Милорад Бертолино

# Егзистенција асимптотских решења једне класе диференцијалних једначина

- докторска дисертација -

**MILORAD M.BERTOLINO**

**EGZISTENCIJA ASIMPTOTSKIH REŠENJA JEDNE KLASE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA**

**-doktorska disertacija-**

## PREDGOVOR

Početkom 1956 g. na savet dr.Borivoja Rašajskog,počeo sam sa proučavanjem Čapliginove metode približne integracije diferencijalnih jednačina. Rezultati ovog proučavanja dati su u tri manja članka,štampana u „ Vesniku Društva matematičara i fizičara NRS".Prvi članak „ Neke funkcionalne nejednakosti dobijene primenom Čapliginove metode i uporedjivanje sa rezultatima Mihaila Petrovića" [2] informativan je,pri čemu sadrži nekoliko prostih primera.Od njih treba podvući samo primer Rikatijeve jednačine sa str.91 u kome je, na jednom odredjenom zadatku ,prikazana(inače teorijski očigledna) mogućnost primene Čapliginove metode u utvrdjivanju egzistencije asimptotski ograničenih rešenja(u ovom primeru,kao i u celom članku,potkralo se nekoliko štamparskih grešaka). Članak " Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles" [3] sadrži jednu modifikaciju dokaza osnovnog Čapliginovog tvrdjenja za nehomogenu linearnu jednačinu drugog reda(rad saopšten na medjunarodnom simpozijumu za diferencijalne jednačine,Beograd,decembar 1957 godine). U članku " Primedba u vezi sa jednim člankom Mihaila Petrovića" [4] pokazuje se način neposrednog korišćenja Čapliginove teoreme za jednačine prvog reda pri tretiranju homogene linearne jednačine drugog reda,pri čemu se dobija da su "okvirne krive" u jednom rezultatu Mihaila Petrovića u stvari Čapliginove krive.

Pod rukovodstvom profesora Dr. Tadije Pejovića posvetio sam se,1958 godine,proučavanju asimptotski ograničenih rešenja diferencijalnih jednačina. Koristeći Čapliginovu metodu,svoje prve rezultate izložio sam u radu " THÉORÈMES SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTOQUE DES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES" [6] .Kratak prikaz ovog rada izložio sam na III kongresu matematičara,fizičara i astronoma FNRJ 20 septembra 1960 godine,a detaljnije sam rad saopštio na sastanku Društva matematičara,fizičara i astronoma NRS 11 oktobra 1960 godine.Rad je primljen za štampu u " Vesniku društva matematičara i fizičara NRS".Pre saopštenja njega su pročitali prof.Dr.Tadija Pejović,prof.Dr.Giovanni Sansone(Firenca),prof.Dr.Borivoje Rašajski i moj kolega asistent Dušan Adamović.

Školsku 1960/61 proveo sam na usavršavanju pri Katedri matematičke analize Jagelonskog Univerziteta u Krakovu,pod rukovodstvom prof. Dr.Tadeuša Važevskog i prof. Dr.Jaceka Šarskog.U radu "Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina uopštio sam svoje ranije rezultate,koristeći opštu teoriju diferencijalnih nejednakosti(specijalno rezultate krakovske škole) i topološku metodu Dr. Važevskog, pa su pregledali Dr. Tadeuš Važevski, Dr. Jacek Šarski i docent Dr. Zdjislav Opjal.

Koristim ovu priliku da se srdačno zahvalim svim pomenutim profesorima i kolegama sa kojima sam se konsultovao u vezi sa svojim radom.

Beograd, 17 oktobra 1961

Milorad N. Bertolino

Milorad N. Bertolino, asistent
prirodno-matematičkog fakulteta
u Beogradu

## §1. UVOD

U ovom radu biće reči o diferencijalnim jednačinama prvog reda

$$(1)\quad y' = f(x,y)$$

odn. sistemima

$$(2)\quad y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad i=1,\dots,n$$

Pod asimptotski ograničenim rešenjem jednačine (1) podrazumevamo takvo njeno rešenje $y = y(x)$ za koje postoje realan broj $x_0$ i pozitivan broj $M$ takvi da je $|y(x)| \le M$ za $x_0 \le x \le +\infty$. Pod asimptotski ograničenim rešenjem sistema jednačina (2) analogno podrazumevamo takvo njegovo rešenje $y_i = y_i(x)$ za koje postoje realan broj $x_0$ i pozitivan broj $M$ takvi da je $|y_i(x)| \le M$ za $x_0 \le x \le +\infty$ i $i=1,\dots,n$. Izraz "asimptotska rešenja" upotrebljen u naslovu ima isto značenje kao "asimptotski ograničena rešenja" i biće ponekad upotrebljen kao kraći i uobičajen, iako manje precizan.

Specijalno će u radu biti tretirane jednačine oblika

$$(3)\quad y' = \varphi(x) y^n + \psi(x,y)$$

( $n$ prirodan broj), odn. sistemi

$$(4)\quad \begin{aligned} y' &= \varphi(x) y^n + \psi(x,y,z) \\ z' &= \varphi_1(x) z^m + \psi_1(x,y,z) \end{aligned}$$

( $n, m$ prirodni brojevi), odn. sistemi

$$(5)\quad \begin{aligned} y_i' &= \varphi_i(t) y_i^{n_i} + \gamma_i(t, y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q) \\ z_j' &= \varphi_j^*(t) z_j^{n_j^*} + \gamma_j^*(t, y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q) \end{aligned} \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q \end{matrix}$$

( $n_i, n_j^*$ prirodni brojevi, a funkcije koje figurišu na desnim stranama jednačina (3), (4), (5) ispunjavaju odredjene uslove).

U sledećem paragrafu će biti objašnjeno kako se došlo baš do ovih oblika. U nekim slučajevima se za rešenja pretpostavlja jedinstvenost a u nekim ne, što će se uvek naglasiti i obrazložiti. Kada sam primenjivao komparativne jednačine osnovna ideja koju sam sprovodio (izložimo je, jednostavnosti radi, za jednu jednačinu prvog reda), sastojala se u sledećem: data je jednačina

$$y' = f(x,y)$$

čije rešenje $y = y(x)$, $[y(x_0) = y_0]$ ispitujemo u pogledu asimptotske ograničenosti. Zna se da je $y_1(x) \le y(x) \le y_2(x)$ za $x \geqslant x_0$ gde su $y_1(x), y_2(x)$, $[y_i(x_0) = y_0]$ rešenja respektivno jednačina

$$y' = f_1(x,y); \quad y' = f_2(x,y)$$

za koja je asimptotska ograničenost utvrdjena. Iz toga se lako zaključuje da je $y = y(x)$ asimptotsko rešenje, ako su sva rešenja o kojima je reč jedinstvena. Problem je, dakle, u nalaženju takvih komparativnih jednačina

$$y' = f_1(x,y); \quad y' = f_2(x,y)$$

( za datu jednačinu $y' = f(x,y)$ ), čija je kvalitativna integracija jednostavnija.

## §2. MOJA RANIJA ISTRAŽIVANJA

U saopštenju " Sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles" (III kongres) i u saopštenju [6] na Društvu matematičara, fizičara i astronoma NRS tretirao sam jednačine oblika

$$(6) \qquad y' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y^i + \psi(x,y)$$

odn. najjednostavniji oblik

$$(7) \qquad y' = \varphi(x) y^n + \psi(x,y)$$

( $n$ prirodan broj). Kao što će se kasnije videti, uz onakve pretpostavke o funkcijama $\varphi(x)$ i $\psi(x,y)$ kakve su usvojene u tom kao i u ovom radu i nije bitno obuhvatati veći broj članova zbira $\sum_{i=1} \varphi_i(x) y^i$, jer član $\varphi_n(x) y^n$ igra odlučujuću ulogu. Postavlja se pitanje zašto su izabrane jednačine baš ovog oblika.

Profesor Pejović (kao i većina ostalih autora) proučavao je jednačinu oblika

$$(8) \qquad y' = \varphi(x) y + \psi(x,y)$$

Upotrebljavajući metodu sukcesivnih aproksimacija, on je koristio rezultate dobijene za linearnu jednačinu (otuda je član $\varphi(x) y$ gde je $y$ na prvom stepenu, od bitnog značaja). Koristeći umesto sukcesivnih aproksimacija osnovnu Čapliginovu teoremu o diferencijalnim nejednakostima, ja sam posmatrao jednačine

$$y' = \varphi(x) y^2 + \psi(x,y)$$
$$y' = \varphi(x) y^3 + \psi(x,y)$$

čije su se komparativne jednačine mogle lako proučavati.Ovo sam činio ispitujući ulogu linearnosti člana $\varphi(x)y$ u napred spomenutim radovima. Videvši rezultate za jednačine sa $y^2$ i $y^3$ prof. ejović je predložio da ih uopštim za slučaj $y^n$ što sam i učinio.

U slučaju,dakle,jednačine

$$(9) \quad y' = \varphi(x)y^n + \psi(x,y)$$

~~U slučaju,dakle,jednačine,~~

dobijeni su rezultati bitno različiti za $n=2K, (K=1,2,\dots)$ i za $n=2K+1, (K=0,1,2,\dots)$. $\varphi(x)$ je bila,za $x \geq x_0 \geq 0$ neprekidna,zadovoljavajući jedan od uslova

(a) $c_1 \leq \varphi(x) \leq c_2$ ( $c_1, c_2$ su konstante takve da je $c_1 c_2 > 0$ ).

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +0$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -0$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -\infty$

Što se tiče funkcije $\psi(x,y)$ ,ona je bila neprekidna u čitavoj ravni $XOY$ ,zadovoljavajući Lipšicov uslov

$$|\psi(x,Y) - \psi(x,y)| \leq K|Y-y|$$

u svakoj ograničenoj oblasti ravni $XOY$ .Osim toga, $\psi(x,y)$ je zadovoljavala jedan od uslova

$$(10) \quad \begin{array}{l} 0 < N < \psi(x,y) < M \\ -N < \psi(x,y) < -M \\ -N < \psi(x,y) < M \end{array} \qquad (N, M > 0)$$

ili jedan od uslova

$$(11) \quad y \neq 0 \quad \left.\begin{array}{l} 0 < N|y| < \psi(x,y) < M|y| \\ -N|y| < \psi(x,y) < -M|y| \\ -N|y| < \psi(x,y) < M|y| \end{array}\right\} ; \ \psi(x,0) = 0$$

primenjivana je osnovna Čapliginova teorema o diferencijalnim nejednakostima koja glasi:

## TEOREMA $A_1$.

Neka su, u oblasti $\omega$ ravni $XOY$ funkcije $f_1(x,y), f(x,y), f_2(x,y)$ neprekidne i zadovoljav-ju Lipšicov uslov

~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ ( npr $|f(x,Y)-f(x,y)| \leq L|Y-y|$ ).

Neka je $M(x_0,y_0)$ tačka koja pripada oblasti $\omega$, a $y_1(x), y(x), y_2(x)$ rešenja respektivno jednačina

$$y'=f_1(x,y) \text{ i } y'=f(x,y) \text{ i } y'=f_2(x,y)$$

koja prolaze kroz $M$, pri čemu je, u $\omega$,

$$f_1(x,y) < f(x,y) < f_2(x,y)$$

Tada je, u $\omega$, za $x > x_0$

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x)$$

Primenom ove teoreme sveo sam proučavanje jednačine (7) na proučavanje jednačina prostijih sa gledišta kvalitativne integracije. U slučaju hipoteza (10), problem je sveden na jednačinu oblika

$$(12) \quad y'=\varphi(x)y^n \pm K \qquad (K=\text{const.})$$

("generalisana Rikatijeva"), a u slučaju hipoteza (11) na jednačinu

$$(13) \quad y'=\varphi(x)y^n \pm Ky$$

( Bernulijeva ).

" Uokviravaju se "rešenja posmatrane jednačine rešenjima majorantne "gornje" i "minorantne "donje" jednačine u smislu Čapliginove teoreme. Ako se konstatuje da su rešenja komparativne jednačine majorantne kao i minorantne asimptotski ograničena, dobija se isti zaključak i za posmatranu jednačinu.

Kvalitativnu integraciju komparativnih jednačina vršio sam direktnom metodom, inspirisan radom Mihaila Petrovića " O asimtotnim vrednostima integrala diferencijalnih jednačina prvog reda" 1895 [18] . U ovom radu Petrović tretira asimptotska rešenja opšte Rikatijeve jednačine. Pored izvesnih grešaka rad je lep primer spretnog korišćenja elementarnih činjenica za što preciznije opisivanje toka integralnih krivih. Rad je još jedan primer da Petrovićevi rezultati i danas mogu služiti kao korisna inspiracija.

Rezimirajući, u slučaju (11), $y<0$ i $y>0$, uzimajući u obzir sve kombinacije hipoteza u odnosu na $\varphi(x), \psi(x,y)$ i $n$, dobija se 108 raznih slučajeva, pri čemu je egzistencija asimptotskih rešenja konstatovana u 50. Padao je u oči uopšte uzev veliki broj slučajeva, što je sugeriralo neku koncizniju i obuhvatniju formulaciju. Ona će u kasnijim paragrafima biti date ovom prilikom.

Radi ilustracije vrste dobijenih rezultata citiram ovde pet jednostavnih teorema. U radu [6] izloženi su svi rezultati. Ubuduće će teoreme drugih autora biti označavane sa $A_i$, moji raniji rezultati sa $B_i$ i teoreme koje se prvi put pojavljuju u ovom radu sa $C_i$.

**TEOREMA $B_1$**

Pod uslovima

$$n=2K,\ (K=1,2,\cdots);\ C_1 \le \varphi(x) \le C_2;\ C_1,C_2<0;$$
$$0<N<\psi(x,y)<M$$

(sa ostalim opštim hipotezama o $\varphi(x)$, $\psi(x,y)$ navedenim ranije), jednačina (7) ima jednu klasu asimptotskih rešenja (sva pozitivna rešenja i rešenja koja prolaze kroz tačke ose $y=0$).

**TEOREMA $B_2$**

Pod uslovima

$$n=2K+1,\ (K=0,1,\cdots);\ C_1 \le \varphi(x) \le C_2;\ C_1,C_2<0$$

i ako je ispunjen jedan od uslova (10), sva su rešenja asimptotski ograničena.

**TEOREMA $B_3$**

Pod uslovima

$$n=2K+1,\ (K=1,2,\cdots);\ C_1 \le \varphi(x) \le C_2;\ C_1,C_2<0$$
$$y \neq 0 :\ N|y| < \psi(x,y) < M|y|\ ;\ \psi(x,0)=0$$

sva su rešenja asimptotska, pri čemu pozitivna ne teže, a negativna teže nuli.

**TEOREMA $B_4$**

Pod uslovima

$$n=2K,\ (K=1,2,\cdots);\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty;$$
$$0<N<\psi(x,y)<M$$

integralnim i parcijalnim jednačinama. Za ovaj rad ona je imala značaja utoliko što je najregularniji slučaj osnovne teoreme bio prvi kod koga sam uvideo praktičnu mogućnost korišćenja diferencijalnih nejednakosti te vrste u domenu ispitivanja asimptotskih rešenja. Uopšte više o Čapliginovoj metodi videti u radovima [2], [3], [4], [10], [11], [12], [35], [36] .

U delu [8] str. 10 navodi se sledeća opštija teorema:

## TEOREMA $A_2$

Neka su funkcije $f(x,y), g(x,y)$ definisane i neprekidne u oblasti $G(x,y)$ i

$$(\alpha) \qquad f(x,y) < g(x,y)$$

Neka su $\varphi(x), \psi(x)$ dva integrala jednačina

$$\varphi' = f(x,\varphi) \; ; \; \psi' = g(x,\psi) \quad \text{sa poč. vredn. } \varphi(\xi) \leq \psi(\xi)$$

Tada je

$$(\beta) \qquad \varphi(x) \lesseqgtr \psi(x)$$

za $\xi \lessgtr x$ . Ako bar jedna od funkcija $f, g$ ispunjava neki od uslova jedinstvenosti, može se u $(\alpha)$ i $(\beta)$ staviti respektivno $\leq$ , $\lesseqgtr$ umesto $<$ odn. $\lessgtr$ .

