PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

*INSTITUT ZA MATEMATIKU MEHANIKU I ASTRONOMIJU*

Fuat RIZVANOLLI

# METOD HILBERTOVIH PROSTORA REPRODUKUJUĆIH JEZGRA U ISPITIVANJU SPEKTRALNOG MULTIPLICITETA SLUČAJNOG PROCESA

*DOKTORSKA DISERTACIJA*

BEOGRAD

1982.

# P R E D G O V O R

Osnovni cilj ovog rada je, kao što i sam naslov kaže, ispitivanje multipliciteta slučajnog procesa metodom Hilbertovih prostora reprodukujućih jezgri. Ovaj metod formulisan je od Hide [9] i dalje razvijen radovima Siraje [17] i [18] i Hitsude [10].

Rad je podeljen u pet glave. U prvoj glavi dati su izvodi iz istoimene glave monografije [1]. U drugoj glavi dati su osnovni pojmovi slučajne mere i stohastičkog integrala kao izvodi iz [8]. U trećoj glavi detaljno se opisuju prostori slučajnog procesa i prostori njegove kovarijansne funkcije, koji se ilustruju sa dovoljnim brojem primera. Zatim se izlaže poznata teorija multipliciteta slučajnog procesa i njegova kanonička reprezentacija. Jedini moj doprinos u ovoj glavi su nekoliko primera i teorema 3.1. U ovoj teoremi, znajući jedan inovacioni proces datog slučajnog procesa, pomoću pojma nosioca spektralne mere komponenata inovacionog procesa, odredjuje se multiplicitet datog procesa. U četvrtoj glavi razmatra se multiplicitet slučajnog procesa $X_o(t) = X_1(t) + F(t)X_2(t) + \ldots + F^{n-1}(t)X_n(t)$ gde je $n \geqslant 2$ i procesi $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ su ortogonalni, sa strukturnim funkcijama koje su funkcije skoka, sa skokom u jednoj tački ili skokom u tačkama jednog konvergentnog niza, sa izuzetkom procesa $X_1(t)$ koji se pretpostavlja nekad da je Vinerov. Formulisao sam nekoliko teorema zavisno od prirode neslučajne funkcije $F(t)$, koje sam dokazao metodom Hilbertovih prostora reprodukujućih jezgra. U petoj glavi pokušao sam da rasvetlim činjenicu da se Vinerov proces, za koji je poznato da ima spektralni multiplicitet jedan, aproksimira po volji tačno u srednje kvadratnom otsečcima njegovog ortogonalnog razvoja, koji imaju multiplicitet n, n je dužina odsečka.

Na kraju navodim da su numerisane tokom ovog rada samo one teoreme koje su moj doprinos. Za pozajmljene primere i definicije uvek se označava rad odakle su uzeti.

Prijatna mi je dužnost da ovom prilikom izrazim svoju zahvalnost Institutu za matematiku, mehaniku i astronomiju Prirodno - matematičkog fakulteta u Beogradu, na kome sam obavio specijalizaciju 1976. godine, i koji mi je odobrio rad na ovoj doktorskoj disertaciji.

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru dr Zoranu Ivkoviću, rukovodiocu u izradi ove disertacije, koji mi je svojim uputstvima i sugestijama pružio dragocenu pomoć u toku njene izrade.

Priština
Marta, 1982.

# S A D R Ž A J

# SPEKTRALNA ANALIZA SAMOADJUNGOVANIH OPERATORA

*1. UVODNE NAPOMENE.*- Neka je $H_1$ podprostor Hilbertovog prostora H. Sa $P_{H_1}$ označimo *operator projekcije* prostora H na njegov podprostor $H_1$, tj., $P_{H_1}h = h_1$, $h_1 \in H_1$, $h \in H$. Neka je t jedan realan parametar, $t \in (-\infty, +\infty)$. Označimo sa $H_t$ familiju podprostora prostora H, koja je neopadajuća po t, tj.,

$$H_{t_1} \subseteq H_{t_2}, \quad t_1 < t_2,$$

i za koju je:

$$H_{-\infty} = \lim_{t \to -\infty} H_t = O \quad \text{(nul elmenat)}$$

i

$$H_{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} H_t = H.$$

Zatim sa $P_t$ označimo projekcioni operator prostora H na odgovarajući podprostor $H_t$. Familija *projekcionih operatora* $P_t$, koja zavisi od jednog parametra $t \in (-\infty, +\infty)$ naziva se *razlaganje jedinice* ako ispunjava sledeće uslove:

1. $P_u P_v = P_s \qquad s = \min(u, v);$

2. *U smislu sr. kv. konvergencije (po normi)*

$P_{t-0} = P_t \qquad - \infty < t < + \infty;$

3. $P_{-\infty} = 0, \quad P_{+\infty} = I.$

Funkcija $\sigma(t) = (P_t h, h)$, $h \in H$, jeste jedna funkcija *raspodele*. Pomoću ove funkcije može se konstruisati *mera analogna meri Lebegovoj* i ona se od nje razlikuje time što se kao dužina intervala $[a, b]$ ne uzima broj b-a, nego broj $\sigma(b+0) - \sigma(a)$. Na taj način sada neke tačke mogu imati dužinu različitu od nule (*tačke skoka funkcije* $\sigma(t)$) i neki intervali dužinu jednaku nuli (*intervali konstantnosti funcije* $\sigma(t)$). Ovako uvodjenu dužinu nazivamo $\sigma$ - *dužinom*; pomoću nje konstruiše se $\sigma$ - *mera*, $\sigma$ - *merljive funkcije* i *integral Lebega-Stiltjesa*. Zatim se definiše linearni prostor svih $\sigma$ - merljivih funkcija f(t), za koje postoji integral Lebega-Stiltjesa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, d\,\sigma(t).$$

Uvodjenjem metrike u ovaj linearni prostor pomoću skalarnog proizvoda

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) \, d\,\sigma(t)$$

pokaže se da on postaje kompletan, tj. Hilbertov prostor, i označava se sa $L^2_\sigma$ .

2. *OPERATORNI INTEGRALI LEBEGA-STILTJESA.*- Uzmimo bilo koje *razlaganje jedinice* $P_t$ u konačnom ili beskonačnom intervalu $[\alpha, \beta]$. Pomoću tog razlaganja jedinice pridružimo bilo kom vektoru $h \in H$ *funkciju raspodele* $\sigma(t) = (P_t h, h)$, i znači i $\sigma$ - *meru,* koja omogućava da se konstruišu integrali Lebega-Stiltjesa. Ako se bilo koji uslovi ispunjavaju u odno su na sve $\sigma$ - mere, generirane različitim elementima $h \in H$, tada kažemo da se oni ispunjavaju u odnosu na *operatornu meru* $P_t$.

Prelazeći sada na funkcije $\varphi(t)$ za koje mi želimo definisati operatorne integrale, zahtevamo da su te funkcije definisane i konačne skoro svuda u odnosu na *operatornu meru* $P_t$, i osim toga u odnosu na $P_t$ da su *merljive*. Odavde sledi da funkcija $\varphi(t)$ ne može biti beskonačna u nekoj tački $t_o$ ( $\alpha \leqslant t_o \leqslant \beta$ ), ako u toj tački makar za jedan elemenat $h \in H$ funkcija $(P_t h, h)$ ima skok.

Naj jednostavniji slučaj jeste kad je $\varphi(t)$ ograničena. U tom slučaju za bilo koje $h \in H$ ima smisla integral Lebega-Stiltjesa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, d(P_t h, h),$$

zatim isto tako i

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\, d\overline{(P_t h, f)}, \qquad h, f \in H$$

Za fiksno h ovaj integral pretstavlja linearnu funksionelu od f. Po teoremi F. Ricca, postoji takav elemenat Th zavisan od h da

$$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\; \overline{d(P_t h, f)} = (f,\ Th)$$

ili

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\; d(P_t h,\ f) = (Th,\ f) \qquad (1)$$

Može se dokazati da je T linearan operator i pri tom i ograničen. Adjungovani operator T* definiše formulom

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\; d(P_t f,\ h) = (T^* f,\ h). \qquad (2)$$

Sada možemo definisati integrale

$$T = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\; dP_t \qquad (3) \qquad i \qquad T^* = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{\varphi(t)}\; dP_t \qquad (4)$$

kao operatore, koji odgovaraju bilinearnim funksionelama (1) i (2) gde h, f su bilo koji elementi iz H.

Kada se odustaje od uslova ograničenosti funkcije $\varphi(t)$, uz neke dodatne uslove, može se pokazati da operatorni integrali (3) i (4) imaju isti oblik.

Iz gore navedenog može se zaključiti da svakom *razlaganju jedinice* $P_t$ $(-\infty < t < +\infty)$ *odgovara potpuno odredjeni samoadjungovani operator*

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t\; dP_t \qquad (5)$$

Oblast definisanosti $D_A$ tog operatora je skup svih vektora h, za koje se ispunjava nejednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, d(P_t h, h) < +\infty ,$$

i leva strana te nejednakosti je $\|Af\|^2$.

Isto tako se može dokazati da važi i obrnuto: *Svakom samoadjungovanom operatoru A pripada jedno razlaganje jedinice. Spektralno razlaganje* operatora A daje se integralom (5).

*3. SPEKTAR SAMOADJUNGOVANOG OPERATORA*.- Neka je $P_t$ neko razlaganje jedinice na $t \in (-\infty, +\infty)$. Ako je $t \in [\alpha, \beta]$ različitom od cele ose tada možemo staviti van tog intervala $P_t = I$ za $t \geqslant \beta$ i $P_t = 0$ za $t < \alpha$.

Tačku t nazvaćemo *tačkom konstantnosti razlaganja jedinice,* ako postoji takav $\partial > 0$, da $P_{t+\partial} - P_{t-\partial} = 0$, i *tačkom rasta u* protivnom slučaju. Prirodno je dalje tačku t smatrati *tačkom skoka (prekida),* ako je $P_{t+0} - P_t \neq 0$ i *tačkom neprekidnosti* ako je $P_{t+0} - P_t = 0$.

Može se dokazati da, ako je $P_t$ jedno *razlaganje jedinice samoadjungovanog operatora A, tada:*

*a) realan broj $\lambda$ je regularna tačka operatora A tada i samo tada, kada je $\lambda$ tačka konstantnosti razlaganja jedinice;*

*b) realan broj $\lambda$ je sobstvena vrednost operatora A u tom i samo tom slučaju, kada je $\lambda$ tačka skoka razlaganja* *jedinice.*

*4. PROSTI SPEKTAR.*- U linearnoj algebri i teoriji integralnih jednačina *spektar operatora naziva se prostim,* ako višestrukost svake sobstvene vrednosti tog operatora je jednaka jedinici. Ova se definicija ne prenosi na proizvoljne operatore u prostoru Hilberta, jer u opšte govoreći, *ukupnost sobstvenih vrednosti jednog operatora ne iscrpi njegov spektar.*

*Spektar samoadjungovanog operatora naziva se prostim ako postoji takav vektor $g \in H$ (generirajući vektor), za koji envelopa skupa vektora $P(\Delta)g$ je gusta u $H$, gde interval $\Delta$ prelazi skup svih intervala na brojnoj osi.*

*Ako je $A$ samoadjungovani operator s prostim spektrom, $g$ - bilo koji generirajući elemenat i $\sigma(t) = (P_t g, g)$ tada važi formula:*

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dP_t g,$$

*koja svakoj funkciji $f(t) \in L^2_\sigma(-\infty, +\infty)$ pridružuje vektor $f \in H$, i ovo pridruživanje je izometrijsko preslikavanje $L^2_\sigma(-\infty, +\infty)$ na $H$. Tada elementu $Af$ odgovara funkcija $t\, f(t)$, tj.*

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t\, f(t)|^2 d\sigma(t).$$

*5. O SPEKTRALNIM TIPOVIMA.*- Napominjemo da, funkcijom raspodele nazivamo bilo koju funkciju ako je neprekidna sleva, neopadajuća i ograničene varijacije, koja je data na celoj brojnoj osi. Ako je $\sigma(t)$ takva funkcija, tada $\sigma(\Delta) = \sigma(t'') - \sigma(t')$, ($t'$ i $t''$ su krajevi intervala $\Delta$) je aditivna funkcija intervala $\Delta$ (mi se držimo naziva funkcija raspodele i za funkciju $\sigma(\Delta)$ ).

*Kaže se da je funkcija raspodele $\sigma(t)$ podčinjena funkciji raspodele $\rho(t)$, - $\sigma(t) \preccurlyeq \rho(t)$, ako $\sigma(t)$ je apsolutno neprekidna u odnosu na $\rho(t)$, tj. ako za bilo koje $\Delta \subset (-\infty, +\infty)$ je*

$$\sigma(\Delta) = \int_{\Delta} \varphi(t)\, d\rho(t),$$

*gde je $\varphi(t)$ - $\rho$ - merljiva nenegativna funkcija.*

Ako je istovremeno i

$$\rho(t) \preccurlyeq \sigma(t),$$

tj. $\rho(t)$ *podčinjena* funkciji $\sigma(t)$, tada funkcije raspodele $\rho(t)$ i $\sigma(t)$ kaže se da imaju *isti spektralni tip*.

Neka je A bilo koji samoadjungovani operator i $P_t$ njegova *spektralna funkcija*. Funkcija $(P_t h, h)$ za svako $h \in H$, očigledno je jedna funkcija raspodele. *Spektralni tip* funkcije $(P_t h, h)$ naziva se spektralnim tipom elementa h (u odnosu na operator A). *Za spektralne tipove elemenata $h \in H$ kaže se da pripadaju operatoru A. Ako medju elementima $h \in H$, postoji elemenat maksimalnog spektralnog tipa u odnosu na A (tj. takav elemenat $g \in H$, za koji je $(P_t h, h) \preccurlyeq (P_t g, g)$ za svako $h \in H$), tada se ovaj spektralni tip pripisuje operatoru A, tj., operator A ima spektralni tip $(P_t g, g)$.*

*Ako je A samoadjungovani operator sa prostim spektrom, tada postoje elementi maksimalnog spektralnog tipa u odnosu na A. Zatim, Ako je $\sigma(t)$ data funkcija raspodele sa tipom koji ne prelazi spektralni tip operatora A, tada postoji vektor $h \in H$, koji generiše ovu funkciju raspodele tj.,*

$$\sigma(t) = (P_t h,\ h).$$

6. *VIŠESTRUKI SPEKTAR.*- Ako je linearna envelopa skupa svih sopstvenih vektora samoadjungovanog operatora gusta u prostoru H, tada pod pojmom višestrukosti (*multipliciteta)* spektra tog operatora prirodno je podrazumevati maksimalnu višestrukost njegovih sopstvenih vrednosti.

Pre nego što se definiše *multiplicitet* (višestrukost) spektra proizvoljnog samoadjungovanog operatora u H, uvodi se pojam generirajućeg podprostora.

*Podprostor G je generirajući podprostor samoadjungovanog operatora A sa spektralnom funkcijom $P_t$, ako adherencija linearne envelope skupa $P(\Delta)G$, gde $\Delta$ prelazi skup svih intervala realne ose, podudara se sa H.*

*Pod višestrukošću (multiplicitetom) spektra samoadjungovanog operatora A naziva se minimalna dimenzija generirajućeg podprostora tog operatora. Ako za operator A ne postoji konačnodimenzioni generirajući podprostor, tada se multiplicitet spektra tog operatora smatra beskonačnim.*

Kod višestrukog spektra samoadjungovanog operatora A, mesto generirajućeg elementa g i spektralnog tipa operatora sa prostim spektrom, *govori se o generirajućoj bazi $g_1, g_2, \ldots, g_n$, i o matričnoj funkciji raspodele*

$$S(t) = [\sigma_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n} .$$

Ako je : A samo adjungovani operator sa n-tostrukim spektrom (sa spektrom multipliciteta n); $g_1, g_2, \dots, g_n$ bilo koji generirajući bazis i $S(t) = [\sigma_{ik}(t)]_{i,k=1}^{n}$, tada postoji izometrijsko preslikavanje prostora H na prostor $L^2_{S(t)}(-\infty, +\infty)$ vektor funkcija $\vec{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ pri čemu oblasti definisanosti $D_A$ operatora A u H i $D_Q$ operatora množenja Q u $L^2_S(-\infty, +\infty)$ predju jedna u drugu i elementu Af odgovara vektor funkcija Qf(t), ako elementu $f \in H$ odgovara vektor funkcija $\vec{f}(t) \in L^2_S$. Formula kojom se uspostavlja ova korespondencija je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\, dP_t g_i .$$

Za vektor Af nadje se da je

$$Af = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_i(t)\, d\, P_t g_i .$$

7. *UNITARNE INVARIANTE SAMOADJUNGOVANIH OPERATORA.-*

*Operatori $A_1$ i $A_2$, koji dejstvuju respektivno u Hilbertovim prostorima $H_1$ i $H_2$, nazivaju se izomorfnim (ili unitarno ekvivalentnim), ako postoji takvo izometrijsko preslikavanje V prostora $H_1$ na $H_2$, tako da*

$$D_{A_2} = V\, D_{A_1} \tag{1}$$

*i*

$$A_2 = V A_1 V^{-1}, \tag{2}$$

gde je sa $D_{A_i}$ označen domen operatora $A_i$.

