ГЕОДЕЗИЈСКЕ ЛИНИЈЕ У ХОФЕРОВОЈ МЕТРИЦИ

Јована Ђуретић

Ментор: др Дарко Милинковић

Математички факултет

децембар, 2010.

Садржај

ГЛАВА 1

Увод

Познато је да се еволуција неког физичког система описује Хамилтонијаном и да је фазни простор у класичној механици симплектичка многострукост. Мотивисани тиме да се систем без дејства спољашњих сила креће по геодезијској линији у овом раду ћемо описати особине геодезијских линија у Хоферовој метрици на простору Хамилтонових дифеоморфизама.
У другој глави су дефинисане геодезијске линије у Римановој метрици које можемо да видимо као решења система диференцијалних једначина, као криве које минимизирају растојање између тачака и као критичне тачке функционала енергије. У трећој глави је дефинисана група Хамилтонових дифеоморфизама која је придружена симплектичкој многострукости и Хоферова метрика на њој. У четвртој глави, која представља главни део рада, дефинисан је појам геодезијских линија у Хоферовој метрици. Дарбуова теорема нам даје особину симплектичких многострукости да се оне локално понашају као стандардни симплектички простор $\mathbb{R}^{2n}$. У првом делу четврте главе изложене су особине геодезијских ако радимо са групом Хамилтонових дифеоморфизама који дејствују на $\mathbb{R}^{2n}$. Најбитнији закључак овог дела јесте да регуларан пут може бити геодезијска само ако је генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном. У другом делу ове главе су дефинисане конјуговане тачке и варијација геодезијске линије. Показано је да је недегенерисана геодезијска која не садржи конјуговане тачке C^∞-локално минимална а она која садржи унутрашње конјуговане тачке може се скратити малом варијацијом. Трећи део анализира затворене многострукости чија је друга хомотопска група тривијална. Нађен је Хамилтонов дифеоморфизам на таквој многострукости који се не може спојити минималном геодезијском са идентичким пресликавањем.

Захваљујем се свом ментору др Дарку Милинковићу на великој подршци, разумевању и помоћи при писању овог рада.

ГЛАВА 2

Геодезијске линије

2.1 Дефиниција

Основни објекти у аксиоматски заснованој геометрији су тачка и права. У диференцијалној геометрији, која је повезана са аксиоматски заснованом геометријом, морамо наћи уопштење праве тако да се та дефиниција слаже са типичним моделима еуклидске и нееуклидске геометрије. Знамо да права линија представља најкраће растојање између две тачке у равни. Можемо овај критеријум најкраћег растојања искористити за дефиницију, али на проoизвољним многострукостима тај услов се тешко проверава. Уместо тога искористићемо другу особину која се лако израчунава а карактерише све праве: други извод им је једнак нули. Можемо их видети као решења диференцијалне једначине $\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$. Прву особину, као и својство праве да је критична тачка функционала енергије ћемо извести из дефиниције.

Дефиниција 2.1.1. Риманова метрика на многострукости M је поље Φ позитивно дефинитних билинеарних C^∞ квадратних форми, то јест пресликавање које свакој тачки $P \in M$ придружује позитивно дефинитну билинеарну квадратну форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ дефинисану на простору $T_P M$ која је глатка у следећем смислу: ако је $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \to U$ локална карта око тачке P тада су функције матричних елемената $g_{ij}(x) = \left\langle \varphi_{*x} \frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi_{*x} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_{\varphi(x)}$ класе C^∞ на V.

Због једноставнијих ознака тангентне векторе $\frac{\partial}{\partial x_i}$ из $T_x\mathbb{R}^n$ ћемо идентификовати са тангентним векторима $\varphi_{*x}\frac{\partial}{\partial x_i}$ из $T_{\varphi(x)}M$. Означимо са $\mathcal{X}(M)$ скуп глатких векторских поља на многострукости M.

Дефиниција 2.1.2. Повезаност на диференцијабилној многострукости M је пресликавање

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

које означавамо са $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ и које задовољава следеће особине:
(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
за свако $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ и $f, g \in C^\infty(M)$.

Кажемо да је повезаност ∇ симетрична ако за свако $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ важи $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ где је са $[X, Y]$ означен комутатор векторских поља.

Дефиниција 2.1.3. Нека је $X_t \in T_{c(t)}M$ векторско поље дуж криве $c : I \to M$. Извод поља X дуж криве c је векторско поље

$$\frac{DX_t}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_t.$$

Ако је $\frac{DX}{dt} = 0$ за свако $t \in I$ кажемо да је векторско поље X паралелно дуж криве c.

Дефиниција 2.1.4. Нека је M диференцијабилна многострукост са повезаношћу ∇ и Римановом метриком $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Кажемо да је повезаност сагласна са метриком ако за сваку глатку криву c и векторска поља X и Y која су паралелна дуж криве c важи: $\langle X, Y \rangle = Const$.

Дефиниција 2.1.5. Нека је M многострукост са повезаношћу ∇. Глатка крива $\gamma(t)$ је геодезијска у односу на повезаност ∇ ако важи $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$.
Ако је $[a, b] \subset I$ и $\gamma : I \to M$ геодезијска онда се рестрикција геодезијске γ на интервал $[a, b]$ назива сегмент геодезијске између тачака $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Пример 2.1.1. Крива у равни $(x(t), y(t)) = (t, at+b)$ је геодезијска, док крива $(x(t), y(t)) = (t^5, at^5 + b)$ није и ако обе криве имају исти носач. $\triangle$

Претходни пример показује да дефиниција геодезијских зависи од параметризације.

Знајући како се дефинише извод векторског поља дуж криве услов $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ можемо да пишемо и у облику:

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0,$$

одакле видимо да је $\frac{d\gamma}{dt}$ векторско поље паралелно дуж криве γ. Вектор $\frac{d\gamma}{dt}$ се још назива и вектор брзине криве γ.

Тврђење 2.1.1. Вектор брзине геодезијске има константну дужину.

Доказ. Нека је $\gamma : I \to M$ геодезијска и $\frac{d\gamma}{dt}$ њен вектор брзине. Тада је:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

$\square$

Користећи ову особину можемо претпоставити да је $\|\frac{d\gamma}{dt}\| = c \neq 0$ чиме искључујемо тривијалне геодезијске линије.
Дужина криве γ од неке фиксиране тачке, нпр. $\gamma(t_0)$ је дата са

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\gamma}{du}(u) \right\| du = c(t - t_0).$$

Видимо да је параметар којим је геодезијска параметризована пропорционалан дужини лука.

Дефиниција 2.1.6. Кажемо да је геодезијска нормализована ако је параметризована дужином лука, $c = 1$.

Желимо да видимо које једначине задовољавају геодезијске у локалним координатама. Нека су око тачке $\gamma(t)$ дефинисане локалне координате (U, x), $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Тада је

$$0 = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где су Γ_{ij}^k Кристофелови симболи, а представљају координате векторског поља $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ у бази $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Тако да нам решење система диференцијалних једначина другог реда

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1}$$

даје геодезијску линију.

Тврђење 2.1.2. Нека је $p \in M$ и $X_p \in T_pM$. Тада постоји јединствена геодезијска $\gamma(t)$, тако да је $\gamma(0) = p$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$.

Доказ. Егзистенција и јединственост следе директно из теореме о постојању и јединствености решења система диференцијалних једначина. □

Систем (1) који се састоји од n једначина другог реда можемо видети као систем од $2n$ једначина али првог реда, само у другом простору. Свака диференцијабилна крива $t \mapsto \gamma(t)$ на M дефинише криву $t \mapsto (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$ у простору TM. Ако је γ геодезијска, онда крива

$$t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t), \frac{dx_1}{dt}(t), \ldots, \frac{dx_n}{dt}(t))$$

на простору $TU = U \times \mathbb{R}^n$ задовољава систем једначина

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} y_i y_j, \quad k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{$1'$}$$

у локалним координатама $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ на TU. Видимо да је $(1')$ систем од $2n$ једначина првог реда и да је еквивалентан систему (1).

Лема 2.1.1. Постоји јединствено векторско поље G на TM чије су трајекторије облика $t \to (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t))$, при чему је γ геодезијска на M.

Доказ. Доказ следи из егзистенције и јединствености решења система $(1')$. □

Дефиниција 2.1.7. Векторско поље дефинисано у леми се назива геодезијско поље на TM, а његов ток се назива геодезијски ток на TM.

Ове особине можемо уопштити.

Тврђење 2.1.3. Нека је $p \in M$. Тада постоји околина V тачке p, бројеви $\delta, \varepsilon > 0$ такви да за свако $q \in V$ и $X_q \in T_qM$, где је $\|X_q\| < \varepsilon$, постоји јединствена геодезијска γ која је дефинисана на интервалу $(-\delta, \delta)$ и важи $\gamma(0) = q$ и $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_q$.

Означимо са $\gamma(t, q, X_q)$ геодезијску из претходног тврђења. Видимо да ако је $\|X_q\| < \varepsilon$ онда геодезијска $\gamma(t, q, X_q)$ постоји у интервалу $(-\delta, \delta)$ и јединствена је. У ствари, можемо повећати брзину геодезијске смањивањем интервала дефинисаности и обрнуто.

Лема 2.1.2. Хомогеност геодезијских линија Ако је геодезијска $\gamma(t, q, X_q)$ дефинисана на интервалу $(-\delta, \delta)$, тада је геодезијска $\gamma(t, q, aX_q)$, $a \in (0, +\infty)$, дефинисана на интервалу $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$, и важи
$$\gamma(t, q, aX_q) = \gamma(at, q, X_q).$$

Доказ. Дефинишимо криву $h : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \to M$, са $h(t) = \gamma(at, q, X_q)$. Видимо да важи $\frac{dh}{dt}(t) = a\frac{d\gamma}{dt}(at, q, X_q)$, па је $h(0) = q$ и $\frac{dh}{dt}(0) = aX_q$. Даље је

$$\nabla_{\frac{dh}{dt}} \frac{dh}{dt} = a^2 \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

односно, h је геодезијска брзине aX_q која у тренутку $t = 0$ пролази кроз тачку q. На основу јединствености овакве геодезијске важиће $h(t) = \gamma(t, q, aX_q)$, па је $\gamma(t, q, aX_q) = \gamma(at, q, X_q)$. □

Последица 2.1.1. За сваку тачку $p \in M$ постоји околина U тачке p, број $\varepsilon > 0$ и C^∞ пресликавање $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M$, $\mathcal{U} = \{(q, X_q) \in TM \mid q \in U,\ X_q \in T_qM,\ \|X_q\| < \varepsilon\}$ тако да је $t \to \gamma(t, q, X_q)$ јединствена геодезијска на M која задовољава услове $\gamma(0) = q$ и $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_q$.

На сличан начин можемо брзину геодезијских учинити произвољно великом у околини тачке p.

2.2 Експоненцијално пресликавање

Последица 2.1.1 нам омогућава да уведемо појам експоненцијалног пресликавања на следећи начин. Нека је $p \in M$ и $\mathcal{U} \subset TM$ отворен скуп из последице 2.1.1.

Дефиниција 2.2.1. Пресликавање $\exp : \mathcal{U} \to M$ дефинисано са

$$\exp(q, X_q) = \gamma(1, q, X_q) = \gamma(\|X_q\|, q, \frac{X_q}{\|X_q\|}), \quad (q, X_q) \in \mathcal{U},$$

се назива експоненцијално пресликавање на $\mathcal{U}$.

Према поменутој последици пресликавање γ помоћу којег смо дефинисали експоненцијално пресликавање је диференцијабилно па ће и exp бити диференцијабилно пресликавање. Користићемо и рестрикцију овог пресликавања на отворену лопту полупречника ε у T_qM:
$$\exp_q : B(0, \varepsilon) \subset T_qM \to M$$

која је дефинисана са $\exp_q(X_q) = \exp(q, X_q)$.
Геометријски, $\exp(q, X_q)$ представља тачку на многострукости M у коју стигнемо након времена $t = 1$ крећући се дуж геодезијске линије ако смо у тренутку $t = 0$ кренули из тачке q брзином X_q.

Тврђење 2.2.1. За сваку тачку $q \in M$ постоји $\varepsilon > 0$ тако да је пресликавање $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ дифеоморфизам лопте $B_\varepsilon(0)$ на отворен подскуп у M.

Доказ. Израчунаћемо чему је једнак извод пресликавања $\exp_q$ у тачки $0 \in B_\varepsilon(0)$:

$$d(\exp_q)_0(X_q) = \frac{d}{dt}\exp_q(tX_q)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(1, q, tX_q)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma(t, q, X_q)|_{t=0} = X_q.$$

Дакле, $d(\exp_q)_0$ је идентитет, па на основу теореме о инверзној функцији закључујемо да је $\exp_q$ локални дифеоморфизам у некој околини тачке 0. $\square$

Знајући ову особину експоненцијалног пресликавања можемо да уведемо неке појмове који ће нам бити потребни у следећем параграфу.

Дефиниција 2.2.2. Ако је $\exp_p$ дифеоморфизам околине V тачке 0 у T_pM, онда се $U = \exp_p V$ назива нормална околина од p. Ако је $B_\varepsilon(0)$ лопта за коју важи $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$ онда $B_\varepsilon(p) = \exp_p B_\varepsilon(0)$ називамо нормалном лоптом (или геодезијском лоптом) са центром у тачки p радијуса ε.

2.3 Минимизација растојања

Већ смо нагласили да права у равни представља најкраће растојање између две тачке. Сада хоћемо да видимо коју особину поседују геодезијске између две тачке на некој многострукости.

Дефиниција 2.3.1. Део по део диференцијабилна крива је непрекидно пресликавање $c : [a, b] \to M$ затвореног интервала $[a, b] \subset \mathbb{R}$ на M при чему важи: постоји подела $a = t_0 < t_1 < \dots t_k = b$ интервала $[a, b]$ таква да је свака од рестрикција $c|_{[t_i, t_i+1]}$, $i = 0, \dots, k-1$ диференцијабилно пресликавање. Кажемо да крива c спаја тачке $c(a)$ и $c(b)$. Тачка $c(t_i)$ се назива вертекс криве c, а угао између тангетних вектора $\lim\limits_{t \to t_i+} \dfrac{dc}{dt}$ и $\lim\limits_{t \to t_i-} \dfrac{dc}{dt}$ се назива угао вертекса у тачки $c(t_i)$.
За глатку криву $c : I \to M$ кажемо да је регуларна у тачки $t_0 \in I$ ако је $\frac{dc}{dt}(t_0) \neq 0$. Крива је регуларна ако је регуларна у свакој тачки.

Дефиниција 2.3.2. Сегмент геодезијске $\gamma : [a, b] \to M$ се назива минимизирајући ако је $l(\gamma) \leqslant l(c)$ за сваку криву c која спаја тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, где је са $l(c)$ означена дужина криве c.

Увешћемо неке појмове који ће нам бити потребни у наредним тврђењима.

Дефиниција 2.3.3. Нека је A повезан скуп у $\mathbb{R}^2$ при чему важи $U \subset A \subset \bar{U}$, за неки отворен скуп U и нека је граница скупа A, ∂A, део по део диференцијабилна крива чији вертекс углови нису једнаки углу π. Параметризована површ у M је диференцијабилно пресликавање $s : A \to M$.

Овде диференцијабилност означава да постоји отворен скуп $V \supset A$ тако да се пресликавање s може диференцијабилно продужити на V, а услов да вертекс углови нису π нам обезбеђује да диференцијал пресликавања s не зависи од његовог продужења. Ако вертекс углови границе ∂A ни у једној тачки нису π, онда тангентни вектори на криву у вертексима разапињу тангентну раван, па је диференцијал у произвољном правцу дефинисан и не зависи од продужења функције.

Дефиниција 2.3.4. Векторско поље X дуж површи у M, $s : A \to M$, је пресликавање које свакој тачки $q \in A$ додељује тангентни вектор $X(q) \in T_{s(q)}M$ и које је диференцијабилно у следећем смислу: ако је f диференцијабилна функција на M тада је пресликавање $q \mapsto X(q)f$ диференцијабилно.

Хоћемо да дефинишемо коваријантни извод векторског поља дуж површи. Нека су (u, v) Декартове координате на $\mathbb{R}^2$. За фиксирано v_0, пресликавање $u \mapsto s(u, v_0)$, где u припада повезаној компоненти скупа $A \cap \{(u, v_0)\}$, је крива у M и $ds(\frac{\partial}{\partial u})$ је векторско поље дуж ове криве које означавамо са $\frac{\partial s}{\partial u}$. На тај начин дефинишемо векторско поље $\frac{\partial s}{\partial u}$ дуж s за свако $(u, v) \in A$. На сличан начин дефинишемо $\frac{\partial s}{\partial v}$.
Нека је X векторско поље дуж $s : A \to M$. Дефинишемо коваријантни извод $\frac{DX}{\partial u}$ и $\frac{DX}{\partial v}$ на следећи начин. $\frac{DX}{\partial u}(u, v_0)$ је коваријантни извод рестрикције векторског поља X дуж криве $u \mapsto s(u, v_0)$. Тако дефинишемо $\frac{DX}{\partial u}(u, v)$ за свако $(u, v) \in A$, и на сличан начин дефинишемо $\frac{DX}{\partial v}(u, v)$.

Лема 2.3.1. Нека је M диференцијабилна многострукост са симетричном повезаношћу и нека је $s : A \to M$ параметризована површ на M. Тада је: $\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}$.

Доказ. Нека су $x : V \subset \mathbb{R}^n \to M$ локалне координате у околини тачке $s(u, v) \in A$. Можемо их писати у облику $x^{-1} \circ s(u, v) = (x_1(u, v), \ldots, x_n(u, v))$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial v}\Big(\frac{\partial s}{\partial u}\Big) &= \frac{D}{\partial v}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u} \nabla_{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial u}\Big(\frac{\partial s}{\partial v}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Како је повезаност симетрична, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$, закључујемо да је $\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}$. □

Сада ћемо тангентни простор на T_pM у тачки $X_p \in T_pM$ идентификовати са T_pM, тј. $T_pM \approx T_{X_p}(T_pM)$.

Лема 2.3.2. (Гаусова лема) Нека је $p \in M$ и $X_p \in T_pM$ тако да је дефинисано $\exp_p X_p$, и нека је $Y_p \in T_pM \approx T_{X_p}(T_pM)$. Тада је:

$$\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p)\rangle = \langle X_p, Y_p\rangle.$$

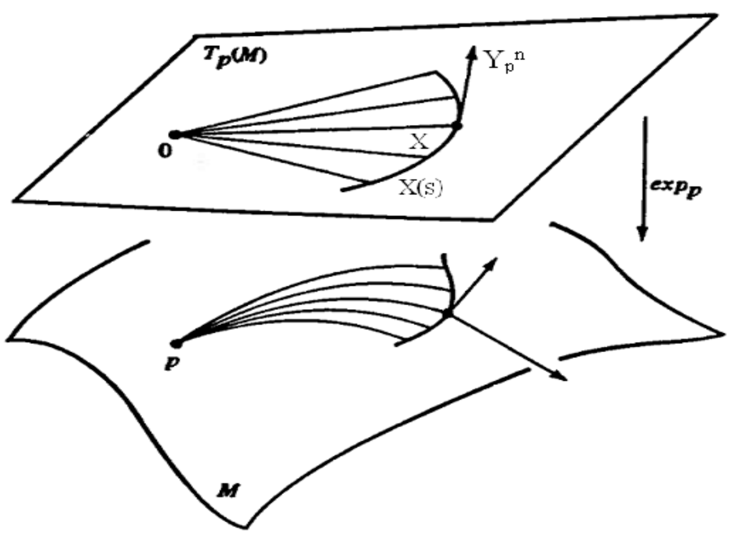
Доказ. Нека је $Y_p = Y_p^t + Y_p^n$, где је Y_p^t компонента вектора Y_p која је паралелна са X_p и Y_p^n компонента нормална на X_p. Како је диференцијал линеарно пресликавање важиће:

$$\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p)\rangle = \langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^t)\rangle + \langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^n)\rangle.$$

Показаћемо да је $\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^t)\rangle = \langle X_p, Y_p^t\rangle$ и $\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^n)\rangle = 0 = \langle X_p, Y_p^n\rangle$ чиме ћемо добити тражену једнакост.
Како је вектор Y_p^t паралелан вектору X_p важи $Y_p^t = \lambda X_p$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Нека је $\alpha : I \to T_pM$ крива дата са $\alpha(t) = (t+1)X_p$. Она задовољава услов да је $\alpha(0) = X_p$ и $\frac{d\alpha}{dt}(0) = X_p$. Слично, ако је дата крива $\beta : I \to T_pM$ са $\beta(t) = (\lambda t + 1)X_p$ она задовољава услове $\beta(0) = X_p$ и $\frac{d\beta}{dt}(0) = \lambda X_p = Y_p^t$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^t)\rangle &= \Big\langle \frac{d}{dt}\exp_p(\alpha(t))|_{t=0}, \frac{d}{dt}\exp_p(\beta(t))|_{t=0}\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(1,p,\alpha(t))|_{t=0}, \frac{d}{dt}\gamma(1,p,\beta(t))|_{t=0}\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(1,p,(t+1)X_p)|_{t=0}, \frac{d}{dt}\gamma(1,p,(\lambda t+1)X_p)|_{t=0}\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{d}{dt}\gamma(t+1,p,X_p)|_{t=0}, \frac{d}{dt}\gamma(\lambda t+1,p,X_p)|_{t=0}\Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{d\gamma}{dt}(1), \lambda\frac{d\gamma}{dt}(1)\Big\rangle \\
&= \lambda\Big\|\frac{d\gamma}{dt}(1)\Big\|^2.
\end{aligned}$$

Са друге стране је $\langle X_p, Y_p^t\rangle = \lambda\langle X_p, X_p\rangle = \lambda\|\frac{d\gamma}{dt}(0)\|^2$, па како се норма тангентног вектора дуж геодезијске одржава важиће $\langle (d\exp_p)_{X_p}(X_p), (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^t)\rangle = \langle X_p, Y_p^t\rangle$.



Слика 1.

$\exp_p X_p$ је добро дефинисано, па постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $\exp_p u$ дефинисано за:

$$u = t \cdot X(s),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ -\varepsilon < s < \varepsilon$$

где је $X(s)$ крива у T_pM са особинама $X(0) = X_p$, $\frac{dX}{ds}(0) = Y_p^n$ и $\|X(s)\| = Const$. Можемо посматрати параметризовану површ $f : A \to M$, $A = \{(t, s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ дефинисану са: $f(t, s) = \exp_p(tX(s))$. Приметимо да су криве $t \mapsto f(t, s_0)$ геодезијске. Важи: $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle(1, 0) = \langle (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^n), (d\exp_p)_{X_p}(X_p)\rangle$. За свако (t, s) важи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.$$

Последњи члан у изразу са десне стране је једнак нули зато што је $\frac{\partial f}{\partial t}$ тангентни вектор на геодезијску. Из симетрије повезаности, можемо извршити трансформацију израза:

$$\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

последња једнакост важи зато што вектор $\frac{\partial f}{\partial t}$ има константу дужину. Закључујемо да је $\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$ па $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ не зависи од t. Како је

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \lim_{t\to 0} (d\exp_p)_{tX_p}(tY_p^n) = 0$$

следи да је $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle(1, 0) = 0$, односно $\langle (d\exp_p)_{X_p}(Y_p^n), (d\exp_p)_{X_p}(X_p)\rangle = 0$, а то смо и хтели да покажемо. □

Ако се сада сетимо како смо дефинисали нормалну лопту (дефиниција 2.2.2), из Гаусове леме можемо закључити да је граница нормалне лопте хиперсфера (подмногострукост кодимензије 1) у M, и да је она ортогонална на геодезијске које почињу у тачки p.