~~O. Perona~~ Čapliginovu osnovnu teoremu u još užem obliku našao sam u radu [16] O. Perona, kao i u knjizi [19] Mihajla Petrovića, gde autor teoreme nije naglašen.

Od ostalih diferencijalnih nejednakosti iz dela [8] E. Kamkea (takve nejednakosti nalaze se u delovima o oceni integrala) izdvojićemo jednu teoremu koja je uopštenje teoreme $A_2$ za slučaj sistema, ma da nije, kao što je pokazao T. Važevski (vidi [41] ), u potpunosti tačna. Teorema glasi:

## TEOREMA $A_3$

Neka su definisane funkcije

$$f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n), \; g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad (\nu = 1, \cdots, n)$$

u jednoj oblasti $G(x, y_1, \cdots, y_n)$ kojoj pripadaju dve tačke

$$P(\xi, \eta_1, \cdots, \eta_n), \; \bar{P}(\xi, \bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_n)$$

sa $\eta_\nu \leq \bar{\eta}_\nu$

Neka je, za $x \geq \xi$

$$f_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) < g_\nu(x, y_1, \cdots, y_n) \qquad \nu = 1, \cdots, n$$

i za svako $\nu$ funkcije $f_\nu$ (ili $g_\nu$ ) monotono rastuće od svake promenljive $y_\mu$ $(\mu \neq \nu)$.

Neka su

$$y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$$
$$y_1 = \psi_1(x), \dots, y_n = \psi_n(x)$$

integrali koji prolaze kroz $P$ odn. $\overline{P}$, definisani za $\xi \leq x < \xi + a$ sistema

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, \dots, y_n) \qquad \nu = 1, \dots, n$$
$$\cancel{y_\nu' = f_\nu} \; y_\nu' = g_\nu(x, y_1, \dots y_n)$$

Tada je, za $\xi < x < \xi + a$: $\varphi_\nu(x) < \psi_\nu(x) \qquad \nu = 1, \dots, n$

Ako se u $f_\nu < g_\nu$ stavi $\leq$ umesto $<$, teorema ostaje tačna ako se u $\varphi_\nu < \psi_\nu$ takodje stavi $\leq$ umesto $<$ i ako su $f_\nu, g_\nu$ neprekidne a sistem $y_\nu' = g_\nu$ ima jedinstvena rešenja.

Da bi ova teorema bila potpuno tačna, kao što je pokazao profesor Važevski [41] sem navedene monotonije treba sve funkcije $f_\nu$ (odn. $g_\nu$ ) da zadovoljavaju još jedan uslov koji će biti jasan iz iskaza teorema $A_4$ i $A_5$.

U ovom radu biće korišćeni rezultati teorema $A_4$ i $A_5$ prof. Važevskog iz njegovog rada [41] .

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y)$$

i pretpostavimo da je funkcija $g$ neprekidna na jednom otvorenom skupu $\Omega$.

Zna se (E. Kamke: "Differentialgleichungen reeller Funktionen", S. 78, Leipzig 1956) da:

Kroz svaku tačku $(t_0, y_0)$ iz $\Omega$ prolazi jedan bilateralni gornji integral tj. definisan desno i levo od $t_0$. On se može produžiti u oba smera do ivice od $\Omega$.

Postavlja se problem do koje je mere ovo svojstvo tačno u odnosu na sisteme

$$(14) \qquad \frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \dots, y_n), \qquad i = 1, \dots, n$$

Pošto odgovorimo na ovo pitanje, citiraćemo jednu teoremu T. Važevskog, koja će kasnije biti korišćena.

Hipoteze $H$ i $K$, primedba koja sledi, svojstvo $P$, tvrdjenja 1 i 2, teoreme $A_4$ i $A_5$ dati su prema radu [41] T. Važevskog.

HIPOTEZA H

1) Funkcije

$$f_i(t, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

neprekidne su na jednom otvorenom skupu tačaka $\omega(t, y_1, \dots, y_n)$.

2) Funkcije $f_i$ imaju tu osobinu da, ako za neko $i = 1, \dots, n$ tačke

$$A_i = (t, a_1, \dots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n)$$
$$B_i = (t, b_1, \dots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

pripadaju $\omega$ i ima se $a_\nu \leq b_\nu$, $\nu = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$

tada je

$$f_i(A_i) \leq f_i(B_i)$$

HIPOTEZA K

Funkcija $f_i$ neprekidna je na jednom otvorenom skupu $\Omega$. Ona je rastuća (u širem smislu) u odnosu na svaku od promenljivih $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$ posebno, tj.

$$f_i(t, y_1, \dots, y_{j-1}, k_j, y_{j+1}, \dots, y_n) \geq f_i(t, y_1, \dots, y_{j-1}, l_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$$

kada $i \neq j$ i $k_j \geq l_j$. Ne predpostavlja se da je $f_i$ rastuća u odnosu na $y_i$ i $t$.

**PRIMEDBA**

Hipoteza $H$ ima kao posledicu hipotezu $K$. Obrnuto nije slučaj, sem za jednu specijalnu klasu skupova $\Omega$. Da bismo okarakterisali jednu takvu klasu uvedimo sledeće pojmove:

a) Neka su $P = (\tau, p_1, \dots, p_n)$, $Q = (\tau, q_1, \dots, q_n)$ dve tačke ravni $t = \tau$. Reći će se da je $P \leq Q$ kada je $p_i \leq q_i$ $(i = 1, \dots, n)$

b) Kažemo se da je poligonalna linija čija su temena $A_1, \dots, A_m$ smeštena u jednoj ravni $t = \tau$ prosto rastuća kada $A_\nu \leq A_{\nu+1}$ $(\nu = 1, \dots, m-1)$ i kada je svaki segment $[A_\nu, A_{\nu+1}]$ paralelan jednoj od osa $y_1, \dots, y_n$.

**SVOJSTVO P**

Kazaćemo da neki otvoreni skup $\Omega$ prostora tačaka $(t, y_1, \dots, y_n)$ ima svojstvo P, kada se svaki par tačaka

$$A = (\tau, a_1, \dots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

$$B = (\tau, b_1, \dots, b_{j-1}, c, b_{j+1}, \dots, b_n)$$

koje pripadaju $\Omega$ i $A \leq B$, može spojiti jednom prosto rastućom poligonalnom linijom sadržanom u $\Omega$.

**TVRDJENJE 1**

Za svaki skup $\Omega$ koji ima svijstvo P hipoteze H i K su ekvivalentne.

## TVRDJENJE 2

U slučaju $n=1$ hipoteze $H$ i $K$ očigledno su ispunjene za svaki skup $\Omega$ tačaka $(t, y_1)$. U slučaju $n=2$ hipoteze $H$ i $K$ su ekvivalentne za svaki skup $\Omega$ tačaka $(t, y_1, y_2)$.

Sada se mogu formulisati teoreme $A_4$ i $A_5$.

## TEOREMA $A_4$

Pod hipotezom H prolazi kroz svaku tačku $(t^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ iz $\Omega$ jedan gornji integral $\bar{J}$ (jedan donji $\underline{J}$) sistema

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \qquad i=1,\dots,n$$

u odnosu na tu tačku i jedan interval $t_0 \leq t < \alpha$. Broj $\alpha$ može biti izabran tako da tačka $M$ koja varira na $\bar{J}$ teži ivici od $\Omega$ kada $t$ teži ka $\alpha$. (Gornji integral $\bar{J}$ je takav integral da je ispunjeno $J(t) \leq \bar{J}(t)$ gde je $J(t)$ ma koji drugi integral sistema koji prolazi kroz tačku $(t_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$. Drugim rečima, ako oznake $J(t)$ i $\bar{J}(t)$ znače integrale $y_i = y_i(t)$ i $Y_i = Y_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$, onda je $y_i(t) \leq Y_i(t)$ za svako $i$, u zajedničkom intervalu egzistencije).

## TEOREMA $A_5$

Pretpostavimo da su funkcije $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ i $g_i(t, y_1, \dots, y_n)$ neprekidne na jednom otvorenom skupu $\Omega$ i neka su

$$A = (t_0, a_1, \dots, a_n)$$

$$B = (t_0, b_1, \dots, b_n)$$

dve tačke iz $\Omega$, takve da je $A \leq B$ (tj. $a_i \leq b_i$ za $i=1,\dots,n$).

Posmatrajmo dva sistema diferencijalnih jednačina

$$(a) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n)$$

$$i=1,\dots,n$$

$$(b) \quad \frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \dots, y_n)$$

Uz ove pretpostavke važe sledeća tvrdjenja:

1) Ako funkcije $f_i$ zadovoljavaju hipotezu $H$ i $g_i \leq f_i$ u $\Omega$, najzad $\Phi(t)$ označava jedan integral sistema ($b$) koji prolazi kroz $A$ i $\Psi(t)$ gornji desni integral sistema ($a$) koji prolazi kroz $B$, tada $\Psi(t)$ majorira $\Phi(t)$ desno od $t_0$ u celom intervalu $t_0 \leq t < \alpha$ u kome ova dva integrala postoje. [ $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$; $\Psi(t) = (\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t))$ ]

Dakle je u tom intervalu

$$\varphi_i(t) \leq \psi_i(t)$$

2) Ako funkcije $f_i$ ispunjavaju u $\Omega$ hipotezu $H$ i $f_i \leq g_i$ u $\Omega$, ako $\Psi(t)$ označava jedan integral sistema ($b$) koji prolazi kroz $B$, a $\Phi(t)$ donji desni integral sistema ($a$) iz $A$, tada $\Psi(t)$ majorira $\Phi(t)$ desno od $t_0$ u celom intervalu $t_0 \leq t < \alpha$ u kome ova dva integrala postoje.

Ako se umesto gornjih odnosno donjih integrala u $A_5$ uzmu ma koji integrali, stav ostaje lokalno važeći, sem kada se radi samo o strogim nejednakostima.

Još opštije rezultate ove vrste dao je Jacek Šarski (videti [27]-[32]) koji se bavi analognim problemima i u okviru parcijalnih diferencijalnih jednačina. Takodje treba spomenuti teoremu Jana Mikušinskog (videti [15]), koja se odnosi na integralne krive jednog istog sistema. U ovom paragrafu kao i u celom radu izlažem samo one delove opšte teorije koji su neophodni za dokazivanje mojih rezultata. Ostalo sam prikazao u rukopisima "Diferencijalne nejednakosti i asimptotski ograničena rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda" i "Dopunski pojmovi o retraktima i asimptotska rešenja".

Navedene diferencijalne nejednakosti omogućavaju nam obrazovanje komparativnih jednačina. Bilo ispitivanjem posmatrane jednačine bilo komparativnih, ako je to lakše, na kraju ipak dolazimo do direktnih metoda od kojih je metoda retrakcije T. Važevskog jedna od najefikasnijih. U sledeća dva paragrafa objasnićemo ovu metodu sa svim potrebnim detaljima.

## § 4. RETRAKCIJE I RETRAKTI

Ovaj paragraf sadrži najelementarnije pojmove o retrakcijama i retraktima, prema radu [7] Dr. Karola Borsuka. U svojoj tezi branjenoj u oktobru 1929 godine na Varšavskom Univerzitetu K. Borsuk je uveo pojam retrakta (sam naziv dugujo se poljskom matematičaru Mazurkijeviču) i primenio ga višestruko u topologiji.

**Definicija retrakcije i retrakta.**

Posmatrajmo, u ma kakvom prostoru dva skupa $A$ i $B$ takva da je $A \subset B$. Kazaćemo da transformacija $Q = \varphi(P)$ vrši retrakciju $B$ u $A$ kada ima sledeće osobine: 1) neprekidna je i definisana u $B$, 2) $\varphi(P) \in A$ kada $P \in B$ i 3) $\varphi(P) = P$ kada $P \in A$.

Ako postoji bar jedna transformacija ove vrste, kaže se da je $A$ retrakt od $B$.

**primeri**

a) Za svaki skup $A$ identitet $f(x) = x$ jeste funkcija koja vrši retrakciju $A$ u $A$; svaki skup je retrakt sebe sama.

b) Konstantna funkcija $f(x) = p$, gde je $p \in A$, definisana na $A$ je funkcija koja vrši retrakciju $A$ u $(p)$; svaka tačka je retrakt svakog skupa koji je sadrži.

c) Ako je $S$ sfera sa $n$ dim. u prostoru $R_n$ ($n$-to dimenzionalni euklidski prostor), i $C$ njen centar, funkcija definisana u $R_n$ formulama

za $p \in S$, $f(p) = p$
za $p$ non $\in S$,

$f(p)$ je presečna tačka $S$ sa vektorom $[\overrightarrow{CP}]$, daje retrakciju u $S$; tako je svaka $n$-to dimenzionalna sfera retrakt od $R_n$.

d) Poluprava je retrakt prave, ova je retrakcija data funkcijom $f(x) = |x|$ definisanom na skupu realnih brojeva $R_1$.

e) Granica $n$-to dimenzionalne sfere nije retrakt sfere.

Retrakt retrakta nekog skupa $A$ jeste retrakt skupa $A$.

Svaki retrakt jednog skupa relativno je zatvoren u tom skupu.

Apsolutnim retraktom naziva se svaki separabilan prostor u kome se može uvesti metrika i koji je retrakt svakog od svojih nadprostora u koje se može uvesti metrika.

Ograničeni retrakti prostora $R_n$ ($n$-to dimenzionalni euklidski prostor) jesu apsolutni retrakti.

Svojstvo da je jedan skup apsolutni retrakt invarijanta je homeomorfije. Naprimer, neka je $A_1$ apsolutni retrakt skupa $B_1$. Neka homeomorfno preslikavanje prevodi $A_1$ u $A_1'$ a $B_1$ u $B_1'$. Tada je $A_1'$ apsolutni retrakt skupa $B_1'$.

U praksi će se nailaziti na teškoće prilikom odredjivanja da li je neki skup retrakt nekog drugog ili ne.

Invarijantnost u odnosu na homeomorfiju javlja se zato kao vrlo važno praktično svojstvo. Na osnovu činjenice da granica sfere nije retrakt sfere izvlačimo zaključak analogan za sve skupove homeomorfne sferi.

## § 5. METODA RETRAKCIJE

U ovom paragrafu izlažem metodu retrakcije T. Važevskog, koja se može korisno upotrebiti pri utvrdjivanju egzistencije asimptotskih rešenja običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Izlaganje je dato prema radovima [37], [38], [40] T. Važevskog.

Uvedimo najpre nekoliko opštih pojmova.

Posmatrajmo sistem

$$(14)\qquad \frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

u odnosu na koji ćemo pretpostaviti da važi sledeća

**HIPOTEZA $H_1$**

Pretpostavljamo da su funkcije $g_i$ definisane i neprekidne u svakoj tački jednog otvorenog skupa $\Omega$ koji pripada prostoru od $n+1$ dimenzija. Pretpostavljamo najzad da kroz svaku tačku iz $\Omega$ prolazi jedan jedini integral ovog sistema.

Definicija.

---

Neka je $\omega$ jedan otvoren skup sadržan u $\Omega$. Označićemo sa $front(\omega)$ ivicu od $\omega$ u odnosu na $\Omega$, tj. klasu onih ivičnih tačaka koje pripadaju otvorenom skupu $\Omega$. Neka je $P$ jedna tačka iz $\omega$ i $J$ integral sistema (14) koji prolazi kroz $P$. Polazeći od $P$ krećimo se duž $J$ na desno, tj. u smeru rastućih $t$. Moćiće se desiti da u putu naidjemo na $front(\omega)$. Postojaće dakle tačka $Q$ u kojoj će se ovaj susret desiti prvi put. Ova tačka $Q = conséq(P;\omega)$ (conséquent, prema Poincaré-u) biće nazvana "sledećom" tačkom tačke $P$ u odnosu na $\omega$. Polazeći od $P$ po $J$ na levo, tj. u smeru opadajućih $t$, definiše se analogno $R = antéc(P;\omega)$ (antécédent), "prethodna" tačka tačke $P$ u odnosu na $\omega$.

Neka je $M$ jedna tačka koja pripada $\omega$. Kazaće se da je $M$ respektivno tačka izlaza ili tačka ulaza (u odnosu na $\omega$) kada je $M$ "sledeća" ili "prethodna" tačka jedne tačke koja pripada $\omega$.

