UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTETI

MATEMATIČKI FAKULTET

BEOGRAD

Biljana Č. Popović

PROGNOZE I OCENE PARAMETARA ARMA SERIJA SA EKSPONENCIJALNIM RASPODELAMA

-doktorska disertacija-

BEOGRAD, 1990.

Mentor: Dr Jovan Mališić
Matmatički fakultet PMF
Beograd

Članovi komisije: Dr Zoran Ivković
Matematički fakultet PMF
Beograd

Dr Pavle Mladenović
Matematički fakultet PMF
Beograd

Datum odbrane doktorske disertacije:

Datum promocije doktorske disertacije:

Doktorat nauka:

Prognoze i ocene parametara ARMA serija sa eksponencijalnim raspodelama

Rezime: Rad se bavi vremenskim serijama sa eksponencijalnim marginalnim raspodelama.

Uvodni deo rada posvećen je autoregresivnom modelu prvog reda sa slučajnim koeficijentima i eksponencijalnom marginalnom raspodelom. Definisana je vremenska serija prvog reda sa eksponencijalnom raspodelom i slučajnim koeficijentima. Slučajni koeficijent autoregresije pokazuje specijalan oblik zavisnosti sa inovacionim nizom, tačnije, sa diskretno raspodeljenim činiocem ovog niza. Model se opisuje uz pomoć slučajne diferencne jednačine $X_t=U_tX_{t-1}+V_tE_t$. Dokazuje se egzistencija i navodi eksplicitni oblik rešenja ove jednačine. Daju se uslovi pod kojima je rešenje jednačine strogo stacionarno i ergodično. Specijalni uslovi koji se zadaju za koeficijente U_t i V_t ispunjeni su kod široke klase iz grupe vremenskih serija sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom. Navedeno je ispunjenje tih uslova kod nekih konkretnih vremenskih serija.

Drugi deo rada posvećen je ocenama parametara modela FAREX(1). Metodom najmanjih kvadrata u dva koraka ocenjuju se parametri ovog modela. Navodi se i jedna specijalna ocena parametra α.

Treća celina u radu odnosi se na prognozu i interpolaciju nekih vremenskih serija sa eksponencijalnom raspodelom. Posebno se zadržava na prognozi i interpolaciji modela definisanog gore navedenom diferencnom jednačinom. Osim ovog navodi se prognoza i nekih autoregresivnih modela višeg reda kao i jednog modela pokretnih sredina višeg reda.

Ključne reči: vremenska serija, eksponencijalna marginalna raspodela, slučajna diferencna jednačina, ergodičnost, stacionarnost, metod najmanjih kvadrata, prognoza, interpolacija

Predictions and Estimations of Parameters of Exponentially Distributed ARMA Series

Abstract: The time series with exponential marginals are treated in the thesis.

The first part of the thesis is about the first order autoregressive exponentially distributed random coefficient model. The special type of dependency between the random coefficient of the autoregression and the inovation sequence is defined. The random difference equation which defines the model is $X_t=U_tX_{t-1}+V_tE_t$. The above mentioned dependency is related to the sequeces $\{U_t\}$ and $\{V_t\}$. The explicite solution of the equation is given and its existence, ergodicity, stationarity and strong stationarity has been prooved.

The special dependency between two sequeces $\{U_t\}$ and $\{V_t\}$ that has been defined, is satisfied for wide class of autoregressive time series with exponential marginals. Some examples are given.

The second part of the thesis is about the estimators of the parameters of FAREX(1). The least squares method is applied in two steps. There is a note about the special estimator of the parameter α.

The prediction and interpolation of some time series with exponential marginal distribution is the subject of the third part of the thesis. Specially, the model that has been defined by the above difference equation is predicted and its missing values are interpolated.

The prediction of some higher order autoregressive models is treated and also of the q-th order moving average time series.

Key words: time series, exponential marginal distribution, stochastic difference equation, ergodicity, stationarity, least square method, prediction, interpolation

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Tek nešto više od desetak godina unazad kako se u teoriji slučajnih procesa sa diskretnim vremenom javljaju modeli koji nisu Gausovog tipa, tj. čija marginalna raspodela nije Gausova. Potreba za ovakvim modelima potiče iz činjenice da mnoge pojave, pre svega u prirodi, koje se opisuju vremenskim serijama nisu Gausovog tipa. Na primer, takve su: brzine vetrova, priraštaji voda u rekama, vremena opsluživanja u repu i dr. Za opisivanje ovih pojava bilo je poželjno naći modele koji su što je moguće jednostavniji po svojoj strukturi i broju parametara koji u njoj učestvuju, a opet dovoljno prilagodljivi da bi se dobila realizacija željene forme. Pri tome su najčešće korišćene eksponencijalna, Laplasova i gama raspodela i njihove mešavine. Najjednostavnija, najčešće korišćena i analitički najprivlačnija je, kako se za sada čini, eksponencijalna raspodela. Pri svemu tome se povinovalo i želji za jednostavnom simulacijom, tj. ostvarivanjem modela na računarima, dakle, da model bude linearna kombinacija slučajnih promenljivih. Tako su nastali modeli autoregresivnog tipa EAR(1) (Gaver i Lewis, 1980), EAR(p) (Lawrance i Lewis, 1980), NEAR(1) i TEAR(1) (Lawrance i Lewis, 1981), NEAR(2) (Lawrance i Lewis, 1985), modeli tipa pokretnih sredina EMA(1) (Lawrance i Lewis, 1977), EMA(q) (Lawrance i Lewis, 1980) a u istom radu i EARMA(p,q), eksponencijalna vremenska serija tipa autoregresivnih pokretnih sredina, i mnogi drugi modeli istorijski gledano nastali posle ovih, a složeniji od ovih po svojoj strukturi. Svi oni imaju zajedničko to da je njihova linearnost vezana za probabilistički izbor između nekoliko linearnih kombinacija slučajnih promenljivih.

Ovaj rad se bavi vremenskim serijama sa eksponencijalnim marginalnim raspodelama, a naročito modelima AREX(1) i FAREX(1) (Mališić, 1987). Osim toga, značajno mesto u radu posvećeno je autoregresivnom modelu prvog reda sa slučajnim koeficijentima i eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

Uopšte, vremenske serije sa slučajnim koeficijentima predmet su proučavanja tek od sredine sedamdesetih godina, mada je potrebu za njima uočio još Kendal 1953. godine, kada je vršio modeliranje podataka iz oblasti ekonomije. Uopštavanje modela sa konstantnim koeficijentima modelom čiji su koeficijenti i sami promenljivi sa vremenom, za praćenje pojava kao što su neke od promena u ekonomiji, pokazalo se vrlo logičnim. Različiti koraci su učinjeni u ovom pravcu. Prirodna varijanta ovih modela su autoregresivni modeli sa slučajnim koeficijentima. Andžel (Anděl, 1976) je primetio da pri modeliranju pojava iz oblasti hidrologije i meteorologije merni podaci pokazuju višestruko slučajno ponašanje, što ga je dovelo do konstrukcije skalarne autoregresivne vremenske serije reda n sa slučajnim koeficijentima. Andžel je dao potrbne i dovoljne uslove za stacionarnost u širokom smislu ovog modela. Međutim, i tada i kasnije (Nicholls i Quinn, 1980, Quinn i Nichols, 1981, Anděl, 1980) slučajni koeficijenti autoregresije su definisani kao niz slučajnih promenljivih koji je nezavisan od inovacionog niza. U ovom radu je, kao originalan doprinos, definisana autoregresija

1. MODELI SA EKSPONENCIJALNIM MARGINALNIM RASPODELAMA

1.1 Definisaćemo najpre niz u oznaci $\{E_t,\ t\in D=\{0,\pm1,\pm2,...\}\}$ (u daljem tekstu se podrazumeva $t\in D$, osim ako je drugačije naglašeno) nezavisnih identički raspodeljenih slučajnih promenljivih (n.i.r.) sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom μ,

$$P\{E_t<x\}=F_E(x)=\begin{cases} 1-e^{-\mu x} & , x>0 \\ 0 & , x\leq 0 \end{cases} = u(x)(1-e^{-\mu x})\ ,\ \mu>0 \qquad (1.1.1)$$

$$f_E(x)=dF_E(x)/dx=u(x)\mu e^{-\mu x}\ , \qquad (1.1.2)$$

gde je $u(x)$ Hevisajdova jedinična funkcija.

Uporedo sa oznakom μ za osnovni parametar raspodele niza $\{E_t\}$ koristićemo i oznaku $1/m$, tj. $m=1/\mu$, ali će oznake m i μ u celom radu biti korišćene samo u ovom značenju.

Kompletan postupak definisanja autoregresivnih modela prvog reda sa eksponencijalnom (μ) marginalnom raspodelom prikazaćemo na primeru modela AREX(1). Razlozi za izbor ovog modela su da je to model koji sadrži kao svoje posebne slučajeve mnoge modele koji su istorijski nastali pre njega, a drugi razlog je neposredno vezan za originalni deo ovog rada koji tretira modele definisane slučajnom diferencnom jednačinom (0.1). Naime, AREX(1) je model koji može imati i reprezentaciju oblika (0.1).

Dakle, neka je stacionarni niz slučajnih promenljivih $\{X_t,\ t\in D\}$ definisan jednačinom

$$X_t=\begin{cases} \delta_t & \text{s.v. } p_0\ , \\ \alpha X_{t-1} & \text{s.v. } p_1\ , \\ \beta X_{t-1}+\delta_t & \text{s.v. } q_1\ , \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

gde je $0 \le p_0, p_1, q_1 \le 1$, $q_1 > 0$, $p_0+p_1+q_1=1$, $0<\alpha,\beta<1$, a "s.v." znači "sa verovatnoćom". Nizovi $\{X_t\}$ i $\{\delta_t\}$ su polunezavisni, tj. X_t i δ_n su nezavisni ako je $t<n$. Niz $\{\delta_t, t\in D\}$ je niz n.i.r. slučajnih promenljivih. Cilj je odrediti raspodelu niza $\{\delta_t\}$ tako da niz $\{X_t\}$ definisan jednačinom (1.1.3) ima eksponencijalnu (μ) marginalnu raspodelu.

Označimo sa

$$\Phi_X(s)=E(\exp(-sX)) \ , \quad \Phi_\delta(s)=E(\exp(-s\delta)) \tag{1.1.4}$$

Laplas-Stiltjesove transformacije slučajnih promenljivih X i δ redom. Za slučajnu promenljivu X sa eksponencijalnom (μ) raspodelom biće

$$\Phi_X(s)=\frac{\mu}{\mu+s} \quad . \tag{1.1.5}$$

S obzirom na pretpostavljenu stacionarnost i polunezavisnost, (1.1.4) i (1.1.5) daju:

$$\Phi_\delta(s)=\frac{\Phi_X(s)-p_1\Phi_X(\alpha s)}{p_0+q_1\Phi_X(\beta s)}= \tag{1.1.6}$$

$$=\frac{\mu(\mu+\beta s)[(p_0+q_1)\mu+(\alpha-p_1)s]}{(\mu+s)(\mu+\alpha s)[(p_0+q_1)\mu+p_0\beta s]}=$$

$$=B_0\frac{\mu}{\mu+s}+B_1\frac{\mu}{\mu+\alpha s}+[B_2/(p_0+q_1)]\frac{\mu}{\mu+p_0\beta s/(p_0+q_1)} \ ,$$

gde su B_0, B_1 i B_2 redom

$$B_0=\frac{1-\beta}{p_0+q_1-p_0\beta}, \quad B_1=\frac{p_1(\beta-\alpha)}{\alpha(p_0+q_1)-p_0\beta}, \quad B_2=\frac{\beta q_1(\alpha-p_1-p_0\beta)(p_0+q_1)}{(p_0+q_1-p_0\beta)[\alpha(p_0+q_1)-p_0\beta]}. \tag{1.1.7}$$

Veličine B_0, B_1 i $B_2/(p_0+q_1)$ će biti verovatnoće čiji je zbir 1 ako i samo ako budu zadovoljeni uslovi

$$p_1<\alpha<\beta \ , \quad p_1+p_0\beta<\alpha \ . \tag{1.1.8}$$

Iz (1.1.6) i (1.1.7) proizilazi da δ_t treba da bude definisana kao mešavina

$$\delta_t=\begin{cases} E_t & \text{s.v. } B_0 \\ \alpha E_t & \text{s.v. } B_1 \\ p_0\beta/(p_0+q_1)E_t & \text{s.v. } B_2/(p_0+q_1) \end{cases} \tag{1.1.9}$$

pri čemu treba da važe uslovi (1.1.8).

Time je potpuno definisana struktura modela AREX(1).

Do autokovarijansne strukture modela doći ćemo množenjem jednačine (1.1.3) sa X_{t-r}, $r>0$, odakle bismo izračunali

$$E(X_tX_{t-r})=(p_1\alpha+q_1\beta)E(X_{t-1}X_{t-r})+(p_0+q_1)E(\delta_t)E(X_{t-r}). \tag{1.1.10}$$

Kako je

$$E(X_t)=(p_1\alpha+q_1\beta)E(X_{t-1})+q_1E(\delta_t) \tag{1.1.11}$$

i

$$E(\delta_t)=(1-p_1\alpha-q_1\beta)(q_1\mu)^{-1} \tag{1.1.12}$$

iz (1.1.10), (1.1.11) i (1.1.12) sledi da je

$$K_r=Cov(X_t,X_{t-r})=E(X_tX_{t-r})-E(X_t)E(X_{t-r})=(p_1\alpha+q_1\beta)K_{r-1} \ . \tag{1.1.13}$$

Iterativnim postupkom zaključujemo da je

$$K_r=(p_1\alpha+q_1\beta)^rK_0 \tag{1.1.14}$$

gde je $K_0=Var(X_t)$, disperzija slučajne promenljive X_t, pa je autokorelaciona funkcija

$$\rho_r = K_r/K_0 = (p_1\alpha+q_1\beta)^r \quad , \quad \rho_0=1 \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r. \tag{1.1.15}$$

Dakle, ako označimo sa

$$a = p_1\alpha + q_1\beta \quad \Rightarrow \quad 0 < a < 1 \ , \tag{1.1.16}$$

onda se, s obzirom na $Var(X_t)=1/\mu^2$, autokovarijansna funkcija može zapisati kao

$$K_h = a^{|h|}/\mu^2 \quad \text{za } h\in D \ . \tag{1.1.17}$$

Sada je jednostavno razmotriti i spektralnu gustinu procesa AREX(1),

$$f(\tau) = (2\pi)^{-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} K_h e^{-i\tau h} = (2\pi\mu^2)^{-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} a^{|h|} e^{-i\tau h} =$$

$$= (2\pi\mu^2)^{-1} \frac{1-a^2}{(1-ae^{-i\tau})(1-ae^{i\tau})} \ . \tag{1.1.18}$$

Dakle, vidi se da je spektralna gustina ovog modela parna, skoro svuda pozitivna funkcija i racionalna po $e^{i\tau}$.

Specijalni slučajevi modela AREX(1) bi se mogli grupisati na sledeći način:

a) FAREX(1) je specijalan slučaj modela AREX(1) kod koga je $p_0=0$ i $0<p_1<1$. Tada vremenska serija $\{X_t\}$ ima oblik

$$X_t = \begin{cases} \alpha X_{t-1} & \text{s.v. } p_1 \\ \beta X_{t-1} + \delta_t & \text{s.v. } q_1 = 1-p_1 \end{cases} \tag{1.1.19}$$

gde je mešavina δ_t definisana na sledeći način

$$\delta_t = \begin{cases} 0 & \text{s.v. } (\alpha-p_1)\beta/[(1-p_1)\alpha] \\ E_t & \text{s.v. } (1-\beta)/(1-p_1) \\ \alpha E_t & \text{s.v. } p_1(\beta-\alpha)/[(1-p_1)\alpha] \end{cases} \tag{1.1.20}$$

a za čiju je egzistenciju potrebno i dovoljno da važe uslovi

$$0 < p_1 \le \alpha \le \beta < 1 \ . \tag{1.1.21}$$

Pri $p_1=\alpha$, zatim $\alpha=\beta$ i na kraju $p_1=\alpha=\beta$ imamo još jednostavnije specijalne modele, pa se tako pri uslovu $p_1=\alpha=\beta$, dobija poznati "stariji" model EAR(1) kao specijalan slučaj modela FAREX(1), odnosno AREX(1).

b) NEAR(1) kao specijalan slučaj modela AREX(1) dobija se iz poslednjeg pri uslovu $\alpha=p_1=0$.

c) SAREX(1) se dobija pri uslovu $\alpha=\beta$ za koji niz $\{\delta_t\}$ ima reprezentaciju

$$\delta_t=\begin{cases} E_t & \text{s.v.} \quad (1-\beta)/(p_0+q_1-p_0\beta) \\ [p_0\beta/(p_0+q_1)]E_t & \text{s.v.} \quad 1-(1-\beta)/(p_0+q_1-p_0\beta) \end{cases} , \quad \beta\geq\frac{p_1}{p_1+q_1} . \tag{1.1.22}$$

d) Uslov $\alpha-p_1=p_0\beta$ daje niz $\{\delta_t\}$ definicijom

$$\delta_t=\begin{cases} E_t & \text{s.v.} \quad (1-\beta)/(1-\alpha) \\ \alpha E_t & \text{s.v.} \quad (\beta-\alpha)/(1-\alpha) \end{cases} , \quad \beta\geq\alpha \quad . \tag{1.1.23}$$

e) Uslov $\alpha=\beta=p_1/(p_1+q_1)$ daje najjednostavniju definiciju niza $\{\delta_t\}$, naime $\delta_t=E_t$ skoro izvesno.

Zadržimo se još malo na specijalnim slučajevima EAR(1), NEAR(1) i FAREX(1) na koje će se delom odnositi rezultati narednih poglavlja.

Autori modela EAR(1) su postavili sebi zadatak da odrede raspodelu inovacionog niza $\{\delta_t\}$, tako da autoregresivna vrmenska serija $\{X_t\}$,

$$X_t=\beta X_{t-1}+\delta_t \quad , \quad 0\leq\beta<1 \tag{1.1.24}$$

ima eksponencijalnu marginalnu raspodelu sa parametrom μ. Primenom Laplas-Stiltjesove transformacije dobija se

$$\Phi_\delta(s)=\frac{\Phi_X(s)}{\Phi_X(\beta s)}=\frac{\mu+\beta s}{\mu+s}=\beta+(1-\beta)\frac{\mu}{\mu+s} . \tag{1.1.25}$$

To znači da odgovor na postavljeni zadatak daje mešavina

$$\delta_t=\begin{cases} 0 & \text{s.v.} \quad \beta \\ E_t & \text{s.v.} \quad 1-\beta \end{cases} . \tag{1.1.26}$$

Autokorelaciona funkcija modela EAR(1) je

$$\rho_r=\beta^r \quad , \quad r>0 \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r \quad , \tag{1.1.27}$$

a spektralna gustina

$$f(\tau)=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2-2\beta\cos\tau} \quad . \tag{1.1.28}$$

Najjednostavniji model sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom kod koga je ne samo inovacioni niz, već i autoregresija definisana mešavinom, je NEAR(1):

$$X_t=\delta_t+\begin{cases}\beta X_{t-1} & \text{s.v.} \quad q_1\\ 0 & \text{s.v.} \quad 1-q_1\end{cases} \quad , \quad 0<q_1\leq 1 \ , \ 0<\beta\leq 1 \ . \tag{1.1.29}$$

Laplas-Stiltjesova transformacija ove vremenske serije, uz isti zadatak kao i u prethodnom slučaju, daje za inovacioni niz $\{\delta_t\}$

$$\Phi_\delta(s)=\frac{\Phi_X(s)}{q_1\Phi_X(\beta s)+(1-q_1)}=$$

$$=(1-\beta)[1-(1-q_1)\beta]^{-1}\frac{\mu}{\mu+s}+q_1\beta[1-(1-q_1)\beta]^{-1}\frac{\mu}{\mu+(1-q_1)\beta s} \quad , \tag{1.1.30}$$

odakle se dobija konveksna eksponencijalna mešavina

$$\delta_t=\begin{cases}E_t & \text{s.v.} \quad (1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta]\\ (1-q_1)\beta E_t & \text{s.v.} \quad q_1\beta/[1-(1-q_1)\beta]\end{cases} \quad , \quad q_1\beta\neq 1 \ . \tag{1.1.31}$$

Autokorelaciona funkcija ovog modela je

$$\rho_r=(q_1\beta)^r \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r \quad , \tag{1.1.32}$$

a spektralna gustina

$$f(\tau)=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{1-(q_1\beta)^2}{(1-q_1\beta e^{-i\tau})(1-q_1\beta e^{i\tau})} \quad . \tag{1.1.33}$$

Što se tiče modela FAREX(1), definicija (1.1.20) je posledica Laplas-Stiltjesove transformacije zadate definicijom (1.1.19) i zahtevom za eksponencijalnom marginalnom raspodelom procesa $\{X_t\}$, dakle,

$$\Phi_\delta(s)=(\alpha-p_1)\beta(\alpha q_1)^{-1}+[(1-\beta)/q_1]\frac{\mu}{\mu+s} + (\beta-\alpha)p_1(\alpha q_1)^{-1}\frac{\mu}{\mu+\alpha s} \;, \; q_1=1-p_1 . \tag{1.1.34}$$

Autokorelaciona funkcija mu je

$$\rho_r=[p_1\alpha+(1-p_1)\beta]^r \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r \quad , \tag{1.1.35}$$

a kod spektralne gustine čija je forma (1.1.18), je

$$a=p_1\alpha+(1-p_1)\beta \quad . \tag{1.1.36}$$

Model TEAR(1) je predstavnik autoregresije prvog reda sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom čiji inovacioni niz nije mešavina, već je niz slučajnih promenljivih $\{(1-q_1)E_t\}$ sa verovatnoćom jedan. Naime,

$$X_t=\delta_t+\begin{cases} X_{t-1} & \text{s.v.} \quad q_1 \\ 0 & \text{s.v.} \quad 1-q_1 \end{cases} \quad , \quad 0<q_1\le 1 \quad , \tag{1.1.37}$$

pri čemu je

$$\Phi_\delta(s)=\frac{\Phi_X(s)}{q_1\Phi_X(s)+(1-q_1)}=\frac{\mu}{\mu+s(1-q_1)} \quad , \tag{1.1.38}$$

dakle,

$$\delta_t=(1-q_1)E_t \tag{1.1.39}$$

skoro izvesno. Za ovaj model je

$$\rho_r=q_1^r \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r \tag{1.1.40}$$

i shodno tome

$$f(\tau)=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{1-q_1^2}{(1-q_1e^{-i\tau})(1-q_1e^{i\tau})} \quad . \tag{1.1.41}$$

1.2 Pozabavimo se sada definicijama nekih autoregresivnih vremenskih serija višeg reda sa eksponencijalnom (μ) marginalnom raspodelom o kojima će takođe biti reči u nekim od narednih glava. To su modeli EAR(2) i NEAR(2) kao i EAR(p).