Дефиниција 2.3.5. Граница нормалне лопте $B_\varepsilon(p)$ се означава са $S_\varepsilon(p)$ и назива се нормална сфера (или геодезијска сфера) са центром у тачки p и полупречика ε. Геодезијске у $B_\varepsilon(p)$ које почињу у тачки p се називају радијалне геодезијске.

Сада ћемо показати да геодезијске локално минимизирају растојање.

Тврђење 2.3.1. Нека је $p \in M$, U нормална околина од p и $B \subset U$ нормална лопта са центром у p. Нека је $\gamma : [0, 1] \to B$ сегмент геодезијске која полази из тачке p, $\gamma(0) = p$. Ако је $c : [0, 1] \to M$ било која друга део по део диференцијабилна крива која спаја тачке $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ тада је $l(\gamma) \leqslant l(c)$. Ако једнакост важи онда је $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.

Доказ. Прво ћемо разматрати случај када је $c([0, 1]) \subset B$. Како је $\exp_p$ дифеоморфизам на U и $B \subset U$ можемо да напишемо:

$$c(t) = \exp_p(r(t) \cdot X(t))$$

где је $t \mapsto X(t)$ крива у T_pM која задовољава услов $\|X(t)\| = 1$ и $r : [0, 1] \to \mathbb{R}$ је позитивна део по део глатка функција. Диференцирајмо функцију $f(r(t), t) = \exp_p(r(t) \cdot X(t))$:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Знамо да је $\left\|\frac{\partial f}{\partial r}\right\| = \|X(t)\| = 1$, а из Гаусове леме следи да је $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$, па је:

$$\left\|\frac{dc}{dt}\right\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2 \geqslant |r'(t)|^2.$$

Користећи ову неједнакост видимо да важи:

$$l(c) = \int_0^1 \left\|\frac{dc}{dt}\right\| dt \geqslant \int_0^1 |r'(t)|\, dt \geqslant \int_0^1 r'(t)\, dt = r(1) - r(0) = l(\gamma).$$

Претходне неједнакости постају једнакости ако је $\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\| = 0$. Тада је $X(t) = Const$ и $\|r'(t)\| = r'(t) > 0$ па је $c(t)$ монотона репараметризација криве γ, што даје $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.
Ако $c([0,1])$ није садржано у B, уочимо прву тачку $t_1 \in (0,1)$ за коју важи да $c(t_1) \in \partial B$. Ако је δ радијус геодезијске лопте B важиће неједнакости:

$$l(c) \geqslant l(c|_{[0,t_1]}) \geqslant \delta > l(\gamma).\square$$

Ово тврђење не важи глобално. Делови великих кругова су геодезијске на сфери. Ако геодезијска полазећи од једне тачке на сфери прође кроз њој антиподалну тачку она губи својство најкраћег растојања између тачака.
Показаћемо да важи и обрнуто, ако део по део диференцијабилна крива даје минимално растојање између тачака тада је она геодезијска. За то ће нам бити потребно тврђење 2.2.1 где смо показали егзистенцију нормалне околине. Сада ћемо показати нешто јаче својство.

Теорема 2.3.1. За свако $p \in M$ постоји околина W тачке p и број $\delta > 0$, тако да је за свако $q \in W$, $\exp_q$ дифеоморфизам на $B_\delta(0) \subset T_qM$ и $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$, па је W нормална околина сваке њене тачке.

Доказ. Нека су $\varepsilon > 0$, U и $\mathcal{U}$ дефинисани у последици 2.1.1. Дефинишимо пресликавање $F : \mathcal{U} \to M \times M$ са: $F(q, X_q) = (q, \exp_q X_q)$. Видимо да је $F(p,0) = (p,p)$. Посматрајмо око тачке $(p,p) \in M \times M$ локалне координате $(U \times U; x, x)$. У тим координатама матрица пресликавања $dF(p,0)$ има облик:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

јер је $(d\exp_p)_0 = 1$. Можемо закључити да је F локални дифеоморфизам у околини тачке $(p,0)$. Значи, постоји околина $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ тачке $(p,0)$ у TM таква да F дифеоморфно слика $\mathcal{U}'$ на неку околину W' тачке (p,p) у $M \times M$. $\mathcal{U}'$ можемо представити у облику

$$\mathcal{U}' = \{(q, X_q) \mid q \in U',\ X_q \in T_qM,\ \|X_q\| < \delta\}$$

где је $U' \subset U$ околина тачке p у M. Сада одаберемо околину W тачке p у M, за коју ће важити $W \times W \subset W'$.
Показаћемо да овако одабрани δ и W задовољавају услове тврђења. Нека је $q \in W$ произвољна тачка и $B_\delta(0) \subset T_qM$. Како је F дифеоморфизам на $\mathcal{U}'$ важиће:

$$\{q\} \times W \subset F(\{q\} \times B_\delta(0)),$$

па на основу дефиниције пресликавања F важи: $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$. $\square$

Напомена 2.3.1. Из претходног тврђења и особине геодезијских да минимизирају растојање, следи да за било које две тачке $p, q \in W$ постоји јединствена минимална геодезијска γ дужине мање од δ која их спаја. У доказу видимо да γ диференцијабилно зависи од (p, q) на следећи начин: за две дате тачке (p, q) постоји јединствени тангентни вектор $X_p \in T_pM$ (дат са $F^{-1}(p, q) = (p, X_p)$) који диференцијабилно зависи од (p, q) и важи $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$.

Дефиниција 2.3.6. Околина W чија је егзистенција показана у претходној теореми се зове потпуно нормална околина тачка $p \in M$.

Последица 2.3.1. Ако део по део диференцијабилна крива $\gamma : [a, b] \to M$, параметризована параметром који је пропорционалан дужини лука, има дужину мању или једнаку дужини било које друге криве која спаја тачке $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ онда је γ геодезијска. Посебно, γ је регуларна.

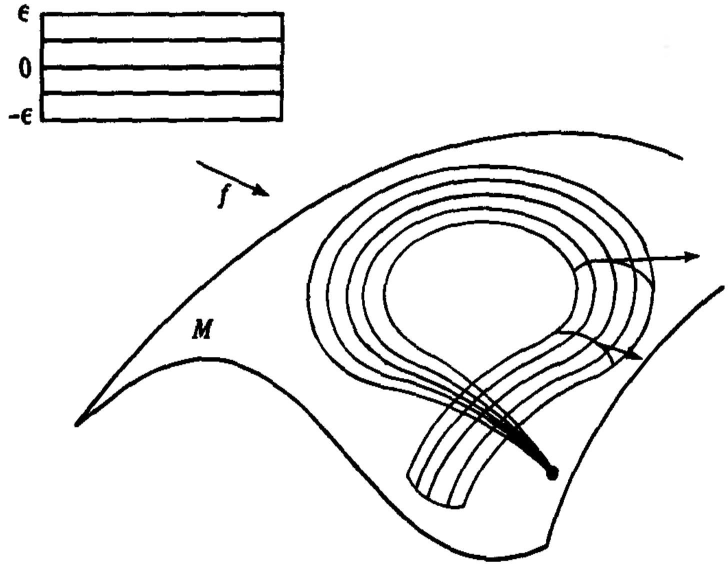
Доказ. Нека $t \in [a, b]$ произвољно одабрано и W потпуно нормална околина тачке $\gamma(t)$. Тада постоји затворени интервал $I \subset [a, b]$, са непразном унутрашношћу, тако да важи $t \in I$ и $\gamma(I) \subset W$. Рестрикција $\gamma_I : I \to W$ је део по део диференцијабилна крива која спаја две тачке у нормалној лопти. На основу тврђења 2.3.1 и претпоставки ове последице, $l(\gamma_I)$ је једнако дужини радијалне геодезијске која спаја ове две тачке. Опет, из тврђења 2.3.1 и услова да је γ_I параметризована параметром који је пропорционалан дужини лука закључујемо да је γ_I геодезијска на I, односно да је $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}(t) = 0$, па је γ геодезијска на $[a, b]$. □

2.4 Варијација енергије

Показали смо да геодезијске локално минимизирају растојање. У овом делу ћемо геодезијске видети као решења варијационог проблема.

Дефиниција 2.4.1. Нека је $c : [0, 1] \to M$ део по део диференцијабилна крива на M и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = 1$ подела интервала $[0, 1]$ на подинтервале $[t_i, t_{i+1}]$ на којима је c глатка крива. Непрекидно пресликавање $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \to M$ такво да је свака од рестрикција на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$ глатка и да је $f(0, t) = c(t)$, $t \in [0, 1]$ назива се варијацијом криве c.
Кажемо да је варијација f варијација са фиксираним крајевима ако је $f(s, 0) = c(0)$ и $f(s, 1) = c(1)$ за свако $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Ако је f диференцијабилно пресликавање кажемо да је та варијација диференцијабилна. Векторско поље $X(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t)|_{s=0}$ дуж криве c називамо пољем варијације.

Тврђење 2.4.1. Нека је $c : [0, 1] \to M$ део по део диференцијабилна крива и $X(t)$ део по део диференцијабилно поље дуж криве c. Тада постоји варијација $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \to M$ криве c таква да је $X(t)$ поље варијације пресликавања f. Ако је $X(0) = X(1) = 0$ онда варијацију f можемо да изаберемо тако да буде варијација са фиксираним крајевима.



Слика 2. Варијација криве и поље варијације

Доказ. $c([0,1]) \subset M$ је компактан скуп, а ми ћемо показати да постоји $\delta > 0$ такво да је $\exp_{c(t)} X$, $t \in [0,1]$, добро дефинисано за свако $X \in T_{c(t)}M$ ако је $\|X\| < \delta$. Нека је за свако $c(t)$, $t \in [0,1]$, W_t његова нормална околина и δ_t број који смо добили у теореми 2.3.1 $\bigcup_{t\in[0,1]} W_t$ је отворено покривање компактног скупа $c([0,1])$, па можемо издвојити коначно подпокривање $W_1, \ldots W_n$. Узмемо $\delta = \min\{\delta_1, \ldots \delta_n\}$, где је $\delta_i > 0$ број придружен околини W_i. Нека је $N = \max\limits_{t\in[0,1]} \|X(t)\|$, $\varepsilon < \frac{\delta}{N}$ и дефинишимо пресликавање f са:

$$f(s,t) = \exp_{c(t)}(sX(t)),\ s \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ t \in [0,1].$$

Видимо да је f добро дефинисано пресликавање, $\|sX(t)\| = |s| \cdot \|X(t)\| < \frac{\delta}{N} \cdot N = \delta$. Како је

$$\exp_{c(t)}(sX(t)) = \gamma(1, c(t), sX(t))$$

и геодезијска $\gamma(1, c(t), sX(t))$ зависи диференцијабилно од почетних услова, пресликавање f је део по део диференцијабилно. Провера даје $f(0,t) = c(t)$. Поље варијације пресликавања f је

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) = \frac{d}{ds}(\exp_{c(t)}(sX(t))) = (d\exp_{c(t)})_0 X(t) = X(t).$$

Ако је $X(0) = X(1) = 0$ онда је $f(s,0) = c(0)$ и $f(s,1) = c(1)$ па ће f бити варијација са фиксираним крајевима. □

Да бисмо упоредили дужину криве c са дужинама кривих које добијемо варијацијом $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ дефинисаћемо функцију $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ са:

$$L(s) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \right\| dt.$$

Увешћемо и функцију енергије, $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, коју дефинишемо са:

$$E(s) = \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \right\|^2 dt.$$

Користећи Шварцову неједнакост $\left(\int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\, dt \cdot \int_0^1 g^2(t)\, dt$, специјално за функције $f \equiv 1$ и $g(t) = \left\| \frac{dc}{dt} \right\|$, добијемо релацију:

$$L^2(0) = L^2(c) = \left(\int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\| dt \right)^2 \leqslant \int_0^1 1 \cdot dt \cdot \int_0^1 \left\| \frac{dc}{dt} \right\|^2 dt = 1 \cdot E(0) = E(c),$$

где су са $L(c)$ и $E(c)$ означене дужина и енергија криве c. У горњој неједнакости једнакост важи ако су фунције f и g пропорционалне, односно ако је функција g константна, што ће важити ако је параметар t пропорционалан дужини лука.

Лема 2.4.1. Нека су тачке $p, q \in M$ и $\gamma : [0,1] \to M$ минимална геодезијска (геодезијска најмање дужине) која спаја тачке p и q. Тада за сваку криву $c : [0,1] \to M$ која спаја тачке p и q важи:

$$E(\gamma) \leqslant E(c),$$

при чему једнакост важи ако и само ако је c минимална геодезијска.

Доказ. Показали смо да је $L(c)^2 \leqslant E(c)$ и знамо да је γ геодезијска па важе неједнакости: $E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leqslant L(c)^2 \leqslant E(c)$. Ако важи једнакост тада је $L(c)^2 = E(c)$, па је крива c параметризована параметром који је пропорционалан дужини лука, и важи $L(\gamma) = L(c)$, одакле закључујемо да је c минимална геодезијска. □

Сада нас интересује понашање функције енергије варијације, $E(s)$. Неке њене особине можемо знати на основу првог извода.

Тврђење 2.4.2. Формула прве варијације енергије криве
Нека је $c : [0,1] \to M$ део по део диференцијабилна крива и $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ варијација криве c. Ако је $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ енергија варијације f тада је:

$$\frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^1 \left\langle X(t), \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt} \right\rangle dt - \sum_{i=1}^{k} \left\langle X(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i+) - \frac{dc}{dt}(t_i-) \right\rangle - \left\langle X(0), \frac{dc}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle X(1), \frac{dc}{dt}(1) \right\rangle \tag{2}$$

где је $X(t)$ поље варијације и $\frac{dc}{dt}(t_i\pm) = \lim\limits_{t \to t_i\pm} \dfrac{dc}{dt}$.

Доказ. По дефиницији је $E(s) = \displaystyle\int_0^1 \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$. Диференцирањем под знаком интеграла, користећи особину повезаности да је симетрична, добијамо:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt =& 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\
=& 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\
=& 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Даље, када просумирамо по оваквим подинтервалима:

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds} = \sum_{i=0}^{k} \Big\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \Big\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^1 \Big\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t} \Big\rangle\, dt.$$

Специјално, за $s = 0$ добијемо оно што је требало показати. □

Последица 2.4.1. Део по део диференцијабилна крива $\gamma : [0,1] \to M$ је геодезијска ако и само ако за сваку варијацију са фиксираним крајевима f криве γ важи да је $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.

Доказ. Ако је γ геодезијска и f варијација са фиксираним крајевима, тада је $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$, γ је регуларна крива и $X(0) = X(1) = 0$, па су сви чланови у (2) једнаки 0. Тиме ће важити да је $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.
Обрнуто, нека је $\frac{dE}{ds}(0) = 0$ за сваку праву варијацију део по део диференцијабилне криве γ. Нека је $X(t) = g(t)\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}$, где је $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ део по део диференцијабилна функција за коју важи $g(t) > 0$ када је $t \neq t_i$ и $g(t_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k+1$. Конструшимо сада варијацију криве γ чије је поље варијације $X(t)$. Како је

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{ds}(0) = -\int_0^1 g(t)\Big\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} \Big\rangle\, dt = 0$$

закључујемо да је $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ на сваком интервалу (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, k$.
Треба још проверити да ли је $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ у тачкама t_i. Посматрајмо друго поље варијације $Y(t)$ такво да је $Y(0) = Y(1) = 0$ и $Y(t_i) = \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-)$, $i = 1, \ldots, k$. Како је γ геодезијска, важиће:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{dE}{ds}(0) = -\sum_{i=1}^{k} \Big\langle \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-), \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-) \Big\rangle = -\sum_{i=1}^{k} \Big\| \frac{d\gamma}{dt}(t_i+) - \frac{d\gamma}{dt}(t_i-) \Big\|^2.$$

Закључујемо да је $\frac{d\gamma}{dt}(t_i+) = \frac{d\gamma}{dt}(t_i-)$ у свакој тачи t_i, $i = 1, \ldots, k$, па је крива γ класе C^1 у тим тачкама, односно, и ту ће важити $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$. Показали смо да је γ геодезијска на интервалу $(0,1)$. Према теореми о јединствености решења диференцијалних једначина γ је класе C^∞, па је она геодезијска на $[0,1]$. □

Напомена 2.4.1. Приметимо да из услова $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$ следи да крива γ јесте класе C^∞, иако је у формулацији Формуле прве варијације енергије криве довољно претпоставити да је γ део по део C^2. Захтев да γ јесте екстремала функционала енергије повлачи њену глаткост класе C^∞.

Сада геодезијске можемо да видимо као критичне тачке функционала енергије на простору варијација криве са фиксираним крајевима. Особина геодезијских да дају минимално растојање је била локална, док је ова особина глобалног карактера.

ГЛАВА 3

Хоферова метрика на групи Хамилтонових дифеоморфизама

3.1 Група Хамилтонових дифеоморфизама

Нека је M глатка многострукост без границе. За дифеоморфизам $\phi : M \to M$ дефинишемо његов носач као скуп $\mathrm{supp}(\phi) = \overline{\{x \in M \mid \phi x \neq x\}}$. Са $\mathrm{Diff}^c(M)$ ћемо означити групу дифеоморфизама са компактним носачем.

Дефиниција 3.1.1. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал. Пут дифеоморфизама је пресликавање

$$f : I \to \mathrm{Diff}^c(M),\ t \mapsto f_t$$

са својствима:

- пресликавање $M \times I \to M$, које пару (x, t) додељује $f_t x$ је глатко
- постоји компактан подскуп $K \subset M$ који садржи носаче $\mathrm{supp}(f_t)$ за свако $t \in I$.

Овакав пут дифеоморфизама означавамо са $\{f_t\}$. Можемо приметити да је други услов на затвореним многострукостима (компактна многострукост, без границе) аутоматски задовољен.

Дефиниција 3.1.2. Нека је $\{f_t\}$ пут дифеоморфизама. Фамилију векторских поља $\{\xi_t\}$, $t \in I$, на M, која се дефинише са

$$\frac{d}{dt} f_t x = \xi_t(f_t x) \tag{1}$$

називамо временски зависно векторско поље на M са компактним носачем.

Ова фамилија је глатка и има компактан носач јер је $\xi_t(x) = 0$ за свако $x \in M \backslash K$.
Веза коју смо успоставили између пута дифеоморфизама и оваквих векторских поља није инјективна. Свака фамилија $\{f_t g\}$ где је g произвољан елемент из $\mathrm{Diff}^c(M)$ генерише исту временски зависну фамилију векторских поља. Ако наметнемо додатни услов, ова веза може бити инјективна. Фиксирајмо неки број $s \in I$. Тада ће постојати јединствени пут $\{f_t\}$ који генерише $\{\xi_t\}$ и задовољава додатни услов $f_s = \mathrm{Id}$. Тај пут представља јединствено решење диференцијалне једначине (1) са почетним условом $f_s = \mathrm{Id}$.
На даље ћемо претпоставити да $0 \in I$.

Дефиниција 3.1.3. Овако конструисан пут дифеоморфизама $\{f_t\}$ који задовољава додатни услов $f_0 = \mathrm{Id}$ назива се ток временски зависног векторског поља $\{\xi_t\}$.

Дефиниција 3.1.4. Симплектичка форма на глаткој многострукости M је диференцијална 2-форма ω која је
(i) недегенерисана, што значи да за свако $X_p \in T_pM$ постоји $Y_p \in T_pM$ такво да је $\omega(X_p, Y_p) \neq 0$,
(ii) затворена, тј. $d\omega = 0$.
Многострукост на којој је дефинисана симплектичка форма зове се симплектичка многострукост.
Нека су (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) две симплектичке многострукости. Кажемо да је пресликавање $f : M_1 \to M_2$ симплектоморфизам ако важи $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Форму $\mathrm{Vol} = \frac{1}{n!}\omega^n$ зовемо канонска форма запремине на (M, ω).

Дефиниција 3.1.5. Нека је H глатка функција на M, $H : M \to \mathbb{R}$. Векторско поље ξ на M се назива Хамилтоново векторско поље од H ако у свакој тачки важи: $i_\xi \omega = -dH$.

Како је ω недегенерисана форма ξ ће увек постојати и биће јединствено. Ово векторско поље ξ ћемо означавати и са $\xi = \operatorname{sgrad} H$ (`skew gradient`).

Пример 3.1.1. Показати да у канонским локалним координатама (p, q) на M, за које је локално $\omega = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$, важи $\operatorname{sgrad} H = (-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})$.

Решење. Означимо $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = dp \wedge dq$, $\xi = \xi_1 \frac{\partial}{\partial p} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial q}$ и $X = X_1 \frac{\partial}{\partial p} + X_2 \frac{\partial}{\partial q}$. Тада је:

$$i_\xi \omega(X) = \omega(\xi, X) = (dp \wedge dq)(\xi, X) = \begin{vmatrix} dp(\xi) & dq(\xi) \\ dp(X) & dq(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix} = \xi_1 X_2 - \xi_2 X_1$$

и

$$dH(X) = \frac{\partial H}{\partial p} dp(X) + \frac{\partial H}{\partial q} dq(X) = \frac{\partial H}{\partial p} X_1 + \frac{\partial H}{\partial q} X_2$$

за свако $X \in TM$. Сада искористимо једнакост $i_\xi \omega(X) = -dH(X)$ и закључујемо да важи $\xi = \operatorname{sgrad} H = (\xi_1, \xi_2) = (-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})$. △
Посматрајмо сада $\mathbb{R}^{2n}$ са стандардном симплектичком формом $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$ где су $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ локалне координате на $\mathbb{R}^{2n}$. Простор $\mathbb{R}^{2n}$ можемо идентификовати са $\mathbb{C}^n$. Означимо са ∇H градијент функције H у односу на стандардни скаларни производ: $\langle \nabla H(x), v \rangle = dH(x)v$ за свако $v \in T_x\mathbb{R}^{2n}$. Видимо да важи $\operatorname{sgrad} H(x) = \big(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \big) = i \cdot \nabla H(x) = i \cdot \big(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q} \big) \in T_x\mathbb{C}^n$.

