U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

Prirodno - matematički fakultet

Žarko Živanović

P O O P Š T E N I   R E T R A K T I

- doktorska disertacija -

BEOGRAD , 1974.

S A D R Ž A J

Strana

U V O D

Osnovni pojam klasične teorije retrakata je pojam ret - rakta. Taj pojam je još 1931.godine definisao K . BORSUK. Osnove klasične teorije retrakata BORSUK je izložio u svo - joj knjizi /1/.

Postoji niz pojmova srodnih pojmu retrakta. To su , na prvom mestu , pojmovi homoloških apsolutnih retrakata (AHR) i homoloških apsolutnih okolinskih retrakata (ANHR) koje je uveo S . LEFSCHETZ u /18/ . Ti pojmovi su našli primenu u teoriji nepokretnih tačaka. Homotopske apsolutne retrakte i homotopske apsolutne okolinske retrakte je proučavao F. BARTHOMAY u /8/.

Pojmove G - AR - prostora i G - ANR - prostora defini - sao je i proučavao S . PALAIS u /22/. Rad /22/ sadrži teo - riju G - prostora. Tu se pod G - prostorom podrazumeva pot - pun regularan prostor X na kojem deluje kompaktna LIE gru- pa G homeomorfizama prostora X na sebe.

Teorija ekstenzora je sistematski izložena u knjizi /14/. Knjige /1/ i /14/ su jedine koje su posvećene klasičnoj te- oriji retrakata. One se jako dobro nadopunjavaju.

Nešto drukčiji , više geometrijski karakter ima poopštenje pojma retrakcije koje je dao H. NOGUCHI u /21/. Za razliku od drugih radova , gdje se pojmovi teorije retrakata prenose na slučajeve širih klasa prostora , u radu /21/ objektom po- opštenja služi sam pojam retrakcije. Tu se definiše pojam ε - retrakcije. Podskup A metričkog prostora X naziva se ε -

retraktom od X , ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji preslikavanje

$$r : X \longrightarrow A$$

takvo da je $d(x,r(x)) < \varepsilon$ za svako x iz skupa A. Taj pojam , na prirodan način , dovodi do pojmova aproksimativnih AR - prostora (ε - AR) i aproksimativnih ANR - prostora (ε - ANR).

Druga , najnovija poopštenja retrakcija i retrakata razmatrali su V . KLEE i A . YANDL u /26/.

Borsuk je začetnik i neklasične teorije retrakata,koja se ubrzano razvija poslednjih nekoliko godina. On je definisao pojam f u n d a m e n t a l n o g n i z a medju kompaktima Hilbertovog kuba Q^{ω} (/2/ i /6/). Taj pojam je poopštenje pojma neprekidnog preslikavanja i predstavlja temeljni pojam , kako teorije o b l i k a , tako i teorije retrakata novijeg vremena. Pomoću fundamentalnog niza su definisani : fundamentalna retrakcija (/3) , FAR - prostori i FANR - prostori (/3/ i /5/).

Retrakte u teoriji oblika proučio je S . MARDEŠIĆ u /19/.

Nadovezujući se na rad /27/ , u ovom radu uvodimo još jedan pojam srodan pojmu retrakta. To je pojam p o o p š t e n o g retrakta ili s a ž e t k a nekog prostora: Neprazan podskup A prostora X nazivamo p o o p š t e n i retrakt ili s a ž e t a k od X , ako za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje (sažimanje) $r : X \longrightarrow V$ tako da je $r/A = 1$. Mi ćemo umesto „poopšteni retrakt" govoriti „sažetak" jer baš ta reč jako dobro odražava suštinu tog pojma.

Primetiće se da pojam sažetka , na neki način , stoji na prelazu iz klasične u neklasičnu teoriju retrakata.

Osim pojma sažetka uvešćemo pojmove : okolinskog sažetka, apsolutnog sažetka u klasi $\mathcal{M}$ metričkih prostora (AS($\mathcal{M}$)) , apsolutnog okolinskog sažetka u $\mathcal{M}$ (ANS($\mathcal{M}$)), okolinskog svojstva fiksne tačke i pojam skore kontraktibilnosti.

Značajno mesto u ovom radu zauzimaju relacije p - dominacije ($\leq_p$) i p - ekvivalencije ($=_p$). Te relacije su stvarna poopštenja Borsukovih relacija r - dominacije i r - ekvivalencije. Na kraju , evo kratkog sadržaja rada po paragrafima.

U §1 je definisan već istaknuti pojam sažetka. Naveden je primer koji potvrdjuje da je s a ž e t a k stvarno poopštenje pojma retrakta (Primer 1.1). Dokazuje se da su sažeci Hausdorffovog prostora zatvoreni , dok su sažeci povezanih normalnih prostora povezani. Postavlja se problem konstrukcije Hausdorffovog povezanog prostora koji ima bar jedan nepovezan sažetak. Potom je dokazano da je prebrojiv Dekartov proizvod kompaktnih sažetaka faktor prostora sažetak Dekartovog proizvoda tih prostora. Na kraju je definisan pojam okolinskog svojstva fiksne tačke: Kažemo da zatvoren neprazan podskup A prostora X ima okolinsko svojstvo fiksne tačke , ako za svaku okolinu U od A u X svako preslikavanje $f : U \longrightarrow A$ ima fiksnu tačku. Dokazuje se da sažeci prostora sa svojstvom fiksne tačke imaju okolinsko svojstvo fiksne tačke. Jednim primerom (Primer 1.4) je pokazano da je pojam okolinskog svojstva fiksne tačke korektno poopštenje pojma svojstva fiksne tačke.

Drugi paragraf je posvećen sažecima zatvorenih podskupova AR($\mathcal{M}$) - prostora. Dokazano je da je sažetak topološki pojam za klasu AR($\mathcal{M}$) . Inače , sažeci AR($\mathcal{M}$) - prostora dopuštaju potpunu karakterizaciju : Zatvoren podskup A prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ je sažetak od X , ako i samo ako je A kontraktibilan u svakoj od svojih okolina u X . Pomoću toga je dokazano podudaranje klase kompaktnih sažetaka prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ sa klasom Borsukovih fundamentalnih retrakata od X .

Sažeci $AR(\mathcal{M})$ - prostore se prema adiciji odnose jednako kao i FAR - prostori. Naime , dokazano je da ako su A_1 , A_2 i $A_1 \cap A_2$ sažeci prostora $X \in AR(\mathcal{M})$, onda je i $A_1 \cup \cup A_2$ sažetak od X . Nadalje , ako su $A_1 \cup A_2$ i $A_1 \cap A_2$ sažeci od X , onda su A_1 i A_2 sažeci od X.

Apsolutnim sažecima u klasi metričkih prostora posvećen je §3. Prostor X nazivamo apsolutni sažetak u klasi $\mathcal{M}$ i pišemo $X \in AS(\mathcal{M})$, ako za svaki homeomorfizam

$$h : X \longrightarrow h(X) \subset Y$$

na zatvoren podskup prostora $Y \in \mathcal{M}$, skup $h(X)$ jeste sažetak od Y. Potom su definisane relacije p - dominacije i p - ekvivalencije. Za dva prostora X i Y simbol $X \underset{p}{\geqslant} Y$ znači da je Y homeomorfan nekom sažetku od X. Relacija p-dominacije je refleksivna i tranzitivna. Simbol $X \underset{p}{=} Y$ znači da je $X \underset{p}{\geqslant} Y$ i $Y \underset{p}{\geqslant} X$. Dokazano je da je p - jednakost relacija ekvivalencije u skupu $\mathcal{M}$. Ta relacija indukuje podelu skupa $\mathcal{M}$ na p - tipove . Ta podela je grublja od podele na r - tipove. Klasa $AS(\mathcal{M})$ - prostora se dade dobro okarakterisati: Da bi $X \in \mathcal{M}$ bio $AS(\mathcal{M})$ - prostor potrebno je i dovoljno postojanje konveksnog skupa Q u lokalno konveksnom linearnom prostoru tako da $Q \underset{p}{\geqslant} X$.

Pod skoro kontraktibilnim prostorom se podrazumeva prostor $X \in \mathcal{M}$ čiji je KURATOVSKI - WOIDYSLAWSKI smeštaj (KW -

smeštaj) $h(X)$ kontraktibilan u svakoj od svojih okolina ambijentnog prostora. Primećuje se da se klasa svih skoro kon - traktibilnih prostora (SC - prostora) podudara sa klasom $AS(\mathcal{M})$ - prostora . Nadalje , sažeci , r - slike , pa i retrakti $AS(\mathcal{M})$ - prostora ostaju u klasi $AS(\mathcal{M})$, dok iz $X \in AS(\mathcal{M})$ i $X \underset{p}{\geqslant} Y$ sledi $Y \in AS(\mathcal{M})$. Zanimljivo je i to da se presek familija $AS(\mathcal{M})$ i $ANR(\mathcal{M})$ podudara sa familijom $AR(\mathcal{M})$. Na kraju ovog paragrafa je dokazano da je $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ $AS(\mathcal{M})$ - prostor , ako i samo ako svi $X_n \in AS(\mathcal{M})$.

U § 4 su definisani okolinski sažeci i apsolutni okolinski sažeci u klasi $\mathcal{M}$ ($ANS(\mathcal{M})$ - prostori) : Neka su A i B zatvoreni podskupovi prostora X i neka je $A \subset B$. Skup A nazivamo okolinski sažetak od B , ako postoji okolina W od A u X takva da za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje

$$r : B \cap W \longrightarrow V$$

tako da je $r / A = 1$. Ako je $B = X$, onda A nazivamo okolinskim sažetkom prostora X. Dokazuje se da ako je A okolinski sažetak od $B \subset X \in ANR(\mathcal{M})$, a $h : B \longrightarrow B'$ homeomorfizam na zatvoren podskup $B' \subset Y \in ANR(\mathcal{M})$, onda je $A' \doteq h(A)$ okolinski sažetak od B'. Pojam apsolutnog okolinskog sažetka u klasi $\mathcal{M}$ ($ANS(\mathcal{M})$) definisan je analogno kao i pojam $AS(\mathcal{M})$-prostora. Razlika je samo u tome što se skupu $h(X)$ nameće blaži zahtev da on bude okolinski sažetak ambijentnog prostora.

Klasa $ANS(\mathcal{M})$, takodje , može biti potpuno okarakterisana ovako: Da bi $X \in \mathcal{M}$ bio $ANS(\mathcal{M})$ - prostor , potrebno je i dovoljno da on bude p - slika otvorenog podskupa konveksnog skupa iz lokalno konveksnog linearnog prostora. Dalje je dokazano da se klasa kompaktnih $ANS(\mathcal{M})$ - prostora (označena simbolom ANS) podudara sa klasom svih p - slika prizama Hilbertovog kuba Q^{ω} (Y je p - slika od X , ako $X \underset{p}{\geqslant} Y$), dok se klasa konačnodimenzionalnih ANS - prostora podudara sa klasom p - slika geometrijskih poliedara. Utvrdjeno je još i to da se klasa konačnodimenzionalnih AS - prostora podudara sa klasom p - slika geometrijskih simpleksa.

Problem adicije $ANS(\mathcal{M})$ - prostora ostaje otvoren , dok za direktno množenje stoji: Ako je $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n \in ANS(\mathcal{M})$, onda svi $X_n \in ANS(\mathcal{M})$, a skoro svi X_n su $AS(\mathcal{M})$- prostori. Nadalje , ako svi $X_n \in ANS$, a skoro svi $X_n \in AS$, onda $X_n \in ANS$. Na kraju je dokazano da ako je $\{X_n\}$, $X_n \in ANR$ takav niz da je X_{n+1} retrakt od X_n $(n=1,2,\ldots)$, onda je $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \in ANS$. Kao otvoren problem ostaje pitanje podudaranja ANS i $FANR$.

Elementarna zapažanja u vezi sa sažecima i okolinskim sažecima Euklidovih prostora istaknuta su u § 5. Tu je utvrdjeno da komlementi nepraznih otvorenih ograničenih podskupova prostora E^n ne mogu biti sažeci od E^n , dok su komplementi kompaktnih sažetaka prostora E^n ($n > 1$) povezani. Dalje se dokazuje da ako je A kompaktan okolinski sažetak od E^n, onda skup $E^n - A$ ima najviše konačno mnogo komponenata. Zanimljivo je da se klasa kompaktnih sažetaka prostora E^2 podudara sa klasom kontinuuma koji ne razdvajaju taj prostor.

Medjutim , primerom je pokazano da se klasa kompakata iz E^2 , čiji komplementi imaju konačno mnogo komponenata , ne podudara sa klasom okolinskih sažetaka od E^2. Prva od tih klasa šira je od druge.

Pri izradi ove disertacije mnogo su mi pomogli voditelj Dr KUREPA DJURO i Dr MARJANOVIĆ MILOSAV , profesori Prirodno - matematičkog fakulteta u BEOGRADU. Zato sam im mnogo zahvalan.

Autor

§ 1. SAŽECI HAUSDORFFOVIH PROSTORA

U ovom paragrafu će biti definisan pojam sažetka Hausdorffovog prostora. Potom će biti istaknuta osnovna zapažanja u vezi sa sažecima tih prostora. Uvešćemo pojam okolinskog svojstva fiksne tačke i dokazati da sažeci prostora sa svojstvom fiksne tačke imaju okolinsko svojstvo fiksne tačke.

Napominjemo da ćemo pod prostorom podrazumevati Hausdorffov prostor, dok ćemo pod preslikavanjem podrazumevati neprekidno preslikavanje.

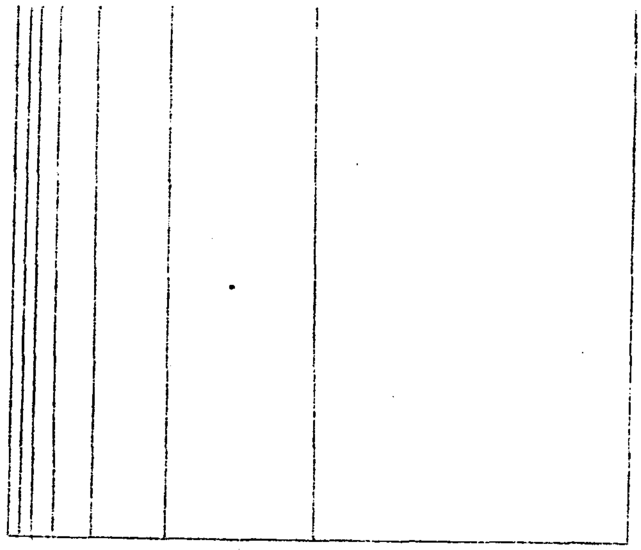
DEFINICIJA 1.1. Za neprazan podskup A prostora X kažemo da je sažetak od X, ako za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje $r : X \longrightarrow V$ tako da je $r / A = 1$.

Odmah zapažamo da je svaki retrakt prostora X ujedno i sažetak od X.

Da je klasa sažetaka prostora, u opštem slučaju, šira od klase retrakata tog prostora, pokazuje nam sledeći

PRIMER 1.1. Neka je A „češalj" u Euklidovom prostoru E^2 (sl.1).

"Češalj" A nije lokalno povezan skup. Prema tome, A ne može biti retrakt od E^2, jer je E^2 lokalno povezan prostor, a lokalna povezanost je topološko svojstvo koje se sa prostora prenosi na njihove retrakte.