Najpre EAR(2) (Lawrance i Lewis, 1980) sa definicijom

$$X_t=\begin{Bmatrix} \alpha_1 X_{t-1} & \text{s.v.} & 1-\alpha_2 \\ \alpha_2 X_{t-2} & \text{s.v.} & \alpha_2 \end{Bmatrix} + \delta_t \tag{1.2.1}$$

gde su α_1 i α_2 konstante, $0<\alpha_1,\alpha_2<1$. Raspodela niza $\{\delta_t\}$ je takođe na jedinstven način definisana zahtevom da slučajne promenljive X_t imaju eksponencijalnu (μ) marginalnu raspodelu. Dakle, takođe primenom Laplas-Stiltjesovih transformacija, dobijamo

$$\phi_\delta(s)=\frac{(\mu+\alpha_1 s)(\mu+\alpha_2 s)}{(\mu+s)[(1-\alpha_2)(\mu+\alpha_2 s)+\alpha_2(\mu+\alpha_1 s)]}=$$

$$=\alpha_1(1+\alpha_1-\alpha_2)^{-1} + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)[1-(1+\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2]^{-1}\frac{\mu}{\mu+s} +$$

$$+(1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)^2\{(1+\alpha_1-\alpha_2)[1-\alpha_2(1+\alpha_1-\alpha_2)]\}^{-1}\frac{\mu}{\mu+(1+\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2 s} \quad . \qquad (1.2.3)$$

Sledi mešavina

$$\delta_t=\begin{cases} 0 & \text{s.v.} \quad \alpha_1/(1+\alpha_1-\alpha_2) \\ E_t & \text{s.v.} \quad (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)/[1-\alpha_2(1+\alpha_1-\alpha_2) \\ \alpha_2(1+\alpha_1-\alpha_2)E_t & \text{s.v.} \quad (1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2)^2/(1+\alpha_1-\alpha_2)[1-\alpha_2(1+\alpha_1-\alpha_2)] \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

Da bismo definisali autokorelacionu strukturu vremenske serije EAR(2) uočimo

$$E(X_tX_{t-r})=(1-\alpha_2)[\alpha_1E(X_{t-1}X_{t-r})+E(X_{t-r})E(\delta_t)]+$$

$$+\alpha_2[\alpha_2E(X_{t-2}X_{t-r})+E(X_{t-r})E(\delta_t)] \quad . \qquad (1.2.5)$$

a prema (1.2.1) je

$$E(\delta)=(1-\alpha_2)(1-\alpha_1+\alpha_2)E(X) \qquad (1.2.6)$$

i $E(\delta)=E(X)=1/\mu$ što sve skupa daje autokorelacionu funkciju ovog modela vezanu diferencnom jednačinom

$$\rho_r=\alpha_1(1-\alpha_2)\rho_{r-1}+\alpha_2^2\rho_{r-2} \quad , \quad r=2,3,\ldots \qquad (1.2.7)$$

sa

$$\rho_r=\rho_{-r} \quad , \quad \rho_0=1 \quad , \quad \rho_1=\alpha_1/(1+\alpha_2) \qquad (1.2.8)$$

O spektralnoj gustini ove vremenske serije biće više reči u glavi 5.

Model NEAR(2) je direktna generalizacija modela NEAR(1) i ima oblik

$$X_t=\delta_t+\begin{cases} \beta_1X_{t-1} & \text{s.v.} \quad \alpha_1 \\ \beta_2X_{t-2} & \text{s.v.} \quad \alpha_2 \\ 0 & \text{s.v.} \quad 1-\alpha_1-\alpha_2 \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

gde parametri zadovoljavaju uslove $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2<1$, $0<\beta_1,\beta_2<1$. Što se tiče niza $\{\delta_t\}$, njegovu definiciju nalazimo u izrazu za funkciju $\Phi_\delta(s)$ koja je na jedinstven način definisana zahtevom da $\{X_t\}$ ima eksponencijalnu (μ)

marginalnu raspodelu:

$$\Phi_\delta(s)=\frac{\Phi_X(s)}{\alpha_1\Phi_X(\beta_1 s)+\alpha_2\Phi_X(\beta_2 s)+(1-\alpha_1-\alpha_2)}=$$

$$=(1-p_2-p_3)\frac{\mu}{\mu+s}+p_2\frac{\mu}{\mu+b_2 s}+p_3\frac{\mu}{\mu+b_3 s} \qquad (1.2.10)$$

gde su

$$\begin{aligned}
&p_2=[(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)b_2-(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1\beta_2]/[(b_2-b_3)(1-b_2)]\\
&p_3=[(\alpha_1+\alpha_2)\beta_1\beta_2-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)b_3]/[(b_2-b_3)(1-b_3)] \qquad (1.2.11)\\
&0<b_3=\{(1-\alpha_1)\beta_1+(1-\alpha_2)\beta_2-[((1-\alpha_1)\beta_1+(1-\alpha_2)\beta_2)^2-4(1-\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\beta_2]^{1/2}\}/2<\\
&\quad <b_2=\{(1-\alpha_1)\beta_1+(1-\alpha_2)\beta_2+[((1-\alpha_1)\beta_1+(1-\alpha_2)\beta_2)^2-4(1-\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\beta_2]^{1/2}\}/2<1
\end{aligned}$$

Istim postupkom kao i u prethodnim slučajevima dolazimo do diferencne jednačine drugog reda za autokorelacije ovog modela

$$\begin{aligned}
&\rho_r=\alpha_1\beta_1\rho_{r-1}+\alpha_2\beta_2\rho_{r-2} \quad , \quad r=2,3,\ldots \qquad (1.2.12)\\
&\rho_0=1 \quad , \quad \rho_r=\rho_{-r} \quad , \quad \rho_1=\alpha_1\beta_1/(1-\alpha_2\beta_2)
\end{aligned}$$

O spektralnoj gustini i ovog modela biće više reči u glavi 5.

Najzad, model EAR(p) je slično konstruisan i može da bude zapisan kao

$$X_t=\delta_t+\begin{cases}\alpha_1 X_{t-1} & \text{s.v. } a_1\\ \alpha_2 X_{t-2} & \text{s.v. } a_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_p X_{t-p} & \text{s.v. } a_p\end{cases} \qquad (1.2.13)$$

gde je

$$a_1=(1-\alpha_2) \quad , \quad a_p=\prod_{j=2}^{p}\alpha_j \quad , \quad a_s=\prod_{j=2}^{s}\alpha_j(1-\alpha_{(s+1)}) \quad , \quad s=2,3,\ldots,p-1 \qquad (1.2.14)$$

a $\{\delta_t\}$ obezbeđuje eksponencijalnu (μ) marginalnu raspodelu vremenske serije $\{X_t\}$.

1.3 Zadržimo malo svoju pažnju na modelima tipa pokretnih sredina sa eksponencijalnom (μ) marginalnom raspodelom.

Stacionarni niz slučajnih promenljivih $\{X_t\}$, sačinjen iz niza $\{E_t\}$ n.i.r. eksponencijalnih (μ) slučajnih promenljivih prema modelu

$$X_t=\begin{cases} \beta E_t & \text{s.v. } \beta \\ & \\ \beta E_t+E_{t+1} & \text{s.v. } 1-\beta \end{cases} \quad , \quad 0\leq\beta\leq 1 \quad , \tag{1.3.1}$$

zove se vremenska serija pokretnih sredina prvog reda, a jednostavno je pokazati da joj je marginalna raspodela takođe eksponencijalna (μ).

Pokretne sredine se mogu definisati i sa pomeranjem unazad:

$$X_t=\begin{cases} \beta E_t & \text{s.v. } \beta \\ & \\ \beta E_t+E_{t-1} & \text{s.v. } 1-\beta \end{cases} \quad , \quad 0\leq\beta\leq 1 \quad . \tag{1.3.2}$$

Dokaz o raspodeli niza $\{X_t\}$ se izvodi direktno primenom Laplas-Stiltjesovih transformacija.

Množeći X_t sa X_{t+1} i X_{t+r}, $r>1$ i nalazeći očekivanja tih proizvoda, zamenom u funkciji $\mathrm{Corr}(X_t,X_{t+1})$ i $\mathrm{Corr}(X_t,X_{t+r})$ dobijamo

$$\rho_1=\beta(1-\beta) \quad , \quad \rho_r=0 \text{ za } r>1. \tag{1.3.3}$$

Naravno, $\rho_0=1$.

Opšti model EMA(q) ima oblik

$$X_t=\begin{cases} \beta_q E_t & \text{s.v. } b_{q+1} \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1} & \text{s.v. } b_q \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1}+\beta_1 E_{t-q+1} & \text{s.v. } b_2 \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1}+\beta_1 E_{t-q+1}+E_{t-q} & \text{s.v. } b_1 \end{cases} \tag{1.3.4}$$

za $0\leq\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_q\leq 1$, gde je

$$b_j=\begin{cases} \beta_q & , \quad j=q+1 \\ (1-\beta_q)\dots(1-\beta_j)\beta_{j-1} & , \quad q\geq j\geq 2 \quad (q\geq 2) \\ (1-\beta_q)\dots(1-\beta_1) & , \quad j=1 \end{cases} \quad . \tag{1.3.5}$$

Primetimo da se koeficijenti β_j mogu da dobiju na jedinstven način iz verovatnoća b_j. Imamo q+1 parametara b_j, a samo q koeficijenata β_j, jer je

$$b_1+b_2+\ldots+b_{q+1}=1 \tag{1.3.6}$$

s obzirom da su u pitanju verovatnoće.

Eksponencijalnu marginalnu raspodelu ovog modela lako je dokazati. Autokorelacionu strukturu ovog modela dobijamo iz

$$Cov(X_t,X_{t-r})=\sum_{s=0}^{q} b_{q+1-s}Cov(E_{t-s},X_{t-r}) \quad , \tag{1.3.7}$$

tj.

$$\rho_r=\begin{cases}\sum_{j=1}^{q-r+1} b_j b_{j+r} & , \ 1\le r\le q \\ 0 & , \ q+1\le r\end{cases} \quad . \tag{1.3.8}$$

2. UOPŠTENI MODEL AUTOREGRESIVNE VREMENSKE SERIJE PRVOG REDA SA EKSPONENCIJALNOM MARGINALNOM RASPODELOM

2.1 Posmatrajmo autoregresivnu vremensku seriju $\{X_t,\ t\in D\}$ definisanu jednačinom

$$X_t=U_tX_{t-1}+V_tE_t \tag{2.1.1}$$

čija je marginalna raspodela eksponencijalna (μ), $\mu>0$ i ista kao i raspodela slučajnih promenljivih iz niza $\{E_t,\ t\in D\}$. Slučajne promenljive U_t i V_t su takve da garantuju ispunjenje ovog uslova. Neka važe i sledeći uslovi:

I_1 $\{X_t\}$ i $\{U_t\}$ su polunezavisni nizovi,

I_2 $\{X_t\}$ i $\{V_t\}$ su polunezavisni,

I_3 $\{X_t\}$ i $\{E_t\}$ su polunezavisni,

II $\{E_t\}$ je niz nezavisnih identički raspodeljenih eksponencijalnih (μ) slučajnih promenljivih,

III $\{U_t\}$, $\{V_t\}$ i $\{(U_t,V_t)\}$ su n.i.r. nizovi diskretnih slučajnih promenljivih, odnosno, vektora za koje važi: (a) $P(0\le U_t\le 1)=1$, (b) $P(0\le V_t\le 1)=1$, (c) $0<E(U_t^2),E(U_t)<1$, (d) $E(V_t)=1-E(U_t)$, (e) $E(U_t^2)+E(V_t^2)=1-E(U_tV_t)$ za svako t i takvi da obezbeđuju eksponencijalnu (μ) marginalnu raspodelu vremenske serije $\{X_t\}$.

U daljem tekstu ćemo koristiti oznake:

$$E(U_t)=a\ ,\quad E(U_t^2)=b\ ,\quad E(V_t^2)=c\ . \tag{2.1.2}$$

2.2 Već pomenute autoregresivne vremenske serije EAR(1), NEAR(1), TEAR(1) i AREX(1) zadovoljavaju uslove I-III, pri čemu za svaku od njih konkretno uslov III sledi iz definicija raspodela slučajnih promenljivih iz nizova $\{U_t\}$ i $\{V_t\}$:

U EAR(1) modelu su U_t i V_t nezavisne slučajne veličine sa raspodelom

$$P(U_t=\beta)=1 \quad , \quad P(V_t=0)=1-P(V_t=1)=\beta \quad , \quad 0\le\beta<1 \quad . \tag{2.2.1}$$

U svim ostalim nabrojanim slučajevima su U_t i V_t zavisne slučajne promenljive. Kod NEAR(1) modela su im marginalne raspodele

$$P(U_t=\beta)=1-P(U_t=0)=q_1 \quad , \quad P(V_t=1)=1-P(V_t=\beta(1-q_1))=(1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta] \quad ,$$

a zajednička raspodela

$$\begin{aligned}
&P((U_t,V_t)=(0,\beta(1-q_1))=(1-q_1)\{1-(1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta]\} \quad ,\\
&P((U_t,V_t)=(0,1))=(1-q_1)(1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta] \quad ,\\
&P((U_t,V_t)=(\beta,(1-q_1)\beta)=q_1\{1-(1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta]\} \quad \text{i}\\
&P((U_t,V_t)=(\beta,1)=q_1(1-\beta)/[1-(1-q_1)\beta] \quad ,
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

pri čemu je $0<q_1\le1$, $0<\beta\le1$, $q_1\beta\ne1$.

Kod modela TEAR(1) marginalne raspodele su

$$P(U_t=1)=1-P(U_t=0)=q_1 \quad , \quad P(V_t=1-q_1)=1 \quad ,$$

a zajednička raspodela

$$P((U_t,V_t)=(1,1-q_1))=1-P((U_t,V_t)=(0,1-q_1))=q_1 \quad , \quad 0<q_1\le1 \quad . \tag{2.2.3}$$

Najzad za model AREX(1) imamo marginalne raspodele

$$\begin{aligned}
&P(U_t=0)=p_0 \quad , \quad P(U_t=\alpha)=p_1 \quad , \quad P(U_t=\beta)=q_1\\
&P(V_t=0)=p_1 \quad , \quad P(V_t=\alpha)=(p_0+q_1)B_1 \quad , \quad P(V_t=p_0\beta/(p_0+q_1))=B_2 \quad ,\\
&P(V_t=1)=(p_0+q_1)B_0 \quad ,
\end{aligned}$$

dok je raspodela vektora (U_t,V_t)

$$\begin{aligned}
&P((U_t,V_t)=(0,\alpha))=p_0B_1 \quad , \quad P((U_t,V_t)=(0,p_0\beta/(p_0+q_1)))=p_0B_2/(p_0+q_1) \quad ,\\
&P((U_t,V_t)=(0,1))=p_0B_0 \quad , \quad P((U_t,V_t))=(\alpha,0))=p_1 \quad , \quad P(U_t,V_t)=(\beta,\alpha))=q_1B_1,\\
&P((U_t,V_t)=(\beta,p_0\beta/(p_0+q_1)))=q_1B_2/(p_0+q_1) \quad , \quad P((U_t,V_t)=(\beta,1))=q_1B_0
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

gde je $0\le p_0,p_1,q_1\le1$, $q_1>0$, $p_0+p_1+q_1=1$, $0<\alpha,\beta<1$ i važe uslovi (1.1.7) i (1.1.8).

2.3 Kovarijansna struktura modela (2.1.1) je sledeća: r>0 daje

$$K_r=\mathrm{Cov}(X_t,X_{t-r})=E((U_tX_{t-1}+V_tE_t)X_{t-r})-1/\mu^2=E(U_t)K_{r-1}=a^rK_0 \tag{2.3.1}$$

gde je

$$K_0=\mathrm{Var}(X_t)=[E(U_t^2)+E(V_t^2)]E(X_{t-1}^2)+[2E(U_tV_t)-1][E(X_{t-1})]^2=1/\mu^2\ . \tag{2.3.2}$$

Jasno, $K_{-r}=K_r$, pa je za proizvoljno $h\in D$

$$K_h=a^{|h|}/\mu^2 \tag{2.3.3}$$

odakle sledi stacionarnost (u širokom smislu) vremenske serije predstavljene stohastičkom diferencnom jednačinom (2.1.1).

2.4 Neka je sa σ_t označeno σ-polje generisano skupom slučajnih vektora $\{(U_s,V_s,E_s),\ s\le t\}$. Dokazaćemo da slučajna jednačina (2.1.1) ima jedinstveno stacionarno σ_t-merljivo rešenje pod pretpostavkom da važe uslovi I-III.

Teorema 2.4.1. Neka važe uslovi I-III. Tada postoji jedinstveno stacionarno σ_t-merljivo rešenje jednačine (2.1.1).

Dokaz: Zamenimo X_{t-1} u jednačini (2.1.1) sa $X_{t-1}=U_{t-1}X_{t-2}+V_{t-1}E_{t-1}$ i dalje redom X_{t-j} sa

$$X_{t-j}=U_{t-j}X_{t-j-1}+V_{t-j}E_{t-j} \tag{2.4.1}$$

za $j=1,2,\ldots,k$. Tako dobijamo

$$X_t=\prod_{j=0}^{k}U_{t-j}X_{t-j-1}+\sum_{i=1}^{k}\Big(\prod_{j=0}^{i-1}U_{t-j}\Big)V_{t-i}E_{t-i}+V_tE_t\ . \tag{2.2.2}$$

Uočimo razliku

$$X_t-\sum_{i=1}^{k}\Big(\prod_{j=0}^{i-1}U_{t-j}\Big)V_{t-i}E_{t-i}-V_tE_t=\prod_{j=0}^{k}U_{t-j}X_{t-k-1} \tag{2.4.3}$$

i ispitajmo srednje kvadratnu konvergenciju niza razlika:

$$\mathcal{E}=\lim_{k\to\infty} E([X_t-\sum_{i=1}^{k}(\prod_{j=0}^{i-1} U_{t-j})V_{t-i}E_{t-i}-V_tE_t]^2)=$$

$$=\lim_{k\to\infty} E([\prod_{j=0}^{k} U_{t-j}X_{t-k-1}]^2) \quad . \tag{2.4.4}$$

Tada zbog I_1

$$\mathcal{E}=\lim_{k\to\infty}[\prod_{j=0}^{k} E(U_{t-j}^2)]E(X_{t-k-1}^2)=(2/\mu^2)\lim_{k\to\infty}\delta^k=0 \tag{2.4.5}$$

zbog III(c).

