, поделити новчиће на две гомиле тако да у свакој буде исти број новчића окренутих писмом горе?

2. Може ли коњ, померајући се на прописани начин, направити пут од левог доњег угла шаховске табле до десног горњег угла, а да при том дође на свако поље шаховске табле тачно једанпут?

3. Да ли је могуће формирати правоугаоник од следећих делова?



4. Речи над енглеском абецедом A, B, C, ..., Y, Z дозвољено је трансформисати по следећим правилима.

$$\begin{aligned} \text{EAT} &\equiv \text{AT} \\ \text{ATE} &\equiv \text{A} \\ \text{LATER} &\equiv \text{LOW} \\ \text{PAN} &\equiv \text{PILLOW} \\ \text{CARP} &\equiv \text{ME} \end{aligned}$$

Доказати да су речи LAP и LEAP еквивалентне. Да ли су еквивалентне речи CATERPILLAR и MAN? А речи MEAT и CARPET?

5. На табли је написана реч $BBABBAABAABAB$. У сваком кораку је дозвољено избрисати два суседна слова BA или додати два суседна слова AB на било ком месту у речи. Да ли је могуће на овај начин дату реч претворити у реч:
(а) $BBAABBABAABBA$; (б) $ABBABAAABBAAB$?

6. Посматрајмо све речи над алфабетом $\{0, 1\}$. Реч над овим алфабетом може се трансформисати убацивањем, брисањем или дописивањем слева или здесна речи облика **www**, при чему је **w** било која реч задатог алфабета. Може ли се на овај начин свака реч трансформисати на једну од речи 01 или 10?

7. Наћи све симетрије квадрата и формирати одговарајућу таблицу. Наћи везу добијеног рачуна са симетријама квадрата и трансформацијама речи над алфабетом $\{\sigma, \rho\}$: $\sigma\sigma = \Lambda$, $\rho\rho\rho\rho = \Lambda$, $\rho\sigma = \sigma\rho\rho\rho$.
На сличан начин, анализирајте све симетрије произвољног правилног n-тоугла. (НАПОМЕНА. Правилан n-тоугао има тачно $2n$ симетрија.)

Скупови

8. Дати пример скупова X, Y, Z тако да је $X \cup (Y \times Z) \neq (X \cup Y) \times (X \cup Z)$.

9. Дати пример скупова X и Y таквих да је $\mathcal{P}(X \cup Y) \neq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$.

10. Доказати да из $X \times X = Y \times Y$ следи да је $X = Y$.

11. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Ако је $g \circ f = 1_X$, доказати да је f 1–1 функција, а g **на** функција.

12. Нека $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Ако је $g \circ f = 1_X$ и $f \circ g = 1_Y$, доказати да су и g и f бијекције.

13. Нека $f : X \to X$. Ако за произвољне функције $g : X \to X$ и $h : X \to X$, из $f \circ g = f \circ h$ следи да је $g = h$, онда је f 1–1 функција.

14. Нека $f : X \to X$. Ако за произвољне функције $g : X \to X$ и $h : X \to X$, из $g \circ f = h \circ f$ следи да је $g = h$, онда је f **на** функција.

15. Нека су α и β бинарне релације редом на скуповима A и B. Релација ρ на скупу $A \times B$ је дефинисана на следећи начин

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \rho \text{ акко } (a_1, a_2) \in \alpha \text{ и } (b_1, b_2) \in \beta.$$

а) Ако су α и β релације поретка, доказати да је и ρ релација поретка.
б) Ако су α и β релације еквиваленције, доказати да је и ρ релација еквиваленције.

16. Нека су $\preceq$ и $\precsim$ релације уређења редом на скуповима X и Y. Ако за произвољне x_1 и x_2 из X важи

$$x_1 \preceq x_2 \text{ акко } f(x_1) \precsim f(x_2),$$

доказати да је f 1–1 функција.

17. Доказати да је функција $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дата са $f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$ бијекција.

18. Да ли међу бројевим $0, 1, 2, 3, \ldots, 999$ има више оних чији је збир цифара 10 или оних чији је збир цифара 17?

Означимо са A скуп свих највише троцифрених бројева чији је збир цифара једнак 10, а са B скуп свих највише троцифрених бројева чији је збир цифара једнак 17. Доказаћемо да је $|A| = |B|$.

Сваки од бројева $0, 1, 2, \ldots, 999$ можемо посматрати као „реч“ облика abc, где су a, b, c цифре, тј. неки од бројева $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, при чему речи које одговарају једноцифреним и двоцифреним бројевима добијамо уписивањем одређеног броја нула испред броја; на пример, броју 9 одговара реч 009, а броју 10 реч 010. Другим речима, скуп бројева $\{0, 1, 2, \ldots, 999\}$ обострано–једнозначно пресликавамо у скуп свих „трословних“ речи над азбуком $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Нека је A' скуп речи које одговарају бројевима из A и B' скуп речи које одговарају бројевима из B. Имамо да је $|A'| = |A|$ и $|B'| = |B|$. Дефинишимо пресликавање $f : A' \to B'$, тј.

$$f : \{000, 001, 002, \ldots, 999\} \to \{000, 001, 002, \ldots, 999\},$$

на следећи начин:

$$abc \overset{f}{\mapsto} xyz, \text{ тј. } f(abc) = xyz, \text{ при чему је } x = 9 - a, y = 9 - b, z = 9 - c.$$

На пример, $f(019) = 981$, $f(564) = 435, \ldots$ Није тешко видети да је ово пресликавање бијекција. Ако је $abc \neq a'b'c'$, тада важи бар једна од неједнакости $a \neq a'$ или $b \neq b'$ или $c \neq c'$, па тиме и бар једна од неједнакости $9 - a \neq 9 - a'$, $9 - b \neq 9 - b'$, $9 - c \neq 9 - c'$, те мора бити $f(abc) \neq f(a'b'c')$. Такође, за сваку реч xyz лако налазимо реч abc такву да је $f(abc) = xyz$.

Ако $abc \in A'$, тј. ако је $a + b + c = 10$, тада $f(abc) \in B'$. Заиста, ако је $f(abc) = xyz$ и $a+b+c = 10$, имамо $x+y+z = 9-a+9-b+9-c = 27-10 = 17$.

Дакле, $f : A' \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} B'$, па је $|A'| = |B'|$.

19. Ординали. **(i)** Почетни сегмент неког уређеног скупа $(P, \leqslant)$ јесте подскуп S од P такав да важи

$$\text{ако } x \in S \text{ и } y < x, \text{ онда } y \in S.$$

Доказати да је за свако x из P скуп $\{y \in P \mid y < x\}$ почетни сегмент уређења $(P, \leqslant)$.

Ако је $(P, \leqslant)$ добро уређење, доказати да су скупови P и $\{y \in P \mid y < x\}$, $x \in P$ једини почетни сегменти овог уређења.

(ii) Ординал је сваки скуп α који задовољава следећа два својства:

1. релација $\in$ на α је строго уређење које је добро;
2. ако $x \in \alpha$, онда $x \subseteq \alpha$.

Доказати:
(а) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ су ординали. (Свако коначно линеарно уређење је добро.)
(б) Почетни сегменти ординала α су α и елементи од α.
(в) Сви елементи ординала су ординали.
(г) За сваки ординал α, $\alpha \notin \alpha$.
(д) За свака два ординала α и β или је $\alpha = \beta$ или $\alpha \in \beta$ или $\beta \in \alpha$, при чему важење једног од случајева искључује остала два. Уместо $\alpha \in \beta$, пише се $\alpha < \beta$.
(ђ) Ако су α и β два ординала, онда је $\alpha \subseteq \beta$ ако и само ако је $\alpha < \beta$ или $\alpha = \beta$.
(е) Ако је α ординал, онда је и $\alpha \cup \{\alpha\}$ такође ординал. Ординал $\alpha \cup \{\alpha\}$ означавамо са $\alpha + 1$.
(ж) Ако су α и β ординали такви да је $\alpha < \beta$, онда је $\alpha + 1 \leqslant \beta$.

20. Занимљивости из света бројева. Наводимо неколико чудесних законитости које многи сматрају математичком поезијом.У њима се уместо музике стихова и магије речи налази права поетика чињеница.

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 8 + 1 &= 9\\
12 \cdot 8 + 2 &= 98\\
123 \cdot 8 + 3 &= 987\\
1234 \cdot 8 + 4 &= 9876\\
12345 \cdot 8 + 5 &= 98765\\
123456 \cdot 8 + 6 &= 987654\\
1234567 \cdot 8 + 7 &= 9876543\\
12345678 \cdot 8 + 8 &= 98765432\\
123456789 \cdot 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

Савршени бројеви. Прави делиоци неког броја су сви делиоци тог броја различити од њега самог. Тако, прави делиоци броја 6 су 1, 2 и 3. Питагора и његови ученици први су проучавали бројеве који су једнаки збиру својих правих делилаца. Они су овакве бројеве назвали „савршени бројеви“. На пример, број 6 је савршен број $[6 = 1 + 2 + 3]$. Следећи савршен број је 28 $[1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28]$. Како бројеви постају већи, све је теже пронаћи савршене бројеве. Трећи савршен број је 496, четврти је 8128, пети је 33550336. Осим што представљају збир својих правих делилаца, још је Питагора приметио да сви савршени бројеви поседују и друге занимљиве особине. На пример, савршени бројеви представљају збир неколико узастопних бројева: $6=1+2+3$, $28 = 1+2+3+4+5+6+7$, $496 = 1+2+3+4+5+6+7+8+\ldots+30+31, \ldots$

Међутим, има доста питања везаних за савршене бројеве која су још увек без одговора. Једно од најстаријих нерешених питања је: „Да ли постоје непарни савршени бројеви?“. Иако одговора још увек нема, познато је да би такав број, уколико уопште постоји, морао имати најмање 300 цифара у декадном запису и да би морао имати прост делилац већи од 100000000000000000000.

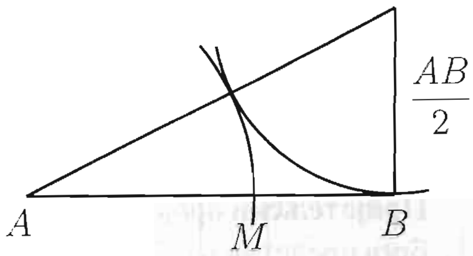
Пријатељски бројеви. Пријатељски бројеви су парови бројева код којих сваки број представља збир правих делилаца оног другог броја. На пример, 220 и 284 су пријатељски бројеви. Прави делиоци броја 220 су $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$ и њихов збир је 284. С друге стране, делиоци броја 284 су $1, 2, 4, 71, 142$, а њихов збир је 220. Овај пар су открили Питагора и његови ученици. Преко хиљаду година касније, 1636. године, следећи пар пријатељских бројева 17296 и 18416 је открио француски математичар Пјер Ферма. Занимљиво је да је Ферма превидео пар много мањих пријатељских бројева. Шеснаестогодишњи Италијан, Николо Паганини, открио је 1866. године пар 1184 и 1210.
Доста је питања и у вези са пријатељским бројевима која су без одговора. На пример, да ли има коначно или бесконачно много парова пријатељских бројева?
Свакакве необичности за које се чак и не зна да ли су пука случајност или се иза њих крије нека законитост окупирају пажњу великог броја љубитеља математике.
– $40081787109376^2 = 1606549657881\underline{340081787109376}$
– $\dfrac{1}{998999} = 0.000001\mathbf{001}\mathbf{002}\mathbf{003}\mathbf{005}\mathbf{008}\mathbf{013}\mathbf{021}\mathbf{034}\mathbf{055}\mathbf{089}\ldots$
– Од давнина су људи „опседнути“ бројем 666 што је можда и разлог огромног броја откривених законитости везаних за овај број.

$$\begin{aligned}666 &= 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+5^3+4^3+3^3+2^3+1^3\\ &= 6+6+6+6^3+6^3+6^3 = 2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2 = \ldots\end{aligned}$$

Проблеми везани за ирационалне бројеве дубоко су уткани у историју математике и значајно су утицали на њен развој.
– Број π, оригинално изведен из геометрије кругова, појављује се стално и наново у најразличитијим околностима. Огроман је број формула везаних за овај број.

$$\begin{aligned}\pi &= 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots\right)\\ &= 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots\end{aligned}$$

— Број који одређује однос међу одсечцима на које је подељена дуж по чувеном *златном пресеку* један је веома „природан“ број (иако то за математичаре није) будући да се појављује свуда; од астрономије, преко биологије и психологије па све до уметности и магије. *Златни број* је однос дужег према краћем делу дужи AB која је тачком M подељена тако да је
$AB : AM = AM : MB = \phi$.



Лако се добија да ϕ задовољава следеће формуле $\phi^2 = 1 + \phi$, $\phi > 1$, одакле добијамо да је

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989484 82\ldots = \sqrt{1+\phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}} = \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}} = \ldots\end{aligned}$$

Још је Еуклид користио поделу дужи по златном пресеку за конструкцију правилног петоугла. Током ренесансе разни уметници, научници и мистици су број ϕ називали *божанска пропорција*, док му је данашњи назив – sectio aurea – дао Леонардо да Винчи. Интересантна је и веза између златног пресека и Фибоначијевог низа $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. Може се показати да однос узастопних чланова Фибоначијевог низа тежи златном броју, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$.
– Лајбниц је вероватно први експлицитно поменуо број e – ирационалан број који се крије у многим „природним“ околностима.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2,718281828459045235\ldots$$

Број e се може срести на прилично неочекиваним местима. Тако, вероватноћа p_n да n гостију при одласку са забаве помешају капуте и да свако узме туђ приближно је једнака $\frac{1}{e}$. Прецизније, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$.

21. Велики и мали бројеви. Велики и мали бројеви су инспирација за писање ове књиге. Иако се овакви бројеви не употребљавају у „свакодневном животу“ веома су заступљени у научним описима света у коме живимо. Сетимо се само веома мале таласне дужине светлости или пак неких „астрономских“ бројева који описују свемир. Ево неких великих бројева.
– Више од 10^{14} ћелија има у људском организму.
– У видљивом делу свемира има око $5 \cdot 10^{22}$ звезда.

– Авогадров број $6,022 \cdot 10^{23}$ представља број атома у 12 грама угљеника 12.
– Укупан број лозинки дужине не веће од 40 карактера које можете изабрати користећи алфабет стандардне тастатуре је приближно једнак 2^{230}.

– Број $9^{9^{9^9}}$ Гаус је назвао „мерљивом бесконачношћу“. Овај број има $10^{369693100}$ цифара и много је већи од броја свих атома у видљивом делу свемира. Да је слој мастила коришћеног при писању овог броја танак само један атом, не би било довољно укупне материје у милионима наших свемира да би се тај број исписао. Ипак, последњих десет цифара овог броја је израчунато: 1045865289.

