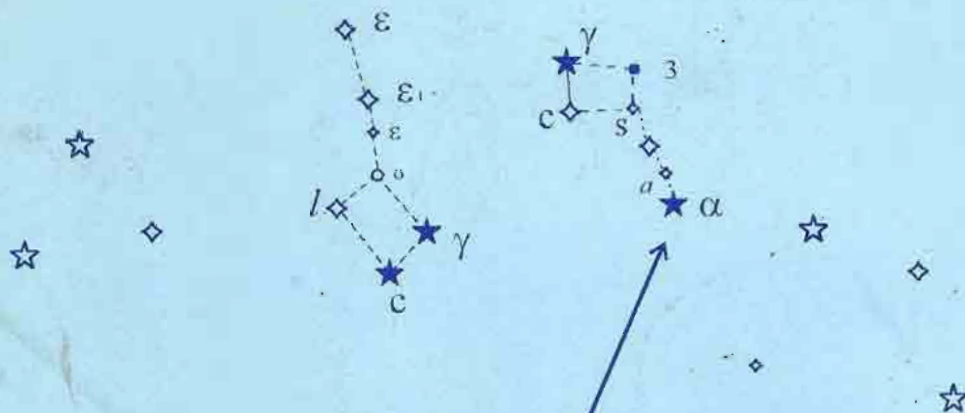
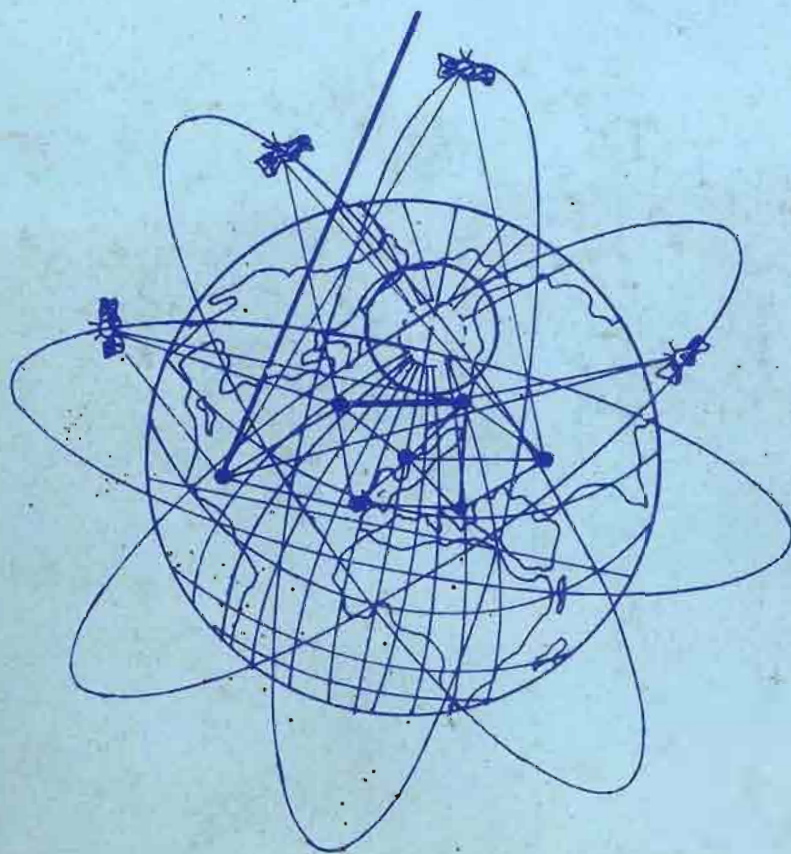


UNIVERZITET U BEOGRADU



Vojislav Džeparoski

GEODEZIJA II PRVI DEO
ASTRONOMIJA I VIŠA GEODEZIJA



RUDARSKO - GEOLOŠKI FAKULTET
Beograd, 1997.

UNIVERZITET U BEOGRADU

*Priznanje, Tečiji sa
poslovojem Autor*

Vojislav Džeparoski

GEODEZIJA II
PRVI DEO

ASTRONOMIJA I VIŠA GEODEZIJA

RUDARSKO-GEOLOŠKI FAKULTET

Beograd, 1997.

Dr Vojislav Džeparoski, docent
Rudarsko-geološki fakultet u Beogradu

**GEODEZIJA II – PRVI DEO
ASTRONOMIJA I VIŠA GEODEZIJA**

Recezent:

Dr Stevo Šegon, vanredni profesor
Prirodno matematički fakultet u Beogradu

Dr Njegoslav Vukotić, vanredni profesor
Građevinski fakultet u Sarajevu

Izdaje:

Rudarsko-geološki fakultet
Beograd, Dušina br.7

Izdavanje ovog udžbenika odobreno je od strane Komisije za
izdavačku delatnost Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu,
Rešenjem br. 2/97 od 5.12.1996 godine.

Tehnički urednik:

Mr. Zorka Kujundžić Bulatović

Tiraž:

150 primeraka

Štampa:

Udruženje "Nauka i društvo" Srbije
Božidara Adžije 11a

© Sva prava zadržava izdavač
Beograd 1997. godine

"Astronomija je korisna jer nas uzdiže iznad nas samih, ona je korisna jer je velikaAstronomija nam je prva pokazala da postoje zakoni, ona nam je dala dušu sposobnu da shvati Prirodu" [3].

Predgovor

Ova knjiga, kao deo udžbenika Geodezija 2, namenjena je studentima smera za Rudarska merenja na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu.

U prvom delu knjige obuhvaćena je materija iz Astronomije, odnosno izabrana poglavlja iz Geodetske Astronomije koja se izučavaju po postojećem nastavnom programu.

Knjiga treba da pruži studentima određena znanja iz opšte Astronomije, potrebna znanja iz Geodetske Astronomije, za određivanje azimuta kako nebeskih tela tako i terestričkih pravaca, odnosno za orijentaciju geodetskih tj. rudničkih osnovnih mreža na površi Zemlje.

U drugom delu knjige obrađuju se odabrana poglavlja iz Više Geodezije. Obradeni su opšti pojmovi i zadaci Više geodezije na određivanju oblika i dimenzija Zemlje, problematika preslikavanja Zemljinog elipsoida na izabranu projekcionu površ. Kod nas je izabrana Gaus-Kriggerova konformna cilindrična projekcija, kao površ za preslikavanje. Takođe je u opštem obliku dat prilog satelitske geodezije, odnosno primena tehnologije GPS-sistema, sa ciljem upoznavanja studenata sa novim tehnologijama koja se primenjuje u Geodeziji.

U Beogradu,
Mart 1997. godine

Autor

Sadržaj

GLAVA 1

<i>Uvodne napomene</i>	1
1.1 Uvod	1
1.2. Korišćene oznake	4

GLAVA 2

<i>Predmet astronomije i astronomski eksperiment</i>	5
2.1. Opšti pojam astronomskog eksperimenta	5
* 2.2. Određivanje položaja nebeskog tela	6
* 2.2.1. Nebeska sfera	7
* 2.2.2. Nebeska tela	8
* 2.2.3. Sazvežđa	8
2.2.4. Prividno dnevno obrtanje nebeske sfere	9
2.2.5. Elementi nebeske sfere	10
2.2.6. Prividna sunčeva kretanja, ekliptika	12
2.2.1. Elementi nebeske sfere izvedeni iz prividnog kretanja sunca	13
2.2.1. Zvezdane karte	13

GLAVA 3

<i>Određivanje položaja nebeskih tela i položaja tačaka na Zemlji</i>	15
3.1. Osnovni pravci i ravni u prostoru i koordinatni sistemi	15
* 3.2. Koordinatni sistemi za određivanje položaja nebeskog tela	15
* 3.2.1. Horizontski koordinatni sistem	16
* 3.2.2. Mesni ekvatorski koordinatni sistem	17
* 3.2.3. Ekliptički koordinatni sistem	18
* 3.2.4. Prividno dnevno obrtanje nebeske sfere i zvezdano vreme	18
3.2.5. Geografski koordinatni sistem	19
3.2.6. Mere za uglove	21
* 3.2.7. Osnovne formule sferne trigonometrije podešeni za primenu u Astronomiji	21
3.3. Sistemi vremena u Astronomiji	23
3.3.1. Vremenski sistemi vezani za rotaciju i revoluciju Zemlje	23
3.4. Prividno godišnje kretanje Sunca i njegove posledice	24
3.5. Pravo, Srednje i Građansko vreme	25
3.6. Mesno, Zonsko i Ukazno vreme	26

GLAVA 4

<i>Predmet astrometrije</i>	27
4.1. Sferna-teorijska Astrometrija	27
4.2. Praktična Astrometrija	28
4.2.1. Fudamentalna astrometrija	24
4.2.2. Geodetska astronomija	24
4.2.3. Primena geodetske Astronomije u Geodeziji	29
4.2.4. Zadaci geodetske Astronomije	29
4.2.5. Metode u geodetskoj Astronomiji	30
4.2.6. Popravke rezultata astronomskih merenja	32
4.2.6.1. Popravke rezultata merenja horizontalnih uglova	32
4.2.6.2. Popravke rezultata merenja vertikalnih uglova	33
4.3. Određivanje astronomskog azimuta terestričkog pravca	34
4.3.1. Određivanje astronomskog azimuta terestričkog pravca merenjem vremena	38
4.3.2. Određivanje azimuta terestričkog pravca merenjem zenitnih odsto- janja zvezda	39
4.3.3. Određivanje azimuta terestričkog pravca opažanjem Severnjače- Polare	40
4.3.4. Određivanje Azimuta Severnjače i Azimuta terestričkog pravca koristeći vrednosti iz tablica Astronomskog godišnjaka i vrednosti merenog ugla	41
4.3.5. Određivanje azimuta iz korespondirajućih visina zvezda nekretnica	44
4.4. Određivanje latituda (širine)	45
4.4.1. Određivanje latituda po zenitskim odstojanjima Severnjače	48
4.4.2. Određivanje latituda φ opažanjem zvezde poznate deklinacije δ pri njenom prolasku kroz meridijan	49
4.4.3. Određivanje longitude λ -dužine	50
<i>Literatura</i>	51

VIŠA GEODEZIJA GLAVA 1

<i>Zadaci Više geodezije -osnovni pojmovi i određivanja</i>	55
1.1. Teorijska površ Zemlje	56
1.2. Projekciona površ	57
1.3. Zemljin oblik	57
1.3.1. Osnovni pojmovi o sili Zemljine teže i njenog potencijala	58
1.3.2. Osnovna svojstva potencijala sile privlačenja	59
1.3.3. Potencijal sile Zemljine teže i nivoska površ	62
1.3.4. Zemljin elipsoid	64
1.3.5. Osnovne tačke i linije Zemljinog elipsoida	65
1.3.5.1. Elementi meridijanske elipse	65
1.3.5.2. Geodetske funkcije V i W	67
1.3.5.3. Normalni preseci	68
1.3.5.4. Geocentrična redukovana i geografska širina	68
1.4. Sistemi koordinata koje se koriste u Višoj geodeziji	69
1.4.1. Sistemi pravougljih prostornih koordinata XYZ	69

1.4.2. Sistemi pravougljih koordinata xy , u ravni meridijana	69
1.4.3. Sistemi geografskih koordinata	70
1.4.4. Sistemi geocentričnih koordinata	70
1.4.5. Sistemi redukovanih koordinata	71
1.4.6. Sistemi geodetskih polarnih koordinata na elipsoidu	71
1.4.7. Sistemi pravougljih koordinata p i q na elipsoidu	72
1.4.8. Sistemi pravougljih koordinata xy u ravni	72
1.4.9. Veza između nekih koordinatnih sistema	72
1.4.9.1. Veza između sistema pravougljih koordinata x, y u ravni meri- dijana i geografske širine φ	72
1.4.9.2. Veza između pravougljih koordinata x, y u ravni meridijana i redukovane širine	73
1.4.9.3. Veza između pravougljih koordinata x, y u ravni meridijana i geocentrične širine	74
1.4.9.4. Zavisnost između geografskih koordinata i redukovane širine ..	75
1.4.9.5. Zavisnost između geografske i geocentrične širine	75
1.4.9.6. Radijus vektor r kao funkcija širine φ i kao funkcija širine φ i ψ	76
1.4.9.7. Veza između pravougljih prostornih koordinata XYZ i koordinata drugih sistema	76
GLAVA 2	
<i>Poluprečnici krivina</i>	79
2.1. Opšti pojmovi	79
2.2. Poluprečnik krivine meridijana	81
2.3. Poluprečnik krivine po prvom vertikalu	82
2.4. Karakteristike poluprečnika krivina glavnih normalnih preseka	83
2.5. Srednji poluprečnik krivine	83
GLAVA 3	
<i>Dužine lukova</i>	85
3.1. Dužina luka meridijana od ekvatora do paralele sa širinom φ	85
3.2. Dužina luka paralele	86
GLAVA 4	
<i>Dvojnost normalnih preseka i geodetska linija</i>	87
4.1. Geodetska linija	88
4.2. Zamena normalnih preseka geodetskom linijom	88
4.3. Rešavanje sfernih trouglova	89
4.3.1. Rešavanje sfernih trouglova pomoću sfernog ekcesa – Ležanrova teorema	90
GLAVA 5	
<i>Konformno preslikavanje elipsoida</i>	93
5.1. Uvodne napomene	93
5.2. Gauss-Kriggerove projekcije – računanje pravougljih koordinata x i y u ravni iz geografskih koordinata φ i λ	95
5.3. Računanje konvergencije (zblizavanja) meridijana C iz geografskih koor- dinata	99

5.4. Računanje geografskih koordinata φ i λ iz pravougljih koordinata xy ..	100
5.5. Računanje konvergencije meridijana C u ravni iz pravougljih koordinat a x i y	103
5.6. Pregled formula za računanje x, y i C i geografskih koordinata φ i λ ..	104
5.6.1. Računanje x, y i C iz geografskih koordinata φ i λ	104
5.6.2. Računanje geografskih koordinata φ, λ i C iz ravnih pravougljih koordinata x, y	105
5.7. Računanje razmere iz pravougljih koordinata (x, y) , njeno smanjenje i praktičan značaj.....	106
5.8. Redukcija dužina kod Gaus–Krigerove projekcije.....	108
GLAVA 6	
<i>Nivelman viske tačnosti i precizni nivelman</i>	111
6.1. Svrha nivelmana visoke tačnosti i preciznog nivelmana.....	111
6.2. Klasifikacija nivelmana.....	112
6.3. Teorija geometrijskog nivelmana.....	114
6.3.1. Ortometrijska teorija nivelanja.....	116
6.4. Analiza metode preciznog nivelmana.....	118
GLAVA 7	
<i>Trigonometrijsko određivanje visina – trigonometrijski nivelman</i>	121
GLAVA 8	
<i>Satelitsko–kosmička geodezija – metode GPS tehnologije –</i>	127
8.1. Primena satelitske geodezije–metode za rešavanje zadataka.....	127
8.2. Metode rešavanja osnovnih geodetskih zadataka.....	128
8.3. Osnovni koncept satelitske geodezije.....	129
8.3.1. Geometrijske metode satelitske geodezije.....	130
8.3.2. Orbitalna metoda.....	130
8.4. Nebeska mehanika.....	131
8.4.1. Neporemećeno kretanje.....	134
8.4.2. Koordinatni sistemi prikazivanja putanje satelita.....	140
8.4.3. Računanje pozicija navigacionih sistema.....	141
8.4.4. Svetski koordinatni sistemi i skale vremena.....	142
8.4.5. GPS–vreme.....	143
GLAVA 9	
<i>Globalni pozicioni sistemi–sistemi GPS</i>	145
9.1. Struktura GPS–sistema.....	145
9.2. Merenje dužina.....	147
9.2.1. Određivanje pseudo dužina na osnovu merenja vremena.....	147
9.2.2. Određivanje pseudo dužina na osnovu merenja faznih razlika	148
9.3. Popravke merenih dužina.....	149
9.4. Metode merenja.....	150
9.5. Relativna određivanja.....	151
9.6. Računanje položaja satelita i koordinata.....	151
<i>Literatura</i>	159

OSNOVI ASTRONOMIJE

Uvodne napomene

1.1. Uvod

Rudarskim stručnjacima, koji se bave rudarskim merenjima potrebno je određeno minimalno znanje iz Astronomije, za određivanje položaja tačaka na Zemljinj površi, za razliku od geodetskih stručnjaka, kojima je potrebno mnogo više od minimalnog znanja kod određivanja položaja tačaka, koristeći klasične metode ili satelitsku geodeziju.

Poznato je, da u domaćoj rudarskoj ili geodetskoj literaturi iz oblasti Astronomije skoro i da nema objavljenih radova. Zbog toga smatram da je potrebno i korisno u uvodnom delu, prikazati istorijski razvoj Astronomije.

Prve klice razvoja Astronomije nalazimo kod starih naroda Haldejaca i Egipćana, koji su živeli pre više od 4000 godina pre n. ere, na prostorima stare Mesopotamije. Oni su hiljadugodišnjim neprekidnim posmatranjem neba, prikupili ogroman broj podataka o Astronomskim pojavama, koje su jedino mogli poslužiti kao osnova astronomskoj nauci i na čijim je osnovama podignuta astronomska nauka.

Grci su se oko 640–540 pre n. e. upoznali sa znanjima Vavilonaca i Egipćana, proširili su ta znanja o nebeskim pojavama i imali su učenje o Zemlji kao lopti. Slava tog logički obrazloženog učenja pripada grčkoj filozofskoj školi Pitagorejaca, Pitagoras (580–500). Pitagorejski sistem sveta bio je geocentričan, ali se u njihovoj školi počeo razvijati teorijski i heliocentričan sistem.

Kasnije se pojavila i Aleksandrijska škola, gde je bio čuveni geometričar Euclid, koji je saradivao sa Arhimedom (287–212), a živeo u Sirakuzi. Aleksandrijskoj školi pripada slava prvog određivanja dimenzija Zemlje, smatrana loptom od strane Eratostenesa (276–194). Matematički pristup koji je koristio Eratostenes ostao je nepromenjen do današnjih dana. Za vreme Aleksandrijskog rata Julija Cezara izgorela je biblioteka Muzeja i od tada škola nije imala poleta. Jedan od najvećih astronoma staroga veka je Klaudius Ptolemajos (87–165?), čije je glavno delo "Veliki Zbornik Astronomije" kasnije nazvano "Almagest", potpuno sačuvano

i štampano u velikom broju egzemplara. U suštini ovo delo predstavlja, sistematski skup celokupnog astronomskog znanja aleksandrijskog završnog perioda. Oslanjajući se na osmatranja Hiparha, on postaje ubeđeni geocentričar [6], i nije govorio o heliocentričnom sistemu sveta. Njegovi naslednici nisu uspeli da nađu put ka heliocentričnom sistemu do pada Aleksandrije 640 godine u ruke Arapa.

U ranom periodu srednjeg veka nije se verovalo da je Zemlja okrugla i da je nebeski svod obuhvata sa svih strana, jer hrišćanska vera to nije dozvoljavala. Mladi narodi Arapa, za neverovatno kratko vreme osvojili su vlast od Indije preko Severne Afrike od Španije. Tada počinje brz napredak nauke, a posebno Astronomije. Ovaj proces još više se ubrzao posle pada Carigrada u ruke Turaka 1453. godine. Arapi su dali jak podstrek zapadnjačkoj nauci. Poznati zapadnjački astronomi ove epohe su: Georg Purbah (1425–1461) i njegov učenik Johan Miler, Regiomontanus (1436–1476), kao i genijalni Leonardo da Vinči (1452–1519), koji je Zemlju smatrao zvezdom.

Otkrićem Amerike, puta za istočnu Indiju i izvršenog puta oko Zemlje, slika sveta srednjeg veka nije se više mogla održati, a astronomija je postala neophodno potrebna moreplovstvu, preporodu umetnosti i nauke. Preporod u shvatanju nastao je pojavom i učenjem Nikole Kopernika.

Helicentrični sistem velikog reformatora Astronomije Nikole Kopernika (1473–1543), jeste obnova heliocentričnog sistema Grka. Kopernikova zgrada vasiona ima raspored [6]:

1. Nepomična sfera zvezda nekretnica spoljna je granica te zgrade.
2. Kružna putanja Saturna, koji obilazi svoju putanju za 30 godina.
3. Kružna putanja Jupitera, koji obilazi svoju putanju za 12 godina.
4. Kružna putanja Marsa, koji obilazi svoju putanju za 2 godine.
5. Kružna putanja Zemlje, koja obilazi svoju putanju za 1 godinu.
6. Kružna putanja Venere, koja obilazi svoju putanju za 9 meseci.
7. Kružna putanja Merkura, koja obilazi svoju putanju za 80 dana.

U sredini ove zgrade nalazi se Sunce, koje upravlja sa svojom porodicom zvezda. Prema Koperniku, Zemlja vrši tri razna kretanja [6]:

1. Dnevno obrtanje oko svoje ose, od Zapada prema Istoku, iz kojeg sledi prividno kretanje svih zvezda, od Istoka prema Zapadu.
2. Godišnje kretanje oko Sunca, od Zapada prema Istoku, iz kojeg sledi prividno godišnje kretanje Sunca istog smisla obilaženja.
3. Godišnje konično kretanje Zemljine ose oko normale uzdignute na ravan u obrnutom smislu pređašnjeg kretanja.

Veliki protivnik Kopernikovog heliocentričnog sistema, bio je čuveni posmatrač neba Tiho Brahe (1546–1601), koji nije prihvatio ovaj sistem. Da se ne bi dogodila ranija sudbina heliocentričnog sistema, odnosno njegovo nepriznavanje, zasluga je Galileo Galilei-a (1564–1642). Galileo je pronašao Zakone slobodnog

pada, pada na strmu ravan i kosog hica i stigao je do zakona inercije. Ovim pronalaskom oborio je glavni argumet protiv heliocentričnog sistema. Sa astronomskim durbinom koga je sam konstruisao i posmatrao nebo, dokazano je da se kretanja nebeskih tela vrše i oko drugih središta, no što je Zemlja. Zbog toga je izveden pred sud inkvizicije, a spasao se odrekavši se svoje nauke. Zbog sličnog "prekršaja" Đordano Bruno (1548–1600), živ je spaljen na lomači. Na osnovu radova Kopernika i Galileja, istina se nije mogla prikrivati, i zato je Rajnhold govorio: "Moramo biti duboko blagodarni Koperniku što je vaspоставio pravu nauku o kretanju nebeskih tela". Pronalaskom Zakona Keplera i Njutna, omogućeno je da se kretanje nebeskih tela oko Sunca predstavi matematičkim jezikom.

Johanes Kepler (1571–1630), matematički je definisao svoja tri Zakona planetarnog kretanja, od kojih je dva objavio u svom delu "Astronomija nova de motibus stellae Martis" 1609, a treći u svojim "Harmonices mundi" 1619. godine:

1. Planete opisuju oku Sunca eliptične putanje; u zajedničkoj žizi tih elipsa nalazi se Sunce.
2. Radius vektor povučen od Sunca od planete prevlači u jednakim delovima vremena jednake površine.
3. Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca stoje u proporciji trećih stepena velikih poluosa njihovih putanja.

Na osnovu Keplerovih Zakona izveo je čuveni Isak Newton (1643–1727) i saopštio u svom besmrtnom delu "Philosophiae naturalis principia mathematica" London 1687, Zakon Opšte Gravitacije: Svaki delić materije u vasioni privlači svaki drugi delić, silom koja pada u pravu tih delića, a ima intenzitet proporcionalan proizvodu masa m_1 i m_2 tih delića, a inverzno proporcionalan kvadratu njihovog odstojanja r . Jedna od najboljih potvrda Njutnovog zakona je otkriće planete Neptun 1846. godine na računski predviđenom mestu.

Moderna astronomija počela se razvijati u periodu koji obuhvata sredinu 19. veka i početak 20. veka. Za ovaj period treba pomenuti radove na izdavanju spektralnog kataloga za 225 000 zvezda Henri Drepera (Henry Draper) 1924. godine. Primena Doppler-Fizoovog efekta dovelo je ruskog astronoma Struvea 1925. godine do otkrića rotacije zvezda. Hejl (Hale) je 1908–1913 godine otkrio globalno sunčevo magnetno polje, a Bebkok (Bebbcock) je 1946 godine otkrio magnetno polje zvezda. Radioelektrično zračenje Sunca otkrio je 1939 godine Reber (Reber). Sadašnji nivo razvoja elektronske tehnike omogućuje još brži razvoj Astronomije u celini.

U kratkom kursu Astronomije, koji je potreban rudarskim i geološkim stručnjacima za kompletiranje znanja o položajima na Zemlji, upoznaćemo se sa: Predmetom Astronomije, Astronomskog eksperimenta, kao i sa primenom dela Astronomije u geodeziji, odnosno rudarskih merenja, kod određivanja pravca meridijana u tački na površi Zemlje i kod određivanja Azimuta terestičkog pravca.

Autor

1.2. Korišćene oznake

- φ – geografska širina
- λ – geografska dužina
- α – rektascenzija
- δ – deklamacija
- E – istok
- W – zapad
- S – jug
- N – sever
- P_N – severni nebeski pol
- P_S – južni nebeski pol
- h – visina
- A – Azimut nebeskog tela
- A_T – Azimut (terestički)
- z – zenitsko odstojanje
- β – horizontalni ugao (oznaka koja se koristi u geodeziji)
- t – časovni ugao
- s – zvezdano vreme
- γ – gama tačka
- λ_m – longituda srednjeg Sunca
- λ_0 – longituda pravog Sunca
- T – pokazivanje časovnika
- C_p – popravka časovnika
- S – granično zvezdano vreme
- A_S – azimut severnjače
- M_m – mesto meridijana na horizontalnom limbu

Predmet astronomije i astronomski eksperiment

Kosmos. U opštem smislu kosmosom (vasionom) nazivamo ono što jeste; u posebnom smislu kosmos karakteriše prevladavanje materije.

Nebesko telo. U takvom kosmosu nebeskim telima nazivamo materiju čije su razmere daleko veće od razmera čoveka ili su rastojanja do nje daleko veća od razmera čoveka.

Nebeski sistem. Grupe (skupovi) nebeskih tela nazivaju se nebeskim sistemima ukoliko su rastojanja međuskupovima mnogo veća od dimenzija skupova.

Međusistemska sredina. Deo kosmosa u kojem je prevladavanje materije slabije naziva se međusistemskom sredinom.

Definicija. Astronomija je nauka koja proučava nebeska tela, nebeske sisteme i međusistemsku sredinu pojedinačno ili u celini.

2.1. Opšti pojam astronomskog eksperimenta

U klasičnom smislu pod ovim pojmom podrazumevaju se metode astronomskih posmatranja i instrumenti, pri čemu se posebno misli na optičke instrumente i posmatranja.

Držeći se opredeljenja iz predhodne tačke, ovde ćemo uvesti novi pojam, pojam astronomskog eksperimenta, koji se kasnije koristi kao osnovni kriterijum (princip) za podelu astronomije na podoblasti.

Predhodno uvedimo sledeće pojmove:

Matematičkim ili prirodnonaučnim eksperimentom nazivamo raspoloživa teorijska i praktična znanja matematičkih ili prirodnih nauka i čoveka.

Astronomskim eksperimentom nazivamo svaki astronomskom problemu prilagođen izbor i modifikaciju postojećih eksperimenata u matematici i prirodnim

naukama, kao i razvoj sopstvenih teorijskih i praktičnih znanja.

Polazeći od onoga što je rečeno u prvoj tački i od ovoga sada, jasno je, da je osnovna podela astronomije sledeća:

- astronomija nebeskih tela
- astronomija nebeskih sistema
- astronomija međusistemske sredine
- astronomija kosmosa kao celine.

U svakoj od ovih oblasti moguća je dalja podela prema tipu preovladavajućeg eksperimenta: nebeska mehanika, teorijska astronomija, praktična astronomija, geodetska astronomija, astrofizika, kosmologija, kosmogonija, astrohemija, astrobiologija, radioastronomija, gamaastronomija itd.

Očigledno je, da ovakva podela nosi u sebi glomaznost i razuđenost, ali je istorijski nasleđena. Zato većina pojmova u ovom kursu astronomije neće moći da se izbegne iz istorijskih razloga.

Iz istog razloga najvažniji oblik posebno astronomskog eksperimenta je astronomsko posmatranje, koje se obavlja golim okom ili teleskopom. Pod teleskopom podrazumevamo posebno izgrađen instrumentarijum za prikupljanje informacija o makrosvetu uz bitno povećanje kvaliteta ili kvantiteta informacije u odnosu na posmatranje golim okom.

Značajne osobine astronomskog posmatranja:

- Relativno visoka pasivnost posmatranja i posmatrača u odnosu na objekte posmatranja, zbog vremensko-prostornih razmera.
- Relativno neizbežna vezanost posmatrača i instrumentarijuma za Zemlju, pri čemu se njene osobenosti kao nebeskog tela i sistema referencije moraju znati.
- Iz prve dve osobine proizilazi treća - velika prisutnost geometrijskog eksperimenta (uglovna merenja u astronomskoj praksi).
- Konačno, najznačajnija osobina astronomskih eksperimenata, a time i posmatranja, jeste njihova razvojnost, koja će omogućiti otklanjanje slabosti nekih karakteristika.

2.2. Određivanje položaja nebeskog tela

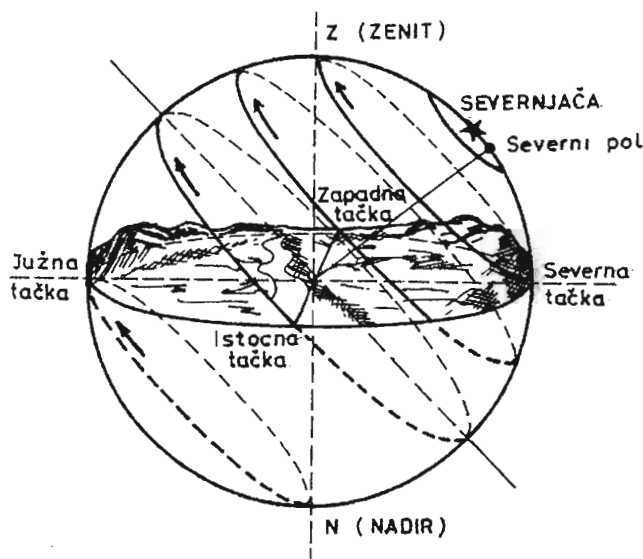
U saglasnosti sa onim što je rečeno u glavi jedan i naslova ovog poglavlja neophodno je uvesti novi pojam, nebeski svod, ili nebo, koga treba objasniti.

Neposredni čulni utisak iz posmatranja iznad sebe i naokolo, sa mirne morske površine, je da se nalazimo u središtu ogromnog svoda, koji se savija iznad nas i sastaje u daljini sa morskom ili Zemljinom površi. Isti takav utisak dobija se ako posmatramo sa bilo koje tačke Zemljine površi. Ovaj svod koji ima oblik kalote, zovemo nebo ili nebeski svod.

2.2.1. Nebeska sfera

Stari narodi koji su živeli pre n.e, znali su da se u stvarnosti pomenuti svod ili nebo nikad ne sastaje sa površi na kojoj stojimo. Kada se neposredno posmatraju nebeska tela ne možemo stvoriti sliku o njihovim udaljenostima. Zbog nedostatka astronomskog eksperimenta, zamišljamo da se ova tela nalaze raspoređena na unutrašnjoj površini jedne lopte (sfere)¹, čije je središte u našem oku i zato govorimo o njoj kao da postoji i zovemo je nebeska sfera. Kod ovako zamišljene sfere, u prvoj aproksimaciji smatramo da su sva nebeska tela na jednakim udaljenostima od centra sfere koji je u posmatračevom oku, i ima poluprečnik $R=1$.

Ako je vizura poluprava od posmatrača ka nebeskom telu, onda se sva nebeska tela nalaze na nebeskoj sferi u tačkama prodora odgovarajućih vizura; to su prividni položaji nebeskih tela. Promena položaja nebeskog tela na nebeskoj sferi naziva se prividno kretanje. Nebeska sfera se obrće od istoka ka zapadu i tako dovodi do pojava kao što su izlaz, kulminacija², i zalaz nebeskih tela. Sunce svojim kretanjem dopunjuje taj utisak, (sl.2.1).



Sl.2.1. Prividno dnevno obrtanje nebeske sfere

Nebeska sfera koristi se za određivanje položaja nebeskih tela, promena tih položaja i izučavanje njihovih kretanja. Položaj nebeskih tela na sferi definiše se sa dve koordinate ili pravcima iz centra sfere, a može i obrnuto, tačke na sferi definišu pravce. U mnogim problemima geodetske astronomije od interesa su samo pravci i odnosi između njih, što se rešava korišćenjem sfere. Središte ili centar sfere može da bude : posmatračevo oko (topocentar), centar Zemljine mase (geocentar), a neki put centar Sunčeve mase (heliocentar).

¹od Grčke reči koja znači lopta

²od latinske reči kulmen=vrh

2.2.2. Nebeska tela

Matična naseobina čoveka je Sunčev sistem. Središnje mesto u ovom sistemu zauzima jedan okrugli kotur (disk)³, neobično jakog sjaja, koji predstavlja izvor svetlosti, toplote i života na Zemlji, to je Sunce. Zbog velike mase 99% (svih masa) u sistemu i velike gravitacije, prisiljava sva ostala tela da kruže oko njega po stabilnim putanjama. U prvom redu to su 9 velikih planeta (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun i Pluton), sa svojim satelitima, zatim oko 4000 malih planeta (planetoida i asteroida), oko 600 poznatih kometa i neizmeran broj sitnih tela-meteora. Sunčev sistem ispunjen je oblacima retke međuplanetarne prašine i gasa.

Čovekova šira naseobina je Kosmos u kome se nalaze: zvezde, zvezdana jata, svetle i tamne galaktičke magline i međuzvezdana materija. Danas kada su nauka i tehnologija toliko napredovale, omogućeno je izučavanje i drugih zvezdanih sistema i galaksija u prostoru, izračunavanje postanka i razvoja nebeskih tela, kao i cele Vasiona.

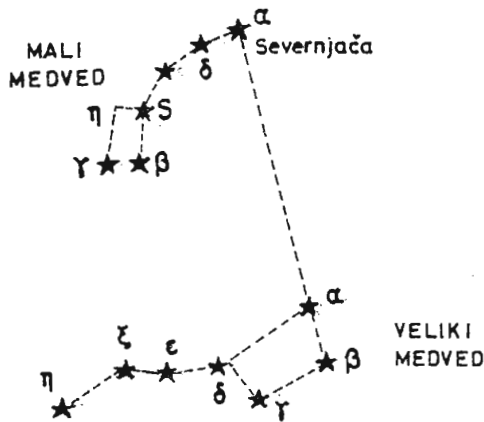
2.2.3. Sazvežđa

Sve što smo do sada rekli o nebeskim telima isključivo je rezultat vizuelnog astronomskog eksperimenta u kojem prevladuje matematička apstrakcija nebeske sfere. Ako u principe klasifikacije uključimo dodatne mogućnosti vizuelnog posmatranja, onda možemo da govorimo o sjaju i boji nebeskih tela.

Uočavajući sjajne zvezde na nebu, drevni posmatrači su koristili i njihove osobine (primetno ne menjaju međusobne položaje, zvezde nekretnice), za izučavanje nebeskih pojava i približne orijentacije u položajima zvezda. Zato su izvršili prostornu podelu zvezda u grupe, odnosno podelili su nebesku sferu na delove, a od zvezda u njima obrazovale su manje ili veće grupe koje se nazivaju Sazvežđima (konstelacija). Po pravilu svakom sazvežđu, dat je odgovarajući mitološki značaj i obeležje. Danas je nebeska sfera podeljena na 88 sazvežđa, između kojih su povučene tačne granice, obeležena njihova imena, dati nazivi pojedinih sjajnih zvezda i drugih nebeskih tela. Položaj nebeskih tela danas se daje koordinatama, ali podela na sazvežđa ostala je ista, kao što su uradili drevni posmatrači. Imena sazvežđa su sledeća: Ovan, Bik, Blizanci, Rak, Lav, Devojka, Vaga, Škorpija, Strelac, Jarac, Vodolija, Ribe i druga.

Najsajnijim zvezdama u sazvežđima davana su imena (uglavnom arapskog porekla), a obeležavane su jednim od prvih slova grčke azbuke. Slabije zvezde obeležavaju se poslednjim latinskim slovima, a još slabije brojem ispred imena sazvežđa. Geodeski i rudarski stručnjaci, uglavnom treba da se upoznaju sa sazvežđima Veliki Medved (Ursa Maior) i Mali Medved (Ursa Minor), odnosno Velika i Mala kola, (sl.2.2).

³od grčke reči diskos=okrugla ploča



Sl.2.2.

Veliki i Mali medved

Sazvežđa se na osnovu vidljivosti dnevnih putanja zvezda u njima, dele u grupama: Cirkumpolarna, zimska, prolećna, letnja i jesenja grupa. U Cirkumpolarnoj grupi sazvežđa, nalaze se zvezde čije su dnevne putanje u celosti vidljive. Za rudarske inženjere važna je Cirkumpolarna grupa sazvežđa, koja se nalazi na severnom nebu, gde je najupečatljivije najveće sazvežđe Veliki Medved (Ursa Maior) ili Velika kola. Ako produžimo pravac $\alpha-\beta$ za oko 5 puta dolazimo do Severnjače ili Polare (Ursae Minoris), koja je u današnje vreme za oko 1° udaljena od severnog pola i nalazi se na repu Malog Medveda.

U ostalim grupama (zimska, prolećna, letnja i jesenja) nalaze se zvezde (koje izlaze i zalaze) čije se dnevne putanje delimično vide, koje usled Zemljinog okretanja oko Sunca kulminuju u određena godišnja doba, i samo se tada mogu posmatrati na nebu.

U zimskoj grupi su sledeća sazvežđa: Kočijaš (Auriga), Bik (Taurus), Blizanci (Gemini), Orion (Orion), Mali Pas (anis Minor). U sazvežđu Veliki Pas, nalazi se najsjajnija zvezda na nebu α Cavis Maioris ili Sirius.

U prolećnoj grupi su sazvežđa: Rak (Cancer), Lav (Leo), i Devojka (Virgo), a u letnjoj grupi su: Volar (Bootes), Severna Kruna (Corona Borealis), Herkul (Hercules), Lira (Lyra), Labud (Cygus) i Orao (Aguila).

2.2.4. Prividno dnevno obrtanje nebeske sfere

Vizuelnim posmatranjem neba, dobijamo intuitivnu predstavu o nebeskoj sferi i njenim karakteristikama. Pri pažljivom posmatranju zapazićemo da (poznata zvezda) Severnjača (Polara), skoro da ne menja svoj položaj u odnosu na zemaljske repere. Svi drugi nebeski objekti opisuju u toku dana (24 sata) krug sa centrom u blizini Severnjače.

Ako beležimo međusobne položaje i izgled nebeskih tela na nebeskoj sferi u toku dužeg vremenskog intervala uočićemo:

- da postoji veliki broj objekata koji praktično ne menjaju međusobni položaj (zvezde nekretnice),

- da postoji manji broj zvezdolikih objekata koji svetle mirnom svetlošću (ne trepere) i koji menjaju položaj među zvezdama (planete, lunalice),
- da postoji Mesec koji menja svoj položaj u odnosu na zvezde,
- da postoji Sunce, koje iz dana u dan izlazi približno na istom mestu u odnosu na zemaljske repere, ali u okolini različitih grupa zvezda,
- da se povremeno pojavljuju kosmati nebeski objekti, menjaju položaj u odnosu na nebesku sferu zvezda (komete),
- da se povremeno pojavljuju zvezdoliki objekti, pojedinačno i pljusкови tih objekata u intervalu od nekoliko sekundi i brzo nestaju sa zvezdanog neba (meteori),
- da se preko neba prodire belo magličasta traka nejednake širine i sjaja, ali stalnog položaja među zvezdama (Galaksija, Mlečni put, Kumova slama).

Kada posmatramo zvezde, prividno dnevno kretanje nebeske sfere se manifestuje u postojanju zvezda čije su dnevne putanje u celosti vidljive (cirkum polarne zvezde) i postojanju zvezda čije se dnevne putanje vide delimično (zvezde koje izlaze i zalaze) i u postojanju zvezda čije delove dnevne putanje samo ponekad vidimo ili uopšte ne vidimo iz datog položaja (anticirkum polarne zvezde). Iz vizuelnog posmatranja neba, može se utvrditi:

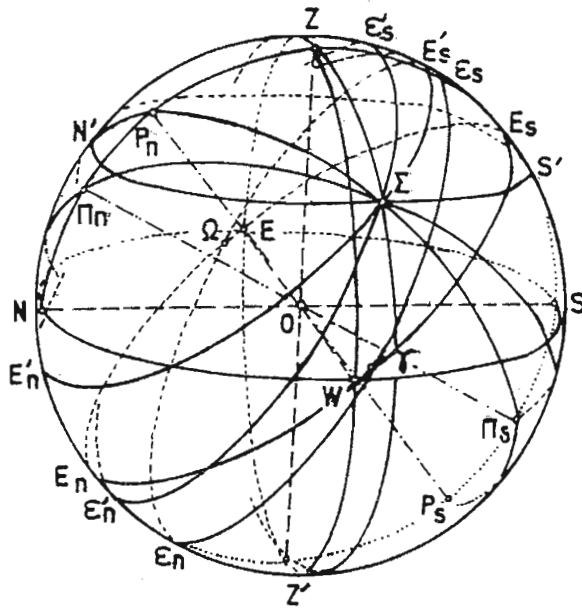
- da se nebeska tela kreću,
- da se kreću u istom smeru: od istoka ka zapadu,
- da se kreću po kružnim linijama, koje su međusobno paralelne,
- da se kreću jednolikim kretanjem tj., za proizvoljno jednaka vremena okrenu se za jednake uglove.

Prema tome i cele kružne putanje opisuju za isto vreme. Zbog toga ovo kretanje ostavlja utisak, kao da se cela nebeska sfera zajedno sa svim telima obrće kao celina oko jednog prečnika kao oko ose: u istom smeru istom ugaonom brzinom i za isto vreme, za koje nebesko telo opiše svoju putanju. Zato ovo kretanje zovemo prividno dnevno kretanje nebeske sfere, jer se jedan obrt izvrši za jedan dan, odnosno za 24^h .

2.2.5. Elementi nebeske sfere

Nebeska sfera se kao celina prividno obrće, a jedna njena tačka- invarijantna tačka obrtanja je u blizini Severnjače. Druga tačka je dijametralno suprotna u odnosu na invarijantnu tačku i posmatrača. Vremenski razmak za koji nebeska sfera izvrši pun obrt naziva se Zvezdani dan. Zvezdani dan predstavlja vremenski razmak u kome se ponovi konfiguracija zvezda u odnosu na Zemaljske repere. Ukoliko su položaji zvezda dati u odnosu na mesto posmatranja govorimo o topocentričnoj konfiguraciji, a ukoliko su dati u odnosu na centar Zemlje, onda govorimo o geocentričnoj konfiguraciji.

Osnovne tačke, prave krugovi i ravni koje se koriste za određivanje položaja i izučavanje kretanja nebeskih tela u Sfernoj astronomiji su (sl.2.3):



2.3.

Nebeska sfera

1. Osa prividnog obrtanja nebeske sfere naziva se svetska ili polarna osa. Tačke prodora svetske ose kroz nebesku sferu su svetski polovi, severni P_N i južni P_S . Severni pol je onaj iz koga se sva prividna kretanja vide u smeru kretanja kazaljke na satu—u retrogradnom smeru.
2. Nebeski ekvator $E_s W E_n E$ je veliki krug nebeske sfere i predstavlja, presek nebeske sfere sa ravni upravnom na svetsku osu kroz Zemljino središte (sl.2.3).

Dnevni paralel je mali krug nebeske sfere paralelan ekvatoru. Deklinacijski krug je veliki krug nebeske sfere $P_n \Sigma P_s$, koji prolazi kroz polove. Istorijski gledano, osnovni elementi nebeske sfere za orijentaciju i određivanje položaja tačaka na Zemlji i položaja nebeskih tela su vertikala i horizont.

Vertikala ZOZ' je prava čiji nosač vektor sile zemljine teže— rezultanta privlačne i centrifugalne sile. Materijalizuje se pravcem mirnog viska.

Prvi horizont (u daljem samo horizont) je presečni krug ravni upravne na vertikalu kroz posmatračku poziciju i nebeske sfere. Na slici 2.3 to je krug $SWNE$.

Zenit i nadir (Z i Z') su prodorne tačke vertikale kroz nebesku sferu, zenit je iznad horizonta. Almukantar (*at*) je mali krug nebeske sfere ($S' \Sigma N'$) paralelan horizontu.

Vertikal $Z \Sigma Z'$ je veliki krug nebeske sfere koji prolazi kroz zenit i nadir.

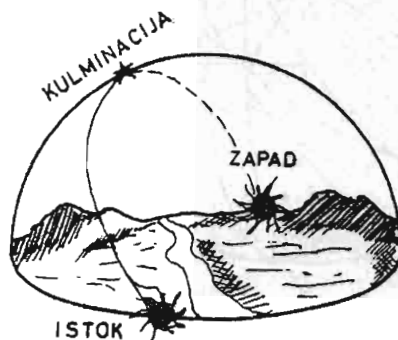
Nebeski meridijan posmatračke stanice je deklinacijski krug $P_n Z P_s$, kroz zenit, odnosno, vertikal kroz svetski pol. On seče horizont u južnoj S i severnoj S' tački (N —tačka bliža polu P_n). Prava NS u ravni horizonta naziva se podnevačka linija SON .

Prvi vertikal je vertikala čija je ravan upravna na ravan meridijana; tačke preseka prvog vertikala i horizontala su istočna E i zapadna W tačka.

2.2.6. Prividna sunčeva kretanja, ekliptika

Svakodnevnim posmatranjem može se zapaziti promena položaja izlaza i zalaza Sunca, odnosno taj položaj menja u odnosu na zemaljske repere. Ova posmatranja mogu se vršiti u odnosu na pravac najkraće dnevne senke mirnog viska (pravac podnevačke linije).

Najveća dnevna visina Sunca nad horizontom naziva se (gornjom) kulminacijom (pravo podne) slika 2.4; trenutak pravogpodneva identičan je trenutku najkraće senke l i tada se ugao visine može dobiti iz dužine viska l i senke s ; $\tan h = l/s$.



Sl.2.4. Sunčeva prividna dnevna putanja Kulminacija

Beležeći položaje tačaka izlaza i zalaza Sunca u toku godine i njegovu visinu u trenutku kulminacije, utvrdićemo da:

- postoje trenutci maksimalnog udaljenja ka istoku i zapadu, tačaka izlaza i zalaza redom u odnosu na tačku istoka E i Zapada W ; to su trenutci solsticija (zastoja)-letnjeg i zimskog, redom. Ti trenutci su identični trenutcima maksimalne i minimalne podnevne visine Sunca.

Odgovarajući dnevni paraleli koje opisuje Sunce nazivaju se severnim i južnim povratnikom.

- postoje trenutci poklapanja tačaka izlaza i zalaza sa tačkama E i W , redom; to su trenutci ekvinoksija (ravnodnevnice)-prolećne i jesenje.

Zbog neprekidnosti sunčevog kretanja, njegove dnevne putanje nisu, strogo uzevši, nebeski paraleli već delovi zavojnice između severnog i južnog povratnika. Proširujući eksperiment sa Suncem na beleženje položaja tačaka njegovog izlaza i zalaza u odnosu na okolinu zvezda na nebeskoj sferi, utvrdićemo da se Sunce prividno kreće među zvezdama, od zapada na istok i da po isteku perioda (vremena), koji je nama poznat pod imenom godina, ponavlja svoj položaj na nebeskoj sferi zvezda.

Veliki krug nebeske sfere $\varepsilon, \gamma\varepsilon_n$ koji se dobija kao projekcija prividne godišnje putanje Sunca na nebesku sferu naziva se Ekliptikom, čija polarna osa prolazi kroz polove ekliptike i središtu Zemlje $\Pi_n O \Pi$, i upravna je na ravan ekliptike.

Kretanjem po ekliptici Sunce u toku godine prođe 12 sazvežđa, koja skoro sva nose životinjska imena-zodijska sazvežđa, koja su navedena u poglavlju o sazveždima.

2.2.7. Elementi nebeske sfere izvedeni iz prividnog kretanja sunca

Višegodišnji eksperiment sa suncem pokazao bi da su severni i južni povratnik na približno konstantnoj daljini od nebeskog ekvatora, a to znači da je nagibni ugao ravni ekliptike prema ravni ekvatora približno konstantan ($\approx 23^{\circ}27'$). Uzimajući da je ekliptika element nebeske sfere, polovima ekliptike (Π_n i Π_s) nazivamo tačke prodora kroz nebesku sferu prave upravne na ekliptiku. Ekliptika seče nebeski ekvator u tačkama ekvinokcija- prolećni γ i jesenji Ω .

