Predrag Cvetković

MIKROMORFNA TEORIJA VIŠEG STEPENA HETEROGENIH SREDINA

– doktorska disertacija –

Beograd, 1976

SADRŽAJ

- TRODIMENZIONALNO TELO -

1.1. UVOD

Posle naglog razvoja i ogromnog broja značajnih radova i teorija, mehanika kontinuuma jednokomponentalnih materijala kao da poslednjih godina doživljava izvesnu stagnaciju. Nove teorije ne daju neki značajniji doprinos u njenom razvoju. Izgleda da u zadnje vreme, bar prema broju do sada objavljenih radova, dolazi do naglog razvoja mehanike kontinuuma heterogenih ili višekomponentalnih materijala, takozvanih mešavina. To široko polje istraživanja otvorili su baš oni najeminentniji naučnici koji su i dali najveći doprinos razvoju mehanike kontinuuma jednokomponentalnih materijala (Truesdell, Eringen, Green, Naghdi, Coleman, Noll i dr.). Glavni razlog tako intenzivnog razvoja mehanike kontinuuma heterogenih materijala je u tome što je većina tela u prirodi mešavinskog karaktera.

Da bi se shvatilo šta je mešavina i kakvih mešavina u prirodi ima, kao i procenile teškoće koje se javljaju pri teorijskom opisivanju njenog ponašanja, najbolje je obratiti se hemiji i hemičarima.

Sa gledišta hemičara ceo spoljašnji svet se sastoji od smese ili mešavine raznih vrsta materijala. Sastavni delovi neke smese koji u svojoj unutrašnjosti imaju iste osobine, zovu se faze ili sastojci (komponente). Pojedine faze su razdvojene graničnim površinama na kojima se osobine menjaju skokovito.

Za faze ili sastojke kažemo da su homogene (grč. homois=jednak, genos=vrsta), a smese ili mešavine su heterogene (grč. heteros=različit). Prema tome možemo razlikovati homogene i heterogene sisteme.

Čista voda ili komad zlata su homogeni sistemi.

Heterogeni sistemi mogu biti vrlo različiti. Tako je, na primer, granit smesa (mešavina) tri različite faze (sastojka): kvarc, liskun i ortoklas, od kojih svaku možemo raspoznati golim okom. Mešavina sumpornog i gvozdenog praha sastoji se od dve čvrste faze koje se mogu raspoznati pod lupom. Suvi pesak i vazduh su dva sastojka jedne mešavine. Mokar pesak je mešavina čvrste i tečne faze.

Ako razmutimo glinu u vodi, dobijamo suspenziju, koja će se posle izvesnog vremena, što zavisi od veličine čestica, razdvojiti.

Razmućeno ulje i voda daju emulziju, koja će se takodje vremenom razdvojiti na svoje sastojke.

Dim je mešavina čvrstih čestica uglja i vazduha.

Magla je mešavina sitnih kapljica u vazduhu.

Kada su različite faze u nekoj mešavini medjusobno pomešane u krupnijim ili sitnijim dimenzijama, tada govorimo o stepenu disperziteta te mešavine. Smanjivanjem dimenzija povećava se disperzitet i obrnuto.

Ako su čestice mešavine tako velike da ih možemo raspoznati prostim okom ili pod običnim mikroskopom, onda su to krupne ili fizičke disperzije. To su disperzije do $0{,}1\mu$ i tu spadaju navedene mešavine.

Ako su dimenzije čestica ispod $0{,}001\mu$, onda su to molekulske disperzije. To su pravi rastvori kod kojih se nikakvim optičkim sredstvima na mogu razaznati pojedini sastojci. Na primer: rastvor šećera u vodi.

Očigledno je iz izloženog da se pri proučavanju heterogenih materijala, odnosno mešavina, nailazi na mnogo veće teškoće nego kod jednokomponentalnih materijala. Zbog složenosti problema koji se nameću pri ispitivanju ponašanja mešavina, pojavile su se različite teorije. Sve one, u većoj ili manjoj meri, koriste razna uprošćenja ne bi li se, uz pomoć analogije sa mehanikom kontinuuma jednokomponentalnih materijala, došlo do odgovarajućih zaključaka koji bi važili za mešavinu u celini. Medjutim, iako ima dosta radove iz ove oblasti, svi se oni baziraju na jedan od sledeća dva prilaza.

Jedan od prvih prilaza teoriji heterogenih materijala dao je C.Truesdel 1960. godine [7] . Na osnovu njegove teorije postuliraju se posebni zakoni balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja, energije i entropijske nejednakosti za svaki sastojak mešavine.

A.E.Green i P.M.Naghdi su dali drugačiji prilaz teoriji heterogenih materijala. On se sastoji u postuliranju zakona balansa energije i entropijske nejednakosti za sastojak mešavine zajedsa uslovom superponiranog krutog kretanja.

Zajednički za oba prilaza, koji, kao što smo istakli, predstavljaju bazu razvoja svih ostalih teorija iz ove oblasti, su sledeća tri fizička principa koje je postavio C.Truesdell:

a) Sve osobine mešavine moraju biti matematičke posledice osobina sastojaka,

b) Da bi se opisalo kretanje sastojka, može se, zamišljeno, izdvojiti sastojak od mešavine pod uslovom da na odgovarajući način zamenimo dejstvo drugih sastojaka na njega,

c) Kretanje mešavine je odredjeno istim jednačinama kao i za prosto, jednokomponentalno telo.

U daljem razvoju teorije heterogenih materijala, odnosno mešavina, pojavili su se radovi koji ne tretiraju mešavinu kao klasičan model kontinuuma, već kao mikromorfni kontinuum [4], [5] . Kada se, na primer, radi o polikristalnim mešavinama, zrnastim materijalima ili fluidnim suspenzijama, klasični model kontinuuma ne može realno da opiše njihovo ponašanje. Zato je mnogo pogodniji model kontinuuma sa mikrostrukturom. Medjutim sa stanovišta mehanike kontinuuma krajnji rezultat je uvek srednja vrednost individualnih kretanja ove strukture. Za takav materijal C.Eringen [1] je izveo zakone balansa, koristeći opšte zakone balansa. To je i bio glavni razlog zbog čega smo se u našem radu opredelili za takav prilaz. Pri tom smo, koristeći rad [1] , izveli zakone balansa za sastojak i celokupnu mešavinu i za teoriju proizvoljnog stepena. Pokazalo se da su rezultati u radu specijalni slučaj naših rezultata, što znači da je naša teorija opštija.

Mi smo u našem radu izveli jednačine balansa mase, tenzora mikroinercije, količine kretanja, momenata količine kretanja proizvoljnog stepena, energije i energije proizvoljnog stepena i entropijsku nejednakost za sastojak i celokupnu mešavinu, pretpostavljajući da postoje hemijske reakcije u mešavini. Cilj nam je bio da se izvodjenjem odgovarajućih jednačina balansa višeg stepena dodje do odgovarajućih zaključaka u pogledu opravdanosti postojanja navedenog fizičkog principa c) ili fizičkog smisla jednačina balansa višeg stepena.

Koristeći izvedene zakone balansa za trodimenzionalno telo, mi smo teoriju proširili na dvodimenzionalna (ljuske) i jednodimenzionalna (štap) tela. Za štapove smo izveli i konstitutivne jednačine.

1.2. ISTORIJSKI RAZVOJ

Osnove matematičke teorije mešavina prvi su predložili A.Fick (1855) i J.Stefan (1871). Oni su pretpostavili da je mešavina superpozicija od n prostih kontinuuma, od kojih svaki ima individualno kretanje i da se u bilo kom trenutku vremena t u svakoj tački x mešavine nalaze svi sastojci. Takva formulacija mešavina je ostala i do danas.

Moderna faza teorije mešavina datira od 1957. godine, kada je C.Truesdell [7] predložio izvodjenje jednačina balansa mešavine nezavisno od njenog sastava. Kasnije, na osnovu teorije izložene u [8] C.Truesdell postulira posebne zakone balansa mase, količine kretanja, momenta količine kretanja, kao i entropijske nejednakosti za svaki sastojak mešavine.

Generalizaciju Truesdell-ovog rada, uključujući elektromagnetne efekte, dao je P.D.Kelly [6] . Koristeći opšti integralni zakon balansa, Kelly izvodi balans mase, količine kretanja i energije za svaki sastojak. On takodje izvodi uslove skoka na površini diskontinuiteta.

Oko 1964. godine pojavljuju se radovi nekolicine autora sa idejom da se termodinamika prostog (jednokomponentalnog) kontinuuma proširi na mešavine. Prvi objavljeni rad u vezi s tim potiče od A.C.Eringen-a i J.D.Ingram-a [24] i to predstavlja prvi realniji pokušaj formulacije termodinamičke teorije mešavina, gde je dopušteno da sastojci imaju različite temperature.

Teorija mešavina se i dalje razvija i neki od prilaza predstavljaju polaznu osnovu čitavom nizu autora. Tako A.E.Green i P.M.Naghdi [9] prvi postuliraju zakone balansa energije i entropijske nejednakosti zajedno sa principom invarijantnosti na superponirano kruto kretanje za svaki sastojak mešavine. Medjutim, ilustrujući svoju teoriju na dvojnu mešavinu (mešavinu sa dva sastojka) stišljivog Njutnovskog fluida, izvode pogrešan zaključak o parcijalnom pritisku, koji se razlikuje od onog koji daje klasična termodinamika.

Značajan doprinos razvoju teorije mešavina dao je I. Müller [13] . Njegova teorija je u skladu sa klasičnom termodinamikom i on daje odgovarajućim veličinama fizička tumačenja.

Suština njegovog doprinosa je prvo u tome što predlaže, što je i C.Truesdell posebno istakao [8], najpravilniji izbor nezavisno promenljivih koje se unose u konstitutivne jednačine. Drugo, njegov doprinos se odnosi i na pitanje korektnog oblika entropijske nejednakosti. U svom radu " Termodinamička teorija mešavina fluida " , Muller kritikuje zaključak Green-a i Naghdi-a u vezi sa parcijalnim pritiskom, jer nije u skladu sa principom ekviprezensa o nezavisno promenljivim, što je i dovelo do pogrešnih konstitutivnih relacija. Kasnije su Green i Naghdi [12] modifikovali svoje konstitutivne relacije i na taj način priznali da njihove konstitutivne pretpostavke nisu bile kompletne.

1972. godine pojavio se rad koji tretira mešavinu ulazeći u njenu mikrostrukturu. To je rad R.Twiss-a i C.Eringen-a [4], a teorija se naziva mikromorfna teorija mešavina. Očigledno je da se zbog mikrostrukture pojavljuju novi efekti koji se razlikuju od onih u klasičnoj teoriji mešavina. Tu i leži razlog što se pojedini krajnji rezultati ovih teorija ne poklapaju u potpunosti. Medjutim, doprinos daljem razvoju teorije mešavina je svakako od značaja. Autori su u drugom delu istog rada [5] izveli konstitutivne jednačine za mikromorfnu i mikropolarnu mešavinu, ali bez hemijskih reakcija.

1974. godine C.N.DeSilva i M.Sishansi predlažu nelinearnu termodinamičku teoriju mešavina orijentisanih površina [19], a 1975. godine M.A.Rizzi, A.B.Whitman i C.N.DeSilva nelinearnu teoriju mešavina orijentisanih krivih [20], sa pokušajem da se u oba slučaja nadju praktični primeri i primene. Iz ovoga se može zaključiti da se teorija mešavina i dalje intenzivno razvija, sve više se približavajući realnim materijalima i primenama.

1.3. MODEL

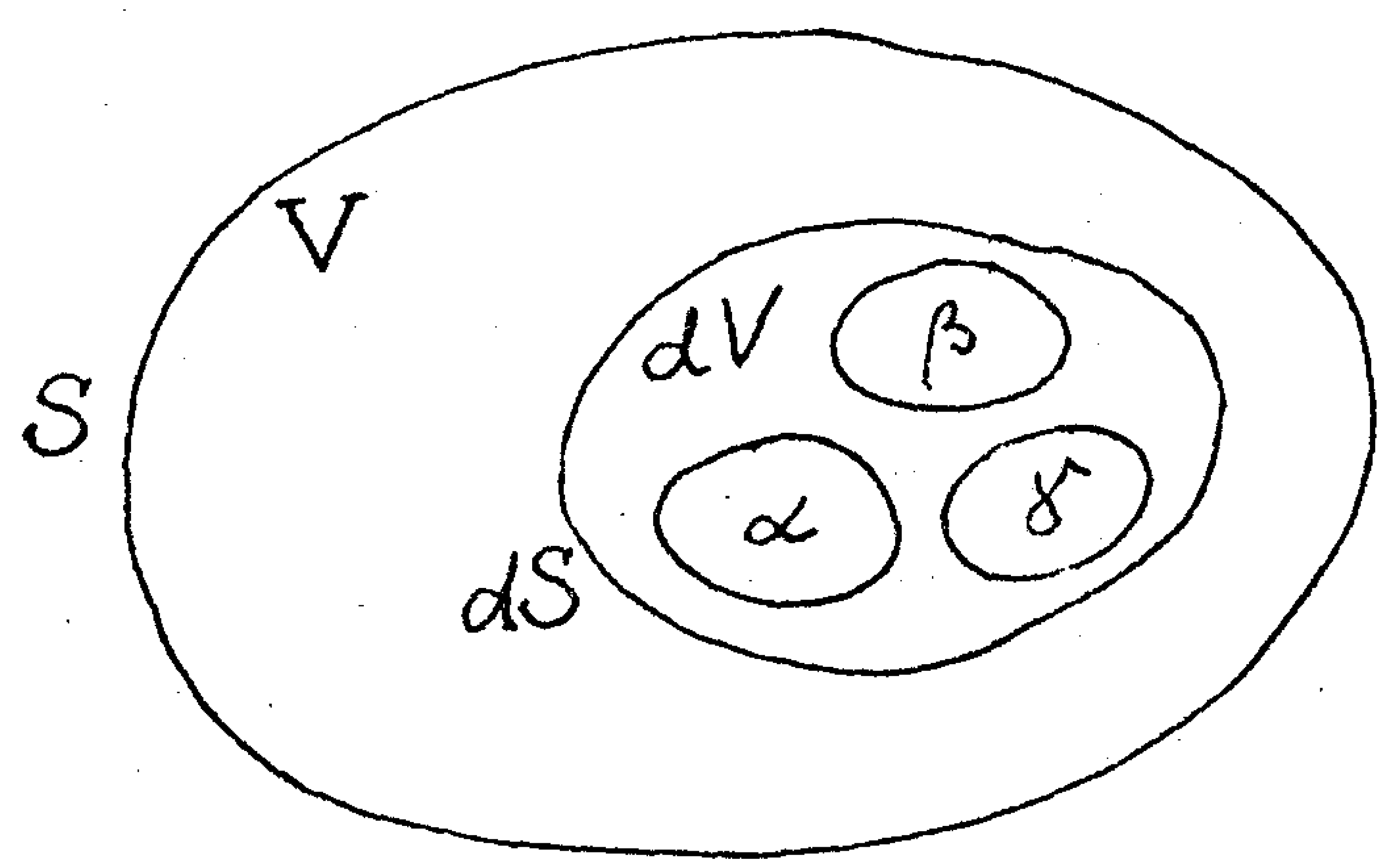
Mešavina je, kao što je već rečeno, materijalna kompozicija pojedinih odvojenih materijalnih sastojaka. U klasičnoj teoriji mehanike kontinuuma mešavina, ona je idealizovana smatrajući da je svaka tačka u njoj istovremeno ispunjena svakim sastojkom. Usled toga mešavina izgleda kao superpozicija više neprekidnih medija.

Ostajući u granicama izučavanja mehanike kontinuuma, koristićemo se modelom materijala čiji su granični zapreminski elementi takvi da je u njima masa neprekidno rasporedjena. Zbog toga ćemo se koristiti elementima makro i mikrostrukture materije. No makroskopsko ponašanje materije je uslovljeno pojavama u mikrostrukturi. Ulazeći u mikrostrukturu materije mi od pojava izdvajamo samo one koje nam se u odgovarajućim proučavanjima čene bitnim.

Neka telo sadrži n različitih sastojaka mešavine $\alpha=1,2,\ldots$ $\ldots,n$. Mi pretpostavljamo da se ono sastoji od velikog broja makroelemenata, koji takodje sadrže sve sastojke mešavine. Pošto je svaki makroelement istovremeno ispunjen svim sastojcima, onda mora da je

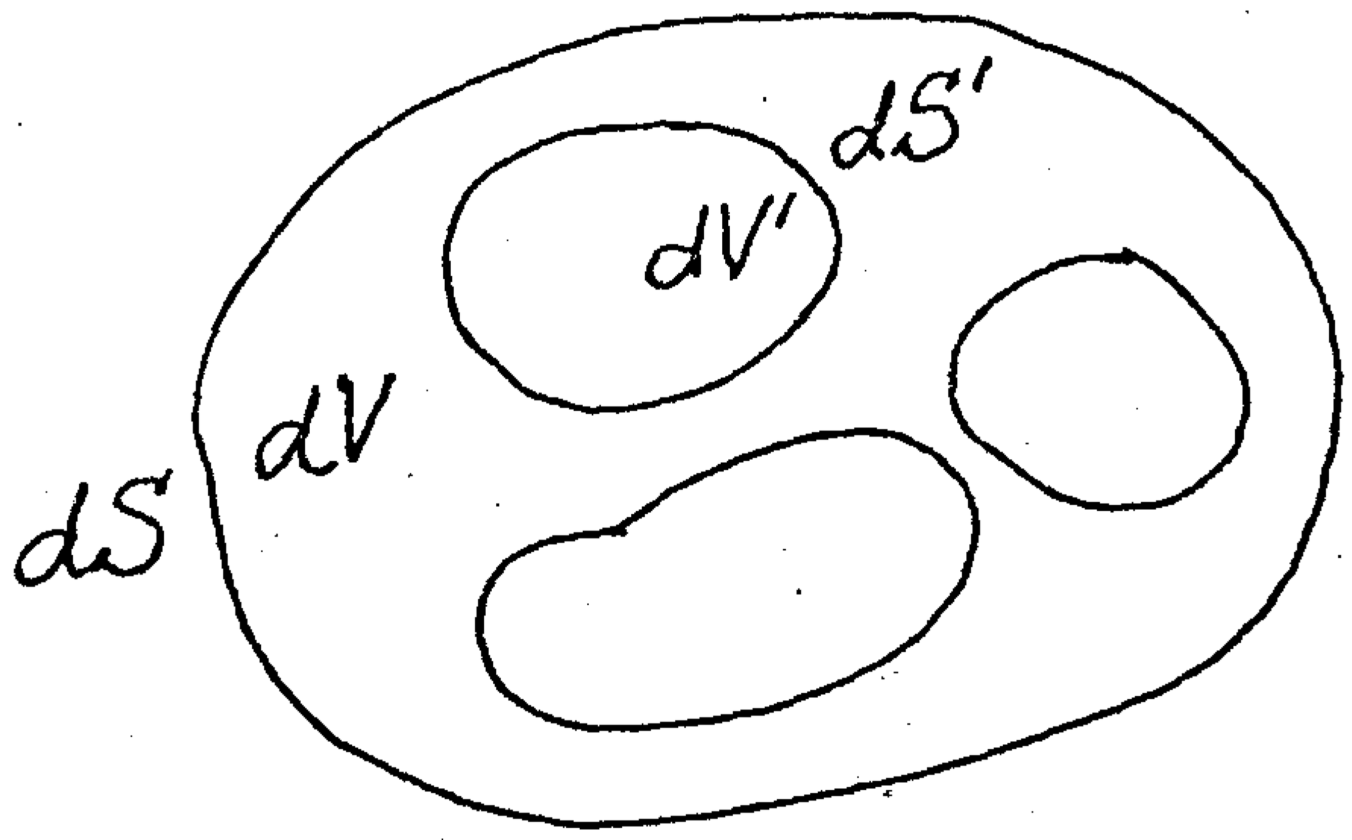
$$dV^{(\alpha)} = dV^{(\beta)} = \ldots = dV$$
$$dS^{\omega} = dS^{(\beta)} = \ldots = dS \qquad (1.3.1.)$$

gde je dV zapremina makroelementa, dS površina koja je obuhvata, a α, β, ... različiti sastojci (sl.1.1).