– Замислите колики је тек *суперфакторијел* $N\$ = N!^{\left.N!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{N!}}}}\right\} N! \text{ пута}}$ неког великог природног броја N. На пример, $3\$ = 6^{6^{6^{6^{6^{6}}}}} \approx 10^{10^{10^{2,0691973765 \cdot 10^{36305}}}}$

Будући да је реч о бројевима који су изван „људске бројне скале“ до њих људи не долазе обичним бројањем (додавањем по 1) већ на сасвим другачије начине, о којима нећемо овом приликом говорити. Можда ће следећи корак заснивања скупа бројева бити базиран и на оваквим принципима пребројавања, а не само на принципу бројања додавањем по 1.

Подсетимо се и неких малих бројева.
– Таласна дужина зелене светлости је приближно $5,5 \cdot 10^{-7}$m.
– Време које је потребно светлости да пређе један метар је приближно $3 \cdot 10^{-9}$s.
– Планкова константа је приближно $6,6 \cdot 10^{-34}$Js.

Природни бројеви

22. Поступак за одређивање највећег заједничког делиоца бројева 1 515 и 255 је следећи:

$$\begin{array}{rcl} 1\,515 & : & 255 \qquad \text{даје остатак } 240, \\ 255 & : & 240 \qquad \text{даје остатак } 15, \\ 240 & : & \mathbf{15} \qquad \text{даје остатак } 0. \end{array}$$

Дакле, 15 је највећи заједнички делилац бројева 1 515 и 255.

Ако је $\mathrm{nzd}(a, b)$ највећи заједнички делилац природних бројева a и b, може се показати да постоје цели бројеви α и β такви да је $\alpha \cdot a + \beta \cdot b = \mathrm{nzd}(a, b)$. Користећи Еуклидов алгоритам може се наћи поступак (ефективног) одређивања бројава α и β за задате a и b. Наћи целе бројеве α и β такве да је $\alpha \cdot 1\,515 + \beta \cdot 255 = 15$.

23. Поступак превођења броја 876 у бројевну базу чија је основа 7 (цифре овог система су 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) јесте следећи

876	остатак при дељењу 876 са 7 је **1**,
$(876-1):7=125$	остатак при дељењу 125 са 7 је **6**,
$(125-6):7=17$	остатак при дељењу 17 са 7 је **3**,
$(17-3):7=2$	остатак при дељењу 2 са 7 је **2**,
$(2-2):7=0$	СТОП.

Дакле, $(876)_{10} = (2361)_7$ $[876 = 2\cdot 7^3+3\cdot 7^2+6\cdot 7+1]$. Проверите и једнакости $(876)_{10} = (1101101100)_2 = (1554)_8 = (36C)_{16}$. Цифре система чија је основа 16 су $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F$ при чему знаци A,B,C,D,E,F стоје редом за 10, 11, 12, 13, 14, 15 $[876 = 3\cdot 16^2+6\cdot 16+12]$.
Ако су m и n природни бројеви већи од 1, описати поступак превођења који из записа неког броја у систему са основом m налази запис тог броја у систему са основом n.

24. Софији је саопштен број S и речено јој је да је то збир два различита природна броја већа од 1. Лари је саопштен број P и речено јој је да је то производ иста та два броја. После тога између њих се водио следећи разговор:

Софија: „Ја не знам који су то бројеви."

Лара: „Не знам ни ја."

Софија: „Сад знам који су то бројеви."

Лара: „Сад знам и ја."

Који су то бројеви?

25. Доказати да за произвољне природне бројеве k,m,n важе једнакости:
(а) $(k+m)+n = k+(m+n)$ (сабирање природних бројева је асоцијативна операција);
(б) $m+n = n+m$ (сабирање природних бројева је комутативна операција).

26. Доказати да за произвољне природне бројеве k,m,n важе једнакости:
(а) $(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$ (множење природних бројева је асоцијативна операција);
(б) $m\cdot n = n\cdot m$ (множење природних бројева је комутативна операција);
(в) $k\cdot(m+n) = k\cdot m + k\cdot n$ (множење природних бројева је дистрибутивно према сабирању).

27. Доказати да за сваки природан број n важе једнакости:

(а) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(б) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(в) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

28. Одредити полином P такав да је $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=P(n)$, за сваки природан број n.

Упутство. Ако је $1^k+2^k+\cdots+n^k=P(n)$, онда је P полином $k+1$-ог степена.

29. Нека је m фиксиран природан број. Доказати да за сваки природан број n важи формула

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1)=\frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}.$$

На основу доказане формуле израчунати збирове:

(а) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)$;

(б) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$;

(в) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$.

30. (i) Нека је $\sigma=x+y$ и $\pi=xy$. Ако је $\sigma_n=x^n+y^n$, $n\in\mathbb{N}$, доказати да за сваки природан број n већи од 2 важи формула $\sigma_n=\sigma\cdot\sigma_{n-1}-\pi\cdot\sigma_{n-2}$.

(ii) Користећи формулу под (i) решити:

(а) систем једначина $x^5+y^5=33$, $x+y=3$;

(б) једначину: $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

(iii) Ако систем једначина $x+y=a$, $x^2+y^2=b$, $x^3+y^3=c$ има реална решења (по x, y), доказати да је $a^3-3ab+2c=0$.

31. Низ c_n, $n\in\mathbb{N}$, рекурзивно је задат на следећи начин: $c_1=1$, $c_{2n}=c_n+1$, $c_{2n+1}=c_{6n+4}+1$, $n\in\mathbb{N}$. Одредити c_{10}.

32. Фибоначијев низ F_n, $n\in\mathbb{N}$, дефинисан је на следећи начин: $F_1=F_2=1$ и $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geqslant 1$. Доказати да је

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n\in\mathbb{N},$$

а затим и да важе једнакости:

(а) $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$; (б) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$.

Израчунљиве функције

33. Дат је програм P.

I_1 $J(1,3,5)$
I_2 $J(2,3,7)$
I_3 $S(3)$
I_4 $J(1,1,1)$
I_5 $Z(1)$
I_6 $J(1,1,9)$
I_7 $Z(1)$
I_8 $S(1)$

(а) Испитати да ли се израчунавање на идеалном рачунару по програму P завршава за следеће почетне конфигурације

(i)

R_1	R_2	R_3	R_4	$\cdots$
3	2	0	0	$\cdots$

, (ii)

R_1	R_2	R_3	R_4	$\cdots$
7	4	0	0	$\cdots$

,

и у потврдном случају одредити садржај регистра R_1 у завршној конфигурацији.

(б) Навести, уколико постоји, бар једну почетну конфигурацију за коју се израчунавање на идеалном рачунару по програму P не завршава.

(в) Доказати да су и стандардно уређење природних бројева и релација дељивости примитивно рекурзивне релације.

34. Доказати да су примитивно рекурзивне следеће функције:

(а) $(x,y) \mapsto |x-y|$ (*Упутство.* $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$);

(б) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(в) $(x,y) \mapsto \max\{x,y\}$; (г) $(x,y) \mapsto \min\{x,y\}$;

(д) $\rho(x,y) = \begin{cases} \textit{остатак при дељењу } x \textit{ са } y, & y \neq 0, \\ x, & y = 0; \end{cases}$

(ђ) $\kappa(x,y) = \begin{cases} \textit{количник при дељењу } x \textit{ са } y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

35. Низ израчунљивих функција $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x \cdot y$, $f_3(x,y) = x^y$, $f_4, \ldots$, које су дефинисане на страни 126, може се продужити за $n \geqslant 6$ на следећи начин: $f_{s(n)}(x,0) = 1$, $f_{s(n)}(x,s(y)) = f_n(x, f_{s(n)}(x,y))$. Ако индекс посматрамо као аргумент, добијамо функцију три аргумента, $a(n,x,y) = f_n(x,y)$, која задовољава следеће једнакости:

$$a(0,x,y) = x+y, \quad a(s(n),x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } n = 1, \\ 1, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$a(s(n),x,s(y)) = a(n,x,a(s(n),x,y)).$$

Ознака a је по Акерману који је 1928. године први описао сличну функцију. Интуитивно је јасно да је функција a израчунљива. Поступак израчунавања могао би тећи овако

$$\begin{aligned} a(n,x,y) &= a(n\dot{-}1,x,a(n,x,y\dot{-}1)) \\ &= a(n\dot{-}1,x,a(n\dot{-}1,x,a(n,x,y\dot{-}2))) \\ &= a(n\dot{-}1,x,a(n\dot{-}1,x,a(n\dot{-}1,x,a(n,x,y\dot{-}3)))) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Дакле, представљено израчунавање почиње „разградњом" трећег аргумента y. Други аргумент x остаје фиксиран (па се каже да претходни поступак представља израчунавање са параметром x), док се трећи такође „разграђује". Но, хоћемо ли добити резултат? Хоће ли се наше израчунавање (успешно) завршити? Није тешко уочити да је $a(n,x,t)\downarrow$ за свако t мање од y и $a(n\dot{-}1,x,z)\downarrow$ за свако z. Другим речима, при израчунавању вредности $a(n,x,y)$, за аргументе n и y са параметром x, у сваком наредном кораку потребна је вредност функције a за *лексикографски мање* аргументе са истим параметром x. Лексикографско уређење[53] $\leqslant_{\text{lex}}$ на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ дефинишемо на следећи начин: $(a,b)\leqslant_{\text{lex}}(c,d) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a<c$ или $(a=c$ и $b\leqslant d)$.

36. Означимо регистре идеалног рачунара са R_0, R_1, R_2, ... и претпоставимо да се почетна конфигурација $(x_1,\dots,x_n)$ задаје уношењем бројева x_k у регистар R_k, $1\leqslant k\leqslant n$, док је у преосталим уписан број 0. Након заустављања рада рачунара, под резултатом израчунавања по неком програму P сматрамо број уписан у R_0. Програм је сваки коначан низ следећих инструкција.

ИНСТРУКЦИЈЕ СЛЕДБЕНИКА. increase(1), increase(2), increase(3), ...

Ако је increase(n) ($n\geqslant 1$) у неком програму i-та инструкција, идеални рачунар је извршава тако што број у R_n повећава за један и за један повећава и број у *бројачу*.

ИНСТРУКЦИЈЕ ПРЕТХОДНИКА. decrease(1; 1), ..., decrease(2; 1), ...

Ако је decrease($n;k$) ($n,k\geqslant 1$) у неком програму i-та инструкција, идеални рачунар је извршава на следећи начин: ако је у R_n уписан број различит од 0, онда се он умањује за 1 и у бројач се уписује број k, а ако се ова инструкција извршава када је у R_n број 0, онда се садржај овог регистра не мења већ се само у бројач уписује број $i+1$.

[53] Уређење којим су поређане речи у речнику.

Инструкције прелаза. GO TO(1), GO TO(2), ...
Ако је GO TO(k) ($k \geqslant 1$) у неком програму i-та инструкција, идеални рачунар је извршава тако што у бројач уписује број m.
Доказати да овај „програмски" језик описује исти скуп израчунљивих функција као и језик уведен на страни 121.

37. Нерешив проблем речи. Искористићемо „програмски" језик из претходног задатка, да бисмо задали један нерешив проблем речи.
Нека је P програм за који је проблем заустављања нерешив (страна 130). Нека је N број инструкција овог програма и M, $M > 1$, такав да се при израчунавању по програму P користе само регистри R_i, $i < M$.
Посматрајмо речи над алфабетом који чине слова a, b, c, d, e заједно са индексираним словима a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, $k \leqslant \max\{N, M\} + 1$. Реч $\underbrace{ss\cdots s}_{r\text{ пута}}$
(r узастопних појављивања слова s у некој речи) краће ћемо означити са s^r.
Ако је у неком тренутку израчунавања у регистар R_i уписан број r_i и у бројач број n, тада том тренутку додељујемо *статусну реч*

$$bc_n b_0 a^{r_0} b_1 a^{r_1} \cdots b_{M-1} a^{r_{M-1}} b_M.$$

Специјално, уколико се израчунавање по програму P обавља за улаз x, почетна статусна реч је $bc_0 b_0 b_1 a^x b_2 \cdots b_M$ – означимо је са W_x.
Почетну листу допустивих замена ћемо направити тако да је

$$W_x \equiv bc_N \text{ акко } P(x) \downarrow .$$

Будући да смо изабрали програм P за који је проблем заустављања **нерешив**, добићемо да је **неодлучиво** да ли је $W_x \equiv bc_N$.
Претпоставимо да се извршава програм P. Ако је X статусна реч која почиње са bc_n, где је $n < N$, тада постоји следећа статусна реч Y (која одговара наредном кораку извршавања програма), и ми ћемо у листу допустивих замена ставити $X \equiv Y$.
Претпоставимо најпре да је n-та инструкција у P инструкција increase(i). Тада у листу допустивих замена стављамо $c_n b_j \equiv b_j c_n$, $j < i$, и $c_n a \equiv a c_n$. Ове замене нам омогућавају да у речи X померимо c_n тачно испред b_i. Такође, на листу стављамо и замену $c_n b_i \equiv d_n b_i a$ која описује повећање броја у R_i за 1 и која мења c_n у d_n. Замене $ad_n \equiv d_n a$ и $b_j d_n \equiv d_n b_j$, $j < i$, омогућавају да се d_n постави тачно испред b. Најзад, замена $bd_n \equiv bc_{n+1}$ даје статусну реч Y.
Нека је n-та инструкција програма P инструкција decrease($i; m$). Као и у претходном случају, замене $c_n b_j \equiv b_j c_n$, $j < i$, $c_n a \equiv a c_n$, $c_n b_i a \equiv d_n b_i$, $a_d \equiv d_n a$, $b_j d_n \equiv d_n b_j$, $j < i$, и $bd_n \equiv bc_m$ покривају случај када у R_i није уписана нула. Уколико је у R_i уписана 0, тада ове замене постављају c_n тачно

испред b_i, а $c_n b_i b_{i+1} \equiv e_n b_i b_{i+1}$ мења c_n у e_n. Замене $ae_n \equiv e_n a$ и $b_j e_n \equiv e_n b_j$, $j < i$, доводе c_n тачно иза b и $be_n \equiv bc_{n+1}$ даје Y.
Ако је n-та инструкција програма P инструкција GOTO(m), тада замена $bc_n \equiv bc_m$ претвара реч X у Y.
Такође, додајемо и замене $c_N b_i \equiv c_N$, за свако i, као и $c_N a \equiv c_N$, да бисмо сваку статусну реч која почиње са bc_N претворили у bc_N.
Дакле, ако $P(x) \downarrow$, онда $W_x \equiv bc_N$.

Реални бројеви и нека друга (уређена) поља

38. (а) Доказати да бројеви $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ нису рационални.
(б) Доказати да је број $0,101101110111101111110\ldots$(иза сваке нуле налази се једна јединица више) ирационалан.