Пример 3.1.2. Нека је $\phi : M \to M$ симплектоморфизам. Показати да је тада:

$$\operatorname{sgrad}(H \circ \phi^{-1}) = \phi_* \operatorname{sgrad} H,$$

за сваку функцију H на M.

Решење. Нека је $\xi = \operatorname{sgrad} H$ и $\eta = \operatorname{sgrad}(H \circ \phi^{-1})$. Тада је $i_\eta \omega = -d(H \circ \phi^{-1})$ и $i_\xi \omega = -dH$. Хоћемо да покажемо да важи: $\eta = \phi_* \xi$. Важи:

$$i_\eta \omega = -d(H \circ \phi^{-1}) = -d((\phi^{-1})^* H) = -(\phi^{-1})^* dH,$$

где последња неједнакост важи зато што `pull-back` и оператор d комутирају. Даље је:

$$i_\eta \omega = (\phi^{-1})^* i_\xi \omega.$$

Хоћемо да покажемо да важи $(\phi^{-1})^* i_\xi \omega = i_{\phi_* \xi} \omega$ одакле добијамо једнакост $\eta = \phi_* \xi$. Нека је X произвољни тангентни вектор. Тада је:

$$\begin{aligned}(\phi^{-1})^* i_\xi \omega(X) &= i_\xi \omega((\phi^{-1})_* X) \\ &= \omega(\xi, (\phi^{-1})_* X),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_{\phi_* \xi} \omega(X) &= \omega(\phi_* \xi, X) = (\phi^{-1})^* \omega(\phi_* \xi, X) \\ &= \omega((\phi^{-1})_* \phi_* \xi, (\phi^{-1})_* X) \\ &= \omega(\xi, (\phi^{-1})_* X),\end{aligned}$$

при чему друга једнакост важи јер је ϕ, па и ϕ^{-1}, симплектоморфизам. $\triangle$

Приметимо да дефиниција оператора sgrad не зависи од координата на многострукости. Фазни простор у класичној механици је једна симплектичка многострукост (M, ω). Енергија система одређује његову еволуцију. Енергију можемо да видимо као фамилију функција H_t на M, која ће зависити од додатног параметра, времена t које је дефинисано на неком интервалу I. Са друге стране, енергију можемо да видимо као једну функцију, сада дефинисану на $M \times I$. Користићемо ознаке $H_t(x) = H(t, x)$. Оваква функција H се назива временски зависни Хамилтонијан.

Увешћемо један линеарни функционални простор $\mathcal{H}(M)$. Када је M затворена многострукост, $\mathcal{H}(M)$ се дефинише као простор свих глатких функција на M чија је средња вредност у односу на канонску форму запремине једнака 0, $\mathcal{H}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), \int f \operatorname{Vol} = 0\}$. Ако је M отворена многострукост, $\mathcal{H}(M)$ се састоји од свих глатких функција са компактним носачем.

Дефиниција 3.1.6. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал. Кажемо да је временски зависан Хамилтонијан H на $M \times I$ нормализован ако H_t припада простору $\mathcal{H}(M)$ за свако $t \in I$. У случају отворене многострукости мора постојати компактан подскуп од M који садржи $\operatorname{supp} H_t = \overline{\{x \in M \mid H_t x \neq 0\}}$ за свако $t \in I$.

На даље ћемо посматрати само нормализоване Хамилтонијане. Ако радимо са отвореним многострукостима морамо увести неке додатне претпоставке о понашању Хамилтонијана у бесконачности, да би решења Хамилтонових једначина била добро дефинисана. Временски зависно Хамилтоново векторско поље $\operatorname{sgrad} H_t$ нормализоване Хамилтонове функције H има компактан носач. Даље, пресликавање које свакој функцији из $\mathcal{H}(M)$ додељује Хамилтоново векторско поље је инјективно. Хамилтоново векторско поље одређује одговарајућу функцију до на константу. Ми смо условом нормализације одредили да та константа буде 0.

Дефиниција 3.1.7. Нека је $H : M \times I \to \mathbb{R}$ нормализован временски зависан Хамилтонијан и нека интервал I садржи 0. Нека је $\{\phi_t\}$ ток временски зависног векторског поља $\operatorname{sgrad} H_t$. Кажемо да је $\{\phi_t\}$ Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном H. Сваки појединачни дифеоморфизам ϕ_a, $a \in I$, овог тока се назива Хамилтонов дифеоморфизам.

Услов нормализованости функције H нам обезбеђује да Хамилтонови дифеоморфизми имају компактне носаче.
Означимо са $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ скуп свих Хамилтонових дифеоморфизама.

Теорема 3.1.1. Картанова формула
Нека је α k-форма на M, $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија пресликавања и $X(\phi_t(x)) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)$. Тада је:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(X \lrcorner \alpha) + X \lrcorner d\alpha).$$

Доказ. Доказ ћемо извести индукцијом по k. За $k = 0$ претходна формула има облик $\frac{d}{dt}\phi_t^* f = \phi_t^* df(X)$, што је само реформулација дефиниције извода функције f у правцу X. Нека је β $(k+1)$-форма. Можемо је записати као $\beta = df \wedge \alpha$, па користећи индуктивну претпоставку и особине диференцирања имамо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t^*(df \wedge \alpha) &= \frac{d}{dt}\phi_t^* df \wedge \phi_t^*\alpha + \phi_t^* df \wedge \frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha \\ &= \phi_t^*[d(X \lrcorner df) \wedge \alpha + df \wedge (X \lrcorner d\alpha) + df \wedge d(X \lrcorner \alpha)]\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\phi_t^*[X \lrcorner d(df \wedge \alpha) + d(X \lrcorner (df \wedge \alpha))] = \\ &\qquad = \phi_t^*[-X \lrcorner (df \wedge d\alpha) + d((X \lrcorner df) \wedge \alpha - df \wedge (X \lrcorner \alpha))] \\ &\qquad = \phi_t^*[d(X \lrcorner df) \wedge \alpha + df \wedge (X \lrcorner d\alpha) + df \wedge d(X \lrcorner \alpha)].\end{aligned}$$

$\square$

Пример 3.1.3. Репараметризација тока
Нека је $\{\phi_t\}$, $t \in [0,a]$ Хамилтонов ток генерисан нормализованим Хамилтонијаном $H(x,t)$. Показати да је $\{\phi_{at}\}$, $t \in [0,1]$ Хамилтонов ток, генерисан функцијом $aH(x,at)$.

Решење. Нека је $\operatorname{sgrad} H_t = \xi_t$ и нека је $\operatorname{sgrad}(aH(x,at)) = \eta_t$ и означимо са $\psi_t = \phi_{at}$. Знамо да је $\phi_0 = \mathrm{Id}$ па је и $\psi_0 = \mathrm{Id}$. Важи и $\frac{d}{dt}\phi_t x = \xi_t(\phi_t x)$ а ми хоћемо да покажемо да важи $\frac{d}{dt}\psi_t x = \eta_t(\psi_t x)$.

$$\frac{d}{dt}\psi_t x = \frac{d}{dt}\phi_{at} x = a\frac{d}{du}\phi_u x|_{u=at} = a\xi_u(\phi_u x)|_{u=at} = a \operatorname{sgrad} H_{at}(\phi_{at}x) = \operatorname{sgrad}(aH_{at})(\psi_t x) = \eta_t(\psi_t x).$$

А то је и требало показати. $\triangle$

Овај пример нам показује да сваки Хамилтонов дифеоморфизам можемо да видимо као ϕ_1 неког Хамилтоновог тока. На даље ћемо претпоставити да је $I = [0,1]$.

Лема 3.1.1. Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму.

Доказ. Нека је $\phi : M \to M$ Хамилтонов дифеоморфизам. То значи да постоји ток дифеоморфизама $\{\phi_t\}$ генерисан Хамилтонијаном $H(x,t)$, $t \in [0,1]$, тако да важи

$$\phi_0 = \mathrm{Id},\ \phi_1 = \phi \text{ и } X_t(\phi_t(x)) = \tfrac{d}{dt}\phi_t(x)$$

где је $X_t = \operatorname{sgrad} H_t$. Према Картановој формули за сваку k-форму α на многострукости M важи:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(X_t \lrcorner \alpha) + X_t \lrcorner d\alpha).$$

Специјално за $\alpha = \omega$ добијамо да важи релација:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \phi_t^*(d(X_t \lrcorner \omega) + X_t \lrcorner d\omega) = \phi_t^*(-ddH + 0) = 0.$$

Закључујемо да је $\phi_t^*\omega = Const$, а знајући да је $\phi_0 = \mathrm{Id}$, односно $\phi_0^*\omega = \omega$ добијамо да је $\phi_t^*\omega = \omega$ за свако $t \in [0,1]$ па и специјално за $\phi_1 = \phi$. □

Тврђење 3.1.1. За сваки пут Хамилтонијана $\{\phi_t\}$, $t \in I$, постоји временски зависан нормализован Хамилтонијан $H : M \times I \to \mathbb{R}$ тако да важи:

$$\frac{d}{dt}\phi_t x = \operatorname{sgrad} H_t(\phi_t x)$$

за свако $x \in M$ и $t \in I$.

Доказ. Тврђење се једноставно доказује ако многострукост има тривијалну прву де Рамову кохомологију са компактним носачем, $H_{dR,c}(M) = 0$. Означимо са ξ_t векторско поље генерисано са ϕ_t. Како Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму из Картанове формуле следи да је $d(\xi_t \lrcorner \omega) = 0$, односно $\xi_t \lrcorner \omega$ је затворена форма. Како је $H_{dR,c}(M) = 0$ форма $\xi_t \lrcorner \omega$ ће бити и тачна. На основу тога следи да постоји глатка фамилија функција $H_t(x) \in \mathcal{H}(M)$ тако да важи $-dH_t = \xi_t \lrcorner \omega$. Функција $H(x,t)$ ће бити Хамилтонијан који генерише $\{\phi_t\}$. У општем случају, када је $H_{dR,c}(M) \neq 0$, доказ је нетривијалан и може се наћи у [1], [3]. □

Ово тврђење нам показује да векторско поље које одговара току Хамилтонових дифеоморфизама јесте Хамилтоново векторско поље.

Тврђење 3.1.2. Хамилтонијан производа
Нека су ϕ_t и χ_t Хамилтонови путеви генерисани нормализованим Хамилтонијанима H и G. Тада је њихов производ $\psi_t = \phi_t\chi_t$ Хамилтонов пут генерисан нормализованом Хамилтоновом функцијом

$$F(x,t) = H(x,t) + G(\phi_t^{-1}x, t).$$

Доказ. Знамо да је $\frac{d}{dt}\phi_t x = \operatorname{sgrad} H_t$ и $\frac{d}{dt}\chi_t x = \operatorname{sgrad} G_t$. Тада је

$$\frac{d}{dt}(\phi_t\chi_t)x = \operatorname{sgrad} H_t + \phi_{t*} \operatorname{sgrad} G_t.$$

У примеру 3.1.2 смо показали да је $\operatorname{sgrad}(G \circ \phi_t^{-1}) = \phi_{t*} \operatorname{sgrad} G_t$ па закључујемо да важи:

$$\frac{d}{dt}\psi_t x = \operatorname{sgrad}(H_t + G \circ \phi_t^{-1}) = \operatorname{sgrad} F_t.$$

□

Последица 3.1.1. Скуп Хамилтонових дифеоморфизама је група у односу на композицију.

Доказ. Нека су ϕ и χ два Хамилтонова дифеоморфизма. Тада постоје путеви $\{\phi_t\}$ и $\{\chi_t\}$, $t \in [0,1]$, такви да је $\phi_1 = \phi$ и $\chi_1 = \chi$. Према претходном тврђењу пут $\{\psi_t\} = \{\phi_t \chi_t\}$, ће такође бити Хамилтонов, па ће и дифеоморфизам $\phi\chi = \psi_1$ бити Хамилтонов, односно композиција два елемента групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ остаје у истој групи.
Нека је сада ϕ произвољан Хамилтонов дифеоморфизам. Хоћемо да покажемо да ће и дифеоморфизам ϕ^{-1} бити Хамилтонов. Нека је $\phi = \phi_1$, где је $\{\phi_t\}$, $t \in [0,1]$, Хамилтонов ток генерисан функцијом $H(x,t)$. Хоћемо да покажемо да је $\{\phi_t^{-1}\}$ Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном $-H(\phi_t x, t)$. Означимо са $G(x,t)$ Хамилтонијан који генерише ток ϕ_t^{-1}. Ако поступимо као у доказу тврђења 3.1.2 и диференцирамо по t пресликавање $\phi_t \circ \phi_t^{-1} = \mathrm{Id}$ добијемо:

$$0 = \frac{d}{dt}(\phi_t \circ \phi_t^{-1})x = \operatorname{sgrad} H(x,t) + \phi_{t*} \operatorname{sgrad} G(x,t) = \operatorname{sgrad}(H(x,t) + G(x,t) \circ \phi_t^{-1}).$$

Закључујемо да је $H(x,t) + G(\phi_t^{-1}x, t) = 0$, односно да је $G(x,t) = -H(\phi_t x, t)$. Видимо, дакле, да се и ϕ^{-1} налази у групи $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. □

Тврђење 3.1.3. $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ је нормална и путно повезана подгрупа групе симплектоморфизама $\mathrm{Symp}(M,\omega)$.

Доказ. У леми 3.1.1 смо показали да Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичу форму, у последици 3.1.1 смо показали да они чине групу, па $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ јесте подгрупа групе $\mathrm{Symp}(M,\omega)$.
Путна повезаност следи из начина на који смо дефинисали елементе групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$, сви они су путно повезани са идентичним пресликавањем.
Треба још показати да је $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ нормална подгрупа. Нека су $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ и $f \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$ произвољни елементи. Ако је $\{\phi_t\}$ ток Хамилтонових дифеоморфизама, $\phi_1 = \phi$, генерисан Хамилтонијаном H тада је $f^{-1} \circ \phi_t \circ f$ ток Хамилтонових дифеоморфизама генерисан Хамилтонијаном $H \circ f$. Па ће и $f^{-1} \circ \phi \circ f$ бити Хамилтонов дифеоморфизам. □

3.2 Лијева алгебра и група $\mathrm{Ham}(M,\omega)$

Дефиниција 3.2.1. Група $(G,\cdot)$ која је глатка многострукост и у којој су операције $\cdot : G \times G \to G$ и $(\cdot)^{-1} : G \to G$ глатке назива се Лијевом групом.

Дефиниција 3.2.2. Векторски простор V над пољем $\mathbb{K}$ снабдевен бинарном билинеарном кососиметричном операцијом $[\cdot,\cdot]$ која задовољава Јакобијев идентитет, односно за коју важи:
(i) $[aA + bB, C] = a[A,C] + b[B,C],\ a,b \in \mathbb{K},\ A,B,C \in V$
(ii) $[A,B] = -[B,A],\ A,B \in V$
(iii) $0 = [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B],\ A,B,C \in V$
назива се Лијевом алгебром.

Ако је $\{e_1,\dots,e_n\}$ произвољна база алгебре V тада је производ два базна елемента линеарна комбинација елемената базе: $e_i\,e_j=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^k e_k$ где се коефицијенти $c_{ij}^k\in\mathbb{K}$ називају структурне константе.

Дефиниција 3.2.3. Лијева алгебра $L(G)$ Лијеве групе G је тангентни простор у јединичном елементу, при чему је комутатор одређен структурним константама c_{ij}^k координатног базиса карте са каноничним координатама.

Од користи ће нам бити да $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ видимо као Лијеву групу. Заправо, $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ можемо да посматрамо као Лијеву подгрупу у групи свих дифеоморфизама на многострукости M. Лијеву алгебру Лијеве групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ ће чинити векторска поља ξ на M облика

$$\xi(x)=\frac{d}{dt}\phi_t x|_{t=0},$$

где је $\{\phi_t\}$ гладак пут на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ за који је $\phi_0=\mathrm{Id}$. Свако овакво векторско поље је Хамилтоново. Важи, $\xi=\operatorname{sgrad}H_0(x)$, где је $H(x,t)$ јединствени нормализовани Хамилтонијан који генерише пут $\{\phi_t\}$. Приметимо да $H_0=H(\cdot,0)\in\mathcal{H}(M)$. Може да се успостави и обрнута веза. За сваку функцију $H\in\mathcal{H}(M)$ векторско поље $\operatorname{sgrad}H$ је по дефиницији извод у тачки $t=0$ одговарајућег Хамилтоновог тока. Закључујемо да Лијеву алгебру групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ можемо идентификовати са $\mathcal{H}(M)$.

Дефиниција 3.2.4. Лево (десно) дејство Лијеве групе G на многострукост M је глатко пресликавање

$$M\times G\to M,\ (x,g)\mapsto g\cdot x$$

које задовољава услове: $e\cdot x=x$ и $g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x$ (односно $g\cdot(h\cdot x)=(hg)\cdot x$).

Сада желимо да конструишемо једно дејство Лијеве групе на Лијеву алгебру. Нека је $f\in\mathrm{Ham}(M,\omega)$ и G елемент Лијеве алгебре $\mathcal{H}(M)$. Нека је $\{g_t\}$, $g_0=\mathrm{Id}$ пут елемената Лијеве групе који је тангентан на G. То значи да је нормализован Хамилтонијан који генерише ток $\{g_t\}$ у тренутку $t=0$ једнак G. Дејство елемента f на G је по дефиницији:

$$\mathrm{Ad}_f\,G=\frac{d}{dt}(fg_tf^{-1})|_{t=0}.$$

Диференцирањем се добије да је векторско поље на десној страни $f_*\operatorname{sgrad}G$, тј. $\operatorname{sgrad}(G\circ f^{-1})$, па је ово дејство у ствари:

$$\mathrm{Ad}_f\,G=G\circ f^{-1}.$$

Дејство групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ на алгебру $\mathcal{H}(M)$ је дејство дифеоморфизма на функцију.

Преостаје нам да дефинишемо Лијеве заграде на алгебри $\mathcal{H}(M)$. Нека су $F,G\in\mathcal{H}(M)$ произвољни елементи и нека је $\{f_t\}$, $f_0=\mathrm{Id}$ пут Хамилтонових дифеоморфизама тангентан на F у тачки $t=0$. Лијева заграда $\{F,G\}$ се назива Поасонова заграда и дефинише се са:

$$\{F,G\}=\frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}_{f_t}G)|_{t=0}.$$

Рачунањем израза на десној страни добијемо да важи:

$$\{F,G\}=-dG(\operatorname{sgrad}F)=\omega(\operatorname{sgrad}G,\operatorname{sgrad}F).$$

3.3 Алгебарске особине групе $\mathrm{Ham}(M, \omega)$

Сада нас интересују алгебарске особине групе $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Теорема 3.3.1. Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост. Тада је група $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ проста.

Доказ. [1], [2]. □

Тврђење 3.3.1. Нека су $\{\phi_t\}$ и $\{\chi_t\}$ Хамилтонови токови генерисани нормализованим временски зависним Хамилтонијанима H и G. Ако је $\phi_t \chi_t = \chi_t \phi_t$ за свако $t \in I$ тада је $\{H, G\} = 0$.

Доказ. Из једнакости Хамилтонових токова $\phi_t \chi_t$ и $\chi_t \phi_t$ следи једнакост њихових нормализованих Хамилтонијана у свакој тачки и за свако t:

$$H(x) + G(\phi_t^{-1}(x)) = G(x) + H(\chi_t^{-1}(x)).$$

Диференцирањем релације по t добијамо:

$$dG(-\operatorname{sgrad} H) = dH(-\operatorname{sgrad} G)$$

односно $\{H, G\} = \{G, H\}$. Како је Лијева заграда антикомутативна, закључујемо $\{H, G\} = 0$. □

Знамо да је Абелова група проста ако сваки елемент генерише целу групу, па је она циклична група чији је ред прост број. Просте групе се, у општем случају, разликују од Абелових. Следеће тврђење нам показује да гупа $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ није Абелова и даје нам начин да нађемо велики број елемената који не комутирају.

Тврђење 3.3.2. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $U \subset M$ отворен непразан подскуп. Тада постоје $\phi, \chi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ такви да је $\mathrm{supp}(\phi), \mathrm{supp}(\chi) \subset U$ и $\phi\chi \neq \chi\phi$.

Доказ. Изаберимо произвољну тачку $x \in U$ и тангентне векторе $\xi, \eta \in T_x U$ такве да је $\omega(\xi, \eta) \neq 0$. Користећи локалне канонске координате око тачке x можемо наћи функције F и G за које важи $\operatorname{sgrad} F(x) = \xi$ и $\operatorname{sgrad} G(x) = \eta$. Продужимо ове функције са 0 ван скупа U. Ако је M затворена многострукост треба додати константу овим функцијама да би оне задовољавале услов да им је средња вредност једнака 0. Сада нам функције F и G припадају $\mathcal{H}(M)$. Оне су константне ван скупа U, па одговарајући дифеоморфизми ϕ_t и χ_t имају носаче у U. Како је $\{F, G\} \neq 0$, према претходном тврђењу, за неко t дифеоморфизми ϕ_t и χ_t не комутирају. □

Теорема 3.3.2. Нека су (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) затворене симплектичке многострукости чије су групе Хамилтонових дифеоморфизама изоморфне. Тада су многострукости конформно симплектоморфне, односно, постоји дифеоморфизам $f : M_1 \to M_2$ и број $c \neq 0$ тако да важи $f^*\omega_2 = c\,\omega_1$.

Доказ. [2] □

Алгебарска структура групе Хамилтонових дифеоморфизама одређује симплектичку многострукост до на фактор.

3.4 Хоферова метрика

Нека је $L(G)$ Лијева алгебра коначно димензионе Лијеве групе G. За норму $|\cdot|$ на $L(G)$ кажемо да је инваријантна при дејству групе G ако важи

$$|\xi| = |g^{-1}\xi g|$$

за свако $\xi \in L(G)$ и свако $g \in G$. $g^{-1}\xi g$ се дефинише као извод криве $\mathbb{R} \to G$, $t \mapsto g^{-1}\exp(t\xi)\, g$ у тачки $t = 0$. Свака оваква норма даје метрику на G са:

$$d(g_0, g_1) = \inf_g \int_0^1 |\dot{g}(t)g(t)^{-1}|\, dt$$

за $g_0, g_1 \in G$. Инфимум је узет по свим путевима $g : [0,1] \to G$ који повезују $g_0 = g(0)$ и $g_1 = g(1)$.
Природно је поставити питање која од норми $\|\cdot\|_p$ на $\mathcal{H}(M)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, које су дате са $\|H\|_p = \left(\int_M |H|^p\, \omega^n\right)^{\frac{1}{p}}$ дефинише метрику на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Позитиван одговор ће бити само у случају $p = \infty$.

Дефиниција 3.4.1. Нека је $F \in \mathcal{H}(M)$. На $\mathcal{H}(M)$ дефинишемо норму са:

$$\|F\|_\infty = \max_{x\in M} F(x) - \min_{x\in M} F.$$

Тврђење 3.4.1. Норма $\|\cdot\|_\infty$ задовољава

$$\|F \circ \psi^{-1}\|_\infty = \|F\|_\infty$$

за свако $F \in \mathcal{H}(M)$, $\psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$.