Skup svih tačaka izlaza ili svih tačaka ulaza biće označen respektivno sa

$$S(\omega) \text{ i } E(\omega)$$

Stavimo

$$\bar{\omega} = \omega + front(\omega)$$

Jedna tačka $front(\omega)$ biće tačka striktnog izlaza kada pripada istovremeno $S(\omega)$ i $E(\Omega - \omega)$. Analogno se definišu tačke striktnog ulaza (u odnosu na $\omega$). Ovi se skupovi označavaju sa

$$strict\ S(\omega) \text{ i } strict\ E(\omega)$$

Metoda retrakcije biće sada izložena kroz tekst četiri teoreme, najneophodnije iz metode.

## HIPOTEZA $H_2$

Posmatrajmo sistem

$$(15) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Resine funkcije $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ neprekidne su na jednom otvorenom skupu $\Omega$, a kroz svaku tačku od $\Omega$ prolazi jedan jedini integral sistema (15). Skup $\omega$ je otvoren i $\omega \subset \Omega$.

## TEOREMA $A_6$

Usvojmo hipotezu $H_2$. Neka je svaka izlazna tačka (u odnosu na $\omega, \Omega$ i sistem (15)) tačka striktnog izlaza

$$\text{Sortie}(\omega, \Omega) = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega) = S$$

Neka za dva skupa $Z$ i $S_1$ važe relacije

$$S_1 \subset S, \quad Z \subset \omega \cup S_1.$$

$Z \cap S_1$ je retrakt od $S_1$, $Z \cap S_1$ nije retrakt od $Z$.
Tada postoji bar jedna tačka

$$P_0 = (t_0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$$

takva da je $P_0 \in Z - S_1$ i da je ili
conséq $(P_0; \omega, \Omega) \in S - S_1$
ili conséq $(P_0; \omega, \Omega)$ ne postoji.

Napominjemo da uslov $\text{Sortie}(\omega, \Omega) = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega) = S$ koji figuriše u teoremama $A_{6-9}$ može biti zamenjen slabijim, ali je to za praksu o kojoj je reč od nevelike koristi (u našim kasnijim razmatranjima uvek je ispunjen gornji uslov).

## TEOREMA $A_7$

Usvojmo hipotezu $H_2$ i

$$\text{Sortie}(\omega, \Omega) = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega) = S$$

Neka je $Z$ skup takav da je $Z \subset \omega \cup S$, $Z \cap S$ je retrakt od $S$, $Z \cap S$ nije retrakt od $Z$. Tada postoji bar jedna tačka $P_0$ takva da je

$$P_0 \in Z - S \quad i \quad \text{Demi}(+)\, J(P_0) \subset \omega$$

(Ovde $\text{Demi}(+)\, J(P_0)$ označava desni poluintegral iz tačke $P_0$ produžen u $\omega$ dokle je moguće. Teorema govori da će ovaj integral ostati uvek u unutrašnjosti od $\omega$, a da nikad ne susretne ivicu od $\omega$).

Ova se teorema prosto dobija iz prethodne kad se stavi $S = S_1$, ali je posebno važna za slučaj, kao što će se kasnije videti, asimptotski ograničenih rešenja u ranijem smislu.

## DEFINICIJA

Neka su data dva otvorena skupa $\omega \subset \Omega$. Kazaćemo da $\text{frontabs}(\omega)$ dodiruje $\text{frontabs}(\Omega)$ isključivo na ravni $t = b$ (gde je $b$ konačno ili $b = +\infty$), ako za svaki niz tačaka

$$P_\nu = (t_\nu, p_1^\nu, \dots, p_n^\nu)$$

takav da $P_\nu \in \omega$, $P_\nu \to \text{frontabs}(\Omega)$ sleduje da $t_\nu \to b$.

Pod $\text{frontabs}(\omega)$ podrazumeva se skup ivičnih tačaka $\omega$ a pod $\text{frontabs}(\Omega)$ skup ivičnih tačaka skupa $\Omega$.

Kažemo da niz tačaka $P_\nu$ teži ka $\text{frontabs}(\omega)$ kad ne postoji nikakav podniz $P_{\alpha_\nu}$ koji bi težio nekoj tački koja pripada $\omega$.

## TEOREMA $A_8$

Pretpostavimo $H_2$ i da je ispunjen uslov iz prethodne definicije, te da je $\text{Sortie}(\omega, \Omega) = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega) = S$.

$Z \subset \omega \cup S$, $Z \cap S$ je retract od $S$ a nije od $Z$.

Tada postoji tačka

$P_0 = (t_0, p_1^0, \dots, p_n^0)$, takva da je

$$P_0 \in Z - S_1, \quad \text{Demi}(+)\, J(P_0) \subset \omega$$

Ovaj integral je asimptotski u odnosu na $\omega$ i $\Omega$ i ima se $J(t, P_0) \subset \omega$ kada $t_0 \le t < b$. Ova se teorema odnosi na mogućnost beskonačnog produžavanja integrala (do ivice $\Omega$) i takodje je važna za slučajeve koje ćemo posmatrati.

## DEFINICIJA

Pretpostavimo da su $\omega$ i $\Omega$ otvoreni skupovi i $\omega\subset\Omega$. Kazaćemo da $\mathrm{frontabs}(\omega)$ ne dodiruje $\mathrm{frontabs}(\Omega)$ kada ne postoji ni jedan niz tačaka takav da $P_\nu \in \omega$, $P_\nu \to \mathrm{frontabs}(\Omega)$.

## TEOREMA $A_9$

Pretpostavimo $H_2$ i uslov iz prethodne definicije

$$\mathrm{Sortie}(\omega,\Omega)=\mathrm{Sortie\ stricte}(\omega,\Omega)=S$$

$$T\subset S,\ Z\subset \omega\cup(S-T)$$

$Z\cap(S-T)$ je retrakt od $S-T$, a $Z\cap(S-T)$ nije retrakt od $Z$.

Tada postoji $P_0\in Z\cap\omega$ i $Q_0\in T$ koje mogu biti spojene lukom $[P_0,Q_0]$ i jednog integrala sistema (15), pri čemu se taj luk nalazi u $\omega$ izuzev njegove tačke $Q_0$.

toka

Teorema je važna u slučaju konačnih oblasti za ispitivanje ~~tokaž~~ integralnih krivih.

T. Važevski daje dalje opšte kriterijume za utvrdjivanje i izdvajanje skupova striktnog izlaza odnosno ulaza koje ovde ne izlažemo, nego ćemo ih izložiti u odeljku o sistemima diferencijalnih jednačina. Na ovom mestu navodimo samo jedan primer T. Važevskog, vrlo karakterističan i instruktivan.

## PRIMER

Posmatrajmo sistem od dve jednačine

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y,t)$$

i označimo sa $\overline{\omega}$

(tražena "cev"- izraz T. Važevskog koji ćemo upotrebljavati i u buduće, a pod kojim se podrazumeva $\bar{\omega}$ u smislu navedenom u ovom paragrafu) paralelepiped

$$0\le t\le 1,\ |x|\le 1,\ |y|\le 1$$

pretpostavljajući jedinstvenost u $\Omega$ $(\bar{\omega}\subset\Omega)$

Pretpostavljamo da

$$xf(x,y,t)>0 \text{ za } |x|=1,\ |y|\le 1,\ 0\le t\le 1$$

$$yg(x,y,t)<0 \text{ za } |x|\le 1,\ |y|=1,\ 0\le t\le 1$$

Ove nejednakosti izražavaju da integrali izlaze iz $\bar{\omega}$ kroz gornju donju i desnu stranu od $\bar{\omega}$ i ulaze kroz druge strane.

Označimo sa $\omega$ unutrašnjost $\bar{\omega}$ .

Neka je $Z$ segment sa krajevima $(-1,b,t_0),(+1,b,t_0)$ gde je $|b|<1,\ 0<t_0<1$ i najzad neka je $T$ segment sa krajevima $(e,-1,1)$, $(e,1,1)$ gde je $|e|<1$ .

Tada postoji jedan integral sadržan u $\omega$ koji seče segmente $Z$ i $T$ .Da bi se to pokazalo dovoljno je staviti $S_1=S-T$.

U slučaju $0\le t\le +\infty$ dobijamo familiju asimptotskih rešenja.

F.Albrecht je primenio pojam retrakta deformacijom(Borsuk),da bi konstruisati analognu teoremu koja omogućava da se dokaže egzistencija periodičnih rešenja u slučaju dve jednačine.Njegova teorema nije ni uža ni opštija od teorema $A_{6-9}$ .A.Pliś je uveo jednu specifikaciju pojma retrakta(retrakt kvazi-izotopnom deformacijom) i dobio jednu teoremu koja obuhvata i Albrechtovu i $A_{6-9}$ (videti radove [1], [25] ).

§ 6

## § 6.METODA RETRAKCIJE I MOJA RANIJA ISTRAŽIVANJA

U praksi utvrdjivanja egzistencije asimptotskih rešenja(da bi se mogla primeniti metoda retrakcije),centralno je pitanje pronaći skup $\omega$ ("cev"),zatim skupove $Z$ i $S$ ,te konstatovati egzistenciju tačaka čiji integrali ostaju u cevi za beskonačno velike vrednosti ~~beskonačno~~ nezavisno promenljive.U svome radu [38] str. 214 T.Važevski piše:" Le Théorème 1($A_7$ Prema našim oznakama) fournit une méthode générale pour obtenir des théorèmes relatives à l'existence des intégrales bornées,à l'examen du phénomène asymptotique et à l'examen de la façon dont se comportent les intégrales au voisinage d'un point singulier.En profitant,dans chaque cas particulier,de la forme spéciale du système (1) en question,il suffira de construire,chaque fois,un ensemble $\omega$ et d'indiquer éventuellement l'ensemble $S_1$ de façon que les hypothèses du Théorème 1 soient vérifiées. Les théorèmes spéciaux obtenus dans cette voie ne constituent pas toujours une conséquence banale du Théorème 1.Ceci tient à ce que la

Ceci tient à ce que la construction de l'ensemble $\omega$, d'une façon appropriée à la nature du problème n'est pas toujours ni immédiate ni facile."

Svi se moji rezultati iz rada tretiranog u $\S 2$, a koji se odnose samo na egzistenciju asimptotskih rešenja mogu interpretirati pomoću metode retrakcije. Što se tiče rešenja za koja je pokazano da teže nuli, njihova je egzistencija vezana za okolnosti nezavisne od metode retrakcije o čemu ćemo detaljnije govoriti na kraju ovog paragrafa.

Posmatrajmo jednačinu

$$y' = \varphi(x) y^{2K} + \psi(x, y)$$

sa pretpostavkama iz teoreme $B_1$. Ako je

$$|\varphi(x) y^{2K}| > M$$

biće i

$$|\varphi(x) y^{2K}| > \psi(x, y).$$

Treba znači izabrati

$$|y|^{2K} > \frac{M}{|\varphi(x)|}; \quad |y| > \sqrt[2K]{\frac{M}{|\varphi(x)|}}$$

pa se može zaključiti:

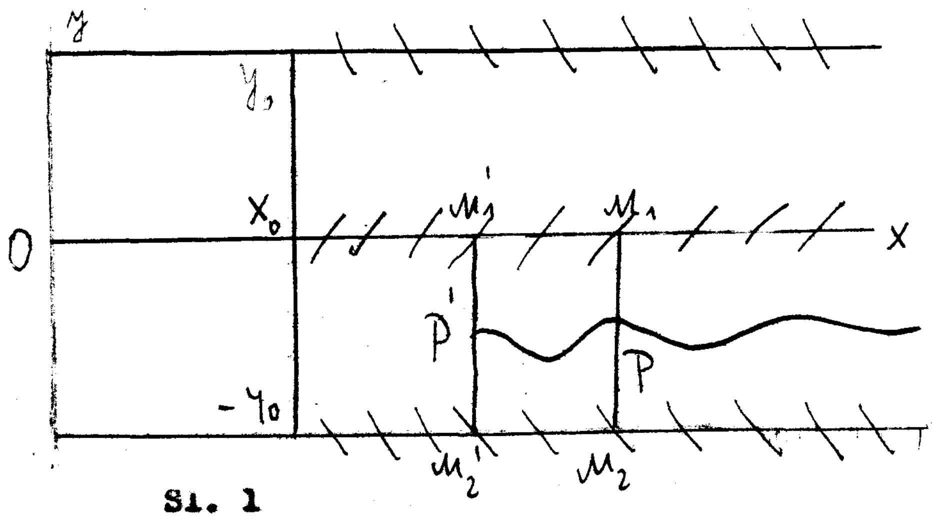
Za sve vrednosti $y$-a koje zadovoljavaju dobijenu nejednakost član $\varphi(x) y^{2K}$ davaće znak desnoj strani nejednačine (u našem slučaju taj je znak negativan). Jednostavnosti radi, posmatraćemo ravan $XOY$ za $x \geqslant x_0$ gde je $x_0$ ma koji realan broj.

Izaberimo $y_0$ tako da je prava $y = y_0$ iznad funkcije $y = \sqrt[2K]{\frac{M}{|\varphi(x)|}}$ (funkcije ograničene i s donje i s gornje strane). Svakoj tački pravih $y = \pm y_0$ odgovara po jedno rešenje diferencijalne jednačine negativnog prvog izvoda u toj tački. Kako je, za $y = 0$,

$$\varphi(x) y^{2K} + \psi(x, y) = \psi(x, 0) > 0$$

duž ose $x$ rešenja imaju prvi izvod pozitivan. Slika 1 predstavlja dobijenu situaciju.

Slika ostaje neizmenjena za svako $y_0^* > y_0$. Nije teško pokazati da sva pozitivna rešenja kao i ona koja prolaze kroz tačke ose $y = 0$ ostaju ograničena kad $x \to +\infty$ (na osnovu jedinstvenosti, teoreme o produžavanju, te o rešenjima kao o neprekidnim funkcijama neprekidnog prvog izvoda).




Sl. 1

Za primenu metode retrakcije od mnogo je većeg značaja oblast

$$x \ge x_0, \ -y_0 \le y \le 0$$

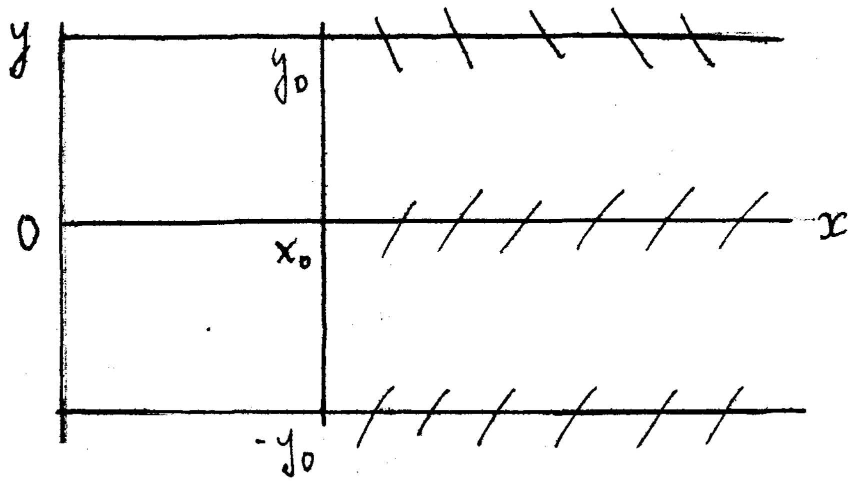
Neka je ova oblast $\bar{\omega}$. Skup $S$ tačaka striktnog izlaza sastavljen je od tačaka na pravim $y=0$ i $y=-y_0$ za $x \ge x_0$. Oblast $\omega$ je data nejednakostima

$$x > x_0, \ -y_0 < y < 0.$$

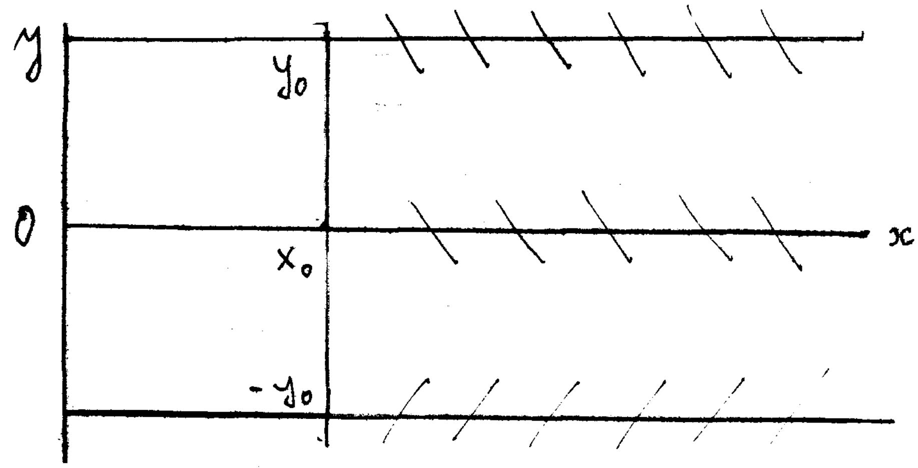
Uzmimo kao $Z$ segment $[M_1, M_2]$ (vidi sl. 1). $Z \cap S$ sastavljen je od dve tačke $M_1$ i $M_2$. $M_1$ je retrakt poluprave $y=0$ $(x \ge x_0)$, $M_2$ poluprave $y=-y_0$ $(x \ge x_0)$, dakle $Z \cap S$ jeste retrakt od $S$. $Z \cap S$ nije retrakt od $Z$, jer se segment ne može neprekidno transformisati u svoje krajeve. Postoji, znači, bar jedna tačka $P$ na $(M_1, M_2)$ takva da odgovarajući integral ostaje u $\omega$ sa $x \to +\infty$. Takvu tačku $P'$ naći ćemo i na analognom segmentu $[M_1', M_2']$, ali se dobijeni asimptotski ograničeni integral može poklapati sa onim iz $P$. Možemo dakle tvrditi da postoji bar jedno negativno asimptotski ograničeno rešenje, što je zaključak više u odnosu na onaj iz teoreme $B_1$. Zaključak je izveden na osnovu teoreme $A_7$.