(sl. 1.1.)

Mi dalje pretpostavljamo da se svaki makroelement sastoji od velikog broja mikroelemenata, od kojih svaki sadrži sve sastojke mešavine (sl.1.2.).



(sl. 1.2.)

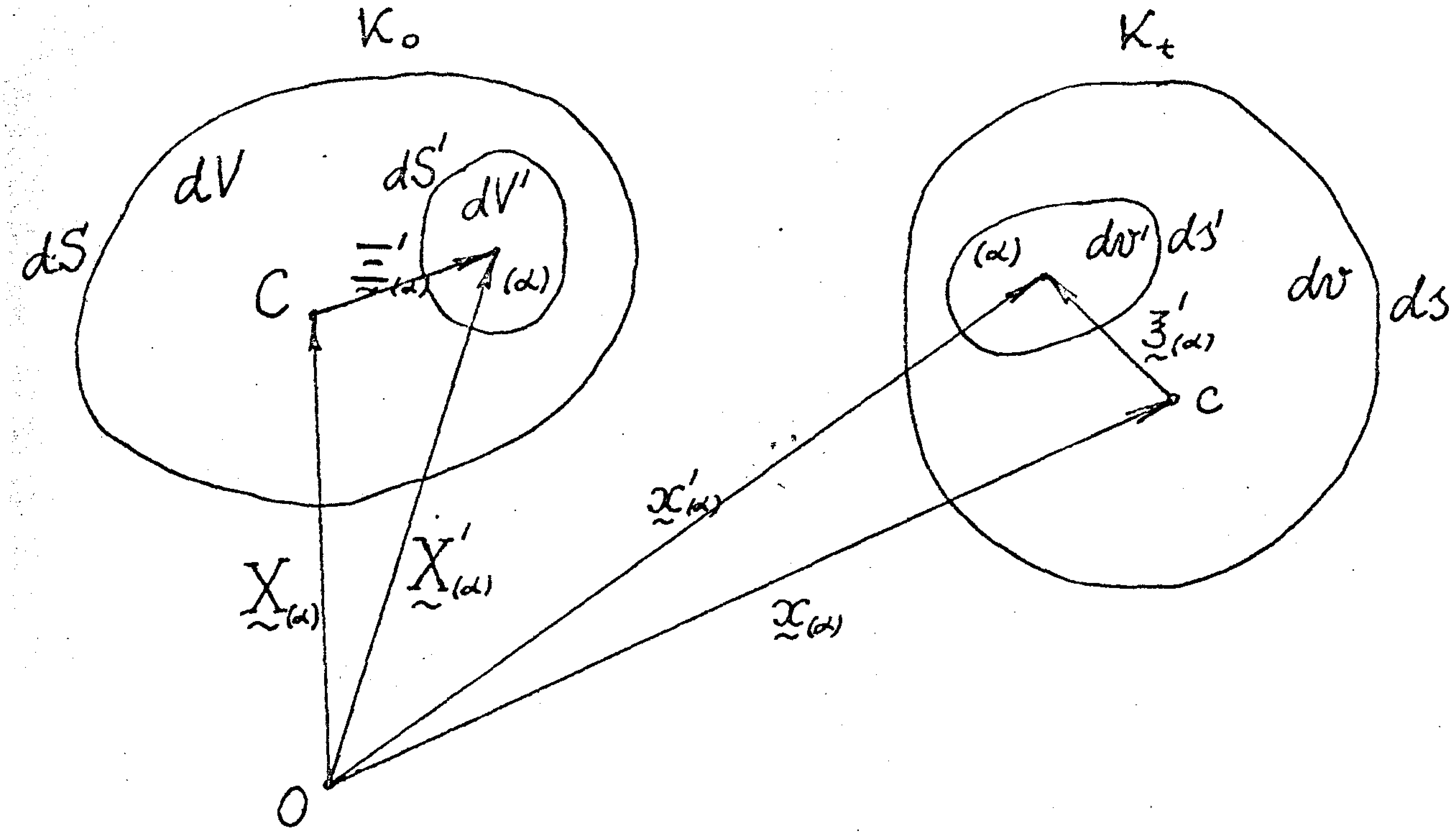
Ovde je dV' zapremina mikroelementa, a dS' površina koja je obuhvata

1.4. KINEMATIKA

Neka telo, koje se sastoji od n različitih sastojaka mešavine $\alpha = 1,2,\ldots,n$, u početnoj, tzv. nedeformisanoj konfiguraciji K_o, koja odgovara trenutku vremena t_o, ima zapreminu V ograničenu zatvorenom površi S. U deformisanoj konfiguraciji K_t, koja odgovara trenutku vremena $t > t_o$, telo će imati zapreminu v ograničenu zatvorenom površi s. Makroelement zapremine dV ograničene zatvorenom površi dS u nedeformisanoj konfiguraciji K_o, imaće posle deformacije zapreminu dv ograničenu zatvorenom površi ds. Mikroelement zapremine dV' ograničene zatvorenom površi dS' u nedeformisanoj konfiguraciji K_o, imaće posle deformacije zapreminu dv' ograničenu zatvorenom površi ds'.

Da bismo opisali kretanje jednog sastojka, možemo ga zamišljeno izdvojiti iz mešavine pod uslovom da na odgovarajući način zamenimo dejstvo drugih sastojaka na njega (princip b)), mi ćemo pretpostaviti kretanje, mikro kretanje i deformaciju samo α-og sastojka mešavine (sl.1.3.).

Centar mase makroelementa C u nedeformisanoj konfiguraciji K_o odredjen je vektorom položaja $\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}$ u odnosu na početak nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema. Vektor položaja centra mase



(sl.1.3.)

mikroelementa C' u odnosu na isti koordinatni sistem obeležen je sa $\underset{\sim}{X}'_{(\alpha)}$, tako da je

(1.4.1.) $$X'^{K}_{(\alpha)} = X^{K}_{(\alpha)} + \Xi'^{K}_{(\alpha)} ,$$

gde je $\underset{\sim}{\Xi}'_{(\alpha)}$ vektor položaja centra mase mikroelementa u odnosu na centar mase makroelementa i gde su

(1.4.2.) $$X^{K}_{(\alpha)} = X^{K}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t)$$
$$\Xi'^{K}_{(\alpha)} = \Xi'^{K}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, \underset{\sim}{\xi}'_{(\alpha)}, t) .$$

U daljoj primeni sve veličine obeležene sa „'" odnosiće se na mikroelement tela.

U deformisanoj konfiguraciji K_t položaj centra mase mikroelementa odredjen je sa

(1.4.3.) $$x'^{k}_{(\alpha)} = x^{k}_{(\alpha)} + \xi'^{k}_{(\alpha)}$$

gde su

$$x^{k}_{(\alpha)} = x^{k}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}, t)$$

(1.4.4.) $$\xi'^{k}_{(\alpha)} = \xi'^{k}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}, \underset{\sim}{\Xi}'_{(\alpha)}, t).$$

Bitna za dalji razvoj teorije je sledeća aproksimacija koja je uobičajena u mikromorfnoj teoriji jednokomponentnih materijala: Kretanje mikroelementa u makroelementu, relativnih u odnosu na njegov centar, može biti adekvatno aproksimirano kao homogena deformacija. Matematički ovo kretanje i njegova inverzija za α-ti sastojak mešavine su predstavljeni kao

(1.4.5.) $$\xi'^{k}_{(\alpha)} = \chi^{kK}_{(\alpha)} \Xi'^{K}_{(\alpha)}, \quad \Xi'^{K}_{(\alpha)} = X^{Kk}_{(\alpha)} \xi'^{k}_{(\alpha)},$$

gde je

(1.4.6.) $$\chi^{kK}_{(\alpha)} X^{Kl}_{(\alpha)} = \delta^{kl}, \quad X^{Kk}_{(\alpha)} \chi^{kL}_{(\alpha)} = \delta^{KL},$$

a δ Kronekerov simbol. Veličine $\chi^{kK}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}, t)$ i $X^{Kk}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t)$ nazivaju se mikrodeformacioni gradijent i inverzni mikrodeformacioni gradijent. Tako su sada jednačine kretanja i deformacija odredjeni sa

$$x^{k}_{(\alpha)} = x^{k}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}, t)$$

(1.4.7.) $$\chi^{kK}_{(\alpha)} = \chi^{kK}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{X}_{(\alpha)}, t).$$

Zamenjujući $(1.4.5.)_1$ u (1.4.3.) dobijamo za ukupno kretanje α-og sastojka mešavine

(1.4.8.) $$x'^{k}_{(\alpha)} = x^{k}_{(\alpha)} + \chi^{kK}_{(\alpha)} \Xi'^{K}_{(\alpha)}.$$

Ako izvršimo diferenciranje po vremenu (1.4.8.), dobijamo izraz za brzinu α-og sastojka u mikroelementu

$$v'^{k}_{(\alpha)} = v^{k}_{(\alpha)} + \nu^{kl}_{(\alpha)} \xi'^{l}_{(\alpha)}, \tag{1.4.9.}$$

gde je $\nu^{kl}_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t)$ giracioni tenzor (tenzor uvrtanja) definisan sa

$$\nu^{kl}_{(\alpha)} \equiv \overset{\circ}{\chi}{}^{kK}_{(\alpha)} \chi^{Kl}_{(\alpha)}. \tag{1.4.10.}$$

U klasičnoj teoriji mešavina postulirane su ili izvedene neke veličine koje predstavljaju srednje vrednosti za mešavinu i one se koriste u svim pristupima pri izučavanju mešavina. Mi ćemo izvesti sve odgovarajuće veličine za slučaj mikromorfne mešavine.

Ukupna masa u makroelementu, prema mikromorfnoj teoriji jednokomponentnih tela, data je sa

$$\int_{dV} \rho' dV' = \rho dV. \tag{1.4.11.}$$

Masa α-og sastojka u makroelementu je

$$\int_{dV} \rho'_{(\alpha)} dV' = \rho_{(\alpha)} dV, \tag{1.4.12.}$$

gde je $\rho'_{(\alpha)}$ gustina α-og sastojka u mikroelementu, a dV' zapremina mikroelementa. Kako zapremina mikroelementa dV' sadrži sve sastojke mešavine, imaćemo posle sabiranja (1.4.12.) po svim sastojcima

$$\sum_{\alpha} \int_{dV} \rho'_{(\alpha)} dV' = \int_{dV} \sum_{\alpha} \rho'_{(\alpha)} dV' = \int_{dV} \rho' dV' = \rho dV, \tag{1.4.13.}$$

gde je $\sum \rho'_{(\alpha)} = \rho'$ srednja gustina mešavine u mikroelementu. U daljoj primeni $\sum$ će uvek označavati sabiranje po svim sastojcima mešavine. Ako izvršimo sabiranje $(1.4.12.)_2$ po svim sastojcima mešavine i iskoristimo $(1.4.13.)_4$, dobićemo

(1.4.14.) $$\sum \rho_{(\alpha)} dV = \rho dV.$$

Pošto je zapremina dV ista, sledi za srednju gustinu mešavine

(1.4.15.) $$\sum \rho_{(\alpha)} = \rho .$$

Istim izrazom je definisana srednja gustina mešavine i u klasičnoj teoriji mešavina.

Za izvodjenje srednje vrednosti tenzora mikroinercije višeg reda polazimo od definicije

(1.4.16.) $$\int_{dV} \rho'_{(\alpha)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1 \ldots l_p} dV.$$

Posle sabiranja $(1.4.16.)_1$ po svim sastojcima mešavine, imaćemo

(1.4.17.) $$\sum \int_{dV} \rho'_{(\alpha)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \int_{dV} \sum \rho'_{(\alpha)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \int_{dV} \rho' \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \rho i^{l_1 \ldots l_p} dV.$$

Ako $(1.4.16.)_2$ saberemo po svim sastojcima mešavine i iskoristimo $(1.4.17.)_4$, dobićemo

$$\sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1 \ldots l_p} dV = \rho i^{l_1 \ldots l_p} dV$$

odnosno

(1.4.18) $$\sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1 \ldots l_p} = \rho i^{l_1 \ldots l_p},$$

gde je $i^{l_1 \ldots l_p}$ tenzor mikroinercije mešavine p-og reda.

Na osnovu (1.4.9.) i (1.4.16.) lako se može pokazati da je

(1.4.19.)
$$\int\limits_{dV} \rho'_{(\omega)} \underset{\sim}{v}'_{(\omega)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \int\limits_{dV} \rho'_{(\omega)} (\underset{\sim}{v}_{(\omega)} + \underset{\sim}{\nu}_{(\omega)l} \xi^{l}) \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' =$$
$$= (\rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{v}_{(\omega)} + \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{\nu}_{(\omega)l}) dV.$$

Ako u $(1.4.19.)_1$ izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (1.4.17.), dobićemo

(1.4.2o.)
$$\sum \int\limits_{dV} \rho'_{(\omega)} \underset{\sim}{v}'_{(\omega)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \int\limits_{dV} \sum \rho'_{(\omega)} \underset{\sim}{v}'_{(\omega)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' =$$
$$= \int\limits_{dV} \rho' \underset{\sim}{v}' \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' = \int\limits_{dV} \rho' (\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\nu}_l \xi^{l}) \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} dV' =$$
$$= (\rho i^{l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{v} + \rho i^{l l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{\nu}_l) dV,$$

gde je
$$\sum \rho'_{(\omega)} \underset{\sim}{v}'_{(\omega)} \overset{def.}{=\!=} \rho' \underset{\sim}{v}',$$

pri čemu je $\underset{\sim}{v}'$ srednja brzina mikroelementa i neprekidna funkcija položaja i kao takva se može izraziti u obliku

$$\underset{\sim}{v}' = \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\nu}_l \xi^{l}.$$

Sabirajući $(1.4.19.)_3$ po svim sastojcima mešavine i koristeći $(1.4.2o.)_5$, dobićemo

(1.4.21.)
$$\sum \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{v}_{(\omega)} + \sum \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{\nu}_{(\omega)l} = \rho i^{l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{v} + \rho i^{l l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{\nu}_l .$$

Ovde se može videti da se, kada se radi o mikromorfnoj teoriji mešavina višeg stepena, o srednjoj brzini mešavine može govoriti samo u paru sa srednjim giracionim tenzorom (srednjim tenzorom uvrtanja).

U specijalnom slučaju za p=o,1, a na osnovu (1.4.18.) i (1.4.21.), sledi da je

$$\sum \rho_{(\alpha)} i^{l}_{(\alpha)} = \rho i^{l}$$

$$\sum \rho_{(\alpha)} i^{kl}_{(\alpha)} = \rho i^{kl}$$

(1.4.22.)
$$\sum \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i^{l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} = \rho \underset{\sim}{v} + \rho i^{l} \underset{\sim}{\nu}_{l}$$

$$\sum \rho_{(\alpha)} i^{l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i^{kl}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} = \rho i^{l} \underset{\sim}{v} + \rho i^{kl} \underset{\sim}{\nu}_{k} .$$

Ako je $i^{l}_{(\alpha)}=0$ za svako $\alpha=1,2,\ldots,n$, tada iz $(1.4.22.)_{1,3,4}$ sledi da je

(1.4.23.)
$$i^{l}=0$$
$$\sum \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} = \rho \underset{\sim}{v}$$
$$\sum \rho_{(\alpha)} i^{kl}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} = \rho i^{kl} \underset{\sim}{\nu}_{k} ,$$

što je u potpunoj saglasnosti sa rezultatima [4] i [14] . Uslov $i^{l}_{(\alpha)}=0$ fizički znači da se centar mase makroelementa nalazi u istoj tački makroelementa.

U klasičnoj teoriji mešavina relativna brzina α-og sastojka u odnosu na brzinu mešavine definisana je sa

(1.4.24.)
$$\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{v}$$

i nazvana brzinom difuzije α-og sastojka mešavine.

S obzirom da se ovde radi o mešavini sa mikrostrukturom postojaće i takozvano difuzno obrtanje, koje se definiše kao razlika izmedju obrtanja odnosnog sastojka i obrtanja mešavine, tj.

(1.4.25.)
$$\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)k} = \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} - \underset{\sim}{\nu}_{k} .$$

Smenom (1.4.24.) i (1.4.25.) u (1.4.21.), a na osnovu (1.4.18.), dobijamo

(1.4.26.) $$\sum \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\omega)} + \sum \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{l l_1 \ldots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\omega) l} = 0 \ .$$

Za slučaj p=o iz (1.4.26.) sledi da je

(1.4.27.) $$\sum \rho_{(\omega)} \underset{\sim}{u}_{(\omega)} = 0$$

Isti rezultat postoji i u klasičnoj teoriji mešavina.

Za slučaj p=1 iz (1.4.26.) sledi da je

(1.4.28.) $$\sum \rho_{(\omega)} i_{(\omega)}^{kl} \underset{\sim}{\theta}_{(\omega) l} = 0 \ ,$$

što se slaže sa rezultatima u [4] i [14].

U teoriji mešavina se definišu sledeća dva materijalna izvoda: materijalni izvod pri praćenju kretanja mešavine

(1.4.29.) $$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi_{,k} v^k$$

i materijalni izvod sastojka kada se prati njegovo individualno kretanje

(1.4.30.) $$\grave{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi_{,k} v^k_{(\omega)} \ .$$

Veza izmedju ova dva materijalna izvoda je data sa

(1.4.31.) $$\grave{\Psi} = \dot{\Psi} + \Psi_{,k} u^k_{(\omega)} \ .$$

Ako za mešavinu postoji sledeća srednja vrednost neke funkcije

(1.4.32.)
$$\rho\Psi \equiv \sum \rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} ,$$

onda koristeći (1.4.29.) i (1.4.3o.), dobijamo takozvanu fundamentalnu identičnost

(1.4.33.)
$$\sum \rho_{(\alpha)} \grave{\Psi}_{(\alpha)} = \rho\dot{\Psi} + \Psi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k}\right] + \sum(\rho_{(\alpha)}\Psi_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)})_{,k} - \\ - \sum \Psi_{(\alpha)}\left[\frac{\partial\rho_{(\alpha)}}{\partial t} + (\rho_{(\alpha)} v^k_{(\alpha)})_{,k}\right].$$

Ova fundamentalna identičnost i njeni modifikovani oblici će igrati važnu ulogu pri izvodjenju zakona balansa mešavine.