Mali krug nebeske sfere paralelan sa ekliptikom naziva se krug longitude; veliki krug nebeske sfere kroz polove ekliptike naziva se krug latitude.

2.2.8. Zvezdane karte

Da bi mogle da se prave zvezdane karte, koje prikazuju sazvežđa u ravni, treba da znamo koordinate zvezda. U klasičnom eksperimentu pokazalo se da su najpogodniji sferni koordinatni sistemi. Po pravilu, sferni koordinatni sistem je određen izborom osnovne ravni, osnovnog pravca u toj ravni i smerom merenja uglova. Koordinate u ovom sistemu su rastojanje i dva ugla; kako je rastojanje za nebesku sferu po definiciji jedinično $R = 1$, koordinate su samo dva ugla.

Izborom različitih elemenata nebeske sfere razlikujemo i koordinatne sisteme:

- horizontski ;
- mesni ekvatorski ;
- nebeski ekvatorski ;
- ekliptički koordinatni sistem.

Određivanje položaja nebeskih tela i položaja tačaka na Zemlji

3.1. Osnovni pravci i ravni u prostoru i koordinatni sistemi

Jedan od osnovnih pravaca u prostoru je vertikalna, odnosno pravac rezultante Zemljine privlačne i centrifugalne sile u nekoj tački. Vertikalnu neposredno na Zemlji ostvarujemo viskom, libelom, živinim horizontom i klatnom.

Ravan upravna na vertikalnu u uočenoj tački je horizontalna ravan i jedna je od osnovnih ravni.

Drugi osnovni pravac je pravac Zemljine obrtne osovine. Ravan upravna na Zemljinoj obrtnoj osovini je ekvatorska ravan.

Srednja ravan putanje opšteg centra mase sistema Zemlja–Mesec je ekliptika–treća osnovna ravan.

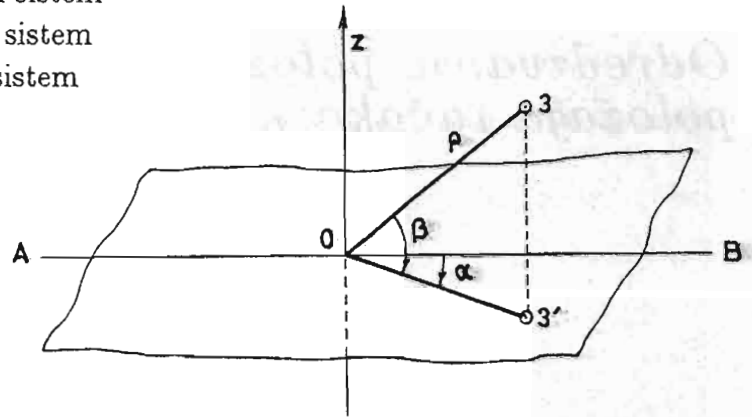
Osnovni pravci i ravni služe kao osnova za stvaranje koordinatnih sistema u kojima se mogu određivati i izučavati pravci ka nebeskim telima kao i drugi pravci od interesa za određivanje položaja nebeskih tela.

3.2. Koordinatni sistemi za određivanje položaja nebeskog tela

Za određivanje položaja nebeskih tela u astronomiji se koristi sferni koordinatni sistem. Ovaj koordinatni sistem definisan je osnovnom ravni P slika 3.1, pravom upravnom na njoj OZ i osnovnim pravcem AOB i smerom u kome se računaju pozitivni uglovi. Koordinate u ovom sistemu su poteg ρ i dva ugla α i β . Poteg ρ , kao poluprečnik nebeske sfere uzima se za jedinicu, odnosno položaj nebeskog tela određuje se sa dve koordinate tj., uglovima α i β . Smer računanja

uglova je retrogradni ili suprotni-direktni. Prema 3.1 postoje tri vrste sfernih koordinatnih sistema u geodetskoj astronomiji, to su:

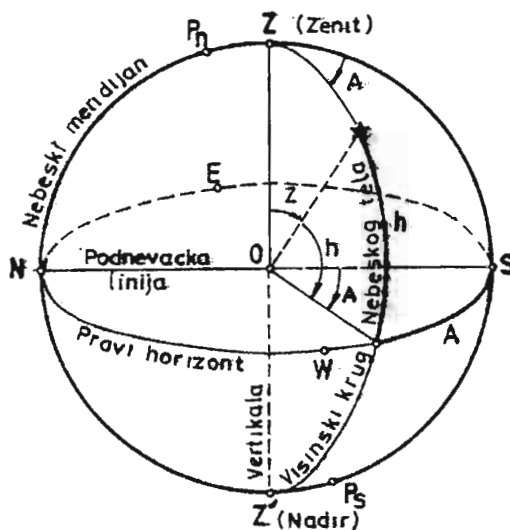
- Horizontski koordinatni sistem
- Ekvatorski koordinatni sistem
- Ekliptički koordinatni sistem



Sl.3.1. Sferni koordinatni sistem

3.2.1. Horizontski koordinatni sistem

Osnovna ravan kod ovog sistema je ravan horizonta—pravi horizont. Osnovni pravac je podnevačka linija—od posmatrača ka južnoj tački, a smer merenja uglova je retrogradni. Položaj nebeskog tela u ovom sistemu određuje se koordinatama, A (azimut) i h (visina) ili zenitna daljina, slika 3.2.



Sl.3.2.

Horizontski koordinatni sistem

Azimut A je ugao u horizontskoj ravni koji se meri od južne tačke S , do preseka vertikala koji prolazi kroz nebesko telo sa horizontom, u smeru kazaljke na satu, odnosno u retrogradnom smeru. Vrednosti azimuta mogu da budu u granicama $0^{\circ} - 360^{\circ}$.

Visina h je ugao u vertikalnoj ravni, koja se meri od horizonta do vizure ka nebeskom telu. Vrednosti visina mogu biti iznad horizonta od 0° do $+90^{\circ}$ i ispod horizonta od 0° do -90° .

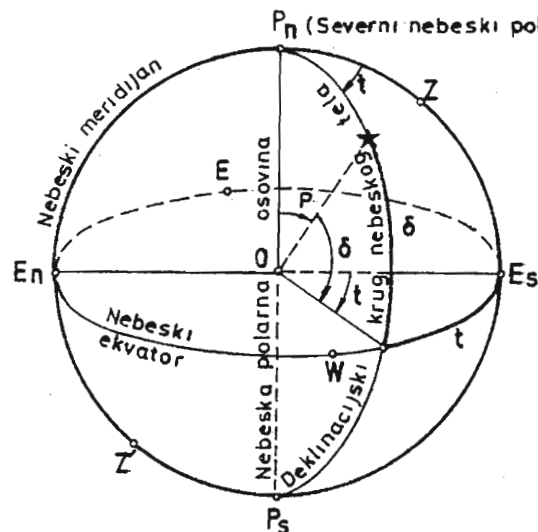
Umesto visine h može se upotrebljavati i zenitna daljina Z . Zenitna daljina je ugao u vertikalnoj ravni između pravca vertikale ka zenitu i vizure ka nebeskom telu. Vrednosti zenitne daljine mogu da budu od 0° do 180° . Veza između zenitne daljine i visine data je formulom:

$$Z + h = 90^{\circ} \quad Z = 90^{\circ} - h$$

Horizontske koordinate menjaju se sa promenom mesta posmatranja (svako mesto na Zemlji ima svoj horizont) tj., promenom koordinatnog početka, kao i zbog prividnog dnevnog kretanja nebeske sfere. Zato je ovaj sistem mesni koordinatni sistem ili lokalni sistem.

3.2.2. Mesni ekvatorski koordinatni sistem

U ovom sistemu (sl.3.3), osnovna ravan je ravan nebeskog ekvatora, osnovni pravac je pravac ka južnoj tački E_s ekvatora, a smer merenja uglova retrogradni.



Sl.3.3. Mesni ekvatorski koordinatni sistem

Koordinate ovog sistema su: časovni ugao t i deklinacija δ .

Časovni ugao (t) tačke je ugao u ekvatorskoj ravni, meren od osnovnog pravca do pravca preseka osnovne ravni, sa ravni deklinacijskog kruga kroz datu tačku; interval promene je $0^h, 24^h$ ili $0^{\circ}, 360^{\circ}$.

Deklinacija δ je ugao u ravni deklinacijskog kruga meren od preseka sa ravni ekvatora do pravca vizure ka nebeskom telu, interval $-90^{\circ}, +90^{\circ}$. Po definiciji polarna daljina (P) je komplement deklinacija.

$$P = 90^{\circ} - \delta$$

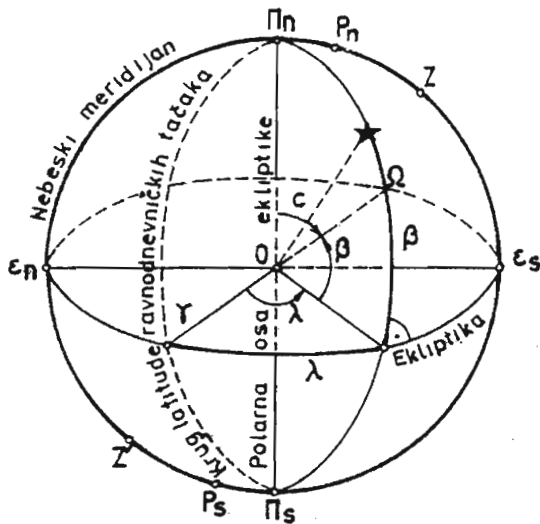
Deklinacija je invarijanta u odnosu na prividno dnevno kretanje, ali časovni ugao nije, pa je zato i ovaj sistem mesni.

3.2.3. Ekliptički koordinatni sistem

U ekliptičkom koordinatnom sistemu (sl.3.4), koordinate nebeskog tela su: nebeska longituda λ i nebeska latituda β .

Osnovna ravan u ovom sistemu je ravan ekliptike. Osnovni pravac je pravac ka γ tački, a smer merenja uglova je direktni.

Longituda λ meri se u ekliptičkoj ravni od pravca ka γ tački do prave preseka ravni kruga latituda sa ekliptikom u smeru suprotnom-direktnom smeru kazaljke na časovniku. Longituda može imati vrednosti od 0° do 360° .



Sl.3.4.

Ekliptički koordinatni sistem

Latituda se meri u ravni kruga latituda, od ekliptike do vizure ka nebeskom telu i to od 0° do $+90^{\circ}$, odnosno od severnog pola ekliptike, i od 0° do -90° , odnosno do južnog pola ekliptike. Ponekad se umesto nebeske latituda upotrebljava nebeska kolatituda c , odnosno ugao u ravni kruga latituda koji se meri od pravca ka severnom polu ekliptike do vizure na nebesko telo. Može imati vrednosti od 0° do 180° . Latituda i kolatituda vezane su jednačinom $\beta + c = 90^{\circ}$. Ovaj koordinatni sistem najčešće se upotrebljava u teorijskoj astronomiji kod proučavanja pravih kretanja nebeskih tela Sunčevog sistema.

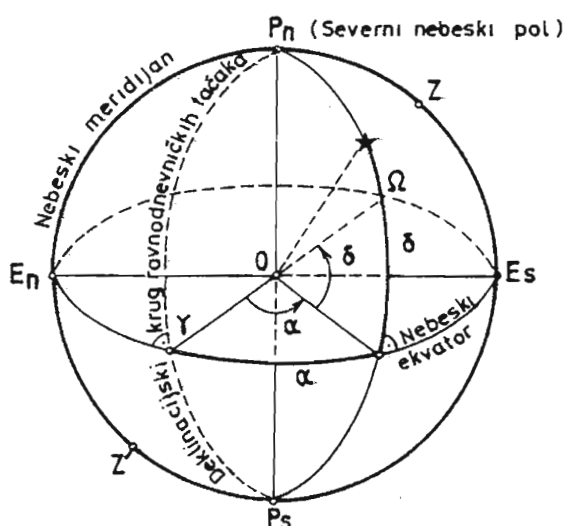
3.2.4. Prividno dnevno obrtanje nebeske sfere i zvezdano vreme – Nebeski ekvatorski koordinatni sistem –

Obrtanjem Zemlje oko svoje polarne osovine sa zapada na istok, nebeska sfera izvrši prividno jedan pun obrt sa istoka na zapad u toku jednog stalnog vremenskog razmaka koji se zove zvezdani dan.

Zbog ovoga sva nebeska tela izlaze na istočnom delu horizonta. polako se penju po nebeskoj sferi, do svoje najveće visine, kada dostižu kulminaciju, a zatim se polako spuštaju prema zapadnom delu horizonta gde i zalaze. Prema tome svako nebesko telo u toku prividnog dnevnog kretanja opiše svoj dnevni paralel

i dva puta pređe kroz meridijan – gornji i donji prolaz kroz meridijan: Zvezdani dan je osnovna jedinica za merenje vremena u Astronomiji. Zvezdano vreme s meri se veličinom časovnog ugla γ tačke u svakom trenutku. Astonomi kada mere koordinate nebeskih tela, beleže stanje časovnika ili hronometra koji pokazuje zvezdano vreme.

Poznato je da se deklinacija za zvezde nekretnice u toku vremena ne menja. Kod mesnog ekvatorskog koordinatnog sistema promenljiv je samo časovni ugao t . Za određivanje položaja nebeskih tela stalnim koordinatama uveden je Nebeski ekvatorski koordinatni sistem, (sl.3.5). U ovom koordinatnom sistemu zadržana je kao stalna veličina deklinacija δ , a časovni ugao zamenjen je uglom koji se računa u ekvatorskoj ravni od γ tačke u direktnom smeru do ravni časovnog kruga zvezde. Ovaj ugao zove se rektascenzija α i ima vrednosti od $0 - 24^h$ [1]. Stalan je zato što časovni krug γ tačke u časovni krug zvezde ne menjaju međusobni položaj, jer se nebeska sfera prividno obrće kao celina.



Sl.3.5.

Nebeski ekvatorski
koordinatni sistem

Za nebesko telo koje se nalazi na zapadnoj polovini nebeske sfere, može se postaviti veza između rektascenzije i časovnog ugla: $s_W = \alpha + t$, a za telo koje se nalazi na istočnoj polusferi prethodna jednačina glasi:

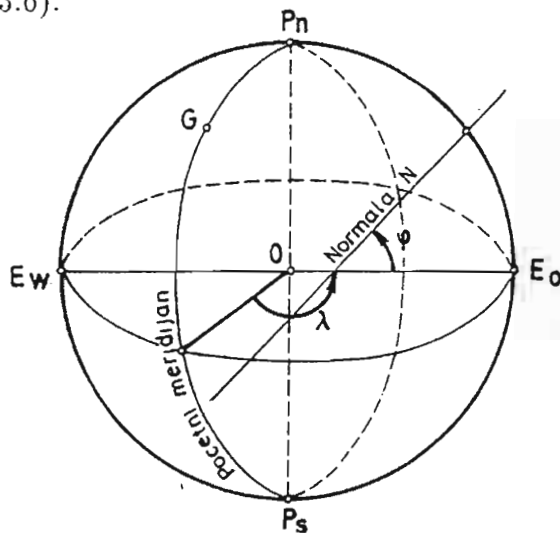
$$s_E = \alpha - t$$

za telo u gornjoj kulminaciji $s = \alpha$, a za telo u donjoj kulminaciji $s = \alpha + 12^h$. Prethodne jednačine služe za prelaz sa mesnih na nebeske ekvatorske koordinate.

3.2.5. Geografski koordinatni sistem

Smatrajući Zemlju u prvoj aproksimaciji loptom, tačke prodora svetske osovine kroz sfernu površinu Zemlje, nazvaćemo zemljini polovi: severni i južni. Ravan nebeskog ekvatora seče istu sferu po krugu koji se naziva Zemljin ekvator. Uporednici ili paralele su mali krugovi paralelni ekvatoru; Zemljini meridijani su krugovi kroz polove.

Za određivanje položaja tačke na Zemlji koristi se zemljin ekvatorski koordinatni sistem. Osnovna ravan u ovom koordinatnom sistemu je ekvatorska ravan, (sl.3.6).



Sl.3.6.

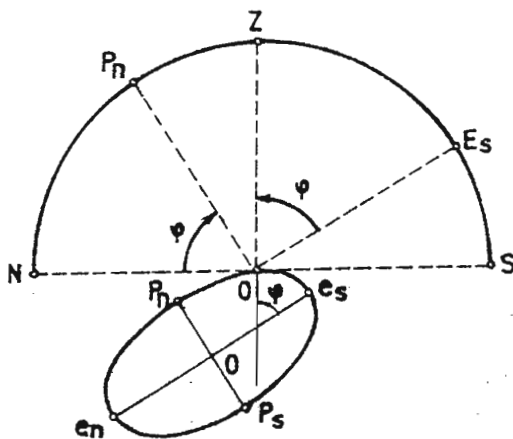
Geografski koordinatni sistem

Položaj tačke na Zemljinoj površini određuje se sa tri koordinate: geografskom širinom, geografskom dužinom i nadmorskom visinom.

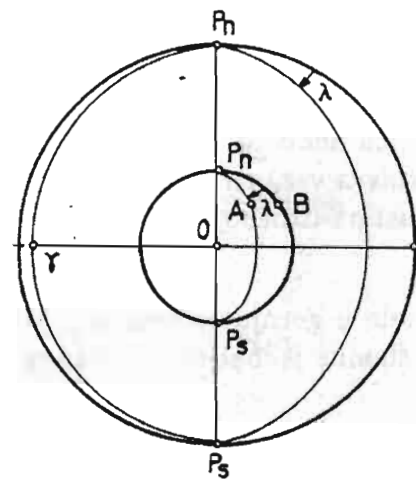
Geografska širina φ_g (koja se određuje astronomskim metodama, često se naziva astronomska širina φ_a), je ugao koji zaklapa vertikala u datoj tački T na Zemljinoj površi sa ekvatorskom ravni (sl.3.7).

U geodeziji se koristi geodetska širina ili ugao koji zaklapa normala u tački T elipsoida sa ekvatorskom ravni (sl.3.7).

Geografska dužina (koja se određuje astronomskim metodama, naziva se astronomska dužina), je ugao diedar između meridijanske ravni početnog meridijana na zemlji i meridijana datog mesta (sl.3.8).



Sl.3.7. Geografska širina



Sl.3.8. Geografska dužina

Za početni meridijan usvojen je meridijan koji prolazi kroz tačku Griničke opservatorije kod Londona.

U geodeziji se koristi geodetska dužina i određuje se geodetskim metodama. Nadmorska visina je visina tačke iznad nulte nivoske površine.

3.2.6. Mere za uglove

U Geodetskoj astronomiji uglovi se mere u stepenima, a u teoriji se računaju u radijanima. Međutim, prividno dnevno kretanje, pružilo je Astronomiji i treću jedinicu—časovnu jedinicu za merenje uglova, odnosno časovna jedinica proizišla je iz zvezdanog dana koji iznosi 24 časa (zvezdana) tj,

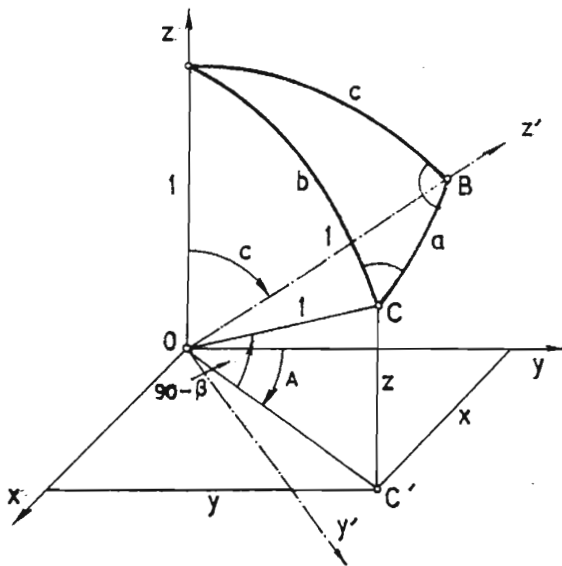
24^h	360^0	360^0	24^h
1^h	15^0	1^0	4^m
1^m	$15'$	$1'$	4^s
1^s	$15''$	$1''$	$0^s.667$

3.2.7. Osnovne formule sferne trigonometrije podešeni za primenu u Astronomiji

Za uspostavljanje veze između dva sferna koordinatna sistema, kao i za izračunavanje sfernih koordinata nebeskih tela u njihovim karakterističnim položajima koje se kasnije posmatraju u cilju određivanja vremena i astronomskih koordinata tačaka na Zemlji potrebno je povezati ove koordinate analitičkim izrazima. One se povezuju kao elementi sfernih trouglova na nebeskoj sferi. U tom cilju potrebno je znati veze među elementima sfernog trougla (3.9).

Sferni trougao je slika na sferi ograničena lukovima tri velika kruga te sfere koji se seku, i ima rti temena (tačke A, B i C), tri ugla (A, B, C) i tri strane (a, b, c). Merni brojevi, ako je poluprečnik sfere jednak jedinici, jednaki su mernim brojevima uglova koje zaklapaju u središtu sfere njeni poluprečnici povučeni do odnosnih temena. Da bismo izveli formule koje povezuju elemente sfernog trougla, postavimo ga u koordinatnom sistemu XYZ tako da mu teme A leži na osovini Z , a strana c u ravni YOZ . Koordinate temena C biće:

$$\begin{aligned} X &= \sin b \sin A \\ Y &= \sin b \cos A \\ Z &= \cos b \end{aligned} \quad (3.1)$$



Sl.3.9. Sferni trougao

Ako obrnemo koordinatni sistem oko osovine OX za ugao c , dobićemo za koordinate temena C izraze,

$$\begin{aligned}x' &= \sin a \sin B \\y' &= -\sin a \cos B \\z' &= \cos a\end{aligned}\quad (3.2)$$

Ako sistem rotira i iskoristimo veze iz Analitičke geometrije dobijamo,

$$\begin{aligned}x' &= X \\y' &= Y \cos c - Z \sin c \\z' &= Y \sin c + Z \cos c\end{aligned}\quad (3.3)$$

Ako u jednačini (3.3) uvrstimo jednačine (3.1) i (3.2) dobićemo tri osnovna izraza Sferne trigonometrije, koji se najčešće primenjuju i koji su poznati pod nazivom Gausova grupa:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A\end{aligned}\quad (3.4)$$

Ovi izrazi predstavljaju; kosinusnu teoremu, sinusnu i sinusno-kosinusnu teoremu. Iz poslednjeg izraza formule (3.4), ako zamenimo a sa b i A sa B dobićemo,

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \quad (3.5)$$

Ako sinusno-kosinusni izraz iz (3.4) pomnožimo sa $\sin A$ i podelimo sa sinusnim izrazom iz (3.4) dobićemo,

$$\coth b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \coth B \quad (3.6)$$

Ako u jednačini (3.6) zamenimo a sa b i A sa B dobijamo,

$$\coth a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \coth A \quad (3.7)$$

Jednačine (3.6) i (3.7) predstavljaju treću grupu formula Sferne trigonometrije.

Ako kosinusnu teoremu iz (3.4) primenimo na tzv. polarni trougao dobija se,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad (3.8)$$

Pregled izvedenih formula:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \\ \coth a \sin b &= \cos b \sin C + \sin C \coth A \\ \coth b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \coth B \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\end{aligned}\quad (3.9)$$

Pregled formula za pravougli sferni trougao:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c \\ \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C \\ \tan b &= \sin c \tan B = \tan a \cos C \\ \tan c &= \sin b \tan C = \tan a \cos B \\ \cos A &= \coth B \coth C \\ \cos B &= \cos b \sin C \\ \cos C &= \cos c \sin B\end{aligned}\tag{3.9'}$$

3.3. Sistemi vremena u Astronomiji

3.3.1. Vremenski sistemi vezani za rotaciju i revoluciju Zemlje

Promene položaja nebeskih tela u toku njihovog kretanja, kao funkcije vremena zahtevaju, za njihovo izučavanje, postojanje vremenskog sistema sa jedinicama sistema i skalom. Zbog toga postoji neizbežna veza astronomije i vremenskog sistema, a kao posledica toga, astronomija je preko kretanja nebeskih tela davala vremenske sisteme za metrologiju vremena, za potrebe astronomije i za potrebe merenja vremena u drugim naukama i svakodnevnom životu. Pravidna dnevna kretanja nebeskih tela (posledica Zemljine rotacije) služila su do otkrića nepravilnosti u Zemljinoj rotaciji za ostvarivanje vremenskog sistema (u obliku zvezdanog ili sunčevog vremena) koji se takođe zasniva na Zemljinoj rotaciji.

Od 1884. godine u globalnoj je upotrebi Svetsko vreme *UT*. Ali 1956. godine prešlo se na vremenski sistem, koji se osnovao na orbitalnom kretanju Zemlje oko Sunca, pa se tako došlo do efemeridskog vremena *ET*. Na sistem međunarodnog atomskog vremena *AT* prešlo se 1967. godine, odnosno za upotrebu u javnom životu, na vremenski sistem Svetskog koordiniranog vremena *UTC*.

U geodetskoj astronomiji od interesa je zvezdano vreme i srednje sunčevo vreme, kod određivanja terestričkih astronomskih latituda i longituda, kao i astronomskog azimuta pravca.

3.4. Prividno godišnje kretanje Sunca i njegove posledice

Pored toga što sa ostalim nebeskim telima učestvuje u prividnom dnevnom kretanju nebeske sfere, Sunce prividno menja i svoj položaj među zvezdama, što se može primetiti po njegovim tačkama izlaza i zalaza u letnjoj i zimskoj polovini godine, odnosno njegova meridijanska visina u letnjoj polovini godine raste, a u zimskoj opada. Projekcija prividne Sunčeve putanje na nebeskoj sferi je jedan veliki krug, čija ravan prolazi kroz Zemljino središte, a sa nebeskim ekvatorom zaklapa ugao od oko 23.5° . Ovaj veliki krug naziva se *ekliptika*, koji prolazi kroz zodijački pojas. Kombinovano sa prividnim dnevnim kretanjem, prividno godišnje kretanje Sunca, posmatrano sa severnog Zemljinog pola, iz srednjih širina i sa ekvatora, dovelo je do saznanja da dužina luka Sunčeve dnevne putanje iznad horizonta odgovar dužini dana, a dužina luka ispod horizonta odgovara dužini noći, kako na jednom mestu u toku godine, tako i na raznim mestima na Zemlji u jednom trenutku (prva posledica Sunčevog prividnog godišnjeg kretanja).

Dane 21. marta i 23. septembra Sunce se prividno nalazi u tačkama preseka ekliptike sa ekvatorom, kada mu je dnevni luk putanje jednak noćnom luku i zato se ove tačke zovu ravnodnevnike, dani ravnodnevnice. Sunce, 22 juna ima najveću visinu i ta tačka se zove tačka letnjeg solsticija, odnosno severna povratna tačka. Sunce, 22 decembra ima najmanju visinu iznad horizonta i ta tačka se zove tačka zimskog solsticija, odnosno južna povratna tačka. Ovo je druga posledica sunčevog prividnog godišnjeg kretanja.

Vreme između dva Sunčeva prolaza kroz tačku prolećne ravnodnevnice ili γ tačku zove se tropska godina T . Njena dužina utvrđena merenjem iznosi $T = 365.24219878\dots$ dana (srednjih sunčanih dana). Ravnodnevnickim i povratnim tačkama prividna godišnja putanja Sunca deli se na 4 segmenta, a godina na 4 godišnja doba, koja odgovaraju vremenskim razmacima što ih Sunce upotrebi dok prođe ove segmente. Zbog različitog Zemljinog osunčavanja u toku svakog godišnjeg doba imaju posebne vremenske karakteristike (Treća posledica Sunčevog prividnog godišnjeg kretanja).

Usled retrogradnog pomeranja γ tačke za $50''.2$ godišnje po ekliptici, odnosno u susret Suncu, tropska godina T nešto je kraća od vremenskog razmaka Sunčevog prividnog obilaska cele putanje. Ovaj vremenski razmak nazivamo Siderička godina S . Prema tome

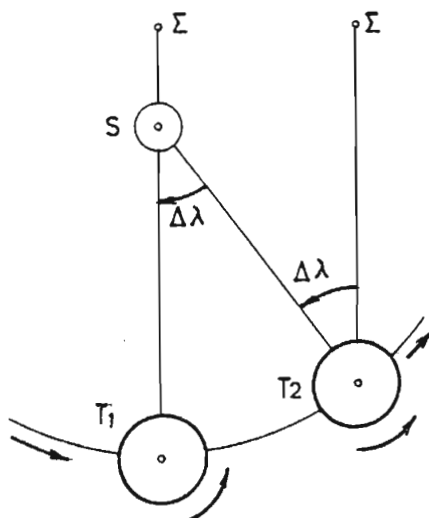
$$\frac{S}{T} = \frac{360^\circ}{360 - 50''.2} = 1 + \frac{1}{25700} \text{ sred.sunč.dana,}$$

pa za sideričku godinu dobijamo $S = 365.2564\dots$ sred.sunč. dana.

Sunčevo prividno godišnje kretanje Sunca, služi i za osnovu našeg kalendara. Dogovorom je uvedeno prostih godina od 365 sred.sunč. dana i prestupnih od 366 dana, odnosno dužina fiktivne građanske godine iznosi 365.25 sred.sunč. dana po julijanskom kalendaru. Po gregorijanskom kalendaru dužina fiktivne godine iznosi 365.2425 sred.sunč. dana.

3.5. Pravo, Srednje i Gradansko vreme

Ranije smo defnivali osnovnu jedinicu za vreme—zvezdani dan, koji se meri časovnim uglom γ tačke. No kako se gornja kulminacija γ tačke tj. početak zvezdanog dana ne događa uvek u istom trenutku prema gornjoj kulminaciji Sunca, već se u toku godine pomera prema njoj, to je zvezdani dan nepodesan za praktične potrebe, zato je nešto ranije za astronomska posmatranja usvojena druga jedinica za vreme, koja se definiše analogno zvezdanom danu. To je pravi Sunčani dan ili vremenski razmak između dve uzastopne gornje kulminacije središta sunčevog prividnog kotura. Časovnim uglom pravog Sunca meri se pravo sunčano vreme, ili kratko pravo vreme. Početak pravog sunčanog dana pada u trenutak Sunčevog gornjeg prolaza kroz meridijan i zove se pravo podne. Trenutak njegovog donjeg prolaza kroz meridijan zove se prava ponoć. Međutim i ovo vreme nije moglo da se održi kao jedinica za merenje vremena, jer ne zadovoljava uslov stalnosti zbog Zemljinog kretanja oko Sunca, pa se zato njegova dužina u toku godine menja.



Sl. 3.10

Zamislamo Zemlju T_1 na njenoj putanji oko Sunca S i pretpostavimo da se jednovremeno našla u meridijanu sa Suncem S i sa nekom zvezdom Σ (sl.3.10). Po isteku jednog zvezdanog dana ili jednog Zemljinog obrta, Zemlja će se pomeriti iz T_1 u T_2 , a pomera se i zvezda Σ , pa će tako proći kroz isti meridijan.

Međutim Zemlja treba da se obrne za jedan mali ugao $\Delta\lambda$ da bi se sa Suncem našla u istom meridijanu nekog mesta. Prema tome pravi sunčani dan je uvek duži od zvezdanog dana zbog zemljinog kretanja oko Sunca. Ovo je poznato iz drugog Keplerovog zakona, odnosno Zemlja se kreće oko Sunca nejednakom brzinom.

Da bi mera za vreme ostala vezana za Sunce i da bi se otklonio nedostatak stalnosti, uvedena je fiktivna tačka, nazvana Srednje ekliptičko sunce, koje se kreće ravnomerno po ekliptici, a prolazi kroz pergej i apogej zajedno sa pravim Suncem. Njegova longituda λ_m jednaka je longitudi pravog Sunca. Razlika između srednje i prave longituda Sunca tj. za izjednačenje centra postoji jednačina:

$$\lambda_m - \lambda_0 = -2e \sin(\lambda_m - \bar{\omega})$$

Da bi se otklonio drugi nedostatak srednjeg ekliptičkog sunca uveden je pojam, Srednje ekvatorsko Sunce ili kratko Srednje Sunce, kao tačka koja se ravnomerno kreće po ekvatoru i prolazi kroz tačke prolećne i jesenje ravnodnevnice zajedno sa srednjim ekliptičkim Suncem.

Jedinica za vreme definisana upotrebom srednjeg sunca je stalna i zove se srednji sunčani dan ili srednji dan, kao vremenski razmak između dve uzastopne gornje kulminacije srednjeg Sunca. Srednje vreme meri se časovnim uglom srednjeg sunca. Ova mera za vreme je stalna, ali srednji sunčani dan počinje u podne, što nije praktično pa se zbog toga prešlo na računanje srednjeg dana, od srednje ponoći i tako se došlo do pojma Građanskog vremena, koje je srednje vreme računato od ptedhodne srednje ponoći.

3.6. Mesno, Zonsko i Ukazno vreme

Počeci svih do sada definisanih vremenskih jedinica, nalaze se u meridijanu jednog uočenog mesta (Grinič), zato se kaže da su zvezdano, pravo, srednje i građansko vreme Mesna vremena. Na ovaj način računato vreme, pokazuje da mesta na meridijanu suprotno od Griniča tj., sa geografskom dužinom 180° imaju mesna vremena za 12^h veće ili manje, zavisno od toga dali su zapadno ili istočno od Griniča.

Upravljanje po građanskom vremenu, koje je za svako mesto u istom trenutku različito, izaziva velike smetnje u privrednom životu među zemljama. Zato je na predlog SAD 1884. godine usvojen sistem Zonskog vremena. Zemlja je podeljena na 24 "kriške, odnosno časovne zone, a sva mesta u jednoj zoni upravljaju se po građanskom vremenu srednjeg meridijana u zoni.

Najzad za vreme Prvog svetskog rata, mnoge zemlje rukovođene ekonomskim razlozima, uvele su tzv., Ukazno vreme, postavljajući zahtev da se kazaljke svih časovnika pomere unapred prema zonskom vremenu za 1^h ili za više.

Podela Astrometrije

Astrometrija se deli na sfernu i praktičnu, a praktična astrometrija deli se na fundamentalnu i geodetsku astronomiju.

4.1. Sferna – teorijska Astrometrija

Sferna astrometrija izučava uzajaman raspored pravaca po kojima se vide nebeska tala iz tačke posmatranja i promenu tih pravaca iz različitih uticajnih uzroka. Sadržaj sferne astrometrije je:

- Definicija i veza između različitih koordinatnih sistema,
- Izučavanje prividnog dnevnog i godišnjeg kretanja nebeskih tela,
- Svođenje pravaca, zbog uticaja refrakcije i aberacije,
- Svođenje pravaca zbog kretanja Zemljine osovine (pomeranje nebeskih polova, precesija¹ i nutacija²),
- Svođenje pravaca zbog promene položaja Zemljine obrtne osovine u Zemljinom telu (pomeranje Zemljinih polova),
- Svođenje pravaca zbog Zemljinog kretanja (dnevna i godišnja paralaksa),
- Svođenje pravaca zbog sopstvenih kretanja zvezda,
- Definisavanje astronomskih vremenskih sistema (astronomsko i efemeridsko vreme, kalendar), i
- Stvaranje zvezdanih kataloga.

¹nutacija–mala promena srednjeg položaja Zemljine ose

²precesija–mala promena položaja ose Zemlje

4.2. Praktična Astrometrija

Praktična astrometrija deli se na fudamentalnu astrometriju i geodetsku astronomiju.

4.2.1. Fudamentalna astrometrija (meridijanska, fotografska i radioastrometrija)

Fudamentalna astrometrija daje osnove za stvaranje zvezdanih kataloga i realizaciju koordinatnih sistema. U ovim poslovima učestvuje i Astonomska opservatorija u Beogradu. Kao rezultat tog rada stvoreni su opažački i svodni katalogi, a kao kruna svih napora i fudamentalni katalog FK5. U poslednje vreme razvila se i to veoma brzo radioastrometrija, koja će verovatno dovesti do jednog znatno višeg nivoa određivanja koordinata, fudamentalnih konstanata i sve što je potrebno za stvaranje tačnih kataloga zvezda, što je osnova za astronomska istraživanja i određivanja u geodetskoj astronomiji.

4.2.2. Geodetska astronomija

Znamo, da se astronomija što se tiče Zemlje, ograničava izvesnim specijalnim naukama, među kojim je i Geodezija. Osnovni cilj geodetske astronomije je određivanje astronomskog vremena (vreme na osnovu Zemljine rotacije), pravca vertikalne i azimuta. Određivanje astronomskog vremena zasniva se na određivanju časovnih uglova izabranih nebeskih tela. Određivanje pravca vertikalne tačke na zemljinoj površini, određuje se posmatranjem zvezda i pravaca na njima. Pravac vertikalne definiše se u sistemu prirodnih geografskih koordinata, astronomskom širinom (latitudom) i astronomskom dužinom (longituda).

Za određivanje astronomskog vremena i astronomskih latituda i longituda tj., pravca vertikalne i azimuta za geodetske tačke, potrebna su određivanja na geodetskim tačkama i stranama, kao i na opservatorijama, zbog pomeranja polova, odnosno sva određivanja vrše se u odnosu na trenutni pol, a neophodno je da se oni svedu na neki referentni položaj pola, za koji je danas usvojen tzv. pol CIO (Coordinated International Origine - Koordinatni internacionalni početak).

Sistemska izučavanje i određivanje pomeranja Zemljinih polova počelo je 1898. godine osnivanjem Međunarodne službe širine za nekoliko posmatračkih stanica na paraleli $\varphi = 39^{\circ}08'$. Ova služba vremenom je prerasla u međunarodnu službu polarnog kretanja. Koordinacija određivanja i održavanja astronomskog vremena počela je 1920. godine, osnivanjem Međunarodne časovne službe. Od 1. januara 1988. godine nadležnost ovih službi preuzeli su:

- Međunarodna služba za zemljinu rotaciju (The International Earth Rotation Service—IERS) – Pariz, odgovorna je za određivanje Zemljine rotacije i pripadajuće nebeske referentne sisteme.

- Međunarodni biro za mere i tegove (Bureau International des Poids et Mesures-BIPM, sekcija za vreme), u Parizu, odgovoran za Međunarodno atomsko vreme-TAI, i Svetsko koordinirano vreme-UTC.

4.2.3. Primena geodetske Astronomije u Geodeziji

Primenom geodetske astronomije, dobijaju se rezultati za: astronomske dužine i širine – sferne koordinate kojima se određuje pravac vertikale u sfernom sistemu, čija je osnovna ravan ekvatorska ravan, a početni krug, početni meridijan i azimuti. Ovi rezultati u geodeziji se upotrebljavaju za [2]:

1. Kao početni podaci za premere (mesne, regionske i državne), odnosno to su podaci kojima se daje položaj i orijetacija osnovne (ili neke) mreže na zemlji. To su sledeći podaci: astronomska latituda i longituda za početnu tačku i astomomski azimut za početnu stranu mreže.
2. Provera i poboljšanje orijentacije astrogeodetske mreže Laplasovim azimutima. Za dobijanje Laplasovih azimuta jedne strane potrebni su astronomska latituda i longituda jedne tačke i astronomski azimut početne strane.
3. Određivanje astrogeodetskih vertikalnih otklona (komponentima: u meridianu i u prvom vertikalu), potrebnih za astrogeodetsko određivanje geoida i svođenja geodetskih merenja, uglova i dužina za uticaj vertikalnih otklona. Za određivanje vertikalnih otklona koriste se astronomske latituda i longituda, a ponekad i astronomski azimuti.
4. Za kalibracijske linije i kalibracijske-test mreže za žiro-teodolite.

U današnje vreme satelitska geosezija omogućuje određivanje globalnog oblika i dimenzije Zemlje, određivanje osnovnih tačaka za svetski premer, proveru i povezivanje državnih premera, mnogo efikasnije. Prema tome geodetskoj astronomiji ostaje uloga koja joj u suštini pripada, a to je određivanje pravaca vertikale tačaka i azimuta strana, koji imaju nezamenljivu ulogu u zadacima kao što su: određivanje i izučavanje detaljnog oblika geoida, provera orijentacije mreža, kalibracije žiro-teodolita i provera inercijalnih sistema.

4.2.4. Zadaci geodetske Astronomije

Koordinate tačaka, koje određujemo u geodetskim mrežama zovu se relativne koordinate, jer se određuju u sopstvenim koordinatnim sistemima. Da bi mreže zauzeli svoj prirodan položaj u odnosu na mrežu Zemljinih meridijana i paralela, neophodno je odrediti koordinate za polaznu tačku i azimut za početnu stranu metodama geodetske astronomije. Ovako određenje koordinata zovu se apsolutne koordinate. Prema tome, relativne koordinate tačaka trigonometrijskih mreža treba za određeni iznos translatorno popraviti, a zatim ih rotirati i tako pretvorene koordinate zovu se apsolutne koordinate, koje će imati položaj prema mreži zemljinih meridijana i paralela, kakav imaju u prirodi. Proizilazi, da Geode-

zija bez geodetske astronomije nemože verno preslikati Zemljinu površinu, odnosno nemože vršiti apsolutnu orijentaciju osnovne trigonometrijske mreže.

Iskustvo je pokazalo, da je za povećanje tačnosti ove orijentacije potrebno odrediti čitav niz astronomskih određenih tačaka, koje zovemo Laplasove tačke, koje obrazuju astronomsko-geodetsku mrežu, na koju se oslanja trigonometrijska mreža I-reda. Za potrebe određivanja Zemljinog oblika-geoida, koristi se znatno gušća mreža astronomski određenih tačaka (sa nešto nižom tačnošću), koje zovemo geoidne tačke.

Najčešća primena geodetske astronomije, nalazimo kod određivanja osnova premera na teritorijama koje nisu premerene ili za potrebe raznih ekspedicija. Astronomske tačke ranije su se koristile za određivanje Zemljinog sferoida.

Od 1958. godine vrše se posmatranja veštačkih Zemljinih satelita za druge geodetske potrebe, moreplovstva, navigacije itd. Astronomska mreža visoke tačnosti primenjuje se za ispitivanja pomeranja Zemljinih polova i kontinenata, koja po svojoj suštini pripadaju astronomiji.

4.2.5. Metode u geodetskoj Astronomiji

Razmatrajući formule za primenu kosinusne i sinusne teoreme sferne trigonometrije na paralaktički trougao i njihove veze (nije zadatak ovog kursa), primjećujemo da u njima postoje tri vrste veličina: α (rektascenzija), δ (deklinacija) opažanog nebeskog tela (koje se dobijaju iz efemerida), φ i λ (nepoznate koje se traže), a Z i A su horizontske koordinate opažanog nebeskog tela u određenom trenutku T koje pokazuje radni časovnik ili hronometar.

Uglavnom svi instrumenti koji se koriste u Geodetskoj astronomiji konstruisani su u horizontskom koordinatnom sistemu za merenje zenitnih daljina ili azimute opažanih nebeskih tela. Zbog toga sve metode merenja u geodetskoj astronomiji sastoje se u merenju vertikalnih i horizontalnih uglova i u beleženju časovnikovog pokazivanja u trenutcima merenja.

Rektanscenzija se određuje (po metodi apsolutnog određivanja) iz zabeleženog pokazivanja časovnika kada je zvezda na srednjem idealnom koncu, pomoću pasažnog instrumenta. Zvezdano vreme jedne zvezde koja se nalazi u meridijanu jednako je njenoj rektanscenziji $\alpha = s$, koje se sastoji od pokazivanja časovnika T i popravke C_p u tom trenutku,

$$\begin{aligned}\alpha &= T + C_p, \quad \text{što važi i za Sunce} \\ \alpha_{\odot} &= T_{\odot} + C_p,\end{aligned}$$

odnosno nepoznatu rektanscenziju za nepoznatu zvezdu dobijamo kao razliku ovih jednačina,

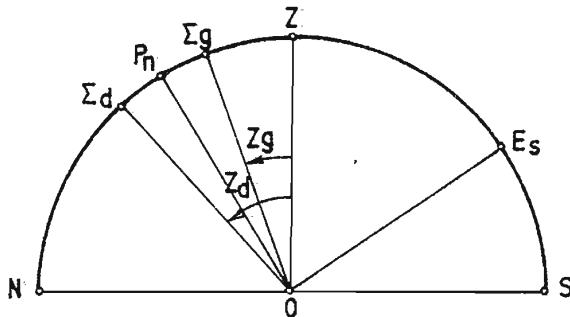
$$\alpha = \alpha_{\odot} + (T - T_{\odot})$$

Deklinacija δ , po metodi apsolutnog određivanja, nalazi se iz poznatih veza u meridijanu:

$$\delta_s = \varphi - Z_s, \quad \delta_n = \varphi + Z_n, \quad \delta_d = 180^\circ - \varphi - Z_d$$

gde su: Z_s, Z_n i Z_d merenja vertikalnim krugom.

Širina se može odrediti merenjem zenitne daljine Polare u gornjem i donjem prolazu kroz meridijan (sl.4.1) [5].



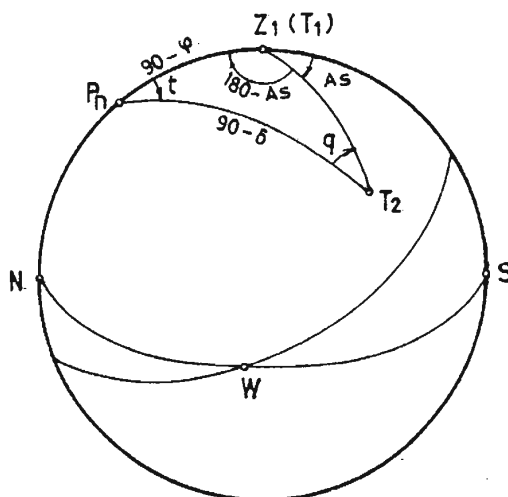
$$\begin{aligned} Z_g &= \delta - \varphi \\ Z_d &= 180^\circ - \delta - \varphi, \\ \text{odnosno,} \\ \varphi &= 90^\circ - \frac{Z_g + Z_d}{2} \end{aligned}$$

Sl. 4.1. Određivanje geografske širine iz zenitne daljine Polare

Kada se na ovaj način odrede ekvatorske koordinate za stotinu zvezda, onda se metodama geodetske astronomije mogu precizno odrediti popravka C_p i širina φ posmatrane stanice, odnosno olakšano je određivanje α i β . Treća veličina sa kojom se susrećemo u formulama sferne trigonometrije je azimut A . Azimuti se u geodeziji koriste pre svega kod računanja Laplasovih azimuta za kontrolu geodetskih azimuta triangulacije. U principu se azimuti koriste i za određivanje vertikalnih otklona (η) potrebnih za određivanje oblika geoida, za redukciju na referentni elipsoid i za korekciju horizontalnih uglova kod deformacionih merenja.

Praktična definicija astronomskog azimuta pravca je sledeća: Astronomski azimut A_1^2 pravca od tačke T_1 na tački T_2 , određen je uglom kod temena Z_1 sfernog trougla na sferi, a koji postaje prodorima pravaca kroz sferu:

- pravac vertikale u tački T_1 (teme Z_1)
- pravac obrtne osovine Zemlje (P_n)
- pravac dat tačkama T_1 i T_2 (teme T_2), i dat je uglom A_s . (sl.4.2).



Sl.4.2.

Azimut pravca A_1^2

Određivanje azimuta pravca u rudarstvu potrebno je u slučaju kada treba odrediti azimut terestričkog pravca, za odnosnu trigonometrijsku mrežu. U ovim slučajevima potrebno je poznavati i konvergenciju meridijana da bi se mogao izvršiti prelaz sa astronomskog na geodetski azimut. Za određivanje koordinata polazne tačke mreže, potrebno je da se metodama Geodetske astronomije odrede i geografske koordinate φ i λ . Kako se kod ovih određivanja za merenje horizontalnih uglova koriste instrumenti za opažanje, moraju se proučavati instrumentalne greške koje imaju uticaj na dobijene rezultate merenjem.

