Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet

Vladimir Janković

PRILOG VARIJACIONOM RAČUNU I OPTIMALNOM UPRAVLJANJU

doktorska disertacija

Beograd, 1983.

Sadržaj

strana

PREDGOVOR

Varijacioni račun je relativno stara matematička disciplina. Nastao je 1696. godine kada je Johann Bernoulli u časopisu Acta Eruditorum objavio članak pod naslovom "Problema nuovom, ad cujus solutionem mathematici invitantur" ("Novi problemi, čijem se rešavanju pozivaju matematičari"). U njemu je bio postavljen problem o brahistohroni: u vertikalnoj ravni su date dve tačke A i B; odrediti putanju po kojoj će se telo, koje se kreće pod dejstvom sopstvene težine, spustiti iz tačke A u tačku B za najkraće vreme.

Teoretske osnove klasičnog varijacionog računa postavili su Euler i Lagrange u osamnaestom veku. Tokom osamnaestog i devetnaestog veka njim su se bavili mnogi veliki matematičari: Legendre, Jacobi, Hamilton, Weierstrass, Hilbert,... Ovaj poslednji mu je posvetio jedan od svojih znamenitih problema. U 23. Hilbertovom problemu pozivaju se matematičari da razvijaju metode varijacionog računa.

Optimalno upravljanje je znatno mladje od varijacionog računa. Nastalo je pedesetih godina ovog veka. Klasični varijacioni račun nije mogao da reši mnoge probleme koji su se pojavljivali u sve složenijoj tehničkoj praksi savremenog doba, pre svega one vezane za kosmičke letove. To je iniciralo nastanak nove matematičke discipline. Možda je najbolje za godinu nastanka optimalnog upravljanja uzeti 1956., kada je L.S.Pontrjagin formulisao kao hipotezu princip maksimuma ([10]). Gamkrelidze je dokazao princip maksimuma za linearni problem ([14]) a Boltjanski za opšti problem ([3]). Ovi i drugi rezultati Pontrjaginovih učenika ušli su u monografiju [30] za koju su njeni autori dobili Lenjinovu nagradu. Tako su postavljene teoretske osnove optimalnog upravljanja.

Danas se pod problemom varijacionog računa i pod problemom optimalnog upravljanja podrazumevaju veoma slični problemi (v.[1]). I u jednom i u drugom slučaju se radi o sledećem ekstremalnom problemu:

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \to \inf;$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \leq 0, \quad i=1,\ldots k,$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = 0, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1],$$

gde je

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} L_i(t,x(t),u(t))dt +$$

$$+ \ell_i(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1)).$$

Razlika izmedju varijacionog računa i optimalnog upravljanja je u definiciji skupa procesa na kojem se razmatra prethodni ekstremalni problem i u definiciji lokalnog minimuma.

Osnovni cilj ovoga rada je istraživanje neophodnih uslova ekstremuma u problemima varijacionog računa i optimalnog upravljanja.

U prvoj glavi je izložen diferencijalni račun u normiranim prostorima, i to onaj njegov deo koji se odnosi na izvode prvog reda. Izloženi rezultati su uglavnom poznati od ranije (v. [1] i [26]). Dati su novi dokazi teoreme o srednjoj vrednosti (teorema 1.4.4) i teoreme o implicitnoj funkciji (teorema 1.9.1). U šestom paragrafu ove glave uveden je jedan nov pojam: stroga diferencijabilnost po jednoj od promenljivih. U vezi sa njim dokazane su teoreme 1.6.1, 1.7.2 i 1.7.4.

U drugoj glavi su razmatrani neophodni uslovi prvog reda u varijacionom računu. U prva četiri paragrafa ove glave razmatran je Lagrangeov problem u varijacionom računu u obliku u kome je on formulisan u monografiji [1], a u petom paragrafu je pokazano da su dobijeni rezultati uopštenja neophodnih uslova prvog reda za najjednostavniji problem varijacionog računa poznatih iz klasičnog varijacionog računa. U pomenutoj monografiji ovaj problem je razmatran na klasi neprekidnih upravljanja i dokazana je teorema 2.1.1, koja se u slučaju najjednostavnijeg problema varijacionog računa svodi na Eulerovu jednačinu. Ovde je za isti problem dokazana i teorema 2.1.2, koja u slučaju najjednostavijeg problema varijacionog računa daje poznatu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{dt}\,(L_{\dot{x}}\dot{x} - L) = -L_t$$

pod manjim pretpostavkama nego u klasičnom varijacionom računu. Ovde je takodje razmatran Lagrangeov problem na klasi deo po deo neprekidnih upravljanja. Za slučaj optimalnosti u slabom smislu dokazane su teoreme 2.2.1 i 2.2.2. U slučaju najjednostavnijeg problema varijacionog računa one daju Eulerovu jednačinu, prvi Weierstrass - Erdmannov uslov i gore pomenutu diferencijalnu jednačinu. Kako u slučaju slabog ekstremuma u najjednostavnijem problemu klasičnog varijacionog računa drugi Weierstrass-Erdmannov uslov ne mora biti zadovoljen, uveden je pojam optimalnosti u slabo-jakom smislu i dokazane su teoreme 2.2.3 2.2.4 koje se odnose na njega, a u sebi izmedju ostalog sadre uopštenje drugog Weierstrass-Erdmannovog uslova. U šestom paragrafu ove glave razmatran je još jedan problem varijacionog računa koji je opštiji od problema refleksije i refrakcije iz klasičnog varijacionog računa.

U trećoj glavi je izložena teorija šatora koju je razvio Boltjanski (v. [8] i [9]). U drugom paragrafu ove glave uveden je pojam razdvojivosti familije konveksnih skupova, koji je uopštenje pojma razdvojivosti familije konveksnih konusa, i u vezi sa njim su dokazane tri teoreme. U petom paragrafu je dat novi dokaz osnovne teoreme teorije šatora (teorema 3.5.2), koji je znatno kraći od dokaza koje je dao Boltjanski, i u kome se umesto komplikovanih topoloških aparata koristi samo Brouwerova teorema o nepokretnoj tački. Ovaj dokaz je izveden na osnovu Čeljutinove ideje koju je Boltjanski spomenuo u fusnoti rada [9].

U četvrtoj glavi su razmatrani neophodni uslovi ekstremuma u optimalnom upravljanju (principi maksimuma). U prvom paragrafu razmatrana je diferencijalna jednačina čija desna strana zavisi od merljivog upravljajućeg parametra i dokazane su teoreme o diferencijabilnosti njenog maksimalnog rešenja. U sledeća tri paragrafa formulisan je kanonski problem optimalnog upravljanja i za njega je dokazan princip maksimuma. U petom paragrafu je formulisan opšti problem optimalnog upravljanja i za njega je dokazan princip maksimuma svodjenjem na kanonski problem. Dobijena teorema je opštija od poznatih (v. [1], [16], [24], [30]). U šestom paragrafu je dokazan princip maksimuma za problem optimalnog upravljanja na neograničenom intervalu. Dobijena teorema je opštija od principa maksimuma iz dvadeset četvrtog paragrafa monografije [30].

U petoj glavi je razmatran linearni problem optimalnog upravljanja s pokretnim krajevima. U radu [6] Boltjanski je razmatrao ovaj problem na klasi deo po deo neprekidnih upravljanja i dao je neophodan i dovoljan uslov optimalnosti. Ovde je isti problem razmatran na opštijoj klasi dopustivih upravljanja. U drugom paragrafu je dokazan neophodan uslov optimalnosti. U trećem paragrafu je dokazana teorema egzistencije za slučaj kada je klasa dopustivih upravljanja maksimalna, tj. kada sadrži sva merljiva upravljanja. U četvrtom paragrafu je dokazano jedno uopštenje Gamkrelidzeove teoreme o konačnom broju prekључivanja i iz njega je izvedena teorema jedinosti.

Popis literature sadrži trideset tri bibliografske jedinice koje su korištene prilikom izrade ovog rada. Većina se odnosi na varijacioni račun i optimalno upravljanje, a preostale se odnose na matematičke discipline koje se u njima primenjuju.

Rad je napisan tako da ga može čitati širi krug čitalaca. Za njegovo čitanje je potrebno poznavanje redovnih kurseva matematičke analize i diferencijalnih jednačina i osnovnih činjenica o konveksnim skupovima koje su sadržane u prve dve glave monografije [13].

1. DIFERENCIJALNI RAČUN U NORMIRANIM PROSTORIMA

1.1. POJMOVI SLABOG, JAKOG I STROGOG IZVODA

Neka su X i Y normirani prostori, $D \subseteq X$, $f: D \to Y$, a $a \in \operatorname{int} D$.

Ukoliko postoji

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

$(h \in X)$, on se naziva izvod funkcije f u tački a u smeru h i obeležava se sa $f'(a;h)$. Ako funkcija f ima u tački a izvod u proizvoljnom smeru i ako postoji $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ takvo da je $f'(a;h) = Ah$ za svako $h \in X$, kažemo da je A slab ili Gâteauxov izvod funkcije f u tački a, a za funkciju f kažemo da je slabo diferencijabilna, ili diferencijabilna u Gâteauxovom smislu, u tački a. Funkcija f može imati najviše jedan slab izvod u tački a. Obeležavamo ga (ukoliko postoji) sa $f'(a)$.

Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ako je

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0,$$

kažemo da je A jak ili Fréchetov izvod funkcije f u tački a, a za funkciju f kažemo da je jako diferencijabilna, ili diferencijabilna u Fréchetovom smislu, u tački a. Ako je A jak izvod funkcije f u tački a, A je ujedno i slab izvod funkcije f u tački a. Stoga funkcija f može imati najviše jedan jak izvod u tački a.

Neka je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Ako je

$$\lim_{x', x'' \to a} \frac{\|f(x'')-f(x')-A(x''-x')\|}{\|x''-x'\|} = 0$$

kažemo da je A strog izvod funkcije f u tački a, a za funkciju f kažemo da je strogo diferencijabilna u tački a. Ako je A strog izvod funkcije f u tački a, onda je A ujedno i jak, a samim tim i slab, izvod funkcije f u tački a. Stoga funkcija f može imati najviše jedan strog izvod u tački a.

Ako je funkcija f jako diferencijabilna u tački a, ona je neprekidna u toj tački. Ako je funkcija f strogo diferencijabilna u tački a, onda ona zadovoljava Lipschitzov uslov u nekoj njenoj okolini.

Ako je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ jak ili strog izvod funkcije f u tački a, A zadržava to svojstvo ukoliko norme prostora X i Y zamenimo njima ekvivalentnim normama.

Neka je X = R. Ako postoji

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

nazivamo ga izvodom funkcije f u tački a i obeležavamo ga sa $f'(a)$, a za funkciju f kažemo da je diferencijabilna u tački a. Lako se pokazuje da su diferencijabilnost, slaba diferencijabilnost i jaka diferencijabilnost ekvivalentna svojstva i da je preslikavanje $h \to hf'(a)$ prostora X(=R) u prostor Y jak izvod funkcije f u tački a.

Primeri:

1. Ako je $f(x) \equiv b$, gde je $b \in Y$, onda je funkcija f strogo diferencijabilna u tački a, $f'(a) = 0$.

2. Ako je $f(x) \equiv Ax$, gde je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, funkcija f je strogo diferencijabilna u tački a, $f'(a) = A$.

Napomena. Ukoliko se posebno ne naglasi o kakvoj je diferencijabilnosti reč, onda se pod diferencijabilnošću obično podrazumeva jaka diferencijabilnost a pod izvodom jak izvod.

1.2. ADITIVNOST OPERACIJE DIFERENCIRANJA

Teorema 1.2.1. Neka su X i Y normirani prostori, $D \subseteq X$, $f,g:D \to Y$ i $a \in \mathrm{int}D$. Ako su funkcije f i g slabo, jako ili strogo diferencijabilne u tački a, onda je i funkcija f+g slabo, jako, odnosno strogo diferencijabilna u tački a,

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a).$$

1.3. IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

Teorema 1.3.1. Neka su X,Y i Z normirani prostori, $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$, $f:D \to E$, $g:E \to Z$, $a \in \mathrm{int}D$ i $f(a) \in \mathrm{int}E$. Ako je funkcija f jako (strogo) diferencijabilna u tački a, i ako je funkcija g jako (strogo) diferencijabilna u tački f(a), onda je funkcija $g \circ f$ jako (strogo) diferencijabilna u tački a i važi

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Dokaz. Razmotrićemo samo slučaj kada su funkcije f i g jako diferencijabilne. Dokaz u slučaju stroge diferencijabilnosti funkcija f i g izvodi se na sličan način. Prema pretpostavci

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x-a),$$

$$g(y)=g(f(a))+g'(f(a))(y-f(a))+\beta(y-f(a)),$$

gde je

$$\|\alpha(x-a)\| = o(\|x-a\|),$$

$$\|\beta(y-f(a))\| = o(\|y-f(a)\|).$$

Odavde sledi da je

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)+g'(f(a)) \circ f'(a)(x-a)+\gamma(x-a),$$

gde je

$$\gamma(x-a) = g'(f(a))\alpha(x-a)+\beta(\|A(x-a)+\alpha(x-a)\|).$$

Kako je

$$\|A(x-a)+\alpha(x-a)\| = O(\|x-a\|),$$

to je

$$\|\gamma(x-a)\| = o(\|x-a\|).$$

Sledi da je $g'(f(a)) \circ f'(a)$ jak izvod funkcije $g \circ f$ u tački a. ∎

Napomena. U opštem slučaju iz slabe diferencijabilnosti funkcija f i g ne sledi slaba diferencijabilnost funkcije $g \circ f$. Ako je funkcija f afina a funkcija g slabo diferencijabilna u tački $f(a)$, ili ako je funkcija f slabo diferencijabilna u tački a, a funkcija g jako diferencijabilna u tački $f(a)$, onda je funkcija $g \circ f$ slabo diferencijabilna u tački a.

1.4. TEOREMA O SREDNJOJ VREDNOSTI

Teorema 1.4.1. Neka je funkcija $f:[a,b] \to R$ neprekidna i neka ima desni izvod u svakoj tački intervala $]a,b[$. Ako je $f(a) = f(b)$, postoje c', $c'' \in]a,b[$ takvi da je

$$f'_+(c') \leq 0, \qquad f'_+(c'') \geq 0.$$

Dokaz. Ako je funkcija f konstantna, za c' i c'' možemo uzeti proizvoljne tačke iz intervala $]a,b[$. Pretpostavimo da funkcija f nije konstantna. Tada postoji $c \in]a,b[$ takvo da je $f(c) \neq f(a) = f(b)$. Neka je npr. $f(c) < f(a) = f(b)$. Postoji realan broj k takav da je $f(c) < k < f(a) = f(b)$. Neka je

$$G = \{x \in]a,b[\mid f(x) < k\}.$$

Skup G je neprazan i otvoren. On se može predstaviti kao unija disjunktnih otvorenih intervala. Neka je c' levi kraj jednog od njih. Kako $c' \notin G$, to je $f(c') \geq k$. Zbog neprekidnosti funkcije f je $f(c') \leq k$. Sledi da je $f(c') = k$. Kako je $f(x) < k$ ako x pripada gore pomenutom intervalu, to je $f'_+(c') \leq 0$. Neka je $c'' = \sup G$. Kako $c'' \notin G$, to je $f(c'') \geq k$. Zbog neprekidnosti funkcije f je $f(c'') \leq k$. Sledi da je $f(c'') = k$. Kako je $f(x) \geq k$ za $x \in [c'', b]$, to je $f'_+(c'') \geq 0$. ∎

Teorema 1.4.2. Neka je funkcija $f: [a,b] \to R$ neprekidna i neka ima desni izvod u svakoj tački intervala $]a,b[$. Postoje $c', c'' \in]a,b[$ takvi da je

$$f'_+(c')(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq f'_+(c'')(b-a).$$

Dokaz. Funkcija $g: [a,b] \to R$ zadata sa

$$g(x) = (f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a)$$

zadovoljava uslove prethodne teoreme. Zato postoje $c', c'' \in]a,b[$ takvi da je

$$g'_+(c') \leq 0, \qquad g'_+(c'') \geq 0.$$

Kako je

$$g'_+(x) = f(b)-f(a)-f'_+(x)(b-a),$$

to je

$$f'_+(c')(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq f'_+(c'')(b-a). \blacksquare$$

Teorema 1.4.3. Neka je Y normiran prostor i neka funkcija $f: [a,b] \to Y$ ima desni izvod u tački $c \in [a,b[$. Tada funkcija $g: [a,b] \to R$ koja je definisana sa $g(x) = \| f(x) \|$ ima desni izvod u tački c, i važi

$$| g'_+(c) | \leq \| f'_+(c) \|.$$

Dokaz. Kako je

$$\left| \frac{\|f(x)\| - \|f(c)+(x-c)f'_+(c)\|}{x-c} \right| \leq \frac{\|f(x)-f(c)-(x-c)f'_+(c)\|}{|x-c|} =$$

$$= \left\| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'_+(c) \right\| ,$$

to je

$$\lim_{x \to c_+} \frac{\|f(x)\| - \|f(c)+(x-c)f'_+(c)\|}{x-c} = 0.$$

Kako je funkcija $x \to \|f(x)+(x-c)f'_+(c)\|$ konveksna, ona ima desni izvod u tački c, tj. postoji

$$\lim_{x \to c_+} \frac{\|f(c)+(x-c)f'_+(c)\| - \|f(c)\|}{x-c} .$$

Sledi da postoji

$$\lim_{x \to c_+} \frac{\|f(x)\| - \|f(c)\|}{x-c} ,$$

odnosno da funkcija g ima desni izvod u tački c. Kako je

$$|g(x)-g(c)| = \big| \|f(x)\| - \|f(c)\| \big| \leq \|f(x)-f(c)\|,$$

to je

$$|g'_+(c)| = \left| \lim_{x \to c_+} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} \right| = \lim_{x \to c_+} \frac{|g(x)-g(c)|}{x-c} \leq$$

$$\leq \lim_{x \to c_+} \frac{\|f(x)-f(c)\|}{x-c} = \left\| \lim_{x \to c_+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right\| = \|f'_+(c)\|. \blacksquare$$

Teorema 1.4.4. Neka je Y normirani prostor, neka je funkcija $f:[a,b] \to Y$ neprekidna i neka ima desni izvod u svakoj tački intervala $]a,b[$. Tada postoji $c\in]a,b[$ takvo da je

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|f'_+(c)\|(b-a).$$

Dokaz. Funkcija $g:[a,b]\to R$ zadata sa

$$g(x) = \|f(x)-f(a)\|$$

zadovoljava uslove teoreme 1.4.2. Zato postoji $c\in]a,b[$ takvo da je

$$|g(b)-g(a)| \leq |g'_+(c)|(b-a).$$

Kako je

$$|g'_+(c)| \leq \|f'_+(c)\|,$$

to je

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|f'_+(c)\|(b-a). \blacksquare$$

Teorema 1.4.5. Neka su X i Y normirani prostori, $D\subseteq X$ i $[a,b]\subseteq \mathrm{int}D$. Ako je funkcija $f:D\to Y$ slabo diferencijabilna u svim tačkama duži $[a,b]$, onda postoji tačka $c\in]a,b[$ takva da je

$$\|f(b)-f(a)\| \leq \|f'(c)\|\|b-a\|.$$

Dokaz. Neka je funkcija $g:[0,1]\to Y$ zadata sa

$$g(t) = f((1-t)a+tb).$$

Lako se pokazuje da je funkcija g diferencijabilna u svakoj tački intervala $[0,1]$ i da je

$$g'(t) = f'((1-t)a+tb)(b-a).$$

Prema prethodnoj teoremi, postoji $\theta\in]0,1[$ takvo da je

$$\|g(1)-g(0)\| \leq \|g'(\theta)\| ,$$

odnosno

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'((1-\Theta)a+\Theta b)(b-a)\|.$$

Sledi da je

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'(c)\| \; \|b-a\|,$$

gde je $c = (1-\Theta)a+\Theta b$. ∎

1.5. NEPREKIDNA DIFERENCIJABILNOST

Teorema 1.5.1. Neka su X i Y normirani prostori i D otvoren podskup od X. Dalje, neka je funkcija $f:D \to Y$ slabo diferencijabilna u svakoj tački skupa D. Funkcija f je strogo diferencijabilna u tački a ako i samo ako je funkcija $f':D \to \mathcal{L}(X,Y)$ neprekidna u tački a.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f' neprekidna u tački a. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji kugla $U = B]a,\delta[$ koja je sadržana u D, takva da je

$$\|f'(x)-f'(a)\| \leqslant \varepsilon$$

za svaku tačku $x \in U$. Neka $x', x'' \in U$. Ako na funkciju

$$x \to f(x)-f'(a)x$$

primenimo teoremu o srednjoj vrednosti, dobijamo da je

$$\|f(x'')-f(x')-f'(a)(x''-x')\| \leqslant \|f'(x)-f'(a)\| \, \|x''-x'\| ,$$

gde je x neka tačka duži $]x', x''[$. Kako $x \in U$, to je

$$\|f(x'')-f(x')-f'(a)(x''-x')\| \leqslant \varepsilon \|x''-x'\|.$$

Sledi da je

$$\lim_{x',\, x'' \to a} \frac{\|f(x'')-f(x')-f'(a)(x''-x')\|}{\|x''-x'\|} = 0,$$

odnosno da je $f'(a)$ strog izvod funkcije f u tački a.

Pretpostavimo da je funkcija f strogo diferencijabilna u tački a. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji kugla $U = B\,]a,\delta[$ koja je sadržana u D, takva da je

$$\|f(x'')-f(x')-f'(a)(x''-x')\| \leqslant \varepsilon \|x''-x'\|$$

za svake dve tačke x', $x'' \in U$. Neka je $x \in U$ i $h \in X$. Ako je t blisko nuli, onda $x+th \in U$, pa je

$$\|f(x+th)-f(x)-f'(a)(th)\| \leqslant \varepsilon \|th\|,$$

odnosno

$$\left\| \frac{f(x+th)-f(x)}{t} - f'(a)h \right\| \leqslant \varepsilon \|h\|.$$

U graničnom slučaju dobijamo da je

$$\|(f'(x)-f'(a))h\| \leqslant \varepsilon \|h\|.$$

Kako poslednja nejednakost važi za svako $h \in X$, to je

$$\|f'(x)-f'(a)\| \leqslant \varepsilon \ . \ \blacksquare$$

Neka su X i Y normirani prostori, D otvoren skup u X i $f:D \to Y$. Funkcija f je slabo, jako, odnosno strogo diferencijabilna na skupu D ukoliko je slabo, jako, odnosno strogo diferencijabilna u svakoj tački skupa D. Ako je funkcija f slabo diferencijabilna na skupu D i ako je funkcija $f':D \to \mathcal{L}(X,Y)$ neprekidna, kažemo da je funkcija f neprekidno diferencijabilna na skupu D. Iz prethodne teoreme sledi da je funkcija f strogo diferencijabilna na skupu D ako i samo ako je neprekidno diferencijabilna na skupu D.

1.6. PARCIJALNI IZVODI

Neka su X i Z normirani prostori , Y topološki prostor, $D \subseteq X \times Y$, $f: D \to Z$ i $(a,b) \in \operatorname{int} D$.

Tačka a pripada unutrašnjosti skupa

$$D_b = \{x \in X \mid (x,b) \in D\}.$$

Posmatrajmo preslikavanje $x \to f(x,b)$ skupa D_b u normirani prostor Z. Ako je ono slabo ili jako diferencijabilno u tački a, kažemo da je funkcija f slabo, odnosno jako diferencijabilna po promenljivoj x u tački (a,b). Odgovarajući izvod nazivamo parcijalnim izvodom funkcije f po promenljivoj x u tački (a,b) i obeležavamo ga sa $f_x(a,b)$ ili $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$. Primetimo da je on operator iz $\mathcal{L}(X,Z)$.

Funkcija f je strogo diferencijabilna po promenljivoj x u tački (a,b) ako postoji $A \in \mathcal{L}(X,Z)$ takvo da je

$$\lim_{\substack{x', x'' \to a \\ y \to b}} \frac{\|f(x'',y) - f(x',y) - A(x''-x')\|}{\|x''-x'\|} = 0.$$

Jasno je da je u tom slučaju funkcija f jako diferencijabilna po promenljivoj x u tački (a,b) i da je $f_x(a,b) = A$.

Teorema 1.6.1. Neka su X i Z normirani prostori, Y topološki prostor i D otvoren skup u $X \times Y$. Dalje, neka je funkcija $f: D \to Z$ slabo diferencijabilna po promenljivoj x u svakoj tački skupa D. Funkcija f je strogo diferencijabilna po promenljivoj x u tački (a,b) ako i samo ako je funkcija $f_x: D \to \mathcal{L}(X,Z)$ neprekidna u tački (a,b).

Dokaz ove teoreme ne razlikuje se bitno od dokaza teoreme 1.5.1, pa ga nećemo navoditi.

Neka su X i Z normirani prostori, Y topološki prostor, D otvoren skup u $X \times Y$ i $f:D \to Z$. Funkcija f je slabo, jako, odnosno strogo diferencijabilna po promenljivoj x na skupu D ukoliko je slabo, jako, odnosno strogo diferencijabilna po promenljivoj x u svakoj tački skupa D. Ako je funkcija f slabo diferencijabilna po promenljivoj x na skupu D i ako je funkcija $f_x:D\to\mathscr{L}(X,Z)$ neprekidna, kažemo da je funkcija f neprekidno diferencijabilna po promenljivoj x na skupu D. Iz prethodne teoreme sledi da je funkcija f strogo diferencijabilna po promenljivoj x na skupu D ako i samo ako je neprekidno diferencijabilna po promenljivoj x na skupu D.

1.7. SLUČAJ KADA JE $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m$ normirani prostori. U prostoru $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ norma može da se definiše na razne načine. Mi ćemo raditi sa normom koja se definiše sa

$$\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_m\|,$$

gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X$. Funkcije $p_i:X \to X_i$ i $u_i:X_i \to X$ koje se definišu jednakostima

$$p_i(x) = x_i,$$

$$u_i(x_i) = (0, \ldots, 0\ ,\ x_i,\ 0, \ldots, 0),$$

su ograničeni linearni operatori. Lako je videti da one zadovoljavaju jednakosti

$$p_i \circ u_i = I_{X_i},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \circ p_i = I_X .$$

Teorema 1.7.1. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m$, Y normirani prostori, $D \subseteq X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $f:D \to Y$ i $a \in \operatorname{int} D$. Ako je funkcija f slabo ili jako diferencijabilna u tački a, onda je ona slabo, odnosno jako diferencijabilna po svakoj promenljivoj u tački a i pri tom važe jednakosti

$$f_{x_i}(a) = f'(a) \circ u_i,$$

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(a) \circ p_i .$$

Dokaz. Funkcija

$$x_i \to f(a_1,\ldots,a_{i-1}, x_i, a_{i+1},\ldots,a_m)$$

se može posmatrati kao složena funkcija

$$x_i \to f(a+u_i(x_i-a_i)).$$

Ona je slabo, odnosno jako, diferencijabilna u tački a_i i njen izvod je jednak $f'(a)\circ u_i$. Sledi da je funkcija f slabo, odnosno jako, diferencijabilna po promenljivoj x_i u tački a i da je

$$f_{x_i}(a) = f'(a) \circ u_i .$$

Druga jednakost se izvodi na sledeći način

$$\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(a) \circ p_i = \sum_{i=1}^{m} f'(a) \circ u_i \circ p_i = f'(a) \circ \sum_{i=1}^{m} u_i \circ p_i$$

$$= f'(a) \circ I_X = f'(a). \blacksquare$$

Teorema 1.7.2. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ normirani prostori, $D \subseteq X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $f: D \to Y$ i $a \in \operatorname{int} D$. Funkcija f je strogo diferencijabilna u tački a ako i samo ako je strogo diferencijabilna po svakoj promenljivoj u tački a.

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f strogo diferencijabilna po svakoj promenljivoj u tački a. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka su okoline U_i tačaka a_i takve da je $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \subseteq D$ i da je

$$\|f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i'', x_{i+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i',x_{i+1}, ,\ldots,x_m)-f_{x_i}'(a)(x_i'' - x_i')\| \leq \varepsilon \|x_i'' - x_i'\| ,$$

ako x_i', $x_i'' \in U_i$ i $x_j \in U_j$ za $j \neq i$. Neka x', $x'' \in U$. Tada je

$$\|f(x'')-f(x')- \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(a)(x_i'' - x_i')\| \leq$$

$$\leq \| f(x_1'', x_2'',\ldots,x_m'')-f(x_1',x_2'',\ldots,x_m'')-f_{x_1}(a)(x_1''-x_1')\|+$$

$$+\| f(x_1',x_2'',x_3'',\ldots,x_m'')-f(x_1',x_2',x_3'',\ldots,x_m'')-$$

$$- f_{x_2}(a)(x_2'' -x_1')\| +\ldots+ \| f(x_1',x_2',\ldots,x_{m-1}',x_m'') -$$

$$-f(x_1',x_2',\ldots,x_{m-1}',x_m')-f_{x_m}(a)(x_m'' - x_m')\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \| x_1'' -x_1' \| + \varepsilon\| x_2'' -x_1'\| +\ldots+ \varepsilon\| x_m'' - x_m'\|$$

$$= \varepsilon\| x'' - x'\|.$$

Sledi da je

$$\lim_{x',x''\to a} \frac{\|f(x'')-f(x')- \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(a)(x_i'' - x_i')\|}{\|x'' - x'\|} = 0,$$

tj. da je

$$\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}(a)\circ p_i$$

strog izvod funkcije f u tački a.

Dokaz tvrdjenja u suprotnom smeru je trivijalan. ∎

Iz teoreme 1.7.2 sledi

Teorema 1.7.3. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ normirani prostori, D otvoren skup u $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ i $f: D \to Y$. Funkcija f je neprekidno diferencijabilna na skupu D ako i samo ako je neprekidno diferencijabilna po svakoj promenljivoj na skupu D.

Teorema 1.7.4. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y$ normirani prostori, $D \subseteq X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $f: D \to Y$ i $a \in \operatorname{int} D$. Ako je funkcija f strogo diferencijabilna po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ i jako diferencijabilna po promenljivoj x_m u tački a, onda je ona jako diferencijabilna u tački a.

Dokaz ove teoreme ne razlikuje se bitno od dokaza teoreme 1.7.2, pa ga zato nećemo navoditi.

Primer. Lako se dokazuje da je polilinearno preslikavanje $f \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ strogo diferencijabilno po svakoj promenljivoj. Sledi da je polilinearno preslikavanje neprekidno diferencijabilno.