Доказ. Како је ψ дифеоморфизам скупови M и $\psi^{-1}(M)$ су једнаки па важи $\max\limits_{x\in M} F(\psi^{-1}x) = \max\limits_{x\in M} F(x)$ и $\min\limits_{x\in M} F(\psi^{-1}x) = \min\limits_{x\in M} F(x)$. Из ових једнакости следи тврђење. □

Дефиниција 3.4.2. Нека је $\{h_t\}$, $t \in [a,b]$, Хамилтонов пут генерисан нормализованим Хамилтонијаном $H(x,t)$. Његову дужину дефинишемо са:

$$l\{h_t\} = \int_a^b \|H_t\|_\infty\, dt.$$

Користићемо и ознаке за позитиван и негативан део дужине пута:

$$l_+\{h_t\} = \|H\|_+ = \int_0^1 \max H_t\, dt,$$

$$l_-\{h_t\} = \|H\|_- = \int_0^1 \min H_t\, dt.$$

Растојање између два Хамилтонова дифеоморфизма се дефинише са:

$$d(\phi, \psi) = \inf\, l\{h_t\}$$

где је инфимум узет по свим Хамилтоновим путевима $\{h_t\}$, $t \in [a,b]$, за које важи $h_a = \phi$ и $h_b = \psi$.

Дужина Хамилтоновог пута не зависи од параметризације па можемо узети да је $a=0$, $b=1$.
Овако дефинисано растојање ће задовољавати следеће особине:

- $d(\phi,\psi)=d(\psi,\phi)$
- $d(\phi,\theta)\leqslant d(\phi,\psi)+d(\psi,\theta)$
- $d(\phi,\psi)\geqslant 0$

Тврђење 3.4.2. Функција d је биинваријантна, важи

$$d(\phi,\psi)=d(\phi\theta,\psi\theta)=d(\theta\phi,\theta\psi)$$

за свако $\phi,\psi,\theta\in \mathrm{Ham}(M,\omega)$.

Доказ. Знамо да ако је $\{h_t\}$ Хамилтонов пут у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ тада је и $\{h_t\theta\}$ Хамилтонов пут за свако $\theta\in\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Дефинишимо скупове $X=\{\,l\{h_t\}\mid h_t\in\mathrm{Ham}(M,\omega),\ h_a=\phi,\ h_b=\psi\,\}$, $Y=\{\,l\{f_t\}\mid f_t\in\mathrm{Ham}(M,\omega),\ f_a=\phi\theta,\ f_b=\psi\theta\,\}$. Видимо да је $d(\phi,\psi)=\inf X$ и да је $d(\phi\theta,\psi\theta)=\inf Y$. Хоћемо да покажемо да важи једнакост скупова X и Y чиме бисмо показали да је и $d(\phi,\psi)=d(\phi\theta,\psi\theta)$. Нека је $x\in X$ произвољан број. Тада постоји Хамилтонов пут $\{h_t\}$, $h_a=\phi$, $h_b=\psi$, који је генерисан неким Хамилтонијаном H. Пут $\{f_t\}=\{h_t\theta\}$ ће бити Хамилтонов пут за који важи $f_a=\phi\theta$, $f_b=\psi\theta$ и биће генерисан Хамилтонијаном $F=H\theta$. При томе ће важити

$$l\{f_t\}=\int_a^b ||F_t||_\infty\,dt=\int_a^b ||H_t\circ\theta||_\infty\,dt=\int_a^b ||H_t||_\infty\,dt=x$$

што значи да x припада и скупу Y. Слично, ако кренемо од произвољног елемента $y\in Y$ којем одговара Хамилтонов пут $\{f_t\}$ и дефинишемо фамилију $\{h_t\}=\{f_t\circ\theta^{-1}\}$ добијамо да је $l\{h_t\}=y$ односно y припада и скупу X. Тиме смо показали једнакост скупова X и Y. На исти начин се показује да важи једнакост $d(\phi,\psi)=d(\theta\phi,\theta\psi)$. □

Овако дефинисана функција d је једна метрика на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Ову теорему је поставио и доказао Хофер у [4] користећи бесконачно димензиони варијациони метод. У [5] је Витербо доказао ову теорему за случај $M=\mathbb{R}^{2n}$ користећи генеришуће функције. У [6] је доказана тоерема за велику класу симплектичких многострукости које имају фине особине у бесконачности. Тај доказ је базиран на Громовљевој теорији псеудохоломорфних кривих, [17]. У [7] је теорема доказана у општем случају помоћу Громовљеве теорије.

Природно је посебно разматрати позитиван и негативан део метрике d:

$$d_+(\mathrm{Id},\phi)=\inf\int_0^1 \max F_t\,dt,$$

$$d_-(\mathrm{Id},\phi)=\inf\int_0^1 (-\min F_t)\,dt,$$

где су инфимуми узети по свим Хамилтоновим токовима $\{\phi_t\}$ који су генерисани нормализованим Хамилтонијаном $F(x,t)$ тако да важи $\phi_1=\phi$. Очигледно је да важи неједнакост $d(\mathrm{Id},\phi)\geqslant d_+(\mathrm{Id},\phi)+d_-(\mathrm{Id},\phi)$. Да ли увек важи једнакост је отворен проблем.

ГЛАВА 4

Геодезијске линије у Хоферовој метрици

4.1 Шта ако је $M = \mathbb{R}^{2n}$

У овој глави ћемо радити са $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ где је ω_0 стандардна форма на $\mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ а $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ су координате на $\mathbb{R}^{2n}$. Знајући да је прва де Рамова кохомологија од $\mathbb{R}^{2n}$ једнака 0, $H^1_{dR}(\mathbb{R}^{2n}) = 0$, можемо закључити да је 2-форма ω_0 тачна, односно да постоји 1-форма λ на $\mathbb{R}^{2n}$ за коју је $\omega_0 = d\,\lambda$. Провером се види да важи $\omega_0 = d(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i)$. У овом случају $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ ћемо идентификовати са $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Навешћемо неке теореме и дефиниције које ће нам требати у овом параграфу.

Теорема 4.1.1. Дарбу Свака симплектичка многострукост је локално симплектоморфна многострукости $(\mathbb{R}^{2n}, \sum dp_i \wedge dq_i)$.

Доказ. Нека је (M, ω) произвољна симплектичка многострукост. Хоћемо да покажемо да за сваку тачку $a \in M$ постоје локалне координате (U, φ), $a \in U$, при чему пресликавање $\varphi : (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto b \in U \subset M$ задовољава услов $\varphi(0) = a$ и $\varphi^*\omega = \omega_0$. Изаберимо око тачке a произвољне локалне координате (V, ψ) у којима је $\psi(0) = a$. Сада форму ω локално можемо посматрати као 2-форму на $\mathbb{R}^{2n}$. Хоћемо да конструишемо дифеоморфизам φ у околини нуле за који важи $\varphi(0) = 0$ и $\varphi^*\omega = \omega_0$.
Посматрајмо фамилију форми:

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0), \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Видимо да је $\omega_t = \omega_0$ за $t = 0$ и да је $\omega_1 = \omega$. Желимо да нађемо фамилију дифеоморфизама φ^t који ће задовољавати услов $\varphi^0 = \mathrm{Id}$ и једначину

$$(\varphi^t)^*\omega_t = \omega_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Дифеоморфизам φ^t за $t = 1$ ће бити тражена функција. Са X_t означимо векторско поље које генерише φ^t као свој ток. Диференцирањем једначине (1) по t видимо да такво векторско поље X_t задовољава идентитет:

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t = (\varphi^t)^*\Big\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\Big\},$$

где смо са L_Y означили Лијев извод векторског поља Y. Користећи Картанову формулу у облику:

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

и из чињенице да је $d\omega_t = 0$ добијамо једначину:

$$0 = (\varphi^t)^* \big\{ d(X_t \lrcorner \omega_t) + \omega - \omega_0 \big\}.$$

Векторско поље X_t ће задовољавати једначину:

$$d(X_t \lrcorner \omega_t) + \omega - \omega_0 = 0. \tag{2}$$

Како је $d(\omega - \omega_0) = 0$ и $H_{dR}(\mathbb{R}^{2n}) = 0$ постојаће 1-форма η за коју је $\omega - \omega_0 = d\eta$ и $\eta(0) = 0$. Даље, из чињенице да је $\omega_t(0) = \omega_0(0)$ 2-форме ω_t су недегенерисане за $0 \leqslant t \leqslant 1$ у некој отвореној околини нуле па постоји јединствено векторско поље X_t одређено условом

$$X_t \lrcorner \omega_t = \omega_t(X_t, \cdot) = -\eta,$$

за $0 \leqslant t \leqslant 1$. То векторско поље нам даје решење једначине (2). Како важи $\eta(0) = 0$ важиће и $X_t(0) = 0$ и постојаће отворена околина нуле на којој ток φ^t од X_t постоји за свако $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тај ток ће задовољавати услов $\varphi^0 = \mathrm{Id}$ и $\varphi^t(0) = 0$. Ако сада кренемо уназад, према начину на који смо конструисали дифеоморфизме φ^t они задовољавају једначину:

$$\tfrac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t = 0, \text{ за } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

па је $(\varphi^t)^*\omega_t = (\varphi^0)^*\omega_0 = \omega_0$ за свако $0 \leqslant t \leqslant 1$. □

Нека је M произвољна многострукост и $\pi : T^*M \to M$ њено котангентно раслојење. Тада

$$\theta(X_p) := p(\pi_* X_p)$$

дефинише канонску 1-форму на T^*M која се зове Лиувилова форма. Форма

$$\omega := -d\theta$$

је недегенерисана 2-форма, и дефинише стандардну симплектичку структуру на T^*M. Нека су (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) симплектичке многострукости. На $M_1 \times M_2$ можемо да дефинишемо симплектичку форму са $\omega = \pi_1^*\omega_1 \pm \pi_2^*\omega_2$ где су π_1 и π_2 пројекције $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ и $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$. Специјално, на $M \times M$ дефинишемо симплектичку форму са $(X, Y) \mapsto \omega(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) - \omega(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$ коју ћемо означавати са $\omega \oplus (-\omega)$.

Дефиниција 4.1.1. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Подмногострукост $j_L : L \hookrightarrow M$ се зове Лагранжева ако је $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$ и $j_L^*\omega = 0$.

Лема 4.1.1. Дифеоморфизам $\psi : M \to M$ је симплектички ако и само ако је његов график $\Gamma = \{\, (p, \psi(p)) \,|\, p \in M \,\}$ Лагранжева подмногострукост у $M \times M$ са симплектичком формом $\omega \oplus (-\omega)$.

Доказ. Лема следи из једнакости $j_\Gamma^*(\omega \oplus (-\omega)) = \omega - \psi^*\omega$. □

Лема 4.1.2. Нека је $\beta : M \to T^*M$ 1-форма на M. Тада је $\beta(M)$ Лагранжева подмногострукост у T^*M ако и само ако је β затворена форма.

Доказ. Показаћемо да је $\beta^*\theta = \beta$ за било коју 1-форму β на M, где је θ Лиувилова форма. $\beta^* : \Omega^1(T^*M) \to \Omega^1(M)$ па ће $\beta^*\theta$ бити 1-форма на M. За произвољан вектор $X_p \in T_pM$ важи:

$$\begin{aligned}\beta^*\theta(p)(X_p) &= \theta(\beta_*(p)X_p) = \beta(p)(\pi_*\beta_*(p)X_p)\\ &= \beta(p)(\mathrm{Id}_{TM} X_p) = \beta(p)X_p,\end{aligned}$$

за свако $p \in M$, $X_p \in T_pM$.
Ако са β означимо утапање $\beta(M)$ у T^*M а са ω стандардну симплектичку форму на T^*M тада је:

$$\beta^*\omega = -\beta^*d\theta = -d\beta^*\theta = -d\beta,$$

па је $\beta^*\omega = 0$ ако и само ако је $d\beta = 0$ што нам и каже ова лема. □

4.1.1 Дефиниција

На $\mathbb{R}^{2n}$ можемо да задамо комплексне координате $x = q + ip$ тако да је симплектичка форма ω_0 облика $dp \wedge dq$. Фиксирајмо Еуклидову метрику на $\mathbb{R}^{2n}$ и посматрајмо производ простора $V = (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_0 \oplus (-\omega_0))$. Нека су (x, X) координате на V и нека је Δ дијагонала у V. Тада V можемо да идентификујемо са котангентним раслојењем $T^*\Delta$ са стандардном симплектичком структуром. Ако су (w, z) канонске координате на $T^*\Delta$ у којима симплектичка форма има облик $dw \wedge dz$, онда је изоморфизам између V и $T^*\Delta$ дат једначинама:

$$\begin{aligned}w &= i(x - X)\\ z &= \frac{x + X}{2}.\end{aligned}$$

Нека је $S \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ произвољна функција. На основу леме 4.1.2 скуп $\{\, w = \nabla S(z) \,\}$ је Лагранжева подмногострукост у V. Постоји конвексна C^2-околина тачке 0 у $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$, коју ћемо означити са $\mathcal{S}$, тако да је за свако $S \in \mathcal{S}$ подмногострукост $\{\, w = \nabla S(z) \,\}$ график неког симплектоморфизма φ на $\mathbb{R}^{2n}$. Овај симплектоморфизам је дат једначином:

$$i(x - \varphi x) = \nabla S\Big(\frac{x + \varphi x}{2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3}$$

У том случају кажемо да је S генеришућа функција за φ.
Ако је пресликавање $\varphi : (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = \varphi(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ блиско идентичном пресликавању и ако је S његова генеришућа функција тада ће важити:

$$\begin{aligned}x &= \xi + \frac{\partial}{\partial y} S(\xi, y)\\ \eta &= y + \frac{\partial}{\partial \xi} S(\xi, y).\end{aligned}$$

Означимо са Φ пресликавање, $\Phi : \mathcal{S} \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, које свакој функцији S додељује одговарајући симплектички дифеоморфизам φ. Означимо са $\mathcal{D}$ слику пресликавања Φ

која је C^1-околина идентичног пресликавања у $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Знамо да су $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ снабдевени Хоферовим растојањем и нормом $||\cdot||_\infty$. Касније ћемо показати да је овакво пресликавање Φ изометрија скупа $\mathcal{S}$ на $\mathcal{D}$.

Дефиниција 4.1.2. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ повезан подскуп са непразном унутрашношћу. Гладак пут $c : I \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ је регуларан ако је $\dot{c}(t) \neq 0$ за свако $t \in I$.

Дефиниција 4.1.3. Нека је $\gamma : I \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ гладак регуларан пут. Тада кажемо да је:
(а) γ минимална геодезијска ако за свако $a, b \in I$, $a < b$, важи:

$$l(\gamma|_{[a,b]}) = d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

(б) γ геодезијска ако за свако $t \in I$ постоји околина $U \subset I$, $t \in U$, таква да је $\gamma|_U$ минимална геодезијска.

Тврђење 4.1.1. Нека је $H : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ глатка функција са компактним носачем. Тада су следећа тврђења еквивалентна:
(i) $\displaystyle\int_a^b \|H_t\|_\infty \, dt = \Big\| \int_a^b H(t, x) \, dt \Big\|_\infty$, где смо са $H_t(x)$ означили $H(t, x)$.
(ii) Постоје две тачке $x_-, x_+ \in \mathbb{R}^{2n}$ такве да је $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^{2n}} H_t(x) = H_t(x_+)$ и $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^{2n}} H_t(x) = H_t(x_-)$ за свако $t \in [a, b]$.

Доказ. Очигледно је да важи $(ii) \Rightarrow (i)$. Докажимо супротан смер. Нека важи (i). Означимо са $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ компактан скуп који садржи носаче од H_t за свако t. Нека је $K_t = \{x \in K \mid \max\limits_{y \in \mathbb{R}^{2n}} H_t(y) = H_t(x)\}$. Тврдимо да је $\bigcap\limits_{t \in [a,b]} K_t$ непразан скуп. Како је K_t компактан скуп довољно је проверити да ли је за сваки коначан низ $t_1 < \ldots < t_N$ пресек $K_{t_1} \cap \ldots \cap K_{t_N}$ непразан. Претпоставимо да за неки низ $t_1 < \ldots < t_N$ важи $K_{t_1} \cap \ldots \cap K_{t_N} = \emptyset$. Тада је:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^{2n}} [H(t_1, x) + \ldots + H(t_N, x)] < \sum_{j=1}^{N} \max_{x \in \mathbb{R}^{2n}} H(t_j, x) - \varepsilon$$

за неко $\varepsilon > 0$, па постоји отворен подскуп $A \subset [a, b]$ такав да је:

$$\int_A \|H_t\|_\infty \, dt > \Big\| \int_A H_t \, dt \Big\|_\infty.$$

Са друге стране, за подскуп $B = [a, b] \backslash A$ важи:

$$\int_B \|H_t\|_\infty \, dt \geqslant \Big\| \int_B H_t \, dt \Big\|_\infty.$$

Када саберемо ове две неједнакости, користећи неједнакост троугла за норму $\|\cdot\|_\infty$, добијемо да је $\int_{A \cup B} \|H_t\|_\infty \, dt > \| \int_{A \cup B} H_t \, dt \|_\infty$ а то је контрадикција са (i). $\square$

Дефиниција 4.1.4. Функција H која задовољава услов (i) или (ii) из претходне теореме се назива квази-аутономна. Кажемо да је H локално квази-аутономна функција ако за свако $t \in I$ постоји околина U, $U \subset I$, тачке t таква да је функција $H : U \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ квази-аутономна.

4.1.2 Минималне геодезијске

Дефинисаћемо спектар дејства и видети шта је то бифуркациони дијаграм. Користећи ове појмове показаћемо које особине мора да задовољава гладак пут да би био минимална геодезијска.
Нека је $\varphi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ Хамилтонов дифеоморфизам и нека је $g : [a, b] \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ гладак пут који спаја Id и φ. Нека је $H(t, x)$ Хамилтонијан који генерише g. Означимо са $\mathrm{Fix}(\varphi)$ скуп фиксних тачака пресликавања φ, и за свако $x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$ означимо $g_x(t) = g(t)x$. Нека је λ примитивна форма симплектичке форме ω.

Дефиниција 4.1.5. Дејство фиксне тачке $x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$ се дефинише са:

$$\mathcal{A}(x, \varphi) = \int_a^b g_x^* \lambda - H(t, g_x(t))\, dt.$$

Спектар дејства $\sigma(\varphi)$ је скуп $\{\mathcal{A}(x, \varphi) \mid x \in \mathrm{Fix}(\varphi)\}$.

Ако са J означимо матрицу димензије $2n \times 2n$ облика

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

приметимо да важи: $\omega_0(x)(u, v) = \langle Ju, v\rangle$ за свако $u, v \in T_x\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$, где је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ознака за стандардни Еуклидски скаларни производ. Знамо да произвољни Хамилтонов дифеоморфизам φ чува симплектичку форму па је $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$. Познато је да φ^* на произвољну 2-форму делује као:

$$(\varphi^*\eta)_x(u, v) = \eta_{\varphi(x)}(\varphi'(x)u, \varphi'(x)v)$$

за свако $x \in \mathbb{R}^{2n}$ и $u, v \in T_x\mathbb{R}^{2n}$. Овде $\varphi'(x)$ означава извод пресликавања φ у тачки x репрезентован Јакобијевом матрицом.
На почетку главе смо споменули да важи $\omega_0 = d\,\lambda$ где је λ 1-форма дата са $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i\, dq_i$. Тада је $d(\lambda - \varphi^*\lambda) = d\,\lambda - \varphi^*\, d\lambda = \omega_0 - \omega_0 = 0$, односно $\lambda - \varphi^*\lambda$ је затворена форма. Како се налазимо у $\mathbb{R}^{2n}$ постојаће функција $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ за коју важи: $\lambda - \varphi^*\lambda = d\,F$. Ако је γ произвољна оријентисана затворена крива у $\mathbb{R}^{2n}$, интеграл форме λ по њој ће бити:

$$\int_\gamma \lambda = \int_\gamma (\varphi^*\lambda + d\,F) = \int_\gamma \varphi^*\lambda + \int_\gamma d\,F = \int_\gamma \varphi^*\lambda = \int_{\varphi(\gamma)} \lambda.$$

У претпоследњем кораку смо искористили Стоксову теорему и прешли на интеграл функције F по граници криве γ која не садржи ни једну тачку јер је крива затворена. Ако посматрамо форму $\lambda' = \sum_{i=1}^n q_i\, dp_i$ видимо да важи $\omega_0 = -d\,\lambda'$ односно $d(\lambda + \lambda') = 0$. Као и мало пре, постојаће функција G за коју је $\lambda + \lambda' = dG$ па је $\int_\gamma (\lambda + \lambda') = \int_\gamma dG = 0$. Ако криву γ параметризујемо параметром t: $x(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, важиће следеће једнакости:

$$\int_\gamma \lambda = \frac{1}{2}\Big(\int_\gamma \lambda + \int_\gamma \lambda\Big) = \frac{1}{2}\Big(\int_\gamma \lambda - \int_\gamma \lambda'\Big) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n p_i(t)\, dq_i(t) - \sum_{i=1}^n q_i(t)\, dp_i(t)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{i=1}^n \big(p_i(t)\dot{q}_i(t) - q_i(t)\dot{p}_i(t)\big)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \langle -J\dot{x}(t), x(t)\rangle\, dt.$$

Користећи претходно изведено својство дејство фиксне тачке можемо да пишемо и у облику:

$$\mathcal{A}(x,\varphi)=\frac{1}{2}\int_a^b\langle -J\dot{x}(t),x(t)\rangle\,dt-\int_a^b H(t,x(t))\,dt$$

где смо са $x(t)$ означили $g(t)x$.