Slika 1.

Uverimo se sada da je A sažetak od E^2. Neka je V okolina od A u E^2. Postoji dvodimenzionalni disk (ćelija) $D \subset \subset E^2$ takav da je

$$A \subset D \subset V .$$

Pošto $D \in AR$, inkluzija $i : A \longrightarrow D$ dopušta neprekidno proširenje

$$r : E^2 \longrightarrow D.$$

Jasno je da je $r(E^2) \subset V$ i da je $r/A=1$. Odatle , po Definiciji 1.1 , sledi da je A sažetak prostora E^2.

Poznato je da su retrakti Hausdorffovih prostora zatvoreni u tim prostorima.Dokažimo sada da vredi sledeća

T E O R E M A 1.1. Sažeci Hausdorffovih prostora su zatvoreni podskupovi tih prostora.

D o k a z . Neka je A sažetak prostora X. Posmatrajmo familiju $\mathcal{F}$ svih preslikavanja $f : X \longrightarrow X$ sa svojstvom da je

$f/A = 1$, tj. posmatrajmo skup

$$\mathcal{F} = \{ f \mid f : X \longrightarrow X \ , \ f/A=1 \} \ .$$

Nadalje , posmatrajmo familiju $\{B_f\}$, $f \in \mathcal{F}$ svih podskupova prostora X definisanih kako sledi:

$$B_f = \{ x \in X \mid f(x) = x \} \ .$$

Pomoću Teoreme 5 (/16/ , st.113) zaključujemo da su svi B_f zatvoreni u X. Zbog toga je i presek

$$B = \bigcap B_f \ , \ f \in \mathcal{F}$$

zatvoren skup u X. Dokažimo sada istinitost jednakosti

$$(1) \quad A = B \ .$$

Zaista , iz $x \in A$ sledi $f(x) = x$, za svako $f \in \mathcal{F}$. To znači da $x \in B$, tj. vredi inkluzija

$$(2) \quad A \subset B \ .$$

S druge strane , iz $x \notin A$ sledi postojanje okoline V od A u X tako da $x \notin V$. Kako je A sažetak od X , postoji preslikavanje $f_V \in \mathcal{F}$ tako da je $f_V(X) \subset V$. Znači da je $f_V(x) \neq x$ pa vredi da $x \notin B_{f_V}$ i $x \notin B$. Dakle , iz $x \notin A$ sledi $x \notin B$, odakle , zbog (2) , sledi

$$(3) \quad B \subset A \ .$$

Sada iz (2) i (3) sledi (1) , što je i trebalo dokazati.

POSLEDICA 1.1. Sažeci kompaktnih (lokalno kompaktnih) prostora su kompaktni (lokalno kompaktni).

P r i m e d b a 1.1. Neka je $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfizam koji prostor X preslikava na prostor Y. Ako je A sažetak od X, onda je $h(A)$ sažetak od Y.

Poznato je da su neprekidne slike povezanih prostora povezane. Zbog toga su retrakti povezanih prostora povezani. Sada ćemo se uveriti da su i sažeci povezanih normalnih prostora povezani.

T E O R E M A 1.2. Neka je X povezan normalan prostor. Ako je A sažetak od X, onda je A povezan.

D o k a z . Pretpostavimo da postoje dva neprazna zatvorena disjunktna skupa A_1 i A_2 takva da je $A = A_1 \cup A_2$. Tada bi, zbog normalnosti prostora X, postojale okoline U_1 i U_2 skupova A_1 i A_2 takve da je $U_1 \cap U_2 = 0$. Jasno je da je $U = U_1 \cup U_2$ okolina od A u X. Postojalo bi i preslikavanje

$$r : X \longrightarrow U$$

tako da je $r/A = 1$, jer je A sažetak prostora X po pretpostavci. Nadalje, skup $r(X)$ je povezan podskup svoje okoline U. Pomoću Teoreme 1 (/17/, st.140) zaključujemo da bi moralo biti ili $r(X) \cap U_1 = 0$ ili $r(X) \cap U_2 = 0$. Medjutim, to nije istina, jer je

$$r(A_1) \subset U_1 \quad \text{i} \quad r(A_2) \subset U_2 .$$

Na taj način je pretpostavka da je A nepovezan skup oborena.

POSLEDICA 1.2. Kompaktni sažeci povezanih normalnih prostora su kontinuumi. Sažeci kontinuuma su kontinuumi.

PROBLEM 1.1. Postoji li povezan Hausdorffov prostor koji sadrži nepovezan sažetak?

P r i m e d b a 1.2. Sažeci lukovima povezanih prostora ne moraju biti lukovima povezani. U to nas uverava sledeći

PRIMER 1.2. Posmatrajmo podskup A Euklidove ravni E^2

$$A = \left\{(x,y)\in E^2 \mid x > o \ , \ y=\sin\frac{1}{x}\right\} \cup [-1,1] \ .$$

Skup A nije lukovima povezan i ima dvije komponente povezanosti lukovima. Prva od tih komponenata je segment $[-1,1]$, a druga je $A - [-1,1]$. Nadalje , skup A je kontinuum koji ne razdvaja prostor E^2. Odatle , zbog Teoreme 5.4 , možemo zaključiti da je A sažetak lukovima povezanog prostora E^2.

PROPOZICIJA 1.1. Neka je A sažetak lukovima povezanog prostora X i neka je U bilo koja okolina od A u X. Tada svake dvije tačke $a,b \in A$ možemo povezati lukom koji leži u U.

D o k a z . Pošto je A sažetak od X , postoji preslikavanje

$$r : X \longrightarrow U$$

takvo da je $r(x) = x$, $x \in A$. Nadalje , iz lukovne povezanosti prostora X sledi postojanje luka $L \subset X$ koji povezuje tačke a i b. Neka je $r(L)$ slika luka L dobivrna preslikavanjem r. Jasno je da postoji luk $L' \subset r(L)$ koji povezuje tačku $r(a) = a$ sa tačkom $r(b) = b$ i da je $L' \subset U$.

Dobro je poznato da su retrakti kontraktibilnih prostora kontraktibilni. Medjutim , sažeci kontraktibilnih prostora ne moraju biti kontraktibilni. Pokažimo to sledećim primerom:

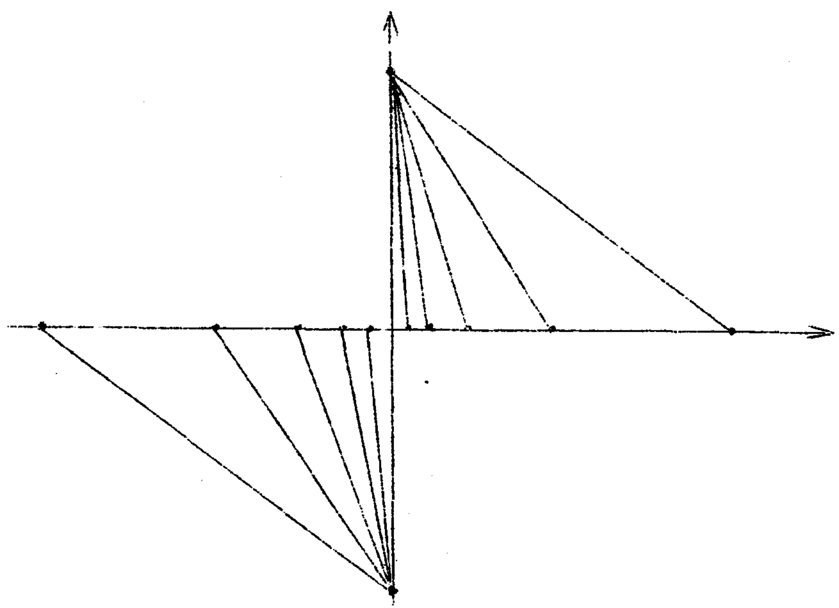
PRIMER 1.3. Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tačaka a_n i b_n $(n=1,2,\dots)$ prostora E^2 :

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, o\right) , \quad b_n = \left(-\frac{1}{n}, o\right) \quad (n=1,2,\dots).$$

Stavimo $a_o=(o,1)$ i $b_o=(o,-1)$. Neka su $[a_n,a_o]$ i $[b_n,b_o]$ segmenti u E^2. Poznato je da skup

$$A = [a_o,b_o] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,a_o]\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [b_n,b_o]\right)$$

nije kontraktibilan (sl.2).



Slika 2.

Medjutim , skup A jeste sažetak od E^2, jer je on kontinuum koji ne razdvaja E^2(v. Teoremu 5.4).

Ipak , sažeci kontraktibilnih prostora imaju jedno karakteristično svojstvo veoma blisko svojstvu kontraktibilnosti. To nam kazuje

T E O R E M A 1.3. Sažeci kontraktibilnih prostora su kontraktibilni u svakoj od svojih okolina.

D o k a z . Neka je A sažetak kontraktibilnog prostora X. To znači da postoji homotopija

$$H : X \times I \longrightarrow X \quad (I = [0,1])$$

takva da je

$$H(x,0) = x \quad i \quad H(x,1) = x_0 \in X \,, x \in X \,.$$

Neka je V proizvoljno odabrana okolina od A u X. Pošto je A sažetak prostora X , postoji sažimanje

$$r : X \longrightarrow V$$

takvo da je $r(x) = x$, $x \in A$. Sada smo u mogućnosti da definišemo homotopiju $H' : A \times I \longrightarrow V$ stavljajući

$$H'(x,t) = r\,H\,(x,t) \,,\ (x,t) \in A \times I \,.$$

Pošto je $H'(x,0) = r\,H\,(x,0) = r(x) = x$, $x \in A$, a $H'(x,1) = r\,H(x,1) = r(x_0) \in V$, vidimo da homotopija H' povezuje inkluziju $i : A \to V$ sa konstantnim preslikavanjem

$$c : A \longrightarrow V \,,\ c(x) = r(x_0) \in V \,,\ x \in A \,.$$

To znači da je A kontraktibilan u svakoj od svojih okolina u prostoru X. Time je dokaz Teoreme 1.3 završen.

Za uporedjivanje sažetaka sa retraktima i okolinskim retraktima nekog prostora, korisnom se pokazuje

PROPOZICIJA 1.2. Ako je $\mathcal{A}$ familija okolinskih retrakata, $\mathcal{B}$ familija sažetaka i $\mathcal{R}$ familija retrakata prostora X, onda je $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

D o k a z . Neka je $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Tada postoje okolina U od A u X i retrakcija

$$r' : U \longrightarrow A .$$

Nadalje, postoji preslikavanje

$$r'' : X \longrightarrow U$$

tako da je $r''/A = 1$. Lako se uveravamo da je

$$r = r'r'' : X \longrightarrow A$$

retrakcija. Dakle, $A \in \mathcal{R}$. Inkluzija $\mathcal{R} \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ je evidentna i dokaz Propozicije 1.2 je završen.

Sfera S^1 prostora E^2 jeste okolinski retrakt od E^2. Medjutim, ona nije sažetak od E^2. To je jasno, jer ako bi sfera S^1 bila sažetak od E^2, ona bi, zbog Propozicije 1.2, morala biti retrakt od E^2. Dobro je poznato da to nije istina.

Zapazimo još i to da sažeci prostora E^2 ne moraju biti njegovi okolinski retrakti. Na primer, „češalj" A iz Primera 1.1 jeste sažetak od E^2, a nije njegov okolinski retrakt , zato što je A lokalno nepovezan.

U odnosu sažetaka prostora prema proširivanju preslikavanja značajno mesto zauzima

T E O R E M A 1.4. Neka je A sažetak metričkog prostora X. Tada svako preslikavanje $f : A \to Y$ u bilo koji $Y \in ANR(\mathcal{M})$ ima neprekidno proširenje $\bar{f} : X \to Y$.

D o k a z. Skup A je zatvoren u X , zbog Teoreme 1.1. Iz $Y \in ANR(\mathcal{M})$, zbog Teoreme 4.1 (/1/ , st.98) , sledi da postoje okolina U od A u X i neprekidno proširenje

$$f_o : U \to Y$$

preslikavanja f. Kako je A sažetak prostora X , postoji preslikavanje $r : X \to U$ tako da je $r/A = 1$. Za završetak dokaza dovoljno je staviti $\bar{f} = r\, f_o$.

Uzevši u obzir DUGUNDJIJEVU teoremu (/1/ , (9.1),st.90) lako se uveravamo da stoji

P r i m e d b a 1.3. Neka $Y \in LC^n$ ($n > o$) . Ako je A sažetak metričkog prostora X takav da je

$$\dim(X - A) \leqslant n+1,$$

onda svako preslikavanje $f : A \to Y$ ima neprekidno proširenje $\bar{f} : X \to Y$.

Pomoću Leme (8.2) (/1/ , st.105) možemo se uveriti da stoji i

P r i m e d b a 1.4. Ako je F zatvoren podskup metričkog prostora X , onda je skup

$$A = (X \times 0) \cup (F \times I)$$

sažetak prostora $X \times I$.

PROPOZICIJA 1.3. Svaki celularan podskup C n-dimenzionalnog metričkog prostora X jeste sažetak od X.

D o k a z . Iz celularnosti skupa C u X sledi postojanje niza $\{D_i\}$ $(i=1,2,\dots)$ topoloških n-ćelija D_i takvih da stoji :

$$(1) \quad D_{i+1} \subset \operatorname{int} D_i ,$$

$$(2) \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i = C .$$

Neka je V proizvoljno odabrana okolina skupa C u X. Tada postoji n - ćelija D_{i_0} takva da je $D_{i_0} \subset V$. Pošto $D_{i_0} \in AR$ postoji retrakcija

$$r : X \to D_{i_0} .$$

Jasno je da preslikavanje r sažima X u V tako da je $r/C = 1$. Zbog proizvoljnosti izbora okoline V od C zaključujemo da je C sažetak prostora X.

P r i m e d b a 1.5. Svako stablo prostora E^2, budući da je celularno u E^2, jeste sažetak od E^2.

O Dekartovom prebrojivom proizvodu kompaktnih sažetaka Hausdorffovih prostora govori nam

T E O R E M A 1.5. Neka su A_n $(n=1,2,\ldots)$ kompaktni sažeci prostora X_n. Tada je Dekartov proizvod $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ kompaktan sažetak Dekartovog proizvoda $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

D o k a z . Skup A je kompaktan , zbog poznate Teoreme TIHONOVA . Neka je U bilo kako odabrana okolina od A u X . Tada postoje okoline U_n od A_n u X_n $(n=1,2,\ldots)$ tako da je

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n \subset U .$$

Nadalje , pošto su svi A_n sažeci od X_n , postoje preslikavanja

$$r_n : X_n \longrightarrow U_n$$

takva da je $r_n/A_n = 1$ $(n=1,2,\ldots)$. U mogućnosti smo da definišemo preslikavanje

$$r : X \longrightarrow U$$

formulom

$$r(x_1,x_2,\ldots) = (r_1(x_1),r_2(x_2),\ldots).$$

Iz $(x_1,x_2,\ldots) \in A$ sledi $r(x_1,x_2,\ldots) = (x_1,x_2,\ldots)$, a to pokazuje da je $r/A = 1$. Prema tome , skup A je sažetak prostora X , što je i trebalo dokazati.