Dakle, ako rešenje jednačine (2.1.1) označimo sa W_t, onda je

$$W_t=\sum_{i=1}^{\infty}(\prod_{j=0}^{i-1} U_{t-j})V_{t-i}E_{t-i}+V_tE_t \quad . \tag{2.4.6}$$

Rešenje je, očigledno, σ_t-merljivo. Da bismo dokazali stacionarnost ovog rešenja primetimo da je uz pomoć operatora pomeranja, moguće izraziti W_t kao

$$W_t=\Delta^t W_0 \tag{2.4.7}$$

što znači da je, s obzirom na to da funkcionalna veza slučajnih promenljivih iz nizova $\{U_t\}$, $\{V_t\}$ i $\{E_t\}$ kojom je definisano W_t, je funkcija od t samo preko ovih slučajnih promenljivih, za stacionarnost niza $\{W_t\}$ dovoljno pokazati da je drugi moment od W_t konačan. Naravno, nizovi $\{U_t\}$, $\{V_t\}$ i $\{E_t\}$ morali bi da budu stacionarni, što oni i jesu (čak strogo stacionarni), s obzirom da su, svaki za sebe, nizovi identički raspodeljenih slučajnih promenljivih. U nameri da dokažemo konačnost drugih momenata slučajnih promenljivih iz niza $\{W_t\}$, uvedimo oznaku

$$W_{t,k}=\sum_{i=1}^{k}(\prod_{j=0}^{i-1} U_{t-j})V_{t-i}E_{t-i}+V_tE_t \quad . \tag{2.4.8}$$

Tada je

$$E(W_t^2)=\lim_{k\to\infty} E(W_{t,k}^2) \quad . \tag{2.4.9}$$

S druge strane

$$E(W_{t,k}^2)=E([(W_{t,k}-X_t)+X_t]^2)=$$

$$=E((W_{t,k}-X_t)^2)+2E(X_t(W_{t,k}-X_t))+E(X_t^2)= \tag{2.4.10}$$

$$=E((W_{t,k}-X_t)^2)+2\sum_{i=1}^{k} E(X_t(\prod_{j=0}^{i-1} U_{t-j})V_{t-i}E_{t-i})+2E(X_tV_tE_t)-E(X_t^2) \quad .$$

Prvi sabirak teži nuli kada k teži beskonačnosti prema (2.4.3) i (2.4.4),

$$E(X_t(\prod_{j=0}^{i-1} U_{t-j})V_{t-i}E_{t-i})=(1/\mu^2)\{(1-b-c)b^{i-1}[1-(1-a)(a-b)^{-1}b+2bc)+$$

$$+(1-a)a^{i-1}[(1-b-c)b(a-b)^{-1}+(1-a)a]\} \quad , \tag{2.4.11}$$

odakle prema uslovu III(c) sledi da je i drugi sabirak konačan kada $k\to\infty$.

$$E(X_tV_tE_t)=(1/\mu^2)(1-b+c) \quad , \quad E(X_t^2)=2/\mu^2 \quad . \tag{2.4.12}$$

Sledi da je $E(W_t^2)<\infty$ što je i trbalo dokazati.

Ostaje još da dokažemo jedinstvenost rešenja (2.4.5). Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoje dva stacionarna σ_t-merljiva rešenja W_t i G_t jednačine (2.1.1). Neka je

$$H_t=W_t-G_t \quad . \tag{2.4.13}$$

Tada H_t ima autoregresivnu reprezentaciju

$$H_t=U_tH_{t-1} \tag{2.4.14}$$

i kako je H_t takođe σ_t-merljivo, imamo da je

$$E(H_t^2)=E(U_t^2)E(H_{t-1}^2) \quad . \tag{2.4.15}$$

Kako je $\{H_t\}$ takođe stacionaran niz, imamo $E(H_t^2)=E(H_{t-1}^2)$, a kako je i $E(U_t^2)\neq 1$, mora da bude $E(H_t^2)=0$, odnosno $H_t=0$ skoro izvesno. To znači da je $W_t=G_t$ skoro svuda.

2.5 Pokažimo i da rešenje (2.4.5) ispunjava uslove stroge stacionarnosti kao i ergodičnosti.

Teorema 2.5.1. Pod uslovima teoreme 2.4.1., rešenje $\{W_t\}$ jednačine (2.1.1) je strogo stacionarno i ergodično.

<u>Dokaz:</u> Jedinstveno stacionarno σ_t-merljivo rešenje W_t jednačine (2.4.5) je granica u srednje kvadratnom, a samim tim i u verovatnoći, niza σ_t-merljivih slučajnih promenljivih. S obzirom da rešenje ima istu funkcionalnu formu za svako t, $\{W_t\}$ je strogo stacionaran (kao što je i $\{X_t\}$). $\{(U_t,V_t,E_t)\}$ je ergodički niz s obzirom da je niz nezavisnih identički raspodeljenih slučajnih vektora. σ-polje u oznaci σ_t^1, generisano skupom $\{W_t,W_{t-1},\ldots\}$, je takvo da je $\sigma_t^1\subset\sigma_t$ ako je $\{X_t\}$ σ_t-merljiv niz. Ako je σ^1 najmanje σ-polje koje sadrži $\lim_{t\to\infty}\sigma_t^1$, a σ najmanje σ-polje koje sadrži $\lim_{t\to\infty}\sigma_t$, tada je $\sigma^1\subset\sigma$ i sledi $\{W_t\}$ je ergodičan.

2.6 Uočimo da uslovi III(d) i III(e) nisu korišćeni u dokazima prethodnih teorema eksplicitno. Međutim, to su neophodni uslovi za egzistenciju modela (2.1.1):

$$E(X_t)=E(U_t)E(X_{t-1})+E(V_t)E(E_t) \Rightarrow (1-E(U_t))E(X)=E(V_t)E(E_t) \tag{2.6.1}$$

pa je, dakle, III(d) neophodan uslov za to da nizovi $\{X_t\}$ i $\{E_t\}$ imaju istu marginalnu raspodelu.

$$Var(X_t)=[E(U_t^2)+E(V_t^2)-1]E(X_{t-1}^2)+2E(U_tV_t)[E(X_{t-1})]^2+Var(X_{t-1}) \qquad (2.6.3)$$

$$\Rightarrow \quad [E(U_t^2)+E(V_t^2)-1]E(X_{t-1}^2)+2E(U_tV_t)[E(X_{t-1})]^2=0 \qquad (2.6.3)$$

pa je, dakle, III(e) neophodan uslov da $\{X_t\}$ ima eksponencijalnu marginalnu raspodelu kod koje je $E(X^2)=2[E(X)]^2$.

3. OCENE PARAMETARA MODELA FAREX(1)

3.1 Ocene parametara vremenskih serija koje su definisane kao mešavine raspodela predstavljaju prilično tvrd orah u teoriji ocenjivanja. Problemi nastaju u vezi sa brojnošću parametara koje treba oceniti. Naime, čak i kod najjednostavnijih vremenskih serija prvog reda kao što su EAR(1) i EMA(1), vektor parametara koji treba oceniti je dimenzije dva uključujući i osnovni parametar eksponencijalne raspodele. Međutim, ovaj vektor može biti i dimenzije pet kao što je slučaj kod modela AREX(1), a da i ne govorimo o modelima autoregresije i pokretnih sredina višeg reda od jedinice. Pored brojnosti parametara, ozbiljnu prepreku u njihovom ocenjivanju čini i izgled funkcije verodostojnosti. Tako na primer, kod autoregresije prvog red, opšti obilk funkcije verodostojnosti je

$$L(\theta;x_0,\ldots,x_N)=f(x_0)\prod_{k=1}^{N} f(x_k|x_{k-1}) \qquad (3.1.1)$$

gde je θ vektor nepoznatih parametara, $f(x)=\mu\exp(-\mu x)u(x)$, a $u(x)$ je Hevisajdova jedinična funkcija. Uslovna gustina $f(x_k|x_{k-1})$ se razlikuje od modela do modela i glavni je uzročnik poteškoća pri određivanju eksplicitne ocene vektora parametara. Tako na primer, Rafteri (Raftery, 1980a) je dokazao egzistenciju i postojanost ocene maksimalne verodostojnosti dvodimenzionog vektora parametara modela EAR(1). On je dokazao (Raftery, 1980b) i egzistenciju ocene maksimalne verovatnoće (Weiss i Wolfowitz, 1974) parametra mešavine β istog modela kao i opštijeg modela NEAR(1) pod prtpostavkom da postoji ocena maksimalne verodostojnosti osnovnog parametra raspodele μ, a za model NEAR(1) takođe i za parametar q_1. Međutim, i pored nesumnjivog značaja ovih rezultata, njihova ograničena moć se ogleda u tome što se na osnovu njih ne mogu dobiti eksplicitni analitički izrazi pomenutih ocena. Tako su istovremeno vršena i istraživanja u pravcu nalaženja jednostavne, praktično upotrebljive ocene koja će uspešno odigrati ulogu nepoznatog parametra koji se posmatra. Jednu takvu ocenu predložili su Geivr i Luis (Gaver i Lewis, 1980) za parametar ß modela EAR(1). U istom radu predložili su i sredinu uzorka kao ocenu parametra $m=1/\mu$. Ocenu parametra μ ovog modela predložio je i Čiao-Hok Sim (Chiaw-Hock Sim, 1987) koja je zapravo, ocena maksimalne verodostojnosti parametra μ.

3.2 Što se tiče ocena parametara modela FAREX(1) razmotrimo najpre ocenu parametra $m=1/\mu$ koji je, zapravo, matematičko očekivanje ovog modela.

Za ocenu parametra m uzima se aritmetička sredina samo jedne realizacije vremenske serije, $\{X_0, X_1, \ldots, X_N\}$, tj. statistika

$$\hat{m} = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} X_i \quad . \tag{3.2.1}$$

Ova ocena parametra m ima osobinu centriranosti i postojanosti za sve modele definisane jednačinom (2.1.1). Dokaz ove činjenice sledi na osnovu izgleda autokovarijansne funkcije ovih modela. Zaista, s obzirom na ergodičnost sistema možemo se vremenskom sredinom dovoljno duge realizacije da približimo teorijskoj srednjoj vrednosti:

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} X_i\Big) = \frac{1}{(N+1)^2} E\Big|\sum_{i=0}^{N} (X_i - m)\Big|^2 = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i,j=0}^{N} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) =$$

$$= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i,j=0}^{N} K_{i-j} = m^2 \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a^{|i-j|} =$$

$$= m^2 \frac{1}{N+1} \frac{1+a}{1-a} - 2m^2 \frac{a}{(N+1)^2 (1-a)^2} (1-a^{N+1}) \to 0, \; N \to \infty. \tag{3.2.2}$$

Iz (3.2.2) sledi slabi zakon velikih brojeva. Dakle, s obzirom da FAREX(1) dopušta reprezentaciju (2.1.1), sredina uzorka je centrirana i postojana ocena njegovog očekivanja.

3.3 Već pomenuta ocena Geivra i Luisa za parametar β modela EAR(1) može da se uopšti u smislu ocene parametra α (manji od dva parametra mešavine) opštijeg modela FAREX(1).

U ovom poglavlju ćemo se ograničiti na najopštiji proces tipa FAREX(1), tj. onaj za koji je $0<p_1<\alpha<\beta<1$.

Dakle, u procesu FAREX(1) postoje potoci X_t-ova koji su jednaki αX_{t-1}. Ako kažemo da postoji potok dužine K ovog tipa, slučajna promenljiva K će imati geometrijsku plus jedan raspodelu sa parametrom p_1. Znači,

$$P(K=k)=p_1^k(1-p_1)\ ,\ k=1,2,\ldots\ . \tag{3.3.1}$$

Otuda, ako imamo uzorački niz $X_0,X_1,X_2,\ldots$ definisaćemo niz $\{Z_t,\ t\in\{0,1,2,\ldots\}=D^+\}$ na sledeći način

$$Z_0=X_0\ ,\quad Z_t=X_t/X_{t-1}\ ,\quad t=1,2,\ldots \tag{3.3.2}$$

Slučajne promenljive niza $\{Z_t,\ t\in D^+\}$ su takođe mešavine raspodela definisane na sledeći način:

$$Z_t=\begin{cases} \alpha & \text{s.v.}\quad p_1 \\ \beta & \text{s.v.}\quad (\alpha-p_1)\beta/\alpha \\ \beta+E_t/X_{t-1} & \text{s.v.}\quad 1-\beta \\ \beta+\alpha E_t/X_{t-1} & \text{s.v.}\quad p_1(\beta-\alpha)/\alpha \end{cases}\ ,\quad t=1,2,\ldots \tag{3.3.3}$$

$$Z_0=X_0$$

što znači da je $P(Z_t=\alpha)=p_1$ i $P(Z_t\neq\alpha)=1-p_1$. Međutim, kada je u pitanju ograničen uzorak dužine N+1, $X_0,X_1,\ldots,X_N$, statistika

$$\hat{\alpha} = \min_{1\le t\le N}\{Z_t\} \tag{3.3.4}$$

uzela bi se kao ocena parametra α. Ova ocena bila bi ili baš jednaka α ili α plus neki mali pomeraj.

Koliko je praktično vrlo jednostavno dobiti na ovaj način ocenu parametra α, toliko je njeno teorijsko ispitivanje otežano kao što će se nadalje videti.

Raspodela statistike $\alpha^{\sim}$ bila bi:

$$F_{\alpha^{\sim}}(v)=P(\alpha^{\sim}<v)=1-P(\bigwedge_{t=1}^{N}(Z_t\geq v)). \tag{3.3.5}$$

Da bismo dobili raspodelu vektora $(Z_1,Z_2,\dots,Z_N)$ pođimo od raspodele vektora $(X_0,X_1,\dots,X_N)$ čija je gustina s obzirom na markovsku zavisnost u nizu:

$$f(x_0,x_1,\dots,x_N)=f(x_0)f(x_1|x_0)\dots f(x_N|x_{N-1}) \quad . \tag{3.3.6}$$

(Oznaka f će označavati, bez opasnosti od konfuzije, gustine raspodela vezane za vektor $(X_0,X_1,\dots,X_N)$ i njegove podvektore, a h gustine raspodela u vezi sa vektorom $(Z_0,Z_1,\dots,Z_N)$.)

$$f(x_k|x_{k-1})=f(x_{k-1},x_k)/f(x_{k-1}) \tag{3.3.7}$$

Da bismo odredili gustinu raspodele slučajnog vektora (X_{k-1},X_k), $k\in D$, polazimo od Laplas-Stiltjesove transformacije tog vektora

$$\Phi(s_1,s_2)=E(\exp(-s_1X_{k-1}-s_2X_k))=$$

$$=p_1\frac{\mu}{\mu+s_1+s_2\alpha}+[(\alpha-p_1)\beta/\alpha]\frac{\mu}{\mu+s_1+s_2\beta}+(1-\beta)\frac{\mu^2}{(\mu+s_1+s_2\beta)(\mu+s_2)}+$$

$$+[p_1(\beta-\alpha)/\alpha]\frac{\mu^2}{(\mu+s_1+s_2\beta)(\mu+s_2\alpha)} \quad . \tag{3.3.8}$$

Primenom inverzne transformacije dobijamo

$$f(x_{k-1},x_k)=\mu\exp(-\mu x_{k-1})u(x_{k-1})\{p_1\delta(x_k-\alpha x_{k-1})+[(\alpha-p_1)\beta/\alpha]\delta(x_k-\beta x_{k-1})+$$

$$+\mu u(x_k-\beta x_{k-1})[(1-\beta)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1}))+$$

$$+(p_1(\beta-\alpha)/\alpha^2)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1})/\alpha)]\} \tag{3.3.9}$$

gde je $\delta(.)$ Dirakova delta funkcija, a $u(.)$ Hevisajdova jedinična funkcija. Tada je uslovna gustina

$$f(x_k|x_{k-1})=p_1\delta(x_k-\alpha x_{k-1})+[(\alpha-p_1)\beta/\alpha]\delta(x_k-\beta x_{k-1})+$$

$$+\mu u(x_k-\beta x_{k-1})[(1-\beta)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1}))+$$

$$+(p_1(\beta-\alpha)/\alpha^2)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1})/\alpha)] \qquad (3.3.10)$$

pa je gustina vektora $(X_0,X_1,\dots,X_N)$

$$f(x_0,x_1,\dots,x_N)=\mu\exp(-\mu x_0)u(x_0)\prod_{k=1}^{N}\{p_1\delta(x_k-\alpha x_{k-1})+[(\alpha-p_1)\beta/\alpha]\delta(x_k-\beta x_{k-1})+$$

$$+\mu u(x_k-\beta x_{k-1})[(1-\beta)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1}))+$$

$$+(p_1(\beta-\alpha)/\alpha^2)\exp(-\mu(x_k-\beta x_{k-1})/\alpha^2)]\} \quad . \qquad (3.3.11)$$

Da bismo doboli raspodelu vektora $(Z_0,Z_1,\dots,Z_N)$ uvodimo transformaciju (3.3.2) čiji je Jakobijan

$$J=z_0^N z_1^{N-1}\dots z_{N-2}^2 z_{N-1} \qquad (3.3.12)$$

te je, konačno korišćenjem svojstava Hevisajdove i Dirakove funkcije i činjenice da je $X_k=Z_0Z_1\dots Z_k$, $k\in D^+$.

$$h(z_0,z_1,\dots,z_N)=\mu\exp(-\mu z_0)u(z_0)\prod_{k=1}^{N}\{p_1\delta(z_k-\alpha)+[(\alpha-p_1)\beta/\alpha]\delta(z_k-\beta)+$$

$$+\mu u(z_k-\beta)[(1-\beta)\exp(-\mu z_0 z_1\dots z_{k-1}(z_k-\beta))+$$

$$+(p_1(\beta-\alpha)/\alpha^2)\exp(-\mu z_0 z_1\dots z_{k-1}(z_k-\beta)/\alpha)]\}|J| \quad . \qquad (3.3.13)$$

Marginalna gustina raspodele

$$h(z_1,\ldots,z_N)=\int_{-\infty}^{\infty} h(z_0,z_1,\ldots,z_N)dz_0 \qquad (3.3.14)$$

vektora $(Z_1,\ldots,Z_N)$ bi trebalo da nam omogući izračunavanje funkcije $G(v)$, a iza toga i $F_{a^-}(v)$. Međutim, to u opštem slučaju nije nimalo jednostavno. Radi argumentovanja ove činjenice, navešćemo preostali postupak za dobijanje funkcije raspodele $F_{a^-}(v)$ na primeru najmanjeg uzorka, tj. kada je $N=2$ a obim uzorka tri.