1.8. SLUČAJ KADA JE $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$

Neka su $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ normirani prostori, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$. Ograničeni linearni operatori $q_j: Y \to Y_j$ i $v_j: Y_j \to Y$ koji se definišu jednakostima

$$q_j(y) = y_j,$$

$$v_j(y_j) = (0, \ldots, 0, y_j, 0, \ldots, 0),$$

zadovoljavaju jednakosti

$$q_j \circ v_j = I_{Y_j}, \qquad \sum_{j=1}^{n} v_j \circ q_j = I_Y.$$

Neka je $D \subseteq X$ i $f:D \to Y$. Funkcije $f_j:D \to Y_j$ definišemo sa

$$f_j = q_j \circ f.$$

Jasno je da je

$$f = \sum_{j=1}^{n} v_j \circ f_j.$$

Iz ovih jednakosti i teorema 1.2.1 i 1.3.1 sledi

Teorema 1.8.1. Funkcija f je slabo, jako, ili strogo diferencijabilna u tački $a \in \operatorname{int}D$, ako i samo ako je svaka od funkcija f_j slabo, jako odnosno strogo diferencijabilna u tački a.

1.9. TEOREMA O IMPLICITNOJ FUNKCIJI

Teorema 1.9.1. Neka su X topološki prostor, Y i Z Banachovi prostori, $D \subseteq X \times Y$, $f:D \to Z$ i $(a,b) \in \operatorname{int}D$. Ako su zadovoljeni sledeći uslovi

a) $f(a,b) = 0$,

b) f je neprekidna po x u (a,b),

c) f je strogo diferencijabilna po y u (a,b),

d) $\operatorname{Im} f_y(a,b) = Z$,

onda postoje okolina U tačke a, okolina V tačke b, funkcija $g:U \to V$ i pozitivan broj C, takvi da je

$$f(x,g(x)) = 0,$$

$$\|g(x)-b\| \leq C\|f(x,b)\|,$$

za svako $x \in U$.

Dokaz. Neka je $A = f_y(a,b)$. Prema teoremi o otvorenom preslikavanju postoji $r > 0$ takvo da je $AB[0,1] \supseteq B[0,r]$. Za svako $z \in Z$

postoji $y \in Y$ takvo da je $Ay = z$ i $\|y\| \leq \frac{1}{r}\|z\|$. Zaista, $z_o = \frac{r}{\|z\|} z \in B[0,r]$ pa je za y dovoljno uzeti $\frac{\|z\|}{r} y_o$, gde je y_o tačka iz $B[0,1]$ koja zadovoljava uslov $Ay_o = z_o$.

Kako je A strog izvod funkcije f po y u (a,b), postoje okolina U_1 tačke a i okolina $V = B[b,\varepsilon]$ tačke b takve da je

$$\|f(x,y'')-f(x,y')-B(y''-y')\| \leq \frac{r}{2}\|y''-y'\|,$$

za svako $x \in U_1$ i $y', y'' \in V$. Kako je funkcija f neprekidna po x u (a,b), postoji okolina U_2 tačke a takva da je

$$\|f(x,b)\| \leq \frac{r\varepsilon}{2}$$

za svako $x \in U_2$. Neka je $U = U_1 \cap U_2$. Primetimo da je funkcija f neprekidna po y na skupu $U \times V$, jer je

$$\|f(x,y'')-f(x,y')\| \leq \left(\frac{r}{2} + \|B\|\right)\|y''-y'\|$$

ako $(x,y'), (x,y'') \in U \times V$.

Dokažimo da postoji niz funkcija $g_k : U \to V$ takav da je

$$g_o(x) \equiv b;$$

$$Ag_{k+1}(x) = Ag_k(x) - f(x, g_k(x)),$$

$$\|g_{k+1}(x) - g_k(x)\| \leq \frac{1}{r}\|f(x,g_k(x))\|,$$

za $k = 0,1,2,\ldots$. Pretpostavimo da postoji konačan niz funkcija $g_o, g_1, \ldots, g_n : U \to V$ koji zadovoljava prethodne uslove i dokažimo da se on može produžiti funkcijom $g_{n+1} : U \to V$ tako da prethodni uslovi ostanu zadovoljeni. Na osnovu razmatranja izvršenog na početku dokaza, postoji funkcija $g_{n+1} : U \to Y$ koja zadovoljava uslove

$$Ag_{n+1}(x) = Ag_n(x) - f(x,g_n(x)),$$

$$\|g_{n+1}(x) - g_n(x)\| \leq \frac{1}{r}\|f(x,g_n(x))\|.$$

Dovoljno je dokazati da $g_{n+1}(x)\in V$ za svako $x\in U$.
Kako je

$$\|g_1(x)-g_o(x)\| \leqslant \frac{1}{r} \|f(x,g_o(x))\| = \frac{1}{r} \|f(x,b)\|,$$

to je

$$\|g_1(x)-b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pa je ovo ispunjeno za $n=0$. Neka je $n>0$. Ako je $0<k\leqslant n$, onda je

$$\|g_{k+1}(x)-g_k(x)\| \leqslant \frac{1}{r} \|f(x,g_k(x))\| =$$

$$= \frac{1}{r} \|f(x,g_k(x))-f(x,g_{k-1}(x))-A(g_k(x)-g_{k-1}(x))\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \|g_k(x)-g_{k-1}(x)\|,$$

pa je

$$\|g_{n+1}(x)-b\| \leqslant \sum_{k=o}^{n} \|g_{k+1}(x)-g_k(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{2^k} \|g_1(x)-g_o(x)\| \leqslant \frac{2}{r} \|f(x,b)\|.$$

Sledi da je

$$\|g_{n+1}(x)-b\| \leqslant \varepsilon .$$

Neka je $x\in U$. Niz $g_k(x)$ je Cauchyev , jer je

$$\|g_{k+1}(x)-g_k(x)\| \leqslant \frac{1}{2} \|g_k(x)-g_{k-1}(x)\|$$

za $k = 1,2,\dots$. Zato on konvergira nekoj tački iz V. Obeležimo tu tačku sa $g(x)$. Dokažimo da tako dobijena funkcija $g:U\to V$ zadovoljava tražene uslove. Graničnim prelazom u jednakosti

$$f(x,g_k(x)) = A(g_k(x)-g_{k+1}(x)),$$

dobijamo da je

$$f(x,g(x)) = 0$$

za svako $x \in U$. Neka je $C = \frac{2}{r}$. Graničnim prelazom u nejednakosti

$$\|g_k(x)-b\| \leq C\|f(x,b)\|,$$

dobijamo da je

$$\|g(x)-b\| \leq C\|f(x,b)\|$$

za svako $x \in U$. ∎

Napomene:

1. Ako je $f_y(a,b)$ bijekcija, za $x \in U$ i $y \in V$ $f(x,y) = 0$ ako i samo ako je $y = g(x)$. Zaista, u tom slučaju je $r \leq \|A^{-1}\|^{-1}$, pa ako je $x \in U$, $y \in V$ i $f(x,y) = 0$, onda je

$$\|y-g(x)\| \leq \|A^{-1}\| \|A(y-g(x))\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{r} \|f(x,y)-f(x,g(x))-A(y-g(x))\| \leq \frac{1}{2} \|y-g(x)\|,$$

odakle sledi $y = g(x)$.

2. Ako je funkcija f neprekidna i $f_y(a,b)$ bijekcija, onda je funkcija g neprekidna. Zaista, u tom slučaju je svaka od funkcija g_k neprekidna, jer je

$$g_{k+1}(x) = g_k(x)-A^{-1}f(x,g_k(x)),$$

pa kako niz funkcija g_k ravnomerno konvergira funkciji g, to je i funkcija g neprekidna.

1.10. LAGRANGEOV PRINCIP ZA GLATKE PROBLEME

Teorema 1.10.1. Neka su X i Y Banachovi prostori, $D \subseteq X$, $f: D \to R^{m+1}$, $F: D \to Y$ i $\hat{x} \in \mathrm{int} D$ rešenje problema

$$f_o(x) \to \inf; \quad f_i(x) \leq 0, \ i=1,\ldots,m, \ F(x) = 0.$$

Ako su

a) funkcije f_i, $i=0,1,\ldots,m$, diferencijabilne u $\hat{x}$,

b) funkcija F strogo diferencijabilna u $\hat{x}$,

c) $\mathrm{Im}F'(\hat{x})$ zatvoren podprostor od Y,

onda postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$ i $\hat{y}^* \in Y^*$ takvi da je

1. $(\hat{\lambda}, \hat{y}^*) \neq 0$,

2. $\hat{\lambda}_i \geq 0$, $i = 0,1,\ldots,m$,

3. $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1,\ldots,m$,

4. $\hat{\lambda} f'(\hat{x}) + \hat{y}^* F'(\hat{x}) = 0$.

Napomena o oznakama. Pod R^{m+1} podrazumevamo prostor stubaca, a pod R^{m+1*} prostor vrsta. Komponente funkcije f označavamo sa f_i, $i=0,1,\ldots,m$, a vektora $\hat{\lambda}$ sa $\hat{\lambda}_i$, $i=0,1,\ldots,m$. U skladu sa tim, $\hat{\lambda} f(\hat{x})$ je matrični proizvod, tj.

$$\hat{\lambda} f(\hat{x}) = \sum_{i=o}^{m} \hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}).$$

Dokaz. Ako $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) \neq Y$, onda $\hat{\lambda} = 0$ i $\hat{y}^* \in (\mathrm{Im}F'(\hat{x}))^{\perp}$ zadovoljavaju uslove 1-4. Zato nadalje pretpostavljamo da je $\mathrm{Im}F'(\hat{x}) = Y$.

Pretpostavka da je $f_o(\hat{x}) = 0$ ne umanjuje opštost razmatranja. Ako je $f_o(\hat{x}) \neq 0$, funkciju f_o možemo zameniti funkcijom $f_o - f_o(\hat{x})$.

Možemo pretpostaviti da su sva ograničenja aktivna, tj.da je $f_i(\hat{x}) = 0$ za svako $i=1,\dots,m$. Ako je za neko $i=1,\dots,m$ $f_i(\hat{x}) < 0$, tada je $f_i(x) < 0$ u nekoj okolini tačke $\hat{x}$, pa ovo ograničenje ne moramo uzimati u obzir. Za takvo i stavićemo da je $\hat{\lambda}_i = 0$.

Posmatrajmo skup

$$C = \{(\mu,y)\in R^{m+1}\times Y \mid (\exists h\in X)(f_i'(\hat{x})h<\mu_i \quad \text{za } i=0,1,\dots,m,$$
$$F'(\hat{x})h = y)\}.$$

Lako se pokazuje da je ovaj skup konveksan.

Dokažimo da je $\mathrm{int}C \neq \emptyset$. Neka je U jedinična kugla u X. Prema teoremi o otvorenom preslikavanju, postoji kugla V u Y koja je sadržana u $F'(\hat{x})U$. Ako je $\mu_i > \|f_i'(\hat{x})\|$, $i=0,1,\dots,m$, i $y\in V$, onda $(\mu,y)\in C$. Zaista, postoji $h\in U$ takvo da je $F'(\hat{x})h = y$; za takvo h važi

$$f_i'(\hat{x})h \leqslant \|f_i'(\hat{x})h\| \leqslant \|f_i'(\hat{x})\| \; \|h\| \leqslant \|f_i'(\hat{x})\| < \mu_i .$$

Sledi da je $\mathrm{int}C \neq \emptyset$.

Dokažimo da $0 \notin C$. Pretpostavimo suprotno: neka $0\in C$. Tada postoji $h\in X$ takvo da je

$$f_i'(\hat{x})h < 0$$

za svako $i=0,1,\dots,m$, i

$$F'(\hat{x})h = 0.$$

Ako na funkciju $f(x,y) = F(x+y)$ primenimo teoremu o implicitnoj funkciji, dobijamo da postoji $C > 0$, okolina U tačke $\hat{x}$ i funkcija $g:U\to X$ takvi da je

$$F(x+g(x)) = 0,$$
$$\|g(x)\| \leqslant C\|F(x)\|$$

za svako $x \in U$. Postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $\hat{x}+th \in U$ za svako $t \in [0,\varepsilon]$. Neka je funkcija $r:[0,\varepsilon] \to X$ definisana sa $r(t) = g(\hat{x}+th)$. Kako je $g(\hat{x}) = 0$ i $F'(\hat{x})h = 0$, to je

$$\|F(\hat{x}+th)\| = o(t),$$

pa je

$$r(t) = o(t).$$

Kako je

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{1}{t} f_i(\hat{x}+th+r(t)) = f_i'(\hat{x})h$$

za $i=0,1,\ldots,m$, postoji $t \in [0,\varepsilon]$ takvo da je

$$f_i(\hat{x}+th+r(t)) < 0$$

za $i=0,1,\ldots,m$, i

$$F(\hat{x}+th+r(t)) = 0,$$

što je protivno pretpostavci da je $\hat{x}$ rešenje posmatranog problema.

Prema jednoj od posledica teoreme o razdvajanju konveksnih skupova, postoji zatvoren hiperpodprostor koji ograničava skup C. Sledi da postoji $(\hat{\lambda},\hat{y}^*) \in R^{m+1^*} \times Y^*$, $(\hat{\lambda},\hat{y}^*) \neq 0$, tako da je

$$\hat{\lambda}\mu + \hat{y}^* y \geq 0$$

za svaki par $(\mu,y) \in C$. Dokažimo da $\hat{\lambda}$ i $\hat{y}^*$ zadovoljavaju uslove 2 i 4. Ako je $\varepsilon > 0$, onda $((\varepsilon,\ldots,\varepsilon, 1+\varepsilon,\varepsilon,\ldots,\varepsilon),0) \in C$ $(h=0)$, pa je

$$\hat{\lambda}_i + \varepsilon \sum_{j=0}^{m} \hat{\lambda}_j \geq 0.$$

Sledi da je $\hat{\lambda}_i \geq 0$. Za svako $h \in X$ i $\varepsilon > 0$ $(f'(\hat{x})h+(\varepsilon,\ldots,\varepsilon), F'(\hat{x})h) \in C$. Sledi da je

$$(\hat{\lambda} f'(\hat{x})+\hat{y}^* F'(\hat{x}))h + \varepsilon \sum_{i=o}^{m} \hat{\lambda}_i \geq 0$$

za svako $h \in X$ i $\varepsilon > 0$, a odavde da je

$$(\hat{\lambda} f'(\hat{x})+\hat{y}^* F'(\hat{x}))h \geq 0$$

za svako $h \in X$. Ovo je moguće samo ako je

$$\hat{\lambda} f'(\hat{x})+\hat{y}^* F'(\hat{x}) = 0. \blacksquare$$

Teorema 1.10.2. Neka su X i Y Banachovi prostori, $D \subseteq X$, $f: D \to R^{m+1}$, $F: D \to Y$ i $\hat{x} \in \mathrm{int} D$ rešenje problema

$$f_o(x) \to \inf;\ f_i(x) \leq 0,\ i=1,\dots,k,\ f_i(x) = 0,\ i=k+1,\dots,m,\ F(x) = 0.$$

Ako su

a) funkcije f_i, $i=0,1,\dots,k$, diferencijabilne u $\hat{x}$,

b) funkcije f_i, $i=k+1,\dots,m$, strogo diferencijabilne u $\hat{x}$,

c) funkcija F strogo diferencijabilna u $\hat{x}$,

d) $\mathrm{Im} F'(\hat{x})$ zatvoren podprostor od Y,

onda postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$ i $\hat{y}^* \in Y^*$ takvi da je

1. $(\hat{\lambda},\hat{y}^*) \neq 0$,

2. $\hat{\lambda}_i \geq 0$, $i=0,1,\dots,k$

3. $\hat{\lambda}_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i=1,\dots,k$

4. $\hat{\lambda} f'(\hat{x})+\hat{y}^* F'(\hat{x}) = 0$.

Dokaz ove teoreme se dobija tako što se prethodna teorema primeni na problem

$$f_o(x) \to \inf;\quad f_i(x) \leq 0,\quad i=1,\dots,k,\quad G(x) = 0,$$

gde je funkcija $G:D \to R^{m-k} \times Y$ definisana sa

$$G(x) = (f_{k+1}(x), \ldots, f_m(x), F(x)).$$

Jedina poteškoća koja se tu pojavljuje je dokazivanje činjenice da je $\operatorname{Im} G'(\hat{x})$ zatvoren podprostor od $R^{m-k} \times Y$. Ovaj problem rešava

Lema 1.10.3. Neka su X, Y i Z Banachovi prostori, $B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $C \in \mathcal{L}(X,Z)$ i $A = (B,C) \in \mathcal{L}(X, Y \times Z)$. Ako je $\operatorname{Im} B$ zatvoren podprostor od Y i $C\operatorname{Ker} B$ zatvoren podprostor od Z, onda je $\operatorname{Im} A$ zatvoren podprostor od $Y \times Z$.

Dokaz. Neka je $(y,z) \in \operatorname{cl} \operatorname{Im} A$. Postoji niz (x_n) tačaka iz X takav da je $\lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = (y,z)$, tj. takav da je $\lim\limits_{n \to \infty} Bx_n = y$ i $\lim\limits_{n \to \infty} Cx_n = z$. Kako je $\operatorname{Im} B$ zatvoren podprostor od Y, postoji $x \in X$ takvo da je $Bx = y$. Prema teoremi o otvorenom preslikavanju, postoji niz (ξ_n) tačaka iz X, takav da je $B\xi_n = B(x_n - x)$ i da je $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = 0$. Kako je $\xi_n - x_n + x \in \operatorname{Ker} B$, $\lim\limits_{n \to \infty} C(\xi_n - x_n + x) = Cx - z$, to je $Cx - z \in \operatorname{cl} C\operatorname{Ker} B = C\operatorname{Ker} B$. Zato postoji $\xi \in \operatorname{Ker} B$ takvo da je $C\xi = Cx - z$. Kako je $B(x-\xi) = y$ i $C(x-\xi) = z$, to je $(y,z) \in \operatorname{Im} A$. ∎

2. NEOPHODNI USLOVI EKSTREMUMA U VARIJACIONOM RAČUNU

2.1. LAGRANGEOV PROBLEM

Neka je V otvoren skup u $R\times R^n\times R^r$ i W otvoren skup $R\times R^n\times R\times R^n$. Neka su funkcije $f(t,x,u):V\to R^n$, $L(t,x,u):V\to R^{m+1}$ i $\ell(t_o,x_o,t_1,x_1):W\to R^{m+1}$ neprekidne.

Skup procesa P je skup četvorki $(x(\cdot),\ u(\cdot),\ t_o,t_1)$, takvih da je

1. $x(\cdot):[t_o,t_1]\to R^n$ glatka funkcija,

2. $u(\cdot):[t_o,t_1]\to R^r$ neprekidna funkcija,

3. $(t,x(t),u(t))\in V$ za svako $t\in[t_o,t_1]$,

4 $(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1))\in W$.

Bolzini funkcionali $B_i:P\to R$, $i=0,1,\ldots,m$, definišu se sa

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} L_i(t,x(t),u(t))dt +$$

$$+ \ell_i(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1)).$$

Lagrangeov problem je sledeći ekstremalni problem na skupu P:

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)\to \inf;$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \leqslant 0,\ i=1,\ldots,k,$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = 0,\ i=k+1,\ldots,m,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),\quad t\in[t_o,t_1].$$

Proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)\in P$ je optimalan u slabom smislu ako je dopustiv i ako postoji $\varepsilon>0$ takvo da je

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \geq B_o(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$$

za svaki dopustivi proces $(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \in P$ koji zadovoljava uslove

$$|t_o-\hat{t}_o|, \; |t_1-\hat{t}_1| < \varepsilon \; ;$$

$$\| x(t)-\hat{x}(t)\|, \; \|u(t)-\hat{u}(t)\| < \varepsilon$$

za svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \cap [t_o,t_1]$.

Hamiltonova funkcija $H: V \times R^{n^*} \times R^{m+1^*} \to R$ definiše se sa

$$H(t,x,u,p,\lambda) = pf(t,x,u) - \lambda L(t,x,u).$$

Teorema 2.1.1. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda} \in R^{m+1^*}$ i glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1] \to R^{n^*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0$;

   $\hat{\lambda}_i \geq 0, \; i = 0,1,\ldots,k;$

   $\hat{\lambda}_i \hat{B}_i = 0, \quad i=1,\ldots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t), \; t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$;

   $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \; \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}$;

3. $\hat{H}_u(t) = 0, \; t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$;
4. $\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}, \; \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}$.

Teorema 2.1.2. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\rightarrow R^{n*}$, takvi da je:

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

   $\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i=0,1,\ldots,k;$

   $\hat{\lambda}_i\hat{B}_i = 0, \quad i=1,\ldots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t), \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1];$

   $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \quad \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

3. $\hat{H}_u(t) = 0, \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1];$

4. $\dot{\hat{H}}(t) = \hat{H}_t(t), \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1];$

   $\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}, \quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

U prethodnim teoremama koristili smo sledeće konvencije

$$\hat{B}_i = B_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1),$$

$$\hat{H}_x(t) = H_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\hat{p}(t),\hat{\lambda}),$$

$$\hat{\ell}_{x_o} = \ell_{x_o}(\hat{t}_o,\hat{x}(\hat{t}_o),\hat{t}_1,\hat{x}(\hat{t}_1)),$$

i td. I nadalje ćemo koristiti ove i slične skraćene zapise čiji je smisao potpuno jasan.

2.2. LAGRANGEOV PROBLEM NA SKUPU DEO PO DEO NEPREKIDNIH UPRAVLJANJA

Skup procesa $\bar{P}$ je skup četvorki $(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)$, takvih da je

1. $x(\cdot):[t_o,t_1]\to R^n$ deo po deo glatka funkcija,

2. $u(\cdot):[t_o,t_1]\to R^r$ deo po deo neprekidna funkcija,

3. $(t,x(t),u_-(t)),(t,x(t),u_+(t))\in V$ za svako $t\in[t_o,t_1]$,

4. $(t_o,x(t_o),\ t_1,x(t_1))\in W$.

Lagrangeov problem se može razmatrati na skupu procesa $\bar{P}$ koji je proširenje skupa procesa P.

Optimalnost procesa u slabom smislu definiše se na isti način kao u prethodnom paragrafu.

Proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)\in\bar{P}$ je optimalan u slabo-jakom smislu ako je dopustiv i ako postoji $\varepsilon>0$ takvo da je

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)\geq B_o(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$$

za svaki dopustivi proces $(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)\in\bar{P}$ koji zadovoljava uslove

$$|t_o-\hat{t}_o|,|t_1-\hat{t}_1|<\varepsilon\ ;$$

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\|<\varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[t_o,t_1]$ i

$$\|u(t)-\hat{u}(t)\|<\varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[t_o,t_1]$, $|t-\hat{\tau}_1|,\ldots,|t-\hat{\tau}_s|\geq\varepsilon$, gde su $\hat{\tau}_1,\ldots$ $\ldots,\hat{\tau}_s$ tačke prekida funcije $\hat{u}(\cdot)$.

Teorema 2.2.1. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i deo po deo glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

   $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\ldots,k;$

   $\hat{\lambda}_i\hat{B}_i = 0, \; i=1,\ldots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t), \; t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

   $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \quad \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

3. $\hat{H}_u(t) = 0, \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

4. $\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}, \quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

Teorema 2.2.2. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i deo po deo glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

   $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\ldots,k;$

   $\hat{\lambda}_i\hat{B}_i = 0, \quad i=1,\ldots k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t), \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

   $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \; \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

3. $\hat{H}_u(t) = 0, \quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

4. $\dot{\hat{H}}(t) = \hat{H}_t(t),\ t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\dots,\hat{\tau}_s\};$

$\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},\quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

Teorema 2.2.3. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabo-jakom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i deo po deo glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

$\hat{\lambda}_i \geq 0,\quad i=0,1,\dots,k;$

$\hat{\lambda}_i\hat{B}_i = 0,\quad i=1,\dots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t),\ t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\dots,\hat{\tau}_s\};$

$\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o},\quad \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

3. $\hat{H}_u(t) = 0,\ t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\dots,\hat{\tau}_s\};$

4. $\hat{H}_-(\hat{\tau}_i) = \hat{H}_+(\hat{\tau}_i),\quad i=1,\dots,s;$

$\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},\quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

Teorema 2.2.4. Neka su funkcije f i L neprekidno diferencijabilne na skupu V i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan u slabo-jakom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i deo po deo glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

$\hat{\lambda}_i \geq 0,\quad i=0,1,\dots,k;$

$\hat{\lambda}_i\hat{B}_i = 0,\quad i=1,\dots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t),\ t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

$\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o},\ \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

3. $\hat{H}_u(t) = 0,\ t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

4. $\hat{H}_-(\hat{\tau}_i) = \hat{H}_+(\hat{\tau}_i),\quad i=1,\ldots,s;$

$\dot{\hat{H}}(t) = \hat{H}_t(t),\quad t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s\};$

$\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},\quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

2.3. DIFERENCIRANJE OPERATORA NEMYTSKOG I OPERATORA EVALUACIJE

Teorema 2.3.1. Neka je G otvoren skup u $R\times R^n$ i neka je funkcija $f(t,x):G\to R^m$ neprekidna i neprekidno diferencijabilna po x.

a) Skup

$$D = \{x(\cdot)\in C^n[t_o,t_1] \mid (\forall t\in[t_o,t_1])(t,x(t))\in G\}$$

je otvoren u $C^n[t_o,t_1]$.

b) Operator Nemytskog $F:D\to C^m[t_o,t_1]$ koji se definiše sa

$$F(x(\cdot))(t) = f(t,x(t))$$

je neprekidno diferencijabilan i

$$F'(x(\cdot))h(\cdot)(t) = f_x(t,x(t))h(t).$$

Dokaz. a) Neka je $\hat{x}(\cdot)\in D$. Grafik funkcije $\hat{x}(\cdot)$ je kompaktan podskup od G. Zato postoji $r>0$, takvo da je

$$\{(t,x)\in[t_o,t_1]\times R^n \mid \|x-\hat{x}(t)\|\leq r\}\subseteq G.$$

Sledi da je

$$\{x(\cdot)\in C^n[t_o,t_1] \mid \|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\| \leq r\} \subseteq D.$$

Dakle, skup D je okolina proizvoljne tačke $\hat{x}(\cdot)$ sadržane u njemu. Sledi da je skup D otvoren.

b) Linearni operator $A:C^n[t_o,t_1]\to C^m[t_o,t_1]$ koji se definiše sa

$$Ah(\cdot)(t) = f_x'(t,\hat{x}(t))h(t)$$

je ograničen. Zaista

$$\|A\| = \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \|Ah(\cdot)\| = \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \|Ah(\cdot)(t)\| =$$

$$= \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \|f_x'(t,\hat{x}(t))h(t)\| =$$

$$= \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \|f_x'(t,\hat{x}(t))h(t)\| =$$

$$= \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \|f_x'(t,\hat{x}(t))\| < +\infty .$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Postoji δ, $0<\delta<r$, takvo da je

$$\|f_x'(t,x)-f_x'(t,\hat{x}(t))\| < \varepsilon$$

za svako $(t,x)\in[t_o,t_1]\times R^n$ koje zadovoljava uslov $\|x-\hat{x}(t)\| < \delta$. Neka $x'(\cdot)$, $x''(\cdot)\in D$, $\|x'(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\| < \delta$, $\|x''(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\| < \delta$. Tada je

$$\|F(x''(\cdot))-F(x'(\cdot))-A(x''(\cdot)-x'(\cdot))\| =$$

$$= \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \|f(t,x''(t))-f(t,x'(t))-f_x'(t,\hat{x}(t))(x''(t)-$$

$$-x'(t))\| \leq \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \sup_{0\leq\Theta\leq 1} \|f_x'(t,(1-\Theta)x'(t)+\Theta x''(t))$$

$$- f_x'(t,\hat{x}(t))\|\|x''(t)-x'(t)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t_o\leq t\leq t_1} \varepsilon\|x''(t)-x'(t)\| = \varepsilon\|x''(\cdot)-x'(\cdot)\|.$$

[...]edi da je A strog izvod funkcije F u tački $\hat{x}(\cdot)$. Kako je funk[...]ja F strogo diferencijabilna u svakoj tački skupa D, ona je [n]eprekidno diferencijabilna na skupu D. ∎

Teorema 2.3.2. Operator evaluacije $ev: C_1^n[t_o,t_1]\times]t_o,t_1[\to R^n$ koji se definiše sa

$$ev(x(\cdot),t) = x(t)$$

je neprekidno diferencijabilan i

$$ev_{x(\cdot)}(x(\cdot),t)h(\cdot) = h(t),$$

$$ev_t(x(\cdot),t) = \dot{x}(t).$$

Dokaz. Operator ev je ograničen linearni operator po $x(\cdot)$. Zato je on jako diferencijabilan po $x(\cdot)$ i

$$ev_{x(\cdot)}(x(\cdot),t)h(\cdot) = h(t).$$

Kako je

$$\|ev_{x(\cdot)}(x(\cdot),t)-ev_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\hat{t})\| =$$

$$= \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \|ev_{x(\cdot)}(x(\cdot),t)h(\cdot)-ev_{x(\cdot)}(\hat{x}(\cdot),\hat{t})h(\cdot)\| =$$

$$= \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \|h(t)-h(\hat{t})\|$$

$$\leq \sup_{\|h(\cdot)\|\leq 1} \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|\dot{h}((1-\theta)t+\theta\hat{t})\|\,|t-\hat{t}| \leq |t-\hat{t}|,$$

operator ev je neprekidno diferencijabilan po $x(\cdot)$.

Jasno je da je operator ev jako diferencijabilan po t i da je

$$ev_t(x(\cdot),t) = \dot{x}(t).$$

Kako je

$$\|ev_t(x(\cdot),t)-ev_t(\hat{x}(\cdot),\hat{t})\| = \|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(\hat{t})\| \leq$$

$$\leq \|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\| + \|\dot{\hat{x}}(t)-\dot{\hat{x}}(\hat{t})\| \leq$$

$$\leq \|\dot{x}(\cdot)-\dot{\hat{x}}(\cdot)\| + \|\dot{\hat{x}}(t)-\dot{\hat{x}}(\hat{t})\| ,$$

operator ev je neprekidno diferencijabilan po t. ∎

2.4. DOKAZI TEOREMA

Mayerov problem je slučaj Lagrangeovog problema kod koga je $L = 0$, tj. to je onaj slučaj Lagrangeovog problema kod koga u Bolzinim funkcionalima B_i, $i=0,1,\ldots,m$, ne figurišu integralni članovi. Lagrangeovom problemu razmatranom u paragrafima 2.1 i 2.2 odgovara sledeći Mayerov problem:

$$y_0(t_1)-y_0(t_0)+\ell_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \to \inf;$$

$$y_i(t_1)-y_i(t_0)+\ell_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) \leq 0, \quad i=1,\ldots,k,$$

$$y_i(t_1)-y_i(t_0)+\ell_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = 0, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)),$$

$$\dot{y}(t) = L(t,x(t),u(t)).$$

Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ optimalan u bilo kom smislu iz paragrafa 2.1 i 2.2, onda je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{y}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$, gde je

$$\hat{y}(t) = \int_{\hat{t}_0}^{t} L(s,\hat{x}(s),\hat{u}(s))ds,$$

optimalan u istom tom smislu za odgovarajući Mayerov problem. Neophodni uslovi optimalnosti za Lagrangeov problem dati teoremama iz paragrafa 2.1 i 2.2 mogu se dobiti primenom istih tih teorema na odgovarajući Mayerov problem. Zato je dovoljno izvesti dokaze ovih teorema za Mayerov problem, tj. za slučaj $L = 0$.