4.2.6. Popravke rezultata astronomskih merenja

Rezultati astronomskih merenja, moraju se popraviti zbog instrumentalnih grešaka i spoljnih uslova (refrakcija). U ovom delu daćemo konačne formule za dobijanje rezultata merenja koje ne sadržavaju gore pomenute greške. Označimo pojedine veličine koje ćemo koristiti:

- i –nagib obrtne osovine instrumenta kod opažanja zvezde Σ ,
- i_T –nagib obrtne osovine instrumenta kod opažanja terestričkog pravca,
- c –kolimaciona greška,
- Z –zenitno odstojanje opažane zvezde,
- Z_T –zenitno odstojanje opažanog objekta,

4.2.6.1. Popravke rezultata merenja horizontalnih uglova

Popravka zbog nagiba obrtne osovine

Konačna formula za ovu popravku je:

$$V_i'' = \frac{\tan i}{\tan Z} = \frac{i''}{\tan Z}$$

Ispravljeno čitanje na horizontalnom limbu biće

$$a = a'' + \frac{i''}{\tan Z}$$

gde je $i'' = \frac{\tau''}{4}(l_1 - r_1) + l_2 - r_2$

τ'' = uglovna vrednost jednog dela podele na libeli

l_1 = čitanje levog kraja mehura libele

r = čitanje desnog kraja mehura libele

Popravka zbog kolimacione greške

$$V_c = \frac{C}{\sin Z}$$

Popravka zbog poluprečnika nebeskog tela

$$V_R = \frac{R}{\sin Z}$$

Ukupna popravka za čitanje na horizontalnom limbu

$$V_S = V_i + V_c + V_R = \frac{i''}{\tan Z} + \frac{C}{\sin Z} \pm \frac{R}{\sin Z}$$

Ispravljeno čitanje

$$a = a' + V_S$$

4.2.6.2. Popravke rezultata merenja vertikalnih uglova

Popravka merene zenitne daljine zbog refrakcije

$$V_R = 58'' \tan Z \cdot \frac{P}{P_0} \cdot \frac{283}{273 + t}$$

Popravka merenja zenitne daljine zbog paralakse

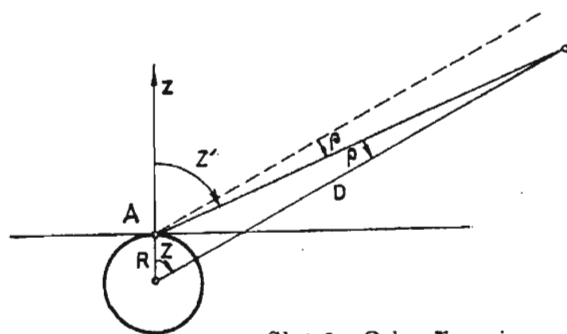
Zenitna daljina-odstojanje Z razlikuje se od merenog odstojanja za vrednost paralaktičnog ugla P

$$P = \rho'' \frac{R}{D} \sin Z'$$

Horizontalna paralaksa računa se kada je $Z' = 90^\circ$ i iznosi

$$P = \rho'' \frac{R}{D} = \pi$$

Ako znamo horizontalnu paralaksu, možemo sračunati paralaksu za bilo koje zenitno odstojanje po formuli:



$$V_P = P = \pi \cdot \sin Z'$$

Sl.4.3. Određivanje paralakse

Popravka merenog zenitnog odstojanja zbog poluprečnika nebeskog tela

Uticao poluprečnika nebeskog tela, nastupa kada viziramo donji i gornji rub tela, a ne u sredini. Primera radi, za Sunce je

$$Z = Z_g + R = Z_d - R$$

Ako merimo visinske uglove onda je

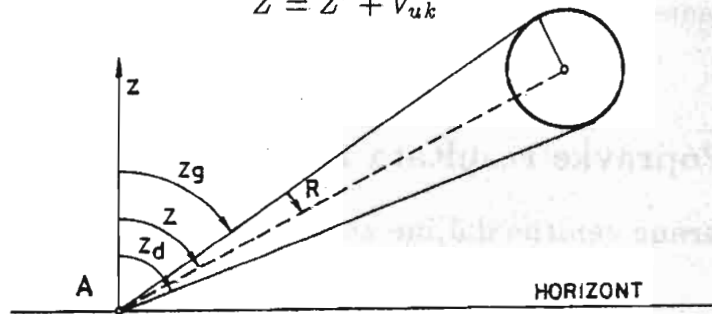
$$h = h_g - R = h_d + R$$

Za Sunce ova popravka približno iznosi $r \approx 16'$ Ukupna popravka rezultata merenih zenitnih odstojanja

$$V_{uk} = V_R - p \pm R$$

odnosno ispravljeno Z biće

$$Z = Z' + V_{uk}$$



Sl.4.4. Određivanje uticaja nebeskog tela

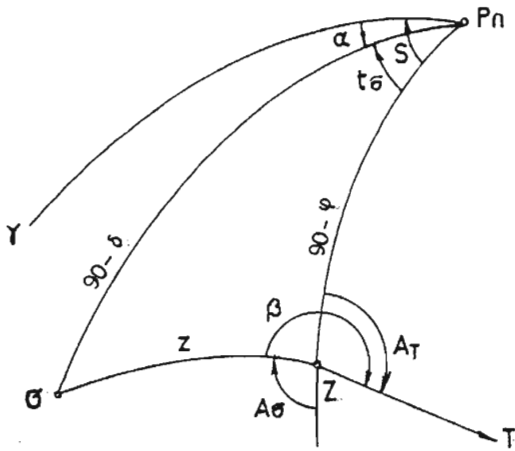
4.3. Određivanje astronomskog azimuta terestričkog pravca

Terestrički pravac određen je dvema tačkama, od kojih je jedna stanica za opažanje, a druga tačka koja se signalise za viziranje. Azimut terestričkog pravca uvek se dobija na osnovu azimuta nebeskog tela i horizontalnog ugla između pravca na nebesko telo i terestričkog pravca. Za određivanje terestričkog azimuta pravca poznate su indirektna i direktna metoda, a vredno je napomenuti da se astronomski azimut terestričkog pravca može odrediti i žiro-teodolitom ili merenjem vremena.

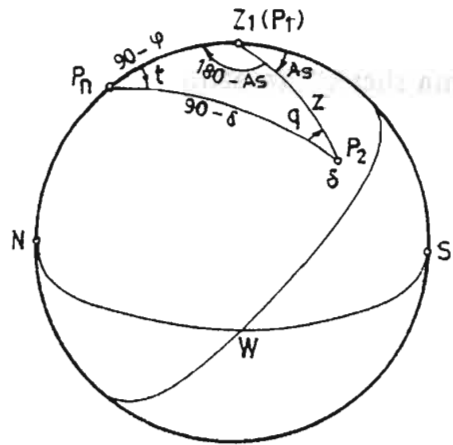
Za određivanje azimuta postupak je uglavnom sledeći: meri se ugao između zvezde i terestričkog cilja, a sračunava se azimut zvezde iz širine stanice, deklinacije i časovnog ugla zvezde ili stanice. Azimut se može odrediti i iz širine stanice, deklinacije i zenitnog odstojanja. Kod oba načina meri se ugao β , između nebeskog tela i terestričkog pravca.

Kod prvog načina azimut terestričkog pravca A_T računa se iz širine φ , deklinacije δ i časovnog ugla zvezde ili stanice.

Kod drugog načina azimut terestričkog pravca A_T računa se iz širine φ , deklinacije δ i zenitnog odstojanja na stanici. Kod prvog načina meri se prolaz zvezde kroz vertikalni konac, a kod drugog načina meri se zenitno odstojanje zvezde. Na slici 4.6 prikazan je azimut terestričkog pravca A_T , a na slici 4.5 azimut A_S nebeskog tela.



Sl.4.5. Azimut A_T terestričkog pravca



Sl.4.6. Azimut nebeskog tela A_S

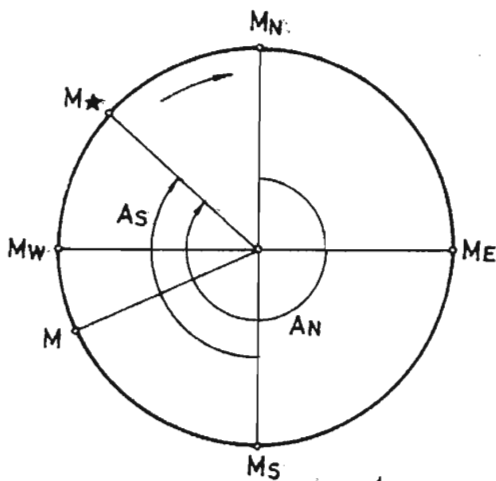
Iz trougla $\triangle Z_1 P_n \sigma$ (zenit-pol-zvezda), slika 4.6, dobija se:

$$\begin{aligned} \sin Z \sin A_S &= -\sin Z \sin A_N = \cos \delta \sin t \\ \sin Z \cos A_S &= \sin Z \cos A_N = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t \end{aligned}$$

gde je: t - časovni ugao $t = T + u - \alpha$,

A_S - azimut zvezde računat od južne tačke,

$A_N \rightarrow A_S + 180^\circ$ - azimut zvezde računat od severne tačke.



Čitanja na horizontalnom krugu moraju da budu ispravljena od svih grešaka, oni su: M_* i M . Ispravljeno čitanje na glavnom mikroskopu za južnu tačku

$$M_S = M_* - A_S$$

Iz gornjih jednačina, za azimut zvezde računatog od južne tačke dobija se,

$$\tan A_S = \frac{\cos \delta \sin t}{-\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t}$$

Azimut Severnjače računa se:

$$\tan A_S = \tan A_N = \frac{\cos \delta \sin t}{-\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t} = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \cos \delta}$$

ili

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \varphi) \cos z - \sin(90 - \varphi) \sin z \cos A_S$$

$$\cos A_S = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi \sin z + \tan \varphi \cos z}$$

Prema slici 4.5 za azimut terestričkog pravca dobijamo,

$$A_T = A_S + \beta; \quad A_T = A_S$$

Mereni horizontalni ugao β , mora se osloboditi svih grešaka, vezanih za instrument i spoljašnjih uticaja.

Pri ovome označimo sa:

R i L - čitanja na horizontalnom limbu, krug desno R i krug levo L ,

M_0 - traženo istinito mesto na limbu koje odgovara južnom pravcu meridijana na tački na kojoj se vrši merenje,

A - traženi azimut,

C_Δ - kolimaciona greška iz viziranja na terestrički objekat,

C_* - kolimaciona greška iz viziranja na Severnjaču.

Stvarne vrednosti čitanja na horizontalnom limbu dobijaju se;

$$R = M_0 + A + C_\Delta \quad \Rightarrow \quad C_\Delta = \frac{R - (L \pm 180)}{2}$$

$$L \pm 180 = M_0 + A - C_\Delta \quad \Rightarrow \quad A = \frac{R + (L \pm 180)}{2} - M_0$$

Popravljene vrednosti čitanja biće:

$$\begin{aligned} R' &= M_0 + a'_r + C_* \operatorname{cosec} z'_r + b_r \coth z'_r \\ L' \pm 180 &= M_0 + a'_l - C_* \operatorname{cosec} z'_l + b_l \coth z'_l \end{aligned}$$

gde su: a'_r i a'_l - azimuti Severnjače u trenutku T

z'_r i z'_l - zenitna odstojanja, krug desno (r) i krug levo (l)

b_r i b_l - nagib durbina u istim položajima.

Označimo sa:

$$\begin{aligned} N_r &= r' - a'_r - b_r \coth z'_r \\ N_l &= (L' \pm 180) - a'_l - b_l \coth z'_l \end{aligned}$$

onda zamenom u predhodnim jednačinama, dobijamo za;

$$C_* = \frac{N_r - N_l}{\operatorname{cosec} z'_r - \operatorname{cosec} z'_l}$$

Za traženo istinito mesto meridijana na limbu dobija se:

$$M_0 = \frac{1}{2}(N_r + N_l) + \frac{C_*}{2}(\operatorname{cosec} z'_r - \operatorname{cosec} z'_l)$$

Azimut Severnjače računa se: $t = T + u - \alpha$ - časovni ugao

$$\tan A'_S = \frac{\coth \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \coth \delta \tan \varphi \cos t}$$

$$A_S = A'_S + \gamma \operatorname{cosec} z; \quad \gamma = 0.31 \cos \varphi$$

Izraz $\gamma \operatorname{cosec} z$ predstavlja popravku za dnevnu aberaciju. Azimut terestričkog pravca:

$$A_T = A_S + \beta$$

Primer 4.1. Određivanje azimuta terestričkog pravca opažanjem Severnjače-Polare na terestričkoj stanici Paraćinskog bazisa prema trigonometrijskoj tački na Pl.Babe. Primer je uzet iz [10].

Date veličine: vrednost polu podeoka jahaće libele $\frac{\tau}{2} = 1''.00$, korekcija hronometra $u = -1^m 31^s .56$, geografska širina stanice $\varphi = 43^{\circ} 50' 32''.4$. Apso-lutna visina Δ Babe $H = 654$ m. Zenitna rastojanja $z'_l = 46^{\circ} 59'$ i $z'_r = 46^{\circ} 56'$. Rektascenzija $\alpha = 1^h 23^m 59^s .00$. Deklinacija: $\delta = 88^{\circ} 46' .35$. Polarno odstojanje $p = 1^{\circ} 13' 25''$. Opažane vrednosti sa univerzalnim instrumentom Kern 16417. Hronometar Eriksona 388. Opažanja su izvršena 12.11.1900.godine

Tablica 4.1 Merene vrednosti:

	Objekt posma- tranja	Trenutak posma- tranja	čitanja na limbu	Nagib ose	Sračunavanje korekcije, nagiba ose		
L_1	Δ Baba		142 ^o 08'05".84		$\log b' \coth z$	0.7333	
L'_1	Polara	16 ^h 24 ^m 14 ^s .0	46 ^o 10'37".37	+5.8 +5.8	$\log b'$	0.7636	+5.41
L'_r	Polara	16 ^h 27 ^m 21 ^s .5	46 ^o 11'34".84	+0.4 +0.4	$\log \coth z'$	9.9699	
L_r	Δ Baba		142 ^o 08'05".64		$\log b'$	9.6026	+0.37
					$\log b' \coth z'$	9.5725	
R_1	Δ Baba		322 ^o 09'58".16		$\log b' \coth z'$	0.5022	
R'_1	Polara	16 ^h 41 ^m 08 ^s .0	226 ^o 18'17".20	+3.4 +3.4	$\log b'$	0.5315	+3.18
R'_r	Polara	16 ^h 43 ^m 59 ^s .0	226 ^o 19'06".70	+1.8 +1.8	$\log \coth z'$	9.9707	
R_r	Δ Baba		322 ^o 09'60".23		$\log b'$	0.2553	+1.68
					$\log b' \coth z'$	0.2260	

Sračunate pomoćne veličine:

$$\gamma \operatorname{cosec} z' = 0''.31$$

$$\log m' = 3.785927$$

$$\log \tan \Delta \tan \varphi = 8.31204$$

$$\frac{c}{2} = 28''.03$$

$$\frac{c}{2} (\operatorname{cosec} z'_l - \operatorname{cosec} z'_r) = -0''.03$$

Računanje azimuta:

$$\begin{aligned}
 N_l &= 44^{\circ}59'59''.89 \\
 N_r &= 45^{\circ}02'33''.33 \\
 N_r - N_l &= 153''.34 \\
 C_* &= +56''.07 \\
 R &= 322^{\circ}09'59''.23 \\
 L + 180^{\circ} &= 322^{\circ}08'05''.74 \\
 2C_{\Delta} &= +1'53''.49 \\
 C_{\Delta} &= + 56''.75 \\
 \frac{1}{2}(N_r + N_l) &= 45^{\circ}01'16''.61 \\
 \frac{c}{2}(\operatorname{cosec} z'_l - \operatorname{cosec} z'_r) &= - 0''.03 \\
 M_0 &= 45^{\circ}01'16''.58 \\
 A + M_0 &= 322^{\circ}09'02''.49 \\
 A &= 277^{\circ}07'45''.91
 \end{aligned}$$

4.3.1. Određivanje astronomskog azimuta terestričkog pravca merenjem vremena

Za određivanje azimuta merenjem vremena moraju biti poznati: širina φ i mesno zvezdano vreme s , odnosno stanje časovnika u ili pak koordinate stanice φ, λ i pravo Griničko zvezdano vreme S , odnosno stanje časovnika U_{GR} . Ako se izmeri horizontalni ugao između terestričkog pravca i zvezde i registruje pokazivanje časovnika T , za trenutak opažanja zvezde, onda se azimut zvezde A i azimut terestričkog pravca mogu odrediti:

$$s = T + u$$

a časovni ugao se određuje prema

$$t = s - \alpha = T + u - \alpha$$

Ako su dati podaci za T, U_{GR}, λ i α , onda se t tačuna prema

$$t = S - \lambda\alpha = T + U_{GR} - \lambda - \alpha$$

azimut zvezde se izračunava po formuli:

$$\tan A = \frac{\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta}$$

a azimut terestričkog pravca računa se:

$$A_T = A + \beta$$

Što se programa merenja tiče korisno je primeniti sledeću shemu:

I-Položaj durbina

1. Viziranje terestričkog cilja
2. Viziranje nebeskog tela

II-Položaj durbina

1. Viziranje terestričkog cilja
2. Viziranje nebeskog tela

II-Položaj durbina

1. Viziranje nebeskog tela
2. Viziranje terestričkog cilja

I-Položaj durbina

1. Viziranje nebeskog tela
2. Viziranje terestričkog cilja

4.3.2. Određivanje azimuta terestričkog pravca merenjem zenitnih odstojanja zvezda

Za ovo određivanje potrebno je da izmerimo zenitno odstojanje zvezda, da znamo deklinaciju δ (uzima se iz astronomskog godišnjaka) i geografske latitide opažачke stanice. Takođe je potrebno čitanje horizontalnog i vertikalnog limba za opažani položaj zvezde. Nije potrebno poznavati tačan trenutak opažanja zvezde. Opažanje treba izvoditi sledećim redosledom:

I-Položaj durbina

1. Viziranje terestričkog cilja i čitanje horizontalnog limba
2. Viziranje zvezde i čitanje horizontalnog i vertikalnog limba

II-Položaj durbina

1. Viziranje zvezde i čitanje horizontalnog i vertikalnog limba
2. Viziranje terestričkog cilja i čitanje horizontalnog limba

Azimut zvezde se računa po formuli:

$$\cos A = \frac{-\sin \delta}{\cos \varphi \sin Z + \tan \varphi \coth Z}$$

Horizontalni ugao između zvezde i terestričkog cilja računa se po formuli:

$$\beta = L_T - L - i \coth Z + i_T \coth Z_T \pm c(\operatorname{cosec} Z - \operatorname{cosec} Z_T)$$

L_T -čitanje horizontalnog limba terestričkog pravca

L -čitanje horizontalnog limba za zvezdu

i -nagibobrtne osovine za zvezdu

i_T -nagib obrtne osovine za terestričkog cilja

Azimut terestričkog pravca računa se po formuli:

$$A_T = A_\sigma \pm 180 + \beta$$

4.3.3. Određivanje azimuta terestričkog pravca opažanjem Severnjače–Polare

Određivanje azimuta terestričkog pravca, moguće je ako se odredi azimut Severnjače i izmeri horizontalni ugao između pravca prema Severnjači i terestričkog pravca. Potrebno je da poznajemo časovni ugao t , širinu opažачke stanice φ , deklinacije δ za Severnjaču, kao i njeno zenitno odstojanje koje se meri. Za određivanje trenutka opažanja T treba imati časovnik ili hronometar, čije se stanje određuje prijemom signala preko prijemnika.

Za merenje uglova treba primeniti metodu dvostrukih girusa:

1. Viziranje terestričkog cilja i čitanje horizontalnog limba (krug levo).
2. Viziranje Severnjače i čitanje (krug levo), čita se i hronometar.
3. Viziranje Severnjače i čitanje (krug desno), čitati i hronometar.
4. Viziranje terestričkog cilja, čita se (krug desno).
5. Viziranje terestričkog cilja, čita se (krug desno).
6. Viziranje Severnjače, čita se (krug desno), čitati i hronometar.
7. Viziranje Severnjače, čita se (krug desno), čitati i hronometar.
8. Viziranje terestričkog cilja i čitanje kruga levo.

Postupak merenja horizontalnog ugla:

Teodolit se centriše na terestričku stanicu. Signalise se druga tačka pravca. U prvom položaju durbina vizira se i čita vrednost horizontalnog limba prema tački terestričkog cilja. Zatim se vizira severnjača presekom konaca končanice, čita se horizontalni i vertikalni limb. Odmah za tim se čita levi i desni kraj mehura libele i zapisuje.

Azimut Severnjače se računa (logaritamski)

$$\tan A_S = \frac{\coth \delta \sec \varphi \sin t}{1 - \coth \delta \tan \varphi \cos t}$$
$$\tan A_S = \frac{-\sin t}{\sin \varphi \cos t - \cos \varphi \tan \delta} \quad (\text{računanje mašinom})$$
$$A_T = A_S + \beta \quad \text{azimut terestričkog pravca}$$

4.3.4. Određivanje Azimuta Severnjače i Azimuta terestričkog pravca koristeći vrednosti iz tablica Astronomskog godišnjaka i vrednosti merenog ugla

U tablicama visina i azimuta Severnjače, koje nalazimo u Astronomskom godišnjaku, date su približne rektascenzije Severnjače, koje su istovremeno i mesno zvezdano vreme njene gornje kulminacije (za odgovarajuće φ). Azimuti su računati od severne tačke. Do trenutka donje kulminacije, Severnjača se nalazi zapadno od meridijana, a posle toga je istočno od meridijana. Prema tome azimut Severnjače biće:

- zapadno od meridijana W : $A = 180 - a$
- istočno od meridijana E : $A = 180 + a$

Izvod za mesno zvezdano vreme iz tablica visina i azimuta Severnjače:

Godina	1995	1996	1997	1998	1999
s	$2^h 27^m$	$2^h 28^m$	$2^h 29^m$	$2^h 30^m$	$2^h 31^m$

Ako je gornja kulminacija Severnjače $s = 2^h 27^m$ za 1995, trenutak njene donje kulminacije je $s = 14^h 27^m$.

Za određivanje azimuta Severnjače u bilo kom trenutku neophodna je registracija vremena i poznavanje formula za prelazak sa srednjeg vremena na mesno zvezdano vreme i obrnuto. U ovom slučaju nije neophodan časovnik koji pokazuje zvezdano vreme, dovoljan je običan časovnik i džepni kalkulator. Za dati trenutak srednjeg vremena možemo izračunati mesno zvezdano vreme i obratno, ako znamo Griničko zvezdano vreme S_0 u 0^h svetskog vremena (Grinička ponoć):

$$S_0 = S_0 + 0^h .06571 \cdot d \quad (4.1)$$

$$d = INT(30.6(M + 1)) - p + D \quad (4.2)$$

gde su: d - dan u godini,
 D - dan u mesecu,
 M - mesec.

Formula (4.2) važi za $M > 2$, $p = 63$ za prostu godinu, a $p = 62$ za prestupnu godinu.

Vrednosti za S_0 dati su u sledećoj tablici:

Godina	1995	1996	1997	1998	1999
S_0	$6^h .61267$	$6^h .59676$	$6^h .64655$	$6^h .63064$	$6^h .61472$

Primer 4.2: Odrediti mesno zvezdano vreme Griničkog meridijana u 0^h svetskog vremena za 09.10.1996.godine.

$$d = INT(30.6(10 + 1)) - 62 + 9 = 283$$

$$S_0 = 6^h \cdot 59676 + 0^h \cdot 065771 \cdot 283 = 25^h \cdot 19269 = 1^h 11^m 34^s$$

Veza između srednjeg i zvezdanog vremena je sledeća:

$$S - S_0 = t_0(1 + \eta)$$

$$t_0 = (S - S_0)(1 - \nu)$$

gde su: $1 + \eta = \frac{366.2422}{365.2422} = 1.002737909$

$$1 - \nu = \frac{365.2422}{366.2422} = 0.997269566$$

S - mesno zvezdano vreme Griničkog meridijana

S_0 - mesno zvezdano vreme Griničkog meridijana u 0^h svetskog vremena

t_0 - svetsko vreme (UT)

$(1 + \eta)(1 - \nu)$ - koeficijenti za pretvaranje intervala srednjeg vremena u interval zvezdanog i obrnuto

Veza između mesnog zvezdanog vremena bilo kog meridijana i Griničkog meridijana data je formulom:

$$s = S + l$$

l - longituda mesta posmatranja (istočno od Griniča uzimamo da je $l > 0$).

I. Veza između mesnog zvezdanog i srednjeg vremena za Jugoslaviju:

$$s = S_0 \left\{ \begin{array}{l} t_1 - 1^h \\ t_2 - 2^h \end{array} \right\} (1 + \mu) + 1$$

$$t_1 = (t_0 + 1^h), \quad \text{srednje evropsko vreme}$$

$$t_2 = (t_0 + 2^h), \quad \text{letnje vreme}$$

II. Srednjeevropsko vreme za dati trenutak mesnog zvezdanog vremena:

$$t_1 = (s - 1 - S_0)(1 - \nu) + 1^h$$

$$t_2 = (s - 1 - S_0)(1 - \nu) + 2^h$$

Određivanje azimuta terestičkog pravca

Primer 4.3: Za određivanje terestričkog pravca izvedena su merenja:

Vizura	Horiz.limb	Srednje vreme
TS	153 ⁰ 22'	19 ^h 36 ^m
S	49 ⁰ 17'	
TS	153 ⁰ 24'	

TS - terestrička tačka, S - Severnjača.

Približne koordinate stanice (Astronomska opservatorija Beograd).

$$l = +1^{\text{h}}22^{\text{m}}$$

$$\varphi = +44^{\circ}48'$$

1. Računanje mesnog zvezdanog vremena

$$d = INT(214.2) - 63 + 1 = 214 - 63 + 1 = 152$$

$$S_0 = 6^{\text{h}}.61267 + 0^{\text{h}}.06571 \cdot 152 = 16^{\text{h}}.60059$$

$$S = 16^{\text{h}}.60059 + (19^{\text{h}}.6 - 2)(1.002737909) + 1^{\text{h}}.36667 =$$

$$= 16^{\text{h}}36^{\text{m}} + 17^{\text{h}}39^{\text{m}} + 1^{\text{h}}22^{\text{m}} = 35^{\text{h}}36^{\text{m}}55^{\text{s}}.6 = 11^{\text{h}}37^{\text{m}}$$

2. Linearnom interpolacijom za argument $s = 1^{\text{h}}37^{\text{m}}$ i geografsku širinu $\varphi = 45^{\circ}$, dobija se prema tablici $a = 0^{\circ}43'$

Prema tome azimut Severnjače biće: $A_S = 180^{\circ} - a = 179^{\circ}17'$

3. Azimut terestričkog pravca biće:

$$A_T = A_S + \beta = 179^{\circ}17' + 104^{\circ}06' = 283^{\circ}23'$$

Primer 4.4: Odrediti pravac meridijana (mesto meridijana na horizontalnom limbu) ako je u trenutku viziranja na Severnjaču čitanje na limbu bilo 142⁰36', za mesno zvezdano vreme $s = 18^{\text{h}}20^{\text{m}}$. Posle toga praćena je zvezda sa rektascenzijom $\alpha = 18^{\text{h}}41^{\text{m}}38^{\text{s}}$.

Opažanje je izvršeno 18.10.1995. godine, a koordinate φ i λ kao u predhodnom primeru.

1. Iz tablice za argument s i φ nalazimo $a = 0^{\circ}54'$, odnosno za Astronomski azimut Severnjače dobijamo $A_S = 180^{\circ}54'$.

Mesto meridijana na horizontalnom limbu je:

$$M_m = 142^{\circ}36' - 180^{\circ}54' = -38^{\circ}18' \quad \text{odnosno}$$

$$M_m = 321^{\circ}42'$$

Ako sada na horizontalnom limbu postavimo čitanje da bude jednako azimutu Severnjače, onda se nula na limbu približno poklapa sa pravcem meridijana. Ako imamo časovnik koji pokazuje srednje vreme, računamo t_1 za dato $s = 18^h 41' 38^s$.

$$S_0 = 6^h .61267 + 0^h .06571 293 = 25^h .79999$$

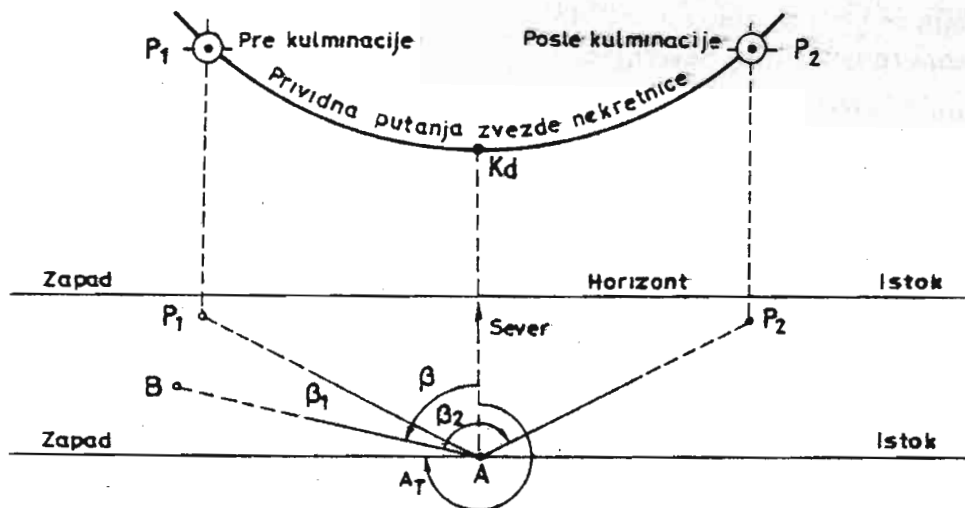
$$t_1 = (18^h .69389 - 1^h .36667 - 25^h .79999)(1 - 0.997269566) + 1 = \\ = 16^h 29^m 05^s .4$$

Zvezdu pratimo sve dok se ne dobije $16^h 29^m 05^s .4$ kada prekidamo praćenje, jer ovo srednje evropsko vreme odgovara zadatoj rektascenziji, odnosno zadatom zvezdanom vremenu, kada je zvezda u meridijanu tj, dobijeno je pravo mesto meridijana. Azimut u terenskim uslovima može se odrediti i iz praćenja korespondirajućih visina zvezda.

4.3.5. Određivanje azimuta iz korespondirajućih visina zvezda nekretnica

Jednakim zenitnim odstojanjima, odnosno jednakim visinama zvezde nekretnice na njenoj prividnoj putanji odgovaraju simetrični položaji prema meridijanu opažачke stanice.

Ako opažamo neku zvezdu nekretnicu u njene dve korespondirajuće pozicije, onda ravan simetrije te dve pozicije odgovara ravni meridijana. (sl.4.7).



Sl.4.7. Određivanje azimuta pomoću korespondirajućih visina zvezda

Postupak je sledeći:

Postavi se signal u tački B , a instrument se centriše na tačku A . Posle dovođenja instrumenta u radno stanje, viziramo tačku B i čitamo horizontalni limb. Zatim viziramo zvezdu u poziciji P_1 (oko 1-2 sata pre kulminacije), čitamo

horizontalni i vertikalni limb, odnosno merimo β_1 i Z_1 . Zatim čekamo i pratimo u isto vreme zvezdu vertikalnim koncem dok ne postigne kulminaciju i počne da pada, ne pomerajući durbin po visini. Kada zvezda ponovo dođe na horizontalnom koncu, čitamo horizontalni i vertikalni limb, odnosno izmerili smo ugao β_2 i Z_2 u poziciji zvezde P_2 .

Ravan simetrije, odnosno ravan meridijana tj., pravac meridijana odgovara uglu β (sl.4.5).

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

Azimut pravca izračunava se:

$$A_T = 360^\circ - \beta$$

4.4. Određivanje latituda (širine)

Određivanje latituda može se izvesti iz: apsolutnih zenitnih odstupanja dve zvezde oko meridijana ili u samom meridijanu, može se odrediti iz određenih trenutaka kada dve zvezde dostignu isto zenitsko odstojanje, iz razlika zenitnih odstojanja dve zvezde u meridijanu, a može se odrediti i po metodi Pjevcova iz opažanja parova zvezda.

Kod ove metode najveća je teškoća kod izračunavanja parova zvezda, a zatim se iz opažanja jednostavno može sračunati geografska širina. Kod nas u Srbiji sračunate su sve eferimide za sve geografske širine a mogu se naći u delu "Eferimide parova zvezda za odredbu geografske širine po metodi Pjevcova" od autora Stevana P. Boškovića.

Osnovne formule za izračunavanje geografske širine po metodi Pjevcova:

$$f = \beta \cos \varphi$$

$$D = \sin \delta_u - \sin \delta_s$$

$$t_s = T_s + u - \alpha_s$$

$$t_u = T_u + u - \alpha_u$$

gde su t_s i t_u časovni uglovi južne i severne zvezde.

$$\tan \varphi_0 = \frac{\cos \delta_s \cos t_s - \cos \delta_u \cos t_u}{\sin \delta_u - \sin \delta_s}$$

$\Delta\varphi_i$ → korekcija za nagib durbin za vreme opažanja, tj. popravka za φ_0 .

$$\Delta\varphi_i = \frac{(i_s - i_u)f \cdot \sin z}{D}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi_i$$

Primer odredbe geografske širine φ na ΔI tački Paraćinskog bazisa

2-IX-1900 г. Пар звезда XII Ефемерида С. П. Бошковић

Опсерватор: С. П. Бошковић
 Калкулатор: Д. Ламин и С. П. Бошковић
 Универзални инструмент Керна No 16417
 Звез. хронометар Ериксона No 388

$\alpha_s = 18\ 51\ 18.56$	$\beta = 0''.54$	Сорес. за нагиб i	
$\alpha_n = 15\ 47\ 33.18$	$z = 41^\circ\ 33'$	$\lg f \sin z = 9.3947$	$\lg \sin \delta_n = 9.990\ 5734$
$\delta_s = +4^\circ\ 4'\ 41''.0$	$\lg \beta = 9.7324$	Comp. $\lg D = 0.0422$	$\Delta = 0.032\ 7685$
$\delta_n = +78\ 6\ 19.4$	$\lg \cos \varphi = 9.8406$	$\lg (i_s - i_n) = 1.1287_n$	$\lg \sin \delta_s = 8.851\ 9638$
$\varphi = 43^\circ\ 50'\ 32''$	$\lg f = 9.5730$	$\lg \Delta \varphi t = 0.5656_n$	Argum. = 1.138\ 6096
$u = \overset{m}{\pm} 1\ 50\ 57$	$\lg \sin z = 9.8217$	$\Delta \varphi t = -3''.68$	$\lg D = 9.957\ 8019$

*S δ сер. (4.2)	*N ξ Urs min. (4.3)	Конци	1	2	3	4
-5.9	+8.0	$T_s + u =$	19 42 46.73	19 43 24.63	19 43 56.23	19 44 17.43
-14.8+8.9	-7.9+15.9	$t_s =$	0 51 28.17	0 52 6.07	0 52 57.67	0 52 58.87
$\overset{h}{19}\ \overset{m}{44}\ \overset{s}{37.3}$	$\overset{h}{19}\ \overset{m}{52}\ \overset{s}{7.6}$	$T_n + u =$	19 50 17.03	19 51 4.33	19 51 43.83	19 52 9.93
45 15.2	52 54.9	$t_n =$	4 2 43.85	4 3 31.15	4 4 10.65	4 4 36.75
45 46.8	53 34.4	$\lg \cos t_s =$	9.988 9548	9.988 6796	9.988 4475	9.988 2905
46 8.0	54 0.5	$\lg \cos t_n =$	9.689 8818	9.687 2110	9.684 9639	9.683 4707
46 14.7	54 9.5	$\lg \cos \delta_s$				
46 35.4	54 36.0	$\cos t_s =$	9.987 8538	9.987 5786	9.987 3465	9.987 1895
47 6.5	55 15.2	$\Delta \dots =$	0.047 5874	0.047 3101	0.047 0796	0.046 9268
47 43.4	56 3.5	$\lg \cos \delta_n$				
48 9.7	56 37.7	$\cos t_n =$	9.003 8684	9.001 3146	8.999 0678	8.997 5743
-14.5+9.1	-8.0+15.6	argum.... =	0.983 8684	0.986 2640	0.988 2787	0.989 6152
-5.4	+7.6	$\lg \theta =$	9.940 2664	9.940 2685	9.940 2660	9.940 2697
$i_s = -5.4$	$i_n = +7.8$	$\lg \lg \varphi_0 =$	9.982 4615	9.982 4636	9.982 4620	9.982 4578

Средња артиметичка:

$\varphi_0 = 43^\circ\ 50'\ 36''.31$

$\Delta \varphi t = -3.68$

$\varphi = 43^\circ\ 50'\ 32.63 \pm 0''.10$

$\varphi_n = 43^\circ\ 50'\ 36''.25$	36''.75	36''.37	35''.37
$v = -0.06$	+0.41	+0.06	-0.94
$v^2 = 0.00$	0.17	0.00	0.82

$\Sigma v^2 = 1.18$ Средња грешка поједине $\varphi_0 = \sqrt{\frac{1.18}{3}} = +0''.38 = m;$

Вероватна „ „ $\varphi_0 = \frac{2}{3} m = +0''.25 = \rho;$

Формуле за рачунање по методи Пјевцова

$$f = \beta \cos \varphi, \quad D = \sin \delta_n - \sin \delta_s$$

$$i_s = T_s + u - \alpha_s$$

$$i_n = T_n + u - \alpha_n$$

$$\lg \cos \delta_n = 9.314 \ 1036$$

$$\lg \cos \delta_s = 9.998 \ 8990$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \delta_s \operatorname{Cost}_s - \cos \delta_n \operatorname{Cost}_n}{\sin \delta_n - \sin \delta_s} = \theta : D$$

$$\Delta \varphi_i = (i_s - i_n) f \operatorname{Sln} z : D$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi_i$$

5	6	7	8	9
$h \ m \ s$ 19 44 24.13	$h \ m \ s$ 19 44 44.83	$h \ m \ s$ 19 45 15.93	$h \ m \ s$ 19 45 52.83	$h \ m \ s$ 19 46 19.13
0 53 5.57	0 53 26.27	0 53 57.37	0 54 34.27	0 55 0.57
19 52 18.93	19 52 45.43	19 53 24.63	19 54 12.93	19 54 47.13
4 4 45.75	4 5 12.25	4 5 12.25	4 6 39.75	4 7 13.95
9.988 2406	9.988 0859	9.987 8515	9.987 5708	9.987 3678
9.682 9542	9.681 4290	9.679 1599	9.676 3427	9.674 3336
9.987 1396	9.986 9819	9.986 7505	9.986 4692	9.986 2668
0.046 8796	0.046 7177	0.046 6004	0.046 2017	9.045 9993
8.997 0578	8.995 5326	8.993 2835	8.990 4463	8.988 4372
0.990 0818	0.991 4523	0.992 4870	0.996 0229	0.997 8296
9.940 2660	9.940 2672	9.940 1501	9.940 2675	9.940 2675
9.982 4611	9.982 4623	9.982 3452	9.982 4626	9.982 4626
36".15	36".44	36".44	36".51	36".51
-0.16	+0.07	+0.07	+0.20	+0.20
0.03	0.01	0.01	0.04	0.04

$$\text{Средња грешка резултата} = + \frac{m}{\sqrt{9}} = +0".13 = M$$

$$\text{Вероватна} \quad , \quad , \quad = + \frac{2}{3} M = +0".09 = R$$

Primer 4.5. Određivanje latituda na tački Paraćinskog bazisa:

Mereni:

Opažani par zvezda	
*S v Serp. (4.2)	*N ξUns.min. (4.3)
- 5.9	+8.0
19 ^h 44 ^m 37 ^s .3	19 ^h 52 ^m 07 ^s .6
19 ^h 45 ^m 15 ^s .2	19 ^h 52 ^m 54 ^s .9
19 ^h 45 ^m 46 ^s .8	19 ^h 53 ^m 34 ^s .4
19 ^h 46 ^m 08 ^s .0	19 ^h 54 ^m 00 ^s .5
19 ^h 46 ^m 14 ^s .7	19 ^h 54 ^m 09 ^s .5
19 ^h 46 ^m 35 ^s .4	19 ^h 54 ^m 36 ^s .0
19 ^h 47 ^m 06 ^s .5	19 ^h 55 ^m 15 ^s .2
19 ^h 47 ^m 43 ^s .4	19 ^h 56 ^m 03 ^s .5
19 ^h 48 ^m 09 ^s .7	19 ^h 56 ^m 37 ^s .7
-5.4	+7.6
$i_s = -5.4$	$i_u = +7.8$

Prema predhodnim jednačinama (srt.45) izračunato je 9 vrednosti za φ_0 i $\Delta\varphi$, od kojih je dobijeno 9 vrednosti za φ . Aritmetičkom sredinom iz ovih vrednosti dobijena je srednja širina.

$$\varphi = 43^{\circ}50'32''.63 \pm 0''.10$$

4.4.1. Određivanje latituda po zenitskim odstojanjima Severnjače

Poznato je da greške zenitskog odstojanja i časovnog ugla imaju najmanji uticaj na određivanju latituda ako se merenje zenitskih odstojanja izvode u blizini meridijana, što je slučaj sa zvezdom Polara, pa stoga je pogodna za određivanje latituda po zenitskim odstojanjima.

Na osnovu poznatog zenitskog odstojanja i trenutka opažanja određujemo časovni ugao t :

$$t = T + u - \alpha$$

$$\tan M = \frac{\tan \delta}{\cos t}$$

$$\cos Z = \sin \delta \cos(\varphi - M) \operatorname{cosec} M$$

$$\cos(\varphi - M) = \cos Z \operatorname{cosec} \delta \sin M$$

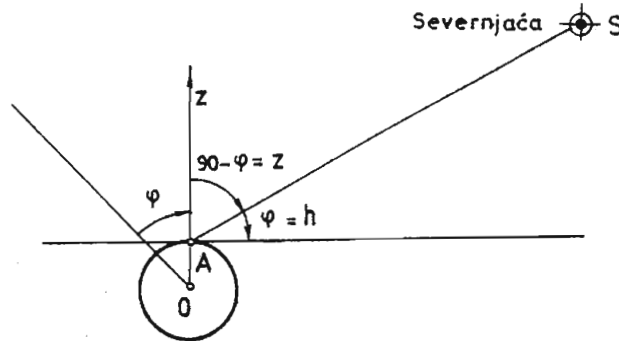
$$\varphi = M + (\varphi - M)$$

Najbolji položaj Polare-Severnjače za ovo određivanje jeste ako se ona nalazi u meridijanu opažачke stanice A (sl.4.8), tada je:

$$h = 90 - Z = 90 - 90 + \varphi = \varphi$$

odnosno ako imamo određeno h ili Z može se sračunati latituda φ :

$$\varphi = 90 - Z$$



Sl. 4.8.

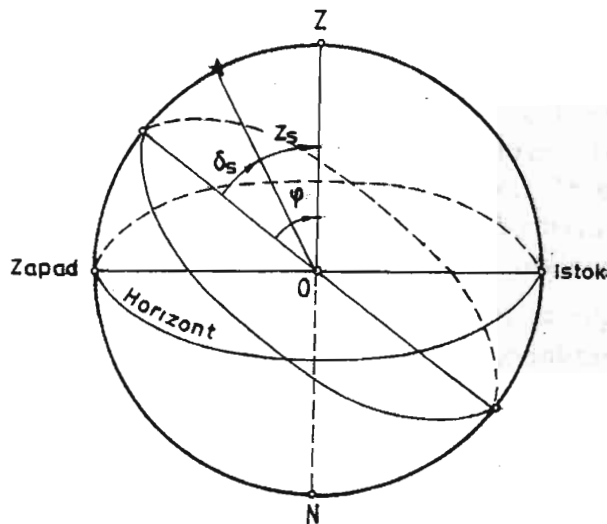
4.4.2. Određivanje latituda φ opažanjem zvezde poznate deklinacije δ pri njenom prolasku kroz meridijan

Merenjem zenitskog odstojanja jedne severne zvezde (sl.4.9) i južne zvezde, dobijaju se dve vrednosti za latitudu φ :

$$\varphi_S = Z_S + \delta_S \quad \text{i} \quad \varphi_N = \delta_N - Z_N$$

Srednja vrednost daje definitivnu vrednost za latitudu:

$$\varphi = \frac{\delta_S + \delta_N}{2} + \frac{Z_S + Z_N}{2}$$



Sl. 4.9.

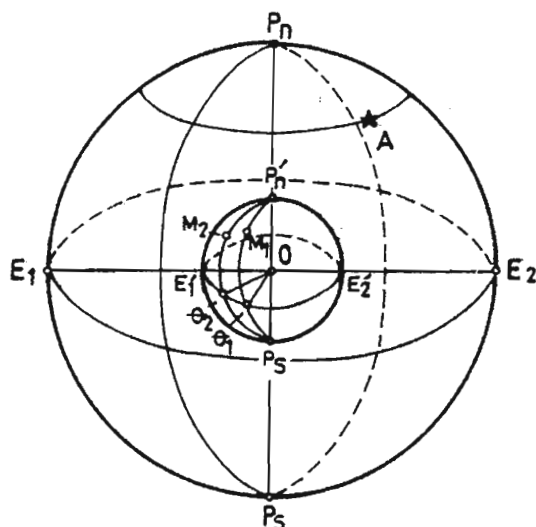
4.4.3. Određivanje longitude λ -dužine

Longituda ili geografska dužina λ je ugao između ravni Griničkog meridijana (početni) i ravni meridijana mesta za koga se računa longituda.

Za dve tačke M_2 i M_1 na Zemljinoj površi, razlika njihovih longituda odgovara uglu $\Theta_2 O \Theta_1$.

Poznato je da zvezde sa jednolikim kretanjem po nebeskoj sferi, pređu svoju putanju za 24^h zvezdana časa. U razmaku od 1^h zvezdanog časa pređu luk od 360° podeljen sa 24, tj., $360^\circ/24 = 15^\circ$.

Drugim rečima ako je neka zvezda A , slika 4.10, bila u određenom trenutku u meridijanu mesta M_1 , posle 1^h nalaziće se u meridijanu mesta M_2 , odnosno proteklo vreme od prolaza zvezde kroz meridijan mesta M_1 do prolaza kroz meridijan mesta M_2 , služi kao mera ili kao mera razlike njihovih longituda. Ova razlika se može odrediti ako se znaju tačna zvezdana vremena prolaza zvezda kroz meridijane mesta M_2 i M_1 .



Sl. 4.10. Određivanje longitude

U opštem slučaju potrebno je da posmatrač u mesto M_1 zabeleži trenutak prolaza zvezde kroz meridijan na zvezdanom časovniku. Nekom vezom obavesti se posmatrač mesta M_2 da zabeleži trenutak prolaza zvezde kroz meridijan mesta M_1 . Posmatrač u mesto M_2 zabeleži trenutak prolaza kroz meridijan mesta M_2 na zvezdanom časovniku.

Ako raspoložemo sa zvezdanim vremenom Griničkog meridijana, onda razlika ovog vremena i zvezdanog vremena mesta daje longitudu, odnosno geografsku dužinu.

Literatura

1. *B.Ševrlić, Dr Z.Brkić*, 1963.: GEODETSKA ASTRONOMIJA, Građevinska knjiga, Beograd.
2. *B.Ševrlić, V.Milovanović*, 1985.: GEODETSKA ASTRONOMIJA 1, Skripta, Građevinski fakultet, Beograd.
3. *V.Mišković*, 1936.: KOSMOGRAFIJA, Geca Kon, Beograd.
4. *J.Baturić*, 1957.: RUDARSKA MJERENJA I DEO, Tehnička knjiga, Zagreb.
5. *J.Sedlar*, 1949.: RUDARSKA MJERENJA, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.
6. *M.Milanković*, 1935.: NEBESKA MEHANIKA, Beograd.
7. *M.Patarić*, 1990.: RUDARSKA MERENJA I DEO, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.
8. Grupa pisaca, 1972.: OPŠTA ENCIKLOPEDIJA LARUSE 2, Vuk Karadžić, Beograd.
9. *S.Šegon*, 1996.: EFEMERIDSKA ASTRONOMIJA, Beograd.
10. *S.M.Bošković*, 1952.: SKRETANJE VERTIKALA U SRBIJI, Izdanje SANU (Geografski institut), Beograd.

OSNOVI VIŠE GEODEZIJE

Zadaci Više geodezije – osnovni pojmovi i određivanja

Viša geodezija je nauka koja izučava oblik, veličinu i spoljašnje gravitaciono polje Zemlje i planeta Sunčevog sistema.

Zadaci Više geodezije mogu se podeliti u dve grupe; na naučne i naučno-tehničke. Određivanje oblika, veličine, dimenzije i spoljašnjeg gravitacionog polja, je naučni zadatak, a njegovo rešenje se sastoji u sledećem:

- U određivanju veličine i oblika matematički definisane površi, koja dovoljno tačno predstavlja oblik Zemlje u celini. Za takvu površ uzima se obrtni elipsoid sa malom spljoštenošću, koji se zove Zemljin elipsoid. Određivanje Zemljinog elipsoida sastoji se u određivanju parametara, koji karakterišu njegovu veličinu, oblik i orijentaciju u zemljinom telu.
- U izučavanju stvarnog oblika i spoljašnjeg gravitacionog polja Zemlje. Pod stvarnim oblikom Zemlje podrazumeva se realna fizička Zemljina površ. Prema Bešlinu, pod fizičkom zemljinom površi podrazumeva se ona površ, koja odvađa tvrd i tečan deo naše planete od njene atmosfere. Izučavanje stvarnog oblika, Zemlje, sastoji se u određivanju veličina koje karakterišu odstupanje njene površi od površi Zemljinog elipsoida.