Odavno je poznato da se svojstvo fiksne tačke prostora prenosi na retrakte tog prostora. U nastojanju da se odgovori na pitanje da li se svojstvo fiksne tačke prostora prenosi na njegove sažetke , došlo se do pojma o k o l i n s k o g svojstva fiksne tačke. Taj pojam uvodimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 1.2. Neka je F zatvoren neprazan podskup prostora X. Kažemo da F ima okolinsko svojstvo fiksne tačke, ako za svaku okolinu U od F u X svako preslikavanje $f : U \to F$ ima fiksnu tačku.

T E O R E M A 1.6. Neka je A sažetak prostora X. Ako X ima svojstvo fiksne tačke, onda A ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

D o k a z . Neka je U proizvoljno odabrana okolina od A u X i neka je

$$f : U \to A$$

bilo koje preslikavanje. Pošto je A sažetak prostora X, postoji preslikavanje

$$r : X \to U$$

tako da je $r(x) = x$, $x \in A$. Tada preslikavanje

$$g = f\,r : X \to A$$

ima fiksnu tačku i vrede jednakosti:

$$g(x_o) = f\,r(x_o) = x_o\ .$$

Kako $x_o \in A$, onda je $r(x_o) = x_o$ pa imamo da je

$$f\,r(x_o) = f(x_o) = x_o\ .$$

Prema tome, preslikavanje f ima fiksnu tačku, odakle, po Definiciji 1.2, sledi da A ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

Sažeci Hilbertovog kuba Q^{ω} imaju okolinsko svojstvo fiksne tačke. Na primer , skup A iz Primera 1.3 ima okolinsko svojstvo fiksne tačke , jer je on sažetak kvadrata

$$[a_1, b_1] \times [a_o, b_o]$$

koji ima svojstvo fiksne tačke.

T E O R E M A 1.7. Neka je F okolinski retrakt prostora X. Da bi F imao svojstvo fiksne tačke, potrebno je i dovoljno da on ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

D o k a z . Najpre pretpostavimo da F ima svojstvo fiksne tačke. Neka je U bilo kako odabrana okolina skupa F u X i neka je f bilo koje preslikavanje. Tada restrikcija

$$f/F : F \longrightarrow F$$

ima fiksnu tačku po pretpostavci. Ako je x_o ta fiksna tačka , onda je $x_o \in F$ i vredi jednakost

$$f(x_o) = x_o .$$

Dakle , f ima fiksnu tačku pa F ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

Pretpostavimo sada da F ima okolinsko svojstvo fiksne tačke. Pošto je F okolinski retrakt prostora X , postoje okolina U od F u X i retrakcija

$$r : U \longrightarrow F .$$

Neka je $f : F \longrightarrow F$ proizvoljnim načinom izabrano preslikavanje. Tada preslikavanje

$$g = f\, r : U \longrightarrow F$$

ima fiksnu tačku $x_o \in F$ po pretpostavci. Pošto je r retrakcija, iz $x_o \in F$ sledi da je $r(x_o) = x_o$. Prema tome, imamo da je

$$g(x_o) = f\ r(x_o) = f(x_o) = x_o .$$

Znači, preslikavanje $f : F \to F$ ima fiksnu tačku. Zbog toga F ima svojstvo fiksne tačke.

P r i m e d b a 1.6. Ako zatvoren podskup F ima svojstvo fiksne tačke, onda F ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

P r i m e d b a 1.7. Pojam okolinskog svojstva fiksne tačke je stvarno poopštenje pojma svojstva fiksne tačke. U to nas uverava

PRIMER 1.4. Posmatrajmo kružnicu

$$K = \left\{(x,y,z) \in E^3 : x^2 + y^2 = 1 ,\ z=o\right\}$$

prostora E^3. Neka S označava spiralu koja je namotana na kružnicu K, leži u ravni te kružnice i polazi iz tačke $(2,o,o)$.

Zapazimo konus

$$C(A,a) = \bigcup_{x \in A} [a,x]$$

nad skupom $A = K \cup S$ sa vrhom u tački $a = (o,o,1)$. Poznato je da konus $C(A,a)$ nema svojstva fiksne tačke. On je kompaktan i u sebi kontraktibilan. Odatle, zbog Teoreme 2.3, sledi da je $C(A,a)$ sažetak prostora E^3. Jasno je da postoji kugla kojoj je konus $C(A,a)$ sažetak. Pošto kugle Euklidovih prostora imaju svojstvo fiksne tačke , pomoću Teoreme1.6 zaključujemo da konus $C(A,a)$ ima okolinsko svojstvo fiksne tačke.

§ 2. SAŽECI ZATVORENIH PODSKUPOVA $AR(\mathcal{M})$ - PROSTORA

U ovom paragrafu će biti razmotreni sažeci zatvorenih podskupova $AR(\mathcal{M})$ - prostora kao i sažeci samih $AR(\mathcal{M})$ - prostora. Videćemo da sažeci $AR(\mathcal{M})$ - prostora dopuštaju potpunu karakterizaciju. Biće dokazano podudaranje klase kompaktnih sažetaka $AR(\mathcal{M})$ - prostora sa klasom Borsukovih FAR - prostora.

Neka su A i B zatvoreni podskupovi prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ i neka je $A \subset B$. Kažemo da je A sažetak od B ako za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje

$$r : B \to V$$

tako da je $r(x) = x$, $x \in A$. Napose , ako je $B = X$, onda A nazivamo sažetkom prostora $X \in AR(\mathcal{M})$.

Jednostavna , ali i veoma značajna je sledeća

T E O R E M A 2.1. Neka je A sažetak zatvorenog skupa $B \subset X \in ANR(\mathcal{M})$. Tada za svaku okolinu V od A u X postoje okolina U od B u X i preslikavanje $r : U \to V$ takvo da je $r / A = 1$.

D o k a z . Ne smanjujući opštost , možemo pretpostaviti da je V otvoren skup u X. Po pretpostavci postoji preslikavanje

$$r' : B \to V$$

takvo da je $r'(x) = x$, $x \in A$.

Prema Hannerovoj teoremi (/1/ , st. 108) sledi da je $V \in ANR(\mathcal{M})$. Pošto je B zatvoren skup , zbog Borsukove teoreme (/1/ , st. 98) postoje okolina U od B u X i neprekidno proširenje

$$r : U \longrightarrow V$$

preslikavanja r′. Očito je r/A = 1 , što je i trebalo dokazati.

POSLEDICA 2.1. Ako je A sažetak od B , a B sažetak od $C \subset X \in ANR(\mathcal{M})$, onda je A sažetak od C.

D o k a z . Pošto je A sažetak od B , onda svakoj okolini V od A u X odgovaraju okolina U od B u X i preslikavanje $r' : U \longrightarrow V$, zbog Teoreme 2.1. Nadalje , pošto je B sažetak od C , onda postoji preslikavanje

$$r'' : C \longrightarrow U$$

takvo da je $r''/B = 1$. Stavimo li $r = r'r''$ dobivamo sažimanje

$$r : C \longrightarrow V$$

tako da je $r/A = 1$.

Oslanjajući se na definiciju fundamentalnog retrakta (/2/) , vidimo da je istinita

POSLEDICA 2.2. Ako je A fundamentalni retrakt kompakta B iz Q^{ω}, onda je A sažetak od B.

Da je pojam sažetka zatvorenog podskupa nekog $AR(\mathcal{M})$ -

prostora topološki pojam pokazuje nam

T E O R E M A 2.2. Neka je B zatvoren podskup prostora $X \in AR(\mathcal{M})$, a $h : B \longrightarrow B'$ homeomorfizam sa B na zatvoren podskup $B' = h(B)$ prostora $Y \in AR(\mathcal{M})$. Ako je A sažetak od B, onda je $A' = h(A)$ sažetak od B'.

D o k a z . Pošto su B i B' zatvoreni podskupovi prostora X, $Y \in AR(\mathcal{M})$, onda po Borsukovoj teoremi (/1/ , st.98) postoje neprekidna proširenja

$$f : X \longrightarrow Y \quad i \quad g : Y \longrightarrow X$$

homeomorfizama $h : B \longrightarrow B'$ i $h^{-1} : B' \longrightarrow B$, respektivno.

Neka je V proizvoljno fiksirana okolina od A' u Y. Tada je $V_1 = f^{-1}(V)$ okolina skupa A u X. Zbog Teoreme 2.1 , postoje okolina U od B u X i preslikavanje

$$r : U \longrightarrow V_1$$

tako da je $r(x) = x$, $x \in A$. Jasno je da je $U_1 = g^{-1}(U)$ okolina od B' u Y. Stavljajući

$$r' = f\, r\, g/U_1$$

dobivamo preslikavanje $r' : U_1 \longrightarrow V_1$ takvo da je $r'(y) = y$, za svako $y \in A'$. To znači da je A' sažetak od B'.

POSLEDICA 2.3. Neka je A sažetak prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ i neka je $B \subset Y \in AR(\mathcal{M})$ zatvoren u Y. Tada iz $A \underset{T}{\geq} B$ sledi da je B sažetak od Y.

D o k a z . Pošto $A \underset{r}{\geqq} B$ postoji retrakt A' od A koji je homeomorfan sa B . Nadalje , pošto je A' retrakt sažetka A prostora $X \in AR(\mathcal{M})$, onda je A' sažetak od X , zbog Posledice 2.1. Sada pomoću Teoreme 2.2 zaključujemo da je B sažetak od Y .

Karakterizaciju sažetaka $AR(\mathcal{M})$ -- prostora daje nam, za ovaj paragraf , najvažnija

T E O R E M A 2.3. Zatvoren podskup A prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ je sažetak od X , onda i samo onda , ako je on kontraktibilan u svakoj od svojih okolina.

D o k a z . Neka je A sažetak prostora $X \in AR(\mathcal{M})$. Pošto su $AR(\mathcal{M})$ - prostori kontraktibilni , zbog Teoreme 1.4 , sledi da je A kontraktibilan u svakoj od svojih okolina.

Pretpostavimo sada da je A zatvoren podskup prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ i da je A kontraktibilan u svakoj od svojih okolina u X. To znači da za proizvoljno odabranu okolinu U od A u X postoji homotopija

$$H : A \times I \longrightarrow U$$

koja povezuje inkluziju $i : A \longrightarrow U$ sa konstantnim preslikavanjem $c : A \longrightarrow U$. Možemo uzeti da je U otvoren skup pa, prema tome , $U \in ANR(\mathcal{M})$. Pošto je A zatvoren podskup prostora $X \in AR(\mathcal{M})$, onda po Borsukovoj teoremi (/1/ , st.105), koja se odnosi na proširenje homotopije , postoji neprekidno proširenje

$$r : X \longrightarrow U$$

inkluzije $i : A \longrightarrow U$. Očito je $r(x) = x$ za svako $x \in A$. To znači da je A sažetak prostora X. Time je dokaz Teoreme 2.3 kompletiran.

Jasno je da svaki u sebi kontraktibilan podskup bilo kojeg prostora jeste kontraktibilan u svakoj od svojih okolina u tom prostoru. Stoga stoji

POSLEDICA 2.4. Svaki zatvoren kontraktibilan podskup prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ jeste sažetak od X.

T E O R E M A 2.4. Familija kompaktnih sažetaka prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ i familija fundamentalnih retrakata od X, u smislu Borsuka, podudaraju se.

D o k a z . Neka je A kompaktan sažetak prostora $X \in AR(\mathcal{M})$. Niz $\{K_n\}$ kugli

$$K_n = \left\{ x \in X \mid d(x,A) < \frac{1}{n} \right\}$$

$(n=1,2,\dots)$ jeste baza familije okolina skupa A u X. Zbog Teoreme 2.3 postoji niz $\{H_n\}$ homotopija

$$H_n : A \times I \longrightarrow K_n \quad (n=1,2,\dots)$$

koje povezuju inkluzije $i_n : A \longrightarrow K_n$ sa konstantnim preslikavanjima $c_n : A \longrightarrow K_n$. Pošto $K_n \in ANR(\mathcal{M})$ i pošto konstantna preslikavanja $c_n : A \longrightarrow K_n$ dopuštaju konstantna proširenja $c_n : X \longrightarrow K_n$, postoje neprekidna proširenja

$$r_n : X \longrightarrow K_n$$

inkluzija $i_n : A \longrightarrow K_n$ tako da je

$$r_n \sim c_n \quad u \quad K_n \quad (n=1,2,\dots).$$

To sledi iz već istaknute Borsukove teoreme o proširivanju homotopije.

Neka je U bilo kako odabrana okolina od A u X. Tada, zbog kompaktnosti skupa A, postoji indeks n_o tako da je $K_n \subset U$ za svako $n > n_o$. Na taj način uvidjamo da postoji fundamentalni niz

$$\underline{r} = (r_n, X, A).$$

Kako je

$$r_n(x) = x, \quad x \in A \quad (n=1,2,\dots)$$

zaključujemo da je

$$\underline{r} : X \longrightarrow A$$

fundamentalna retrakcija. Prema tome je A fundamentalni retrakt od X.

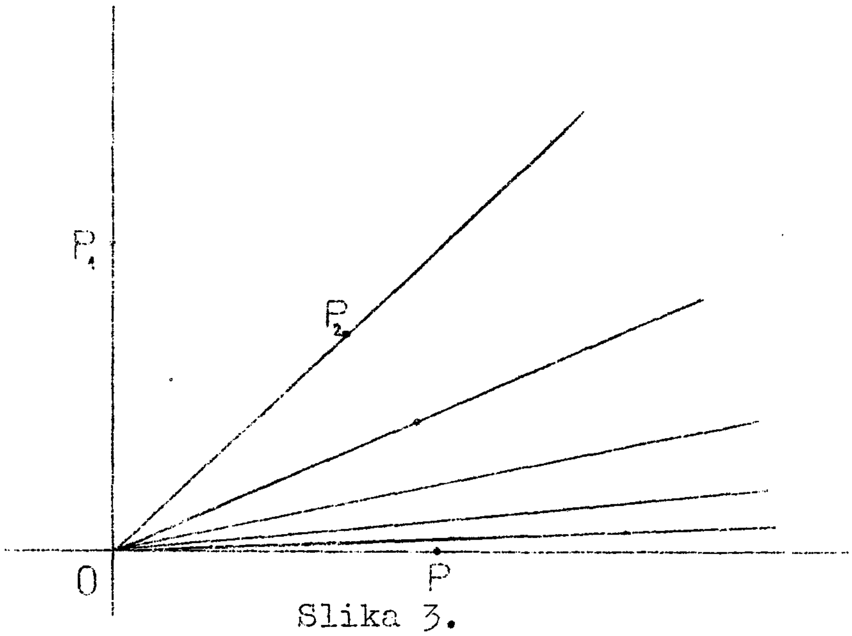
Obratno, ako je A fundamentalni retrakt od X odmah sledi da je A sažetak od X.

Da su familija $AR(\mathcal{M})$ - prostora i familija FAR - prostora prave podfamilije familije svih sažetaka $AR(\mathcal{M})$-prostora, uverava nas sledeći

PRIMER 2.1. Posmatrajmo niz $\{P_n\}$ tačaka

$$P_n = (1, \pi \cdot 2^{-n}) \quad (n=1,2,\dots)$$

Euklidove ravni E^2 koje su zadate svojim polarnim koordinatama u odnosu na pol O i polarnu osu OP , gde je P granica niza $\{P_n\}$ (sl.3).



Slika 3.