U slučaju teoreme $B_2$ uzimajući u obzir prva dva od uslova (10), dobijamo situaciju sa slika $2_a$ i $2_b$, kao i zaključak da su sva rešenja asimptotski ograničena.

Teoreme $B_3$ i $B_5$ svode se na $B_1$ i $B_2$ ako se vodi računa samo o egzistenciji asimptotski ograničenih rešenja, jer i tu za dovoljno velike $y$ znak desne strane jednačine biva određen članom $\varphi(x)y^{2k}$ ili $\varphi(x)y^{2k+1}$. U navedenim slučajevima gde su sva rešenja bila ograničena, skup tačaka striktnog izlaza bio je prazan. Uzmimo ma koju tačku iz unutrešnjosti $\omega$ kao $Z$. $Z \cap S$ je prazan skup, dakle jeste retrakt od $S$ kao praznog skupa. $Z \cap S$ nije retrakt od $Z$, koji se kao jednočlan skup ne može transformisati neprekidno u prazan skup. Tački dakle $Z$ pripada jedan ograničeni integral, a $Z$ je proizvoljna tačka. Ovo je interpretacija, na jeziku metode retrakcije, činjenica za koje smo naglasili da ih i inače nije teško dokazati.




Sl. 2a




Sl. 2b

Pređimo sada na teoremu $B_4$. Sa gledišta metode retrakcije ona je ekvivalentna teoremi $B_1$, jer teženje negativnoj beskonačnosti funkcije $\varphi(x)$ utiče da znak člana $\varphi(x)y^{2k}$ preovlađa još brže. U tekstu teoreme B navodi se, međutim, da sva ograničena rešenja teže nuli. Ovu ćemo okolnost sada razjasniti detaljnije. Posmatrajmo "gornju" jednačinu (u smislu Čapliginove teoreme)

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + M$$

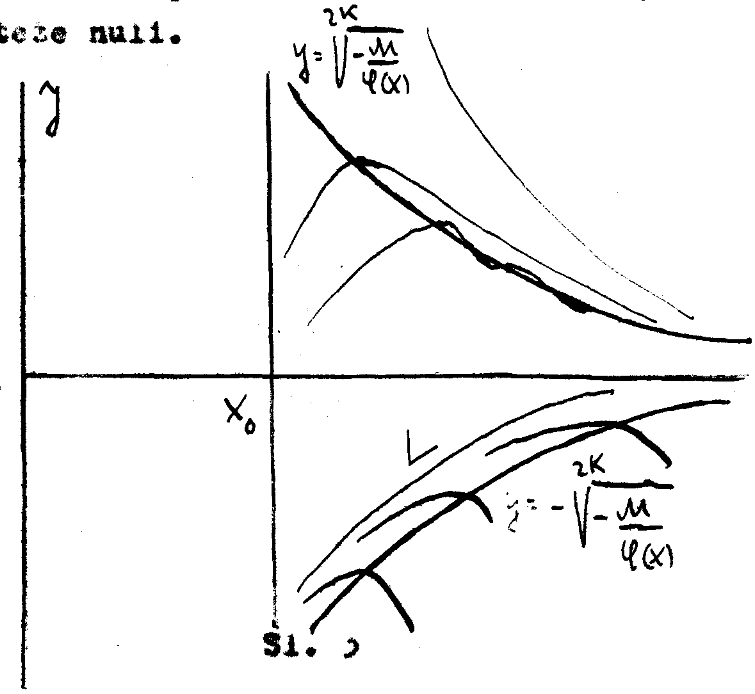
Rezultat kvalitativne integracije ove jednačine dat je na sl. 3. Dobijena je jedna vrsta krivoliniske "cevi" sastavljene od dveju krivih

$$y = \pm \sqrt[2k]{-\frac{M}{\varphi(x)}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

koja omogućava, uzimajući u obzir ostale hipoteze, zaključak da ova ograničena rešenja teže nuli. Sa $L$ smo označili ograničeno negativno rešenje čija je egzistencija obezbedjena (metoda retrakcije). Na isti se način tretira i "donja" jednačina

$$y' = \varphi(x) y^{2k} + N$$

pa se na kraju izvlači zaključak da i "uokvirena" ograničena rešenja posmatrane jednačine teže nuli.




Sl. 3

Iz svega ovoga se vidi da specijalni oblik "cevi" ponekad omogućava da se izvedu i drugi zaključci o rešenjima, sem prostog zaključka o asimptotskoj ograničenosti. Ovo postaje očigledno kad se prouči sva brojna literatura vezana za metodu retrakcije, nastala posle osnovnih radova T. Ważewskog. Primena metode retrakcije veoma je plodna i raznovrsna uopšte u kvalitativnoj integraciji diferencijalnih jednačina. Ostale radove na ovom mestu nećemo prikazivati, a u spisku literature na kraju ovoga rada neki od njih navedeni su pod brojevima [9], [13], [14], [26], [33], [34].

Težnja nuli rešenja koja se spominju u $B_3$ i $B_5$ drugog je porekla. Prema metodi retrakcije, član $\varphi(x) y^n$ dozvoljava da se konstatuje egzistencija asimptotski ograničenih rešenja, ali član $\psi(x, y)$ igra odlučujuću ulogu za rešenja koja teže nuli (blagodareći, kao što će se videti, uslovu da $y = 0$ zadovoljava jednačine o kojima je reč.

Kada se ovo uzme u obzir, mogu se dobiti zaključci u odnosu na rešenja koja teže nuli i za opštije jednačine, polazeći od jedne metode, po ideji T. Važevskog, u koju je uklopljena i Čapliginova.

Posmatrajmo, na pr. jednačinu

$$(16) \qquad y' = \Psi(x,y) + \eta(x,y)$$

(jedinstvenost zastupljena u celoj ravni $XOY$ ), uz pretpostavke

$$(17) \qquad -\mathcal{N}y < \Psi(x,y) \quad \text{za } y<0;\ \Psi(x,0)=0$$

$$|\eta(x,y)| < (\mathcal{N}-\eta)|y| \quad \text{za } y\neq 0,\ |y|\leq \delta_1;\ \eta(x,0)=0$$

gde $0<\eta<\mathcal{N}$ .

Za $y<0$ , imaćemo, ako je $|y|\leq\delta_1$

$$y' > -\mathcal{N}y - (\mathcal{N}-\eta)|y|$$

tj.

$$y' > -\mathcal{N}y + (\mathcal{N}-\eta)y = -\eta y$$

Sada se može primeniti Čapliginova teorema gde ulogu "donje" jednačine igra jednačina

$$y' = -\eta y$$

čiji je opšti integral, za $y<0$ , oblika

$$y = Ce^{-\eta x} \quad (C<0)$$

Pošto sve ove krive teže nuli kad $x\to+\infty$ , biće isti slučaj sa rešenjima posmatrane jednačine, koja se nalaze iznad ovih krivih, ne mogući da preseku osu $y=0$ koja je, sa svoje strane, rešenje date jednačine za koju je pretpostavljena jedinstvenost rešenja. Sada se može formulisati teorema

## TEOREMA $C_1$

Jednačina (16) , pod hipotezama (17) ima jednu klasu negativnih asimptotskih rešenja koja teže nuli.

## PRIMER

Jednačina

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x,y) \qquad (k=1,2,\dots)$$

(jedinstvenost zastupljena u celoj ravni $XOY$ ), kod koje

$$\psi(x,y) > -\mathcal{N}y \ \text{ za } y<0\ ;\ \psi(x,0)=0,\ |\varphi(x)| < K$$

ima jednu klasu negativnih asimptotskih rešenja koja teže nuli (ovaj primer generališe $B_3$ ).

Pošto su pretpostavke o $\psi(x,y)$ isto kao u $C_1$ , dovoljno je pokazati da $\varphi(x)y^{2K} = \mathcal{M}(x,y)$ zadovoljava odgovarajući deo uslova (17) . Zaista, $\mathcal{M}(x,0)=0$ . Posmatrajmo izraz $\varphi(x)y^{2K}$ za

$$|y| \leq \sqrt[2K-1]{\frac{\mathcal{N}-\eta}{K}} = \delta_1$$

gde je $\eta$ neki broj $0<\eta<\mathcal{N}$. Imaćemo

$$|\varphi(x)y^{2K}| = |\varphi(x)|\,|y^{2K-1}|\,|y| < K\left(\sqrt[2K-1]{\frac{\mathcal{N}-\eta}{K}}\right)^{2K-1}|y| = (\mathcal{N}-\eta)|y|.$$

## §7. MODIFIKACIJE I UOPŠTENJA NEKIH STAVOVA TADIJE PEJOVIĆA

### §7.1. UVODNI DEO

Pre nego što se pređe na modifikacije i uopštenja nekih stavova T. Pejovića, način postupanja biće objašnjen na drugim primerima, inspirisanim jednim stavom izloženim u delu [8] E. Kamkea, a naročito radom [26] K. Tatarkijeviča. Dokazaćemo najpre sledeći stav, deo jedne teoreme navedene u delu [8] E. Kamkea.

Ako je data jednačina

$$y' = g(x)y + f(x,y)$$

gde su $f(x,y), g(x)$ neprekidne, $g(x) > 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x,0)}{g(x)} = 0$

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq \theta\, g(x)\,|y_2 - y_1|\ ;\ 0<\theta<1$$

ona ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje. Da bi se mogla primeniti metoda retrakcije, potrebno je pokazati da je $|f(x,y)| < g(x)|y|$ za $|y| \geq |y_0|$.

To omogućuje da se dobije "cev" slična onoj sa sl. 1 za $y<0$ , odakle dobijeni zaključak neposredno sledi.

Specijalni Lipšicov uslov dat u pretpostavkama daje nam

$$|f(x,y)-f(x,0)|\le \theta g(x)|y|$$

Pošto je, međutim,

$$|f(x,y)|-|f(x,0)|\le |f(x,y)-f(x,0)|$$

to je

$$|f(x,y)|\le |f(x,0)|+\theta g(x)|y|$$

odnosno

$$|f(x,y)|\le g(x)\left[\theta|y|+\left|\frac{f(x,0)}{g(x)}\right|\right].$$

Da li je tačna nejednakost

$$\theta|y|+\left|\frac{f(x,0)}{g(x)}\right|<|y|\ ?$$

Zaista, posle izvesnog $x$,

$$\theta|y|+\left|\frac{f(x,0)}{g(x)}\right|<\theta|y|+\varepsilon$$

gde je $\varepsilon$ neki pozitivan broj. Da bi bilo

$$\theta|y|+\varepsilon<|y|$$

dovoljno je izabrati

$$|y|>\frac{\varepsilon}{1-\theta}>0 .$$

što je uvek moguće.

K. Tatarkijević u svome radu [26] daje nekoliko primera asimptotskog toka rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda. On uvodi pojam funkcije poređenja $\varphi(\varepsilon,t)$ , a zatim funkcije jakog poređenja posmatrajući, uz pomoć ove, asimptotsku ograničenost izraza $x(t)/e^{-\varphi(\varepsilon,t)}$ .

U cilju davanja primera, za metodu retrakcije, bez uvođenja funkcije poređenja, pod pretpostavkama cas užim, čas nešto modifikovanim i neuporedivim u odnosu na Tatarkijevićeve izložiću ovde nekoliko stavova koji se odnose direktno na egzistenciju asimptotski ograničenih rešenja, a po negde i na njihovo težnje nuli.

## TEOREMA $C_2$

Data je jednačina

$$\dot{x}=a(t)x+d(x,t)+f(t)$$

gde su sve date funkcije neprekidne u celoj ravni XOy i

$$|f(t)|<M,\ d(0,t)=0;\ |d(x,t)-d(\bar{x},t)|\le \rho(t)|x-\bar{x}|;\ \lim_{t\to+\infty}\rho(t)=0;$$

$$\lim_{t\to+\infty}a(t)=\bar{a}<0;$$

tada su sva rešenja date jednačine asimptotski ograničena.

Stavimo u Lipšicov uslov $\bar{x}=0$ . Dobićemo $|d(x,t)| \leq \rho(t)|x|$ za svako $x$ i napr. $t \geq t_0 \geq 0$. Treba sada pokazati da postoji takvo jedno $x_0$ da je $|a(t)x| > |d(x,t)+f(t)|$ za $|x| \geq |x_0|$

Ovo će omogućiti formiranje "cevi" sa sl.2, što i pokazuje da su sva rešenja asimptotski ograničena.

Zaista, $|d(x,t)+f(t)| \leq |d(x,t)| + |f(t)| < \rho(t)|x| + M$

Da bi bilo za svako $t \geq t_0$, $M + \rho(t)|x_0| < |a(t)||x_0|$,

treba da je
$$|x_0| > \frac{M}{|a(t)| - \rho(t)}$$

Uvek se može izabrati $t_0$ tako da je $|a(t)| > \rho(t)$ za $t > t_0$. Može se dakle zaključiti da za $|x| \geq |x_0|$ član $a(t)x$ daje znak desnoj strani jednačine.

**TEOREMA $C_3$**

Pri svim istim uslovima iz teoreme $C_2$, samo uz $\bar{a} > 0$, jednačina ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

U ovom slučaju dobija se "cev" sa sl.1( $y<0$ ).

**TEOREMA $C_4$**

Sve su hipoteze iste kao u $C_2$, uz sledeće izmene $\bar{a}=0$, $a(t)$ ne menja znak za $t \geq t^* \geq t_0 \geq 0$ i još su ispunjeni uslovi
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\rho(t)}{|a(t)|} = \lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{|a(t)|} = 0$$

Tada, ako za $t \geq t^*$, $a(t)<0$, sva su rešenja asimptotski ograničena, a ako za $t \geq t^*$, $a(t)>0$, postoji bar jedno ograničeno rešenje.