Spoljašno gravitaciono polje Zemlje izučava se na istom principu kao i oblik Zemlje, odnosno prvo se određuje gravitaciono polje tela, koje je blisko Zemlji (obrotnom elipsoidu), pa se zatim određuje odstupanje gravitacionog polja realne Zemlje, od gravitacionog polja obrtnog elipsoida. Gravitaciono polje i oblik Zemlje, povezani su međusobno, a njihovo izučavanje predstavlja u suštini jedan problem. Praktični problem izučavanja oblika Zemlje svodi se na određivanje koordinata tačaka njene površi, u jednom opštem sistemu za celu Zemlju, a problem izučavanja spoljašnjeg gravitacionog polja Zemlje, na određivanje potencijalne sile teže na zemljinoj površi i u spoljašnjem prostoru u tom istom koordinatnom sistemu.

Od drugih naučnih zadataka Više geodezije pomenućemo još dva: izučavanje horizontalnih i vertikalnih pomeranja zemljine kore i izučavanje oblika i gravitacionog polja Meseca i planeta Sunčevog sistema korišćenjem tehnologiju i postupke satelitske geodezije. U opšte, za rešavanje naučnih zadataka viša geodezija

se koristi matematikom, fizikom, mehanikom i geologijom, a na osnovu rezultata geodetskih, gravimetriskih, astronomskih merenja i merenja satelitskom geodezijom. Ova merenja su:

- a. Uglovna i linearna merenja, koja određuju međusobni položaj tačaka na zemljinoj površi (triangulacija, trilateracija, poligonometrija i nivelman).
- b. Merenja ubrzanja sile teže.
- c. Merenja u cilju određivanja geografskih koordinata tačaka na površi Zemlje i azimute pravaca.
- d. Merenja satelitskom geodezijom.

Naučno-tehničkim zadacima u višoj geodeziji smatraju se još izučavanje metoda i pribora za visoko tačna merenja, radi određivanja koordinata tačaka na zemljinoj površi. Oblik fizičke površi zemlje detaljno se proučava još i metodama topografije.

Kartografisanjem zemljine površi ili njenih delova i njihovo predstavljanje na karti (u ravni), stavlja u zadatak višoj geodeziji i predstavljanje koordinata tačaka u ravni po matematičkim zakonima preslikavanja. Zbog svega ovoga, viša geodezija je široka naučna oblast, a radi njenog izučavanja deli se na pojedine discipline ili grupe:

- U prvoj grupi spadaju programi i metode merenja, kao i teorija korišćenja pribora i instrumenata.
- U drugoj grupi razmatraju se metode i teorija za naučnu obradu rezultata merenja, kao i korišćenje tih rezultata za izučavanje geometrije i fizike Zemlje.

Prema tome, u prvoj grupi više geodezije – deo merenja, nalaze se sledeće podgrupe:

- Geodetska astronomija,
- Osnovni geodetski radovi,
- Metode geodetske gravimetrije,
- Satelitska geodezija.

Drugoj grupi više geodezije pripadaju matematička i fizička teorija.

1.1. Teorijska površ Zemlje

Stvarna površ Zemlje je njena fizička površ, koja se u matematičkom smislu nemože proučavati zbog nepravilnosti reljefa, ni u delovima ni u celini. Zato kada je reč o opštem obliku Zemlje ili o premeru koji obuhvata veći deo Zemljine površi, njena se fizička površ zamenjuje drugom površi koja je oslobođena svih nepravilnosti reljefa.

Površ kojom se zamenjuje fizička površ zemlje je teorijska površ Zemlje. Ova površ samo približno odgovara stvarnoj površi, a stepen približenja stvarne i teorij-

ske površi zavisi od postavljenih zahteva u zadacima. U prvom približenju koje zadovoljava mnoge praktične potrebe Zemljinu površ zamenjujemo sa površi lopte, a u drugom i trećem približenju Zemljinu površ smatramo da je površ obrtnog elipsoida, odnosno geoida.

1.2. Projekciona površ

Tačke koje čine osnovu za premer nalaze se na fizičkoj površi zemlje. Isto tako, sva terestrička merenja izvršavaju se na ovoj površi. Položaj ovih tačaka treba određivati u prostoru, jer danas za takvu obradu postoje uslovi, odnosno postoje informacioni sistemi za obradu rezultata merenja. U prošlim vremenima ovakva obrada bila bi komplikovana. Zato se u geodeziji prihvatio drugi postupak, koji se sastoji u projektovanju tačaka sa fizičke površi Zemlje na neku matematički određenu površ (ravan, lopta, obrtni elipsoid), odnosno na projekcionu površ. Projektovanje se vrši normalama na izabranu površ, na kojoj se položaj tačaka određuje dvema koordinatama. Položaj tačaka na fizičkoj površi Zemlje određuje se ovim koordinatama i visinom (udaljenost tačaka od projekcione površi po normala).

1.3. Zemljin oblik

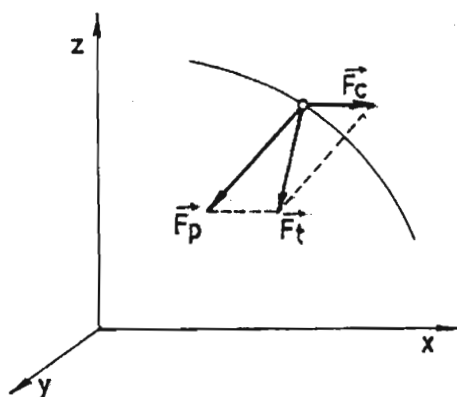
Prava površ Zemlje ima takav fizičko-geometrijski oblik, da se ne može formulisati nekom tačnom matematičkom funkcijom. Ipak matematički opis Zemlje sa aspekta fizike dao je engleski fizičar Isak Njutn krajem XVII veka. Posmatrao je Zemlju kao homogenu žitku masu koja pod uticajem sile privlačenja i centrifugalne sile dobija oblik blizak lopti, spljošten na polovima, poznat pod imenom sferoid, koji se u prvom približenju kod male spljoštenosti veoma dobro podudara sa obrtnim elipsoidom. Ispravnost ove teorije potvrdili su rezultati merenja geodetskih ekspedicija, upućenih od strane francuske Akademije nauka 1736 godine u Peru i Laplandiji.

Sa matematičke strane problem definisanja oblika Zemlje, može se rešiti, ako poznamo silu zemljine teže i nivoske površi, zato u sledećem izlaganju dajemo kratko razmatranje o sili teže (blisko rudarskim i geološkim stručnjacima), koje će nadamo se doprineti boljem razumevanju materije koja će se dalje izlagati.

1.3.1. Osnovni pojmovi o sili Zemljine teže i njenog potencijala

U svakoj tački Zemljine površi, sila teže predstavlja rezultantu vektora sile privlačenja mase cele Zemlje F_p i centrifugalne sile F_c koja nastaje zbog rotacije zemlje oko svoje obrtne ose (sl.1)¹.

Prema slici i onoga što je rečeno možemo pisati,



Sl.1.1. Sila teže

$$F_t = F_p + F_c \quad (1.1.)$$

gde su:

F_t – sila teže

F_p – sila privlačenja

F_c – centrifugalna sila

U poređenju sa silom privlačenja centrifugalna sila je mala i nije vezana za rasporedom masa Zemlje i lako se može izračunati

Polazeći od Njutnovog zakona o privlačenju mase, dve tačkaste mase m_1 i m_2 koje se nalaze na rastojanju r , uzajamno se privlače silom čiji je intenzitet,

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot f \quad (1.2)$$

gde je f gravitaciona konstanta.

Ako uzmemo dve tačke od kojih je jedna na fizičkoj površi Zemlje, a druga u Zemljinoj unutrašnjosti, čije su mase m_A i m_a dm , onda sila privlačenja između ovih masa biće,

$$F = f \frac{dm}{s^2} \quad (1.3)$$

u koordinatnom sistemu x, y, z , gde su koordinate tačke $a(x_1, y_1, z_1)$ i tačke $A(x, y, z)$. Komponente sile privlačenja po koordinatnim osama su:

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha, & \text{gde je} & \cos \alpha = \frac{x - x_1}{s} \\ F_y &= F \cos \beta, & \text{gde je} & \cos \beta = \frac{y - y_1}{s} \\ F_z &= F \cos \gamma, & \text{gde je} & \cos \gamma = \frac{z - z_1}{s} \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹preuzeto iz [9]

Daljim izvođenjem jednačina može se doći do funkcije potencijala sile privlačenja. Pojam potencijal uveo je engleski matematičar Grim (Georg Gream 1793–1841) [12], i predstavlja funkciju koordinata x, y, z , koja ima osobine da su njeni parcijalni izvodi po koordinatama x, y, z jednaki komponentama sile privlačenja po koordinatnim osama. Ova funkcija označava se sa V (potencijalna funkcija) i jednaka je

$$V = f \cdot \int_v \frac{dm}{r} \quad (1.5)$$

gde v označava zapreminu tela.

Kada je r beskonačno veliko u odnosu na razmeru tela za silu privlačenja i potencijalnu funkciju možemo napisati,

$$F = \frac{f \cdot M}{r^2}; \quad V = \frac{f \cdot M}{r} \quad (1.6)$$

Potencijal sile privlačenja Zemlje računa se po formuli

$$V = \frac{f \cdot M}{r} + \frac{f}{2r^3} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \psi) + \frac{3f}{4r^3} (B - A) \cos^2 \psi \cos 2\lambda \quad (1.7)$$

gde su: λ – geografska dužina,
 ψ – geocentrična širina,

A, B, C – glavni momenti inercije Zemlje.

Potencijal centrifugalne sile koja nije vezana sa rasporedom masa u Zemlji izračunava se u koordinatnom sistemu x, y, z po formuli,

$$U = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (1.8)$$

gde je ω ugaona brzina

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} \quad (1.9)$$

1.3.2. Osnovna svojstva potencijala sile privlačenja

Fizički smisao potencijala sile privlačenja, možemo razmatrati ako potražimo njegov priraštaj dV pri premeštanju mase iz tačke $B(x, y, z)$ u tačku $B_1(x+dx, y+dy, z+dz)$, na beskonačno malom rastojanju $BB_1 = (dx + dy + dz)^{1/2} = ds$.

Gde su:

$$dx = ds \cos(s, x); \quad dy = ds \cos(s, y); \quad dz = ds \cos(s, z) \quad (1.10)$$

Jednačinom (1.10) računaju se priraštaji, kao proizvod elementa ds sa kosinusom uglova, koje obrazuje element s sa koordinatnim osovinama.

Priraštaj potencijala sile privlačenja, računa se po formuli:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.11)$$

ili

$$dV = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (1.12)$$

gde su: F_x, F_y, F_z komponente sile privlačenja duž koordinatnih osa, odnosno

$$dV = F ds \{ \cos(s, x) \cos(F, x) + \cos(s, y) \cos(F, y) + \cos(s, z) \cos(F, z) \} \quad (1.13)$$

Izraz u zagradi predstavlja kosinus ugla između pravca sile teže F i pravca elementa ds , odnosno $\cos(F, s)$, tada je:

$$dV = F ds \cos(F, s) \quad (1.14)$$

Kako je $F \cos(F, s) = F_s$, odnosno to je projekcija sile privlačenja na pravac s , tada se za priraštaj potencijala dobija,

$$dV = F_s ds, \quad \text{odnosno} \quad (1.15)$$

$$F_s = \frac{dV}{ds} \quad (1.16)$$

Jednačina (1.16) predstavlja izvod potencijalne funkcije u bilo kom pravcu, koji je jednak komponenti sile duž tog pravca.

Iz mehanike znamo, da je elementarni rad sile F pri pomeranju tačke na rastojanju ds jednak je $F ds$, odakle zaključujemo da je beskonačni mali priraštaj potencijala rad koga izvrši sila F .

U opštem, premeštanje jedinice mase između tačaka M i N predstavlja rad R , koga izvršava sila F , odnosno rad predstavlja razlika potencijala tačaka M i N :

$$R = \int_N^M F ds \cdot \cos(F, ds) = \int_N^M dV = V_M - V_N = \Delta V \quad (1.17)$$

Predpostavimo da se tačka N udaljava u beskonačnosti, onda i potencijal V_N teži nuli, tada je rad jednak potencijalu u tački M , $R = V_M$, odnosno potencijal sile privlačenja u datoj tački jednak je radu koji je neophodan da izvrši sila privlačenja kod premeštanja jedinice mase iz beskonačnosti u datoj tački. Iz prethodnog vidimo da dV zavisi od kosinusa ugla između pravca pomeranja tačke, odnosno potencijal može da bude različit ili jednak nuli:

1. Ako je $\cos(F, s) = 0$, predstavlja pomeranje tačke u pravcu upravnom na pravac sile F , onda je $dV = 0$, odnosno

$$V = C \quad (1.18)$$

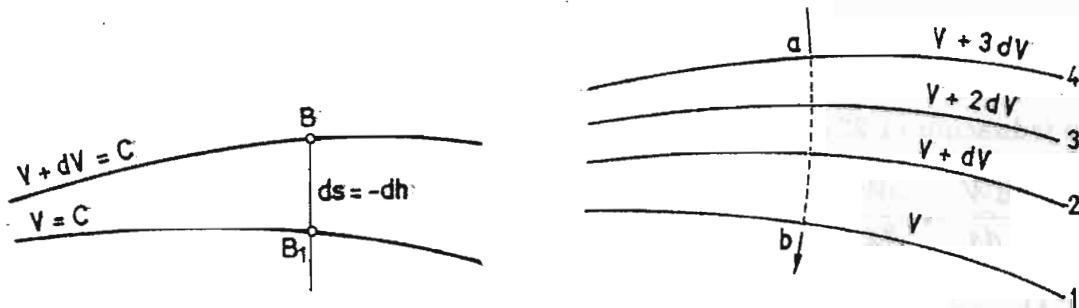
što predstavlja nivo površi tj, familiju površi ako konstanta C uzima različite vrednosti.

2. Ako je $\cos(F, s) = 1$, znači da se tačka premešta u pravcu sile teže tj, potencijal ima maksimalnu vrednost $dV = F \cdot ds$.

Razmatrajmo dve beskonačno bliske nivoske površi, $V = C$ i $V + dV = c_1$, koje prolaze u tačkama B i B_1 u pravcu sile F . Onda je $dV = F \cdot ds$, gde ds predstavlja elementarno rastojanje između ovih površi i možemo ga označiti sa dh . Tada sledi da je,

$$dV = F \cdot dh, \quad \frac{dV}{dh} = F; \quad dh = \frac{dV}{F} \quad (1.19)$$

što govori o premeštanju tačke po normali ka centru tela, odnosno $\cos(F, s) = +1$. Ako se premeštanje tačke vrši u suprotnom pravcu tj, $\cos(F, s) = -1$, imaćemo da je $-dV/dh = F$; $dV = -Fdh$; $dh = -dV/F$, što govori da je odstojanje između nivo površi u opštem slučaju nejednako u različitim tačkama i da je obrnuto proporcionalno sili F koja deluje u tim tačkama (sl.2).



Sl.1.2. Nivoske površi

U gravitacionom polju Zemlje mogu se postaviti beskonačno mnogo nivoskih površi (sl.1.2, površi 1,2,3,4,...). Linije upravne na nivoske površi, nazivaju se linije gravitacionih sila (sl.1.2, kriva ab), koje seku nivoske površi pod pravim uglom.

Prema tome, možemo zaključiti, da u tačkama na fizičkoj površi Zemlje prolazi vertikalna (koja se materijalizuje pravcem viska h odnosno pravac sile teže i normala, koja prolazi kroz tačaka na Zemljinoj površi, pripada gravitacionim linijama sila, upravna na nivosku površ, a tangenta je linijama sila.

1.3.3. Potencijal sile Zemljine teže i nivoska površ

Potencijal sile teže W jednak je sumi potencijala sile privlačenja V i potencijala centrifugalne sile U .

$$W = V + U$$

Projekcija potencijala sile teže na koordinatnim osama biće,

$$\begin{aligned}g_x &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = g \cos(g, x) \\g_y &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} = g \cos(g, y) \\g_z &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = g \cos(g, z)\end{aligned}\tag{1.20}$$

gde je

$$g = (g_x^2 + g_y^2 + g_z^2)^{1/2}\tag{1.21}$$

Priraštaj potencijala sile teže kao funkcija x, y, z daje se formulom:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz\tag{1.22}$$

Ako jednačinu (1.22) podelimo sa ds , dobija se:

$$\frac{dW}{ds} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{ds} = -g_x \frac{dx}{ds} - g_y \frac{dy}{ds} - g_z \frac{dz}{ds}\tag{1.23}$$

Ako primenimo analogni postupak izvođenja kao o svojstvima potencijala sile privlačenja, dobićemo da je,

$$\frac{dW}{ds} = g \cdot \cos(g, s) = g_s\tag{1.24}$$

Jednačina (1.24) predstavlja izvod potencijalne funkcije sile teže u bilo kom pravcu, koji je jednak projekciji sile teže u tom pravcu, odnosno u pravcu s . Za sve pravce koji su upravni na vertikalnu površ biće:

$$\begin{aligned}\cos(g, s) &= 0, & \text{odnosno} \\ \frac{dW}{ds} &= 0\end{aligned}\tag{1.25}$$

Integral ove diferencijalne jednačine, očigledno je jednak stalnoj veličini,

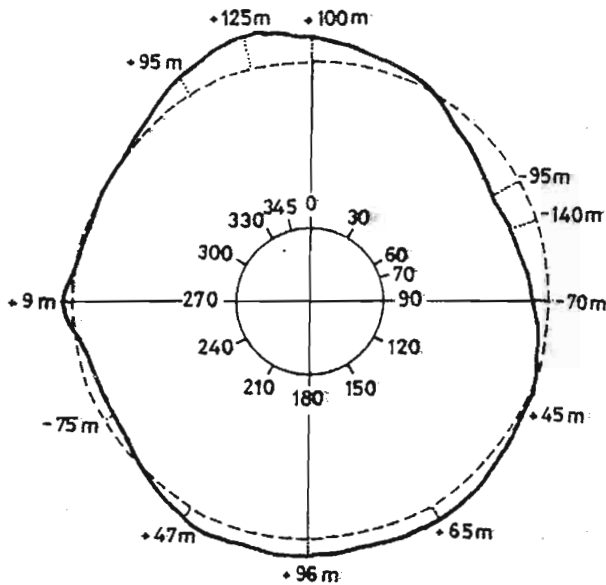
$$W = C\tag{1.26}$$

Kako je potencijal W funkcija koordinata, onda će ova jednačina kao analitička veza između x, y, z predstavljati površ, u našem slučaju gde se normale poklapaju sa vertikalama. Ova površ, zove se *Ekvipotencijalna* ili *nivoska*.

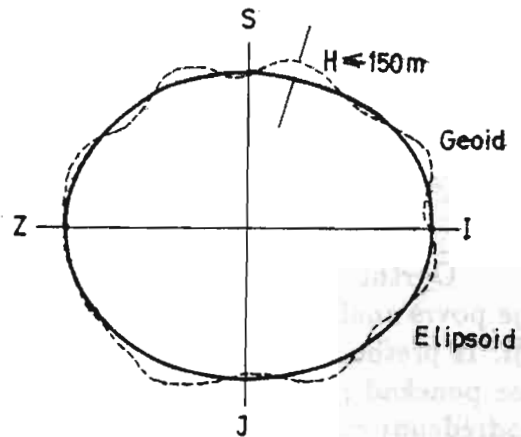
Ova nivoska površ čija se jednačina zadovoljava koordinatama tačaka x, y, z , na površini mora i okeana u mirnom stanju, jeste površ *Geoida*. Prema tome, geoid je geometrijsko telo, ograničeno jednom od nivoskih površi, odnosno sa površi okeana mora u mirnom stanju. Ova definicija je u saglasnosti sa definicijom nemačkog fizičara Listinga.

Ako u opštu jednačinu nivoske površi ($W = C$), zamenimo vrednosti potencijala sile privlačenja i centrifugalne sile, može se dobiti jednačina geoida, koja ukazuje da je oblik geoida uslovljen raspodelom masa kako u unutrašnjosti Zemlje, tako i na njegovoj površi. Još ukazuje na to da je geoid nepravilnog oblika, odnosno možemo smatrati da je geoid geometrijsko telo, analitički neodređeno. Prema tome geoid se nemože upotrebiti kao površ za računanja u geodeziji. Geoid se malo razlikuje od obrnutog elipsoida tj, tela dobijenog obrtanjem elipse oko jedne od svojih osovina (sl.1.3).

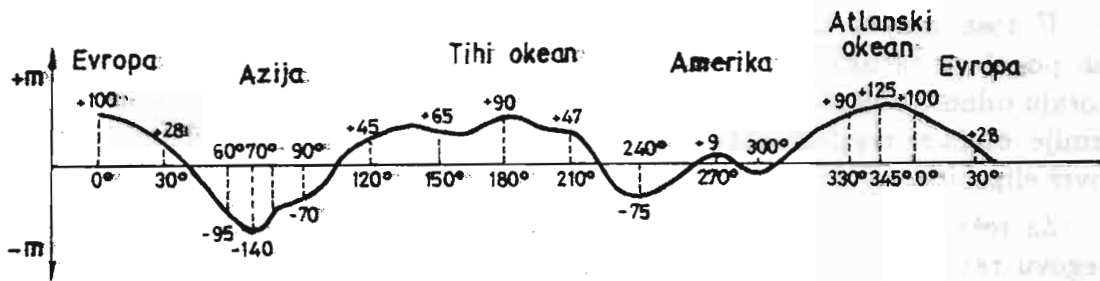
Profil geoida (odstupanja od elipsoida) ekstrapolovan na Zemljin ekvator [8], prikazan je na (sl.1.4).



Sl.1.3. Geoid i elipsoid



Sl.1.3a. Aproksimacija geoida elipsoidom

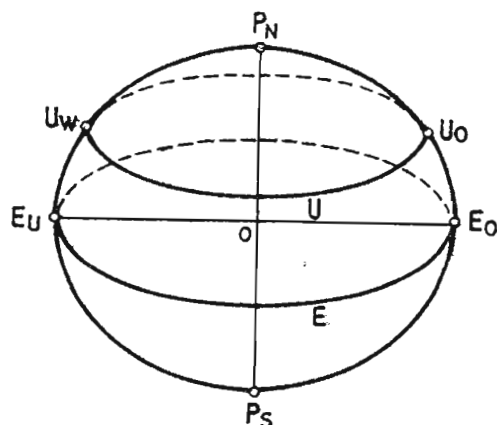


Sl. 1.4. Profil odstupanja geoida od elipsoida

1.3.4. Zemljin elipsoid

U poglavlju 1.3.3 zaključili smo, da je geoid nepravilnog oblika a da se zamenjuje obrtnim elipsoidom (sl.1.5), čija se površ može upotrebiti za računanja u geodeziji. Takav obrtni elipsoid koji nastaje obrtanjem oko njegove male osovine, prema [2] treba da zadovolji sledeće uslove:

1. Zapremina obrtnog elipsoida mora da bude jednaka zapremini geoida.
2. Geometrijski centar elipsoida mora se poklapati sa centrom Zemljine teže.
3. Mala osovina Zemlje mora se poklapati sa obrtnom osovinom Zemlje.
4. Zbir kvadrata odstupanja između površi geoida i elipsoida mora biti minimum.



Sl.1.5. Obrtni elipsoid

Obrtni elipsoid koji zadovoljava navedene uslove zove se Zemljin elipsoid, čija je površ analitički određena i može se koristiti, kao površ za računanja u geodeziji. Iz prethodnog izlaganja znamo da elipsoid odstupa od geoida (sl.1.3 i 1.4), ali se ponekad postavlja pitanje određivanja elipsoida koji bi se najbolje prilagodio određenoj oblasti, ili jedne države. U takvim slučajevima, postavlja se pitanje određivanja dimenzija elipsoida i njegove orijentacije u Zemljinom telu. Dimenzije ovakvog elipsoida moraju se tako odrediti da površ bude što bliža površi geoida. Tako određen i orijentisan elipsoid zove se Referenc elipsoid.

Kod rešavanja mnogih zadataka u geodeziji, može se površ elipsoida zameniti sa površi loptom poštujući uslove preslikavanja, a time olakšati mnoga računanja.

U dosadašnjem izlaganju više puta je pomenuto da se površ elipsoida uzima kao površ za računanja u geodeziji. To znači da se rezultati merenih veličina moraju odnositi na površ elipsoida. Obzirom da se merenja vrše na fizičkoj površi Zemlje, onda se rezultati merenih veličina moraju redukovati, da bi se odnosile na površ elipsoida.

Za rešavanje geodetskih zadataka na površi elipsoida, neophodno je znati i njegovu razmeru. Pod razmerom elipsoida podrazumeva se velika poluosa (a) i spljoštenost korišćenog elipsoida. Za neke od elipsoida koji se koriste u svetu, dajemo tablicu razmere elipsoida [8];

Tablica 1: Razmera elipsoida

Ime autora	Godina određivanja	Poluosa a	Spljoštenost
Valbek	1819	6 376 896	1:302,8
Besel	1841	6 377 397	1:299,15
Klark	1866	6 378 206	1:295,0
Klark	1880	6 378 249	1:293,5
Sludskij	1892	6 377 494	1:297,1
Ždanov	1893	6 377 717	1:299,0
Hajford	1910	6 378 388	1:297,0
Krasovski	1936	6 378 210	1:298,6
Krasovski	1940	6 378 245	1:298,3

U našoj Zemlji koristi se Beselov elipsoid, čiji su parametri:

$$a = 6\,377\,397,155\text{ m} \quad \alpha = 1 : 294,152812$$

$$b = 6\,356\,078,963\text{ m} \quad \eta = 0.001674184$$

$$c = 6\,398\,786,849\text{ m} \quad e'^2 = 0.0067192288$$

$$Q = 10\,000\,055,76\text{ m} \quad e^2 = 0,006676372$$

1.3.5. Osnovne tačke i linije Zemljinog elipsoida

Obrtni elipsoid je geometrijsko telo koje se dobija obrtanjem elipse oko njene male osovine. Krajnje tačke ove osovine nazivaju se polovima, severni P_N i južni P_S , (sl.1.5).

Ravan koja je upravna na malu osovinu, prolazi kroz centar elipsoida O i seče elipsoid po krugu $E_O E E_W$ zove se ekvator.

Svaka ravan u kojoj leži mala osovina, seče elipsoid po elipsi $P_N E_O P_S E_W P_N$ zove se meridijan, a elipsa se zove meridijanska elipsa.

Svaka ravan koja je upravna na malu osovinu i ne prolazi kroz centar elipsoida, seče elipsoid po krugu $U_O U U_W$ zove se paralela.

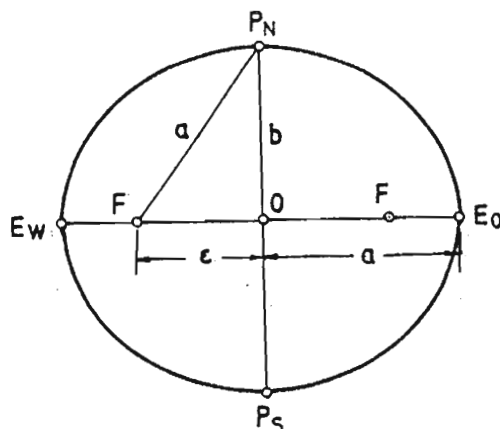
1.3.5.1. Elementi meridijanske elipse

Meridijanska elipsa, nastaje presekom ravni u kojoj leži mala osovina i elipsoid, (sl.1.6).

Na ovoj slici prikazani su:

1. $P_N E_O P_S E_W P_N$ - Elipsa čijem se obrtanjem dobija Zemljin elipsoid,
2. $P_N P_S = 2b$ - Mala osovina elipse,
3. $E_O E_W = 2a$ - Velika osovina elipse,

4. F_1F_2 - Žiža elipse,
5. $F_1O = OF_2 = \varepsilon$ - Linearni ekcentricitet elipse.
6. O - Centar elipse,



Sl.1.6. Meridijanska elipsa

Na osnovu ovih geometrijskih elemenata meridijanske elipse i analitike izračunavaju se sledeće veličine:

prvi brojni ekcentricitet $e = \frac{\varepsilon}{a}$; drugi brojni ekcentricitet $e' = \frac{\varepsilon}{b}$

Ove jednačine mogu dobiti novi oblik, ako stavimo: $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned}
 e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \\
 e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1 + e'^2 \\
 \frac{b^2}{a^2} &= \frac{1}{1 + e'^2}
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

odnosno

$$e^2 = 1 - \frac{1}{1 + e'^2} \quad \text{ili} \quad e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2}$$

analogno tome je

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

Iz (1.28) sledi da je

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad \text{ili} \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \tag{1.29}$$

Veličinu

$$\alpha = \frac{(a - b)}{a} \tag{1.30}$$

nazivamo polarna spljoštenost ili spljoštenost elipsoida.

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - (1 - e^2)^{1/2}; \quad 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} \tag{1.31}$$

- zavisnost između prvog i drugog ekscentriciteta i spljoštenošću;

$$1 - e^2 = 1 - 2\alpha - \alpha^2 \Rightarrow e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \approx 2\alpha$$

$$\alpha' = \frac{a-b}{b}; \quad \alpha'' = \frac{a-b}{a+b} = n = \frac{\alpha^2}{e^2}$$

- α' i α'' nazivaju se drugom i trećom spljoštenošću meridijanske elipse. Odnos

$$e''^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = m$$

- predstavlja odnos razlike kvadrata poluosovina prema sumi njihovih kvadrata.

Kod raznih računanja na elipsoidu primanjuje se funkcija $C = a^2/b$ koja predstavlja poluprečnik krivine meridijanske elipse na polovima, odnosno polarni poluprečnik.

$$C = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1+e'^2} = b(1+e'^2) = \frac{b}{1-e'^2} \quad (1.32)$$

Sva dosadašnja izvođenja sa osnovnim parametrima a, b ili a, α definišu elipsoid, a sve druge veličine su pomoćne i koriste se za teorijska izvođenja.

U geodeziji i kartografiji položaj tačaka na površi elipsoida definisan je geografskim koordinatama. Za definisanje položaja ravni npr. normalnih preseka, potrebno je upoznavanje sa pojmom *normalni preseki*, kao i definisanje azimuta neke tačke na površi elipsoida. Kod definisanja i određivanja zavisnosti između pojedinih veličina Zemljinog elipsoida koriste se i pomoćne veličine V i W , odnosno geodetske funkcije.

Kod dvostrukih projekcija u kartografiji tačke se prvo preslikavaju sa elipsoida na loptu, a zatim sa lopte na ravan. Kod ovih projekcija i nekih teorijskih izvođenja u geodeziji i astronomiji, koriste se veličine geocentrična širina i redukovana širina. Prema tome pojmovi; geodetske funkcije, normalni preseki, azimut, geocentrična i redukovana širina treba upoznati, da bi se materija koja će se izlagati lakše pratila.

1.3.5.2. Geodetske funkcije V i W

Ovo su pomoćne veličine i definišu se jednačinama:

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \\ W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (1.33)$$

bez izvođenja navodimo međuzavisnost ovih funkcija:

$$\begin{aligned} W^2 &= \frac{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}{1 + e'^2} = \frac{V^2}{1 + e'^2} = V^2(1 - e^2) \\ V^2 &= \frac{W^2}{1 - e^2} = W^2(1 + e'^2) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Zavisnost ovih funkcija može se predstaviti i pomoću polarnog poluprečnika krivina:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{1 - e^2},$$

onda sledi da je

$$V^2 = W^2 \cdot \frac{c^2}{a^2}; \quad V = W \cdot \frac{c}{a},$$

odnosno

$$W = V \cdot \frac{a}{c} \quad (1.35)$$

1.3.5.3. Normalni preseki

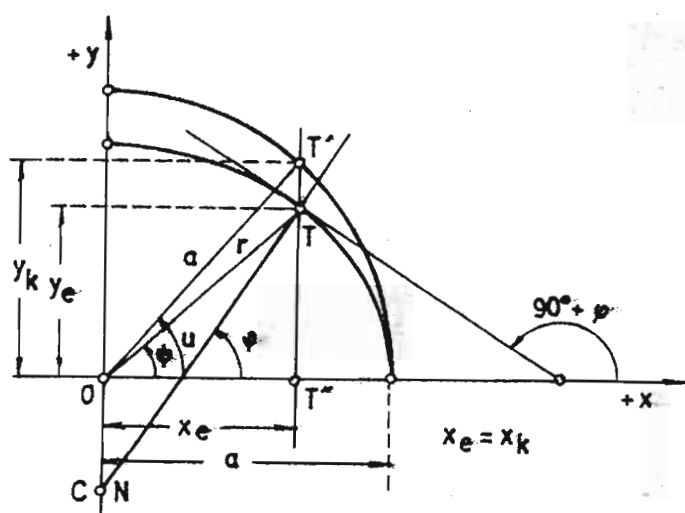
Kroz normalu na površini elipsoida može se položiti beskonačno mnogo ravni. Svaka od ovih ravni seče elipsoid po nekoj krivoj liniji koja se zove normalnim presekom. Između beskonačno mnogo normalnih preseka postoje dva koji su glavni normalni preseki. Jedan od njih obrazovan je onom ravni u kojoj leži obrtna osa elipse (osa rotacije), ovaj presek je presek po meridijanu. Drugi glavni normalni presek obrazovan je onom ravni, koja je upravna na ravan meridijana i zove se poprečni normalni presek ili presek po prvom vertikalu (vertikal je veliki krug nebeske sfere duž koga se seče svaka ravan koja prolazi kroz vertikalu—vertikalna ravan), odnosno ime je dato po odgovarajućoj liniji nebeske sfere, inače vertikala je rezultanta sile teže.

Osobina normalnih preseka je ta, da presek po meridijanima ima najveću, a presek po prvom vertikalu najmanju krivinu.

1.3.5.4. Geocentrična redukovana i geografska širina

Geocentrična širina ψ je ugao koga zaklapaju vektor r tačke T na elipsoidu sa ravni ekvatora, odnosno sa velikom osom meridijanske elipse (sl.1.7).

Redukovana širina u je ugao koji zaklapa poluprečnik $OT' = a$, opisanog kružnog luka sa velikom osom meridijanske elipse (sl.1.7).



Geografska širina φ tačke T je ugao između normale N tačke T na površi elipsoida sa ravni ekvatora.

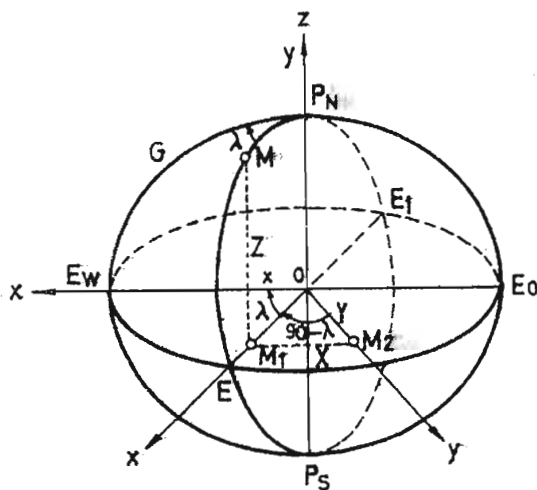
Sl. 1.7. Različite širine na elipsoidu

1.4. Sistemi koordinata koji se koriste u Višoj geodeziji

1.4.1. Sistemi pravougljih prostornih koordinata XYZ

Za početak koordinatnog sistema uzima se centar elipsoida O . Osovina OZ poklapa se sa obrtnom osom elipsoida P_NOP_S , (sl.1.8).

Osa OX leži u ravni ekvatora, a pravac OE_W ose X usvojen je za početni. Osa OY leži u ravni ekvatora i upravna je na osu OX . Položaj tačke M na površi elipsoida u ovom koordinatnom sistemu određen je koordinatama:



$$X = M_1M_2$$

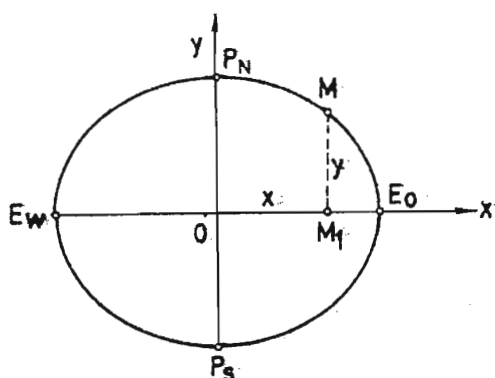
$$Y = OM_2$$

$$Z = MM_1$$

Sl.1.8. Pravougli prostorni koordinatni sistem

Ovaj sistem ima veliki teorijski i praktični značaj. Naročito se koristi za rešavanje zadataka iz oblasti satelitske geodezije. Metod rešavanja zadataka ovog sistema koordinata zove se trodimenzionalna geodezija.

1.4.2. Sistem pravougljih koordinata xy , u ravni meridijana



Ovaj koordinatni sistem primanjuje se za teorijska izvođenja, ali ne i za praktične potrebe.

Neka je meridijanska elipsa $P_N E_0 P_S E_W P_N$ elipsa koja prolazi kroz tačku M . Početak koordinatnog sistema je tačka O . Za x osu uzima se velika osa elipse a za y osu uzima se mala osa elipse. Položaj tačke M određuje se koordinatama:

$$x = OM_1 \quad i \quad y = MM_1$$

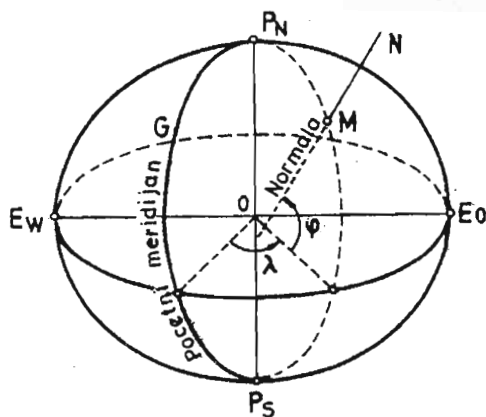
Sl.1.9. Sistem pravougljih koordinata

1.4.3. Sistem geografskih koordinata

Sistem geografskih koordinata nalazi široku naučnu i praktičnu primenu (sl.1.10).

Geografska širina tačke M na površini elipsoida obrazovana je normalom u toj tački sa ravni ekvatora. Pošto normala leži u ravni meridijana P_NMP_S , to je geografska širina tačke jednaka uglu što ga zaklapa normala sa velikom osom elipse. Geografske širine računaju se severno i južno od ekvatora od 0^0 do 90^0 .

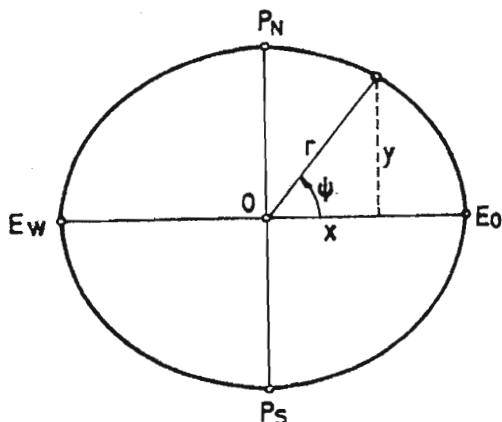
Geografska dužina tačke M je ugao između ravni nultog-početnog meridijana i meridijana tačke M , odnosno to je ugao u ravni ekvatora koga obrazuju velike ose početnog i meridijana tačke. Geografske dužine računaju se istočno i zapadno od početnog meridijana i to od 0^0 do 180^0 .



Sl.1.10. Sistem geografskih koordinata

1.4.4. Sistem geocentričnih koordinata

Jedna koordinata u ovom sistemu je geografska dužina λ , koja određuje meridijansku elipsu koja prolazi kroz tačku M . Položaj tačke M na toj elipsi određen je geocentričnom širinom ψ , koja je ugao između radijus vektora r tačke M i ravni ekvatora, odnosno to je ugao koga zaklapa radijus vektor r i velika osa meridijanske elipse (sl.1.11).



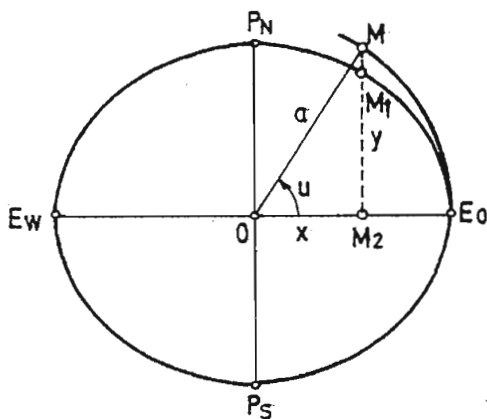
Računaju se severno i južno od ekvatora i to od 0^0 do 90^0 . Ovaj sistem retko se primenjuje u Višoj geodeziji, ali se veoma često primenjuje u astronomiji, teorijskim razmatranjima oblika Zemlje i kartografiji.

Sl.1.11. Sistem geocentričnih koordinata

1.4.5. Sistem redukovanih koordinata

Kod ovog sistema jedna koordinata je geografska dužina λ . Položaj tačke M na meridijanskoj elipsi koja ima geografsku dužinu λ , određuje se redukovanom širinom u (sl.1.12).

Ugao u koga zaklapa poluprečnik $OM = a$, opisanog kruga sa velikom poluosom, po predlogu Ležandra zove se redukovana širina tačke M . Redukovane širine računaju se severno i južno od ekvatora. Najviše se koriste kod teorijskih izvođenja za rešavanje geodetskih zadataka na velikim rastojanjima.

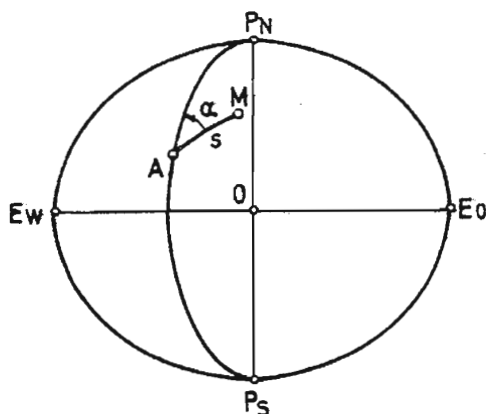


Sl.1.12.
Sistem redukovanih koordinata

1.4.6. Sistem geodetskih polarnih koordinata na elipsoidu

Kod ovog sistema uzima se tačka A na elipsoidu koja ima poznate koordinate φ i λ i smatra se početkom koordinatnog sistema (sl.1.13). Meridijan koji prolazi kroz tačku A usvaja se kao početni pravac.

Položaj tačke M na elipsoidu određuje se dužinom geodetske linije s i uglom α , uz poznatih koordinata φ i λ koordinatnog početka A polarnog sistema. Polarne koordinate nalaze primenu pri obradi gradusnih merenja i izravnavanju velikih trigonometrijskih mreža.

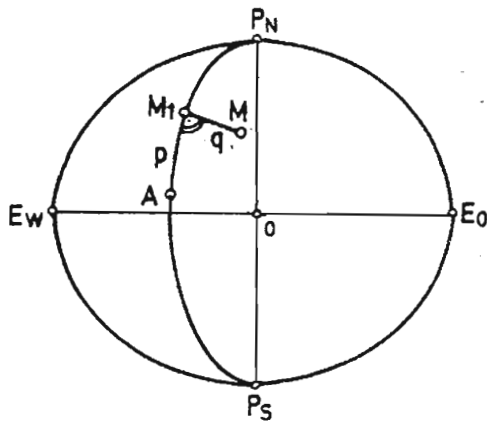


Sl.1.13.
Sistem polarnih koordinata

1.4.7. Sistem pravougljih koordinata p i q na elipsoidu

U ovom koordinatnom sistemu uzima se tačka A sa poznatim geografskim koordinatama za početak koordinatnog sistema (sl.1.14).

Meridijan koji prolazi kroz tačku A usvaja se za apcisnu osu. Apcise su pozitivne ako su severno od tačke A , a negativne ako su južno od tačke A . Položaj tačke M na elipsoidu određuje se krivama p i q :



$$p = AM_1$$

$$q = MM_1$$

Sl. 1.14.

Sistem pravougljih koordinata na elipsoidu

1.4.8. Sistem pravougljih koordinata xy u ravni

Kod izvođenju radova iz oblasti više, niže ili inženjerske geodezije, neophodno je imati koordinate tačaka geodetskih mreža izražene u sistemu pravougljih koordinata x i y u ravni. Zato je potrebno izvršiti preslikavanje tačaka i delova površi elipsoida na ravan, prema matematičkim zakonima preslikavanja. Za ova preslikavanja u našoj Zemlji se koristi Gaus-Kriggerova projekcija.

1.4.9. Veza između nekih koordinatnih sistema

Veza između pojedinih koordinatnih sistema može se uspostaviti, ako se iskoriste parametarske jednačine meridijanske elipse, (jer se računanja vrše u ravni elipse), gde se kao parametri mogu uzimati φ , u i ψ . Veza između prostornog sistema i drugih sistema zahteva drugačiji pristup.

1.4.9.1. Veza između sistema pravougljih koordinata x, y u ravni meridijana i geografske širine φ

Jednačina meridijanske elipse u pravougljim koordinatama x, y , za neku tačku T (sl.1.7) ima sledeći oblik:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.36)$$

diferenciranjem ove jednačine dobija se:

ili

$$\frac{2xdx}{a^2} + \frac{2ydy}{b^2} = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x} = -\frac{dx}{dy} \quad (1.37)$$

Iz matematike je poznato:

$$\tan \varphi = -\frac{dx}{dy} = \tan(90 + \varphi) = -\cot \varphi, \quad \text{odnosno} \quad (1.38)$$

$$\tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}; \quad \text{ili} \quad a^4 y^2 \cos^2 \varphi = b^4 x^2 \sin^2 \varphi \quad (1.38a)$$

Iz jednačine (1.36) dobijamo:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (1.39)$$

Rešavanjem sistema jednačina (1.38a) i (1.39) dobićemo:

$$x = \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}; \quad y = \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.40)$$

Ako jednačine (1.40) podelimo se a i u dobijeni rezultat zamenimo vrednosti (1.28) dobićemo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ y &= \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (1.40a)$$

Imajući u vidu (1.33), (1.34) i (1.35) dobijamo novi oblik (1.40)

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{W} \cos \varphi = \frac{c}{V} \cos \varphi \\ y &= \frac{a(1 - e^2)}{W} \sin \varphi = \frac{c(1 - e^2)}{V} \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.41)$$

Jednačine (1.41) predstavljaju parametarske jednačine meridijanske elipse, gde je kao parametar geografska širina φ .

1.4.9.2. Veza između pravougljih koordinata x, y u ravni meridijana i redukovane širine

Jednačina meridijanske elipse koja prolazi kroz tačku T (sl.1.7), je,

$$\frac{x_e^2}{a^2} + \frac{y_e^2}{b^2} = 1$$

a za tačku T na krugu, jednačina je:

$$x_k^2 + y_k^2 = R^2 \quad (1.42)$$

Za slučaj da je $R = a$; $x_e = x_k$ imamo:

$$\frac{y_e}{y_k} = \frac{b}{a} \quad y_e = \frac{b}{a} y_k \quad (1.43)$$

Iz slike 1.7 imamo sledeće odnose:

$$x_e = a \cos u \quad \text{i} \quad y_k = a \sin u \quad (1.44)$$

Ako (1.44) uvrstimo u (1.43) za x, y , se dobija

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u \end{aligned} \quad (1.45)$$

Jednačine (1.45) predstavljaju parametarske jednačine meridijanske elipse, gde je parametar redukovana širina u , i gde su za opšti slučaj izostavljeni indeksi e i k .

1.4.9.3. Veza između pravougljih koordinata x, y u ravni meridijana i geocentrične širine

Iz slike 1.11 vidimo da je,

$$x = r \cos \psi \quad \text{i} \quad y = r \sin \psi \quad (1.46)$$

gde je r -radijus vektor tačke M .

Ako sada u jednačini elipse (1.36) zamenimo vrednosti iz (1.46) i (1.28) dobićemo:

$$\frac{r^2}{a^2(1-e^2)} [(\cos^2 \psi(1-e^2) + \sin^2 \psi)] = \frac{r^2}{a^2(1-e^2)} (1 - e^2 \cos^2 \psi) = 1$$

odakle se dobija

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}}$$

Iz (1.46) dobijamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cos \psi \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}} \\ y &= \frac{a \sin \psi \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Jednačine (1.47) predstavljaju koordinate x i y , u funkciji geocentrične širine.