Dakle, neka je uzorak modela FAREX(1) obima tri: X_0,X_1,X_2. Tada je

$$G(v)=P(Z_1\geq v,Z_2\geq v)=1+F(v,v)-F(\infty,v)-F(v,\infty) \qquad (3.3.15)$$

gde je $F(z_1,z_2)$ funkcija raspodele vektora (Z_1,Z_2). Vrednost funkcije raspodele vektora (Z_1,Z_2) u tački (r,s) je

$$F(r,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{r}\int_{-\infty}^{s} h(z_0,z_1,z_2)dz_0dz_1dz_2 =$$

$$=p_1{}^2u(r-\alpha)u(s-\alpha) + p_1\{(\alpha-p_1)\beta/\alpha+(1-\beta)\alpha(s-\beta)[1+\alpha(s-\beta)]^{-1}+$$

$$+p_1(\beta-\alpha)(s-\beta)[\alpha(1+s-\beta)]^{-1}\}u(r-\alpha)u(s-\beta) + p_1\{(\alpha-p_1)\beta/\alpha+$$

$$+(1-\beta)(r-\beta)(1+r-\beta)^{-1}+p_1(\beta-\alpha)(r-\beta)[\alpha(\alpha+r-\beta)]^{-1}\}u(r-\beta)u(s-\alpha) +$$

$$+\{(\alpha-p_1)^2\beta^2\alpha^{-2}+p_1(\alpha-p_1)(\beta-\alpha)\beta^2(s-\beta)[\alpha^2(\alpha+\beta(s-\beta))]^{-1}+$$

$$+(\alpha-p_1)\beta^2(1-\beta)(s-\beta)[\alpha(1+\beta(s-\beta))]^{-1}+(1-\beta)(\alpha-p_1)\beta(r-\beta)[\alpha(1+r-\beta)]^{-1}+$$

$$+(1-\beta)^2[(1+s-\beta)^{-1}(1-\beta+r(1+s-\beta))^{-1}-(1+s-\beta)^{-1}(1+\beta(s-\beta))^{-1}-(1+r-\beta)^{-1}+$$

$$+1]+p_1(1-\beta)(\beta-\alpha)\alpha^{-1}[\alpha^2(\alpha+s-\beta)^{-1}((\alpha(1-\beta)+r(\alpha+s-\beta))^{-1}-(\alpha+\beta(s-\beta))^{-1})-$$

$$-(1+r-\beta)^{-1}+1]+p_1(\beta-\alpha)(\alpha-p_1)\beta(r-\beta)\alpha^{-2}(\alpha+r-\beta)^{-1}+p_1(\beta-\alpha)(1-\beta)\alpha^{-1}[1+$$

$$+\alpha(1+\alpha(s-\beta))^{-1}(\alpha+r(1+\alpha(s-\beta))-\beta)^{-1}-(1+\alpha(s-\beta))^{-1}(1+\beta(s-\beta))^{-1}-$$

$$-\alpha(\alpha+r-\beta)^{-1}]+p_1^2(\beta-\alpha)^2\alpha^{-2}[\alpha(1+s-\beta)^{-1}(\alpha+r-\beta+r(s-\beta))^{-1}-\alpha(\alpha+r-\beta)^{-1}-$$

$$-\alpha(1+s-\beta)^{-1}(\alpha+\beta(s-\beta))^{-1}+1]\}u(r-\beta)u(s-\beta) \quad . \qquad (3.3.16)$$

Sada je na osnovu (3.3.5),(3.3.15) i (3.3.16) lako utvrditi da je

$$F_{\alpha^\sim}(v)=p_1(2-p_1)u(v-\alpha)+(1-p_1)^2u(v-\beta)-\{(1-\beta)^2(1+v-\beta)^{-1}[1-\beta+v(1-\beta)+v^2]^{-1}+$$

$$+p_1\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)(\alpha+v-\beta)^{-1}[\alpha(1-\beta)-(\beta-\alpha)v+v^2]^{-1}+$$

$$+p_1(1-\beta)(\beta-\alpha)(1+\alpha v-\alpha\beta)^{-1}[\alpha+v(1-\alpha\beta)+\alpha v^2-\beta]^{-1}+$$

$$+p_1^2(\beta-\alpha)^2\alpha^{-1}(1+v-\beta)^{-1}[\alpha+v(1-\beta)+v^2-\beta]^{-1}\}u(v-\beta) \quad . \qquad (3.3.17)$$

Kako je

$$E(\alpha^\sim)=\int_0^\infty [1-F_{\alpha^\sim}(v)]dv = \int_0^\infty G(v)dv \quad , \qquad (3.3.18)$$

dobijamo da je matematičko očekivanje statistike $\alpha^\sim$

$$E(\alpha^\sim)=\beta[1-p_1(2-p_1)]+\alpha p_1(2-p_1)-[p_1(1-\beta)/\alpha+p_1(\beta-\alpha)/2+p_1^2(\beta-\alpha)/(2\alpha)]\ln\alpha+$$

$$+\frac{p_1(1-\beta)(1-\alpha\beta)}{2\alpha[(1+\alpha\beta)^2-4\alpha^2]^{1/2}}\ln\frac{\alpha\beta+1-[(1+\alpha\beta)^2-4\alpha^2]^{1/2}}{\alpha\beta+1+[(1+\alpha\beta)^2-4\alpha^2]^{1/2}}+$$

$$+\frac{(1-\beta)^2}{[(3+\beta)(1-\beta)]^{1/2}}(\pi/2-\mathrm{arctg}\frac{1+\beta}{[(3+\beta)(1-\beta)]^{1/2}})+$$

$$+\frac{p_1^2(\beta-\alpha)(1-\beta)}{2\alpha[(1+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}}\ln\frac{1+\beta-[(1+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}}{1+\beta+[(1+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}}-$$

$$- \begin{cases} \dfrac{p_1(\beta-\alpha)}{[4\alpha-(\alpha+\beta)^2]^{1/2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\beta+\alpha}{[4\alpha-(\alpha+\beta)^2]^{1/2}} - \pi/2\right) & \text{za } \alpha<\beta<2\sqrt{\alpha}-\alpha \\[2ex] \dfrac{p_1(\beta-\alpha)}{2[(\alpha+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}} \ln\dfrac{\alpha+\beta-[(\alpha+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}}{\alpha+\beta+[(\alpha+\beta)^2-4\alpha]^{1/2}} & \text{za } 2\sqrt{\alpha}-\alpha<\beta<1 \end{cases} \tag{3.3.19}$$

Pretpostavka koja je učinjena na početku ovog odeljka u vezi sa odnosom među parametrima, $0<p_1<\alpha<\beta<1$, ne znači isključenje specijalnih slučajeva modela FAREX(1) iz ovakvog načina ocenjivanja najmanjeg parametra mešavine, već naprotiv. Ova ocena je primenjiva u svim specijalnim slučajevima modela, tj. za jednakost umesto nejednakosti nekih ili svih među parametrima. Pretpostavka je učinjena radi lakšeg izračunavanja i izbegavanja diskusije u toku rada.

3.4 Ako model FAREX(1) posmatramo kao specijalan slučaj autoregresije (2.1.1) za koju je uslov III(a),(b),(c),(d),(e) posledica definicije nizova $\{U_t\}$ i $\{V_t\}$:

$$P(U_t=\alpha)=1-P(U_t=\beta)=p_1$$

$$P(V_t=0)=\beta-p_1(\beta-\alpha)/\alpha \ , \ P(V_t=\alpha)=p_1(\beta-\alpha)/\alpha \ , \ P(V_t=1)=1-\beta \tag{3.4.1}$$

$$P((U_t,V_t)=(\alpha,0))=p_1 \ , \ P((U_t,V_t)=(\beta,0))=(\alpha-p_1)\beta/\alpha \ , \ P((U_t,V_t)=(\beta,1))=1-\beta,$$

$$P((U_t,V_t)=(\beta,\alpha))=p_1(\beta-\alpha)/\alpha$$

moguće je primeniti ocenu najmanjih kvadrata za ocenjivanje njegovih parametara p_1, α i β, ali ne direktno, već preko njihovih funkcija

$$a = E(U_t) = \beta-p_1(\beta-\alpha)$$

$$b = E(U_t^2) = \beta^2-p_1(\beta^2-\alpha^2) \tag{3.4.2}$$

$$c = E(V_t^2) = \alpha p_1(\beta-\alpha)+1-\beta \ .$$

Iz ovog sistema jednačina se parametri p_1, α i β mogu izračunati na jedinstven način tako da bude zadovoljen uslov (1.1.21). Naime, rešavanjem sistema (3.4.2) po p_1, α i β dobijamo:

$$p_1=\frac{(a+b+c-1-a^2)^2}{(a-a^2+b+c-1)^2+(1-a)^2(b-a^2)}, \quad \alpha_{1,2}=a\mp(1/p_1)[(1-p_1)p_1(b-a^2)]^{1/2},$$

$$\beta_{1,2}=a\pm(1-p_1)^{-1}[(1-p_1)p_1(b-a^2)]^{1/2} \tag{3.4.3}$$

što dalje daje

$$p_1=\frac{(a+b+c-1-a^2)^2}{(a-a^2+b+c-1)^2+(1-a)^2(b-a^2)},$$

$$\alpha_1=\frac{2a^2+2ab-2a^3+ac-a-b}{a+b+c-1-a^2}, \quad \beta_1=\frac{2a(1-a)-(1-b-c)}{1-a} \tag{3.4.4}$$

$$\alpha_2=\frac{b-a+ac}{a+b+c-1-a^2}, \quad \beta_2=\frac{1-b-c}{1-a}.$$

Međutim, ako uočimo rešenja α_1 i β_1 lako je pokazati da je $\alpha_1<0$ pri datim uslovima pod kojima je definisan model FAREX(1). Dakle, preostaje jedinstvena trojka brojeva

$$(p_1,\alpha,\beta)=\left(\frac{(a+b+c-1-a^2)^2}{(a-a^2+b+c-1)^2+(1-a)^2(b-a^2)}, \frac{b-a+ac}{a+b+c-1-a^2}, \frac{1-b-c}{1-a}\right) \tag{3.4.5}$$

koja kao rešenje sistema (3.4.2) zadovoljava uslove definicije modela FAREX(1).

Ocenu najmanjih kvadrata na ocenjivanje parametara autoregresivnih vremenskih serija sa slučajnim koeficijentima primenili su prvi Nikols i Kvin (Nicholls i Quinn, 1980). Oni su vršili ocenjivanje u dva koraka po uzoru na Rozenberga (Rosenberg, 1973), koji je ovaj postupak primenjivao kod standardnog regresionog modela kod koga nema autoregresione zavisnosti. Bitna karakteristika modela sa slučajnim koeficijentima koji su posmatrali Nikols i Kvin, je nezavisnost slučajnih koeficijenata autoregresije i inovacionog niza. Mi ćemo, međutim, pokazati da pomenuti postupak daje strogo postojane ocene veličina a, b i c modela (2.1.1) kod koga je uslov nezavisnosti koeficijenata autoregresije i inovacionog niza zamenjen grupom uslova III, pa dakle, i u slučaju modela FAREX(1), pod uslovom da je osnovni parametar eksponencijalne raspodele poznat.

Dakle, pređimo na ocenjivanje parametara a, b i c modela FAREX(1) pod pretpostavkom da je poznat parametar μ. Polazeći od jednačine (2.1.1)

$$X_t=U_tX_{t-1}+V_tE_t$$

translirajmo posmatrani slučajni proces $\{X_t\}$ u slučajni proces $\{Y_t\}$ sa očekivanjem nula:

$$X_t-m=U_t(X_{t-1}-m)+m(U_t+V_t-1)+V_t(E_t-m) \tag{3.4.6}$$

gde uvodimo oznake

$$Y_t=X_t-m\ ,\ B_t=U_t-a\ ,\ \delta_t=m(U_t+V_t-1)+V_t(E_t-m) \tag{3.4.7}$$

pa dobijamo

$$Y_t=aY_{t-1}+B_tY_{t-1}+\delta_t \tag{3.4.8}$$

odnosno

$$Y_t=aY_{t-1}+R_t \tag{3.4.9}$$

gde je ostatak R_t

$$R_t=B_tY_{t-1}+\delta_t \tag{3.4.10}$$

Osim toga, sa F_t označimo σ-polje generisano skupom $\{(B_t,\delta_t),(B_{t-1},\delta_{t-1}),\ldots\}$. Tada je

$$E(R_t\,|\,F_{t-1})=Y_{t-1}E(B_t)+E(\delta_t)=0 \tag{3.4.11}$$

i

$$\begin{aligned}E(R_t^2\,|\,F_{t-1})&=Y_{t-1}^2E(B_t^2)+2Y_{t-1}E(B_t\delta_t)+E(\delta_t^2)=\\&=(b-a^2)Y_{t-1}^2+2m(1-a-c)Y_{t-1}+m^2(1-b)=\\&=Z_{t-1}T_{t-1}b-W_{t-1}^2(a)+2mT_{t-1}-2mcY_{t-1}\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

gde je

$$Z_{t-1}=Y_{t-1}-m \quad , \quad T_{t-1}=Y_{t-1}+m \quad \text{i} \quad W_{t-1}(a)=aY_{t-1}+m \quad . \tag{3.4.13}$$

Uočimo još dva važna svojstva reprezentacije (3.4.9). Prvo, ostaci R_t su nekorelirani i drugo, Y_t je jednačinom (3.4.9) predstavljen kao zbir dva nekorelirana procesa: aY_{t-1} i R_t. Zaista, ako izaberemo k, recimo, iz $D^{+}\setminus\{0\}$, tada

$$\begin{aligned}
Cov(R_t,R_{t+k}) &= Cov(B_tY_{t-1}+\delta_t,B_{t+k}Y_{t+k-1}+\delta_{t+k})= \\
&= Cov(B_tY_{t-1},B_{t+k}Y_{t+k-1})+Cov(B_tY_{t-1},\delta_{t+k})+ \\
&+ Cov(\delta_t,B_{t+k}Y_{t+k-1})+Cov(\delta_t,\delta_{t+k})= \\
&= E(B_tB_{t+k}Y_{t-1}Y_{t+k-1})=E(B_{t+k})E(B_tY_{t-1}Y_{t+k-1})=0 \; .
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Takođe je

$$\begin{aligned}
Cov(aY_{t-1},R_t) &= E(aY_{t-1}R_t)=aE(B_tY_{t-1}^2)+aE(Y_{t-1}\delta_t)= \\
&= aE(B_t)E(Y_{t-1}^2)+aE(Y_{t-1})E(\delta_t)=0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Sada možemo pristupiti ocenjivanju parametara primenom metode najmanjih kvadrata u dva koraka.

Pretpostavimo da raspolažemo uzorkom $(Y_0,Y_1,\dots,Y_N)$ dobijenim iz uzorka $(X_0,X_1,\dots,X_N)$ translacijom.

<u>I korak</u>

Ostaci R_t se mogu predstaviti kao

$$R_t=Y_t-aY_{t-1} \quad . \tag{3.4.16}$$

Uočimo sada sumu kvadrata ostataka

$$\sum_{t=1}^{N} R_t^2=\sum_{t=1}^{N} Y_t^2-2a\sum_{t=1}^{N} Y_tY_{t-1}+a^2\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}^2 \tag{3.4.17}$$

Ova kvadratna funkcija po a ima minimum i to za $a=\hat{a}$, gde je

$$\hat{a}=\Big(\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}^2\Big)^{-1}\Big(\sum_{t=1}^{N} Y_tY_{t-1}\Big) \tag{3.4.18}$$

odnosno,

$$\hat{a}=Y_1'Y(Y'Y)^{-1} \tag{3.4.19}$$

gde su Y_1 i Y vektori $Y=(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{N-1})'$, $Y_1=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_N)'$, a " ' " označava transponovani vektor.

II korak

Ovaj korak daje ocene za druge momente nizova $\{U_t\}$ i $\{V_t\}$ koristeći pri tome rezultat prvog koraka. Dakle, u jednačini (3.4.9) zamenimo a sa $\hat{a}$. Tako dobijamo

$$\hat{R}_t=Y_t-\hat{a}Y_{t-1}\quad. \tag{3.4.20}$$

Posmatrajmo razliku

$$G_t=R_t^2-E(R_t^2|F_{t-1})=R_t^2-bZ_{t-1}T_{t-1}+2mcY_{t-1}+W_{t-1}^2(a)-2mT_{t-1}\quad. \tag{3.4.21}$$

Minimum kvadratne funkcije $\sum_{t=1}^{N} G_t^2$ najpre po b, a zatim po c, pri čemu se koriste $\hat{a}$ i $\hat{R}_t$ umesto a i R_t, dobija se za

$$\hat{b}=[(\sum_{t=1}^{N} Z_{t-1}^2T_{t-1}^2)(\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)-(\sum_{t=1}^{N} Z_{t-1}T_{t-1}Y_{t-1})^2]^{-1}*$$

$$*[(\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)(\sum_{t=1}^{N} ((\hat{R}_t)^2+W_{t-1}^2(\hat{a})-2mT_{t-1})Z_{t-1}T_{t-1})-$$

$$-(\sum_{t=1}^{N} Z_{t-1}T_{t-1}Y_{t-1})(\sum_{j=1}^{N} ((\hat{R}_j)^2+W_{j-1}^2(\hat{a})-2mT_{j-1})Y_{j-1}] \tag{3.4.22}$$

ili

$$\hat{b}=[A'(AY'-YA')Y]^{-1}\{Y'[(Y(\hat{R})'A-A(\hat{R})'Y)+(Y(\hat{W})'A-A(\hat{W})'Y)-$$

$$-2m(YT'A-AT'Y)]\} \tag{3.4.23}$$

i

$$\hat{c}=(2m\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}^2)^{-1}[\hat{b}\sum_{t=1}^{N}Z_{t-1}T_{t-1}Y_{t-1}-\sum_{t=1}^{N}((\hat{R_t})^2+W_{t-1}^2(\hat{a})-2mT_{t-1})Y_{t-1}] \qquad (3.4.24)$$

ili

$$\hat{c}=(2mY'Y)^{-1}[\hat{b}A' - (\hat{R})' + (\hat{W})' - 2mT']Y \qquad (3.4.25)$$

gde je

$$A=(Z_0T_0,Z_1T_1,\ldots,Z_{N-1}T_{N-1})' \;, \quad R=(R_1^2,R_2^2,\ldots,R_N^2)' \;,$$
$$W=(W_0^2(a),W_1^2(a),\ldots,W_{N-1}^2(a))' \quad . \qquad (3.4.26)$$

Ocene $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{c}$ date izrazima (3.4.18), (3.4.22) i (3.4.24), odnosno (3.4.19), (3.4.23) i (3.4.25) su ocene najmanjih kvadrata parametara a, b i c. Da bismo utvrdili granična svojstva vektora $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$, prirodno je najpre utvrditi svojstva ocene $\hat{a}$, s obzirom na to da ona učestvuje u analitičkim izrazima za preostale dve ocene $\hat{b}$ i $\hat{c}$ i to direktno i preko ostatka $\hat{R_t}$. Otuda ćemo najpre dokazati sledeću teoremu:

Teorema 3.4.1. Pod uslovima I-III, ocena $\hat{a}$ zadata jednačinom (3.4.19) (odnosno (3.4.20)) je strogo postojana ocena parametra a, a $\sqrt{N}(\hat{a}-a)$ ima raspodelu koja konvergira normalnoj raspodeli sa očekivanjem nula i disperzijom $8b-9a^2-a-4c+5$.

Dokaz: Uočimo razliku

$$\hat{a}-a=(\sum_{t=1}^{N}Y_{t1}^2)^{-1}(\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}R_t)=((1/N)\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}^2)^{-1}((1/N)\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}R_t)=$$

$$=(N^{-1}R'Y)(N^{-1}Y'Y)^{-1} \quad . \qquad (3.4.7)$$

Nizovi $\{Y_t^2\}$ i $\{Y_{t-1}R_t\}$ su strogo stacionarni i ergodički jer je takav niz $\{Y_t\}$. Prema ergodičkoj teoremi to povlači skoro izvesnu konvergenciju nizova $\{N^{-1}\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}^2\}$ i $\{N^{-1}\sum_{t=1}^{N}Y_{t-1}R_t\}$ ka m^2 i nuli respektivno. Dakle, i $(\hat{a}-a)$ konvergira skoro izvesno ka nuli, što će reći $\hat{a}$ je strogo postojana ocena parametra a.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme koristićemo centralnu graničnu teoremu za martingale:

Teorema.(Billingsley, 1961) Neka je $\{Q_t\}$ niz slučajnih promenljivih sa svojstvom da se Q_t može da predstavi kao funkcional koji ne zavisi od t, merljiv u odnosu na σ-polje σ_t generisano nizom $\{S_t, S_{t-1}, \ldots\}$ strogo stacionarnih ergodičkih slučajnih promenljivih. Dalje, neka je $E(Q_t|\sigma_t)=0$ i $E(Q_t^2)=c^2<\infty$. Tada $(c^2N)^{-1/2}\sum_{t=1}^{N} Q_t$ ima raspodelu koja konvergira normalnoj normiranoj raspodeli.

*

Prema navedenoj centralnoj graničnoj teoremi važi da za proizvoljan realan broj q slučajne promenljive niza $\{N^{-1/2}\sum_{t=1}^{N} qY_{t-1}R_t\}$ imaju raspodelu koja konvergira normalnoj raspodeli sa očekivanjem nula i disperzijom koja je jednaka sa

$$\begin{aligned} E(q^2Y_{t-1}^2R_t^2) &= E(E(q^2Y_{t-1}^2R_t^2|F_{t-1})) = E(q^2Y_{t-1}^2E(R_t^2|F_{t-1})) = \\ &= E(q^2Y_{t-1}^2(Y_{t-1}^2E(B_t^2)+2Y_{t-1}E(B_t\delta_t)+E(\delta_t^2))) = \\ &= q^2E(Y_{t-1}^4(b-a^2)+2Y_{t-1}^3m(1-a-c)+Y_{t-1}^2m^2(1-b)) = \\ &= q^2m^4(8b-9a^2-4a-4c+5) \quad . \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} E(|N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}^2-m^2|^2) &= N^{-2}\sum_{t,j=1}^{N} E(Y_{t-1}^2Y_{j-1}^2)-2m^2N^{-1}\sum_{t=1}^{N} E(Y_{t-1}^2)+m^4 = \\ &= (2/N^2)\sum_{\substack{t,j=1\\ j>t}}^{N} E(Y_{t-1}^2(a^{j-t}Y_{t-1}+\sum_{k=0}^{j-t-1} a^kR_{j-k})^2)-m^4 = \\ &= 16m^4[(N-1)N^{-2}a^2(1-a^2)^{-1}-N^{-2}(1-a^{2N+2})(1-a^2)^{-2}] \quad , \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

odakle sledi i konvergencija u verovatnoći niza $\{N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}^2\}$ ka m^2.