Ovde je takodje bitno pokazati da član $a(t)x$ posle izvesnog $|x|$ daje znak. Imamo
$$|d(x,t)+f(t)| \leq |d(x,t)| + |f(t)| \leq \rho(t)|x| + |f(t)|.$$

Kada će biti
$$|f(t)| + \rho(t)|x| < |a(t)||x| ?$$

Biće za
$$|x| > \frac{|f(t)|}{|a(t)| - \rho(t)} = \frac{\left|\frac{f(t)}{a(t)}\right|}{1 - \frac{\rho(t)}{|a(t)|}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

**Teorema $C_6$.**

Stavovi $C_2, C_3, C_4, C_5$, izuzimajući tvrdjenje o teženju svih rešenja nuli (stav $C_5$), važe i kad umesto $x-a$ u izrazu $a(t)x$ stavimo $a(t)x^{2n+1}$ $(n=0,1,\ldots)$

Zaista, u svim ovim stavovima bilo je bitno da član $a(t)x$ za dovoljno veliko $x$ "preovlada" po znaku nad ostalim članovima desne strane jednačine. Član pak $a(t)x^{2n+1}$ raste još brže sa rastenjem $x-a$ .

Primedba. Na poledini ove strane izložena je teorema $C_5$ koja sledije iza teoreme $C_4$, a pre $C_6$, a koja je omaškom ispala pri kucanju.

## §7.2. MODIFIKACIJE I UOPŠTENJA NEKIH STAVOVA T. PEJOVIĆA

Profesor Pejović je proučavao (videti [21]-[24]), koristeći metodu uzastopnih aproksimacija, jednačinu (α) $y' = a(x)y + f(x) + \varphi(x,y)$

gde su sve funkcije u pitanju neprekidne u oblasti $x \geq x_0 > 0$, $|y| < A$

i $a(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \kappa$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b$, $\varphi(x,0) = 0$,

(β) $|\varphi(x,Y) - \varphi(x,y)| \leq L|Y-y|$ za $x \geq x_0 > 0$, $|y| < A$, $L < |\kappa|$, $\frac{M|\kappa|}{|\kappa|-L} \leq A$

gde je $M$ onaj broj takav da je $|y| < M$ za ograničeno rešenje jednačine $\frac{dy_0}{dx} = a(x)y_0 + f(x)$

koja daje prvu aproksimaciju.

**TEOREMA A** $_{10}$

Pod pretpostavkama (β) jednačina (α) ima, u slučaju $\kappa > 0$ jedno asimptotski ograničeno rešenje, a u slučaju $\kappa < 0$ sva su rešenja asimptotski ograničena.

Izostavimo uslove $|y| < A$, $\frac{M|\kappa|}{|\kappa|-L} \leq A$.

Pošto $f(x)$ teži ka $b \neq \infty$, postoji očigledno neki broj $N$ takav da je $|f(x)| \leq N$ za svako $x$. Zatim je

$|\varphi(x,y)| \leq L|y|$

dakle $|\varphi(x,y) + f(x)| \leq |\varphi(x,y)| + |f(x)| \leq L|y| + N$

Biće $L|y| + N < |a(x)||y|$,

za $|y| > \frac{N}{|a(x)|-L}$.

$|a(x)| - L$ je, posle izvesnog $x$, pozitivno, zbog $L < |\kappa|$, tj. posle izvesnog $|y_0|$, član $a(x)y$ daje znak desnoj strani jednačine, što u ovom slučaju omogućava primenu metode retrakcije.

Pretpostavimo sada, mi takodje, da hipoteze važe za $|y| < A$ i da je ispunjeno još

$$N + LA < |\kappa| A$$

(ovaj uslov, koji se može napisati u obliku $\frac{N}{|\kappa|-L} < A$ slične je strukture kao odgovarajući kod T. Pejovića).

Pod tim uslovom, može se naći jedan $|y_0| < A$ tako da je $N + L|y_0| < |\kappa||y_0|$

i najzad $|\kappa||y_0| > N + L|y_0| > |f(x)| + |\varphi(x,y_0)| > |f(x) + \varphi(x,y_0)|$

pa se metoda retrakcije može primeniti i u ovom slučaju.

Posmatrajmo sada jedan drugi, opštiji rezultat T. Pejovića, izložen u njegovom radu [24].

**TEOREMA $A_{11}$**

JEDnačina $$y' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,y + f(x) + \psi(x,y)$$

ima, za $x \geq x_0 > 0$, $|y| < B$

jedno asimptotski ograničeno rešenje, pod uslovima $\int_x^{\infty} f(t)\,dt = o(1)_{x\to+\infty}$, $\varphi(x) \to +\infty_{x\to+\infty}$

( $f(x)$ integrabilna za $x \geq x_0 > 0$ , $\varphi(x)$ pozitivna i monotona,

$\psi(x,0)=0$; $|\psi(x,Y)-\psi(x,y)| \leq \lambda(x)|Y-y|$; $\int_x^{\infty}\lambda(t)\,dt = o(1)$, za $x\to+\infty$, $\frac{M}{1-\varepsilon} < B$, $\varepsilon<1$, $(|y_0| \leq M)$

$\psi(x,y)$ definisana i neprekidna, $\lambda(x)$ pozitivna i integrabilna.

Napomenimo da je, pod datim uslovima, funkcija $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ pozitivna. Ako ona teži, za $x\to+\infty$ ka pozitivnoj konstanti ili ka $+\infty$ , dovoljno je staviti $\lambda(x)\to 0$ (bez ikakve pretpostavke o konvergenciji integrala $\int_x^{\infty}\lambda(t)\,dt$ i da je $|f(x)| \leq N$ , da bi se dobio isti rezultat, uz pomoć metode retrakcije.

Ako $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \to 0$ može se, umesto pretpostavke T.Pejovića o konvergenciji integrala staviti hipoteza

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = +0$$

Pod ovom modifikacijom hipoteza, ne menjajući ostale, može se primeniti metoda retrakcije. U slučaju $\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \varphi \neq 0, \infty$

treba još dodati uslov da je, posle izvesnog $x=a$ $$\frac{N}{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \lambda(x)} < B$$

što očigledno nije potrebno ako je $B = +\infty$ .

Može se formulisati

**TEOREMA $C_7$**

Neka je data jednačina $$y' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,y + f(x) + \psi(x,y)$$

(jedinstvenost ispunjena u celoj ravni $XOY$), gde

1) $\varphi(x)$ je funkcija pozitivna i monotona za $x \geq x_0 > 0$ i $\varphi(x) \to +\infty_{x\to+\infty}$

2) $\psi(x,y)$ je definisana i neprekidna u ravni $XOY$ i $\psi(x,0)=0$

$|\psi(x,Y)-\psi(x,y)| \leq \lambda(x)|Y-y|$

gde je $\lambda(x)$ neprekidna funkcija i $\lambda(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Ako je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \varphi > 0$ i $|f(x)| \leq M$

postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje. Isti je slučaj ako je

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = +0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda(x)}{\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} \neq 0$$

Dokazi ovih razmatranja u stvari su u principu već dati u ranijim paragrafima.

**TEOREMA $C_8$**

Teoreme $A_{10}$, $A_{11}$, i $C_9$ ostaju tačne kada se umesto $a(x)y$ i $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y$ u desnim stranama odgovarajućih jednačina stavi svuda respektivno

$$a(x)y^{2n+1}, \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y^{2n+1} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$

Razlog je isti kao u obrazloženju teoreme $C_6$.

## § 8. UOPŠTENJA MOJIH RANIJIH ISTRAŽIVANJA

**TEOREMA $C_9$**

Svi rezultati teorema $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ koji se odnose samo na egzistenciju asimptotski ograničenih rešenja ostaju tačni i bez Lipšicovog uslova odn. bez pretpostavke o jedinstvenosti rešenja posmatrane jednačine. Jedino se u slučaju teorema $B_3$, $B_5$ mora pretpostaviti bar jedinstvenost rešenja $y=0$.

Isti se zaključak prenosi i na ostale analogne iz rezultata mog rada saopštenog na III kongresu. Stav je očigledan s obzirom na teoremu $A_2$.

Bez dokaza, koji su vrlo jednostavni dajem sledeća uopštenja stavova $B_i$ (ukoliko se radi samo o egzistenciji asimptotski ograničenih rešenja).

**TEOREMA $C_{10}$**

Jednačina $$y' = \varphi(x)y^{2K} + \psi(x,y) \qquad K=1,2,\dots$$

(jedinstvenost zastupljena u celoj ravni $XOY$), gde $\psi(x,0)>0$, $|\psi(x,y)| \le M + P|y|^{2K-\varepsilon}$ $0<\varepsilon<2K$, $M$ i $P$ pozitivne konstante, $\varphi(x) \le c < 0$ ima asimptotski ograničena sva pozitivna, sva rešenja koja prolaze kroz tačke ose $y=0$ i bar jedno negativno rešenje.

**TEOREMA $C_{11}$**

Jednačina $$y' = \varphi(x)y^{2K+1} + \psi(x,y)$$

(jedinstvenost zastupljena u celoj ravni $XOY$), gde $\varphi(x) \le c < 0$; $|\psi(x,y)| \le A + B|y|^{2K+1-\varepsilon}$ ima sva rešenja asimptotski ograničena.

Dalja uopštenja su zasnovana na činjenici, do sada više puta podvučenoj, da u krajnjoj liniji znak desne strane jednačine odlučuje u izvesnom smislu o egzistenciji asimptotski ograničenih rešenja. O tome na svoj način govore teoreme koje slede (uopštenja teorema $C_{10}$ i $C_{11}$).

U svakom će posebnom slučaju biti potrebno da se utvrdi da li su ispunjeni uslovi teoreme u vezi sa znakom desne strane, što uvek ne mora biti lako. Zato imaju smisla i teoreme uže od ovih koje slede.

## TEOREMA $C_{12}$

Posmatrajmo jednačinu

$$y' = \psi(x,y)$$

(jedinstvenost ispunjena u celoj ravni $XOY$ ).
Pretpostavimo da postoji niz brojeva $r_n > 0$, $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ da je

$$\operatorname{sign} y\,\psi(x,y) = \text{const.}$$

za $|y| = r_n$ ( sign. znači prosto "znak" i nema veze sa funkcijom $\operatorname{sign} f(x)$ ). Tada jednačina ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje. Specijalno, za $y\psi < 0$ sva su rešenja ograničena. U slučaju $y\psi > 0$ dovoljno je da uslov $\operatorname{sign} y\psi = \text{const.}$ bude ispunjen za jedno $n$ .

## TEOREMA $C_{13}$

Ako je, za $|y| = r_n$

$$\operatorname{sign} \psi(x,y) = \text{const.}$$

a $\operatorname{sign}\psi(x,0)$ suprotan, ~~postoji~~, postoji jedna klasa ograničenih rešenja. Specijalno, ako je $\psi(x,0) < 0$ sva negativna rešenja i ona koja prolaze kroz tačke ose $y = 0$ su ograničena a ima bar jedno pozitivno asimptotski ograničeno rešenje. Ako je $\psi(x,0) > 0$ sva pozitivna rešenja i ona koja prolaze kroz tačke ose $y = 0$ asimptotski su ograničena a ima i bar jedno pozitivno asimptotski ograničeno rešenje.

* Ceviš na koje se svode specijalni slučajevi teorema $C_{12}$ i $C_{13}$ osnovnog sa tipa datog na slikama 1 i 2.

## PRIMERI

U svojstvu primera posmatrajmo jednačinu $y' = \phi(y)\varphi(x) + \psi(x,y)$; $|\psi(x,y)| < M$ gde je jedinstvenost ispunjena u celoj ravni $XOY$ . Ako je

a) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \phi(y) = \pm\infty$, $\varphi(x) \geq c > 0$

postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

b) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \phi(y) = \pm\infty$, $\varphi(x) \leq c < 0$

sva su rešenja asimptotski ograničena.

c) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \phi(y) = +\infty$, $\varphi(x) \geq c > 0$, $\psi(x,0) < 0$

Asimptotska rešenja su, sva negativna, ona kroz tačke ose $y = 0$ i bar jedno pozitivno.

d) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \phi(y) = +\infty$, $\varphi(x) \leq c < 0$, $\psi(x,0) > 0$

Asimptotska rešenja; sva pozitivna, ona koja prolaze kroz tačke ose $y = 0$ i bar jedno negativno-

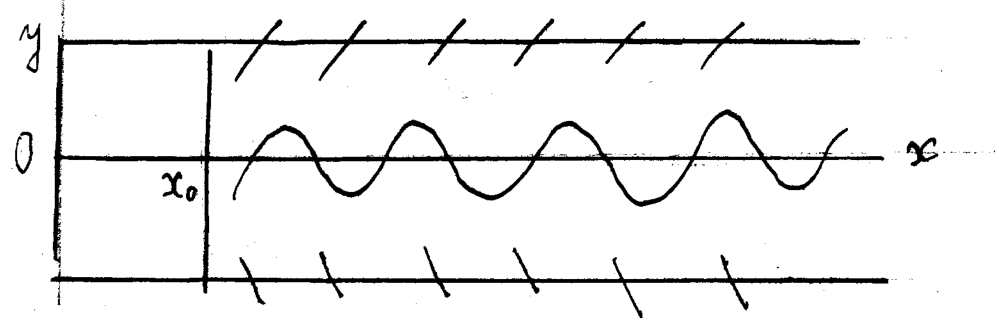
e) $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \phi(y) = -\infty$, $\varphi(x) \geq c > 0$, $\psi(x,0) > 0$

Isto kao u slučaju d) (slike 7 i 8 su iste).

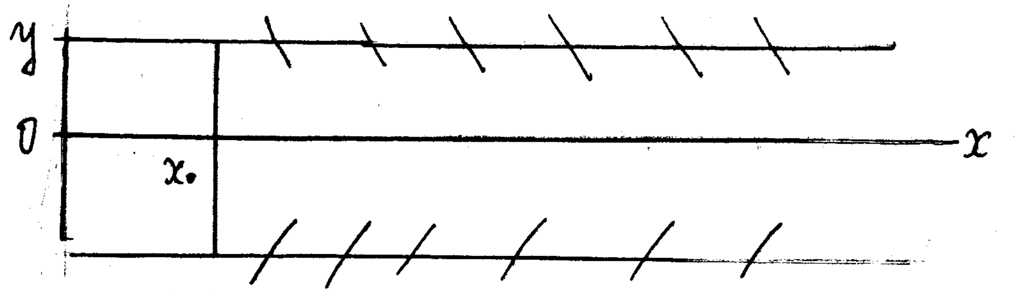
$$\lim_{y\to\pm\infty}\phi(y)=-\infty,\quad \overset{S2}{\varphi(x)}\le C<0,\ \varphi(x,0)<0$$

f) Slučaj isti kao c) ,(slike 9 i 6 sun iste).

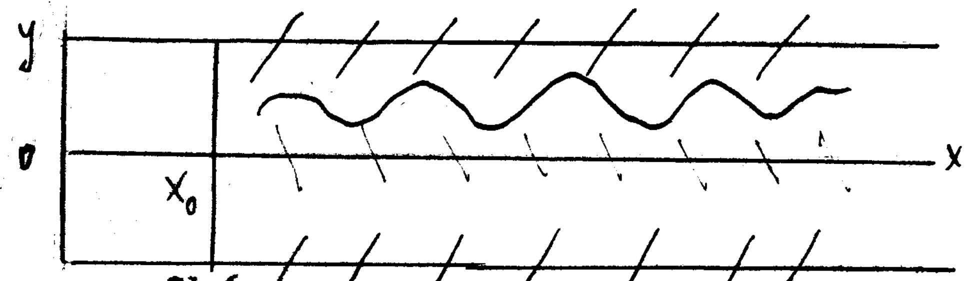
Slučajevi a),B),c),d),e),f) pretstavljeni su na slikama4,5,6,7,8,9.