1.4.9.4. Zavisnost između geografskih koordinata i redukovane širine

Iz (1.41) i (1.45) dobijamo:

$$\begin{aligned}\sin u &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{W} \sin \varphi \\ \cos u &= \frac{\cos \varphi}{W} \\ \tan u &= \sqrt{1-e^2} \tan \varphi\end{aligned}\quad (1.48)$$

Ako u (1.48) zamenimo vrednosti iz (1.34), dobija se:

$$\begin{aligned}\sin u &= \frac{\sin \varphi}{V} \\ \cos u &= \frac{\sqrt{1+e'^2}}{V} \cos \varphi \\ \tan u &= \frac{1}{\sqrt{1+e'^2}} \tan \varphi\end{aligned}\quad (1.49)$$

Razlika između geografske širine φ i redukovane širine u , je ispod $6'$ i izražava se jednačinom:

$$(\varphi - u)'' = \rho'' \left(u \sin 2\varphi - \frac{u^2}{2} \sin^4 \varphi + \frac{u^3}{3} \sin 6\varphi - \frac{u^4}{4} \sin 8\varphi \right) \quad (1.50)$$

gde je: $u = \frac{a-b}{a+b}$

1.4.9.5. Zavisnost između geografske i geocentrične širine

Iz jednačine (1.46) i (sl.1.7) dobijamo sledeći odnos:

$$\tan \psi = \frac{y}{x} \quad (1.51)$$

odnosno $\frac{y}{x} = (1-e^2) \tan \varphi$, tada se dobija

$$\tan \psi = (1-e^2) \tan \varphi \quad (1.52)$$

Razlika između φ i ψ je mala i ne prelazi $12''$, zato se može pretstaviti u red pomoću Ojlerovih obrazaca:

$$(\varphi - \psi)'' = \rho'' \left(m \sin 2\varphi - \frac{m^2}{2} \sin^4 \varphi + \frac{m^3}{3} \sin 6\varphi - \frac{m^4}{4} \sin 8\varphi \dots \right) \quad (1.53)$$

gde je $m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

1.4.9.6. Radijusvektor r kao funkcija širine φ i kao funkcija širina φ i ψ

Zbog komplikovanog izvoda formule dajemo bez izvođenja:
zavisnost od širine φ ,

$$r = a\left(1 - \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{4}e^4 \sin^2 \varphi - \frac{5}{8}e^4 \sin^4 \varphi + \dots\right) \quad (1.54)$$

Zavisnost od geografske i geocentrične širine:

$$r = \frac{a \cos \varphi}{W \cos \psi} \quad (1.55)$$

1.4.9.7. Veza između pravougljih prostornih koordinata XYZ i koordinata drugih sistema

Neka je u centru elipsoida O početak prostornog koordinatnog sistema XYZ (sl.1.8). Označimo sa λ geografsku dužinu tačke M , odnosno ugao koga zaklapaju ravni početnog meridijana G , i ravan meridijana tačke M . Na toj tački, geografska dužina λ , definiše položaj meridijanske elipse, u čijem se centru O nalazi početak pravouglog koordinatnog sistema x, y (sl.1.8). Veze između koordinatnih sistema, pretstavice ćemo konačnim formulama:

1. Veza između prostornih koordinata XYZ i ravnih koordinata xy korišćenjem geografsku dužinu,

$$\begin{aligned} X &= x \cos \lambda \\ Y &= x \sin \lambda \\ Z &= y \end{aligned} \quad (1.56)$$

Jednačine (1.56) predstavljaju prostorne pravougule koordinate. Ravne koordinate xy , čiji je koordinatni početak u centru meridijanske elipse (sl.1.8), dobijaju se preko sledećih formule:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ y &= Z \end{aligned} \quad (1.57)$$

2. Veza između XYZ i redukovane širine u

$$\begin{aligned} X &= a \cos u \cos \lambda \\ Y &= a \cos u \sin \lambda \\ Z &= b \sin u = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \end{aligned} \quad (1.58)$$

3. Veza između XYZ i geocentrične širine

$$\begin{aligned}X &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}} \cos\psi \cos\lambda \\Y &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}} \cos\psi \sin\lambda \\Z &= \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\psi}} \sin\psi\end{aligned}\tag{1.59}$$

4. Veza između XYZ i geografske širine

$$\begin{aligned}X &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cos\varphi \cos\lambda \\Y &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cos\varphi \sin\lambda \\Z &= \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \sin\varphi\end{aligned}\tag{1.60}$$

Poluprečnici krivina

2.1. Opšti pojmovi

Kroz normalu neke tačke T na površini elipsoida može se položiti beskonačno mnogo ravni. Svaka od ovih ravni seče elipsoid po nekoj krivoj liniji koja se zove normalni presek. Svaki drugi presek površi elipsoida sa ravni koja ne prolazi kroz normalu nazivaju se kosi presek. Između bezbroj normalnih preseka postoje dva koji se zovu glavni normalni preseci. Jedan od glavnih normalnih preseka obrazovan je onom ravni u kojoj leži mala osa elipse i naziva se *presek po meridijanu*.

Drugi normalni presek obrazovan je onom ravni koja je upravna na ravan meridijana i zove se *poprečni normalni presek* ili *presek po prvom vertikalu*.

Karakteristična osobina normalnih preseka je ta da jedan od njih (po meridijanu) ima najveću, a drugi (po prvom vertikalu) najmanju krivinu. Za izračunavanje vrednosti dužina lukova u višoj geodeziji neophodni su poluprečnici krivina normalnih preseka. Pošto su normalni preseci krive linije, koje imaju svoj poluprečnik i zakrivljenost, to je za njihovo razmatranje potrebno da se potsetimo znanja iz više matematike.

Neka je zadata kriva $y = y(x)$ (sl.2.1). Količnik $\frac{d\varphi}{ds}$ naziva se srednja krivina luka TT_1 .

Granična vrednost srednje krivine zove se krivina odnosno krive,

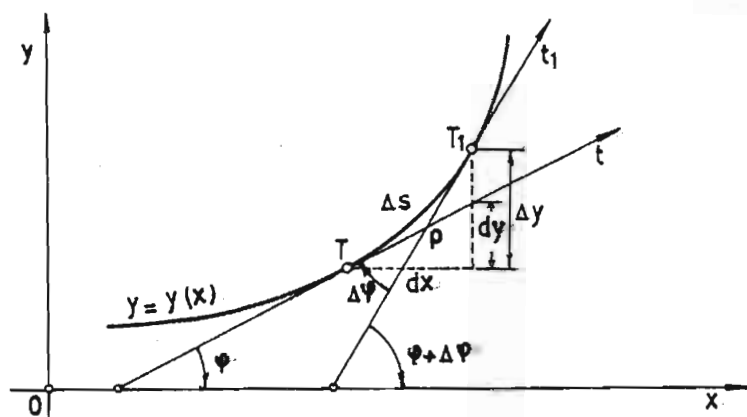
$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.1)$$

Recipročna vrednost krivine krive je poluprečnik krive,

$$\rho = \frac{1}{K} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi} \quad (2.2)$$

Jasno je da treba odrediti $d\varphi$ i ds : $y'(x) = \tan \varphi$; $\varphi = \arctan y'(x)$

$$d\varphi = \frac{1}{1+y'^2(x)} d[y'(x)] = \frac{1}{1+y'^2(x)} \cdot y''(x) dx = \frac{y''(x)}{1+y'^2(x)} dx \quad (2.3)$$



Sl.2.1. Krivina krive

Za beskonačno mali linearni element luka dobijamo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Znamo da je $dy = y'(x)dx$, onda je:

$$ds^2 = dx^2 + y'^2(x)dx^2 = dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)$$

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx^2; \quad \frac{dy}{dx} = y'(x) = \tan \varphi$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (2.4)$$

Ako uvedemo (2.3) i (2.4) u (2.2) dobijamo za krivinu i poluprečnik krivine,

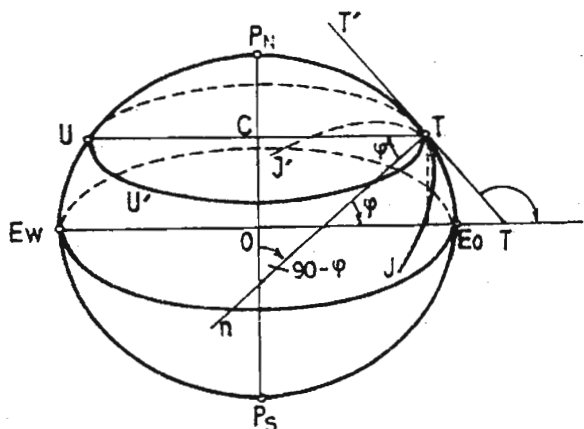
$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{y''(x) dx}{[1 + y'^2(x)]^{3/2}}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{dy^2}{dx^2}} \quad (2.5)$$

Ove matematičke postavke treba primeniti konkretnom problemu izračunavanja poluprečnika krivina normalnih preseka.

2.2. Poluprečnik krivine meridijana

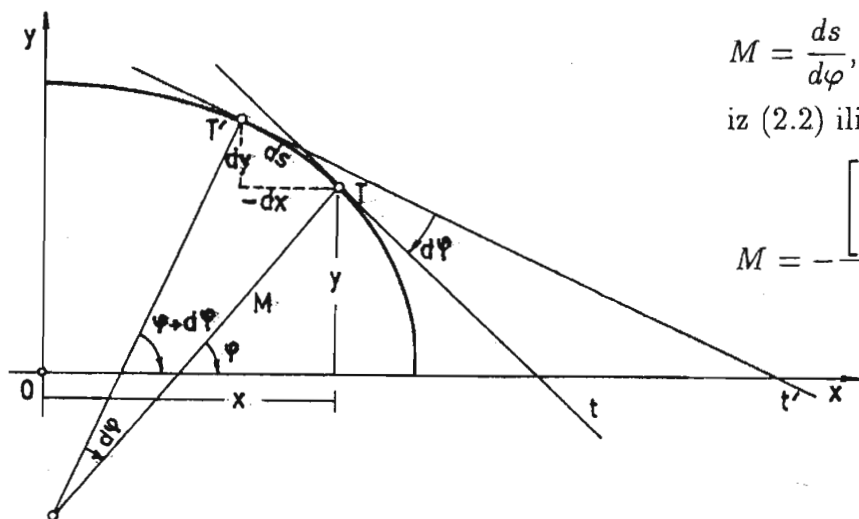
Normalni presek po meridijanu pretstavljen je na slici 2.2, elipsom $P_N T E_O P_S$ $E_W P_N$, a normalni presek po prvom vertikalu pretstavljen je (sl.2.2) krivom $J' T J$.



Sl.2.2.

Normalni preseki

Postavlja se zadatak izračunavanja poluprečnika krivine luka meridijana u tački T . Označimo poluprečnik krivine luka meridijana u tački T sa M (sl.2.3), i primenimo prethodna izvođenja za poluprečnik krivine. Tada dobijamo za poluprečnik krivine glavnog preseka po meridijanu:



Sl.2.3. Poluprečnik krivine glavnog preseka po meridijanu

Znak minus dolazi jer je $\frac{dy}{dx} = -\cot \varphi$ (vidi 1.38)

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.7)$$

$\frac{d\varphi}{dx}$, određuje se iz formule (1.40), tada za x dobijamo:

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} a \cos \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

Ako prethodnu jednačinu diferenciramo po geografskoj širini, biće:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a \sin \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} (1 - e^2) \quad (2.8)$$

Iz jednačine (2.4) dobija se da je $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, a imajući u vidu (1.38)

dobija se za $\frac{ds}{dx}$:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \cot^2 \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (2.9)$$

Za poluprečnik krivine glavnog normalnog preseka po meridijanu, dobija se:

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{K} &= \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{ds}{d\varphi} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ili

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3} \quad (2.11)$$

2.3. Poluprečnik krivine po prvom vertikalu

Na površi elipsoida kroz tačku T , odnosno normale T_n položimo ravan upravnu na meridijan. Presek elipsoida sa ovom ravni je normalni presek po prvom vertikalu $J'TJ$ (sl.2.2).

Ako položimo kroz tačku T drugu ravan, upravnu na obrtnu osu elipsoida $P_N P_S$, dobija se kosi presek (paralela $Tu'u$ (sl.2.2)). Iz slike 2.2. vidi se da je ugao uTT' pravi ugao i daje tangenta TT' zajednička tangenta za kosi presek i za normalan presek po prvom vertikalu $J'TJ$. Ugao CTu jednak je širini tačke T , odnosno $CTu = \varphi$. Pošto je CT apcisa tače T , to prema teoriji Menjea o kosim normalnim presecima možemo pisati

$$CT = x = T_n \cos \varphi = N \cos \varphi \quad (2.12)$$

gde je $T_n = N$, poluprečnik krivine po prvom vertikalu. Ako se x iz (2.12) zameni sa (1.40) ili sa (1.41) dobija se za poluprečnik krivine normalnog preseka po prvom vertikalu:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V} \quad (2.13)$$

Stavimo da je $CT = R$, dobijamo za poluprečnik R paralele:

$$R = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{W} = \frac{c \cos \varphi}{V} \quad (2.14)$$

Iz (2.12) sledi da je

$$N = \frac{x}{\cos \varphi}, \quad \text{odnosno} \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2.15)$$

Iz (2.15) i (2.13) sledi da je poluprečnik krivine po prvom vertikalalu N jednak dužini normale u tački T .

$$T_n = \frac{CT}{\cos \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{R}{\cos \varphi} = N$$

2.4. Karakteristike poluprečnika krivina glavnih normalnih preseka

$$\begin{aligned} 1. \text{ Za } \varphi = 0^0 & \quad M_\varphi = a(1 - e^2) = \frac{b^2}{a} \\ \varphi = 90^0 & \quad M_\varphi = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b} = c \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Za } \varphi = 0^0 & \quad N = a \\ \varphi = 90^0 & \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b} = c \end{aligned} \quad (2.17)$$

Može se zaključiti:

1. Poluprečnik krivine meridijana na ekvatoru ima najmanju vrednost, a najveću na polu.
2. Poluprečnik krivine po prvom vertikalalu ima najmanju vrednost na ekvatoru, najveću na polu.

2.5. Srednji poluprečnik krivine

Kod rešavanja zadatka iz više geodezije, koji se odnose na računanje elemenata i koordinata tačaka trigonometrijskih mreža, često se deo površi elipsoida zamenjuje sa površi lopte čiji je poluprečnik tz , srednji poluprečnik krivine koji omogućuje jednostavnija sferna računanja umesto komplikovanja elipsoidna računanja.

Srednji poluprečnik krivine r je aritmetička sredina svih normalnih preseka koji se mogu položiti kroz proizvoljnu tačku T na površi elipsoida.

Označimo sa r_α poluprečnik krivine normalnog preseka u proizvoljnom azimutu. Formula za izračunavanje poluprečnika r_α , krivine normalnog preseka u proizvoljnom pravcu, kada su poznati M i N dat je Ojler,

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad \text{ili} \quad r_\alpha = \frac{MN}{N \cos^2 \alpha + M \sin^2 \alpha} \quad (2.18)$$

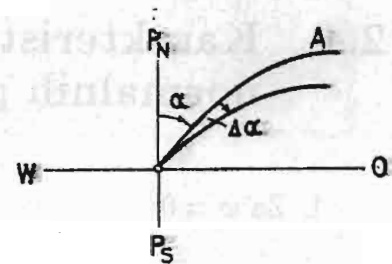
Prema definiciji srednjeg poluprečnika proilazi da je

$$r = r_\alpha$$

Srednja vrednost prethodne funkcije može se izračunati integralom,

$$r = \frac{1}{b-a} \int_a^b r_\alpha d\alpha$$

gde je interval a, b od 0^0 do 2π (sl.2.4), odnosno uzima vrednosti $0, \Delta\alpha, 2\Delta\alpha, \dots, 2\pi - 2\alpha$, pri čemu je $\Delta\alpha$ mala veličina.



Sl.2.4. Promena ugla

Tada je:

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{MN}{N \cos^2 \alpha + M \sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \frac{\pi}{2}$$

odnosno definitivni obrazac za srednji poluprečnik krivine je,

$$r = \sqrt{MN} \quad \text{ili} \quad r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2} = \frac{b}{W^2} = \frac{c}{V^2}$$

Prema tome srednji poluprečnik je geometrijska sredina poluprečnika krive po meridijanu i prvom vertikalu.

Dužine lukova

Kod računanja pravougljih kordinata x, y , geografskih kordinata φ, λ , potrebno je znati dužinu luka meridijana od ekvatora do paralele sa širinom φ . Ponekad je potrebno znati dužinu luka meridijana od paralele φ_2 do paralele φ_1 . Od interesa za rudarstvo je izračunavanje dužine luka meridijana od ekvatora do paralele sa širinom φ .

3.1. Dužina luka meridijana od ekvatora do paralele sa širinom φ

Označimo sa $d\varphi$ razliku širina dveju beskonačno bliskih tačaka po meridijanu, a odsečak luka označimo sa $d\bar{X}$ ili sa ds . Na osnovu formule /2.2/ možemo dati formulu za izračunavanje elementarnog dela odsečka luka,

$$d\bar{X} = M d\varphi = ds \quad (3.1)$$

Dužina luka meridijana od ekvatora $\varphi = 0$ do tačke na meridijanu sa širinom φ biće:

$$\bar{X} = \int_0^\varphi M d\varphi = S \quad (3.2)$$

Ako u (3.2) zamenimo vrednost za $M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}}$ dobijamo konačnu

formulu za \bar{X} odnosno S :

$$S = \bar{X} = \int_0^\varphi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi = a(1-e^2) \cdot \left(A \frac{\varphi^0}{\rho^0} - \frac{1}{2} B \sin 2\varphi + \frac{1}{4} C \sin 4\varphi - \frac{1}{6} D \sin 6\varphi + \frac{1}{8} E \sin 8\varphi - \frac{1}{10} F \sin 10\varphi \dots \right)$$

Uvedemo oznake u formuli (3.3) : (3.3.)

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{Aa(1-e^2)}{\rho^0}; & \delta &= \frac{1}{6}Da(1-e^2); \\ \beta &= \frac{1}{2}Ba(1-e^2); & \varepsilon &= \frac{1}{3}Ea(1-e^2); \\ \gamma &= \frac{1}{4}Ca(1-e^2); & \xi &= \frac{1}{10}a(1-e^2)\end{aligned}$$

Ove oznake mogu se odrediti ako funkciju $1/W^3$ razvijemo u red po binomnom obrascu, a pretstavljaju konstantne vrednosti za određeni elipsoid. Vrednosti ovih konstanata za Beselov elipsoid su:

$$\begin{aligned}\alpha &= 111\,120,61962; & \delta &= 0,021784772; \\ \beta &= 15\,988,63853; & \varepsilon &= 0,000030766; \\ \gamma &= 16,72995380; & \xi &= 0,000000044344\end{aligned}$$

Zamenom oznaka u formuli (3.3) dobija se konačna formula za dužinu luka meridijana od ekvatora do tačke sa širinom φ .

$$S = \bar{X} = \alpha\varphi^0 - \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi - \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi - \xi \sin 10\varphi \quad (3.4)$$

Kod praktičnog računanja dužine lukova se uzimaju iz tablica za argument \bar{X} . Međutim, danas se oni mogu računati direktno po formuli (korišćenjem računara). Dužina luka meridijana između paralele sa širinama φ_2 i φ_1 , može se izračunati kao razlika od širine φ_2 do φ_1 :

$$\begin{aligned}S_{\varphi_2-\varphi_1} &= \Delta\bar{X}_{\varphi_2-\varphi_1} = \alpha\Delta\varphi^0 - 2\beta \cos 2\varphi_m \sin \Delta\varphi + 2\gamma \cos 4\varphi_m \sin 2\Delta\varphi - \\ &= -2\delta \cos 6\varphi_m \sin 3\Delta\varphi + \dots\end{aligned} \quad (3.5)$$

gde su: $\varphi_m = \frac{(\varphi_2 + \varphi_1)}{2}$; $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Ako je $\varphi = 0$, po formuli (3.3) odnosno (3.4) može se sračunati, dužina četvrtine luka meridijana Q .

Četvrtina luka zemljinog meridijana

$$Q = a(1-e^2) \left[1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{176}{256}e^6 \right] \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

3.2. Dužina luka paralele

Dužina luka paralele između tačaka T i T_1 na elipsoidu, koje imaju koordinate (φ, λ) i (φ_1, λ_1) izračunava se kao dužina kružnog luka:

$$L = \frac{l_{u \text{ sec}}}{\rho''} R\varphi_1 \quad (3.7)$$

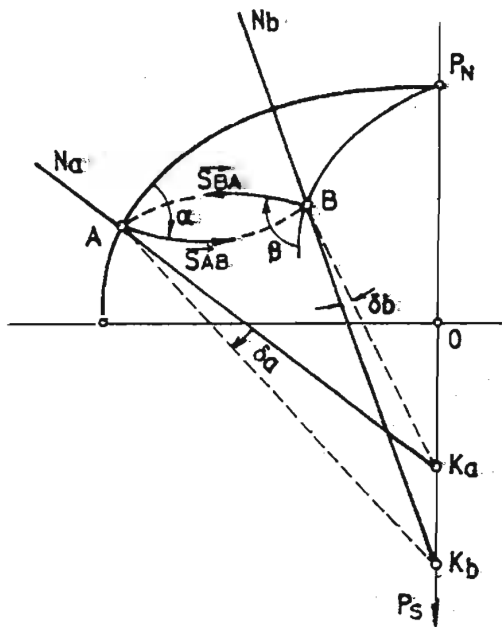
gde je $l_{u \text{ sec}} = (\lambda_2 - \lambda_1)$ u sekundama.

$$R\varphi_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{W} = \frac{c \cos \varphi}{V}$$

Dvojnost normalnih preseka i geodetska linija

Rudraskim i geološkim stručnjacima, nije potrebno detaljno poznavanje ove oblasti, sa komplikovanim formulama i izvođenjima. Razlog tome je što naši rudnici obuhvataju prostorno ograničene oblasti u preseku sa prečnikom od 5km, a samo izuzetno više. U ovim uslovima računanja na elipsoidu, lopti ili direktno na ravan, daće praktične beznačajne razlike. Zato ćemo ovu obalast, razmatrati samo globalnim pregledom materije.

Uzmimo dve stanične tačke na elipsoidu A i B , (sl.4.1), čije su koordinate različite, $\varphi_a \neq \varphi_b$ i $\lambda_a \neq \lambda_b$.



Oznake na slici su :

- N_a, N_b – normale na površi elipsoida u tačkama A i B ,
- K_a i K_b – preseki normala sa osom $P_N P_S$,
- S_{AB} – eliptična kriva, pravi normalni presek,
- S_{BA} – eliptična kriva, obrnuti normalni presek,
- α, β – azimuti u tačkama A i B ,
- δ – ugao u ravni meridijana stanične tačke, koga zaklapaju normala tačke i linija preseka meridijanske ravni i ravni koja prolazi kroz normalu druge tačke i stanične tačke.

Sl.4.1. Dvojnost normalnih preseka

Ako kroz normalu N_a i tačku B položimo ravan $AK_a B$, ona će seći elipsoid po

krivovj $S_{\overrightarrow{AB}}$ čiji je azimut α . Ravan položena kroz tačku A i normalu N_b , odnosno ravan BK_bA seći će elipsoid po krivovj $S_{\overrightarrow{BA}}$ čiji je azimut β . Jasno je da se krive $S_{\overrightarrow{AB}}$ i $S_{\overrightarrow{BA}}$ ne podudaraju, sem ako tačke A i B leže na istom meridijanu ili ako leže na istovj paraleli. Veličina razmimoilaženja normalnih preseka je veoma mala, pa se u mnogim praktičnim zadacima ne uzima u obzir, jer je daleko ispod tačnosti merenja. U mreži prvog reda vodimo računa o dvojnosti i zato se normalni preseci zamenjuju geodetskom linijom.

4.1. Geodetska linija

Normalne preseke zamenjujemo geodetskom linijom zbog njihove dvojnosti. Tada će geodetska linija predstavljati stranu trougla u mreži, odnosno u trigonometrijskoj mreži prvog i drugog reda.

Prva, karakteristična osobina geodetske linije je ta, da je ona najkraća linija koja se može povući između dve tačke na analitički određenoj površi.

Druga, karakteristična osobina geodetske linije na obrtnom elipsoidu je to, što je za svaku tačku ove linije proizvod iz sinusa azimuta i odstojanja odnosne tačke od obrtne ose konstantna veličina,

$$R \cdot \sin \alpha = \text{const} \quad (4.1)$$

gde je $R = N \cos \varphi$, odnosno

$$N \cos \varphi \sin \alpha = \text{const} \quad (4.2)$$

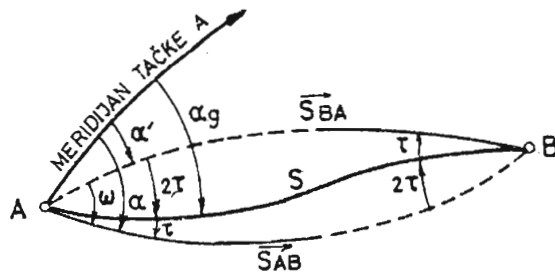
Jednačina (4.2) predstavlja drugo svojstvo geodetske linije koje je dokazao Kleron. Ako je azimut $\alpha = 0^\circ$ ili $\alpha = 180^\circ$, iz jednačine (4.2) proizilazi da su svi meridijani geodetske linije.

Ako je $\alpha = 90^\circ$ ili $\alpha = 270^\circ$, onda je $\sin \alpha = \pm 1$, a poluprečnik $R = a$ ili $R = -a$ tj, proizilazi da je ekvator geodetska linija. Paralele nisu geodetske linije.

4.2. Zamena normalnih preseka geodetskom linijom

Zbog dvojnosti, normalne preseke zamenjujemo geodetskom linijom (sl.4.2). Geodetska linija leži između normalnih preseka.

Ugao ω koji međusobom zaklapaju normalni preseci, geodeska linija deli u odnosu 1:2. Iz sl.4.2 vidimo, da geodetska linija zaklapa sa normalnim presecima $S_{\overrightarrow{AB}}$ i $S_{\overrightarrow{BA}}$ uglove:

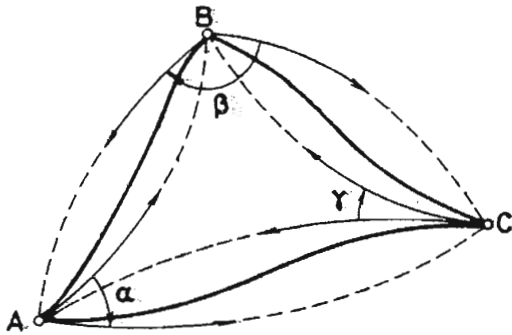


Sl.4.2. Zamena normalnih preseka geodetskom linijom

- Kod tačke A, sa presekom S_{AB} , ugao τ iznosi, $\tau = \frac{1}{3}\omega$
 Kod tačke A, sa presekom S_{BA} , ugao τ iznosi, $2\tau = \frac{2}{3}\omega$
 Kod tačke B, sa presekom S_{BA} , ugao τ iznosi, $\tau = \frac{1}{3}\omega$ (4.3)
 Kod tačke B, sa presekom S_{AB} , ugao τ iznosi, $2\tau = \frac{2}{3}\omega$

$$\omega'' = \frac{\rho''}{4} e^2 \left(\frac{S}{a} \right)^2 \cdot e^2 \varphi_m \cdot \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

Popravke τ , računaju se u hiljaditim delovima sekunde.



Sl.4.3. Trougao na elipsoidu

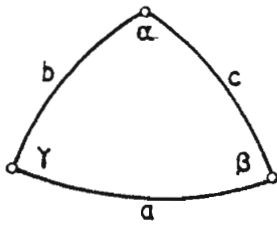
Neka su tačke A, B, C tačke na elipsoidu, odnosno tačke triangulacije između kojih su dobijeni pravi i obrnuti normalni preseki, onda su izmereni uglovi na pomenutim tačkama jednaki uglovima između tangenata pravih normalnih preseka (sl.4.3).

Nije teško videti da su usled neslaganja pravih i obrnutih normalnih preseka, ne zatvaraju trouglovi sa izmerenim uglovima na površi elipsoida (sl.4.3). Ovo neslaganje otklanjamo, ako povežemo temena tačaka u trouglu, geodetskim linijama, a zatim popravimo merene uglove, sa popravkama sračunatih po jednačinama (4.4) i (4.3). Na taj način dobićemo ispravljene vrednosti merenih uglova na elipsoidu.

4.3. Rešavanje sfernih trouglova

Usled male spljoštenosti Zemljinog elipsoida, razlika u elementima sfernih i elipsoidnih trouglova triangulacije, vrlo je mala, praktično u praksi zanemarljiva za dužine strana do 100 km. Zbog toga se u praksi računanje trouglova u triangulaciji svodi na rešavanje sfernih trouglova (sl.4.4).

U sfernom trouglu zbir uglova ne iznosi 180° , već se razlikuje za veličinu koju nazivamo sfernim ekcesom ili sfernim suviškom.



Prema tome,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + \varepsilon \quad (4.5)$$

Sferni ekces računa se po formuli:

$$\varepsilon = \frac{P}{r^2} \quad (4.6)$$

gde su : P —površina trougla, r —poluprečnik lopte

Sl.4.4. Sferni trougao

Rekli smo da je sferni ekces mala veličina, a u triangulaciji naše Zemlje (prvog reda) kod većine trouglova ne prelazi veličinu od $3''$. Zbog toga se može računati iz elemenata ravnih trouglova,

$$P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} \quad (4.7)$$

Zamenom (4.7) u (4.6) dobija se konačna formula za računanje sfernog ekcesa :

$$\varepsilon'' = \frac{\rho'' ab \sin \gamma}{2r^2} = \frac{\rho'' bc \sin \alpha}{2r^2} = \frac{\rho'' ac \sin \beta}{2r^2} \quad (4.8)$$

4.3.1. Rešavanje sfernih trouglova pomoću sfernog ekcesa – Ležanrova teorema

Neka je na slici 4.5 zadat sferni trougao koji se nalazi na lopti, prečnika r i njemu odgovarajući trougao u ravni čije su strane jednake stranama sfernog trougla. Postavlja se pitanje za koju veličinu se razlikuju uglovi u ravni od sfernih uglova.



Sl.4.5. Sferni i ravni trougao

Ako u sfernom trouglu poznajemo stranu $\frac{a}{r}$ i merene uglove α, β, γ , možemo sračunati strane $\frac{b}{r}$ i $\frac{c}{r}$;

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{b}{r} \right) &= \sin \left(\frac{a}{r} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\ \sin \left(\frac{c}{r} \right) &= \sin \left(\frac{a}{r} \right) \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (4.9)$$

U jednačinama (4.9), razlomci $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ i $\frac{c}{r}$ jesu centralni uglovi za strane a , b i c . Ovaj se postupak skoro nikad nije koristio, a kao razlog u literaturi se navodi "nepodesnost računanja sa logaritamskim tablicama", što danas nije slučaj kada imamo moćne kompjutere. Danas se uglavnom koriste: postupak sfernog ekcesa i način aditamenata. Krajem 18-tog veka Ležandar je predložio postupak, za rešavanje pomoću sfernog ekcesa, koji se zasniva na njegovoj teoriji, koja glasi: "Sferni trouglovi mogu se računati kao ravni, ako se prethodno svaki ugao u trouglu smanji za jednu trećinu sfernog ekcesa". Ova teorema je tačna do malih veličina trećeg stepena. Primenjujući je za rešavanje trouglova u trigonometrijskoj mreži 1. reda, u našoj Zemlji, dobijeni su rezultati koji su praktično identični sa rezultatima koji se dobijaju ako se koriste jednačine (4.9). Prema teoremi, ako su mereni sferni uglovi α , β i γ , onda će uglovi ravnog trougla biti:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \\ \beta_1 &= \beta - \frac{\varepsilon}{3} \\ \gamma_1 &= \gamma - \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}\tag{4.10}$$

Primenjujući teoremu Ležandra kod rešavanja elipsoidnih trouglova postupak je sledeći: elipsoidni trougao smatra se kao sferni, što znači da zamenjujemo površ elipsoida obuhvaćenu trouglom koji se računa, sa površi lopte, srednjeg poluprečnika $r = \sqrt{MN}$. Prema tome, ova računanja treba shvatiti kao jedan postupak za dobijanje vrednosti merenih uglova koja se koriste u daljim izračunavanjima.

Drugi način rešavanja sfernih trouglova je način aditamenata. Kod ovog načina sferni trougao zamenjuje se ravnim, suprotno od Ležandrove teoreme, uglovi ravnog trougla jednaki su uglovima sfernog trougla, a strane se razlikuju za male veličine poznate pod nazivom *aditamenata*.

Ovaj postupak predložen je 1820. godine, od strane nemačkog geodete Zoldnera. Prema ovom postupku (neće se izvoditi), strane ravnih trouglova dobijaju se:

$$\begin{aligned}a' &= a - \frac{a^3}{6r^2} \\ b' &= b - \frac{b^3}{6r^2} \\ c' &= c - \frac{c^3}{6r^2}\end{aligned}\tag{4.11}$$

Male veličine $\frac{a^3}{6r^2}$..., nazivaju se linearnim aditamentima, a označavaju se sa a_a , b_b i c_c . Definitivne dužine se računaju

$$a' = a - a_a; \quad b' = b - b_b$$

Ovim načinom mogu se računati trouglovi čije su strane do 10 km., odnosno u tom slučaju trouglovi se mogu smatrati ravnim.

Konformno preslikavanje elipsoida

Ovom poglavlju trebalo bi da prethodi poglavlje o rešavanju prvog i drugog glavnog geodetskog zadatka, odnosno izračunavanje geografskih koordinata tačaka na elipsoidu kada su poznati φ i λ početne tačke, azimut i dužina geodetske linije do tačke koja se računa. Obrnuto (drugi geodetski zadatak), kada su date geografske koordinate za dve tačke na elipsoidu, a treba sračunati azimut i dužinu geodetske linije između tih tačaka.

Rudarskim i geološkim stručnjacima nisu potrebna tolika znanja (nije u nastavnom programu), iz razloga što se koriste postojeće ravne koordinate x, y , koje postoje sa dovoljnom gustinom za celu našu Zemlju i na osnovu njih sračunavaju ostale potrebne geometrijske ili bilo koje druge elemente.

U ovom poglavlju, kratkim izlaganjem osvrnućemo se samo na one delove konformnog preslikavanja, koje je predviđeno nastavnim planom, a ne na celu teoriju konformnog preslikavanja. Iz tog razloga razmatraćemo pojedine delove, Gauss-Krigerove konformne projekcije, gde će biti reči i o konformnom preslikavanju elipsoida na ravan.

5.1. Uvodne napomene

Jedan od osnovnih zadataka geodezije je prikazivanje Zemljine površi na planu ili karti. Pri tome Zemlju smatramo rotacionim elipsoidom ili loptom. Kako su površi ovih tela zakrivljene (dvostruko), pa ih nemožemo razviti u ravan bez nabiranja i istežanja, to njihovo prikazivanje nije jednostavno. Proučavanje ovog problema pripada posebnoj grupi geodezije koju nazivamo kartografijom.

Ovde ćemo se osvrnuti samo na onaj deo kartografije koji proučava načine prikazivanja sa elipsoida na ravan, onih elemenata koji čine matematičku osnovu za izradu karata i planova. To su meridijani, paralele i tačke triangulacije čije se koordinate računaju na elipsoidu i u ravni.

Postoji beskonačno mnogo načina da se zamišljene linije i tačke triangulacije sa elipsoida prikažu u ravni, a svaki od tih načina zovemo kartografskom projekcijom. Lako je zaključiti da ne postoji takva projekcija, koja bi Zemljinu površ prikazala u ravni, a da međusobni odnosi tačaka na elipsoidu ostanu nepromenjeni, odnosno površ Zemlje nemože se prikazati u ravni bez deformacija. Pri tome dolazi do deformacija dužina, uglova i površina. Proučavajući načine prikazivanja površi Zemlje na ravan, došlo se do saznanja, da postoje mogućnosti, da neke od veličina (dužine, uglovi ili površine) ostanu nepromenjene.

Tako, danas postoje projekcije koje imaju neku od prethodnih osobina, pa se prema osobinama oni mogu podeliti na:

1. Konformne (istouglaone), zadržavaju jednakost uglova u prirodi i na karti.
2. Ekvivalentne (istopovršinske), zadržavaju jednakost površina u prirodi i na karti.
3. Proizvoljne, koje moraju zadovoljiti neke specijalne uslove, kao što su ekvidistantne projekcije, koje zadržavaju jednakost dužina samo u određenim pravcima.

Kod svih projekcija tačke se prenose ili direktno na ravan ili na neku površinu (jednostruko zakrivljenu), kao što su cilindar ili konus. Ako koristimo površinu cilindra na kojoj se vrši preslikavanje sa elipsoida, a zatim u ravan, onda kažemo da su to cilindrične projekcije, ili neke druge što zavisi od površi koju smo koristili.

Ako se osa cindra poklapa sa osom Zemlje imamo prave cilindrične projekcije, a ako se osa cilindra nalazi u ravni ekvatora, imamo poprečne cilindrične projekcije. Kada osa cilindra prodire u Zemlju, između pola i ekvatora imamo kose cilindrične projekcije (sl.5.1).

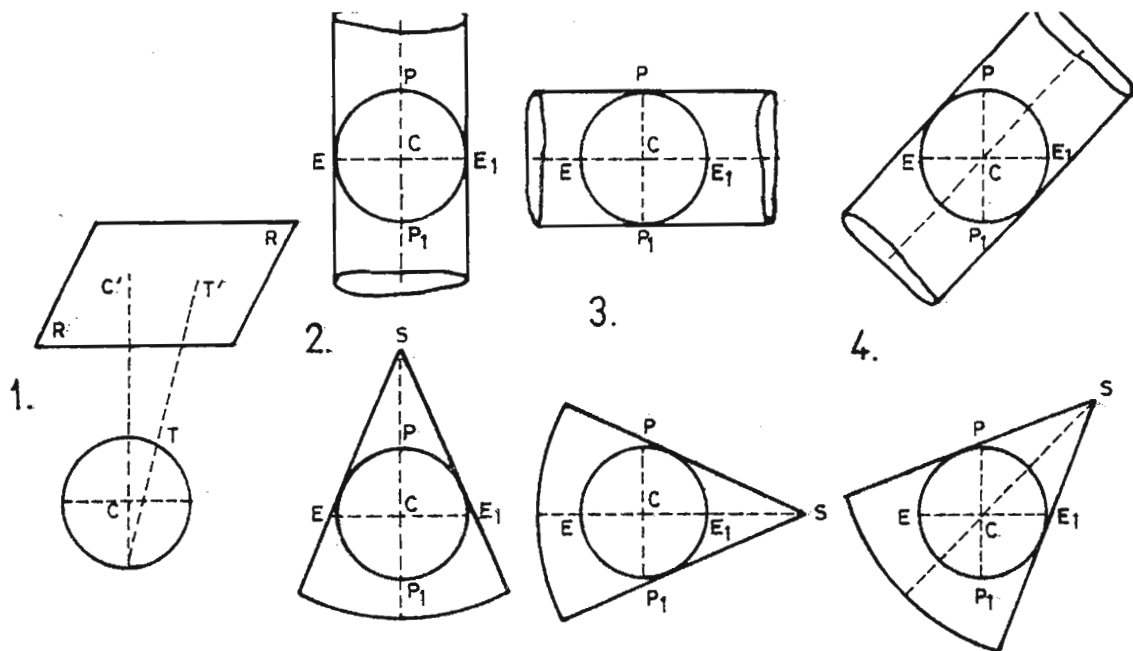
Od velikog broja danas poznatih projekcija, najčešće se primenjuje neka od konformnih, jer one pored osobina da zadržavaju jednakost uglova, oni imaju i vrlo malu deformaciju dužina.

Položaj neke tačke na Zemljinom elipsoidu određen je geografskim koordinatama φ i λ , dok je njen položaj u ravni određen pravouglim koordinatama x , y . Prema tome, zadatak svake projekcije je da tački čije su koordinate na elipsoidu φ i λ , nađe odgovarajuće koordinate u ravni, ili obrnuto.

Analitički to je definisano sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \quad (5.1)$$

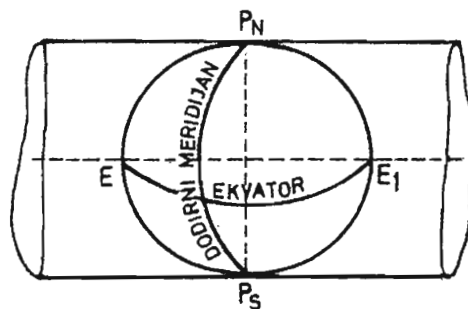
gde su f_1 i f_2 proizvoljne funkcije od čijeg oblika zavise osobine projekcije. Funkcije f_1 i f_2 mogu biti tako određene da projekcija bude, konformna, ekvivalentna ili sa nekim drugim osobinama. Među mnogo zaslužnih stvaralaca kartografije pomenimo, Merkatora, Lamberta, Tisoa i Gausa čijim se radovima i danas služimo.



Sl.5.1. 1-Neposredno projektovanje na ravan, 2-prave cilindrične i konusne projekcije, 3-Poprečne cilindrične i konusne projekcije, 4-kose cilindrične i konusne projekcije

5.2. Gaus-Kriggerova projekcija – računanje pravouglanih koordinata x y u ravni iz geografskih koordinata φ i λ

Gaus-Kriggerova projekcija je jedna od cilindričnih, kod koje zamišljamo da cilindar dodiruje Zemljin elipsoid po jednom meridijanu. Taj dodirni meridijan nazivamo Glavni ili srednji meridijan (sl.5.2).



5.2. Cilindrična projekcija

Tačke sa Zemljinog elipsoida, se preslikavaju na cilindar, odnosno nakon njegovog razvijanja u ravan. Tačke na elipsoidu određene, su geografskim koordinatama φ i λ , a tačke u ravni pravouglanim koordinatama x i y , zato se postavlja

kao osnovni zadatak iznalaženje formula za računanje jednih iz drugih koordinata i obrnuto.

Kao prvi i osnovni zadatak uzima se izračunavanje pravougljih koordinata u ravni x, y , kada su poznate geografske koordinate φ i λ . Tačke jedne matematički određene površi kao što je Zemljin elipsoid, preslikaće se na ravan i obrnuto ako postoje odnosi:

$$\text{ili} \quad \begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) & \varphi &= F_1(x, y) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) & \lambda &= F_2(x, y) \end{aligned} \quad (5.2)$$

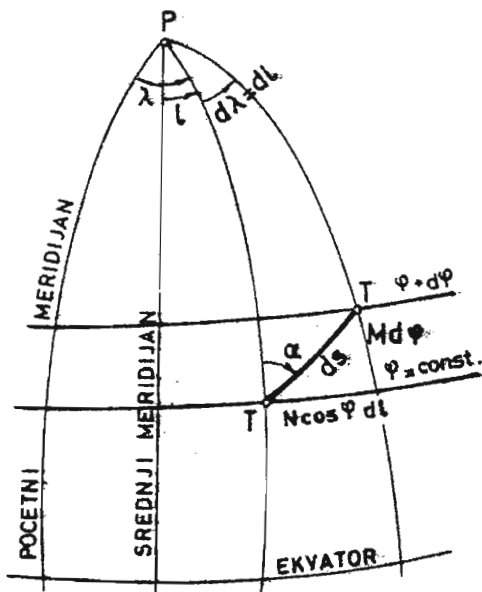
Osnovni je zadatak određivanje funkcija f_1 i f_2 , odnosno F_1 i F_2 . Ovde ćemo se zadržati na određivanje funkcija f_1 i f_2 izlaganjem koje neće obuhvatiti kompletno izvođenje formula.

Kod Gaus-krigerove projekcije određujemo funkcije f_1 i f_2 po uslovima koje karakterišu projekciju.

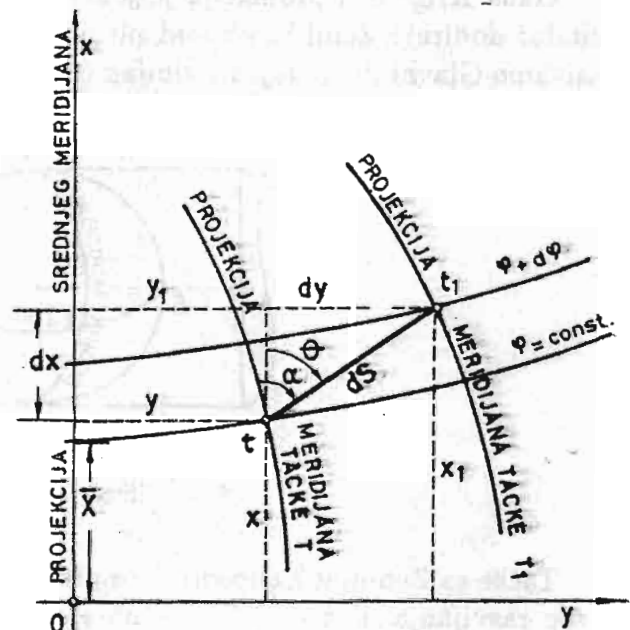
1. Projekcija za preslikavanje obrtnog elipsoida na ravan mora da bude konformna (istougla).
2. Glavni (srednji meridijan) mora se preslikati kao prava i predstavljati apcisu osu x , pravouglog koordinatnog sistema u ravni, obzirom na koju je projekcija simetrična.
3. Svaki deo x -ose mora biti jednak, delu luka meridijana, odnosno da se glavni meridijan preslikava u prirodnoj veličini, pri čemu je razmera na njemu jedinica.

Da bismo ispunili prvi uslov potražimo formulu za računanje razmere u nekoj tački pri preslikavanju elipsoida na ravan.

Uzmimo na elipsoidu dve beskonačno bliske tačke T i T_1 , spojene elementom ds geodetske linije (sl.5.3-1).



Sl.5.3-1. Element geodetske linije na elipsoidu



Sl.5.3-2. Element geodetske linije u ravni

Neka su koordinate tačke T , φ i λ , odnosno φ i $l = \lambda - \lambda_0$; λ_0 -srednji meridijan, i koordinate tačke $T_1(\varphi + d\varphi)$ i $(l + dl)$, pri čemu je $d\lambda = dl$.

U projekciji (u ravni) ovim tačkama odgovaraju tačke $t(x, y)$ i $t_1(x+dx, y+dy)$, spojene elementom dS geodetske linije u projekciji (sl.5.3-2).

Za razmeru u tački T možemo pisati:

$$m = \frac{dS}{ds} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{(M d\varphi)^2 + (N \cos \varphi dl)^2}} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{N \cos \varphi \sqrt{\left(\frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}\right)^2 + dl^2}} \quad (5.3)$$

gde je: $dq = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$

Ako jednačinu (5.3) kvadriramo dobija se za razmeru:

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + dl^2)} \quad (5.5)$$

Integralenjem jednačine (5.4) dobijamo veličinu q , koju nazivamo izometrijskom širinom, koja daje mogućnosti da imamo simetrične koordinate na lopti i na elipsoidu i koja se definiše kao funkcija geografske širine. Uvođenjem izometrijske širine mnoga se izvođenja kod Gauss-krigerove projekcije znatno skraćuju. tako se pravougla koordinate x, y u ravni, mogu izraziti kao funkcije izometrijske širine q i dužine l .

$$x = f_1(q, l) \quad y = f_2(q, l) \quad (5.6)$$

Ako razmeru izrazimo koordinatama q, l dobićemo tačna izvođenja (koja ovde izostavljamo) diferencijalnih jednačina, koje moraju biti zadovoljene kod konformnih projekcija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial l} &= \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial y}{\partial l} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Iz jednačine (5.7) može se dobiti:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 \right]}{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2} \quad (5.8)$$

Daljim izvođenjem dobijaju se diferencijalne jednačine koje moraju biti zadovoljene, za konformno preslikavanje elipsoida na ravan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} = \frac{\partial y}{\partial q} \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial x}{\partial l} = -\frac{\partial y}{\partial q} \quad \text{i} \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial l} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Jednačine (5.9) koje predstavljaju uslove preslikavanja, nazivaju se Koši-Rimanove (Cauchy-Riemann) diferencijalne jednačine.