Neka je A unija svih polupravih OP_n $(n=1,2,\dots)$ zajedno sa graničnom polupravom OP , tj. neka je

$$A = OP \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} OP_n \right).$$

Jasno je da je A zatvoren i kontraktibilan podskup u $E^2 \in AR(\mathcal{M})$. Pomoću Posledice 2.3 zaključujemo da je A sažetak od E^2. Medjutim , A nije retrakt od E^2, jer je lokalno nepovezan. Nadalje , A nije FAR - prostor , jer nije kompaktan.

Sledeća teorema predstavlja poopštenje Teoreme 2.3.

T E O R E M A 2.5. Neka je A sažetak prostora $X \in AR(\mathcal{M})$. Tada svaka okolina U od A u X sadrži okolinu U_0 od A u X koja je kontraktibilna u U.

D o k a z . Pošto je A sažetak prostora $X \in AR(\mathcal{M})$, zbog poznate Borsukove teoreme (/1/ , (2.1) , st.95) , postoje konveksan podskup Q normiranog linearnog prostora i homeomorfizam

$$h : X \longrightarrow X'$$

sa X na zatvoren podskup X' u Q tako da je X' retrakt od Q. Neka je $r : Q \longrightarrow X'$ retrakcija. Stavimo $A' = h(A)$. Pomoću Teoreme 2.2 zaključujemo da je A' sažetak od X', a kako je X' retrakt od $Q \in AR(\mathcal{M})$, onda je A' sažetak od Q.

Neka je U okolina od A u X . Tada je $U' = h(U)$ okolina od A' u Q pa postoji preslikavanje

$$r' : Q \longrightarrow U'$$

takvo da je $r'(y) = y$, $y \in A'$. Nadalje , postoji okolina U'_o od A' u Q sa svojstvom da je

$$[y, r'(y)] \subset U' ,$$

za svaku tačku $y \in U'_o$, gde je $[y, r'(y)]$ segment u Q koji povezuje tačku $y \in U'_o$ sa tačkom $r'(y) \in U'$. Stavimo $U_o = h^{-1}(U'_o)$. Jasno je da je U_o okolina od A u X i da je $U_o \subset U$. Možemo pretpostaviti da nula 0 normiranog linearnog prostora pripada skupu U. Sada možemo definisati homotopiju $H : U_o \times I \longrightarrow U$ formulom

$$H(x,t) = \begin{cases} h^{-1}(2tr'h(x) + (1-2t)h(x)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ h^{-1}(r'((2-2t)h(x))) , & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Za $t = \frac{1}{2}$ dobivamo jednakosti

$$h^{-1}(2tr'h(x) + (1-2t)h(x) = h^{-1}r'h(x) ,$$

$$h^{-1}(r'((2-2t)h(x))) = h^{-1}r'h(x) .$$

Odatle sledi da je H dobro definisana homotopija. Na kraju, pošto je $H(x,o) = x$ i $H(x,1) = h^{-1}(r'(0)) \in U$, za svako x iz U_o , zaključujemo da homotopija H povezuje inkluziju $i : U_o \to U$ sa konstantnim preslikavanjem $c : U_o \to U$, $c(x) = h^{-1}r'(0) \in U$, $x \in U_o$. To znači da je okolina U_o kontraktibilna u U i dokaz Teoreme 2.5 je završen.

POSLEDICA 2.5. Neka je $\{A_t\}$, $t \in T$ baza zatvorenih okolina familije okolina zatvorenog skupa $A \subset X \in AR(\mathcal{M})$. Ako su svi A_t sažeci od X , onda je A sažetak od X.

D o k a z . Neka je U okolina od A u X. Tada postoji neki član $A_{t'}$ baze $\{A_t\}$ takav da je $A_{t'} \subset U$. Pošto je $A_{t'}$ sažetak od X , on je kontraktibilan u U. To znači da svaka okolina U od A u X sadrži okolinu A_t koja je kontraktibilna u U. Odatle , zbog Teoreme2.5 , sledi da je A sažetak od X.

POSLEDICA 2.6. Neka je $\{A_n\}$ opadajući niz sažetaka prostora $X \in AR(\mathcal{M})$ tako da je $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kompaktan skup. Tada je A fundamentalni retrakt od X.

D o k a z . Neka je U bilo koja okolina od A u X. Kako je A kompaktan skup postoji član $A_{n'}$ niza $\{A_n\}$ takav da je $A_{n'} \subset U$. Pošto je $A_{n'}$ sažetak od X on je kontraktibilan u U. Pogotovo je $A \subset A_{n'}$ kontraktibilan u U. Dakle, A je kompaktan i kontraktibilan u svakoj od svojih okolina. Sada, pomoću Teoreme 2.4, možemo zaključiti da je A fundamentalni retrakt prostora X.

Zanimljivo je da se sažeci $AR(\mathcal{M})$ - prostora, jednako kao i FAR - prostori, dobro ponašaju prema adiciji. U to nas uverava

T E O R E M A 2.6. Neka su A_1, A_2 i $A_0 = A_1 \cap A_2$ sažeci prostora $X \in AR(\mathcal{M})$. Tada je $A = A_1 \cup A_2$ sažetak od X.

D o k a z . Neka je U okolina od A u X. Pošto je A_0 sažetak od X, zbog Teoreme 2.3, postoji homotopija

$$H_0 : A_0 \times I \longrightarrow U$$

takva da je

$$H_0(x,0) = i_1(x) \quad \text{i} \quad H_0(x,1) = x_0 \ , \ x \in A_0,$$

gde je $i_1 : A_1 \longrightarrow U$ inkluzivno preslikavanje.

Možemo pretpostaviti da $U \in ANR(\mathcal{M})$. Pošto je A_1 sažetak od X, onda je $i_1(A_1) = A_1$ kontraktibilan skup u U. Primećujemo da su ispunjene sve pretpostavke Borsukove leme (/3/, (14.2), st.84) po kojoj postoji homotopija

$$H_1 : A_1 \times I \longrightarrow U$$

takva da stoji

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} H_1(x,o) = i_1(x) \ , \ x\in A_1 \\ H_1(x,1) = x_o \ , \quad x\in A_1 \\ H_1(x,t) = H_o(x,t),(x,t)\in A_o x\ I \ . \end{cases}$$

Na potpuno isti način se uveravamo da postoji homotopila

$$H_2 : A_2 x\ I \longrightarrow U$$

takva da vredi

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} H_2(x,o) = i_2(x) \ , \ x\in A_2 \\ H_2(x,1) = x_o \ , \ x\in A_2 \\ H_2(x,t) = H_o(x,t),(x,t)\in A_o x\ I \ , \end{cases}$$

gde je $i_2 : A_2 \longrightarrow U$ inkluzivno preslikavane.

Definišimo sada homotopiju $H : A \times I \longrightarrow U$ formulom

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,t) \ , \ (x,t)\in A_1 x\ I \\ \\ H_2(x,t) \ , \ (x,t)\in A_2 x\ I \ . \end{cases}$$

Pomoću (1) i (2) se lako uveravamo da je H dobro definisana homotopija koja povezuje inkluziju $i : A \longrightarrow U$ sa konstantnim preslikavanjem $c : A \longrightarrow U$ tako da je

$$c(x) = x_o \in U \ , \ x\in A \ .$$

Na taj način smo dokazali da je A zatvoren podskup prostora $X\in AR(\mathcal{M})$ i da je A kontraktibilan u svakoj od svojih okolina u X. Odatle , zbog Teoreme 2.3 , sledi da je A sažetak prostora X , što je i trebalo dokazati.

T E O R E M A 2.7. Neka su $A = A_1 \cup A_2$ i $A_o = A_1 \cap A_2$ sažeci prostora $X\in AR(\mathcal{M})$. Tada su A_1 i A_2 sažeci od X.

D o k a z . Iz pretpostavke da je A_o sažetak prostora X sledi da za svaku okolinu V_1 od A_1 u X postoji sažimanje

$$r_2 : A_2 \rightarrow V_1$$

tako da je $r_2(x) = x$, $x \in A_o$.

Definišimo preslikavanje $r : A \longrightarrow V_1$ formulom

$$r(x) = \begin{cases} x , & x \in A_1 \\ r_2(x) , & x \in A_2 \end{cases} .$$

Vidimo da je r dobro definisano preslikavanje sa A ka A_1 i da ono ima svojstvo da je $r(x) = x$, $x \in A_1$, a pošto je A sažetak od X , onda je i A_1 sažetak od X , zbog Posledice 2.1. Na isti način se uveravamo da je i A_2 sažetak od X.

Istaknimo sada jedno specijalno svojstvo koje imaju sažeci Hilbertovog prostora E^ω.

T E O R E M A 2.8. Neka je A sažetak Hilbertovog prostora E^ω i neka je U bilo koja okolina od A u E^ω. Tada za svaku poopštenu kuglu $K(U, \varepsilon)$ postoje okolina $U_\varepsilon \subset U$ od A u E^ω i preslikavanje $r_\varepsilon : E^\omega \longrightarrow K(U,\varepsilon)$ takvo da je

$$r(x) = x , \quad x \in U_\varepsilon .$$

D o k a z . Po pretpostavci postoji preslikavanje $r : E^\omega \longrightarrow U$ takvo da je $r(x) = x$, $x \in A$. Zbog neprekidnosti preslikavanja r , za svaku kuglu $K(a, \varepsilon_a) \subset U$, $a \in A$, postoji kugla $K(r(a),\delta_a) = K(a, \delta_a) \subset K(a, \varepsilon_a)$ takva da je

$$r(K(a, \delta_a)) \subset K(a, \varepsilon_a) .$$

Prema tome , za svako $x \in K(a, \delta_a) \subset K(a, \varepsilon_a)$ vredi da je $r(x) \in K(a, \varepsilon_a)$. Pošto su kugle prostora E^{ω} konveksne , ako sa $[x, r(x)]$ označimo segment u E^{ω} koji povezuje tačku x sa tačkom $r(x)$, zapažamo da je

$$[x, r(x)] \subset K(a, \varepsilon_a) , x \in K(a, \delta_a) .$$

Posmatrajmo familiju $\{K(a, \delta_a)\}$, $a \in A$. To je familija otvorenih kugli sa centrima u skupu A. Zato je

$$U_o = \bigcup_{a \in A} K(a, \delta_a)$$

okolina od A u U takva da je $[x, r(x)] \subset U$, $x \in U_o$.

Definišimo zatvorenu okolinu U_{ε} skupa A u E^{ω} na sledeći način:

$$U_{\varepsilon} = \{ x \in U_o : \|x - r(x)\| \leqslant \varepsilon \}.$$

Očito je $A \subset U_{\varepsilon} \subset U_o \subset U$. Definišimo preslikavanje $f: U_{\varepsilon} \longrightarrow E^{\omega}$ formulom

$$f(x) = x - r(x) , x \in U_{\varepsilon} .$$

Pošto je $f(x) = 0$ za svako $x \in A$ i $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon$ za svako $x \in U_{\varepsilon}$, vidimo da f preslikava U_{ε} u kuglu $K(0, \varepsilon)$. Kako je U_{ε} zatvoren skup , a $K(0, \varepsilon)$ je konveksan skup , pomoću teoreme DUGUNDJIJA (/1/ , (7.1) , st.86) zaključujemo da postoji neprekidno proširenje

$$\bar{f} : E^{\omega} \longrightarrow E^{\omega}$$

preslikavanja f tako da je $\bar{f}(E^{\omega}) \subset K(0, \varepsilon)$. Sada smo u mogućnosti da definišemo preslikavanje

$$r_{\varepsilon} : E^{\omega} \longrightarrow E^{\omega}$$

formulom

$$r\ (x) = \overline{f}(x) + r(x)\ .$$

Lako zapažamo da je $r_{\varepsilon}(x) = x$, za svaku tačku $x \in U_{\varepsilon}$. Nadalje , vidimo da stoji jednakost

$$\|r\ (x) - r(x)\| = \|\overline{f}(x)\|\ ,\ x \in E^{\omega}.$$

Pošto je $r(E^{\omega}) \subset U$ zaključujemo da je $r_{\varepsilon}(E^{\omega}) \subset K(U, \varepsilon)$. Time je dokaz Teoreme 2.8 završen.

§ 3. APSOLUTNI SAŽECI U KLASI METRIČKIH PROSTORA

Sada ćemo definisati i proučavati apsolutne sažetke u klasi $\mathcal{M}$ metričkih prostora.

DEFINICIJA 3.1. Metrički prostor X nazivamo a p s o l u t n i s a ž e t a k u klasi $\mathcal{M}$ i pišemo $X \in AS(\mathcal{M})$ ako za svaki homeomorfizam $h: X \to Y$ sa X na zatvoren podskup $h(X)$ prostora $Y \in \mathcal{M}$, skup $h(X)$ jeste sažetak od Y.

Odmah vidimo da $X \in AR(\mathcal{M})$ implicira $X \in AS(\mathcal{M})$. Da obratna implikacija nije istinita , uverava nas skup A iz Primera 1.2. Naime , taj skup A nije kontraktibilan i zbog toga $A \notin AR(\mathcal{M})$. Nešto kasnije ćemo videti da $A \in AS(\mathcal{M})$(Teorema 3.2).

Da bismo zapazili osnovna svojstva $AS(\mathcal{M})$ - prostora , uvodimo relaciju p - dominacije i relaciju p - ekvivalencije u klasu $\mathcal{M}$ svih metričkih prostora.

DEFINICIJA 3.2. Kažemo da prostor X p - dominira prostorom Y i pišemo $X \underset{p}{\geqslant} Y$, ako postoji sažetak od X homeomorfan sa Y. Pri tome Y nazivamo p - slikom od X.

P r i m e d b a 3.1. Relacija p - dominacije je poopštenje relacije r - dominacije u smislu Borsuka (/1/, st.10).

Zaista , u to nas uveravaju prostor E^2 i njegov sažetak A koji su razmotreni u Primeru 1.1. Jasno je da $E^2 \underset{p}{\geqslant} A$. Medju tim , nije istina da $E^2 \underset{r}{\geqslant} A$, jer su sve homeomorfne slike od A u E^2 lokalno nepovezane i zbog toga one ne mogu biti retrakti od E^2.

T E O R E M A 3.1. Relacija p - dominacije u klasi $\mathcal{M}$ je refleksivna i tranzitivna.

D o k a z . Svaki neprazan prostor X (nije nužno da bude metrički) jeste sam svoj sažetak. To znači da $X \underset{p}{\geqslant} X$. Nešto teže je dokazati drugo tvrdjenje ove Teoreme.

Neka su X , Y i Z metrički prostori i neka je $X \underset{p}{\geqslant} Y$ i $Y \underset{p}{\geqslant} Z$. Treba dokazati da $X \underset{p}{\geqslant} Z$.

U dokazivanju ove tvrdnje , kao i u dokazivanju niza drugih tvrdnji , vrlo često ćemo se oslanjati na teoremu KURATOWSKOG i WOIDYSLAWSKOG (/1/ , (8.1) , st.88) . Po toj teoremi, koju ćemo od sada nazivati KW - teoremom , za svaki $X \in \mathcal{M}$ postoje normiran linearan prostor L_X i homeomorfizam

$$h : X \longrightarrow h(X) \subset Q_X \subset L_X$$

sa X na $h(X)$ pri čemu je $h(X)$ zatvoren u svojoj konveksnoj ljusci Q_X. Taj homeomorfizam h nazivamo KW - homeomorfizam ili KW - smeštenje , dok skup $h(X)$ nazivamo KW-slikom prostora X.