Дефиниција дејства не зависи од избора пута који повезује Id и пресликавање φ већ само од фиксне таче x и дифеоморфизма φ. Претпоставићемо на даље да је $a=0$, $b=1$ и нека су g и f два пута у $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ која повезују Id и φ. Означимо са $H(t,x)$ и $F(t,x)$ Хамилтонијане који их генеришу. Нека је:

$$\mathcal{A}_H(x,\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^1\langle -J\dot{g}_x(t),g_x(t)\rangle\,dt-\int_0^1 H(t,g_x(t))\,dt,$$
$$\mathcal{A}_F(x,\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^1\langle -J\dot{f}_x(t),f_x(t)\rangle\,dt-\int_0^1 F(t,f_x(t))\,dt.$$

Дефинишимо део по део глатку криву $t\mapsto\psi^t(x)$ у $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, $0\leqslant t\leqslant 2$, са:

$$\psi^t(x)=\begin{cases} g(t)x, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ f(2-t)x, & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}.$$

Тада је за свако $x\in\mathbb{R}^{2n}$ пресликавање $t\mapsto\psi^t(x)$ петља јер је $\psi^0(x)=g(0)x=\mathrm{Id}(x)=x$ и $\psi^2(x)=f(0)x=\mathrm{Id}(x)=x$. Са $\Delta(x)$ означимо функцију:

$$\Delta(x)=\frac{1}{2}\int_0^2\langle -J\dot{x}(t),x(t)\rangle\,dt-\int_0^1 H(t,x(t))\,dt+\int_1^2 F(2-t,x(t))\,dt,$$

где је $x(t)=\psi^t(x)$. Пресликавање $x\mapsto\Delta(x)$ је глатко и диференцирањем по x добијамо:

$$\Delta'(x)h=\int_0^2\langle -J\dot{x}(t),d\psi^t(x)h\rangle\,dt-\int_0^1\langle\nabla H(t,\psi^t(x)),d\psi^t(x)h\rangle\,dt+\int_1^2\langle\nabla F(2-t,\psi^t(x))\rangle,d\psi^t(x)h\rangle\,dt.$$

Важиће $\Delta'(x)h\equiv 0$ јер је ψ^t генерисан Хамилтонијаном H на $[0,1]$ и Хамилтонијаном $-F(2-t,\cdot)$ на $[1,2]$. Када је $\|x\|$ довољно велико важиће и $\Delta(x)=0$ јер и H и F имају компактне носаче. Дакле, $\Delta(x)\equiv 0$. Одатле следи да је:

$$\Delta(x)=\mathcal{A}_H(x,\varphi)-\mathcal{A}_F(x,\varphi)=0,$$

односно $\mathcal{A}(x,\varphi)$ не зависи од избора пута g.

Како Хамилтонијан H има компактан носач за довољно велико $\|x\|$ које је фиксна тачка дифеоморфизма φ важиће $\mathcal{A}(x,\varphi)=0$ па $0\in\sigma(\varphi)$. Испоставља се да је скуп $\sigma(\varphi)\subset\mathbb{R}$ компактан и нигде густ ([8]).

Дефиниција 4.1.6. Бифуркациони дијаграм глатког пута $g:[a,b]\to\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$ је скуп

$$\Sigma(g)=\{(t,y)\in\mathbb{R}^2\mid t\in(a,b],\ y\in\sigma(g(t)g(a)^{-1})\}.$$

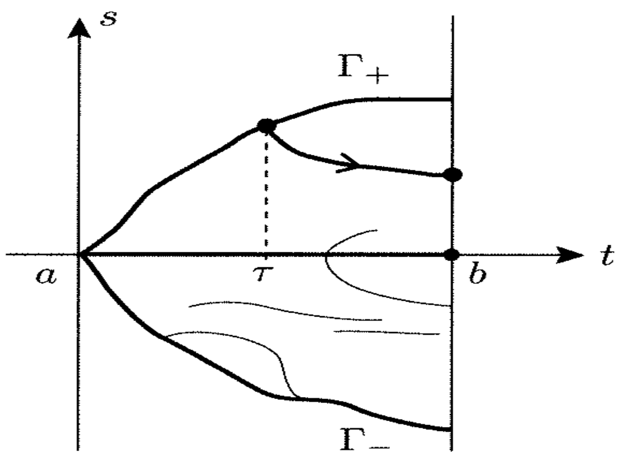
Приметимо да је вредност $t = a$ искључена. Крива $\Gamma(t) = (t, 0)$ сигурно припада бифуркационом дијаграму зато што Хамилтонијан који генерише пут g има компактан носач.
Нека је сада $g : [a, b] \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ регуларан пут генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном H. Постојаће две раздвојене фиксне тачке $x_+, x_- \in \mathrm{Fix}(g(t)g(a)^{-1})$ за свако $t \in [a, b]$. Дејства ових тачака су функције $\gamma_+, \gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ које дефинишемо са:

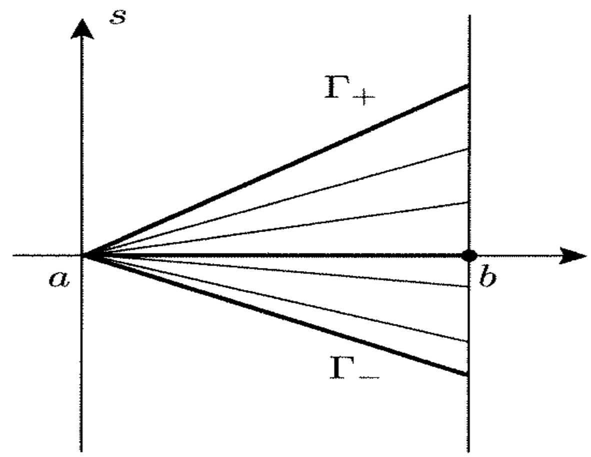
$$\gamma_+(t) = -\int_a^t \min_x H_s \, ds, \qquad \gamma_-(t) = -\int_a^t \max_x H_s \, ds.$$

Приметимо да је $\gamma_-(t) \leqslant 0 \leqslant \gamma_+(t)$. Одговарајући графици $\Gamma_\pm(t) = (t, \gamma_\pm(t))$ су раздвојене, непрекидне криве које припадају бифуркационом дијаграму $\Sigma(g)$.

Дефиниција 4.1.7. Нека је $g : [a, b] \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ регуларан пут генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном. Кажемо да је бифуркациони дијаграм $\Sigma(g)$ прост ако су задовољени следећи услови:
(1) Или је $\gamma_+(t) \equiv 0$ или за свако $\tau > a$ и за сваку непрекидну функцију $u : [\tau, b] \to \mathbb{R}$ такву да је $\mathrm{graph}(u) \subset \Sigma(g)$ и $u(\tau) = \gamma_+(\tau)$ важи $u(b) \geqslant \gamma_+(b)$.
(2) Или је $\gamma_-(t) \equiv 0$ или за свако $\tau > a$ и за сваку непрекидну функцију $u : [\tau, b] \to \mathbb{R}$ такву да је $\mathrm{graph}(u) \subset \Sigma(g)$ и $u(\tau) = \gamma_-(\tau)$ важи $u(b) \leqslant \gamma_-(b)$.

На слици 3. је приказан пример бифуркационог дијаграма који није прост (лево) и пример једног простог бифуркационог дијаграма (десно).





Слика 3. Бифуркациони дијаграми

Означимо са $\mathcal{H}$ скуп $C_0^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^{2n})$ и за свако $H \in \mathcal{H}$ означимо са φ_H дифеоморфизам одговарајућег Хамилтоновог тока.

Тврђење 4.1.2. Постоји непрекидна функција $\gamma : \mathcal{H} \to [0, +\infty)$ са особинама:
(1) Ако је $\varphi_H = \varphi_K$ тада је $\gamma(H) = \gamma(K)$.
(2) $\gamma(H) \in \sigma(\varphi_H)$ за свако $H \in \mathcal{H}$.
(3) Ако је $H \leqslant K$ тада је $\gamma(H) \geqslant \gamma(K)$.
(4) $\gamma(0) = 0$ и ако је $H \leqslant 0$ и $H \neq 0$ тада је $\gamma(H) > 0$.

Скица доказа. Објаснићемо како се дефинише пресликавање γ а детаљан доказ се може наћи у [8].
Означимо са $E = H^{1/2}(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ Хилбертов простор функција

$$E = \{x \in L^2(S^1) \mid \sum_{j\in\mathbb{Z}} |j| \cdot |x_j|^2 < \infty\}$$

где је $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi Jt} x_j$, $x_j \in \mathbb{R}^{2n}$, Фуријеов ред функције x који конвергира у $L^2(S^1)$. Овај простор се разлаже на ортогоналну суму $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$. У E^-, E^0, E^+ ће се налазити, редом, они елементи x који имају Фуријеове коефицијенте само за $j < 0$, $j = 0$, $j > 0$. Свако $x \in E$ ће се разлагати на $x = x^- + x^0 + x^+$. Дефинишимо функције:

$$\begin{aligned}
a(x) &= \frac{1}{2}\|x^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2, \\
b_H(x) &= \int_0^1 H(t, x(t))\, dt, \\
a_H(x) &= a(x) - b_H(x).
\end{aligned}$$

Дефинисаћемо једну групу G хомеоморфизама на простору E. Хомеоморфизам h припада групи G ако h и h^{-1} сликају ограничене скупове на ограничене скупове. Даље, потребно је да постоје непрекидна пресликавања $\gamma^{\pm} : E \to \mathbb{R}$ и $k : E \to E$ која сликају ограничене скупове у прекомпактне скупове (затворење оваквих скупова је компактан скуп). Потребно је да постоји $r = r(h)$ тако да су задовољени следећи услови:

$$k(x) = 0, \quad \gamma^{\pm}(x) = 0$$

за свако $x \in E^+$, $\|x\| \geqslant r$. Додатно, мора да важи:

$$h(x) = e^{\gamma^+(x)} x^+ + x^0 + e^{\gamma^-(x)} x^- + k(x)$$

за свако $x \in E$.
Дефинишимо фамилију $\mathcal{F} = \{h(E^+) \mid h \in G\}$.
Сада пресликавање γ дефинишемо са:

$$\gamma(H) = \sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in F} a_H(x),$$

за свако $H \in \mathcal{H}$. $\square$

Приметимо да на основу особине (1) γ индукује функцију на $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ за коју ћемо користити исту ознаку. У [8] је показано да ова функција зависи само од класе конјугације симплектоморфизма из $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ и са Хоферовом метриком је повезана на следећи начин:

Тврђење 4.1.3. За свако $\psi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ важи:

$$d(\mathrm{Id}, \psi) \geqslant \gamma(\psi) + \gamma(\psi^{-1}).$$

Скица доказа. Главна идеја овде је показати да за свако $\varphi, \psi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ важи неједнакост: $\gamma(\varphi \circ \psi) \leqslant \gamma(\varphi) + d_-(\mathrm{Id}, \psi)$. Ако је $\varphi = \varphi_H^1$ и $\psi = \psi_K^1$ тада је:

$$\gamma(\varphi \circ \psi) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in F} \big[a_H(x) - \int_0^1 K_t((\varphi_H^t)^{-1}(x))\, dt \big]$$
$$\leqslant \gamma(\varphi) + \int_0^1 (-\inf_x K_t)\, dt \leqslant \gamma(\varphi) + d_-(\mathrm{Id}, \psi).$$

Специјално за $\varphi = \mathrm{Id}$, знајући да је $d_+(\mathrm{Id}, \psi) = d_-(\mathrm{Id}, \psi^{-1})$, добијамо:

$$\gamma(\psi) + \gamma(\psi^{-1}) \leqslant d_-(\mathrm{Id}, \psi) + d_-(\mathrm{Id}, \psi^{-1}) = d_-(\mathrm{Id}, \psi) + d_+(\mathrm{Id}, \psi) \leqslant d(\mathrm{Id}, \psi).$$

Детаљи доказа се могу наћи у [8]. □

Да би видели каква је функција γ израчунаћемо њене вредности у неким конкретним случајевима. Означимо са $\mathcal{R}$ скуп свих глатких, нерастућих функција скока $\rho : [0, +\infty) \to [0, 1]$ таквих да је $\rho \equiv 1$ на $[0, \lambda]$ и $\rho \equiv 0$ на $[\lambda + \delta, +\infty)$ за неко $\lambda, \delta > 0$. Означимо са $\mathcal{R}_{\lambda,\delta}$ скуп функција ρ из $\mathcal{R}$ које одговарају фиксираним вредностима λ и δ. Нека је $\mathcal{U}$ скуп свих глатких функција $a : [0, 1] \to (-\infty, 0]$ које нису идентички једнаке 0, и са $\langle a \rangle$ означимо вредност $-\int_0^1 a(t)\, dt$.
За $a \in \mathcal{U}$, $\rho \in \mathcal{R}$ дефинишемо Хамилтонијан:

$$H_{(a,\rho)}(t, x) = (a(t) + \pi |x|^2) \rho(|x|^2).$$

Даље, за функцију $H \in \mathcal{H}$ означимо са $\sigma_-(H) = \inf\{s \in \sigma(\varphi_H) \mid s > 0\}$. Знамо да је $\inf \emptyset = +\infty$. Приметимо да ако је $\sigma_-(H)$ коначно, онда $\sigma_-(H) \in \sigma(\varphi_H)$ јер је спектар дејства компактан.
Нека је $a \in \mathcal{U}$, $\lambda > \frac{\langle a \rangle}{\pi}$, δ довољно мало и $\rho \in \mathcal{R}_{\lambda,\delta}$.

Лема 4.1.3. Постоји фамилија $a_s \in \mathcal{U}$, $\rho_s \in \mathcal{R}$, $s \in [0, 1]$, таква да је:
(1) $a_1 = a$, $\rho_1 = \rho$.
(2) Функција $H_{(a_0,\rho_0)}$ је непозитивна и није идентички једнака нули.
(3) $\sigma_-(H_{(a_s,\rho_s)}) \geqslant \frac{\langle a \rangle}{2} > 0$.

Лема 4.1.4. Важи неједнакост: $\sigma_-(H_{(a,\rho)}) \geqslant \langle a \rangle$.

Докази. Претпоставимо да је δ довољно мало у односу на $\langle a \rangle$.
1. корак: Опис деформације
Нека је λ_s растућа непрекидна функција таква да је: $\lambda(0) = \frac{\langle a \rangle}{\pi} - \delta$, $\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{\langle a \rangle}{\pi} + 2\delta$, $\lambda(1) = \lambda$. Одаберимо непрекидну фамилију $\rho_s \in \mathcal{R}$ тако да $\rho_s \in \mathcal{R}_{\lambda_s,\delta}$ за свако s. Одаберимо и непрекидну фамилију $a_s \in \mathcal{U}$ такву да је:

$$a_s(t) = -\langle a \rangle, \ \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$$
$$a_s(t) = (2s - 2)\langle a \rangle + (2s - 1)a, \ \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Директно добијамо да важе особине (1) и (2) из леме 4.1.3.
2. корак: Рачунање спектра дејства

Нека су $u \in \mathcal{U}$ и $\rho \in \mathcal{R}$ произвољне функције. Да бисмо израчунали спектар дејства од φ_H за $H = H_{(u,\rho)}$ уведимо функцију:

$$f(t,\tau) = (u(t) + \pi\tau)\rho(\tau).$$

Хамилтонове једначине за $H = H(t,p,q)$ су: $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ и $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, што нам даје

$$\dot{x} = 2f'(t, |x|^2) \cdot ix$$

где на $\mathbb{R}^{2n}$ имамо комплексне координате $x = p + iq$ и f' означава извод функције по τ. За свако решење имамо $|x(t)|^2 = \tau = Const$ и таква решења се могу написати у облику:

$$x(t) = x(0)\exp\{2\int_0^t f'(z,\tau)\,dz \cdot i\}.$$

Видимо да је $x(t)$ периодична орбита ако и само ако је:

$$\int_0^1 f'(z,\tau)\,dz = \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

односно, ако је

$$\pi\rho(\tau) + \rho'(\tau)(\pi\tau - \langle u \rangle) = \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Показаћемо да је допринос такве орбите спектру дејства од φ_H дат са:

$$\pi k\tau + \rho(\tau)(\langle u \rangle - \pi\tau). \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x,\varphi_H) &= \int_0^1 \frac{1}{2}\langle -J\dot{x}(t), x(t)\rangle - \int_0^1 H(t,x(t))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (q\dot{p} - p\dot{q})\,dt - \int_0^1 (u(t) + \pi|x|^2)\rho(|x|^2)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{q(-2f'(t,\tau)\cdot q - p\cdot 2f'(t,\tau)\cdot p\right\}dt - \rho(\tau)(-\langle u \rangle) - \pi\tau\cdot\rho(\tau) \\
&= -\int_0^1 f'(t,\tau)(q^2+p^2)\,dt + \rho(\tau)(\langle u \rangle - \pi\tau) \\
&= -\tau\int_0^1 \left\{u(t)\rho'(\tau) + \pi\rho(\tau) + \pi\tau\rho'(\tau)\right\}dt + \rho(\tau)(\langle u \rangle - \pi\tau) \\
&= -\tau\rho'(\tau)(\pi\tau - \langle u \rangle) - \pi\tau\rho(\tau) + \rho(\tau)(\langle u \rangle - \pi\tau) \\
&= -k\pi\tau + \rho(\tau)(\langle u \rangle - \pi\tau).
\end{aligned}$$

3. корак: Финални аргумент

Преостаје нам да проверимо особину (3) из леме 4.1.3 и да покажемо да важи неједнакост из леме 4.1.4. Приметимо да је $\langle a_s \rangle = \langle a \rangle$ за свако s. (4) нам даје да се свака тачка спектра дејства симплектоморфизма који је генерисан са $H_{(a_s,\rho_s)}$ може написати у облику

$$I = \pi k\tau + \rho_s(\tau)(\langle a \rangle - \pi\tau)$$

где је τ решење једначине

$$\pi\rho_s(\tau) + \rho_s'(\tau)(\pi\tau - \langle a\rangle) = \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Треба показати да свако позитивно I задовољава неједнакост $I \geqslant \frac{\langle a\rangle}{2}$ за $s < 1$ и $I \geqslant \langle a\rangle$ за $s = 1$. На даље ћемо претпоставити да је $I > 0$. Можемо да разликујемо неколико случајева.
(i) Нека је $s \in [0, \frac{1}{2}]$.
Ако је $\pi\tau \geqslant \langle a\rangle$ тада је $I = \pi(k-1)\tau + (1-\rho_s(\tau))\pi\tau + \rho_s(\tau)\langle a\rangle > 0$. Закључујемо да је $k > 0$ па је $I \geqslant \langle a\rangle$.
Ако је $\langle a\rangle - \delta\pi < \pi\tau < \langle a\rangle$ тада на основу (5) видимо да је $k > 0$, а како је δ довољно мало добијамо $I \geqslant \pi\tau \geqslant \frac{\langle a\rangle}{2}$.
Ако је $\pi\tau \leqslant \langle a\rangle - \delta\pi$ онда је $\rho_s(\tau) = 1$, $\rho_s'(\tau) = 0$ па је на основу (5) $k = 1$. У овом случају је $I = \langle a\rangle$.
(ii) Нека је $s \geqslant \frac{1}{2}$.
Ако је $\pi\tau \geqslant \langle a\rangle$ тада је $I \geqslant \langle a\rangle$ као и у претходном случају.
Ако је $\pi\tau \leqslant \langle a\rangle$ тада је $\rho_s(\tau) = 1$, $\rho_s'(\tau) = 0$ и $I = \langle a\rangle$ на основу (5).
Овим је доказ завршен. □

Тврђење 4.1.4. Нека је $\lambda > \frac{\langle a\rangle}{\pi}$ и δ довољно мало. Тада за свако $\rho \in \mathcal{R}_{\lambda,\delta}$ важи:

$$\gamma(H_{(a,\rho)}) \geqslant \langle a\rangle.$$

Доказ. Означимо са $b(s) = \gamma(H_{(a_s,\rho_s)})$. $b(s)$ је непрекидна функција таква да је или $b(s) = 0$ или је $b(s) \geqslant \sigma_-(H_{(a_s,\rho_s)})$ (особина (2) из тврђења 4.1.2). На основу особине (4) из истог тврђења и особине (2) леме 4.1.3 важи $b(0) > 0$. Даље, $b(s) > 0$ за свако s на основу својства (3) из леме 4.1.3, па је $b(1) \geqslant \langle a\rangle$ из леме 4.1.4. Тиме је тврђење доказано. □

Тврђење 4.1.5. Нека је $g : [0,1] \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ регуларан пут на $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном $H(t,x)$. Претпоставимо да је $g(0) = \mathrm{Id}$. Тада постоји $\varepsilon > 0$ тако да је за свако $t < \varepsilon$:

$$\gamma(g(t)) \geqslant -\int_0^t \min H_s\, ds.$$

Доказ. Фиксирајмо довољно мало $\varepsilon > 0$ и означимо са

$$F(t,x) = \varepsilon H(\varepsilon t, x), \;\; t \in [0,1].$$

Очигледно $F \in \mathcal{H}$ и $\varphi_F = g(\varepsilon)$. Треба доказати да је

$$\gamma(F) \geqslant -\int_0^1 \min F_t\, dt.$$

Нека је је $x_- \in \mathbb{R}^{2n}$ тачка таква да је $\min F_t = F_t(x_-)$ за свако t. Претпоставимо, без губитка општости да је $x_- = 0$. Тада постоји функција скока $\rho \in \mathcal{R}_{\lambda,\delta}$ (где је λ довољно велико) тако да је

$$F(t,x) \leqslant [F(t,x_-) + \pi|x|^2]\,\rho(|x|^2),$$

за свако $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ (овде смо користили чињеницу да је ε довољно мало). Знајући да је γ монотона функција из тврђења 4.1.4 закључујемо да је $\gamma(F) \geqslant -\int_0^1 F(t, x_-)\, dt$. □

Сада ћемо формулисати и показати најважнију теорему ове секције.

Теорема 4.1.2. Нека је g регуларан пут на $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном. Претпоставимо да је бифуркациони дијаграм од g прост. Тада је g минимална геодезијска на $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Доказ. Без губитка општости можемо претпоставити да је g параметризовано параметром $t \in [0,1]$ и да је $g_0 = \mathrm{Id}$. Тврдимо да ако је бифуркациони дијаграм од g прост, онда је $\gamma(g_1) \geqslant \gamma_+(1)$. Разматраћемо два случаја.
(1) Ако је $\gamma_+(t) \equiv 0$ тада је $H(t,x) \geqslant 0$ па нам монотоност од γ даје $\gamma(g_t) \equiv 0$ па је и $\gamma(g_1) = 0$.
(2) Нека је $\gamma_+(t) \neq 0$. На основу тврђења 4.1.5 видимо да је $\gamma(g_t) \geqslant \gamma_+(t)$ за довољно мало t. Претпоставимо супротно, да је $\gamma(g_1) < \gamma_+(1)$. Тада функција $u(t) = \min\{\gamma(g_t), \gamma_+(t)\}$, која је дефинисана на $[\tau, 1]$ за неко τ, нарушава чињеницу да је бифуркациони дијаграм $\Sigma(g)$ прост.
Дакле, тврђење важи.
На сличан начин се показује да је $\gamma(g_1^{-1}) \geqslant -\gamma_-(1)$ јер је $\sigma(f) = -\sigma(f^{-1})$ за свако $f \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Дакле:

$$\gamma(g_1) + \gamma(g_1^{-1}) \geqslant \gamma_+(1) - \gamma_-(1).$$

На основу тврђења 4.1.3 закључујемо:

$$\gamma(g_1) + \gamma(g_1^{-1}) \leqslant d(\mathrm{Id}, g_1) \leqslant l(g) = \gamma_+(1) - \gamma_-(1).$$

Ове неједнакости нам дају $d(\mathrm{Id}, g_1) = l(g)$, па је g минимална геодезијска. □

4.1.3 Геодезијске

Користећи генеришуће функције које смо дефинисали раније показаћемо које особине мора да задовољава неки пут да би био геодезијска.