Uslov konformnosti može se izraziti i na drugi način, koji je možda i jednostavniji, polazeći opet od razmere,

$$m^2 = \frac{(dx + idy)(dy - idy)}{N \cos^2 \varphi (dq + idl)' dq - idl} \quad (5.10)$$

Razmere kod konformnih projekcija u nekoj tački u svim smerovima ne sme zavisiti od azimuta α linearnog elementa ds , zato mora da postoji takva deljivost (5.10), da u rezultatu ne figurišu diferencijalne veličine, dx, dy, dq i dl . Da bi postojala ova deljivost mora da bude zadovoljena jednačina:

$$x + iy = f(q + il) \quad (5.11)$$

Prema tome, da bi se elipsoid, odnosno jedna njegova tačka čije su koordinate $q(\varphi)$ i l , konformno preslikala na ravan, nužno je i dovoljno da bude zadovoljena jednačina (5.11). Funkcija f iz (5.11) može se odrediti kod Gauss-Kriggerove projekcije prema drugom i trećem uslovu, za $l = 0$ i $y = 0$, odnosno:

$$\begin{aligned} x = f(q) &= \bar{X} \\ l &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Tada je apcisa X jednaka dužini luka meridijana $\bar{X} = \int_0^\varphi M d\varphi$. Zbog toga što je širina pojasa preslikavanja mala veličina $\pm 1.5^0$ od srednjeg meridijana, onda možemo desnu stranu jednačine (5.4) razviti u Tejlorov red po stepenima od (il) .

$$x + iy = f(q) + (il) \frac{df(q)}{dq} + \frac{(il)^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{(il)^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \dots$$

Za postojanje ove jednačine potrebno je da realni i imaginarni deo leve i desne strane budu jednaki:

$$\begin{aligned} x &= f(q) - \frac{l^2}{2} \frac{d^2 f(q)}{dq^2} + \frac{l^4}{4} \frac{d^4 f(q)}{dq^4} - \frac{l^6}{720} \frac{d^6 f(q)}{dq^6} + \dots \\ y &= l \frac{df(q)}{dq} - \frac{l^3}{6} \frac{d^3 f(q)}{dq^3} + \frac{l^5}{120} \frac{d^5 f(q)}{dq^5} + \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

Jednačine (5.13) su osnovne jednačine Gauss-Kriggerove projekcije i one nam daju vezu između geografskih koordinata $\varphi(q)$ u l na elipsoidu i pravougljih koordinata x i y u ravni. Ako nađemo izvode iz jednačine (5.13) i zamenimo ih u istoj jednačini, dobićemo jednačine za izračunavanje ravnih pravougljih koordinata x, y iz zadatih φ i λ :

$$\begin{aligned} x &= \bar{X} + \frac{l^2}{2} \frac{N}{\rho^2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{l^4}{24} \frac{N}{\rho^4} \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ &\quad + \frac{l^6}{720} \frac{N}{\rho^6} \sin \varphi \cos^5 \varphi (61 - 58t^2 + t^4) \end{aligned} \quad (5.14)$$

gde je: $t = \tan \varphi$; $\eta = e' \cos \varphi$

Prava TD i TB paralelne su sa x odnosno y osama. Tada ugao C obrazuju slika projekcije meridijana u tački T , odnosno tangente u tački T i paralele sa x -osom. Ovaj ugao je potreban za računanje direkcionog ugla θ :

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha - C \\ \alpha &= \theta + C \\ C &= \alpha - \theta\end{aligned}$$

Na osnovu Koši-Rimanovih jednačina možemo dobiti ugao C :

$$\tan C = \frac{\frac{\partial x}{\partial l}}{\frac{\partial y}{\partial l}}$$

Parcijalni izvodi određuju se iz (5.15) i posle sređivanja dobija se formula za računanje konvergencije meridijana:

$$C = l \sin \varphi + \frac{l^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^5}{15} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2) \dots$$

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned}C_1 &= \sin \varphi, \\ C_3 &= \frac{1}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4), \\ C_5 &= \frac{1}{15} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2)\end{aligned} \quad (5.16)$$

Dobijamo za konvergenciju meridijana:

$$C = C_1 l + C_3 l^3 + C_5 l^5$$

5.4. Računanje geografskih koordinata φ i λ iz pravougljih koordinata x y

Za rešavanje ovog zadatka poćićemo od opšteg uslova konformnosti (5.11) koji analitički izražen glasi:

$$x + iy = f(q + il)$$

gde je f proizvoljna funkcija.

Ova jednačina može se napisati i u sledećem obliku:

$$q + il = F(x + iy) \quad (5.17)$$

gde je F inverzna funkcija funkcije f .

Primenom Tejlorovog reda na funkciju (5.17) dobijamo:

$$q + il = F(x + iy) = F(x) + iyF'(x) - \frac{y^2}{2}F''(x) - \frac{iy^3}{6}F'''(x) + \frac{y^4}{24}F^{iv}(x) + \dots \quad (5.18)$$

$$q - il = F(x - iy) = F(x) - iyF'(x) - \frac{y^2}{2}F''(x) + \frac{iy^3}{6}F'''(x) + \frac{y^4}{24}F^{iv}(x) + \dots$$

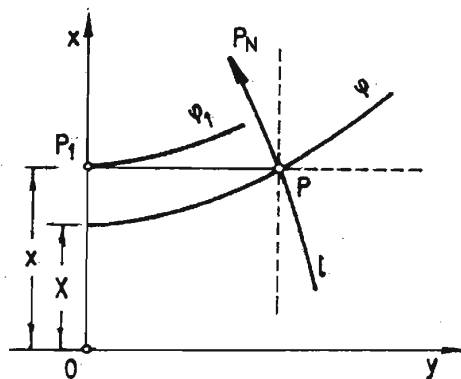
Iz poluzbira i polurazlike (5.18) dobija se:

$$q = F(x) - \frac{y^2}{2}F''(x) + \frac{y^4}{24}F^{iv}(x) \dots$$

$$l = yF'(x) - \frac{y^3}{6}F'''(x) \quad (5.19)$$

Jednačine (5.19) proizilaze iz uslova konformnosti preslikavanja elipsoida na ravan.

Na slici 5.5. zadate su ravne koordinate xy tačke P . Apcisa tačke P određuje se pravom OP_1 , odnosno prema uslovima projekcije mora da bude jednaka dužini luka meridijana od ekvatora do širine φ_1 , tačke P_1 . Označimo njenu širinu sa φ_1 .



Sl.5.5. Računanje geografskih koordinata iz ravnih

Iz uslova projekcije sledi: za $y = 0$ i $l = 0$, odnosno jednačina (5.17) dobija sledeći oblik:

$$F(x) = q_1 \quad (5.20)$$

gde je q_1 funkcija širine φ_1 , a izračunava se iz tablica za dužinu luka meridijana. Imajući u vidu (5.20) za (5.19) možemo dati novi oblik:

$$q = q_1 - \frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2 q}{dx^2} \right)_1 + \frac{y^4}{24} \left(\frac{d^4 q}{dx^4} \right)_1$$

$$l = y \left(\frac{dq}{dx} \right)_1 - \frac{y^3}{6} \left(\frac{d^3 q}{dx^3} \right)_1 \quad (5.21)$$

Imajući u vidu (5.4) gde je

$$dq = \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} \quad \text{i} \quad q = \int \frac{m d\varphi}{N \cos \varphi}$$

možemo u opštem obliku dati formulu za širinu φ tačke P

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(q) = \varphi[q_1 + (q - q_1)] \\ \varphi_1 &= \varphi(q_1) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Primenom Tejlorovog reda na $(q - q_1)$, a na osnovu (5.21) dobijamo za širinu φ :

$$\varphi = \varphi_1 - \left[\frac{y^2}{2} \left(\frac{d^2 q}{dx^2} \right)_1 - \frac{y^4}{24} \left(\frac{d^4 q}{dx^4} \right)_1 \right] \frac{d\varphi}{dq} \quad (5.23)$$

pri čemu je uvek $\varphi_1 > \varphi$

Formule (5.19) i (5.23) daju opšte rešenje za izračunavanje geografskih koordinata iz ravnih pravougljih koordinata x i y . Ako sada odredimo izvode u (5.23) polazeći od (5.4) i zamenimo u (5.23) i (5.21) za dužinu l , dobijamo formulu za izračunavanje širine φ i dužine l tačke P :

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y^2}{2M_1 N_1} t_1 \rho'' \left[1 - \frac{y^2}{12N_1^2} (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) + \frac{y^4}{360N_1^4} (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) \right] \quad (5.24)$$

$$l'' = \frac{y}{N_1 \cos \varphi_1} \rho'' \left[1 - \frac{y^2}{6N_1^2} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) + \frac{y^4}{120N_1^4} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) \right]$$

Formula (5.24) je definitivna i ako se u njoj uvedu smene dobija se drugi oblik ove formule:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 - B_2 y^2 + B_4 y^4 + B_6 y^6 \\ l &= B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5 \end{aligned} \quad (5.25)$$

gde su:

$$\begin{aligned} B_2 &= -\frac{1}{2M_1 N_1} t_1, \\ B_4 &= \frac{1}{24M_1 N_1^3} t_1 (5 + 3t_1^2 + \eta_1^2 - 9\eta_1^2 t_1^2) \\ B_6 &= -\frac{1}{720M_1 N_1^5} t_1 (61 - 90t_1 + 45t_1^4) \\ B_1 &= \frac{1}{N_1 \cos \varphi_1} \\ B_3 &= -\frac{1}{6N_1^3 \cos \varphi_1} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \\ B_5 &= \frac{1}{120N_1^5} (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6\eta_1^2 + 8\eta_1^2 t_1^2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

5.5. Računanje konvergencije meridijana C u ravni iz pravougljih koordinata x i y

Na osnovu Koši-Rimanovih jednačina,

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\partial l}{\partial x}$$

možemo za tangens ugla C (konvergencija) dati formulu:

$$\tan C = \frac{\frac{\partial l}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial x}} = \frac{-\frac{\partial q}{\partial y}}{\frac{\partial l}{\partial y}} = -\frac{-\frac{\partial q}{\partial y}}{\frac{\partial l}{\partial y}} = \frac{\partial q}{\partial l} = \frac{\frac{\partial l}{\partial x}}{\frac{\partial l}{\partial y}}$$

Za dalje izvođenje koristimo formulu:

$$\tan C = \frac{-\frac{\partial q}{\partial y}}{\frac{\partial l}{\partial y}} \quad (5.27)$$

Parcijalne izvode u ovim jednačinama nalazimo iz jednačina (5.23) i (5.24), a primenom razvijanja u red, dobićemo za konvergenciju meridijana sledeću formulu:

$$\begin{aligned} C'' &= \rho'' \frac{t_1}{N_1} y - \rho'' \frac{t_1 y^3}{3N_1^3} (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4) + \rho'' \frac{t_1 y^5}{15N_1^5} (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) = \\ &= \frac{y}{N_1} \rho'' t_1 \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N_1^2} (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4) + \frac{y^4}{15N_1^4} (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) \right\} \quad (5.28) \end{aligned}$$

Formula (5.28) je definitivna, a ako se u njoj uvedu smene, dobija se njen drugi oblik:

$$C = c_1 y + c_3 y^3 + c_5 y^5 \quad (5.29)$$

gde su:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{t_1}{N_1} \rho'' \\ c_2 &= \frac{t_1}{3N_1^3} \rho'' (1 + t_1^2 - \eta_1^2 - 2\eta_1^4) \\ c_3 &= \frac{y^4}{15N_1^5} (2 + 5t_1^2 + 3t_1^4) \rho'' \end{aligned}$$

5.6. Pregled formula za računanje x , y i C , i geografskih koordinata φ i λ

5.6.1. Računanje x, y i C iz geografskih koordinata φ i λ

$$\begin{aligned} x &= \bar{X} + A_2 l^2 + A_4 l^4 + A_6 l^6 \\ y &= A_1 l + A_3 l^3 + A_5 l^5 \\ C &= c_1 l + c_3 l^3 + c_5 l^5 \end{aligned} \quad (5.30)$$

gde je $l = \lambda - \lambda_0$, udaljenost od srednjeg meridijana.

Prvo se računa dužina luka meridijana od ekvatora do širine φ_1 , po formuli (3.3):

$$L = \bar{X} = Q(1 - e^2) \left[A - \frac{\varphi^0}{\rho^0} - \frac{B}{2} \sin 2\varphi + \frac{C}{4} \sin^4 \varphi - \frac{D}{6} \sin 6\varphi \right]$$

Za korišćenje računara, a i lakšeg računanja, dajemo vrednosti za izračunate konstante koje se koriste kod Beselovog elipsoida:

$$\begin{aligned} A &= 1.05037306, \\ \frac{B}{2} &= 2.523924E - 03, \\ \frac{C}{4} &= 2.6409467E - 06, \\ \frac{D}{6} &= 3.438887E - 09, \\ (1 - e^2) &= 0.993325627769, \\ a &= 6377397.155, \\ e'^2 &= 0.006719218798, \\ t &= \tan \varphi, \\ \eta &= e' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Formula za izračunavanje konstanta $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, C_1, C_2, C_3$ date su jednačinama (5.15) i (5.16).

Iz ovih računanja dobijaju se vrednosti za y, x i C . Ove koordinate treba pomnožiti sa modulom razmere m_0 , a y koordinati dodati još 500 000 m i oznaku zone. Primer, neka su računanjem po prikazanim formulama dobijene vrednosti:

$$y = 65.098 \text{ km} \quad x = 4978\,545.354 \text{ km} \quad C = 0^\circ 22' 34'', 5651$$

Prikažimo ove vrednosti u državnom koordinatnom sistemu: $\bar{Y}=7\,565\,098.000$, $\bar{X}=4\,978\,545.354$, odnosno računanjem prema datim formulama dobijaju se neredukovane za modul razmere koordinate. Redukovane (smanjene za modul razmere) koordinate u državnom koordinatnom sistemu biće:

$$y = y \cdot m_0 + 500\,000.000 = y(1 - 0.0001) + 500\,000.000 = 65\,091.490 + 500\,000.000$$

$$y = 565\,091.4902 \text{ m}$$

$$x = x \cdot m_0 = 4\,978\,545.354 \cdot 0.9999 = 4\,978\,047.499 \text{ m}$$

Prema tome, ako su zadate neredukovane koordinate u državnom koordinatnom sistemu, redukovane računamo prema:

$$Y = (\bar{Y} - K) \cdot m_0 \quad X = \bar{X} \cdot m_0 \quad K=7\,500\,000.000 \quad Y = Y + 7\,500\,000.000$$

ili obrnuto, sračunavanje neredukovanih koordinata u državnom sistemu:

$$\bar{X} = \frac{X}{0.9999} = X + \frac{X}{10^4} + \frac{X}{10^8}$$

$$\bar{Y} = \frac{Y - K}{0.9999} = (Y - K) + \frac{(Y - K)}{10^4} + \frac{(Y - K)}{10^8}$$

$$Y = Y + 500\,000.000$$

Koordinatni početak meridijanskih zona preslikavanja ima koordinate (x, y) , odnosno po predlogu Baumgartnera (500 000), iz razloga da imamo uvek pozitivne koordinate za jedno polje preslikavanja. Zato se konstanta $K = 500\,000 \text{ m}$, zove Baumgartnerova konstanta.

5.6.2. Računanje geografskih koordinata φ, λ i C iz ravnih pravouglanih koordinata x, y

$$\varphi = \varphi_1 + B_2 y^2 + B_4 y^4 + B_6 y^6$$

$$l = B_1 y + B_3 y^3 + B_5 y^5$$

$$C = c_1 y + c_3 y^3 + c_5 y^5$$

Geografske koordinate računaju se po formulama (5.25) i (5.26), a konvergencija meridijana po formuli (5.29).

5.7. Računanje razmere iz pravougljih koordinata (x,y) , njeno smanjenje i praktičan značaj

Ne upuštajući se u izvođenje formule za razmeru, dajemo njen konačan oblik:

$$m = \frac{dS}{ds} = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{4R^2} \quad (5.31)$$

gde je R —srednji radijus zakrivljenosti.

Iz formule (5.31) može se zaključiti da je razmera na glavnom meridijanu jednaka $1 = m$, što proizilazi iz uslova projekcije. Takođe se može zaključiti da se samo ograničen deo Zemljine površi može preslikati na ravan u jednom koordinatnom sistemu sa nekom unapred određenom tačnošću. Zato uvek treba odrediti granicu do koje se razmera može razlikovati od 1, tada će ta granica određivati tačnost i veličinu teritorije preslikavanja.

Predviđena tačnost projekcije kod državnog premera je 1:10 000, što znači, da se razmera dužina može razlikovati za 0.0001 od jedinice, a što odgovara jednom desimetru na kilometar. Zato je u našoj zemlji smanjena razmera na celom području preslikavanja za 0.0001, tako da je modul razmere $m_0 = 0.9999$, odnosno područje preslikavanja može biti toliko veliko, da razmera na njegovom kraju ne bude veća od $1+0.0001$. Zato je na glavnom meridijanu uzeta razmera $m = 1 - 0.0001$, odnosno zbog toga je uzeta razmera na glavnom meridijanu $m = 0.9999$. Zato treba kod računanja pravougljih koordinata iz φ i λ , odnosno rezultate za x, y koji su na području preslikavanja gde je $m = 1$, prevesti na područje preslikavanja gde je $m_0 = 0.9999$, odnosno

$$\begin{aligned} x &= m_0 \bar{x} = (1 - 0.0001) \bar{X} = 0.9999 \bar{x} \\ y &= m_0 \bar{y} = (1 - 0.0001) \bar{y} = 0.9999 \bar{y} \end{aligned}$$

ili obrnuto

$$\bar{x} = \frac{x}{0.9999} = x + \frac{x}{10^4} + \frac{x}{10^8}; \quad \bar{y} = \frac{y}{0.9999} = y + \frac{y}{10^4} + \frac{y}{10^8} \quad (5.32)$$

Koordinate x, y zovu se redukovane koordinate, a koordinate \bar{x}, \bar{y} , su neredukovane. Ovako pretstavljene koordinate u svojim numeričkim vrednostima ne sadrže oznaku zone i Baumgartnerovu konstantu.

Smanjenjem razmere uveden je cilindar koji seče Zemlju, umesto cilindra koji dodiruje Zemlju po jednom meridijanu. Sekući cilindar, koji je povučen ispod površi Zemlje, seče je u tačkama, koje imaju dužinu 1, odnosno ordinatu y za koje je razmera jednaka 1.

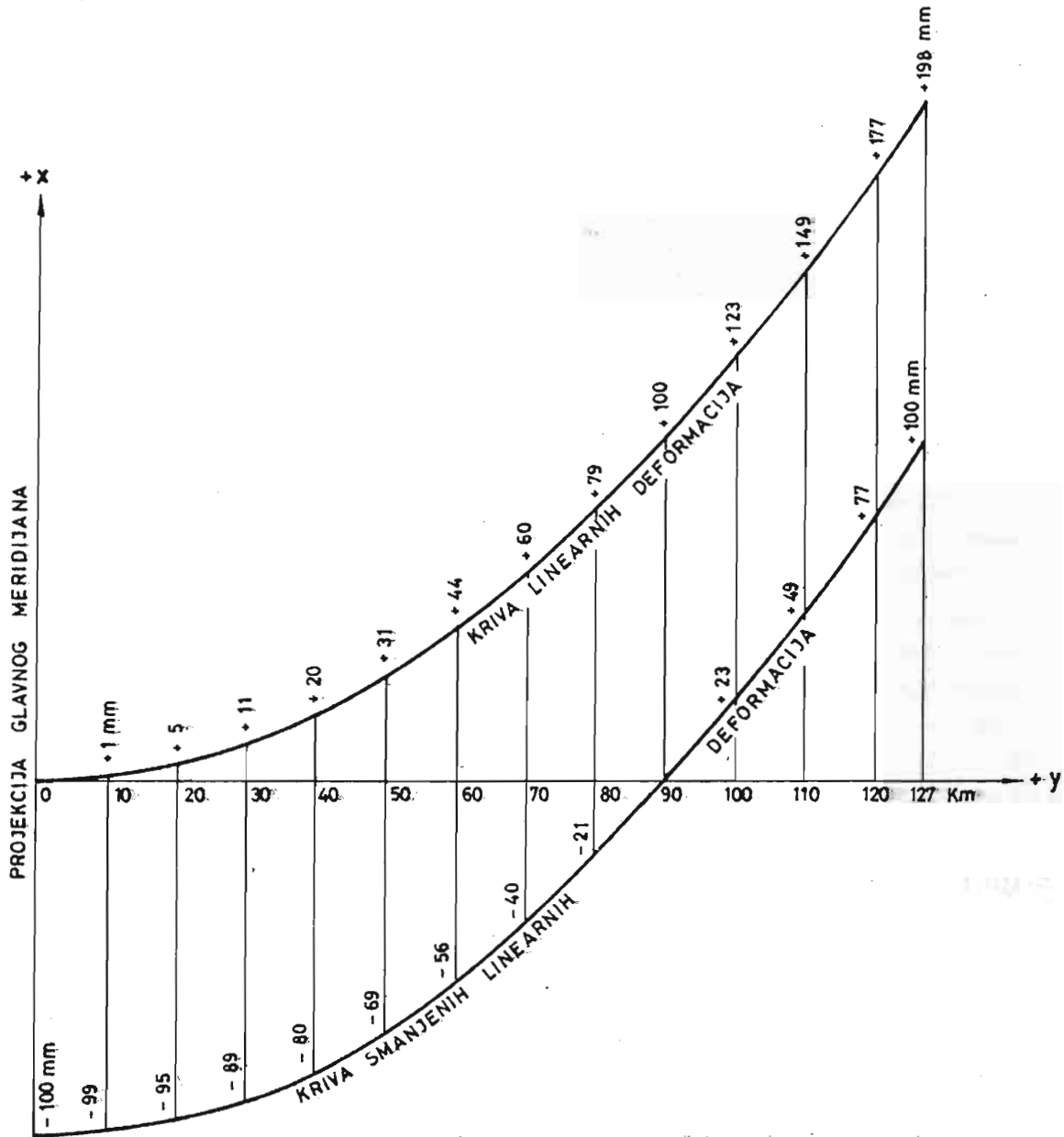
Područje preslikavanja za slučaj da je razmera na glavnom meridijanu $m = 1$, je,

$$l'' = \frac{\rho'' \sqrt{0.0002}}{\sqrt{1 + \eta^2 \cos \varphi}}$$

i iznosi na istok i na zapad od srednjeg meridijana $1^{\circ}03'$ ili 90 km. Područje preslikavanja kada je na glavnom meridijanu razmera $m_0 = 0.9999$ je,

$$l''' = \frac{0.02\rho''}{\sqrt{1 + \eta^2 \cos \varphi}}$$

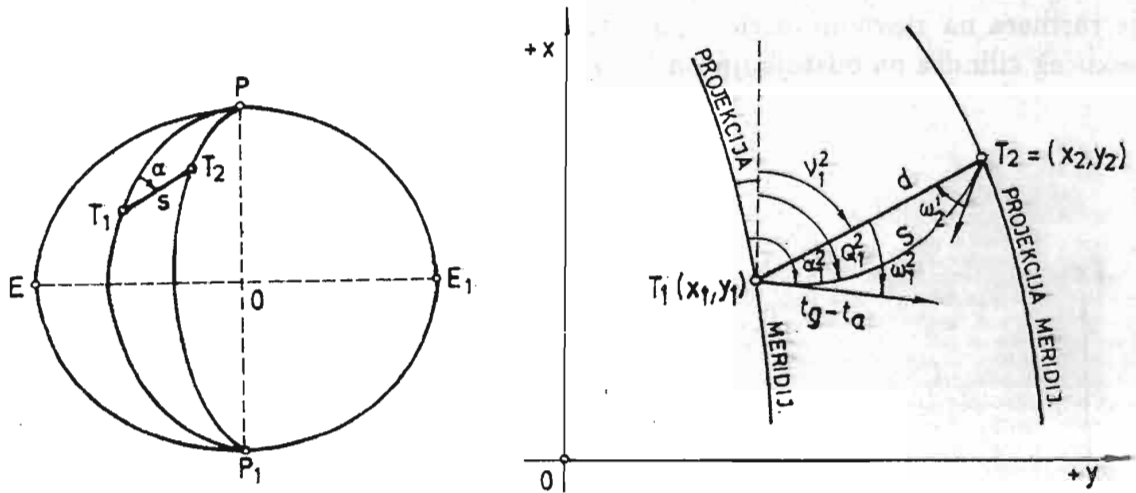
i iznosi $1^{\circ}5'$ istočno i zapadno od srednjeg meridijana ili 127 km, pri čemu deformacija nije veća od 0.0001. Grafička pretstava ovih zaključaka data je na slici 5.6. Na slici se vidi da je deformacija od 10 cm na kilometar jednaka do 90 km, kada je razmera na glavnom meridijanu $m = 1$, a da je ista deformacija od 10 cm kod sekućeg cilindra na odstojanju od 127 km.



Sl. 5.6. Krive deformacija

5.8. Redukcija dužina kod Gaus-Krigerove projekcije

Kod Gaus-Krigerove projekcije postoji deformacija dužina. Popravku zbog deformacije projekcije treba da se računa za sve dužine koje su prethodno svedene na nultu nivosku površ, a koje se koriste za tačnije radove ili u državnom premeru. Najkraće rastojanje na elipsoidu je geodetska linija s između tačaka T_1 i T_2 (sl.5.7).



Sl.5.7. Redukcija dužina

Njena slika u ravni je kriva S . Prema tome njena projekcija u ravni nije najkraće rastojanje između tačaka T_1 i T_2 . Najkraće rastojanje između tačaka T_1 i T_2 u ravni je tetiva d , koju koristimo za računanja u ravni.

Razliku između dužina geodetske linije s na elipsoidu i prave linije (tetine) d u ravni nazivamo redukcijom dužina. Ugao između projekcije geodetske linije S , odnosno njene tangente i tetive d nazivamo redukcijom pravaca. Razlika između dužine projekcije geodetske linije S i tetive d je veoma mala, odnosno javlja se u članovima većim od 4-og stepena. Imajući to u vidu, možemo postaviti sledeće odnose između ovih triju dužina:

$$S = d \quad (5.33)$$

imajući u vidu definiciju razmere možemo napisati,

$$m = \frac{dS}{ds}; \quad ds = \frac{1}{m} dS \quad (5.34)$$

odakle dobijamo

$$s = \int_0^S \frac{dS}{m} = \int_0^S \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} \right)^{-1} \cdot dS$$

rešavanjem ovih integrala dobijamo:

ili

$$s = S_p \left(1 - \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{Dy^2}{8R_m^2} - \frac{Dy^2}{6R_m^2} \right) \quad (5.35)$$

$$S_p = s \left(1 + \frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{Dy^2}{24R_m^2} \right)$$

gde su: $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$,
 Dy – koordinatna razlika,
 R – sred. poluprečnik

Popravka (redukcija) izračunava se po formuli:

$$\Delta_s = S - s = s \left(\frac{y_m^2}{2R_m^2} + \frac{Dy^2}{24R_m^4} \right) \quad (5.36)$$

$$S_p = s + \Delta_s$$

U praksi, kada su dužine kraće od 5 km može se koristiti i približna formula:

$$\Delta_s = \left(\frac{y_m^2}{2R^2} - 0.0001 \right) \cdot d_{\text{mereno}} \quad (5.37)$$

$S_p = S_0 + \Delta_s$, dužina u projekciji
 S_0 – dužina svedena na nultu niv.povr.

Nivelman visoke tačnosti i precizni nivelman

6.1. Svrha nivelmana visoke tačnosti i preciznog nivelmana

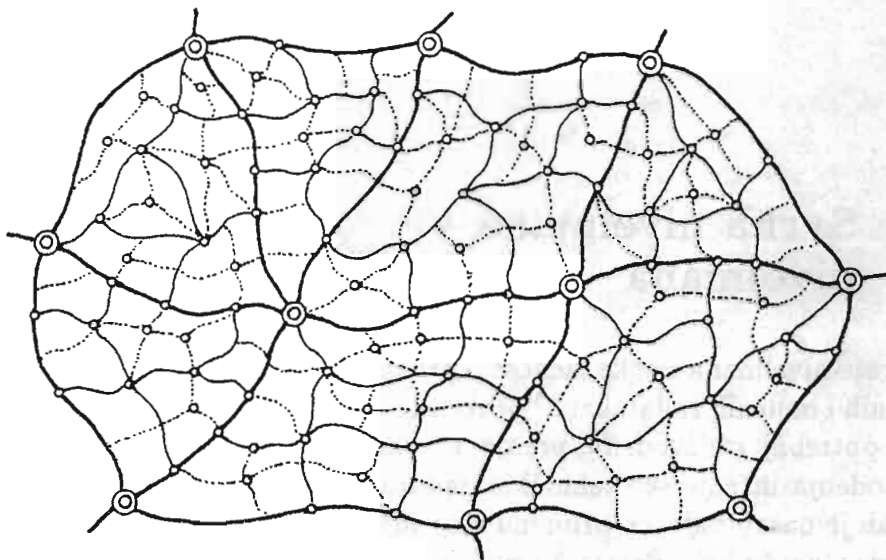
Mreže nivelmana visoke tačnosti i preciznog nivelmana razvijaju se za rešavanje praktičnih i naučnih zadataka. U praktične zadatke svrstavaju se radovi nivelmana koji su potrebni za izvođenje premera i kartografisanja i potrebe za nivelmanom kod izvođenja inženjersko tehničkih zadataka. Za rešavanje naučnih istraživanja nivelman je našao najveću primenu na zadacima koje pred njim stavlja geologija i njen deo geofizika. Prema tome, rezultati nivelmana predstavljaju probleme koje rešavaju navedene naučne discipline. Pomenimo još nekoliko zadataka gde je učestvovao ili učestvuje nivelman sa svojim rezultatima za njihovo rešavanje.

Korišćenje rezultata nivelmana za utvrđivanje razlike nivoa mora i okeana (u SAD je utvrđeno na istim paralelama nadvišenje Tihog okeana u odnosu na Atlanski okean za 2–3 desimetra). Dalje rešavanje ovog problema na utvrđivanju sila pod čijim se uticajem stvaraju ove razlike pripada geofizici odnosno geologiji.

Kao drugi primer od naučnih zadataka gde se rezultati nivelmana mogu koristiti je određivanje pomeranja zemljine kore. Pomeranje zemljine kore nastaje zbog dve vrste deformacija, plastičnih i elastičnih. Kod plastičnih deformacija (tektonskih pokreta) pomerenje zemljino telo više se ne vraća u prvobitno stanje. Kod elastičnih deformacija, nastalo pomeranje zemljine kore vraća se u prvobitno stanje. Izučavanje ovih deformacija utvrđenih preciznim nivelmanom zadatak je geologije. Rezultati nivelmana koriste se i za rešavanje naučno-tehničkih zadataka u oblasti, meteorologije, rudarstva, hidrotehnike i dr.

6.2. Klasifikacija nivelmana

Shema razvijanja nivelmanske mreže prikazana je na slici 6.1. Prvo se razvija osnovna mreža, koju sačinjava sistem zatvorenih poligona, jedan na drugi naslonjeni. Ova mreža na slici prikazana je debljim linijama. U okviru poligona osnovne mreže, razvija se mreža drugog reda (na slici označena tankim linijama). Ona je manje tačnosti od osnovne mreže. Na mrežu drugog reda, oslanja se manje tačna mreža 3-eg reda (na slici prikazana isprekidanim linijama). Na mrežu trećeg reda oslanja se mreža 4-og reda čija je tačnost još manja. Po porebi mogu se razvijati i mreže 5-og i 6-og reda.



Sl.6.1. Razvijanje nivelmanske mreže

Prva definicija preciznog nivelmana data je odlukom Geodetske Asocijacije Centralne Evrope. Druga konferencija ove asocijacije, održane 7 oktobra 1867 u Berlinu, odlučila je da se kao precizni nivelman ima klasificirati onaj nivelman za koji verovatna greška visinske razlike između dveju tačaka na odstojanju od 1 km, ne prelazi u srednjem 3 mm, a maksimum 5 mm. Posle 45 godina Š.Lalemand, direktor Generalnog nivelmana Francuske, predložio je 17-oj generalnoj konferenciji Unije, da se ne menja tačnost određivanja za precizni nivelman iz 1867 godine, već da se dá nova kategorija nivelmana "nivelman visoke tačnosti". U ovu kategoriju nivelmana spada svaki vlak, grupa vlakova ili mreža pod uslovom:

1. Da je nivelanje vršeno u dva suprotna smera u različito vreme;
2. Da verovatna slučajna i sistematska greška, sračunatih po formulama date u referatu ne prelaze ± 1 mm na kilometar za slučajnu grešku i ± 0.2 mm/km. za sistematsku grešku.

Po ovim formulama, koje su dobile naziv "internacionalnih formula za ocenu tačnosti nivelmana" računata su greške do 1948 godne. U ovoj godini Međunaro-

dna geodetska i geofizička unija na glavnoj skupštini, održanoj 26 avgusta u Oslu, usvaja nove formule i novu definiciju. Prema odluci donetoj u Oslu, nivelman se klasificira prema veličini verovatne ukupne greške τ na kilometar. Ako je $\tau \leq 2$ mm, onda se nivelman svrstava u nivelman visoke tačnosti, a ako je $1 \leq \tau \leq 6$ mm, onda je to precizni nivelman.

Postojeće razlike u klasifikaciji nivelmana između država, male su a i razumljive. Tako na primer u Francuskoj, poligoni nivelmana visoke tačnosti, u proseku, njihov opseg iznosi 500 km. U okviru ovih poligona razvija se mreža nižih redova.

U SAD su usvojili klasifikaciju da osnovnu mrežu čini nivelman 1.reda, gde je dozvoljena razlika nivelanja (napred-nazad): $4 \text{ mm}\sqrt{k}$, k -dužina strane u km. U okviru poligona 1.reda, razvija se mreža 2.reda, gde je dozvoljena razlika nivelanja napred-nazad do $8 \text{ mm}\sqrt{k}$. Za mrežu 3.reda dozvoljena razlika nivelanja je do $12 \text{ mm}\sqrt{k}$.

U SSSR-u nivelman visoke tačnosti čine poligoni čiji je prosečni opseg 88-1 000 km. Tačnost ovog nivelanja karakteriše se srednjim greškama: $\pm 1.5 \text{ mm/km}$. za slučajnu i $\pm 0.2 \text{ mm/km}$. za sistematsku grešku. U okviru poligona nivelmana visoke tačnosti razvija se mreža vlakova preciznog nivelmana. Slučajna greška ovog nivelmana je $\pm 2.0 \text{ mm/km}$, a sistematska $\pm 0.4 \text{ mm/km}$. Za treći red predviđena je tačnost: slučajna greška $\pm 2.0 \text{ mm/km}$, a sistematska $\pm 0.6 \text{ mm/km}$. Dužina vlakova je do 200 km. Za 4.red predviđena je za slučajnu grešku $\pm 2-4 \text{ mm/km}$, a za sistematsku grešku $\pm 1 \text{ mm/km}$. Dužina vlakova je do 1 000 km.

Na zasedanju stručnog geodetskog saveta FNRJ od juna 1947 godine, Glavna geodetska Uprava podnela je predlog o novoj klasifikaciji nivelmana, koji je u saglasnosti sa preporukama međunarodne Unije:

1. Nivelman visoke tačnosti (nivela se u oba pravca).
2. Precizni nivelman (nivela se u oba pravca).
3. Tehnički nivelman povećane tačnosti (nivela se u jednom pravcu).
4. Tehnički nivelman (nivela se u jednom pravcu).

U smislu tačnosti Uprava je dala predlog koji je u saglasnosti sa odredbama Međunarodne Unije:

1. Nivelman visoke tačnosti. Verovatna slučajna greška ne sme biti veća od 1 mm/km . Verovatna sistematska greška mora biti manja od 0.2 mm/km .
2. Precizni nivelman. Verovatna slučajna greška ne sme biti veća od 2 mm/km ., a verovatna sistematska greška mora biti manja od 0.4 mm/km .
3. Tehnički nivelman povećane tačnosti. Verovatna slučajna greška ne sme preći 5 mm/km ., a kod tehničkog nivelmana do 8 mm/km .

Ovaj predlog je usvojen i primenjuje se od 1948 godine.

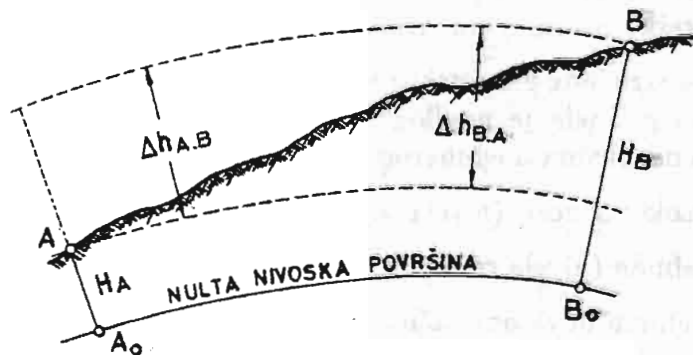
Materija o metodama razvijanja nivelmanskih mreža izučava se u predmetu Geodezija I, prema nastavnom planu smera za Rudarska merenja, a ovde je izložena u skraćenom obliku zbog kontinuiteta izlaganja.

Mreža nivelmana visoke tačnosti koja je oslonac za ostale mreže, razvija se kao sistem zatvorenih poligona, naslonjenih jedan na drugog. Konfiguracija mreže nivelmana visoke tačnosti i oblik poligona uslovljeni su konfiguracijom železničkih linija i putne mreže odnosno Zemlje. Što se tiče opsega poligona, smatra se da ne bi trebalo da budu ispod 400 km, a ni iznad 600 km. Vlakovi preciznog nivelmana treba da idu duž željezničkih linija i puteva, poželjno je da idu i duž velikih reka. Inače mreža preciznog nivelmana može se razvijati i po metodi čvorni tačaka ili metodom umetnutih vlakova. Poželjno je razvijati mrežu preciznog nivelmana tako, da u svaku katastarsku opštinu budu postavljeni reperi.

6.3. Teorija geometrijskog nivelmana

Stara teorija nivelmana zasnivala se na teorijskim postavkama o paralelnosti nivoskih površina. Za apsolutnu visinu tačke smatralo se odstojanje od nulte površi do same tačke, računato po vertikali. Prema tome, apsolutne visine tačaka A i B su H_A i H_B , slika 6.2, gde su:

$$A_0A = H_A \quad \text{i} \quad B_0B = H_B \quad (6.1)$$



Sl.6.2. Visinske razlike i apsolutne visine

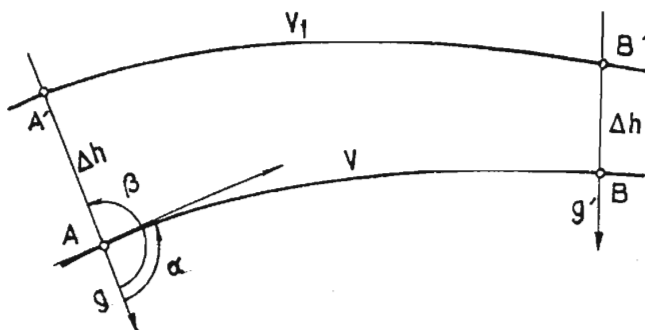
Razlike između apsolutnih visina tačaka A i B , je visinska razlika, odnosno to je odstojanje između njihovih nivoskih površina, računato po vertikali. Prema tome,

$$|\Delta h_{AB}| = |\Delta h_{BA}| \quad (6.)$$

Ako odredimo visinsku razliku između tačaka A i B , dva puta, sa dva nepodudarna vlaka, visinske razlike treba da su jednake, ne uzimajući u obzir greške nivelanja. Ovo proizilazi iz pretpostavke o paralelizmu nivoskih površina koje prolaze kroz tačke A i B , tako se može zaključiti da visinska razlika ne zavisi od "puta nivelanja".

Međutim, u poglavljima 1.3.2. i 1.3.3, videli smo da nivoske površi nisu međusobno paralelne, nego se zbližavaju (konvergiraju) od ekvatora ka polovima.

Na slici 6.3 prikazane su dve bliske nivoske površi V i V_1 , gde su potencijali sile teže W i W_1 .



Sl.6.3. Nivoske površi V i V_1

U tačkama A i B neka deluje sila teže, odnosno ubrzanja g i g' . Za premeštanje tačke A sa nivoske površi V u tačku A' na nivosku površ V_1 potrebno je utrošiti rad.

Ako se oslonimo na razmatranje poglavlja 1.3.2. možemo zaključiti da je rad sile teže kada se tačka kreće pod pravim uglom α jednak nuli, odnosno priraštaj potencijala sile privlačenja jednak je nuli, tj.

$$dv = dsF \cos(F, s) = 0, \quad \text{jer je} \quad \cos(F, s) = \cos 90^\circ = 0$$

gde je ds elementarni deo puta S . Ako se tačka kreće pod uglom od 180° ili 0° imamo slučaj da je priraštaj potencijala sile teže jednak,

$$dv = dsF \cos(F, s) = Fds, \quad \text{jer je} \quad \cos(F, s) = \pm 1$$

U saglasnosti sa ovim možemo pisati da je izvod potencijala sile teže po elementu ds jednak,

$$\frac{dW}{ds} = F \cos(F, s) = g, \quad (6.3)$$

što predstavlja projekciju sile u pravcu ds . Ako sada umesto ds , uzmemo h i h' , dobićemo:

$$-\frac{dW}{\Delta h} = g; \quad dW = -g\Delta h; \quad \Delta h = -\frac{dW}{g} \quad (6.4)$$

Pošto se radi o suprotnom pravcu h u odnosu na delovanje sile teže biće,

$$\begin{aligned} dW &= g\Delta h \quad \text{za tačku A i} \\ dW_1 &= g'\Delta h' \end{aligned} \quad (6.5)$$

kako je rad za pomeranje tačke sa jedne na drugu nivosku površinu konstantna veličina, onda iz (6.5) dobijamo,

$$g\Delta h = g'\Delta h' \quad \text{ili} \quad \frac{g}{g'} = \frac{\Delta h'}{\Delta h} \quad (6.6)$$

što ukazuje da su nivoske površi na nekoj međusobnoj udaljenosti ne u geometrijskom već u dinamičkom smislu. Ako između tačaka A i B imamo više stanica, odnosno imamo više nivoskih površina, na osnovu (6.6) dobijamo:

$$\int_A^B g \Delta h = \bar{g}(H_B - H_A) = W_A - W_B$$

ili

$$(H_B - H_A) = \frac{W_A - W_B}{\bar{g}} \quad (6.7)$$

iz jednačina (6.5), (6.6) i (6.7) možemo zaključiti:

1. da rezultati nivelanja ne zavise od "puta nivelanja",
2. da je razlika potencijala sile teže konstantna veličina,
3. da se neslaganje visinskih razlika dobijene nivelanjem različitim putevima između tačaka A i B može otkloniti ako primenimo *Ortometrijsku teoriju* ili *dinamičku teoriju* nivelanja. Dinamička teorija ovde se neće razmatrati.

6.3.1. Ortometrijska teorija nivelanja

Naziv "ortometrijska" predložen je od strane pukovnika Gunjea, a suština pripada Vitštajnu, koji je objasnio princip ove teorije 1873 godine.

Ortometrijska teorija zadržava postojeću definiciju apsolutnih visina kao vertikalna odstojanja od nulte nivoske površine. Ona samo ispravlja rezultate nivelanja zbog neparalelnosti nivoskih površina. Ispravljanje se vrši dodavanjem popravki koje zovemo "ortometrijskim popravkama".

Do 1930 godine, ortometrijske popravke računate su na osnovu normalne sile teže po Klerovoj formuli. Pojavom gravimetra, omogućeno je, da se za veoma kratko vreme odredi stvarno ubrzanje sile teže, pa zato razlikujemo normalne i stvarne ortometrijske popravke.

Na slici 6.4, date su tačke A i B , koje se nalaze na fizičkoj površi zemlje, a tačke A_0 i B_0 su njihove projekcije na nultu nivosku površinu. Pretpostavimo da su nivoske površi u tačkama A, B i S paralelne. Prema tome nivelanjem određujemo visinsku razliku $\Delta h = Z - P$.

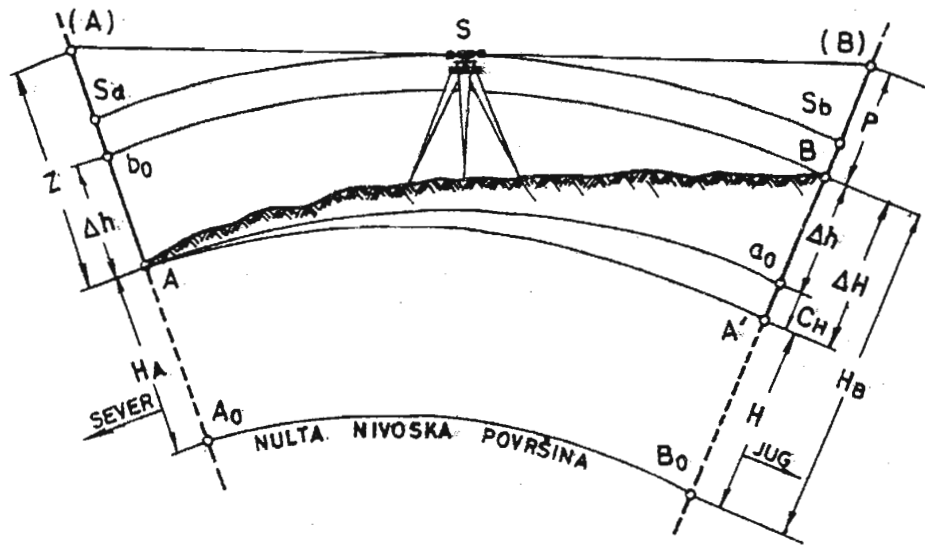
Ako kroz tačku A položimo nivosku površ, paralelnu sa nultom nivoskom površinom, ona će seći vertikalnu u tački A' . Stvarna nulta površ položena kroz tačku A , koja nije paralelna sa nultom površinom seći će vertikalnu u tački a_0 . Sa slike se vidi, da je

$$H_A + \Delta h \neq H_B$$

odnosno jednačina nije zadovoljena za veličinu C_H , odnosno za ortometrijski deo, koga zovemo ortometrijska popravka.

Na osnovu (6.6) dobijamo,

$$g_A \cdot \overline{A_0 A} = g_B \cdot \overline{B_0 a_0} \quad (6.8)$$



Sl.6.4. Ortometrijska popravka

gde su: $\overline{A_0A} = H_A$ i $\overline{B_0a_0} = H_A + C_H$, zamenom u (6.8) dobija se,

$$g_A \cdot H_A = g_B \cdot (H_A + C_H) \quad (6.9)$$

Normalno ubrzanje sile teže γ za tačke na nultoj nivskoj površini računa se,

$$\gamma = \gamma_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi) \quad (6.10)$$

gde su: γ_0^{45} ubrzanje sile teže na nultoj površi za širinu $\varphi = 45^\circ$.

Iz (6.10) proizilazi da su:

$$\gamma_A = \gamma_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi_A)$$

$$\gamma_B = \gamma_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi_B)$$

zamenom u (6.9) dobija se:

$$\gamma_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi_A) H_A = \gamma_0^{45} (1 - \beta \cos 2\varphi_B) (H_A + C_H)$$

ili

$$H_A + C_H = \frac{(1 - \beta \cos 2\varphi_A)}{(1 - \beta \cos 2\varphi_B)} H_A = \beta H_A (\cos 2\varphi_B - \cos 2\varphi_A) \quad (6.11)$$

Za praktičnu primenu koristi se drugi oblik formule (6.11), ako uzmemo u obzir da je,

$$\varphi_A + \varphi_B = \frac{2(\varphi_A + \varphi_B)}{2} = 2\varphi_m; \quad \varphi_B - \varphi_A = \Delta\varphi''$$

onda se az ortometrijsku popravku dobija formula:

$$C_H = -\frac{2\beta}{\rho''} H_A \cdot \sin 2\varphi_m \cdot \Delta\varphi''; \quad \beta = 0.002637 \quad (6.12)$$

Iz analize ove formule sledi:

- da je C_H jednako nuli kada je $2\varphi_m = 180^\circ$ ili ako se računanja i merenja obavljaju na ekvatoru,
- da je C_H jednako nuli kada je $\Delta\varphi = 0^\circ$, odnosno kada je niveliranje po paraleli,
- da C_H ima maksimalnu vrednost za $\varphi = 45^\circ$,
- da je C_H negativno kada je $\Delta\varphi > 0$, a pozitivno kada je $\Delta\varphi < 0$.

Izračunate visine sa ortometrijskim popravkama nazivaju se *metričkim* visinama ili *ortometrijske* visine.

U svetskim naučnim krugovima vlada mišljenje, da za naučne svrhe treba koristiti ortometrijske visine, a za praktične nivelmanske.

6.4. Analiza metode preciznog nivelmana

Pod imenom metode preciznog nivelmana, podrazumevamo, kako precizni tako i visoko tačni nivelman. Prethodno je potrebno da damo opis metode merenja [19]

1. Instrumenti i pribor:

Instrument: Nivelir sa optičkim mikrometrom,

Pribor: letve sa dvostrukom podelom, papuče ili klinovi,

Radna mera: podela na letvi i optički mikrometar.

2. Ispitivanje nivelira i letava:

libela: osetljivost, preciznost

Optički mikrometar: slučajne i sistematske greške, određivanje, vrednosti podeoka, ispitivanje mrtvog hoda zavrtnja za koecidiranje.

3. Durbin:

kvalitet-optičke osobine, hod sočiva za fokusiranje.

4. Letve:

slučajna i sistematska greška podele, određivanje srednjeg metra para letava i određivanje temperaturnog gradijenta letava.