Dokaz teoreme 2.1.1. Neka je I otsečak realne prave koji sadrži $[t_o, t_1]$ u svojoj unutrašnjosti, na koji se funkcije $\hat{x}(\cdot)$ i $\hat{u}(\cdot)$ mogu tako produžiti, da diferencijalna veza

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))$$

bude zadovoljena za svako $t\in I$. Skup

$$\Delta = \{(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)\in C_1^n(I)\times C^r(I)\times R\times R \mid t_o,t_1\in \mathrm{int}I,$$

$$(\forall t\in I)(t,x(t),u(t))\in V,\ (t_o,x(t_o),t_1,x(t_1))\in W\}$$

je otvoren podskup Banachovog prostora $C_1^n(I)\times C^r(I)\times R\times R$.
Funkcije $\varphi_i:\Delta\to R$, $i=0,1,\ldots,m$, definisane sa

$$\varphi_i(\xi) = \varepsilon_i(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1)),$$

gde je $\xi = (x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)\in\Delta$, su neprekidno diferencijabilne.
Funkcija $\Phi:\Delta\to C^n(I)$ definisana sa

$$\Phi(\xi)(t) = \dot{x}(t) - f(t,x(t),u(t))$$

je takodje neprekidno diferencijabilna. Kako je

$$\hat{\Phi}_{x(\cdot)}x(\cdot)(t) = \dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)$$

i kako linearna diferencijalna jednačina

$$\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t) = y(t)$$

ima rešenje definisano na celom otsečku I za svaku funkciju $y(\cdot)\in C^n(I)$, to je $\mathrm{Im}\,\hat{\Phi}_{x(\cdot)} = C^n(I)$, pa je samim tim $\mathrm{Im}\,\hat{\Phi}' = C^n(I)$.
Četvorka $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)\in\Delta$ je lokalno rešenje problema

$$\varphi_o(\xi)\to\inf;\quad \varphi_i(\xi)\leq 0,\ i=1,\ldots,k,$$

$$\varphi_i(\xi) = 0,\ i=k+1,\ldots,m,\qquad \Phi(\xi) = 0.$$

Kako su svi uslovi teoreme 1.10.2 zadovoljeni, postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i $\hat{y}^*\in C^n(I)^*$, takvi da je

$$(\hat{\lambda}, \hat{y}^*) \neq 0,$$

$$\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\ldots,k,$$

$$\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i = 0, \quad i=1,\ldots,k,$$

i da se izvod Lagrangeove funkcije

$$\hat{\lambda}\varphi + \hat{y}^*\phi$$

anulira u tački $\hat{\xi}$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} x(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} x(\hat{t}_1)+\hat{y}^*(\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot)\in C_1^n(I)$. Neka je glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$ rešenje problema

$$\dot{p}(t) = -p(t)\hat{f}_x(t), \quad p(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}.$$

Neka je $y(\cdot)\in C^n(I)$ i $x\in R^n$. Postoji $x(\cdot)\in C_1^n(I)$ takvo da je

$$\dot{x}(t) = \hat{f}_x(t)x(t)+y(t), \quad x(\hat{t}_1) = x.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t)x(t) = -\hat{p}(t)\hat{f}_x(t)x(t)+\hat{p}(t)(\hat{f}_x(t)x(t)+y(t)) =$$

$$= \hat{p}(t)y(t),$$

to je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt = \hat{p}(t)x(t)\Big|_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} = \hat{p}(\hat{t}_1)x-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}x(\hat{t}_o).$$

Sledi da je

$$(\hat{p}(\hat{t}_1)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1})x+\hat{y}^*y(\cdot)-\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\hat{p}(t)y(t)dt=0.$$

Kako ova jednakost važi za svako $x\in R^n$ i svako $y(\cdot)\in C^n(I)$, to je

$$\hat{p}(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1},$$

$$\hat{y}^*y(\cdot)=\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\hat{p}(t)y(t)dt.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}^*(-\hat{f}_u(t)u(t))=0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I)$, tj. da je

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1}\hat{p}(t)\hat{f}_u(t)u(t)dt=0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I)$. Sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t)=0$$

za svako $t\in[\hat{t}_0,\hat{t}_1]$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po t_0 u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_0}+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_0}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0)=0,$$

a odavde da je

$$\hat{p}(\hat{t}_0)\hat{f}(\hat{t}_0)=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_0}.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po t_1 u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} + \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0,$$

a odavde da je

$$\hat{p}(\hat{t}_1)\hat{f}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$$

Ostaje još da dokažemo da je $\hat{\lambda} \neq 0$. Ovo sledi iz činjenice da $\hat{\lambda} = 0$ povlači $\hat{p}(\cdot) = 0$ a ovo $\hat{y}^* = 0$. ∎

Dokaz teoreme 2.2.3. Pretpostavimo da $\hat{u}(\cdot)$ ima jedan prekid u tački $\hat{\tau}$. U slučaju kada $\hat{u}(\cdot)$ ima veći broj prekida dokaz može da se izvede na sličan način.

Neka je I_o otsečak koji sadrži $[\hat{t}_o, \hat{\tau}]$ u svojoj unutrašnjosti, a funkcije $\hat{x}_o(\cdot) \in C_1^n(I_o)$ i $\hat{u}_o(\cdot) \in C^r(I_o)$ takve da je

$$\hat{x}_o(t) = \hat{x}(t),\ \hat{u}_o(t) = \hat{u}(t) \quad \text{za} \quad t \in [\hat{t}_o, \hat{\tau}[\,,$$
$$\dot{\hat{x}}_o(t) = f(t, \hat{x}_o(t), \hat{u}_o(t)) \quad \text{za} \quad t \in I_o.$$

Dalje, neka je I_1 otsečak koji sadrži $[\hat{\tau}, \hat{t}_1]$ u svojoj unutrašnjosti, a funkcije $\hat{x}_1(\cdot) \in C_1^n(I_1)$ i $\hat{u}_1(\cdot) \in C^r(I_1)$ takve da je

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t),\ \hat{u}_1(t) = \hat{u}(t) \quad \text{za} \quad t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1]\,,$$
$$\dot{\hat{x}}_1(t) = f(t, \hat{x}_1(t), \hat{u}_1(t)) \quad \text{za} \quad t \in I_1.$$

Skup

$$\Delta = \{(x_o(\cdot),\ x_1(\cdot),\ u_o(\cdot),\ u_1(\cdot),\ t_o,\ t_1, \tau) \in$$
$$\in C_1^n(I_o) \times C_1^n(I_1) \times C^r(I_o) \times C^r(I_1) \times R \times R \times R \,|$$
$$t_o, \tau \in \mathrm{int} I_o, t_1, \tau \in \mathrm{int} I_1,\ (t_o, x_o(t_o), t_1, x_1(t_1)) \in W,$$
$$(\forall t \in I_o)(t, x_o(t), u_o(t)) \in V,\ (\forall t \in I_1)(t, x_1(t), u_1(t)) \in V\}$$

je otvoren podskup Banachovog prostora $C_1^n(I_o) \times C_1^n(I_1) \times C^r(I_o) \times C^r(I_1) \times R \times R \times R$. Funkcije $\varphi_i : \Delta \to R$, $i=0,1,\ldots,m$, $\psi : \Delta \to R^n$, definisane sa

$$\varphi_i(\xi) = \ell_i(t_o, x_o(t_o), t_1, x_1(t_1)),$$
$$\psi(\xi) = x_1(\tau) - x_o(\tau),$$

gde je $\xi = (x_o(\cdot), x_1(\cdot), u_o(\cdot), u_1(\cdot), t_o, t_1, \tau) \in \Delta$, su neprekidno diferencijabilne. Funkcija $\Phi : D \to C^n(I_o) \times C^n(I_1)$ definisana sa

$$\Phi(\xi)(t) = (\dot{x}_o(t) - f(t, x_o(t), u_o(t)), \dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t), u_1(t)))$$

takodje je neprekidno diferencijabilna. Kako je

$$\hat{\Phi}_{(x_o(\cdot), x_1(\cdot))}(x_o(\cdot), x_1(\cdot))(t) = (\dot{x}_o(t) - \hat{f}_x(t) x_o(t),$$

$$x_1(t) - \hat{f}_x(t) x_1(t)),$$

prema teoremi o egzistenciji rešenja linearne diferencijalne jednačine $\operatorname{Im} \hat{\Phi}_{(x_o(\cdot), x_1(\cdot))} = C^n(I_o) \times C^n(I_1)$, pa je samim tim $\operatorname{Im} \hat{\Phi}' = C^n(I_o) \times C^n(I_1)$. Sedmorka $\hat{\xi} = (\hat{x}_o(\cdot), \hat{x}_1(\cdot), \hat{u}_o(\cdot), \hat{u}_1(\cdot), \hat{t}_o, \hat{t}_1, \hat{\tau}) \in \Delta$ je lokalno rešenje problema

$\varphi_o(\xi) \to \inf$; $\varphi_i(\xi) \leq 0$, $i=1,\dots,k$, $\varphi_i(\xi)=0$, $i=k+1,\dots,m$, $\psi(\xi)=0$, $\Phi(\xi)=0$.

Kako su svi uslovi teoreme 1.10.2 zadovoljeni, postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$, $\hat{\mu} \in R^{n*}$, $\hat{y}_o^* \in C^n(I_o)^*$, $\hat{y}_1^* \in C^n(I_1)^*$, takvi da je

$$(\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{y}_o^*, \hat{y}_1^*) \neq 0,$$

$$\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\dots,k,$$

$$\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i = 0, \quad i=1,\dots,k,$$

i da se izvod Lagrangeove funkcije

$$\hat{\lambda}\varphi + \hat{\mu}\psi + \hat{y}_o^* \Phi_o + \hat{y}_1^* \Phi_1$$

anulira u tački $\hat{\xi}$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x_o(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} x(\hat{t}_o) - \hat{\mu} x(\hat{\tau}) + \hat{y}_o^*(\dot{x}(t) - \hat{f}_x(t) x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot) \in C_1^n(I_o)$. Neka je deo po deo glatka funkcija

$\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1] \to R^{n*}$ rešenje problema

$$\dot{p}(t) = -p(t)\hat{f}_x(t), \quad p(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}.$$

Neka je $y(\cdot)\in C^n(I_o)$ i $x\in R^n$. Postoji $x(\cdot)\in C_1^n(I_o)$ takvo da je

$$\dot{x}(t) = \hat{f}_x(t)x(t)+y(t), \quad x(\hat{\tau}) = x.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}\,\hat{p}(t)x(t) = -\hat{p}(t)\hat{f}_x(t)x(t)+\hat{p}(t)(\hat{f}_x(t)x(t)+y(t)) =$$

$$= \hat{p}(t)y(t),$$

to je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} \hat{p}(t)y(t)dt = \hat{p}(t)x(t)\Big|_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} = \hat{p}(\hat{\tau})x-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}x(\hat{t}_o).$$

Sledi da je

$$(\hat{p}(\hat{\tau})-\hat{\mu})x + \hat{y}_o^*y(\cdot) - \int_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} \hat{p}(t)y(t)dt = 0.$$

Kako ova jednakost važi za svako $x\in R^n$ i svako $y(\cdot)\in C^n(I_o)$, to je

$$\hat{p}(\hat{\tau}) = \hat{\mu},$$

$$\hat{y}_o^*y(\cdot) = \int_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} \hat{p}(t)y(t)dt.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x_1(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}x(\hat{t}_1)+\hat{\mu}x(\hat{\tau})+\hat{y}_1^*(\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot)\in C_1^n(I_1)$. Neka je $y(\cdot)\in C^n(I_1)$ i $x\in R^n$. Postoji $x(\cdot)\in C_1^n(I_1)$ takvo da je

$$\dot{x}(t) = \hat{f}_x(t)x(t)+y(t), \quad x(\hat{t}_1) = x.$$

Kako je

$$\frac{d}{dt}\,\hat{p}(t)x(t) = \hat{p}(t)y(t),$$

to je

$$\int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt = \hat{p}(t)x(t)\Big|_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} = \hat{p}(\hat{t}_1)x-\hat{\mu}x(\hat{\tau}).$$

Sledi da je

$$(\hat{p}(\hat{t}_1)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1})x+\hat{y}_1^*y(\cdot) - \int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt = 0.$$

Kako ova jednakost važi za svako $x\in R^n$ i svako $y(\cdot)\in C^n(I_1)$, to je

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1},$$

$$\hat{y}_1^*y(\cdot) = \int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u_o(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}_o^*\,(-\hat{f}_u(t)u(t)) = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_o)$, tj. da je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} \hat{p}(t)\hat{f}_u(t)u(t)dt = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_o)$. Sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t) = 0$$

za svako $t\in[\hat{t}_o, \hat{\tau}[$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u_1(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}_1^*(-\hat{f}_u(t)u(t)) = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_1)$, tj. da je

$$\int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_u(t)u(t)dt = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_1)$. Sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t) = 0$$

za svako $t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1]$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po t_o u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} + \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_o) = 0,$$

a odavde da je

$$\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{f}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po t_1 u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} + \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0,$$

a odavde da je

$$\hat{p}(\hat{t}_1)\hat{f}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$$

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po τ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\mu}(\dot{\hat{x}}_+(\hat{\tau})-\dot{\hat{x}}_-(\hat{\tau})) = 0,$$

a odavde da je

$$\hat{p}(\hat{\tau})\hat{f}_-(\hat{\tau}) = \hat{p}(\hat{\tau})\hat{f}_+(\hat{\tau}).$$

Ostaje još da dokažemo da je $\hat{\lambda} \neq 0$. Ovo sledi iz činjenice da $\hat{\lambda} = 0$ povlači $\hat{p}(\cdot) = 0$, a ovo $\hat{\mu} = 0$, $\hat{y}_o^* = 0$ i $\hat{y}_1^* = 0$. ∎

Dokaz teoreme 2.2.1 se ne razlikuje bitno od dokaza teoreme 2.2.3, pa ga nećemo izvoditi.

Dokaz teoreme 2.1.2. Neka je $I = [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$. Skup

$$\Delta = \{ (z(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) \in C_1(I) \times C_1^n(I) \times C^r(I) \mid$$

$$(\forall t \in I)(z(t), x(t), u(t)) \in V, \ (z(\hat{t}_0), x(\hat{t}_0), z(\hat{t}_1), x(\hat{t}_1)) \in W \}$$

je otvoren podskup Banachovog prostora $C_1(I) \times C_1^n(I) \times C^r(I)$. Funkcije $\varphi_i : \Delta \to R$, $i=0,1,\dots,m$, definisane sa

$$\varphi_i(\xi) = \ell_i(z(\hat{t}_0), x(\hat{t}_0), z(\hat{t}_1), x(\hat{t}_1)),$$

gde je $\xi = (z(\cdot), x(\cdot), u(\cdot)) \in \Delta$,

su neprekidno diferencijabilne. Funkcija $\Phi : \Delta \to C^n(I)$, definisana sa

$$\Phi(\xi)(t) = \dot{x}(t) - \dot{z}(t) f(z(t), x(t), u(t)),$$

takodje je neprekidno diferencijabilna. Neka je funkcija $\hat{z}(\cdot) : I \to R$ definisana sa $\hat{z}(t) = t$. Kako je

$$\hat{\Phi}_{x(\cdot)} x(\cdot)(t) = \dot{x}(t) - \hat{f}_x(t) x(t),$$

prema teoremi o egzistenciji rešenja linearne diferencijalne jednačine $\operatorname{Im} \hat{\Phi}_{x(\cdot)} = C^n(I)$, pa je samim tim $\operatorname{Im} \hat{\Phi}' = C^n(I)$.

Dokažimo da je $\hat{\xi} = (\hat{z}(\cdot), \hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \Delta$ lokalno rešenje problema

$$\varphi_0(\xi) \to \inf; \ \varphi_i(\xi) \leq 0, \ i=1,\dots,k, \ \varphi_i(\xi) = 0, \ i=k+1,\dots,m,$$
$$\Phi(\xi) = 0.$$

Postoji realan broj δ, $0 < \delta < 1$, takav da je

$$\delta + \omega(\hat{x}(\cdot), \delta) < \varepsilon,$$
$$\delta + \omega(\hat{u}(\cdot), \delta) < \varepsilon.$$

Neka je $\xi = (z(\cdot), x(\cdot), u(\cdot))$ dopustiva tačka iz Δ koja zadovoljava uslove

$$\|z(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|, \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|, \|u(\cdot) - \hat{u}(\cdot)\| < \delta.$$

Iz

$$\|z(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|<1$$

sledi da je $\dot{z}(t)>0$ za svako $t\in I$. Zato postoji inverzna funkcija $z^{-1}(\cdot):[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)]\to I$, i ona je neprekidno diferencijabilna. Posmatrajmo proces $(x\circ z^{-1}(\cdot),\ u\circ z^{-1}(\cdot),\ z(\hat{t}_o),\ z(\hat{t}_1))$. Kako je

$$B_i(x\circ z^{-1}(\cdot),\ u\circ z^{-1}(\cdot),\ z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)) = \varphi_i(\xi)$$

za $i = 0,1,\ldots,m$ i

$$\frac{d}{dt}\, x\circ z^{-1}(t) = \dot{x}(z^{-1}(t))\,\frac{d}{dt}\, z^{-1}(t)$$

$$= \dot{z}(z^{-1}(t))f(z(z^{-1}(t)),x(z^{-1}(t)),u(z^{-1}(t)))\,\frac{1}{\dot{z}(z^{-1}(t))}$$

$$= f(t,x\circ z^{-1}(t),\ u\circ z^{-1}(t)),$$

on je dopustiv. Kako je

$$|z(\hat{t}_o)-\hat{t}_o|=|z(\hat{t}_o)-\hat{z}(\hat{t}_o)|<\delta<\varepsilon,$$

$$|z(\hat{t}_1)-\hat{t}_1|=|z(\hat{t}_1)-\hat{z}(\hat{t}_1)|<\delta<\varepsilon,$$

a za $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)]$

$$\|x\circ z^{-1}(t)-\hat{x}(t)\|\leq\|x(z^{-1}(t))-\hat{x}(z^{-1}(t))\|+\|\hat{x}(z^{-1}(t))-\hat{x}(t)\|\leq$$

$$\leq\delta+\omega(\hat{x}(\cdot),\delta)<\varepsilon,$$

$$\|u\circ z^{-1}(t)-\hat{u}(t)\|\leq\|u(z^{-1}(t))-\hat{u}(z^{-1}(t))\|+\|\hat{u}(z^{-1}(t))-\hat{u}(t)\|\leq$$

$$\leq\delta+\omega(\hat{u}(\cdot),\delta)<\varepsilon,$$

to je

$$\varphi_o(\xi) = B_o(x\circ z^{-1}(\cdot),u\circ z^{-1}(\cdot),\ z(t_o),z(t_1))\geq\hat{B}_o=\varphi_o(\hat{\xi}).$$

Kako su svi uslovi teoreme 1.10.2 zadovoljeni, postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i $\hat{y}^*\in C^n(I)^*$, takvi da je

$$(\hat{\lambda},\hat{y}^*) \neq 0,$$

$$\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\ldots,k,$$

$$\hat{\lambda}_i\hat{\ell}_i = 0, \quad i=1,\ldots,k,$$

i da se izvod Lagrangeove funkcije

$$\hat{\lambda}\varphi + \hat{y}^*\Phi$$

anulira u tački $\hat{\xi}$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}x(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}x(\hat{t}_1)+\hat{y}^*(\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot)\in C_1^n(I)$. Neka je glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$ rešenje problema

$$\dot{p}(t) = -p(t)\hat{f}_x(t), \quad \hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}.$$

Tada je

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1},$$

$$\hat{y}^*y(\cdot) = \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt$$

za svako $y(\cdot)\in C^n(I)$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}^*(-\hat{f}_u(t)u(t)) = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I)$. Odavde sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t) = 0$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $z(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} z(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} z(\hat{t}_1)-\hat{y}^*(\dot{z}(t)\hat{f}(t)+z(t)\hat{f}_t(t)) = 0$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$, tj. da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} z(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} z(\hat{t}_1)-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)(\dot{z}(t)\hat{f}(t)+z(t)\hat{f}_t(t))dt = 0$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$. Kako je

$$z(\hat{t}_o) = z(\hat{t}_1) - \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)dt,$$

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} z(t)\hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt = z(\hat{t}_1)\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt -$$

$$-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)\left(\int_{\hat{t}_o}^{t} \hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds\right)dt,$$

to je

$$\left(\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} - \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt\right)z(\hat{t}_1) -$$

$$-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)\left(\hat{p}(t)\hat{f}(t)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} - \int_{\hat{t}_o}^{t} \hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds\right)dt = 0$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$. Sledi da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} - \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt = 0,$$

$$\hat{p}(t)\hat{f}(t)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} - \int_{\hat{t}_o}^{t} \hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds = 0$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. Iz poslednje jednakosti dobijamo da je

$$\frac{d}{dt}\,\hat{p}(t)\hat{f}(t) = \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$ i

$$\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{f}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}.$$

I na kraju

$$\hat{p}(\hat{t}_1)\hat{f}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} + \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$$

Kako $\hat{\lambda} = 0$ povlači $\hat{p}(\cdot) = 0$ a ovo $\hat{y}^* = 0$, to je $\hat{\lambda} \neq 0$. ∎

Dokaz teoreme 2.2.2. Pretpostavimo da $\hat{u}(\cdot)$ ima tačno jedan prekid i to u tački $\hat{\tau}$. U slučaju kada $\hat{u}(\cdot)$ ima veći broj prekida dokaz može da se izvede na sličan način.

Neka je $I = [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$, $I_o = [\hat{t}_o,\hat{\tau}]$ i $I_1 = [\hat{\tau},\hat{t}_1]$.

Dalje, neka su $\hat{x}_o(\cdot)\in C_1^n(I_o)$, $\hat{u}_o(\cdot)\in C^r(I_o)$, $\hat{x}_1(\cdot)\in C_1^n(I_1)$ i $\hat{u}_1(\cdot)\in C^r(I_1)$ funkcije koje zadovoljavaju uslove

$$\hat{x}_o(t) = \hat{x}(t),\ \hat{u}_o(t) = \hat{u}(t) \quad \text{za } t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[,$$

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}(t),\ \hat{u}_1(t) = \hat{u}(t) \quad \text{za } t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1].$$

Skup

$$\Delta = \{(z(\cdot),x_o(\cdot),x_1(\cdot),u_o(\cdot),u_1(\cdot))\in C_1(I)\times C_1^n(I_o)\times C_1^n(I_1)\times C^r(I_o)\times C^r(I_1) \mid$$
$$(\forall t\in I_o)\,(z(t),x_o(t),u_o(t))\in V,\ (\forall t\in I_1)\,(z(t),x_1(t),u_1(t))\in V,$$
$$(z(\hat{t}_o),x_o(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1),x_1(\hat{t}_1))\in W\}$$

je otvoren podskup Banachovog prostora $C_1(I)\times C_1^n(I_o)\times C_1^n(I_1)\times$ $\times C^r(I_o)\times C^r(I_1)$. Funkcije $\varphi_i:\Delta\to R$, $i=0,1,\dots,m$, $\psi:\Delta\to R^n$ i $\chi:\Delta\to R$, definisane sa

$$\varphi_i(\xi) = \ell_i(z(\hat{t}_o),x_o(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1),x_1(\hat{t}_1)),$$

$$\psi(\xi) = x_1(\hat{\tau})-x_o(\hat{\tau}),$$

$$\chi(\xi) = z(\hat{\tau})-\hat{\tau},$$

gde je $\xi = (z(\cdot),x_o(\cdot),x_1(\cdot),u_o(\cdot),u_1(\cdot))\in\Delta$, su neprekidno diferencijabilne. Funkcija $\Phi:\Delta\to C^n(I_o)\times C^n(I_1)$, definisana sa

$$\Phi(\xi)(t)=(\dot{x}_o(t)-\dot{z}(t)f(z(t),x_o(t),u_o(t)),$$

$$\dot{x}_1(t)-\dot{z}(t)f(z(t),x_1(t),u_1(t)))$$

takodje je neprekidno diferencijabilna. Neka je funkcija $\hat{z}(\cdot):I\to R$ definisana sa $\hat{z}(t) = t$. Kako je

$$\hat{\Phi}_{(x_o(\cdot),x_1(\cdot))}(x_o(\cdot),x_1(\cdot))(t) =$$

$$= (\dot{x}_o(t)-\hat{f}_x(t)x_o(t),\dot{x}_1(t)-\hat{f}_x(t)x_1(t)),$$

prema teoremi o egzistenciji rešenja linearne diferencijalne jednačine $\operatorname{Im}\hat{\Phi}_{(x_o(\cdot),x_1(\cdot))} = C^n(I_o)\times C^n(I_1)$, pa je samim tim $\operatorname{Im}\hat{\Phi}' = C^n(I_o)\times C^n(I_1)$.

Dokažimo da je $\hat{\xi} = (\hat{z}(\cdot),\hat{x}_o(\cdot),\hat{x}_1(\cdot),\hat{u}_o(\cdot),\hat{u}_1(\cdot))\in\Delta$ lokalno rešenje problema

$$\varphi_o(\xi)\to\inf;\quad \varphi_i(\xi)\le 0,\ i=1,\ldots,k,\quad \varphi_i(\xi)=0,\ i=k+1,\ldots,m,$$

$$\psi(\xi)=0,\quad \chi(\xi)=0,\quad \Phi(\xi)=0.$$

Postoji realan broj δ, $0<\delta<1$, takav da je

$$\delta+\omega(\hat{x}(\cdot),\delta)<\varepsilon,$$
$$\delta+\omega(\hat{u}_o(\cdot),\delta)<\varepsilon,$$
$$\delta+\omega(\hat{u}_1(\cdot),\delta)<\varepsilon.$$

Neka je $\xi = (z(\cdot),x_o(\cdot),x_1(\cdot),u_o(\cdot),u_1(\cdot))$ dopustiva tačka iz Δ koja zadovoljava uslove

$$\|z(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\|, \|x_o(\cdot)-\hat{x}_o(\cdot)\|, \|x_1(\cdot)-\hat{x}_1(\cdot)\|,$$

$$\|u_o(\cdot)-\hat{u}_o(\cdot)\|, \|u_1(\cdot)-\hat{u}_1(\cdot)\| < \delta .$$

Iz

$$\|z(\cdot)-\hat{z}(\cdot)\| < 1$$

sledi da je $\dot{z}(t) > 0$ za svako $t\in I$. Zato postoji inverzna funkcija $z^{-1}(\cdot):[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)] \to I$, i ona je neprekidno diferencijabilna. Posmatrajmo proces $(x\circ z^{-1}(\cdot),\ u\circ z^{-1}(\cdot), z(\hat{t}_o), z(\hat{t}_1))$, gde su funkcije $x(\cdot):I \to R^n$ i $u(\cdot):I\to R^r$ zadate sa

$$x(t)=\begin{cases} x_o(t), & t\in I_o \\ x_1(t), & t\in I_1 \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} u_o(t), & t\in I_o, \\ u_1(t), & t\in I_1. \end{cases}$$

Kako je

$$B_i(x\circ z^{-1}(\cdot),\ u\circ z^{-1}(\cdot),\ z(\hat{t}_o), z(\hat{t}_1)) = \varphi_i(\xi)$$

za $i=0,1,\dots,m$, i

$$\frac{d}{dt}\, x\circ z^{-1}(t) = f(t, x\circ z^{-1}(t),\ u\circ z^{-1}(t)),$$

on je dopustiv. Kako je

$$|z(\hat{t}_o)-\hat{t}_o| = |z(\hat{t}_o)-\hat{z}(\hat{t}_o)| < \delta < \varepsilon,$$

$$|z(\hat{t}_1)-\hat{t}_1| = |z(\hat{t}_1)-\hat{z}(\hat{t}_1)| < \delta < \varepsilon,$$

za $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)]$

$$\|x\circ z^{-1}(t)-\hat{x}(t)\| \leqslant \|x(z^{-1}(t))-\hat{x}(z^{-1}(t))\| + \|\hat{x}(z^{-1}(t))-\hat{x}(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta+\omega(\hat{x}(\cdot),\delta) < \varepsilon,$$

za $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)]$, $t < \hat{\tau}$,

$$\|u \circ z^{-1}(t)-\hat{u}(t)\|=\|u_o \circ z^{-1}(t)-\hat{u}_o(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u_o(z^{-1}(t))-\hat{u}_o(z^{-1}(t))\|+\|\hat{u}_o(z^{-1}(t))-\hat{u}_o(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta+\omega(\hat{u}_o(\cdot),\delta)< \varepsilon,$$

a za $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\cap[z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)]$, $t > \hat{\tau}$,

$$\|u \circ z^{-1}(t)-\hat{u}(t)\|=\|u_1 \circ z^{-1}(t)-\hat{u}_1(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u_1(z^{-1}(t))-\hat{u}_1(z^{-1}(t))\|+\|\hat{u}_1(z^{-1}(t))-\hat{u}_1(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta+\omega(\hat{u}_1(\cdot),\delta)< \varepsilon,$$

to je

$$\varphi_o(\xi)=B_o(x \circ z^{-1}(\cdot),\ u \circ z^{-1}(\cdot),\ z(\hat{t}_o),z(\hat{t}_1)) \geqslant \hat{B}_o = \varphi_o(\hat{\xi}).$$

Kako su svi uslovi teoreme 1.10.2 zadovoljeni, postoje Lagrangeovi množioci $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$, $\hat{\mu}\in R^{n*}$, $\hat{\nu}\in R$, $\hat{y}_o^*\in C^n(I_o)^*$ i $\hat{y}_1^*\in C^n(I_1)$, takvi da je

$$(\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\nu},\hat{y}_o^*,\hat{y}_1^*) \neq 0,$$

$$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i=0,1,\dots,k,$$

$$\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i = 0, \quad i=1,\dots,k,$$

i da se izvod Lagrangeove funkcije

$$\hat{\lambda}\varphi + \hat{\mu}\psi + \hat{\nu}\chi + \hat{y}_o^* \Phi_o + \hat{y}_1^* \Phi_1$$

anulira u tački $\hat{\xi}$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x_o(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$, dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} x(\hat{t}_o)-\hat{\mu}x(\hat{\tau})+\hat{y}_o^*(\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot)\in C_1^n(I_o)$. Neka je deo po deo glatka funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$ rešenje problema

$$\dot{p}(t) = -p(t)\hat{f}_x(t),\ p(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}.$$

Tada je

$$\hat{p}(\hat{\tau}) = \hat{\mu},$$

$$\hat{y}_o^* y(\cdot) = \int_{\hat{t}_o}^{\hat{\tau}} \hat{p}(t)y(t)dt$$

za svako $y(\cdot)\in C^n(I_o)$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $x_1(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} x(\hat{t}_1)+\hat{\mu}x(\hat{\tau})+\hat{y}_1^*(\dot{x}(t)-\hat{f}_x(t)x(t)) = 0$$

za svako $x(\cdot)\in C_1^n(I_1)$. Odavde sledi da je

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1},$$

$$\hat{y}_1^* y(\cdot) = \int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)y(t)dt$$

za svako $y(\cdot)\in C^n(I_1)$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u_o(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}_o^*(-\hat{f}_u(t)u(t)) = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_o)$. Odavde sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t) = 0$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $u_1(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{y}_1^*(-\hat{f}_u(t)u(t)) = 0$$

za svako $u(\cdot)\in C^r(I_1)$. Odavde sledi da je

$$\hat{p}(t)\hat{f}_u(t) = 0$$

za svako $t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1]$.