*Ako je operator $A_1$ samoadjungovani, tada njemu izomorfni operator $A_2$ takodje je samoadjungovani, što neposredno sledi iz (1) i (2).*

*Spektri izomorfnih samoadjungovanih operatora se podudaraju, jer iz (1) i (2) sledi da*

$$\Delta_{A_2 - \lambda I} = (A_2 - \lambda I) D_{A_2} = (V A_1 V^{-1} - \lambda V V^{-1}) D_{A_2} =$$

$$= V(A_1 - \lambda I) D_{A_1} = V \Delta_{A_1 - \lambda I}. \tag{3}$$

Iz ovih jednakosti sledi, ne samo podudarnost spektra u celosti, nego i svaki njihov deo (diskretni i neprekidni) je unitarno invarijantan, tj., ne menjaju se pri prelazu od operatora $A_1$ k njemu izomorfnom operatoru $A_2$.

Ograničimo se ovde na nekim napomenama u odnosu na unitarnu ekvivalentnost samoadjungovanih operatora.

Neka je $P_{1t}$ razlaganje jedinice operatora $A_1$. Stavimo

$$P_{2t} = V P_{1t} V^{-1}. \tag{4}$$

Ova formula definiše neku familiju ograničenih samoadjungovanih operatora u $H_2$, i lako se pokazuje da $P_{2t}$ jeste *razlaganje jedinice* u prostoru $H_2$. Pokažimo na primer da

$$P_{2u} P_{2v} = P_{2s}, \qquad s = \min/u, v/,$$

$$P_{2u} P_{2v} = V P_{1u} V^{-1} V P_{1v} V^{-1} = V P_{1u} P_{1v} V^{-1} = V P_{1s} V^{-1} = P_{2s}.$$

Pokažimo sada da $P_{2t}$ jeste razlaganje jedinice operatora $A_2$.

U tom cilju uzmimo integralno pretstavljanje

$$(A_1 f_1, g_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d(P_{1t} f_1, g_1).$$

Stavljajući sada

$$f_1 = V^{-1} f_2, \qquad g_1 = V^{-1} g_2,$$

dobija se

$$(V A_1 V^{-1} f_2, g_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d(V P_{1t} V^{-1} f_2, g_2),$$

ili

$$(A_2 f_2, g_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d(P_{2t} f_2, g_2),$$

koji je osnovni momenat u dokazu stava.

*Iz relacije (4) sledi, da multiplicitet spektra takodje je unitarna invarijanta samoadjungovanog operatora.*

*Ako linearna envelopa niza svih sopstvenih vektora samoadjungovanog operatora je gusta u H, tada spektar operatora i multiplicitet spektra u svakoj tački pretstavljaju potpun sistem unitarnih invarijanata operatora, tj., svi takvi operatori sa podudarnim spektrima i jednakim multiplicitetom spektra u svakoj tački su izomorfni.*

U slučaju samoadjungovanih operatora sa proizvoljnim prostim spektrom takodje nije teško ukazati potpuni sistem unitarnih invarijanti.

Neka su $A_1$ i $A_2$ - dva unitarno ekvivalentna samoadjungovana operatora sa prostim spektrom, koji dejstvuju u prostorima $H_1$ i $H_2$ respektivno.

Jednakosti

$$(P_{2t} f_2, f_2) = (P_{1t} V^{-1} f_2, V^{-1} f_2) = (P_{1t} f_1, f_1)$$

pokazuju da spektralni tipovi elemenata $f_1$ u odnosu na $A_1$ i $f_2 = Vf_1$ u odnosu na $A_2$ jesu podudarni. Odvde sledi podudarnost *spektralnih tipova* operatora $A_1$ i $A_2$.

*Iz ovoga sledi da spektar i multiplicitet spektra u svakoj tački, u opštem slučaju, ne pretstavljaju potpuni sistem unitarnih invarijanti.*

Tako, na primer, operatori množenja $Q_{\sigma_1}$ u $L^2_{\sigma_1}(0, 1)$ i $Q_{\sigma_2}$ u $L^2_{\sigma_2}(0, 1)$ za $\sigma_1(t) = t$, i

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} 1 + t & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

imaju spektre multipliciteta jedan, ali nisu izomorfni, jer spektralni tipovi funkcija raspodele $\sigma_1(t)$ i $\sigma_2(t)$ nisu podudarni.

*S druge strane dva operatora s prostim spektrom i jednakim spektralnim tipovima jesu izomorfni, jer su oba izomorfna jednom te istom operatoru množenja.*

Pri prelazu od slučaja prostog spektra ka opštem slučaju višestrukog spektra raspravljanje o potpunom sistemu unitarnih invarijanti postaje komplikovanije. Pitanje o potpunom sistemu unitarnih invarijantisamoadjungovanog operatora sa višestrukim spektrom ne može biti rešeno prostim razlaganjem takvog operatora u ortogonalan zbir operatora sa prostim spektrom jer se takvo razlaganje ne odredjuje jednoznačno. *)

---

*) Bili su to izvodi iz istoimenog poglavlja u [1].

Za rešenje ovog zadatka u opštem slučaju treba razlagati operator A u ortogonalnu sumu operatora sa prostim spektrom tako da odgovarajući spektralni tipovi su uredjeni u odnosu na relaciju podčinjenosti.

Na sledećem primeru će se pokazati da ako je H separabilan prostor i A samoadjungovan operator tada se prostor H može pretstaviti kao ortogonalna suma podprostora koji svode operator A na operatore sa prostim spektrom, čiji spektralni tipovi su uredjeni u odnosu na relaciju podčinjenosti.

*P r i m e r 1. 1.* Neka je dat samoadjungovani operator A sa *spektralnom funkcijom* $P_t$, koji separabilan Hilbertov prostor H preslikava na samog sebe. Označimo sa $h_{11}$ bilo koji elemenat iz H, $h_{11} \neq 0$. Ako *linearna envelopa skupa* $P(\Delta)h_{11}$, gde $\Delta$ prlazi sve intervale realne ose (mesto $P(\Delta)h_{11}$, $\Delta$ ..., može se napisati $P_t h_{11}$, $-\infty < t < +\infty$), je svuda gusta u H, tada je $h_{11}$ elemenat *maksimalnog spektralnog tipa* u odnosu na operator A i *spektar operatora A je prost*. Medjutim ako *envelopa skupa* $P_t h_{11}$, $t < +\infty$, nije gusta u H već u nekom njegovom podprostoru $H_{11} \subset H$, tada iz podprostora $H \ominus H_{11}$ uzmemo bilo koji elemenat $h_{12} \neq 0$. Ako *linearna envelopa skupa* $P_t h_{12}$, $t < +\infty$, nije gusta u $H \ominus H_{11}$, već je gusta u jednom njegovom podprostoru $H_{12} \subset H \ominus H_{11}$, tada produžimo dalje sa izvlačenjem elemenata, i ovaj proces trajaće do izvlačenja elementa $H_{1M_1}$, kada će linearna envelopa skupa $P_t h_{1M_1}$, $t < +\infty$, pretpostavimo, obzirom na separabilnost prostora H, biti svuda gusta u podprostoru $H \ominus [\bigoplus_{i=1}^{M_1} H_{1i}]$. Broj $M_1$ može biti i beskonačan. Očigledno odgovarajući spektralni tipovi $\rho_{1i} = (P_t h_{1i}, h_{1i})$, $i = 1, 2, \ldots, M_1$, u opštem slučaju su neuporedivi u odnosu na relaciju podčinjenosti.

Označimo sa $z_1$ zbir

$$\sum_{i=1}^{M_1} \partial_{1i} h_{1i} = z_1, \quad \text{tako da} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \partial_{1i}{}^2 \| h_{1i} \|^2 < +\infty.$$

Očigledno elemenat $z_1 \in H$ je *maksimalnog spektralnog tipa* u odnosu na operator A. Ako je linearna envelopa skupa $P_t z_1$, $t < +\infty$, gusta u H, tada je *spektar operatora A prost* i elemenat $z_1$ je generirajući elemenat prostora H u odnosu na A. U protivnom envelopa skupa $P_t z_1$, $t < +\infty$, je gusta u nekom podprostoru $H_1 \subset H$, za koji se kaže da svodi operator A na operator sa prostim spektrom. *U ovom slučaju multiplicitet spektra operatora A je $N \geqslant 2$.*

Elemenat $z_2 \in H \ominus H_1$, konstruiše se slično kao i $z_1$ pomoću odgovarajućeg zbira

$$z_2 = \sum_{j=1}^{M_2} \partial_{2j} h_{2j},$$

gde $h_{21} \in H \ominus H_1$, $\quad h_{2M_2} \in [\,(H \ominus H_1) \ominus \bigoplus_{j=1}^{M_2} H_{2j}]$.

*Elemenat $z_2$ je maksimalan u podprostoru $H \ominus H_1$, njegov spektralni tip nije veći od tipa elementa $z_1$.* Ako linearna envelopa skupa $P_t z_2$, $t < +\infty$, je gusta u $H \ominus H_1$, tada je spektar operatora A multipliciteta 2 i baza generirajućeg podprostora G je $\{z_1, z_2\}$. Inače envelopa skupa $P_t z_2$ je svuda gusta u $H_2 \subset H \ominus H_1$.

Na sličan način se produžuje proces konstruisanja elemenata: $z_3, z_4, \ldots, z_N$, kao maksimalni elementi odgovarajućih podprostora. Elemenat $z_N$ je maksimalni elemenat podprostora $H_N = H \ominus \bigoplus_{k=1}^{N} H_k$. Podprostor G sa bazom $z_1, z_2, \ldots, z_N$ ima minimalnu dimenziju i on je *generirajući podprostor* samoadjungovanog operatora A. Zato može se reći da je multiplicitet spektra ovog operatora jednak N. Iz izloženog se dalje može zaključiti da se prostor H može pretstaviti u obliku ortogonalnog zbira:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \ldots \oplus H_N,$$

i da odgovarajući spektralni tipovi $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_3(t)$, $\ldots$, $\sigma_N(t)$, gde je $\sigma_k(t) = (P_t z_k, z_k)$, stoje u relaciji:

$$\sigma_1(t) \gg \sigma_2(t) \gg \sigma_3(t) \gg \ldots \gg \sigma_N(t). \qquad (*)$$

Izraz (*) naziva se *spektralni tip* operatora A sa višestrukim spektrom.

Pojmovi razjašnjeni ovim primerom omogućuju da se formuliše isti stav o izomorfnosti dva samoadjungovana operatora sa višestrukim spektrom kao onaj o izomorfnosti dva operatora sa prostim spektrom, tj.:

*Dva samoadjungovana operatora $A_1$ i $A_2$ definisana na separabilnim prostorima $H_1$ i $H_2$ respektivno, su izomorfna ako i samo ako imaju iste spektralne tipove* [11].

II

## STOHASTIČKA MERA I INTEGRALI

1. *UVODNE NAPOMENE*.- Neka je X slučajna promenljiva definisana na datom prostoru verovatnoća $(\Omega, \Phi, P)$ sa osobinom

$$E\,X = 0, \qquad E\,|X|^2 < +\infty \qquad (1)$$

*Skup svih slučajnih promenljivih X definisanih na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \Phi, P)$, koje zadovoljavaju (1), čine Hilbertov prostor $H = L^2(\Omega, \Phi, P)$ ako su skalarni proizvod i norma definisani kao:*

$$(X, Y) = E\,X\overline{Y}, \qquad \|X\|^2 = E|X|^2.$$

Dve slučajne promenljive X i Y kaže se da su ortogonalne ako je

$$(X, Y) = E\,X\overline{Y} = 0.$$

Ako dve slučajne promenljive X i Y su takve da je

$$\|X - Y\|^2 = E|X - Y|^2 = 0,$$

smatraćemo ih identičnim tj., X = Y.

*Familija slučajnih promenljivih $X(t)$, gde je $t \in T$ realan parametar, $T = (-\infty, +\infty)$, i $X(t) \in H$ za svako t, naziva se jednodimenzionalni slučajni proces sa neprekidnim parametrom t. Proces $X(t)$ koji ispunjava uslov $E|X(t)|^2 < +\infty$ za svako t zove se proces sa konačnim momentima drugog reda.*

Funkcija kovarijanse slučajnog procesa X(t) je

$$E\, X(t)\, \overline{X(s)} = \Gamma(t, s).$$

Prema Švarcovoj nejednakosti je

$$|\Gamma(t, s)|^2 \leqslant E|X(t)|^2\, E|X(s)|^2 < +\infty.$$

Svaka funkcija kovarijanse ima fundamentalnu osobinu da bude nenegativno definitne forme u sledećem smislu: Neka je $t_1, t_2, \ldots, t_n$, bilo koji konačni skup vrednosti iz $T$ i neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$, proizvoljni kompleksni brojevi. Tada forma Hermita

$$\sum_{j,k}^{n} \Gamma(t_j, t_k)\, z_j \bar{z}_k = E[\sum_{j,k}^{n} X(t_j)\, \overline{X(t_k)}\, z_j \bar{z}_k] = E|\sum_{j,k}^{n} X(t_j) z_j|^2 \geqslant 0$$

je uvek realna i nenegativna.

*Proces $X(t)$ je neprekidan u srednje kvadratnom (q. m) u tački $t_0$*

$$X(t) \xrightarrow{q.\ m.} X(t_0)$$

*ako*

$$E|X(t) - X(t_0)|^2 \longrightarrow 0, \quad kad \quad t \longrightarrow t_0.$$

Ako je ovo ispunjeno za sve tačke $t_0$ u nekom intervalu $(a, b)$, tada se za $X(t)$ kaže da je sr. kv. neprekidan u $(a, b)$.

*Proces $X(t)$ je sa ortogonalnim priraštajima ako je za svako*

$$t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$$

$$E\,[X(t_4) - X(t_3)][X(t_2) - X(t_1)] = 0.$$

2. *STOHASTIČKE MERE I INTEGRALI.*- [8] U nizu pitanja važnu ulogu igraju integrali koji se pišu u obliku

$$\int_a^b f(t)\, dX(t), \tag{1}$$

gde $f(t)$ je data neslučajna funkcija, dok $X(t)$ je slučajni proces. Realizacije procesa $X(t)$, u opšte rečeno, su funkcije neograničene varijacije, i integral (1) ne može se shvatiti ka Stiltjesov ili Lebeg-Stiltjesov integral, koji ima smisla za skoro sve realizacije procesa $X(t)$. Ipak integral (1) moguće je definisati na taj način da on poseduje svojstva običnog integrala.

Ovde će se dati definicija i razmatrati svojstva integrala koja odgovaraju integraciji po slučajnoj meri. Takvi integrali nazivaju se stohastički.