Iz poslednjih dveju činjenica sledi da

$$\sqrt{N}(a^\wedge-a)=(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}^2)^{-1}(N^{-1/2}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}R_t) \tag{3.4.30}$$

ima raspodelu koja konvergira normalnoj raspodeli sa očekivanjem nula i disperzijom $8b-9a^2-4a-4c+5$.

Teorema 3.4.2. Pod uslovima I-III, vektori $D=(a,b,c)$ i $D^\wedge=(a^\wedge,b^\wedge,c^\wedge)$ su takvi da vektor $(D^\wedge-D)$ konvergira skoro izvesno ka nula vektoru kada obim uzorka neograničeno raste, a vektor $\sqrt{N}(D^\wedge-D)$ ima raspodelu koja konvergira normalnoj raspodeli sa očekivanjem nula i kovarijansnom matricom $K=[K_{ij}]$ gde je

$$K_{11}=E((m^{-2}Y_{t-1}R_t)^2)\ ,\quad K_{12}=K_{21}=E((8m^6)^{-1}Y_{t-1}R_tZ_{t-1}T_{t-1}S_t)\ ,$$

$$K_{13}=K_{31}=E(m^{-2}Y_{t-1}R_t(2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)^{-1}Q_t^*S_t)\ ,$$

$$K_{22}=E((64m^8)^{-1}Z_{t-1}^2T_{t-1}^2S_t^2)\ , \tag{3.4.31}$$

$$K_{23}=K_{32}=E((8m^4)^{-1}(2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)^{-1}Z_{t-1}T_{t-1}Q_t^*S_t^2)\ ,$$

$$K_{33}=E((2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)^{-2}(Q_t^*)^2S_t^2)$$

pri oznakama (3.4.9), (3.4.10), (3.4.13), zatim

$$S_t=R_t^2+W_{t-1}^2(a)-2mT_{t-1}+2mcY_{t-1}-bZ_{t-1}T_{t-1} \tag{3.4.32}$$

$$Q_t^*=(8m)^{-1}Z_{t-1}T_{t-1}-Y_{t-1}\ . \tag{3.4.33}$$

Dokaz: Dokaz ćemo sprovesti u dva koraka. U prvom delu ćemo pretpostaviti da nam je poznata prava vrednost parametra a. Uvešćemo oznake $b^\sim$ i $c^\sim$ za ocene parametara b i c pod pretpostavkom da je poznata vrednost parametra a, tj. $b^\sim$ i $c^\sim$ bi imali formu (3.4.22) i (3.4.24) pri čemu bi u tim izrazima $a^\wedge$ i $R_t^\wedge$ bili zamenjeni pravim vrednostima a i R_t. Isto bi važilo i za veze (3.4.23) i (3.4.25). Zatim uvodimo oznaku $D^\sim$ za vektor $D^\sim=(a^\wedge,b^\sim,c^\sim)$. Tada je

$$b^\sim-b^\wedge=\{Y'[Y(R'-(R^\wedge)')A - A(R'-(R^\wedge)')Y + Y(W'-(W^\wedge)')A - A(W'-(W^\wedge)')Y]\}* *[A'(AY'-YA')Y]^{-1} \tag{3.4.34}$$

$$c^{\sim}-c^{\wedge}=[(b^{\sim}-b^{\wedge})A' - (R'-(R^{\wedge})') - (W'-(W^{\wedge})')]Y(2mY'Y)^{-1} \quad . \tag{3.4.35}$$

Elementi vektora $(R'-(R^{\wedge})')$ i $(W'-(W^{\wedge})')$ su redom

$$R_t^2-(R_t^{\wedge})^2=2(a-a^{\wedge})Y_{t-1}R_t+(a-a^{\wedge})^2Y_{t-1}^2 \tag{3.4.36}$$

$$W_{t-1}^2(a)-W_{t-1}^2(a^{\wedge})=2(a-a^{\wedge})Y_{t-1}W_{t-1}(a)-(a-a^{\wedge})^2Y_{t-1}^2 \quad . \tag{3.4.37}$$

Konvergenciju brojioca razlike (3.4.34) ispitivaćemo ispitujući konvergencije njegovih pojedinih sabiraka. Dakle, posmatrajmo najpre niz $\{N^{-2}Y'Y(R'-(R^{\wedge})')A\}$. Zapišimo elemente ovog niza u razvijenom obliku:

$$N^{-2}Y'Y(R'-(R^{\wedge})')A=2(a-a^{\wedge})(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1})(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} R_jY_{j-1}^2)+$$

$$+(a-a^{\wedge})^2(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1})(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^3) \quad . \tag{3.4.38}$$

S obzirom da Y_t ima konačne momente proizvoljnog konačnog reda, što je posledica definicije (3.4.7) i uslova I-III, a kao posledica ergodičke teoreme, jednostavnim izračunavanjem dobijamo sledeće skoro izvesne konvergencije

$$N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1} \xrightarrow{s.i.} m^3 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.39}$$

$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N} R_jY_{j-1}^2 \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.40}$$

$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^3 \xrightarrow{s.i.} 2m^3 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.41}$$

Prema teoremi (3.4.1), $(a-a^{\wedge})$ konvergira skoro izvesno ka nuli, pa sledi

$$(a-a^{\wedge})(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1})(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} R_jY_{j-1}^2) \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.42}$$

Iz ove konvergencije, naravno, sledi i konvergencija u verovatnoći istog niza. Sada koristeći drugi deo teoreme (3.4.1) o konvergenciji u raspodeli niza $\{\sqrt{N}(a-\hat{a})\}$, sledi konvergencija u verovatnoći

$$\sqrt{N}(a-\hat{a})\Big(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1}\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} R_j Y_{j-1}^2\Big) \xrightarrow{P} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.43}$$

Za ispitivanje konvergencije drugog sabirka u (3.4.38), pored argumenata korišćenih za prvi sabirak ovog izraza koristimo još i činjenicu da ako $\sqrt{N}(a-\hat{a})$ konvergira u raspodeli onda $N^{1/4}(a-\hat{a})$ konvergira u verovatnoći ka očekivanju slučajne promenljive $\sqrt{N}(a-\hat{a})$, tj. ka nuli. Iz svega navedenog sledi konvergencija

$$\sqrt{N}(a-\hat{a})^2\Big(N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Y_{t-1}Z_{t-1}T_{t-1}\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^3\Big) \xrightarrow{P} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.44}$$

Konačno

$$N^{-2}Y'Y(R'-(\hat{R})')A \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty$$

i (3.4.45)

$$N^{-3/2}Y'Y(R'-(\hat{R})')A \xrightarrow{P} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad .$$

Analognim zaključivanjem dobijamo i sledeće rezultate

$$N^{-2}Y'A(R'-(\hat{R})')Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad N^{-3/2}Y'A(R'-(\hat{R})')Y \xrightarrow{P} 0 \quad , \tag{3.4.46}$$

$$N^{-2}Y'Y(W'-(\hat{W})')A \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad N^{-3/2}Y'Y(W'-(\hat{W})')A \xrightarrow{P} 0 \quad , \tag{3.4.47}$$

$$N^{-2}Y'A(W'-(\hat{W})')Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad N^{-3/2}Y'A(W'-(\hat{W})')Y \xrightarrow{P} 0 \tag{3.4.48}$$

kada $N\to\infty$.

Što se tiče imenioca razlomka kojim je definisana razlika $(\tilde{b}-\hat{b})$, (3.4.34), zaključujemo sledeće

$$N^{-2}A'AY'Y \xrightarrow{s.i.} 8m^6 \quad , \quad N\to\infty \qquad i \tag{3.4.49}$$

$$N^{-2}A'YA'Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.50}$$

Dakle,

$$N^{-2}A'(AY-YA')Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.51}$$

pa na osnovu (3.4.38)-(3.4.51) sledi da $(b^{-}-b^{\wedge})$ konvergira ka nuli skoro izvesno i $\sqrt{N}(b^{-}-b^{\wedge})$ konvergira ka nuli u verovatnoći.

Na osnovu istih odgovarajućih argumenata zaključujemo o sledećim konvergencijama

$$N^{-1}A'Y \xrightarrow{s.i.} m^3 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.52}$$

pa na osnovu $\sqrt{N}(b^{-}-b^{\wedge}) \xrightarrow{P} 0$, $N\to\infty$, sledi

$$N^{-1/2}(b^{-}-b^{\wedge})A'Y \xrightarrow{P} 0 \ , \ N\to\infty \quad . \tag{3.4.53}$$

Zatim

$$N^{-1}(R'-(R^{\wedge})')Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad N^{-1/2}(R'-(R^{\wedge})')Y \xrightarrow{P} 0 \ , \tag{3.4.54}$$

$$N^{-1}(W'-(W^{\wedge})')Y \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad N^{-1/2}(W'-(W^{\wedge})')Y \xrightarrow{P} 0 \ , \tag{3.4.55}$$

$$2mN^{-1}Y'Y \xrightarrow{s.i.} 2m^3 \tag{3.4.56}$$

pri $N\to\infty$.Na osnovu konvergencija (3.4.53)-(3.4.56) dobijamo da $(c^{-}-c^{\wedge})$ konvergira ka nuli skoro izvesno i $\sqrt{N}(c^{-}-c^{\wedge})$ konvergira ka nuli u verovatnoći.

Iz svega što je do sada u dokazu ove teoreme rečeno, sledi da vektor $(D^{-}-D^{\wedge})$ konvergira skoro izvesno ka nuli, dok $\sqrt{N}(D^{-}-D^{\wedge})$ konvergira u verovatnoći ka nuli.

Drugi korak u dokazu ove teoreme bio bi sledeći:

Posmatrajmo razlike

$$b^{-}-b=A'S(A'A)^{-1} \quad i \tag{3.4.57}$$

$$c^{-}-c=Q'S(2mY'Y)^{-1} \tag{3.4.58}$$

gde S i Q označavaju vektore

$$S=(S_1,S_2,\dots,S_{N-1})' \quad , \quad Q=(Q_1,Q_2,\dots,Q_{N-1})' \tag{3.4.59}$$

pri čemu je S_t definisano formulom (3.4.32), a Q_t je

$$Q_t=Z_{t-1}T_{t-1}(N^{-1}\sum_{k=1}^{N} Z_{k-1}^2T_{k-1}^2)^{-1}(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}Z_{j-1}T_{j-1})-Y_{t-1} \quad . \tag{3.4.60}$$

Uvedimo još i sledeći vektor

$$D^*=(a^*,b^*,c^*)' \tag{3.4.61}$$

gde je

$$a^*=m^{-2}N^{-1}(Y_1)'Y \quad , \tag{3.4.62}$$

$$b^*=(8m^4)^{-1}N^{-1}A'S+b \qquad i \tag{3.4.63}$$

$$c^*=(2mN^{-1}Y'Y)^{-1}N^{-1}(Q^*)'S+c \quad . \tag{3.4.64}$$

Sada imamo da je

$$a^*-\hat{a}=[m^{-2} - (N^{-1}Y'Y)^{-1}]N^{-1}Y_1Y \quad . \tag{3.4.65}$$

Kako važe sledeće skoro izvesne konvergencije

$$N^{-1}Y_1Y \xrightarrow{s.i.} am^2 \quad , \; N^{-1}Y'Y \xrightarrow{s.i.} m^2 \quad \text{pri } N\to\infty \quad , \tag{3.4.66}$$

to važi i

$$a^*-\hat{a} \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad \sqrt{N}(a^*-\hat{a}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pri } N\to\infty \quad . \tag{3.4.67}$$

Nadalje posmatrajmo razliku

$$\tilde{b}-b^*=(\tilde{b}-b)-(b^*-b) \quad . \tag{3.4.68}$$

Da bismo ispitali ponašanje razlike (3.4.68) u smislu konvergencije uočimo sledeći izraz

$$(\tilde{b}-b)N^{-1}A'A - 8m^4(b^*-b) = N^{-1}A'S - N^{-1}A'S = 0 \quad . \tag{3.4.69}$$

Zbog ergodičnosti niza $\{Z_{t-1}^2T_{t-1}^2\}$ važi i sledeća skoro izvesna konvergencija

$$N^{-1}\sum_{t=1}^{N} Z_{t-1}^2 T_{t-1}^2 \xrightarrow{s.i.} 8m^4 \quad , \quad N\to\infty \qquad (3.4.70)$$

pa (3.4.69) i (3.4.70) daje skoro izvesnu konvergenciju

$$\tilde{b}-b^* \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \qquad (3.4.71)$$

kao i konvergenciju u verovatnoći

$$\sqrt{N}(\tilde{b}-b^*) \xrightarrow{P} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \qquad (3.4.72)$$

Najzad ispitajmo konvergenciju razlike $c^*-\tilde{c}$:

$$c^*-\tilde{c}=c^*-c+c-\tilde{c}=(2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^2)^{-1}[N^{-1}\sum_{t=1}^{N}(Q_t^*-Q_t)S_t]=$$

$$=(2mN^{-1}Y'Y)^{-1}[N^{-1}(Q^*-Q)'S] \quad . \qquad (3.4.73)$$

Uočimo da su elementi vektora Q^* oblika

$$Q_t^*=Z_{t-1}T_{t-1}[N^{-1}\sum_{k=1}^{N} E(Z_{k-1}^2T_{k-1}^2)]^{-1}[N^{-1}\sum_{j=1}^{N} E(Y_{j-1}Z_{j-1}T_{j-1})]-Y_{t-1} \qquad (3.4.74)$$

te da elementi vektora (Q^*-Q)

$$Q_t^*-Q_t=Z_{t-1}T_{t-1}[(8m)^{-1}-(N^{-1}\sum_{k=1}^{N} Z_{k-1}^2T_{k-1}^2)^{-1}(N^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}Z_{j-1}T_{j-1})] \qquad (3.4.75)$$

čine niz koji konvergira skoro izvesno ka nuli prema (3.4.52) i (3.4.70). Kako konvergencija razlike $c^*-\tilde{c}$ direktno zavisi od konvergencije brojioca u (3.4.73), a imajući u vidu (3.4.56), sledi skoro izvesna konvergencija

$$c^*-\tilde{c} \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \qquad (3.4.76)$$

a onda i konvergencija u verovatnoći

$$\sqrt{N}(c^{*}-c^{\sim}) \xrightarrow{P} 0 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.77}$$

Prema (3.4.67), (3.4.71), (3.4.72), (3.4.77) sledi

$$D^{*}-D^{\sim} \xrightarrow{s.i.} 0 \quad i \quad \sqrt{N}(D^{*}-D^{\sim}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{pri } N\to\infty \quad . \tag{3.4.78}$$

Najzad uočimo razliku

$$D^{\wedge}-D=(D^{\wedge}-D^{\sim})+(D^{\sim}-D^{*})+(D^{*}-D) \quad . \tag{3.4.79}$$

Dakle, da bismo utvrdili konvergenciju i raspodelu ove razlike, preostaje nam još da ispitamo konvergenciju razlike $(D^{*}-D)$. U tu svrhu koristićemo proizvoljno izabrani vektor $v=(v_1,v_2,v_3)'$ i ispitati niz slučajnih promenljivih oblika

$$v'(D^{*}-D)=N^{-1}\sum_{t=1}^{N} H_t(v) \tag{3.4.80}$$

gde je

$$H_t(v)=v_1(a_t^{*}-a_t)+v_2(b_t^{*}-b_t)+v_3(c_t^{*}-c_t) \tag{3.4.81}$$

$$a_t^{*}-a_t=m^{-2}Y_{t-1}R_t \quad , \quad b_t^{*}-b_t=(8m^4)^{-1}Z_{t-1}T_{t-1}S_t \quad ,$$
$$c_t^{*}-c_t=(2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^{2})^{-1}Q_t^{*}S_t \tag{3.4.82}$$

pa bi $H_t(v)$ konačno bilo

$$H_t(v)=v_1m^{-2}Y_{t-1}R_t+[v_2(8m^4)^{-1}Z_{t-1}T_{t-1}+v_3(2mN^{-1}\sum_{j=1}^{N} Y_{j-1}^{2})^{-1}Q_t^{*}]S_t . \tag{3.4.83}$$

Lako je proveriti da je $E(R_t|F_{t-1})=0$ i $E(S_t|F_{t-1})=0$. Na osnovu toga zaključujemo da je i $E(H_t(v)|F_{t-1})=0$. S druge strane ergodičnost i stroga stacionarnost niza $\{H_t(v)\}$ povlači za sobom skoro izvesnu konvergenciju

$$v'(D^{*}-D) \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \quad . \tag{3.4.84}$$

Osim navedene konvergencije, uočene osobine niza $\{H_t(v)\}$ znače ispunjenje uslova navedene centralne granične teoreme za martingale (Billingsley,1961) za ovaj niz. Dakle, prema centralnoj graničnoj teoremi, $v'\sqrt{N}(D^*-D)$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj sa normalnom raspodelom čije je očekivanje nula, a disperzija $E(H_t^2(v))=v'Kv$ pri čemu su elementi matrice K zadati formulama (3.4.31). Kako je ovo tačno za proizvoljan vektor v dimenzije tri, to konačno možemo da izvedemo i sledeći zaključak

$$D\hat{}-D \xrightarrow{s.i.} 0 \quad , \quad N\to\infty \tag{3.4.85}$$

a $\sqrt{N}(D\hat{}-D)$ ima raspodelu koja konvergira normalnoj raspodeli sa očekivanjem nula i kovarijansnom matricom K.

3.5 Pravi odgovor na pitanje odnosa ocena $\alpha\check{}$ i $\alpha\hat{}$ je teško dati, kako zbog verć pomenutih teškoća teorijskog razmatranja raspodele statistike $\alpha\check{}$, tako i zbog "nepristupačnog" eksplicitnog izraza za ocenu $\alpha\hat{}$:

$$\alpha\hat{}=\frac{b\hat{}-a\hat{}+a\hat{}\,c\hat{}}{a\hat{}+b\hat{}+c\hat{}-1-(a\hat{})^2} \quad . \tag{3.5.1}$$

3.6 Druga grupa pitanja vezanih za predložene ocene u odeljku 3.2-3.4 odnosi se na mogućnost primene ovih ocena ili samo postupaka ocenjivanja na parametre, kako opšteg modela (2.1.1) tako i posebno na njegove druge specijalne slučajeve.

Sredina uzorka kao ocena matematičkog očekivanja procesa (2.1.1) je opšte prihvatljiva što se vidi iz dokaza u odeljku 3.2.

Ocena $\alpha\check{}$ koja je opisana u odeljku 3.3, kao što je tamo rečeno, zahteva kao jedan od neophodnih uslova da slučajna promenljiva iz niza $\{V_t\}$ ima vrednost nula sa pozitivnom verovatnoćom za svako t. Inače je već rečeno o prvoj primeni ove ocene kod modela EAR(1).

Metod najmanjih kvadrata primenjen u odeljku 3.4, primenjiv je na sve modele koji proizilaze iz diferencne jednačine (2.1.1) i osobina I-III za ocenjivanje parametara $a=E(U_t)$, $b=E(U_t^2)$ i $c=E(V_t^2)$. Međutim, broj koraka i ocenjivanje parametara konkretnih mešavina zavisi od svakog pojedinog slučaja. Tako je na primer dovoljan samo prvi korak za modele EAR(1) i TEAR(1). Dva koraka dovoljna su osim za model FAREX(1) još i za model NEAR(1). Za model

AREX(1) nisu dovoljna dva koraka za ocenjivanje svigh postojećih parametara mešavine. Treći korak je moguće načiniti, ali za sada nije na zadovoljavajući nasčin razrešen problem potpune algebarske jednačine četvrtog reda koja se dobija kao analogon kvadratnoj jednačini nastaloj rešavanjem sistema (3.4.2) za slučaj FAREX(1). Naravno, sistem bi u slučaju AREX(1) morao imati bar četiri jednačine, tj. bar četiri nova parametra koji bi se direktno ocenjivali metodom najmanjih kvadrata.

4. PROGNOZA I INTERPOLACIJA NEPOZNATIH VREDNOSTI SLUČAJNOG PROCESA $X_t=U_tX_{t-1}+V_tE_t$

4.1 Jednako važno pitanje analize vremenskih serija u odnosu na ocene parametara je ekstrapolacija i interpolacija nepoznatih vrednosti vremenske serije na osnovu konačnog ili beskonačnog broja opservacija realizacije te vremenske serije. Poznato je da je za vremenske serije linearnog tipa sa konstantnim koeficijentima, linearna prognoza najbolja prognoza u smislu srednje kvadratnog odstupanja, pogotovu za one za koje je inovacioni niz normalno raspodeljen. Slučaj linearne autoregresije prvog reda sa konstantnim koeficijentom autoregresije ali inovacionim nizom sa eksponencijalnom raspodelom razmatrao je O'Brajn (O'Brein, 1987) u smislu odluke da li je linearna prognoza najbolja za takvu vremensku seriju i dobio prilično zadovoljavajuće numeričke rezultate. Koristeći parcijalne korelacije, on je takođe pokazao da linearna prognoza ima svrhe i u slučaju EARMA(1,1) vremenske serije (Jacobs i Lewis, 1977).