39. „Табличне формуле“. Спискови (таблице) важних, тј. често коришћених, формула типична су појава у математици: важне таутологије, важни алгебарски идентитети, формуле за израчунавање површина равних фигура, важни тригонометријски идентитети, граничне вредности неких низова, граничне вредности неких функција, таблица извода, таблица интеграла. Те таблице треба научити и знати. Наравно, треба знати и доказ сваке формуле за коју се „зна“ да важи. Међутим, формуле се не деле на „табличне“ и „нетабличне“ (у различитим књигама можете наћи различите спискове важних формула), већ на оне за које знате доказе и препознајете ситуације у којима их треба применити и оне које вам нису познате.
Једнакост $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$, свакако ће брже доказати неко чија таблица, наравно поред формула познатих као *биномна формула, разлика квадрата, разлика кубова* и слично садржи и идентитет

$$(*)\qquad x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

Тако, ако употребимо наведени идентитет, имамо:

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)\overset{(*)}{=}((b-c)+(c-a)+(a-b))(\cdots)=0.$$

(а) Доказати идентитет:

$$\begin{aligned}&25\left((b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7\right)\left((b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\right)\\ =\ &21\left((b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5\right)^2 .\end{aligned}$$

Упутство. Увести смену $x=a-c$, $y=b-a$, ($b-c=x+y$) и искористити: $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$, $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)$, $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2$.

(б) Ако је $a+b+c+d=0$, доказати да је:

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

40. Нека је $B=\{0,1,2,3,4\}$ и $\oplus$ и $\odot$ операције на скупу B дефинисане са

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(а) Израчунати $(4\oplus 3)\odot(2\oplus 1)$.
(б) Доказати да важи:
• $x\oplus y=y\oplus x$, за све x и y из B;
• $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$, за све x, y и z из B;
• $x\oplus 0=x$ за свако x из B;
• за свако x из B постоји y из B да је $x\oplus y=0$;
• $x\odot y=y\odot x$, за све x и y из B;
• $(x\odot y)\odot z=x\odot(y\odot z)$, за све x, y и z из B;
• $x\odot 1=x$, за свако x из B;
• за свако x из B, ако је $x\neq 0$ онда постоји y из B да је $x\odot y=1$.
(в) У скупу B решити следеће једначине:
• $(3\odot x)\oplus 2=3$;
• $x^2\oplus x\oplus 3=0$, $(x^2=x\odot x)$;
• $(x\oplus 1)\odot(x\oplus 2)\odot(x\oplus 3)=0$.
(г) Доказати да за произвољне x, y из B важи: $(x\oplus y)^5=x^5\oplus y^5$.

Напомена. На скупу $\{0,1,2,3,4\}$, који се најчешће означава са $\mathbb{Z}_5$ (свих остатака који се добијају при дељењу са 5), дефинисане су заправо операције *сабирање* и *множење по модулу* 5. Ове операције се стандардно обележавају редом са $+_5$ и $\cdot_5$:

$$x+_5 y=\text{ остатак који се добија при дељењу } x+y \text{ са } 5$$

и

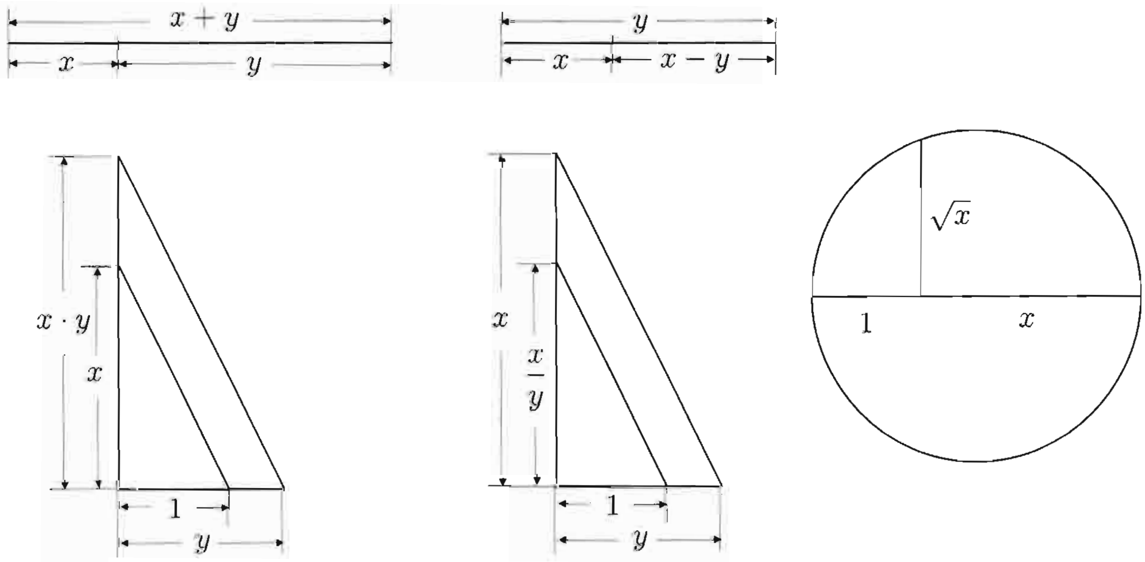
$$x\cdot_5 y=\text{ остатак који се добија при дељењу } x\cdot y \text{ са } 5.$$[54]

Лако се може приметити да $\mathbb{Z}_5$ са операцијама $+_5$ и $\cdot_5$ и елементима 0 и 1 задовољава све аксиоме (**Sk**) $\cdots$ (**01**) (наведене на страни 136). Другим речима,

[54] $+$ и $\cdot$ представљају уобичајене операције сабирања и множења природних бројева.

скуп $\mathbb{Z}_5$ са овако дефинисаним операцијама и овако изабраним елементима 0 и 1 формира једно *поље*. Може се доказати да за сваки прост број p, сваки од скупова $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ са операцијама $+_p$ и $\cdot_p$ и елементима 0 и 1 образује једно поље. Међутим, ако број p није прост одговарајућа структура није поље (неће бити задовољено својство (**Mi**)). Тако скуп $\mathbb{Z}_6$ са операцијама $+_6$ и $\cdot_6$ и елементима 0 и 1 није поље, јер је, на пример, $2 \cdot_6 0 = 0$, $2 \cdot_6 1 = 2$, $2 \cdot_6 3 = 0$, $2 \cdot_6 4 = 2$, $2 \cdot_6 5 = 4$, па не важи $(\forall x \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\})\,(\exists y \in \mathbb{Z}_6)\, x \cdot_6 y = 1$, тј. не постоји $y \in \mathbb{Z}_6$ такав да је $2 \cdot_6 y = 1$.
(д) Да ли је могуће домене коначних поља $\mathbf{Z}_p$ (p је прост број) уредити тако да она постану уређена поља? Зашто?

41. *Питагорејска права* је уређено поље, тј. одговарајућа структура над скупом $\mathbb{K}$ такозваних *конструктибилних реалних бројева*: позитиван број x је конструктибилан ако се лењиром и шестаром може конструисати дуж чија је дужина x јединица мере, док је негативан x конструктибилан ако је то $-x$, а претпоставља се и да је 0 конструктибилан број.



42. Нека је **F** произвољно уређено поље. Доказати следећа тврђења.
(а) За сваки елемент x из F постоји *јединствен* елемент y такав да је $x + y = 0$.
Упутство. Ако је $x + y_1 = 0$ и $x + y_2 = 0$, онда је

$$y_1 = 0 + y_1 = (x + y_2) + y_1 = \cdots = (x + y_1) + y_2 = \cdots$$

(б) За сваки елемент x из F различит од 0 постоји *јединствен* елемент y такав да је $x \cdot y = 1$.
(в) За произвољне елементе x и y из F,
- $x \cdot 0 = 0$,
- $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

• $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,
• ако је $x < 0$ и $y < 0$, онда је $0 < x \cdot y$,
• ако је $x \neq 0$, онда је $x^2 > 0$,
• $1 > 0$,
• ако је $x > 0$, онда је $x^{-1} > 0$.

43. Доказати следећа веома значајна својства скупа реалних бројева $\mathbb{R}$.

• За сваки позитиван реалан број ε постоји природан број n такав да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

• За сваки реалан број a постоји јединствен цео број n такав да је $n \leqslant a < n+1$ што омогућава дефиницију функције *цео део*, $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, са

$$[x] = \text{ највећи цео број не већи од } x.$$

• Ако за сваки природан број n важи $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$, онда је $x = 0$.

• Између свака два различита реална броја a и b постоји рационалан број.

• Сваком реалном броју одговара децимални запис облика $a, c_1c_2c_3\ldots$, при чему је a цео број, а $c_1, c_2, c_3, \ldots$ су цифре декадног система.

Упутство. Искористити Архимедову теорему.

44. Одредимо приближну вредност реалног броја $\sqrt{2}$ користећи такозвани *децималски поступак* – поступак трагања за децималним записом облика $a, c_1c_2c_3\ldots$

Нека је $r = \sqrt{2}$. Тада је $r^2 = 2$. Како је $1^2 = 1 < r^2 = 2 < 2^2 = 4$, имамо да је $1 < r < 2$, тј. $a = 1$. Тада је $r = a + \frac{r_1}{10} = 1 + \frac{r_1}{10}$, за неко r_1, па је

$$\left(1 + \frac{r_1}{10}\right)^2 = 2, \text{ тј. } 100 + 20r_1 + r_1^2 = 200.$$

Будући да
за $r_1 = 0$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 100 < 200$,
за $r_1 = 1$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 121 < 200$,
за $r_1 = 2$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 144 < 200$,
за $r_1 = 3$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 169 < 200$,
за $r_1 = 4$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 196 < 200$,
за $r_1 = 5$ имамо $100 + 20r_1 + r_1^2 = 225 > 200$,
следи да је $c_1 = 4$ и $r_1 = 4 + \frac{r_2}{10}$, за неко r_2, па је $r = 1 + \frac{4}{10} + \frac{r_2}{100}$. Сада је

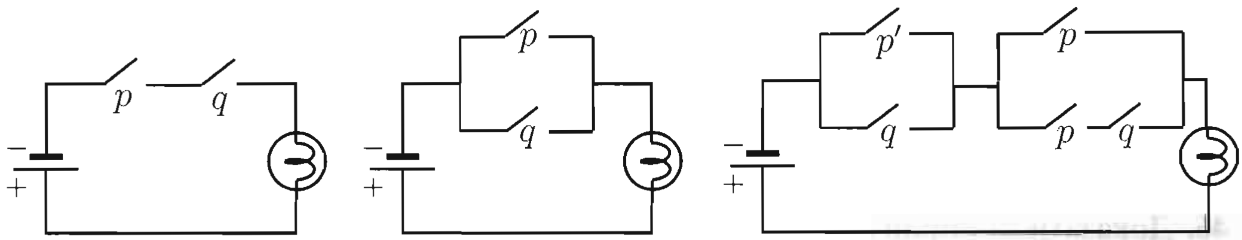
$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{r_2}{100}\right)^2 = 2, \text{ тј. } 280r_2 + r_2^2 = 400.$$

Како
за $r_2 = 0$ имамо $280r_2 + r_2^2 = 0 < 400$,

за $r_2 = 1$ имамо $280r_2 + r_2^2 = 281 < 400$,
за $r_2 = 2$ имамо $280r_2 + r_2^2 = 564 > 400$,
па је $c_2 = 1$ и $r = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{r_3}{1000}$, за неко r_3.
Дакле, $\sqrt{2} \approx 1,41\ldots$
Израчунати приближну вредност броја $\sqrt[3]{2}$.

Математичка логика

45. Електрична кола. Булове алгебре су постале веома значајне са практичног становишта када је уочена веза између Булових таблица истинитости и електричних кола.

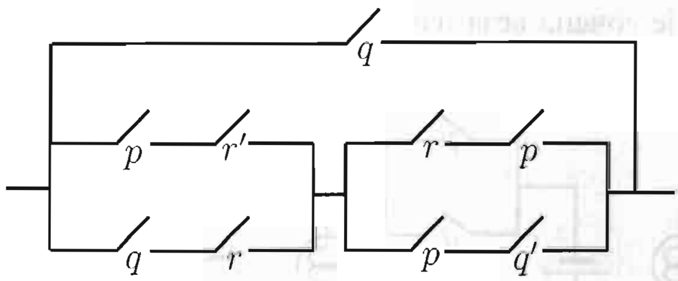


Посматраћемо електрична кола која чине батерија, сијалица и прекидачи. Могуће је да се у једном колу појави више прекидача који се или сви истовремено укључују или се сви истовремено искључују; тада све такве прекидаче означавамо истим словом. Са p' означавамо прекидач који се укључује ако је прекидач p искључен, и обрнуто, p' се искључује уколико је p укључен. Коло приказано са леве стране на претходној слици називамо $p \curlywedge q$-коло, а коло приказано у средини – $p \curlyvee q$-коло.
Заиста, ако вредност 1 доделимо прекидачима када су укључени (затворени), а вредност 0 када су искључени (отворени), тада ће кроз $p \curlywedge q$-коло протицати струја једино уколико је и једном и другом прекидачу додељена вредност 1, у сваком другом случају струја неће протицати. Слично, струја ће протицати кроз $p \curlyvee q$-коло ако је бар једном од прекидача додељена вредност 1, а неће протицати једино ако је вредност оба прекидача 0. Другим речима, протицање струје кроз ова кола се „понаша“ по таблицама за *конјункцију* и *дисјункцију*. Прекидач p' је очигледно негација прекидача p.
Није тешко закључити да последњем колу на претходној слици одговара израз $(p' \curlyvee q) \curlywedge (p \curlyvee (p \curlywedge q))$. Међутим, после краће анализе овог сложенијег кола видећемо да се оно понаша идентично као $p \curlywedge q$-коло, што је значајно са практичног становишта у смислу конструкције неког електричног кола у реалности. Закони Булове алгебре (страна 145) нам омогућавају упрошћавање сложених електричних кола. Баш као што смо „упрошћавали“ (бројевне)

изразе користећи законе поља, тако упрошћавамо и Булове изразе употребљавајући законе Булове алгебре.

$$
\begin{aligned}
(p' \curlyvee q) \curlywedge (p \curlyvee (p \curlywedge q)) &= (p' \curlyvee q) \curlywedge p && \textbf{B7}\\
&= p \curlywedge (p' \curlyvee q) && \textbf{B4}\\
&= (p \curlywedge p') \curlyvee (p \curlywedge q) && \textbf{B10}\\
&= 0 \curlyvee (p \curlywedge q) && \textbf{B12}\\
&= p \curlywedge q && \textbf{B13}
\end{aligned}
$$

Упростити следеће електрично коло.



46. Доказати да у произвољној Буловој алгебри $(B, \curlyvee, \curlywedge, ', 0, 1)$ за све елементе x, y из B важе једнакости:
(а) $(x')' = x$;
(б) $0' = 1$;
(в) $1' = 0$;
(г) ако је $x \curlywedge y = 0$ и $x \curlyvee y = 1$, онда је $y = x'$;
(д) $(x \curlywedge y)' = x' \curlyvee y'$;
(ђ) $(x \curlyvee y)' = x' \curlywedge y'$;
(е) $(x \curlywedge y) \curlyvee (x' \curlywedge y) \curlyvee (x \curlywedge y') \curlyvee (x' \curlywedge y') = 1$;
(ж) $x \curlyvee y = y$ ако и само ако је $x \curlywedge y = x$.