1.5. OPŠTI LOKALNI ZAKONI BALANSA MIKROMORFNE MEŠAVINE

Da bismo ispitali ponašanje sastojka u mešavini, a kasnije i same mešavine, mi ćemo primenjujući princip naveden pod b) i koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa mikromorfne teorije [1], ne upuštajući se u izvodjenje odgovarajućih zakona balansa već upućujući čitaoca na rad [1], napisati opšti oblik lokalnih zakona balansa i glavnih uslova diskontinuiteta do p-og reda, koji će važiti za svaki sastojak pojedinačno, tj.

(1.5.1.)
$$\tau^k_{(\alpha),k} + g_{(\alpha)} - \grave{\partial}_{(\alpha)} = 0$$
$$[\![\tau^k_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)}(v^k_{(\alpha)} - u^k)]\!] n_k = 0$$

gde je

(1.5.2.)
$$\grave{\partial}_{(\alpha)} = \grave{\Psi}_{(\alpha)} + \Psi_{(\alpha)} v^k_{(\alpha),k} ,$$

$$\tau^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)\;\;,k}+\tilde{\tau}^{(l_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}-\bar{\tau}^{(l_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}+g^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\grave{\sigma}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}=0$$

(1.5.3.)

$$[\![\tau^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}(v^k_{(\alpha)}-u^k)]\!]n_k=0,\quad p\geq 1$$

gde je

(1.5.4.) $$\grave{\sigma}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}=\grave{\psi}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}v^k_{(\alpha),k}-\hat{\psi}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)},\quad p\geq 1$$

Ovde se izvodi po vremenu odnose na α-ti sastojak mešavine, a $v^k_{(\alpha)}$, u^k, $n^k_{(\alpha)}$ su brzina α-og sastojka mešavine, brzina tačaka singularne površi i jedinični vektor normale površi, respektivno.

Odgovarajuća tenzorska polja u gornjim jednačinama definisana su sa

$$\tau^k_{(\alpha)}=\langle\tau^k_{(\alpha)}\rangle_2,\quad \psi_{(\alpha)}=\langle\psi_{(\alpha)}\rangle,\quad g_{(\alpha)}=\langle g_{(\alpha)}\rangle,$$

(1.5.5.)

$$\begin{aligned}
\tau^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}&=\frac{1}{p!}\langle\tau^k_{(\alpha)}\xi^{(l_1}\cdots\xi^{l_p)}\rangle_2\\
\bar{\tau}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}&=\frac{1}{p!}\langle\tau^k_{(\alpha)}\xi^{(l_1}\cdots\xi^{l_p)}\rangle\\
g^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}&=\frac{1}{p!}\langle g_{(\alpha)}\xi^{(l_1}\cdots\xi^{l_p)}\rangle\\
\psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}&=\frac{1}{p!}\langle\psi_{(\alpha)}\xi^{(l_1}\cdots\xi^{l_p)}\rangle\\
\hat{\psi}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}&=\frac{1}{p!}\langle\psi_{(\alpha)}\dot{\xi}^k\xi^{(l_1}\cdots\xi^{l_p)}\rangle,
\end{aligned}$$

gde se pod uglastim zagradama podrazumevaju srednje vrednosti definisane na sledeći način

(1.5.6.)

$$\langle\Phi\tau\rangle_2=\Phi\tau+\sum_{p=1}\Phi_{,l_1\ldots l_p}\tau^{l_1\ldots l_p}$$

$$\langle\Phi\psi\rangle=\Phi\psi+\sum_{p=1}\Phi_{,l_1\ldots l_p}\psi^{l_1\ldots l_p},$$

Dalje pretpostavljamo da je za α-ti sastojak

(1.5.7.) $$\dot{\underset{\sim}{\xi}}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t)\xi^k_{(\alpha)}, \text{ tj. } \dot{\xi}_{(\alpha)l} = \nu_{(\alpha)lk}\xi^k_{(\alpha)},$$

gde su $\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}$ giracioni vektori pomoću kojih možemo napisati da je

(1.5.8.) $$\hat{\Psi}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \sum_{s=1}^{p} \nu^{l_s}_{(\alpha)k}\,\Psi^{l_1 \dots l_{s-1} k l_{s+1} \dots l_p}_{(\alpha)} .$$

1.6. POSEBNI ZAKONI BALANSA SASTOJKA I MEŠAVINE

Koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa α-og sastojka, kao i glavne uslove diskontinuiteta (1.5.1.) i (1.5.3.), možemo izvesti odgovarajuće zakone balansa pojedinih fizičkih veličina. Ako izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine dobićemo odgovarajuće zakone balansa mešavine.

a) Gustina mase i tenzori mikroinercije

Zakoni balansa ovih veličina dobijaju se kada se uzme da je

(1.6.1.) $$\Psi'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)}, \quad \tau'^k_{(\alpha)} = 0, \quad g'_{(\alpha)} = \rho\hat{\beta}'_{(\alpha)}$$

gde oznaka „ ' " odredjuje date veličine u odnosu na mikroelement, pa je $\rho'_{(\alpha)}$ gustina mase α-og sastojka mešavine, a $\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}$ zapreminska promena mase α-og sastojka mešavine usled hemijskih reakcija sa drugim sastojkom ili sastojcima mešavine. S obzirom na (1.5.1.), sledi da je

$$\tau^k_{(\alpha)} = 0, \quad \tau^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \bar{\tau}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = 0$$

(1.6.2.) $$\Psi_{(\alpha)} = \langle \rho_{(\alpha)} \rangle = \rho_{(\alpha)}$$

$$\Psi^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \frac{1}{p!}\langle \rho_{(\alpha)}\xi^{(l_1} \cdots \xi^{l_p)} \rangle = \rho_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)} = \langle \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \rangle = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} = \frac{1}{p!} \langle \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \xi^{(l_1} \cdots \xi^{l_p)} \rangle = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} ,$$

gde su $\rho_{(\alpha)}$ i $\dot{i}_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p}$ gustina mase i tenzori mikroinercije α-og sastojka mešavine. Zamenjujući $(1.6.2.)_2$ u (1.5.2.), dobijamo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} v_{(\alpha),k}^{k} , \tag{1.6.3.}$$

pa je zakon balansa α-og sastojka iz $(1.5.1.)_1$

$$\grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} v_{(\alpha),k}^{k} = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho_{(\alpha)} v_{(\alpha)}^{k})_{,k} = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} . \tag{1.6.4.}$$

Ako $(1.6.2.)_1$ i $(1.6.2.)_2$ zamenimo u $(1.5.1.)'_2$, dobijamo uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine

$$[\![\rho_{(\alpha)} (v_{(\alpha)}^{k} - u^{k})]\!] n_k = 0 . \tag{1.6.5.}$$

Kada izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine u $(1.6.4.)_2$ i iskoristimo (1.4.15.), $(1.4.23.)_2$,(1.4.24.) i (1.4.27.), dobićemo zakon balansa gustine mešavine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^{k})_{,k} = 0 , \tag{1.6.6.}$$

uz uslov

$$\sum \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} = 0 \tag{1.6.7.}$$

kao posledicu pretpostavke da u mešavini nema promene mase. Jednačina (1.6.6.) odgovara zakonu konzervacije za prosto (jednokomponentno) telo i to se slaže sa fizičkim principom navedenim u Uvodu pod c).

Uslov diskontinuiteta za mešavinu dobijamo iz (1.6.5.) pošto izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (1.4.24.), tj.

$$[\![\rho(v^k - u^k)]\!] n^k = 0. \tag{1.6.8.}$$

Za izvodjenje zakona balansa tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine potrbno je prethodno izračunati (1.5.4.). Koristeći (1.5.8.), (1.6.2.)$_{3,5}$ i (1.6.4.), dobijamo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} = \rho_{(\alpha)} \overline{\dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}}^{\grave{}} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} - \sum_s \rho_{(\alpha)} \gamma_{(\alpha)k}^{l_s} \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots k \ldots l_p}, \quad p \geq 1. \tag{1.6.9.}$$

Kada (1.6.9.) zamenimo u (1.5.3.)$_1$, dobijamo zakon balansa tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine

$$\rho_{(\alpha)} \overline{\dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}}^{\grave{}} - \sum_s \rho_{(\alpha)} \gamma_{(\alpha)k}^{l_s} \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots k \ldots l_p} = \rho \left(\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} - \hat{\beta}_{(\alpha)} \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} \right). \tag{1.6.10.}$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobijamo ako iskoristimo (1.5.2.)$_2$, (1.5.5.)$_2$ i (1.5.5.)$_5$, tj.

$$[\![\rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} (v_{(\alpha)}^k - u^k)]\!] n_k = 0. \tag{1.6.11.}$$

Fundamentalna identičnost (1.4.33.), koristeći (1.6.4.)$_2$ i (1.6.6.), postaje

$$\sum \rho_{(\alpha)} \grave{\Psi}_{(\alpha)} = \rho \mathring{\Psi} + \sum (\rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} u_{(\alpha)}^k)_{,k} - \sum \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)}. \tag{1.6.12.}$$

Ako ovde stavimo da je $\Psi_{(\alpha)} = \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}$ i $\Psi = i^{l_1\ldots l_p}$ i iskoristimo (1.4.32.), dobićemo

$$(1.6.13.)\qquad \sum \varrho_{(\alpha)} \overline{i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}}^{\,\grave{}} = \varrho\, \dot{\overline{i^{l_1\ldots l_p}}} + \sum \left(\varrho_{(\alpha)} i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)}\right)_{,k} - \varrho \sum \hat{\beta}_{(\alpha)} i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} .$$

Sabirajući (1.6.1o.) po svim sastojcima mešavine uzimajući u obzir (1.6.13.), kao i pretpostavku da u mešavini nema promene mase, tj. uslov (1.6.7.), dobićemo zakon balansa tenzora mikroinercije za mešavinu

$$(1.6.14.)\qquad \varrho\, \dot{\overline{i^{l_1\ldots l_p}}} - \sum \sum_{s} \varrho_{(\alpha)} \nu^{l_s}_{(\alpha)k} i^{l_1\ldots k\ldots l_p}_{(\alpha)} = \varrho \sum \hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} - \sum \left(\varrho_{(\alpha)} i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)}\right)_{,k},$$

uz uslov

$$\sum \hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = 0 .$$

Ako u (1.6.11.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine. dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

$$(1.6.15.)\qquad [\![\sum \varrho_{(\alpha)} i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)} + \varrho\, i^{l_1\ldots l_p}(v^k - u^k)]\!]\, n_k = 0 .$$

b) Količina kretanja i momenti količine kretanja

U ovom slučaju su

$$(1.6.16.)\qquad \begin{aligned} \Psi'_{(\alpha)} &= \varrho'_{(\alpha)} v'^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{g}'_k = \varrho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} \\ \tau'^{k}_{(\alpha)} &= t'^{kl}_{(\alpha)} \underset{\sim}{g}'_l = \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)} \\ g'_{(\alpha)} &= \varrho'_{(\alpha)} f'^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{g}'_k = \varrho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}'_{(\alpha)} \end{aligned}$$

gde su $\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}$ i $\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)}$ vektor brzine, vektor napona i zapreminska sila α-og sastojka mešavine, respektivno, u odnosu na mikroelement. Odgovarajuće veličine iz (1.5.1.) i (1.5.3.) su prema (1.5.5.)

sledećeg oblika

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \\
&\Psi^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \\
&\tilde{\tau}^{k}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} \\
(1.6.17) \qquad &\tilde{\tau}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \\
&\bar{\tilde{\tau}}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{\bar{t}}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \\
&g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} \\
&g^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} f^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}
\end{aligned}
$$

gde su $\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{\bar{t}}^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}$ i $f^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$ vektor napona, vektori naponskog momenta, vektori momenata prosečnog napona, vektor zapreminske sile i vektori momenata zapreminske sile α -og sastojka mešavine, respektivno.

Zamenjujući (1.6.17.) u (1.5.2.) i koristeći (1.6.4.), dobijamo

$$
(1.6.18.) \qquad \grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho \left(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \right) + \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{\grave{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \left(\nu^{l}_{(\alpha)k} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} + \underset{\sim}{\grave{\nu}}_{(\alpha)k} \right).
$$

Ako $(1.6.17.)_{3,6}$ i (1.6.18.) zamenimo u $(1.5.1.)_1$, dobićemo

$$
(1.6.19.) \qquad
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha),k} + \rho_{(\alpha)} \left(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{\grave{v}}_{(\alpha)} \right) - \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \left(\nu^{l}_{(\alpha)k} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} + \underset{\sim}{\grave{\nu}}_{(\alpha)k} \right) = \\
&= \rho \left(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \right).
\end{aligned}
$$

Kada uzmemo u obzir da je

$$
(1.6.2o.) \qquad i^{k}_{(\alpha)} = 0 ,
$$

to iz (1.6.1o.), za slučaj kada je p=1, sledi da je

(1.6.21.) $$\dot{\bar{i}}^{k}_{(\alpha)} = 0 \quad , \quad \hat{\beta}^{k}_{(\alpha)} = 0 \, .$$

Tada iz (1.6.19.) dobijamo zakon balansa količine kretanja α-og sastojka mešavine u obliku

(1.6.22.) $$\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha),k} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \, .$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobićemo ako iskoristimo $(1.5.1.)_2$, $(1.6.17.)_{1,3}$ uz (1.6.2o.), tj.

(1.6.23.) $$[\![\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}(v^{k}_{(\alpha)} - u^{k})]\!] n_k = 0 \, .$$

Ako u jednačini (1.6.22.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, iskoristimo fundamentalnu identičnost (1.6.12.) stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)} = \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$ i $\Psi = \underset{\sim}{v}$ i sledeće definicije

(1.6.24.) $$\sum \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} = \rho\underset{\sim}{f}$$

(1.6.25.) $$\underset{\sim}{t}^{k} = \sum(\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}u^{k}_{(\alpha)}) ,$$

dobićemo zakon balansa količine kretanja mešavine

(1.6.26.) $$\underset{\sim}{t}^{k}_{,k} + \rho(\underset{\sim}{f} - \dot{\underset{\sim}{v}}) = 0 \, ,$$

koji po obliku odgovara Prvom Košijevom zakonu kretanja prostog (jednokomponentnog) tela, a to znači da je ispunjen fizički princip naveden u Uvodu pod c).

Kada u jednačini (1.6.23.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definiciju (1.6.25.), dobijamo uslov diskontinuiteta za mešavinu

(1.6.27.) $$[\![\underset{\sim}{t}^{k} - \rho \underset{\sim}{v}(v^{k} - u^{k})]\!] n_{k} = 0 .$$

Da bismo dobili zakone balansa momenata količine kretanja α-og sastojka mešavine, najpre ćemo zameniti $(1.6.17.)_2$ u (1.5.4.) i koristeći (1.5.8.) i (1.6.1o.) dobiti

(1.6.28.) $$\grave{\underset{\sim}{\sigma}}{}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} = \rho(\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)k}) + \rho_{(\alpha)} \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}(\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)k} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)r} v^{r}_{(\alpha)k}), \quad p \geq 1 .$$

Ako $(1.6.17.)_{4,5,7}$ i (1.6.28.) zamenimo u $(1.5.3.)_1$, dobićemo zakon balansa momenata količine kretanja α-og sastojka mešavine

(1.6.29.) $$\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}{}_{,k} + \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} - \dot{i}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) - \rho_{(\alpha)}\dot{i}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}(\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)k} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)r} v^{r}_{(\alpha)k}) = \rho(\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)k}) .$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobijamo iz $(1.5.3.)_2$ koristeći $(1.6.17.)_{2,4}$, tj.

(1.6.3o.) $$[\![\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p} - \rho_{(\alpha)}(i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)k})(v^{k}_{(\alpha)} - u^{k})]\!] n_{k} = 0 .$$

Da bismo izveli zakone balansa momenata količine kretanja mešavine poći ćemo od izraza (1.4.21.)

(1.6.31.) $$\rho i^{l_1\dots l_p}\underset{\sim}{v} + \rho i^{l_1\dots l_p l}\underset{\sim}{v}_{l} = \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p l}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)l} .$$

Ako potražimo izvod leve i desne strane, posle duže računice i pogodnog sredjivanja, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} \dot{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} (\dot{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)l} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)k} v^{k}_{(\alpha)l}) = \\
&= \rho i^{l_1\ldots l_p} \dot{\underset{\sim}{v}} + \rho i^{l_1\ldots l_p l} (\dot{\underset{\sim}{v}}_l + \underset{\sim}{v}_k v^{k}_{l}) - \rho \sum (\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}) \\
&+ \sum \left[\rho_{(\alpha)} u^{k}_{(\alpha)} (i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}) \right]_{,k} - \qquad (1.6.32.) \\
&- \sum \sum_{s} \rho_{(\alpha)} \theta^{l_s}_{(\alpha)k} (i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p l} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}) + \\
&+ \underset{\sim}{v}_{,k} \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} u^{k}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{l,k} \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} u^{k}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{v}_l \sum \rho_{(\alpha)} \theta^{l}_{(\alpha)k} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p k} .
\end{aligned}
$$

Ako u jednačini (1.6.29.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, pri čemu ćemo iskoristiti (1.6.32.) i odgovarajuće definicije, dobićemo zakon balansa momenata količine kretanja mešavine u obliku

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{t}^{k(l_1\ldots l_p)}{}_{,k} + \underset{\sim}{t}^{(l_1\ldots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{(l_1\ldots l_p)} + \rho (\underset{\sim}{f}^{l_1\ldots l_p} - i^{l_1\ldots l_p} \dot{\underset{\sim}{v}}) - \\
&- \rho i^{l_1\ldots l_p l} (\dot{\underset{\sim}{v}}_l + \underset{\sim}{v}_k v^{k}_{l}) = \rho \underset{\sim}{v} \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} + \rho \underset{\sim}{v}_l \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} + \qquad (1.6.33.) \\
&+ \underset{\sim}{v}_{,k} \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} u^{k}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{l,k} \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} u^{k}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{v}_l \sum \rho_{(\alpha)} \theta^{l}_{(\alpha)k} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p k} ,
\end{aligned}
$$

uz uslove

$$
\sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} = 0 \quad \text{i} \quad \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} = 0 , \qquad (1.6.34.)
$$

i gde su po definiciji

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{t}^{k(l_1\ldots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{k(l_1\ldots l_p)} - \rho_{(\alpha)} u^{k}_{(\alpha)} (i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}) \right] \\
&\underset{\sim}{t}^{(l_1\ldots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{(l_1\ldots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} + \sum_{s} \rho_{(\alpha)} \theta^{l_s}_{(\alpha)k} (i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \right. \qquad (1.6.35.) \\
&\qquad \left. + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p l} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)k}) \right] \\
&\rho \underset{\sim}{f}^{l_1\ldots l_p} = \sum \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}
\end{aligned}
$$

Ako u (1.6.3o.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definiciju (1.6.35.)$_1$, dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

(1.6.36.) $$[\![\underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p} - \rho(i^{l_1\ldots l_p}\underset{\sim}{v} + i^{kl_1\ldots l_p}\underset{\sim}{v}_k)(v^k - u^k)]\!] n_k = 0\ ,\quad p \geq 1\ .$$

c) Energija i momenti energije

Odgovarajuće veličine u ovom slučaju su

$$\Psi'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)}\left(\epsilon'_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}\right)$$

(1.6.37.) $$\tau'^k_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}'^k_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + q'^k_{(\alpha)}$$

$$g'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)}\circ\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + \rho'_{(\alpha)}h'_{(\alpha)}\ ,$$

gde su $\epsilon'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^k_{(\alpha)}$, $q'^k_{(\alpha)}$ i $h'_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije, vektor napona, vektor toplotnog fluksa i zapreminski izvor energije (zapreminska specifična proizvodnja toplote) α-og sastojka mešavine, respektivno, u odnosu na mikroelement. Odgovarajuće veličine iz (1.5.1.), (1.5.2.), (1.5.3.) i (1.5.4.) su prema (1.5.5.) sledećeg oblika

$$\Psi_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right)$$

$$\Psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}v^2_{(\alpha)}\, i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)r}\, i^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)s}\, i^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\right)$$

(1.6.38.) $$\tau^k_{(\alpha)} = q^k_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^k_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)}\circ\underset{\sim}{v}_{(\alpha)r}$$

$$\tau^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = q^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\circ\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{krl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)r}$$

$$\bar{\tau}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \bar{q}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \bar{\underset{\sim}{t}}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\circ\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \bar{\underset{\sim}{t}}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)k}$$

$$g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{f}^{r}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)}$$

$$g^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{f}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{f}^{r l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} h^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} ,$$

gde su $\epsilon_{(\alpha)}$, $q^{k}_{(\alpha)}$ i $h_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije po jedinici mase α -og sastojka mešavine, vektor toplotnog fluksa α -og sastojka mešavine i izvor energije po jedinici zapremine α -og sastojka mešavine, respektivno, dok su $\epsilon^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$, $q^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$, $\bar{q}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$ i $h^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$ tenzori momenata navedenih veličina za α -ti sastojak mešavine.