5. Ostala ispitivanja:

elevationog zavrtnja, određivanje ugla "i", kao i njegova promena zbog temperature, određivanje srednje greške viziranja i td.

Neka od navedenih ispitivanja vrše se jedanput, neka se vrše periodično, a pored toga ne vrše se uvek sva ispitivanja. Obim i tačnost ispitivanja zavise od potrebne tačnosti merenja.

6. Kontrola i rektifikacija nivelira i letava - neposredno pre merenja.

7. Uslovi merenja:

pre početka merenja izložiti nivelir i letve spoljnim uslovima 30'. Zaštititi nivelir i stativ suncobranom, brzina vetra ne sme biti veća od 3 m/sec. Ne vršiti merenja kada su nejasni likovi i na nestabilnom terenu. Merenja vršiti u stabilnim uslovima kada je uticaj refrakcije najmanji. Dužina vizure mora biti u određenim granicama. Broj stanica između repera mora biti paran.

8. Postupak pri merenju:

meri se iz sredine, noge stativa se postavljaju po šemi,

čitanje letava, na neparnim stanicama: $Z_1 P_1 P_2 Z_2$,

čitanje letava na parnim stanicama: $P_1 Z_1 Z_2 P_2$.

merenja treba da se odvijaju brzo i ravnomerno, meri se u dva smera, pre i posle podne.

9. Praćenje i kontrola merenja:

spoljna temperatura, razlika između dvostrukih vrednosti visinskih razlika na stanici, odstupanje razlike čitanja na jednoj i drugoj podeli od konstante letve. Razlika između visinskih razlika dobijene nivelanjem u dva smera.

10. Obrada:

rezultat merenja visinske razlike je prosta aritmetička sredina od svih merenja. U rezultate merenja unose se popravke za: srednji metar para letava i za vrednost podeoka optičkog mikrometra.

Iz opisa metode merenja proizilaze izvori grešaka kod nivelanja na jednu stanicu. Izvori grešaka po grupama su:

1. greške nivelira,
2. greške letava,
3. greške ispitivanja i rektifikacije nivelira,
4. greške ispitivanja letava,
5. izvori grešaka pri merenju,
6. greške zbog spoljnih uslova,
7. greške merenja.

Potrebna znanja studenata rudarskog i geološkog smera iz oblasti nivelmana, obrađuje se u predmetu Geodezija I, a ovde izložena materija treba da im da jednu nadgradnju meračkog obrazovanja i da im eventualno posluži za opredeljenje ka specijalističkim studijama.

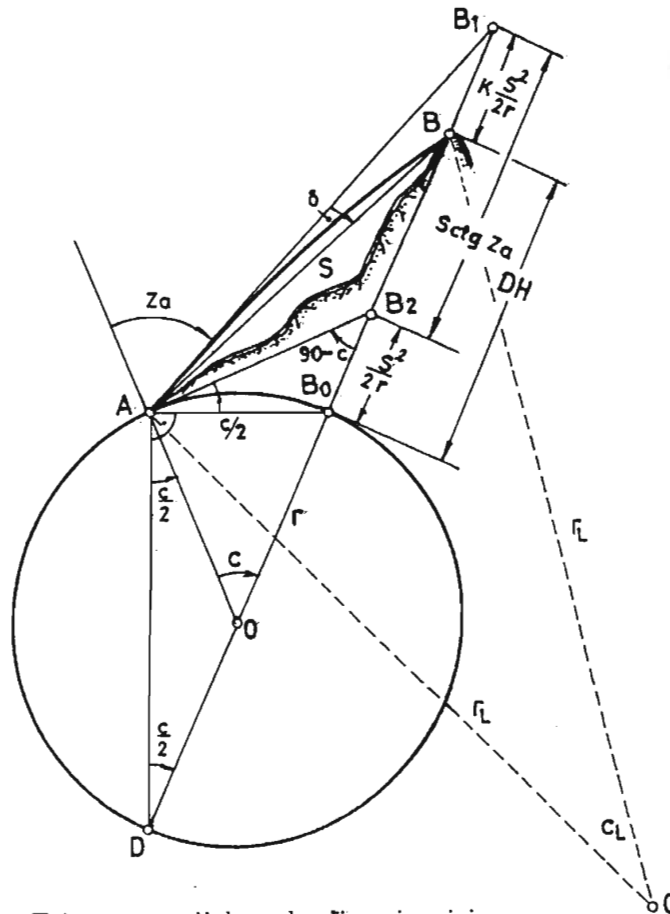
Trigonometrijsko određivanje visina – trigonometrijski nivelman

Za računanje visinskih razlika u trigonometrijskom nivelmanu upotrebljavaju se formule:

$$DH_A^B = S \coth Z_A + i_A - l_B + (1 - K) \frac{S^2}{2r}$$

$$DH_B^A = S \coth Z_B + i_B - l_A + (1 - K) \frac{S^2}{2r} \quad (7.1)$$

Grafička pretstava ovih geometrijskih odnosa data je na slici 7.1.



SL.7.1. Trigonometrijsko određivanje visina

Ako pretpostavimo da su izmerena zenitna odstojanja na tačkama A i B , kontrolna formula za računanje visinske razlike po (7.1) glasi:

$$DH_A^B = S \tan \frac{Z_B - Z_A}{2} + \frac{i_A - i_B}{2} + \frac{l_A - l_B}{2} \quad (7.2)$$

U formulama (7.1) i (7.2) jasni su svi članovi, što se tiče geometrije, osim poslednjeg člana u formuli (7.1), koji se u literaturi naziva sruženje horizonta. U ovom članu nalazi se koeficijent refrakcije. Uticaj refrakcije izražava se uglom δ , koji linearno povećava visinsku razliku za $B_1B = K \cdot S^2/r$. Zbog uticaja zemljine krivine projekcija tačke $B(B_0)$ nalazi se ispod horizonta tačke A -prava $\overline{A-B_2}$. Prema tome treba odrediti odsečak $\overline{B_0B_2}$. On se računa po formuli:

$$\overline{B_0B_2} = \frac{S^2}{2r} \quad (7.3)$$

razlika odsečka $\overline{B_0B_2}$ i $\overline{BB_1}$ daje uticaj sniženja horizonta:

$$\frac{S^2}{2r} - K \frac{S^2}{2r} = (1 - K) \frac{S^2}{2r} \quad (7.4)$$

U jednačini (7.4) najteže je odrediti veličinu koeficijenta refrakcije.

Koeficijent refrakcije može se odrediti na više načina:

1. Iz odnosa Zemljinog poluprečnika r i poluprečnika putanje r_L talasa,

$$K = \frac{r}{r_L} = \frac{\Delta''}{\frac{\delta}{2}} \quad (7.5)$$

2. Po formuli Helbig-a (1980), ako se zanemari uticaj sadržaja vodene pare:

$$K = 503 \frac{P_2}{T} \left(0.0342 + \frac{dT}{dz} \right) \sin Z \quad (7.6)$$

3. Prema [18]:

$$K = -\frac{r}{n} \cdot \frac{dn}{dz} \sin Z$$

gde je $\frac{dn}{dz} = -\frac{Kn}{r \sin Z}$ Veličina dn/dz može se odrediti i na osnovu Barel-Sears-ove jednačine za indeks prelamanja,

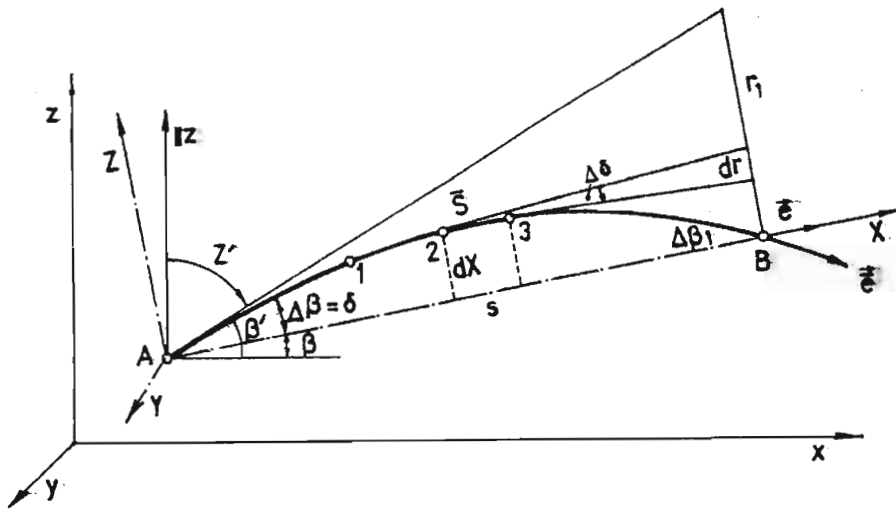
$$N_L = (n_L - 1)10^6 = 83.11 \frac{P}{T} - 11.27 \frac{e}{T} \quad (7.8)$$

formula (7.8) odgovara elektromagnetnim talasima iz infracrvenog dela zračenja spektra.

Određivanje koeficijenta refrakcije geodetskim metodama traži, dosta vremena, odnosno veliki broj merenja, da bi se odredila njegova srednja vrednost. Ostala dva načina traže mnogo manje vremena.

Smatramo da je korektnije ako se primeni teorija konformnog preslikavanja, jer se može izračunati ugao refrakcije δ i njime redukovati zenitnu daljinu, odnosno otpalo bi računanje koeficijenata refrakcije. Ovaj postupak razrađen je u [18], tretirajući putanju elektromagnetnog talasa kao geodetsku liniju u zakrivljenom trodimenzionalnom Rimanovom prostoru, koji je konformno povezan sa Euklidskim prostorom (XYZ) , pa moguće je prema Moritz-u (1962) iskoristiti teoriju konformnog preslikavanja i pokazati, da je redukcija opažanih pravaca, merenih uglova i dužina za atmosfersku refrakciju, tačno trodimenzionalni analog redukcije dužina i pravaca kod konformnog preslikavanja površina, kao što je elipsoid na ravan. Na taj način dobija se jedinstvena teorija za uticaj atmosferske refrakcije na geodetska merenja.

Postavimo u prostornom koordinatnom sistemu (xyz) tačke A i B , a zatim u tački A postavimo koordinatni početak novog sistema (XYZ) , tako da koordinatna osa X sadrži tačke $A B$ (sl.7.2).



Sl.7.2. Grafički prikaz uticaja refrakcije

Na osnovu teorije preslikavanja, razmatranjem vektora e koji je jedinični vektor duž prave \overline{AB} i vektora \vec{e} , koji je tangenta putanje talasa, dobija se formula za sračunavanje uticaja vertikalne refrakcije:

$$\Delta\beta = -\frac{1}{S} \int_0^S \frac{\partial M}{\partial Z} \chi dx \quad (7.9)$$

Formula (7.9) predstavlja opšte rešenje problema, a odgovara uglavnoj korekciji kod trodimenzionalnog preslikavanja.

Prema slici 7.2, vertikalna korekcija $\Delta\beta$, odgovara refrakcijskom uglu δ , koji predstavlja integralnu vrednost lokalnih vrednosti refrakcije duž putanje talasa.

Promena visinskog ugla ili zenitnog odstojanja za $d\delta$, prouzrokuje promenu dr -elementa refrakcije,

$$dr = (s - X)d\delta \quad (7.10)$$

gde su: X -tekuće rastojanje od tačke A prema B .

$$d\delta = \chi_v dx$$

χ_v -krivina putanje,

$$\chi_v = \frac{1}{r_L} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dz} \sin Z \quad (7.11)$$

Zamenom $d\delta$ u (7.10) dobijamo,

$$r_1 = \int_0^S (s - X)\chi_v dx \quad (7.12)$$

Zamenom (7.11) u (7.12) dobijamo opšte rešenje za sračunavanje refrakcionog ugla δ zbog uticaja atmosfere,

$$\delta = \left(-\frac{1}{n} \sin Z s^{-1} \right) 10^{-6} \int_0^S \frac{dn}{dz} (S - X) dx \quad (7.13)$$

Iz (7.13) proizilazi da su neophodni vrednosti meteoroloških parametara za sračunavanje priraštaja indeksa prelamanja, koji se računa po formuli:

$$\frac{dn}{dz} 10^6 = \frac{\partial N}{\partial T} \cdot \frac{\partial N}{\partial P} \cdot \frac{\partial N}{\partial e} \cdot \frac{de}{dz} \quad (7.14)$$

Ako diferenciramo jednačinu (7.8) dobija se,

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dz} &= b + a \frac{dT}{dz} \quad (7.15) \\ b &= -2.842 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{T^2} \\ a &= -83.11 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{P}{T^2} \end{aligned}$$

Iz (7.15) zaključujemo da treba sračunati još temperaturni gradijent, koji se računa po formuli:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_*}{\kappa z} \cdot \phi_h \left(\frac{Z}{L} \right) \quad (7.16)$$

gde su: $T_* = -\frac{H}{C_p V}$, - razmera temperature u K^0 ,

$$L = \frac{C_p T V_*^3}{\kappa g H} - \text{parametar Obuhova,}$$

V_* - koeficijent trenja,
 C_p - specifična toplota,
 κ - von Karmanova konstanta = 0.40,
 ϕ_h - univerzalna funkcija.

Zamenom (7.15) i (7.16) dobijamo konačno rešenje za sračunavanje refrakcionog ugla δ u funkciji meteoroloških parametara.

$$\delta = \delta_1 + \frac{1}{n} \frac{\sin Z'}{S} \frac{T_*}{\kappa} \sum_{i=0}^n (S - X) \frac{1}{Z_i} \phi_h \left(\frac{Z_i}{L_i} \right) \quad (7.17)$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{n} \sin Z' v \frac{S}{2}$$

Redukovano zenitno odstojanje biće:

$$Z = Z' + \delta \quad (7.11)$$

Rešenje dato jednačinom (7.8) za refrakcijski ugao, pretstavlja univerzalno rešenje, dobijeno na osnovu teorije konformnog preslikavanja i teorije sličnosti Monina-Obuhova za prizemni sloj atmosfere, smatrajući pri tome atmosferu kao turbulentnu sredinu.

Satelitska–kosmička geodezija – metode GPS tehnologije –

Za pisanje ovog poglavlja autor je prvenstveno razmišljao, da se studentima rudarstva i geologije, prenesu bar osnovna znanja iz oblasti razvoja kosmičke tehnologije, koja se danas koristi za rešavanje zadataka geodezije.

Od prvog poletanja Zemljinog veštačkog satelita 4 oktobra 1957 godine u SSSR–u i brzom razvoju raketne tehnike i kosmonautike, geodeziji se postavio jedan osnovni zadatak, razvoj jedinstvenog koordinatnog sistema za celu Zemlju, sa centrom u središtu Zemlje. S druge strane kretanje Zemljinih satelita vrši se u polju sile Zemljine teže, koje je svojim karakteristikama veoma važno. Velike brzine kojima se kreću Zemljini sateliti, najavile su potrebu za stvaranjem novih metoda i uređaja za merenje, u prvo vreme za određivanje pozicija za vojne potrebe. Ubrzo se uvidelo da se upotrebom satelita mogu rešavati i zadaci geodezije. Tako je počeo razvoj kosmičke–satelitske geodezije. Danas satelitska–kosmička geodezija izučava međusobni položaj tačaka na Zemljinoj površi i kosmičkih uređaja.

8.1. Primena satelitske geodezije–metode za rešavanje zadataka

Rešavanje zadataka primenom satelitske geodezije, zasniva se na određivanju koordinata kosmičkih uređaja, koristeći rezultate merenja pravaca, rastojanja i relativnih brzina.

Merenje pravaca i rastojanja vrši se fotografskim i radiotehničkim metodama, odnosno sredstvima.

Fotografskim metodama, fotografiše se satelit na zvezdanom nebu i fiksira se vreme opažanja, a zatim određuju astronomskim metodama rektascenzija α i deklinacija δ . Zatim se fotografskim metodama na snimljenom materijalu određuju (mere) uglovi između pravaca ka zvezdama i kosmičkog uređaja. Ulogu uglovnog etalona igra Zvezdano nebo, za određivanje uglovnih odstojanja. Posle obrade

ovih podataka određuju se koordinate tačaka na Zemlji.

Radio-tehničke metode zasnivaju se na merenju relativnih brzina i rastojanja do satelita. Merenje radialnih brzina zasnovano je na efektu Dopplera. Određivanjem koordinata veštačkog Zemljinog satelita, moguće je odrediti koordinate prijemne stanice na Zemlji. Obzirom da se kretanje satelita vrši u gravitacionom polju Zemlje, to izučavanje ovog kretanja u koordinatnoj formi, daje i informacije o gravitacionom polju Zemlje.

Među radio-tehničkim metodama je i tehnologija GPS (Global Position System) ili globalni pozicioni sistem.

8.2. Metode rešavanja osnovnih geodetskih zadataka

Pod osnovnim geodetskim radovima podrazumevamo skup radova na postavljanju i određivanju položaja tačaka na površi Zemlje, odnosno njihov horizontalni i vertikalni položaj u jedinstvenom koordinatnom sistemu.

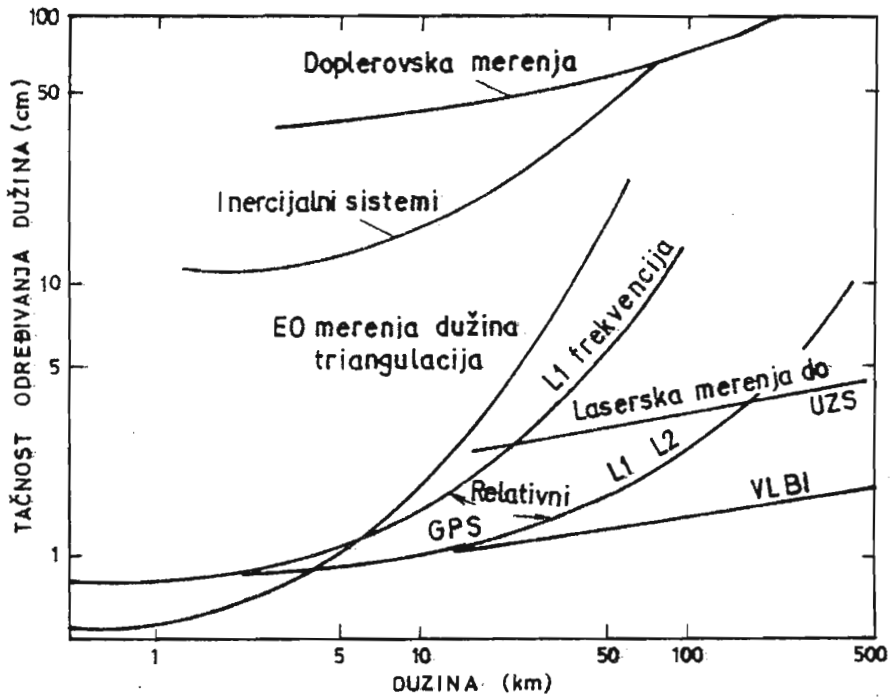
Tačke se raspoređuju na terenu po sistemu trouglova koji se naslanjaju jedan na drugog i čine osnovnu mrežu, koja treba da posluži državnom premeru za dobijanje karata i planova, za mnogobrojne inženjerske radove i za naučne potrebe (određivanje oblika i dimenzija Zemlje).

Ovakva mreža može se ostvariti klasičnim terestričkim metodama visoko tačnih merenja, kao što su astronomska, gravimetrijska, uglovna i linearna merenja, merenja visinskih razlika i merenja satelitske geodezije za sada po metodi GPS tehnologije, uz odgovarajuću matematičku obradu rezultata merenja. Za ispravno odlučivanje, koja će se metoda primeniti, neophodno je poznavati tačnost i ekonomičnost pojedinih metoda merenja. Na slici 8.1 prikazana je tačnost pojedinih metoda, obzirom na udaljenost opažачke stanice od objekta merenja.

U današnje vreme, a verovatno i u sledećim godinama, sigurno će se primenjivati tehnologija GPS, ili sistem globalnog pozicioniranja. Ovaj sistem na kratkim rastojanjima daje tačnost sadašnjih klasičnih metoda, a za odstojanja veća od 10 km, tačnost terestričkih metoda je manja od metode GPS. GPS metoda za izvođenje radova je i ekonomičnija od klasičnih terestričkih metoda.

Laserska merenja i VLBI (Very Long Base linije Interferometry), daju podjednaku tačnost, ali se zbog velikih troškova i transportnih problema, njihova upotreba svodi samo na određivanje tačnih baza za kontrolu koordinata i razmere mreža razvijenih ostalim metodama. Na kraju možemo zaključiti, da su satelitska dopplerovska merenja i GPS tehnologija podesni za dobijanje koordinata tačaka osnovnih državnih mreža kao i mreža u inženjerskoj geodeziji.

Koncept razvijanja i određivanja osnovnih državnih mreža, imajući u obzir mogućnosti satelitske geodezije, menja se iz temelja, a i mnogi naši i strani autori, mišljenja su, da su mreže satelitske geodezije, mreže nultog reda.



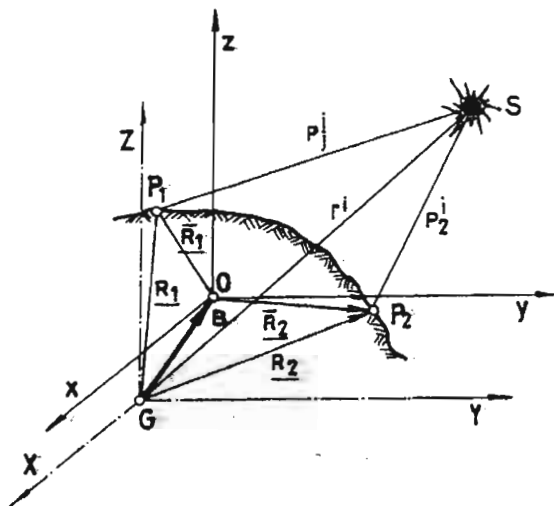
Sl.8.1. Tačnost metoda merenja

8.3. Osnovni koncept satelitske geodezije

Satelitsku geodeziju možemo podeliti na:

1. Geometrijsku
2. Dimamičku
3. Operativnu.

Na slici 8.2, prikazan je geocentrični globalni koordinatni sistem (XYZ) sa koordinatnim početkom u centru mase zemlje G . Na istoj slici označeni su sa:



Sl.8.2. Primena satelita u geodeziji

- r_i – geocentrični radijusvektor satelita,
 - p_j^i – merene dužine do satelita.
 - P_1, P_2 – opažачke stanice na Zemlji,
- Pretpostavljeno je da su koordinatne ose konvencionalnog geodetskog sistema (xyz) i geocentričnog sistema (XYZ) paralelne.

8.3.1. Geometrijske metode satelitske geodezije

Ove metode zasnivaju se na opažanju satelita kao pokretni vizurni signal. Suština se sastoji u određivanju položaja tačaka na zemlji, na osnovu prostornih trouglova čije je jedno teme položaj satelita u dotičnom trenutku. U geometrijskoj geodeziji interesuje nas terestički vektor R_j a nepoznati vektor r^i , eliminiše se simultanim merenjima. Geometrijske metode dele se na: sinhronizovane ili istovremene, kvazisinhronizovane (približno istovremene) i orbitalne.

Sinhronizovane metode zasnivaju se na istovremenim opažanjima satelita sa raznih tačaka Zemljine površine, čiji su parametri, kao funkcije vremena dobro poznati i daju mogućnost izračunavanja položaja satelita u bilo kom trenutku. Fundamentalna jednačina satelitske geodezije je:

$$r^i = B + \bar{R}_j + P_j^i P_j^i \quad (8.1)$$

gde je: P_j^i – mereni pravac, odnosno jedinični vektor $|P_j^i| = 1$,

B – geocentrični stalni vektor početka geodetskog koordinatnog sistema.

Znajući komponente vektora opažačke stanice \bar{R}_j i topocentrične vektore P_j^i mogu se odrediti koordinate satelita u geodetskom sistemu u nekom vremena. Ovaj zadatak se naziva prvi zadatak satelitske geodezije. Ako ose globalnog geocentričnog i konvekcionalnog geodetskog sistema nisu međusobno paralelne i ako se pojavljuje razlika u njihovoj razmeri, onda za geocentrični radijusvektor dobijamo,

$$r^i = B + (1 + dm)R_c \bar{R}_j + P_j^i P_j^i \quad (8.2)$$

gde su: dm – faktor razmer,

R_c – rotaciona matrica,

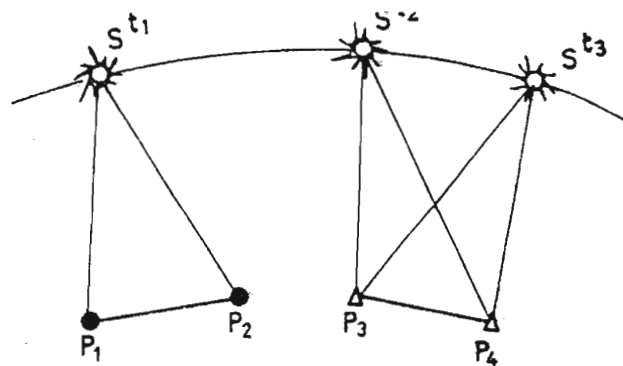
$$R_c = \begin{vmatrix} 1 & c_x & -c_y \\ -c_z & 1 & c_x \\ c_y & -c_x & 1 \end{vmatrix}$$

Veličine c_x, c_y, c_z su rotacioni uglovi oko xyz osa.

8.3.2. Orbitalna metoda

Ako su u jednom trenutku t_1 poznate koordinate satelita S^{t_1} u koordinatnom sistemu tačaka P_1 i P_2 i ako su poznate koordinate satelita S^{t_2} i S^{t_3} u trenucima t_2 i t_3 , iz tačaka P_3 i P_4 , onda je moguće odrediti koordinate tačaka P_3 i P_4 u koordinatnom sistemu u kome su tačke P_1 i P_2 , slika 8.3.

Ako se kod primene ove metode vrše lenearna merenja, onda je neophodno imati minimalno bar tri opažanja satelita.



Sl.8.3. Orbitalna metoda satelitske geodezije

Iz dosadašnjeg izlaganja, zaključujemo da je geometrijska metoda načelno prikazana, a da za ostale metode satelitske geodezije možemo reći sledeće: Dinamička metoda uglavnom se bavi određivanjem vektora r' , odnosno ubrzanja sile teže.

Operativna satelitska geodzija obuhvata metode kod kojih se položaj satelita uzima kao poznata vremenska funkcija $r'(t)$.

8.4. Nebeska mehanika

Osnovna teorija kretanja veštačkih Zemljinih satelita

Osnove nebeske mehanike postavili su Johanes Kepler (1571–1630) i Isak Newton (1643–1727). Oni su na osnovu podataka opažanja kretanja nebeskih tela, astronoma Tiho Bahea-a (1546–1601) postavili odnose u nebeskoj mehanici. Kepler je formulisao tri zakona o kretanju nebeskih tela. Keplerove zakone teorijski je dokazao Newton, kada je pronašao Zakon gravitacije.

Prema ovom zakonu, sila kojom se privlače dva tela daju se formulom,

$$K = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \quad (8.3)$$

gde su: $m_1 = M$ (masa Zemlje),

$m_2 = m$ (masa veštač. Zemljinog satelita),

r – geocentrični radijus vektor satelita,

\bar{r} – vektor položaja satelita.

Na osnovu jednačine (8.3) možemo dobiti vektor ubrzanja satelita

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r} = -f \frac{M}{r^3} \cdot \bar{r} \quad (8.4)$$

Množeći jednačinu (8.4) sa $2\dot{r}$ skalarno, znajući da je

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = v, \quad v^2 = \dot{r}^2$$

možemo dobiti integral energije

$$v^2 = 2f \frac{M}{r} + E \quad (8.5)$$

Iz (8.5) dobija se kinetička energija satelita $\frac{v^2}{2}$ -jedinичne mase m_1 i potencijalna energija $\frac{M}{r}$, odnosno zaključujemo da putanja sa .elita zavisi od veličine E .

Poznato je da se kretanje satelita po putanji, dešava pod uticajem polja sile zemljine teže, ali pri tome igraju ulogu i sile privlačenja drugih tela, otpor atmosfere, pritisak svetlosti i drugih sila.

Ubrzanje satelita g izazvano silom teže Zemlje, može se odrediti na osnovu funkcije sila Zemlje, V ,

$$\bar{g} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(V) \quad (8.6)$$

gde su: $V = f \iiint \frac{dm}{r}$,

\bar{r} - vektor položaja satelita u geocentričnom koordinatnom sistemu,

r - rastojanje elementarne mase dm do spoljne tačke,

$$f = 6.673 \cdot 10^{-11} N(m^2/kg) = 6.673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

Integral u (8.6) mora se izvršiti po celom obimu Zemlje, međutim, kako je to objektivno nesigurno u geodeziji i mehanici ide se drugim putem, odnosno jednačina (8.6) razvija se u red, odnosno razvija se u red funkcija sila V po sfernim funkcijama, odakle se dobija,

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \left(\sum_{m=1}^l \sum_{n=0}^m C_{mn} \cos nl + S_{mn} \sin nl \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^m P_{mn} \psi \quad (8.7)$$

gde su: $\mu = f \cdot M$ - gravitacioni parametar Zemlje,

M - masa Zemlje,

r, ψ, l - sferne koordinate satelita,

r_0 - srednji radijus Zemlje,

P_{mn} - polinom Ležandra,

C_{mn}, S_{mn} - konstante koje zavise od oblika i unutrašnjeg sastava Zemlje, a određuju se gravimetrijskim i satelitskim opažanjima.

Vektor ubrzanja satelita izazvanog telom Zemlje, računa se po formuli,

$$\bar{g}_z = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial \bar{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \nabla \bar{V} \quad (8.8)$$

gde je $\nabla \bar{V}$ - vektor koji pretstavlja sumu poremećaja funkcije sile V Zemlje.

Vektor ubrzanja satelita izazvanog silom privlačenja drugih planeta.

$$\bar{g}_p = \sum_{i=1}^k \mu_i \left(\frac{\bar{r}_i - \bar{r}}{|\bar{r}_i - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (8.9)$$

gde su: μ_i , \bar{r}_i – gravitacioni parametar i vektor položaja i -te planete.

Ubrzanje satelita u zavisnosti od sile čeonog otpora, kojom atmosfera ometa satelit:

$$\bar{g}_a = -\frac{1}{2} C_x \frac{A}{m} \rho(H) v \bar{v} \quad (8.10)$$

gde su: C_x – koeficijent aerodinamičkog otpora,

A – površina preseka satelita,

v – relativna brzina satelita u odnosu na Zemlju,

$m, \rho(H)$ – masa Zemlje, gustina atmosfere.

Ubrzanje satelita, zbog dejstva svetlosnog pritiska,

$$\bar{g}_c = K \frac{A}{m} \frac{\bar{r}_0 - \bar{r}}{|\bar{r}_0 - \bar{r}|^3} \quad (8.11)$$

gde je: K – koeficijent koji karakteriše sposobnost Sunca za izučavanje svetlosti i svojstva satelita da iste odbije.

Na osnovu (8.8), (8.9), (8.10) i (8.11), može se dobiti diferencijalna jednačina za ubrzanje kretanja satelita,

$$\bar{g} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \nabla \bar{V} + \bar{g}_p + \bar{g}_a + \bar{g}_c \quad (8.12)$$

ili

$$\bar{g} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} + \bar{g}_B; \quad \bar{g}_B = \nabla \bar{V} + \bar{g}_p + \bar{g}_a + \bar{g}_c$$

gde su: $\frac{\mu}{r^3} \bar{r}$ – osnovno ubrzanje izazvano silom privlačenja Zemlje,

\bar{g}_B – poremećaj ubrzanja izazvano drugim silama.

Trajektorija putanje satelita može da se odredi integracijom jednačine (8.12).

Rešenje zadatka o kretanju satelita je veoma složeno i u prvom približenju, razmatra se kretanje kao kretanje meridijanske tačke čija je masa jednaka masi Zemlje. Takvo kretanje dešava se u polju centralne sile i naziva se neporemećeno ili Keplerovo kretanje.

8.4.1. Neporemećeno kretanje

Kepler je formulisao zakone kretanja planeta oko Sunca, koje važe za tela čija se masa može zanemariti u odnosu na masu tela koje privlači, pri čemu je obavezno imati centralnu simetriju rasporeda gustina.

Zakoni Keplera [11]:

1. Planete opisuju oko Sunca eliptične putanje; u zajedničkoj žiži tih elipsa nalazi se Sunce.
2. Radijus vektor povučen od Sunca do planete, prevlači u jednakim delovima vremena jednake površine.
3. Kvadrati vremena obilaženja pojedinih planeta oko Sunca stoje u proporciji trećih potencija velikih poluosa njihovih putanja.

Trajektorije putanja nebeskih tela mogu da budu krugovi, elipse, parabole ili hiperbole. Sateliti imaju malu masu i njihov položaj zadaje se vektorom \vec{r} , tada sila koja deluje na satelit odnosi se na jedinicu mase i jednaka je,

$$\vec{g} = \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \quad (8.13)$$

Iz jednačine (8.13) proizilazi da ima sistem od tri diferencijalne jednačine drugog reda, čije rešenje zavisi od 6 parametara:

Ω – rektascenzija ulaznog čvora,

i – nagib trenutne putanje satelita u odnosu na ekvator,

ω – argument perigeja,

a – velika poluosa elipse putanje,

e – numerički ekscentricitet putanje,

T_0 – trenutak prelaska perigeja.

Ako (8.13) pomnožimo sa $2\dot{\vec{r}}$ dobićemo,

$$2\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}2\vec{r}\dot{\vec{r}} \quad (8.14)$$

ili

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2) = -\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)$$

Znajući da je $\dot{\vec{r}} = v$, $v^2 = \dot{\vec{r}}^2$, $\vec{r}^2 = r^2$, tada je

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{\mu}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2)$$

ili

$$\frac{d}{dt}(v^2) = -\frac{2\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} = 2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8.15)$$

Integracijom (8.15) dobija se,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + E \quad (8.16)$$

Jednačina (8.16) predstavlja integral energije, a E -konstanta energije. Ako je $E = \mu/r$, putanja elipse je kružna, ako je $E < 0$ putanja je elipsa, $E = 0$ putanja je parabola i $E > 0$ putanja je hiperbola. Obzirom da se sateliti kreću putanjama konusnih preseka, onda se vektorski proizvod, vektora položaja \vec{r} i brzine v , daje formulom:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \neq 0 \quad (8.17)$$

Ako sada (8.17) diferenciramo po vremenu dobijamo,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (8.18)$$

pri čemu je $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$, odnosno $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$ Imajući u vidu (8.18) proizilazi da je $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0$, odnosno posle integracije dobijamo,

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c} \quad (8.19)$$

gde je: \vec{c} - konstantni vektor i naziva se konstanta površi.

Jednačina (8.19) može sa napisati i u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1 \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2 \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3 \end{aligned} \quad (8.20)$$

gde su c_1, c_2, c_3 konstante površi. Iz (8.20) dobija se međusobni odnos

$$c_1x + c_2y + c_3z = xyz - xz\dot{y} + 2y\dot{x} - xy\dot{z} + xz\dot{y} - yz\dot{x} = 0$$

Konstante površina c_1, c_2, c_3 obrazuju vektor kinetičkog momenta i opredeljuju ravan,

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0 \quad (8.21)$$

Ova ravan prolazi kroz početak koordinatnog sistema i zove se ravan putanje (orbite). Vektorskim proizvodom vektora \vec{c} i vektora $\dot{\vec{r}}$ dobijamo,

$$\vec{c} \times \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

iskoristivši poznate vektorske osobine,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

dobijamo,

$$\vec{c} \times \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}[\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})] = -\frac{\mu}{r^3}[\dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}] = -\mu \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{\vec{r}}}{r^2} \quad (8.22)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{c} \times \dot{\vec{r}}) = -\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right),$$

ako ovo integrišemo dobijamo
$$\bar{c} \times \dot{\bar{r}} = \mu \frac{\bar{r}}{r} = -\bar{f} \quad (8.23)$$

gde je \bar{f} konstantan vektor, zove se vektor Laplasa. Iz (8.23) zaključujemo da je vektor \bar{c} ortogonalan vektoru \bar{f} , je

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \quad (8.24)$$

Odnosno vektor \bar{c} je ortogonalan ravni orbite, jer vektor \bar{f} leži u ravni i opredeljuje fokalnu osu orbite.

Ako (8.23) skalarno pomnožimo sa \bar{r} dobijamo,

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z = -\mu \bar{r} + c^2 \quad (8.25)$$

Jednačine (8.21) i (8.25) u potpunosti određuju putanju.

Kako se kretanje satelita dešava u ravni (8.21), onda je korisno da se postavi novi koordinatni sistem u toj ravni sa početkom u centru mase Zemlje. Koordinatni sistem čine ose ($K_1 K_2 K_3$).

Koordinatna osa K_1 prolazi kroz perigej i na toj osi leži Laplasov vektor \bar{f} . Osa K_3 upravna je na ravan putanje i u njoj leži vektor \bar{c} . Osa K_2 upravna je na ravan $K_1 K_3$ i čini desni koordinatni sistem. Prelazak iz sistema xyz u sistem $K_1 K_2 K_3$ vrši se izrazom,

$$\begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{f_1}{f} & \frac{f_2}{f} & \frac{f_3}{f} \\ \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} & \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} & \frac{-c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} \\ \frac{c_1}{c} & \frac{c_2}{c} & \frac{c_3}{c} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \quad (8.26)$$

Prema tome jednačine (8.21) i (8.25) možemo napisati u funkciji novog koordinatnog sistema

$$K_1 = 0; \quad \mu r + f K_1 = c^2 \quad (8.27)$$

Uvedimo polarne koordinate za ravan $K_1 O K_2$

$$\begin{aligned} K_1 &= r \cos v \\ K_2 &= r \sin v \end{aligned} \quad (8.28)$$

U polarnom koordinatnom sistemu jednačina (8.27) ima oblik,

$$\mu r + f r \cos v = c^2 \quad (8.29)$$

Iz (8.29) dobijamo:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu} \cos v} \quad (8.30)$$

Jednačine (8.30) i (8.16) u potpunosti opredeljuju putanju satelita.

Ako u (8.30) uvedemo oznake $p = \frac{c^2}{\mu}$ i $e = \frac{f}{\mu}$, dobija se novi oblik za jednačinu (8.30):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (8.31)$$

Ako je $e = 0$ putanja satelita je kružna, a eliptična kada je $0 < e < 1$, parabolična kada je $e = 1$ i hiperbolična za $e > 1$. U novom koordinatnom sistemu ($K_1 K_2 K_3$) sistem jednačina (8.28) dobija novi oblik,

$$r^2 \cdot \dot{v} = c \quad (8.32)$$

što daje mogućnost iznalaženja zavisnosti ugla v od vremena. Veza između konstanta c i f , sa elementima orbite, može se uspostaviti pomoću jednačine,

$$\frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (8.33)$$

ili

$$dt = \frac{p^2}{c} \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} \quad (8.34)$$

Uzmimo sada integral od momenta prolaska satelita kroz prigej τ do momenta t uzimajući za interval brzine od 0 do v .

$$t - \tau = \frac{p^2}{c} \int_0^v \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} \quad (8.35)$$

Uvedimo novu uglovnu promenljivu E (ekscentrična anomalija):

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} \quad (8.36)$$

deferenciranjem (8.36) možemo odrediti dv :

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2} dE}{1 - e^2 \cos E} \quad (8.37)$$

$$1 + e \cos v = 1 + e \frac{1 - \tan^2 \frac{v}{2}}{1 + \tan^2 \frac{v}{2}} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E}$$

Ako rešimo integral (8.35) dobićemo:

$$\int_0^v = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} (E - e \sin E) \quad (8.38)$$

odnosno,

$$t - \tau = \frac{p^2}{c(1 - e^2)^{3/2}} (E - e \sin E) \quad (8.39)$$

Ako uvedemo oznake u (8.39), $a = \frac{p}{1 - e^2}$, $p = \frac{e^2}{\mu}$, dobićemo:

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - \tau) = E - e \sin E \quad (8.40)$$

Jednačina (8.40) zove se jednačina Keplera, koja daje zavisnost ugla E , od vremena. $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$, predstavlja srednje kretanje ili treći Keplerov zakon.

Srednjem kretanju odgovara srednja anomalija M umesto ekscentrična anomalija E ,

$$M = n(t - \tau) \quad (8.41)$$

tada jednačina (8.40) dobija oblik:

$$M = n(t - \tau) = E - e \sin E \quad (8.42)$$

tako da veličina n opredeljuje period neporemećenog kretanja satelita.

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \quad (8.43)$$

Orijentacija putanje u prostoru određuje se veličinama \bar{c} i \bar{f} ,

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c} &= \sin i \sin \Omega \\ \frac{c_2}{c} &= -\sin i \cos \Omega \\ \frac{c_3}{c} &= \cos i \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \frac{f_2}{f} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \frac{f_3}{f} &= \sin \omega \sin i \end{aligned}$$

Ponekad se umesto istinite anomalije v koristi argument širine

$$u = v + \omega \quad (8.45)$$

odnosno umesto parametara p i e upotrebljavaju se veličine:

$$r_n = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e) \quad (8.46)$$

Na osnovu jednačina (8.26) i (8.44) možemo dati jednačine za izračunavanje xyz i komponente brzine $\dot{x}\dot{y}$ i \dot{z} .

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z &= r(\sin u \sin i) \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin v (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) + (1 + e \cos v) \\
&\quad - \sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i)] \\
\dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin v (\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i) + (1 + e \cos v) \\
&\quad - \sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i)] \\
\dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin v \sin i + (1 + e \cos v) \cos \omega \sin i]
\end{aligned} \tag{8.48}$$

Jednačine (8.47) i (8.48) daju rešenje zadatka neporemećenog kretanja satelita.

U trenutku t_0 (početno vreme ili "epoha") zadati su veličine: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Treba odrediti p, e, Ω, ω i τ . Na osnovu jednačine (8.20) možemo izračunati c_1, c_2, c_3 i vektor $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Konstante integrala Laplasa izračunavaju se:

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + \dot{y}_0 c_3 - \dot{z}_0 c_2 \\
f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + \dot{z}_0 c_1 - \dot{x}_0 c_3 \\
f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + \dot{x}_0 c_2 - \dot{y}_0 c_1 \\
\cos i &= \frac{c_3}{c} \\
\tan \Omega &= -\frac{c_2}{c_1} \\
\sin \omega &= \frac{f_3}{f} \operatorname{cosec} i \\
r_0 &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{K_0^2 + z_0^2}
\end{aligned} \tag{8.49}$$

Početna vrednost istinite anomalije:

$$\sin v_0 = \frac{n_0}{r_0} \quad \cos v_0 = \frac{K_0}{r_0} \tag{8.50}$$

Ekscentrična anomalija

$$\tan \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v_0}{2}$$

Srednja anomalija

$$\begin{aligned}
M_0 &= E_0 - e \sin E_0 \\
\tau &= t_0 - \frac{1}{n} M_0 \\
\mu &= \sqrt{n} \left(\frac{1-e^2}{p} \right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{8.51}$$

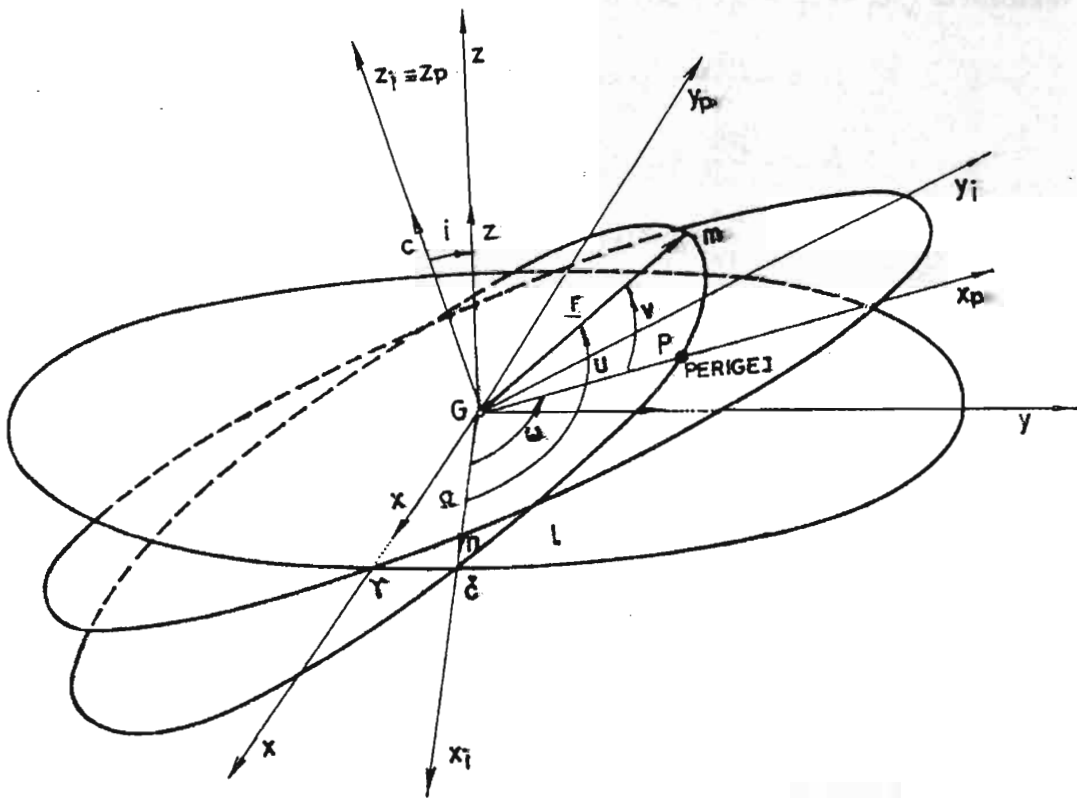
$$r = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e \cos E) = a(1 - e \cos E) \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin(i) \sin(u) \\ \tan(\Omega - \alpha) &= \cos(i) \tan(u) \end{aligned} \quad (8.53)$$

Jednačine (8.52) i (8.53) daju vezu između sfernih koordinata α, δ, r i elementima putanje.

8.4.2. Koordinatni sistemi prikazivanja putanje satelita

Putanja satelita obično se razmatra u tri koordinatna sistema čiji je početak zajednički i nalazi se u centru mase Zemlje, slika 8.4.



Sl.8.4. Koordinatni sistemi putanja satelita

Astronomski Kartezijev sistem bez početka G definiše se sa: osom Z -rotacijska osa Zemlje, ravan xy određena osama z i x koja prolazi kroz prolećnu tačku γ i osa y upravna na ravan xz .

Kod ostala dva koordinatna sistema x i y ose leže u ravni putanje satelita. Jedan od njih se zove koordinatni sistem čvorišta, a drugi koordinatni sistem perigeja. U koordinatnom sistemu čvorišta, osa x prolazi kroz centar mase Zemlje, i tačke preseka ravni ekvatora sa putanjom satelita.

Koordinatni sistem perigeja ima zajedničku osu z_p sa koordinatnim sistemom čvorišta, x_p osa prolazi kroz perigeja, a y_p upravna na ravan $x_p z_p$. Rektascenzija ulaznog čvora nalazi se u ravni ekvatora, uglovi ω i u su u ravni putanje satelita, stvarna dužina l , je:

$$l = \Omega \cdot \omega, \quad y = \Omega \cdot u$$

8.4.3. Računanje pozicija navigacionih sistema

Elementi putanje satelita, za vreme opažanja korisnici dobijaju u kodiranom oblike pomoću satelita, ili se posle opažanja mogu tražiti od raznih institucija u obliku preciznih efemerida.

Sateliti svaki sat, emituju za referentnu elipsu t_0 , parametre $(a, i, e, \Omega, \omega, M_0)$, dugo periodične smetnje $\Delta n, \dot{\Omega}, i$ i kratko periodične smetnje, du, dr, di . Za kratko periodične smetnje daju se Fourierovi koeficijenti, $C_{us}, C_{ic}C_{rs}, C_{rc}$, odnosno C_{is}, C_{ic} . Zatim se za epohu opažanja t , računaju elementi Keplerove elipse za $\Delta t = t - t_0$;

$$\begin{aligned} a &= a_0, \quad e = e_0 \\ \Omega &= \Omega + \dot{\Omega} \Delta t \\ i &= i_0 + i \Delta t + C_{is} \sin(2\omega) + S_{ic} \cos(2\omega) \\ \omega &= \omega_0 + C + u_s \sin(2\omega) + C_{uc} \cos(2\omega) \\ M &= m_0 + (n_0 + \Delta u) \Delta t \end{aligned} \quad (8.54)$$

Iz srednje anomalije M , može se sračunati stvarna anomalija,

$$\begin{aligned} M(t) &= n(t - t_0) \\ E(t) &= M(t) + e \sin E(t) \\ v(t) &= 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \left[\tan \frac{E(t)}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Zatim se računaju, argument širine i dužine radijus vektora r ,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(v)} + C_{rs} \sin(2u) + C_{rc} \cos(2u) \quad (8.56)$$

Udaljenost satelita od prijemne stanice, računa se, u trenutnom koordinatnom sistemu, povezan sa Zemljom (Grinvičkim meridijanom) po formuli [11]:

$$r'_{cep} = r \cdot \begin{matrix} \cos u \cos l - \sin u \sin l \cos i \\ \cos u \sin l + \sin u \sin l \cos i \\ \sin u \sin i \end{matrix} \quad (8.57)$$

gde su

$$u = \omega + v; \quad l = \Omega - \Theta$$

U konvencionalnom terestičkom koordinatnom sistemu (CIO)-pol, moraju se uzeti u obzir i trenutne koordinate pola,

$$r'_{cio} = r \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & x_p \\ Y & 0 & 1 & -y_p \\ Z & -x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \cdot r'_{cep} \quad (8.58)$$

8.4.4. Svetski koordinatni sistemi i skale vremena

Do kraja 1986 godine primenjivao se Svetski koordinatni sistem WGS 72, a od tada primenjuje se WGS 84.