Diferenciranjem Lagrangeove funkcije po $z(\cdot)$ u tački $\hat{\xi}$ dobijamo da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} z(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} z(\hat{t}_1)+\hat{\nu}z(\hat{\tau}) -$$
$$-\hat{y}_o^*(\dot{z}(t)\hat{f}(t)+z(t)\hat{f}_t(t))-\hat{y}_1^*(\dot{z}(t)\hat{f}(t)+z(t)\hat{f}_t(t))=0$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$, tj. da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o} z(\hat{t}_o)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1} z(\hat{t}_1)+\hat{\nu}z(\hat{\tau})-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)(\dot{z}(t)\hat{f}(t)+$$
$$+z(t)\hat{f}_t(t))dt = 0$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$. Kako je

$$z(\hat{t}_o) = z(\hat{t}_1) - \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)dt,$$

$$z(\hat{\tau})=z(\hat{t}_1)-\int_{\hat{\tau}}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)dt=z(\hat{t}_1)-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} K_{I_1}(t)\dot{z}(t)dt,$$

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} z(t)\hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt=z(\hat{t}_1)\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt-$$
$$-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)\left(\int_{\hat{t}_o}^{t} \hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds\right)dt,$$

to je

$$(\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}+\hat{\nu}-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt)z(\hat{t}_1)-$$
$$-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \dot{z}(t)(\hat{p}(t)\hat{f}(t)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\nu}K_{I_1}(t)-\int_{\hat{t}_o}^{t} \hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds)dt = 0.$$

za svako $z(\cdot)\in C_1(I)$. Sledi da je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}+\hat{\nu}-\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt = 0,$$

$$\hat{p}(t)\hat{f}(t)+\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}+\hat{\nu}K_{I_1}(t)-\int_{\hat{t}_o}^{t}\hat{p}(s)\hat{f}_t(s)ds = 0$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}\}$. Iz poslednje jednakosti dobijamo da je

$$\frac{d}{dt}\hat{p}(t)\hat{f}(t) = \hat{p}(t)\hat{f}_t(t)$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus\{\hat{\tau}\}$,

$$\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{f}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},$$

$$\hat{p}(\hat{\tau})\hat{f}_+(\hat{\tau})-\hat{p}(\hat{\tau})\hat{f}_-(\hat{\tau}) = -\hat{\nu}.$$

I na kraju

$$\hat{p}(\hat{t}_1)\hat{f}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}-\hat{\nu}+\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1}\hat{p}(t)\hat{f}_t(t)dt = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$$

Ostaje još da dokažemo da je $\hat{\lambda}\neq 0$. Ovo sledi iz činjenice da $\hat{\lambda}=0$ povlači $\hat{p}(\cdot)=0$, a ovo $\hat{\mu}=0$, $\hat{\nu}=0$, $\hat{y}_o^*=0$ i $\hat{y}_1^*=0$. ∎

Dokaz teoreme 2.2.4 sličan je dokazu teoreme 2.2.2. Zato ga nećemo izvoditi.

2.5. PRIMENA OPŠTE TEORIJE NA NAJJEDNOSTAVNIJI PROBLEM VARIJACIONOG RAČUNA

Neka je V otvoren skup u $R\times R^n\times R^n$, funkcija $L(t,x,\dot{x}):V\to R$ neprekidna, $\hat{t}_o,\hat{t}_1\in R$ i $\hat{x}_o,\hat{x}_1\in R^n$.

Najjednostavniji problem varijacionog računa je sledeći ekstremalni problem:

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \inf;\quad x(\hat{t}_o)=\hat{x}_o,\ x(\hat{t}_1)=\hat{x}_1.$$

On se može razmatrati na skupu glatkih funkcija $x(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^n$, takvih da je

$$(t,x(t),\dot{x}(t))\in V$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$, ili na skupu deo po deo glatkih funkcija

$x(\cdot):[\hat{t}_o-\hat{t}_1] \to R^n$, takvih da je

$$(t,x(t),\dot{x}_-(t)),(t,x(t),\dot{x}_+(t))\in V$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$.

Najjednostavniji problem varijacionog računa može se shvatiti kao sledeći Lagrangeov problem

$$\int_{t_o}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \to \inf;$$

$$t_o = \hat{t}_o,\; t_1 = \hat{t}_1,\; x(t_o) = \hat{x}_o,\; x(t_1) = \hat{x}_1.$$

$$\dot{x}(t) = u(t).$$

Stoga se neophodni uslovi minimuma za najjednostavniji problem varijacionog računa mogu izvesti iz teorema datih u prva dva paragrafa ove glave.

Nadalje pretpostavljamo da je funkcija L neprekidno diferencijabilna po x i $\dot{x}$ na skupu V.

Razmatrajmo najjednostavniji problem varijacionog računa na skupu glatkih funkcija. Na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ se dostiže slab minimum ako postoji $\varepsilon>0$ takvo da je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \geq \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))dt$$

za svaku dopustivu funkciju $x(\cdot)$ koja zadovoljava nejednakosti

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\|,\quad \|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\| < \varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. Ako se na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ dostiže slab minimum, onda je $(\hat{x}(\cdot),\dot{\hat{x}}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalni proces u slabom smislu za odgovarajući Lagrangeov problem. Prema teoremi 2.1.1 postoje $\hat{\lambda}\in R^{5*}$ i glatka funkcija $\hat{p}(\cdot)$ koja preslikava $[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$ u R^{n*}, takvi da je $\hat{\lambda} \neq 0$ i da je

a) $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t)$

b) $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}_3,\; \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}_4$

c) $\hat{H}_u(t) = 0$

d) $\hat{H}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}_1, \quad \hat{H}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}_2,$

gde je

$$H(t,x,u,p,\lambda) = pu-\lambda_o L(t,x,u).$$

Iz c) dobijamo da je

$$\hat{p}(t) = \hat{\lambda}_o \hat{L}_{\dot{x}}(t).$$

Ako bi bilo $\hat{\lambda}_o=0$, bilo bi $\hat{p}(t)=0$ i $\hat{H}(t)=0$, pa bi na osnovu b) i d) bilo $\hat{\lambda}_1=\hat{\lambda}_2=\hat{\lambda}_3=\hat{\lambda}_4 = 0$, a to je nemoguće. Zato možemo smatrati da je $\hat{\lambda}_o = 1$. Stoga je

$$\hat{p}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t).$$

Iz a) dobijamo da je

$$\dot{\hat{p}}(t) = \hat{L}_x(t).$$

Ovo je Eulerova jednačina.

Razmatrajmo najjednostavniji problem varijacionog računa na skupu deo po deo glatkih funkcija. Na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ dostiže se slab minimum ako postoji $\varepsilon>0$ takvo da je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))dt \geq \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))dt$$

za svaku dopustivu funkciju $x(\cdot)$ koja zadovoljava nejednakosti

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\|, \quad \|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\| < \varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$ (u tačkama preloma funkcija $x(\cdot)$ i $\hat{x}(\cdot)$ poslednja nejednakost treba da bude zadovoljena za levi i desni izvod). Ako se na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ dostiže slab minimum, onda je $(\hat{x}(\cdot),\dot{\hat{x}}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalni proces u slabom smislu za odgovarajući Lagrangeov problem. Iz teoreme 2.2.1 možemo izvesti da se funkcija

$$\hat{p}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)$$

može neprekidno produžiti u tačkama preloma funkcije $\hat{x}(\cdot)$ (prvi Weierstrass-Erdmannov uslov), i da je

$$\dot{\hat{p}}(t)=\hat{L}_x(t)$$

(Eulerova jednačina). Na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ distiže se slabo-jaki minimum ako postoji $\varepsilon>0$ takvo da je

$$\int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} L(t,x(t),\dot{x}(t)) \geqslant \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))dt$$

za svaku dopustivu funkciju $x(\cdot)$ koja zadovoljava nejednakosti

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\| < \varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_0,\hat{t}_1]$ i

$$\|\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)\| < \varepsilon$$

za svako $t\in[\hat{t}_0,\hat{t}_1]$, $|t-\hat{\tau}_1|,\ldots,|t-\hat{\tau}_s|\geqslant\varepsilon$, gde su $\hat{\tau}_1,\ldots,\hat{\tau}_s$ tačke preloma funkcije $\hat{x}(\cdot)$. Ako se na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ dostiže slabo-jaki minimum, onda je $(\hat{x}(\cdot),\dot{\hat{x}}(\cdot),\hat{t}_0,\hat{t}_1)$ optimalni proces u slabo-jakom smislu za odgovarajući Lagrangeov problem. Iz teoreme 2.2.3, pored prvog Weierstrass-Erdmannovog uslova i Eulerove jednačine, dobijamo da se funkcija

$$\hat{H}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t)-\hat{L}(t)$$

može neprekidno produžiti u tačkama preloma funkcije $\hat{x}(\cdot)$ (drugi Weierstrass - Erdmannov uslov).

U slučaju kada se na dopustivoj funkciji $\hat{x}(\cdot)$ dostiže slab minimum, drugi Weierstrass-Erdmannov uslov ne mora biti zadovoljen. Posmatrajmo problem

$$\int_{-1}^{1}(4\dot{x}^4 - 6\dot{x}^3+ \dot{x}^2)dt \to \inf; \quad x(-1) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Dokažimo da se na funkciji

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ t, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

dostiže slab minimum. Tačke 0 i 1 su lokalni minimumi polinoma $L(u) = 4u^4-6u^3+u^2$; zato postoji $\varepsilon>0$ takvo da je $L(u)\geq L(0)$ za $|u|<\varepsilon$ i $L(u) \geq L(1)$ za $|u-1| < \varepsilon$. Neka je $x(\cdot)$ dopustiva funkcija, takva da je

$$|x(t)-\hat{x}(t)|, \; |\dot{x}(t)-\dot{\hat{x}}(t)| < \varepsilon$$

za svako $t\in[-1,1]$. Tada je

$$\int_{-1}^{1} L(\dot{x}(t))dt = \int_{-1}^{0} L(\dot{x}(t))dt + \int_{0}^{1} L(\dot{x}(t))dt \geq$$

$$\geq \int_{-1}^{0} L(0)dt + \int_{0}^{1} L(1)dt = \int_{-1}^{1} L(\dot{\hat{x}}(t))dt.$$

Prema tome, na $\hat{x}(\cdot)$ se dostiže slab minimum. Lako je pokazati da je

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Kako je $\hat{H}_-(0) \neq \hat{H}_+(0)$, drugi Weierstrass-Erdmannov uslov nije zadovoljen.

Ako je funkcija L neprekidno diferencijabilna na skupu V, iz teorema 2.1.2, 2.2.2 i 2.2.4 možemo izvesti da je u svakom od prethodno razmatranih slučajeva zadovoljen i sledeći uslov

$$\dot{\hat{H}}(t) = -\hat{L}_t(t),$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t)-\hat{L}(t)) = -\hat{L}_t(t).$$

2.6. JOŠ JEDAN PROBLEM VARIJACIONOG RAČUNA

Neka su V_o i V_1 otvoreni skupovi u $R\times R^n\times R^r$ i W otvoren skup u $R\times R^n\times R\times R^n\times R\times R^n$. Neka su funkcije $f^o(t,x,u):V_o\to R^n$, $f^1(t,x,u):V_1\to R^n$, $L^o(t,x,u):V_o\to R^{m+1}$, $L^1(t,x,u):V_1\to R^{m+1}$ i $\ell(t_o,x_o,t_1,x_1,\tau,\xi):W\to R^{m+1}$ neprekidne.

Proces je petorka $(x(\cdot), u(\cdot), t_o, t_1, \tau)$, gde je

1. $x(\cdot):[t_o,t_1]\to R^n$ deo po deo glatka funkcija koja ima najviše jedan prelom, i to u tački τ,

2. $u(\cdot):[t_o,t_1]\to R^r$ deo po deo neprekidna funkcija koja ima najviše jedan prekid, i to u tački τ,

3. $(\forall t\in[t_o,\tau[)\,(t,x(t),u(t))\in V_o,$

$(\forall t\in]\tau,t_1])\,(t,x(t),u(t))\in V_1,$

$(\tau,x(\tau),u_-(\tau))\in V_o, \quad (\tau,x(\tau),u_+(\tau))\in V_1,$

4. $(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1),\tau,x(\tau))\in W.$

Bolzini funkcionali B_i, $i=0,1,\dots,m$, definišu se na skupu procesa sa

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1,\tau) = \int_{t_o}^{\tau} L_i^o(t,x(t),u(t))dt +$$
$$+ \int_{\tau}^{t_1} L_i^1(t,x(t),u(t))dt + \ell_i(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1),\tau,x(\tau)).$$

Razmatraćemo sledeći ekstremalni problem na skupu procesa:

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1,\tau) \to \inf;$$
$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1,\tau) \leq 0, \quad i=1,\dots,k;$$
$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1,\tau) = 0, \quad i=k+1,\dots,m;$$
$$\dot{x}(t) = f^o(t,x(t),u(t)), \qquad t\in[t_o,\tau[;$$
$$\dot{x}(t) = f^1(t,x(t),u(t)), \qquad t\in]\tau,t_1].$$

Slično kao u prvom i drugom paragrafu ove glave mogu se uvesti pojmovi optimalnosti procesa u slabom i u slabo-jakom smislu.

Hamiltonove funkcije $H^o : V_o \times R^{n*} \times R^{m+1*} \to R$ i $H^1 : V_1 \times R^{n*} \times R^{m+1*} \to R$ definišu se sa

$$H^o(t,x,u,p,\lambda) = pf^o(t,x,u) - \lambda L^o(t,x,u),$$

$$H^1(t,x,u,p,\lambda) = pf^1(t,x,u) - \lambda L^1(t,x,u).$$

Teorema 2.6.1. Neka su funkcije f^o i L^o neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V_o, neka su funkcije f^1 i L^1 neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V_1 i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_o, \hat{t}_1, \hat{\tau})$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$ i glatke funkcije $\hat{p}_o(\cdot) : [\hat{t}_o, \hat{\tau}] \to R^{n*}$ i $\hat{p}_1(\cdot) : [\hat{\tau}, \hat{t}_1] \to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0;$

   $\hat{\lambda}_i \geq 0, \; i=0,1,\dots,k;$

   $\hat{\lambda}_i \hat{B}_i = 0, \; i=1,\dots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}_o(t) = -\hat{H}^o_x(t), t \in [\hat{t}_o, \hat{\tau}[; \quad \dot{\hat{p}}_1(t) = -\hat{H}^1_x(t), t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1];$

   $\hat{p}_o(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \; \hat{p}_1(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

   $\hat{p}_1(\hat{\tau}) - \hat{p}_o(\hat{\tau}) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{\xi};$

3. $\hat{H}^o_u(t) = 0, \; t \in [\hat{t}_o, \hat{\tau}[; \quad \hat{H}^1_u(t) = 0, \; t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1];$

4. $\hat{H}^o(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}, \quad \hat{H}^1(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}.$

Teorema 2.6.2. Neka su funkcije f^o i L^o neprekidno diferencijabilne na skupu V_o, neka su funkcije f^1 i L^1 neprekidno diferencijabilne na skupu V_1 i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_o, \hat{t}_1, \hat{\tau})$ optimalan u slabom smislu, postoje $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$ i glatke funkcije $\hat{p}_o(\cdot) : [\hat{t}_o, \hat{\tau}] \to R^{n*}$ i $\hat{p}_1(\cdot) : [\hat{\tau}, \hat{t}_1] \to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0$;

$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \quad i=0,1,\dots,k$;

$\hat{\lambda}_i \hat{B}_i = 0, \; i=1,\dots,k$;

2. $\dot{\hat{p}}_o(t) = -\hat{H}^o_x(t), \; t \in [\hat{t}_o, \hat{\tau}[; \; \dot{\hat{p}}_1(t) = -\hat{H}^1_x(t), t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1]$;

$\hat{p}_o(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \quad \hat{p}_1(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}$;

$\hat{p}_1(\hat{\tau}) - \hat{p}_o(\hat{\tau}) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_\xi$;

3. $\hat{H}^o_u(t) = 0, \; t \in [\hat{t}_1, \hat{\tau}[; \; \hat{H}^1_u(t) = 0, \; t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1]$;

4. $\dot{\hat{H}}^o(t) = \hat{H}^o_t(t), \; t \in [\hat{t}_1, \hat{\tau}[; \; \dot{\hat{H}}^1(t) = \hat{H}^1_t(t), t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1]$;

$\hat{H}^o(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}, \quad \hat{H}^1(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}$.

Teorema 2.6.3. Neka su funkcije f^o i L^o neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V_o, neka su funkcije f^1 i L^1 neprekidno diferencijabilne po x i u na skupu V_1 i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_o, \hat{t}_1, \hat{\tau})$ optimalan u slabo-jakom smislu, postoje $\hat{\lambda} \in R^{m+1^*}$ i glatke funkcije $\hat{p}_o(\cdot) : [\hat{t}_o, \hat{\tau}] \to R^{n^*}$ i $\hat{p}_1(\cdot) : [\hat{\tau}, \hat{t}_1] \to R^{n^*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0$;

$\hat{\lambda}_i \geqslant 0, \; i=0,1,\dots,k$;

$\hat{\lambda}_i \hat{B}_i = 0, \; i=1,\dots,k$;

2. $\dot{\hat{p}}_o(t) = -\hat{H}^o_x(t), \; t \in [\hat{t}_o, \hat{\tau}[; \; \dot{\hat{p}}_1(t) = -\hat{H}^1_x(t), t \in]\hat{\tau}, \hat{t}_1]$;

$\hat{p}_o(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}, \; \hat{p}_1(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}$;

$\hat{p}_1(\hat{\tau}) - \hat{p}_o(\hat{\tau}) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_\xi$;

3. $\hat{H}^o_u(t)=0,\ t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[;\quad \hat{H}^1_u(t)=0,\quad t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1];$

4. $\hat{H}^o(\hat{t}_o)=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},\quad \hat{H}^1(\hat{t}_1)=\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1};$

$\hat{H}^1(\hat{\tau})-\hat{H}^o(\hat{\tau})=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_\tau.$

Teorema 2.6.4. Neka su funkcije f^o i L^o neprekidno diferencijabilne na skupu V_o, neka su funkcije f^1 i L^1 neprekidno diferencijabilne na skupu V_1 i neka je funkcija ℓ neprekidno diferencijabilna na skupu W. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1,\hat{\tau})$ optimalan u slabo-jakom smislu, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i glatke funkcije $\hat{p}_o(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{\tau}]\to R^{n*}$ i $\hat{p}_1(\cdot):[\hat{\tau},\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda}\neq 0;$

$\hat{\lambda}_i\geqslant 0,\quad i=0,1,\dots,k;$

$\hat{\lambda}_i\hat{B}_i=0,\ i=1,\dots,k;$

2. $\dot{\hat{p}}_o(t)=-\hat{H}^o_x(t),\ t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[;\ \dot{\hat{p}}_1(t)=-\hat{H}^1_x(t),t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1];$

$\hat{p}_o(\hat{t}_o)=\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o},\quad \hat{p}_1(\hat{t}_1)=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1};$

$\hat{p}_1(\hat{\tau})-\hat{p}_o(\hat{\tau})=\hat{\lambda}\hat{\ell}_\xi;$

3. $\hat{H}^o_u(t)=0,\ t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[;\quad \hat{H}^1_u(t)=0,\ t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1];$

4. $\dot{\hat{H}}^o(t)=\hat{H}^o_t(t),\ t\in[\hat{t}_o,\hat{\tau}[;\ \dot{\hat{H}}^1(t)=\hat{H}^1_t(t),\ t\in]\hat{\tau},\hat{t}_1];$

$\hat{H}^o(\hat{t}_o)=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o},\quad \hat{H}^1(\hat{t}_1)=\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1};$

$\hat{H}^1(\hat{\tau})-\hat{H}^o(\hat{\tau})=-\hat{\lambda}\hat{\ell}_\tau.$

Dokaze ovih teorema nećemo izvoditi. Oni su slični dokazima teorema iz drugog paragrafa ove glave.

Problem koji je razmatran u ovom paragrafu obuhvata probleme refleksije i refrakcije iz klasičnog varijacionog računa. U teoremama 2.6.3 i 2.6.4 pojavljuju se, izmedju ostalog, i sledeća dva uslova:

$$\hat{p}_1(\hat{\tau})-\hat{p}_o(\hat{\tau}) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{\xi},$$

$$\hat{H}^1(\hat{\tau})-\hat{H}^o(\hat{\tau}) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{\tau}.$$

Iz njih se mogu izvesti neophodni uslovi ekstremuma za probleme refleksije i refrakcije koji su poznati u klasičnom varijacionom računu.

3. TEORIJA ŠATORA

3.1. RELATIVNA UNUTRAŠNJOST KONVEKSNOG SKUPA

Neka je C konveksan podskup euklidskog prostora X. Noseća ravan skupa C je najmanja ravan, u smislu inkluzije, koja ga sadrži; obeležava se sa $\mathrm{aff}C$. Relativna unutrašnjost skupa C se definiše sa

$$\mathrm{relint}\, C = \mathrm{int}_{\mathrm{aff}C} C.$$

Teorema 3.1.1. Relativna unutrašnjost skupa C je konveksan neprazan skup.

Dokaz. Konveksnost skupa $\mathrm{relint}C$ sledi iz činjenice da je unutrašnjost konveksnog skupa konveksna. Neka je $a_o \in C$ i a_1-a_o, $a_2-a_o, \dots, a_s-a_o$ maksimalni podskup linearno nezavisnih vektora skupa $\{a-a_o \mid a \in C\}$. Simpleks S sa temenima u tačkama $a_o, a_1, a_2, \dots, a_s$ je podskup od C i očigledno ima nepraznu unutrašnjost u odnosu na $\mathrm{aff}C$. Sledi da je $\mathrm{relint}C \neq \emptyset$. ∎

Posledica 3.1.2. a) $\mathrm{relint}C = \mathrm{core}_{\mathrm{aff}C} C$;

b) $\mathrm{cl}C = \mathrm{lina}C$.

Teorema 3.1.3. Neka su C_i, $i=0,1,\dots,m$, konveksni podskupovi euklidskog prostora X. Ako je

$$\bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint}C_i \neq \emptyset,$$

onda je

a) $\mathrm{aff} \bigcap_{i=o}^{m} C_i = \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{aff}C_i$;

b) $\mathrm{relint} \bigcap_{i=o}^{m} C_i = \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint}C_i$;

c) $\mathrm{cl} \bigcap_{i=o}^{m} C_i = \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{cl}C_i$.

Dokaz. Iz

$$\bigcap_{i=o}^{m} C_i \subseteq \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{aff} C_i$$

sledi da je

$$\mathrm{aff} \bigcap_{i=o}^{m} C_i \subseteq \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{aff} C_i .$$

Neka je

$$x \in \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint} C_i .$$

Neka je ℓ prava, takva da je

$$x \in \ell \subseteq \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{aff} C_i .$$

Na pravoj ℓ postoji otvorena duž d, takva da je

$$x \in d \subseteq \bigcap_{i=o}^{m} C_i .$$

Sledi da je

$$\ell \subseteq \mathrm{aff} \bigcap_{i=o}^{m} C_i , \quad x \in \mathrm{relint} \bigcap_{i=o}^{m} C_i .$$

Odavde zaključujemo da je

$$\mathrm{aff} \bigcap_{i=o}^{m} C_i \supseteq \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{aff} C_i ,$$

$$\mathrm{relint} \bigcap_{i=o}^{m} C_i \supseteq \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint} C_i .$$

Neka je

$$a \in \bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint} C_i .$$

Neka je

$$x \in \mathrm{relint} \bigcap_{i=o}^{m} C_i .$$

postoji tačka $u \in \bigcap_{i=0}^{m} C_i$, takva da je $x \in [a,u[$. Kako je $a \in \text{relint} C_i$ i $u \in C_i$ za svako $i=0,1,\ldots,m$, to je $x \in \text{relint} C_i$ za svako $i=0,1,\ldots,m$, tj.

$$x \in \bigcap_{i=0}^{m} \text{relint} C_i .$$

Sledi da je

$$\text{relint} \bigcap_{i=0}^{m} C_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{m} \text{relint} C_i .$$

Neka je

$$a \in \bigcap_{i=0}^{m} \text{relint} C_i .$$

Iz

$$x \in \text{cl} \bigcap_{i=0}^{m} C_i \iff [a,x[\subseteq \bigcap_{i=0}^{m} C_i$$

i

$$x \in \text{cl}\, C_i \iff [a,x[\in C_i$$

za svako $i=0,1,\ldots,m$, sledi da je

$$\text{cl} \bigcap_{i=0}^{m} C_i = \bigcap_{i=0}^{m} \text{cl}\, C_i . \blacksquare$$

Teorema 3.1.4. Neka su X i Y euklidski prostori, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ i C konveksan podskup od X. Tada je

a) $\text{aff} AC = A \text{aff} C$;

b) $\text{relint} AC = A \text{relint} C$.

Dokaz. Iz

$$AC \subseteq A \text{aff} C$$

sledi da je

$$\text{aff} AC \subseteq A \text{aff} C .$$

Neka je

$$x \in \mathrm{relint} C.$$

eka je q prava u Y, takva da je

$$Ax \in q \subseteq A\mathrm{aff} C.$$

ostoji prava p u X, takva da je $Ap=q$ i da je

$$x \in p \subseteq \mathrm{aff} C.$$

a pravoj p postoji otvorena duž d, takva da je

$$x \in d \subseteq C.$$

d je otvorena duž na pravoj q i

$$Ax \in Ad \subseteq AC.$$

ledi da je

$$q \subseteq \mathrm{aff} AC, \; Ax \in \mathrm{relint} AC.$$

Odavde zaključujemo da je

$$\mathrm{aff} AC \supseteq A\mathrm{aff} C,$$

$$\mathrm{relint} AC \supseteq A\mathrm{relint} C.$$

Neka je

$$a \in \mathrm{relint} C.$$

Tada je

$$b = Aa \in \mathrm{relint} AC.$$

Neka je

$$y \in \mathrm{relint} AC.$$

Postoji tačka $v \in AC$, takva da je $y \in [b,v[$. Neka je $u \in C$, $Au=v$. Kako je $A[a,u[= [b,v[$, postoji tačka $x \in [a,u[$, takva da je $Ax=y$. Kako je $a \in \mathrm{relint} C$ i $u \in C$, to je $x \in \mathrm{relint} C$, pa je

$$y = Ax \in A\mathrm{relint} C.$$

Sledi da je

$$\mathrm{relint} AC \subseteq A\mathrm{relint} C. \blacksquare$$

3.2. RAZDVOJIVOST KONVEKSNIH SKUPOVA

Neka su C_i, $i=0,1,\ldots,m$, konveksni podskupovi euklidskog rostora X. Za ove konveksne skupove ćemo reći da su razdvoji- i ako postoji hiperravan koja razdvaja jednog od njih od pre- eka preostalih. Neka su Y_i, $i=0,1,\ldots,m$, pravci nosećih ravni kupova C_i, $i=0,1,\ldots,m$.

Teorema 3.2.1. Skupovi C_i, $i=0,1,\ldots,m$, su nerazdvojivi ko i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

a) $\bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{relint} C_i \neq \emptyset$;

b) $Y_i + \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m} Y_j = X$, $i=0,1,\ldots,m$.

Dokaz. Neka postoji hiperravan H koja razdvaja skupove C_0 i $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$ i neka je zadovoljen uslov a). Kako je

$$\operatorname{relint} C_0 \cap \operatorname{relint} \bigcap_{i=1}^{m} C_i = \operatorname{relint} C_0 \cap \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{relint} C_i \neq \emptyset,$$

to je

$$C_0 \subseteq H, \qquad \bigcap_{i=1}^{m} C_i \subseteq H,$$

pa je

$$\operatorname{aff} C_0 \subseteq H, \quad \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{aff} C_j = \operatorname{aff} \bigcap_{j=1}^{m} C_j \subseteq H.$$

Sledi da je

$$Y_0 + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \neq X.$$

Neka uslov a) nije zadovoljen. Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je

$$\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{relint} C_i \neq \emptyset.$$

Neprazni konveksni skupovi $\operatorname{relint} C_0$ i $\operatorname{relint} \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ su disjunktni, pa zato postoji hiperravan H koja ih razdvaja. Hiperravan H razdvaja skupove C_o i $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$.

Neka je zadovoljen uslov a) i neka je

$$Y_o + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \neq X.$$

Postoji hiperravan H koja prolazi kroz tačku $a \in \bigcap_{i=o}^{m} C_i$ i sadrži ravni $\mathrm{aff}C_o$ i $\mathrm{aff} \bigcap_{j=1}^{m} C_j = \bigcap_{j=1}^{m} \mathrm{aff}C_j$. Hiperravan H razdvaja skupove C_o i $\bigcap_{i=1}^{m} C_i$. ∎

Teorema 3.2.2. Skupovi C_i, $i=0,1,\ldots,m$, su nerazdvojivi ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

a) $\bigcap_{i=o}^{m} \mathrm{relint}C_i \neq \emptyset$;

b) $\sum_{i=o}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = X.$

Dokaz. Dovoljno je dokazati sledeće tvrdjenje:

$$Y_i + \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = X$$

za svako $i=0,1,\ldots,m$ ako i samo ako je

$$\sum_{i=o}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = X.$$

Neka je prethodna jednakost tačna. Tada je

$$Y_o + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \supseteq \sum_{i=1}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j = \sum_{i=o}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = X.$$

Na sličan način se dokazuje da je

$$Y_i + \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j = X,$$

za $i=1,\ldots,m$.