4.2 Najopštiji princip linearnog prognoziranja stacionarnih vremenskih serija na osnovu konačne prošlosti, tj. *n* opservacija jedne realizacije iskazuje se sledećom teoremom:

Teorema.(Fuller, 1976) Ako je zadato *n* opservacija realizacije stacionarne vremenske serije $\{Y_t\}$ sa očekivanjem nula i poznatom kovarijansnom funkcijom, linearna prognoza sa najmanjom srednje kvadratnom greškom $(n+s)$-te $(s=1,2,...)$ opservacije je

$$Y_{n+s}\hat{}(Y_1,...,Y_n)=Y'\mathbf{B}_s$$

gde je

$$Y'=(Y_1,Y_2,...,Y_n),$$

$B_s = V_{nn}^+ V_{ns}$,

$V_{nn} = E(YY')$,

$V_{ns}' = (K_{n+s-1}, K_{n+s-2}, \ldots, K_s)$,

a

V_{nn}^+ je Mur-Penrouzov uopšteni inverz matrice V_{nn}.

Vremenske serije sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom (μ) definisane mešavinom raspodela kakve su predmet razmatranja ovog rada, imaju očekivanje $1/\mu$, dakle strogo veće od nule. Međutim, lako je pokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 4.2.1. Neka je $\{X_t\}$ stacionarna realna vremenska serija sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom (μ), $\mu>0$ i poznatom autokorelacionom strukturom. Najbolja linearna prognoza procesa $\{X_t\}$ u momentu $n+s$ (n i s su pozitivni celi brojevi) na osnovu n opservacija realizacije procesa $\{X_t\}$ prema kriterijumu srednje kvadratnog odstupanja je

$$X_{n+s}\hat{}(X_1, \ldots, X_n) = X' A_s \tag{4.2.1}$$

gde je

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)' \tag{4.2.2}$$

$$A_s = V_{nn}^+ V_{ns} \quad , \quad V_{nn}^+ \text{ je Mur-Penrouzov uopšteni inverz matrice } V_{nn} \tag{4.2.3}$$

$$V_{nn} = E(XX') \tag{4.2.4}$$

$$V_{ns} = E(X_{n+s} X) \tag{4.2.5}$$

i pri čemu vektor A_s ne zavisi od parametra eksponencijalne raspodele μ.

<u>Dokaz:</u> Dokaz teoreme je jednostavan i zasniva se na minimalizaciji izraza

$$\begin{aligned} M &= E((X_{n+s} - X'A_s)'(X_{n+s} - X'A_s)) = \\ &= E(X_{n+s}^2) - V_{n+s}'A_s - A_s'V_{ns} + A_s'V_{nn}A_s \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

po nepoznatom vektoru koeficijenata linearne prognoze, A_s. Dobija se

$$A_s' V_{nn} = V_{ns}' \tag{4.2.7}$$

i konačno

$$A_s = V_{nn}^{+} V_{ns} \tag{4.2.8}$$

zbog simetrije matrice V_{nn} stacionarnog procesa. Da bismo dokazali da vektor A_s ne zavisi od parametra eksponencijalne raspodele, razmotrimo vektor V_{ns} i matricu V_{nn}. Ako je $@_r$ poznata autokorelacija

$$@_r = \mathrm{Corr}(X_t, X_{t+r}) \quad , \quad @_0 = 1/\mu^2 \tag{4.2.9}$$

tada se elementi matrice V_{nn} mogu predstaviti na sledeći način

$$\begin{aligned} E(X_i X_j) &= \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + E(X_i)E(X_j) = @_0 @_{|i-j|} + (1/\mu)^2 = \\ &= (1/\mu^2)(@_{|i-j|} + 1) \quad , \quad i,j = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

pa je

$$V_{nn} = (1/\mu^2) W_{nn} \quad , \quad W_{nn} = [@_{|i-j|} + 1]_{i,j=1}^{n} \quad . \tag{4.2.11}$$

Slično, elementi vektora V_{ns} su

$$E(X_i X_{n+s}) = (1/\mu^2)(@_{n+s-i} + 1) \quad , \quad i = 1,\dots,n \quad , \tag{4.2.12}$$

te je

$$V_{ns}' = (1/\mu^2)(@_{n+s-1}+1, @_{n+s-2}+1, \dots, @_s+1) \tag{4.2.13}$$

odakle direktno sledi tvrđenje.

Razmotrimo prognozu vremenske serije definisane jednačinom (2.1.1) i uslovima I-III u smislu specijalnog slučaja stacionarne vremenske serije sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom.

Matrica V_{nn} i vektor V_{ns} ovog procesa su

$$V_{nn} = \mu^{-2} \begin{bmatrix} 2 & a+1 & a^2+1 & \dots & a^{n-1}+1 \\ a+1 & 2 & a+1 & \dots & a^{n-2}+1 \\ a^2+1 & a+1 & 2 & \dots & a^{n-3}+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1}+1 & a^{n-2}+1 & a^{n-3}+1 & \dots & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad V_{ns} = \mu^{-2} \begin{bmatrix} a^{n+s-1}+1 \\ a^{n+s-2}+1 \\ a^{n+s-3}+1 \\ \dots \\ a^{s}+1 \end{bmatrix} \tag{4.2.14}$$

prema svojstvu (2.3.3).

Uočimo autokovarijansnu matricu posmatrane vremenske serije:

$$K_{nn}=\mu^{-2}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & a & \dots & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & a^{n-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad . \qquad (4.2.15)$$

S obzirom da je vremenska serija $\{X_t\}$ stacionarna, simetrična matrica K_{nn} je pozitivno definitna, što povlači da su svi njeni glavni minori različiti od nule (tj. da ima inverznu matricu). Dakle, rang ove matrice je n, što znači da su vektori koji čine vrste (kolone)

$$\begin{array}{l} (1, \quad a, \quad a^2, \quad \dots, a^{n-1}) \\ (a, \quad 1, \quad a, \quad \dots, a^{n-2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3}, \dots, 1 \quad) \end{array} \qquad (4.2.16)$$

linearno nezavisni. Prema tome oni generišu jedan n-dimenzioni realni vektorski prostor V za svaki fiksiran realan broj a. Ako pak sada svaki od vektora iz sistema (4.2.16) transliramo za isti konstantni vektor $(1,1,\dots,1)$, translirácemo ceo prostor V u njemu izomorfan realni vektorski prostor V_1 generisan vektorima

$$\begin{array}{l} (2, \quad a+1, \quad a^2+1, \quad \dots, a^{n-1}+1) \\ (a+1, \quad 2, \quad a+1, \quad \dots, a^{n-2}+1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a^{n-1}+1, a^{n-2}+1, a^{n-3}+1, \dots, 2 \quad) \quad . \end{array} \qquad (4.2.17)$$

Kako su dimenzije izomorfnih prostora jednake, to je rang sistema vektora (4.2.17) takođe n pa je matrica V_{nn} regularna. Međutim, determinanta matrice $W_{nn}=\mu^2V_{nn}$ menja vrednost u rasponu od $n+1$ do 0 (tabela 1), ne uključujući ove vrednosti, u zavisnosti od vrednosti parametzra a. Vrednosti parametra a se kreću u rasponu od 0 do 1 prema osobini III(c). Vrednosti $n+1$ i 0 za determinantu matrice W_{nn} dobijaju se redom za vrednosti parametra 0 i 1. Činjenica o znatnoj izmeni vrednosti ove determinante bitno utiče na mogućnost tačnijeg određivanja vrednosti elemenata matrice W_{nn}^{-1} o čemu treba voditi računa pri rešavanju konkretnog problema.

Teorijska srednje kvadratna greška prognoze definisane teoremom 4.2.1. je

$$E(|X_{n+s}-\hat{X}_{n+s}|^2)=\mu^{-2}\{2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(a^{n+s-i+1})(a^{n+s-j+1}) + \tag{4.2.18}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(a^{|r-i|+1})[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_{ij}w_{rk}(a^{n+s-j+1})(a^{n+s-k+1})]\}$$

gde je $W_{nn}^{-1}=[w_{ij}]_{i,j=1}^{n}$.

a \ n	Vrednosti determinante matrice W_{nn}			
	5	6	7	8
0.0625	5.443520	6.287509	7.124823	7.955500
0.1250	4.799076	5.442974	6.065579	6.667399
0.1875	4.105035	4.532821	4.925455	5.284879
0.2500	3.398895	3.620982	3.802031	3.946304
0.3125	2.714983	2.763201	2.776109	2.760145
0.3750	2.082512	2.002713	1.904176	1.793747
0.4375	1.524079	1.367620	1.215218	1.071054
0.5000	1.054687	0.870117	0.711914	0.578430
0.5625	0.681314	0.507539	0.375523	0.276237
0.6250	0.403068	0.265011	0.173307	0.112810
0.6875	0.211954	0.119325	0.066908	0.037384
0.7500	0.094208	0.043506	0.020035	0.009204
0.8125	0.032197	0.011411	0.004037	0.001426
0.8750	0.008396	0.001650	0.000398	0.000096
0.9375	0.000578	0.000063	0.000007	0.0000007

Tabela 1

Napomenimo ovde da se isti problem inverzije autokovarijansne matrice V_{nn} uočava i kod vremenskih serija tipa pokretnih sredina sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom EMA(1) (Popović, 1988).

4.3 Nadalje ćemo posmatrati Hilbertov prostor H, stacionarnih vremenskih serija, gde su skalarni proizvod, metrika i norma definisani na uobičajeni način, tj.

$$X,Y\in H \Rightarrow \langle X,Y\rangle=E(XY)$$
$$d(X,Y)=(\langle X-Y,X-Y\rangle)^{1/2}=[E((X-Y)^2)]^{1/2} \qquad (4.3.1)$$
$$\|X\|=[E(X^2)]^{1/2} \quad .$$

Uočimo vremensku seriju $\{Y_t\}$ definisanu pomoću diferencnih jednačina (3.4.6)-(3.4.9) na osnovu vremenske serije $\{X_t\}$ ((2.1.1), I-III). Naglasimo da definicija vremenske serije $\{Y_t\}$ (3.4.6)-(3.4.9) nije vezana za model FAREX(1) u vezi sa kojim je u ovom radu izložena, već za opšti model (2.1.1) koji ispunjava osobine I-III. Dakle, ponovo uvodimo pretpostavku da nam je μ poznati parametar i realizaciju vremenske serije $\{X_t\}$ zamenjujemo realizacijom vremenske serije $\{Y_t\}$ bez opasnosti od konfuzije. Kako je

$$\begin{aligned}Cov(Y_t,Y_{t-r})&=Cov(X_t-1/\mu,X_{t-r}-1/\mu)=\\&=E[(X_t-1/\mu)(X_{t-r}-1/\mu)]-E(X_t-1/\mu)(X_{t-r}-1/\mu)=\\&=Cov(X_t,X_{t-r}) \quad ,\end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

to je spektralna gustina procesa $\{Y_t\}$ na osnovu razmatranja u odeljku 2.3

$$f(\tau)=(2\pi)^{-1}\sum_{h=-\infty}^{\infty} K_h e^{-i\tau h}=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{1-a^2}{(1-ae^{-i\tau})(1-ae^{i\tau})}=$$

$$=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{1-a^2}{1-2a\cos\tau+a^2} \quad . \qquad (4.3.3)$$

S obzirom na moguće vrednosti parametra a $(0<a<1)$, spektralna gustina (4.3.3) je pozitivna skoro svuda i još

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln f(\tau)d\tau = 2\pi\ln\frac{1-a^2}{2\pi\mu^2} > -\infty \qquad (4.3.4)$$

pa je kao što je poznato (na primer Rozanov, 1963), stacionarna vremenska serija $\{Y_t\}$ linearno regularna (ili kraće regularna). Pri tome smo usvojili sledeću poznatu definiciju regularnosti:

Označimo sa $H(t)$ zatvoren linearni potprostor Hilbertovog prostora H, razapet nad beskonačnom prošlošću vremenske serije $\{Y_t\}$ tj. nad skupom $\{Y_t,$

$Y_{t-1},\ldots\}$

$$H_t=\mathrm{Clsp}\{Y_s;s\le t\} \quad . \qquad (4.3.5)$$

Proces $\{Y_t\}$ je linearno regularan ako $Y_{t+1}\notin H_t$ za neko $t\in D$.

*

Na osnovu teoreme o projekciji u Hilbertovom prostoru tražimo najbolju linearnu prognozu veličine Y_{t+s} $(s\in D^+\setminus\{0\})$ u prostoru H_t (koji je Hilbertov potprostor prostora H).

Uočimo ponovo spektralnu gustinu (4.3.3) i zapuišimo je u obliku

$$f(\tau)=(2\pi)^{-1}|\Gamma(e^{-i\tau})|^2 \qquad (4.3.6)$$

gde je

$$\Gamma(z)=\mu^{-1}(1-a^2)^{1/2}(1-az)^{-1} \qquad (4.3.7)$$

funkcija analitička u jediničnom krugu i pripada klasi Hadrija H^2, tj. važi

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\Gamma(\varrho e^{-i\tau})|^2 d\tau < \infty \quad , \quad \varrho\to 1 \quad . \qquad (4.3.8)$$

Dakle, funkcija $\Gamma(z)$ dopušta sledeće razlaganje u stepeni red

$$\Gamma(z)=\mu^{-1}(1-a^2)^{1/2}\sum_{j=0}^{\infty} a^j z^j \qquad (4.3.9)$$

u jediničnom krugu, $|z|<1$. Tada po teoremi:

Teorema. (Rozanov, 1963) Neka je Q_t linearno regularni stacionarni proces sa spektralnom gustinom $f(\tau)$,

$$Q_t=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau t}\Phi_Q(d\tau)$$

gde je sa $\Phi_Q(.)$ označena spektralna slučajna mera posmatranog procesa, tada stacionarni proces $Q_{t+s}\hat{}$ koji je najbolja linearna prognoza (za *s* koraka unapred) procesa Q_t, dobija se iz procesa Q_t linearnom transformacijom

$$Q_{t+s}\hat{} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau t} g\hat{}(\tau,s)\Phi_Q(d\tau) \; .$$

Spektralna karakteristika $g\hat{}(\tau,s)$ određuje se vezom

$$g\hat{}(\tau,s) = e^{i\tau s}\frac{g(\tau) - \sum_{j=0}^{s-1} c_j e^{-i\tau j}}{g(\tau)}$$

gde je $g(\tau)=\Gamma(e^{-i\tau})$ granična vrednost analitičke funkcije u jediničnom krugu $\Gamma(z)$ oblika

$$\Gamma(z) = (2\pi)^{1/2}\exp\{(4\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\tau)\,\frac{e^{-i\tau}+z}{e^{-i\tau}-z}\,d\tau\} \quad ,$$

a koeficijenti c_j su koeficijenti razlaganja te funkcije u stepeni red

$$\Gamma(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad .$$

*

=>

$$Y_{t+s}\hat{} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau t} g\hat{}(\tau,s)\Phi_Y(d\tau) = a^s Y_t \quad , \qquad (4.3.10)$$

jer je

$$g\hat{}(\tau,s)=e^{i\tau s}\frac{\mu^{-1}(1-a^2)\sum_{j=0}^{\infty}a^j e^{-i\tau j}-\mu^{-1}(1-a^2)\sum_{j=0}^{s-1}a^j e^{-i\tau j}}{\mu^{-1}(1-a^2)^{1/2}(1-ae^{-i\tau})^{-1}}=a^s\ , \qquad (4.3.11)$$

je najbolja linearna prognoza za Y_{t+s} u prostoru H_t.

Poznato je (na primer Anderson, 1971) da je greška ovakve linearne prognoze

$$E(|Y_{t+s}-Y_{t+s}\hat{}|^2)=2\pi\exp\{(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\tau)d\tau\}=2\pi\exp\{(2\pi\mu^2)^{-1}(1-a^2)\}\ . \qquad (4.3.12)$$

4.4 Pored problema prognoziranja vremenske serije $\{X_t\}$ sa slučajnim koeficijentima javlja se i problem interpolacije ispuštenih vrednosti njene realizacije. Pokazaćemo da se i ovaj problem može rešiti na zadovoljavajući način primenom tehnike korišćene kod vremenskih serija sa konstantnim koeficijentima (Pourahmadi, 1989). Najpre ćemo izvršiti interpolaciju samo jedne ispuštene vrednosti, a zatim konačnog niza. I u ovom odeljku ćemo koristiti translaciju niza $\{X_t\}$, tj. niz $\{Y_t\}$.

Neka je dat skup opservacija

$$\{Y_t;t\leq r,t\neq 0\}\ ,\ r\in D^+\backslash\{0\} \qquad (4.4.1)$$

realizacije vremenske serije $\{Y_t\}$ dobijen na osnovu definicije (3.4.6)-(3.4.9). Zatvoren linearni prostor u smislu norme u Hilbertovom prostoru H razapet nad elementima skupa (4.4.1) označimo sa $H_{0,r}$

$$H_{0,r}=\mathrm{Clsp}\{Y_t;t\leq r,t\neq 0\}\ . \qquad (4.4.2)$$

Nije trivijalno naći ortogonalnu projekciju nedostajuće vrednosti Y_0 na $H_{0,r}$ jer H_{-1} i $sp\{Y_1,\dots,Y_r\}$ nisu uzajamno ortogonalni prostori. Primenjujući lemu:

Lema.(Pourahmadi, 1989) Neka je $\{Y_t\}$ linearno regularan stacionarni proces. Tada za proizvoljno $r\in D^+$

a) $Y_0 \notin H_{0,r}$

b) H_{-1} i S_r su ortogonalni potprostori od $H_{0,r}$ i

$$H_{0,r} = H_{-1} \oplus S_r$$

gde je

$$S_r = sp\{Y_k - Y_k\hat{}\,;\,1 \le k \le r\}$$

i $Y_k\hat{}$ je najbolja linearna prognoza za Y_k u H_{-1}.

*

dolazimo do mogućnosti da najbolju ocenu vrednosti Y_0 na osnovu opservacija (4.4.1) predstavimo kao zbir ortogonalnih projekcija na prostore H_{-1} i S_r u oznaci

$$Y_{0,r}\hat{} = \Pi_{H(-1)}(Y_0) + \Pi_{S(r)}(Y_0) = Y_0\hat{} + \Pi_{S(r)}(Y_0) \quad . \tag{4.4.3}$$

Dokazaćemo sledeću teoremu:

Teorema 4.4.1. Za vremensku seriju $\{Y_t\}$ definisanu jednačinama (3.4.6)-(3.4.9) najbolja linearna ocena ispuštene opservacije Y_0 na osnovu opservacija (4.4.1) data je sa

$$Y_{0,r}\hat{} = \frac{a}{1+a^2}(Y_{-1}+Y_1) \quad . \tag{4.4.4}$$

<u>Dokaz:</u> Na osnovu gore navedene leme (Pourahmadi,1989) i odeljka 4.3 gde smo pokazali da je

$$Y_0\hat{} = aY_{-1} \quad \text{i} \quad Y_k\hat{} = a^{k+1}Y_{-1} \tag{4.4.5}$$

treba samo još odrediti $\Pi_{S(r)}(Y_0)$ i uvrstiti u (4.4.3). Kao što je rečeno, $\Pi_{S(r)}(Y_0)$ tražimo kao ortogonalnu projekciju elementa Y_0 na prostor S_r u obliku

$$\Pi_{S(r)}(Y_0) = \sum_{j=1}^{r} c_{j,r}(Y_j - Y_j\hat{}) \quad . \tag{4.4.6}$$

Minimalno rastojanje ocene $\Pi_{S(r)}(Y_0)$ od prave vrednosti Y_0 u smislu norme (4.3.1) dobija se pri

$$\langle Y_0-\Pi_{S(r)}(Y_0), Y_k-\hat{Y}_k\rangle = 0 \quad \text{za svako } k=1,2,\dots,r \tag{4.4.7}$$

$$\Leftrightarrow \quad E\Big(\sum_{j=1}^{r} c_{j,r}(Y_jY_k - a^{j+1}Y_{-1}Y_k - a^{k+1}Y_jY_{-1} + a^{j+k+2}Y_{-1}^2)\Big)=$$

$$=E(Y_0Y_k-a^{k+1}Y_0Y_{-1}) \quad , \quad k=1,2,\dots,r \tag{4.4.8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu^{-2}\sum_{j=1}^{r} c_{j,r}(a^{|j-k|}-a^{j+k+2})=\mu^{-2}(a^k-a^{k+2}) \quad , \quad k=1,2,\dots,r \quad . \tag{4.4.9}$$

Rešenje ovog sistema normalnih jednačina je

$$c_{1,r}=a(1+a^2)^{-1} \quad , \quad c_{2,r}=c_{3,r}=\dots=c_{r,r}=0 \quad . \tag{4.4.10}$$

Zamenom (4.4.10) u (4.4.6) dobijamo

$$\Pi_{S(r)}(Y_0)=\frac{a}{1+a^2}(Y_1-a^2Y_{-1}) \quad . \tag{4.4.11}$$

Konačno zamenom (4.4.5) i (4.4.11) u (4.4.3) sledi traženi rezultat.