47. Задатак из геометрије!? Нека је
$T = \{1, 2, 3, 4\}$,
$P = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$,
$R = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.
Елементе скупа T назовимо *тачкама*, елементе скупа P *правама*, а елементе скупа R *равнима*. Ако три или више тачака припада једној правој, кажемо да су колинеарне; у супротном називамо их неколинеарним. Ако четири или више тачака припада једној равни кажемо да су компланарне; у супротном називамо их некомпланарним. Проверити важење следећих тврђења.
(I1) Свака *права* садржи најмање две различите *тачке*.
(I2) Постоји најмање једна *права* која садржи две *тачке*.
(I3) Постоји највише једна *права* која садржи две различите *тачке*.

(I4) Свака *раван* садржи најмање три неколинеарне *тачке*.
(I5) Постоји најмање једна *раван* која садржи три *тачке*.
(I6) Постоји највише једна *раван* која садржи три неколинеарне *тачке*.
(I7) Ако две различите *тачке* неке *праве* припадају једној *равни*, онда свака *тачка* те *праве* припада истој *равни*.
(I8) Ако две различите *равни* имају једну заједничку *тачку*, онда оне имају најмање још једну заједничку *тачку*.
(I9) Постоје четири некомпланарне *тачке*.

48. Исказни рачун је специјалан случај предикатског рачуна првог реда за језик који садржи само релацијске симболе дужине нула.Опредељујући се за овакав језик, (углавном) занемарујемо знак једнакости ($=$), квантификаторе ($\forall$ и $\exists$) будући да формуле не могу садржавати променљиве, те и скуп променљивих (Var). Релацијски знаци дужине 0 често се називају *исказна слова*.
Нека је $\mathcal{L} = \{p, q, r, p_1, q_1, r_1, \dots\}$ језик који садржи само исказна слова. Како свако исказно слово, на било ком скупу M, интерпретирамо релацијом дужине нула[55] $p^{\mathrm{M}} : M^0 \to \{0, 1\}$, при чему је M^0 синглтон (скуп свих пресликавања празног скупа у скуп M), домен интерпретације је небитан, те се интерпретација исказног слова своди на додељивање тачно једне од вредности 0 („нетачно") или 1 („тачно"). Зато, под моделом језика $\mathcal{L}$ може се подразумевати само „расподела" истине, односно неистине, исказним словима, односно пресликавање $\mathrm{w} : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$. Имајући у виду истинитосне таблице логичких везника лако утврђујемо важење, односно неважење било које формуле језика $\mathcal{L}$ у било ком моделу. Тако, на пример, ако је

$$\mathrm{w} = \begin{pmatrix} p & q & r & p_1 & q_1 & r_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \end{pmatrix},$$

онда је $\mathrm{w} \models p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(q \vee (p \wedge r))$ и $\mathrm{w} \not\models p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(q \vee (p \wedge \neg r))$.
(i) Наћи, уколико постоје, бар један модел у коме важи формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p_1 \Rightarrow q_1) \Rightarrow ((p \Rightarrow p_1) \Rightarrow (q \Rightarrow q_1))$$

и бар један модел у коме ова формула не важи.
(ii) Доказати да је формула $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow ((p_3 \Rightarrow p_1) \Rightarrow (p_4 \Rightarrow p_1))$ ваљана.
(iii) Нека је $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ скуп свих (исказних) формула, а $\mathcal{F}_{\mathcal{L},\mathrm{C}}$ скуп свих (исказних) формула у којима се појављују само исказни везници из C, при чему је $\mathrm{C} \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$. Скуп везника C је *довољан*, ако за сваку формулу φ из $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ постоји формула ψ из $\mathcal{F}_{\mathcal{L},\mathrm{C}}$ таква да је $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$.

[55] Као што и неки релацијски знак дужине n, $n \geqslant 1$, интерпретирамо релацијом дужине n схваћеном као пресликавање $R^{\mathrm{M}} : M^n \to \{0, 1\}$.

(а) Доказати да је сваки од скупова $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$ довољан.

(б) Доказати да је сваки од бинарних везника **nand** и **nor** довољан, при чему је $p\,\mathbf{nand}\,q = \neg(p \wedge q)$ и $p\,\mathbf{nor}\,q = \neg(p \vee q)$.

(в) Имајући у виду значење формуле $(\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \gamma)$ можемо је записати и у облику **if**-формуле: $\mathbf{if}\,\alpha\,\mathbf{then}\,\beta\,\mathbf{else}\,\gamma$. Нека су **if**-формуле сва исказна слова, логичке константе $\top$ и $\bot$ и све формуле којима су исказна слова и константе „повезани" логичким везником дужине три $\mathbf{if} \ldots \mathbf{then} \ldots \mathbf{else} \ldots$.

– Доказати да је свака исказна формуле еквивалентна некој **if**-формули.

– Доказати да су еквивалентне следеће формуле

$$\mathbf{if}\ (\mathbf{if}\ p\ \mathbf{then}\ q\ \mathbf{else}\ r)\ \mathbf{then}\ q_1\ \mathbf{else}\ r_1$$

и

$$\mathbf{if}\ p\ \mathbf{then}\ (\mathbf{if}\ q\ \mathbf{then}\ q_1\ \mathbf{else}\ r_1)\ \mathbf{else}\ (\mathbf{if}\ r\ \mathbf{then}\ q_1\ \mathbf{else}\ r_1).$$

– Кажемо да је **if**-формула *проста* уколико је услов (формула која се налази између **if** и **then**) исказно слово. Доказати да је свака **if**-формула еквивалентна некој простој **if**-формули.

– Кажемо да је **if**-формула *нормална* ако је проста и ако су све њене **if**-потформуле облика $\mathbf{if}\,p\,\mathbf{then}\,\alpha\,\mathbf{else}\,\beta$, при чему је p исказно слово које се не појављује ни у α нити у β. Доказати да је свака **if**-формула еквивалентна некој нормалној **if**-формули.

49. Нелогички део језика педикатског рачуна првог реда чине следећи симболи: $\mathrm{Rel}_{\mathcal{L}} = \{R, S\}$, $\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} = \{F, G\}$, $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}} = \{e\}$, при чему је $\mathrm{ar}(R) = \mathrm{ar}(F) = 2$, $\mathrm{ar}(S) = \mathrm{ar}(G) = 1$.

(i) Који је од следећих низова симбола израз, који формула, а који ни једно ни друго: $F(G(x), G(y))$; $S(F(x, G(e))$; $R(x, S(x))$; $R(e, e)$; $\forall y R(x, e)$; $\forall x \exists y R(x, y)$; $\forall x(R(x, G(y)) \Rightarrow F(x, y))$?

(ii) За свако појављивање променљиве у формули одредити да ли је оно слободно или везано:
$\forall(R(x, y) \wedge \exists y(R(x, y) \Rightarrow S(x))$,
$\forall x(R(x, y) \wedge \exists y R(z, y)) \vee R(x, y)$.

(iii) Дати језик је интерпретиран на скуповима $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и X, $X = \{a, b, c\}$.

Интерпретација на $\mathbb{Z}$:

$R^{\mathbf{Z}} = \leqslant$ (уређење целих бројева),
$S^{\mathbf{Z}} =$ „*бити позитиван*" $= \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
$F^{\mathbf{Z}} = +$ (сабирање целих бројева),
$G^{\mathbf{Z}} = g$, при чему је $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{Z}$,
$e^{\mathbf{Z}} = 0$.

Интерпретација на $\mathbb{N}$:

$R^{\mathbf{N}} = \mid$ (дељивост природних бројева),
$S^{\mathbf{N}} =$ „*бити прост*“ $= \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$,
$F^{\mathbf{N}} = \cdot$ (множење природних бројева),
$G^{\mathbf{N}} = h$, при чему је $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $h(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{N}$,
$e^{\mathbf{N}} = 1$.

Интерпретација на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$R^{\mathbf{P}(\mathbb{N})} = \subseteq$ (подскуп),
$S^{\mathbf{P}(\mathbb{N})} =$ „*бити коначан*“,
$F^{\mathbf{P}(\mathbb{N})} = \cap$ (пресек скупова),
$G^{\mathbf{P}(\mathbb{N})} = {}^c$ (комплемент скупа у односу на $\mathbb{N}$, ${}^c : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ и $x^c = \mathbb{N} \setminus x$),
$e^{\mathbf{P}(\mathbb{N})} = \emptyset$.

Интерпретација на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$R^{\mathbf{X}} = \{(a, c), (b, c), (c, c), (a, b)\}$,
$S^{\mathbf{X}} = \{a, c\}$,
$F^{\mathbf{X}} = *$, при чему је $*$ бинарна операција дефинисана таблицом

$$\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & b & b & b \\ b & b & b & c \\ c & c & b & b \end{array},$$

$G^{\mathbf{X}} = \ell$, при чему је $\ell : X \to X$ дато са

$$\ell = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix},$$

$e^{\mathbf{X}} = c$.

(a) Одредити вредности израза $F(F(x, e), G(y))$, $G(F(x, x))$ и $F(G(x), G(x))$ у

– $\mathbf{Z}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ -2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{N}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ \{1, 2\} & \{2, 3\} & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{X}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ a & b & \cdots \end{pmatrix}$.

(б) Испитати тачност формула $R(F(x,e),G(y))$ и $S(F(x,x)) \Rightarrow R(G(x),G(y))$ у

– $\mathbf{Z}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ -2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{N}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ 2 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ \{1,2\} & \{2,3\} & \cdots \end{pmatrix}$;

– $\mathbf{X}$ при валуацији променљивих $\mu = \begin{pmatrix} x & y & \cdots \\ a & b & \cdots \end{pmatrix}$.

(в) Испитати тачност реченица

- $\exists x \forall y R(x,y)$,
- $\forall x S(x) \vee \forall x \neg S(x)$,
- $\exists x \neg S(x)$,
- $\neg S(G(e)))$,
- $\forall x \forall y (S(x) \wedge S(y) \Rightarrow S(F(x,y)))$,
- $\forall x \forall y (R(x,y) \Rightarrow R(G(y),G(x)))$,
- $\forall x (S(x) \Rightarrow \exists y R(x,F(x,y)))$,
- $\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))$,

редом у моделима $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}(\mathbb{N})$, $\mathbf{X}$.

(г) Реченицама датог језика изразити следећа својства структуре $\mathbf{N}$.

– *Производ два проста броја није прост број.*

– *Сваки прост број већи од 2 је непаран.*

(д) Реченицама датог језика изразити следећа својства структуре $\mathbf{P}(\mathbb{N})$.

– *Комплемент коначног скупа није коначан скуп.*

– *Пресек два коначна скупа је коначан скуп.*

– *Постоји скуп који није коначан и чији комплемент није коначан.*

(ђ) За сваку од наредних реченица дефинисати (ако је то могуће) бар једну интерпретацију језика при којој је та реченица тачна и бар једну интерпретацију при којој реченица није тачна.

- $\forall x S(x) \wedge \forall x R(x,x) \Rightarrow \forall x (S(x) \wedge R(x,x))$,
- $\forall x \neg R(x,x) \vee \forall x R(x,x)$,
- $\exists x S(x) \vee \exists x R(x,x) \Rightarrow \exists (S(x) \vee R(x,x))$,
- $\forall x (\neg R(x,x) \vee R(x,x))$.

(е) Које су од следећих реченица датог језика ваљане?

- $\forall x S(x) \wedge \forall x R(x,x) \Rightarrow \forall x (S(x) \wedge R(x,x))$,
- $\exists x (R(x,x) \Rightarrow S(x))$,
- $\forall x \neg R(x,x)$,

• $\exists x S(x) \vee \exists x R(x,x) \Rightarrow \exists x(S(x) \vee R(x,x))$,
• $\forall x(\neg R(x,x) \vee R(x,x))$,
• $\forall x \exists y(S(x) \vee S(y)) \Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg S(x) \wedge \neg S(y))$.

50. Језик $\mathcal{L} = \{*, \star, a, b\}$ ($\mathrm{Fun}_{\mathcal{L}} = \{*, \star\}$, $\mathrm{ar}(*) = \mathrm{ar}(\star) = 2$, $\mathrm{Const}_{\mathcal{L}} = \{a, b\}$) интерпретиран је на више начина.

На скупу $\mathbb{Z}$, операцијски знаци $*$ и $\star$ су интерпретирани стандардним операцијама $+$ и $\cdot$, редом, а симболи константи a и b са 0 и 1, редом.

На скупу $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, операцијски знаци $*$ и $\star$ су интерпретирани редом операцијама $\oplus$ и $\odot$, при чему је

$$(k,\ell) \oplus (m,n) = (k+m, \ell+n) \text{ и } (k,\ell) \odot (m,n) = (k \cdot m - \ell \cdot n, k \cdot n + \ell \cdot m),$$

а симболи константи a и b са $(0,0)$ и $(1,0)$, редом.

На $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ – скупу свих квадратних матрица типа 2×2 над $\mathbb{Z}$ (тј. свих квадратних „шема“ облика $\begin{bmatrix} k & \ell \\ m & n \end{bmatrix}$) операцијски знаци $*$ и $\star$ су интерпретирани редом операцијама $\boxplus$ и $\boxdot$, при чему је

$$\begin{bmatrix} k & \ell \\ m & n \end{bmatrix} \boxplus \begin{bmatrix} k' & \ell' \\ m' & n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+k' & \ell+\ell' \\ m+m' & n+n' \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} k & \ell \\ m & n \end{bmatrix} \boxdot \begin{bmatrix} k' & \ell' \\ m' & n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kk'+\ell m' & k\ell'+\ell n' \\ mk'+nm' & m\ell'+nn' \end{bmatrix},$$

а симболи константи a и b са $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, редом.

Означимо добијене структуре са

$\mathbf{A} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$,

$\mathbf{B} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot, (0,0), (1,0))$ и

$\mathbf{C} = \left(\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}), \boxplus, \boxdot, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

Наћи бар по једну реченицу језика $\mathcal{L}$ која важи у једној од ових структура и не важи у остале две.

51. Ако су α, β и γ произвољне предикатске формуле, доказати да је:
(а) $\vdash (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$;
(б) $\vdash (\gamma \Rightarrow \alpha) \vee (\gamma \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta)$;
(в) $\vdash (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$;
(г) $\vdash \forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \forall x \beta)$, ако x није слободна променљива у формули α;
(д) $\vdash \exists x(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x \alpha \Rightarrow \exists x \beta)$.

52. Доказати да се следећа „*лева*" правила извођења могу користити при доказивању.