Metodom matematičke indukcije dokažimo sledeće tvrdjenje: Ako za podprostore Y_i, $i=0,1,\ldots,m$, vektorskog prostora X važi:

$$Y_i + \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j = X,$$

$i=0,1,\ldots,m$, onda je

$$\sum_{i=o}^{m} \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j = X.$$

Tvrdjenje očigledno važi za $m=1$. Neka je $m > 1$. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za $m-1$. Posmatrajmo podprostore $Z_i=Y_o\cap Y_i$, $i=1,\ldots,m$, vektorskog prostora Y_o.

$$Z_i + \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} Z_j = Y_o\cap Y_i + \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} (Y_o\cap Y_j) = Y_o\cap Y_i + \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j =$$

$$= Y_o\cap (Y_i + \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j) = Y_o\cap X = Y_o .$$

Prema induktivnoj pretpostavci imamo da je

$$\sum_{i=1}^{m} \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} Z_j = Y_o,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m} \bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j = Y_o.$$

Odavde sledi da je

$$\sum_{i=o}^{m}\bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j = \sum_{i=1}^{m}\bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j = Y_o + \bigcap_{j=1}^{m} Y_j = X. \blacksquare$$

Teorema 3.2.3. Ako su skupovi $\bigcap_{i=o}^{k} C_i$ i $\bigcap_{i=k+1}^{m} C_i$ razdvojivi, onda su skupovi C_i, $i=0,1,\ldots,m$, razdvojivi.

Dokaz. Neka skupovi C_i, $i=0,1,\ldots,m$, nisu razdvojivi. Tada su zadovoljeni uslovi a) i b) prethodne teoreme. Kako je

$$\bigcap_{i=o}^{k} \text{relint}C_i \neq \emptyset, \qquad \bigcap_{i=k+1}^{m} \text{relint}C_i \neq \emptyset$$

to je

$$\text{relint} \bigcap_{i=o}^{k} C_i = \bigcap_{i=o}^{k} \text{relint}C_i,$$

$$\text{relint} \bigcap_{i=k+1}^{m} C_i = \bigcap_{i=k+1}^{m} \text{relint}C_i,$$

pa je

$$\text{relint} \bigcap_{i=o}^{k} C_i \cap \text{relint} \bigcap_{i=k+1}^{m} C_i = \bigcap_{i=o}^{m} \text{relint}C_i \neq \emptyset.$$

Takodje je

$$\text{aff} \bigcap_{i=o}^{k} C_i = \bigcap_{i=o}^{k} \text{aff}C_i, \quad \text{aff} \bigcap_{i=k+1}^{m} C_i = \bigcap_{i=k+1}^{m} \text{aff}C_i,$$

pa su zato $\bigcap_{i=o}^{k} Y_i$ i $\bigcap_{i=k+1}^{m} Y_i$ pravci nosećih ravni skupova $\bigcap_{i=o}^{k} C_i$ i $\bigcap_{i=k+1}^{m} C_i$. Kako je

$$\bigcap_{i=o}^{k} Y_i \supseteq \sum_{i=k+1}^{m}\bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j, \qquad \bigcap_{i=k+1}^{m} Y_i \supseteq \sum_{i=o}^{k}\bigcap_{\substack{j=o\\ j\neq i}}^{m} Y_j$$

i

$$\sum_{i=k+1}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j + \sum_{i=o}^{k} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = \sum_{i=o}^{m} \bigcap_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{m} Y_j = X,$$

to je

$$\bigcap_{i=o}^{k} Y_i + \bigcap_{i=k+1}^{m} Y_i = X.$$

Prema prethodnoj teoremi skupovi $\bigcap_{i=o}^{k} C_i$ i $\bigcap_{i=k+1}^{m} C_i$ su neraz-dvojivi. ∎

3.3. DUALNI KONUSI

Razmatraćemo samo konuse sa vrhovima u nuli. Neka je K konus u euklidskom prostoru X. Dualni konus se definiše sa

$$K^* = \{x^* \in X^* \mid (\forall x \in K)\ x^*x \geq 0\}.$$

Teorema 3.3.1. Neka su K, K_1, $K_2, \ldots, K_m$ konusi u euklidskom prostoru X.

a) K^* je zatvoren konveksan konus;

b) $K^{**} = c\,\mathrm{conv}K$;

c) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow K_1^* \supseteq K_2^*$;

d) $\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^{m} K_i^*$;

e) ako su konusi K_i, $i=1,2,\ldots,m$, zatvoreni i konveksni, onda je

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i^* .$$

Dokaz. a) K^* može da se predstavi kao presek zatvorenih poluprostora:

$$K^* = \bigcap_{x \in K} \{x^* \in X^* \mid x^*x \geqslant 0\}.$$

b) Neka je $x \in K$. Za svako $x^* \in K^*$ važi nejednakost $x^*x \geqslant 0$. Zato je $x \in K^{**}$. Sledi da je $K \subseteq K^{**}$, a odavde, na osnovu a), da je

$$\mathrm{cconv}K \subseteq K^{**}.$$

Neka $x \notin \mathrm{cconv}K$. Skupovi x i $\mathrm{cconv}K$ se mogu striktno razdvojiti. Zato postoji $x^* \in K^*$ takvo da je $x^*x < 0$. Sledi $x \notin K^{**}$. Dakle,

$$K^{**} \subseteq \mathrm{cconv}K.$$

c) Neka je $K_1 \subseteq K_2$.

$$K_1^* = \bigcap_{x \in K_1} \{x^* \in X^* \mid x^*x \geqslant 0\} \supseteq \bigcap_{x \in K_2} \{x^* \in X^* \mid x^*x \geqslant 0\} = K_2^*.$$

d)

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \bigcap_{x \in \bigcup_{i=1}^{m} K_i} \{x^* \in X^* \mid x^*x \geqslant 0\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{x \in K_i} \{x^* \in X^* \mid x^*x \geqslant 0\} = \bigcap_{i=1}^{m} K_i^* .$$

e) Neka su konusi K_i, $i=1,2,\dots,m$, konveksni i zatvoreni. Tada je

$$K_i = \mathrm{cconv}\, K_i = K_i^{**}$$

za $i=1,2,\dots,m$. Zato je

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i^{**}\right)^* = \left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i^*\right)^{**} =$$

$$= \mathrm{cconv} \bigcup_{i=1}^{m} K_i^* = \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i^* . \blacksquare$$

Primeri dualnih konusa:

1. Ako je

$$K = \{x \in X \mid x^*x \leqslant 0\},$$

gde je $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, onda je

$$K^* = \{\lambda x^* \mid \lambda \leqslant 0\}.$$

2. Ako je

$$K = \{x \in X \mid x^*x = 0\},$$

gde je $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, onda je

$$K^* = \{\lambda x^* \mid \lambda \in R\}.$$

3.4. RAZDVOJIVOST KONVEKSNIH KONUSA

Lema 3.4.1. Neka su K_i, $i=1,\ldots,m$, zatvoreni konusi u euklidskom prostoru X. Ako konus $\sum_{i=1}^{m} K_i$ nije zatvoren, onda postoje vektori $a_i \in K_i$, $i=1,\ldots,m$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$.

Dokaz. Neka

$$b \in \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i \setminus \sum_{i=1}^{m} K_i .$$

Postoje nizovi vektora $y_i^n \in K_i$, $i=1,2,\ldots,m$, takvi da je

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} y_i^n = b.$$

Neka je

$$\beta_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \| y_i^n \|.$$

Ne umanjuje opštost pretpostavka da je $\beta_n > 0$ za svako $n \in N$. Lako je pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty .$$

Neka je

$$x_i^n = \frac{1}{\beta_n} y_i^n$$

za $i=1,\dots,m$ i $n \in N$. Svaki od nizova x_i^n, $i=1,2,\dots,m$, je ograničen. Ne umanjuje opštost pretpostavka da je svaki od njih konvergentan. Neka je

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = a_i$$

za $i=1,2,\dots,m$. Kako je konus K_i zatvoren, $a_i \in K_i$ za $i=1,2,\dots,m$.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n} \sum_{i=1}^{m} y_i^n = 0. \blacksquare$$

Teorema 3.4.2. Konveksni konusi K_i, $i=0,1,\dots,m$, u euklidskom prostoru X su razdvojivi ako i samo ako postoje linearni funkcionali $x_i^* \in K_i^*$, $i=0,1,\dots,m$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je $\sum_{i=0}^{m} x_i^* = 0$.

Dokaz. Neka postoje linearni funkcinali $x_i^* \in K_i^*$, $i=0,1,\dots,m$, takvi da je $\sum_{i=0}^{m} x_i^* = 0$, i da je npr. $x_0^* \neq 0$. Za $x \in K_0$ imamo da je

$$x_0^* x \geq 0.$$

Za $x \in \bigcap_{i=1}^{m} K_i$ imamo da je

$$x_0^* x = - \sum_{i=1}^{m} x_i^* x \leq 0.$$

Sledi da hiperravan

$$\{x \in X \mid x_0^* x = 0\}$$

razdvaja konuse K_o i $\bigcap_{i=1}^{m} K_i$.

Neka su konusi K_i, $i=0,1,\dots,m$, razdvojivi. Ne umanjuje opštost pretpostavka da su konusi K_i, $i=1,\dots,m$, nerazdvojivi, i da su konusi K_o i $\bigcap_{i=1}^{m} K_i$ razdvojivi. Prema teoremi 3.2.2

$$\bigcap_{i=1}^{m} \text{relint } K_i \neq \emptyset,$$

pa je, prema teoremi 3.1.3,

$$\text{cl} \bigcap_{i=1}^{m} K_i = \bigcap_{i=1}^{m} \text{cl } K_i .$$

Kako su konusi K_o i $\bigcap_{i=1}^{m} K_i$ razdvojivi, postoji $x^* \in K_o^*$, $x^* \neq 0$, takvo da je

$$-x^* \in \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^{***} = \left(\text{cl} \bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \left(\bigcap_{i=1}^{m} \text{cl}\, K_i\right)^*$$

$$= \text{cl} \sum_{i=1}^{m} (\text{cl } K_i)^* = \text{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i^{***} = \text{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i^* .$$

Ako je konus $\sum_{i=1}^{m} K_i^*$ zatvoren, postoje linearni funkcionali $x_i^* \in K_i^*$, $i=1,2,\dots,m$, takvi da je $-x^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^*$. U tom slučaju linearni funkcionali $x_o^* = x^*$ i x_i^*, $i=1,2,\dots,m$, nisu svi jednaki nuli i zadovoljavaju uslov $\sum_{i=o}^{m} x_i^* = 0$. Ako konus $\sum_{i=1}^{m} K_i^*$ nije zatvoren, prema prethodnoj lemi postoje linearni funkcionali $x_i^* \in K_i^*$, $i=1,2,\dots,m$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 0$. U tom slučaju linearni funkcionali

$x_0^* = 0$ i x_i^*, $i = 1,\dots,m$, nisu svi jednaki nuli i važi

$$\sum_{i=0}^{m} x_i^* = 0. \blacksquare$$

3.5. ŠATORI I LOKALNI ŠATORI

Neka je X euklidski prostor, $M \subseteq X$, $a \in M$ i K konveksan konus u X. K je šator skupa M u tački a ako postoje okolina nule U i neprekidna funkcija $\varphi : K \cap U \to M$ takva da je $\varphi(0) = a$ i $\varphi'(0) = I$.

Napomena. Prilikom definisanja jakog izvoda funkcije $f: D \to Y$ u tački $a \in D$ obično se pretpostavlja da je a unutrašnja tačka skupa D. Medjutim, jak izvod se može definisati i bez te pretpostavke. U tom slučaju, teoreme 1.2.1, 1.3.1 i 1.8.1 će i dalje važiti.

Ako je konveksan konus K šator skupa M u tački a, onda postoji neprekidna funkcija $\psi : K \to M$ takva da je $\psi(0) = a$ i $\psi'(0) = I$. Neka su U okolina nule i $\varphi : K \cap U \to M$ neprekidna funkcija koja zadovoljava uslove $\varphi(0) = a$ i $\varphi'(0) = I$. Možemo pretpostaviti da je $U = B[0,r]$. Neka je funkcija $\pi : K \to K \cap U$ definisana sa

$$\pi(x) = \begin{cases} x, & x \in K \cap U \\ \dfrac{r}{\|x\|}\, x, & x \in K \setminus U \end{cases}.$$

Funkcija $\psi = \varphi \circ \pi$ zadovoljava postavljene uslove.

Neka je X euklidski prostor, $M \subseteq X$, $a \in M$ i K konveksan konus u X. K je lokalni šator skupa M u tački a ako za svaku tačku $x \in \operatorname{relint} K$ postoji šator $K_x \subseteq K$ skupa M u tački a, takav da je $x \in \operatorname{relint} K_x$ i $\operatorname{aff} K_x = \operatorname{aff} K$.

Teorema 3.5.1. Neka su X i Y euklidski prostori, $M \subseteq X$ i K lokalni šator skupa M u tački a. Dalje, neka je neprekidna funkcija $f: M \to Y$ diferencijabilna u tački a. Tada je $f'(a)K$ lokalni šator skupa $f(M)$ u tački $f(a)$.

Dokaz. Neka je

$$y \in \operatorname{relint} f'(a)K = f'(a)\operatorname{relint}K.$$

Postoji tačka $x \in \operatorname{relint}K$ takva da je $f'(a)x = y$. Neka je $K_x \subseteq K$ šator skupa M u tački a koji zadovoljava uslove $x \in \operatorname{relint}K_x$ i $\operatorname{aff}K_x = \operatorname{aff}K$; neka neprekidna funkcija $\varphi: K_x \to M$ zadovoljava uslove $\varphi(0) = a$ i $\varphi'(0) = I$. Kako je

$$y \in f'(a)\operatorname{relint}K_x = \operatorname{relint} f'(a)K_x,$$

postoje linearno nezavisni vektori $y_i \in f'(a)K_x$, $i=1,2,\ldots,m$, koji generišu konveksan konus K_y, takav da je $y \in \operatorname{relint}K_y$ i $\operatorname{aff}K_y = \operatorname{aff} f'(a)K_x = \operatorname{aff} f'(a)K$. Neka su vektori $x_i \in K_x$, $i=1,2,\ldots,m$, takvi da je $f'(a)x_i = y_i$, $i=1,2,\ldots,m$, i neka je $A: K_y \to K_x$ linearni operator definisan sa $Ay_i = x_i$, $i=1,2,\ldots,m$. Funkcija $\psi = f \circ \varphi \circ A$ preslikava K_y u $f(M)$, neprekidna je, diferencijabilna je u nuli i zadovoljava uslove $\psi(0) = f(a)$ i $\psi'(0) = I$. ∎

Teorema 3.5.2. Neka su M_i, $i=0,1,\ldots,m$, podskupovi euklidskog prostora X, $\bigcap_{i=0}^{m} M_i = \{a\}$ i K_i, $i=0,1,\ldots,m$, njihovi lokalni šatori u tački a. Ako bar jedan od konusa K_i, $i=0,1,\ldots,m$, nije ravan, onda su oni razdvojivi.

Dokaz. Pretpostavićemo da je $a = 0$. To neće umanjiti opštost dokaza.

Pretpostavimo da su konusi K_i, $i=0,1,\ldots,m$, nerazdvojivi. Na osnovu teoreme 3.2.2 i definicije lokalnog šatora zaključujemo da je dovoljno razmatrati slučaj kada su K_i šatori skupova M_i u tački 0, $i=0,1,\ldots,m$.

Neka je

$$Z = \{\underbrace{(x,x,\ldots,x)}_{m+1} \mid x \in X\},$$

$$M = M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_m,$$

$$K = K_0 \times K_1 \times \ldots \times K_m.$$

je podprostor euklidskog prostora X^{m+1}, $M \cap Z = \{0\}$. K je
onveksan konus u X^{m+1}, K nije ravan. Neka su $\varphi_i : K_i \to M_i$ ne-
rekidne funkcije koje zadovoljavaju uslove $\varphi_i(0) = 0$ i
$'_i(0) = I$. Funkcija $\varphi : K \to M$ definisana sa

$$\varphi(x_o, x_1, \ldots, x_m) = (\varphi_o(x_o), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_m(x_m))$$

e neprekidna i zadovoljava uslove $\varphi(0) = 0$ i $\varphi'(0) = I$.
ledi da je K šator skupa M u tački 0.

Pretpostavimo da su konus K i podprostor Z razdvojivi.
ostoji linearni funkcional $x^* = (x_o^*, x_1^*, \ldots, x_m^*) \in K^* \cap Z^{\perp}$,
oji je različit od nule. Linearni funkcionali $x_i^* \in K_i^*$, $i=0,1,\ldots,m$,
isu svi jednaki nili i zadovoljavaju uslov $\sum_{i=o}^{m} x_i^* = 0$.
rema teoremi 3.4.2 konusi K_i, $i=0,1,\ldots,m$, su razdvojivi, a
o je protivurečno pretpostavci. Zato su konus K i podprostor
nerazdvojivi. Prema teoremi 3.2.2 postoje tačka $z_o \in Z \cap \operatorname{relint} K$
podprostor $Y \subseteq \operatorname{aff} K$, takav da je $Y \dotplus Z = X^{m+1}$. Jasno je da
$_o \notin Y$.

Neka je $P : X^{m+1} \to Y$ operator projektovanja paralelnog pod-
rostoru Z. Neka je $B = B[0,r]$ zatvorena kugla u Y koja zado-
oljava uslov $z_o + B \subseteq K$. Dalje, neka su ε, δ i λ pozitivni broje-
i koji zadovljavaju uslove:

$$\varepsilon \leq \frac{r}{\|P\|(r + \|z_o\|)}, \quad \varepsilon < 1,$$

$$x \in K, \ \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|,$$

$$\lambda = \frac{\delta}{r + \|z_o\|}.$$

unkcija $f : B \to Y$ definisana sa

$$f(y) = y - \frac{1}{\lambda} P \varphi(\lambda(y + z_o))$$

e neprekidna. Iz

$$\|f(y)\| = \left\|\frac{1}{\lambda}P\varphi(\lambda(y+z_o)) - \frac{1}{\lambda}P(\lambda(y+z_o))\right\|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\|P\|\,\|\varphi(\lambda(y+z_o)) - \lambda(y+z_o)\|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\|P\|\,\varepsilon\lambda\,\|y+z_o\| \leq \|P\|\,\varepsilon\,(r+\|z_o\|) \leq r$$

sledi da je $f(B)\subseteq B$. Prema Brouwerovoj teoremi o nepokretnoj tački, postoji $y_o\in B$ takvo da je $f(y_o) = y_o$, tj. da je $\varphi(\lambda(y_o+z_o))\in Z$. Neka je $x_o = \varphi(\lambda(y_o+z_o))$. Iz

$$\|x_o - \lambda(y_o+z_o)\| \leq \varepsilon\,\|\lambda(y_o+z_o)\| < \|\lambda(y_o+z_o)\|$$

sledi da je $x_o \neq 0$. Kako je $x_o\in M\cap Z = \{0\}$, to je $x_o = 0$. Kontradikcija! ∎

3.6. PRIMERI LOKALNIH ŠATORA

1. Neka je $D\subseteq X$, $a\in \operatorname{int}D$ i neka funkcija $f:D\to R$ zadovoljava uslove $f(a)=0$ i $f'(a)\neq 0$. Tada je

$$K = \{x\in X \mid f'(a)x \leq 0\}$$

lokalni šator skupa

$$M = \{x\in D \mid f(x) < 0\}\cup\{a\}$$

u tački a.

Dokaz. Ne umanjuje opštost pretpostavka da je $a = 0$. Neka je $z\in\operatorname{int}K$, tj. neka je $f'(0)z < 0$. Neka je B zatvorena kugla sa centrom u tački z koja leži u intK. Funkcija $\frac{1}{\|x\|}f'(0)x$ je neprekidna na kugli B i uzima na njoj isključivo negativne vrednosti. Zato postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $f'(0)x \leq -\varepsilon\|x\|$ za svako $x\in B$. Ova nejednakost važi i na konveksnom konusu K_z koji generiše kugla B. Neka je $U\subseteq D$ okolina nule, takva da je

$$|f(x)-f'(0)x| < \varepsilon\|x\|$$

za svako $x\in U\setminus\{0\}$. Tada je za $x\in K_z\cap U$, $x\neq 0$,

$$f(x) < f'(0)x+\varepsilon\|x\| \leq -\varepsilon\|x\|+\varepsilon\|x\| = 0.$$

Sledi da je $K_z\cap U\subseteq M$. ∎

2. Neka $D \subseteq X$, $a \in \operatorname{int} D$ i neka funkcije $f_i : D \to R$, $i=0,1,\ldots$ $\ldots,m$, zadovoljavaju uslove $f_i(a) = 0$ i $f_i'(a) \neq 0$. Ako su lokalni šatori

$$K_i = \{x \in X \mid f_i'(a)x \leq 0\}$$

skupova

$$M_i = \{x \in D \mid f_i(x) < 0\} \cup \{a\}$$

u tački a, $i=0,1,\ldots,m$, nerazdvojivi, onda je $\bigcap_{i=o}^{m} K_i$ lokalni šator skupa $\bigcap_{i=o}^{m} M_i$ u tački a.

Dokaz. Prema teoremi 3.2.2 $\bigcap_{i=o}^{m} \operatorname{int} K_i \neq \emptyset$, pa je, prema teoremi 3.1.3, $\operatorname{int} \bigcap_{i=o}^{m} K_i = \bigcap_{i=o}^{m} \operatorname{int} K_i$. Ostatak dokaza je sličan dokazu prethodnog tvrdjenja. ∎

3. Neka je $D \subseteq X$, $a \in \operatorname{int} D$ i neka je funkcija $f : D \to R$ strogo diferencijabilna u tački a. Ako je $f(a) = 0$ i $f'(a) \neq 0$, onda je

$$K = \{x \in X \mid f'(a)x = 0\}$$

šator skupa

$$M = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$$

u tački a.

Dokaz. Ne umanjuje opštost pretpostavka da je $a = 0$. Takodje možemo pretpostaviti da je $X = Y \times R$ i da je $f'(0,0) = (0,1)$. Prema teoremi o implicitnoj funkciji postoje okolina V nule u Y, neprekidna funkcija $g : V \to R$ i pozitivan broj C, takvi da je

$$f(y,g(y)) = 0,$$

$$\|g(y)\| \leq C\|f(y,0)\|,$$

za svako $y \in V$. Funkcija $\varphi : V \times \{0\} \to M$ definisana sa $\varphi(y,0) = (y,g(y))$ je neprekidna i zadovoljava uslove $\varphi(0,0) = 0$ i $\varphi'(0,0) = I$. ∎

4. Neka je $D \subseteq X$, $a \in \operatorname{int} D$, neka su funkcije $f_i : D \to R$, $i=0,1,\ldots,m$, strogo diferencijabilne u tački a i neka zadovoljavaju uslove $f_i(0) = 0$ i $f_i'(0) \neq 0$. Ako su šatori

$$K_i = \{x \in X \mid f'(a)x = 0\}$$

skupova

$$M_i = \{x \in D \mid f_i(x) = 0\}$$

u tački a nerazdvojivi, onda je $\bigcap_{i=0}^{m} K_i$ šator skupa $\bigcap_{i=0}^{m} M_i$ u tački a.

Dokaz. Ne umanjuje opštost pretpostavka da je $a = 0$. Na osnovu teoreme 3.4.2 zaključujemo da su $f_i'(0)$, $i=0,1,\ldots,m$, linearno nezavisni. Stoga možemo pretpostaviti da je $X=Y\times R^{m+1}$ i da je $f'(0,0) = (0,I)$. Ostatak dokaza je sličan dokazu prethodnog tvrdjenja. ∎

5. Neka je $D \subseteq X$, $a \in \operatorname{int} D$, neka su funkcije $f_i : D \to R$, $i=0,1,\ldots,m$, diferencijabilne u tački a za $i=0,1,\ldots,k$, strogo diferencijabilne u tački a za $i=k+1,\ldots,m$, i neka zadovoljavaju uslove $f_i(a)=0$ i $f_i'(a) \neq 0$. Ako su lokalni šatori

$$K_i = \{x \in X \mid f_i'(a)x \leq 0\}, \quad i=0,1,\ldots,k,$$
$$K_i = \{x \in X \mid f_i'(a)x = 0\}, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

skupova

$$M_i = \{x \in D \mid f_i(x) < 0\} \cup \{a\}, \quad i=0,1,\ldots,k,$$
$$M_i = \{x \in D \mid f_i(x) = 0\}, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

u tački a nerazdvojivi, onda je $\bigcap_{i=0}^{m} K_i$ lokalni šator skupa $\bigcap_{i=0}^{m} M_i$ u tački a.

Dokaz. Dovoljno je razmotriti slučaj $0 \leq k < m$, jer su preostali slučajevi razmatrani u primerima 2 i 4. Kao i u prethodnim dokazima, i ovde možemo pretpostaviti da je $a = 0$. Na osnovu prethodnog tvrdjenja zaključujemo da postoje okolina V nule u $\bigcap_{i=k+1}^{m} K_i$ i neprekidna funkcija $\varphi : V \to \bigcap_{i=k+1}^{m} M_i$ koja zadovoljava uslove $\varphi(0)=0$ i $\varphi'(0)=I$. Neka je $z \in \operatorname{relint} \bigcap_{i=o}^{m} K_i = \bigcap_{i=o}^{m} \operatorname{relint} K_i$. Ne umanjuje opštost pretpostavka da $z \in V$. Neka je B zatvorena kugla sa centrom u z koja leži u $V \cap \bigcap_{i=o}^{k} \operatorname{int} K_i$ i neka je K_z konveksan konus generisan ovom kuglom. Funkcije $\frac{1}{\|x\|} f_i'(0)x$, $i=0,1,\dots,k$, su neprekidne na kugli B i na njoj uzimaju isključivo negativne vrednosti. Zato postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $f_i'(0)x \leq -\varepsilon\|x\|$, $i=0,1,\dots,k$, za svako $x \in K_z$. Neka je $U \subseteq V$ okolina nule, takva da je

$$|f_i(\varphi(x))-f_i'(0)x| < \varepsilon\|x\| ,$$

$i=0,1,\dots,k$, $x \in U \setminus \{0\}$. Tada je za $x \in K_z \cap U$, $x \neq 0$,

$$f_i(\varphi(x)) < f_i'(0)x + \varepsilon\|x\| \leq -\varepsilon\|x\| + \varepsilon\|x\| = 0,$$

$i=0,1,\dots,k$. Sledi da je $\varphi(x) \in \bigcap_{i=o}^{m} M_i$ za svako $x \in K_z \cap U$. ∎

4. NEOPHODNI USLOVI EKSTREMUMA U OPTIMALNOM UPRAVLJANJU

4.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Neka je E merljiv podskup realne prave, U topološki prostor i $u(\cdot)$ funkcija koja preslikava E u U. Funkcija $u(\cdot)$ je ograničena ako je skup $u(E)$ sadržan u nekom kompaktnom podskupu C topološkog prostora U. Funkcija $u(\cdot)$ je merljiva ukoliko postoji niz merljivih podskupva E_n skupa E, takav da je $m(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=$ $=0$ i da je funkcija $u(\cdot)$ neprekidna na svakom od skupova E_n.

Ako je $U\subseteq R^r$, prethodna definicija merljivosti funkcije $u(\cdot)$ ekvivalentna je sa klasičnom. Neka je funkcija $u(\cdot)$ merljiva u prethodnom smislu. Kako je

$$u^{-1}([a,+\infty[)=(u^{-1}([a,+\infty[)\cap(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(u^{-1}([a,+\infty[\cap E_n)),$$

skup $u^{-1}([a,+\infty[)$ je merljiv za svako $a\in R$, pa je funkcija $u(\cdot)$ merljiva u klasičnom smislu. Ako je funkcija $u(\cdot)$ merljiva u klasičnom smislu, prema Luzinovoj teoremi, za svako $n\in N$ postoji merljiv skup $E_n\subseteq E$, takav da je $m(E\setminus E_n)<\frac{1}{n}$ i da je funkcija $u(\cdot)$ neprekidna na E_n. Sledi da je funkcija $u(\cdot)$ merljiva u novom smislu.

Funkcija $u(\cdot)$ je aproksimativno neprekidna u tački $\tau\in E$ ako je za svaku okolinu V tačke $u(\tau)$

$$\lim_{\substack{t'\to\tau_-\\ t''\to\tau_+}}\frac{m(u^{-1}(V)\cap[t',t''])}{t''-t'}=1.$$

Neka je funkcija $u(\cdot)$ merljiva. Ako je $\tau\in E_n$ tačka zgušnjavanja skupa E_n, onda je funkcija $u(\cdot)$ aproksimativno neprekidna u tački τ. Kako je skoro svaka tačka Skupa E_n njegova tačka zgušnjavanja, funkcija $u(\cdot)$ je aproksimatvno neprekidna u skoro svakoj tački skupa E.

Neka je G otvoren skup u $R\times R^n$ i U topološki prostor. Dalje, neka je funkcija $f(t,x,u):G\times U\to R^n$ neprekidna i neprekidno diferencijabilna po promenljivoj x i neka je funkcija $u(\cdot):R\to U$ ograničena i merljiva. Apsolutno neprekidna funkcija $x(\cdot)$ koja preslikava interval I u prostor R^n je rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{x} = f(t,x,u(t))$$

ako je

a) $(t,x(t))\in G$ za svako $t\in I$,

b) $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ za skoro svako $t\in I$.

Teorema 4.1.1. Neka je $(\tau,\xi)\in G$. Postoji rešenje $x(\cdot):[\tau-\delta,\ \tau+\delta]\to R^n$ $(\delta>0)$ posmatrane diferencijalne jednačine koje zadovoljava uslov $x(\tau) = \xi$.