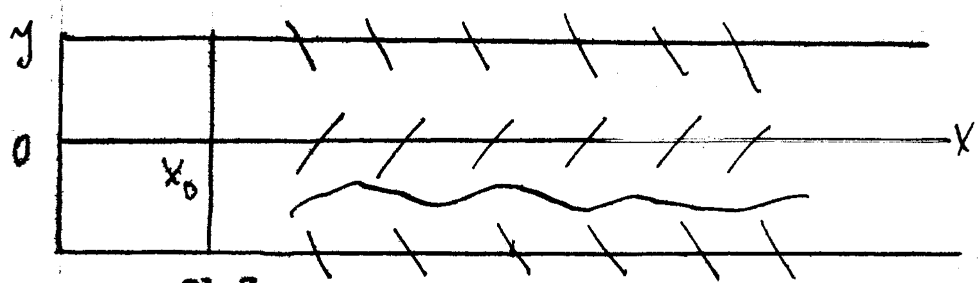

Sl.4



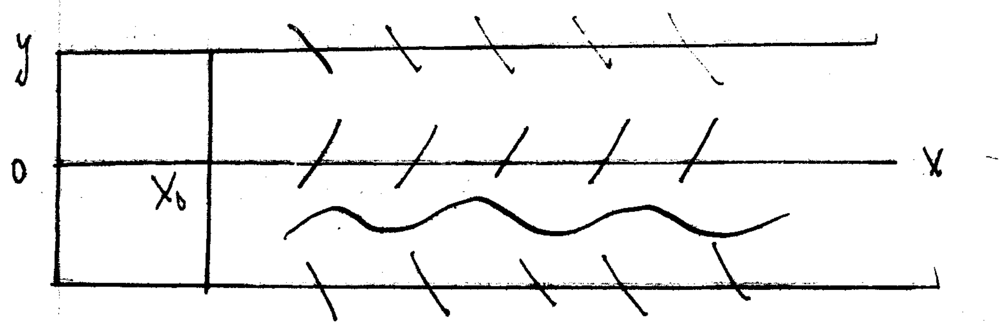

sl.5



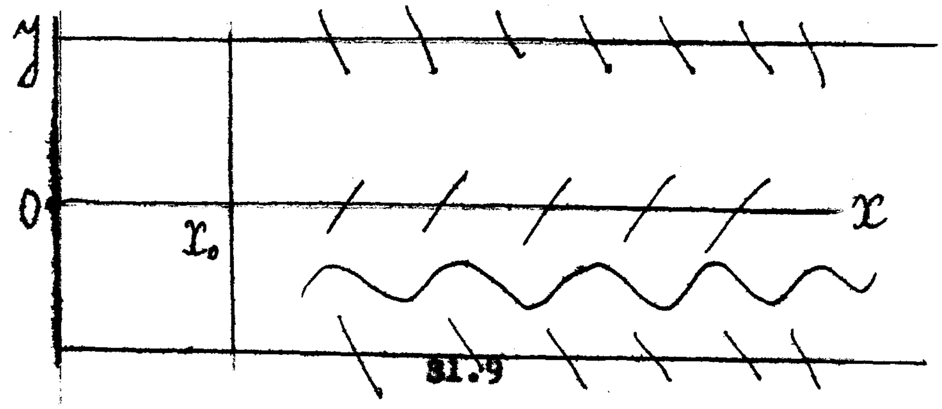

Sl.6




Sl.7




sl.8




Sl.9

## §9. UOPŠTENJE NA SLUČAJ SISTEMA OD DVE JEDNAČINE

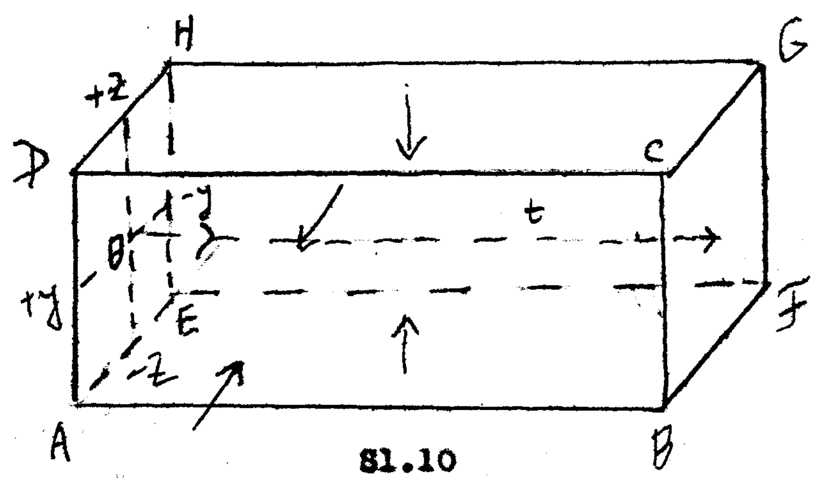
Uočimo sistem od dve diferencijalne jednačine (jedinstvenost rešenja ispunjena u celom prostoru $OXYZ$ ).

$$(18)\qquad \begin{aligned} y' &= \varphi(x)y^{2k+1} + \sigma(x,y,z) \\ z' &= \psi(x)z^{2p+1} + \tau(x,y,z) \end{aligned} \qquad k,p=0,1,2,\dots,$$

Da bi članovi $\varphi(x)y^{2k+1}$ i $\psi(x)z^{2p+1}$ davali posle izvesnog $|y|,|z|$ znak odgovarajućim desnim članovima jednačina sistema, treba dodati neke uslove npr.

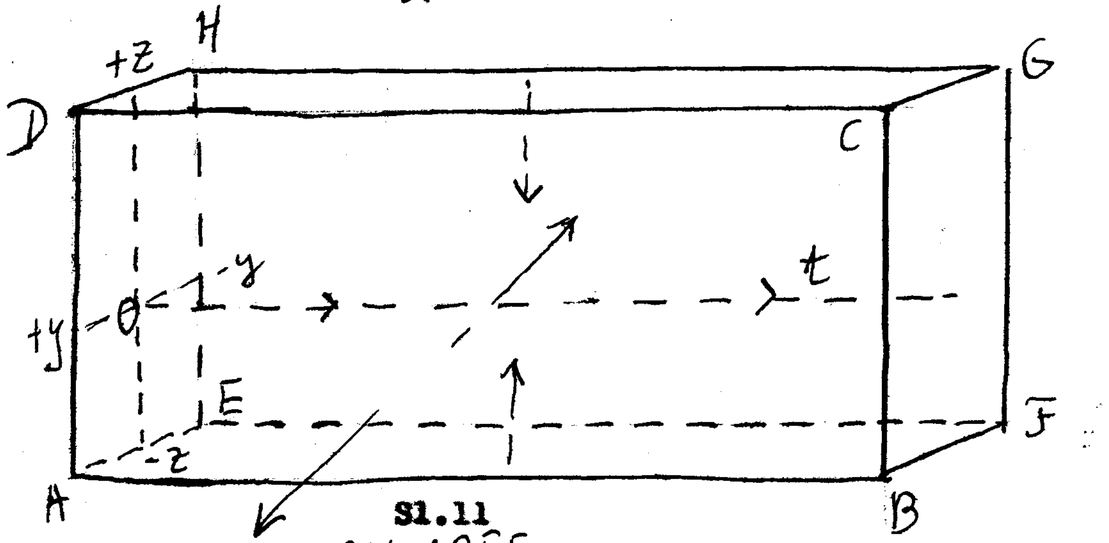
$$(19)\qquad \begin{aligned} |\sigma(x,y,z)| &< A + B|y|^{2k+1-\varepsilon}, & 0<\varepsilon<1 \\ |\tau(x,y,z)| &< A_1 + B_1|z|^{2p+1-\varepsilon_1}, & 0<\varepsilon_1<1 \end{aligned}$$

Umesto cevi oblika $x \geq x_0,\ y_1 \leq y \leq y_2$ , slučaj jedne jednačine, ovde dobijamo cevi u obliku paralelepipeda. Slike 10, 11, 12, 13 pretstavljaju slučajeve kada su, 10) sva rešenja asimptotski ograničena $(\infty^2)$, 11 i 12) postoji jedna klasa asimptotskih rešenja $(\infty^1)$, 13) postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje $(\infty^0)$. Simboli $\infty^2, \infty^1, \infty^0$ označavaju skupove rešenja koja zavise od $2, 1, 0$ parametara. Strana $BFGC$ nalazi se u beskonačnosti.



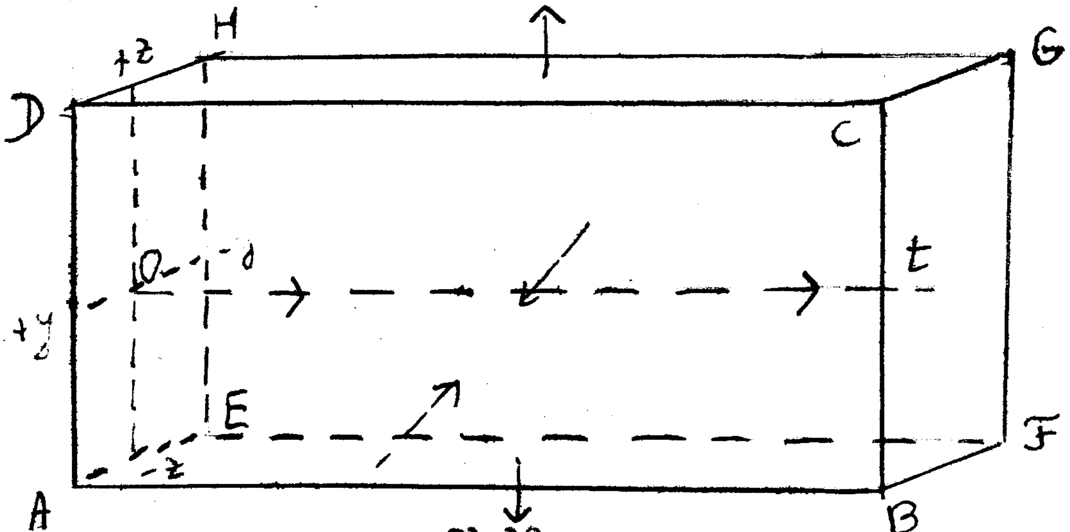

Sl.10

Ulaz: sve strane osim $BFGC$
Izlaz: $BFGC$



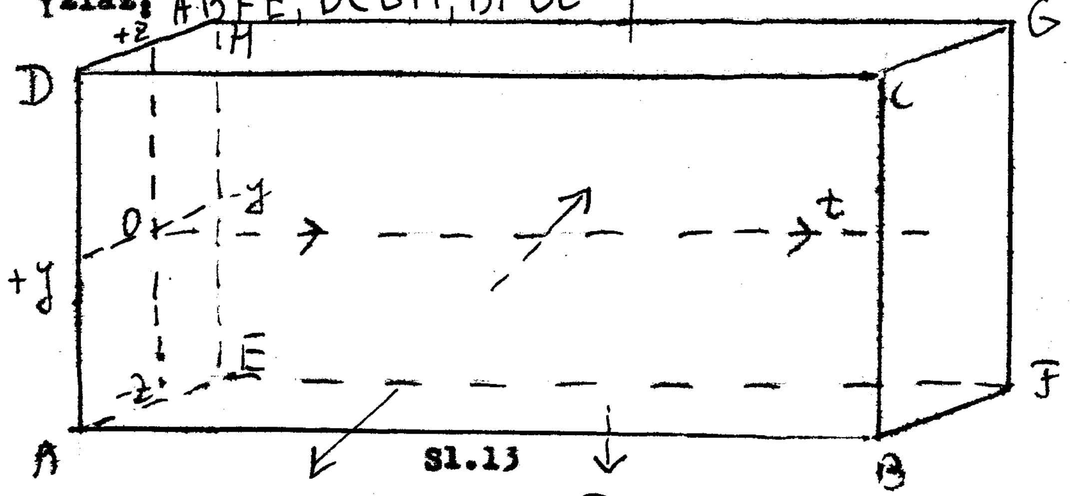

Sl.11

Ulaz: AEHD, DCGH, ABFE
Izlaz: ABCD, EFGH, BFGC




Sl.12

Ulaz: ABCD, EFGH, AEHD
Izlaz: ABFE, DCGH, BFGC




Sl.13

Izlaz sve strane izusev AEHD

Korišteći metodu retrakcije može se dokazati

**TEOREMA C,4**

Pod pretpostavkama (19) i ako $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zadovoljavaju jedan od uslova $a)\ \varphi(x) \leq c < 0,\quad \psi(x) \leq c_1 < 0$

$b)\ \varphi(x) \leq c < 0,\quad \psi(x) \geq c_1 > 0$

$c)\ \varphi(x) \geq c > 0,\quad \psi(x) \leq c_1 < 0$

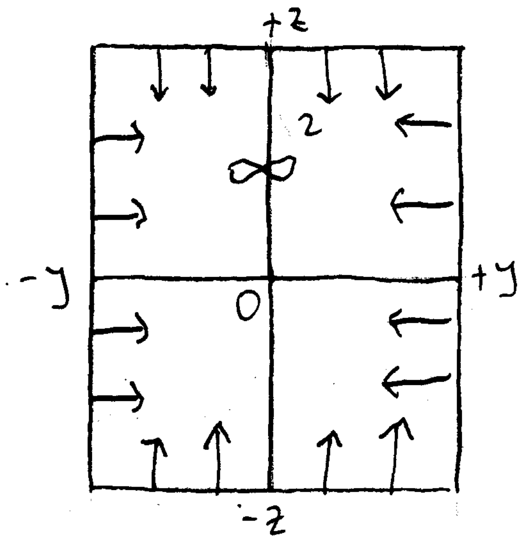
$d)\ \varphi(x) \geq c > 0,\quad \psi(x) \geq c_1 > 0$

sistem (18) ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

Preciznije, u slučaju a) sva su rešenja asimptotski ograničena, u slučajevima b) i c) postoji jedna klasa asimptotski ograničenih rešenja, u slučaju d) ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

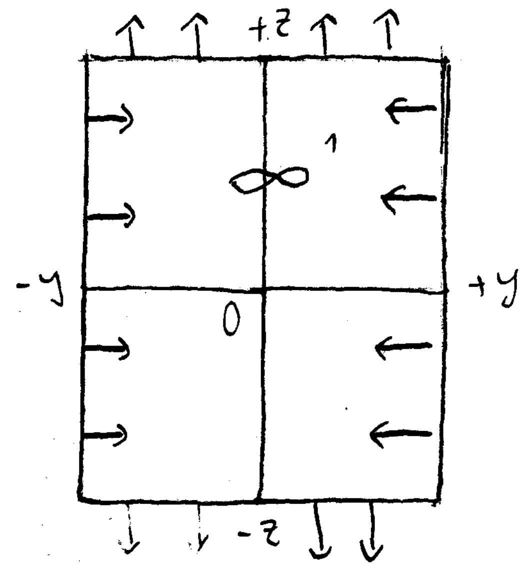
Slike 14,15,16,17 pretstavljaju preseke odgovarajućih paralelopipeda ravnima za slučajeve a),b),c),d).

a)



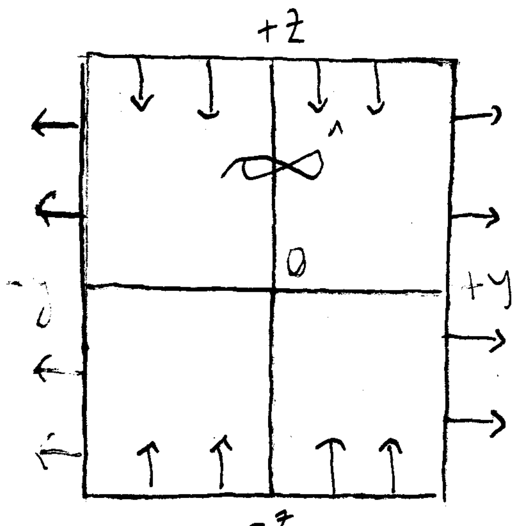

Sl.14

b)



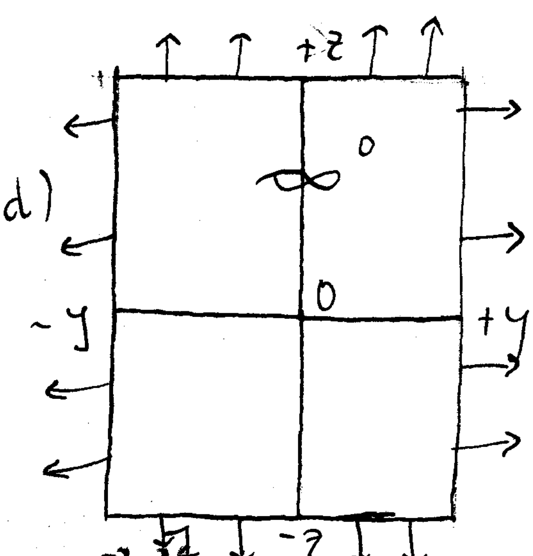

Sl.15

c)




Sl.16

d)




Sl.17

U slučaju sa ~~skra~~ slike 14 sva rešenja ulaze u "cev". Slučajevi sa sl.15 i 16 principijelno su ekvivalentni primeru iz § 5.6. U slučaju sa sl.17 kao skup $Z$ uzimamo jedan presečni pravougaonik, baš kao na samoj slici. $Z \cap S$ (tj. strane pravougaonika) nije retrakt od $Z$ (homeomorfija sa krugom), a jeste retrakt od $S$ (sve odgovarajuće "izlazne" strane paralelepipeda retrakcijom prelaze u odgovarajuće strane pravougaonika). Postoji $P \in Z$ kojoj pripada jedno ograničeno rešenje. Za svaki presek postoji po takva tačka $P$, ali se, pošto $t$ uzimamo beskonačno, sva pripadajuća rešenja mogu poklapati, pa zato se sme garantovati samo egzistencija bar jednog asimptotskog rešenja.