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathrm{cut} \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \gamma}\ \Rightarrow_{\mathrm{L}}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \gamma}\ \wedge_{\mathrm{L}} \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}\ \vee_{\mathrm{L}}$$

$$\frac{\Gamma, \forall x\alpha, \alpha(x := t) \vdash \gamma}{\Gamma, \forall x\alpha \vdash \gamma}\ \forall_{\mathrm{L}} \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \ (x \text{ није слободно у формулама из } \Gamma \text{ и у } \gamma)}{\Gamma, \exists x\alpha \vdash \gamma}\ \exists_{\mathrm{L}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \alpha, \neg\alpha \vdash \bot}\ \neg_{\mathrm{L}} \qquad \frac{\Gamma, u = v, \alpha(x := u) \vdash \gamma}{\Gamma, u = v, \alpha(x := v) \vdash \gamma}\ =_{\mathrm{L}}$$

53. Нека су F и G унарни операцијски симболи. Ако је

- ι_F формула $\forall x \forall y (F(x) = F(y) \Rightarrow x = y)$,
- ι_G формула $\forall x \forall y (G(x) = G(y) \Rightarrow x = y)$,
- σ_F формула $\forall y \exists x F(x) = y$,
- ν_F формула $\forall x (F(F(x)) = x)$,
- κ формула $\forall x (F(G(x)) = G(F(x)))$,
- δ формула $\forall x ((F(x) = x) \vee (G(x) = x))$,

доказати: (а) $\nu_F \vdash \iota_F \wedge \sigma_F$; (б) $\iota_F, \iota_G, \delta \vdash \kappa$.

54. Доказати:

- $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y (x + y = y + x)$,

(*Упутство.* Доказати најпре да је $\mathbf{PA} \vdash \forall y (0 + y = y + 0)$.)

- $\mathbf{PA} \vdash \forall x (x \leqslant x)$,
- $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y)$,
- $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$,
- $\mathbf{PA} \vdash \forall x (x \leqslant 0 \Rightarrow x = 0)$,
- $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y (x \leqslant S(y) \Rightarrow x \leqslant y \vee x = S(y))$,
- $\mathbf{PA} \vdash \forall x \forall y (x \leqslant y \vee y)$,
- $\mathbf{PA} \vdash \exists x \alpha(x) \Rightarrow \exists x (\alpha(x) \wedge \forall y (y < x \Rightarrow \neg\alpha(y)))$, за сваку формулу α,
- $\mathbf{PA} \vdash (\alpha(0) \wedge \alpha(S(0))) \wedge \forall y (\alpha(y) \Rightarrow \alpha(S(S(y)))) \Rightarrow \forall x \alpha(x)$, за сваку формулу α.

55. На скупу $\mathbb{M} = \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{1,2\} \times \mathbb{Z}$ интерпретиран је језик аритметике $\{S, +, \cdot, 0\}$ на следећи начин:

$S^{\mathbf{M}}(i,n) = (i, n+1)$, $i = 0, 1, 2$,

$(0,n) +^{\mathbf{M}} (i,m) = (i,m) +^{\mathbf{M}} (0,n) = (i, n+m)$, $i = 0, 1, 2$, и
$(i,n) +^{\mathbf{M}} (j,m) = (i, n+m)$, $i = 1, 2$,

$(0,n) \cdot^{\mathbf{M}} (i,m) = (i,m) \cdot^{\mathbf{M}} (0,n) = (i, n \cdot m)$, $i = 0, 1, 2$, и
$(i,n) \cdot^{\mathbf{M}} (j,m) = (i, n \cdot m)$, $i = 1, 2$, $0^{\mathbf{M}} = (0,0)$.

Доказати да у моделу $\mathbf{M}$ важе све аксиоме Пеанове аритметике, осим аксиоме индукције $\mathbf{PA8}$. Такође, доказати:

- $\mathbf{M} \not\models \forall x \forall y (x + y = y + x)$;
- $\mathbf{PA} - \mathbf{PA8} \nvdash \forall x (\neg x' = x)$, при чему је $\mathbf{PA} - \mathbf{PA8}$ теорија коју чини седам аксиома Пеанове аритметике без аксиоме индукције.

56. Својства из задатка 42 изразити реченицама језика поља $\{\leqslant, +, \cdot, -, 0, 1\}$ и за неке од њих (све) формално доказати да су последице теорије $\mathbf{FO}$. Доказати затим и $\mathbf{FO} \vdash \forall x \forall y \exists z\, (x \leqslant z \wedge y \leqslant z)$.

57. Језик уређених поља $\{\leqslant, +, \cdot, -, 0, 1\}$ проширен је бинарним релацијским симболима $<, \geqslant, >$, унарним операцијским симболима $|\,|$ и $/2$ (овај последњи ће здесна „дејствовати“ на аргумент) и константом 2, а теорија $\mathbf{FO}$ следећим аксиомама за свака два терма u и v: $u < v \Leftrightarrow \neg(u \leqslant v)$, $u \geqslant v \Leftrightarrow v \leqslant u$, $u > v \Leftrightarrow v < u$, $\forall x((x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x) \wedge (x < 0 \Rightarrow |x| = -x))$, $2 = 1 + 1$, $u/2 = u \cdot 2^{-1}$.

Напомена. Језик и теорија $\mathbf{FO}$ проширени су само зато да бисмо могли краће да запишемо реченице и да у проширеном језику не можемо исказати ништа што раније нисмо могли.

Усвајамо и следећи уобичајен договор да формула $(\forall x > u)\,\alpha$ означава формулу $\forall x (x > u \Rightarrow \alpha)$, а $(\exists x > u)\,\alpha$ формулу $\forall x (x > u \wedge \alpha)$, и слично за било коју другу промењиву различиту од x и за остале знаке $<, \leqslant, \geqslant$.

(i) Доказати да су следеће реченице последице теорије уређених поља.

(а) $\forall x \neg (x < x)$,

(б) $\forall x \forall y (|x| < y \Leftrightarrow (-y < x \wedge x < y))$,

(в) $\forall x (|x| \geqslant 0)$,

(г) $\forall x \forall y (|x + y| < |x| + |y|)$,

(д) $\forall x (x/2 + x/2 = x)$,

(ђ) $\forall x \forall y \forall z \forall z_1 (|y - z| < x/2 \Rightarrow (|y - z_1| < x/2 \Rightarrow |z - z_1| < x))$,

(е) $\forall x \forall x_1 (\neg (x = x_1) \Rightarrow |x - x_1|/2 > 0)$.

(ii) Нека је језик теорије уређених поља проширен унарним операцијским симболом F и нека је $\lambda_{F,+\infty}(z)$ реченица $(\forall x > 0)(\exists y_1)(\forall y \geqslant y_1)|F(y)-z| < x$. Доказати:

- $\mathbf{FO} \vdash \lambda_{F,+\infty}(z) \Leftrightarrow (\forall x \geqslant 0)(\exists y_1)(\forall y \geqslant y_1)|F(y) - z| \leqslant x$,
- $\mathbf{FO} \vdash \lambda_{F,+\infty}(z) \Leftrightarrow (\forall x > 0)(\exists y_1)(\forall y \geqslant y_1)|F(y) - z| < x/2$,
- $\mathbf{FO} \vdash \lambda_{F,+\infty}(z_1) \wedge \lambda_{F,+\infty}(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
- Ако је $\varsigma_F(x)$ формула

$$(\forall z > 0)(\exists z_1 > 0)(\forall y)(|x - y| < z_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| < z).$$

доказати

$$\mathbf{FO}, \varsigma_F(x), F(x) > x_1 \vdash (\exists z > 0)(\forall y)(|x - y| < z \Rightarrow F(y) > x_1).$$

58. Доказати да постоји неархимедско уређено поље које је елементарно еквивалентно уређеном пољу рационалних бројева.

59. Ако је $\mathbf{A}$ модел комплетне аритметике, $\mathbf{A} \models \mathbf{Th}(\mathbf{N})$, тада за елементе x, y домена A пишемо $x \mid_{\mathbf{A}} y$ (и читамо „x дели y“), ако је $x \cdot_{\mathbf{A}} z = y$, за неки z из A. Доказати да постоји модел аритметике $\mathbf{A}$ чији домен садржи елемент a такав да за сваки прост број p важи $\underbrace{1^{\mathbf{A}} +_{\mathbf{A}} \cdots +_{\mathbf{A}} 1^{\mathbf{A}}}_{p \text{ пута}} \mid_{\mathbf{A}} a$.

60. Ако за неко поље $\mathbf{F}$ постоји природан број n, $n > 1$, такав да је

$$\underbrace{1^{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} \cdots +_{\mathbf{F}} 1^{\mathbf{F}}}_{n \text{ пута}} = 0^{\mathbf{F}},$$

кажемо да је то поље *коначне карактеристике*, а најмањи такав природан број назива се *карактеристика* поља $\mathbf{F}$ и означава се са $\mathrm{char}(\mathbf{F})$. На пример, за сваки прост број p, $\mathbf{Z}_p$ је поље (задатак 40) и $\mathrm{char}(\mathbf{Z}_p) = p$. Уколико је, пак, за сваки природан број n, $\underbrace{1^{\mathbf{F}} +_{\mathbf{F}} \cdots +_{\mathbf{F}} 1^{\mathbf{F}}}_{n \text{ пута}} \neq 0^{\mathbf{F}}$, кажемо да је $\mathbf{F}$ поље *карактеристике* 0.

(а) Ако нека реченица на језику поља важи у свим пољима коначне карактеристике, доказати да важи и у пољу карактеристике нула.

(б) Ако реченица на језику поља важи у свим пољима карактеристике 0, доказати да постоји природан број n такав да ова реченица важи у свим пољима карактеристике веће или једнаке n.

(в) Нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ формула без квантификатора на језику поља, таква да реченица $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ важи у свим пољима $\mathbf{Z}_p$. Доказати да реченица $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ важи у пољу рационалних бројева $\mathbf{Q}$.

61. Парадоксална декомпозиција сфере. Хауздорф је 1914. године доказао да група ротација јединичне сфере,$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, чије осе садрже координатни почетак, има слободну подгрупу G са два генератора, рецимо a и b, тј. подгрупу коју чине све речи (укључујући и празну реч) над азбуком $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ сведених по законима групе. Сваки елемент ове групе може се представити у облику $a^{k_1}b^{\ell_1} \cdots a^{k_n}b^{\ell_n}$, где су k_i и ℓ_i, $i = 1, \dots, n$, цели бројеви. Како k_i и ℓ_i могу бити једнаки 0, и неутрални елемент ове групе је могуће представити на овакав начин. Користећи ту чињеницу, показао је да постоји подскуп E од S такав да четири копије скупа E покривају сферу S.

Ево доказа. Нека је $\sim$ бинарна релација на S дефинисана са

$$x \sim y \text{ акко } y = g(x), \text{ за неко } g \text{ из } G.$$

Лако се може показати да је $\sim$ релација еквиваленције. Како је G пребројива група, свака класа еквиваленције ($x_\sim = \{y \in S \mid y \sim x\}$) такође је пребројива. Нека је A унија свих класа које садрже бар једну фиксну тачку (тачку која се пресликава у саму себе) неке неидентичке ротације из G. Свака ротација има тачно две фиксне тачке (пресечне тачке осе ротације са сфером S), па како је G пребројив, следи да је и A пребројив скуп као пребројива унија пребројивих скупова.

На основу аксиоме избора, постоји скуп B такав да је $B \subseteq S$ и за свако $x \in S$,

$$|x_\sim \cap B| = 1.$$

Ако $x \in S \setminus A$, тада x није фиксна тачка ниједне од ротација из G, па $x \notin x_\sim \cap B$. Ако је $x_\sim \cap B = \{y\}$, онда према претходном $x \neq y$ и $x \sim y$, па постоји $g_x \in G$ тако да је $x = g_x(y)$. Нека је

$$C = \{a^k f \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge f \in G\} \text{ и } E = \{x \in S \setminus A \mid g_x \in C\}.$$

Тада, из $m \neq n$ следи да су $b^m[E]$ и $b^n[E]$ дисјунктни, тј. немају заједничких тачака. Заиста, ако би постојало $x \in E$ такво да је $b^m(x) = b^n(x)$, имали бисмо да је $b^m b^{-n}(x) = x$, тј. да је x фиксна тачка неидентичке ротације $b^m b^{-n}$ из G (b је генератор), што је супротно дефиницији скупа E.

Приметимо, даље, да је $C \cup aC = G$, при чему је $aC = \{ag \mid g \in C\}$, одакле следи да је $S \setminus A \subseteq E \cup a[E]$. Такође, како је A пребројив скуп, а група ротација сфере S чији центри садрже координатни почетак непребројива, постоји ротација r из те групе таква да је $A \cap r[A] = \emptyset$. Одавде је $r[A] \subseteq E \cup a[E]$, тј. $A \subseteq r^{-1}[E] \cup r^{-1}a[E]$, а тиме и $S \subseteq E \cup a[E] \cup r^{-1}[E] \cup r^{-1}a[E]$.

Да бисмо доказали Банах–Тарски парадокс, треба прецизирати појам *разложиве једнакости*. Кажемо да су подскупови A и B разложиво једнаки са n делова, у ознаци $A \sim_n B$, уколико постоје међусобно дисјунктни непразни подскупови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скупа A и изометрије $f_1, f_2, \ldots, f_n$ простора $\mathbb{R}^3$ такви да је
– $A = A_1 \cup \cdots A_n$,
– $B = f[A_1] \cup \cdots \cup f[A_n]$,
– $f_i[A_i] \cap f_j[A_j] = \emptyset, i \neq j$.
Непосредна последица Кантор–Бернштајнове теореме је следеће тврђење које се односи на простор $\mathbb{R}^3$: ако је $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $A \sim_m Y$ и $X \sim_n B$, онда је $A \sim_{m+n} B$.
Парадоксалну композицију јединичне сфере вршимо на следећи начин. Нека је $E^* = \bigcup\{xE \mid 0 < x \leqslant 1\}$ и нека је t транслација простора $\mathbb{R}$ таква да координатни почетак припада скупу $t[E^*]$. Приметимо да је тада

$$B \subseteq E^* \cup aE^* \cup r^{-1}[E^*] \cup r^{-1}a[E^*] \cup t[E^*].$$

Нека је $X_1, \ldots, X_5$ партиција јединичне лопте B одређена претходним покривањем и нека је B' јединична лопта дисјунктна са лоптом B. Како се две дисјунктне копије скупа E^* могу распоредити на сфери S, то се две дисјунктне копије скупа E^* транслацијама и ротацијама могу сместити у лопту B. Ако за сваку од те две копије распоредимо копије $X_1', \ldots, X_5', X_1'', \ldots, X_5''$ скупова $X_1, \ldots, X_5$, добијамо покривање скупа $B \cup B'$. Дакле,

$$X_1' \cup \cdots \cup X_5' \cup X_1'' \cup \cdots \cup X_5'' \sim_{10} B \cup B',$$

$B \sim_1 B$, $B \subseteq B \cup B'$ и $X_1' \cup \cdots \cup X_5' \cup X_1'' \cup \cdots \cup X_5'' \subseteq B$, па је на основу поменуте теореме $B \sim_{11} B \cup B'$.