Zahvaljujući KW - teoremi , bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da su X , Y i Z zatvoreni podskupovi konveksnih skupova Q_X , Q_Y i Q_Z normiranih linearnih prostora

L_X , L_Y i L_Z , respektivno.

Pošto $Y \underset{p}{\geqslant} Z$ postoje sažetak Z' od Y i homeomorfizam

$$h_1' : Z \longrightarrow Z'$$

sa Z na Z'. Nadalje , iz $X \underset{p}{\geqslant} Y$ sledi postojanje sažetka Y' od X i homeomorfizma

$$h_2 : Y \longrightarrow Y'$$

sa Y na Y'. Stavimo $Z'' = h_2(Z')$. Očigledno je $Z'' \subset Y'$. Pomoću Primedbe 1.1 zaključujemo da je Z'' sažetak od Y', a pošto $Q_X \in AR(\mathcal{M})$, pomoću Posledice 2.1 zaključujemo da je Z'' sažetak od X. Na taj način smo dokazali da je prostor Z homeomorfan sažetku Z'' prostora X , tj. dokazali smo da $X \underset{p}{\geqslant} Z$.

P r i m e d b a 3.2. Relacija p - dominacije , u opštem slučaju nije simetrična.

Zaista , za prostor E^2 i „ češalj " A u njemu vredi $E^2 \underset{p}{\geqslant} A$. Medjutim , nije istina da $A \underset{p}{\geqslant} E^2$, jer ni jedan sažetak od A nije homeomorfan sa E^2 , zbog različitosti dimenzija.

Pomoću p - dominacije uvodimo relaciju p - ekvivalencije sledećom definicijom:

DEFINICIJA 3.3. Ako $X \underset{p}{\geqslant} Y$ i $Y \underset{p}{\geqslant} X$, onda kažemo da su prostori X i Y p - jednaki i pišemo $X \underset{p}{=} Y$.

P r i m e d b a 3.3. Relacija p - jednakosti je relacija ekvivalencije u skupu metričkih prostora. To neposredno sledi iz Definicije 3.3 i Teoreme 3.1.

DEFINICIJA 3.4. Klase p - jednakih metričkih prostora nazivamo p - tipovima.

Već smo utvrdili da je podela skupa $\mathcal{M}$ na p - tipove grublja od podele na r - tipove u smislu Borsuka (/1/ ,st.20). Važno je primetiti još i to da iz $\dim X = n$ i $X \underset{p}{=} Y$ sledi $\dim Y = n$.

Familiju $AS(\mathcal{M})$ karakteriše sledeća značajna

T E O R E M A 3.2. Prostor $X \in \mathcal{M}$ je $AS(\mathcal{M})$ - prostor ako i samo ako postoji konveksan podskup Q lokalno konveksnog linearnog prostora tako da $Q \underset{p}{\geqslant} X$.

D o k a z. Pretpostavimo da $X \in AS(\mathcal{M})$. Zbog KW - teoreme postoji homeomorfizam h (KW - smeštenje) koji X preslikava na zatvoren podskup X' konveksnog skupa Q u normiranom linearnom prostoru. Pošto $X \in AS(\mathcal{M})$ onda je X' sažetak od Q . To znači da Q p - dominira prostorom X , a kako su normirani linearni prostori lokalno konveksni , dokaz potrebnosti je završen.

Pretpostavimo sada da je Q konveksan podskup lokalno konveksnog linearnog prostora i da je X njegova p - slika, tj. $Q \underset{p}{\geqslant} X$. Iz $Q \underset{p}{\geqslant} X$, na osnovu Definicije 3.1 , sledi da postoje sažetak X' od Q i homeomorfizam

$$h : X' \longrightarrow X$$

sa X' na X.

Neka je h_1 homeomorfizam koji X preslikava na zatvoren podskup Y' bilo kojeg metričkog prostora Y. Bez smanjenja opštosti , možemo smatrati da je Y zatvoren podskup konveksnog skupa Q_Y u normiranom linearnom prostoru , zbog KW - teoreme. Pošto $Q_Y \in AR(\mathcal{M})$, postoji neprekidno proširenje

$$f : Q \longrightarrow Q_Y$$

homeomorfizma

$$h_1 h : X' \longrightarrow Y'.$$

Osim toga , pošto je Y' zatvoren podskup metričkog prostora Q_Y , postoji neprekidno proširenje $g : Q_Y \longrightarrow Q$ homeomorfizma

$$h^{-1}h_1^{-1} : Y' \longrightarrow X'.$$

Ako je V bilo koja okolina od Y' u Q_Y , onda je $U = f^{-1}(V)$ okolina od X' u Q. Pošto je X' sažetak od Q , postoji preslikavanje

$$r : Q \longrightarrow V$$

takvo da je $r(x) = x$, $x \in X'$. Stavljajući $r' = f\, r\, g$ dobivamo preslikavanje

$$r' : Q_Y \longrightarrow V$$

takvo da je $r'(y) = y$ za svako $y \in Y'$. To znači da je Y' sažetak od Y i dokaz Teoreme 3.2 je kompletiran.

POSLEDICA 3.1. Iz $Y \in AS(\mathcal{M})$ i $X \underset{p}{\geqslant} Y$ sledi $Y \in AS(\mathcal{M})$.

D o k a z . Iz $X \in AS(\mathcal{M})$, zbog Teoreme 3.2 , sledi postojanje konveksnog podskupa Q normiranog linearnog prostora tako da $Q \geqslant_p X$. Sada iz $X \geqslant_p Y$ i $Q \geqslant_p X$, po Teoremi 3.1, sledi da $Y \in AS(\mathcal{M})$.

POSLEDICA 3.2. Sažeci $AS(\mathcal{M})$ - prostora su $AS(\mathcal{M})$ - prostori.

D o k a z. Neka je A sažetak prostora $X \in AS(\mathcal{M})$. Tada $X \geqslant_p A$. Iz $X \in AS(\mathcal{M})$ sledi postojanje konveksnog podskupa Q normiranog linearnog prostora tako da $Q \geqslant_p X$, zbog Teoreme 3.2. Sada iz $Q \geqslant_p X$ i $X \geqslant_p A$ sledi $Q \geqslant_p A$, zbog Teoreme 3.1. I na kraju , zbog Teoreme 3.2 , iz $Q \geqslant_p A$ sledi $A \in AS(\mathcal{M})$.

POSLEDICA 3.3. r - slike , pa i retrakti , $AS(\mathcal{M})$ - prostora su $AS(\mathcal{M})$ - prostori.

POSLEDICA 3.4. Kontraktibilni metrički prostori su $AS(\mathcal{M})$ - prostori.

D o k a z . Neka je X kontraktibilan metrički prostor. Iz $X \in \mathcal{M}$ sledi da X dopušta KW - smeštenje na zatvoren podskup X' konveksnog skupa Q iz normiranog linearnog prostora. Kako je X kontraktibilan , onda je X' kontraktibilan , jer je kontraktibilnost topološko svojstvo. Sada iz kontraktibilnosti prostora $X' \subset Q$ i $Q \in AR(\mathcal{M})$, zbog Posledice2.4, sledi da je X' sažetak od Q. To znači da $Q \geqslant_p X$ pa $X \in AS(\mathcal{M})$, zbog Teoreme 3.2.

T E O R E M A 3.3. Presek familije $AS(\mathcal{M})$ - prostora i familije $ANR(\mathcal{M})$ - prostora podudara se sa familijom $AR(\mathcal{M})$ - prostora.

D o k a z . Ako $X \in AR(\mathcal{M})$, onda $X \in AS(\mathcal{M})$ i $X \in ANR(\mathcal{M})$. To sledi neposredno iz definicija posmatranih familija.

Obratno, neka $X \in AS(\mathcal{M})$ i $X \in ANR(\mathcal{M})$. Nadalje, neka je X' bilo koje zatvoreno topološko smeštenje od X u metrički prostor Y. Kako $X \in ANR(\mathcal{M})$ postoje okolina V od X' u Y i retrakcija

$$r : V \longrightarrow X'.$$

Iz $X \in AS(\mathcal{M})$ sledi da je X' sažetak od Y. Zbog toga postoji preslikavanje $r' : Y \longrightarrow V$ takvo da je $r'(x) = x$, $x \in X'$. Sada vidimo da je

$$r\,r' : Y \longrightarrow X'$$

retrakcija. Prema tome je $X \in AR(\mathcal{M})$.

P r i m e d b a 3.4. Videli smo da su kontraktibilni metrički prostori u klasi $AS(\mathcal{M})$. Medjutim, postoje $AS(\mathcal{M})$ - prostori koji nisu kontraktibilni. Na primer, takav je prostor A iz Primera 1.2.

Tako smo naišli na potrebu poopštrnja pojma kontraktibilnosti prostora iz klase $\mathcal{M}$.

DEFINICIJA 3.5. Za prostor $X \in \mathcal{M}$ kažemo da je skoro kontraktibilan i pišemo $X \in SC$, ako je njegova KW-slika $h(X)$ kontraktibilna u svakoj od svojih okolina.

P r i m e d b a 3.5. Prostor A iz Primera 1.2 je skoro kontraktibilan, a nije kontraktibilan. Znači, $X \in SC$ ne povlači $X \in C$.

T E O R E M A 3.4. Klasa skoro kontraktibilnih metričkih prostora podudara se sa klasom $AS(\mathcal{M})$ - prostora.

D o k a z . Neka je X skoro kontraktibilan metrički prostor i neka je $h(X)$ njegova KW - slika u konveksnom skupu Q_X normiranog linearnog prostora. Pošto je $h(X)$ zatvoren u Q_X, a $Q_X \in AR(\mathcal{M})$, onda je $h(X)$ sažetak od Q_X , zbog $X \in SC$ i Teoreme 2.3. To znači da $Q_X \underset{p}{\geqslant} X$, odakle sledi da $X \in AS(\mathcal{M})$ zbog Teoreme 3.2.

Obratno , ako $X \in AS(\mathcal{M})$ i ako je X' njegova KW - slika u Q_X , onda je X' sažetak od $Q_X \in AR(\mathcal{M})$ pa , zbog Teoreme 2.3 , sledi da $X \in SC$.

N a p o m e n a . Klasu svih kompaktnih $AS(\mathcal{M})$ - prostora označićemo sa AS.

T E O R E M A 3.5. Klasa AS - prostora se podudara sa klasom FAR - prostora.

D o k a z . Neka $X \in AS$. Prema poznatoj tepremi URISONA postoji kompaktan podskup X' Hilbertovog kuba Q^{ω} koji je homeomorfan sa X. Skup X' je sažetak od Q^{ω}, jer $X \in AS$. Odatle, zbog Teoreme 2.4 , sledi da je X' fundamentalni retrakt kuba Q^{ω}. To znači da $X' \in FAR$, a kako je FAR - prostor topološki pojam , onda $X \in FAR$.

Implikacija $(X \in FAR) \Rightarrow (X \in AS)$ je očigledno istinita.

Razmotrimo još ponašanje $AS(\mathcal{M})$ - prostora prema adiciji i Dekartovom proizvodu.

T E O R E M A 3.6. Neka su X_1 i X_2 zatvoreni podskupovi prostora X tako da je $X = X_1 \cup X_2$ i $X_o = X_1 \cap X_2$. Tada su istinite sledeće implikacije:

(1) $X_o, X_1, X_2 \in AS(\mathcal{M}) \Rightarrow X \in AS(\mathcal{M})$,

(2) X_o , $X \in AS(\mathcal{M}) \Rightarrow X_1, X_2 \in AS(\mathcal{M})$.

D o k a z . Prostor X možemo posmatrati kao zatvoren podskup konveksnog skupa Q iz normiranog linearnog prostora.

Iz $X_o, X_1, X_2 \in AS(\mathcal{M})$ sledi da su X_o, X_1, X_2 sažeci od Q. Pošto $Q \in AR(\mathcal{M})$, onda je X sažetak od Q, zbog Teoreme 2.6. To znači da $Q \underset{p}{\geqslant} X$. Uzevši u obzir Teoremu 3.2 zaključujemo da $X \in AS(\mathcal{M})$. Time je dokatana implikacija (1).

Sasvim analogno , pomoću Teoreme 2.7 , dokazujemo implikaciju (2). Na taj način smo utvrdili da se $AS(\mathcal{M})$ - prostori prema adiciji odnose jednako kao i $AR(\mathcal{M})$ - prostori.

Sada ćemo pokazati da se $AS(\mathcal{M})$ - prostori prema Dekartovom množenju ponašaju isto kao i $AR(\mathcal{M})$ - prostori. Naime, na mestu je sledeća

T E O R E M A 3.7. Da bi prebrojiv Dekartov proizvod $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ bio $AS(\mathcal{M})$ - prostor , potrebno je i dovoljno da svi njegovi faktiri budu $AS(\mathcal{M})$ - prostori.

D o k a z . Potrebnost. Pretpostavimo da $X \in AS(\mathcal{M})$. projekcije

$$p_n : X \longrightarrow X_n \quad (n=1,2,\dots)$$

su specijalna r - preslikavanja. Znači , svaki faktor prosror

X_n proizvoda X je r - slika $AS(\mathcal{M})$ - prostora X. Odatle proizlazi da $X_n \in AS(\mathcal{M})$ ($n=1,2,\ldots$) , zbog Posledice 3.3.

Dovoljnost. Pretpostavimo da za svako $n=1,2,\ldots$ vredi

$$X_n \in AS(\mathcal{M}) .$$

Ne smanjujući opštost , možemo smatrati da su svi X_n zatvoreni podskupovi konveksnih skupova Q_n iz normiranih linearnih prostora L_n . Iz $X_n \in AS(\mathcal{M})$ sledi da su svi X_n $(n=1,2,\ldots)$ sažeci od Q_n .

Neka je U_n proizvoljno izabrana okolina od X_n u Q_n i neka su

$$r_n : Q_n \longrightarrow U_n$$

preslikavanja takva da je $r_n/X_n = 1$ $(n=1,2,\ldots)$. Proizvod

$$L = \prod_{n=1}^{\infty} L_n$$

je lokalno konveksan linearan prostor , a proizvod

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n$$

je konveksan podskup od L. Jasno je da je X zatvoren u Q i da je

$$U = \prod_{n=1}^{\infty} U_n$$

okolina od X u Q. Neka je $z = \{x_n\} \in Q$ bilo koja tačka. Tada formula

$$r(z) = \{r_n(x_n)\}$$

dobro definiše preslikavanje

$$r : Q \longrightarrow U \; .$$

Nije teško uveriti se da je $r/X = 1$. Prema tome , proizvod X je sažetak od Q , tj. $Q \underset{p}{\geqslant} X$, odakle , zbog Teoreme 3.2 , sledi da $X \in AS(\mathcal{M})$.

§4. OKOLINSKI SAŽECI I APSOLUTNI OKOLINSKI SAŽECI U METRIČKIM PROSTORIMA

Sada ćemo definisati pojmove o k o l i n s k o g sažetka i a p s o l u t n o g o k o l i n s k o g sažetka u klasi metričkih prostora. Potom ćemo razmatrati okolinske sažetke ANR ($\mathcal{M}$) - prostora. Na kraju ćemo dati karakterizaciju apsolutnih okolinskih sažetaka u metričkim prostorima.