## TEOREMA $C_5$.

Dat je sistem
$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \delta(x,y,z) \qquad k,p = 1,2,\dots$$
$$z' = \psi(x)z^{2p} + \tau(x,y,z)$$
(jedinstvenost je zastupljena u celom prostoru $OXYZ$).

Ako je
$$|\delta(x,y,z)| < A + B|y|^{2k-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 2k$$
$$|\tau(x,y,z)| < A_1 + B_1|z|^{2p-\varepsilon_1}, \quad 0 < \varepsilon_1 < 2p$$

i ako je ispunjen jedan od uslova

a) $\varphi(x) \le c < 0,\ \psi(x) \le c_1 < 0,\ \delta(x,0,z) > 0,\ \tau(x,y,0) > 0$

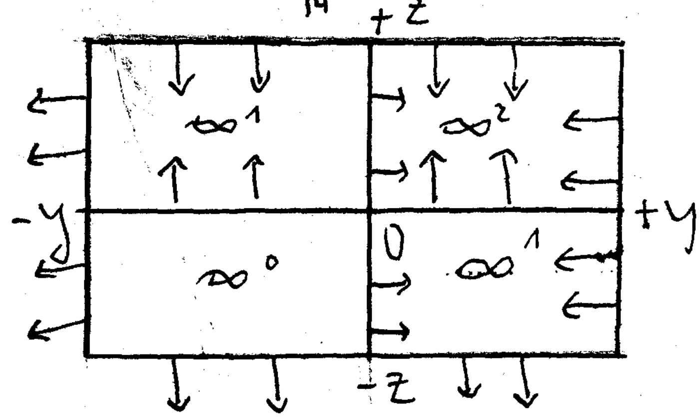
b') $\varphi(x) \le c < 0,\ \psi(x) \ge c_1 > 0,\ \delta(x,0,z) > 0,\ \tau(x,y,0) < 0$

c') $\varphi(x) \ge c > 0,\ \psi(x) \le c_1 < 0,\ \delta(x,0,z) < 0,\ \tau(x,y,0) > 0$

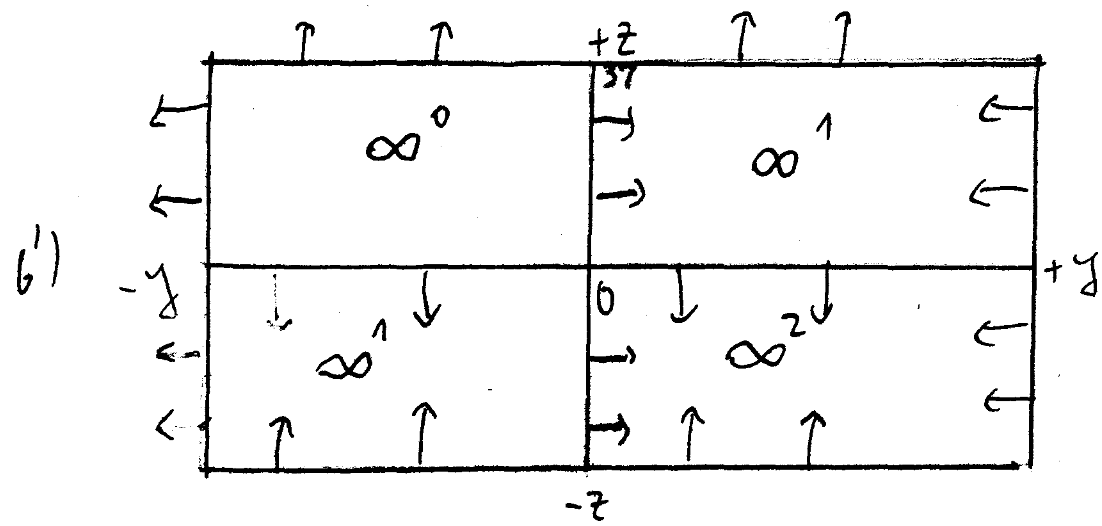
d') $\varphi(x) \ge c > 0,\ \psi(x) \ge c_1 > 0,\ \delta(x,0,z) < 0,\ \tau(x,y,0) < 0$

sistem ima jednu klasu asimptotski ograničenih rešenja. Odgovarajući preseci "osnovnih" paralelepipeda dati su na slikama 18,19,20,21, koje pretstavljaju slučajeve a), b), c), d). Dopunski uslovi ovde čine da se "osnovni" paralelepipedi "raspadaju" uvek na četiri manja, koji se, sa svoje strane, uvek svode na jedan od slučajeva iz teoreme $C_{14}$.

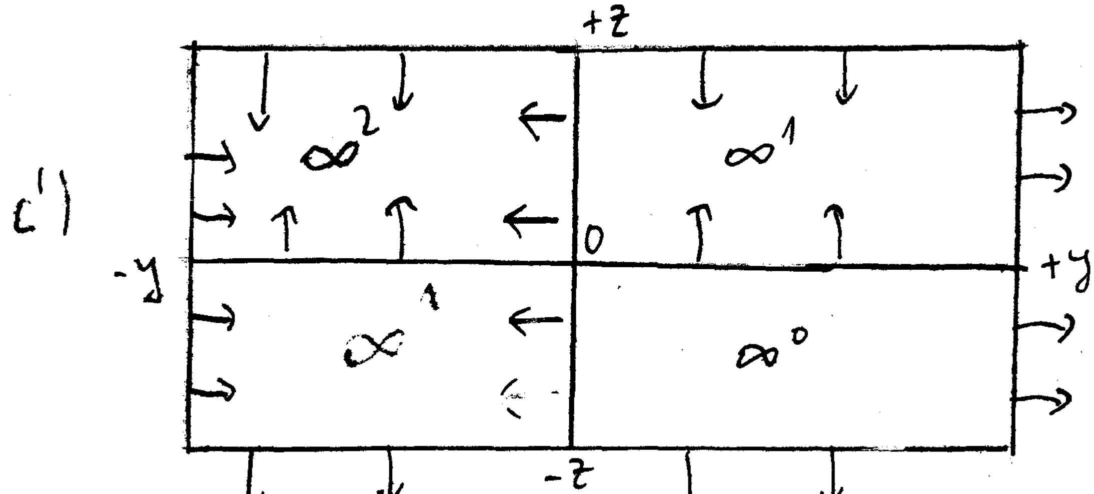
a')



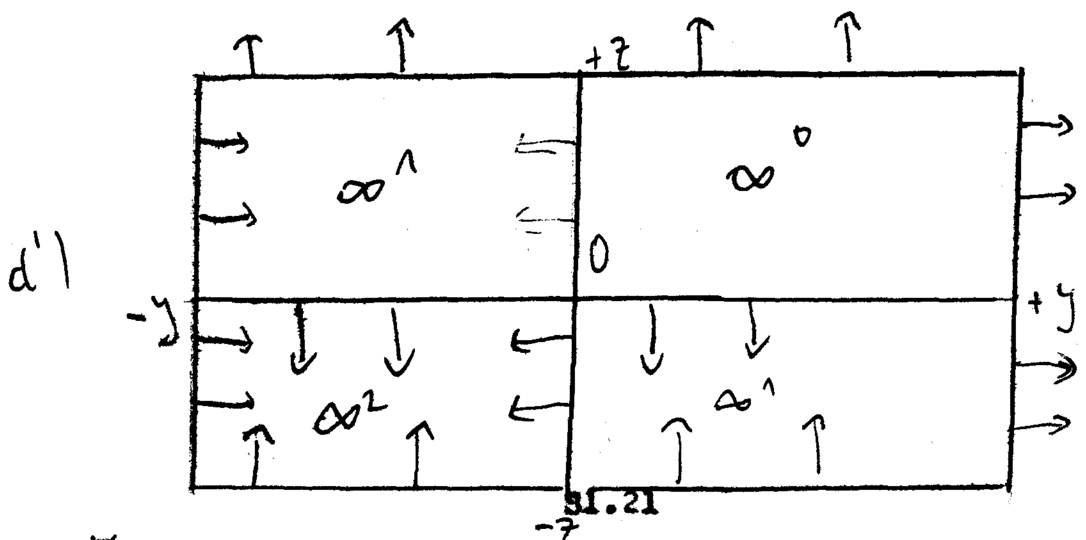

Sl.18




Sl.19




Sl.20




Sl.21

Kao što su teoreme $C_{12}$ i $C_{13}$ značile uopštenje teorema $C_{10}$ i $C_{11}$, tako ćemo sad teoremama $C_{16}$ i $C_{17}$ uopštiti teoreme $C_{14}$ i $C_{15}$. U tu svrhu se uvodi pogodan niz brojeva

$$r_n > 0, \; r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$s_n > 0, \; s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

i posmatra "cev"

$$T_n \begin{cases} y_n^2 \le r_n^2 \\ z_n^2 \le s_n^2 \\ 0 \le x \le +\infty \end{cases}$$

sa njenim stranama

$$G_n \begin{cases} y_n^2 = r_n^2 \\ z_n^2 \le s_n^2 \\ 0 \le x \le +\infty \end{cases} \qquad H_n \begin{cases} y_n^2 \le r_n^2 \\ z_n^2 = s_n^2 \\ 0 \le x \le +\infty \end{cases}$$

posmatra se sistem

$$(20) \qquad \begin{aligned} y' &= \mathcal{M}(x,y,z) \\ z' &= \mathcal{N}(x,y,z) \end{aligned}$$

i dobija teorema koja generališe teoremu $C_{14}$.

## TEOREMA $C_{16}$.

Dat je sistem (20). Ako je

a) $y\mathcal{M}(x,y,z) < 0$ na $G_n$ $\quad n = 1,2,\dots$

$z\mathcal{N}(x,y,z) < 0$ na $H_n$

sva su rešenja asimptotski ograničena.

b) Ako je $y\mathcal{M}(x,y,z) < 0$ na $G_n$ za jedno $n$

$z\mathcal{N}(x,y,z) > 0$ -"- $H_n$ -"-

postoji jedna klasa asimptotskih rešenja.

c) Slučaju $y\mathcal{M} > 0$, $z\mathcal{N} < 0$

za jedno $n$ na $G_n$, $H_n$ odgovara isti zaključak kao za b).

d) Ako je $y\mathcal{M} > 0$, $z\mathcal{N} > 0$ za jedno $n$, na $G_n$, $H_n$

postoji bar jedno ograničeno rešenje.

Slučajevima a), b), c), d) ove teoreme odgovaraju slike 14,15,16,17.

## TEOREMA $C_{17}$.

(koja generališe $C_{15}$).

Ako je za jedno $n$

$$\operatorname{sign} \mathcal{M} = \text{const. na } G_n$$
$$\operatorname{sign} \mathcal{N} = \text{const. na } H_n$$

$\operatorname{sign} \mathcal{M}(x,0,z)$ suprotan onom od $\mathcal{M}(x,y,z)$ za $y_n \neq 0$, $\operatorname{sign} \mathcal{N}(x,y,0)$ suprotan onom od $\mathcal{N}(x,y,z)$ za $z_n \neq 0$, sistem ima jednu klasu asimptotskih rešenja.

Posebni slučajevi:

a') $\mathcal{M} < 0$, $\mathcal{N} < 0$, $\mathcal{M}(x,0,z) > 0$, $\mathcal{N}(x,y,0) > 0$

generališe a') iz t. $C_{15}$

b') $\mathcal{M} < 0$, $\mathcal{N} > 0$, $\mathcal{M}(x,0,z) > 0$, $\mathcal{N}(x,y,0) < 0$

generališe b') iz t. $C_{15}$

c') $\mathcal{M} > 0$, $\mathcal{N} < 0$, $\mathcal{M}(x,0,z) < 0$, $\mathcal{N}(x,y,0) > 0$

generališe c') iz t. $C_{15}$

d') $\mathcal{M}>0, \mathcal{N}>0, \mathcal{M}(x,0,z)<0, \mathcal{N}(x,y,0)<0$

generališe d') iz t.$C_{15}$

Slučajevima a'),b'),c'),d') ove teoreme odgovaraju slike 18,19,20,21.

## §10. ASIMPTOTSKI OGRANIČENA REŠENJA JEDNOG SISTEMA OD $p+q$ DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

pre nego što predjemo na opšti sistem, navešćemo neke rezultate Važevskog, koji nam omogućavaju, u slučaju opšteg sistema, utvrdjivanje "izlaznih" i "ulaznih" strana.

Pretpostavimo da su funkcije $\ell^{\alpha}(t,x_1,\dots,x_n), m^{\beta}(t,x_1,\dots,x_n)$ $(\alpha=1,\dots,p;\ \beta=1,\dots,q)$ klase $C_1$ (tj. ~~poseduju~~ imaju neprekidne prve izvode u otvorenom skupu $\Omega$ ). Označimo sa $\omega$ skup tačaka koje zadovoljavaju sistem relacija $P\in\Omega,\ \ell^{\alpha}(P)<0,\ m^{\beta}(P)<0\quad(\alpha=1,\dots,p;\ \beta=1,\dots,q)$

Neka su $L^{\gamma}$ i $M^{\delta}$ $(\gamma=1,\dots,p;\ \delta=1,\dots,q)$ skupovi tačaka $P$ koje zadovoljavaju respektivno relacije

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases} P\in\Omega,\ \ell^{\gamma}(P)=0\\ \ell^{\alpha}(P)\le 0,\ (\alpha=1,\dots,p);\ m^{\beta}(P)\le 0,\ (\beta=1,\dots,q)\end{cases}$$

(skup $L^{\gamma}$),

$$\mathrm{II}\quad\begin{cases} P\in\Omega,\ m^{\delta}(P)=0\\ \ell^{\alpha}(P)\le 0,\ (\alpha=1,\dots,p);\ m^{\beta}(P)\le 0,\ (\beta=1,\dots,q)\end{cases}$$

(skup $M^{\delta}$)

Pretpostavimo da za $1\le\gamma\le p$ funkcija $\ell^{\gamma}(P)$ ima pozitivan izvod $\frac{d\ell^{\gamma}}{dt}$ (kad se u $\ell^{\gamma}$ zameni integral sistema) u svakoj tački od $L^{\gamma}$, a za $1\le\delta\le q$ funkcija $m^{\delta}(P)$ negativan izvod u svakoj tački od $M^{\delta}$.

Pod ovim uslovima skup $\omega$ nazivamo višestranim regularnim skupom u odnosu na sistem

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\dots,x_n)\qquad i=1,\dots,n$$

imajućim kao pozitivne strane $L^{\gamma}$ a kao negativne $M^{\delta}$. Jedinstvenost rešenja je bez značaja za ovu definiciju.

T. Važevski je dokazao ovaj rezultat:

Neka je $\omega$ višestrani regularni skup sa $L^{\gamma}$ pozitivnim i $M^{\delta}$ negativnim stranama. $f_i$ su neprekidne na otvorenom skupu $\Omega$, jedinstvenost je zastupljena i $\omega\subset\Omega$. Tada je

$$S=\mathrm{Sortie}(\omega,\Omega)=\mathrm{Sortie\ stricte}(\omega,\Omega)\ \text{i}$$

$$S=\sum_{\gamma=1}^{p}L^{\gamma}-\sum_{\delta=1}^{q}M^{\delta}$$

Sve izlazne i ulazne strane koje se pojavljuju u dokazima teorema $C_{18}$ i $C_{19}$ konstatovane su po ovim kriterijumima. Pri tom su u svojstvu funkcija $\ell^{\gamma}$ i $m^{\delta}$ figurisale, prema situaciji, funkcije $\pm y_j - \theta$ ili $\pm x_i - \rho$ .