Neka je $(\Omega, \Phi, P)$, prostor verovatnoća, neka $H = L^2(\Omega, \Phi, P)$ označava Hilbertov prostor slučajnih promenljivih sa konačnim momentima drugog reda, $R$ je neki skup, i $\mathcal{R}$ je $\sigma$- algebra podskupova od $R$. Pretpostavimo da svakom podskupu $\Delta \in \mathcal{R}$ pridružena je slučajna veličina $X(\Delta)$, koja zadovoljava sledeće uslove:

1. $X(\Delta) \in L^2, \qquad X(\emptyset) = 0;$
2. $X(\Delta_1 \cup \Delta_2) = X(\Delta_1) + X(\Delta_2) \pmod{P}$
   ako je $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset;$
3. $E\, X(\Delta_1)\, \overline{X(\Delta_2)} = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2),$

   gde je $\sigma(\Delta)$ neka funkcija skupa definisana na $\mathcal{R}$.

*Familija slučajnih veličina* $X(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{R}$ , *koje zadovoljavaju uslove 1. - 3., naziva se ortogonalna stohastička mera, a* $\sigma(\Delta)$ *njegova strukturna funkcija.*

Svojstvo ortogonalnosti stohastičke mere izražava se uslovom 3.: ako je $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ , tada veličine $X(\Delta_1)$ i

$X(\Delta_2)$ su ortogonalne.

Iz definicije funkcije $\sigma(\Delta)$ sledi da je ona nenegativna:

$$\sigma(\Delta) = E\,|X(\Delta)|^2 \geqslant 0, \qquad \sigma(\emptyset) = 0,$$

i aditivna: ako $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, tada

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta_1 \cup \Delta_2) &= E|X(\Delta_1) + X(\Delta_2)|^2 \\ &= \sigma(\Delta_1) + \sigma(\Delta_2) + 2\,\sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2) \\ &= \sigma(\Delta_1) + \sigma(\Delta_2).\end{aligned}$$

Na taj način $\sigma(\Delta)$ pretstavlja jednu *meru* na $\mathcal{R}$.

Označimo sa $L(\mathcal{R})$ klasu svih prostih funkcija $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \&_{\Delta_k}(x), \quad \Delta_k \in \mathcal{R},\ k = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

gde je n proizvoljan broj i $\&_A(x)$ - indikator skupa A.

Stohastički integral funkcije $f(x) \in L(\mathcal{R})$ po ortogonalnoj stohastičkoj meri $X(\Delta)$ definiše se formulom

$$Y = \int f(x)\, X(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k X(\Delta_k). \qquad (3)$$

Kako je $\mathcal{R}$ $\sigma$- algebra skupova, svaki par funkcija u $L(\mathcal{R})$ može se pretstaviti kao linearna kombinacija indikatora jednih te istih skupova iz $\mathcal{R}$. Prema tome, ako su $f, g \in L(\mathcal{R})$, mi pretpostavimo da je $f(x)$ data formulom (2) i

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k\, \&_{\Delta_k}(x), \quad \text{gde je } \Delta_k \cap \Delta_r = \emptyset \text{ za } k \neq r.$$

Iz ortogonalnosti mere X sledi, da

$$E\left[\int f(x)\, X(dx) \cdot \overline{\int g(x)\, X(dx)}\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k d_k\, \sigma(\Delta_k). \qquad (4)$$

Primetimo da $L(\mathcal{R})$ jeste linearni podskup Hilbertovog prostora $L^2(\sigma) = L^2(R, \mathcal{R}, \sigma)$, dok $L^2(\sigma)$ - adherencija od $L(\mathcal{R})$ u topologiji generiranoj skalarnim proizvodom

$$(f, g) = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, \sigma(dx). \qquad (5)$$

Sada relacija (4) može biti napisana u sledećem obliku:

$$E\left[\int f(x)\, X(dx) \overline{\int g(x)\, X(dx)}\right] = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, \sigma(dx) \qquad (6)$$

za svaki par funkcija $f(x)$, $g(x)$ iz $L^2(\sigma)$.

Označimo sa $L(X)$ linearnu envelopu familije slučajnih veličina $\{X(\Delta), \Delta \in \mathcal{R}\}$ tj., skup slučajnih veličina, koje se mogu pretstavljati u obliku (3), i sa $L^2(X)$ prostor koji je adherencija od $L(X)$ u Hilbertovom prostoru slučajnih veličina $L^2(\Omega, \Phi, P)$. Primetimo da relacija (3) pretstavlja izometrijsko preslikavanje $Y = V(f)$ medju $L(\mathcal{R})$ i $L(X)$. Ovo preslikavanje može biti produženo do izometrijskog preslikavanja $V$ izmedju $L^2(\mathcal{R})$ i $L^2(X)$. Ako je $Y = V(f)$, $f \in L^2(\mathcal{R})$, tada po definiciji stavimo

$$Y = V(f) = \int f(x)\, X(dx) \qquad (7)$$

i nazivamo slučajnu veličinu $Y$ stohastičkim integralom funkcije $f(x)$ po meri $X$. Otud slede ove osobine:

a) Za prostu funkciju (2) stohastički integral se daje formulom (3);

b) Za bilo koje funkcije $f(x)$ i $g(x)$ iz $L^2(\sigma)$ važi jednakost (6);

c) $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, X(dx) = \alpha \int f(x) X(dx) + \beta \int g(x) X(dx)$;

d) Za proizvoljni niz funkcija $f_n(x) \in L^2(\sigma)$ tako da

$$\int |f(x) - f_n(x)|^2 \sigma(dx) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow +\infty, \qquad (8)$$

važi relacija

$$\int f(x)\, X(dx) = \text{lim. sr. kv.} \int f_n(x)\, X(dx).$$

Navodimo sada neke napomene u vezi sa definicijom stohastičkog integrala na intervalu prave.

Neka je $X(t)$ $(a \leqslant t < b)$ - *proces sa ortogonalnim priraštajima,* neprekidan u sr. kv. s leva:

$$E|X(t) - X(s)|^2 \longrightarrow 0 \text{ kad } s \nearrow t.$$

Stavimo

$$\sigma(t) = E|X(t) - X(a)|^2.$$

Iz ortogonalnosti priraštaja procesa $X(t)$ sledi za $t_2 > t_1$

$$\sigma(t_2) = E|X(t_2) - X(t_1) + X(t_1) - X(a)|^2$$
$$= \sigma(t_1) + E|X(t_2) - X(t_1)|^2,$$

da je

$$\sigma(t_2) \geqslant \sigma(t_1) \text{ i } \sigma(t) = \lim_{s \nearrow t} \sigma(s).$$ Tako, može se

reći da je funkcija $\sigma(t)$ - monotono neopadajuća i neprekidna s leva. Neka je $\mathcal{R}$ klasa svih poluintervala $\Delta = [t_1, t_2)$; $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$; $X([t_1, t_2)) = X(t_2) - X(t_1)$; $\sigma([t_1, t_2)) = \sigma(t_2) - \sigma(t_1)$. Tada je

$$E\, X(\Delta_1)\, \overline{X(\Delta_2)} = \sigma(\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

$X(\Delta)$ je ortogonalna stohastička mera, dok je $\sigma(\Delta)$ *strukturna funkcija*. Na taj način moguće je definisati stohastički integral

Stiltjesa pomoću jednakosti

$$\int_a^b f(t)\, dX(t) = \int_a^b f(t)\, X(dt),$$

u kome je $X(t)$ proces sa ortogonalnim priraštajima. Ovaj integral postoji za proizvoljnu Borelovsku funkciju $f(t)$, $t \in [a, b)$ za koju je

$$\int_a^b |f(t)|^2\, \sigma(dt) < +\infty,$$

gde $\sigma(dt)$ je mera, koja odgovara monotonoj funkciji $\sigma(t)$. Analogno se definiše stohastički integral na celoj realnoj osi.

III

# SPEKTRALNI MULTIPLICITET SLUČAJNOG PROCESA

## 1. *PROSTORI SLUČAJNOG PROCESA I NJEGOVE KOVARIJANSNE FUNKCIJE*.-

Neka je H Hilbertov prostor svih slučajnih promenljivih X sa $E\,X = 0$ i $E|X|^2 < +\infty$.

Dati slučajni proces X(t), sa $E\,X(t) = 0$ i $E|X(t)|^2 < +\infty$, neprekidnim vremenom $t \in T = (-\infty, +\infty)$, za svako fiksno $t \in T$ pretstavlja jednu slučajnu promenljivu - jednu tačku u Hilbertovom prostoru H. Kada t prelazi vrednostima nekog intervala iz T, proces X(t) opisuje jednu krivu u Hilbertovom prostoru H.

Definisaćemo odredjene podprostore od H koje pridružujemo krivoj ili procesu X(t):

$$H(X) = \overline{S\{X(t), -\infty < t < +\infty\}}$$

$$H_t(X) = \overline{S\{X(s), -\infty < t < +\infty\}}$$

$$H_{-\infty}(X) = \bigcap_t H_t(X).$$

Ovde smo sa $\overline{S\{\cdot\ \cdot\ \cdot\}}$ označili podprostor od H reprodukovan slučajnim promenljivima označenih unutar zagrada.

U ovom radu biće razmatrani jedino slučajni procesi X(t), koji ispunjavaju sledeća dva uslova:

(A) Proces X(t) je regularan, tj., podprostor $H_{-\infty}(X)$ sadrži samo nul elemenat od H;

(B) Za svako t postoje limesi $X(t \pm 0)$ i $X(t - 0) =$

$= X(t)$. Iz uslova (B) sledi da su prostori $H_t(X)$ separabilni, jer *linearna envelopa skupa* $X(t_k)$ , gde $t_k$ su racionalni brojevi, $t_k \leqslant t$, je svuda gusta u $H_t(X)$.

Poznato je da funkcija kovarijanse $\Gamma(s, t)$ svakog slučajnog procesa $X(t)$, kao nenegativno definitna funkcija, reprodukuje jedan Hilbertov prostor, koji ćemo označiti sa $H(\Gamma)$. Prostor $H(\Gamma)$ ima sledeće osobine:

*1. $\Gamma(s, t) \in H(\Gamma)$ kao funkcija od $s$, za svako $t \in T$;*

*2. Skalarni proizvod $\langle g(s), \Gamma(s, t)\rangle = g(t)$ za svako $g \in H(\Gamma)$.*

*Funkcija kovarijanse $\Gamma(s, t)$, $s, t \in T$, naziva se reprodukujuće jezgro prostora $H(\Gamma)$.*

*Podprostori $H_t(\Gamma) \subset H(\Gamma)$ reprodukujućeg jezgra $\Gamma(s, t)$ definišu se analogno prostorima $H_t(X)$ procesa $X(t)$:*

$$H_t(\Gamma) = \overline{S\{\Gamma(s, t'), -\infty < t' \leqslant t\}}$$

$$H_{-\infty}(\Gamma) = \bigcap_t H_t(\Gamma).$$

I za podprostore $H_t(\Gamma)$ reprodukujućeg jezgra $\Gamma(s, t')$ pretpostavićemo da ispunjavaju oba uslova: (A) i (B).

*Postoji izometrijsko preslikavanje podprostora $H_t(X)$ na podprostor $H_t(\Gamma)$. Ovo preslikavanje definiše se korespondencijom $X(t') \longleftrightarrow \Gamma(s, t')$, $t' \leqslant t$* (vidi[9] T. I.4.).

Ovde ćemo navesti nekoliko primera u kojima se pokazuje kako se iz datog slučajnog procesa $X(t)$ i njgove kovarijansne funkcije $\Gamma(s, t)$, konstruiše familija podprostora $H_t(X)$ i $H_t(\Gamma)$.

*P r i m e r 3. 1.* Neka je dat slučajni proces $X(t)$:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \\ F(t)Y, & t \in (0, 1) \\ F(1)Y, & t \in [1, +\infty) \end{cases}$$

gde je $F(t)$ neslučajna funkcija, dok $Y$ je slučajna promenljiva sa $E|Y|^2 = 1$. Podprostori $H_t(X)$ su:

$$H_t(X) = h: \begin{cases} h = \sum_k F(t_{kn}) c_{kn} Y = cY, & c \in R,\ 0 < t_{kn} \leqslant t < +\infty, \\ h = 0, & -\infty < t_{kn} \leqslant 0. \end{cases}$$

Odgovarajući podprostori $H_t(\Gamma)$ biće:

$$H_t(\Gamma) = g: \begin{cases} g(s) = \langle g(u), \Gamma(u, s)\rangle = E\,X(s)\,h(u) = E\,F(s)Y\,cY = \\ \qquad = c\,F(s), & 0 < u,\ s \leqslant t < +\infty, \\ 0, & -\infty < \min / u, s / \leqslant 0. \end{cases}$$

*P r i m e r 3. 2.* (vidi [14] str. 512). Neka je $X(t)$ slučajni proces, definisan za svako $t \in T = t_1, t_2, \ldots$ sa funkcijom kovarijanse (kovarijansnom matricom) $\Gamma(t_i, t_j)$:

$$\Gamma(t_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{za } j = i, \\ 0 & \text{za } j \neq i \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

Označimo sa $H(X)$ prostor slučajnog procesa $X(t)$:

$$H(X) = \left\{h:\ h = \sum_i g(t_i)\,X(t_i),\ \sum_i |g(t_i)|^2 < +\infty.\right\}$$

Skalarni proizvod dva elementa $h_1$ i $h_2$ prostora $H(X)$ je:

$$(h_1, h_2) = E\,h_1\overline{h}_2 = E[\sum_i g_1(t_i)\,X(t_i) \sum_j \overline{g}_2(t_j)\,\overline{X}(t_j)] =$$

$$= \sum_i \sum_j g_1(t_i)\, \overline{g}_2(t_j)\, \Gamma(t_i, t_j) = \sum_i g_1(t_i)\, \overline{g}_2(t_i).$$

Prostor svih nizova $g(t) = (g(t_1), g(t_2), \ldots)$ i njihovih graničnih vrednosti u sr. kv. sa skalarnim proizvodom $\langle g_1(t), g_2(t)\rangle = \sum_i g_1(t_i)\, \overline{g}_2(t_i)$ je *izometričan* prostoru $H(X)$. Može se lako pokazati da je: funkcija kovarijanse $\Gamma(t_i, t)$ jedna tačka pomenutog prostora nizova za svako odredjeno $t_i$, i da je $\Gamma(t_i, t)$ *reprodukujuće jezgro* ovog prostora, koji ćemo zbog toga označiti sa $H(\Gamma)$. Zaista, kako je $\Gamma(t_1, t) = (1, 0, 0, \ldots)$; tada je skalarni proizvod

$$\langle g(t), \Gamma(t, t_j)\rangle = E\, h\, X(t_j) = E\,[\sum_i g(t_i)\, X(t_i)\, X(t_j)]$$

$$= \sum_i g(t_i)\, \Gamma(t_i, t_j) = g(t_j).\ ^{*)}$$

*P r i m e r 3. 3.* Neka je $X(t)$ proces sa *ortogonalnim priraštajima* definisan na skupu $T = R$. Hilbertov prostor $H(X)$ je prostor tačaka $h$ pretstavljenih u obliku stohastičkog integrala:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\, dX(s),\ t < +\infty,\ f \in L^2_\sigma(-\infty, t),\ \text{tj.}\ \int_{-\infty}^{t} |f(s)|^2 d\sigma(s) < +\infty.$$

S druge strane kovarijansna funkcija $\Gamma(s, t)$ slučajnog procesa $X(t)$ reprodukuje prostor $H(\Gamma)$ koji je izometričan prostoru $H(X)$. Familiji podprostora:

$$H_t(X) = \left\{ h:\ h(s) = \int_{-\infty}^{s} f(u)\, dX(u),\ f(u) \in L^2_\sigma(-\infty, s),\ s \leqslant t, \right\}$$

---

*) Bio je to primer iz [14] str. 512 u izmenjenom i dopunjenom obliku.

odgovara u ovoj izometriji familija podprostora:

$$H_t(\Gamma) = \left\{g: g(s) = E\, h\, \overline{X}(s) = E[\int_{-\infty}^{s} f(u)\, dX(u) \int_{-\infty}^{s} d\overline{X}(v)] = \int_{-\infty}^{s} f(u) d\sigma(u)\right\}.$$