Smenom $(1.6.38.)_1$ u (1.5.2.) i koristeći (1.6.4.), dobijamo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \left[\grave{\epsilon}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)} \left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)r} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \nu^{k}_{(\alpha)r} \right) \right] + \tag{1.6.39.}$$
$$+ \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \right) + \tfrac{1}{2} \rho \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} .$$

Ako $(1.6.38.)_{3,6}$ i (1.6.39.) zamenimo u $(1.5.1.)_1$, dobićemo zakon balansa energije α -og sastojka mešavine u obliku

$$\rho \grave{\epsilon}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha),k} - \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r,k} + \left(\underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{r}_{(\alpha)} \right) \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} - q^{k}_{(\alpha),k} - \tag{1.6.40.}$$
$$- \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)} = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \left(\tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \epsilon_{(\alpha)} \right) + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} .$$

Kada se $(1.6.38.)_{1,3}$ zameni u $(1.5.1.)_2$, dobijamo uslov diskontinuiteta α -og sastojka mešavine u obliku

$$\left[\!\left[q^{k}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} - \rho_{(\alpha)} \left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)} \right) \left(v^{k}_{(\alpha)} - u^{k} \right) \right]\!\right] n_{k} = 0 \tag{1.6.41.}$$

Ako u jednačini (1.6.4o.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo fundamentalnu identičnost (1.6.12.), posle duže računice i sredjivanja, dobićemo zakon balansa energije za mešavinu

$$- \rho \dot{\epsilon} + \underset{\sim}{t}^{k} \cdot \underset{\sim}{v}_{,k} + \underset{\sim}{t}^{kr} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{r,k} + \left(\bar{\underset{\sim}{t}}^{r} - \underset{\sim}{t}^{r} \right) \underset{\sim}{\nu}_{r} + q^{k}_{,k} + \rho h = 0 , \tag{1.6.42.}$$

gde su po definiciji

$$
\begin{aligned}
\rho\epsilon &= \sum \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right)\\
\underset{\sim}{t}^{k} &= \sum\left(\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}u^{k}_{(\alpha)}\right)\\
\underset{\sim}{t}^{kr} &= \sum\left(\underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\, u^{k}_{(\alpha)}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right) \qquad (1.6.43.)\\
\underset{\sim}{t}^{r} &= \sum\left(\underset{\sim}{\bar t}^{r}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}u^{r}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\,\theta^{r}_{(\alpha)k}\, \dot{i}^{ks}_{(\alpha)}\right)\\
q^{k} &= \sum\left[q^{k}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} - \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right)u^{k}_{(\alpha)}\right]\\
\rho h &= \sum \rho_{(\alpha)}\left(h_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}^{r}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\right).
\end{aligned}
$$

Ako (1.6.41.) saberemo po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definicije (1.6.43.), dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

$$
(1.6.44.)\quad \left[\!\left[q^{k} + \underset{\sim}{t}^{k}\cdot\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{t}^{kr}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{r} - \rho\left(\epsilon + \tfrac{1}{2}v^{2} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{r}\underset{\sim}{\nu}_{s}\, i^{rs}\right)\left(v^{k} - u^{k}\right)\right]\!\right] n_{k} = 0.
$$

Da bismo izveli zakone balansa momenata energije α-og sastojka mešavine, izračunaćemo prvo (1.5.4.) pomoću $(1.6.38.)_2$, tj.

$$
\begin{aligned}
\grave{\mathcal{E}}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)}\left(\grave{\epsilon}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} - \sum_{s}\nu^{l_s}_{(\alpha)k}\,\epsilon^{l_1\ldots k\ldots l_p}_{(\alpha)}\right) + \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\,\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} +\\
&+ \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\left[\rho_{(\alpha)}\, i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\,\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\, i^{r l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)r} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\,\nu^{k}_{(\alpha)r}\right)\right] +\\
&+ \rho\,\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\,\hat{\beta}^{r l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\,\hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \qquad (1.6.45.)\\
&+ \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\left[\rho_{(\alpha)}\, i^{r l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\,\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\, i^{rs l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)s} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\,\nu^{k}_{(\alpha)s}\right)\right] +\\
&+ \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\,\hat{\beta}^{rs l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}, \qquad p \geq 1.
\end{aligned}
$$

Ako $(1.6.38.)_{4,5,7}$ i (1.6.45) zamenimo u $(1.5.3.)_1$, dobićemo zakon balansa momenata energije α-og sastojka mešavine u obliku

$$\rho_{(\alpha)}\Big(\dot{\epsilon}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\sum_{s}\nu^{l_s}_{(\alpha),k}\,\epsilon^{l_1\ldots k\ldots l_p}_{(\alpha)}\Big)+\underset{\sim}{v}_{(\alpha),k}\,\underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r,k}\,\underset{\sim}{t}^{krl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+$$
$$+\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\Big(\underset{\sim}{t}^{(l_1|r|l_2\ldots l_p)}_{(\alpha)}-\bar{\underset{\sim}{t}}^{r(l_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}+\bar{\underset{\sim}{t}}^{(rl_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}-\underset{\sim}{t}^{(l_1rl_2\ldots l_p)}_{(\alpha)}\Big)+$$
$$+q^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha),k}+q^{(l_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}-\bar{q}^{(l_1\ldots l_p)}_{(\alpha)}+\rho_{(\alpha)}h^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}= \tag{1.6.46.}$$
$$=\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\frac{1}{2}\rho\,\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\rho\,\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\hat{\beta}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\,i^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\,.$$

Kada $(1.6.37.)_{2,4}$ zamenimo u $(1.5.3.)_2$, dobićemo uslov diskontinuiteta α -og sastojka mešavine

$$[\![\, q^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{t}^{krl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\rho_{(\alpha)}\Big(\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}v^2_{(\alpha)}i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+$$
$$+\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\,i^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\,i^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\Big)\big(v^k_{(\alpha)}-u^k\big)]\!]\,n_k=0,\ p\geq 1. \tag{1.6.47.}$$

Sabirajući jednačinu (1.6.46.) po svim sastojcima mešavine, koristeći (1.6.32.), posle duže računice i sredjivanja dobićemo zakon balansa momenata energije mešavine

$$-\rho\Big(\dot{\epsilon}^{l_1\ldots l_p}-\sum_{s}\nu^{l_s}\epsilon^{l_1\ldots k\ldots l_p}\Big)+\underset{\sim}{v}_{,k}\,\underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p}+\underset{\sim}{\nu}_{r,k}\,\underset{\sim}{t}^{krl_1\ldots l_p}+$$
$$+\frac{1}{2}\rho\,\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}\sum\hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\rho\,\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nu}_r\sum\hat{\beta}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}-\frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_r\cdot\underset{\sim}{\nu}_s\sum\hat{\beta}^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+$$
$$+\rho h^{l_1\ldots l_p}+q^{kl_1\ldots l_p}_{,k}+q^{(l_1\ldots l_p)}-\bar{q}^{l_1\ldots l_p}+\underset{\sim}{\nu}_r\Big(\underset{\sim}{t}^{(l_1|r|l_2\ldots l_p)}- \tag{1.6.48.}$$
$$-\bar{\underset{\sim}{t}}^{r(l_1\ldots l_p)}+\bar{\underset{\sim}{t}}^{(rl_1\ldots l_p)}-\underset{\sim}{t}^{(rl_1\ldots l_p)}\Big)=0\,,\quad p\geq 1\,,$$

uz uslove

$$\sum\hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}=0\,,\quad \sum\hat{\beta}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}=0\,,\quad \sum\hat{\beta}^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}=0\,, \tag{1.6.49.}$$

i gde su po definiciji

$$\rho\epsilon^{l_1\ldots l_p}=\sum\rho_{(\alpha)}\Big(\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}u_{(\alpha)}u_{(\alpha)}\,i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\,i^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\,i^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\Big) \tag{1.6.5o.}$$

$$\underset{\sim}{t}^{kl_1\dots l_p} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p} - \varrho_{(\alpha)} \left(i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{ml_1\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) u_{(\alpha)}^{k} \right]$$

$$\underset{\sim}{t}^{(l_1\dots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)} - \varrho_{(\alpha)} u_{(\alpha)}^{l_p} \left(i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_{p-1}} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{ml_1\dots l_{p-1}} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right)_{(l_1\dots l_p)} \right]$$

$$\bar{\underset{\sim}{t}}^{(l_1\dots l_p)} = \sum \left[\bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)} - \varrho_{(\alpha)} u_{(\alpha)}^{l_1} \left(i_{(\alpha)}^{l_2\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{ml_2\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right)_{(l_1\dots l_p)} - \right.$$

$$\left. - \sum_s \varrho_{(\alpha)} \theta_{(\alpha)k}^{l_s} \left(i_{(\alpha)}^{l_1\dots k\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{ml_1\dots k\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) \right]$$

$$\underset{\sim}{t}^{(rl_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{(rl_1\dots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(rl_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(rl_1\dots l_p)} + \right.$$

$$+ \sum_s \varrho_{(\alpha)} \theta_{(\alpha)k}^{l_s} \left(i_{(\alpha)}^{rl_1\dots k\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{mrl_1\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) +$$

$$\left. + \varrho_{(\alpha)} \theta_{(\alpha)k}^{r} \left(i_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{mkl_1\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) \right]$$

$$\underset{\sim}{t}^{r(l_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{r(l_1\dots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{r(l_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{r(l_1\dots l_p)} + \right.$$

$$\left. + \sum_s \varrho_{(\alpha)} \theta_{(\alpha)k}^{l_s} \left(i_{(\alpha)}^{rl_1\dots k\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{mrl_1\dots k\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) \right]$$

$$\underset{\sim}{t}^{r(l_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{r(l_1\dots l_p)} + \bar{\underset{\sim}{t}}^{(rl_1\dots l_p)} - \underset{\sim}{t}^{(rl_1\dots l_p)} = \sum \left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{r((l_1\dots l_p)} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{r(l_1\dots l_p)} + \right.$$

$$\left. + \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(rl_1\dots l_p)} - \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(rl_1\dots l_p)} + \varrho_{(\alpha)} \theta_{(\alpha)k}^{r} \left(i_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{mkl_1\dots l_p} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)m} \right) \right]$$

$$\varrho h^{l_1\dots l_p} = \sum \varrho_{(\alpha)} \left(h_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} + \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} + \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{rl_1\dots l_p} \right)$$

$$q^{k(l_1\dots l_p)} = \sum \left[q_{(\alpha)}^{k(l_1\dots l_p)} + \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{k(l_1\dots l_p)} + \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{kr(l_1\dots l_p)} - \right.$$

$$- \varrho_{(\alpha)} \left(\epsilon_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p} + \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} i_{(\alpha)}^{rl_1\dots l_p} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s} i_{(\alpha)}^{rsl_1\dots l_p} \right) u_{(\alpha)}^{k} \right]$$

$$\bar{q}^{(l_1\ldots l_p)} = \sum [\bar{q}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} + \underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot \underset{\sim}{\bar{t}}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} + \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\cdot \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{r(l_1\ldots l_p)} -$$

$$-\rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_{p-1}} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_{p-1}} + \underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\, i_{(\alpha)}^{rl_1\ldots l_{p-1}} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i_{(\alpha)}^{rsl_1\ldots l_{p-1}}\right)_{(l_1\ldots l_p)} u_{(\alpha)}^{l_p} -$$

$$-\sum_{s}\rho_{(\alpha)}\nu_{(\alpha)k}^{l_s}\left(\epsilon_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p} +\right.$$

$$\left.+\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\, i_{(\alpha)}^{rl_1\ldots k\ldots l_p} + \frac{1}{2}\theta_{(\alpha)r}\theta_{(\alpha)s}\, i_{(\alpha)}^{rsl_1\ldots k\ldots l_p}\right)].$$

Ako (1.6.47.) saberemo po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definicije (1.6.5o.), dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

(1.6.51.)
$$[\![q^{kl_1\ldots l_p} + \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{t}^{kl_1\ldots l_p} + \underset{\sim}{\nu}_r\cdot\underset{\sim}{t}^{krl_1\ldots l_p} - \rho\left(\epsilon^{l_1\ldots l_p} + \frac{1}{2}v^2 i^{l_1\ldots l_p} + \right.$$
$$\left. + \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nu}_r\, i^{rl_1\ldots l_p} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_r\cdot\underset{\sim}{\nu}_s\, i^{rsl_1\ldots l_p}\right)(v^k - u^k)]\!] n_k = 0,$$
$$p \geq 1.$$

d) Entropija i momenti entropije

Za izvodjenje entropijske nejednakosti koristićemo se opštim zakonima balansa i odgovarajućim uslovima diskontinuiteta α-og sastojka mešavine, u kojima će znak jednakosti biti zamenjen znakom nejednakosti, tj.

(1.6.52.)
$$\tau_{(\alpha),k}^{k} + g_{(\alpha)} - \grave{\sigma}_{(\alpha)} \leq 0$$
$$[\![\tau_{(\alpha)}^{k} - \psi_{(\alpha)}(v_{(\alpha)}^{k} - u^{k})]\!] n_k \leq 0,$$

gde je

(1.6.53.)
$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \dot{\psi}_{(\alpha)} + \psi_{(\alpha)} v_{(\alpha),k}^{k}$$

i

(1.6.54.) $$\tau_{(\alpha)\ ,k}^{kl_1\dots l_p}+\tau_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)}-\bar{\tau}_{(\alpha)}^{(l_1\dots l_p)}+g_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}-\grave{\sigma}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}\leq 0$$

$$[\![\tau_{(\alpha)}^{kl_1\dots l_p}-\psi_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}(v_{(\alpha)}^{k}-u^{k})]\!]n_k\leq 0\ ,\ p\geq 1$$

gde je

(1.6.55.) $$\grave{\sigma}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}=\dot{\psi}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}+\psi_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}v_{(\alpha),k}^{k}-\hat{\psi}_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p},\ p\geq 1.$$

U ovom slučaju je

$$\psi'_{(\alpha)}=\rho'_{(\alpha)}\eta'_{(\alpha)}$$

(1.6.56.) $$\tau'_{(\alpha)}=\frac{q'_{(\alpha)}}{\theta'}\ ,\quad \tau'^{k}_{(\alpha)}=\frac{q'^{k}_{(\alpha)}}{\theta'}$$

$$g'_{(\alpha)}=\frac{\rho'_{(\alpha)}h'_{(\alpha)}}{\theta'}$$

gde je $\eta'_{(\alpha)}$ - specifična entropija α-og sastojka mešavine u odnosu na mikroelement, a θ' - apsolutna temperatura u mikroelementu, dok su ostale veličine već ranije definisane.

Mi pretpostavljamo da je temperatura svih sastojaka mešavine u istoj tački ista, odnosno da je

(1.6.57.) $$\theta_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)},t)=\theta(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)},t)$$

Takodje pretpostavljamo da se θ'^{-1} može izraziti u obliku polinoma po ξ^{k}, tj.

(1.6.58.) $$\theta'^{-1}=\theta^{-1}+C_{(\alpha)l_1}\xi^{l_1}+\frac{1}{2}C_{(\alpha)l_1l_2}\xi^{l_1}\xi^{l_2}+\dots$$

gde su $C_{(\alpha)l_1l_2\dots}$ momenti hladjenja, koji su funkcija od $x_{(\alpha)}$ i t.

Veličine koje figurišu u opštim lokalnim zakonima balansa α-og sastojka date su u obliku

(1.6.59.) $$\psi_{(\alpha)}=\rho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}$$

$$\psi_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}=\rho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}^{l_1\dots l_p}$$

$$\tau^{k}_{(\alpha)} = \theta^{-1} q^{k}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1} q^{kl_1}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1l_2} q^{kl_1l_2}_{(\alpha)} + \cdots$$

$$\tau^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \theta^{-1} q^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1} q^{m_1l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1m_2} q^{m_1m_2l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \cdots$$

$$\bar{\tau}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \theta^{-1} \bar{q}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1} \bar{q}^{km_1l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \cdots$$

$$g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \theta^{-1} h_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1} h^{m_1}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1m_2} h^{m_1m_2}_{(\alpha)} + \cdots$$

$$g^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \theta^{-1} h^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1} h^{m_1l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1m_2} h^{m_1m_2l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \cdots.$$

Za izvodjenje entropijske nejednakosti α-og sastojka, potrebno je prethodno izračunati (1.6.53.), koristeći $(1.6.59.)_1$, tj.