Тврђење 4.1.6. Хамилтон-Јакобијева једначина
Нека је $\varphi = \{\varphi_t\}$ гладак пут у $\mathcal{D}$ и нека је $H_t(x)$ одговарајући Хамилтонијан. Тада генеришуће функције S_t од φ_t задовољавају једначину:

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(y) = H_t(y + \frac{1}{2} i \nabla S_t(y))$$

за свако $y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Доказ. Нека је $y = \frac{x + \varphi_t x}{2}$. Из дефиниције генеришуће функције закључујемо да је $y + \frac{1}{2} i \nabla S_t(y) = \varphi_t x$. Диференцирањем једначине $i(x - \varphi_t x) = \nabla S_t(\frac{x + \varphi_t x}{2})$ по t и користећи једнакост $\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = \operatorname{sgrad} H(\varphi_t(x)) = -i \nabla H(\varphi_t(x))$ добијамо:

$$\nabla H_t(\varphi_t x) = \nabla \frac{\partial S_t}{\partial t}(y) + \frac{1}{2} \nabla\nabla S_t(y)(i \nabla H_t(\varphi_t x)),$$

и одатле
$$\nabla \frac{\partial S_t}{\partial t}(y) = [\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\nabla\nabla S_t(y) i]\nabla H_t(\varphi_t x).$$
Означимо са $r_t(y) = H_t(y + \frac{1}{2} i \nabla S_t(y))$. Тада је
$$\begin{aligned}\nabla r_t(y) &= [\mathrm{Id} + \frac{1}{2} i \nabla\nabla S_t(y)]^* \nabla H_t(\varphi_t x)\\ &= [\mathrm{Id} - \frac{1}{2} i \nabla\nabla S_t(y)]\nabla H_t(\varphi_t x).\end{aligned}$$

Даље је:
$$\nabla(\frac{\partial S_t}{\partial t}(y) - r_t(y)) \equiv 0.$$
Како и S_t и r_t постају једнаки 0 за довољно велико y, закључујемо да је
$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(y) = r_t(y)$$
а то је требало показати. □

Хамилтон-Јакобијеву једначину можемо да пишемо и у облику: $H(t, \xi, \eta + \frac{\partial}{\partial \xi} S(t, \xi, \eta)) = \frac{\partial}{\partial t} S(t, \xi, \eta)$.

Тврђење 4.1.7. Нека су $S_0, S_1 \in \mathcal{S}$ две генеришуће функције и нека је $S_t = (1-t)S_0 + tS_1$ линеаран пут који их спаја. Тада бифуркациони дијаграм пута $g_t = \Phi(S_t)$ има облик:
$$\Sigma(g) = \{(t, tw) \mid t \in (0,1],\ w \text{ је критична тачка од } S_0 - S_1\}.$$
Важи и да је $\{g_t\}$ генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном и да је $\Sigma(g)$ прост дијаграм.

Доказ. Хоћемо да покажемо да $g_t g_0^{-1}$ нема неконстантних периодичних орбита. Нека је $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ фиксна тачка од $g_\tau g_0^{-1}$ за неко $0 < \tau \leqslant 1$. Нека је $(\xi, \eta) = g_0(x, y)$ за неко $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$. Чињеница да је (ξ, η) фиксна тачка пресликавања $g_\tau g_0^{-1}$ је еквивалентна услову:
$$g_0(x, y) = g_\tau(x, y) = (\xi, \eta).$$
Ову релацију ћемо сада писати у терминима генеришућих функција:
$$\begin{aligned}x &= \xi + \frac{\partial}{\partial y} S_\tau(\xi, y) = \xi + \frac{\partial}{\partial y} S_0(\xi, y),\\ \eta &= y + \frac{\partial}{\partial \xi} S_\tau(\xi, y) = y + \frac{\partial}{\partial \xi} S_0(\xi, y).\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је $\nabla S_\tau(\xi, y) = \nabla S_0(\xi, y)$. Ако погледамо како смо дефинисали функције S_t видимо да важи: $\nabla S_\tau = (1-\tau)\nabla S_0 + \tau \nabla S_1$, односно $\nabla(S_0 - S_1)(\xi, y) = 0$. Користећи ту једнакост видимо да је $\nabla S_t = (1-t)\nabla S_0 + t\nabla S_1 = \nabla S_0$ за свако $t \in [0,1]$. Враћајући се уназад добијамо да је $g_t g_0^{-1}(\xi, \eta) = (\xi, \eta)$ за свако $t \in [0,1]$. Показали смо да су периодична решења од H у '1-1' вези са критичним тачкама функције $S_0 - S_1$.

Такође смо показали да су та периодична решења константна, односно ток $g_t g_0^{-1}$ нема неконстантних периодичних орбита.
Нека је H Хамилтонијан који генерише пут g. Из Хамилтон-Јакобијеве једначине закључујемо да за критичну тачку $(\xi, \eta) = g_0(x, y)$ важи:

$$H(t,\xi,\eta) = H(t,\xi,y+\frac{\partial}{\partial \xi}S_0(\xi,y)) = \frac{\partial}{\partial t}S(t,\xi,y) = \frac{\partial}{\partial t}((1-t)S_0+tS_1)(\xi,y) = (S_1-S_0)(\xi,y).$$

Из ових једнакости следи да је Хамилтонијан квази-аутономан.
Дејство фиксне тачке (ξ, η) која одговара критичној вредности (ξ, y) од $S_1 - S_0$ је дато са:

$$\mathcal{A}((\xi,\eta), g_t g_0^{-1}) = -\int_0^t H(s,\xi,\eta)\, ds = -\int_0^t (S_1-S_0)(\xi,y)\, ds = -t(S_1-S_0)(\xi,\eta).$$

Како је скуп критичних вредности од $S_1 - S_0$ нигде густ, бифуркациони дијаграм $\Sigma(g)$ је прост. $\square$

Тврђење 4.1.8. Пресликавање $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ је изометрија, тј. за свако $S_0, S_1 \in \mathcal{S}$ важи: $\|S_0 - S_1\|_\infty = d(\Phi(S_0), \Phi(S_1))$.

Доказ. Нека су $S_0, S_1 \in \mathcal{S}$ произвољне функције. Спојимо их путем $S_t = (1-t)S_0 + tS_1$. Према претходном тврђењу пут $g_t = \Phi(S_t)$ задовољава све претпоставке теореме 4.1.2 па минимизира растојање између g_0 и g_1. Из Хамилтон-Јакобијеве једначине закључујемо да је $\|H_t\|_\infty = \|S_1 - S_0\|_\infty$ где је H Хамилтонијан који генерише g_t. Дакле:

$$d(\Phi(S_0), \Phi(S_1)) = l(g) = \int_0^1 \|H_t\|_\infty\, dt = \|S_1 - S_0\|_\infty,$$

односно пресликавање Φ је изометрија. $\square$

Тврђење 4.1.9. Нека је $g : [a, b] \to \mathcal{D}$ гладак пут генерисан Хамилтонијаном H. Нека су S_t генеришуће функције од $g(t)$. Следећа тврђења су еквивалентна:
(i) $\frac{\partial S_t}{\partial t}(x)$ је квази-аутономан
(ii) $H(t, x)$ је квази-аутономан.

Доказ. Увешћемо дефиницију да је функција $K(t, z)$ (x_-, x_+)-квази-аутономна ако за свако t важи $\|K_t\| = K_t(x_+) - K_t(x_-)$. Показаћемо да је $\frac{\partial S_t}{\partial t}$ (x_-, x_+)-квази-аутономна ако и само ако је H_t (z_-, z_+)-квази-аутономна где је $z_\pm = x_\pm + \frac{1}{2}i\nabla S_a(x_\pm)$.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Хоћемо да покажемо да функција $S_t(x) - S_a(x)$ достиже максимум, односно минимум у тачкама x_+, односно x_-. Интегралећи неједнакости

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(x_+) \geqslant \frac{\partial S_t}{\partial t}(x), \quad \frac{\partial S_t}{\partial t}(x_-) \leqslant \frac{\partial S_t}{\partial t}(x),$$

које важе за свако x, у границама од a до t добијамо то тврђење које ће нам даље дати да је $\nabla S_t(x_\pm) = \nabla S_a(x_\pm)$ за свако t. Из тврђења 4.1.6 закључујемо да је

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(x_\pm) = H_t(z_\pm),$$

и тиме добијамо (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Опет нам тврђење 4.1.6 даје да важи $\|\frac{\partial S_t}{\partial t}\|_\infty = \|H_t\|_\infty$ за свако t, па је довољно показати да важи:

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(x_\pm) = H_t(z_\pm).$$

Услов (ii) нам каже да постоје тачке u_+, u_- такве да је $\varphi_t u_\pm = z_\pm$ за свако $t \in [a,b]$. Конкретно важи $\varphi_a u_\pm = z_\pm = x_\pm + \frac{1}{2} i \nabla S_a(x_\pm)$. На основу дефиниције генеришуће функције важи $x_\pm = \frac{u_\pm + z_\pm}{2}$, па је $x_\pm = \frac{u_\pm + \varphi_t u_\pm}{2}$ за свако t. Дакле, $x_\pm + \frac{1}{2} i \nabla S_t(x_\pm) = \varphi_t u_\pm = z_\pm$ за свако t. Особина (i) сада следи директно из тврђења 4.1.6. □

Сада можемо да дамо потпун опис геодезијских на $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Теорема 4.1.3. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ повезан подскуп са непразном унутрашношћу. Регуларан пут $\gamma : I \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ је геодезијска ако и само ако је генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном.

Доказ. Нека је $\gamma : (-1,1) \to \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ регуларан пут такав да је $\gamma(0) = \mathrm{Id}$, и нека је $H(t,x)$ Хамилтонијан који га генерише. Следећа два тврђења су еквивалентна:
(i) Постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $H|_{[-\varepsilon,\varepsilon]\times\mathbb{R}^{2n}}$ квази-аутономан.
(ii) Постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $g|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ минимална геодезијска.
Из ове еквивалентности следи тврђење теореме. Изаберимо $\varepsilon > 0$ тако да $g|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ припада $\mathcal{D}$ и нека је S_t генеришућа функција од $g(t)$. Из тврђења 4.1.8 следи да је $g|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ минимална геодезијска ако и само ако $\Phi^{-1}(g|_{[-\varepsilon,\varepsilon]})$ минимизира растојање у $\mathcal{S}$, односно ако је

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\| \frac{\partial S_t}{\partial t} \right\| dt = \|S_\varepsilon - S_{-\varepsilon}\|.$$

А ово тврђење је еквивалентно томе да је $H_{[-\varepsilon,\varepsilon]\times\mathbb{R}^{2n}}$ квази-аутономно у смислу тврђења 4.1.1 и тврђења 4.1.9. Овим је комплетиран доказ. □

4.2 Конјуговане тачке на геодезијским

У овом поглављу ћемо извести варијациони рачун геодезијских на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ које имају неке додатне особине недегенерисаности, при чему је M произвољна многострукост. Извешћемо другу варијациону формулу, описати конјуговане тачке и извешћемо потребне и довољне услове за C^∞-локалну минималност таквих геодезијских. Показаћемо примером недегенерисану геодезијску која није локално минимална у околини своје прве конјуговане тачке.

4.2.1 Варијациона теорија геодезијских

Подсетимо се да је гладак пут $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ генерисан Хамилтонијаном $H \in \mathcal{H}(M)$ ако је $\varphi(t)\varphi(0)^{-1} = g_H^t$ за свако $t \in [0,1]$, где смо са g_H^t означили ток одговарајућег Хамилтоновог векторског поља ξ_H^t које задовољава једначину $i_{\xi_H^t}\omega = -dH_t$. Такође знамо да Хамилтонова једначина у $\mathbb{R}^{2n}$ има облик $\frac{d}{dt} g_H^t(x) = i\nabla H_t(g_H^t(x))$ за свако $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Нека је $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ гладак пут и $I \subset \mathbb{R}$ интервал који садржи 0.

Дефиниција 4.2.1. За глатко пресликавање $\Phi : I \times [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ кажемо да је варијација од φ ако задовољава следеће услове:
(1) $\Phi(0,t) = \varphi(t)$ за свако $t \in [0,1]$,
(2) $\Phi(\varepsilon,0) = \varphi(0)$, $\Phi(\varepsilon,1) = \varphi(1)$ за свако $\varepsilon \in I$.

За свако $\varepsilon \in I$ са Φ_ε ћемо означавати пут $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(\varepsilon,t)$, $t \in [0,1]$ и са $L(\varepsilon)$ ћемо означавати дужину пута Φ_ε: $L(\varepsilon) = l(\Phi_\varepsilon)$.
И ако је пресликавање Φ глатко, функција $L : I \to \mathbb{R}$ је у општем случају само непрекидна. Ипак, при неким додатним претпоставкама недегенерисаности пута φ функција L ће бити глатка. У претходном секцији смо дефинисали квази-аутономне Хамилтонијане. Сада ћемо проширити тај појам.

Дефиниција 4.2.2. За функцију $H \in \mathcal{H}(M)$ кажемо да је недегенерисани квази-аутономни Хамилтонијан ако постоје две тачке $x_+, x_- \in M$ такве да за свако $t \in [0,1]$ и свако $x \neq x_\pm$ важи $H(t,x_-) < H(t,x) < H(t,x_+)$ и пресликавање $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t,x_\pm)$ је недегенерисано за свако $t \in [0,1]$.

Нека је $H \in \mathcal{H}(M)$ недегенерисани квази-аутономни Хамилтонијан са максимумом и минимумом у тачкама x_+ и x_-. Како су $x_\pm$ фиксиране тачке тока g_H^t линеаризовану Хамилтонову једначину у тачкама $x_\pm$ пишемо као:

$$\frac{d}{dt}(g_H^t)_{*x_\pm} = C_\pm(t)(g_H^t)_{*x_\pm}, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где је $C_\pm(t)$ недегенерисани линеарни оператор на тангентном простору $T_{x_\pm}M$ за свако $t \in [0,1]$. Нека је $V_\pm$ простор свих глатких петљи у $T_{x_\pm}M$ које почињу и завршавају се у 0:

$$V_\pm = \{v \in C^\infty([0,1]; T_{x_\pm}M) \mid v(0) = v(1) = 0\}.$$

Дефинисаћемо квадратне форме $Q_\pm$ на $V_\pm$ са:

$$Q_\pm(v) = -\int_0^1 [\omega(C_\pm^{-1}\dot{v}, \dot{v}) + \omega(\dot{v}, v)]\, dt.$$

Нека је $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ гладак пут који је генерисан недегенерисаним квази-аутономним Хамилтонијаном и нека је Φ варијација од φ. За свако $\varepsilon \in I$, $t \in [0,1]$ означимо са H_ε Хамилтонијан који генерише пут Φ_ε и са $x_+(\varepsilon,t)$, $x_-(\varepsilon,t)$ означимо тачке максимума и минимума од $(H_\varepsilon)_t$. Тада је:

$$L_\pm(\varepsilon) = l_\pm(\Phi_\varepsilon) = \int_0^1 H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon,t))\, dt.$$

За мале вредности ε, према теореми о имплицитној функцији, тачке $x_\pm(\varepsilon,t)$ су јединствено дефинисане и глатко зависе од ε и t. Дакле, $L_\pm$ је глатка функција у околини 0. Ако око тачака $x_\pm$ уведемо стандардне симплектичке координате, диференцирањем функције $L_\pm$ добијемо:

$$L_\pm'(\varepsilon) = \int_0^1 \left[\nabla H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon,t))^T \frac{\partial}{\partial\varepsilon} x_\pm(\varepsilon,t) + \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon,t))\right] dt.$$

За свако ε, t тачка $x_\pm(\varepsilon, t)$ је критична тачка функције $(H_\varepsilon)_t$, односно важи:

$$\nabla H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t)) = 0,$$

па је

$$L'_\pm(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t))\, dt.$$

Диференцирањем претходне релације још један пут, добијамо:

$$L''_\pm(\varepsilon) = \int_0^1 \Big[\nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t))^T \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_\pm(\varepsilon, t) + \frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, x_\pm(\varepsilon, t))\Big]\, dt.$$

Ако нађемо леви и десни извод једначине $\nabla H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t)) = 0$ долазимо до једнакости:

$$\nabla^2 H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t)) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_\pm(\varepsilon, t) + \nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t)) = 0.$$

За мале вредности ε матрица $\nabla^2 H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t))$ је недегенерисана, па ће важити релација:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} x_\pm(\varepsilon, t) = -[\nabla^2 H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t))]^{-1} \nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t))$$

а одатле

$$L''_\pm(\varepsilon) = \int_0^1 \Big\{ -\big[\nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t))\big]^T [\nabla^2 H_\varepsilon(t, x_\pm(\varepsilon, t))]^{-1} \nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm(\varepsilon, t)) + \frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, x_\pm(\varepsilon, t))\Big\}\, dt.$$

Специјално, за $\varepsilon = 0$, знајући да је $x_\pm(0, t) = x_\pm$ за свако $t \in [0, 1]$, добијамо:

$$\begin{aligned}
L'_\pm(0) &= \int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\, dt \\
L''_\pm(0) &= \int_0^1 \Big\{ -\big[\nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\big]^T [\nabla^2 H(t, x_\pm)]^{-1} \nabla (\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm))\big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\Big\}\, dt. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Лема 4.2.1. За фиксирано ε интеграл функције $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}$ је константан на свакој орбити тока $g^t_{H_\varepsilon}$:

$$\int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))\, dt = k(\varepsilon)$$

за свако $x \in M$. Специјално, ако је M отворена многострукост тада важи $k(\varepsilon) = 0$ за свако ε.

Доказ. За свако ε ћемо дефинисати глатку функцију на M са компактним носачем:

$$F_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x) - \int_0^1 H_\varepsilon(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))\, dt + \int_0^1 H(t, g^t_H(x))\, dt.$$

Овде је $S_\varepsilon(x)$ симплектичка површина од M генерисана свим путевима $g^t_{H_\delta}(x)$ за $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$:

$$S_\varepsilon(x) = \int_D f_x^* \omega,$$

где је $D = [0, \varepsilon] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ и $f_x(\delta, t) = g^t_{H_\delta}(x)$. Ако је симплектичка форма тачна тада је $F_\varepsilon(x) = \mathcal{A}(x, H_\varepsilon) - \mathcal{A}(x, H)$ где је $\mathcal{A}(x, H)$ функционал дејства који одговара Хамилтонијану H:

$$\mathcal{A}(x, H) = \int_0^1 g_x^* \lambda - H(t, g_x(t))\, dt,$$

$\omega = d\lambda$ и $g_x(t) = g^t_H(x)$.
Користећи Стоксову формулу и Хамилтонову једначину добијамо да важи $dF_\varepsilon = 0$. Како је M повезана многострукост F_ε ће бити константна функција, па је:

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(x) = -\int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))\, dt.$$

Ако је M отворена многострукост тада је $F_\varepsilon = 0$ због услова нормализације. $\square$

Тврђење 4.2.1. Нека је $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ гладак пут генерисан недегенерисаним квази-аутономним Хамилтонијаном. Тада је за сваку варијацију Φ од φ функција дужине L глатка у околини нуле и важи $L^{'}(0) = 0$.

Доказ. Знамо да важи једнакост

$$L^{'}_{\pm}(0) = \int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\, dt.$$

Према претходној леми десна страна је једнака $k(0)$ и у случају $L^{'}_{+}(0)$ и у случају $L^{'}_{-}(0)$, па је $L^{'}(0) = L^{'}_{+}(0) - L^{'}_{-}(0) = 0$. $\square$

Дефиниција 4.2.3. Користећи претходно тврђење, путеве φ који задовољавају услове овог тврђења можемо да видимо као екстремале функционала дужине. Такве путеве називамо недегенерисаним геодезијским на $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Тврђење 4.2.2. Нека је $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ недегенерисана геодезијска на $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ и Φ варијација од φ. Тада је други извод фунције дужине L дат са:

$$L''(0) = Q_+(v_+) - Q_-(v_-)$$

где су $v_\pm \in V_\pm$ дефинисани са:

$$v_\pm(t) = \frac{d}{d\varepsilon}\big[\Phi(\varepsilon, t)\varphi(0)^{-1}(x_\pm)\big]\big|_{\varepsilon=0}, \quad t \in [0, 1].$$

Доказ. Диференцирањем релације $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))\, dt = k(\varepsilon)$ из леме 4.2.1 добијамо да за свако $x \in M$ важи:

$$\int_0^1 \Big[\nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))^T \frac{d}{d\varepsilon} g^t_{H_\varepsilon}(x) + \frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, g^t_{H_\varepsilon}(x))\Big]\, dt = k'(\varepsilon).$$

Специјално, за $\varepsilon = 0$ и $x = x_\pm$ добијамо:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 H_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\, dt = -\int_0^1 \Big[\nabla \frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t, x_\pm)\big|_{\varepsilon=0}\Big]^T v_\pm(t)\, dt + k'(0)$$

где је

$$v_{\pm}(t) = \frac{d}{d\varepsilon}\big[\Phi(\varepsilon,t)\varphi(0)^{-1}(x_{\pm})\big]\big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}g^t_{H\varepsilon}(x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}.$$

Користећи формулу (6) за $L''_{\pm}(0)$ добијамо:

$$L''_{\pm}(0) = -\int_0^1 \Big\{\big[\nabla\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t,x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}\big]^T\cdot\big[\nabla^2 H(t,x_{\pm})\big]^{-1}\cdot\big[\nabla\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t,x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}\big]+ \\ +\big[\nabla\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t,x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}\big]^T v_{\pm}(t)\Big\}\,dt + k'(0).$$

Из Хамилтонове једначине $\frac{d}{dt}g^t_{H_\varepsilon}(x) = i\nabla H_\varepsilon(t, g_{H_\varepsilon}(x))$, $x\in M$ добијамо:

$$\dot v_{\pm}(t) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big(\frac{d}{dt}g^t_{H_\varepsilon}(x_{\pm})\Big)\Big|_{\varepsilon=0} = i\Big[\nabla^2 H(t,x_{\pm})v_{\pm}(t) + \nabla\Big(\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t,x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}\Big)\Big].$$

Уведимо додатну ознаку $B_{\pm}(t) = \nabla^2 H(t,x_{\pm})$. Приметимо да је $B_{\pm}(t) = B_{\pm}(t)^T$. У датим ознакама је

$$\nabla\Big(\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial\varepsilon}(t,x_{\pm})\big|_{\varepsilon=0}\Big) = -i\dot v_{\pm}(t) - B_{\pm}(t)v_{\pm}(t)$$

и даље

$$\begin{aligned} L''_{\pm}(0) =& -\int_0^1 \big[(-i\dot v_{\pm} - B_{\pm}v_{\pm})^T B_{\pm}^{-1}(-i\dot v_{\pm} - B_{\pm}v_{\pm}) + (-i\dot v_{\pm} - B_{\pm}v_{\pm})^T v_{\pm}\big]\,dt + k'(0)\\ =& -\int_0^1 \big[\dot v_{\pm}^T i B_{\pm}^{-1} i\dot v_{\pm} + \dot v_{\pm}^T i v_{\pm}\big]\,dt + k'(0)\\ =& -\int_0^1 \big[\langle iB_{\pm}^{-1} i\dot v_{\pm}, \dot v_{\pm}\rangle + \langle i\dot v_{\pm}, v_{\pm}\rangle\big]\,dt + k'(0). \end{aligned}$$

У нашим ознакама је $C_{\pm}(t) = iB_{\pm}(t)$ и

$$\begin{aligned} L''_{\pm}(0) =& -\int_0^1 \big[\omega(C_{\pm}^{-1}\dot v_{\pm}, \dot v_{\pm}) + \omega(\dot v_{\pm}, v_{\pm})\big]\,dt + k'(0)\\ =& Q_{\pm}(v_{\pm}) + k'(0). \end{aligned}$$

На крају добијамо

$$L''(0) = L''_{+}(0) - L''_{-}(0) = Q_{+}(v_{+}) - Q_{-}(v_{-})$$

што је и требало показати. □

Видимо да други извод функције дужине зависи само од петљи v_+ и v_-. Варијацију Φ од φ ћемо назвати нетривијалном ако бар једна од петљи $v_{\pm}$ није идентички једнака нули.