Логике вишег реда

62. Написати формуле које тврде да је функција f из A у B 1–1 функција, **на**-функција, бијекција, ако су скупови A и B репрезентовани унарним предикатима типа $t \to \Omega$ и $t' \to \Omega$.

Написати, затим, формулу којом се тврди да је A коначан скуп.

Најзад, написати формулу која изражава Кантор–Бернштајнову теорему: *ако постоји 1–1 функција скупа A у скуп B и постоји 1–1 функција из B у A, тада постоји и бијекција међу скуповима A и B.*

63. *Филтер* на неком скупу X је колекција $\mathcal{F}$ подскупова од X ($\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$) која задовољава следеће услове:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
2. ако $A \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, онда и $B \in \mathcal{F}$,
3. $\mathcal{F}$ је затворена за пресек произвољно много својих чланова (ако $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$, онда и $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$).

Формализовати појам филтера у логици вишег реда.

64. Доказати да су формуле

$$\forall X^{s \to \Omega}(X(t) \Leftrightarrow X(u)) \text{ и } \forall X^{s^2 \to \Omega}(\forall x^s X(x,x) \Rightarrow X(t,u)),$$

које редом можемо краће записати $t \sim_1 u$ и $t \sim_2 u$, еквивалентне формули $t =_s u$ којом је уведена Лајбницова једнакост (страна 194).

65. Доказати

$$\mathbf{PA^{II}} \vdash \forall P^{\omega \to \Omega}\left((P(0) \wedge \forall y^{\omega}\left(\mathrm{Nat}(y) \wedge P(y) \Rightarrow P(S(y))\right)) \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow \forall x^{\omega}(\mathrm{Nat}(x) \wedge P(x))\right).$$

Класична анализа

66. Докажимо да за сваки природан број n важи неједнакост

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1\frac{3}{4}.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&< 1 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\
&= \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}\right) = 1\frac{3}{4} - \frac{1}{n} < 1\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

У доказу су коришћене следеће „досетке“:

$$\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Напомена. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$

67. Ако је M произвољан природан број, докажимо да је

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}>M$$

уколико је $n \geqslant 2^{2M}$.

Дакле, ако је $n \geqslant 2^{2M}$, онда је

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\\
&>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{2M}-1}+\frac{1}{2^{2M}}\\
&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\left(\frac{1}{2^{2M-1}+1}+\frac{1}{2^{2M-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^{2M}-1}+\frac{1}{2^{2M}}\right)\\
&>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{2M \text{ пута}}>M+1.
\end{aligned}$$

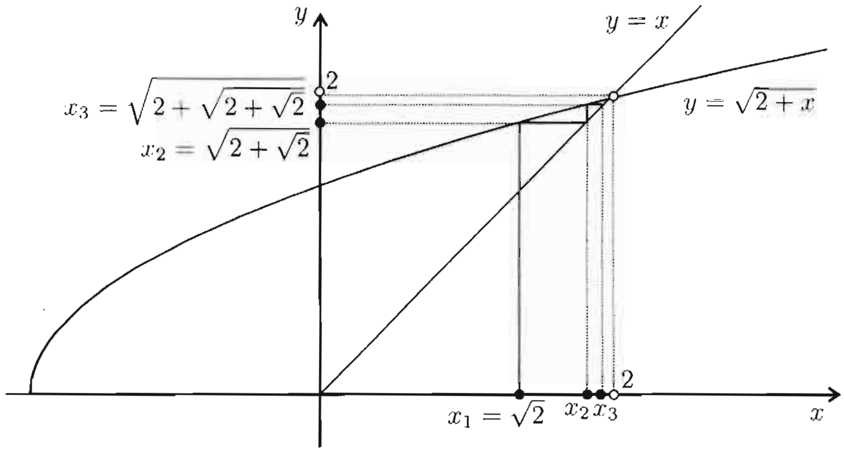
У доказу је коришћена следећа неједнакост која важи за сваки природан број n, $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}>\dfrac{1}{2}$.

$$\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\underbrace{\frac{1}{n+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}}_{n \text{ пута}}=\frac{n}{2n}\right]$$

Напомена. Доказали смо заправо да је збир $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ већи од унапред задатог (*произвољно великог*) броја уколико је n *довољно велико*, односно да је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ дивергентан.

68. Доказати да је низ $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничен.

Упутство. Број који је горње ограничење датог низа добијамо из координата пресека графика функције $f(x) = \sqrt{2+x}$ и праве $y = x$.

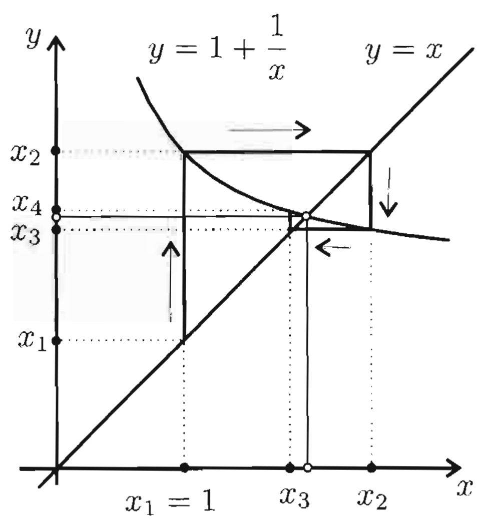


69. Доказати да је низ (x_n) задат рекурентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2 + \sqrt{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничен.

70. Доказати да је низ $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ корена}}$, $n \in \mathbb{N}$, ограничен.

71. Дат је низ (x_n): $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Наћи, ако постоји, реалан број који је мањи од свих чланова датог низа са парним индексима $(x_2, x_4, x_6, \ldots)$ и већи од свих чланова са непарним индексима $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$.

Упутство. Тражени број добијамо из координата пресека графика функције $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ и праве $y = x$.



72. Нађимо супремум и инфимум (најмање горње и највеће доње ограничење) скупа

$$A = \left\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Нека је

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Није тешко приметити да уколико се број n повећава, број a_n је све мањи, тј. да је $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$ опадајући низ. Дакле, супремум скупа A је, у овом случају, највећи елемент овог скупа, тј. $\sqrt{2} - 1$.

Имамо да за сваки природан број n важи $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 0$, па је 0 (као и сваки негативан реалан број) доње ограничење скупа A.

$$1^\circ \qquad (\forall a \in A) a > 0.$$

Доказаћемо да за сваки позитиван број ε постоји елемент a из A такав да је $a < \varepsilon$.

Заправо, треба доказати да за сваки позитиван реалан број ε постоји природан број n такав да је $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon$. Како за сваки природан број n важи неједнакост $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, довољно је доказати да за сваки позитиван број ε постоји природан број n такав да је $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, тј. $\dfrac{1}{n} < 4\varepsilon^2$.

Расуђивање које овде употребљавамо је типично за област(и) Математичке анализе и за њега се слободније каже да тече *„логички уназад"*.

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада је и $\varepsilon_1 = 4\varepsilon^2 > 0$. Према Архимедовој теореми постоји природан број n такав да је $\dfrac{1}{n} < \varepsilon_1$, тј. $\dfrac{1}{n} < 4\varepsilon^2$, одакле је $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$, па и $\dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon$. Дакле,

$$2^\circ \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\, a < \varepsilon.$$

Из 1° и 2° следи да је $\inf A = 0$.

73. Неједнакост $x^3 < 9$ важи ако је $x = 2$. Доказати да она важи и у некој околини $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ броја 2, где је ε неки позитиван реалан број. Наћи бар један такав ε.

74. Нека је ε задат позитиван реалан број. Одредити бар један позитиван реалан број δ тако да неједнакост $|x^3 - 5x^2 + 6x| < \varepsilon$ важи кад год је $|x| < \delta$.

75. Нека је ε задат позитиван реалан број. Одредити бар један позитиван реалан број δ тако да неједнакост $|x^3 + 2x^2 + x - 4| < \varepsilon$ важи кад год је $|x-1| < \delta$.

НАПОМЕНА. У претходна два примера смо се заправо „срели“ са појмом граничне вредности. Наиме, доказали смо да је

$$\lim_{x\to 0}(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0 \text{ и } \lim_{x\to 1}(x^3 + 2x^2 + x) = 4.$$

76. Нека је M ма који задати позитиван реалан број. Наћи реалан број m такав да неједнакост $x^4 - 100x^3 + 2x^2 - 300x > M$ важи кад год је $x > m$.

НАПОМЕНА. Доказивање претходног тврђења управо значи доказивање једнакости

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 100x^3 + 2x^2 - 300x) = +\infty.$$

77. Примењујући Архимедов метод, наћи однос површина фигура на које крива $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant a$, дели правоугаоник чија су темена $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a^3)$, $D(0,a^3)$.

Упутство. Искористити једнакост $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbb{N}$.

78. Примењујући Архимедов метод, наћи однос површина фигура на које крива $y = x^4$, $0 \leqslant x \leqslant a$, дели правоугаоник чија су темена $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a^4)$, $D(0,a^4)$.

79. Густи скупови. Већ смо рекли да сваки реалан број можемо *произвољно добро* апроксимирати рационалним бројем,тј. сваки реалан број је *произвољно близак* неком рационалном броју. Кажемо да је скуп рационалних бројева *густ* (у скупу реалних бројева). Наиме, *за свака два реална броја x и y за које је $x < y$, постоји рационалан број z, такав да је $x < z < y$, тј. сваки отворени интервал реалних бројева садржи рационалан број* [56].

---

[56]Штавише, сваки отворени интервал садржи бесконачно много рационалних бројева.

Ово тврђење можемо формулисати и на следећи начин: за сваки реалан број r и сваки[57] позитиван број ε постоји рационалан број q такав да је

$$r-\frac{\varepsilon}{2}<q<r+\frac{\varepsilon}{2}.$$

На пример, за сваки реалан број r и произвољно изабран позитиван број ε, због Архимедовог својства, можемо наћи природан број n такав да је $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, па је $\dfrac{[nr]}{n}$ рационалан број такав да је

$$\left|\frac{[nr]}{n}-r\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тада кажемо да су елементи скупа $\left\{\dfrac{[nr]}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$ рационални бројеви произвољно блиски реалном броју r (наравно, ни за један конкретан елемент овог скупа не можемо рећи да је *произвољно* близак броју r).
Међутим, није скуп рационалних бројева једини густ подскуп скупа реалних бројева. За неки подскуп D скупа реалних бројева кажемо да је *густ* (у скупу $\mathbb{R}$) ако и само ако за сваки реалан број r и сваки позитиван број ε постоји број d из D такав да је

$$r-\frac{\varepsilon}{2}<d<r+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако мало пажљивије погледамо последњу дефиницију, можемо рећи да су густи скупови они који су довољно богати да могу направити произвољно фину „мрежу" на реалној оси, односно да реалну осу могу поделити на довољно мале делове (интервале).
(а) Навести неколико густих подскупова од $\mathbb{R}$ и неколико њих који то нису.
(б) Ако је θ ирационалан број и M дати позитиван број, доказати да је скуп бројева облика $m\theta+n$, где су m и n цели бројеви и $m>M$, густ у скупу реалних бројева.
Упутство. Ако је θ ирационалан број, M и ε позитивни бројеви и $\varepsilon<1$, треба доказати да за сваки реалан број r и свако $\varepsilon>0$, постоје цели бројеви m и n, при чему је $m>M$, такви да је

$$r-\frac{\varepsilon}{2}<m\theta+n<r+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Наредна тврђења није тешко доказати, а из њих теорема директно следи.

[57] Иако допуштамо да ε узима *ма које* позитивне вредности, у мислима га резервишемо за наше *произвољно мале вредности*, а у пракси му најчешће додељујемо оне вредности које сматрамо „малим" у зависности од конкретне ситуације.

1) Затворен интервал $I = [0,1]$ можемо поделити на коначно много подинтервала $I_1, I_2, \ldots, I_k$ чије су дужине мање од ε.
2) За сваки природан број $m > M$, постоји цео број n такав да је $m\theta + n \in I$.
3) Постоји бесконачно много бројева $a_1 = m_1\theta + n_1,\ a_2 = m_2\theta + n_2, \ldots$ у интервалу I таквих да су m_i и n_i цели бројеви и важе неједнакости $m_i > M$ и $m_{i+1} - m_i > M,\ i \in \mathbb{N}$.
4) Из 3) следи да бар један од подинтервала, на које је подељен интервал I, садржи два од бројева $a_1, a_2, \ldots$; на пример a_i и a_j.
5) Ако је $j > i$, тада је разлика $a' = a_j - a_i$ број облика $m'\theta + n',\ m', n' \in \mathbb{Z}$, $m' > M$, и различит је од нуле. Такође је и $|a'| < \varepsilon$.
6) Бројеви $0, \pm a', \pm 2a', \ldots$ деле скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ на интеравале чије су дужине мање од ε.
(в) Доказати да тврђење под (б) не важи, ако је θ рационалан број.

Густи скупови и непрекидне функције. Функција кореновања реалних бројева нам омогућава да дефинишемо степен позитивног реалног броја a рационалним бројем $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, на следећи начин $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Међутим, када бисмо у координатној равни означили тачке (q, a^q), $q \in \mathbb{Q}$, добили бисмо „шупљикав“, али ипак „довољно густ“, скуп тачака које на јединствен начин можемо повезати *„непрекидном линијом“*. Другим речима, можемо дефинисати јединствену *непрекидну* функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ (тј. вредности $a^{\sqrt{2}}$, a^{π}, $\ldots$) такву да њен график буде непрекидна линија којом смо спојили тачке (q, a^q), $q \in \mathbb{Q}$.
Чињеница да на јединствен начин можемо повезати тачке густог скупа непрекидном линијом веома је важна у математици и формулисана је следећом теоремом: *непрекидна реална функција f, на јединствен начин је одређена својим вредностима на скупу рационалних бројева, тј. са $f(q)$, $q \in \mathbb{Q}$.* Међутим, последње тврђење не важи само за скуп рационалних бројева, већ и за сваки густ скуп.
ТЕОРЕМА. Непрекидна реална функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, на јединствен начин је одређена својим вредностима на неком густом подскупу D скупа $\mathbb{R}$, тј. вредностима $f(d)$, $d \in D$.
Ова теорема може бити формулисана и на следећи начин. *Ако су $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидне функције чије се вредности поклапају на неком густом скупу D, тј. $f(d) = g(d)$, $d \in D$, тада су оне једнаке, тј. $f(x) = g(x)$, за сваки реалан број x.*
(г) Функција f је дефинисана са $f(x) = \sin \pi x + \sin \pi\sqrt{2}x$, $x \in \mathbb{R}$. Доказати да:
• једначина $f(x) = 2$ нема решења у скупу реалних бројева, тј. ни за један реалан број x, $f(x)$ није једнако 2;
• постоје реални бројеви x такви да је $f(x)$ произвољно близу 2.

(д) Нека је θ ирационалан број. Одредити све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да је $f(x)=f(x+1)=f(x+\theta)$, за све реалне бројеве x.