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \grave{\eta}_{(\alpha)} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)}. \tag{1.6.6o.}$$

Kada (1.6.6o.) i $(1.6.59.)_{3,6}$ zamenimo u $(1.6.52.)_1$, dobićemo entropijsku nejednakost α-og sastojka mešavine u obliku

$$\begin{aligned} &\rho_{(\alpha)} \grave{\eta}_{(\alpha)} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} \left(\theta^{-1} h_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1} h^{m_1}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1m_2} h^{m_1m_2}_{(\alpha)} + \cdots\right) - \\ &- \left(\theta^{-1} q^{k}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1} q^{kl_1}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1l_2} q^{kl_1l_2}_{(\alpha)} + \cdots\right)_{,k} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.6.61.}$$

Odgovarajući uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dat je sa

$$\left[\!\left[\rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} (v^{k}_{(\alpha)} - u^{k}) - \theta^{-1} q^{k}_{(\alpha)} - C_{(\alpha)l_1} q^{kl_1}_{(\alpha)} - C_{(\alpha)l_1l_2} q^{kl_1l_2}_{(\alpha)} - \cdots \right]\!\right] n_k \geq 0. \tag{1.6.62.}$$

U slučaju kada su momenti hladjenja jednaki nuli, entropijska nejednakost α-og sastojka mešavine (1.6.61.) se može napisati u obliku

$$\rho_{(\alpha)} \grave{\eta}_{(\alpha)} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} - \frac{\rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)}}{\theta} - \left(\frac{q^{k}_{(\alpha)}}{\theta}\right)_{,k} \geq 0, \tag{1.6.63.}$$

dok je odgovarajući uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine (1.6.62.) pod istim uslovima oblika

$$\left[\!\left[\rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} (v^k_{(\alpha)} - u^k) - \frac{q^k_{(\alpha)}}{\theta} \right]\!\right] n_k \geq 0. \tag{1.6.64.}$$

Zbog potpunijeg uporedjivanja rezultata sa do sada poznatim iz ove oblasti, koristićemo se funkcijom slobodne energije α -og sastojka $\Psi_{(\alpha)}$, koja je povezana sa unutrašnjom energijom α -og sastojka $\epsilon_{(\alpha)}$, sledećom relacijom

$$\Psi_{(\alpha)} = \epsilon_{(\alpha)} - \theta \eta_{(\alpha)}. \tag{1.6.65.}$$

Pomoću ove relacije i zakona balansa energije α -og sastojka mešavine (1.6.42.), iz (1.6.63.) sledi

$$\begin{aligned} &-\rho_{(\alpha)} (\grave{\Psi}_{(\alpha)} + \grave{\theta} \eta_{(\alpha)}) + \frac{q^k_{(\alpha)}}{\theta} \theta_{,k} + \underset{\sim}{t}^k_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha),k} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)r,k} - \\ &-(\underset{\sim}{t}^r_{(\alpha)} - \bar{t}^r_{(\alpha)}) \underset{\sim}{v}_{(\alpha)r} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} (\tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)}) + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)r} v_{(\alpha)k} \geq 0. \end{aligned} \tag{1.6.66.}$$

Da bismo dobili entropijsku nejednakost mešavine potrebno je u (1.6.63.) izvršiti sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristiti fundamentalnu identičnost (1.6.12.), stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)} = \eta_{(\alpha)}$ i $\Psi = \eta$, tako da je

$$\rho \overset{\circ}{\eta} + \sum (\rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)})_{,k} - \frac{\rho h^I}{\theta} - \left(\frac{q^{Ik}}{\theta}\right)_{,k} \geq 0, \tag{1.6.67.}$$

gde je

$$\begin{aligned} &\rho \eta = \sum \rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} \\ &\rho h^I = \sum \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)}, \\ &\rho h = \rho h^I + \sum \rho_{(\alpha)} (\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}^r_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}) \\ &q^{Ik} = \sum q^k_{(\alpha)}, \\ &q^k = q^{Ik} + \sum [\underset{\sim}{t}^k_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} - \\ &\quad - \rho_{(\alpha)} (\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \theta_{(\alpha)r} \theta_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)}) u^k_{(\alpha)}]. \end{aligned} \tag{1.6.68.}$$

Ako u (1.6.64.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo $(1.6.68.)_{1,3}$, dobićemo uslov diskontinuiteta mešavine u obliku

$$\left[\!\left[\sum \varrho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} u^k_{(\alpha)} + \varrho \eta (v^k - u^k) - \frac{q^{Ik}}{\theta} \right]\!\right] n_k \geq 0 . \tag{1.6.69.}$$

Za izvodjenje momenata entropijske nejednakosti α-og sastojka mešavine izračunajmo najpre veličinu (1.6.55.), koristeći (1.6.59.) i (1.5.8.), tj.

$$\grave{\sigma}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \varrho_{(\alpha)} \grave{\eta}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \varrho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \sum_s \varrho_{(\alpha)} \gamma^{l_s}_{(\alpha)k} \eta^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} . \tag{1.6.70.}$$

Tada iz $(1.6.54.)_1$, zamenjujući (1.6.70.) i $(1.6.59.)_{4,5,7}$, dobijamo odgovarajuću nejednakost α-og sastojka mešavine

$$\begin{aligned} &\varrho_{(\alpha)} \grave{\eta}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \varrho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \sum_s \varrho_{(\alpha)} \gamma^{l_s}_{(\alpha)k} \eta^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} - \\ &- \varrho_{(\alpha)} \left(\theta^{-1} h^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1} h^{m_1 l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1 m_2} h^{m_1 m_2 l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \dots \right) + \\ &+ \theta^{-1} \left(\bar{q}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - q^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \right) + C_{(\alpha)m_1} \left(\bar{q}^{m_1 (l_1 \dots l_p)}_{(\alpha)} - q^{(l_1 | m_1 | l_2 \dots l_p)}_{(\alpha)} \right) + \\ &+ C_{(\alpha)m_1 m_2} \left(\bar{q}^{(l_1 | m_1 m_2 | l_2 \dots l_p)}_{(\alpha)} - q^{(l_1 | m_1 m_2 | l_2 \dots l_p)}_{(\alpha)} \right) + \dots - \\ &- \left(\theta^{-1} q^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1} q^{k m_1 l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)m_1 m_2} q^{k m_1 m_2 l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \right)_{,k} \geq 0 . \end{aligned} \tag{1.6.71.}$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka ćemo dobiti iz $(1.6.54.)_2$, koristeći $(1.6.59.)_{2,5}$, tj.

$$\left[\!\left[\varrho_{(\alpha)} \eta^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} (v^k_{(\alpha)} - u^k) - \theta^{-1} q^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - C_{(\alpha)m_1} q^{k m_1 l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \dots \right]\!\right] n_k \geq 0 \tag{1.6.72.}$$

$$p \geq 1 .$$

U otsustvu momenata hladjenja entropijska nejednakost α-og sastojka (1.6.71.) se svodi na oblik

$$\begin{aligned} &\varrho_{(\alpha)} \grave{\eta}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \varrho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \sum_s \varrho_{(\alpha)} \gamma^{l_s}_{(\alpha)k} \eta^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} - \varrho_{(\alpha)} \frac{h^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}}{\theta} + \\ &+ \frac{1}{\theta} \left(\bar{q}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - q^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \right) - \left(\frac{q^{k l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}}{\theta} \right)_{,k} \geq 0 , \end{aligned} \tag{1.6.73.}$$

a uslov diskontinuiteta α-og sastojka (1.6.72.) pod istim uslovima, na oblik

$$[\![\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}(v_{(\alpha)}^k-u^k)-\frac{q_{(\alpha)}^{kl_1\ldots l_p}}{\theta}]\!] n_k \geq 0. \tag{1.6.74.}$$

Ako u (1.6.73.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo fundamentalnu identičnost (1.6.12.), stavljajući da je $\psi_{(\alpha)}=\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}$ i $\psi=\eta^{l_1\ldots l_p}$, dobićemo momente entropijske nejednakosti za mešavinu

$$\begin{aligned}&\varrho\dot{\eta}^{l_1\ldots l_p}+\sum(\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}u_{(\alpha)}^k)_{,k}-\sum\sum_s\varrho_{(\alpha)}v_{(\alpha)k}^{l_s}\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p}-\\&-\frac{\varrho h^{Il_1\ldots l_p}}{\theta}+\frac{1}{\theta}(\bar{q}^{Il_1\ldots l_p}-q^{Il_1\ldots l_p})-\left(\frac{q^{Ikl_1\ldots l_p}}{\theta}\right)_{,k}\geq 0,\end{aligned} \tag{1.6.75.}$$

gde je

$$\varrho\eta^{l_1\ldots l_p}=\sum\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}$$

$$\varrho h^{Il_1\ldots l_p}=\sum\varrho_{(\alpha)}h_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}$$

$$\varrho h^{l_1\ldots l_p}=\varrho h^{Il_1\ldots l_p}+\sum\varrho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{rl_1\ldots l_p}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r})$$

$$q^{Ikl_1\ldots l_p}=\sum q_{(\alpha)}^{kl_1\ldots l_p} \tag{1.6.76.}$$

$$\begin{aligned}q^{kl_1\ldots l_p}&=q^{Ikl_1\ldots l_p}+\sum[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{kl_1\ldots l_p}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{krl_1\ldots l_p}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}-\\&-\varrho_{(\alpha)}(\epsilon_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}+\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}+\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}i_{(\alpha)}^{rl_1\ldots l_p}+\\&+\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}i_{(\alpha)}^{rsl_1\ldots l_p})u_{(\alpha)}^k].\end{aligned}$$

Uslov diskontinuiteta mešavine, koristeći gornje definicije, biće oblika

$$[\![\sum\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}u_{(\alpha)}^k+\varrho\eta^{l_1\ldots l_p}(v^k-u^k)-\frac{q^{Ikl_1\ldots l_p}}{\theta}]\!] n_k\geq 0. \tag{1.6.77.}$$

DVODIMENZIONALNO TELO - LJUSKA

2.1. UVOD

Prvi rad koji se pojavio iz teorije mešavina, a koji se odnosi na dvodimenzionalnu teoriju, datira od 1974. godine [19] . U tom radu je razmatrana nelinearna termodinamička teorija mešavina orijentisanih površina. Tu je koncept orijentisane površine primenjen na izvodjenje dvodimenzionalne teorije kontinuuma ljuski. Kao primenu ove teorije, autori su predložili za model rožnjaču oka.

Pojava ove teorije je i dala ideju da primenimo mikromorfnu teoriju mešavina i odgovarajuće zakone balansa i uslove diskontinuiteta, koje smo izveli za trodimenzionalno telo, na slučaj tanke ljuske. Medjutim, zbog teškoća koje se pojavljuju pri izvodjenju teorije ljuske iz trodimenzionalne teorije, mi ćemo koristiti takozvani direktni pristup problemu ljuske kao u radu [3] . Naime, sa gledišta dinamike, ljuska se može razmatrati na dva načina: 1) kao povr S i 2) kao oblast izmedju dve površi S_1 i S_2. U oba slučaja u ljusci se pojavljuju normalne i tangencijalne sile, pa zato njena teorija u trodimenzinalnom prostoru nije samo unutrašnja geometrija, bez obzira da li se tretira kao teorija površine ili tela. U drugom pristupu se iz opšte trodimenzionalne teorije izvode sile i spregovi koji deluju na ljusci. Medjutim u prvom pristupu, u kome se ljuska razmatra kao površ S, ne mogu se koristiti zakoni balansa za trodimenzionalno telo, već se oni postuliraju u novom obliku koji će važiti za dvodimenzionalnu teoriju. To je pristup koji je u literaturi poznat kao direktan pristup problemu ljuske.

Koristeći rezultate rada [3], mi ćemo izvesti zakone balansa mase, tenzora mikroinercije, količine kretanja i energije, kao i entropijsku nejednakost, kako za α-ti sastojak mešavine, tako i za samu mešavinu. Pritom ćemo se zadržati samo na teoriji nultog reda u odnosu na teoriju višeg, odnosno p-og reda, koja je primenjena u trodimenzionalnom slučaju.

2.2. KINEMATIKA

Mi definišemo tanku ljusku kao dvodimenzionalni mikromorfni kontinuum koji sadrži $\alpha = 1,2,\ldots,n$ sastojaka mešavine. Kako je za nas od interesa da opišemo kretanje samo jednog sastojka, to ćemo, kao i kod trodimenzionalnog slučaja, primeniti princip naveden u Uvodu pod b) i na taj način uzeti u obzir kretanje, mikrokretanje i deformaciju α-og sastojka mešavine ljuske.

U početnoj, nedeformisanoj, konfiguraciji K_o ljuska ima oblik površi

$$X^K = X^K(U^\lambda_{(\alpha)}), \quad (K=1,2,3\ ;\ \lambda=1,2), \tag{2.2.1.}$$

gde su X^K materijalne koordinate, a $U^\lambda_{(\alpha)}$ Gausovi parametri površi.

Osnovni bazni vektori na površi su

$$\underset{\sim}{G}_\lambda = \underset{\sim}{G}_K X^K_{;\lambda} \tag{2.2.2.}$$

gde su $\underset{\sim}{G}_K$ bazni vektori sistema materijalnih koordinata u obvojnom trodimenzionalnom euklidskom prostoru.

Kako se kretanje mikroelemenata u makroelementu, relativnih u odnosu na njegov centar, može adekvatno aproksimirati kao homogena deformacija, to su jednačine kretanja i deformacija tanke ljuske za α-ti sastojak mešavine odredjene sa

$$\begin{aligned} x^k_{(\alpha)} &= x^k_{(\alpha)}(u^\lambda_{(\alpha)}, t) \\ \chi^k_{(\alpha).K} &= \chi^k_{(\alpha).K}(u^\lambda_{(\alpha)}, t), \end{aligned} \tag{2.2.3.}$$

gde su $x^k_{(\alpha)}$ prostorne koordinate u trodimenzionalnom prostoru, $\chi^k_{(\alpha).K}$ gradijenti mikrodeformacije α-og sastojka mešavine i $u^\lambda_{(\alpha)}$ Gausovi parametri površi u deformisanoj konfiguraciji K_t.

Osnovni bazni vektori površi $(2.2.3.)_1$ u deformisanoj konfiguraciji su

$$\underset{\sim}{a}_\lambda = \underset{\sim}{g}_i \cdot x^i_{(\alpha);\lambda}, \quad x^i_{(\alpha);\lambda} = \frac{\partial x^i_{(\alpha)}}{\partial u^\lambda_{(\alpha)}}, \tag{2.2.4.}$$

gde su g_i bazni vektori sistema prostornih koordinata u trodimenzionalnom prostoru.

Analogno sa sistemima materijalnih i prostornih koordinata u trodimenzionalnoj teoriji kontinuuma, uvešćemo sistem konvektivnih koordinata U^A, koje će predstavljati materijalne krive na površi koje se deformišu zajedno sa ljuskom, i sistem normalnih koordinata u^λ nepokretnih u odnosu na površi $(2.2.3.)_1$.

Koristeći ovako uvedeni sistem koordinata, kretanje ljuske u dvodimenzionalnom prostoru je odredjeno neprekidnom transformacijom oblika

(2.2.5.) $$u^\lambda = u^\lambda(U^A, t) \quad , \quad (\lambda, A = 1,2) .$$

Odgovarajući osnovni metrički tenzori su

(2.2.6.) $$a_{\lambda\mu} = A_{AB} U^A_{;\lambda} U^B_{;\mu} \quad , \quad \left(U^A_{;\lambda} = \frac{\partial U^A}{\partial u^\lambda} \right) ,$$

gde je $A_{AB} = A_{AB}(U^\Gamma, t)$ metrički tenzor izražen u odnosu na konvektivne koordinate, $a_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}(u^\gamma, t)$ metrički tenzor izražen u odnosu na normalne koordinate .

Veličina koju ćemo koristiti pri izvodjenju zakona balansa biće brzina promene elementa površine dS, a za ostale upućujemo na rad [3] . U našem konkretnom slučaju radiće se o brzini promene elementa površine $dS_{(\alpha)}$ α-og sastojka mešavine, tj.

(2.2.7.) $$S^{\ \lambda}_{(\alpha)\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} + v^{\ \lambda}_{(\alpha),\lambda} \quad ,$$

gde je $$\frac{\dot{a}}{a} = a^{\lambda\mu} \dot{a}_{\lambda\mu} .$$

Većina definicija izvedenih za slučaj trodimenzionalnog mikromorfnog kontinuuma koji sadrži n različitih sastojaka, važiće i za dvodimenzionalni mikromorfni kontinuum, odnosno ljusku. One definicije koje su specifične samo za ljusku posebno ćemo istaći.

Srednja brzina mešavine ljuske v^λ definisana je kao

(2.2.8.) $$\rho v^\lambda = \sum \rho_{(\alpha)} v^\lambda_{(\alpha)} .$$

Brzina difuzije α-og sastojka ljuske $\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)}$, relativna prema srednjoj brzini v^{λ}, definisana je sa

(2.2.9.) $$\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} = v^{\lambda}_{(\alpha)} - v^{\lambda} .$$

Iz (2.2.8.) i (2.2.9.) kao posledica sledi

(2.2.1o.) $$\sum \rho_{(\alpha)} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} = 0 .$$

Za neku veličinu $\Psi = \Psi(u^{\lambda}_{(\alpha)}, t)$, koja je definisana u svim tačkama ljuske, postoje sledeća dva materijalna izvoda: materijalni izvod sastojka

(2.2.11.) $$\grave{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial u^{\lambda}} v^{\lambda}_{(\alpha)}$$

i materijalni izvod mešavine

(2.2.12.) $$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial u^{\lambda}} v^{\lambda} ,$$

odakle sledi

(2.2.13.) $$\grave{\Psi} = \dot{\Psi} + \frac{\partial \Psi}{\partial u^{\lambda}} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} .$$

Ako za mešavinu postoji sledeća srednja vrednost neke funkcije

(2.2.14.) $$\rho \Psi \equiv \sum \rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)}$$

onda koristeći (2.2.9.), (2.2.11.) i (2.2.12.) dobićemo fundamentalnu identičnost, koja će važiti za ljusku, u obliku

$$\sum \varrho_{(\alpha)} \dot{\Psi}_{(\alpha)} = \varrho \mathring{\Psi} + \Psi \Big[\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^\lambda}(\varrho v^\lambda) \Big] + \sum \frac{\partial}{\partial u^\lambda}(\varrho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} \bar{u}^\lambda_{(\alpha)}) -$$

(2.2.15.)
$$- \sum \Psi_{(\alpha)} \Big[\frac{\partial \varrho_{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^\lambda}(\varrho_{(\alpha)} v^\lambda_{(\alpha)}) \Big].$$

2.3. OPŠTI LOKALNI ZAKONI BALANSA MIKROMORFNE TEORIJE TANKIH LJUSKI

Za ispitivanje ponašanja sastojka u mešavini, a kasnije i same mešavine, mi ćemo primenjujući u Uvodu navedeni fizički princip pod b) i koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa mikromorfne teorije tankih ljuski [3] , napisati odgovarajući opšti oblik lokalnih zakona balansa i uslova diskontinuiteta za svaki sastojak mešavine pojedinačno, tj.

(2.3.1.)
$$\frac{\partial \tau^\lambda_{(\alpha)}}{\partial u^\lambda} + g_{(\alpha)} - \grave{\sigma}_{(\alpha)} = 0$$
$$[\![\tau^\lambda_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)}(v^\lambda_{(\alpha)} - \omega^\lambda)]\!] m_\lambda = 0 \; ,$$

gde je

(2.3.2.)
$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \dot{\Psi}_{(\alpha)} + \Psi_{(\alpha)} S^\lambda_{(\alpha)\lambda} \; ,$$

(2.3.3.)
$$\frac{\partial \tau^{l_1 \dots l_p \lambda}_{(\alpha)}}{\partial u^\lambda} + \tau^{(l_1 \dots l_{p-1}}_{(\alpha)} \frac{\partial x^{l_p)}}{\partial u^\lambda} - \bar{\tau}^{(l_1 \dots l_p)}_{(\alpha)} + g^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \grave{\sigma}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = 0$$
$$[\![\tau^{(l_1 \dots l_p)\lambda}_{(\alpha)} - \Psi^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}(v^\lambda_{(\alpha)} - \omega^\lambda)]\!] m_\lambda = 0 \; ,$$

gde je

(2.3.4.)
$$\grave{\sigma}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \dot{\Psi}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} + \Psi^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} S^\lambda_{(\alpha)\lambda} - \hat{\Psi}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \; ,$$

sa

(2.4.7.) $$\sum \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} = 0 ,$$

kojim se pretpostavlja da je masa konstantna u mešavini.