DEFINICIJA 4.1. Neka su A i $B \supset A$ neprazni zatvoreni podskupovi prostora X. Kažemo da je A okolinski sažetak od B ako postoji okolina W od A u X takva da za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje $r : B \cap W \longrightarrow V$ sa svojstvom da je $r/A = 1$. Ako je pri tome $B = X$, onda A nazivamo okolinskim sažetkom prostora X.

P r i m e d b a 4.1. Svaki sažetak prostora X je okolinski sažetak od X. Nadalje, svaki okolinski retrakt prostora je okolinski sažetak tog prostora.

Sledećim primerom ćemo pokazati da je klasa okolinskih sažetaka prostora, u opštem slučaju, šira od klase okolinskih retrakata tog prostora.

PRIMER 4.1. Neka je A skup posmatran u Primeru 2.1 i neka je $a \in E^2 - A$ proizvoljno odabrana tačka.

Skup $B = A \cup \{a\}$ je nepovezan i zbog Teoreme 1.2 on nije sažetak od E^2. Nadalje, B nije okoliski retrakt od E^2, jer je lokalno nepovezan. I na kraju, B nije FANR - prostor, jer nije kompaktan. Medjutim, B jeste okolinski sažetak od E^2, jer postoje disjunktne okoline U_A i U_a skupa A i tačke a tako da je B sažetak svoje okoline $U = U_a \cup U_A$ u E^2.

Bacimo sada pogled na okolinske sažetke zatvorenih pod - skupova $ANR(\mathcal{M})$ - prostora. Najpre će biti dokazana

T E O R E M A 4.1. Neka su A, B i C zatvoreni podskupovi prostora $X \in ANR(\mathcal{M})$. Ako je B okoliski sažetak od C, a A sažetak od B, onda je A okolinski sažetak od C.

D o k a z . Neka je V proizvoljno fiksirana otvorena okolina od A u X. Po pretpostavci postoji preslikavanje

$$r_o : B \longrightarrow V$$

takvo da je $r_o/A = 1$. Pošto je B zatvoren u X, a $X \in ANR(\mathcal{M})$ pa i $V \in ANR(\mathcal{M})$, postoje okolina V' od B u X i neprekidno proširenje

$$\bar{r}_o : V' \longrightarrow V$$

preslikavanja r_o. Nadalje, pošto je B okolinski sažetak od C, postoje zatvorena okolina W od B u X i preslikavanje

$$r_1 : C \cap W \longrightarrow V'$$

tako da je $r_1/B = 1$. Sada vidimo da preslikavanje

$$r = \bar{r}_o\, r_1 : C \cap W \longrightarrow V$$

ima svojstvo da je $r / A = 1$. To znači da za svaku okolinu V od A u X postoji okolina W od A u X takva da je A sažetak od $C \cap W$. Prema tome, skup A je okolinski sažetak od C.

POSLEDICA 4.1. Sažeci okolinskih sažetaka prostora $X \in ANR(\mathcal{M})$ su okolinski sažeci od X. Specijalno, retrakti okolinskih sažetaka prostora X su okolinski sažeci od X.

Da okolinski retrakt sažetka prostora $X \in ANR(\mathcal{M})$, u opštem slučaju, nije okoliski sažetak od X pokazaćemo primerom koji sledi.

PRIMER 4.2. Posmatrajmo niz $\{a_n\}$ tačaka iz E^2 definisan ovako:

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, o\right) \quad (n=1,2,\dots) .$$

Neka je $a_o = (o,o)$ i $b_o = (o,1)$. Skup

$$A = [a_o,b_o] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,b_o] \right)$$

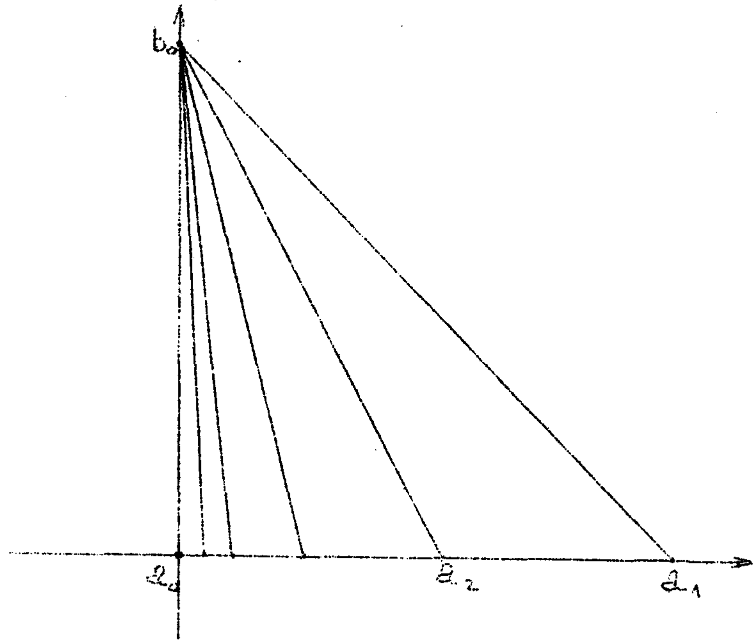
jeste sažetak od E^2, jer je A celularan u E^2 (sl.4). Skup

$$B = \{a_o,a_1,a_2,\dots\}$$

je retrakt svoje okoline

$$U = A - \{b_o\}$$

u A. Dakle, B je okolinski retrakt od A. Skup B nije okolinski sažetak od $E^1 \subset E^2$ zato što $E^1 - B$ ima besko - načno mnogo komponenata (v. 5 , Primedba 5.2). Prema tome , B nije okolinski sažetak od E^2.



Slika 4.

Dokažimo sada vrlo značajnu teoremu po kojoj je pojam okolinskog sažetka topološki pojam za klasu $ANR(\mathcal{M})$ - prostora. Naime , stoji

T E O R E M A 4.2. Neka je A okolinski sažetak zatvorenog podskupa B prostora $X \in ANR(\mathcal{M})$. Ako je

$$h : B \longrightarrow B'$$

homeomorfizam na zatvoren podskup B' prostora $Y \in ANR(\mathcal{M})$, onda je $A' = h(A)$ okolinski sažetak od B'.

D o k a z . Pošto je B' zatvoren u Y , a $X \in ANR(\mathcal{M})$, postoje zatvorena okolina U' od B' u Y i preslikavanje

$$g : U' \longrightarrow X$$

takvo da je $g/B' = h^{-1}$. Kako je $B' \subset \operatorname{int} U' \in ANR(\mathcal{M})$, postoje zatvorena okolina U od B u X i preslikavanje

$$f : U \longrightarrow U'$$

tako da je $f/B = h$. Nadalje, A je okolinski sažetak od B pa postoji zatvorena okolina $W \subset U$ od A u X takva da za svaku okolinu V od A u X postoji preslikavanje

$$r : B \cap W \longrightarrow V$$

tako da je $r/A = 1$. Tada je $W' = g^{-1}(W) \subset U'$ zatvorena okolina od A' u Y. Neka je V' proizvoljno odabrana okolina od A' u Y. Opštost neće bit smanjena ako pretpostavimo da $V' \subset U'$. Tada je $V = f^{-1}(V') \subset U$ okolina od A u X pa postoji sažimanje

$$r : B \cap W \longrightarrow V$$

tako da je $r/A = 1$. Iz $g(W' \cap B') \subset W \cap B$ vidimo da se, stavljajući

$$r' = f\, r\, g\, /W' \cap B',$$

dobiva dobro definisano preslikavanje

$$r' : W' \cap B' \longrightarrow V'$$

čija je restrikcija na A' jednaka identiteti. To znači da je A' okolinski sažetak od B', što je i trebalo dokazati.

Definišimo sada pojam apsolutnog okolinskog sažetka za klasu $\mathcal{M}$ metričkih prostora.

DEFINICIJA 4.2. Prostor $X \in \mathcal{M}$ nazivamo apsolutni okolinski sažetak za klasu $\mathcal{M}$ i pišemo $X \in ANS(\mathcal{M})$ ako za svaki homeomorfizam $h : X \longrightarrow h(X) \subset Y$

na zatvoren podskup $h(X)$ prostora $Y\in\mathcal{M}$ skup $h(X)$ jeste okolinski sažetak od Y.

Odmah zapažamo da $X\in ANR(\mathcal{M})$ implicira $X\in ANS(\mathcal{M})$. Medjutim , obrnuto tvrdjenje , u opštem slučaju nije istinito. Na primer , prostor B promatran u Primeru 4.1 , pripada $ANS(\mathcal{M})$ - prostorima , a ne pripada $ANR(\mathcal{M})$ - prostorima. U to ćemo se uveriti čim bude dokazana

T E O R E M A 4.3. Prostor $X\in\mathcal{M}$ je $ANS(\mathcal{M})$ - prostor ako i samo ako postoji otvoren podskup U konveksnog skupa Q iz lokalno konveksnog linearnog prostora takav da $U \underset{p}{\geq} X$.

D o k a z . Pretpostavimo da $X\in ANS(\mathcal{M})$. Pomoću KW - teor. zaključujemo da postoji homeomorfizam h koji X preslikava na zatvoren podskup X' konveksnog skupa Q iz normiranog linearnog prostora. Iz $X\in ANS(\mathcal{M})$, po Definiciji 4.2 , sledi da je X' okolinski sažetak od Q.To znači postojanje okoline U od X' u Q tako da $U \underset{p}{\geq} X$ i dokaz potrebnosti je završen.

Obrnuto , pretpostavimo da je Q konveksan podskup lokalno konveksnog linearnog prostora i da postoji otvoren skup U u Q takav da $U \underset{p}{\geq} X$. Po definiciji p - dominacije to znači da postoje zatvoren skup X' u U , koji je sažetak od U i homeomorfizam

$$h' : X' \longrightarrow X$$

sa X' na X. Neka je h_1 homeomorfizam koji X preslikava na zatvoren podskup Y' proizvoljno odabranog prostora Y.

Prostor $Y \in \mathcal{M}$ možemo posmatrati kao zatvoren podskup konveksnog skupa Q_Y iz normiranog linearnog prostora. Pošto je $h_1 h'$ homeomorfizam sa $X' \subset U \in ANR(\mathcal{M})$ na $Y' \subset Q_Y \in AR(\mathcal{M})$, onda je Y' okolinski sažetak od Q_Y, zbog Teoreme 4.2. Prema tome, Y' je okolinski sažetak od Y. Time je dokaz Teoreme 4.3 kompletiran.

POSLEDICA 4.2. Svaka p - slika $ANS(\mathcal{M})$ - prostora je $ANS(\mathcal{M})$-prostor. Specijalno, p - slike $ANR(\mathcal{M})$ - prostora (pa i poliedara) su u klasi $ANS(\mathcal{M})$.

D o k a z . Neka je $X \in ANS(\mathcal{M})$ i neka $X \underset{p}{\geqslant} Y$. Treba dokazati da $Y \in ANS(\mathcal{M})$.

Zaista, iz $X \in ANS(\mathcal{M})$ sledi postojanje otvorenog skupa U u konveksnom skupu Q lokalno konveksnog linearnog prostora tako da je $U \underset{p}{\geqslant} X$. To znači da je X homeomorfan sažetku X' skupa U. Iz $X \underset{p}{\geqslant} Y$ sledi da je Y homeomorfan sažetku Y' prostora X. Jasno je da postoji sažetak Y'' od X' homeomorfan sa Y' pa i sa Y. Pošto je X' sažetak od U, a $U \in ANR(\mathcal{M})$, i pošto je Y'' sažetak od X', onda je Y'' sažetak od X', pa je Y'' sažetak od U, zbog Posledice 2.1. To pokazuje da $U \underset{p}{\geqslant} Y$, odakle, zbog Teoreme 4.3, proizlazi da $Y \in ANS(\mathcal{M})$. Ostale tvrdnje Posledice 4.2 su rezultat činjenice da su $ANR(\mathcal{M})$ - prostori, pa i poliedri, podklase klase $ANS(\mathcal{M})$.

POSLEDICA 4.3. Svaka r - slika prostora $X \in ANS(\mathcal{M})$ je u klasi $ANS(\mathcal{M})$. Specijalno, retrakti $ANS(\mathcal{M})$ - prostora su $ANS(\mathcal{M})$ - prostori.

Umesto toga dokažimo nešto manje očiglednu posledicu.

POSLEDICA 4.4. Sažeci $ANS(\mathcal{M})$ - prostora su $ANS(\mathcal{M})$ - prostori.

D o k a z . Neka je A sažetak prostora $X \in ANS(\mathcal{M})$. Prostor X je homeomorfan sažetku X' otvorenog skupa U iz konveksnog skupa Q lokalno konveksnog linearnog prostora. Postoji sažetak A' od X' takav da je A homeomorfan sa A'. Pošto je $U \in ANR(\mathcal{M})$, pomoću Posledice 2.1 zaključujemo da je A' sažetak od U. Dakle, imamo da $U \underset{p}{\geqslant} A$, a to kazuje da je A apsolutni okolinski sažetak.

Primetimo još i to da okolinski retrakti, pa i okolinski sažeci $ANS(\mathcal{M})$ - prostora ne moraju biti $ANS(\mathcal{M})$ - prostori. U to nas uverava prostor A iz Primera 4.2. Naime, skup A je $ANS(\mathcal{M})$ - prostor, a njegov okolinski retrakt B nije u klasi $ANS(\mathcal{M})$. Pošto $A \in AS$ usput primećujemo da okolinski retrakti, pa i okolinski sažeci, AS - prostora ne moraju biti $ANS(\mathcal{M})$ - prostori.

T E O R E M A 4.4. Okolinski sažeci $ANR(\mathcal{M})$ - prostora su $ANS(\mathcal{M})$ - prostori.

D o k a z . Nekaje A okolinski sažetak prostora $X \in ANR(\mathcal{M})$. Prostor X ćemo posmatrati kao retrakt otvorenog podskupa U konveksnog skupa Q iz normiranog linearnog prostora. Neka je

$$r_o : U \longrightarrow X$$

retrakcija. Kako je A okolinski sažetak od X postoji otvorena okolina W od A u X kojoj je A sažetak. Stavljajući

$$U' = r_o^{-1}(W)$$

dobivamo otvorenu okolinu U' od A u U, jer je $r_o(A) = A \subset W$. Osim toga je $W \subset U'$, jer je $r_o(W) = W$.

Neka je V bilo koja okolina od A u U. Postoji preslikavanje

$$r_1 : W \longrightarrow V$$

takvo da je $r_1/A = 1$. Definišimo preslikavanje $r = r_o r_1/U'$ stavljajući

$$r(x) = r_o r_1(x) \;,\; x \in U'.$$

Pošto je $r_o(U') \subset W$ i $r_1(W) \subset V$ vidimo da je r dobro definisano preslikavanje. Osim toga, vidimo da je $r/A = 1$. To znači da je A sažetak otvorenog skupa U' iz Q, tj. U' p - dominira prostorom A. Odatle sledi da $A \in ANS(\mathcal{M})$, zbog Teoreme 4.3.

Razmotrimo sada ponašanje $ANS(\mathcal{M})$ - prostora prema Dekartovom množenju. Najpre dokažimo da stoji

T E O R E M A 4.5. Ako je $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n \in ANS(\mathcal{M})$, onda je $X_n \in ANS(\mathcal{M})$ i postoji indeks n_o takav da $X_n \in AS(\mathcal{M})$ za svako $n > n_o$.