Dokaz. Neka je $W\subseteq G$ kompaktna okolina tačke (τ,ξ). Funkcije f i f_x su ograničene na skupu $W\times u(R)$; zato postoji $M>0$, takvo da je

$$|f(t,x,u(t))|,\ |f_x(t,x,u(t))| \leq M$$

za svako $(t,x)\in W$. Postoje $\delta,\varepsilon>0$, takvi da je $B[\tau,\delta]\times B[\xi,\varepsilon]\subseteq W$ i $\delta<\frac{\varepsilon}{M},\ \frac{1}{M}$. Metrički prostor

$$X = C(B[\tau,\delta],B[\xi,\varepsilon])$$

je kompletan. Neka je operator $Q:X\to X$ definisan sa

$$Q(x(\cdot))(t) = \xi + \int_\tau^t f(s,x(s),u(s))ds.$$

Da $Q(x(\cdot))\in X$ sledi iz

$$\|Q(x(\cdot))(t)-\xi\| \leq \left|\int_\tau^t \|f(s,x(s),u(s))\|ds\right| \leq M\delta < \varepsilon.$$

eka $x(\cdot),y(\cdot) \in X$. Iz

$$\|Q(x(\cdot))(t)-Q(y(\cdot))(t)\| \leq \left|\int_\tau^t \|f(s,x(s),u(s))-\right.$$
$$\left.-f(s,y(s),u(s))\|ds\right|$$
$$\leq \left|\int_\tau^t M\|x(s)-y(s)\|ds\right| \leq M\delta d(x(\cdot),y(\cdot))$$

ledi da je

$$d(Q(x(\cdot)),Q(y(\cdot))) \leq M\delta d(x(\cdot),y(\cdot)).$$

akle, Q je kontrakcija. Nepokretna tačka $x(\cdot) \in X$ operatora Q e rešenje posmatrane diferencijalne jednačine koje zadovoljava slov $x(\tau) = \xi$. ∎

Teorema 4.1.2. Neka su $x(\cdot),y(\cdot):I\to R^n$ dva rešenja posmatrae diferencijalne jednačine. Ako je $x(\tau)=y(\tau)$ za neko $\tau\in I$, onda e $x(t) = y(t)$ za svako $t \in I$.

Dokaz. Pretpostavimo da je skup $\{t \in I \mid x(t) \neq y(t)\}$ nepraan. Možemo pretpostaviti da tačka τ pripada njegovom rubu. Neka e $\xi = x(\tau) = y(\tau)$. Dalje, neka su W,M,δ,ε, X i Q uvedeni kao u rethodnom dokazu. Ako je δ dovoljno malo, $x(t),y(t) \in B[\xi,\varepsilon]$ za vako $t \in B[\tau,\delta] \cap I$. Kako kontrakcija Q metričkog prostora Xože imati najviše jednu nepokretnu tačku, to je $x(t) = y(t)$ za vako $t \in B[\tau,\delta] \cap I$. Kontradikcija! ∎

Neka je $(\tau,\xi) \in G$. Prema teoremi 4.1.1, postoji bar jedno ešenje posmatrane diferencijalne jednačine koje zadovoljava usov $x(\tau) = \xi$, a prema teoremi 4.1.2, ona se mogu kombinovati. eka je preslikavanje $t\to x(t,\tau,\xi)$ kombinovana funkcija familije akvih rešenja, a $S(\tau,\xi)$ njen domen. Očigledno je $S(\tau,\xi)$ otvoren nterval a preslikavanje $t\to x(t,\tau,\xi)$ ovog intervala u R^n rešenje osmatrane diferencijalne jednačine. Neka je

$$S = \{(t,\tau,\xi) \in R\times G \mid t \in S(\tau,\xi)\}.$$

Funkciju $x(t,\tau,\xi)$ možemo razmatrati kao preslikavanje skupa S u prostor R^n. Nazivamo je maksimalno rešenje diferencijalne jednačine.

Nadalje ćemo razmatrati svojstva maksimalnog rešenja diferencijalne jednačine. Sledeće dve činjenice se trivijalno dokazuju:

a) $x(\tau,\tau,\xi) = \xi$,

b) $x(t,\tau',x(\tau',\tau,\xi)) = x(t,\tau,\xi)$.

Lema 4.1.3. Neka su I interval, $x(\cdot):I \to R$ nenegativna, integrabilna funkcija, a i b nenegativni realni brojevi i $\tau \in I$. Ako je

$$x(t) \leqslant a\left|\int_\tau^t x(s)ds\right| + b$$

za (skoro) svako $t \in I$, onda je

$$x(t) \leqslant be^{a|t-\tau|}$$

za (skoro) svako $t \in I$.

Dokaz. Neka je

$$y(t) = a\left|\int_\tau^t x(s)ds\right| + b.$$

Tada je

$$\dot{y}(t) = ax(t)\operatorname{sgn}(t-\tau)$$

za skoro svako $t \in I$, pa je

$$\frac{d}{dt}(e^{-a|t-\tau|}y(t))\operatorname{sgn}(t-\tau) \leqslant 0$$

za skoro svako $t \in I$. Sledi da je

$$e^{-a|t-\tau|}y(t) \leqslant b$$

za svako $t \in I$. Kako je $x(t) \leqslant y(t)$ za (skoro) svako $t \in I$, to je:

$$x(t) \leqslant b\, e^{a|t-\tau|}$$

za (skoro) svako $t \in I$. ∎

Teorema 4.1.4. Neka je $(\hat{\tau},\hat{\xi}) \in G$ i I zatvoren podinterval intervala $S(\hat{\tau},\hat{\xi})$. Postoji $\rho>0$ takvo da je $I \subseteq S(\tau,\xi)$ za $(\tau,\xi) \in \in B]\hat{\tau},\rho[\,\times B]\hat{\xi},\rho[$ i $x(t,\tau,\xi)$ ravnomerno konvergira $x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})$, kada (τ,ξ) teži $(\hat{\tau},\hat{\xi})$, po $t \in I$.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $\hat{\tau}$ unutrašnja tačka intervala I. Neka je W kompaktna okolina skupa $\{(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}))\,|\,t \in I\}$. Nadalje datu diferencijalnu jednačinu razmatramo na skupu $\mathrm{int}W\times U$. Postoji $r > 0$, takvo da je

$$V = \{(t,x)\in I\times R^n \,|\, \|x-x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})\| \leqslant r\} \subseteq \mathrm{int}W.$$

Funkcije $f(t,x,u)$ i $f_x(t,x,u)$ su ograničene na skupu $W\times u(R)$. Zato postoji realan broj M, takav da je $\|f(t,x,u(t))\|$, $\|f_x(t,x,u(t))\| \leqslant M$ za $(t,x) \in W$. Postoje $\delta,\varepsilon > 0$ takvi da je $B[\tau,\delta]\times B[\xi,\delta] \subseteq W$ za svako $(\tau,\xi) \in V$ i da je $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$, $\frac{1}{M}$. Postoji $\rho > 0$ takvo da je $B]\hat{\tau},\rho[\; \subseteq I$, $\rho \leqslant \delta$ i $\rho \leqslant r/e^{Mm}(M+1)$, gde je $m=m(I)$. Neka je $\tau\in B]\hat{\tau},\rho[$ i $\xi \in B]\hat{\xi},\rho[$. Kako je $\tau \in I$ i

$$\begin{aligned}
\|\xi - x(\tau,\hat{\tau},\hat{\xi})\| &\leqslant \|\xi-\hat{\xi}\| + \|x(\tau,\hat{\tau},\hat{\xi}) - \hat{\xi}\| = \\
&= \|\xi-\hat{\xi}\| + \Big\|\int_{\hat{\tau}}^{\tau} f(s,x(s,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(s))ds\Big\| \leqslant \\
&\leqslant \|\xi-\hat{\xi}\| + M|\tau-\hat{\tau}| \leqslant (1+M)\rho \leqslant r,
\end{aligned}$$

to $(\tau,\xi) \in V$, pa zato $B[\tau,\delta] \subseteq S(\tau,\xi)$. Sledi da $\hat{\tau} \in S(\tau,\xi)$. Neka $t\in I \cap S(\tau,\xi)$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|x(t,\tau,\xi)-x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})\| &\leqslant \|\xi-\hat{\xi}\| + \Big\|\int_{\tau}^{\hat{\tau}} f(s,x(s,\tau,\xi),u(s))ds\Big\| + \\
&\quad \Big\|\int_{\hat{\tau}}^{t} (f(s,x(s,\tau,\xi),u(s))-f(s,x(s,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(s)))ds\Big\| \leqslant \\
&\leqslant \|\xi-\hat{\xi}\| + M|\tau-\hat{\tau}| + M\Big|\int_{\hat{\tau}}^{t} \|x(s,\tau,\xi)-x(s,\hat{\tau},\hat{\xi})\|ds\Big|.
\end{aligned}$$

Odavde i iz prethodne leme sledi da je

$$\|x(t,\tau,\xi)-x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})\| \leq (\|\xi-\hat{\xi}\| + M|\tau-\hat{\tau}|)e^{M|t-\hat{\tau}|}.$$

Kako je

$$(\|\xi-\hat{\xi}\| + M|\tau-\hat{\tau}|)e^{M|t-\hat{\tau}|} \leq (\rho + M\rho)e^{Mm} \leq r,$$

to je $(t,x(t,\tau,\xi)) \in V$, pa je zato $B[t,\delta] \subseteq S(\tau,\xi)$. Sledi da je $I \subseteq S(\tau,\xi)$. Drugi deo tvrdjenja sledi iz nejednakosti

$$\|x(t,\tau,\xi) - x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})\| \leq (\|\xi-\hat{\xi}\|+M|\tau-\hat{\tau}|)e^{Mm}$$

za svako $t \in I$, $\tau \in B]\hat{\tau},\rho[$ i $\xi \in B]\hat{\xi},\rho[$. ∎

Posledica prethodne teoreme je

Teorema 4.1.5. Skup S je otvoren podskup od $R\times R\times R^n$, a funkcija $x(t,\tau,\xi)$ je neprekidna.

Teorema 4.1.6. Funkcija $x(t,\tau,\xi)$ je neprekidno diferencijabilna po promenljivoj ξ na skupu S. Ako je $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) \in S$, onda je

$$x_{\xi}(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) = R(\hat{t},\hat{\tau}),$$

gde je $R(t,\tau)$ rezolventa jednačine

$$\dot{x} = f_x(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}), u(t))x.$$

Dokaz. Dokazaćemo da je funkcija $x(t,\tau,\xi)$ strogo diferencijabilna po ξ u tački $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi})$ i da je

$$x_{\xi}(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) = R(\hat{t},\hat{\tau}).$$

Neka je $\sigma > 0$. Neka je I zatvoren interval koji sadrži tačke $\hat{t}$ i $\hat{\tau}$ u svojoj unutrašnjosti. Uvodimo $W,V,r,m,M,\delta,\varepsilon$ i ρ kao u dokazu teoreme 4.1.4. Još ćemo pretpostaviti da su r i ρ takvi da je

$$\| f_x(t,x,u(t))-f_x(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(t))\| \leq \frac{\sigma}{2me^{2Mm}}$$

za svako $(t,x) \in V$, $B]\hat{t},\rho[\subsetneq I$ i

$$\|R(t,\tau) - R(\hat{t},\hat{\tau})\| < \sigma/2$$

za svako $\tau \in B]\hat{\tau},\rho[$ i $t \in B]\hat{t},\rho[$. Neka $\tau \in B]\hat{\tau},\rho[$, $\xi,\xi' \in B]\hat{\xi},\rho[$. Neka je funkcija $y(\cdot):I\to R^n$ definisana sa

$$y(t) = x(t,\tau,\xi)-x(t,\tau,\xi')-R(t,\tau)(\xi-\xi').$$

Tada je

$$\|\dot{y}(t)-f(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),\ u(t))y(t)\| =$$

$$= \|f(t,x(t,\tau,\xi),u(t))-f(t,x(t,\tau,\xi'),u(t))-$$

$$- f_x(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(t))(x(t,\tau,\xi)-x(t,\tau,\xi'))\|$$

$$\leq \frac{\sigma}{2me^{2Mm}} \|x(t,\tau,\xi)-x(t,\tau,\xi')\|$$

$$\leq \frac{\sigma}{2me^{2Mm}} e^{Mm} \|\xi-\xi'\| = \frac{\sigma}{2me^{Mm}} \|\xi-\xi'\|$$

za skoro svako $t \in I$. Sledi da je

$$\|\dot{y}(t)\| \leq M\|y(t)\| + \frac{\sigma}{2me^{Mm}}\|\xi-\xi'\|$$

za skoro svako $t \in I$. Neka je $z(t) = \|\dot{y}(t)\|$. Tada je

$$\|y(t)\| = \|\int_\tau^t \dot{y}(s)ds\| \leq |\int_\tau^t z(s)ds|$$

za svako $t \in I$, pa je

$$z(t) \leqslant M\left|\int_{\tau}^{t} z(s)ds\right| + \frac{\sigma}{2me^{Mm}}\|\xi-\xi'\|$$

za skoro svako $t \in I$. Sledi da je

$$z(t) \leqslant \frac{\sigma}{2me^{Mm}}\|\xi-\xi'\|e^{M|t-\tau|} \leqslant \frac{\sigma}{2m}\|\xi-\xi'\| \quad ,$$

za skoro svako $t \in I$, a odavde da je

$$\|y(t)\| \leqslant \frac{\sigma}{2}\|\xi-\xi'\|$$

za svako $t \in I$. Neka je $t \in B]\hat{t},\rho[$. Tada je

$$\|x(t,\tau,\xi)-x(t,\tau,\xi')-R(\hat{t},\hat{\tau})(\xi-\xi')\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y(t)\| + \|R(t,\tau)-R(\hat{t},\hat{\tau})\|\,\|\xi-\xi'\| \leqslant \sigma\|\xi-\xi'\| . \blacksquare$$

Teorema 4.1.7. Ako je $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) \in S$ i ako je funkcija $u(\cdot)$ proksimativno neprekidna u tački $\hat{t}$, funkcija $x(t,\tau,\xi)$ je diferencijabilna po t u tački $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi})$ i

$$x_t(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) = f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}), u(\hat{t})).$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Postoje $\delta > 0$ i okolina V tačke $u(\hat{t})$ takvi da je

$$\|f(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),u) - f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}),u(\hat{t}))\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za $t \in B]\hat{t},\delta[$ i $u \in V$. Takodje možemo pretpostaviti da je

$$m([\hat{t},t] \setminus u^{-1}(V)) < \frac{\varepsilon}{4M}|t-\hat{t}|$$

za svako $t \in B]\hat{t},\delta[$, gde je M takav realan broj, da je $\|f(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(t))\| \leqslant M$ za svako $t \in B[\hat{t},\delta]$. Ako je $t \in B]\hat{t},\delta[$, onda je

$$\| x(t,\hat{\tau},\hat{\xi})-x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi})-f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}),u(\hat{t}))(t-\hat{t})\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\hat{t}}^{t} \| f(s,x(s,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(s))-f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}),u(\hat{t}))\| ds \right| \leq$$

$$\int_{[\hat{t},t]\cap u^{-1}(V)} \| f(s,x(s,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(s))-f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}),u(\hat{t}))\| ds \; +$$

$$\int_{[\hat{t},t]\setminus u^{-1}(V)} \| f(s,x(s,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(s))-f(\hat{t},x(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}),u(\hat{t}))\| ds \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}| t-\hat{t} |+ 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} |t-\hat{t}| = \varepsilon |t-\hat{t}| . \blacksquare$$

Teorema 4.1.8. Ako je $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) \in S$ i ako je funkcija $u(\cdot)$ proksimativno neprekidna u tački $\hat{\tau}$, funkcija $x(t,\tau,\xi)$ je diferencijabilna po τ u tački $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi})$ i

$$x_\tau(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) = -R(\hat{t},\hat{\tau})f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau})),$$

gde je $R(t,\tau)$ rezolventa jednačine

$$\dot{x} = f_x(t,x(t,\hat{\tau},\hat{\xi}),u(t))x.$$

Dokaz. Kako je

$$x(\hat{t},\tau,\hat{\xi}) = x(\hat{t},\hat{\tau}, x(\hat{\tau},\tau,\hat{\xi})),$$

dovoljno je dokazati da je funkcija $x(t,\tau,\xi)$ diferencijabilna po τ u tački $(\hat{\tau},\hat{\tau},\hat{\xi})$ i da je

$$x_\tau(\hat{\tau},\hat{\tau},\hat{\xi}) = -f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau})).$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Postoje $\delta > 0$ i okolina V tačke $u(\hat{\tau})$ takvi da je

$$\|f(t,x(t,\tau,\hat{\xi}),u)-f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau}))\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

za $t,\tau \in B]\hat{\tau},\delta[$ i $u \in V$. Takodje možemo pretpostaviti da je

$$m([\hat{\tau},\tau] \setminus u^{-1}(V)) < \frac{\varepsilon}{4M} |\tau-\hat{\tau}|$$

za svako $\tau \in B]\hat{\tau},\delta[$, gde je M takav realan broj, da je $\| f(t,x(t,\tau,\hat{\xi}),u(t)) \| \leq M$ za svako $t, \tau \in B[\hat{\tau},\delta]$. Ako je $\tau \in B]\hat{\tau},\delta[$, onda je

$$\|x(\hat{\tau},\tau,\hat{\xi}) - \hat{\xi} + f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau}))(\tau-\hat{\tau})\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\hat{\tau}}^{\tau} \|f(t,x(t,\tau,\hat{\xi}),u(t)) - f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau}))\| dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{[\hat{\tau},\tau]\cap u^{-1}(V)} \|f(t,x(t,\tau,\hat{\xi}),u(t)) - f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau}))\| dt \quad +$$

$$+ \int_{[\hat{\tau},\tau]\setminus u^{-1}(V)} \|f(t,x(t,\tau,\hat{\xi}),u(t)) - f(\hat{\tau},\hat{\xi},u(\hat{\tau}))\| dt \quad \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}|\tau-\hat{\tau}| + 2M \frac{\varepsilon}{4M} |\tau-\hat{\tau}| = \varepsilon|\tau-\hat{\tau}|. \blacksquare$$

Teorema 4.1.9. Ako je $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi}) \in S$ i ako je funkcija $u(\cdot)$ aproksimativno neprekidna u tačkama $\hat{t}$ i $\hat{\tau}$, funkcija $x(t,\tau,\xi)$ je diferencijabilna u tački $(\hat{t},\hat{\tau},\hat{\xi})$.

Dokaz. Ovo tvrdjenje sledi iz teorema 4.1.6, 4.1.7, 4.1,8 i 1.7.4 i činjenice da je

$$x(t,\tau,\xi) = x(t,\hat{\tau},x(\hat{\tau},\tau,\xi)). \blacksquare$$

4.2. KANONSKI PROBLEM OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Neka je U topološki prostor, X otvoren skup u R^n i W otvoren skup u $R^n \times R^n$. Neka je funkcija $f(x,u):X \times U \to R^n$ neprekidna i neprekidno diferencijabilna po promenljivoj x i neka je funkcija $\ell(x_o,x_1):W \to R^{m+1}$ neprekidno diferencijabilna.

Upravljanje je funkcija koja preslikava zatvoreni interval u topološki prostor U. Pod klasom dopustivih upravljanja D podrazumevamo klasu upravljanja koja zadovoljava sledeće uslove:

1. Dopustivo upravljanje je ograničeno i merljivo.

2. Deo po deo konstantno upravljanje je dopustivo.

3. Ako je upravljanje $u(t), t \in [t_o, t_1]$, dopustivo, onda je upravljanje $u(t-h)$, $t \in [t_o + h, t_1 + h]$, takodje dopustivo.

4. Ako je upravljanje $u(t)$ definisano na intervalu $[t_o, t_1]$ dopustivo, onda je njegova restrikcija na proizvoljan zatvoren podinterval intervala $[t_o, t_1]$ takodje dopustivo upravljanje.

5. Ako su restrikcije upravljanja $u(t), t \in [t_o, t_1]$, na intervale $[t_o, \tau]$ i $[\tau, t_1]$ dopustiva upravljanja, onda je ono dopustivo.

Skup procesa P je skup četvorki $(x(\cdot), u(\cdot), t_o, t_1)$ takvih da je

1. $x(\cdot): [t_o, t_1] \to X$ apsolutno neprekidna funkcija,

2. $u(\cdot): [t_o, t_1] \to U$ dopustivo upravljanje,

3. $(x(t_o), x(t_1)) \in W$.

Kanonski problem optimalnog upravljanja je sledeći ekstremalni problem na skupu P:

$$\ell_o(x(t_o), x(t_1)) \to \inf;$$

$$\ell_i(x(t_o), x(t_1)) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$\ell_i(x(t_o), x(t_1)) = 0, \quad i = k+1, \ldots, m,$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \text{za s.s. } t \in [t_o, t_1].$$

Proces $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_o, \hat{t}_1) \in P$ je optimalan ako je dopustiv i ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je

$$\ell_o(x(t_o), x(t_1)) \geqslant \ell_o(\hat{x}(\hat{t}_o), \hat{x}(\hat{t}_1))$$

za svaki dopustivi proces $(x(\cdot), u(\cdot), t_o, t_1) \in P$, koji zadovoljava uslove

$$|t_0 - \hat{t}_0|,\ |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon;$$

$$\| x(t) - \hat{x}(t) \| < \varepsilon$$

za svako $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \cap [t_0, t_1]$.

Teorema 4.2.1. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ optimalan, postoje $\hat{\lambda} \in R^{m+1*}$ i apsolutno neprekidna funkcija $\hat{p}(\cdot): [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0$;

   $\hat{\lambda}_i \geq 0$, $i=0,1,\dots,k$;

   $\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i = 0$, $i=1,\dots,k$;

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t)\hat{f}_x(t)$ za s.s. $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$;

   $\hat{p}(\hat{t}_0) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_0}$, $\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}$;

3. $\hat{p}(t)\hat{f}(t) = \sup\limits_{u \in U} \hat{p}(t) f(\hat{x}(t), u)$ za s.s. $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$;

4. $\sup\limits_{u \in U} \hat{p}(t) f(\hat{x}(t), u) = 0$ za svako $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

4.3. IGLIČASTA VARIJACIJA

Neka je $\hat{u}(\cdot): [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to U$ dopustivo upravljanje. Produžimo ga na celu realnu pravu sa $\hat{u}(t) = \hat{u}(\hat{t}_0)$ za $t < \hat{t}_0$ i $\hat{u}(t) = \hat{u}(\hat{t}_1)$ za $t > \hat{t}_1$.

Neka je T skup tačaka iz intervala $]\hat{t}_0, \hat{t}_1[$ u kojima je upravljanje $\hat{u}(\cdot)$ aproksimativno neprekidno. Dalje, neka je $\hat{\tau} \in T$ i neka su $(\tau_j, u_j) \in T \times U$, $j=1,\dots,q$. Možemo pretpostaviti da je $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_p \leq \hat{\tau} < \tau_{p+1} \leq \dots \leq \tau_q$. Neka je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ q-torka nenegativnih realnih brojeva i $\beta \in R$. Ako su $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, $|\beta|$ dovoljno mali, intervali

$$I_j = [\tau_j + \beta - (q-j)\sigma - \alpha_j,\ \tau_j + \beta - (q-j)\sigma],$$

$j=1,\dots,q$, $\sigma = \Sigma\alpha_j$, su disjunktni. Funkcija $u(\cdot):R\to U$, definisana sa

$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}(t) \;, & t \notin \cup I_j, \quad t \leqslant \hat{\tau} + \beta \\ \hat{u}(t-\beta) \;, & t \notin \cup I_j, \quad t > \hat{\tau} + \beta \\ u_j \;, & t \in I_j \end{cases}$$

naziva se igličasta varijacija upravljanja $\hat{u}(\cdot)$.

Neka je $\hat{x}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to X$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{x} = f(x,\hat{u}(t)).$$

Neka se ono može produžiti na zatvoreni interval I, $[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\subseteq \operatorname{int} I$. Neka je $\hat{x}_o = \hat{x}(\hat{t}_o)$ i $\hat{x}_1 = \hat{x}(\hat{t}_1)$.

Lema 4.3.1. a) Ako su $\|x_o-\hat{x}_o\|, \alpha_1,\dots,\alpha_q, |\beta|$ dovoljno mali, Cauchyev problem

$$\dot{x} = f(x,\hat{u}(t)), \quad x(\hat{t}_o) = x_o$$

ima rešenje na intervalu I. Obeležavamo ga $x(t,x_o,\alpha,\beta)$.

b) Ako $x_o\to\hat{x}_o$, $\alpha_1,\dots,\alpha_q\to 0_+$, $\beta\to 0$, onda $x(t,x_o,\alpha,\beta)$ konvergira $\hat{x}(t)$ ravnomerno na I.

Ova lema može da se dokaže na sličan način kao što je dokazana teorema 4.1.4.

Lema 4.3.2. Funkcija $x_1(x_o,\alpha,\beta) = x(\hat{t}_1+\beta,x_o,\alpha,\beta)$ je neprekidna u okolini tačke $(\hat{x}_o,0,0)$ i diferencijabilna je u tački $(\hat{x}_o,0,0)$. Pri tom je

$$\frac{\partial}{\partial x_o} x_1(\hat{x}_o,0,0) = R(\hat{t}_1,\hat{t}_o),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} x_1(\hat{x}_o,0,0) = R(\hat{t}_1,\tau_j)(f(\hat{x}(\tau_j),u_j) - \hat{f}(\tau_j)),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\, x_1(\hat{x}_o,0,0) = R(\hat{t}_1,\hat{\tau})\hat{f}(\hat{\tau}),$$

gde je $R(t,\tau)$ rezolventa jednačine

$$\dot{x} = f_x(\hat{x}(t),\hat{u}(t))x.$$

Dokaz. Neka je $x(t,\tau,\xi)$ maksimalno rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{x} = f(x,\hat{u}(t))$$

i neka su $x_j(t,\tau,\xi)$ maksimalna rešenja diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = f(x,u_j),$$

$j=1,\ldots,q$. Funkcija $x_1(x_o,\alpha,\beta)$ može da se predstavi kao kompozicija sledećeg niza funkcija:

$$x(\tau_1 + \beta - (q-1)\sigma - \alpha_1,\ \hat{t}_o,\ x_o)$$
$$x_1(\tau_1 + \beta - (q-1)\sigma,\ \tau_1 + \beta - (q-1)\sigma - \alpha_1,\cdot)$$
$$x(\tau_2 + \beta - (q-2)\sigma - \alpha_2,\ \tau_1 + \beta - (q-1)\sigma,\cdot)$$
$$\vdots$$
$$x_p(\tau_p + \beta - (q-p)\sigma,\tau_p + \beta - (q-p)\sigma - \alpha_p,\cdot)$$
$$x(\hat{\tau} + \beta,\ \tau_p + \beta - (q-p)\sigma,\cdot)$$
$$x(\tau_{p+1} - (q-p-1)\sigma - \alpha_{p+1},\hat{\tau},\cdot)$$
$$x_{p+1}(\tau_{p+1} - (q-p-1)\sigma,\tau_{p+1} - (q-p-1)\sigma - \alpha_{p+1},\cdot)$$
$$\vdots$$
$$x(\tau_q - \alpha_q,\ \tau_q - \sigma,\cdot)$$
$$x_q(\tau_q,\tau_q - \alpha_q,\cdot)$$
$$x(\hat{t}_1,\ \tau_q,\cdot).$$

Iz ove činjenice, na osnovu teorema 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 1.3.1 i 1.7.4, sledi da je funkcija $x_1(x_o,\alpha,\beta)$ neprekidna u okolini tačke $(\hat{x}_o,0,0)$ i da je diferencijabilna u tački $(\hat{x}_o,0,0)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_o} x_1(\hat{x}_o,0,0) = \frac{\partial}{\partial x_o} x(\hat{t}_1,\hat{t}_o,x_o)\Big|_{x_o=\hat{x}_o} =$$

$$= x_\xi(\hat{t}_1,\hat{t}_o,\hat{x}_o) = R(\hat{t}_1,\hat{t}_o),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} x_1(\hat{x}_o,0,0) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} x(\hat{t}_1,\tau_j-(q-j)\alpha_j,x_j(\tau_j-(q-j)\alpha_j,\tau_j-(q-j+1)\alpha_j,$$

$$x(\tau_j-(q-j+1)\alpha_j,\hat{t}_o,\hat{x}_o)))\Big|_{\alpha_j=0}$$

$$= -(q-j)x_\tau(\hat{t}_1,\tau_j,\hat{x}(\tau_j)) + x_\xi(\hat{t}_1,\tau_j,\hat{x}(\tau_j))\cdot$$

$$\cdot(-(q-j)f(\hat{x}(\tau_j),u_j)+(q-j+1)f(\hat{x}(\tau_j),u_j)-(q-j+1)x_\tau(\tau_j,\hat{t}_o,\hat{x}_o))$$

$$= (q-j)R(\hat{t}_1,\tau_j)\hat{f}(\tau_j)+R(\hat{t}_1,\tau_j)(f(\hat{x}(\tau_j),u_j)-(q-j+1)\hat{f}(\tau_j))$$

$$= R(\hat{t}_1,\tau_j)(f(\hat{x}(\tau_j),u_j)-\hat{f}(\tau_j)),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} x_1(\hat{x}_o,0,0) = \frac{\partial}{\partial \beta} x(\hat{t}_1,\hat{\tau},x(\hat{\tau}+\beta,\hat{t}_o,\hat{x}_o)) =$$

$$= x_\xi(\hat{t}_1,\hat{\tau},\hat{x}(\hat{\tau}))x_t(\hat{\tau},\hat{t}_o,\hat{x}_o) = R(\hat{t}_1,\hat{\tau})f(\hat{\tau}).\ \blacksquare$$

4.4. DOKAZ PRINCIPA MAKSIMUMA ZA KANONSKI PROBLEM OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Pretpostavka da je $\ell_o(\hat{x}_o,\hat{x}_1) = 0$ ne umanjuje opštost razmatranja. Ako je $\ell_o(\hat{x}_o,\hat{x}_1) \neq 0$, funkciju $\ell_o(x_o,x_1)$ možemo zameniti funkcijom $\ell_o(x_o,x_1) - \ell_o(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$. Takodje možemo pretpostaviti da su sva ograničenja aktivna, tj. da je $\ell_i(\hat{x}_o,\hat{x}_1) = 0$, $i=1,\dots,k$. Ako je $\ell_i(\hat{x}_o,\hat{x}_1) < 0$ za neko i, $1 \leq i \leq k$, možemo skup

zameniti otvorenim podskupom koji sadrži tačku $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$, na
ome je funkcija $\ell_i(x_o,x_1)$ negativna, a odgovarajuće ograniče-
je izbaciti iz razmatranja.

Ako je za neko j, $0 \leq j \leq m$, $\hat{\ell}'_j = 0$, tvrdjenje teoreme je
adovoljeno. Dovoljno je uzeti da je $\hat{\lambda}_i = 0$, $i=0,1,\ldots,m$, $i\neq j$,
$_j=1$ i $\hat{p}(t) \equiv 0$. Nadalje pretpostavljamo da je $\hat{\ell}'_i \neq 0$, $i=0,1,\ldots,m$.