Uslov diskontinuiteta za mešavinu dobijamo iz (2.4.5.), koristeći (2.2.8.),

(2.4.8.) $$[\![\rho (v^{\lambda} - w^{\lambda})]\!] = 0 .$$

Za izvodjenje zakona balansa tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine potrebno je prethodno izračunati veličinu (2.3.4.), Koristeći (2.3.5.), (2.4.2.)$_{3,5}$ i (2.4.4.), dobijamo

(2.4.9.) $$\grave{\sigma}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \overset{\grave{}}{\overline{\dot{i}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}}} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \sum_{s} \rho_{(\alpha)} \nu^{l_s}_{(\alpha) k} \dot{i}^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} .$$

Kada (2.4.9.) zamenimo u (2.3.3.)$_1$, dobijamo zakon balansa tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine

(2.4.1o.) $$\rho_{(\alpha)} \overset{\grave{}}{\overline{\dot{i}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}}} - \sum_{s} \rho_{(\alpha)} \nu^{l_s}_{(\alpha) k} \dot{i}^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} = \rho \left(\hat{\beta}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} - \hat{\beta}_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \right) .$$

Fundamentalna identičnost (2.2.15.), koristeći (2.4.4.) i (2.4.6.), postaje oblika

(2.4.11.) $$\sum \rho_{(\alpha)} \grave{\Psi}_{(\alpha)} = \rho \mathring{\Psi} + \sum \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} \right) - \sum \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} .$$

U specijalnom slučaju kada je $\Psi_{(\alpha)} = \dot{i}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}$ i $\Psi = \dot{i}^{l_1 \dots l_p}$ i iskoristimo (2.2.14.), iz (2.4.11.) dobićemo da je

(2.4.12.) $$\sum \rho_{(\alpha)} \overset{\grave{}}{\overline{i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)}}} = \rho \overset{\circ}{\overline{i^{l_1 \dots l_p}}} + \sum \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\rho_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} \right) - \sum \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} i^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} .$$

Ako u jednačini (2.4.1o.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (2.4.12.), dobićemo zakon balansa

$$\tau^{\lambda}_{(\alpha)} = 0 \,, \quad \tau^{kl_1\dots l_p}_{(\alpha)} = 0 \,, \quad \tau^{l_1\dots l_p\lambda}_{(\alpha)} = 0$$

$$\psi_{(\alpha)} = \langle \rho_{(\alpha)} \rangle = \rho_{(\alpha)}$$

(2.4.2.) $$\psi^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} = \frac{1}{p!} \langle \rho_{(\alpha)} \xi^{(l_1} \dots \xi^{l_p)} \rangle = \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)} = \langle \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \rangle = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)}$$

$$g^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} = \frac{1}{p!} \langle \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \xi^{(l_1} \dots \xi^{l_p)} \rangle = \rho \hat{\beta}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \,,$$

gde su $\rho_{(\alpha)}$ i $i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$ gustina mase i tenzori mikroinercije α-og sastojka mešavine. Posle smene (2.4.2.) u (2.3.2.), dobijamo

(2.4.3.) $$\grave{\mathscr{E}}_{(\alpha)} = \grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} S^{\lambda}_{(\alpha)\lambda} \,,$$

tako da je iz $(2.3.1.)_1$ zakon balansa α-og sastojka mešavine

(2.4.4.) $$\grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} S^{\lambda}_{(\alpha)\lambda} = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \,.$$

Ako $(2.4.2.)_1$ i $(2.4.2.)_2$ zamenimo u $(2.3.1.)_2$, dobićemo uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine

(2.4.5.) $$[\![\rho_{(\alpha)} (v^{\lambda}_{(\alpha)} - \omega^{\lambda})]\!] = 0 \,.$$

Kada u (2.4.4.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (1.4.15.), (2.2.8.), (2.2.9.) i (2.2.lo), dobićemo zakon balansa gustine mase mešavine

(2.4.6.) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,\lambda} v^{\lambda} + \rho S^{\lambda}_{\lambda} = 0 \,, \text{ ili } \quad \dot{\rho} + \rho S^{\lambda}_{\lambda} = 0 \,,$$

uz uslov

(2.3.5.) $$\hat{\Psi}^{l_1 \dots l_p}_{(\alpha)} = \sum_{s=1}^{p} \nu^{l_s}_{(\alpha)k} \Psi^{l_1 \dots k \dots l_p}_{(\alpha)} .$$

Odgovarajuća tenzorska polja u gornjim jednačinama definisana su sa

(2.3.6.) $$\tau^{\lambda}_{(\alpha)} = \langle \tau^{\lambda}_{(\alpha)} \rangle_2 , \quad \Psi_{(\alpha)} = \langle \Psi_{(\alpha)} \rangle , \quad g_{(\alpha)} = \langle g_{(\alpha)} \rangle$$
$$\tau^{(l_1 \dots l_p)\lambda}_{(\alpha)} = \frac{1}{p!} \langle \tau^{\lambda}_{(\alpha)} \xi^{l_1} \cdots \xi^{l_p} \rangle ,$$

dok su ostala već ranije definisana sa (1.5.5.).

2.4. POSEBNI ZAKONI BALANSA SASTOJKA I MEŠAVINE

Koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa α-og sastojka tankeljuske datih sa (2.3.1.) i (2.3.3.), možemo izvesti odgovarajuće zakone balansa pojedinih fizičkih veličina. Ako izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, dobićemo zakone balansa tih fizičkih veličina koji će važiti za mešavinu.

a) Gustina mase i tenzori mikroinercije

Zakoni balansa ovih veličina se dobijaju kada se pretpostavi da je

(2.4.1.) $$\Psi'_{(\alpha)} = \varrho'_{(\alpha)} , \quad \tau'^{k}_{(\alpha)} = 0 , \quad g'_{(\alpha)} = \varrho \hat{\beta}'_{(\alpha)}$$

gde su ove veličine definisane u odnosu na mikroelement. Tako je $\varrho'_{(\alpha)}$ gustina mase α-og sastojka u mikroelementu, a $\varrho\hat{\beta}'_{(\alpha)}$ zapreminska promena mase α-og sastojka u mikroelementu usled hemijskih reakcija sa nekim drugim ili svim sastojcima mešavine.

S obzirom na (2.3.6.) i (1.5.5.), imaćemo da je tenzora mikroinercije za mešavinu u obliku

$$(2.4.13.)\quad \rho\,\overset{\circ}{\overline{i^{l_1\ldots l_p}}} - \sum\sum_{s} \rho_{(\alpha)} \nu^{l_s}_{(\alpha)k}\, i^{l_1\ldots k\ldots l_p}_{(\alpha)} = \sum \rho \hat{\beta}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} - \sum \frac{\partial}{\partial u^{\lambda}} \left(\rho_{(\alpha)} i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)}\right).$$

b) Količina kretanja

U ovom slučaju su

$$(2.4.14.)\quad \begin{aligned} \Psi'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} \\ \tau'^{k}_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)} \\ g'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}'_{(\alpha)} \end{aligned}$$

gde su $\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}$ i $\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)}$ vektor brzine, vektor napona i zapreminska sila, respektivno, u odnosu na mikroelement. Odgovarajuće veličine koje figurišu u (2.3.1.) i (2.3.3.), su prema (1.5.5.) sledećeg oblika

$$(2.4.15.)\quad \begin{aligned} \Psi_{(\alpha)} &= \langle \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \rangle = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \\ \tau^{\lambda}_{(\alpha)} &= \langle \tau^{\lambda}_{(\alpha)} \rangle_2 = \underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)} \\ g_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} . \end{aligned}$$

Zamenjujući (2.4.15.) u (2.3.2.) i s obzirom na (2.4.4.), dobijamo

$$(2.4.16.)\quad \grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho\left(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\right) + \rho_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \left(\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} \nu^{l}_{(\alpha)k} + \grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)k}\right).$$

Kada $(2.4.15.)_{3,6}$ i (2.4.16.) zamenimo u $(2.3.1.)_1$, dobi-

...emo

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{\lambda}}{\partial u^{\lambda}} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) - \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{k}(\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} \grave{\nu}_{(\alpha)k}^{l} + \grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)k}) =$$

(2.4.17.)
$$= \rho(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}_{(\alpha)}^{k} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}).$$

Kada uzmemo u obzir da je

(2.4.18.)
$$i_{(\alpha)}^{k} = 0 ,$$

što fizički znači da se centar mase makroelementa nalazi u istoj tački makroelementa, onda iz (2.4.1o.), za slučaj kada je p=1, sledi da je

(2.4.19.)
$$\overline{\grave{i}_{(\alpha)}^{k}} = 0 , \quad \hat{\beta}_{(\alpha)}^{k} = 0 .$$

Tada iz (2.4.17.) dobijamo zakon balansa količine kretanja α-og sastojka u obliku

(2.4.2o.)
$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{\lambda}}{\partial u^{\lambda}} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} .$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobićemo ako iskoristimo $(2.3.1.)_2$, $(2.4.15.)_{1,3}$ uz (2.4.18.), tj.

(2.4.21.)
$$[\![\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{\lambda} - \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} (v_{(\alpha)}^{\lambda} - \omega^{\lambda})]\!] = 0 .$$

Ako u jednačini (2.4.2o.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, iskoristimo fundamentalnu identičnost (2.4.12.) stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)} = \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$ i $\Psi = \underset{\sim}{v}$ i sledeće definicije

(2.4.22.)
$$\sum \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} = \rho \underset{\sim}{f} ,$$

(2.4.23.)
$$\underset{\sim}{t}^{\lambda} = \sum [\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{\lambda} - \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \bar{u}_{(\alpha)}^{\lambda}] ,$$

dobićemo zakon balansa količine kretanja mešavine.

(2.4.24.) $$\frac{\partial \underset{\sim}{t}^{\lambda}}{\partial u^{\lambda}} + \rho(\underset{\sim}{f} - \dot{\underset{\sim}{v}}) = 0 .$$

Kada u (2.4.21.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima

(2.4.25.) $$[\![\underset{\sim}{t}^{\lambda} - \rho \underset{\sim}{v}(v^{\lambda} - \omega^{\lambda})]\!] = 0 .$$

c) Energija

Odgovarajuće veličine u ovom slučaju su

(2.4.26.) $$\begin{aligned} \Psi'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)}(\epsilon'_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}) \\ \tau'^{k}_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + q'^{k}_{(\alpha)} \\ g'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + \rho'_{(\alpha)} h'_{(\alpha)} , \end{aligned}$$

gde su $\epsilon'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}$, $q'^{k}_{(\alpha)}$ i $h'_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije, vektor napona, vektor toplotnog fluksa i zapreminski izvor energije (zapreminska specifična proizvodnja toplote) α-og sastojka, respektivno, u mikroelementu. Odgovarajuće veličine iz (2.3.1.), (2.3.2.), (2.3.3.) i (2.3.4.) su prema (1.5.5.), sledećeg oblika

(2.4.27.) $$\begin{aligned} \Psi_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)}(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}) \\ \tau^{\lambda}_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} + q^{\lambda}_{(\alpha)} \\ g_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \cdot \underset{\sim}{f}^{r}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)} , \end{aligned}$$

gde su $\epsilon_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)}$, $q_{(\alpha)}$ i $h_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije po jedinici mase, vektori napona, vektor toplotnog fluksa i izvor energije po jedinici zapremine α-og sastojka mešavine, respektivno.

Smenom (2.4.27.) u (2.3.1.) i s obzirom na (2.4.4.), dobijamo

$$\begin{aligned}\grave{\varepsilon}_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)}\left[\grave{\epsilon}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{\cdot rs}_{(\alpha)}\left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)r} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\, \nu^{k}_{(\alpha)r}\right)\right] + \\ &+ \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\right) + \tfrac{1}{2}\rho\, \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)}\,. \end{aligned} \tag{2.4.28.}$$

Kada $(2.4.27.)_{2,3}$ i (2.4.28.) zamenimo u $(2.3.1.)_1$, dobićemo zakon balansa energije α-og sastojka u obliku

$$\begin{aligned} &-\rho_{(\alpha)}\grave{\epsilon}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)}\frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial u^{\lambda}} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)}\frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}}{\partial u^{\lambda}} + \left(\bar{\underset{\sim}{t}}^{k}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\lambda}}\right)\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} + \\ &+ \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial u^{\lambda}} + \rho_{(\alpha)}h_{(\alpha)} = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\right) - \tfrac{1}{2}\rho\hat{\beta}^{kr}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\,. \end{aligned} \tag{2.4.29.}$$

Zamenjujući $(2.4.27.)_{1,3}$ u $(2.3.1.)_2$, dobićemo uslov diskontinuiteta α-og sastojka u obliku

$$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} + q^{\lambda}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{\cdot rs}_{(\alpha)}\right)\left(v^{\lambda}_{(\alpha)} - \omega^{\lambda}\right)\right]\!\right] = 0. \tag{2.4.30.}$$

Ako u jednačini (2.4.29.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo fundamentalnu identičnost (2.4.12.), posle duže računice i sredjivanja, dobićemo zakon balansa energije za mešavinu

$$-\rho\dot{\epsilon} + \underset{\sim}{t}^{\lambda}\frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial u^{\lambda}} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}\frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{k}}{\partial u^{\lambda}} + \left(\bar{\underset{\sim}{t}}^{k} - \underset{\sim}{t}^{\lambda}\frac{\partial x^{k}}{\partial u^{\lambda}}\right)\underset{\sim}{\nu}_{k} + \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial u^{\lambda}} + \rho h = 0, \tag{2.4.31.}$$

gde su po definiciji

$$\rho\epsilon = \sum \rho_{(\alpha)}(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)})$$

$$\underset{\sim}{t}^{\lambda} = \sum (\underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)})$$

$$\underset{\sim}{t}^{k\lambda} = \sum (\underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)}\, i^{rs}_{(\alpha)})$$

(2.4.32.)
$$\underset{\sim}{\bar{t}}^{k} = \sum (\underset{\sim}{\bar{t}}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\theta^{r}_{(\alpha)k}\, i^{ks}_{(\alpha)})$$

$$q^{\lambda} = \sum [q^{\lambda}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)k} - \rho_{(\alpha)}(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)})\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)}]$$

$$\rho h = \sum \rho_{(\alpha)}(h_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}^{r}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}).$$

Ako (2.4.3o.) saberemo po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definicije (2.4.32.), dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

(2.4.33.)
$$[\![\underset{\sim}{t}^{\lambda}\cdot\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{t}^{k\lambda}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{k} + q^{k} - \rho(\epsilon + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{r}\underset{\sim}{\nu}_{s}\, i^{rs})(v^{\lambda} - \omega^{\lambda})]\!] = 0.$$

d) Entropijska nejednakost

Za izvodjenje entropijske nejednakosti koristićemo se, kao i kod trodimenzionalnog slučaja, opštim zakonima balansa i odgovarajućim uslovima diskontinuiteta α-og sastojka mešavine za slučaj ljuske, u kojima će znak jednakosti biti zamenjen znakom nejednakosti, tj.

(2.4.34.)
$$\frac{\partial \tau^{\lambda}_{(\alpha)}}{\partial u^{\lambda}} + g_{(\alpha)} - \grave{\sigma}_{(\alpha)} \leq 0$$

$$[\![\tau^{\lambda}_{(\alpha)} - \psi_{(\alpha)}(v^{\lambda}_{(\alpha)} - \omega^{\lambda})]\!]\, m_{\lambda} \leq 0$$

gde je

(2.4.35.)
$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \grave{\psi}_{(\alpha)} + \psi_{(\alpha)} S^{\lambda}_{(\alpha)\lambda}.$$

U ovom slučaju je

$$
\begin{aligned}
&\psi'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)} \eta'_{(\alpha)} \\
&\tau'_{(\alpha)} = \frac{q'_{(\alpha)}}{\theta'} \\
&\tau'^{k}_{(\alpha)} = \frac{q'^{k}_{(\alpha)}}{\theta'} \\
&g'_{(\alpha)} = \frac{\rho'_{(\alpha)} h'_{(\alpha)}}{\theta'}
\end{aligned}
\tag{2.4.36.}
$$

gde su $\eta'_{(\alpha)}$ i θ' specifična entropija i apsolutna temperatura α-og sastojka mešavine, respektivno, u odnosu na mikroelement, dok su ostale veličine već ranije definisane.

Mi pretpostavljamo da je temperatura svih sastojaka mešavine u istoj tački ista, odnosno da je

$$\theta_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t) = \theta(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t) \tag{2.4.37.}$$

i da se θ'^{-1} može izraziti u obliku polinoma po ξ^{k}, tj.

$$\theta'^{-1} = \theta^{-1} + C_{(\alpha)\ell_1} \xi^{\ell_1} + C_{(\alpha)\ell_1\ell_2} \xi^{\ell_1} \xi^{\ell_2} + \cdots \quad , \tag{2.4.38.}$$

gde su $C_{(\alpha)\ell_1\ell_2\ldots}$ momenti hladjenja, koji su funkcija od $\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}$ i t.

Veličine koje figurišu u opštim lokalnim zakonima balansa α-og sastojka mešavine date su u obliku

$$
\begin{aligned}
&\psi_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} \\
&\tau^{\lambda}_{(\alpha)} = \langle \tau'^{\lambda}_{(\alpha)} \rangle_2 = (\theta^{\lambda})^{-1} q^{\lambda}_{(\alpha)} + C^{\lambda}_{(\alpha)\ell_1} q^{\ell_1\lambda}_{(\alpha)} + C^{\lambda}_{(\alpha)\ell_1\ell_2} q^{\ell_1\ell_2\lambda}_{(\alpha)} + \cdots \\
&g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \theta^{-1} h_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1} h^{m_1}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1 m_2} h^{m_1 m_2}_{(\alpha)} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{2.4.39.}
$$

Posle smene $(2.4.39.)_1$ u (2.4.35.), dobićemo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \grave{\eta}_{(\alpha)} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} . \tag{2.4.40.}$$

Zada ovo zamenimo u $(2.4.34.)_1$ i iskoristimo $(2.4.39.)_{2,3}$, dobićemo entropijsku nejednakost α-og sastojka mešavine u obliku

$$\varrho_{(\alpha)}\dot{\eta}_{(\alpha)}+\varrho\hat{\beta}_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}-\varrho_{(\alpha)}(\theta^{-1}h_{(\alpha)}+C_{(\alpha)m_1}h_{(\alpha)}^{m_1}+C_{(\alpha)m_1m_2}h_{(\alpha)}^{m_1m_2}+\dots)-$$

(2.4.41.) $$-\frac{\partial}{\partial u^\lambda}[(\theta^\lambda)^{-1}q_{(\alpha)}^\lambda+C_{(\alpha)\ell_1}^\lambda q_{(\alpha)}^{\ell_1\lambda}+C_{(\alpha)\ell_1\ell_2}^\lambda q_{(\alpha)}^{\ell_1\ell_2\lambda}+\dots]\geq 0.$$

Odgovarajući uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobija se iz $(2.4.34.)_2$, koristeći $(2.4.39.)_{1,2}$, tj.