D o k a z . Posmatrajmo projekcije $p_m : X \longrightarrow X_m$ definisane formulom

$$p_m(\{x_n\}) = x_m \;,\; \{x_n\} \in X.$$

To znači da su svi X_n r - slike od $X \in ANS(\mathcal{M})$. Odatle sledi da $X_n \in ANS(\mathcal{M})$ (n=1,2,...), zbog Posledice 4.3.

U nastavku dokaza možemo smatrati da su svi X_n zatvoreni podskupovi konveksnih skupova Q_n iz normiranih linearnih prostora L_n. Stavimo

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} Q_n .$$

Prostorr Q je metrizabilan i sadrži X kao svoj zatvoren podskup. Iz $X \in ANS(\mathcal{M})$ sledi postojanje okoline U od X u Q kojoj je X sažetak. U prostoru X fiksirajmo tačku

$$a = \{a_n\} .$$

Pošto je U okolina tačke $a = \{a_n\}$ u Q , postoji indeks n_o takav da sve tačke $x = \{x_n\} \in Q$ sa svojstvom da je

$$x_i = a_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n_o$$

pripadaju skupu U.

Za proizvoljno fiksirano $m \geq n_o$ možemo definisati preslikavanje $s_m : Q_m \longrightarrow U$ formulom

$$s_m(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, x , a_{m+1}, \ldots\} \quad , x \in Q_m .$$

Neka je U_m bilo kako izabrana otvorena okolina od X_m u Q_m. Pošto $U_m \in ANR(\mathcal{M})$, a X je zatvoren u U , postoje okolina V_m od X u U i neprekidno proširenje

$$f_m : V_m \longrightarrow U_m$$

projekcije $p_m : X \longrightarrow X_m$. Nadalje , pretpostavili smo da postoji preslikavanje

$$r : U \longrightarrow V_m$$

takvo da je $r/X = 1$. Stavljajući $r_m = f_m r \, s_m$ dobivamo korektno definisano preslikavanje

$$r_m : Q_m \longrightarrow U_m .$$

Nije teško videti da je $r_m/X_m = 1$. To nam pokazuje da je X_m

sažetak konveksnog skupa Q_m iz normiranog linearnog prostora L_m. Odatle, zbog Teoreme 3.2, sledi da je $X_m \in AS(\mathcal{M})$, za svako $n \geq n_o$.

Proučićemo sad Dekartov proizvod kompaktnih $ANS(\mathcal{M})$ - prostora. Napomenimo da ćemo klasu kompaktnih $ANS(\mathcal{M})$ - prostora označavati sa ANS.

T E O R E M A 4.6. Da bi prebrojiv Dekartov proizvod $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ bio ANS - prostor potrebno je i dovoljno da svi $X_n \in ANS$ i da skoro svi $X_n \in AS$.

D o k a z . Potrebnost je neposredna posledica Teoreme 4.3. Preostaje nam još da dokažemo dovoljnost. U tom cilju najpre dokažimo da je proizvod $X_1 x X_2$ dva ANS - prostora X_1 i X_2 ANS - prostor.

Zaista, saglasno KW - teoremi možemo uzeti da su X_i $(i=1,2)$ zatvoreni podskupovi konveksnih skupova Q_1 i Q_2 koji leže u normiranim linearnim prostorima L_1 i L_2. Prema tome, $X_1 x X_2$ je zatvoren podskup konveksnog skupa $Q_1 x Q_2$ u normiranom linearnom prostoru $L_1 x L_2$. Pošto su X_1 i X_2 ANS - prostori postoje okoline W_1 i W_2 od X_1 i X_2 u Q_1 i Q_2 kojima su X_1 i X_2 sažeci. Jasno je da je $W_1 x W_2$ okolina od $X_1 x X_2$ u $Q_1 x Q_2$. Tada, zbog kompaktnosti skupova X_1 i X_2, postoje okoline V_1 i V_2 od X_1 i X_2 u Q_1 i Q_2 takve da je

$$V_1 \times V_2 \subset V .$$

Kako su X_1 i X_2 sažeci od W_1 i W_2 postoje preslikavanja

$$r_i : W_i \longrightarrow V_i \quad (i=1,2)$$

takva da je $r_i/X_i = 1$. Sada smo u mogućnosti da definišemo preslikavanje

$$r : W_1 \times W_2 \longrightarrow V$$

stavljajući

$$r(x_1, x_2) = (r_1(x_1), r_2(x_2)) \ , \ (x_1, x_2) \in W_1 \times W_2 \ .$$

Očigledno je da stoji $r/X_1 \times X_2 = 1$. To znači da je $X_1 \times X_2$ sažetak svoje okoline $W_1 \times W_2$ u $Q_1 \times Q_2$. Odatle , zbog Teoreme 4.3 , sledi da $X_1 \times X_2 \in$ ANS.

Sada možemo zaključiti da je konačan Dekartov proizvod $\prod_{n=1}^{n_o} X_n$ prostora $X_n \in$ ANS $(n=1,2,\dots,n_o)$ takodje ANS - prostor. U nastavljanju dokaza Teoreme 4.6 , setimo se da smo pretpostavili da su svi $X_n \in$ ANS i da postoji indeks n_o takav da je $X_n \in$ AS , za svako $n > n_o$. Primetimo da je Dekartov proizvod $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ homeomorfan proizvodu

$$\left(\prod_{n=1}^{n_o} X_n \right) \times \left(\prod_{n_o+1}^{\infty} X_n \right) .$$

Dokazali smo da $\prod_{n=1}^{n_o} X_n \in$ ANS , jer $X_n \in$ ANS ($n=1,2,\dots$). Nadalje , iz $X_n \in$ AS $(n > n_o)$ zbog teoreme o proizvodu AS - prostora , sledi da

$$\prod_{n=n_o+1}^{\infty} X_n \in \text{AS} \subset \text{ANS} .$$

To znači da je X homeomorfan Dekartovom proizvodu dva ANS - prostora. Prema tome , možemo zaključiti da $X \in$ ANS i dokaz Teoreme 4.6 je kompletan .

P r i m e d b a 4.2. Poznato je (/1/ , (9.1), st.108) da se klasa kontraktibilnih ANR($\mathcal{M}$) - prostora podudara sa klasom AR($\mathcal{M}$) - prostora. Pomoću Teoreme 3.4 primećujemo da se klasa skoro kontraktibilnih ANS($\mathcal{M}$) - prostora podudara sa klasom AS($\mathcal{M}$) - prostora.

P r i m e d b a 4.3. Prema prvoj teoremi Hannera (/1/,(10.1), st.108) sledi da otvoreni podskupovi ANR($\mathcal{M}$)-prostora ne izlaze iz klase ANR($\mathcal{M}$). Da analogna teorema ne vredi za ANS($\mathcal{M}$) - prostore pokazuje nam sledeći

PRIMER 4.2. Posmatrajmo prostor A iz Primera 2.1. Jasno je da $A \in AS(\mathcal{M})$, jer je A sažetak od E^2, a $E^2 \in AR(\mathcal{M})$. Podskup U prostora A definisan kako sledi

$$U = (O,P) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (O,P_n) \right) ,$$

gde su (O,P) i (O,P_n) intervali u E^2 , jeste otvoren podskup prostora $A \in AS(\mathcal{M})$. Odmah zapažamo da je U homeomorfan uniji B svih paralelnih pravih prostora E^2 koje prolaze tačkama niza $\{a_n\}$ definisanog formulom

$$a_n = \left(\frac{1}{n} ,o\right) \ (n=1,2,\ldots)$$

zajedno sa pravom kojoj pripada tačka (o,o). Skup B nije okolinski sažetak od E^2 , jer skup $E^1 - (\{a_n\} \cup (o,o))$ ima beskonačno mnogo komponenata u E^1(v. § 5 ,Teorema 5.3). Prema tome , U nije ANS($\mathcal{M}$) - prostor.

ANS - prostori dopuštaju bolju geometrijsku karakterizaciju nego ANS($\mathcal{M}$) - prostori (Teorema 4.3).

T E O R E M A 4.7. Klasa ANS - prostora podudara se sa klasom p - slika prizama Hilbertovog kuba Q^{ω}.

D o k a z . Neka je $P \subset Q^{\omega}$ prizma i neka $P \underset{p}{\geqslant} X$. Pošto $P \in$ $\in$ ANR , onda $X \in$ ANS , zbog Posledice 4.2.

Obratno , pretpostavimo da $X \in$ ANS pa dokažimo da je X p - slika neke prizme $P \subset Q^{\omega}$. U tu svrhu , bez smanjenja opštosti , možemo pretpostaviti da je $X \subset Q^{\omega}$. Pošto $X \in$ ANS , postoji okolina W od X u Q^{ω} kojoj je X sažetak. Zbog kompaktnosti , skup X dopušta bazu prizmatičnih okolina (v. /1/, (4.3) Lema , st. 119) . To znači da postoji prizma $P \subset W$ takva da je $X \subset P$. Sada je lako zaključiti da je X sažetak od P , a to znači da $P \underset{p}{\geqslant} X$.

Konačnodimenzionalni ANS - prostori dopuštaju još lepšu karakterizaciju.Nju iskazuje naredna

T E O R E M A 4.8. Klasa konačnodimenzionalnih ANS - prostora podudara se sa klasom p - slika poliedara.

D o k a z . Neka je P poliedar i neka $P \underset{p}{\geqslant} X$. Pošto $P \in$ ANR i $\dim X \leqslant \dim P$ sledi da $X \in$ ANS , zbog Posledice 4.2 i da je X konačnodimenzionalan.

Obratno , neka je X ANS - prostor i $\dim X = n$. Postoji MENGER - NÖBELINGOV homeomorfizam

$$h : X \longrightarrow h(X) \subset E^{2n+1} .$$

Pošto $X \in ANS$, postoji okolina U od $h(X)$ u E^{2n+1} kojoj je $h(X)$ sažetak. Nadalje , zbog kompaktnosti skupa $h(X)$, postoji poliedar $P \subset E^{2n+1}$ takav da je

$$h(X) \subset P \subset U .$$

Jasno je da je $h(X)$ sažetak od P. Zato $P \underset{p}{\geqslant} X$.

Konačnodimenzionalni AS - prostori se mogu približiti geometrijskim simpleksima , jer stoji

T E O R E M A 4.9. Klasa konačnodimenzionalnih AS - prostora podudara se sa klasom p - slika geometrijskih simpleksa.

D o k a z . Neka je G geometrijski simpleks, a X njegova p - slika. Iz $G \in AR$ i $\dim G < \infty$ sledi da $X \in AS$ i $\dim X < \infty$.

Obratno , ako $X \in AS$ i ako je $\dim X = n$, onda je X povezan kompakt pa za njegov Menger - Nöbelingov smeštaj $h(X)$ u E^{2n+1} postoji geometrijski simpleks $G \subset E^{2n+1}$ takav da je

$$h(X) \subset G.$$

Pošto je $h(X)$ sažetak od E^{2n+1} , on je , tim pre , sažetak od G. To znači da $G \underset{p}{\geqslant} X$.

U svom radu (/2/) Borsuk je otvorio sledeći problem: Da li je istina da za niz $\{X_n\}$, $X_n \in ANR$ takav da je X_{n+1} retrakt od X_n $(n=1,2,\dots)$, presek $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jeste FANR-prostor ?

U vezi s tim biće dokazana sledeća

T E O R E M A 4.10. Neka je $\{X_n\}$ niz ANR - prostora X_n u kubu Q^ω i neka je X_{n+1} retrakt od X_n za svako $n = 1,2,\dots$. Tada je presek

$$X = \bigcap_{n=1} X_n$$

apsolutni okolinski sažetak.

D o k a z . Pošto $X_1 \in$ ANR postoji okolina W_o od X_1 u Q^ω i retrakcija

$$r_o : W_o \longrightarrow X_1 .$$

Nadalje , po pretpostavci , postoji niz $\{r_n\}$ retrakcija

$$r_n : X_n \longrightarrow X_{n+1} \ (n=1,2,\dots).$$

Možemo definisati niz $\{f_n\}$ preslikavanja

$$f_n : W_o \longrightarrow Q^\omega$$

stavljajući

$$f_n = r_n r_{n-1} r_{n-2} \dots r_1 r_o \quad (n=1,2,\dots).$$

Neka je V okolina od X u Q^ω. Zbog kompaktnosti skupa X postoji indeks n_o takav da je

$$X_n \subset V \ (n > n_o) .$$

Jasno je da je $f_{n_o}(W_o) \subset V$, Osim toga , stoji

$$f_n / X = 1 \ (n=1,2,\dots).$$

To znači da je X okolinski sažetak od Q^ω pa $X \in$ ANS , zbog Teoreme 4.4.

Na kraju ovog paragrafa istaknimo dva problema.

P r o b l e m 4.1. Da li se klasa ANS- prostora kuba Q^ω poududasa klasom FANR - prostora?

P r o b l e m 4.2. Da li iz $X_1, X_2 \in$ ANS($\mathfrak{M}$) i $X_1 \cap X_2 \in$ ANS($\mathfrak{M}$) sledi da $X_1 \cup X_2 \in$ ANS($\mathfrak{M}$)?

§ 5. POGLED NA SAŽETKE EUKLIDOVIH PROSTORA

Razmotrimo na kraju osnovna svojstva sažetaka Euklidovih prostora. U tom razmatranju najveći značaj ima teorema analogna sa (3.5) u (/1/ , st.14). To je

T E O R E M A 5.1. Neka je U otvoren neprazan ograničen podskup Euklidovog prostora E^n. Tada skup $E^n - U$ nije sažetak od E^n.

D o k a z . Ne smanjujući opštost možemo pretpostaviti da $O = (o,o,o,\dots,o) \in U$. Tada se U može obuhvatiti n-dimenzionalnom kuglom

$$K^n = \{ x \in E^n : \|x\| \leqslant r \}$$

sa središtem u tački O tako da je $\overline{U} \subset K^n$. Pošto je $K^n - U$ zatvoren skup i $O \in U$ postoji okolina $V_o \subset K^n$ skupa $K^n - U$ takva da

$$O \notin V_o .$$

Pretpostavimo da $K^n - U$ jeste sažetak od K^n. To bi značilo da postoji preslikavanje

$$f_o : K^n \longrightarrow V_o$$

takvo da je $f_o(x) = x$, $x \in K^n - U$. Tada bismo mogli definisati preslikavanje

$$f_1 : \overline{U} \longrightarrow S^{n-1}$$

formulom

$$f_1(x) = - \frac{r\, f_o(x)}{\|f_o(x)\|} \quad , \quad x \in \overline{U} \ ,$$

gde je S^{n-1} sfera kugle K^n. Preslikavanje f_1 je dobro definisano , jer je $f_o(\overline{U}) \subset V_o$ i $0 \notin V_o$. Definišimo još i preslikavanje

$$f_2 : K^n - U \longrightarrow S^{n-1}$$

stavljajući

$$f_2(x) = - \frac{r\, x}{\|x\|} \quad , \ x \in K^n - U \ .$$

I f_2 je dobro definisano preslikavanje , jer $0 \in U$. Sada smo u mogućnosti da definišemo preslikavanje

$$f : K^n \longrightarrow S^{n-1}$$

formulom

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ , & x \quad \overline{U} \\ f_2(x) \ , & x \quad K^n - U \ . \end{cases}$$

Pošto je $f_1(x) = f_2(x)$ za svako $x \in FrU$, preslikavanje f je korektno definisano. Po BROUWER teoremi kugla K^n ima svojstvo fiksne tačke. To znači postojanje tačke $x_o \in K^n$ tako da vredi

$$(1) \quad f(x_o) = x_o \ .$$

U tom slučaju $x_o \in S^{n-1} \subset K^n - U$ pa je $\|x_o\| = r$ i stoji

$$(2) \quad f(x_o) = - x_o \ .$$

Iz (1) i (2) sledi da je $x_o = 0$. Medjutim , to nije istina, jer je 0 središte kugle K^n. Prema tome , $K^n - U$ nije sažetak od K^n, a pošto K^n jeste retrakt od E^n , onda $K^n - U$ nije sažetak od E^n.