*P r i m e r 3. 4.* (Vidi [14] str. 512 i [17] str. 158.) Neka je T = R (realna prava), i neka je Y(t) stacionaran proces definisan na T, drugog reda i neprekidan u sr. kv.. Kao što je poznato ovaj proces se može pretstaviti stohastičkim integralom

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dX(x),$$

gde X(t) je *proces sa ortogonalnim priraštajima* sa kovarijansnom funkcijom $\Gamma_X(s, t)$ i funkcijom *raspodele (strukturnom funkcijom)* $E[X(t)]^2 = \sigma(t)$ monotono neopadajućom. Kovarijansna funkcija procesa Y(t) je

$$\Gamma_Y(s, t) = E\, Y(s)\, \overline{Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s-t)}\, d\sigma(x).$$

Familija podprostora $H_t(Y)$ je:

$$H_t(Y) = \left\{h: h(s) = \int_{-\infty}^{s} f(u)\, dX(u),\ s \leqslant t < +\infty,\ f(u) \in L^2(-\infty, t)\right\}.$$

Odgovarajuća familija podprostora $H_t(\Gamma_Y)$ je:

$$H_t(\Gamma_Y) = \left\{g: g(s) = E\, h\, \overline{Y}(s) = E[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, dX(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx}\, dX(x)] \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isu} f(u)\, d\sigma(u),\ s \leqslant t < +\infty \right\}$$

*P r i m e r 3. 5.* Neka je W(t) jedan Vinerov proces definisan za $t \in [0, T]$. Zna se da je to *proces sa ortogonalnim priraštajima* i da je njegova kovarijansna funkcija $\Gamma(s, t)$

$= \min/\ s,\ t\ /$. Ovaj proces definiše jednu *ortogonalnu stohastičku meru* $W(dt)$, i njegova *strukturna funkcija (funcija raspodele)* $\sigma(t) = E|W(t)|^2 = t$ definiše *Lebegovu meru dt.*

Podprostori $H_t(W)$ slično kao u primeru 3. 3. su:

$$H_t(W) = \left\{h:\ h(s) = \int_0^s f(u)\, dW(u),\ f(u) \in L^2[0,\ t],\ s \leqslant t\right\}.$$

Odgovarajuća familija podprostora $H_t(\Gamma)$ izometričnih sa $H_t(W)$ je:

$$H_t(\Gamma) = \left\{g:\ g(s) = E\, h\, W(s) = E[\int_0^T f(u)\, dW(u) \int_0^s dW(v)] = \int_0^s f(u)du,\right.$$
$$\left. s \leqslant t \leqslant T,\ dE|W(t)|^2 = dt\right\}.$$

*P r i m e r 3. 6. (Prostori $H(W)$, $H(\Gamma_W)$, $H(FW)$ i $H(\Gamma_{FW})$.)* Neka je $W(t)$ jedan Vinerov proces, $F(t)$ jedna neslučajna funkcija, definisana u intervalu $[0,\ T]$ gde zadovoljava uslov $0 < m < |F(t)| < M$. Slučajni proces $F(t)\ W(t)$ generira familiju podprostora $H_t(FW)$, koja je identična sa $H_t(W)$, jer je:

$$H_t(FW) = \left\{h:\ h(s) = \int_0^s f(u)\ dW(u),\ f(u) \in L^2[0,\ t],\ s \leqslant t\right\},$$

gradjena isto kao i familija $H_t(W)$ (vidi primer 3.5). Medjutim familije podprostora $H(\Gamma_W)$ i $H(\Gamma_{FW})$ ni kao skupovi funkcija ne moraju biti identični jer je:

$$H_t(\Gamma_W) = \left\{g:\ g(s) = E\ W(s)\ h = \int_0^s f(u)du,\ f(u) \in L^2[0,\ t],\ s \leqslant t\right\}$$

i

$$H_t(\Gamma_{FW}) = \left\{g_F:\ g_F(s) = E\ F(s)\ W(s)\ h = F(s) \int_0^s f(u)du,\ s \leqslant t\right\},$$

čak, šta više, pod nekim uslovima za $F(t)$, oni mogu imati jedino nul funkciju kao zajednički elemenat.

*2. PROCESI SA SPEKTRALNIM MULTIPLICITETOM JEDAN.-* Familija podprostora $H_t(X)$ slučajnog procesa $X(t)$ je neopadajuća po t, tj., $H_{t_1}(X) \subseteq H_{t_2}(X)$ ako je $t_1 < t_2$.

Pretpostavimo da je odredjena tačka s takva da za svako $\alpha > 0$ imamo $H_{s-\alpha}(X) \neq H_{s+\alpha}(X)$. Tada svaki vremenski interval $s-\alpha < u < s+\alpha$ sadrži najmanje jedan $X(u)$ koji ne pripada prostoru $H_{s-\alpha}(X)$, i kaže se da u intervalu $(s-\alpha, s+\alpha)$ proces dobija jedan nov impuls, ili *inovaciju. Skup svih ovakvih tačaka nazvat će se spektar inovacije slučajnog procesa X(t).* (Vidi [5]).

Pretpostavimo da dati slučajni proces $X(t)$ ispunjava uslove (A) i (B). Sa $P_t$ označimo familiju *projekcionih operatora* definisanih na $H(X)$ sa rangom $H_t(X)$. Iz osobina familija podprostora $H_t(X)$ sledi da projektori $P_t$ definišu jedno *razlaganje jedinice*. Očigledno je da se familija $P_t$ jednoznačno definiše datim procesom $X(t)$. (Vidi [5]).

*P r i m e r 3. 7.* Neka je $X(t) = Y \sin \frac{\pi}{2}t$, $0 \leq t < T$, gde je Y jedna slučajna promenljiva. Za ovaj proces je $H_0(X) = 0$, za $t = +0$ proces dobija jednu inovaciju, tako da je $H_{+0}(X) = H_T(X) = H(X)$. Ako sa $P_t$ označimo projektore od $H(X)$ na podprostore $H_t(X)$, tada je za dati proces $X(t)$: $P_{t=0} = 0$, $P_{+0} = P_T = P_{+\infty} = I$.

Neka je $Z \in H(X)$. Familija slučajnih promenljivih koja se dobija projekcijama elementa Z na $H_t(X)$, tj., $P_tZ =$

= Z(t) je jedan proces sa *ortogonalnim priraštajima, čiji spektar inovacije je parcijalni spektar inovacije procesa X(t). Proces Z(t) je parcijalni inovacioni proces procesa X(t).* Odgovarajuća funkcija raspodele *(strukturna funkcija)* $\sigma_Z(t)$, $\sigma_Z(t) = (P_t Z, Z) = (P_t Z, P_t Z) = E|Z(t)|^2$, (vidi [5]), definiše meru $d\sigma_Z(t)$. Prostor $L^2$ sa tom merom označićem sa $L^2_{\sigma_Z}$.

*Ako proces sa ortogonalnim priraštajima Z(t), ispunjava uslov:*

$$H_t(X) = H_t(Z) \quad \text{za svako } t \in (-\infty, +\infty),$$

*tada je on inovacioni proces za X(t).* Za proces X(t) kaže se da ima *spektralni multiplicitet N = 1.* Funkcija $\sigma_Z(t)$ naziva se *spektralni tip procesa X(t).*

Stohastički integral

$$h(s) = \int_{-\infty}^{s} f(u)\, dZ(u), \quad f(u) \in L^2_{\sigma_Z}, \; s \leq t,$$

definiše za svako $s \leq t$, jednu slučajnu promenljivu $h(s) \in H_t(Z)$. Prostor $H^*_t(Z)$ svih slučajnih promenljivih h(s), zadovoljava uvek relaciju

$$H^*_t(Z) \subset H_t(Z),$$

ali obzirom da proces X(t) zadovoljava uslov (B), tada prostori $H^*_t(Z)$ i $H_t(Z)$ su identični, jer i proces Z(t) zadavoljava uslov (B) (Vidi H. Cramer [4]).

U svom poznatom radu T. Hida [9] dvojku (dZ(t), f(t, u)) ili trojku $(dZ(t), f(t, u), H_t(\tilde{X}))$ naziva reprezentacijom procesa X(t) ako je:

1. *Z(t) proces sa ortogonalnim priraštajima (Z(t) je slučajna ortogonalna mera);*

2. *$f(t, u)$ je $\sigma_Z$ merljiva funkcija od u, koja se anulira za $u > t$ i pripada prostoru $L^2_{\sigma_Z}$;*

3. *$\tilde{X}(t) = \int_0^t f(t, u)\, dZ(u)$ je jedna verzija od $X(t)$;*

4. *$H_t(\tilde{X})$ je zatvorena envelopa generirana sa $S\{\tilde{X}(s), s \leqslant t\}$. Funkcija $f(t, u)$ naziva se jedno jezgro reprezentacije.*

T. Hida u [9] daje sledeći primer P. Levia:

*P r i m e r 3. 8.* Neka je $W(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$ jedan Vinerov proces, tada za svako pozitivno n, mogu se odrediti konstante $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ tako da

$$W(t) = \int_0^t [\, c_o + c_1 \frac{u}{t} + c_2 (\frac{u}{t})^2 + \ldots + c_n (\frac{u}{t})^n]\, dW(t)$$

je opet Winerov proces. To pokazuje da $W(t)$ ima beskonačno mnogo reprezentacija.

U [9] dalje T. Hida definiše jednu užu klasu reprezentacija:

*D e f i n i c i j a 3. 1. Reprezentacija $(dZ(t), f(t, u))$ naziva se:*

*I. kanoničkom, ako je*

$$P_s\, X(t) = \int_{-\infty}^{s} f(t, u)\, dZ(u), \quad s \leqslant t, \tag{1}$$

*gde $f(t, u)$ je kanoničko jezgro; i*

*II. čisto kanoničkom ako pored (1) važi i*

$$H_t(X) = H_t(Z) \tag{2}$$

*$f(t, u)$ sada se zove čisto kanoničko jezgro.*

Zatim se dokaže ([9] T. I. 7.) da je reprezentacija $(dZ(t), f(t, u))$ čisto kanonička ako i samo ako, za svako fiksno $t_0 \in (-\infty, +\infty)$,

$$\int_{-\infty}^{t} f(t, u)\ \varphi(u)\ d\sigma(u) = 0, \text{ za svako } t \leqslant t_0,$$

implicira

$$\varphi(u) = 0 \text{ skoro svuda po meri } \sigma_Z \text{ na } (-\infty, t_0).$$

*P r i m e r 3. 9. (T. Hida [9]).* Neka su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ dati sa

$$X_1(t) = \int_0^t (2t - u)\ dW_1(u),$$

$$X_2(t) = \int_0^t (-3t + 4u)\ dW_2(u),$$

gde $W_1(t)$ i $W_2(t)$ su Vinerovi procesi. Koristeći teoremu [9] T. I. 7. može se dokazati da je $(dW_1(t), 2t - u)$ jedna čista kanonička reprezentacija od $X_1(t)$. Medjutim slučajna promenljiva

$$h = \int_0^{t_0} u^2 dW_2(u)$$

je ortogonalna sa svakom slučajnom promenljivom $X_2(t)$ $(t \leqslant t_0)$, što dokazuje da reprezentacija $(dW_2(t), -3t + 4u)$ nije čisto kanonička.

*N a p o m e n a 3. 1.* Ovde ćemo pokazati na osnovu teoreme [9] T. I. 7. da postoji familija funkcija $\varphi(t) = 3Ct^2$, gde je $C > 0$ proizvoljna konstanta za koju slučajne promenljive

$$h = \int_0^{t_0} 3Cu^2 \, dW_2(u),$$

su ortogonalne sa svakom $X_2(t)$, $(t \leqslant t_0)$.

Zaista prema pomenutoj teoremi, rešavanjem jednačine

$$\int_0^t (-3t + 4u) \, \varphi(u) \, du = 0$$

imamo

$$- 3t \int_0^t \varphi(u) \, du + 4 \int_0^t u \, \varphi(u) \, du = 0$$

$$- 3t(g(t) - g(0)) + 4u \, g(u) \Big|_0^t - 4 \int_0^t g(u) \, du = 0,$$

gde sa $g(t)$ označili smo jednu primitivnu funkciju od $\varphi(t)$, dalje imamo

$$tg(t) + 3t \, g(o) - 4 \int_0^t g(u) \, du = 0,$$

diferenciranjem po t dobija se

$$t \, g'(t) + g(t) + 3g(0) - 4g(t) = 0$$

$$\frac{g'(t)}{g(t) - g(0)} - \frac{3}{t} = 0$$

$$\ln \frac{g(t) - g(0)}{t^3} = \ln C,$$

odavde dobijamo

$$\varphi(t) = g'(t) = 3Ct^2.$$

Kao posebno rešenje $\varphi(t)$ dobija se funkcija iz datog primera $\varphi(t) = t^2$.

*3. PROCESI SPEKTRALNOG MULTIPLICITETA N.*- Neka su slučajne promenljive $h_{1k}$, $k = 1, 2, \ldots, M_1$, izvučene iz prostora $H(X)$ na isti način kao u primeru 1. 1. Proces $P_t h_{1k}$

$= h_{lk}(t)$ ima ortogonalne priraštaje, jer je $P_{t+s} - P_t h_{lk} \perp H_t(X)$ za $s > 0$. Dva ovakva procesa $h_{lk}(t)$ i $h_{lj}(t)$, $k \neq j$ su ortogonalna obzirom da podprostori $H(h_{lk})$ i $H(h_{lj})$ su invarijantni u odnosu na familiju *projekcionih operatora* $P_t$. Ako je (vidi primer 1.1.)

$$\bigoplus_{1}^{M_1} H(h_{lk}) = H(X)$$

tada je ( [16] str. 9) i

$$\bigoplus_{1}^{M_1} H_t(h_{lk}) = H_t(X) \qquad (1)$$

*Višedimenzioni slučajni proces* $\{h_{lk}(t)\}_1^{M_1}$ *sa ortogonalnim komponentama* $h_{lj}(t)$, $-\infty < t < +\infty$, $(h_{lj}(s) \perp h_{lk}(t)$, *za* $j \neq k$ *i* $s, t < +\infty)$ *gde svaka komponenta pretstavlja jedan proces sa ortogonalnim priraštajima, ako ispunjava uslov (1), naziva se inovacioni proces za slučajni proces* $X(t)$ *([16] str. 8). Zavisno od medjusobnog odnosa funkcija raspodele*

$$\{\rho_{lk}(t)\}_1^{M_1} \text{ inovacionog procesa } \{h_{lk}(t)\}_1^{M_1},$$

*moguće je pokazati da postoji inovacioni proces* $\{z_k(t)\}_1^N$ *sa najmanjim brojem dimenzija* $N$ *koji ispunjava uslov* $1 \leq N \leq M_1$.

Tačke rasta funkcije $\rho_{lk}(s)$ su tačke rasta podprostora $H_t(h_{lk})$, $s \leq t$. Sa $A_{lk}$ označimo skup tačaka rasta funkcije $\rho_{lk}(t)$. Skup $\bar{A}_{ik}$ zove se *nosilac mere* $d\rho_{lk}(t)$. Dve *mere* mogu biti *ortogonalne* $d\rho_{1i}(t) \perp d\rho_{1j}(t)$ (kada su *nosioci disjunktni, tj.,* $\bar{A}_{1i} \cap \bar{A}_{1j} = \emptyset$), ili *ne ortogonalne* (kada je $\bar{A}_{1i} \cap \bar{A}_{1j} \neq \emptyset$). *Podčinjenost mere* $d\rho_{1j}(t)$ od $d\rho_{1i}(t)$ kao i njihova *ekvivalentnost* su posebni slučajevi *ne ortogonalnosti. Multiplicitet N* procesa X(t) zavisi od pomenutih medjusobnih *odnosa mera* $\left\{d\rho_{1k}(t)\right\}_{1}^{M_1}$. Razmotrićemo sledeća tri slučaja:

1. Ako su *mere* $d\rho_{1i}(t)$, $d\rho_{1j}(t)$ *ortogonalne* za $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, M_1$, tada nijedno $s < t$ nije istovremeno *tačka rasta* za oba podprostora $H_t(h_{1i})$ i $H_t(h_{1j})$. *Multiplicitet* u ovom slučaju je $N = 1$, jer postoji elemenat $Z \in H(X)$, koji generiše prostor $H(Z)$ i za koji važi $H_t(Z) = H_t(X)$, tj., $Z(t) = P_t(Z)$ je *inovacioni proces. Elemenat Z* mogao bi na primer biti $Z = \bigoplus_{1}^{M_1} \partial_{1k} h_{1k}$, gde $\partial_{1k}$ su takvi realni brojevi da red (za $M_1 = +\infty$), $E|Z|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\partial_{1k}|^2 E|h_{1k}|^2 < +\infty$. *Strukturna funkcija* procesa $Z(t)$ je $\sigma_Z(t) = \sum_{1}^{M_1} |\partial_{1k}|^2 \rho_{1k}(t)$, *nosilac mere* $d\sigma_Z(t)$ je $\bigcup_{1}^{M_1} \bar{A}_{1k}$.