(2.4.42.) $$[\![\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}(v_{(\alpha)}^\lambda-\omega^\lambda)-(\theta^\lambda)^{-1}q_{(\alpha)}^\lambda-C_{(\alpha)\ell_1}^\lambda q_{(\alpha)}^{\ell_1\lambda}-C_{(\alpha)\ell_1\ell_2}^\lambda q_{(\alpha)}^{\ell_1\ell_2\lambda}-\dots]\!]m_\lambda\geq 0$$

U slučaju kada su momenti hladjenja jednaki nuli, entropijska nejednakost α-og sastojka mešavine (2.4.41.), dobija oblik

(2.4.43.) $$\varrho_{(\alpha)}\dot{\eta}_{(\alpha)}+\varrho\hat{\beta}_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}-\frac{\varrho_{(\alpha)}h_{(\alpha)}}{\theta}-\frac{\partial}{\partial u^\lambda}\left(\frac{q_{(\alpha)}^\lambda}{\theta}\right)\geq 0,$$

a odgovarajući uslov diskontinuiteta α-og sastojka (2.4.42.), oblik

(2.4.44.) $$[\![\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}(v_{(\alpha)}^\lambda-\omega^\lambda)-\frac{q_{(\alpha)}^\lambda}{\theta^\lambda}]\!]m_\lambda\geq 0.$$

Da bismo dobili entropijsku nejednakost mešavine, potrebno je u (2.4.43.) izvršiti sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristiti fundamentalnu identičnost (2.4.11.), stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)}=\eta_{(\alpha)}$ i $\Psi=\eta$, pa je

(2.4.45.) $$\varrho\dot{\eta}+\sum\frac{\partial}{\partial u^\lambda}(\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}u_{(\alpha)}^\lambda)-\frac{\varrho h^I}{\theta}-\frac{\partial}{\partial u^\lambda}\left(\frac{q^{I\lambda}}{\theta^\lambda}\right)\geq 0,$$

gde je

(2.4.46.) $$\varrho\eta=\sum\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}$$

$$\varrho h^I=\sum\varrho_{(\alpha)}h_{(\alpha)}\,,\quad \varrho h=\varrho h^I+\sum\varrho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r})$$

$$q^{I\lambda} = \sum q^{\lambda}_{(\alpha)}$$

$$q = q^{I\lambda} + \sum \Big[\underset{\sim}{t}^{\lambda}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} -$$

$$- \rho_{(\alpha)} \big(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)} \big) u^{\lambda}_{(\alpha)} \Big].$$

Ako u (2.4.44.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (2.4.46.)$_{1,3}$, dobićemo uslov diskontinuiteta mešavine, tj.

(2.4.47.) $$\Big[\!\Big[\sum \rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} \bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)} + \rho \eta (v^{\lambda} - w^{\lambda}) - \frac{q^{I\lambda}}{\theta^{\lambda}} \Big]\!\Big] n_{\lambda} \geq 0.$$

JEDNODIMENZIONALNO TELO - ŠTAP

3.1. UVOD

U dosadašnjoj teoriji mešavina postoji samo jedan rad [20], koji se odnosi na ispitivanje jednodimenzionalnog kontinuuma. Rad se pojavio 1975. godine i u njemu je predložena opšta nelinearna teorija mešavina orijentisanih krivih. Kao praktičnu primenu ovih izučavanja, autori navode matematički model čovečije kičme.

Iz ovoga se vidi da u prirodi postoji praktičnih primera na koje se može primeniti teorija mešavina jednodimenzionalnog kontinuuma. Zbog toga smatramo, da u cilju daljeg razvoja teorije mešavina, treba primeniti mikromorfnu teoriju mešavina i odgovarajuće zakone balansa i uslove diskontinuiteta trodimenzionalnog tela na jednodimenzionalna tela, u našem slučaju na štapove.

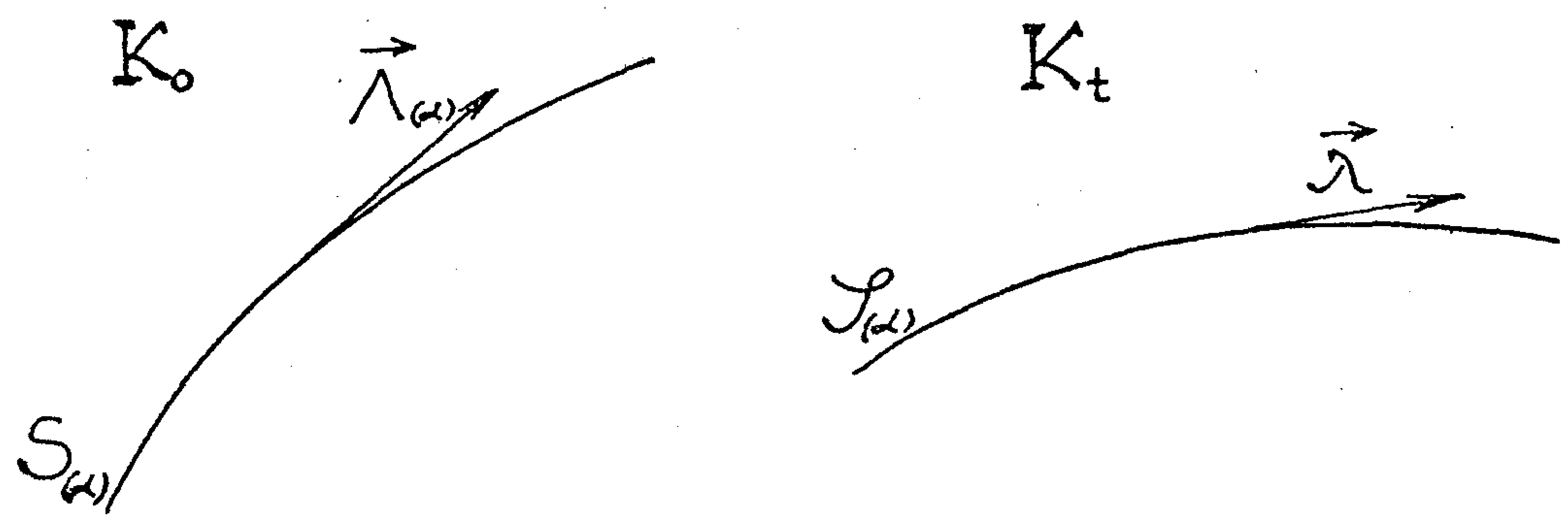
Inače, što se tiče izučavanja štapova primenom trodimenzionalne teorije, valja reći da se pritom nailazi na velike, čak nepremostive teškoće matematičke prirode. Da bi se to izbeglo predlažu se razne teorije koje koriste u manjoj meri, ili nikako, trodimenzionalnu teoriju. Takvih prilaza ima više. Tako, naprimer, Ericksen i Truesdell su koristili teoriju orijentisanih tela braće E. i F. Cosserat, kao i nelinearnu teoriju teoriju štapova koju je dao Hay. Oni su proširili trodimenzionalnu teoriju štapova kao jednodimenzionalni ili trodimenzionalni Cosserat kontinuum. Nelinearnu teoriju štapova dalje je razvio Kafadar [23] i Kafadar i Eringen [22], primenjujući trodimenzionalnu teoriju polarnih sredina na slučaj jednodimenzionalnih tela, odnosno štapove.

U radu [2] primenjena je mikromorfna teorija trodimenzionalnog kontinuuma [1] i izvedeni opšti zakoni balansa, koji su primenjeni u teoriji štapova.

Koristeći rezultate rada [2], mi smo izveli posebne zakone balansa mase, tenzora mikroinercije, količine kretanja i energije, kao i entropijsku nejednakost. α-og sastojka mešavine i same mešavine za slučaj štapa. Na kraju su izvedene i konstitutivne jednačine mikromorfne teorije mešavina za štap.

3.2. KINEMATIKA

Mi definišemo štap kao jednodimenzionalni mikromorfni kontinuum koji sadrži $\alpha = 1,2,\ldots,n$ sastojaka mešavine. Da bismo opisali kretanje jednog sastojka, primenićemo, kao i kod trdimenzionalnog slučaja, princip naveden u Uvodu pod b) i na taj način pretpostaviti kretanje, mikrokretanje i deformaciju samo α-og sastojka mešavine štapa (sl.3.1.).



(sl.3.1.)

U nedeformisanoj konfiguraciji K_o, koja odgovara trenutku vremena t_o, štap ima oblik krive

$$X^K = X^K(S_{(\alpha)}), \tag{3.2.1.}$$

gde je $S_{(\alpha)}$ luk krive α-og sastojka mešavine. Jedinični vektor tangente krive u nedeformisanoj konfiguraciji je

$$\Lambda^K_{(\alpha)} = \frac{dX^K}{dS_{(\alpha)}} . \tag{3.2.2.}$$

S obzirom da kretanje mikroelemenata u makroelementu, relativnih u odnosu na njegov centar, može biti adekvatno aproksimirano kao homogena deformacija, tada su jednačine kretanja i deformacija za α-ti sastojak mešavine odredjeni sa

(3.2.3.)
$$x^k_{(\alpha)} = x^k_{(\alpha)}(\mathcal{S}_{(\alpha)}, t)$$
$$\chi^k_{(\alpha)K} = \chi^k_{(\alpha)K}(\mathcal{S}_{(\alpha)}, t),$$

gde su $\chi^k_{(\alpha)K}$ gradijenti mikrodeformacije α-og sastojka mešavine koji definišu homogenu deformaciju.

Luk prostorne krive α-og sastojka mešavine u deformisanoj konfiguraciji K_t definišemo sa

(3.2.4.)
$$\mathcal{S}_{(\alpha)} = \mathcal{S}_{(\alpha)}(S_{(\alpha)}, t) = \int_0^{S_{(\alpha)}} \sqrt{g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial S} \frac{\partial x^l}{\partial S}}\, dS_{(\alpha)} .$$

Jedinični vektor tangente u deformisanoj konfiguraciji K_t je

(3.2.5.)
$$\lambda^k_{(\alpha)} = \frac{\partial x^k}{\partial \mathcal{S}_{(\alpha)}} = \frac{\partial x^k}{\partial \mathcal{S}} = \lambda^k ,$$

gde za parcijalni izvod važi

(3.2.6.)
$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{S}_{(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} .$$

Većina definicija i relacija koje su izvedene za slučaj trodimenzijskog mikromorfnog kontinuuma koji sadrži n različitih sastojaka važiće i za jednodimenzijski mikromorfni kontinuum, odnosno štap, koji takodje sadrži n različitih sastojaka. Neke su specifične samo za štap, pa ćemo ih posebno istaći.

Srednja brzina mešavine štapa $\mathring{\mathcal{S}}$ definisana je kao

(3.2.7.)
$$\rho \mathring{\mathcal{S}} = \sum \rho_{(\alpha)} \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} .$$

Brzina difuzije α-og sastojka štapa $\mathcal{U}_{(\alpha)}$, relativna prema srednjoj brzini $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$, definisana je sa

(3.2.8.) $$\mathcal{U}_{(\alpha)} = \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - \overset{\circ}{\mathcal{S}} .$$

Iz (3.2.7.) i (3.2.8.) sledi kao posledica

(3.2.9.) $$\sum \rho_{(\alpha)} \mathcal{U}_{(\alpha)} = 0$$

Za neku veličinu $\Psi = \Psi(\mathcal{S}_{(\alpha)}, t)$, koja je definisana u svim tačkama štapa, postojaće sledeća dva materjalna izvoda:
Materijalni izvod sastojka

(3.2.1o.) $$\grave{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{S}} \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}$$

i materijalni izvod mešavine

(3.2.11.) $$\overset{\circ}{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{S}} \overset{\circ}{\mathcal{S}} ,$$

odakle sledi veza izmedju njih

(3.2.12.) $$\grave{\Psi} = \overset{\circ}{\Psi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathcal{S}} \mathcal{U}_{(\alpha)} .$$

Ako za mešavinu postoji sledeća srednja vrednost neke funkcije

(3.2.13.) $$\rho \Psi \equiv \sum \rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} ,$$

onda koristeći (3.2.8.), (3.2.1o.) i (3.2.11.) dobijamo fundamentalnu identičnost, koja važi za štap, u obliku

$$\sum \rho_{(\alpha)} \grave{\Psi}_{(\alpha)} = \rho \dot{\Psi} + \Psi \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} (\rho \dot{\mathcal{S}}) \right] + \sum \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} (\rho_{(\alpha)} \Psi_{(\alpha)} u_{(\alpha)}) -$$

(3.2.14.)

$$- \sum \Psi_{(\alpha)} \left[\frac{\partial \rho_{(\alpha)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} (\rho_{(\alpha)} \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}) \right].$$

3.3. OPŠTI LOKALNI ZAKONI BALANSA MIKROMORFNE TEORIJE ŠTAPA

Primenjujući u Uvodu navedeni fizički princip b) i koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa mikromorfne teorije štapova [2], možemo napisati opšti oblik lokalnih zakona balansa i glavnih uslova diskontinuiteta koji će važiti za svaki sastojak pojedinačno, tj.

(3.3.1.)

$$\frac{\partial \tau_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} + g_{(\alpha)} - \grave{6}_{(\alpha)} = 0$$

$$[\![\tau_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 ,$$

gde je

(3.3.2.)

$$\grave{6}_{(\alpha)} = \grave{\Psi}_{(\alpha)} + \Psi_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} .$$

Mada se ovde nećemo iz fizičkih razloga zadržavati na teoriji višeg reda, ipak ćemo napisati odgovarajući oblik lokalnih zakona balansa i glavnih uslova diskontinuiteta α-og sastojka mešavine, jer će nam neki od zakona balansa biti potrebni za mikropolarnu teoriju, tj.

(3.3.3.)

$$\frac{\partial \tau_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p}}{\partial \mathcal{S}} + \lambda^{(l_p} \tau_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_{p-1})} - \bar{\tau}_{(\alpha)}^{(l_1 \dots l_p)} + g_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} - \grave{6}_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} = 0$$

$$[\![\tau_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} - \Psi_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 ,$$

gde je

(3.3.4.) $$\grave{\sigma}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \grave{\psi}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\varphi}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \hat{\psi}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}$$

sa

(3.3.5.) $$\hat{\psi}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \sum_{s=1}^{p} \nu^{l_s}_{(\alpha)k}\, \psi^{l_1\ldots k\ldots l_p}_{(\alpha)} .$$

Odgovarajuća tenzorska polja su već ranije definisana sa (1.5.5.).

3.4. POSEBNI ZAKONI BALANSA SASTOJKA I MEŠAVINE

Koristeći opšti oblik lokalnih zakona balansa α-og sastojka štapa datih sa (3.3.1.) i (3.3.3.), možemo izvesti odgovarajuće zakone balansa pojedinih fizičkih veličina. Ako izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine dobićemo zakone balansa tih fizičkih veličina, koji će važiti za mešavinu.

a) Gustina mase i tenzori mikroinercije

Zakoni balansa ovih veličina se dobijaju kada se pretpostavi da je

(3.4.1.) $$\psi'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)} , \quad \tau'^{k}_{(\alpha)} = 0 , \quad g'_{(\alpha)} = \rho\hat{\beta}'_{(\alpha)} ,$$

gde su ove veličine definisane u odnosu na mikroelement. $\rho'_{(\alpha)}$ je gustina mase α-og sastojka u mikroelementu, a $\rho\hat{\beta}'_{(\alpha)}$ zapreminska promena mase α-og sastojka u mikroelementu usled hemijskih reakcija sa nekim drugim ili svim sastojcima mešavine.

S obzirom na (1.5.5.) sledi da je

(3.4.2.) $$\tau^{k}_{(\alpha)} = 0 , \quad \tau^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \bar{\tau}^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = 0$$
$$\psi_{(\alpha)} = \langle \rho_{(\alpha)} \rangle = \rho_{(\alpha)}$$
$$\psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \frac{1}{p!} \langle \rho_{(\alpha)}\, \xi^{(l_1} \cdots \xi^{l_p)} \rangle = \rho_{(\alpha)}\, \dot{i}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)} = \langle \rho\hat{\beta}_{(\alpha)} \rangle = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p} = \frac{1}{p!} \langle \rho\hat{\beta}_{(\alpha)} \xi^{(l_1} \cdots \xi^{l_p)} \rangle = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p},$$

gde su $\rho_{(\alpha)}$ i $i_{(\alpha)}^{l_1 \dots l_p}$ gustina mase i tenzori mikroinercije α-og sastojka mešavine. Zamenjujući (3.4.2.) u (3.3.2.), dobijamo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\mathscr{S}}_{(\alpha)}}{\partial \mathscr{S}}, \tag{3.4.3.}$$

pa iz $(3.3.1.)_1$ zakon balansa mase α-og sastojka mešavine glasi

$$\grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\mathscr{S}}_{(\alpha)}}{\partial \mathscr{S}} = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}. \tag{3.4.4.}$$

Ako $(3.4.2.)_1$ i $(3.4.2.)_2$ zamenimo u $(3.3.1.)_1$, dobijamo uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine

$$[\![\rho_{(\alpha)} (\grave{\mathscr{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 . \tag{3.4.5.}$$

Kada u (3.4.4.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (1.4.15.), (3.2.7.), (3.2.8.) i (3.2.9.), dobićemo zakon balansa gustine mešavine

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathscr{S}} (\rho \dot{\mathscr{S}}) = 0, \tag{3.4.6.}$$

uz uslov

$$\sum \rho\hat{\beta}_{(\alpha)} = 0, \tag{3.4.7.}$$

što znači da masa ostaje konstantna u mešavini.

Uslov diskontinuiteta za mešavinu dobijamo iz (3.4.5.) koristeći (3.2.7.)

(3.4.8.) $$[\![\rho(\dot{\mathcal{S}}-u)]\!]=0.$$

Za izvodjenje zakona balansa tenzora mikroinercije -og sastojka mešavine potrebno je prethodno izračunati veličinu (3.3.4.). Koristeći (3.3.5.), $(3.4.2.)_{3,5}$ i (3.4.4.), dobijamo

(3.4.9.) $$\grave{\sigma}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}=\rho_{(\alpha)}\grave{\overline{i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}}}+\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}-\sum_{s}\rho_{(\alpha)}\nu_{(\alpha)k}^{l_s}\, i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p}.$$

Kada (3.4.9.) zamenimo u $(3.3.3.)_1$, dobijamo zakon balansa tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine

(3.4.10.) $$\rho_{(\alpha)}\grave{\overline{i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}}}-\sum_{s}\rho_{(\alpha)}\nu_{(\alpha)k}^{l_s}\, i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p}=\rho\left(\hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}-\hat{\beta}_{(\alpha)}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}\right).$$

Uslov diskontinuiteta α -og sastojka mešavine dobijamo iz $(3.3.3.)_2$, ako iskoristimo $(1.5.5.)_2$i (1.5.5.), tj.