Konveksni konusi

$$K_i = \{(x_o,x_1) \in R^n \times R^n \mid \hat{\ell}'_i(x_o,x_1) \leq 0\}, \quad i=0,1,\ldots,k,$$

$$K_i = \{(x_o,x_1) \in R^n \times R^n \mid \hat{\ell}'_i(x_o,x_1) = 0\}, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

u lokalni šatori skupova

$$M_o = \{(x_o,x_1) \in W \mid \ell_o(x_o,x_1) < 0\} \cup \{(\hat{x}_o,\hat{x}_1)\},$$

$$M_i = \{(x_o,x_1) \in W \mid \ell_i(x_o,x_1) \leq 0\}, \quad i=1,\ldots,k,$$

$$M_i = \{(x_o,x_1) \in W \mid \ell_i(x_o,x_1) = 0\}, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

tački $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$.

Neka je $M \subseteq W$ skup parova $(x(t_o),x(t_1))$, gde su $(x(\cdot),u(\cdot),$
$_o,t_1)$ procesi koji zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),$$

akvi da je

$$|t_o - \hat{t}_o|,\ |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon\ ;$$

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| < \varepsilon$$

a svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \cap [t_o,t_1]$.

Lema 4.4.1. Konveksan konus u $R^n \times R^n$ generisan vektorima

$$(x_o, R(\hat{t}_1,\hat{t}_o)x_o), \quad x_o \in R^n,$$
$$(0, R(\hat{t}_1,\tau_j)(f(\hat{x}(\tau_j),u_j)-\hat{f}(\tau_j))), \quad j=1,\dots,q$$
$$(0, R(\hat{t}_1,\hat{\tau})\hat{f}(\hat{\tau})), \quad (0,-R(\hat{t}_1,\hat{\tau})\hat{f}(\hat{\tau})),$$

je lokalni šator skupa M u tački $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$.

Dokaz. Prema lemi 4.3.1, postoji $\delta > 0$ takvo da funkcija $x_1(x_o,\alpha,\beta)$ preslikava $R^n \times [0,+\infty[^q \times R \cap B](\hat{x}_o,0,0),\delta[$ u M. Ista funkcija preslikava tačku $(\hat{x}_o,0,0)$ u tačku $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$. Očigledno je da je $R^n \times [0,+\infty[^q \times R$ šator skupa $R^n \times [0,+\infty[^q \times R \cap B[(\hat{x}_o,0,0),\delta]$ u tački $(\hat{x}_o,0,0)$. Linearni operator $x_1'(\hat{x}_o,0,0)$ preslikava konus $R^n \times [0,+\infty[^q \times R$ u konveksan konus opisan u formulaciji leme. Prema teoremi 3.5.1 i lemi 4.3.2 , ovaj konus je lokalni šator skupa M u tački $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$. ∎

Posledica 4.4.2. Konveksan konus K u $R^n \times R^n$ generisan vektorima

$$(x_o, R(\hat{t}_1,\hat{t}_o)x_o), \quad x_o \in R^n,$$
$$(0, R(\hat{t}_1,\tau)(f(\hat{x}(\tau),u)-\hat{f}(\tau))), \quad (\tau,u) \in T \times U,$$
$$(0, R(\hat{t}_1,\hat{\tau})f(\hat{\tau})), \quad (0,-R(\hat{t}_1,\hat{\tau})f(\hat{\tau})),$$

je lokalni šator skupa M u tački $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$.

Presek skupova M, M_i, $i=0,1,\dots,m$, sadrži samo jednu tačku: $(\hat{x}_o,\hat{x}_1)$. Konveksni konusi K, K_i, $i=0,1,\dots,m$, su njihovi lokalni šatori u toj tački. K_o nije ravan. Prema teoremi 3.5.2 , konveksni konusi K, K_i, $i=0,1,\dots,m$, su razdvojivi. Prema teoremi 3.4.2 , postoje linearni funkcionali $\hat{x}_i^* \in K_i^*$, $i=0,1,\dots,m$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je $-\sum_{i=o}^{m} \hat{x}_i^* \in K^*$. $\hat{x}_i^* = -\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i'$, $i=0,1,\dots,m$, gde je $\hat{\lambda}_i \geq 0$ za $i=0,1,\dots,k$. Vektor $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_o,\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m) \in R^{m+1^*}$ zadovoljava uslov 1.

Kako je $\hat{\lambda}\hat{\ell}' \in K^*$, to je

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} + \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} R(\hat{t}_1,\hat{t}_o) = 0,$$

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} R(\hat{t}_1,\tau)(f(\hat{x}(\tau),u) - \hat{f}(\tau)) \geqslant 0, \quad (\tau,u) \in T \times U,$$

$$\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} R(\hat{t}_1,\hat{\tau})\hat{f}(\hat{\tau}) = 0.$$

Neka je apsolutno neprekidna funkcija $\hat{p}(\cdot): [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \to R^{n^*}$ zadata sa

$$\hat{p}(t) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} R(\hat{t}_1,t).$$

Ona očigledno zadovoljava uslove

$$\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} ;$$

$$\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t)\hat{f}_x(t)$$

za skoro svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. Sem toga je

$$\hat{p}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1} R(\hat{t}_1,\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o} ,$$

pa je zadovoljen uslov 2.

Kako je

$$\hat{p}(\tau)f(\hat{x}(\tau),u) \leqslant \hat{p}(\tau)\hat{f}(\tau)$$

za svako $(\tau,u) \in T \times U$, zadovoljen je uslov 3.

Iz činjenice da je

$$\sup_{u\in U} \hat{p}(\hat{\tau})f(\hat{x}(\hat{\tau}),u) = \hat{p}(\hat{\tau})\hat{f}(\hat{\tau}) = 0$$

i sledeće leme, sledi da je zadovoljen uslov 4. ∎

Lema 4.4.3. Neka je $u(\cdot): [t_o,t_1] \to U$ ograničena merljiva funkcija i neka su $x(\cdot):[t_o,t_1]\to X$ i $p(\cdot):[t_o,t_1] \to R^{n^*}$ apsolutno neprekidne funkcije, takve da je

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$$

$$\dot{p}(t) = -p(t)f_x(x(t),u(t))$$

$$\sup_{u\in U} p(t)f(x(t),u) = p(t)f(x(t),u(t))$$

za skoro svako $t \in [t_o,t_1]$. Tada je

$$\sup_{u\in U} p(t)f(x(t),u)$$

konstantan na $[t_o,t_1]$.

Dokaz. Neka su funkcije $g(t,\tau): [t_o,t_1]^2 \to R$ i $h(t): [t_o,t_1]\to$ $\to R$ definisane sa

$$g(t,\tau) = p(t)f(x(t),u(\tau)),$$

$$h(t) = \sup_{\tau \in [t_o,t_1]} g(t,\tau).$$

Za fiksirano τ funkcija $g(t,\tau)$ je apsolutno neprekidna po t i pri tom je

$$g_t(t,\tau) = -p(t)f_x(x(t),u(t))f(x(t),u(\tau))+$$
$$+p(t)f_x(x(t),u(\tau))f(x(t),u(t))$$

za skoro svako $t \in [t_o,t_1]$. Desna strana prethodne jednakosti je ograničena funkcija dveju promenljivih. Stoga postoji realan broj L takav da je

$$|g(t,\tau) - g(t',\tau)| \leqslant L|t-t'|$$

za $t,t',\tau \in [t_o,t_1]$. Odavde sledi da je

$$|h(t) - h(t')| \leqslant L|t-t'|$$

za $t,t' \in [t_o,t_1]$. Funkcija h je apsolutno neprekidna. Neka je $\bar{t}$ tačka iz intervala $]t_o,t_1[$ u kojoj su zadovoljena sva tri uslova leme i u kojoj je funkcija h diferencijabilna. Za $t > \bar{t}$ imamo da je

$$\frac{h(t)-h(\bar{t})}{t-\bar{t}} \geqslant \frac{p(t)f(x(t),u(\bar{t}))-p(\bar{t})f(x(\bar{t}),u(\bar{t}))}{t-\bar{t}},$$

pa je

$$\dot{h}(\bar{t}) \geqslant \frac{d}{dt}\, p(t)f(x(t),u(\bar{t}))\Big|_{t=\bar{t}} = 0.$$

Na sličan način zaključujemo da je $\dot{h}(\bar{t}) \leqslant 0$. Dakle, $\dot{h}(\bar{t}) = 0$. Kako je funkcija h apsolutno neprekidna i kako joj je izvod skoro svuda jednak nuli, ona je konstantna. Neka je $h(t) \equiv C$.

Funkcija

$$M(t) = \sup_{u \in U} p(t)f(x(t),u)$$

je poluneprekidna odozdo. Kako je $M(t) \geqslant C$ za svako $t \in [t_o,t_1]$ i kako je $M(t) = C$ za skoro svako $t \in [t_o,t_1]$, to je $M(t) \equiv C$. ∎

4.5. OPŠTI PROBLEM OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Neka je G otvoren skup u $R \times R^n$, U topološki prostor i W otvoren skup u $R \times R^n \times R \times R^n$. Neka su funkcije $f(t,x,u): G \times U \to R^n$ i $L(t,x,u): G \times U \to R^{m+1}$ neprekidne i neprekidno diferencijabilne po t i x i neka je funkcija $\ell(t_o,x_o,t_1,x_1): W \to R^{m+1}$ neprekidno diferencijabilna.

Neka je D klasa dopustivih upravljanja. Skup procesa P je skup četvorki $(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)$, takvih da je

1. $x(\cdot): [t_o,t_1] \to R^n$ apsolutno neprekidna funkcija,

2. $u(\cdot):[t_o,t_1] \to U$ dopustivo upravljanje,

3. $(t,x(t)) \in G$ za svako $t \in [t_o,t_1]$,

4. $(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1)) \in W$.

Bolzini funkcionalni $B_i: P \to R$, $i=0,1,\dots,m$, definišu se sa

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = \int_{t_o}^{t_1} L_i(t,x(t),u(t))dt + \ell_i(t_o,x(t_o),t_1,x(t_1)).$$

Opšti problem optimalnog upravljanja je sledeći ekstremalni problem na skupu P:

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \to \inf;$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \leq 0 \ , \quad i=1,\dots,k,$$

$$B_i(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) = 0 \ , \quad i=k+1,\dots,m,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \quad \text{za} \quad \text{s.s. } t \in [t_o,t_1].$$

Proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1) \in P$ je optimalan ako je dopustiv i ako postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je

$$B_o(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \geq B_o(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$$

za svaki dopustivi proces $(x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \in P$ koji zadovoljava uslove

$$|t_o - \hat{t}_o| \ , \ |t_1 - \hat{t}_1| < \varepsilon \ ;$$

$$\| x(t) - \hat{x}(t) \| < \varepsilon$$

za svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \cap [t_o,t_1]$.

Funkcije $H: G \times U \times R^{n^*} \times R^{m+1^*} \to R$ i $M: G \times R^{n^*} \times R^{m+1^*} \to \overline{R}$ definišu se sa

$$H(t,x,u,p,\lambda) = pf(t,x,u) - \lambda L(t,x,u),$$

$$M(t,x,p,\lambda) = \sup_{u \in U} H(t,x,u,p,\lambda).$$

Teorema 4.5.1. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1)$ optimalan, postoje $\hat{\lambda}\in R^{m+1*}$ i apsolutno neprekidna funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to R^{n*}$, takvi da je

1. $\hat{\lambda} \neq 0$;

   $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, $i=0,1,\dots,k$;

   $\hat{\lambda}_i\hat{\ell}_i = 0$, $i=1,\dots,k$;

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{H}_x(t)$ za s.s. $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$;

   $\hat{p}(\hat{t}_o) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_o}$, $\hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{x_1}$;

3. $\hat{H}(t) = \hat{M}(t)$ za s.s. $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$;

4. $\hat{M}(t)$ je apsolutno neprekidna funkcija;

   $\dot{\hat{M}}(t) = \hat{H}_t(t)$ za s.s. $t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$;

   $\hat{M}(\hat{t}_o) = -\hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_o}$, $\hat{M}(\hat{t}_1) = \hat{\lambda}\hat{\ell}_{t_1}$.

Dokaz. Slično kao u varijacionom računu i ovde je dovoljno izvesti dokaz za slučaj L=0.

Neka je I zatvoren interval koji sadrži $[\hat{t}_o,\hat{t}_1]$ u svojoj unutrašnjosti, na koji se funkcije $\hat{u}(\cdot)$ i $\hat{x}(\cdot)$ mogu produžiti tako da diferencijalna veza

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))$$

bude zadovoljena za skoro svako $t\in I$. Neka je Δ skup petorki $(z(\cdot),x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1)$, takvih da je

1. $z(\cdot):I\to R$ apsolutno neprekidna funkcija,
2. $x(\cdot):I\to R^n$ apsolutno neprekidna funkcija,
3. $u(\cdot):I\to U$ dopustivo upravljanje,
4. $t_o,t_1\in I$,

5. $(z(t),x(t)) \in G$ za svako $t \in I$,

6. $(z(t_o),x(t_o),z(t_1),x(t_1)) \in W$.

Neka je funkcija $\hat{z}(\cdot):I \to R$ definisana sa $\hat{z}(t)=t$. Može da se dokaže, na sličan način kao u dokazu teoreme 2.1.2, da je tačka $(\hat{z}(\cdot),\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot),\hat{t}_o,\hat{t}_1) \in \Delta$ rešenje ekstremalnog problema

$$\ell_o(z(t_o),x(t_o),z(t_1),x(t_1)) \to \inf;$$

$$\ell_i(z(t_o),x(t_o),z(t_1),x(t_1)) \leq 0, \quad i=1,\ldots,k,$$

$$\ell_i(z(t_o),x(t_o),z(t_1),x(t_1)) = 0, \quad i=k+1,\ldots,m,$$

$$\dot{z}(t) = 1, \quad \dot{x}(t)=f(z(t),x(t),u(t)) \text{ za s.s. } t \in I,$$

u sledećem smislu: postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$\ell_o(z(t_o),x(t_o),z(t_1),x(t_1)) \geq \ell_o(\hat{z}(\hat{t}_o),\hat{x}(\hat{t}_o),\hat{z}(\hat{t}_1),\hat{x}(\hat{t}_1))$$

za svaku dopustivu tačku $(z(\cdot),x(\cdot),u(\cdot),t_o,t_1) \in \Delta$ koja zadovoljava uslove

$$|t_o - \hat{t}_o|, \ |t_1 - \hat{t}_1| < \delta;$$

$$|z(t)-\hat{z}(t)|, \ \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \delta$$

za svako $t \in I$.

Prethodni ekstremalni problem se po svojoj formi ne razlikuje od kanonskog problema optimalnog upravljanja. Razlika je u definiciji skupa na kome se on razmatra i definiciji lokalnog rešenja. Dokaz principa maksimuma za kanonski problem optimalnog upravljanja izveden je zapravo za ovako formulisan ekstremalni problem. Stoga na ovaj problem može da se primeni teorema 4.2.1. Ako se to uradi, dobiće se teorema 4.5.1. ∎

4.6. PROBLEM OPTIMALNOG UPRAVLJANJA NA NEOGRANIČENOM INTERVALU

Neka je U topološki prostor i neka su X i W otvoreni skupovi u R^n. Neka su funkcije $f(x,u):X \times U \to R^n$ i $L(x,u):X \times U \to R$ neprekidne i neprekidno diferencijabilne po promenljivoj x i neka je funkcija $\ell(x_o):W \to R^m$ neprekidno diferencijabilna.

Pod upravljanjem ovoga puta podrazumevamo funkciju koja preslikava interval (konačan ili beskonačan) u topološki prostor U. Klasu dopustivih upravljanja definišemo na sličan način kao u paragrafu 4.2. Jedina bitna razlika je u uslovu 1 koji ovde treba da glasi:

Dopustivo upravljanje je merljivo i ograničeno na svakom konačnom podintervalu svoga domena.

Skup procesa P je skup parova $(x(\cdot),u(\cdot))$, gde je

1. $x(\cdot):[0,+\infty[\to X$ apsolutno neprekidna funkcija na svakom ograničenom podintervalu intervala $[0,+\infty[$,

2. $u(\cdot): [0,+\infty[\to U$ dopustivo upravljanje,

3. $x(0) \in W$,

4. $\int_0^{+\infty} L(x(t),u(t))dt$ konvergentan integral.

Razmatraćemo sledeći ekstremalni problem na skupu P:

$$\int_0^{+\infty} L(x(t),u(t))dt \to \inf ;$$

$$\ell_i(x(0)) \leq 0, \quad i=1,\dots,k$$

$$\ell_i(x(0)) = 0, \quad i=k+1,\dots,m$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \text{ za s.s. } t \in [0,+\infty[.$$

Proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ je optimalan ako je rešenje prethodnog ekstremalnog problema.

Teorema 4.6.1. Ako je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ optimalan, postoje $\hat{\lambda}_o \in R$, $\hat{\lambda} \in R^{m*}$ i funkcija $\hat{p}(\cdot):[0,+\infty[\to R^{n*}$ koja je apsolutno neprekidna na svakom konačnom podintervalu intervala $[0,+\infty[$, takvi da je

1. $(\hat{\lambda}_o,\hat{\lambda}) \neq 0$;

   $\hat{\lambda}_i \geq 0, \quad i=0,1,\dots,k$;

   $\hat{\lambda}_i\hat{\ell}_i = 0, \quad i=1,\dots,k$;

2. $\dot{\hat{p}}(t) = -\hat{p}(t)\hat{f}_x(t)+\hat{\lambda}_o\hat{L}_x(t)$ za s.s. $t \in [0,+\infty[$;

   $\hat{p}(0) = \hat{\lambda}\hat{\ell}'$;

3. $\sup_{u\in U}(\hat{p}(t)f(\hat{x}(t),u) - \hat{\lambda}_oL(\hat{x}(t),u)) =$

   $= \hat{p}(t)\hat{f}(t)-\hat{\lambda}_o\hat{L}(t)$ za s.s. $t\in[0,+\infty[$;

4. $\sup_{u\in U}(\hat{p}(t)f(\hat{x}(t),u)-\hat{\lambda}_oL(\hat{x}(t),u)) = 0$ za svako $t\in[0,+\infty[$;

Dokaz. Možemo pretpostaviti da su sva ograničenja aktivna, tj. da je $\ell_i(\hat{x}_o) = 0$, $i=1,\dots,k$, gde je $\hat{x}_o = \hat{x}(0)$. Ako je $\ell_i(\hat{x}_o) < 0$ za neko i, $1 \leq i \leq k$, možemo skup W zameniti otvorenim podskupom koji sadrži tačku $\hat{x}_o$, na kome je funkcija $\ell_i(x_o)$ negativna, a odgovarajuće ograničenje izbaciti iz razmatranja.

Ako je za neko j, $1 \leq j \leq m$, $\hat{\ell}_j' = 0$, tvrdjenje teoreme je tačno. Dovoljno je uzeti da je $\hat{\lambda}_i = 0$, $i=0,1,\dots,m$, $i\neq j$, $\hat{\lambda}_j=1$ i $\hat{p}(t) \equiv 0$. Nadalje pretpostavljamo da je $\hat{\ell}_i \neq 0$, $i=1,\dots,m$.

Neka su konusi K_i, $i=1,\dots,m$, definisani sa

$$K_i = \{x \in R^n \mid \hat{\ell}_i'x \leq 0\}, \quad i=1,\dots,k,$$

$$K_i = \{x \in R^n \mid \hat{\ell}_i'x = 0\}, \quad i=k+1,\dots,m.$$

Ako su oni razdvojivi, prema teoremi 3.4.2 postoje linearni funkcionali $\hat{x}_i^* \in K_i^*$, $i=1,\dots,m$, takvi da je bar jedan od njih različit od nule i da je $\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i^* = 0$. $\hat{x}_i^* = -\hat{\lambda}_i \hat{\ell}_i'$, $i=1,\dots,m$, gde je $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$ za $i=1,\dots,k$. Ako je $\hat{\lambda}_o=0$, $\hat{\lambda}=(\hat{\lambda}_1,\dots,\hat{\lambda}_m) \in R^{m*}$ i $\hat{p}(t)\equiv 0$, tvrdjenje teoreme je zadovoljeno. Nadalje pretpostavljamo da konusi K_i, $i=1,\dots,m$, nisu razdvojivi.

Neka je $\mathbf{X} = R \times X$ i neka je funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x},u):\mathbf{X} \times U \to R \times R^n$ definisana sa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},u) = (L(x,u),f(x,u)),$$

gde je $\mathbf{x} = (\xi,x)$. Neka je funkcija $\hat{\mathbf{x}}(\cdot):[0,+\infty[\to \mathbf{X}$ definisana sa $\hat{\mathbf{x}}(t) = (\hat{\xi}(t),\hat{x}(t))$, gde je

$$\hat{\xi}(t) = \int_o^t L(\hat{x}(s),\hat{u}(s))ds.$$

Očigledno je

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),\hat{u}(t))$$

za skoro svako $t \in [0,+\infty[$. Označimo sa $\mathbb{R}(t,\tau)$ rezolventu jednačine

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{x}}(t)\mathbf{x}.$$

Neka je $T \subseteq]0,+\infty[$ skup tačaka u kojima je upravljanje $\hat{u}(\cdot)$ aproksimativno neprekidno; $\hat{\tau} \in T$. Neka je $\mathbf{K}$ konveksan konus u $R \times R^n$ generisan vektorima

$$\mathbf{R}(0,\tau)(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(\tau),u) - \hat{\mathbf{f}}(\tau)), \quad (\tau,u) \in T \times U,$$
$$\mathbf{R}(0,\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}), \ -\mathbf{R}(0,\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}),$$

$\mathbf{K}_i = \{0\} \times K_i$, $i=1,\dots,m$, i $\mathbf{H} =]-\infty,0] \times \{0\} \subseteq R \times R^n$.

Lema 4.6.2. $\mathbf{K} + \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i$ i $\mathbf{H}$ su razdvojivi.

Na osnovu prethodne leme postoje $\hat{\lambda}_o \in R$ i $\hat{p}_o \in R^{n*}$, takvi da je $(-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o) \in \mathbf{H}^*$, $(\hat{\lambda}_o,-\hat{p}_o) \in (\mathbf{K} + \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i)^*$ i $(-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o) \neq 0$. Iz

$(-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o) \in \mathbb{H}^*$ sledi da je $\hat{\lambda}_o \geq 0$. Iz $(\hat{\lambda}_o,-\hat{p}_o) \in (\mathbb{K} + \bigcap_{i=1}^{m} \mathbb{K}_i)^*$ sledi da je

$$-p_o \in (\bigcap_{i=1}^{m} K_i)^* = \mathrm{cl} \sum_{i=1}^{m} K_i^* = \sum_{i=1}^{m} K_i^* .$$

(Konveksni konus $\sum_{i=1}^{m} K_i^*$ je zatvoren zato što je generisan konačnim skupom vektora.) Stoga postoje $\hat{\lambda}_i \in R$, $i=1,\ldots,m$, takvi da je $\hat{\lambda}_i \geq 0$ za $i=1,\ldots,k$ i da je $\hat{p}_o = \hat{\lambda}\hat{\ell}'$, gde je $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_m) \in R^{m*}$. $\hat{\lambda}_o$ i $\hat{\lambda}$ zadovoljavaju uslov 1. Kako je $(\hat{\lambda}_o,-\hat{p}_o) \in \mathbb{K}^*$, to je

$$(-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o)\mathbb{R}(0,\tau)(\mathbb{f}(\hat{\mathbb{x}}(\tau),u)-\hat{\mathbb{f}}(\tau)) \leq 0, \quad (\tau,u) \in T \times U$$

$$(-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o)\mathbf{R}(0,\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}) = 0.$$

Neka je funkcija $\hat{\mathbb{p}}(\cdot):[0,+\infty[\,\to R \times R^{n*}$ definisana sa

$$\hat{\mathbb{p}}(t) = (-\hat{\lambda}_o,\hat{p}_o)\mathbb{R}(0,t).$$

Lako je videti da je $\hat{\mathbb{p}}(t) = (-\hat{\lambda}_o,\hat{p}(t))$, gde je $\hat{p}(\cdot)$ funkcija koja zadovoljava uslov 2.

Iz

$$\hat{\mathbb{p}}(\tau)(\mathbb{f}(\hat{\mathbb{x}}(\tau),u)-\hat{\mathbb{f}}(\tau)) \leq 0, \quad (\tau,u) \in T \times U,$$

sledi da je

$$\hat{p}(\tau)f(\hat{x}(\tau),u)-\hat{\lambda}_o L(\hat{x}(\tau),u) \leq \hat{p}(\tau)\hat{f}(\tau) - \hat{\lambda}_o\hat{L}(\tau)$$

za svako $(\tau,u) \in T \times U$. Zadovoljen je uslov 3.

Iz

$$\sup_{u \in U} \hat{\mathbb{p}}(\tau)\mathbb{f}(\hat{\mathbb{x}}(\tau),u) = \hat{\mathbb{p}}(\tau)\hat{\mathbf{f}}(\tau)$$

za svako $\tau \in T$ i

$$\sup_{u\in U} \hat{\mathbf{p}}(\hat{\tau})\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(\hat{\tau}),u) = \hat{\mathbf{p}}(\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}) = 0,$$

na osnovu leme 4.4.3 zaključujemo da je

$$\sup_{u\in U} \hat{\mathbf{p}}(t)\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t),u) = 0$$

za svako $t \in [0,+\infty[$. Sledi da je

$$\sup_{u\in U}(\hat{p}(t)f(\hat{x}(t),u) - \hat{\lambda}_o L(\hat{x}(t),u)) = 0$$

za svako $t \in [0,+\infty[$. ∎

Dokaz leme 4.6.2. Neka su $(\tau_i,u_i) \in T\times U$, $i=1,\dots,q$. Dovoljno je dokazati da su konveksan konus $\mathbf{Q}$ generisan konveksnim konusom $\bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i$ i vektorima

$$\mathbf{R}(0,\tau_i)(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(\tau_i),u_i) - \hat{\mathbf{f}}(\tau_i)), \quad i=1,\dots,q,$$

$$\mathbf{R}(0,\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}),\ -\mathbf{R}(0,\hat{\tau})\hat{\mathbf{f}}(\hat{\tau}),$$

i poluprava $\mathbf{H}$ razdvojivi.

Na isti način kao u paragrafu 4.3 formiramo igličastu varijaciju $u(\cdot)$ upravljanja $\hat{u}(\cdot)$. Neka je $\hat{t}_1$ realan broj veći od $\hat{\tau}$ i τ_i, $i=1,\dots,q$. Prema lemi 4.3.1 postoji $\delta > 0$ takvo da Cauchyev problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},u(t)),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o$$

ima rešenje na intervalu $[0,\hat{t}_1 + \beta]$, ako su $\|\mathbf{x}_o-\hat{\mathbf{x}}_o\|, \alpha_1,\dots,\alpha_q$, $|\beta| < \delta$ ($\hat{\mathbf{x}}_o = \hat{\mathbf{x}}(0)$, $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_1)$). Kao i u paragrafu 4.3, označićemo sa $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_o,\alpha,\beta)$ njegovu vrednost u tački $\hat{t}_1 + \beta$.

Neka je $\mathbf{W} = \{0\} \times W$,

$$\mathbf{X}_o = \{\mathbf{x}_o \in \mathbf{W} \mid \ell_i(x_o) \le 0,\ i=1,\dots,k;\ \ell_i(x_o)=0,\ i=k+1,\dots,m\}.$$

Označimo sa $\mathbf{M}$ skup vrednosti funkcije $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_o,\alpha,\beta)$ na skupu $\mathbf{X}_o \times [0,+\infty[^q \times R \cap B\,]\,(\hat{\mathbf{x}}_o,0,0),\ \delta\,[$. Konveksni konus $\bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{K}_i \times [0,+\infty[^q \times R$ je šator ovog skupa u tački $(\hat{\mathbf{x}}_o,0,0)$. Prema teoremi 3.5.1 i lemi 4.3.2

$$\mathbf{x}_1'(\hat{\mathbf{x}}_o,0,0)\left(\bigcap_{i=1}^{m}\mathbf{K}_i\times[0,+\infty[^{q}\times R\right) = \mathbf{R}(\hat{t}_1,0)\mathbf{Q}$$

je lokalni šator skupa $\mathbf{M}$ u tački $\hat{\mathbf{x}}_1$.

Skup $\mathbf{M}$ i poluprava $\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{H}$ imaju samo jednu zajedničku tačku: $\hat{\mathbf{x}}_1$. U protivnom postojali bi igličasta varijacija $u(\cdot)$ upravljanja $\hat{u}(\cdot)$ i apsolutno neprekidna funkcija $\mathbf{x}(\cdot):[0,\hat{t}_1 + \beta]\to \mathbf{X}$ takvi da je $\mathbf{x}(0)\in\mathbf{X}_o$, $\xi(\hat{t}_1) < \hat{\xi}(\hat{t}_1)$, $x(\hat{t}_1+\beta) = \hat{x}_1$ i

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),u(t))$$

za skoro svako $t\in[0,\hat{t}_1+\beta]$. Dodefinišimo funkciju $x(\cdot)$ na $[\hat{t}_1+\beta,+\infty[$ sa $x(t) = \hat{x}(t-\beta)$. Tada je $(x(\cdot),u(\cdot))$ dopustivi proces za koji je

$$\int_0^{+\infty} L(x(t),u(t))dt = \int_0^{\hat{t}_1+\beta} L(x(t),u(t))dt + \int_{\hat{t}_1+\beta}^{+\infty} L(x(t),u(t))dt <$$

$$< \int_0^{\hat{t}_1} L(\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt + \int_{\hat{t}_1}^{+\infty} L(\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt = \int_0^{+\infty} L(\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt.$$

Ovo je protivno pretpostavci da je proces $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ optimalan.

Prema teoremi 3.5.2 konusi $\mathbf{R}(\hat{t}_1,0)\mathbf{Q}$ i $\mathbf{H}$ su razdvojivi. Sledi da su konusi $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}(0,\hat{t}_1)\mathbf{H} = \mathbf{H}$ razdvojivi. ∎

5. LINEARNI PROBLEM OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

5.1. FORMULACIJA PROBLEMA

Pod faznim prostorom ćemo podrazumevati prostor $X = R^n$.

Neka je u faznom prostoru X dat konveksan kompaktan skup U. Zvaćemo ga oblast upravljanja. Upravljanje je funkcija koja preslikava zatvoreni interval u oblast upravljanja U. Pod klasom dopustivih upravljanja D ovde ćemo podrazumevati klasu upravljanja koja sem uslova 1-5 (v. 4.2) zadovoljava:

6. Ako su upravljanja $u'(\cdot), u''(\cdot): [t_o, t_1] \to U$ dopustiva i ako je $0<\lambda<1$, onda je upravljanje $u(\cdot): [t_o, t_1] \to U$ definisano sa

$$u(t) = (1-\lambda)u'(t) + \lambda u''(t)$$

takodje dopustivo.