2. U razmatranju opšteg slučaja ne ortogonalnosti mera, pretpostavimo prvo da je $\{h_{11}(t), h_{12}(t)\}$ jedan inovacioni proces za proces X(t), tj., $H_t(X) = H_t(h_{11}) \oplus H_t(h_{12})$, takav da su *mere* $d\rho_{11}(t)$ *i* $d\rho_{12}(t)$ *ne ortogonalne,* znači $\bar{A}_{11} \cap \bar{A}_{12} \neq \emptyset$, i *ne potčinjene,* tj., $\bar{A}_{11} \setminus \bar{A}_{12} \neq \emptyset$ i

$\overline{A}_{12} \setminus \overline{A}_{11} \neq \emptyset$. Pokazaćemo da ne postoji proces $Z_1(t) = P_t Z_1$, $Z_1 \in H(X)$, koji bi bio inovacioni za proces $X(t)$. Drugim rečima, *multiplicitet procesa $X(t)$* ne može biti jedan, on je $N = 2$.

Postoji elemenat $Z_1 \in H(X)$ koji je maksimalnog spektralnog tipa u $H(X)$. Elemenat $Z_1$ može biti na primer $Z_1 = h_{11} + h_{12}$. Njegov *spektralni tip je $d\sigma_1(t) = d\rho_{11}(t) + d\rho_{12}(t)$ i nosilac mere $d\sigma_1(t)$ je skup $\overline{A}_{11} \cup \overline{A}_{12}$*. Prostor $H(Z_1)$ je prav podprostor od $H(X)$, $H(Z_1) \subset H(X) = H(h_{11}) \oplus H(h_{12})$. Ako je $s \in \overline{A}_{11} \setminus \overline{A}_{12}$, $s$ je *tačka rasta* podprostora $H_t(h_{11})$ i *tačka konstantnosti* podprostora $H_t(h_{12})$. Zato postoji $\partial_1 > 0$, tako da $P_{s+\partial_1}h_{12} - P_s h_{12} = 0$, i za sve $\alpha > 0$, $\alpha < \partial_1$, je $P_{s+\alpha}Z_1 - P_s Z_1 = P_{s+\alpha}h_{11} - P_s h_{11}$ i

$$H_{s+\alpha}(X) \ominus H_s(X) = H_{s+\alpha}(Z_1) \ominus H_s(Z_1) = H_{s+\alpha}(h_{11}) \ominus H_s(h_{11}). \qquad (1)$$

Isto tako ako je $s \in \overline{A}_{12} \setminus \overline{A}_{11}$, $s$ je tačka rasta za $H_t(h_{12})$ i *tačka konstantnosti* za $H_t(h_{11})$. Zato postoji $\partial_2 > 0$, tako da $P_{s+\partial_2}h_{11} - P_s h_{11} = 0$, i za sve $\alpha > 0$, $\alpha < \partial_2$ je

$$P_{s+\alpha}Z_1 - P_s Z_1 = P_{s+\alpha}h_{12} - P_s h_{12}, \text{ i}$$

$$H_{s+\alpha}(X) \ominus H_s(X) = H_{s+\alpha}(Z_1) \ominus H_s(Z_1) = H_{s+\alpha}(h_{12}) \ominus H_s(h_{12}). \qquad (2)$$

Relacije (1) i (2) mogli bismo izraziti skupa na ovaj način: Za svako $s \in (\overline{A}_{11} \setminus \overline{A}_{12}) \cup (\overline{A}_{12} \setminus \overline{A}_{11})$, postoje $\partial_1, \partial_2 > 0$, tako da za svako $\alpha > 0$, i $\alpha < \min/\partial_1, \partial_2/$ važi jednakost:

$$H_{s+\alpha}(Z_1) \ominus H_s(Z_1) = H_{s+\alpha}(X) \ominus H_s(X). \qquad (3)$$

Medjutim za tačke $s \in \overline{A}_{11} \cap \overline{A}_{12}$, koje su tačke rasta za oba prostora $H_t(h_{11})$ i $H_t(h_{12})$, zbog $P_t h_{11} \perp P_t h_{12}$, tačka s je isto tako tačka rasta za $H_t(Z_1)$, ali podprostor $H_{s+\alpha}(X) \ominus$ $\ominus H_s(X) = [H_{s+\alpha}(h_{11}) \oplus H_{s+\alpha}(h_{12})] \ominus [H_s(h_{11}) \oplus H_s(h_{12})] \supset$ $\supset [H_{s+\alpha}(h_{11}+ h_{12}) \ominus H_s(h_{11} + h_{12})] = H_{s+\alpha}(Z_1) \ominus H_s(Z_1)$. Odavde sledi da je $H(Z_1) \subset H(X)$. Postoji $Z_2 \in [H(X) \ominus H(Z_1)]$, koji je maksimalnog spektralnog tipa u $H(X) \ominus H(Z_1)$. Kako je za $s \in \overline{A}_{11} \cap \overline{A}_{12}$ i za svako $\alpha > 0$,

$$[H_{s+\alpha}(X) \ominus H_s(X)] \supset [H_{s+\alpha}(Z_1) \ominus H_s(Z_1)],$$

sledi da je takav s *tačka rasta* prostora $H_t(Z_2)$, tako da je $\overline{A}_{11} \cap \overline{A}_{12}$ *nosilac mere* $d\sigma_{Z_2}(t)$ i zato je $d\sigma_{Z_2}(t) \ll d\sigma_{Z_1}(t)$. Zatim elemenat $Z_2$ je generirajući za prostor $H(X) \ominus H(Z_1)$, tj., $H(Z_2) = H(X) \ominus H(Z_1)$, jer ako je $H(Z_2) \subset [H(X) \ominus H(Z_1)]$, tada bi postojala neka tačka $s \in \overline{A}_{11} \cap \overline{A}_{12}$, koja bi bila *rastuća* za $H(Z_3)$ gde je $Z_3$ *maksimalan elemenat* u prostoru $H(X) \ominus [H(Z_1) \oplus H(Z_2)]$ tj., priraštaji $P_{s+\alpha}Z_1 - P_s Z_1$, $P_{s+\alpha}Z_2 - P_s Z_2$ i $P_{s+\alpha}Z_3 - P_s Z_3$, bili bi ortogonalni za svako $\alpha > 0$, suprotno prvobitnoj pretpostavci da postoje najviše dva ortogonalna priraštaja u svakoj tački s, tj., $P_{s+\alpha}h_{11} - P_s h_{11}$ i $P_{s+\alpha}h_{12} - P_s h_{12}$, koji su $\neq 0$. Ovime smo pokazali da postoji inovacioni proces $\{Z_1(t), Z_2(t)\}$ sa $d\sigma_{Z_1}(t) \gg$ $\gg d\sigma_{Z_2}(t)$ sa najmanjim brojem $N = 2$, komponenata, što znači da *multiplicitet* datog procesa $X(t)$ je $N = 2$.

3. Pretpostavimo da je sada $\{h_{11}(t),\ h_{12}(t),\ h_{13}(t)\}$ jedan inovacioni proces za $X(t)$. Neka nosioci mera ispune jednu od sledećih dveju mogućnosti:

a) $(\bar{A}_{11} \cap \bar{A}_{12}) \cup (\bar{A}_{11} \cap \bar{A}_{13}) \cup (\bar{A}_{12} \cap \bar{A}_{13}) \neq \emptyset$ i

$(\bar{A}_{11} \cap \bar{A}_{12} \cap \bar{A}_{13}) = \emptyset$,

ili

b) $\bar{A}_{11} \cap \bar{A}_{12} \cap \bar{A}_{13} \neq \emptyset$.

U slučaju a) multiplicitet slučajnog procesa je $N = 2$, jer u svakoj tački $s$ postoje najviše dva ortogonalna priraštaja i u smislu diskusije tačke 2., inovacioni proces $\{Z_1(t),\ Z_2(t)\}$ je onaj sa najmanjim brojem komponenata i odgovarajuće mere $d\sigma_{Z_1}(t)$ i $d\sigma_{Z_2}(t)$ su u relaciji $d\sigma_{Z_1}(t) \gg$ $\gg d\sigma_{Z_2}(t)$.

U slučaju b) multiplicitet slučajnog procesa $X(t)$ je $N = 3$. Jer u ovom slučaju, shodno diskusiji tačke 2., došli bismo do zaključka da u svakoj tački $s \in (-\infty, +\infty)$ postoje najviše tri ortogonalna priraštaja.

Na osnovu razmatranja u tačkama 1., 2. i 3., možemo postaviti sledeću teoremu:

*Teorema 3. 1. Ako je* $\{h_{1k}(t)\}_1^{M_1}$ *jedan inovacioni proces za* $X(t)$, *tada multiplicitet procesa* $X(t)$ *je najveći broj* $n$ *za koji važi:*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \bar{A}_{1k_j} \neq \emptyset, \qquad 1 \leqslant n \leqslant M_1,$$

*gde* $\overline{A}_{lk_j}$ *su nosioci mera* $d\rho_{lk_j}$, *i* $\rho_{lk_j}(t) = E|h_{lk_j}(t)|^2$.

*Definicija 3. 2. Reprezentacija* $\{dZ_n(t), f_n(t, u)\}_1^N$ *datog procesa* $X(t)$ *naziva se kanonička Hide - Kramera (vidi [18]) ako je:*

1. $\tilde{X}(t) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} f_n(t, u)\, dZ_n(u)$ *verzija od* $X(t)$,

2. $\sigma_{Z_1} \geqslant \sigma_{Z_2} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{Z_N}$ *spektralni tip od* $X(t)$,

3. $H_t(\tilde{X}) = \bigoplus_1^N H_t(Z_n) = H_t(X)$, *gde* $\{Z_n(t)\}_1^N$ *su ortogonalni procesi sa ortogonalnim priraštajima, funkcije* $f_n(t, u)$ *su* $\sigma_{Z_n}$ *merljive i* $\int_{-\infty}^{t} |f_n(t, u)|^2\, d\sigma_{Z_n}(u) < +\infty$.

U [5] T. 2. dokaže se da se spektralni tip (prema tome i *multiplicitet)* datog procesa X(t) odredjuje jednoznačno njegovom funkcijom kovarijanse $\Gamma(s, t)$. Očigledno ova teorema se svodi na teoremu o postojanju izometrijskog preslikavanja V: $X(t) \xleftrightarrow{V} \Gamma(s, t)$ prostora $H_t(X)$ na $H_t(\Gamma)$ ( vidi [9] T. I. 4.).

Naročiti interes za problem multipliciteta slučajnog procesa probudio je primer H. Kramera u [5]: " *da je moguće naći proces koji ima bilo koji dati spektralni tip"*, znači unapred dati *multiplicitet*.

*Primer 3. 10.* Proces iz primera 3.2. je diskretan i kao takav prema [3] ima multiplicitet N = 1.

*P r i m e r 3. 11.* Proces $X(t)$ sa ortogonalnim priraštajima ima multiplicitet $N = 1$, jer svaka slučajna promenljiva iz prostora $H_t(X)$ ima pretstavljanje

$$h(s) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\, dX(u), \qquad s \leqslant t.$$

*P r i m e r 3. 12.* Neka je $Y(t)$ stacionaran kao u primeru 3.4. Takav proces ima reprezentaciju

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\, dX(u),$$

gde je $X(t)$ proces sa ortogonalnim priraštajima. Proces $Y(t)$ ima spektralni multiplicitet $N = 1$, jer iz gornje reprezentacije sledi $H_t(Y) = H_t(X)$.

*P r i m e r 3. 13. ([9]).* Neka su $W_1(t)$ i $W_2(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, dva ortogonalna Vinerova procesa. Definišimo

$$X(t) = \begin{cases} W_1(t), & \text{ako je } t \text{ racionalan} \\ W_2(t), & \text{ako je } t \text{ iracionalan} \end{cases}$$

Njegova kanonička reprezentacija je

$$X(t) = \int_0^t f(t, u)\, dW_1(u) + \int_0^t [1 - f(t, u)]\, dW_2(u)$$

gde je

$$f(t, u) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } t \text{ racionalan} \\ 0, & \text{ako je } t \text{ iracionalan.} \end{cases}$$

*N a p o m e n a 3. 2.* U poslednjem primeru inovacioni proces procesa $X(t)$ je $\{W_1(t), W_2(t)\}$, jer je $H_t(X) = H_t(W_1) + H_t(W_2)$. Odgovarajuće funkcije distribucije su $\sigma_1(t) = t = \sigma_2(t)$, tako da su spektralne mere $d\sigma_1(t)$, $d\sigma_2(t)$ ekvivalentne, tj., nosioci spektralnih mera su identični. Na osnovu teoreme 3. 1. multiplicitet procesa $X(t)$ je $N = 2$.

IV

# MULTIPLICITET ZBIRA ORTOGONALNIH SLUČAJNIH PROCESA

*1. ZBIR DVA ORTOGONALNA SLUČAJNA PROCESA.*- Neka su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ dva ortogonalna slučajna procesa svaki sa multiplicitetom $N = 1$. Njihov ortogonalni zbir označimo sa $X_0(t)$,

$$X_0(t) = X_1(t) + X_2(t).$$

Očigledno familija podprostora $H_t(X_0)$ može ispuniti jednu od sledećih dveju relacija:

a) $H_t(X_o) \subset H_t(X_1) + H_t(X_2)$,

ili

b) $H_t(X_0) = H_t(X_1) + H_t(X_2)$.

Problem multipliciteta slučajnog procesa $X_0(t)$, koji ispunjava uslov a), nije poznato da je rešen u opštem slučaju. Multiplicitet može biti jedan ili dva.

U ispitivanju slučaja b) označimo sa $h_1(t)$ i $h_2(t)$ inovacione procese za $X_1(t)$ i $X_2(t)$ respektivno. Tada proces $\{h_1(t), h_2(t)\}$ je inovacioni za $X_o(t)$. Sa $d\rho_1(t)$, $d\rho_2(t)$ označimo odgovarajuće *spektralne mere* ovog inovacionog procesa, i sa $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ nosioce ovih mera. Na osnovu teoreme 3.1. možemo zaključiti da ako je $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$, tj., ako su mere $d\rho_1(t)$ i

$d\rho_2(t)$ ortogonalne, tada je multiplicitet $N = 1$ za $X_0(t)$; medjutim ako je $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \neq \emptyset$, tj., odgovarajuće mere ne ortogonalne, tada multiplicitet za $X_0(t)$ je $N = 2$, i jedan od generirajućih elemenata je $Z_1 = h_1 + h_2$, sa spektralnom merom $d\sigma_1(t) = d\rho_1(t) + d\rho_2(t)$, a drugi generirajući elemenat $Z_2$ je maksimalnog spektralnog tipa u prostoru $H(X_0) \ominus H(Z_1)$, sa spektralnom merom $d\sigma_2(t)$. Očigledno je $d\sigma_1(t) \gg d\sigma_2(t)$.