(ђ) Одредити све непрекидне функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да је $f(1)=1$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за све x и y из $\mathbb{R}$.

Нестандардна анализа

80. Нека су δ, ε инфинитезимале, а H, K бесконачни хиперреални бројеви. Испитати који од следећих израза представљају инфинитазимале, коначне хиперреалне бројеве који нису инфинитезимале или бесконачне хиперреалне бројеве.

(а) $\dfrac{8\varepsilon^3+7\varepsilon^2+\varepsilon}{3\varepsilon}, \varepsilon\neq 0$; (б) $\dfrac{2-\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon^2+\varepsilon}, \varepsilon\neq 0$; (в) $\dfrac{2}{H+1}$;

(г) $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}, \varepsilon\neq 0$; (д) $\dfrac{K-H}{K^2-H^2}, K\neq H$; (ђ) $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}$;

(е) $\dfrac{2+\delta}{3+\varepsilon}-\dfrac{2}{3}$; (ж) $\dfrac{1-\sqrt{1+\varepsilon}}{\varepsilon}, \varepsilon\neq 0$; (з) $\dfrac{3\varepsilon^3+\varepsilon^2-6\varepsilon}{2\varepsilon^2+\varepsilon}$.

81. Нека су x и y позитивни хиперреални бројеви. Може ли број $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ бити бесконачан? Коначан? Инфинитезимала?

82. Нека су δ, ε, η инфинитезимале, a, b, c коначни хиперреални бројеви који нису инфинитезимале и H, K, L бесконачни хиперреални бројеви. Испитати да ли су следећи бројеви коначни и у потврдном случају одредити њихове стандардне делове.

(а) $3+\varepsilon-3\varepsilon^2$; (б) $\dfrac{1-\varepsilon}{2+3\varepsilon}$; (в) $\dfrac{2H-1}{H-3}$;

(г) $\dfrac{\sqrt{25-\varepsilon}-5}{\varepsilon}, \varepsilon\neq 0$; (д) $\sqrt{1-\varepsilon+\varepsilon^2}$; (ђ) $\dfrac{\sqrt{H^2+4}-H}{H}$.

83. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ најчешће се израчунава у два корака:

1. најпре се „упрости“ израз $f(x)$, за x које је бесконачно блиско, али не и једнако, броју a, а затим се
2. израчуна стандардни део „упрошћеног“ израза.

На пример, израчунајмо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3+x)^2 - 9}{x}$.

1. Ако је $x \approx 0$ и $x \neq 0$, тада је $\dfrac{(3+x)^2 - 9}{x} = \dfrac{9 + 6x + x^2 - 9}{x} = 6 + x$.

2. За $x \approx 0$, $\mathrm{st}(6 + x) = 6$.

Дакле, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3+x)^2 - 9}{x} = 6$.

Израчунати: (а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x+5}$; (б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x^2 - 4}$; (в) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

84. Доказаћемо једну веома важну теорему математичке анализе, познату као *Вајерштрасова теорема*, која има доста значајних последица.

ТЕОРЕМА. Ако је реална функција f непрекидна у свакој тачки затвореног интервала $[a, b]$, тада постоје x_1 и x_2 из $[a, b]$ у којима ова функција достиже своју најмању, односно највећу вредност, тј.

$$f(x_1) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Доказ. Поделимо хиперинтервал $^*[a, b]$ на H (H је бесконачан позитиван хиперцео број) подинтервала једнаких, инфинитезималних дужина $\delta = \dfrac{b-a}{H}$:

$$[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \ldots, [a+(K-1)\delta, a+K\delta], \ldots, [a+(H-1)\delta, b].$$

Према принципу трансфера, постоји подеона тачка $a + K\delta$ таква да је $f(a + K\delta)$ највећа међу свим вредностима функције f у подеоним тачкама. Нека је $c = \mathrm{st}\,(a + K\delta)$. За сваки реалан број u из $^*[a, b]$ постоји L, $0 \leqslant L < H$, да је $a + L\delta \leqslant u < a + (L+1)\delta$. Како је $f(a + K\delta) \geqslant f(a + L\delta)$, имамо да је $\mathrm{st}(f(a + K\delta)) \geqslant \mathrm{st}(f(a + L\delta))$, одакле следи да је $f(c) \geqslant f(u)$. $\square$

Интуиционизам

85. Правила извођења такозване *минималне* логике су сва правила класичне логике, **осим** правила $\perp_c$, које је избачено. $T \vdash_m \varphi$ ћемо означавати чињеницу да се секвент $T \vdash \varphi$ може доказати применом само правила минималне логике.

(i) Доказати да се у минималној логици могу користити и следећа правила

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha}{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta}\ (\Rightarrow'_{\mathrm{E}}), \qquad \frac{\Gamma, \neg\alpha \vdash \alpha}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \perp}\ (\neg'_{\mathrm{E}}), \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \neg\alpha}{\Gamma, \alpha \vdash \perp}\ (\neg''_{\mathrm{E}}).$$

Израз $a \Vdash \alpha$ читамо „*a форсира α*" или „*a реализује α*". Кажемо да a из K реализује скуп формула Γ уколико a реализује сваку формулу из Γ. Скуп формула Γ је реализован у моделу $\mathbf{K}$ уколико Γ реализује свако a из K. Скуп формула Γ реализује формулу α, у ознаци $\Gamma \Vdash \alpha$, уколико за сваки Крипкеов модел $\mathbf{K}$ и свако a из K, из $a \Vdash \Gamma$ следи да је $a \Vdash \alpha$. Најзад, кажемо да је формула α *ваљана*, у ознаци $\Vdash \alpha$, уколико је реализована у сваком Крипкеовом моделу.

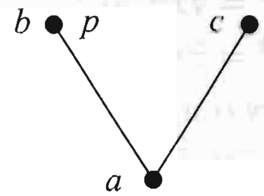
(а) Дат је Крипкеов модел $\mathbf{K} = (K, \leqslant, \Vdash)$:

$$K = \{a, b\},\ \leqslant = \{(a,a), (a,b), (b,b)\},\ \Vdash = \{(b,p)\}.$$

Доказати да $\mathbf{K} \nVdash p \vee \neg p$ и $\mathbf{K} \nVdash \neg\neg p \Rightarrow p$.

Овако једноставни Крипкеови модели често се графички представљају као на претходној слици. Такође, релацију $\leqslant$ могли смо краће да дефинишемо; довољно је навести да је $a \leqslant b$, будући да се њена рефлексивност подразумева.

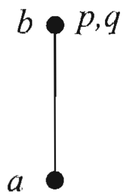
(б) Дат је Крипкеов модел $\mathbf{K} = (K, \leqslant, \Vdash)$:



$$K = \{a, b, c\},\ a \leqslant b,\ a \leqslant c,\ b \Vdash p.$$

Доказати да
$\mathbf{K} \nVdash \neg p \vee \neg\neg p$ и
$\mathbf{K} \nVdash (\neg\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \vee \neg p)$.

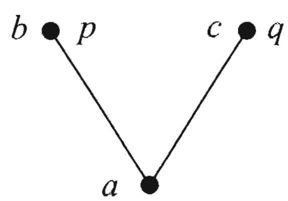
(в) Дат је Крипкеов модел $\mathbf{K} = (K, \leqslant, \Vdash)$:



$$K = \{a, b\},\ a \leqslant b,\ b \Vdash p,\ b \Vdash q.$$

Доказати да
$\mathbf{K} \nVdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$ и
$\mathbf{K} \nVdash (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

(г) Дат је Крипкеов модел $\mathbf{K} = (K, \leqslant, \Vdash)$:



$$K = \{a, b, c\},\ a \leqslant b,\ a \leqslant c,\ b \Vdash p,\ c \Vdash q.$$

Доказати да
$\mathbf{K} \nVdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ и
$\mathbf{K} \nVdash ((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$.

(д) Наћи бар један Крипкеов модел у коме није реализована формула

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p).$$

(ђ) Наћи бар један Крипкеов модел у коме није реализована формула

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow r)).$$

90. За интуиционистичку исказну логику може се увести „хилбертовски“ (страна 162) аксиоматски систем. Аксиоме су

(I1) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,

(I2) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$,

(I3) $(\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \neg\varphi$,

(I4) $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$,

(I5) $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi)$,

(I6) $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$,

(I7) $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$,

док је једино правило извођења *модус поненс* $\dfrac{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$ (MP).

Под тополошким моделом интуиционистичке логике можемо сматрати свако пресликавање f које скуп исказних слова пресликава у колекцију отворених скупова неког тополошког простора $(X, \mathcal{T})$. Свако овакво пресликавање проширујемо на скуп свих формула на следећи начин:

- $f^+(\neg\varphi) = \mathrm{int}(X \setminus f^+(\varphi))$,
- $f^+(\varphi \wedge \psi) = f^+(\varphi) \cap f^+(\psi)$,
- $f^+(\varphi \Rightarrow \psi) = \mathrm{int}((X \setminus f^+(\varphi)) \cup f^+(\psi))$.

Формула φ важи у моделу f, у ознаци $f \models \varphi$, ако и само ако је $f^+(\varphi) = X$.

Доказати да је систем аксиома (I1) – (I7) са правилом MP **потпун** у односу на уведену класу тополошких модела.

Категорије

91. Проверити коректност дефиниција следећих категорија.

Категорија $\mathbf{Sets} \times \mathbf{Sets}$. Објекти ове категорије су уређени парови скупова (A, B). Стрелица у $\mathbf{Sets} \times \mathbf{Sets}$ из (A, B) у (C, D) јесте сваки уређен пар функција (f, g) таквих да $f : A \to C$ и $g : B \to D$. Композиција је дефинисана са $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$, док је јединична стрелица објекта (A, B) стрелица $(1_A, 1_B)$.
Аналогно се дефинише категорија $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, за било које две категорије $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$.

Категорија $\mathbf{Sets}^{\to}$. Објекти ове категорије су функције међу скуповима. Стрелица из $f : A \to B$ у $g : C \to D$ је сваки пар функција (h, k), такав да $h : A \to C$, $k : B \to D$ и важи $g \circ h = k \circ f$.

(iii) Две тачке a и b из $\mathbb{R}$ су блиске ако и само ако $a - b$ припада Δ. Доказати да је овако дефинисана релација блискости рефлексивна и симетрична, али да није транзитивна.

(iv) Доказати да је свака функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *нейрекидна*, у смислу да се блиске тачке пресликавају у блиске тачке.

97. (i) Доказати да за произвољно x из $\mathbb{R}$ и ε, η, ζ из Δ важе једнакости:

(а) $f(x + \varepsilon + \eta) = f(x) + (e + \eta)f'(x) + \varepsilon\eta f''(x)$;

(б) $f(x+\varepsilon+\eta+\zeta) = f(x)+(e+\eta+\zeta)f'(x)+(\varepsilon\eta+\eta\zeta+\zeta\varepsilon)f''(x)+\varepsilon\eta\zeta f'''(x)$.

(ii) Доказати да за све $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и произвољно c из $\mathbb{R}$ важе једнакости:

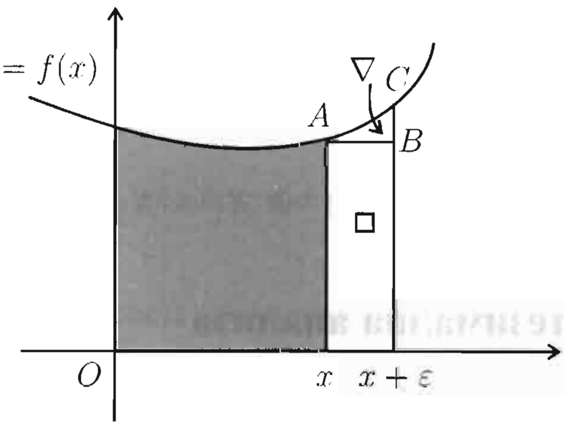
(а) $(f + g)' = f' + g'$;

(б) $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;

(в) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;

(г) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, у оним тачкама x за које је $g(x) \neq 0$.

98. Нека је дата функција $f : I \to \mathbb{R}$ и за свако x из I нека је $P(x)$ површина фигуре ограничене кривом $y = f(x)$, координатним осама и правом са апсцисом x која је паралелна са y-осом.



Тада је, за свако ε из Δ, $P(x + \varepsilon) - P(x) = \varepsilon P'(x)$.
С друге стране, имамо да је $P(x+\varepsilon) - P(x) = \square + \nabla$, при чему је $\square$ површина правоугаоника, а ∇ површина фигуре ABC. Јасно, $\square = \varepsilon f(x)$. Како је, према принципу микроафиности, део криве AC прав, ABC је троугао чија је једна страница ε, а висина $P(x + \varepsilon) - P(x)$. Дакле, $\nabla = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varepsilon f(x) = 0$, јер је $\varepsilon^2 = 0$.
Најзад,

$$\varepsilon P'(x) = P(x + \varepsilon) - P(x) = \square = \varepsilon f(x),$$

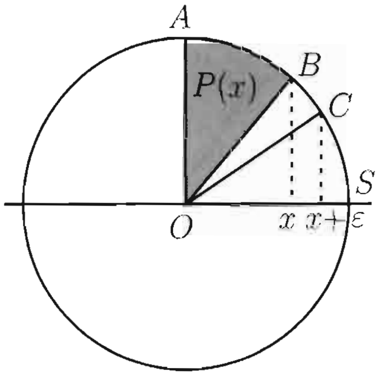
па према принципу микроканцелације следи да је

$$P'(x) = f(x).$$

Поред овог резултата, за примене, веома је важан такозвани *принцип константности* за који се претпоставља да важи у $\mathfrak{S}$.

Принцип константности. Ако је $f : I \to \mathbb{R}$ и $f' = 0$, онда је f константна функција.

Одредимо површину круга примењујући методу коју је користио Кеплер, тј. претпоставимо да се круг састоји из великог броја веома „танких" једнакокраких троуглова чије су основице на кружници а врх у центру круга. Нека је $P(x)$ површина кружног исечка OAB, при чему је x апсциса тачке B. Нека је $\ell(x)$ дужина лука AB. Означимо са C тачку чија је апсциса $x + \varepsilon$, при чему је ε из Δ.



Тада је

$$\varepsilon P'(x) = P(x + \varepsilon) - P(x) = \text{површина } OBC.$$

Према принципу микроафиности, BC је део праве линије и његова дужина је $\ell(x+\varepsilon) - \ell(x) = \varepsilon\ell'(x)$. Ако са r означимо полупречник круга, OBC је троугао чија је површина $\frac{1}{2}r \cdot QR = \frac{1}{2}\varepsilon r\ell'(x)$. Дакле, $\varepsilon P'(x) = \frac{1}{2}\varepsilon r\ell'(x)$, а према принципу микроканцелације и $P'(x) = \frac{1}{2}r\ell'(x)$. Како је $P(0) = \ell(0) = 0$, према принципу константности имамо да је $P(x) = \frac{1}{2}r\ell(x)$. Ако је $x = r$, добијамо да је

$$\text{површина четвртине } OPS = \frac{1}{2}r \cdot PS,$$

односно, множењем са 4,

$$\text{површина круга} = \frac{1}{2}r \cdot \text{обим круга}\ .$$

Претпостављајући да је пропорционалан полупречнику са фактором пропорционалности 2π, добијамо да је $P = \pi r^2$.