Značajna je i sledeća teorema koja je analogna iskazu (3.7) u (/1/ , st. 15).

T E O R E M A 5.2. Kompaktni sažeci prostora E^n ne razdvajaju taj prostor za $n > 1$.

D o k a z . Neka je A kompaktan sažetak prostora $E^n (n > 1)$. Postoji kugla $K_o^n \subset E^n$ takva da je $A \subset K_o^n$. Skup $E^n - K_o^n$ je povezan i sadrži se u jedinoj neograničenoj komponenti C_o skupa $E^n - A$. Ako bi skup A razdvajao prostor E^n , značilo bi da je $E^n - A$ nepovezan skup pa bi postojala ograničena komponenta

$$C \subset K^n - A$$

skupa $E^n - A$. Opet možemo uzeti da $0 \in C$. Kako je $A \subset C$ ograničen skup , postoji kugla

$$K^n = \{ x \in E^n : \|x\| \leq r \}$$

takva da je $A \subset C \subset K^n$. Zbog $0 \notin A$ postoji okolina V_o od A u K^n takva da $0 \notin V_o$. Pošto je A zatvoren u E^n, a E^n je lokalno povezan , onda vredi inkluzija

$$FrC \subset FrA .$$

Nadalje , pošto je A sažetak od K^n , postojalo bi preslikavanje

$$f_o : \overline{C} \longrightarrow V_o$$

takvo da je $f_o(x) = x$, $x \in FrC$. Analogno kao i u prerhodnoj teoremi mogli bismo definisati preslikavanja

$$f_1 : \overline{C} \longrightarrow S^{n-1} \quad \text{i} \quad f_2 : K^n - C \longrightarrow S^{n-1} .$$

Pomoću tih preslikavanja možemo definisati preslikavanje

$$f : K^n \longrightarrow S^{n-1}$$

formulom

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) , & x \in \overline{C} \\ f_2(x) , & x \in K^n - C \end{cases} .$$

Medjutim , to nas opet dovodi u kontradikciju sa teoremom Brouwera po kojoj kugla K^n ima svojstvo fiksne tačke . Zbog toga skup A ne razdvaja prostor E^n , tj. skup $E^n - A$ je povezan.

P r i m e d b a 5.1. Za $n = 1$ skup $E^1 - A$ ima tačno dve komponente . U tom slučaju se klasa kompaktnih sažetaka prostora E^1 podudara sa klasom njegovih kompaktnih retrakata. Prema tome , samo jednotačkovni skupovi i zatvoreni intervali prostora E^1 mogu biti njegovi kompaktni sažeci.

Dokažimo još i teoremu koja u jednom smeru karakteriše kompaktne okolinske sažetke Euklidovih prostora.

Primetićemo da je teorema analogna iskazu (4.2) u (/1/,st.17).

T E O R E M A 5.3. Neka je A kompaktan okolinski sažetak prostora E^n. Tada skup $E^n - A$ ima najviše konačno mnogo komponenata.

D o k a z . Pošto je A okolinski sažetak od E^n postoji ograničena zatvorena okolina W od A u E^n kojoj je A sažetak. Nadalje , iz kompaktnosti skupa A i lokalne povezanosti prostora E^n sledi da su skoro sve komponente skupa $E^n - A$ sadržane u int W .

Pretpostavimo , suprotno tvrdjenju Teoreme 5.3 , da u skupu $E^n - A$ ima beskonačno mnogo komponenata. Samo jedna od tih komponenata je neograničena. To je ona komponenta koja sadrži skup $E^n - K^n$, pri čemu je K^n kugla koja obuhvata kompakt A. Prema tome , u unutrašnjosti skupa W ima beskonačno mnogo ograničenih komponenata skupa $E^n - A$. Sve te komponente su otvorene u E^n. Neka je

$$C \subset \operatorname{int} W$$

jedna od tih komponenata.Jasno je da $\overline{C} \subset W$. Ako je V bilo kako izabrana okolina od $E^n - C$ u E^n , onda je V okolina i od A , jer je $A \cap C = 0$ i $A \subset E^n - C$. Pošto je A sažetak od W , postoji preslikavanje

$$r : \overline{C} \longrightarrow V$$

takvo da je $r(x) = x$, $x \in A$. Sada možemo definisati preslikavanje

$$f : E^n \longrightarrow V$$

stavljajući

$$f(x) = \begin{cases} r(x), & x \in \overline{C} \\ x, & x \in E^n - C \end{cases} .$$

Pošto je $\overline{C} \cap (E^n - C) = \mathrm{Fr}C \subset A$, onda je $r(x) = x$, $x \in \mathrm{Fr}C$. Iz toga proizlazi da je f dobro definisano preslikavanje. Sledilo bi da je $E^n - C$ sažetak prostora E^n. Medjutim, to je u suprotnosti sa Teoremom 5.1, jer je C ograničen neprazan i otvoren podskup prostora E^n. Na taj način smo oborili pretpostavku da u $E^n - A$ ima beskonačno mnogo komponenata i Teorema 5.3 je dokazana.

P r i m e d b a 5.2. Kompaktni okolinski sažeci prostora E^1 mogu biti samo konačne unije segmenata i jednotačkovnih skupova. Prema tome, klasa kompaktnih okolinskih sažetaka prostora E^1 podudara se sa klasom kompaktnih okolinskih - retrakata tog prostora.

PRIMER 5.1. Skup $A = \{a_0, a_1, \dots\}$ tačaka niza $\{a_n\}$, $a_n = (\frac{1}{n}, o)$, $a_o = (o,o)$ je kompaktan. On nije okolinski sažetak od E^1, jer skup $E^1 - A$ ima beskonačno mnogo komponenata.

Videli smo da u proučavanju sažetaka prostora E^1 nema ničeg novog u odnosu na proučavanje njegovih retrakata. Medjutim, retrakti i sažeci prostora E^2 jako se razlikuju.

Dobro je poznato (v. (13.1) , /1/ , st.150) da se klasa lokalno povezanih kontinuuma koji ne razdvajaju E^2 podudara sa klasom kompaktnih retrakata od E^2. Već smo dokazali da sažeci lokalno povezanih prostora ne moraju biti lokalno povezani (videti Primer 1.1). Zato je značajna i zanimljiva

T E O R E M A 5.4. Klasa kompaktnih sažetaka prostora E^2 podudara se sa klasom kontinuuma koji ne razdvajaju E^2.

D o k a z . Ako je A kompaktan sažetak prostora E^2 on je povezan zbog Teoreme 1.2 , jer je E^2 povezan. Nadalje A ne razdvaja prostor E^2 zbog Teoreme 5.2. Prema tome ,skup A je kontinuum koji ne razdvaja E^2.

Obratno , pretpostavimo da je $A \subset E^2$ kontinuum takav da je $E^2 - A$ povezan skup. Tada za svaku kuglu

$$K(A, \varepsilon) = \{ x \in E^2 : d(x,A) \leq \varepsilon \}$$

postoji dvodimenzionalna ćelija $D \subset E^2$ takva da je

$$A \subset D \subset K(A, \varepsilon)$$

zbog Leme (13.4) iz (/1/ , st. 153). Pošto je D kontraktibilan u $K(A, \varepsilon)$,a $\{K(A, \varepsilon)\}$, $\varepsilon \in R^+$ je baza okolina od A , zaključujemo da je A skoro kontraktibilan. Sada pomoću Teoreme 2.3 možemo zaključiti da je A sažetak prostora E^2.

Borsuk je dokazao (/1/ , (14.1), st.157) da ako je $A \subset E^2$n lokalno povezan kompakt takav da skup $E^2 - A$ ima najviše konačno mnogo komponenata , onda je A okolinski retrakt prostora E^2.

Videli smo da sažeci , pa i okolinski sažeci , prostora E^2 ne moraju biti lokalno povezani. Sada se prirodno nameće sledeće pitanje: Ako je $A \subset E^2$ kompakt , takav da skup $E^2 - A$ ima najviše konačno mnogo komponenata , da li je A okolinski sažetak od E^2?

Odgovor na to pitanje glasi : Ne! U to nas uverava sledeći

PRIMER 5.2. Posmatrajmo nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tačaka

$$a_n = \left(\frac{1}{n} , o \right) , \quad b_n = \left(\frac{1}{n} ,1\right) \quad (n=1,2,\dots)$$

prostora E^2. Neka su $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\dots)$ segmenti u E^2 koji povezuju tačke a_n sa tačkama b_n i neka je $[a_o,b_o]$ segment koji povezuje tačku $a_o = (o,o)$ sa tačkom $b_o=(o,1)$. Tada skup

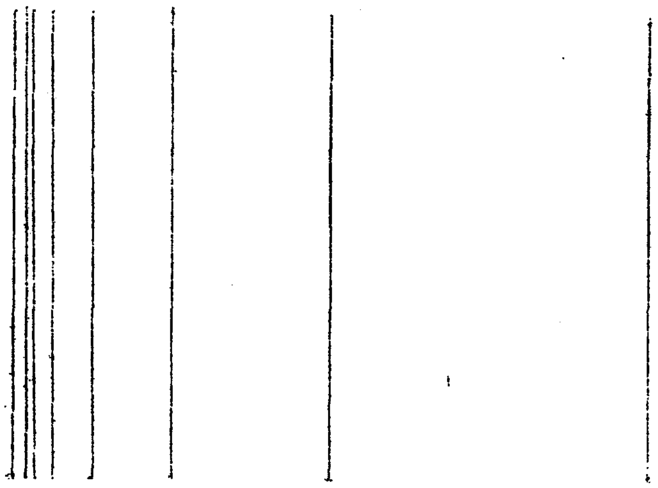
$$A = [a_o,b_o] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \right)$$

predstavlja lokalno nepovezan kompakt takav da njegov komplement $E^2 - A$ ima samo jednu komponentu (sl.5). Skup

$$A_o = \{ a_o,a_1,\dots \}$$

nije okolinski sažetak od E^2 (v. Primer 5.1). Pošto je A_o retrakt od A , onda A ne može biti okolinski sažetak prostora E^2 , jer bi u tom slučaju A_o morao biti okolinski sažetak od E^1.

P r i m e d b a 5.3. Postoje lokalno povezani kontinuumi koji nisu ANS - prostori. Takav kontinuum je na primer „japanska mindjuša" .



Slika 5.

Podsetimo se na kraju da je Borsuk konstruisao jedan beskonačnodimenzionalan lokalno kontraktibilan i kontraktibilan kontinuum u Hilbertovom kubu koji nije ANR - prostor (/1/ , (11.1),st.142). Zato nam se čini zanimljivim sledeći

P r o b l e m 5.1. Da li su svi lokalno kontraktibilni kontinuumi Hilbertovog kuba Q^{ω} ANS - prostori?

L I T E R A T U R A

/1/ BORSUK K. , Teorija retraktov , Moskva 1971.

/2/ – , Concerning homotopy properties of compacta, Fund. Math. , 62(1968),223 - 254

/3/ – , Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences , Fund. Math. , 64(1969),55-85

/4/ – , A note on the theory shape of compacta,Fund. Math. , 67(1970) , 265 - 278

/5/ – , On the Shape of FANR - sets , Bull. Acad.Polon Sci. , 17(1969)

/6/ – , Concerning the notion of the Shape of Compacta , Topology and its Applications, Beograd (1969) , 98 - 104

/7/ – , Sur les retracts , Fund. Math. , 17(1931) , 152 - 170

/8/ BARTHOMAY A.F. , Type - invariance and h - retraction , Portugal. Math. , 13(1954) , 105- 110

/9/ DUGUNDJI J., An extension of Tietze´s Theorem , Pacific. Journ. Math. , 1(1951) , 353 - 367

/10/ HANNER O. , Some theorems on absolute neighborhood retracts , Arhiv for Math.,1(1951),389-408

/11/ – , Retractionand extension of mappings of metric and non-metric spaces , Arh.for Math. , 2(1952), 315 - 360

/12/ – , Solid spaces and absolute retracts , Arh.Mat., 1(1951) , 375 - 382

/13/ HILDEBRAND S.K. , SANDERSON D.E. , Connectivity function and retracts,Fund.Math.,57(1965),237-245

/14/ HU S.T. , Theory of retracts , Detroit (1965)

/15/ KELLY J.L. , General topology , New York(1957)

/16/ KURATOWSKI K.,Topologija I , Moskva (1966)

/17/ - , Topologija II , Moskva (1969)

/18/ LEFSHETZ S. , On loccally - connected and related sets, Duke Math. J., 2(1936),435-442

/19/ MARDEŠIĆ S. , Retracts in Shape theory , Glasnik mat., 6(26)(1971),153-163

/20/ - , Equivalence of singular and Čech homology for ANR - s.Application to unicoherence, Fund. Math. , 46(1959),29-45

/21/ NOGUCHI H.A. , A generalization of absolute neighborhood retracts , Kodai Mat.Sem.Repts,1(1953), 20 - 22

/22/ PALAIS R.S. , The classification of G-spaces,Mem.Am. Math . Soc. , 36(1960)

/23/ SPANIER E.H. , Algebraic topology , New York (1966)

/24/ STEENROD N.E. , The topology of fibre bundles, Princeton(1951)

/25/ STROTHER W.L. , Fixed points , fixed sets and M-retratts, Duke Math. J. , 22(1955),551-556

/26/ YANDL A. , KLEE V. , Some proximate concepts in Topology , University of Washington and Seatle University (1973)

/27/ ŽIVANOVIĆ Ž. , Generalized retracts , Topology and its Applications , Beograd (1973)

PREGLED KORIŠTENIH OZNAKA

E^n - n-dimenzionalni Euklidov prostor

E^ω - Hilbertov prostor

Q^ω - Hilbertov kub

$\mathcal{M}$ - klasa svih metričkih prostora

$AR(\mathcal{M})$ - apsolutni retrakti za metričke prostore

$ANR(\mathcal{M})$ - apsol. okol. retrakti za metričke prostore

AR - kompaktni $AR(\mathcal{M})$ - prostori

ANR - kompaktni $ANR(\mathcal{M})$ - prostori

FAR - fundamentalni apsolutni retrakti

FANR - fundamentalni apsolutni okolinski retrakti

$AS(\mathcal{M})$ - apsolutni sažeci za metričke prostore

$ANS(\mathcal{M})$ - apsolutni okolinski sažeci za metričke prostore

AS - kompaktni $AS(\mathcal{M})$ - prostori

ANS - kompaktni $ANS(\mathcal{M})$ - prostori

$\underset{r}{\geqslant}$ - relacija r - dominacije

$\underset{p}{\geqslant}$ relacija p - dominacije

SC - klasa skoro kontraktibilnih metričkih prostora

LC^n - klasa lokalno kontraktibilnih prostora(k=o,1,...,n)

$\sim$ - homotopska jednakost prostora