4.2.2 Конјуговане тачке

Означимо са $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}(M)$ подскуп свих Хамилтонијана који генеришу петље у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$:

$$\mathcal{H}_1 = \{H \in \mathcal{H}(M) \mid g^1_H = \mathrm{Id}\}.$$

Испоставља се да се свака довољно мала петља у M може представити као орбита неког Хамилтоновог тока који спаја идентитет са самим собом.

Лема 4.2.2. Нека је x_0 тачка са многострукости M и нека је U нека њена околина. Претпоставимо да је $v : [0,1] \to M$ гладак пут који задовољава услов $v(0) = v(1) = x_0$. Ако је v довољно близу тривијалној петљи у x_0, у C^1-топологији, тада постоји Хамилтонијан $H \in \mathcal{H}_1$ такав да је $\mathrm{supp}(H) \subset [0,1] \times U$ и $g^t_H(x_0) = v(t)$ за свако $t \in [0,1]$. Додатно, H можемо одабрати тако да зависи глатко од v и да тривијалној петљи $v \equiv x_0$ одговара нула Хамилтонијан $H \equiv 0$. На крају, у некој стандардној околини од x_0 која не зависи од U, таква функција H је дата изразом:

$$H(t,x) = -\langle i\dot{v}(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}, v\rangle \, d\tau.$$

Доказ. Како ова лема важи локално, користећи Дарбуову теорему, можемо претпоставити да је (M,ω) стандардни симплектички простор $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Тражени Хамилтонијан ћемо конструисати у два корака.
1. корак: Нека је V ограничена околина тачке x_0 која задовољава услов $\overline{V} \subset U$. Изаберимо $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ тако да је $\psi|_V = 1$ и $\mathrm{supp}(\psi) \subset U$. Дефинишимо $\widetilde{H}(t,x) = -\psi(x)\langle i\dot{v}(t), x\rangle$. Нека је V_1 повезана околина од x_0 таква да је $\overline{V}_1 \subset V$. Претпоставимо да петља v задовољава услов $\max\limits_{t\in[0,1]} \|\dot{v}(t)\| \leqslant \mathrm{dist}(V_1, \mathbb{R}^{2n}\backslash V)$, где је са dist означена раздаљина два скупа, $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} \|a-b\|$. Тада за сваку тачку $x \in V_1$ важи: $g^t_{\widetilde{H}}(x) = x - x_0 + v(t)$, за свако $t \in [0,1]$. Орбита од x_0 добијена дејством тока који је генерисан са $\widetilde{H}$ је петља v. Видимо да је унутар V_1 1-пресликавање $g^1_{\widetilde{H}}$ једнако идентитету.
2. корак: Ако је извод $\dot{v}$ мали онда је симплектоморфизам $g^1_{\widetilde{H}}$ близу Id у C^1-метрици па се може представити као средња вредност неке генеришуће функције S (претходни параграф). Линеарна деформација $S_t = tS$, $t \in [0,1]$, даје изотопију између Id и $g^1_{\widetilde{H}}$ у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ Свака од ових функција S_t је генеришућа функција за неки дифеоморфизам који ћемо означити са $g^t_{\widehat{H}}$, $t \in [0,1]$. Сада $g^t_{\widehat{H}}$, $t \in [0,1]$, можемо да видимо као ток неког Хамилтонијана $\widehat{H}$. Важи $g^1_{\widetilde{H}} = g^1_{\widehat{H}}$. У повезаној околини V_1 тачке x_0 пресликавање $g^1_{\widetilde{H}}$ се поклапа са Id, па је ту генеришућа функција S константна. Како је x_0 фиксна тачка пресликавања $g^1_{\widetilde{H}}$ важи $\nabla S = 0$ у тачки x_0 па је у тој тачки и $\nabla S_t = 0$ за свако $t \in [0,1]$. Односно, x_0 ће бити фиксна тачка изотопија $g^t_{\widehat{H}}$ за $0 \leqslant t \leqslant 1$. Хамилтонијан

$$H(t,x) = \widetilde{H}(t,x) - \widehat{H}(t, g^t_{\widehat{H}} \circ (g^t_{\widetilde{H}})^{-1}(x))$$

који генерише ток $g^t_H = g^t_{\widetilde{H}} \circ (g^t_{\widehat{H}})^{-1}$ задовољава услове $H \in \mathcal{H}_1$, $\mathrm{supp}(H) \subset [0,1] \times U$ и $g^t_H(x_0) = v(t)$ за $t \in [0,1]$. H зависи глатко од v и ако је $v \equiv x_0$ тада је $H \equiv 0$.
Хоћемо да видимо како изгледа H близу тачке x_0. Рекли смо да је генеришућа функција S константна на V_1. Користећи Хамилтон-Јакобијеву једначину (претходни параграф):

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}(x) = \widehat{H}_t(x + \frac{1}{2}i\nabla S_t(x)), \;\; x \in \mathbb{R}^{2n}$$

закључујемо да се за свако $t \in [0,1]$ функција $\widehat{H}_t$ поклапа са S у V_1 па је ту и константна: $\widehat{H}(t,x) = C$, $x \in V_1$.
Фиксирајмо сада околину V_2 од x_0 такву да је $\overline{V}_2 \subset V_1$. Претпоставимо да v задовољава услов $\max\limits_{t\in[0,1]} \|\dot{v}(t)\| \leqslant \mathrm{dist}(V_2, \mathbb{R}^{2n}\backslash V_1)$. Тада за свако $x \in V_2$ важи: $H(t,x) = -\langle i\dot{v}(t), x\rangle - C$.

Важи $\widetilde{H}(t,x) = -\langle i\dot{v}(t), x\rangle$ јер је $\frac{d}{dt}g^t_{\widetilde{H}}(x) = \dot{v}(t)$ и $i \cdot \nabla\widetilde{H}(t,x) = \dot{v}(t)$.
Да бисмо израчунали вредност C посматрајмо функционал дејства:

$$\mathcal{A}(x) = \int_{g^t_H(x)} \lambda - \int_0^1 H(t, g^t_H(x))\, dt,\ \ x \in M$$

где је λ примитивна форма симплектичке форме ω. Показано је након дефиниције 4.1.5 да ова функција не зависи од пута g^t_H, већ зависи само од фиксне тачке и пресликавања g^1_H које је у овом случају једнако Id. Дакле, $\mathcal{A}(x)$ је једнако 0, па је:

$$\int_{g^t_H(x)} \lambda = \int_0^1 H(t, g^t_H(x))\, dt \text{ за свако } x \in M.$$

За $x = x_0$ интеграл на левој страни представља симплектичку површину петље v

$$\int_{g^t_H(x_0)} \lambda = -\frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}, v\rangle\, dt.$$

Интегралећи функцију H по t у тачки $g^t_H(x_0)$ добијамо да је $-\frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}, v\rangle\, dt = -\int_0^1 \langle i\dot{v}, v\rangle\, dt - C$, односно

$$C = -\frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}, v\rangle\, dt$$

чиме је доказ комплетиран. □

Дефиниција 4.2.4. За Хамилтонијан H који задовољава услове претходне леме кажемо да је специјалан.

Лема 4.2.3. За сваку дату петљу $v_\pm \in V_\pm$ постоји варијација Φ од φ која задовољава услов:

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\Phi(\varepsilon,t)\varphi(0)^{-1}(x_\pm)]|_{\varepsilon=0} = v_\pm(t),\ \ t \in [0,1].$$

Доказ. Одаберимо глатку фамилију петљи $v^\varepsilon_\pm : [0,1] \to M$ које задовољавају услове:

$$v^\varepsilon_\pm(0) = v^\varepsilon_\pm(1) = x_\pm,\ \ \ v^0_\pm(t) = x_\pm,\ \ \ \frac{d}{d\varepsilon}v^\varepsilon_\pm(t)|_{\varepsilon=0} = v_\pm(t)$$

за свако t, ε. Према леми 4.2.2 за ε у некој околини од 0 постоји глатка фамилија Хамилтонијана $H^\varepsilon_\pm \in \mathcal{H}_1$ таква да је

$$g^t_{H^\varepsilon_\pm}(x_\pm) = v^\varepsilon_\pm(t),\ \ \ H^0_\pm \equiv 0,\ \ \ \mathrm{supp}(H^\varepsilon_+) \cap \mathrm{supp}(H^\varepsilon_-) = \emptyset$$

за свако t, ε. Нека је $H_\varepsilon = H^\varepsilon_+ + H^\varepsilon_-$ и дефинишимо $\Phi(\varepsilon,t) = g^t_{H_\varepsilon} \circ \varphi(t)$. Φ је тражена варијација од φ. □

Дефиниција 4.2.5. Нека је $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ недегенерисана геодезијска. За тачку $\tau \in [0,1]$ кажемо да је конјугована тачка геодезијске φ ако у једној од тачака x_+, x_- линеаризовани ток $[\varphi(t)\varphi(0)^{-1}]_*$ има неконстантну затворену орбиту за $t = \tau$. То у ствари значи да је $g^\tau_{H*}\xi = \xi$ за неки тангентни вектор $\xi \neq 0$, где је $\{g^t_H\}$ ток Хамилтоновог векторског поља, а g^t_{H*} линеаризовани ток на $T_{x_+}M$ и $T_{x_-}M$.

Теорема 4.2.1. Нека је φ недегенерисана геодезијска. Претпоставимо да линеаризовани ток $[\varphi(t)\varphi(0)^{-1}]_*$ у тачкама x_+, x_- нема неконстантних затворених орбита за $t \leqslant 1$. Тада је за сваку нетривијалну варијацију од φ други извод функције дужине $L''(0)$ позитиван. Ако у некој тачки, x_+ или x_-, овај ток има неконстантну затворену орбиту за неко $t < 1$ онда постоји варијација од φ таква да је $L''(0)$ негативно.

Доказ. Према тврђењу 4.2.2 други извод функције дужине у тачки 0 има облик

$$L''(0) = Q_+(v_+) - Q_-(v_-)$$

где је $v_\pm(t) = \frac{d}{d\varepsilon}[\Phi(\varepsilon, t)\varphi(0)^{-1}(x_\pm)]|_{\varepsilon=0}$, $t \in [0,1]$.
Претпоставимо да линеаризовани ток $[\varphi(t)\varphi(0)^{-1}]_*$ у тачкама x_+, x_- нема неконстантних затворених орбита за $t \leqslant 1$. Хоћемо да покажемо да је $L''(0) > 0$ за сваку нетривијалну варијацију Φ. Довољно је проверити да ли важе неједнакости $Q_+(v_+) > 0$ и $Q_-(v_-) < 0$ за сваку ненулту петљу $v_\pm \in V_\pm$. Показаћемо да важи прва неједнакост. Како је Q_+ хомогена функција на V_+, неједнакост $Q_+(v) > 0$ важи за свако $v \in V_+ \backslash \{0\}$ ако и само ако је тривијална петља $\widehat{v} \equiv 0$ стриктно локални (а тиме и глобални) минимум од Q_+. То можемо записати као:

$$Q_+(v) = \int_0^1 L(t, v(t), \dot{v}(t))\, dt \to \min, \;\; v(0) = v(1) = 0. \tag{7}$$

Овде је L квадратна форма променљивих $v, \dot{v}$:

$$L(t, v, \dot{v}) = -\omega(C_+(t)^{-1}\dot{v}, \dot{v}) - \omega(\dot{v}, v).$$

Ојлер-Лагранжева једначина има облик $\frac{d}{dt}[-2C_+(t)^{-1}\dot{v}(t) + v(t)] = -\dot{v}(t)$ или $\frac{d}{dt}(C_+^{-1}\dot{v}) = \dot{v}$ и очигледно $\widehat{v}$ је решење ове једначине. За свако t извод $L_{\dot{v}\dot{v}} = -2\omega(C_+(t)^{-1}\cdot, \cdot)$ је позитивно дефинитна квадратна форма на $T_{x_+}M$. Како је Лагранжијан L квадратичан Јакобијева и Ојлер-Лагранжева једначина су идентичне. Након интеграције добијамо $C_+^{-1}\dot{v} = v + Const$. Означавајући $w = v + Const$ добијамо $C_+^{-1}\dot{w} = w$ или $\dot{w} = C_+ w$. Ово је линеаризована Хамилтонова једначина у тачки x_+. По нашој претпоставци за свако $\tau \in [0,1]$ не постоји неконстантно решење које задовољава гранични услов $w(0) = w(\tau)$. Дакле, Јакобијева једначина нема ненулто решење које задовољава граничне услове $v(0) = v(\tau) = 0$. Значи, затворени интервал $[0,1]$ не садржи конјуговане тачке. Према теореми варијационог рачуна (видети [10]) $\widehat{v}$ јесте стриктни минимум екстремалног проблема (7) чиме смо показали наше тврђење.
Сада претпоставимо да ток $[\varphi(t)\varphi(0)^{-1}]_*$ у тачки x_+ има неконстантну затворену орбиту за $t < 1$. Као и мало пре, то имплицира да отворени интервал $(0,1)$ садржи конјуговане тачке па $\widehat{v}$ није минимум екстремалног проблема (7). Дакле постоји $v \in V_+$ тако да је $Q_+(v) < 0$. Нека је Φ варијација од φ таква да је:

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\Phi(\varepsilon, t)\varphi(0)^{-1}(x)] = \begin{cases} v(t), & x = x_+ \\ 0, & x = x_- \end{cases}.$$

Оваква варијација постоји на основу леме 4.2.3. Тада је:

$$L''(0) = Q_+(v) < 0$$

чиме је доказ завршен. □

Из ове теореме следи да недегенерисана геодезијска која садржи унутрашње конјуговане тачке може да се скрати малом варијацијом. Ако радимо са аутономном геодезијском та варијација може да се конструише на природан начин.

Тврђење 4.2.3. Нека је φ недегенерисана геодезијска генерисана аутономним Хамилтонијаном. Претпоставимо да за неко $\tau \in (0,1)$ линеаризована Хамилтонова једначина у тачки x_+ има неконстантно решење w које задовољава гранични услов $w(0) = w(\tau)$. Тада петља $v \in V_+$ дефинисана са $v(t) = w(\tau t) - w(0)$, $t \in [0,1]$, даје негативну вредност функције Q_+: $Q_+(v) < 0$.

Доказ. Према претпоставци, w задовољава једначину $\dot{w}(t) = C_+ w(t)$, а како је Хамилтонијан аутономан C_+ не зависи од времена. Тада је:

$$\begin{aligned}
Q_+(v) =& - \int_0^1 \left[\omega(C_+^{-1}\dot{v}(t), \dot{v}(t)) + \omega(\dot{v}, v(t))\right] dt \\
=& - \int_0^1 \left[\tau^2 \omega(C_+^{-1}\dot{w}(\tau t), \dot{w}(\tau t)) + \tau\omega(\dot{w}(\tau t), w(\tau t) - w(0))\right] dt \\
=& - \int_0^1 \left[\tau^2 \omega(w(\tau t), \dot{w}(\tau t)) + \tau\omega(\dot{w}(\tau t), w(\tau t) - w(0))\right] dt \\
=& (\tau^2 - \tau) \int_0^1 \omega(\dot{w}(\tau t), w(\tau t))\, dt + \tau \int_0^1 \omega(\dot{w}(\tau t), w(0))\, dt.
\end{aligned}$$

Због граничних услова на w други члан је једнак 0, па је

$$Q_+(v) = (\tau^2 - \tau) \int_0^1 \omega(C_+ w(\tau t), w(\tau t))\, dt < 0$$

јер је форма $\omega(C_+\cdot, \cdot)$ позитивно дефинитна. □

4.2.3 C^∞-локална минималност геодезијских

Нека је $\varphi : [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ гладак пут. Овај пут можемо да видимо као елемент простора $C^\infty([0,1]; \mathrm{Ham}(M,\omega))$ на коме имамо C^∞-топологију. Нека је дата околина $\mathcal{U}$ од φ у $C^\infty([0,1]; \mathrm{Ham}(M,\omega))$. Кажемо да је варијација $\Phi : I \times [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ од φ C^∞-блиска φ ако за свако $\varepsilon \in I$ пут Φ_ε припада околини $\mathcal{U}$.

Дефиниција 4.2.6. Кажемо да је φ локално минимална на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ ако за сваку варијацију Φ која је C^∞-блиска φ (за неку околину) важи $l(\Phi_\varepsilon) \geqslant l(\varphi)$ за свако $\varepsilon \in I$.

Нека је φ недегенерисана C^∞-локално минимална геодезијска на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Други извод функције дужине је ненегативан, па према теореми 4.2.1 пут φ нема унутрашњих конјугованих тачака. Под додатним претпоставкама важи и обрнуто, што ћемо видети у теореми 4.2.2.
Нека је $\Phi : I \times [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$ варијација недегенерисане геодезијске φ која нема конјугованих тачака. Сада ћемо варијацију Φ представити као композицију два глатка

пресликавања $\psi, \chi : I \times [0,1] \to \mathrm{Ham}(M,\omega)$, $\Phi(\varepsilon,t) = \chi(\varepsilon,t) \circ \psi(\varepsilon,t)$, где композиција на десној страни представља композицију Хамилтонових дифеоморфизама. ψ ће бити варијација од φ која ће задовољавати додатни услов:

$$\psi(\varepsilon,t)\varphi(0)^{-1}(x_\pm) = \psi_\varepsilon(t)\psi_\varepsilon(0)^{-1}(x_\pm) \equiv x_\pm.$$

То значи да ће сваки од путева ψ_ε бити генерисан квази-аутономним Хамилтонијаном који има тачке минимума и максимума у $x_\pm$. Како је тај Хамилтонијан недегенерисан за $\varepsilon = 0$, то је Хамилтонијан који генерише φ, онда ће и Хамилтонијани који генеришу ψ_ε бити недегенерисани за неко $\varepsilon > 0$. Сваки од путева χ_ε је петља у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ која почиње и завршава се у Id. Петље χ_ε су блиске тривијалним петљама па су на основу леме 4.2.2 генерисане специјалним Хамилтонијаном. Дефинишимо операторе $C_\pm(t)$, $t \in [0,1]$, и функционале $Q_\pm$ на исти начин као на почетку ове секције.

Лема 4.2.4. Важи: $l_\pm(\Phi_\varepsilon) = l_\pm(\psi_\varepsilon) + \frac{1}{2}Q_\pm(v_\pm) + O(\int_0^1 |\dot v_\pm|^3\,dt)$.

Доказ. Пут $\Phi_\varepsilon = \chi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon$ је генерисан Хамилтонијаном $L(t,x) = K(t,x) + H(t,(g_K^t)^{-1}(x))$ где је K специјалан Хамилтонијан који генерише χ_ε. Користећи Тејлорову формулу можемо да пишемо

$$H(t,x) = H(t,x_\pm) + \frac{1}{2}(x-x_\pm)^T B_\pm(t)(x-x_\pm) + O(|x-x_\pm|^3),$$

где је $B_\pm(t) = \nabla^2 H(t,x_\pm)$.
Како је K специјалан Хамилтонијан у околини тачке $x_\pm$ је дат изразом

$$K(t,x) = -\langle i\dot v_\pm(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot v_\pm, v_\pm\rangle\,d\tau,$$

где је $v_\pm(t) = g_K^t(x_\pm)$, $t \in [0,1]$. Близу $x_\pm$ важи $(g_K^t)^{-1}(x) = x + x_\pm - v_\pm(t)$ па је:

$$L(t,x) = -\langle i\dot v_\pm(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot v_\pm, v_\pm\rangle\,d\tau + H(t,x_\pm) + \frac{1}{2}(x-v_\pm(t))^T B_\pm(t)(x-v_\pm(t)) + O(|x-v_\pm(t)|^3)$$

и

$$\nabla L(t,x) = -i\dot v_\pm(t) + B_\pm(t)(x-v_\pm(t)) + O(|x-v_\pm(t)|^2).$$

Означимо са $\widehat{x}_\pm(t)$ тачку екстремума од L_t близу $x_\pm$.Како је градијент од L_t једнак 0 на $\widehat{x}_\pm(t)$, можемо писати $\widehat{x}_\pm(t) = v_\pm(t) + B_\pm^{-1} i\dot v_\pm(t) + O(|\dot v_\pm(t)|^2)$ и

$$L(t,\widehat{x}_\pm(t)) = H(t,x_\pm) + \frac{1}{2}\langle iB_\pm(t)^{-1} i\dot v_\pm(t), \dot v_\pm(t)\rangle - \langle i\dot v_\pm(t), v_\pm(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot v_\pm, v_\pm\rangle\,d\tau + O(|\dot v_\pm(t)|^3).$$

Дакле,

$$\|L\|_\pm = \|H\|_\pm + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle iB_\pm^{-1} i\dot v_\pm, \dot v_\pm\rangle\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot v_\pm, v_\pm\rangle\,dt + O\Big(\int_0^1 |\dot v_\pm|^3\,dt\Big)$$

или

$$l_\pm(\Phi_\varepsilon) = l_\pm(\psi_\varepsilon) + \frac{1}{2}Q_\pm(v_\pm) + O\Big(\int_0^1 |\dot v_\pm|^3\,dt\Big)$$

чиме је лема доказана. □

Теорема 4.2.2. Недегенерисана геодезијска φ без конјугованих тачака је C^∞-локално минимална у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$.