Razmotrimo sada interpolaciju većeg broja ispuštenih vrednosti realizacije vremenske serije $\{Y_t\}$. Bez smanjenja opštosti, a zbog jednostavnosti pisanja, pretpostavićemo da je prva nedostajuća vrednost Y_0, tj. da je poznata cela prošlost $\{\dots,Y_{-2},Y_{-1}\}$. Iza toga, označićemo sa

$$K=\{k(1),k(2),\dots,k(r)\} \quad , \quad 0<k(1)<\dots<k(r)<\infty \quad , \quad k(j)\in D^+\backslash\{0\} \quad \text{za svako } j \tag{4.4.12}$$

indekse opserviranih (poznatih) vrednosti našeg ispitivanog procesa posle prve ispuštene vrednosti Y_0. Tada indeks r označava

$$r=\mathrm{card}K \quad , \tag{4.4.13}$$

broj poznatih vrednosti posle Y_0. Takođe ćemo označiti sa

$$L=\{n(1),n(2),\dots,n(l)\}\ ,\ 0=n(1)<n(2)<\dots<n(l)<k(r) \tag{4.4.14}$$

skup indekasa nedostajućih vrednosti procesa $\{Y_t\}$ do momenta $k(r)$. Indeks l je jednak ukupnom broju nedostajućih vrednosti procesa do trenutka $k(r)$,

$$l=\mathrm{card}L \tag{4.4.15}$$

Da bismo našli ocenu vrednosti vektora

$$Y_L'=(Y_{n(1)},Y_{n(2)},\dots,Y_{n(l)}) \tag{4.4.16}$$

na osnovu poznatih vrednosti $\{Y_t;t\le-1,t\in K\}$ tražićemo ocenu svake pojedine komponente vektora Y_L. Za uočenu komponentu Y_n, $n\in L$ vektora Y_L postoje dve mogućnosti:

(i) Postoje $k(j),k(j+1)\in K$ takvi da je $k(j)+1=n$ i $n+1=k(j+1)$. Tada će, s obzirom na razmatranja u odeljku 4.3 kao i rezultata ocene jedne nedostajuće vrednosti prema teoremi 4.4.1., biti najbolja ocena vrednosti Y_n na osnovu poznatih vrednosti $\{Y_t,t\le-1,t\in k\}$:

$$Y_n\hat{}\hat{}=\frac{a}{1+a^2}(Y_{k(j)}+Y_{k(j+1)}) \tag{4.4.17}$$

(ii) Postoje prirodni brojevi $h(1)$ i $h(2)$ od kojih je bar jedan veći od jedinice, takvi da postoji $j\in\{1,2,\dots,r\}$ tako da je $k(j)+h(1)=n$ i $n+h(2)=k(j+1)$. Za ovaj slučaj dokažimo lemu

Lema 4.4.1. Za vremensku seriju $\{Y_t\}$ definisanu jednačinama (3.4.6)-(3.4.9) i Hilbertove prostore

$$\begin{aligned}&H_{n-h(1)}{}^1=H_{k(j)}{}^1=\mathrm{Clsp}\{Y_t;t\le-1,t\in\{k(1),k(2),\dots,k(j)\}\\&S=\mathrm{Clsp}\{Y_{k(j+1)}-Y_{k(j+1)}\hat{},\ Y_{k(j+2)}-Y_{k(j+2)}\hat{},\ \dots,\ Y_{k(r)}-Y_{k(r)}\hat{}\}\\&H_{k(r)}\hat{}=\mathrm{Clsp}\{Y_t;t\le-1,t\in K\}\ ,\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

gde je oznaka $Y_{k(s)}\hat{}$ korišćena u smislu najbolje linearne prognoze elementa $Y_{k(s)}$ u $H_{k(j)}{}^1$, važi:

a) $Y_n\notin H_{k(r)}{}^1$

b) Prostori $H_{k(j)}{}^1$ i S su ortogonalni i $H_{k(r)}{}^1 = H_{k(j)}{}^1 \oplus S$.

Dokaz:

a) Pretpostavimo suprotno, tj. da $Y_n \in H_{k(r)}{}^1$. To bi značilo da Y_n ima reprezentaciju

$$Y_n = \sum_{k \in K(1)} c_k Y_k + Y \tag{4.4.19}$$

gde je $Y \in H_{k(j)}{}^1$, $K(1)=\{k(j+1),k(j+2),\ldots,k(r)\} \subset K$. Pri tome postoji bar jedno $k \in K(1)$ takvo da je $c_k \neq 0$. (Inače bi bilo $Y_n = Y \in H_{k(j)}{}^1 \subset H_{k(j)}$ što bi protivurečilo dokazu odeljka 4.3 o regularnosti procesa $\{Y_t\}$.) Bez smanjenja opštosti pretpostavimo da je $c_{k(r)} \neq 0$. Tada je

$$Y_{k(r)} = c_{k(r)}{}^{-1} Y_n - \sum_{k \in K(1) \setminus \{k(r)\}} c_{k(r)}{}^{-1} c_k Y_k - c_{k(r)}{}^{-1} Y \in H_{k(r-1)}{}^1 \quad H_{k(r-1)} \tag{4.4.20}$$

što bi takođe protivurečilo osobini regularnosti procesa $\{Y_t\}$. Oznake $H_{k(j)}$ i $H_{k(r-1)}$ korišćene su u sledećem svojstvu

$$H_{k(s)} = \mathrm{Clsp}\{Y_t ; t \le k(s)\}. \tag{4.4.21}$$

Dakle,

$$Y_n \notin H_{k(r)}{}^1 \tag{4.4.22}$$

b) Na osnovu navedene leme (Pourahmadi, 1989) sledi da su $H_{k(j)}$ i S ortogonalni među sobom. No kako je $H_{k(j)}{}^1 \subset H_{k(j)}$ i $a^h Y_{k(j)} \in H_{k(j)}{}^1$ za svako h, jer je $H_{k(j)}{}^1$ linearni prostor, sledi da su i $H_{k(j)}{}^1$ i S ortogonalni prostori.

Kako je $H_{k(j)}{}^1 \oplus S \subseteq H_{k(r)}{}^1$ za svako $k(j) \in K$, treba još samo dokazati drugi smer implikacije. Neka je, dakle,

$$X \in H_{k(r)}{}^1 \Rightarrow X = Y + \sum_{k \in K(1)} c_k Y_k \quad , \quad Y \in H_{k(j)}{}^1 \tag{4.4.23}$$

$$X = (Y + \sum_{k \in K(1)} c_k Y_k\hat{}\,) + \sum_{k \in K(1)} c_k (Y_k - Y_k\hat{}\,) \quad . \tag{4.4.24}$$

Prvi sabirak u (4.4.24) pripada $H_{k(j)}{}^1$, a drugi prostoru S. Otuda

$$H_{k(r)}{}^{1} \subseteq H_{k(j)}{}^{1} \oplus S \quad . \tag{4.4.25}$$

Teorema 4.4.2. Pod uslovom (ii) najbolja ocena nedostajuće vrednosti Y_n je

$$Y_n\hat{}\hat{}=\frac{1}{1-a^{2[h(1)+h(2)]}}[a^{h(1)}(1-a^{2h(2)})Y_{k(j)}+a^{h(2)}(1-a^{2h(1)})Y_{k(j+1)}] \; . \tag{4.4.26}$$

Dokaz: Prema lemi 4.4.1.

$$Y_n\hat{}\hat{} = \Pi_j(Y_n) + \Pi_s(Y_n) \tag{4.4.27}$$

gde je sa $\Pi_j(Y_n)$ označena ortogonalna projekcija elementa Y_n na prostor $H_{k(j)}{}^{1}$, a sa $\Pi_s(Y_n)$ na prostor S. Razmotrimo najpre $\Pi_j(Y_n)=Y_n\hat{}$. Najbolja linearna prognoza elementa Y_n u prostoru $H_{k(j)}$ data je sa

$$Y_n\hat{}=a^{h(1)}Y_{k(j)} \quad . \tag{4.4.28}$$

Kako je $a^{h(1)}Y_{k(j)}\in H_{k(j)}{}^{1}\subset H_{k(j)}$, to je

$$\Pi_j(Y_n) = a^{h(1)}Y_{k(j)} \quad . \tag{4.4.29}$$

Ostaje još da odredimo $\Pi_s(Y_n)$ u obliku

$$\Pi_s(Y_n)= \sum_{k\in K(1)} c_k(Y_k-Y_k\hat{}) \quad , \tag{4.4.30}$$

gde treba odrediti realne koeficijente c_k iz uslova ortogonalnosti slučajnih promenljivih $Y_n-\Pi_s(Y_n)$ na Hilbertov prostor S, tj.

$$\langle Y_n-\Pi_s(Y_n),Y_s-Y_s\hat{}\rangle=0 \quad \text{za svako } s\in K(1). \tag{4.4.31}$$

Ovaj sistem normalnih jednačina svodi se na

$$\sum_{k\in K(1)} c_k(a^{k-2k(j)+s}-a^{|k-s|})=a^{h(1)+s-k(j)}-a^{s-n} \quad , \quad s\in K(1) \quad . \tag{4.4.32}$$

Matrica ovog sistema se sastoji od odabranog broja verktora fiksiranih skupom

$K(1)$ matrice sistema (4.4.9). Naime, elementi matrice sistema (4.4.32) su elementi matrice (4.4.9) izabrani po kriterijumu preseka kolona i vrsta indeksiranih elementima skupa $K(1)$. Matricu sistema (4.4.32) je, takođe, lako svesti na trougaoni oblik odakle bi se lako izračunale tražene vrednosti koeficijenata c_k, $k\in K(1)$:

$$c_{k(j+1)}=\frac{a^{k(j+1)-n}(1-a^{2h(1)})}{1-a^{2[k(j+1)-n+h(1)]}}=\frac{a^{h(2)}(1-a^{2h(1)})}{1-a^{2[h(1)+h(2)]}}\,,\quad c_k=0 \text{ za } k\in K(1)\backslash\{k(j+1)\}\,. \tag{4.4.33}$$

Dakle je

$$\Pi_s(Y_n)=\frac{a^{h(2)}(1-a^{2h(1)})}{1-a^{2[h(1)+h(2)]}}(Y_{k(j+1)}-a^{h(1)+h(2)}Y_{k(j)})\quad . \tag{4.4.34}$$

Zamenom (4.4.34) i (4.4.29) u (4.4.27) sledi traženi rezultat (4.4.26).

Pitanje niza nedostajućih vrednosti sa indeksima iz skupa $\{k(j)+1,k(j)+2,\ldots,k(j+1)-1\}$ rešava se iteracijom tako što se najpre oceni $Y_{k(j)+1}$ prema teoremi 4.4.2., a zatim se $Y_{k(j)+1}\hat{}\hat{}$ uzima kao poznata vrednost realizacije (umesto $Y_{k(j)+1}$) pa se postupak opisan u teoremi ponavlja.

4.5 Kao što se iz odeljaka 4.2-4.4 vidi, problem prognoze i interpolacije vrednosti vremenske serije $\{X_t\}$ definisane jednačinom (2.1.1) i uslovima I-III, vezan je za poznavanje, odnosno ocenjivanje parametara μ i a. Problem se praktično prevazilazi korišćenjem ocena iz odeljka 3.2 i 3.4.

5. PROGNOZE ARMA SERIJA SA EKSPONENCIJALNIM RASPODELAMA VIŠEG REDA

5.1 U ovom poglavlju ćemo razmotriti neke mogućnosti prognoziranja vremenskih serija sa eksponencijalnim marginalnim raspodelama višeg reda. Najpre ćemo se pozabaviti vremenskom serijom EAR(2) koja je, kao što je već navedeno u odeljku 1.2, definisana na sledeći način: $\{X_t;t\in D\}$

$$X_t=\begin{cases} a_1X_{t-1}+\delta_t & \text{s.v.}\quad 1-a_2 \\ a_2X_{t-2}+\delta_t & \text{s.v.}\quad a_2 \end{cases} \tag{5.1.1}$$

gde su a_1 i a_2 konstante $0<a_1,a_2<1$, a slučajni niz $\{\delta_t\}$ je niz nezavisnih identički raspodeljenih mešavina:

$$\delta_t=\begin{cases} 0 & \text{s.v.}\quad a_1/(1+a_1-a_2) \\ E_t & \text{s.v.}\quad (1-a_1)(1-a_2)/[1-(1+a_1-a_2)a_2] \\ (1+a_1-a_2)a_2E_t & \text{s.v.}\quad (1-a_2)(a_1-a_2)^2/\{(1+a_1-a_2)[1-(1+a_1-a_2)a_2]\} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

gde je $\{E_t\}$ niz nezavisnih identički raspodeljenih (μ) slučajnih promenljivih.

Naš zadatak će biti da na osnovu beskonačne prošlosti realizacije vremenske serije $\{X_t\}$ ocenimo neku buduću vrednost te iste vremenske serije. Ponovo ćemo se poslužiti translacijom procesa $\{X_t\}$ u proces $\{Y_t\}$ koji ima istu autokovarijansnu strukturu kao i $\{X_t\}$, ali čije je očekivanje nula. Dakle,

$$Y_t=X_t-1/\mu \tag{5.1.3}$$

I u ovom slučaju se parametar $m=1/\mu$ može oceniti sredinom uzorka, što se lako pokazuje.

Autokorelaciona struktura vremenske serije $\{X_t\}$, odnosno $\{Y_t\}$, izražava se sledećom diferencnom jednačinom drugog reda

$$\rho_r=(1-\alpha_2)\alpha_1\rho_{r-1}+\alpha_2^2\rho_{r-2} \quad , \quad r=1,2,\ldots \tag{5.1.4}$$

uz uslov

$$\rho_0=1 \;, \; \rho_{-r}=\rho_r \tag{5.1.5}$$

S obzirom na uslov (5.1.5) lako je izračunati i drugi početni uslov

$$\rho_1=\alpha_1/(1+\alpha_2) \tag{5.1.6}$$

Tražićemo rešenje diferencne jednačine (5.1.4) za navedene početne uslove. Uvedimo oznake

$$A=(1-\alpha_2)\alpha_1 \quad \text{i} \quad B=\alpha_2^2 \;. \tag{5.1.7}$$

Dakle, jednačina postaje

$$\rho_r=A\rho_{r-1}+B\rho_{r-2} \quad . \tag{5.1.8}$$

Traženo rešenje diferencne jednačine biće izraženo u terminima rešenja kvadratne jednačine

$$w^2-Aw-B=0 \quad , \tag{5.1.9}$$

pa stoga razmotrimo detaljnije ova rešenja. Diskriminanta kvadratne jednačine (5.1.9) je

$$D=A^2+4B=(1-\alpha_2)^2\alpha_1^2+4\alpha_2^2 \quad . \tag{5.1.10}$$

Diskriminanta D bi bila jednaka nuli ako i samo ako bi bilo $\alpha_1=\alpha_2=0$, što je prema definiciji modela EAR(2) nemoguće. Dakle, $D>0$ za $0<\alpha_1,\alpha_2<1$, tj. za sve moguće vrednosti α_1 i α_2 iz definicije modela. Znači, rešenja w_1 i w_2 su realna i različita. Osim toga je

$$w_1+w_2=A \quad \text{i} \quad w_1w_2=-B \tag{5.1.11}$$

odakle zaključujemo da su w_1 i w_2 različitog znaka. Usvojimo oznake tako da je $w_1<0$ i $w_2>0$. Prema (5.1.11) bi posle toga mogli zapisati da je

$$|w_2|>|w_1| \quad . \tag{5.1.12}$$

Eksplicitno bi rešenja mogli zapisati kao

$$w_1=[A-(A^2+4B)^{1/2}]/2 \quad , \quad w_2=[A+(A^2+4B)^{1/2}]/2 \quad . \tag{5.1.13}$$

Na osnovu (5.1.13) lako je pokazati da je za definisane α_1 i α_2, $w_2<1$. Dakle je

$$|w_1|<|w_2|<1 \quad . \tag{5.1.14}$$

Rešenje diferencne jednačine (5.1.8) za početne uslove (5.1.5) i (5.1.6) je

$$\rho_r=\frac{(A-w_1)[Aw_2+B(1-B)]}{(1-B)w_2^2(w_2-w_1)}w_2^r-\frac{(A-w_2)[Aw_1+B(1-B)]}{(1-B)w_1^2(w_2-w_1)}w_1^r \quad , \tag{5.1.15}$$

a zatim uzimajući u obzir (5.1.11), rešenje je:

$$\rho_r=\frac{1-w_1^2}{(1+w_1w_2)(w_2-w_1)}w_2^{r+1}-\frac{1-w_2^2}{(1+w_1w_2)(w_2-w_1)}w_1^{r+1} \quad . \tag{5.1.16}$$

Kako je $\rho_r=\rho_{-r}$ to je autokovarijansna funkcija vremenske serije EAR(2)

$$K_h=(1/\mu^2)\left[\frac{w_2(1-w_1^2)}{(1+w_1w_2)(w_2-w_1)}w_2^{|h|}-\frac{w_1(1-w_2^2)}{(1+w_1w_2)(w_2-w_1)}w_1^{|h|}\right] \quad \text{za } h\in D. \tag{5.1.17}$$

Prema tome je spektralna gustina ovog procesa

$$f(\tau)=(2\pi)^{-1}\sum_{h=-\infty}^{\infty}K_he^{-i\tau h}=$$

$$=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{(1-w_1^2)(1-w_2^2)(1-w_1w_2)}{1+w_1w_2}|e^{i\tau}-w_1|^{-2}|e^{i\tau}-w_2|^{-2} \quad . \tag{5.1.18}$$

Označimo sa

$$C=(2\pi\mu^2)^{-1}\frac{(1-w_1^2)(1-w_2^2)(1-w_1w_2)}{1+w_1w_2} . \tag{5.1.19}$$

Imajući u vidu (5.1.11), (5.1.12) i (5.1.14) dobijamo da je $C>0$.

Posle ovog razmatranja precizirajmo postupak prognoziranja. S obzirom na pretpostavku o translaciji, pretpostavićemo da su nam poznate opservacije Y_{t-1}, $Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$ realizacije vremenske serije $\{Y_t\}$ (5.1.3). U Hilbertovom prostoru razapetom nad ovim opservacijama, H_{t-1}, tražimo ortogonalnu projekciju elementa Y_{t+s}, $s\geq 0$ kao najbolju linearnu prognozu tog elementa na osnovu poznatih opservacija. S obzirom da je spektralna gustina posmatranog procesa (5.1.18) racionalna funkcija po $e^{i\tau}$, primenićemo metodu Jagloma, (Yaglom, 1972):

Na osnovu spektralne reprezentacije elementa Y_t

$$Y_t=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau t} f(\tau)d\tau \quad , \tag{5.1.20}$$

tražimo najbolju linearnu prognozu elementa Y_{t+s} u obliku

$$Y_{t+s}\hat{}=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau t} g_s(e^{i\tau}) f(\tau)d\tau \tag{5.1.21}$$

za koju prema definiciji skalarnog množenja i osobini ortogonalnosti treba da važi

$$E((Y_{t+s}-Y_{t+s}\hat{})Y_{t-r})=0 \quad za \quad r>0 \ , \ s\geq 0 \ , \tag{5.1.22}$$

odnosno

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau r}[e^{i\tau s}-g_s(e^{i\tau})]f(\tau)d\tau = 0 \quad za \ r>0 \tag{5.1.23}$$

gde je funkciju $g_s(z)$ na jedinstven način moguće odrediti iz sledećih uslova:

a) $g_s(z)$ je analitička funkcija na krugu $|z|=1$ i van njega, tj. može imati singularitete samo unutar jediničnog kruga.

b) $g_s(\infty)=0$

c) $[z^s-g_s(z)]f_1(z)$ je analitička funkcija unutar kruga $|z|=1$ i na njemu, tj. može imati singularitete samo van jediničnog kruga, gde je $f(\tau)=f_1(e^{i\tau})$.