Neka je A matrica reda $n \times n$ nad skupom realnih brojeva. Apsolutno neprekidna funkcija $x(\cdot): [t_o, t_1] \to X$ je trajektorija koja odgovara dopustivom upravljanju $u(\cdot): [t_o, t_1] \to U$ ako je

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$$

za skoro svako $t \in [t_o, t_1]$.

Neka su u faznom prostoru X data dva konveksna zatvorena disjunktna skupa: M_o i M_1. Zvaćemo ih inicijalni i terminalni skup. Trajektorija $x(\cdot): [t_o, t_1] \to X$ ostvaruje prevodjenje iz skupa M_o u skup M_1 ako je $x(t_o) \in M_o$ i $x(t_1) \in M_1$. Broj $t_1 - t_o$ je vreme prevodjenja.

Dopustivo upravljanje $\hat{u}(\cdot)$ i odgovarajuća trajektorija $\hat{x}(\cdot)$ su optimalni, ako trajektorija $\hat{x}(\cdot)$ ostvaruje prevodjenje iz skupa M_o u skup M_1 za najkraće vreme.

5.2. NEOPHODAN USLOV OPTIMALNOSTI

Pod sferom dostiživosti Σ_T, $T > 0$, podrazumevamo skup tačaka $x_o \in X$ za koje postoji trajektorija koja ostvaruje prevodjenje iz tačke x_o u skup M_1 za vreme jednako T. Zadovoljen je uslov stabilnosti ako je $M_1 \subseteq \Sigma_T$ za svako $T > 0$.

Lema 5.2.1. Sfera dostiživosti Σ_T je konveksna za svako $T > 0$.

Dokaz. Neka su x_o' i x_o'' dve tačke iz Σ_T i neka je x_o tačka koja pripada duži $]x_o', x_o''[$. Kako $x_o', x_o'' \in \Sigma_T$, postoje dopustiva upravljanja $u'(\cdot), u''(\cdot): [0,T] \to U$ kojima odgovaraju trajektorije $x'(\cdot), x''(\cdot): [0,T] \to X$ takve da je $x'(0) = x_o'$, $x''(0) = x_o''$ i $x'(T)$, $x''(T) \in M_1$. Kako je $x_o \in]x_o', x_o''[$, postoji realan broj λ, $0<\lambda<1$, takav da je $x_o = (1-\lambda)x_o' + \lambda x_o''$. Definišimo funkcije $u(\cdot): [0,T] \to U$ i $x(\cdot): [0,T] \to X$ sa

$$u(t) = (1-\lambda)u'(t) + \lambda u''(t),$$

$$x(t) = (1-\lambda)x'(t) + \lambda x''(t).$$

$u(\cdot)$ je dopustivo upravljanje, a $x(\cdot)$ je trajektorija koja mu odgovara. Kako je

$$x(0) = (1-\lambda)x'(0) + \lambda x''(0) = (1-\lambda)x_o' + \lambda x_o'' = x_o,$$

$$x(T) = (1-\lambda)x'(T) + \lambda x''(T),$$

ona ostvaruje prevodjenje iz tačke x_o u skup M_1. Zato $x_o \in \Sigma_T$. ∎

Lema 5.2.2. Ako je zadovoljen uslov stabilnosti, onda je $\Sigma_{T'} \subseteq \Sigma_{T''}$ za $0<T'<T''$.

Dokaz. Neka je $x_o \in \Sigma_{T'}$. Postoje dopustivo upravljanje $u'(\cdot): [0,T'] \to U$ i trajektorija $x'(\cdot): [0,T'] \to X$ koja mu odgovara, takva da je $x'(0) = x_o$ i $x'(T) \in M_1$. Kako je $x'(T') \in M_1 \subseteq \Sigma_{T''-T'}$, postoje dopustivo upravljanje $u''(\cdot): [T', T''] \to U$ i trajektorija $x''(\cdot): [T', T''] \to X$ koja mu odgovara, takva da je $x''(T') = x'(T')$ i $x''(T'') \in M_1$. Definišimo funkcije $u(\cdot): [0,T''] \to U$ i $x(\cdot): [0,T''] \to X$ sa

$$u(t) = \begin{cases} u'(t), & 0 \leq t \leq T' \\ u''(t), & T' < t \leq T'', \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x'(t), & 0 \leq t \leq T' \\ x''(t), & T' < t \leq T''. \end{cases}$$

$u(\cdot)$ je dopustivo upravljanje a $x(\cdot)$ je trajektorija koja mu odgovara. Kako je $x(0) = x'(0) = x_o$ i $x(T") = x"(T") \in M_1$, to je $x_o \in \Sigma_{T"}$. ∎

Lema 5.2.3. Neka je zadovoljen uslov stabilnosti. Ako je $x_o \in \mathrm{relint}\,\Sigma_T$, postoji trajektorija koja ostvaruje prevodjenje iz tačke x_o u skup M_1 za vreme kraće od T.

Dokaz. Postoji simpleks S_o čija temena x_i, $i=1,\dots,m+1$ ($m=\dim\mathrm{aff}\,\Sigma_T$), pripadaju Σ_T, takav da je $x_o \in \mathrm{relint}S_o$. Za svako $i=1,\dots,m+1$, postoji trajektorija $x_i(\cdot):[0,T] \to X$ koja ostvaruje prevodjenje iz tačke x_i u skup M_1. Za dovoljno malo $\tau > o$ tačke $x_i(\tau)$, $i=1,\dots,m+1$, su temena simpleksa S_τ koji sadrži tačku x_o. Temena simpleksa S_τ pripadaju sferi dostiživosti $\Sigma_{T-\tau}$. Zbog konveksnosti, sfera dostiživosti zajedno sa temenima sadrži ceo simpleks S_τ. Zato $x_o \in \Sigma_{T-\tau}$. ∎

Lema 5.2.4. Ako je $u(\cdot):[t_o,t_1] \to U$ dopustivo upravljanje, $x(\cdot):[t_o,t_1] \to X$ trajektorija koja mu odgovara i $p(\cdot):[t_o,t_1] \to X^*$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{p} = -pA,$$

onda je

$$\int_{t_o}^{t_1} p(t)u(t)dt = p(t_1)x(t_1) - p(t_o)x(t_o).$$

Dokaz. Za skoro svako $t \in [t_o,t_1]$ je

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\, p(t)x(t) &= \dot{p}(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t)\\ &= -p(t)Ax(t) + p(t)(Ax(t)+u(t))\\ &= p(t)u(t).\end{aligned}$$

Zato je

$$\int_{t_o}^{t_1} p(t)u(t) = p(t)x(t)\Big|_{t_o}^{t_1} = p(t_1)x(t_1) - p(t_o)x(t_o). \ ∎$$

Teorema 5.2.5. Neka je zadovoljen uslov stabilnosti. Ako su $\hat{u}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to U$ i $\hat{x}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X$ optimalno upravljanje i optimalna trajektorija koja mu odgovara, postoji funkcija $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X^*$, rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{p} = -pA,$$

takva da su zadovoljeni

1. uslov maksimuma:

$$\max_{u\in U} \hat{p}(t)u = \hat{p}(t)\hat{u}(t) \quad \text{za s.s. } t\in[\hat{t}_0,\hat{t}_1];$$

2. uslov transverzalnosti u levom kraju:

$$\max_{x\in M_0} \hat{p}(\hat{t}_0)x = \hat{p}(\hat{t}_0)\hat{x}(\hat{t}_0);$$

3. uslov transverzalnosti u desnom kraju:

$$\min_{x\in M_1} \hat{p}(\hat{t}_1)x = \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}(\hat{t}_1).$$

Dokaz. Neka je $T = \hat{t}_1-\hat{t}_0$, $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$ i $\hat{x}_1 = \hat{x}(\hat{t}_1)$. Tada je $\hat{x}_0\in M_0\cap \Sigma_T$. Prema lemi 5.2.3 $M_0\cap \operatorname{relint} \Sigma_T = \emptyset$. Zato postoji $\hat{p}_0\in X^*$ takvo da je

$$M_0 \subseteq \{x\in X \mid \hat{p}_0 x \leq \hat{p}_0\hat{x}_0\},$$

$$\Sigma_T \subseteq \{x\in X \mid \hat{p}_0 x \geq \hat{p}_0\hat{x}_0\}.$$

Neka je $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X^*$ rešenje diferencijalne jednačine

$$\dot{p} = -pA$$

koje zadovoljava uslov $\hat{p}(\hat{t}_0) = \hat{p}_0$.

Uslov transverzalnosti u levom kraju je očigledno zadovoljen.

Neka je $x_1\in M_1$. Neka je $x(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X$ trajektorija koja odgovara upravljanju $\hat{u}(\cdot)$ i završava se u tački x_1. Označimo sa x_0 njen početak. Prema lemi 5.2.4 imamo da je

$$\hat{p}(\hat{t}_1)x_1-\hat{p}(\hat{t}_0)x_0 = \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}_1-\hat{p}(\hat{t}_0)\hat{x}_0 = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{u}(t)dt.$$

Iz $x_o \in \Sigma_T$ sledi da je $\hat{p}(\hat{t}_o)x_o \geq \hat{p}(\hat{t}_o)\hat{x}_o$. Zato je $\hat{p}(\hat{t}_1)x_1 \geq$ $\geq \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}_1$. Sledi da je zadovoljen uslov transverzalnosti u desnom kraju.

Pretpostavimo da uslov maksimuma nije zadovoljen.

Postoji $u \in U$ takvo da je $mE > 0$, gde je

$$E = \{t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \mid \hat{p}(t)u > \hat{p}(t)\hat{u}(t)\}.$$

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\{u_k \mid k \in N\}$ svugde gust skup tačaka u U. Tada je $mE_k = 0$, gde je

$$E_k = \{t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \mid \hat{p}(t)u_k > \hat{p}(t)\hat{u}(t)\}.$$

Kako je

$$\sup_{k \in N} \hat{p}(t)u_k \leq \hat{p}(t)\hat{u}(t), \qquad t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \setminus \bigcup_{k \in N} E_k,$$

to je

$$\max_{u \in U} \hat{p}(t)u = \hat{p}(t)\hat{u}(t), \qquad t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1] \setminus \bigcup_{k \in N} E_k.$$

Kontradikcija!

Postoji interval $I \subseteq [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$ takav da je

$$\int_I (\hat{p}(t)u - \hat{p}(t)\hat{u}(t))dt > 0.$$

Pretpostavimo suprotno. Neka je

$$\int_E (\hat{p}(t)u - \hat{p}(t)\hat{u}(t))dt = \varepsilon > 0.$$

Postoji $\delta > 0$ takvo da je

$$\left|\int_\Delta (\hat{p}(t)u - \hat{p}(t)\hat{u}(t))dt\right| < \varepsilon,$$

ako je $\Delta \subseteq [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$, $m\Delta < \delta$. Kako je skup E merljiv, postoji niz disjunktnih intervala $I_k \subseteq [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$, $k \in N$, takav da je $E \subseteq \bigcup_{k \in N} I_k$, $m\Delta < \delta$, gde je $\Delta = \bigcup_{k \in N} I_k \setminus E$. Tada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} (\hat{p}(t)u - \hat{p}(t)\hat{u}(t))dt =$$

$$= \int_E (\hat{p}(t)u-\hat{p}(t)\hat{u}(t))dt + \int_\Delta (\hat{p}(t)u-\hat{p}(t)\hat{u}(t))dt > 0.$$

Kontraindikacija!

Neka je $u(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to U$ dopustivo upravljanje definisano sa

$$u(t)=\begin{cases}\hat{u}(t), & t\in[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\setminus I\\ u\quad, & t\in I\end{cases},$$

a $x(\cdot):[\hat{t}_o,\hat{t}_1]\to X$ trajektorija koja mu odgovara i završava se u tački $\hat{x}_1$. Prema lemi 5.2.4 imamo da je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{u}(t)dt = \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}_1-\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{x}_o,$$

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)u(t)dt = \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}_1-\hat{p}(\hat{t}_o)x(\hat{t}_o).$$

Sledi da je

$$\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{x}_o-\hat{p}(\hat{t}_o)x(\hat{t}_o) = \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} (\hat{p}(t)u(t)-\hat{p}(t)\hat{u}(t))dt =$$

$$= \int_I (\hat{p}(t)u-\hat{p}(t)\hat{u}(t))dt > 0.$$

S druge strane imamo da je

$$\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{x}_o-\hat{p}(\hat{t}_o)x(\hat{t}_o) \leqslant 0,$$

zato što $x(\hat{t}_o)\in\Sigma_T$. Kontradikcija!

Uslov maksimuma mora biti zadovoljen jer nas suprotna pretpostavka dovodi do kontradikcije. ∎

5.3. TEOREMA EGZISTENCIJE

Lema 5.3.1. Zatvoren konveksan skup C u euklidskom prostoru X može da se predstavi kao presek najviše prebrojive familije zatvorenih poluprostora.

Dokaz. Neka je $\{x_k | k \in N\}$ svugde gust skup tačaka u $\mathrm{aff}C \setminus C$. Prema poznatoj teoremi, za svako $k \in N$, postoji zatvoren poluprostor P_k, takav da je $C \subseteq P_k$ i da $x_k \notin P_k$. Dokažimo da je $C = (\mathrm{aff}C) \cap \bigcap_{k \in N} P_k$. Očigledno je $C \subseteq (\mathrm{aff}C) \cap \bigcap_{k \in N} P_k$. Neka $x \notin C$. Ako $x \notin \mathrm{aff}C$, jasno je da $x \notin (\mathrm{aff}C) \cap \bigcap_{k \in N} P_k$. Neka $x \in (\mathrm{aff}C) \setminus C$. Označimo sa C' konveksan omotač skupa $C \cup \{x\}$. Neka je $a \in \mathrm{relint}C$ i neka je b presek duži $]a,x[$ i $\mathrm{relbd}C$. $(\mathrm{relint}C') \setminus C$ je neprazan skup, jer sadrži duž $]b,x[$. Ako $x_k \in (\mathrm{relint}C') \setminus C$, onda $x \notin P_k$. U protivnom bi bilo $x_k \in C' \subseteq P_k$. Sledi da $x \notin (\mathrm{aff}C) \cap \bigcap_{k \in N} P_k$. Time je dokazana jednakost $C = (\mathrm{aff}C) \cap \bigcap_{k \in N} P_k$. Ostaje još da se primeti da se $\mathrm{aff}C$ može predstaviti kao presek konačno mnogo zatvorenih poluprostora. ∎

Teorema 5.3.2. Neka je klasa dopustivih upravljanja D maksimalna, tj. neka sadrži sva merljiva upravljanja, i neka je jedan od skupova M_0 i M_1 kompaktan. Ako postoje bar jedno dopustivo upravljanje i odgovarajuća trajektorija koji ostvaruju prevodjenje iz skupa M_0 u skup M_1, onda postoje optimalno upravljanje i odgovarajuća optimalna trajektorija.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je inicijalni skup M_0 kompaktan.

Neka je $\hat{T}$ infimum svih vremena prevodjenja iz skupa M_0 u skup M_1. Postoji niz dopustivih upravljanja $u_k(\cdot):[0,T_k] \to U$ i odgovarajućih trajektorija $x_k:[0,T_k] \to X$ koji ostvaruju prevodjenje iz skupa M_0 u skup M_1, tako da $T_k \to \hat{T}$. Odgovarajuće trajektorije su date sa

$$x_k(t) = \Phi(t)\left[x_k(0) + \int_0^t \Phi(\tau)^{-1} u_k(\tau)\, d\tau\right],$$

gde je $\Phi(\cdot)$ funkcionalna matrica reda $n \times n$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $\dot{\Phi} = A\Phi$ i početni uslov $\Phi(0) = I$.

Nizovi $x_k(0)$ i $x_k(T_k)$ su ograničeni. Možemo pretpostaviti da su konvergentni. Neka $x_k(0) \to \hat{x}_o$ i $x_k(T_k) \to \hat{x}_1$, $k \to \infty$. Jasno je da $\hat{x}_o \in M_o$ i $\hat{x}_1 \in M_1$.

Kako je

$$x_k(\hat{T}) - \hat{x}_1 = (x_k(\hat{T}) - x_k(T_k)) + (x_k(T_k) - \hat{x}_1) =$$

$$= [\Phi(\hat{T}) - \Phi(T_k)]\, [x_k(0) + \int_o^{\hat{T}} \Phi(\tau)^{-1} u_k(\tau)\, d\tau] -$$

$$- \Phi(T_k) \int_{\hat{T}}^{T_k} \Phi(\tau)^{-1} u_k(\tau)\, d\tau + (x_k(T_k) - \hat{x}_1),$$

to $x_k(\hat{T}) \to \hat{x}_1$, $k \to \infty$. Sledi da je $\hat{T} > 0$.

Neka su $u_{jk}(\cdot)$, $j=1,\dots,n$, komponente upravljanja $u_k(\cdot)$, $k \in N$. Ako funkcije $u_{jk}(\cdot)$, $i=1,\dots,n$, $k \in N$, razmatramo kao elemente prostora $L_2[0,\hat{T}]$, one će pripadati zatvorenoj kugli ovog prostora. Kako su zatvorene kugle u $L_2[0,\hat{T}]$ slabo kompaktne, neće umanjiti opštost pretpostavka da za svako $j=1,\dots,n$ niz $u_{jk}(\cdot)$ slabo konvergira. Neka $u_{jk}(\cdot) \rightharpoonup \hat{u}_j(\cdot)$, $k \to \infty$, $j=1,\dots,n$.

Neka je funkcija $\hat{u}(\cdot): [0,\hat{T}] \to X$ definisana sa $\hat{u}(t) = (\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_n(t))^T$. Ona je očigledno merljiva. Dokažimo da je $\hat{u}(t) \in U$ za skoro svako $t \in [0,\hat{T}]$. Kako je, prema prethodnoj lemi, skup U presek najviše prebrojive familije poluprostora, dovoljno je dokazati da je za svaki zatvoren poluprostor $P \supseteq U$ relacija $\hat{u}(t) \in P$ zadovoljena za skoro svako $t \in [0,\hat{T}]$. Poluprostor P može da se predstavi u obliku

$$P = \{u \in X \mid au \leq \alpha\},$$

gde je $a \in X^*$ i $\alpha \in R$. Neka je

$$E_\lambda = \{t \in [0,\hat{T}] \mid a\hat{u}(t) \geq \lambda\},$$

gde je $\lambda > \alpha$. Kako

$$\int_o^{\hat{T}} K_{E_\lambda}(t)\, a u_k(t)\, dt \to \int_o^{\hat{T}} K_{E_\lambda}(t)\, a\hat{u}(t)\, dt, \qquad k \to \infty,$$

i

$$\int_o^{\hat{T}} K_{E_\lambda}(t)\, a u_k(t)\, dt = \int_{E_\lambda} a u_k(t)\, dt \leq \alpha m E_\lambda, \qquad k \in N,$$

imamo da je

$$\int_0^{\hat{T}} K_{E_\lambda}(t)a\hat{u}(t)dt \leq \alpha m E_\lambda .$$

S druge strane

$$\int_0^{\hat{T}} K_{E_\lambda}(t)a\hat{u}(t)dt = \int_{E_\lambda} a\hat{u}(t)dt \geq \lambda m E_\lambda .$$

Sledi da je $mE_\lambda = 0$ za svako $\lambda > \alpha$. Kako relacija $\hat{u}(t) \in P$ ne važi samo na skupu $\bigcup_{k\in N} E_{\lambda + \frac{1}{k}}$, ona je tačna za skoro svako $t \in [0,\hat{T}]$.

Promena vrednosti funkcije na skupu mere nula ne narušava slabu konvergenciju. Zato možemo pretpostaviti da je $\hat{u}(t) \in U$ za svako $t \in [0,\hat{T}]$. Prema tome, $\hat{u}(\cdot)$ je dopustivo upravljanje.

Neka je $\hat{x}(\cdot): [0,\hat{T}] \to X$ trajektorija koja odgovara dopustivom upravljanju $\hat{u}(\cdot)$ i ima početak u tački $\hat{x}_o$. Ona se može predstaviti u obliku

$$\hat{x}(t) = \Phi(t)[\hat{x}_o + \int_0^t \Phi(\tau)^{-1}\hat{u}(\tau)d\tau].$$

Kako

$$\int_0^{\hat{T}} \Phi(\tau)^{-1}u_k(\tau)d\tau \to \int_0^{\hat{T}} \Phi(\tau)^{-1}\hat{u}(\tau)d\tau, \quad k \to \infty,$$

to $x_k(\hat{T}) \to \hat{x}(\hat{T})$, $k \to \infty$. Već smo dokazali da $x_k(\hat{T}) \to \hat{x}_1$, $k \to \infty$. Sledi da je $\hat{x}(\hat{T}) = \hat{x}_1$. ∎

5.4. TEOREMA JEDINOSTI

Lema 5.4.1. Neka je $p(\cdot):[t_o,t_1] \to X^*$ netrivijalno rešenje diferencijalne jednačine $\dot{p} = -pA$ i neka je Y podprostor faznog prostora X. Ako je $p(t)Y = 0$ za beskonačno mnogo vrednosti $t \in [t_o,t_1]$, podprostor Y pripada pravom podprostoru prostora X invarijantnom u odnosu na operator A.

Dokaz. Skup tačaka intervala $[t_o,t_1]$ za koje je $p(t)Y = 0$ ima bar jednu tačku nagomilavanja. Neka je τ jedna od njih. Neka je $y \in Y$. Zbog neprekidnosti funkcije $p(t)y$, važi jednakost $p(\tau)y = 0$. Izvod funkcije $p(t)y$ dat je sa

$$\frac{d}{dt}\, p(t)y = -p(t)Ay.$$

Kako se izmedju svake dve nule diferencijabilne funkcije nalazi bar jednа nula njenog izvoda, funkcija $p(t)Ay$ se anulira na beskonačnom podskupu intervala $[t_o,t_1]$, kojem je τ tačka nagomilavanja. Zbog neprekidnosti važi jednakost $p(\tau)Ay = 0$. Nastavljanjem ovakvog rasudjivanja možemo pokazati da je $p(\tau)A^k y = 0$ za svako $k \in N$. Kako je $p(\cdot)$ netrivijalno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine, to je $p(\tau) \neq 0$. Sledi da svi vektori oblika $A^k y$, gde je $k=0,1,2,\ldots$ i $y \in Y$, pripadaju hiperpodprostoru $H = \{x \in X \mid p(\tau)x = 0\}$. Ovi vektori generišu podprostor Z faznog prostora X koji je invarijantan u odnosu na operator A i sadrži Y. Kako je $Z \subseteq H$, to je Z pravi podprostor od X. ∎

Teorema 5.4.2. Neka postoji najviše prebrojivo mnogo hiperravni oslonca oblasti upravljanja U koje sa U imaju više od jedne zajedničke tačke i neka njihovi pravci nisu invarijantni u odnosu na operator A. Ako je $p(\cdot):[t_o,t_1] \to X^*$ netrivijalno rešenje diferencijalne jednačine $\dot{p} = -pA$, funkcija $u(\cdot):[t_o,t_1] \to U$ je uslovom

$$\max_{u \in U} p(t)u = p(t)u(t)$$

jednoznačno odredjena u svim tačkama intervala $[t_o,t_1]$, izuzev u njih najviše prebrojivo mnogo. Funkcija $u(\cdot)$ je neprekidna u svim tačkama jednoznačnosti.

Dokaz. Neka su H_k, $k=1,2,\ldots$, pravci hiperravni o kojima je bilo reči u formulaciji teoreme. Prema prethodnoj lemi, jednakost $p(t)H_k = 0$ je zadovoljena za konačno mnogo vrednosti $t \in [t_o,t_1]$. Neka je $p(\tau)H_k \neq 0$ za svako $k \in N$. Funkcija $u \to p(\tau)u$ dostiže maksimum na skupu U u jedinstvenoj tački $u(\tau)$. Neka je

> 0. Funkcija $u \to \frac{p(\tau)(u-u(\tau))}{\|u - u(\tau)\|}$ je neprekidna i negativna na ompaktnom skupu $U \setminus B]u(\tau),\varepsilon[$. Zato postoji $\mu > 0$ takvo da je $(\tau)(u-u(\tau)) \leq -\mu\|u-u(\tau)\|$ za svako $u \in U \setminus B]u(\tau),\varepsilon[$. Postoji $\delta>0$ akvo da je $\|p(t)-p(\tau)\| < \mu$ ako je $|t-\tau|<\delta$. Neka je $|t-\tau|<\delta$. a $u \in U \setminus B]u(\tau),\varepsilon[$ imamo da je

$$p(t)u = (p(t)-p(\tau))(u-u(\tau))+p(\tau)(u-u(\tau))+p(t)u(\tau)$$

$$< \mu\|u-u(\tau)\|-\mu\|u-u(\tau)\|+p(t)u(\tau) = p(t)u(\tau).$$

ako je $u(t)$ tačka u kojoj funkcija $u \to p(t)u$ dostiže maksimum a skupu U, to je $u(t) \in B]u(\tau),\varepsilon[$. ∎

Napomene: 1. Ako je broj hiperravni oslonca oblasti uravljanja U koje sa U imaju više od jedne zajedničke tačke onačan, onda je broj tačaka nejednoznačnosti takodje konačan.

2. Ako je $\dim X = 2$, onda funkcija $u(\cdot)$ u tačkama nejednoznačnosti ima prekide prve vrste.

Teorema 5.4.3. Neka postoji najviše prebrojivo mnogo hiperravni oslonca oblasti upravljanja U koje sa U imaju više od jedne zajedničke tačke i neka njihovi pravci nisu invarijantni u odnosu na operator A. Dalje, neka je zadovoljen uslov stabilnosti i neka su $\hat{u}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to U$ i $\hat{x}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X$ optimalno upravljanje i odgovarajuća optimalna trajektorija. Ako dopustivom upravljanju $u(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to U$ odgovara trajektorija koja ostvaruje prevodjenje iz skupa M_0 u skup M_1, onda je $u(t) = \hat{u}(t)$ za skoro svako $t \in [\hat{t}_0,\hat{t}_1]$.

Dokaz. Neka je $\hat{p}(\cdot):[\hat{t}_0,\hat{t}_1]\to X^*$ rešenje diferencijalne jednačine $\dot{p} = -pA$ koje zadovoljava uslove 1,2 i 3 teoreme 5.2.5. Kako je

$$\hat{p}(\hat{t}_0)\hat{x}(\hat{t}_0) \geq \hat{p}(\hat{t}_0)x(\hat{t}_0),$$

$$\hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}(\hat{t}_1) \leq \hat{p}(\hat{t}_1)x(\hat{t}_1),$$

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{u}(t)dt = \hat{p}(\hat{t}_1)\hat{x}(\hat{t}_1)-\hat{p}(\hat{t}_o)\hat{x}(\hat{t}_o),$$

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)u(t)dt = \hat{p}(\hat{t}_1)x(\hat{t}_1)-\hat{p}(\hat{t}_o)x(\hat{t}_o),$$

to je

$$\int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)\hat{u}(t)dt \leqslant \int_{\hat{t}_o}^{\hat{t}_1} \hat{p}(t)u(t)dt.$$

Sem toga je

$$\hat{p}(t)\hat{u}(t) \geqslant \hat{p}(t)u(t)$$

za skoro svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. Sledi da je

$$\max_{u \in U} \hat{p}(t)u = \hat{p}(t)\hat{u}(t) = \hat{p}(t)u(t)$$

za skoro svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je $u(t) = \hat{u}(t)$ za skoro svako $t \in [\hat{t}_o,\hat{t}_1]$. ∎

LITERATURA

[1] Алексеев В.М.,Тихомиров В.М.,Фомин С.В., Оптимальное управление, "Наука",Москва, 1979.

[2] Ахиезер Н.И., Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат,Москва, 1955.

[3] Болтянский В.Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, ДАН СССР,119,6(1958),1070-1073.

[4] Болтянский В.Г., Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического програмирования, Изв. АН СССР, сер.матем.,28,3(1968),481-514.

[5] Болтянский В.Г., Метод локальных сечений в теории оптимальных процессов, Дифференциальные уравнения, 4,12(1968), 2166-2183.

[6] Болтянский В.Г., Линейная задача оптимального управления, Дифференциальные уравнения,5,5(1969),783-799.

[7] Болтянский В.Г.,Математические методы оптимального управления, "Наука", Москва, 1969.

[8] Болтянский В.Г., Оптимальное управление дискретными системами, "Наука",Москва,1973.

[9] Болтянский В.Г., Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН,30,3(183)(1975),3-55.

[10] Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Понтрягин Л.С., К теории оптимальных процессов, ДАН СССР,110,1(1956),7-10.

[11] Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Понтрягин Л.С., Теория оптимальных процессов. Принцип максимума, Изв. АН СССР, сер.матем.,24,1(1960),3-42.

[12] Bolza O., Lectures on the Calculus of Variations, Dover, New York,1964.

[13] Valentine F.A., Convex Sets, McGraw-Hill,New York,1964.

[14] Гамкрелидзе Р.В., К теории оптимальных процессов в линейных системах, ДАН СССР,116,1(1957),9-11.

[15] Гамкрелидзе Р.В, Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах, Изв.АН СССР, сер.матем., 24,3(1960),315-356.

[16] Гирсанов И.В., Математическая теория экстремальных задач,Изд-во МГУ, 1970.

[17] Дайович С., Оптимальные процессы в линейных системах не удовлетворяющих условию невырождености, ДАН СССР,192,2 (1970),265-268.

[18] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, ДАН СССР,149,4(1963),759-762.

[19] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, ЖВМ и МФ,5,3(1965),395-453.

[20] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления, "Наука", Москва,1971.

[21] Janković V., Existence Theorems for Some Optimal Control Problems, Matematički vesnik,5(18)(33)(1981),361-366.

[22] Janković V., The Linear Control Problem, Matematički vesnik,6(19)(34)(1982),41-47.

[23] Young L.C., Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory, W.B.Saunders Co.,Philadelphia, 1969.

[24] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Теория экстремальных задач, "Наука",Москва,1974.

[25] Канторович Л.В.,Акилов Г.П., Функциональный анализ, "Наука",Москва,1977.

[26] Cartan H., Calcul différentiel. Formes différentielles, Herman,Paris,1967.

[27] Lee E.B., Marcus L., Foundations of Optimal Control Theory,John Wiley and Sons, New York,1967.

[28] Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа, "Наука",Москва,1965.

[29] Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, "Наука",Москва,1974.

[30] Понтрягин Л.С.,Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф.,Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз,Москва,1961.

[31] Rockaffelar R.T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.
[32] Tichomirov V.M., Grundprinzipien der Theorie der Extremalaufgaben, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982.
[33] Fleming W.H., Rishel R.W., Deterministic and Stochastic Control, Springer-Verlag, Berlin, 1975.