*Ako je linearno množtvo $H(\Gamma_1) \cap H(\Gamma_2) = 0$ (nul funkcija)tada je $H_t(X_o) = H_t(X_1) + H_t(X_2)$ (vidi [ 17] T. 1.). Ovom teoremom Siraje, otkriva se slučaj pod b).*

U [ 10] je Hitsuda ispitao multiplicitet slučajnog procesa

$$X_0(t) = W_1(t) + F(t)\ W_2(t),$$

u zavisnosti od prirode funkcije $F(t)$, kada su $W_1(t)$ i $W_2(t)$ ortogonalni Vinerovi procesi. Mi ćemo ispitati multiplicitet procesa

$$X_0(t) = W_1(t) + F(t)\ X_2,$$

gde je $X_2$ jedna slučajna promenljiva ortogonalna sa $W_1(t)$, i $F(t)\ X_2 = 0$ za $t \leqslant 0$.

*T e o r e m a 4. 1. Ako je $F(t)$ apsolutno neprekidna funkcija ali $F'(t)$ ne pripada $L^2(0, m)$ za bilo koji interval $(0, m)$; ili pak ako je $F(t)$ funkcija neograničene varijacije skoro svuda po meri $dt$ u intervalu $(0, m)$, tada je proces $X_o(t) = W_1(t) + F(t)\ X_2$ multipliciteta $N = 2$.*

*D o k a z :* Kako je

$$H_t(\Gamma_1) = \left\{g_1 : g_1(s) = \int_0^s f_1(u)\, du,\ f_1(u) \in L^2[0, T],\ s \leqslant t \leqslant T\right\}$$

i

$$H_t(\Gamma_2) = \left\{g_2 : g_2(s) = E[F(s)\, X_2\, c\, X_2] = cF(s),\ c \in R,\ s \leqslant t\right\}.$$

Ako budemo pretpostavili da je $g_1(s) = g_2(s)$ tada bi $\dfrac{dg_2(s)}{ds} =$ $cF'(s)$ bilo jednako sa $\dfrac{dg_1(s)}{ds} = f_1(s)$ samo za $c = 0$, jer je $f_1 \in L^2$ dok $F'(s)$ to nije. Iz ovoga sledi da je za $g_2(s) =$ $0 \cdot F(s) = 0$ jedino moguće da je $g_1 = g_2$. Prema tome skup $H(\Gamma_1) \cap H(\Gamma_2)$ sadrži samo nul funkciju i na osnovu [17] T. 1. je $H(X_0) = H(W_1) \oplus H(FX_2)$. Kako je $d\sigma_{W_1} = dt$, $t > 0$, i $d\sigma_2(+0) \neq 0$, inače $d\sigma_2(t) = 0$, sledi da su mere neortogonalne, tačnije, sledi da je $d\sigma_{W_1}(t) \gg d\sigma_2(t)$, i multiplicitet za $X_0(t)$ je $N = 2$.

Uzmemo li da je $F(t)$ funkcija neograničene varijacije skoro svuda u $(0, m)$, tada očigledno prostori $H(\Gamma_1)$ i $H(\Gamma_2)$, kao skupovi funkcija imaju kao zajedničku samo nul funkciju, jer je $H(\Gamma_1)$ prostor apsolutno neprekidnih funkcija, dok $H(\Gamma_2) =$ $= cF(t)$ je prostor funkcije sa neograničenom varijacijom pa je $H(X_0) = H(W_1) \oplus H(FX_2)$. Kako je opet $d\sigma_{W_1}(t) \gg d\sigma_2(t)$, sledi da je $N = 2$.

Razmotrićemo sada multiplicitet slučajnog procesa

$$X_0(t) = X_1(t) + F(t)\, X_2(t)$$

gde je

$$X_i(t)=\begin{cases} Z_i, & 0 < t < +\infty,\ i = 1,\ 2, \\ 0, & -\infty < t \leqslant 0, \end{cases}$$

a $Z_1$ i $Z_2$ su ortogonalne slučajne promenljive, i funkcija $F(t)$ je ne slučajna, $F(t) \neq 0$, za $t \in (0, c)$.

*T e o r e m a 4. 2. Ako je $F(t) \neq const.$ na $(0, c)$ tada proces $X_0(t)$ ima multiplicitet $N = 2$.*

*D o k a z:*

$H(\Gamma_1) = \{g_1:\ g_1(s) = E[Z_1\ aZ_1] = a' \in R,\ 0 < s\}$,

$H(\Gamma_2) = \{g_2:\ g_2(s) = E[F(s)Z_2\ bZ_2] = b'F(s),\ b' \in R,\ 0 < s\}$.

Kao što se vidi prostor $H(\Gamma_1)$ je realna prava dok je $H(\Gamma_2) = b'F(t)$. Funkcija $F(t)$ ne pripada prostoru $H(\Gamma_1)$ obzirom da nije konstanta na $(0, c)$. Odavde je očigledno da je $H(X_0) = H(X_1) \oplus H(X_2)$ (vidi [17] T. 1.). Uslov $F(t) \neq 0$ na nekom intervalu $(0, c)$ je bitan jer spektralne mere su tada neortogonalne, tačnije, *spektralne mere* za $X_1(t)$ i $F(t)\ X_2(t)$ su ekvivalentne, $d\sigma_2(+0) = m\ d\sigma_1(+0)$. Otud proces $X_0(t)$ ima multiplicitet $N = 2$.

*2. INOVACIONI PROCESI I SPEKTRALNO ORTOGONALNI PROCESI.- D e f i n i c i j a 4. 2. ([18]). Slučajni procesi $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, svaki sa multiplicitetom $N = 1$, su spektralno ortogonalni, ako za slučajni proces*

$$X_0(t) = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i(t),$$

*za svako t važi*

$$H_t(X_0) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_t(X_i).$$

Primetimo da za n = 2, ovoj definiciji odgovara slučaj b) u prethodnom paragrafu.

Poznato je da za svaki proces $X_i(t)$ sa multiplicitetom N = 1, postoji elemenat $h_i \in H(X_i)$, koji ima *maksimalan spektralni tip, tako da* $P_t h_i \doteq h_i(t)$ *je inovacioni proces za* $X_i(t)$.

*Ako su* $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ *spektralno ortogonalni i* $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$ *njihovi inovacioni procesi, tada važi sledeća teorema:*

*T e o r e m a 4. 3.* $1^o$. *Proces* $\{h_i(t)\}_1^n$ *je jedan inovacioni proces za* $X_0(t)$; *i* $2^o$. *Multiplicitet procesa* $X_0(t)$ *je najveći broj* $N \leqslant n$ *za koji je presek* $\bigcap_{k=1}^{N} \bar{A}_{i_k} \neq \emptyset$, *gde* $\bar{A}_{i_k}$ *je nosilac mere* $d\rho_{i_k}(t) = dE|h_{i_k}|^2$.

*D o k a z:* $1^o$. *Iz* $X_i(t) \perp X_j(t)$, $i \neq j$, *sledi*

$$P_{H_t(X_0)}\, h_i = P_{H_t(X_i)}\, h_i = h_i(t),$$

tako da je $P_t h_i = h_i(t)$ jedan parcijalni inovacioni proces za $X_0(t)$. Zatim iz

$$H_t(X_0) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_t(X_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_t(h_i),$$

sledi da je $\{h_i(t)\}_1^n$ jedan inovacioni proces za $X_0(t)$.

$2^o$. Dokaz ovog dela teoreme sledi iz teoreme 3. 1. prethodne glave. (Vidi [18]).

Za Vinerov proces $W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \sin(k + 1/2)\pi t$, razvijen u ortogonalni red na intervalu $(0, 1)$, pokaže se u [12] da njegov odsečak $X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \sin(k + 1/2)\pi t$ ima multiplicitet n. Mi ćemo posmatrati proces $X_0(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k F_k(t)$, $t \in [0, T]$, ($X_k F_k(t) = 0$ za $t \leqslant 0$, $X_k F_k(t) = X_k F_k(T)$ za $t < T$,), gde $X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, su ortogonalne slučajne promenljive, a $F_k(t)$ su neslučajne funkcije. Multiplicitet slučajnog procesa $X_0(t)$ zavisi od prirode funkcija $F_k(t)$.

*T e o r e m a 4. 4.* $1^o$. *Ako su funkcije* $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *linearno nezavisne na intervalu* $(a, b) \subset [0, T]$, *i* $F_k(t) = 0$ *za* $t \leqslant a$, *tada: spektralne mere* $d\sigma_k(t)$ *su ekvivalentne; procesi* $X_1F_1(t), X_2F_2(t), \ldots, X_nF_n(t)$ *su spektralno ortogonalni i multiplicitet slučajnog procesa* $X_0(t)$ *je n.*

$2^o$. *Medjutim, ako su funkcije* $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *različite od nule na intervalu* $(a_k, b_k)$, $a_i \neq a_j$, $(a_k, b_k) \subset [0, T]$ *i* $F_k(t) = 0$ *za* $t \leqslant a_k$, *tada spektralne mere* $d\sigma_k(t)$ *su ortogonalne, slučajni procesi* $X_1F_1(t), X_2F_2(t), \ldots, X_nF_n(t)$, *su spektralno ortogonalni i multiplicitet procesa* $X_0(t)$ *je* $N = 1$.

*D o k a z :* $1^o$. Familija podprostora procesa $X_kF_k(t)$ je:

$$H_t(X_kF_k) = \begin{cases} 0, & t \leqslant a, \\ H_{a+0}(X_kF_k) = c_kX_k, & t > a,\ c_k \in R. \end{cases}$$

a njegov spektralni tip

$$\sigma_k(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \sigma_k(a+0) = \text{const.} > 0, & t > a. \end{cases}$$

Familije podprostora, reprodukovanih kovariansnom funkcijom $\Gamma_k(u, v) = F_k(u)\, F_k(v)$ su:

$$H_t(\Gamma_k) = \{g_k:\ g_k(s) = E[X_kF_k(s)\ c_kX_k] = c_kF_k(s),\ s \leq t,\ c_k \in R\}.$$

Sada ćemo pokazati da su dati procesi $X_1F_1(t)$, $X_2F_2(t), \ldots, X_nF_n(t)$ spektralno ortogonalni. U tom cilju uzećemo slučajnu promenljivu $X = \sum_{i=1}^{j} c_iX_i$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Očigledno promenljiva $X \in \bigoplus_{i=1}^{n} H_t(X_iF_i)$, $t > a$. Ako $X$ ne bi pripadala prostoru $H_t(X_o)$, tada bi $X \perp X_o(t)$, i skalarni proizvod $E[X_o(s)\ X] = 0$, $s \leq t$, tj., $\sum_{i=1}^{j} E[X_iF_i(s)\ c_iX_i] = 0$, odavde sledi jednakost $\sum_{i=1}^{j} c_iF_i(s) = 0$, koja važi jedino ako su koeficijenti $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, j$, obzirom da su funkcije $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$ linearno nezavisne. Što znači da je $X = 0$, i da su dati procesi spektralno ortogonalni. Kako oni imaju i ekvivalentne spektralne mere $d\sigma_k(t)$, na osnovu teoreme 4.3. sledi da multiplicitet procesa $X_o(t)$ je $N = n$.

2°. Familija podprostora slučajnog procesa $X_kF_k(t)$ je:

$$H_t(X_kF_k) = \begin{cases} 0, & t \leq a_k, \\ H_{a_k+0}(X_kF_k) = c_kX_k, & t > a_k,\ c_k \in R, \end{cases}$$

i spektralni tip ovog procesa je

$$\sigma_k(t)=\begin{cases}0, & t \leqslant a_k,\\ \sigma_k(a_k+0) = \text{const.} > 0, & t > a_k,\end{cases}$$

tako da odgovarajuće spektralne mere $d\sigma_i(t)$, $d\sigma_j(t)$, $i \neq j$, su ortogonalne, obzirom da je $a_i \neq a_j$, otud multiplicitet procesa $X_0(t)$ je $N = 1$.

*P r i m e r 4. 1.* [12]. Regularni neprekidni proces

$$X_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \sin(k+ 1/2)\pi t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$(X_0(t) = 0 \text{ za } t < 0, \quad X_0(t) = X_0(1) \quad \text{za} \quad t > 1),$$

gde je

$$X_k = \int_0^1 W(t) \sin(k+ 1/2)\pi t, \; W(t) \text{ je Vinerov proces.}$$

U [12] je pokazano da proces $X_0(t)$ ima multiplicitet $N = n$. Isti zaključak o multiplicitetu ovog procesa može se doneti i na osnovu teoreme 4.4.1°, jer funkcije $F_k(t)=\sin(k+ 1/2)\pi t$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ su linearno nezavisne u intervalu (0, 1), i time se ispunjavaju uslovi teoreme 4.4.1°.

*P r i m e r 4. 2.* Neka su funkcije $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, definisane kao

$$F_k(t) = \begin{cases} t^k, & t \in \left(\dfrac{1}{2^{n-k+1}}, \dfrac{1}{2^{n-k}}\right] \\ 0, & \text{inače,}\end{cases}$$

i neka su $X_k$ ortogonalne slučajne promenljive. Slučajni proces

$$X_0(t) = F_1(t)X_1 + F_2(t)X_2+ \ldots + F_n(t)X_n,$$

ima multiplicitet N = 1 obzirom da funkcije $F_k(t)$ ispunjavaju uslove teoreme $4.4.2^o$.

*3. KONSTRUISANJE PROCESA SA UNAPRED DATIM MULTIPLICITETOM.*- *Prvo ćemo definisati slučajne procese $X_i(t)$, i = 1, 2, ..., n, na sledeći način:*

$$X_i(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 1/2, \\ W_i(1/2), & 1/2 < t \leqslant 2/3, \\ W_i(2/3), & 2/3 < t \leqslant 3/4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ W_i(k/k+1), & k/k+1 < t \leqslant (k+1)/k+2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ W_i(1), & 1 < t, \end{cases}$$

gde su sa $W_i(t)$ označeni ortogonalni Vinerovi procesi, i = 1, 2, ..., n. Procesi $X_i(t)$ su ortogonalni sa ortogonalnim priraštajima. Njihove kovarijansne funkcije su:

$$\Gamma_i(s, t) = \begin{cases} 0, & \min/\ s, t\ / \leqslant 1/2, \\ 1/2, & 1/2 < \min/\ s, t\ / \leqslant 2/3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1, & \min/\ s, t\ / > 1. \end{cases}$$

Odgovarajući podprostori $H_t(X_i)$ i $H_t(\Gamma_i)$ opisuju se kao:

$$H_t(X_i) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 1/2, \\ a_i^{(1)}\ W_i(1/2), & 1/2 < t \leqslant 2/3, \\ a_i^{(1)}\ W_i(1/2) + a_i^{(2)}\ W_i(2/3), & 2/3 < t \leqslant 3/4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

i

$$H_t(\Gamma_i) = \left\{ g_i(s): \begin{array}{ll} 0, & t \leqslant 1/2, \\ E\, X_i(s)\, a_i^{(1)} W_i(1/2) = 1/2\, a_i^{(1)}, & 1/2 < t \leqslant 2/3, \\ 1/2\, a_i^{(1)} + 2/3\, a_i^{(2)}, & 2/3 < t \leqslant 3/4, \\ \ldots, & \end{array} \right.$$

gde $a_i^{(k)}$ su proizvoljne konstante. Očigledno je da za $k/k+1 < t \leqslant (k+1)/k+2$, prostor $H_t(\Gamma_i)$ pretstavlja k - dimenzionalni Euklidski prostor. Za $t \geqslant 1$, prostor $H_t(\Gamma_i)$ pretstavlja prostor $l^2$ svih beskonačnih nizova ako je ispunjeno $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_i^{(k)}|^2 < +\infty$.