Доказ. У доказу ћемо користити ознаке из ове секције и доказа претходне леме. По нашој претпоставци φ је недегенерисана геодезијска без конјугованих тачака. И ψ и χ зависе непрекидно од Φ у C^∞-топологији, па ако је Φ C^∞-блиско φ онда је за свако $\varepsilon \in I$ ψ_ε такође недегенерисана геодезијска. Додатно, можемо претпоставити да околина $\mathcal{U}$, коју смо користили у дефиницији локално минималне геодезијске, не зависи од $v_\pm$. Можемо у датим координатама $\mathcal{U}$ идентификовати са отвореним подскупом у $\mathbb{R}^{2n}$, и тангентни простор $T_{x_\pm}M$ можемо идентификовати са $\mathbb{R}^{2n}$. Сада нам је $Q_\pm$ природно дефинисано за све петље на $\mathcal{U}$.
Сваки пут ψ_ε је недегенерисана геодезијска. Ако фиксирамо неко $\varepsilon_0 \in I$ и на ту геодезијску применимо тврђење 4.2.1, при чему варијацију криве ψ_{ε_0} чине криве ψ_ε, $\varepsilon \in (\varepsilon_0-\delta_0, \varepsilon_0+\delta_0)$, добијемо да је $L_\psi(\varepsilon)'|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$ односно $l(\psi_\varepsilon) = l(\varphi)$ за свако $\varepsilon \in I$. Како φ не садржи конјуговане тачке можемо претпоставити да ни један од путева ψ_ε неће садржати конјуговане тачке.
Фиксирајмо сада $\varepsilon \in I$ и посматрајмо пут $\Phi_\varepsilon = \chi_\varepsilon \circ \psi_\varepsilon$. Хоћемо да покажемо да је $l(\Phi_\varepsilon) \geqslant l(\psi_\varepsilon) = l(\varphi)$. Према теореми 4.2.1 важи $Q_+(v) \geqslant 0$ и $Q_-(v) \leqslant 0$ за све петље v у $\mathbb{R}^{2n}$. Важи и јаче, за неко $\varepsilon > 0$ важиће неједнакост $Q_+ \geqslant \varepsilon E(v)$ и $Q_-(v) \leqslant -\varepsilon E(v)$, где је

$$E(v) = \int_0^1 |\dot{v}|^2\, dt$$

енергија од v. Заиста, за γ које је довољно блиско Id Хамилтонијан γH такође задовољава претпоставке теореме 4.2.1. Посматрајући

$$\widetilde{Q}_\pm(v) = -\int_0^1 \left[\omega(\gamma^{-1}C_\pm^{-1}\dot{v}, \dot{v}) + \omega(\dot{v}, v)\right] dt$$

добијамо $\widetilde{Q}_+(v) \geqslant 0$ и $\widetilde{Q}_-(v) \leqslant 0$ одакле претходне неједнакости и следе. Користећи лему 4.2.4 закључујемо да за петље v_+, v_- које су довољно мале у C^1-норми важи $l_+(\Phi_\varepsilon) \geqslant l_+(\psi_\varepsilon)$, $l_-(\Phi_\varepsilon) \leqslant l_-(\psi_\varepsilon)$. Дакле, ако је Φ C^∞-близу φ тада је $l(\Phi_\varepsilon) \geqslant l(\psi_\varepsilon)$ што смо и хтели да покажемо. $\square$

Ову теорему можемо да формулишемо и на другачији начин: сваки сегмент недегенерисане геодезијске пре прве конјуговане тачке је C^∞-локално минималан у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Ако φ има конјуговану тачку у $t = 1$ онда ништа не можемо рећи. У овом случају φ може бити C^∞-локално минимална али и не мора. Видећемо оба случаја у наредна два примера у којима посматрамо стандардну симплектичку раван $(\mathbb{R}^2, \omega)$.

Пример 4.2.1. Даћемо пример геодезијске која је C^∞-локално минимална и која има конјуговану тачку у $t = 1$.
Нека је $h : [0, +\infty \to \mathbb{R})$ глатка функција која за неко $R > 0$ задовољава услове:

$$\begin{aligned}
&h'(0) = 0, \quad h''(0) = -2\pi \\
&0 \leqslant h(r) < h(0), \quad |h'(r)| < 2\pi r,\ r > 0 \\
&h(r) = 0,\ r > R
\end{aligned}$$

Одаберимо две тачке $x_+, x_- \in \mathbb{R}^2$ такве да је $|x_+ - x_-| > 2R$ и дефинишимо аутономни Хамилтонијан H са $H(x) = h(|x-x_+|) - h(|x-x_-|)$. Пажљивим избором функције h можемо обезбедити глаткост од H у тачкама x_+, x_-. Пут φ генерисан Хамилтонијаном H има особине наведене на почетку примера.

Пример 4.2.2. Прво ћемо конструисати недегенерисану геодезијску φ са конјугованом тачком у $t = 1$ тако да постоји нетривијална варијација од φ која оставља њену дужину фиксном. Након тога ћемо малом изменом те геодезијске добити недегенерисану геодезијску $\widetilde{\varphi}$ која има конјуговану тачку у $t = 1$ и која није C^∞-локално минимална у $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^2, \omega)$.

Нека је H аутономни Хамилтонијан на $\mathbb{R}^2$ са компактним носачем и нека има јединствени максимум и минимум у тачкама x_+, x_-. Претпоставимо да у близини тачака $x_\pm$ Хамилтонијан има облик

$$H(x) = H(x_\pm) \mp \pi |x - x_\pm|^2.$$

Тада је Хамилтонов ток од H линеаран у околини $x_\pm$ и његове орбите су концентричне кружнице са центром у $x_\pm$. Одатле закључујемо да је пут φ у $\mathrm{Ham}(\mathbb{R}^2, \omega)$ генерисан са H недегенерисана геодезијска која има конјуговану тачку у $t = 1$. Сада ћемо за свако $\varepsilon \in \mathbb{R}$ посматрати петље $v_\pm^\varepsilon$ у $\mathbb{R}^2$ дефинисане са

$$v_\pm^\varepsilon(t) = x_\pm + \varepsilon(e^{\mp 2\pi i t} - 1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Нека је K_ε специјалан Хамилтонијан који генерише петље $v_+^\varepsilon, v_-^\varepsilon$. Према дефиницији специјалног Хамилтонијана, функција K_ε је у некој околини од $x_\pm$, која не зависи од ε, дата изразом:

$$K_\varepsilon(t, x) = -\langle i\dot{v}_\pm^\varepsilon(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}_\pm^\varepsilon, v_\pm^\varepsilon\rangle \, d\tau.$$

За свако ε Хамилтонијан $L_\varepsilon(t, x) = K_\varepsilon(t, x) + H(t, (g_{K_\varepsilon}^t)^{-1}(x))$ генерише ток $g_{L_\varepsilon}^t = g_{K_\varepsilon}^t \circ g_H^t$, и на тај начин фамилија Хамилтонијана L_ε дефинише варијацију Φ геодезијске φ. Означимо са $x_\pm^\varepsilon(t)$ тачке екстремума од $(L_\varepsilon)_t$ у близини $x_\pm$. Приметимо да важи релација:

$$x_\pm^\varepsilon = v_\pm^\varepsilon(t) \mp \frac{i\dot{v}_\pm^\varepsilon(t)}{2\pi}. \tag{8}$$

Дакле важи:

$$L_\varepsilon(t, x_\pm^\varepsilon(t)) = H(x_\pm) + \frac{1}{4\pi}|\dot{v}_\pm^\varepsilon(t)|^2 - \langle i\dot{v}_\pm^\varepsilon(t), v_\pm^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^1 \langle i\dot{v}_\pm^\varepsilon, v_\pm^\varepsilon\rangle \, d\tau$$

и

$$\|L_\varepsilon\|_\pm = \int_0^1 L_\varepsilon(t, x_\pm^\varepsilon(t)) \, dt = \|H\|_\pm \pm \frac{1}{4\pi} E(v_\pm^\varepsilon) + S(v_\pm^\varepsilon)$$

где смо са E означили енергију а са S симплектичку површину петљи у $\mathbb{R}^2$. Начин на који смо дефинисали петље $v_\pm^\varepsilon$ нам даје да је $E(v_\pm^\varepsilon) = \mp 4\pi S(v_\pm^\varepsilon)$. Дакле $\|L_\varepsilon\|_\pm \equiv \|H\|_\pm$ или $l(\Phi_\varepsilon) = l(\varphi)$ па је Φ нетривијална варијација од φ која не мења њену дужину.

Посматрајмо сада аутономни Хамилтонијан $\widetilde{H}$ који има јединствени максимум и минимум у истим тачкама x_+, x_- као и H и за неко $\delta > 0$ задовољава релације:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{H}(x_\pm) = H(x_\pm), \quad \nabla^2 \widetilde{H}(x_\pm) = \nabla^2 H(x_\pm),\\
&\widetilde{H}(x) < H(x), \;\; 0 < |x - x_+| < \delta,\\
&\widetilde{H}(x) > H(x), \;\; 0 < |x - x_-| < \delta.
\end{aligned}
$$

Како се Хесијани од H и $\widetilde{H}$ поклапају у $x_\pm$, недегенерисана геодезијска $\widetilde{\varphi}$ генерисана са $\widetilde{H}$ такође има конјуговану тачку у $t = 1$. Очигледно $\widetilde{\varphi}$ има исту дужину као и φ. Фамилија Хамилтонијана

$$
\widetilde{L}_\varepsilon(t, x) = K_\varepsilon(t, x) + \widetilde{H}(t, (g^t_{K_\varepsilon})^{-1}(x))
$$

дефинише варијацију $\widetilde{\Phi}$ од $\widetilde{\varphi}$. Важи $\widetilde{L}_\varepsilon(t, v^\varepsilon_\pm(t)) = L_\varepsilon(t, v^\varepsilon_\pm(t))$ за свако $t \in [0, 1]$. Ако је ε довољно мало тада ће у некој околини од x_+ важити $\widetilde{L}_\varepsilon(t, x) < L_\varepsilon(t, x)$ за свако $t \in [0, 1]$, $x \neq v^\varepsilon_+(t)$ и у некој околини од x_- ће важити $\widetilde{L}_\varepsilon(t, x) > L_\varepsilon(t, x)$ за свако $t \in [0, 1]$, $x \neq v^\varepsilon_-(t)$. Из (8) следи да се за свако $t \in [0, 1]$ тачке $x^\varepsilon_\pm(t)$ и $v^\varepsilon_\pm(t)$ разликују. Дакле:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}_\varepsilon(t, x^\varepsilon_+(t)) < L_\varepsilon(t, x^\varepsilon_+(t)) = \max_{x \in \mathbb{R}^2} L_\varepsilon(t, x),\\
\widetilde{L}_\varepsilon(t, x^\varepsilon_-(t)) > L_\varepsilon(t, x^\varepsilon_-(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^2} L_\varepsilon(t, x).
\end{aligned}
$$

Закључујемо $\|\widetilde{L}_\varepsilon\|_+ < \|L_\varepsilon\|_+$, $\|\widetilde{L}_\varepsilon\|_- > \|L_\varepsilon\|_-$ па је $l(\widetilde{\Phi}_\varepsilon) < l(\Phi_\varepsilon) = l(\varphi) = l(\widetilde{\varphi})$ за свако $\varepsilon \neq 0$. Дакле, геодезијска $\widetilde{\varphi}$ није C^∞-локално минимална у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Основна разлика између ова два примера је у понашању Хамилтонијана близу његових тачака екстремума: функција $\widetilde{H}$ дефинисана у претходном примеру брже опада него одговарајући квадратични Хамилтонијан, док Хамилтонијан у првом примеру има спорији пад у односу на квадратични.

4.3 Асферичне многострукости

Дефиниција 4.3.1. Асферичне многострукости су затворене многострукости M за које је $\pi_2(M) = 0$.

На даље ћемо претпоставити да је M асферична многострукост. У овом поглављу ћемо упоређујући Хоферову метрику на простору Хамилтонових дифеоморфизама и простору Лагранжевих подмногострукости доћи до закључка да постоји дифеоморфизам у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ који се не може спојити минималном геодезијском са идентичним пресликавањем.

Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост. Посматрајмо симплектичку многострукост $(M \times M, -\omega \oplus \omega)$. Дијагонала $\triangle = \{(x, x) |\, x \in M\} \subset M \times M$ је затворена Лагранжева подмногострукост. Посматрајмо глатку фамилију $\alpha = \{L_t\}$, $t \in [0, 1]$, Лагранжевих подмногострукости тако да је свако L_t дифеоморфно са $\triangle$. Кажемо да је α тачан пут који спаја L_0 и L_1, ако постоји глатко пресликавање $\Psi : \triangle \times [0, 1] \to M \times M$

тако да је за свако t, $\Psi(\triangle\times\{t\}) = L_t$ и важи $\Psi^*(-\omega\times\omega) = dH_t\wedge dt$ за неку глатку функцију $H : \triangle\times[0,1]\to\mathbb{R}$. Хоферова дужина тачног пута α је дефинисана са

$$l(\alpha) = \int_0^1 \big\{ \max_{x\in\triangle} H(x,t) - \min_{x\in\triangle} H(x,t)\big\}dt.$$

Лако се проверава да је овако дефинисана дужина добро дефинисана. Означимо са $\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ простор свих Лагранжевих подмногострукости од $M\times M$ које се са $\triangle$ могу спојити тачним путем. За две Лагранжеве подмногострукости $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ дефинишемо Хоферово растојање ρ са: $\rho(L_1,L_2) = \inf l(\alpha)$ где је инфимум узет по свим тачним путевима на $\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ који спајају L_1 и L_2.

Теорема 4.3.1. Нека је (M,ω) затворена симплектичка многострукост за коју је $\pi_2(M) = 0$. Тада постоји фамилија $\{\varphi_t\}$, $t\in[0,+\infty)$, у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ и константа c тако да важи:

1. $d(\mathrm{Id},\varphi_t)\to\infty$ кад $t\to\infty$,
2. $\rho(\mathrm{graph}(\mathrm{Id}),\mathrm{graph}(\varphi_t)) = c$.

Скица доказа. Потпун доказ ове теореме се може наћи у раду Јарона Островера, [9], а ми ћемо експлицитно конструисати дифеоморфизме φ_t из претходне теореме.
Посматрајмо отворен скуп $B\subset M$. Претпоставимо да постоји Хамилтонов дифеоморфизам h такав да је $h(B)\cap\overline{B} = \emptyset$. Малом пертурбацијом пресликавања h можемо претпоставити да су све фиксиране тачке од h недегенерисане. Нека је $F(t,x)$, где $x\in M$, $t\in[0,1]$, Хамилтонова функција таква да је $F(x,t) < c_0$ за свако $x\in M\backslash B$, $t\in[0,1]$. Нека је F и нормализован за свако t, $\displaystyle\int_M F(t,\cdot)\,\omega^n = 0$. Дефинишимо фамилију $\varphi_t = hf_t$, где је $\{f_t\}$ Хамилтонов ток генерисан са $F(t,x)$. Овако дефинисани дифеоморфизми φ_t задовољавају услове претходне теореме. $\square$

Користећи ову теорему можемо да изведемо неке алгебарске особине групе Хамилтонових дифеоморфизама. Утапање групе $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ у $\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ није изометрија. Минималан пут између два графика Хамилтонових дифеоморфизама у $\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ може да прође кроз тачне Лагранжеве подмногострукости које нису графици ни једног Хамилтоновог дифеоморфизма. Такође, као последицу ове теореме, видимо да група $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ затворене симплектичке многострукости за коју је $\pi_2(M) = 0$ има бесконачан дијаметар у односу на Хоферову метрику.

Лема 4.3.1. Нека је $\Theta : \triangle\times[0,1]\to M\times M$ тачна Лагранжева изотопија у $\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ и нека је $\Phi : M\times M\to M\times M$ Хамилтонов дифеоморфизам. Тада је;

$$l\{\Theta\} = l\{\Phi\circ\Theta\}.$$

За свако $L_1, L_2\in\mathcal{L}(M\times M,\triangle)$ важи: $\rho(L_1,L_2) = \rho(\Phi(L_1),\Phi(L_2))$.

Из ове леме следи да Хамилтонови дифеоморфизми дејствују као изометрије на простору $(\mathcal{L}(M\times M,\triangle),\rho)$.
Сада ћемо посматрати тачну изотопију Лагранжевих утапања $\Psi : \triangle\times[0,\infty)\to M\times M$, $\Psi(x,t) = (x,\varphi_t(x))$. Означићемо са $L_t = \Psi(\triangle\times\{t\})$ график пресликавања $\varphi_t = hf_t$ у $M\times M$.

Тврђење 4.3.1. За свако $t \in [0, \infty)$ постоји Хамилтонова изотопија $\{\Phi_s\}$, $s \in [0, t]$, од $M \times M$, таква да је $\Phi_s(L_0) = L_s$ за свако s и да је $\Phi_s(\triangle) = \triangle$.

Скица доказа. Биће објашњено како се конструише изотопија $\{\Phi_s\}$ а детаљан доказ се може наћи у [9]. Из дефиниције пресликавања φ_t следи да је $\mathrm{Fix}(\varphi_t) = \mathrm{Fix}(h)$ за свако t. Дакле, L_t сече дијагоналу $\triangle$ у истим тачкама за свако t. Како смо претпоставили да су све фиксне тачке од h недегенерисане L_t ће трансверзално сећи дијагоналу. Постојаће симплектичка идентификација мале цевасте околине од L_s у $M \times M$, неко U_s, и цевасте околине нултог сечења у котангентном раслојењу T^*L_s, неко V_s. Постојаће и неки реални бројеви $\delta_s = \delta(s, U_s)$ тако да важи $L_{s'} \subset U_s$ за свако s' за које је $|s' - s| \leqslant \delta_s$. Скупови $I_s = (s - \delta_s, s + \delta_s) \cap [0, 1]$ ће чинити отворено покривање интервала $[0, t]$ па ће постојати коначно потпокривање $[0, t] = \cup_{i=1}^{n} I_{s_i}$. Означимо скуп $S = \{s_1 < \ldots < s_n\}$ и претпоставимо да је $I_{s_j} \cap I_{s_{j+2}} = \emptyset$. За свако $s \in S$ са $\widetilde{H}_s$ означимо Хамилтонове функције $\widetilde{H}_s : U_s \to \mathbb{R}$ такве да одговарајући Хамилтонови токови шаљу L_s у $L_{s'}$ за $s' \in I_s$ и остављају дијагоналу инваријантном. Глатким спајањем Хамилтонових токова на пресеку $I_{s_j} \cap I_{s_{j+1}}$ добијамо Хамилтонову изотопију $\{\Phi_s\}$. □

Из овог тврђења и претходне леме закључујемо да фамилија $\{\varphi_t\}$, $t \in [0, \infty)$, задовољава други услов теореме 4.3.1 где је константа $c = \rho(\triangle, L_0)$.

Теорема 4.3.2. Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост за коју је $\pi_2(M) = 0$. Тада постоји Хамилтонов дифеоморфизам $\varphi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ који се не може спојити са идентитетом минималном геодезијском.

Доказ. Већ смо дефинисали фамилију дифеоморфизама $\{\varphi_t\}$ која задовољава услове теореме 4.3.1. Показаћемо да за неко t_0 не постоји минимална геодезијска која спаја φ_{t_0} и идентично пресликавање.

Претпоставимо супротно, за свако t постоји минимална геодезијска у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ која спаја идентитет са φ_t. Фиксирајмо неко $t_0 \in [0, \infty)$. Тада постоји Хамилтонов пут $\alpha = \{f_s\}$, $s \in [0, 1]$, у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ такав да је:

$$d_{t_0} := d(\mathrm{Id}, \varphi_{t_0}) = l(\alpha).$$

Исказано у терминима Лагранжевих подмногострукости, $\Psi = \{\mathrm{graph}(f_s)\}$, $s \in [0, 1]$, је тачан пут у $M \times M$ који спаја дијагоналу са $\mathrm{graph}(\varphi_{t_0})$. Према тврђењу 4.3.1 постоји Хамилтонова изотопија Φ таква да је за свако t, $\Phi_t(\mathrm{graph}(\varphi_{t_0})) = \mathrm{graph}(\varphi_t)$ и $\Phi_t(\triangle) = \triangle$. Одабраћемо t_1 довољно близу t_0 да бисмо обезбедили да нам $\Phi_{t_1}(\mathrm{graph}(f_s))$, $s \in [0, 1]$ буде график неког Хамилтоновог пута γ у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$. График Хамилтоновог пута $\gamma = \{\phi_t\}$ је фамилија утапања слике од M у $M \times M$ које се дефинише са $(x, t) \mapsto (x, \phi_t(x))$. Тврдимо следеће:

$$d_{t_1} \leqslant l(\gamma) = l(\mathrm{graph}(\gamma)) = l(\mathrm{graph}(\alpha)) = l(\alpha) = d_{t_0}.$$

Утапање $f \mapsto \mathrm{graph}(f)$ чува Хоферову дужину а из леме 4.3.1 закључујемо $l\{\mathrm{graph}(\alpha)\} = l\{\mathrm{graph}(\gamma)\}$. Показали смо да за свако t_0 постоји $\varepsilon > 0$ тако да ако је $|t - t_0| \leqslant \varepsilon$ тада је $d_t \leqslant d_{t_0}$. Како је d_t непрекидна функција закључујемо да је она и константна. Са друге стране према теореми 4.3.1 важи $d_t = d(\mathrm{Id}, \varphi_t) \to \infty$ кад $t \to \infty$. Тиме смо добили контрадикцију па претпоставка на важи. □

Литература

[1] A. Banyaga *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comm. Math. Helv 53 (1978), 174-227.

[2] A. Banyaga *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematical and its applications 400, Kluwer Academic Publisher's Group, 1997.

[3] D. McDuff, D. Salamon *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[4] H. Hofer *On topological properties of symplectic maps*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 115A(1990), 25-38.

[5] C. Viterbo *Symplectic geometry as the geometry of generating functions*, Math. Annalen 292 (1992), 685-710.

[6] L. Polterovich *Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 13 (1993), 357-367.

[7] F. Lalonde, D. McDuff *The geometry of symplectic energy*, Ann. of Math. 141 (1995), 349-371.

[8] H. Hofer, E. Zehnder *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1994

[9] Y. Ostrover, *A Comparision of Hofer's Metrics on Hamiltonian Diffeomorphisms and Lagrangian Subanifolds*, Communications in Contemporary Mathematics, Vol. 5, No. 5(2003), 803-811

[10] V. Alekseev, V. Tikhomirov, S. Fomin *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York, 1987

[11] I. Ustilovsky *Conjugate points on geodesics of Hofer's metric*, Diff. Geometry Appl. 6 (1996), 327-342

[12] M. Bialy, L. Polterovich *Geodesics of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Duke Math. J. 76 (1994), 273-292

[13] L. Polterovich *The Geometry of the Group of Symplectic Differomorphism*, ETH Zürich, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, 2001

[14] M. P. do Carmo *Riemannian geometry*, Birkhauser, Boston, 1992

[15] Д. Милинковић, В. Драговић *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003.

[16] D. Milinković *Mini kurs o simplektičkim mnogostrukostima*, skripta, Beograd, 2001

[17] M. Gromov *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.