Dakle, zamenom $e^{i\tau}$ sa z u $f(\tau)$ dobijamo

$$f_1(z)=\frac{Cz^2}{(z-w_1)(1-w_1z)(z-w_2)(1-w_2z)} \quad . \tag{5.1.24}$$

Prognoza za jedan korak, tj. za $s=0$ dala bi sledeće

$$g_0(z) = (w_1+w_2)/z - w_1w_2/z^2 \quad , \tag{5.1.25}$$

odnosno,

$$g_0(e^{i\tau}) = (w_1+w_2)e^{-i\tau} - w_1w_2e^{-2i\tau} \quad , \tag{5.1.26}$$

pa je prognoza za jedan korak data sa

$$Y_t\hat{} = (w_1+w_2)Y_{t-1} - w_1w_2Y_{t-2} \quad . \tag{5.1.27}$$

Srednje kvadratno odstupanje prognoze od prave vrednosti je:

$$E(|Y_t-Y_t\hat{}|^2) = 2\pi C = \mu^{-2}\frac{(1-w_1^2)(1-w_2^2)(1-w_1w_2)}{1+w_1w_2} \tag{5.1.28}$$

Prognoza za $s+1$ koraka unapred, $s>0$ daje sledeće

$$g_s(z)=(w_2-w_1)^{-1}[(w_2^{s+2}-w_1^{s+2})/z - w_1w_2(w_2^{s+1}-w_1^{s+1})/z^2] \quad , \tag{5.1.29}$$

odnosno

$$g_s(e^{i\tau})=(w_2-w_1)^{-1}[(w_2^{s+2}-w_1^{s+2})e^{-i\tau} - w_1w_2(w_2^{s+1}-w_1^{s+1})e^{-2i\tau}] \tag{5.1.30}$$

pa je

$$Y_{t+s}\hat{} = \frac{w_2^{s+2}-w_1^{s+2}}{w_2-w_1} Y_{t-1} - \frac{w_1 w_2 (w_2^{s+1}-w_1^{s+1})}{w_2-w_1} Y_{t-2} \quad . \qquad (5.1.31)$$

Na isti odgovarajući način možemo prognozirati vremensku seriju NEAR(2) čija je definicija, kao što je navedeno u odeljku 1.2, $\{X_t;t\in D\}$

$$X_t=\begin{cases} \beta_1 X_{t-1}+\delta_t & \text{s.v. } \alpha_1 \\ \beta_2 X_{t-2}+\delta_t & \text{s.v. } \alpha_2 \\ \delta_t & \text{s.v. } 1-\alpha_1-\alpha_2 \end{cases} \quad , \qquad (5.1.32)$$

gde je $0<\alpha_1,\alpha_2$, $\alpha_1+\alpha_2<1$, $0<\beta_1,\beta_2<1$, a niz $\{\delta_t;t\in D\}$

$$\delta_t=\begin{cases} E_t & \text{s.v. } 1-p_2-p_3 \\ b_2 E_t & \text{s.v. } p_2 \\ b_3 E_t & \text{s.v. } p_3 \end{cases} \quad , \qquad (5.1.33)$$

kod koga su p_2, p_3, b_2 i b_3 definisani izrazima (1.2.11), a niz $\{E_t\}$ je, kao i kod prethodnih vremenskih serija o kojima je bilo reči, niz n.i.r. eksponencijalnih (μ) slučajnih promenljivih. Videli smo da je autokorelaciona funkcija ovog modela data diferencnom jednačinom

$$\rho_r=\alpha_1\beta_1\rho_{r-1}+\alpha_2\beta_2\rho_{r-2} \quad , \quad r=1,2,... \qquad (5.1.35)$$

$$\rho_0=1 \quad , \quad \rho_{-r}=\rho_r \quad . \qquad (5.1.36)$$

Početni uslovi (5.1.36) daju

$$\rho_1=\alpha_1\beta_1(1-\alpha_2\beta_2)^{-1} \quad . \qquad (5.1.37)$$

Dakle, važi jednačina (5.1.8) za koju je u ovom slučaju

$$A=\alpha_1\beta_1 \quad , \quad B=\alpha_2\beta_2 \qquad (5.1.38)$$

pa bi diskriminanta pripadajuće kvadratne jednačine (5.1.9)

$$D=A^2+4B=\alpha_1{}^2\beta_1{}^2+4\alpha_2\beta_2 \qquad (5.1.39)$$

bila takođe pozitivna za sve vrednosti α_1, α_2, β_1 i β_2 obuhvaćene definicijom modela NEAR(2). Na osnovu (5.1.11) i u ovom slučaju sledi da su w_1 i w_2 različitog znaka i neka je i sada u važnosti pretpostavka $w_1<0$, $w_2>0$. Lako je pokazati da je $|w_1|<1$, a što se tiče w_2 zaključujemo na sledeći način:

Na osnovu definicije modela NEAR(2) sledi da je $\alpha_2<1-\alpha_1$ i $\alpha_1<1-\alpha_2$.

Razmotrićemo dve mogućnosti u pogledu odnosa među parametrima β_1 i β_2:

(i) $\beta_2\le\beta_1<1$ daje $0\le\beta_1-\beta_2<1-\beta_2$, pa je

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2<\alpha_1\beta_1+(1-\alpha_1)\beta_2=\alpha_1(\beta_1-\beta_2)+\beta_2<\alpha_1(1-\beta_2)+\beta_2<(1-\alpha_2)(1-\beta_2)+\beta_2= \\ =1-\alpha_2(1-\beta_2)<1 \quad .$$

(ii) $\beta_1\le\beta_2<1$ daje $0\le\beta_2-\beta_1<1-\beta_1$, pa je

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2<(1-\alpha_2)\beta_1+\alpha_2\beta_2=\alpha_2(\beta_2-\beta_1)+\beta_1<\alpha_2(1-\beta_1)+\beta_1<(1-\alpha_1)(1-\beta_1)+\beta_1= \\ =1-\alpha_1(1-\beta_1)<1 \quad .$$

Na Osnovu (i) i (ii) lako zaključujemo da je $w_2<1$ s obzirom da je

$$w_2=[\alpha_1\beta_1+(\alpha_1^2\beta_1^2+4\alpha_2\beta_2)^{1/2}]/2 \quad . \tag{5.1.40}$$

Primetimo da je

$$w_1=[\alpha_1\beta_1-(\alpha_1^2\beta_1^2+4\alpha_2\beta_2)^{1/2}]/2 \quad . \tag{5.1.41}$$

Dakle, i spektralna gustina NEAR(2) ima formu (5.1.18) sa vrednostima (5.1.40) i (5.1.41) za w_2 i w_1. Konstanta C zadata formulom (5.1.19)je i uovom slučaju pozitivna. Otuda će najbolja linearna prognoza ovog procesa za jedan korak unapred imati formu (5.1.27) sa srednje kvadratnom greškom (5.1.28), a za $s+1$ koraka unapred, $s>0$, formu (5.1.31) pri čemu neprestano treba uvažavati (5.1.40) i (5.1.41).

5.2 Eksponencijalna autoregresivna vremenska serija $\{X_t\}$ reda p u oznaci EAR(p) definisana kao u odeljku 1.2 je

$$X_t=\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1X_{t-1} & \text{s.v.} & a_1 \\ \alpha_2X_{t-2} & \text{s.v.} & a_2 \\ \dots\dots & & \\ \alpha_pX_{t-p} & \text{s.v.} & a_p \end{array}\right\} + \delta_t \tag{5.2.1}$$

za $0<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p<1$, gde su $a_1,a_2,\ldots,a_p$ poznati parametri i niz $\{\delta_t\}$ je niz n.i.r. slučajnih promenljivih koji obezbeđuje eksponencijalnu marginalnu raspodelu (μ) slučajnih promenljivih X_t.

Ako nam je poznato n opservacija $X_1,X_2,\ldots,X_n$ realizacije vremenske serije $\{X_t\}$ tipa EAR(p), tražićemo najbolju linearnu prognozu za s koraka unapred ($s\in D^+\setminus\{0\}$) kao ortogonalnu projekciju elementa X_{n+s} na Hilbertov prostor razapet nad elementima $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Posmatramo linearnu funkciju

$$X_{n+s}\hat{}=\sum_{j=1}^{n} d_j X_j \tag{5.2.3}$$

u kojoj treba odrediti koeficijente d_j iz uslova ortogonalnosti. Tako dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina

$$\langle X_{n+s}-X_{n+s}\hat{},X_k\rangle = 0 \quad \text{za} \quad k=1,2,\ldots,n \tag{5.2.4}$$

koji postaje

$$\sum_{j=1}^{n} d_j E(X_j X_k)=E(X_{n+s}X_k) \quad , \quad k=1,2,\ldots,n \tag{5.2.5}$$

ili u matričnom zapisu

$$V_{nn}D=V_{ns} \tag{5.2.6}$$

gde je

$$V_{nn}=[E(X_i X_j)]_{i,j=1}{}^{n} \tag{5.2.7}$$

$$D'=(d_1,d_2,\ldots,d_n) \tag{5.2.8}$$

$$V_{ns}'=(E(X_{n+s}X_1,E(X_{n+s}X_2),\ldots,E(X_{n+s}X_n)) \ . \tag{5.2.9}$$

Dakle, elementi matrice V_{nn} i vektora V_{ns} su oblika

$$E(X_{j+k}X_j)=Cov(X_{j+k},X_j)+E(X_{j+k})E(X_j)=\mu^{-2}(\rho_k+1) \quad , \quad \rho_0=1 \quad , \tag{5.2.10}$$

gde je sa ρ_k, kao i do sada, obeležena korelacija dveju slučajnih promenljivih iz niza $\{X_t\}$ koja zavisi samo od rastojanja tih slučajnih promenljivih u nizu bog stacionarnosti vremenske serije EAR(p). Zbog toga je $\rho_{-k}=\rho_k$ što znači da e matrica V_{nn} simetrična.

Iz definicije procesa EAR(p) sledi da je

$$E(X)=(1-a_1\alpha_1-\ldots-a_p\alpha_p)/\mu \quad . \tag{5.2.12}$$

Konačno imamo sistem Jul-Vokerovih jednačina iz koga je moguće odrediti utokorelacije ρ_k, $k\in D$:

$$\begin{cases} \rho_{-k}-a_1\alpha_1\rho_{-k+1}-\ldots-a_p\alpha_p\rho_{-r+p}=0 & \text{za } k\in D^+\setminus\{0\} \\ -a_1\alpha_1\rho_1-\ldots-a_p\alpha_p\rho_p=(a_1\alpha_1+\ldots+a_p\alpha_p)^2-2(a_1\alpha_1^2+\ldots+a_p\alpha_p^2) & \text{za } k=0 \\ \rho_0=1 \ , \ \rho_k=\rho_{-k} & . \end{cases} \tag{5.2.13}$$

Kao što vidimo, vektor $D=V_{nn}^{-1}V_{ns}$ ne zavisi od parametra μ.

5.3 Zadržimo se vrlo kratko i na prognozi vremenske serije tipa pokretnih redina EMA(q) reda q sa eksponencijalnom marginalnom raspodelom. Kao što je eć rečeno u odeljku 1.3, vremenska serija $\{X_t\}$ je EMA(q) ako i samo ako

$$X_t=\begin{cases} \beta_q E_t & \text{s.v. } b_{q+1} \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1} & \text{s.v. } b_q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1}+\ldots+\beta_1 E_{t-q+1} & \text{s.v. } b_2 \\ \beta_q E_t+\beta_{q-1}E_{t-1}+\ldots+\beta_1 E_{t-q+1}+E_{t-q} & \text{s.v. } b_1 \end{cases} \tag{5.3.1}$$

a $0\leq\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q\leq 1$, gde su parametri b_j i β_i vezani relacijom (1.3.5).

I za model EMA(q) možemo koristiti postupak prognoziranja opisan u deljku 5.2.

Ako imamo n opservacija $X_1,X_2,\ldots,X_n$ realizacije vremenske serije $\{X_t\}$, rtogonalna projekcija elementa X_{n+s}, $s>0$ Hilbertovog prostora H stacionarnih vremenskih serija na potprostor H_n generisan elementima $X_1,X_2,\ldots,X_n$ iće

$$X_{n+s}\hat{}=\sum_{j=1}^{n} c_j X_j \tag{5.3.4}$$

de treba odrediti vektor koeficijenata $C'=(c_1,\ldots,c_n)$ na osnovu uslova ortogonalnosti. Dakle, uslov

$$\langle X_{n+s}-\hat{X}_{n+s}, X_k\rangle = 0 \quad \text{za } k=1,2,\dots,n \tag{5.3.5}$$

daje sitem linearnih jednačina

$$\sum_{j=1}^{n} c_j E(X_j X_k)=E(X_{n+s}X_k) \quad , \quad k=1,2,\dots,n \tag{5.3.6}$$

čije je rešenje u matričnom obliku

$$C=V_{nn}^{-1}V_{ns} \tag{5.3.7}$$

gde su matrica V_{nn} i vektor V_{ns} definisani na isti način kao u (5.2.7) i (5.2.9) s tom razlikom što su im elementi definisani sa

$$E(X_j X_{j+k})=\mu^{-2}\begin{cases} 1+\sum_{m=1}^{q+1-k} b_m b_{m+k} & , \quad 0\le k\le q \\ 1 & , \quad k>q \end{cases} \quad , \quad j=1,2,\dots,n \tag{5.3.8}$$

i

$$E(X_{n+s}X_j)=\mu^{-2}\begin{cases} 1 & , \quad s>q\vee(s\le q\wedge n+s-j>q) \\ 1+\sum_{m=1}^{q+1-(n+s-j)} b_m b_{m+n+s-j} & , \quad s\le q\wedge 1\le n+s-j\le q \end{cases} \quad , \quad j=1,2,\dots,n. \tag{5.3.9}$$

Očigledno da vektor C neće zavisiti od μ.

5.4 Greške prognoza izvedenih u odeljku 5.2 i 5.3 su

$$E(|X_{n+s}-\hat{X}_{n+s}|^2)=2/\mu^2 - 2\sum_{j=1}^{n} f_j x_{n+s,j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_j f_k x_{jk} \tag{5.4.1}$$

gde su

$$f_j=\begin{cases} c_j & \text{za model EMA}(q) \\ d_j & \text{za model EAR}(p) \end{cases}, \quad j=1,2,\ldots,n \quad , \qquad (5.4.2)$$

a $x_{n+s,j}$ je j-ta komponenta vektora V_{ns} i x_{jk} je element j-te vrste i k-te kolone matrice V_{nn}^{-1}.

REGISTAR POJMOVA

LITERATURA

Anděl J.: Autoregressive series with random parameters, Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics 7 (1976) 735-741

-"- : On autoregressive models with random parameters, Proceedings of the Third Prague Symposium on Asymptotic Statistics, Charles University (1980) 17-30

-"- : On AR(1) processes with exponential white noise, Commun. Statist. -Theor. Meth. 17 (5), (1988) 1481-1485

-"- : Nonnegative autoregressive processes, Journ. of Time Ser. Anal. Vol 10, No.1 (1989) 1-12

Anderson T.W.: The statistical analysis of time series, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1971)

Bhansali R.J.: Linear prediction by autoregressive model fitting in the time domain, The Annals of Stat. Vol. 6, No.1 (1978) 224-231

Billingsley P.: Convergence of probability measures, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1968)

-"- : The Lindeberg-Levy theorem for martingales, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961) 788-792

Box G., Jenkins G.: Time series analysis. Forecasting and control, Holden-Day, San Francisko, Cambridge, London, Amsterdam. (1970)

Bremermann H.: Distributions, complex variables and Furier transforms, Addison-Wesley Pabl. Comp., Reading, Massachusetts, Palo Alto(1965)

Ditkin V., Prudnikov A.: Operacionoe isčislenie, Višaja škola, Moskva (1975)

Feller W.: An introduction to probability theory and its applications, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1971)

Fuller W.A.: Introduction to statistical time series, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto. (1976)

-"- , *Hasza D.P.*: Properties of predictors for autoregressive time series, Journ. of the Amer. Statist. Assoc., Vol.76, No.373, Theor. and Meth. (1981) 155-161

Gaver D.P., Lewis P.A.W.: First-order autoregressive gamma sequences and point processes, Adv. Appl. Prob., 12 (1980) 727-745

Geljfand I., Šilov G.: Obobščenie funkcii i deistvia nad nimi, Gosudarstvenoe izdateljstvo fiziko-matematičesoj literaturi, Moskva (1959)

Jacobs P.A., Lewis P.A.W.: A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process (EARMA 1,1), Adv. Appl. Prob., 9 (1977) 87-104

Kendall M.G.: The analysis of economic time series-Part I: Prices, J. Roy. Statist. Soc. A (1953) 11-25

Lawrance A.J., Lewis P.A.W.: An exponential moving-average sequence and point process (EMA 1), J. Appl. Prob. 14 (1977) 98-113

-"- -"- : The exponential autoregressive-moving average EARMA(p,q) process, J. R. Statist. Soc. B, 42, No.2 (1980) 150-161

-"- -"- : A new autoregressive time series model in expoonential variable (NEA(1)), Adv. Appl. Prob., 13 (1981) 826-845

-"- -"- : Modelling and residual analysis of nonlinear autoregressive time series in exponential variables, J.S. Statist. Soc B, 47, No.2 (1985) 165-202

-"- -"- : Higher-order residual analysis for nonlinear time series with autoregressive correlation structure, Internat. Stat. Rev. 55, 1 (1987) 21-35

Loeve M.: Probability theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1978)

Mališić J.: Slučajni procesi. Teorija i primene, Građevinska knjiga, Beograd (1989)

-"- : On exponential autoregressive time series models, Math. Statist. and Prob. Theory, Vol. B (1987) 147-153

McKenzie E.: Extending the correlation structure of exponential autoregressive-moving-average process, J. Appl. Prob. 18 (1981) 181-189

Nicholls D., Quinn B.: Random coefficient autoregressive models: An introduction, Lecture Notes in Statistics, Springer, New Yourk-Berlin (1982)

O'Brien C.: A test for non-linearity of prediction in time series , J. of Time Ser. Anal.Vol. 8, No. 3 (1987) 313-327

Pagano M.: When is an autoregressive scheme stationary?, Comm. in Stat., 1(6) (1973) 533-544

Phillips C.B.: The sampling distribution of forecasts from a first-order autoregression, J. of Econom. 9 (1979) 241-261

Popović B.: Some predictions of the first order exponential time series, Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nišu, Ser. Mat.2 (1988)47-53

Popović B. : On estimation of parameters of time series with exponential marginals, Zbornik radova VII seminara primenjene matematike, Osijek 13-15.9.1989 (u štampi)

-"- : One generalization of the first order autoregressive time series with exponential marginals, Zbornik radova 12.međunarodnog simpozijuma "Kompjuter na sveučilištu", Cavtat 11-15.6.1990, 5.5.1-5.5.4

Pourahmadi M.: Estimation and interpolation of missing values of a stationary time series, J. of Time Ser. Anal. Vol. 10, No.2 (1989) 149-169

Quinn B.G., Nicholls D.F.: The estimation of random coefficient autoregressive models .II, J. of Time Ser. Anal. Vol 2, No 3 (1981) 185-203

Raftery A.: Un processus autoregressif a loi marginale exponentielle proprietes asymptotiques et estimation de maximum de vraisemblance, Annal. Sci. de l'Univ. de Clerm. Ferr. II, No 69 (1980)149-159

-"- : Estimation efficace pour un processus autoregressif exponentiel a densite discontinue, Pub. Inst. Stat. Univ. Paris, XXV, fasc. 1-2 (1980) 65-91

Rao S.: Linejnie statističeskie metodi i ih primenenija, Nauka, Moskva(1968)

Rozanov Ju.: Stacionarnie slučajnie procesi, Gosudarstvenoe izdateljstvo fiziko-matematičeskoj literaturi, Moskva (1963)

Rozenberg B.: A survey of stochastic parameter regression, Ann. Econ. and Soc. Meas., 2 (1973) 381-398

Samaranayake V.A., Hazza D.P.: Properties of predictors for multivariate autoregressive models with extended parameters, J. of Time Ser. Anal. Vol. 9, No. 4 (1988) 361-383

Sim C.H.: A stochastic bivariate process associated with the EAR(1) model, IEEE Trans. on Inform. Theor., Vol. IT-33, No.1 (1987) 47-51

Vladimirov V.: Obobščenie funkcii v matematičeskoj fizike, Nauka, Moskva (1976)

Weiss L., Wolfowitz J.: Maximum probability estimators and related topics, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1974)

Yaglom A.M.: Ekstrapolirovanie, interpolirovanie, i filtracia stacionarnih slučajnih procesov s racionaljnoj spektraljnoj plotnostju, Trudi moskovskogo matematičeskogo obščestva, Tom 4 (1955) 333-374

-"- : Stationary random functions, Dover Publications, New York (1972)

Yamamoto T.; Predictions of multivariate autoregressive-moving average models, Biometrika 68, 2 (1981) 485-492