$2^o$. Sada ćemo konstruisati proces $X_0(t)$ kao

$$X_0(t) = X_1(t) + F(t)\, X_2(t) + \ldots + F^{n-1}(t)\, X_n(t),$$

koji u zavisnosti od prirode funkcije $F(t)$ može imati unapred dati multiplicitet. Ovu činjenicu izrazimo sledećom teoremom:

*T e o r e m a 4. 5.* Tačkama $t = l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_m^{(k)}$ delimo vremeni interval $(k/k+1, (k+1)/k+2]$ na m+l delova. *Ako funkcija $F(t)$ ima konstantne različite vrednosti $|C_1^{(k)}|$, $|C_2^{(k)}|, \ldots, |C_j^{(k)}|$, $j < m < n$, na prvih j podintervala za svako $k = 1, 2, \ldots$, dok na (j+1) podintervalu ne konstantnu vrednost, tj., na $(l_j, \partial_k)$ je $F(t) \neq const.$ (i neprekidna je na primer), gde je $\partial_k \leqslant (k+1)/k+2$, tada multiplicitet procesa $X_0(t)$ je $N = n-j$. Tako da za $j = n-1$, multiplicitet je $N = 1$; i za $j = 0$, $l_o = k/k+1$, multiplicitet je $N = n$.*

*D o k a z: a)* Neka je $j = n-1$, tada je

$$F(t)=\begin{cases} F(t_1)=|C_1^{(k)}|=p_1, & t_1\in(k/k+1,\ l_1],\\ F(t_2)=|C_2^{(k)}|=p_2, & t_2\in(l_1,\ l_2],\\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ F(t_{n-1})=|C_{n-1}^{(k)}|=p_{n-1}, & t_{n-1}\in(l_{n-2},\ l_{n-1}],\\ F(t_n)=\text{neprekidna}\neq\text{const.}, & t_n\in(l_{n-1},\ \partial_k]. \end{cases}$$

Primetimo da za ovaj slučaj $(j=n-1)$ sve jedno je dali ćemo pretpostaviti da je funkcija $F(t)$ na n-tom podintervalu konstantna ili nekonstantna (i neprekidna). Glavno je uočiti da se može naći $t_n\in(l_{n-1},\ \partial_k)$ za koje je $F(t_n)\neq p_i$, $i=1,2,\dots,n-1$.

Odgovarajuće slučajne promenljive $X_0(t_1)$, $X_0(t_2)$, ..., $X_0(t_{n-1})$ i $X_0(t_n)$,

$$\begin{aligned} X_0(t_1)&=X_1(t_1)+p_1X_2(t_1)+\dots+p_1^{n-1}X_n(t_1),\\ X_0(t_2)&=X_1(t_2)+p_2X_2(t_2)+\dots+p_2^{n-1}X_n(t_2),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_0(t_{n-1})&=X_1(t_{n-1})+p_{n-1}X_2(t_{n-1})+\dots+p_{n-1}^{n-1}X_n(t_{n-1}),\\ X_0(t_n)&=X_1(t_n)+F(t_n)X_2(t_n)+\dots+F^{n-1}(t_n)X_n(t_n), \end{aligned}$$

su linearno nezavisne. Ovo sledi iz činjenice da je gornji sistem jednačina $(X_i(t_1)=X_i(t_2)=\dots=X_i(t_n),\ i=1,2,\dots,n)$ nezavisan jer je determinanta sistema $\Delta\neq 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_1^{n-1}\\ 1 & p_2 & \dots & p_2^{n-2}\\ \vdots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & p_{n-1} & & p_{n-1}^{n-1}\\ 1 & F(t_n) & & F^{n-1}(t_n) \end{vmatrix}=\Delta$$

Slučajne promenljive $X_0(t_1)$, $X_0(t_2)$, ..., $X_0(t_n)$ nisu ortogonalne, ali one se mogu ortogonalizirati, obzirom da su linearno nezavisne, tako da se može reći da slučajni proces $X_0(t)$ prima n inovacija i to na početku svakog podintervala po jednu, ali multiplicitet ovog procesa je $N = 1$ u intervalu $(k/k+1, \frac{k+1}{k+2}]$, jer mere tih inovacija su ortogonalne. Ako se funkcija $F(t)$ ponaša na gore pomenuti način za svako $k = 1, 2, \ldots$, tada multiplicitet procesa $X_0(t)$ je $N = 1$.

b) Neka je sada $0 < j < n-1$, tada je

$$F(t) = \begin{cases} |C_1^{(k)}| = p_1, & t = t_1 \in (k/k+1, l_1] \\ |C_2^{(k)}| = p_2, & t = t_2 \in (l_1, l_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ |C_j^{(k)}| = p_j, & t = t_j \in (l_{j-1}, l_j] \\ F(t) \text{ neprekid. i } \neq \text{const.}, & t \in (l_j, \partial_k]. \end{cases}$$

Primetimo da na podintervalu $(l_j, \partial_k]$, obzirom na prirodu funkcije $F(t)$, ($F(t)$ neprekidna i $\neq$ const.,), za svako $t \in (l_j, \partial_k]$ se mogu naći brojevi $t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots, t_n$ takvi da je: $l_j < t_{j+1} < t_{j+2} < \ldots < t_n < t$ i da $|F(t_{j+1})| \neq |F(t_{j+2})| \neq \ldots \neq |F(t_n)|$, i $|F(t_r)| \neq p_i$, $j < r \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant j$.

Slučajne promenljive $X_0(t_1)$, $X_0(t_2)$, ..., $X_0(t_j)$, $X_0(t_{j+1})$, ..., $X_0(t_n)$, su isto tako linerno nezavisne, jer je determinanta odgovarajućeg sistema linernih jednačina različita od nule $(\Delta \neq 0)$. Očigledno je da proces $X_0(t)$ na početku svakog od prvih j podintervala prima po jednu inovaciju, dok na početku podintervala $(l_j, \partial_k]$, na $l_j+0$, prima ostalih n-j inovacija. Mere prvih j inovacija su ortogonalne i zato proces $X_0(t)$ na intervalu $(k/k+1, l_j]$, ima multiplicitet N=1. Medjutim mere sledećih n-j inovacija su neortogonalne. Treba pokazati da $X_0(t)$ na $(l_j, \partial_k]$ ima multiplicitet N=n-j. Dokaz ćemo izvesti za j=2 i $n > 2$. U tu svrhu odredjujemo $a_{11}$ i $a_{21}$ tako da $X_0(t)-a_{11}X_0(t_1)= Y'_0(t) \perp X_0(t_1)$, i $X_0(t_2)-a_{21}X_0(t_1) = Y'_0(t_2) \perp X_0(t_1)$, $t \in (l_2, \partial_k]$, i nalazimo da je: (videti primer 4.3. na strani 57),

$$Y_0'(t) \sum_{i=0}^{n-1} p_1^{2i} /[p_1-F(t)] = Y_2'+F(t)Y_3'+\ldots+F^{n-2}(t)Y_n' \text{ i}$$

$$Y_0'(t_2) \sum_{i=0}^{n-1} p_1^{2i} /[p_1-p_2] = Y_2'+ p_2\, Y_3' +\ldots+ p_2^{n-2}Y_n'.$$

Sistem $Y_2', Y_3', \ldots, Y_n'$ sl. promenljivih, posle ortogonalizacije označavamo sa $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$, i zatim stavimo: $Y_2+ F(t)Y_3+ +\ldots+ F^{n-2}(t)Y_n = Y_0(t)$ i $Y_2+ p_2Y_3+\ldots+ p_2^{n-2}Y_n = Y_0(t_2)$.

Odredjujemo sada $a_{22}$ tako da $Y_0(t)-a_{22}Y_0(t_2)= Z_0'(t) \perp Y_0(t_2)$:

$$Z_0'(t)E|Y_0(t_2)|^2/[p_2-F(t)]= Z_3'+F(t)Z_4'+\ldots+ F^{n-3}(t)Z_n',$$

i slično kao malo pre stavimo $Z_0(t) = Z_3+F(t)Z_4+\ldots+F^{n-3}(t)Z_n$. Na osnovu teoreme 4.2. i njenog uopštavanja za $n > 2$, proces $Z_0(t)$ ima multiplicitet N=n-2 na $(l_2, \partial_k]$. Kako se lako može uočiti (vidi primer 4.3.) da za $\Delta = (l_2, \partial_k]$ i $H_\Delta(*)=H_{\partial_k}(*)-H_{l_2}(*)$, je: $H_\Delta(X_0) = H_\Delta(Y_0') = H_\Delta(Y_0) = H_\Delta(Z_0') = H_\Delta(Z_0)$, sledi da i multiplicitet procesa $X_0(t)$ na $(l_2, \partial_k]$ je N=n-2.

c) Neka je j=0. U ovom slučaju je F(t) neprekidno i $\neq$ const., na intervalu $(k/k+1, \partial_k]$. Prostor $H_t(\Gamma_0)$ je:

$H_t(\Gamma_0) = \{ g_0(s) = (a_1, a_2, \ldots, a_r) + F(s)(b_1, b_2, \ldots, b_r) +$

$+ \ldots + F^{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_r)\ , r \leqslant k, \quad s \leqslant t.\}$

Iz $g_0(s) = 0$ sledi

$$a_i + b_i F(s) + \ldots + u_i F^{n-1}(s) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, r,$$

medjutim za $r = k$, (tada je $t > k/k+1$), i $k/k+1 < s \leqslant t$ je $F(s)$ neprekidna i $\neq$ const., tako da leva strana gornje jednakosti je, kao polinom po stepenima od $F(s)$, identički jednaka nuli jedino za $a_i = b_i = \ldots = u_i = 0$, tj., ako su: $g_1(s) = g_2(s) = \ldots = g_n(s) = 0$. To znači da su procesi $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ spektralno ortogonalni. Kako su i mere inovacija $X_1(s)$, $X_2(s), \ldots, X_n(s)$, koje prima proces $X_0(t)$ za $s = \frac{k}{k+1} + 0$, neortogonalne, sledi da multiplicitet procesa $X_0(t)$ je $N = n$.

$3^o$. U [10] je Hitsuda ispitao multiplicitet slučajnog procesa $X_0(t) = \sum_{i=i}^{n} W_i(t)\ F^{i-1}(t)$, gde $W_i(t)$ su ortogonalni Vinerovi procesi a $F(t)$ je neslučajna funkcija. Mi ćemo ispitati slučajni proces

$$X_0(t) = W_1(t) + F(t)\ X_2(t) + \ldots + F^{n-1}(t)\ X_n(t),$$

gde procesi $X_i(t)$ su definisani u tački $1^0$ ovog paragrafa, dok $W_1(t)$ je Vinerov i ortogonalan sa $X_i(t)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

*T e o r e m a 4. 6.* $1^0$. *Ako je funkcija $F(t)$ apsolutno neprekidna, ali $F'(t)$ nije $L^2$ integrabilna na intervalu $(k/k+1, \partial_k]$ za bar jedno $k$, tada je multiplicitet od $X_0(t)$ $N=n$;*

$2^0$. *Ako je funkcija $F(t)$ skoro svuda neograničene* *varijacije na intervalu* $(k/k+1, \partial_k]$ *za bar jedno* $k$, *tada proces* $X_0(t)$ *ima isto tako multiplicitet* $N = n$.

*D o k a z :* $1^o$. Podprostori $H_t(\Gamma_0)$ su:

$$H_t(\Gamma_0) = \Big\{ g_0(s) = \int_0^s f(u)\,du + (b_1, b_2, \ldots, b_j)\, F(s) +$$

$$+ (c_1, c_2, \ldots, c_j)\, F^2(s) + \ldots + (u_1, u_2, \ldots, u_j)\cdot$$

$$\cdot F^{n-1}(s)\ ,\ s \leqslant t,\ \frac{j}{j+1} < s \leqslant \frac{j+1}{j+2},\ j = 1, 2, \ldots,\ f(u) \in L^2 \Big\}.$$

Ako pokažemo da uslov $g_0(s) = 0$, povlači: $g_1(s) = g_2(s) = \ldots = g_n(s) = 0$, identički po $s$, time smo dokazali da su odgovarajući procesi spektralno ortogonalni. Naime:

$$g_0(s) = 0,$$

znači

$$\int_0^s f(u)\,du + b_k F(s) + c_k F^2(s) + \ldots + u_k F^{n-1}(s) = 0 \tag{1}$$

i

$$b_i F(s) + c_i F^2(s) + \ldots + u_i F^{n-1}(s),\ i=1, 2, \ldots, k-1, \tag{2}$$

(uzeli smo $j = k$ obzirom da na intervalu $(k/k+1, \partial_k]$ znamo kakve prirode je funkcija $F(s)$).

Diferenciranjem jednakosti (1) dobijamo

$$f(s) + F'(s)\,[b_k + 2\,c_k F(s) + \ldots + (n-1)\,u_k F^{n-2}(s)] = 0,$$

obzirom da $F'(s)$ ne pripada prostoru $L^2$ dok $f(s)$ pripada, gornja jednakost je ispunjena jedino za $f(s) = 0$ i $b_k + 2\,c_k F(s) + \ldots + (n-1)\,u_k F^{n-2}(s) = 0$. Ovaj polinom po stepenima od $F(s)$ je nula jedino za $b_k = c_k = \ldots = u_k = 0$, zatim iz $f(s) = 0$ sledi

sledi $\int_0^s f(u)\,du = 0$ i time je ispunjena jednakost (1). Jednakost (2) je isto tako ispunjena jedino za $b_i = c_i = \ldots = u_i = 0$. Odavde sledi spektralna ortogonalnost procesa: $W_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$. Kako su i odgovarajuće mere neortogonalne, može se zaključiti da multiplicitet procesa $X_0(t)$ je $N = n$.

$2^o$. Iz jednakosti $g_0(s) = 0$, sledi:

$$(1) \qquad \int_0^s f(u)\,du + b_k F(s) + c_k F^2(s) + \ldots + u_k F^{n-1}(s) = 0$$

i

$$(2) \qquad b_i F(s) + c_i F^2(s) + \ldots + u_i F^{n-1}(s) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Kako je funkcija $F(s)$ neograničene varijacije a $\int_0^s f(u)du$ je apsolutno neprekidna funkcija, jednakost (1) je ispunjena jedino za $\int_0^s f(u)\,du = 0$ i $b_k F(s) + c_k F^2(s) + \ldots + u_k F^{n-1}(s) = 0$, znači za $b_k = c_k = \ldots = u_k = 0$. Isto tako i jednakost (2) je ispunjena za $b_i = c_i = \ldots = u_i = 0$. Odavde sledi $g_1(s) = g_2(s) = \ldots = g_n(s) = 0$, tj., spektralna ortogonalnost procesa: $W_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$. Kako su spektralne mere pomenutih procesa neortogonalne, može se zaključiti da multiplicitet slučajnog procesa $X_0(t)$ je $N = n$.