U konstatovanju da li je neki skup retrakt svog natskupa ili ne korišćeni su stavovi da se segment ne može neprekidno preslikati na svoje krajeve, da je svaka tačka retrakt skupa koji je sadrži, te da granica sfere nije retrakt sfere (isto važi i za paralelepiped), kao i da je retrakt retrakta opet retrakt.

## TEOREMA $C_{18}$

Posmatrajmo sistem

$$(21)\quad \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varphi_i(t)x_i^{2k_i+1} + \sigma_i(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) \qquad i = 1, 2, \dots, p \\ \frac{dy_j}{dt} &= \psi_j(t)y_j^{2\ell_j+1} + \tau_j(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) \qquad j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

(jedinstvenost rešenja ispunjena u prostoru $(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$).

~~Ako je~~ gde su ispunjeni uslovi

$$(22)\quad \begin{aligned} |\sigma_i| &\le \mathcal{A}_i + \mathcal{B}_i|x_i|^{2k_i+1-\varepsilon_i} \qquad i = 1, \dots, p;\ 0 < \varepsilon_i < 1 \\ |\tau_j| &\le \mathcal{A}_j^* + \mathcal{B}_j^*|y_j|^{2\ell_j+1-\varepsilon_j^*} \qquad j = 1, \dots, q;\ 0 < \varepsilon_j^* < 1 \end{aligned}$$

$(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{A}_j^*, \mathcal{B}_j^*$ pozitivne konstante).

Ako je $(\alpha)$ $\varphi_i \le c_i < 0,\ \psi_j \ge c_j^* > 0 \qquad i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q$

sistem ima jednu klasu asimptotski ograničenih rešenja.

Ako je

$$(\beta)\quad \begin{aligned} \varphi_i &\le c_i < 0 \qquad i = 1, 2, \dots, p \\ \psi_j &\le c_j^* < 0 \qquad j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

sva su rešenja ograničena.

Ako je

$$(\gamma)\quad \begin{aligned} \varphi_i &\ge c_i > 0 \qquad i = 1, 2, \dots, p \\ \psi_j &\ge c_j^* > 0 \qquad j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

Uočimo slučaj $(\alpha)$. Uslovi $(22)$ dozvoljavaju da se mogu naći pozitivni brojevi $\rho_i > 0$, $\theta_j > 0$ takvi da za $|x_i| = \rho_i$, $|y_j| = \theta_j$ članovi $\varphi_i(t)x_i^{2k_i+1}$, $\psi_j(t)y_j^{2\ell_j+1}$ određuju znak odgovarajućih desnih strana jednačina sistema.

Neka je $\rho = \max \rho_i$, $\theta = \max \theta_j$

za $|x_i| = \rho$, $|y_j| = \theta$ članovi $\varphi_i(t)x_i^{2k_i+1}$, $\psi_j(t)y_j^{2\ell_j+1}$ sigurno će davati znak desnim stranama odgovarajućih jednačina.

Posmatrajmo "cev"

$$|x_i| \le \rho,\ |y_j| \le \theta,\ 0 \le t \le +\infty$$

Imamo sledeće strane striktnog izlaza,

$$(S)\quad \begin{aligned} &|y_1| = \theta,\ |y_j|_{j \ne 1} \le \theta,\ |x_i| \le \rho,\ 0 \le t \le +\infty \\ &|y_2| = \theta,\ |y_j|_{j \ne 2} \le \theta,\ |x_i| \le \rho,\ 0 \le t \le +\infty \\ &\text{---} \\ &|y_q| = \theta,\ |y_j|_{j \ne q} \le \theta,\ |x_i| \le \rho,\ 0 \le t \le +\infty \end{aligned}$$

$$|x_1| = \varrho, \ \underset{i\neq 1}{|x_i| \leq \varrho}, \ |y_j| \leq \Theta, \ 0 \leq t \leq +\infty$$

(D)

$$|x_p| = \varrho, \ \underset{i\neq p}{|x_i| \leq \varrho}, \ |y_j| \leq \Theta, \ 0 \leq t \leq +\infty$$

Kao $Z$ (videti §5) uzećemo segment čiji su krajevi tačke

$$P_1(t_0, x_1^*, \dots, x_p^*, \underbrace{\Theta, \Theta, \dots, \Theta}_{q})$$

$$P_2(t_0, x_1^*, \dots, x_p^*, \underbrace{-\Theta, -\Theta, \dots, -\Theta}_{q})$$

$Z \cap S$ su te dve tačke. $Z \cap S$ nije retrakt od $Z$ (krajevi segmenta nisu retrakt segmenta), a jeste retrakt od $S$, (svaka se izlazna strana može retraktirati bilo u jednu bilo u drugu tačku), postoji dakle jedna tačka $P \in \operatorname{Int} Z$ sa integralom koji pripada "cevi". Očigledno postoji čitava klasa takvih integrala.

U slučaju

$$\varphi_i \leq c_i < 0,$$

sve su napisane strane striktnog ulaza i sva su rešenja ograničena.

U slučaju $\varphi_i \geq c_i > 0, \ \psi_j \geq c_j^* > 0$

sve su napisane strane striktnog izlaza. Uzmimo kao $Z$ skup tačaka

$$|x_i| \leq \varrho, \ |y_j| \leq \Theta, \ t = t_0 \geq 0.$$

$Z \cap S$ ima oblik (S); (D) gde, umesto $0 \leq t \leq +\infty$ treba staviti $t = t_0$.
$Z \cap S$ nije retrakt od $Z$, a jeste od $S$. Postoji najmanje jedno asimptotsko rešenje koje potiče od neke tačke. Za svako $t_0$ dobijamo drugo $P$, ali se sva ovako dobijena asimptotska rešenja mogu poklapati. Uopšte uzev postoji dakle bar jedno asimptotsko rešenje.

## TEOREMA $C_{19}$

Posmatrajmo sistem

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t) x_i^{2k_i} + z_i(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \quad i=1,\dots,p$$

(23)

$$\frac{dy_j}{dt} = \psi_j(t) y_j^{2l_j} + \zeta_j(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \quad j=1,\dots,q$$

gde

$$|z_i| \leq A_i + B_i |x_i|^{2k_i - \varepsilon_i} \qquad 0 < \varepsilon_i < 2k_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

(24)

$$|\zeta_j| \leq A_j^* + B_j^* |y_j|^{2l_j - \varepsilon_j^*} \qquad 0 < \varepsilon_j^* < 2l_j, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

(gde su $A_i, B_i, A_j^*, B_j^*$ pozitivne konstante).

Ako je $\varphi_i \leq c_i < 0$ ili $\varphi_i \geq c_i > 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, p$

$\varphi_j \geq c_j^* > 0$ ili $\varphi_j \leq c_j^* < 0$ $\quad j = 1, 2, \ldots, q$

i

$$\sigma_1(t, 0, x_2, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \text{ ima znak suprotan od } c_1$$
$$\sigma_2(t, x_1, 0, x_3, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) \quad -\text{''}- \quad c_2$$
$$\text{— — — — — — — — — —}$$
$$\sigma_p(t, x_1, \ldots, x_{p-1}, 0; y_1, \ldots, y_q) \quad -\text{''}- \quad c_p$$
$$\tau_1(t, x_1, \ldots, x_p; 0, y_2, \ldots, y_q) \quad -\text{''}- \quad c_1^*$$
$$\tau_2(t, x_1, \ldots, x_p; y_1, 0, y_3, \ldots, y_q) \quad -\text{''}- \quad c_2^*$$
$$\text{— — — — — — — — — —}$$
$$\tau_q(t, x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{q-1}, 0) \quad -\text{''}- \quad c_q^*$$

tada sistem ima jednu klasu asimptotski ograničenih rešenja.

Posmatrajmo slučaj $\varphi_i \leq c_i < 0$, $\varphi_j \geq c_j^* > 0$

i uslove $\sigma_1(t, 0, x_2, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_q) > 0$

$$\text{— — — — — — —}$$
$$\sigma_p(t, x_1, \ldots, x_{p-1}, 0; y_1, \ldots, y_q) > 0$$
$$\tau_1(t, x_1, \ldots, x_p; 0, y_2, \ldots, y_q) < 0$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$\tau_q(t, x_1, \ldots, x_p; y_1, \ldots, y_{q-1}, 0) < 0$$

Ovde se može naći više "cevi". Izaberimo sledeći: $0 \leq x_i \leq \varrho$, $0 \leq y_j \leq \theta$,

Imamo sledeće izlazne strane

$$y_1 = 0, \quad 0 \leq y_{j \neq 1} \leq \theta, \quad 0 \leq x_i \leq \varrho, \quad 0 \leq t \leq +\infty$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$y_q = 0, \quad 0 \leq y_{j \neq q} \leq \theta, \quad -\text{''}-, \quad -\text{''}-$$
$$y_1 = \theta, \quad 0 \leq y_{j \neq 1} \leq \theta, \quad -\text{''}-, \quad -\text{''}-$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$y_q = \theta, \quad 0 \leq y_{j \neq q} \leq \theta, \quad -\text{''}-, \quad -\text{''}-$$

Kao $Z$ uzimamo segment čiji su krajevi tačke

$$P_1(t_0, x_1^*, \ldots, x_p^*, 0, 0, \ldots, 0), \quad P_2(t_0, x_1^*, \ldots, x_p^*, \theta, \theta, \ldots, \theta)$$

sa $|x_i^*| < \varrho$.

$Z \cap S$ su te dve tačke i nisu retrakt od $Z$ a jesu od $S$.
Dalje je isto kao u prethodnoj teoremi.

## TEOREMA $C_{20}$

Neka je dat sistem $\frac{dx_i}{dt} = \varrho_i(t, x_1, \dots, x_{p+q})$ $i = 1, 2, \dots, p+q$
(26)

Desne strane ovog sistema zadovoljavaju u prostoru $(t, x_1, \dots, x_{p+q})$ hipotezu $H$ (videti §3). Ako je $X_i^{(1)} \leq \varrho_i \leq X_i^{(2)}$ gde su $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$ desne strane tipa iz teoreme $C_{18}$ tada pod hipotezama $(\alpha)$ i $(\beta)$ za komparativne sisteme, postoji jedna klasa asimptotskih rešenja sistema (26). Isti se zaključak dobija ako su komparativni sistemi tipa iz teoreme $C_{19}$.

Treba podvući da za sistem (26) nije potrebno pretpostaviti jedinstvenost, koja se medjutim pretpostavlja za komparativne sisteme, kod kojih se dokazuje egzistencija asimptotski ograničenih rešenja primenom metode retrakcije.

Milorad Bertolino
MILORAD BERTOLINO

## LITERATURA

U literaturu su uneti samo oni radovi koje sam zaista čitao pri pisanju ovog rada, bez obzira na to da li su njihovi rezultati efektivni korišćeni ili ne.


[1] ALBRECHT F. "Remarque sur un théorème de T. Ważewski relatif à l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles". Bull. de l Acad. pol. des Sc. Cl. III , Vol II , No7, 1954

[2] Bertolino M. "Neke funkcionalne nejednakosti dobijene primenom Čapliginove metode i uporedjivanje sa rezultatima Mihaila Petrovića". Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, IX , 1-2, 1957

[3] BERTOLINO M." Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles". Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, IX-3-4, 1958

[4] BERTOLINO M." Primedba u vezi sa jednim stavom Mihaila Petrovića". Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS, X , 1958

[5] BERTOLINO M." Sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles". saopštenje na III kongresu mat. fiz. i astr. FNRJ, 20- IX -1960

[6] BERTOLINO M. "Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles"-rukopis primljen za štampu u Vesniku Društva mat.fiz. i astr. NRS.

[7] BORSUK K." Sur les retractes". Fundamenta Mathematicae 17 (1931) p.152

[8] KAMKE E." Differentialgleichungen-Lösungsmethoden und Lösungen,"Leipzig 1956

[9] ŁOJASIEWICZ S:" Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage de point singulier" Ann.pol.math. , T I ,1955,p.34-72

[10] Лузин Н.Н: "Интегральное исчисление" Москва 1949

[11] Лузин Н.Н: "О методе приближенного интегрирования С.А. Чаплыгина" Труды ЦАГИ, вып 141, 1932 [12] isto u УМН, Т VI, вып (46)-1951

[13] Mikołajska Z. " Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singu--lier" Ann.pol.math.T I ,1955,p.277-305

[14] MIKOŁAJSKA Z." Sur une propriété asymptotique des intégrales d'une équation différentielle du second ordre " Bull.de l Acad.Pol.des Sc.,Cl. III ,Vol II , No 5,1954

[15] MIKUSIŃSKI J." Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles linéaires"Ann.de la Soc. pol. de Math. T. XIX 1946 p.165-205

[16] PERRON O." Die vollständige Induktion im Kontinuum".Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung,35 Band,5-8 Heft 1926

[17] PERRON O. " Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen".Math.Zeitschrift, Band 32,5 Berlin 1930

[18] PETROVIĆ M:" O asimtotnim vrednostima integrala diferencijalnih jednačina prvog reda."Glas SKAN t. L 1895

[19] PETROVIĆ M."RAČUNANJE SA BROJNIM RAZMACIMA",Beograd,1932

[20] PETROVITCH M:" Intégration qualitative des équations différentielles"Memorial des sciences math.Paris 1931

[21] PEJOVIĆ T:" Diferencijalne jednačine-egzistencija rešenja",Beograd 1958

[22] PEYOVITCH T:" Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles monografija,Beograd 1952

[23] PEYOVITCH T. "Sur quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées".Tokyo,1956

[24] PEYOVITCH T." Quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées et leurs applications".Bologna,1960

[25] PLIS A: " On a topological method of the study of the behavior of the integrals of ordinary differential equations" Bull.Acad.pol.des Sc.,Vol II ,No 9 1954

[26] TATARKIEWICZ K: " Quelques exemples de l'allure asymptotique de solutions d'équations différentielles" Ann.Univ.Mariae Curie Skłodowska,Vol. III, 9,1954 Section A: Lublin

[27] SZARSKI J. "SUR les systèmes d'inégalités différentielles ordinaires remplies en dehors de certaines ensembles". Ann. de la soc.pol.de math. T. XXIV ,1951

[28] SZARSKI J. " Sur une propriété asymptotique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires". Ann. de la soc. pol.de math. T. XX

[29] SZARSKI J. "Sur un système d'inégalités différentielles" Ann.de la soc. pol.de math. T. XX p.176

[30] SZARSKI J."Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non--linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre" Ann.pol.math. II 2 (1955)

[31] SZARSKI J. " Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourrier pour un système non linéaire d'équations paraboliques." Ann.pol. math. (1959) VI

[32] SZARSKI J. "Systèmes d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du premier ordre et leurs applications" Ann.pol.math. T I ,1955 p.149-165

[33] SZMYDTOWNA Z. " Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires" Ann.de la Soc.pol.de math.T. XXIV ,1951

[34] SZMYDT Z. "Sur l'allure asymptotique des intégrales des certains systèmes d'équations différentielles non linéaires" Ann.pol.math, .T I ,1955, p.253-276

[35] Чаплыгин С.А.: „Основания нового способа приближ. интегр. диф. ур." Собрание соч. I. 1948

[36] Чаплыгин С.А.: „Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений, Классики естествознания. Москва-Ленинград 1950

[37] WAŻEWSKI T. "Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires" Ann.de la soc.pol.de Math. T. XX

[38] WAŻEWSKI T." Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires".dai Rendiconti dell Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Sc.fis,mat.e nat.Serie VIII ,vol III fasc.3-4

[39] WAŻEWSKI T. " Certaines propositions de caractère "épidermique" relatives aux inégalités différentielles" Ann.Soc.Pol.Math.T. XXIV 1951

[40] WAŻEWSKI T." Sur une méthode topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles". Reprinted from Proceeding of the International Congress of Mathemazic ians 1954.Amsterdam September2-September 9,Volume III )

[41] WAŻEWSKI T." Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications" Ann.de la Soc. pol.de Math.T XXIII ,1950

[42] WAŻEWSKI T."Sur la coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles".Bull.International de l'Acad. pol. des Sciences, serie A,Cracovie 1949