Transformacija koordinata iz WGS 72 u WGS 84, prema (Seeber-u) vrši se po formulama:

$$\begin{vmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h_m \end{vmatrix}_{\text{WGS 84}} = \begin{vmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{vmatrix}_{\text{WGS 72}} + \begin{vmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\lambda \\ \Delta h_m \end{vmatrix} \quad (8.59)$$

$$\Delta\varphi'' = \frac{(4.5 \cos \varphi)}{(a \sin l'')} + (\Delta f \sin l'') + \left(\frac{\Delta f \sin(2\varphi)}{\sin l''} \right)$$

$$\Delta\lambda = 0.554$$

$$\Delta h_m = 4.5 \sin \varphi + a d f \sin^2 \varphi - da + dr$$

$$df = 0.3121057 \cdot 10^{-7}$$

$$a = 6\,378\,135\text{m}$$

$$da = 2.0$$

$$dr = 1.4\text{m}$$

U prirodnim naukama vreme je osnovna, fundamentalna veličina za opis događaja i pojava. U satelitskoj geodeziji vreme je bitna veličina iz dva razloga,

1. Koordinate satelita su funkcije vremena,
2. Koordinatni sistemi u astronomiji, zbog rotacije Zemlje, takođe su funkcija vremena.

Zbog toga je potrebno poznavati osnovne jedinice za njegovo merenje. Kako su sve ljudske aktivnosti vezane za Sunce, logično se nameće, da jedna rotacija Zemlje bude prirodna jedinica vremena na Zemlji. Radi stabilnosti jedinica vremena u toku cele godine, definisan je srednji Sunčev dan, odnosno srednje Sunčevo vreme, koje se za nulti meridijan naziva svetsko vreme,

UT (Universal Time)

a određuje na osnovu astronomskih opažanja sa pedeset stanica raspoređenih na Zemljinoj površini. Razlika između pravog i srednjeg Sunčevog vremena zove se *vremenska jednačina* i može imati vrednosti od $-15'$ do $+15'$. UT-vreme odnosi

se na trenutni položaj ose Zemljine rotacije, ali zbog pomeranja pola UT-vremena potrebno je da se svede na konvencionalni CIO-pol, odnosno preći na

UT1 (vreme)

koje se odnosi na aktuelnu osu rotacije Zemlje, srednju putanju Zemlje i na srednji pol.

Ako se iz ovoga vremena eliminišu godišnje i polugodišnje promene na rotaciji Zemlje, dobija se,

UT2 (vreme)

Zbog nepravilnosti u rotaciji Zemlje, najtačnije vreme danas se smatra tzv. atomsko vreme TAI; (Temps Atomic International). Nulta tačka ovoga vremena poklapa se sa UT-vremenom za trenutak 1.01.1958 godine. Ovo vreme realizuje se pomoću atomskih satova, odnosno to je srednje vreme atomskih satova.

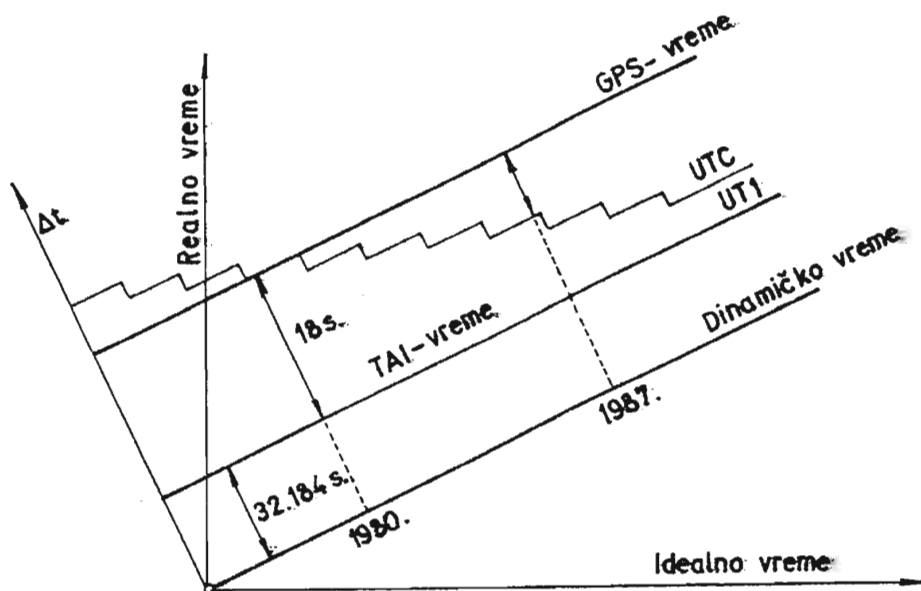
Mnoge institucije u svetu zadržavaju svoje atomske satove, veoma bliske vremenskoj skali UT1. Ovo vreme naziva se Univerzalno koordinirano vreme UTC i veoma je važno za astronomska opažanja. Sa TAI-vremena može se preći na UT1-vreme, odnosno potrebna je korekcija celi broj sekundi

$$UTC - UT1 = DUT1 < 0.7 \text{ s}$$

Ovo vreme treba da se uvede u svim koordinatnim sistemima vezanim za Zemlju.

8.4.5. GPS-vreme

GPS-vremenska skala u suštini je američko atomsko vreme i nije identično sa TAI-vremenom, slika 8.5.



Sl.8.5. Grafički prikaz skala vremena

Zbog povremenih korekcija za jednu sekundu, UTC-vreme nije podesno za satelitska opažanja.

Razlika između UTC-vremena i GPS-vremena je poznata. GPS-vreme podesno je za astronomska merenja. Razlika ovih vremena vidi se sa slike 8.5. Na primer:

$$\text{GPS}_{\text{vreme}} - \text{UTC}_{1987} \geq 4\text{s}$$

Na osnovu teorije relativiteta, dokazano je da se u fizici ne može govoriti o apsolutno ujednačenom vremenu. Ajnštajn je dokazao da i u dva inercijalna sistema, koji se istovremeno kreću, dva jednako tačna sata pokazuju različito vreme.

Ovo je veoma važno za satove na satelitu i na terestričkoj stanici. Zbog relativnog pomeranja satelita u odnosu na Zemlju, sat na satelitu radi sporije od jednako tačnog sata na Zemlji. Međutim, zbog manjeg delovanja ubrzanja sile teže na sat satelita u odnosu na sat na Zemlji, sat satelita radi brže.

U satelitskoj geodeziji su satovi, sa stabilnom frekvencijom $1 \cdot 10^{-15}$ za vremenski period od nekoliko sati.

Opšti oblik jednačine frekvencije je:

$$f_1(t) = f + \Delta f + \dot{f}(t - t_0) + \tilde{f}(t)$$

f =konstanta frekvencije

Δf =konstanta greške frekvencije (bias)

\dot{f} =trag frekvencije

$\tilde{f}(t)$ =slučajna greška frekvencije.

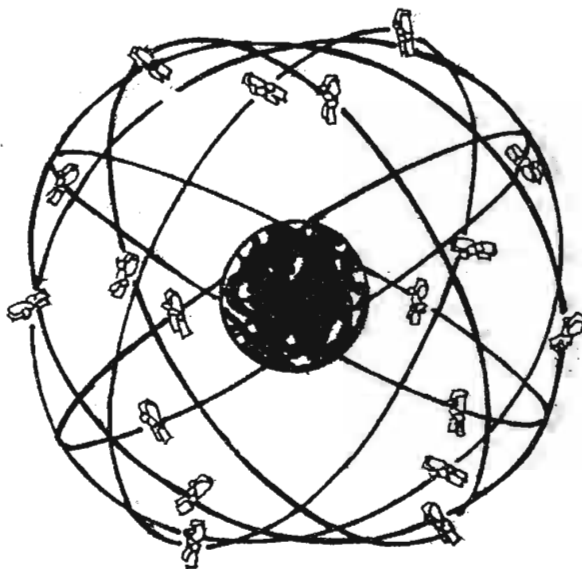
Globalni pozicijski sistemi – sistemi GPS

U ovom poglavlju prikazane su osnove, opšteg globalnog sistema za pozicioniranje, njihove tehnološke celine, metode merenja dužina na osnovu merenja vremena puta od satelita do opažачke stanice i određivanja na osnovu merenih faznih razlika.

9.1. Struktura GPS–sistema

Opšti sistem za pozicioniranje GPS, sačinjen je od tri tehnološke celine, odnosno segmenta: vasijski, kontrolni i korisnički segment.

1. Vasijski segment, slika 9.1.



Sl.9.1. Konstelacija satelita

Ovaj segment sastoji se od 24 satelita od kojih su 6 rezervnih. Sateliti su raspoređeni u šest putanja. Putanje satelita su na visini od oko 20 200 km od Zemlje, a nagnutost putanja, odnosno ugao inklinacije iznos. 55° . Sateliti obilaze putanje za 12 sati. Iznad horizonta uvek su 4–8 satelita. Svi sateliti emituju satelitski signal. Osnovna frekvencija sa satelitskog oscilatora je 10.23 MHz. Sve ostale frekvencije koje se koriste za merenje vremena putanje (L_1 , L_2 , C/A – kod, P – kod), izvedene su iz fundamentalne frekvencije, tablica 9.1.

Oznaka	Frekvencija (MHz)
Osnovna frekvencija	$f_0 = 10.23$
Noseći talas L1	$154f_0 = 1575.42 = 19 \text{ cm}$
Noseći talas L2	$120f_0 = 1227.60 = 24 \text{ cm}$
P-kod	$f_0 = 10.23$
C/A-kod	$f_0/10 = 1.023$
D-kod	$f_0/204\,600 = 50 \cdot 10^{-6}$

Stvarni navigacioni signal je binarni kod, matematički generisan i tretira se kao "pseudo slučajni šum" (PRN). P-kod i C/A-kod imaju razliku u fazi 90° . Dužina P-koda iznosi 266.5 dana.¹ P-kod i D-kod, modulirani su na nosećim talasima L1 i L2, a C/A-kod samo na L1 i ponavlja se svake milisekunde.

Informacije o putanji i satu satelita sadržane su u D-kodu. Ukupne informacije sastoje se od 1 500 bita, što odgovara vremenu emitovanja od 30 sekundi, a ukupna poruka koju emituje satelit sadrži deset reči, a svaka reč je od trideset bita. Poruka je podeljena na pet delova i svaki deo ima svoj sadržaj:

1. Sadrži podatke za popravku časovnika.
- 2–3. Sadrže satelitske efemeride preko kojih se sračunava položaj satelita u trenutnom koordinatnom sistemu vezanom za Zemlju.
4. Ovaj deo rezervisan je za obradu.
5. Sadrži podatke godišnjaka za jedan satelit.

Satelitske efemeride koje emituje satelit, su niz parametara, koji sadrže pored Keplerovih orbitalnih elemenata i njihove popravke:

- M_0 – srednja anomalija,
- n – priraštaj srednje ugaone brzine,
- e – ekcentricitet putanje,
- a – velika poluosovina elipse putanje,
- ω – argument perigeja,
- Ω – rektascenzija,
- i_0 – inklinacija,

¹Svaki satelit ima i "svoj" P-kod, dužine jedne nedelje, a zatim počinje ponovo emitovanje

- t_0 – trenutak prolaza perigeja,
 C_{us}, C_{uc} – Furijerovi koeficijenti za popravku argumenta latituda,
 C_{rs}, C_{rc} – Furijerovi koeficijenti za popravku orbitalnog radijusa,
 C_{is}, C_{ic} – Furijerovi koeficijenti za popravku ugla inklinacije.

2. Kontrolni segment

Ovaj segment ima zadatak da vrši praćenje, računanje, prenos podataka i nadzor koji je neophodan za dnevnu kontrolu svih GPS-satelita. Da bi se to ostvarilo postoje pet kontrolnih stanica (Hawaii, Colorado Springs, Ascension, Diego Garcia, Kwajalein). Glavna kontrolna stanica (Master-Control-Station) nalazi se u Koloradu Springsu.

Sakupljeni podaci prenose se glavnoj stanici gde se u sistemu WGS 84, računaju parametri putanje i koeficijenti za hod njihovih satova. Rezultati određivanja putanje daju se korisnicima u obliku gore pomenutih efemeroida, koji omogućuju računanje pozicije satelita $r^s(t)$ za bilo koji vremenski trenutak.

3. Segment korisnika

Ovaj segment sastoji se od prijemnika i opreme za prijem satelitskih signala. U zavisnosti od prijemnika, odnosno njegove vrste i kvaliteta, dobija se stvarna vremenska pozicija za navigacione svrhe ili neka statička ali tačnija pozicija za geodetsku primenu iz opažanja u toku izvesnog vremena.

9.2. Merenje dužina

Merenje dužina između prijemne stanice i satelita, može se izvršiti na dva načina: na osnovu merenja vremena puta signala, i iz faznih razlika. u oba slučaja dobijaju se pseudodužina, pošto se meri samo jednostruko, odnosno potrebno je uzeti u obzir međusobni odnos satova na satelitu i u prijemniku.

9.2.1. Određivanje pseudodužina na osnovu merenja vremena

Na slici 9.2 oznčeno je:

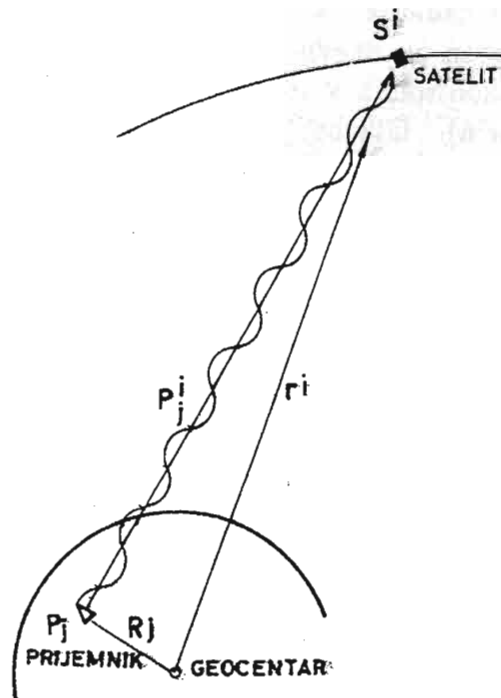
- R_j – radijusvektor terestičke stanice,
 r' – radijusvektor satelita,

Oznake satova:

- U^s – čitanje sata satelita u vreme emitovanja signala,
 U_T – čitanje sata prijemnika u trenutku prijema signala,
 δ^s, δ_T – odstupanje satova, satelita i prijemnika, od jedinstvene skale vremena, $U(\text{GPS})$.

$$\begin{aligned}
 U^s &= U^s(\text{GPS}) + \delta^s \\
 U_T &= U_T(\text{GPS}) + \delta_T \\
 \sim P_j^i &= c(U_T - U^s) = P_j^i + c\Delta\sigma
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}
 |r' - R_j| &= P_j^i = c[U_T(\text{GPS}) - U^s(\text{GPS})] \\
 \Delta\sigma &= \delta_T - \delta^s
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$



Sl.9.2. Osnovni koncept merenja dužina

9.2.2. Određivanje pseudo dužina na osnovu merenja faznih razlika

Uvedimo oznake za faze signala:

φ^S —faza primljenog satelitskog signala, φ_T —faza referentnog signala prijemnika.

Tada za faznu razliku φ_T^s za epohu $t = \frac{U}{\text{GPS}}$, na osnovu fazne jednačine elektromagnetnog talasa

$$(\varphi_{\text{vreme}} - \varphi_{\text{prostor}}) = \varphi = f(t - t_p) = f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

dobija,

$$\varphi_T^s = \varphi^S - \varphi_T = -\frac{f^s}{c}r + f^s(U + \delta^s) - f^T(U + \delta_T)$$

gde je f kružna frekvencija.

Ako usvojimo da je $f^s = f_T = f$, $r = P_j^i$, (zbog jednostavnijeg izvođenja) dobija se za faznu razliku:

$$\varphi_T^s = -\frac{f}{c} P_j^i - f \Delta \sigma \quad (9.3)$$

Fazna razlika φ_T^s za trenutak t ne može se direktno meriti, moguće je meriti samo njene promene $\Delta \varphi_T^s$ u vremenskom periodu $\Delta t = t - t_0$, pri nultom prolazu signala u epohi t_0 . Broj celih ciklusa talasa između satelita i prijemnika N , ostaje neodređen, odnosno (9.3) dobija novi oblik,

$$\varphi_T^s = \Delta \varphi_T^s|_{t_0}^t + N \quad (9.4)$$

Celobrojna konstanta u (9.4), N ostaje nepoznata sve dok se uzastopna merenja

$$\Delta \varphi_I = \Delta \varphi_T^s|_{t_0}^t$$

kontinuirano izvode bez prekida putanje satelita, N se menja ako se nastavi merenje posle gubitka signala. Celobrojna vrednost $\Delta \varphi_I$, tj. ukupan broj ciklusa naziva se Dopplerov broj. Ako trenutnu fazu φ_j^i primljenog signala u prijemniku od satelita, pretstavimo u funkciji primljene frekvencije i proteklog vremena, može se faza dati formulom,

$$\varphi_j^i = f \frac{\overline{P_j^i}}{c} = f[U_i(GPS) - U^s(GPS)] + N_j^i$$

Posle dodatnih izvođenja i sređivanja, dobija se za pseudoduzinu:

$$P_j^i = |r^i - R_j^i| = \lambda \cdot \varphi_j^i + c \Delta \sigma + N_j^i \quad (9.5)$$

Neodređenost broja N ostaje, a eliminiše se obradom simultanih merenja.

9.3. Popravke merenih dužina

Rezultati merenih dužina sadrže u sebi slučajne i sistematske greške. Ove greške nastaju za vreme emitovanja signala, na putu talasa ili u prijemniku. Ukupna popravka računa se po formuli:

$$p = \Delta p + c \Delta \delta + \Delta_{iono} + \Delta_{trop} \quad (9.10)$$

gde su: Δp – uticaj promene radijus vektora r^s ili R_T ,

$\Delta \sigma$ – uticaj zbog hoda satova satelita i prijemnika,

Δ_{iono} – popravka zbog uticaja jednosferske refrakcije,

Δ_{trop} – popravka zbog uticaja troposferske refrakcije.

Merene dužine treba popraviti za ove uticaje.

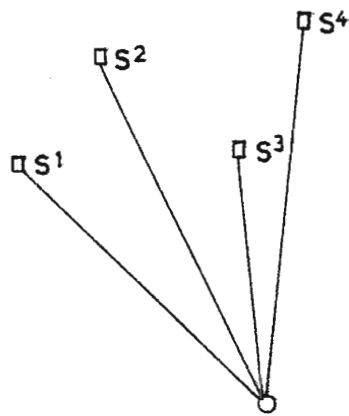
9.4. Metode merenja

Na osnovu načina merenja dužina, metode merenja dele se na:

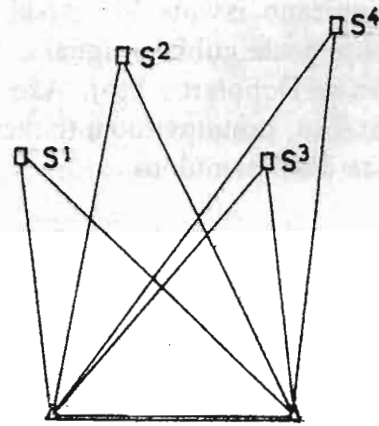
- apsolutne, odnosno relativne i
- statičke i kinematičke.

Apsolutno određivanje, je nezavisno određivanje pojedinih tačaka gde se koordinate dobijaju u jedinstvenom globalnom sistemu (WGS 84), na osnovu istovremeno (trenutno) izračunatih pseudo dužina. Za ovu metodu potreban je samo jedan prijemnik, slika 9.3.

Relativna određivanja, podrazumevaju simultano merenje dužina ili faze nosećeg talasa na dve ili više tačaka. Za ovu metodu upotrebljavaju se najmanje dva prijemnika. U slučaju merenja faznih razlika može se dobiti tačnost od 1ppm, slika 9.4.



Sl.9.3. Princip apsolutnih određivanja



Sl.9.4. Princip relativnih određivanja

U statičkom načinu ostaju prijemnici za vreme trajanja opažanja nepokretni, odnosno može se ostvariti veliki broj prekobrojnih merenja.

Kod kinematičkog načina prijemnici se pomeraju za vreme merenja. Jednostruka merenja dozvoljavaju samo jednostruko određivanje koordinata tačaka.

Apsolutno statističkom metodom postiže se za vreme od jedne sekunde upotrebom C/A-koda tačnost od 20–50 m, odnosno 5–20 m, P-kodom. Ova metoda upotrebljava se za određivanje koordinata tačaka koje se koriste u sledeće svrhe: za izradu karata, za geofizička istraživanja, kao i za vojne potrebe.

Apsolutnom kinematičkom metodom, postiže se sa vremenom opažanja od 1 milisekunde tačnost od 20–50 m. Kod određivanja koordinata pokretnih prijemnika, potrebno je 4 satelita za opažanje, za bilo koju epohu merenja. Ova metoda upotrebljava se za navigacijska određivanja u vazduhu, na moru i na kopnu.

Relativni statistički postupak, najviše je primenjivan od strane geodeta. Potrebno je najmanje dva prijemnika za merenje fazne razlike na dve stanice. Postiže se tačnost na 100 km, sa prijemom samo jedne frekvencije od 2 ppm, a sa prijemom

od dve frekvencije 1 ppm. Ova metoda upotrebljava se za određivanje koordinata tačaka, kod državnog premera, inženjerskoj geodeziji i fotogrametriji.

Relativno kinematički postupak, zahteva dve tačke sa poznatim koordinatama, a zatim jedan prijemnik ostaje stacionaran, a drugi se prenosi po nepoznatim tačkama. Tačnost ove metode za sada je $1\text{ cm}+1\text{ ppm}$, za merenje koje traje $5'$, odnosno 20 registracija u trajanju od oko $20''$. Proizilazi da ova metoda može zameniti klasičnu tahimetrijsku metodu snimanja detalja, a podesno bi bila i na rudnicima sa površinskim korovima gde se može iskoristiti, još kao tehnologija za stvaranje informaciono-upravljačkih sistema u realnom vremenu. U inženjerskoj geodeziji ekonomično je primeniti GPS kod trigonometrijskih mreža gde se zahteva milimetarska tačnost. Tehnologija GPS može se primenjivati i u mrežama sa stranama od 50 km, koje se koriste za geodinamička istraživanja i određivanja položaja bušotine.

9.5. Relativna određivanja

Za povećanje tačnosti, odnosno za odstranjivanje izvesnih grešaka merenja, daje se prednost merenju linearnih kombinacija faza u obliku:

- jednostrukih razlika (single difference),
- dvostrukih razlika (double difference),
- trostrukih razlika (triple difference).

Za ovo je neophodno imati najmanje dva prijemnika. Ovde se neće izvoditi postupak faznih razlika već ćemo dati samo njihove definicije:

- Metoda jednostrukih razlika je razlika između simultano primljenih faza od jednog satelita na dva prijemnika. Ovim postupkom eliminišu se uticaji nestabilnosti sata satelita.
- Metoda dvostrukih razlika, predstavlja razliku dveju jednostrukih razlika faza, koje se odnose na dva satelita u istom vremenskom trenutku. Ovim postupkom eliminišu se greške oba sata tj. greške sata satelita i greške satova oba prijemnika.
- Metoda trostrukih razlika u suštini predstavlja razliku dveju dvostrukih razlika, za isti raspored satelita i prijemnika u dva različita vremenska trenutka. Detaljnije o ovim razlikama može se naći u [11], [6], ...

9.6. Računanje položaja satelita i koordinata

1. Računanje položaja satelita u orbitalnoj ravni za vremenski trenutak t u pravouglom koordinatnom sistemu (x_0, y_0) .

Koordinatni početak orbitalnog koordinatnog sistema je u težištu Zemlje. Osnovna ravan je ravan orbitalne elipse, čija je Z -osa upravna na tu ravan. Osovina

X prolazi kroz ulazni čvor, a osa Y se bira da čini desni trijedrar, slika 9.5. Za računanje koristimo parametre iz satelitske poruke, $(M_0, u, e, a, \omega, C_{rs}, C_{rc}, t_0)$ i merenu veličinu t .

$$u_0 = v + \omega$$

$$\sin(v) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

Računanje poravaka za argument latitude,

$$\delta u = C_{us} \cos(2u_0) + C_{us} \sin(2u_0)$$

$$u = u_0 + \Delta u$$

Računanje orbitalnog radijusa

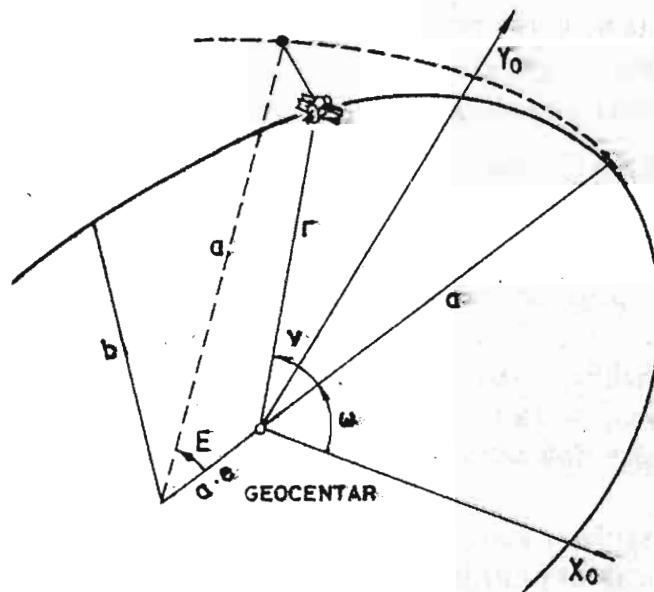
$$\Delta r = C_{rc} \cos(2u_0) + C_{rs} \sin(2u_0)$$

$$r = a(1 - e \cos E) + \Delta r \quad (9.11)$$

Računanje pravougljih koordinata:

$$X_0 = r \cos u$$

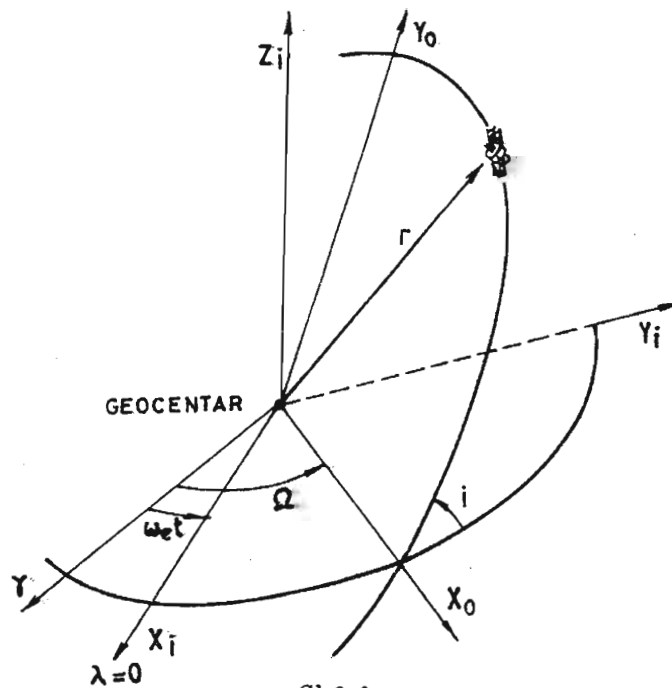
$$Y_0 = r \sin u \quad (9.12)$$



Sl.9.5. Orbitalna elipsa

2. Računanje položaja satelita i koordinata u trenutnom terestričkom koordinatnom sistemu

Koordinatni početak ovog koordinatnog sistema je u težištu Zemlje. Trenutna-istinita osa Z je rotaciona osovina Zemlje. Osa X je presek ravni upravnu na Z osu i ravni koja sadrži Grinički meridijan. Da bi se položaj satelita odredio u trenutnom terestričkom sistemu, treba orbitalni sistem okrenuti oko inklinacije i latitude ulaznog čvora, slika 9.6.



Sl.9.6.

Poznate veličine:

$i_0, \frac{di}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, C_{is}, C_{ic}$ i t_0 , koristimo iz satelitske poruke,

t - poznato iz merenja,

$\omega_e = 7.292115147 \cdot 10^{-5}$ rad/sec - srednja rotaciona brzina,

Računanje inklinacije:

$$\Delta i = C_{ic} \cos(2u_0) + C_{is} \sin(2u_0)$$

$$i = i_0 + \Delta i + \frac{di}{dt}(t - t_0) \quad (9.13)$$

Računanje longitude ulaznog čvora:

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{d\Omega}{dt}(t - t_0) - \text{popravka rektascenzije}$$

$$l = \Omega - \omega_e t - \text{popravka longitude}$$

Računanje pravougljih koordinata u trenutnom terestickom sistemu,

$$r_I = R_z(-l)R_x(-i)r_0 = R_z(-\Omega + \omega_e t)R_x(-i)r_0$$

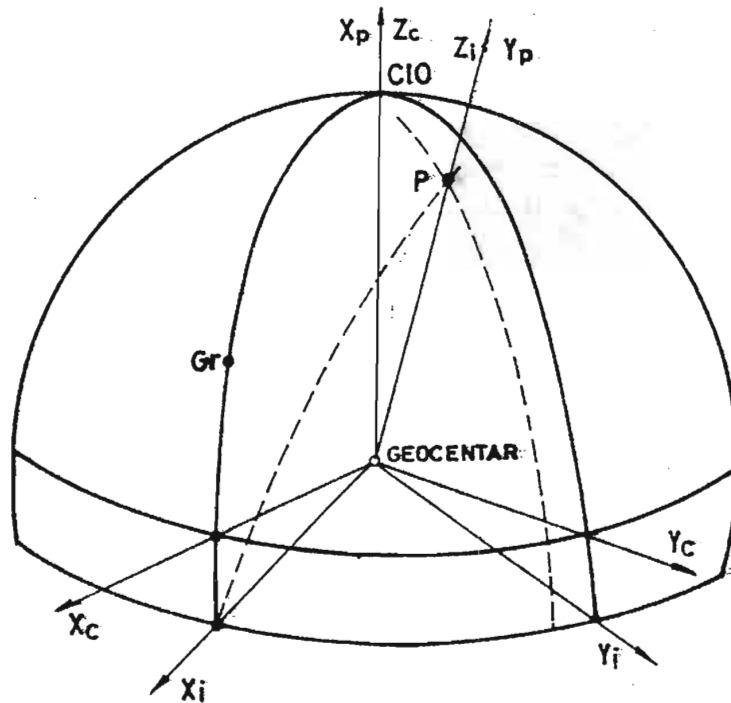
$$X_I = X_0 \cos(l) - Y_0 \cos(i) \sin(l)$$

$$Y_I = X_0 \sin(l) + Y_0 \cos(i) \cos(l) \quad (9.14)$$

$$Z_I = Y_0 \sin(i)$$

3. Računanje položaja satelita i koordinata u konvekcionom terestričkom koordinatnom sistemu (CIO)

Koordinatni početak ovog sistema je u težištu Zemlje. Osa Z je u pravcu preseka položaja severnog pola za epohu 1990–1995. Osa X prolazi kroz presek ravni koja je upravna na Z -osu i ravni koja sadrži meridijan Griniča. Osa Y čini sistem desne ruke. Trenutni položaj pola publikuje međunarodni biro za vreme BIH (Bureau International de l'Heure), obziron na CIO (Convictional International Origin). Za upoređivanje rezultata, saradunatih od različitih referentnih položaja, neophodno je da se oni prikažu u istom koordinatnom konvekcionom terestričkom sistemu (CIO), slika 9.7.



9.7. Koordinatni sistem CIO

Transformaciona formula:

$$r_c = R_y(-x_p) \cdot R_x(-y_p) r_I$$

gde su: r_c – vektor položaja satelita u konvekcionom terestričkom sistemu,

r_I – vektor položaja satelita u trenutnom koordinatnom sistemu,

R_x, R_y – rotacione matrice,

x_p, y_p – rotacioni uglovi.

Računanje koordinata:

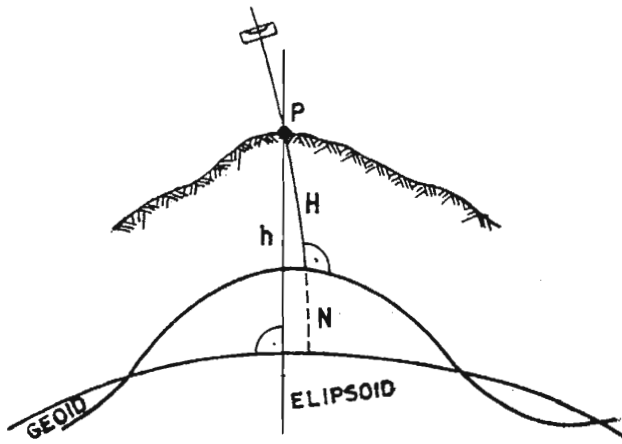
$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_I \quad (9.15)$$

4. Računanje visina

Rastojanje između tačke P , na fizičkoj površi Zemlje, i površi elipsoida, računato po normali na površ elipsoida, zove se elipsoidna visina.

Rastojanje od tačke P do površi geoida, računato po vertikalnoj zove se ortometrijska visina.

Ugao između normale na elipsoidu i vertikalne zove se odstupanje vertikalne, slika 9.8.



$$h = H + N$$

N -odstupanje geoida

Sl.9.8. Visine

5. Računanje elipsoidnih koordinata

Prirodan način prikazivanja položaja neke tačke na zemljinom elipsoidu je pomoću geografskih koordinata φ, λ i visine h , (sl.9.9) [6]. Za računanje φ, λ i h poznate su koordinate XYZ , a potreban je još radijus krivine normalnog preseka po prvom vertikalnu i ekscentricitet,

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} - \text{radijus krivine}$$

$$e^2 = \frac{[a^2 - b^2]}{a^2} - \text{prvi brojni ekscentricitet}$$

Računa se:

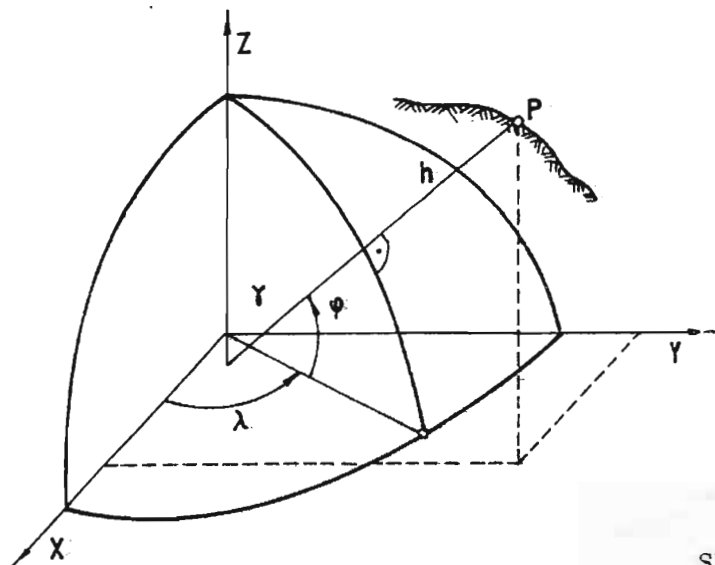
$$\tan \varphi = \frac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1 - e^2 N}{N + h}}$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1 - e^2 N}{N + h}} \right)$$

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$\tan \lambda = \frac{y}{x}$$

$$\lambda = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

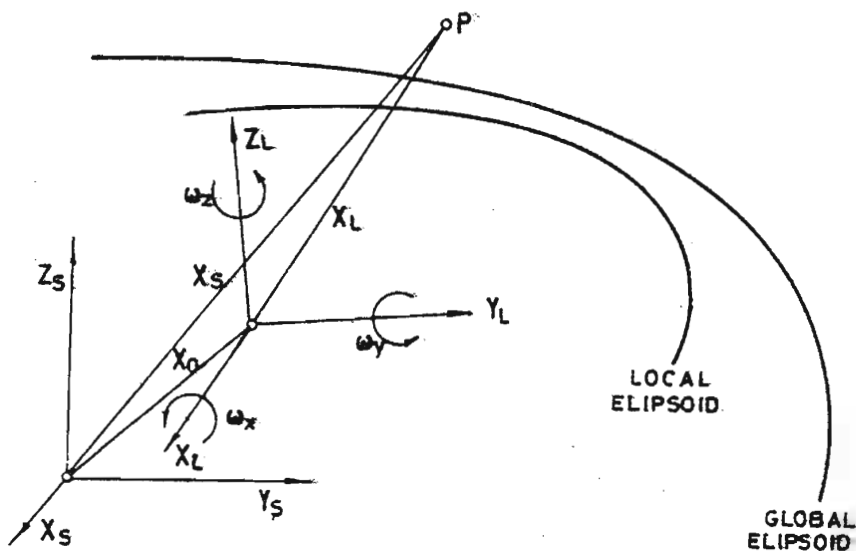


$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda (9.16) \\ Z &= [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{aligned}$$

Sl.9.9. Elipsoidne koordinate

6. Referentna transformacija

Koordinate tačaka koje se određuju GPS-metodom, dobijaju se u svetskom koordinatnom sistemu WGS 72 ili WGS 84. Da bi se ovi rezultati mogli porediti sa koordinatama tačaka zemaljskog koordinatnog sistema, potrebno je izvršiti transformaciju. Zato je potrebno znati početak koordinatnog sistema lokalnog elipsoida u odnosu na WGS 84, slika 9.10.



9.10. Referentna transformacija

Ako ose ovih sistema nisu paralelne, treba odrediti parametre rotacije, na osnovu koordinata tačaka na lokalnom elipsoidu i koordinata istih tačaka u sistemu WGS 84. Određivanje parametara za transformaciju vrši se izravnanjem po metodi najmanjih. Treba odrediti parametre za: tri translacije i tri rotacije, a eventualno i faktor razmere. Transformacija se vrši po formuli :

Transformacija se vrši po formuli :

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_s = s \cdot \begin{vmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_L + \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} \quad (9.17)$$

gde je s-faktor razmere.

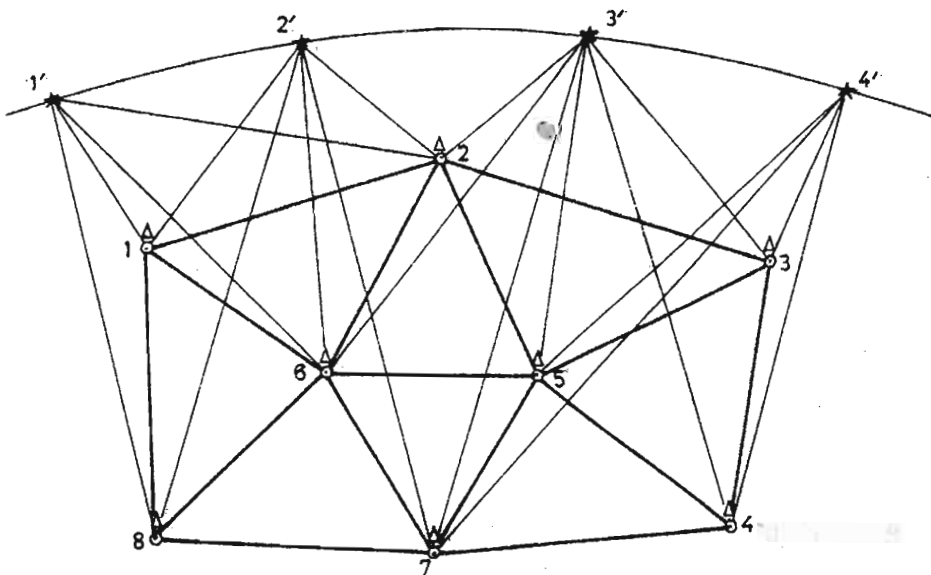
7. Primena GPS tehnologije na rudnicima sa površinskom eksploatacijom

Primena GPS tehnologije, koja predstavlja uspešnu kombinaciju svemirske, telekomunikacione i računarske tehnike, na rudnicima sa površinskom eksploatacijom, moguća je kod izvođenja sledećih radova:

- izvođenje merenja u osnovnoj rudničkoj trigonometrijskoj mreži - ORTM-i,
- praćenja pozicija kapitalne opreme,
- praćenja transportne opreme i mašina,
- izgradnja puteva, kanala i sličnih objekata
- praćenja površinskih pomeranja tla (klizišta i puzišta),
- praćenje proizvodnje rudnika u realnom vremenu
- u geološkim istražnim radovima i dr.

Prema tome ova tehnologija GPS omogućuje inženjerima, ne samo pasivno praćenje, već i kontrolu i upravljanje tehnološkim procesima iz dispečerskog centra.

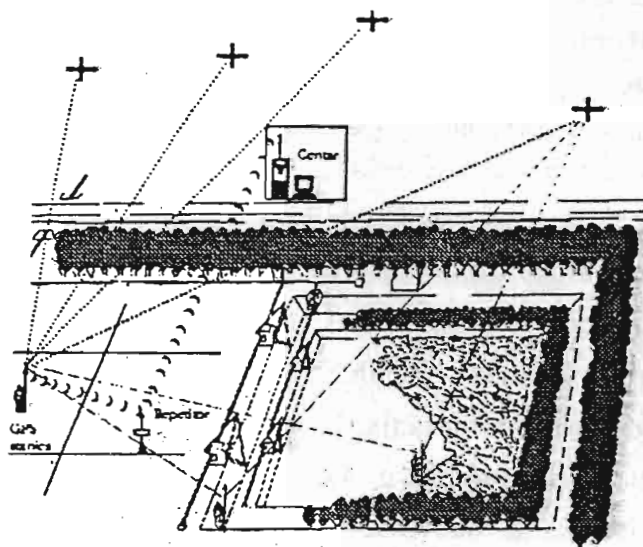
Izvođenje merenja u osnovnim rudničkim trigonometrijskim mrežama.



Sl. 9.11. Određivanje koordinata terestričkih tačaka primenom GPS tehnologije

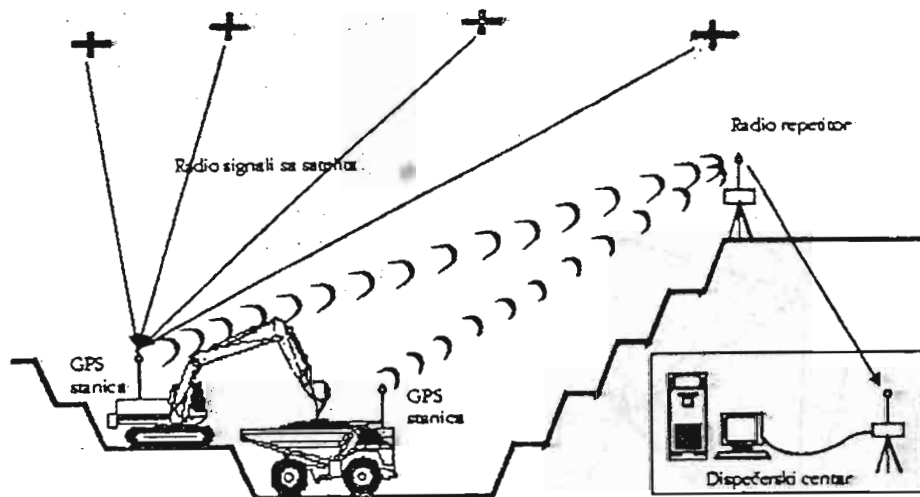
Merenja se ostvaruju, prijemom emitovanih talasa iz satelita. Za određivanje koordinata trigonometrijskih tačaka treba izvršiti prijem emitovanih signala sa više satelita. Posle obrade podataka, na osnovu izložene materije određuju se koordinate tačaka (na slici) ukupno osam.

Primena kod snimanja detalja, izvođenja projekta i praćenja radova proizvodnje u realnom vremenu



Sl. 9.12. Primer primene GPS-a u merenju prostornih elemenata površinskog kopa

Primena kod praćenja kapitalne opreme



Sl. 9.13. Primer primene GPS-a za prostorno pozicioniranje mašina.

Na kraju možemo kazati da tehnologija GPS-a može uspešno zameniti klasične tehnologije, dobijajući rezultate u veoma kratkom realnom vremenu.

Literatura

1. *M. Patarić*, 1990.: RUDARSKA MERENJA I deo, Beograd.
2. *N. Svečnikov*, 1953.: VIŠA GEODEZIJA, I knjiga, Beograd.
3. *N. Svečnikov*, 1955.: VIŠA GEODEZIJA, II knjiga, Beograd.
4. *N. Svečnikov*, 1953.: VIŠA GEODEZIJA, III knjiga, Beograd.
5. *A. Živković*, 1972.: VIŠA GEODEZIJA, Beograd.
6. *A. Živković*, 1989.: GLOBALNI POZICIONI SISTEM (prevod), Beograd.
7. *B. Borčić*, 1955.: GAUS-KRIGEROVA PROJEKCIJA, VGI, Beograd.
8. *P.S. Zakatov*, 1976.: KURS VIŠE GEODEZIJE, Moskva.
9. *M. Starčević*, 1991.: GRAVIMETRIJSKE METODE ISTRAŽIVANJA, Beograd.
10. *T. Wunderlich*, 1985.: DIE VORAUSSETZUNGSFREIE BESSTIMUNG VON REFRAKTIONSWINKELN, Wien.
11. *A. Bilajbegović, B. Hofmann und H. Lichtenegger*, 1991.: OSNOVNI GEODETSKI RADOVI-SAVREMENE METODE GPS, Tehnička knjiga, Zagreb.
12. *M. Terzić*, 1935.: VIŠA GEODEZIJA, knjiga II. VGI, Beograd.
13. *M. Terzić*, 1935.: VIŠA GEODEZIJA, knjiga I, VGI, Beograd.
14. *F. Helmert* (1880), 1962.: DIE MATEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN THEORIEN DER HÖHEREN GEODÄSIE, I. Teil, Leipzig.
15. *F. Helmert* (1880), 1962.: DIE MATEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN THEORIEN DER HÖHEREN GEODÄSIE, II. Teil, Leipzig.
16. *E. Boiko, B. Klenickii, I. Landis, G. Četinov*, 1972.: POSTROENIE, URAVNIVANIE I OCENKA TOČNOSTI KOSMIČESKIH GEODEZIČESKIH SETEI, "Nedra", Moskva.
17. *O. Razumov*, 1974.: OROSTRANSTVENIJA GEODEZIČESKAJA VEKTORNAJA SET, "Nedra", Moskva.
18. *V. Džeparoski*, 1990.: PRILOG ODEREĐIVANJU I ELIMINISANJU ATMOSFERSKOG EFEKTA KOD MERENJA LINEARNIH VELIČINA I ZE-

NITNIH DALJINA, doktorska disertacija, Beograd.

19. *N.Činklović*, 1978.: ANALIZA I PREDHODNA OCENA TAČNOSTI METODA PRECIZNIH GEODETSKIH MERENJA, GF, Beograd.
20. *N.Abakumov*, 1949.: VIŠA GEODEZIJA II skripta, Zagreb.
21. *D.Prosen*,: skripta, METODE GEOFIČKIH ISTRAŽIVANJA – GRAVIMETRIJSKE METODE, Beograd.
22. *B.Apsen*, 1965.: REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE – III deo, Tehnička knjiga, Zagreb.
23. *B.Apsen*, 1958.: REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE – II deo, Tehnička knjiga, Zagreb.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

528.28(075.8)

DŽEPAROSKI, Vojislav

Geodezija II. Deo 1, Astronomija i viša
geodezija / Vojislav Džeparoski. - Beograd:
Rudarsko-geološki fakultet, 1997 (Beograd:
Udruženje Nauka i društvo Srbije). - 160 str.
: graf. prikazi ; 24 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Beogradu. -
Tiraž 150. - Bibliografija: str. 51, 159-160.

ISBN 86-80887-76-5

a) Geodetska astronomija
ID=56807180