*P r i m e r 4. 3.* U teoremi 4.5., za slučaj kad je $0 < j < n-1$, uzećemo da je $j = 1$, $n = 3$, tada proces

$$X_0(t) = X_1(t) + F(t)\, X_2(t) + F^2(t)\, X_3(t),$$

ima multiplicitet $N = 2$ na intervalu $(l_1, \partial_k]$. Da bismo to pokazali mi ćemo ortogonalizirati slučajnu promenljivu (odnosno slučajni proces) $X_0(t)$ u odnosu na slučajnu promenljivu $X_0(t_1) = X_1(t_1) + p\, X_2(t_1) + p^2\, X_3(t_1)$. Slučajna promenljiva $X_0(t) - a\, X_0(t_1)$ je $\perp$ na $X_0(t_1)$ ako je $E[X_0(t) - a\, X_0(t_1)]X_0(t_1) = 0$, odavde nalazimo da je

$$a = a(t) = \frac{E[X_0(t_1)\, X_0(t)]}{E\, X_0^2(t)} = \frac{1 + p\, F(t) + p^2F^2(t)}{1 + p^2 + p^4}.$$

Označimo sa $Y_0(t) = X_0(t) - a\, X_0(t_1)$, i sa $H_\Delta(*)$ podprostor $H_b(*) \ominus H_a(*) = H_\Delta(*)$, $\Delta = (a, b]$. Očigledno je

$$H_\Delta(Y_0) = H_\Delta(X_0),\ \Delta = (1_1, \partial_k].$$

Dalje je

$$Y_0(t) = (1 - a)\, X_1(t) + [F(t) - p\, a]X_2(t) + [F^2(t) - p^2a]\, X_3(t).$$

Označimo sa $G_1(t) = 1 - a$; $G_2(t) = F(t) - p\, a$; $G_3(t) = F^2(t) - p^2a$.

$$G_1(t) = 1 - \frac{1 + p\, F(t) + p^2F^2(t)}{1 + p^2 + p^4} = \frac{1 + p^2 + p^4 - [1 + p\, F(t) + p^2F^2(t)]}{1 + p^2 + p^4}$$

$$= \frac{[p - F(t)][p + p^2(p + F(t))]}{1 + p^2 + p^4};$$

$$G_2(t) = F(t) - p\, \frac{1 + p\, F(t) + p^2F^2(t)}{1 + p^2 + p^4} = \frac{[p - F(t)][p^3F(t) - 1]}{1 + p^2 + p^4};$$

$$G_3(t) = F^2(t) - p^2\, \frac{1 + p\, F(t) + p^2F^2(t)}{1 + p^2 + p^4} = -\frac{[p - F(t)][p + F(t) + p^2F(t)]}{1 + p^2 + p^4}.$$

Zatim iz

$$Y_0(t) = G_1(t)\, X_1(t) + G_2(t)\, X_2(t) + G_3(t)\, X_3(t)$$

sledi dalje

$$Y_0(t) = \frac{p - F(t)}{1 + p^2 + p^4} [ (p + p^2(p + F(t)))X_1(t) + (p^3F(t) - 1)X_2(t) - -(p + F(t) + p^2F(t))X_3(t)]$$

$$= \frac{p - F(t)}{1 + p^2 + p^4} [ (p + p^3)X_1(t) - X_2(t) - p X_3(t)] + + F(t)[p^2X_1(t) + p^3X_2(t) - (1 + p^2)X_3(t)].$$

Označimo sa $Z_0(t)$, $Z_2(t)$, $Y_3(t)$ sledeće slučajne procese:

$Z_0(t) = Z_2(t) + F(t)\ Y_3(t)$; $t \in (l_1, \partial_k]$, $\partial_k \leq (k+1)/k+2$,

$Z_2(t) = (p + p^3)X_1(t) - X_2(t) - p X_3(t)$;

$Y_3(t) = p^2X_1(t) + p^3X_2(t) - (1 + p^2)X_3(t)$.

Proces $Z_0(t)$ je $\perp X_0(t_1)$, $t_1 \in (k/k+1, l_1]$ i $H_\Delta(X_0) = H_\Delta(Y_0) = H_\Delta(Z_0)$, $\Delta = (l_1, \partial_k]$. Ostaje da se oceni multiplicitet procesa $Z_0(t)$, $t \in (l_1, \partial_k]$. Očigledno on nije veći od dva, obzirom da su $Z_2(t)$ i $Y_3(t)$ svaki sa multiplicitetom jedan. Slučajne promenljive $Z_2(t)$ i $Y_3(t)$, $t \in (l_1, \frac{k+1}{k+2}]$ nisu ortogonalne ali su linearno nezavisne. Označimo sa $Z_3(t) = Y_3(t) - b\ Z_2(t)$, gde se b odredjuje iz uslova da je $Z_3 \perp Z_2$. Kako je $F(t) \neq$ const. onda je $H_t(Z_0) = H_t(Z_2 + F(t)\ Z_3)$, i na osnovu teoreme 4.2. je

$$H_t(Z_2 + F(t)\ Z_3) = H_t(Z_2) \oplus H_t(Z_3).$$

Kako su i spektralne mere za $Z_2(t)$ i $Z_3(t)$ neortogonalne, sledi da proces $Z_0(t) = Z_2(t) + F(t)\ Y_3(t)$ ima multiplicitet N=2 na intervalu $(l_1, \partial_k]$ ; tako da proces $X_0(t)$ na intervalu $(k/k+1, (k+1)/k+2]$ ima multiplicitet $N = 2$.

V

# ORTOGONALNI RAZVOJ I MULTIPLICITET SLUČAJNOG PROCESA

*1. ORTOGONALNI RAZVOJ KARHUNEN - LOJEVA.*- Ako je slučajni proces $X(t)$ neprekidan u sr. kv., tada je i njegova kovarijansna funkcija neprekidna po argumentima s i t. Poznato je da se neprekidan proces $X(t)$, i njegova kovarijansna funkcija $\Gamma(s, t)$ mogu razviti u odgovarajuće redove:

$$X(t) = \sum_n \lambda_n Y_n f_n(t), \text{ i}$$

$$\Gamma(s, t) = \sum_n |\lambda_n|^2 f_n(t) \bar{f}_n(s)$$

gde je $E\, Y_m Y_n = \partial_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$ $\int_I f_m(t)\, \bar{f}_n(t) dt = \partial_{mn}$;

$|\lambda_n|^2$ su karakteristični brojevi, a neprekidne funkcije $f_n(t)$ su karakteristične funkcije kovarijansne funkcije $\Gamma(s, t)$ i odredjuju se rešenjem integralne jednačine

$$\int_I \Gamma(s, t)\, f_n(s)\, ds = |\lambda_n|^2\, f_n(t).$$

Iz

$$X(t) = \sum_k [\lambda_k\, Y_k\, f_k(t)] / \bar{f}_n$$

integracijom dobija se

$$\int_I X(t)\, \bar{f}_n(t)\, dt = \lambda_n\, Y_n$$

Zatim iz jednakosti

$$X(t) = \sum_k [\lambda_k Y_k f_k(t)] / \cdot \overline{Y}_n$$

dobija se

$$E\, X(t)\, \overline{Y}_n = \lambda_n f_n(t)$$

*P r i m e r 5. 1. ([8]).* Vinerov proces $W(t)$ razviti u red po karakterističnim funkcijama njegove kovarijansne funkcije $\Gamma(s, t) = \alpha \min/ s, t/$ u intervalu $[0, 1]$.

Rešava se integralna jednačina

$$\int_0^1 \alpha \min/ s, t / f_n(s)\, ds = \lambda_n^2 f_n(t), \qquad \alpha > 0,$$

$$\int_0^t \alpha \min/ s, t / f_n(s)\, ds + \int_t^1 \alpha \min/ s, t / f_n(s)\, ds = \lambda_n^2 f_n(t)$$

$$\int_0^t \alpha s\, f_n(s)\, ds + \alpha t \int_t^1 f_n(s)\, ds = \lambda_n^2 f_n(t),$$

diferenciranjem poslednje jednakosti po promenljivoj $t$ dobija se

$$\alpha\, t\, f_n(t) + \alpha \int_t^1 f_n(s)\, ds - \alpha\, t\, f_n(t) = \lambda_n^2 f'_n(t), \quad \text{i}$$

$$-\alpha\, f_n(t) = \lambda_n^2 f''_n(t).$$

Diferencijalna jednačina

$$f''_n(t) + \frac{\alpha}{\lambda_n^2} f_n(t) = 0$$

ima opšte rešenje

$$f_n(t) = A \cos \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda_n} t + B \sin \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda_n} t.$$

Iz graničnih uslova imamo:

za $t = 0$, $\quad 0 = f_n(0) = A + B \cdot 0 \Rightarrow A = 0$

i iz jednakosti

$$\alpha \int_t^1 f_n(s)\, ds = \lambda_n^2 f'_n(t)$$

za t = 1 je

$$0 = \lambda_n^2 f'_n(1) = \lambda_n^2 \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda_n} B \cos \frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda_n}$$

odakle sledi

$$\lambda_n^2 = \frac{\alpha}{(n + 1/2)^2 \pi^2}, \qquad \lambda_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{(n + 1/2)\pi}.$$

Znači

$$f_n(t) = B \sin (n + 1/2)\pi t.$$

Konstanta B odredjuje se iz uslova

$$\int_0^1 f_n(t)\, \overline{f}_n(t)\, dt = 1,$$

koji za nadjeno $f_n(t)$ ima oblik

$$B^2 \int_0^1 \sin^2 (n + 1/2)\pi t \cdot dt = 1$$

$$B^2\, 1/2 = 1, \Rightarrow B = \sqrt{2}, \text{ tj.},$$

$$f_n(t) = \sqrt{2} \sin(n + 1/2)\pi t.$$

Odavde sledi ortogonalni razvoj procesa W(t)

$$W(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{(n + 1/2)\pi} Y_n \sin(n + 1/2)\pi t,$$

i njegove kovarijansne funkcije

$$\Gamma(s, t) = \alpha \min/ s, t / = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(n + 1/2)^2 \pi^2} \sin(n+ \tfrac{1}{2})\pi t \sin(n+ \tfrac{1}{2})\pi s$$

*N a p o m e n a 5. 1.* Iz ortogonalnog razvoja Vinerovog procesa W(t) može se zaključiti da jedna baza Hilbertovog prostora $H_{t=1}(W)$, koji se generiše procesom W(t), je

$$\mathcal{B}_{H(W)} = \left\{ Y_n \right\}_0^\infty$$

Isto tako jedna baza Hilbertovog prostora $H_{t=1}(\Gamma)$, koji se generiše kovarijansnom funkcijom $\Gamma(s, t) = \alpha \min/ s, t /$ je

$$\mathcal{B}_{H(\Gamma)} = \left\{ \sqrt{2} \sin(n + 1/2)\pi t \right\}_0^\infty$$

*2. TEOREMA O SKALARNOM PROIZVODU U PROSTORU H(Γ).-* Neka je X(t) proces sa ortogonalnim priraštajima, $\Gamma(s, t)$ njegova kovarijansna funkcija. U primeru 3.3. videli smo da se tačka $h \in H(X)$ i odgovarajuća tačka $g \in H(\Gamma)$ su

$$h = \int_a^s f(u)\, dX(u) \quad \text{i} \quad g = \int_a^s f(u)\, d\sigma(u).$$

Ako strukturna funkcija $\sigma(t)$ ima gustinu $\alpha(t)$ tada se elemenat $g(s)$ može napisati u obliku

$$g(s) = \int_a^s f(u)\alpha(u)\, du.$$

T e o r e m a 5. 1. *Ako strukturna funkcija $\sigma(t)$ je apsolutno neprekidna i ima gustinu $\alpha(t)$ tada skalarni proizvod $\langle g_1(t), g_2(t)\rangle$ dvaju elemenata Hilbertovog prostora $H(\Gamma)$ je:*

$$\langle g_1(t), g_2(t)\rangle = \int_a^t \frac{g_1'(u)}{\alpha(u)} \frac{g_2'(u)}{\alpha(u)}\, d\sigma(u)$$

Dokaz je očigledan. Zaista kako je:

$$g_1'(t) = f_1(t)\alpha(t), \text{ sledi } \quad f_1(t) = \frac{g_1'(t)}{\alpha(t)}, \text{ i}$$

$$g_2'(t) = f_2(t)\alpha(t), \text{ sledi } \quad f_2(t) = \frac{g_2'(t)}{\alpha(t)}, \text{ tada je}$$

$$\langle g_1(t), g_2(t)\rangle = E\, h_1(t)\, h_2(t) = \int_a^t f_1(u)\, f_2(u)\, d\sigma(u)$$

$$= \int_a^t \frac{g_1'(u)}{\alpha(u)} \frac{g_2'(u)}{\alpha(u)} d\sigma(u).$$

*Napomena 5. 2.* Ako je proces X(t) Vinerov, tada je njegova strukturna funkcija t, tj., $\alpha(t) = 1$, tako da skalarni proizvod dva elementa (dve tačke odgovarajućeg prostora $H_t(\Gamma)$ može se izraziti u obliku

$$\langle g_1(t), g_2(t)\rangle = \int_0^t g_1'(u)\, g_2'(u)\, du.$$

*Primer 5. 2.* Prostoru H(W) izometričan je prostor $H(\Gamma)$, gde je $\Gamma(s, t) = \alpha \min/ s, t /$. U toj izometriji tački $Y_n \in H(W)$, odgovara tačka $[\sqrt{2} \sin(n+1/2)\pi s]/(n+1/2)\pi \in H(\Gamma)$, tj.,

$$V\, Y_n = \sqrt{2}\, \frac{\sin(n+1/2)\pi s}{(n+1/2)\pi}.$$

Zaista iz gornje napomene za skalarni proizvod dve funkcije iz $H(\Gamma)$ biće:

$$\langle \sqrt{2}\, \frac{\sin(n+1/2)\pi s}{(n+1/2)\pi}, \sqrt{2}\, \frac{\sin(n+1/2)\pi s}{(n+1/2)\pi} \rangle = \int_0^1 2 \cos^2(n+1/2)\pi s\, ds = 1.$$

S druge strane je

$$E\, Y_n\, Y_n = E\, \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \int_0^1 W(s)\, W(t)\, f_n(s)\, f_n(t)\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \int_0^1 \alpha \min/ s, t /\, f_n(s)\, f_n(t)\, ds\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \lambda_n^2\, f_n(t)\, f_n(t)\, dt = 1, \quad f_n(t) = \sqrt{2} \sin(n+1/2)\pi t.$$

*Primer 5. 3.* U vezi sa primerom 3.6. pokazaćemo da: Ako je $F(t)$ apsolutno neprekidna i $F'(t) \in L^2[0, 1]$, tada svaka funkcija prostora $H(\Gamma_{FW})$ je element skupa funkcija $H(\Gamma_W)$. Dokaz se izvodi na osnovu teoreme 5.1.:

$$\langle \min/s,\ t/,\ F(s)\ g(s)\rangle = \int_0^1 (\min/s,t/)'(F(s)\ g(s))'\ ds =$$

$$= \int_0^t (s)'(F(s)\ g(s))'\ ds + \int_t^1 (t)'(F(s)\ g(s))'\ ds$$

$$= \int_0^t (F(s)\ g(s))'\ ds = F(t)\ g(t), \quad (s)' = 1, \quad (t)' = 0.$$

## L i t e r a t u r a

[1] *Ahiezer I., Glazman M.,* Teorija linejnih operatorov v Gilbertovom prostranstve, Nauka, Moskva 1966.

[2] *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68, 337 - 404, 1950.

[3] *Cramer H.* On some classes of nonstationary stochastic processes. *)

[4] *Cramer H.* On the strukture of purely non-deterministic stochastic processes. *)

[5] *Cramer H.* Stochastic processes as curves in Hilbert space. *)

[6] *Cramer H., Leadbeter M. R.,* Stationary and related stochastic processes, Wiley, New York, 1967.

[7] *Gihman I. I., Skorohod A. V.,* Introduction to the theory of random processes, W. B. Saunders Company 1969 London.

[8] *Gihman I. I., Skorohod A. V.,* Teorija slučajnih procesov, tom I Nauka, Moskva 1971.

[9] *Hida T.,* Canonical representation of Gaussian processes and their aplications. *)

[10] *Hitsuda M.* Multiplicity of some classes of Gaussian processes, Nogoya Math. J., vol. 52 (1973), 39 - 46.

[11] *Ivković Z., i drugi,* Application of spectral multiplicity in separable Hilbert space to stochastic processes, Matem. Institut Beograd 1974.

*) Rad je štampan u seriji "Benchmark Papers in Elec. Ing. and Computer Sceence", Edited by A. Ephremides and J. B. Thomas, Ran. Proc.- Multipl. Theory and Canon. Decompositions (1973) Dowden, Hutchinson, Ross, Inc.

[12] *Ivković Z. Rozanov Ju. A.,* On the canonical Hida-Cramer representation for random processes. *)

[13] *Ivković Z.,* Example of continuous second-order stochastic proc. with prescribed finit multiplicity, Matem. Vesnik Beograd (76).

[14] *Loev M.* Teorija vjerojatnostej, Moskva, I.L. 1962.

[15] *Papulis* Probability, Random Variables, and Stochastic Processes Inter. Stud. Edition, McGraw-Hill Series in Systems Science, 1965.

[16] *Rozanov Ju. A.,* Teorija obnavljajuščih procesov, Moskva, izdateljstvo "Nauka" 1974.

[17] *Siraja T. N.* O kanoničeskoj pretstavlenii sl. proc. kratnostej odin i dva, Terija vjerojatnostej i jejo primenenija, 1 (1973), 155-160.

[18] Siraja T. N. O kratnostej sumi ortogonalnih sl. proc., Teorija vjer. i je. prim. (76) 880-884.

# R e g i s t a r