(а) Доказати *Кавалијеријев принцип*: ако се две фигуре налазе између пара паралелних правих и ако на правама паралелним датим линијама дате фигуре

ТРЕЋИ ДЕО

БАЈКА О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА

Намера нам је била да наша књига, бар у неким својим деловима, буде читљива свима од 7 до 777 година (при чему је овај последњи број за нас „практично“ хиперконачан!). Тако смо бајку која следи схватили као прилику и подстицај да се и код мале деце (чак и млађе од 7 година) развије такозвана примарна интуиција о „великим“ бројевима. [Секундарна интуиција, по методичарима, долази после упознавања са формализованим теоријама, а које су у нашем случају: нестандардна анализа, алтернативна теорија скупова и друге.]

Развијање примарне интуиције основних математичких појмова, као што су тачка, права, број и слично, један је од основних циљева почетне наставе математике. Тако се, на пример, за стицање интуиције о паралелности двеју правих професорима разредне наставе препоручује да испричају следећу причу.

„Замислите зид собе оивичен спојем са подом, таваницом и суседним зидовима. [Спојеви се схватају као дужи, а зид као правоугаоник.] Замислимо сада да се суседни зидови, па тиме и њихови спојеви са основним зидом, све више удаљавају. Тада њихове ивице према таваници и према поду постају две паралелне праве.“

[Наравно, ова прича се заснива на једној историјској фази у развоју појма праве схваћене као правца. Еуклид у свом другом постулату изричито каже да је могуће коначну праву, следећи њен правац, непрестано продужавати.]

Слично се чини и са бројевима. Деца се уче да броје прсте на руци, сијалице на лустеру и слично. Наравно, никоме не пада на памет да им тражи да изброје сва зрна жита у неком силосу или зрнца песка на некој плажи. Али им се сугерише да је то број „као и сваки други“ само је до њега теже доћи, што је, по њима, за метаматику небитно. Овај психолошки притисак везан за прихватање потенцијалне достиживости сваког природног броја, доводи до тога да се скоро свако друго гледање на бројеве чини чудним и неприхватљивим. Постојање бесконачних, или другим речима, хиперконачних природних бројева схвата се само као нека, можда корисна, логичка последица која у ствари нема много везе са реалношћу.

Чак се покушава наћи прихватљиво (али стандардно) решење за „парадокс ћелавца“ (или, што је слично, „Зенонову апорију о мноштву“ која говори о зрнцима кукуруза и о којој је било речи на страни 19).

Ми, наравно, не предлажемо да се један концепт природног броја (тзв. „стандардни“) замени другим „нестандардним“, већ да се они третирају од почетка равноправно. Како је то могуће? Да то не створи забуну међу децом?

Наш одговор је да неће, али ако их пажљиво и избалансирано уведемо и у један и у други систем бројева. Ситуација је слична као са неком алатком, на пример маказама. Дете које је видело само мале маказице може помислити да маказе служе само за сечење ноктију. Појава великих, баштенских, маказа би га збунила, док не би видело њихову примену, тј. сврху. Тако је и са духовним направама, или како то каже професор Прешић „духовним алаткама“, које називамо (математичким) теоријама.

Децу треба од почетка убедити у неке предности „нестандардног“ приступа. За то нам може послужити, као пример, „нелинеарно закључивање“. Опште је познато да, у математици, додавање нових услова не мења закључак. Тако, знајући да збир углова у троуглу износи 180°, ништа се неће променити ако још захтевамо да је једнакостраничан. Тако није увек у животу. Ако лекар на основу високе температуре, кашља и малаксалости закључи да се болесник прехладио, нажалост, закључак може променити ако болесника упути на рендгенски преглед. [Наравно, неко ће рећи да дијагнозу није морао доносити прерано, али шта урадити када се лечење мора започети одмах, а рецимо рендген је у квару?]

Слично, сви знамо да је пингвин птица и да птице лете (то им је једна од најважнијих карактеристика и оно што обичном човеку пада у очи). Одатле би се класично закључило да пингвини лете!!! Али, то не важи, а одговор је у томе што „скоро све птице лете“, тј.

$$\frac{\text{„број птица које лете“}}{\text{„број птица“}} \quad \text{је „скоро један“,}$$

док је

$$\frac{\text{„број птица које не лете“}}{\text{„број птица“}} \quad \text{инфинитезимала!}$$

Значи, ми ћемо сматрати да дата конкретна птица лети све док не добијемо информацију да је пингвин (или да нема крила и слично). Додатак информација, дакле мења закључак зато што се односи на релативно мали (инфинитезимални) узорак!!!

Но, вратимо се нашој причи (без краја). Деци треба скренути пажњу на поенту приче, а она је у следећем: *дужина живота која је пред младићем (а која се по аналогији са Вопенкиним хоризонтом* (види страну 58) *може сматрати као „пребројив низ коначних тренутака“) је много краћа него дужина приче (тј. број зрнаца жита)!!!* Управо то је оно што обесмишљава владаров принцип (да убије на крају приче) и од кога он одустаје.

Захваљујемо професору Жарку Мијајловићу који нам је скренуо пажњу на ову причу.

Бајка без краја

Живео некада неки владар, који је више од свега на свету волео да слуша бајке. Владар је терао све своје достојанственике да му причају бајке. Све приче су се завршавале на најзанимљивијем месту. То је срдило владара, те је стога наређивао да се казни онај који би причао. Владар више није хтео да слуша обичне бајке, већ је тражио бајку која никада нема краја.

Сваки дан је слао чиновнике и војнике да му доведу људе који су знали да причају бајке. Ти људи су бирали најдуже приче, али и те најдуже су имале крај. Све оне који су му причали владар је кажњавао, те се више нико није враћао из његовог дворца.

Тако једном доведоше владару неког младића, који се ни најмање не уплаши, већ доиста исприча причу без краја.

– Давно, врло давно живео је неки владар тако богат да је било немогуће набројати његова богатства. А жита је имао тако много да није знао где да га дене. Зато једнога дана он позва дрводеље и нареди им да саграде амбар тако велики да му се крај не види. Од најстаријих времена па до данашњег дана није било већег амбара. Тај амбар до врха напунише житом, али, кад су га градили, радници нису довољно пазили, те оста неки отвор, ни мали ни велики, али ипак довољно велики да се врабац провуче. Јата врабаца су долетела до амбара да се насладе царским житом, али рупица беше мала и улети прво један врабац, па излети, а на његово место уђе други, па трећи узме зрно па излети, потом четврти улети, узме зрно, затим још један, па још један...

Владар је у почетку слушао пажљиво, а после је слушао једно те исто: „...опет улети врабац, узме зрно и излети ...“ – те не издржа, прекиде младића и упита:

– Па добро, искључали су врапци све жито, а шта је после тога било?

– Они још нису искључали све, не жури, полако! – одговори младић.

Владара је много занимало шта је било даље, па поново упита:

– Па добро, рецимо да су све покључали, шта је онда било?

– Да би се сазнало шта је даље било, треба чекати док они поједу жито.

Владар је хтео да сазна шта је даље било па дозволи младићу да настави причу. Цео дан, до саме вечери, младић је само понављао: „Улетео је врабац, узео зрно и излетео напоље“. И тако је дуго без престанка, причао час о једном врапцу, час о другом, а владар не издржа па опет упита:

– Хоће ли скоро врапци појести сву пшеницу?

– Не, још неће – одговори младић.

Пролазио је дан, пролазила је ноћ, много дана је већ прошло, а врапци још увек нису могли да поједу сву пшеницу из амбара. Владар се све више и више љутио:

– Зашто до сада још нису појели све жито? – најзад упита младића.

– Не може се тако брзо, то је велики амбар. А зрна жита има безброј, она се не могу тако брзо појести.

Не зна се колико је времена било потребно да врапци поједу све жито. Владар не хтеде да слуша даље бајку, те нареди да казне младића. А младић рече:

– Ја стварно причам причу без краја. Крај се још не види. Како можеш да ме казниш?

Владар није имао куд, те нареди да младића пусте његовој кући.

Литература

[1] **Aristotel**, *Fizika*, Paideia, Beograd, 2006.

[2] **M. Arsenijević**, *Prostor, Vreme, Zenon*, BiblioTeka, Filozofske studije, Beograd–Zagreb, 1998.

[3] **В. Абрамовић**, *Проблеми континуитета у природној филозофији Лајбница и Бошковића*, Докторска дисертација, Филозофски факултет, Универзитет у Скопљу, 1983.

[4] **J. L. Bell**, *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press, 1998.

[5] **P. Benacerraf, H. Putnam** (Editors), *Philosophy of Mathematics*, Selected Readings, Basil Blackwell, Oxford, 1964.

[6] **М. Божић**, *Преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

[7] **Božić**, **Ivić**, **Jovanović**, **Kapetanović**, **Mihaljinec**, **Mijajlović**, **Prešić**, **Rašković**, **Rosenzweig**, **Šami**, **Šeper**, **Šikić**, **Ugrin-Šparac**, *Brojevi*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[8] **N. Cutland**, *Computability: An introduction to recursive function theory*, Cambridge University Press, 1980.

[9] **R. David**, **K. Nour**, **C. Raffali**, *Introduction à la logique – Théorie de la démonstration*, Dunod, Paris, 2003.

[10] **M. Davis**, *The Incompleteness Theorem*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 53, Number 4, April 2006.

[11] **H. -D. Ebbinghaus**, **J. Flum**, **W. Thomas**, *Mathematical Logic*, Springer-Verlang, New York Inc., 1994.

[12] **P. R. Halmos**, *Naive Set Theory*, Springer Verlag, New York INC., 1974.

[13] **G. Hellman**, *Mathematical Pluralism: the case of smooth infinitesimal analysis*, Journal of Philosophical Logic 35: 621–651, 2006.

[14] **A. Heyting**, *Intuitionism, An Introduction*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1976.

[15] **R. Goldblatt**, *Topoi*, Dover Publications, INC. Mineola, New York, 2006.

[16] **H. J. Keisler**, *Elementary Calculus – An infinitesimal approach*, University of Wisconsin, 2000.

[17] **F. Koplston**, „Srednjovekovna filozofija, Avgustin – Skot“, *Istorija filozofije*, tom 2, BIGZ, Beograd, 1991.

[18] **F. Koplston**, „Od Dekarta do Lajbnica“, *Istorija filozofije*, tom 4, BIGZ, Beograd, 1995.

[19] **A. Kron**, *Logika*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1998.

[20] **M. Jaćimović**, **P. Obradović**, *Realni brojevi*, CID, Podgorica, 2001.

[21] **P. Janičić**, *Matematička logika u računarstvu*, Matematički fakultet, Beograd, 2005.

[22] **А. П. Юшкевич** (ред.), *История математики*, Том 1,2,3, Наука, Москва, 1970.

[23] **F. W. Lawvere**, **R. Rosebrugh**, *Sets for mathematics – The categorial analysis of logic*, Cambridge University Press, 2003.

[24] **F. W. Lawvere**, **S. H. Schanuel**, *Conceptual mathematics – A first introduction to categories*. Cambridge University Press, 1997.

[25] **T. Lindstrom**, *An invitation to Nonstandard Analysis*, u *Nonstandard Analysis and its Application*, Ed. by N. Cutland, Cambridge University Press, 1988.

[26] **Ž. Mijajlović**, *Algebra 1*, Milgor, Beograd, Moskva, 1993.

[27] **Ž. Mijajlović**, *An Introduction to Model Theory*, University of Novi Sad, Faculty of Science, Novi Sad, 1987.

[28] **Ž. Mijajlović, Z. Marković, K. Došen**, *Hilbertovi problemi i logika*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1986.

[29] **J. D. Monk**, *Mathematical Logic*, Springer-Verlang, 1976.

[30] **J. Mycielski**, *Analysis without actual infinity*, The Journal of Symbolic Logic, Volume 46, Number 3, Sept. 1981.

[31] **Р. Новаковић**, *Још о пореклу Срба*, Мирослав, Београд, 1992.

[32] **Z. Ognjanović, N. Krdžavac**, *Uvod u teorijsko računarstvo*, Beograd–Kragujevac, 2004.

[33] **B. Paskal**, *Misli*, BIGZ, Beograd, 1991.

[34] **R. Penrouz**, *Carev novi um O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

[35] **A. Perović, A. Jovanović, B. Veličković**, *Teorija skupova*, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[36] **S. Prešić**, *Realni brojevi*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1985.

[37] **С. Прешић**, *Разнице I*, Просветни преглед, Београд, 1997.

[38] **С. Прешић**, *Разнице II*, Просветни преглед, Београд, 1998.

[39] **М. Радојчић**, *Општа математика*, Научна књига, Београд, 1950.

[40] **A. Robinson**, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[41] **H. Rogers**, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Book Company, 1967.

[42] **J. R. Shoenfield**, *Recursion Theory*, Springer-Verlag, 1993.

[43] **I. Stewart**, *Concepts of Modern Mathematics*, Dover Publication INC., New York, 1995.

[44] **Д. Ј. Стројк**, *Кратак преглед историје математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.

[45] **R. Šajković**, *Lajbnic i opšte dobro*, Prosveta, Beograd, 1975.

[46] **P. Vopenka**, *Mathematics in the alternative set theory*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.

[47] **S. Vujošević**, *Matematička logika (o mogućnostima formalnog metoda)*, CID, Podgorica, 1996.

[48] „Тангента" – часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа, Друштво математичара Србије, Београд, 2003–2008.

[49] **V. Tasić**, *Matematika i koreni postmodernog mišljenja*, Svetovi, Novi Sad, 2002.

[50] **В. А. Зорич**, *Математический анализ* II, Наука, Москва, 1981.

др Миодраг Рашковић
др Небојша Икодиновић

ПРИЧЕ О МАЛИМ И ВЕЛИКИМ БРОЈЕВИМА
О бројању, мерењу, закључивању ...

Прво издање, 2010. године

Издавачи
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ
Београд, Кнез Михаилова 36 п.п. 367
www.mi.sanu.ac.rs

ЗАВОД ЗА УЏБЕНИКЕ
Београд, Обилићев венац 5
www.zavod.co.rs

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнез Михаилова 35/4 п.п. 355
www.dms.org.rs

Ликовни уредник
мр Тијана Ранчић

Лектор
Мирјана Милошевић

Графички уредник
Милан Бјелановић

Прелом и коректура
Небојша Икодиновић

Обим: $20^{1/2}$ штампарских табака
Формат: $16,6 \times 23,5$ cm
Рукопис предат у штампу децембра 2009. године.
Штампање завршено јануара 2010. године.
Штампа Сајнос д.о.о., Нови Сад