(3.4.11.) $$[\![\rho_{(\alpha)}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}-u)]\!]=0.$$

Fundamentalna identičnost (3.2.14.), koristeći (3.4.4.) i (3.4.6.), postaje oblika

(3.4.12.) $$\sum\rho_{(\alpha)}\grave{\Psi}_{(\alpha)}=\rho\dot{\Psi}+\sum\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho_{(\alpha)}\Psi_{(\alpha)}u_{(\alpha)})-\sum\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\Psi_{(\alpha)}.$$

U specijalnom slučaju kada je $\Psi_{(\alpha)}=i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}$ i $\Psi=i^{l_1\ldots l_p}$ i iskoristimo (3.2.13.), iz (3.4.12.) dobićemo da je

(3.4.13.) $$\sum\rho_{(\alpha)}\grave{\overline{i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}}}=\rho\dot{\overline{i^{l_1\ldots l_p}}}+\sum\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho_{(\alpha)}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}u_{(\alpha)})-\sum\rho\hat{\beta}i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}.$$

Ako u jednačini (3.4.10.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (3.4.13.), dobićemo zakon balansa tenzora mikroinercije za mešavinu u obliku

$$\rho \dot{\overline{i^{l_1 \ldots l_p}}} - \sum \sum_s \rho_{(\alpha)} \nu^{l_s}_{(\alpha)k} \dot{i}^{l_1 \ldots k \ldots l_p}_{(\alpha)} = \sum \rho \hat{\beta}^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} - \sum \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho_{(\alpha)} \dot{i}^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} u_{(\alpha)}). \tag{3.4.14.}$$

Kada u (3.4.11.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

$$[\![\sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} u_{(\alpha)} + \rho i^{l_1 \ldots l_p} (\dot{\varphi} - u)]\!] = 0 . \tag{3.4.15.}$$

b) Količina kretanja i momenti količine kretanja

U ovom slučaju su

$$\begin{aligned} \Psi'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} \\ \tau'^{k}_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)} \\ \tau'_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)} n'_{(\alpha)k} = \underset{\sim}{t}'_{(n'_{(\alpha)})} = \underset{\sim}{t}'_{(\alpha)} \\ g'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}'_{(\alpha)} \end{aligned} \tag{3.4.16.}$$

gde su $\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}$ i $\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)}$ vektor brzine, vektor napona i zapreminska sila α-og sastojka mešavine, respektivno, u odnosu na mikroelement. Odgovarajuće veličine koje figurišu u (3.3.1.) i (3.3.3.) su prema (1.5.5.) sledećeg oblika

$$\begin{aligned} \Psi_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \\ \Psi^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)} i^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{k l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \\ \tau_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}_{(\alpha)} \\ \tau^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} &= \underset{\sim}{t}^{l_1 \ldots l_p}_{(\alpha)} \end{aligned} \tag{3.4.17.}$$

$$\bar{\tau}^{kl_1\dots l_p}_{(\alpha)} = \bar{\underset{\sim}{t}}^{kl_1\dots l_p}_{(\alpha)}$$

$$g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)}$$

$$g^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$$

gde su $\underset{\sim}{t}^k_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$, $\bar{\underset{\sim}{t}}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}$ i $\underset{\sim}{f}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}$ vektor napona, vektori naponskog momenta, vektori momenata prosečnog napona, vektor zapreminske sile i vektori momenata zapreminske sile α-og sastojka mešavine, respektivno.

Zamenjujući (3.4.17.) u (3.3.2.) i s obzirom na (3.4.4.), dobijamo

(3.4.18.) $$\grave{\varepsilon}_{(\alpha)} = \rho(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^k_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)k}) + \rho_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^k_{(\alpha)} (\underset{\sim}{v}_{(\alpha)l} v^l_{(\alpha)k} + \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)k}).$$

Kada $(3.4.17.)_{3,6}$ i (3.4.18.) zamenimo u $(3.3.1.)_1$, dobićemo

(3.4.19.) $$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) - \rho_{(\alpha)} i^k_{(\alpha)} (\underset{\sim}{v}_{(\alpha)l} v^l_{(\alpha)k} + \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)k}) = \\ = \rho(\hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^k_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)k}).$$

Kada uzmemo u obzir da je

(3.4.2o.) $$i^k_{(\alpha)} = 0 ,$$

što fizički znači da se centar mase makroelementa nalazi u istoj tački makroelementa, onda iz (3.4.1o.), za slučaj kada je p=1, sledi da je

(3.4.21.) $$\overline{\grave{i}^k_{(\alpha)}} = 0 , \quad \hat{\beta}^k_{(\alpha)} = 0$$

Tada iz (3.4.19.) dobijamo zakon balansa količine kretanja α-og sastojka u obliku

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}}{\partial \mathscr{S}} + \rho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \dot{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} . \tag{3.4.22.}$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobićemo ako iskoristimo $(3.3.1.)_2$, $(3.4.17.)_{1,3}$ uz (3.4.2o.), tj.

$$[\![\underset{\sim}{t}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} (\mathscr{S}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 . \tag{3.4.23.}$$

Ako jednačinu (3.4.22.) saberemo po svim sastojcima mešavine, iskoristimo fundamentalnu identičnost (3.4.12.) stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)} = \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$ i $\Psi = \underset{\sim}{v}$ i sledeće definicije

$$\sum \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} = \rho \underset{\sim}{f} \tag{3.4.24.}$$

$$\underset{\sim}{t}^{k} = \sum [\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} u_{(\alpha)}] , \tag{3.4.25.}$$

dobićemo zakon balansa količine kretanja mešavine

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}}{\partial \mathscr{S}} + \rho(\underset{\sim}{f} - \dot{\underset{\sim}{v}}) = 0 . \tag{3.4.26.}$$

Ako u (3.4.23.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo (3.4.25.), dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

$$[\![\underset{\sim}{t}^{k} - \rho \underset{\sim}{v} (\dot{\mathscr{S}} - u)]\!] = 0. \tag{3.4.27.}$$

Za izvodjenje zakona balansa momenata količine kretanja α-og sastojka mešavine, najpre ćemo izračunati (3.3.4.) koristeći $(3.4.17.)_2$, (3.3.5.) i (3.4.1o.), tj.

$$\grave{\sigma}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} = \rho\left(\hat{\beta}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{k l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\right) + \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} +$$

(3.4.28.)
$$+\rho_{(\alpha)} i^{k l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)k} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \nu^{r}_{(\alpha)k}\right).$$

Ako (3.4.17.)$_{4,5,7}$ i (3.4.28.) zamenimo u (3.3.3.)$_1$, dobićemo odgovarajući zakon balansa momenata količine kretanja α-og sastojka mešavine

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} + \lambda^{(l_p} \underset{\sim}{t}^{l_1\dots l_{p-1})}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{\bar{t}}^{(l_1\dots l_p)}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\left(\underset{\sim}{f}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} - i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}\right) -$$

(3.4.29.)
$$-\rho_{(\alpha)} i^{k l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)k} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \nu^{r}_{(\alpha)k}\right) = \rho\left(\hat{\beta}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{k l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\right).$$

Uslov diskontinuiteta α-og sastojka mešavine dobijamo iz (3.3.3.)$_2$, koristeći (3.4.17.)$_{2,4}$, tj.

(3.4.30.) $$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\left(i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + i^{k l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\right)\left(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u\right)\right]\!\right] = 0 .$$

Da bismo napisali zakone balansa momenata količine kretanja mešavine, poći ćemo od izraza (1.4.21.)

(3.4.31.) $$\rho i^{l_1\dots l_p} \underset{\sim}{v} + \rho i^{l_1\dots l_p l} \underset{\sim}{\nu}_l = \sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} .$$

Ako potražimo izvod leve i desne strane ovog izraza, posle duže računice i pogodnog sredjivanja, dobijamo

$$\sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p l}_{(\alpha)} \left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)l} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k} \nu^{k}_{(\alpha)l}\right) =$$

$$= \rho i^{l_1\dots l_p} \dot{\underset{\sim}{v}} + \rho i^{l_1\dots l_p l}\left(\dot{\underset{\sim}{\nu}}_l + \underset{\sim}{\nu}_k \nu^k_l\right) - \rho \sum \left(\hat{\beta}^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{l_1\dots l_p l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}\right) +$$

(3.4.32.)
$$+\sum \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}}\Big[\rho_{(\alpha)} U_{(\alpha)}\left(i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i^{l_1\dots l_p l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}\right) - \sum \sum_{s} \rho_{(\alpha)} \theta^{l_s}_{(\alpha)k}\Big(i^{l_1\dots k\dots l_p}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} +$$

$$+ i^{l_1\dots k\dots l_p l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}\Big) + \frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial \mathcal{S}} \sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p}_{(\alpha)} U_{(\alpha)} + \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_l}{\partial \mathcal{S}} \sum \rho_{(\alpha)} i^{l_1\dots l_p l}_{(\alpha)} U_{(\alpha)} -$$

$$- \underset{\sim}{\nu}_l \sum \rho_{(\alpha)} \theta^{l}_{(\alpha)k} i^{l_1\dots l_p k}_{(\alpha)} .$$

Ako u jednačini (3.4.29.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine, iskoristimo (3.4.32.) i odgovarajuće definicije, dobićemo zakon balansa momenata količine kretanja mešavine u obliku

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_p}}{\partial \mathcal{S}} + \lambda^{(l_p}\underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_{p-1})} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{(l_1\ldots l_p)} + \varrho(\underset{\sim}{f}^{l_1\ldots l_p} - i^{l_1\ldots l_p}\dot{\underset{\sim}{v}}) -$$

$$(3.4.33.)\quad -\varrho i^{l_1\ldots l_p l}(\dot{\underset{\sim}{v}}_l + \underset{\sim}{v}_k v_l^k) = \varrho \underset{\sim}{v}\sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} + \varrho \underset{\sim}{v}_l \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} +$$

$$+\frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial \mathcal{S}}\sum \varrho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} u_{(\alpha)} + \frac{\partial \underset{\sim}{v}_l}{\partial \mathcal{S}}\sum \varrho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} u_{(\alpha)} - \underset{\sim}{v}_l \sum \varrho_{(\alpha)} \theta_{\alpha k}^{l} i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p k},$$

uz uslove

$$(3.4.34.)\qquad \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p} = 0 \quad \text{i} \quad \sum \hat{\beta}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l} = 0$$

i gde su po definiciji

$$\underset{\sim}{t}^{(l_1\ldots l_p)} = \sum\left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} - \varrho_{(\alpha)} u_{(\alpha)}\left(i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p l}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}\right)\right],$$

$$\lambda^{(l_p}\underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_{p-1})} - \bar{\underset{\sim}{t}}^{(l_1\ldots l_p)} = \sum\left[\lambda^{(l_p}\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_{p-1})} - \bar{\underset{\sim}{t}}_{(\alpha)}^{(l_1\ldots l_p)} + \right.$$

$$(3.4.35.)\qquad \left. + \sum_{s}\varrho_{(\alpha)}\theta_{\alpha k}^{l_s}\left(i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + i_{(\alpha)}^{l_1\ldots k\ldots l_p l}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)l}\right)\right],$$

$$\varrho \underset{\sim}{f}^{l_1\ldots l_p} = \sum \varrho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{l_1\ldots l_p}.$$

Ako u (3.4.30.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definicije (3.4.35.), dobićemo uslov diskontinuiteta za mešavinu

$$(3.4.36.)\qquad \left[\!\left[\underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_p} - \varrho\left(i^{l_1\ldots l_p}\underset{\sim}{v} + i^{l_1\ldots l_p l}\underset{\sim}{v}_l\right)(\dot{\mathcal{S}} - u)\right]\!\right] = 0.$$

c) Energija

Odgovarajuće veličine u ovom slučaju su

$$
\begin{aligned}
&\Psi'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)}\left(\epsilon'_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\right)\\
&\tau'_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}'_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + q'_{(\alpha)}\\
&\tau'^{k}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + q'^{k}_{(\alpha)}\\
&g'_{(\alpha)} = \rho'_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}'_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}'_{(\alpha)} + \rho'_{(\alpha)}h'_{(\alpha)}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.4.37.}
$$

gde su $\epsilon'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}'^{k}_{(\alpha)}$, $q'^{k}_{(\alpha)}$ i $h'_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije, vektori napona, vektor toplotnog fluksa i zapreminski izvor energije (zapreminska specifična proizvodnja toplote) α-og sastojka mešavine, respektivno, u mikroelementu. Odgovarajuće veličine iz (3.3.1.), (3.3.2.), (3.3.3.) i (3.3.4.) su prema (1.5.5.), sledećeg oblika

$$
\begin{aligned}
&\Psi_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right)\\
&\Psi^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\, i^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\, i^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{rsl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\right)\\
&\tau_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + q_{(\alpha)}\\
&\tau^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + q^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\\
&\bar{\tau}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \bar{\underset{\sim}{t}}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \bar{\underset{\sim}{t}}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + \bar{q}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\\
&g_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}^{r}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + \rho_{(\alpha)}h_{(\alpha)}\\
&g^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{f}^{rl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + \rho_{(\alpha)}h^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.4.38.}
$$

gde su $\epsilon_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}$, $\underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}$, $q_{(\alpha)}$ i $h_{(\alpha)}$ gustina unutrašnje energije po jedinici mase, vektori napona, vektor toplotnog fluksa i izvor energije po jedinici zapremine α-og sastojka mešavine, respektivno.

Smenom (3.4.38.) u (3.3.2.) i s obzirom na (3.4.4.), dobiamo

$$\grave{b}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)}\left[\grave{\epsilon}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\left(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)r} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)k}\,\nu^{k}_{(\alpha)r}\right)\right] +$$

$$+\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\right) + \frac{1}{2}\rho\,\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\,\hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} . \quad (3.4.39.)$$

Ako (3.4.38.)$_{3,6}$ i (3.4.39.) zamenimo u (3.3.1.)$_1$, dobićemo zakon balansa energije α-og sastojka u obliku

$$\rho_{(\alpha)}\grave{\epsilon}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \varphi} - \left(\bar{\underset{\sim}{t}}^{r}_{(\alpha)} - \lambda^{r}\underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\right)\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} - \frac{\partial q_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \rho_{(\alpha)}h_{(\alpha)} =$$

$$= \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \epsilon_{(\alpha)}\right) + \frac{1}{2}\rho\hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)}\,\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} . \quad (3.4.40.)$$

Zamenjujući (3.4.38.)$_{1,3}$ u (3.3.1.)$_2$, dobićemo uslov diskontinuiteta α-og sastojka u obliku

$$[\![\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + q_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}\, i^{rs}\right)\left(\grave{\varphi}_{(\alpha)} - u\right)]\!] = 0 . \quad (3.4.41.)$$

Ako u jednačini (3.4.4o.) izvršimo sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristimo fundamentalnu identičnost (3.4.12.), posle duže računice i sredjivanja, dobićemo zakon balansa energije za mešavinu

$$-\rho\dot{\epsilon} + \underset{\sim}{t}\frac{\partial \underset{\sim}{v}}{\partial \varphi} + \underset{\sim}{t}^{r}\frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{r}}{\partial \varphi} + \left(\bar{\underset{\sim}{t}}^{r} - \lambda^{r}\underset{\sim}{t}\right)\underset{\sim}{\nu}_{r} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \rho h = 0 , \quad (3.4.42.)$$

gde su iskorišćene sledeće definicije

$$\rho\epsilon = \sum \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\cdot\underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\cdot\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right)$$

$$\underset{\sim}{t}^{k} = \sum\left[\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}u_{(\alpha)}\right] \quad (3.4.43.)$$

$$\underset{\sim}{t}^{kr} = \sum\left[\underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\,u_{(\alpha)}\, i^{rs}_{(\alpha)}\right]$$

$$\underset{\sim}{t}^{r} = \sum\left[\underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}u_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}\,\theta^{r}_{(\alpha)k}\, i^{ks}_{(\alpha)}\right]$$

$$q^k = \sum \left[q^k_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^k_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{kr}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} - \rho_{(\alpha)} \left(\epsilon_{(\alpha)} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)} \right) u_{(\alpha)} \right]$$

$$\rho h = \sum \rho_{(\alpha)} \left(h_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{u}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{f}^r_{(\alpha)} \cdot \underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r} \right).$$

Ako (3.4.41.) saberemo po svim sastojcima mešavine i iskoristimo definicije (3.4.43.), dobićemo uslov diskontinuiteta mešavine

(3.4.44.) $$\left[\!\left[\underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{t}^r \cdot \underset{\sim}{v}_r + q - \rho \left(\epsilon + \frac{1}{2} \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{v} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{v}_r \cdot \underset{\sim}{v}_s i^{rs} \right) (\acute{\mathcal{S}} - u) \right]\!\right] = 0.$$

d) Entropijska nejednakost

Za izvodjenje konstitutivnih jednačina mikromorfne teorije mešavina za slučaj štapa, potrebna je entropijska nejednakost. Zbog toga ćemo se ponovo koristiti opštim lokalnim zakonima balansa i odgovarajućim uslovima diskontinuiteta α-og sastojka mešavine, medjutim sada u obliku nejednakosti, tj.

(3.4.45.) $$\frac{\partial \tau_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} + g_{(\alpha)} - \grave{\sigma}_{(\alpha)} \leq 0$$

$$\left[\!\left[\tau_{(\alpha)} - \psi_{(\alpha)} (\acute{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u) \right]\!\right] \leq 0 ,$$

gde je

(3.4.46.) $$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \grave{\psi}_{(\alpha)} + \psi_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\acute{\mathcal{S}}}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} .$$

U klasičnoj teoriji mešavina još uvek se sukobljavaju mišljenja oko izbora konstitutivno promenljivih veličina. Pošto se u mikromorfnoj teoriji mešavina broj konstitutivno promenljivih povećava, očigledno je da se i teškoće oko njihovog izbora povećavaju, a posebno kada se radi o teoriji višeg stepena. Iz tih razloga ćemo se zadržati na teoriji za p=o.

U tom slučaju je

$$
\begin{aligned}
\Psi'_{(\alpha)} &= \rho'_{(\alpha)} \eta'_{(\alpha)} \\
\tau'_{(\alpha)} &= \frac{q'_{(\alpha)}}{\theta'} \\
\tau'^{k}_{(\alpha)} &= \frac{q'^{k}_{(\alpha)}}{\theta'} \\
g'_{(\alpha)} &= \frac{\rho'_{(\alpha)} h'_{(\alpha)}}{\theta'}
\end{aligned}
\tag{3.4.47.}
$$

gde je $\eta'_{(\alpha)}$ - specifična entropija α-og sastojka u mikroelementu, θ' - apsolutna temperatura u mikroelementu, dok su ostale veličine već ranije definisane.

Mi pretpostavljamo da je temperatura svih sastojaka u istoj tački ista, odnosno da je

$$\theta_{(\alpha)}(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t) = \theta(\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}, t) \tag{3.4.48.}$$

i da se θ'^{-1} može izraziti u obliku polinoma po ξ^{k}, tj.

$$\theta'^{-1} = \theta^{-1} + C_{(\alpha)l_1} \xi^{l_1} + \frac{1}{2!} C_{(\alpha)l_1 l_2} \xi^{l_1} \xi^{l_2} + \cdots \tag{3.4.49.}$$

gde su $C_{(\alpha)l_1 l_2 \ldots}$ momenti hladjenja, koji su funkcija od $\underset{\sim}{x}_{(\alpha)}$ i t.

Veličine koje figurišu u opštim lokalnim zakonima balansa α -og sastojka mešavine, date su u obliku

$$
\begin{aligned}
\Psi_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} \\
\tau_{(\alpha)} &= \langle \tau'_{(\alpha)} \rangle_2 = \theta^{-1} q_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1} q^{l_1}_{(\alpha)} + C_{(\alpha)l_1 l_2} q^{l_1 l_2}_{(\alpha)} + \cdots \\
g_{(\alpha)} &= \rho_{(\alpha)} \theta^{-1} h_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1} h^{m_1}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} C_{(\alpha)m_1 m_2} h^{m_1 m_2}_{(\alpha)} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{3.4.50.}
$$

Ako zamenimo $(3.4.50.)_1$ u (3.4.46.), dobićemo

$$\grave{\sigma}_{(\alpha)} = \rho_{(\alpha)} \grave{\eta}_{(\alpha)} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} . \tag{3.4.51.}$$

Pošto iskoristimo (3.4.51.) i $(3.4.50.)_{2,3}$, (3.4.45.) daje entropijsku nejednakost α -og sastojka mešavine

$$\varrho_{(\alpha)}\grave{\eta}_{(\alpha)}+\varrho\hat{\beta}_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{S}}\left(\theta^{-1}q_{(\alpha)}+C_{(\alpha)l_1}q_{(\alpha)}^{l_1}+C_{(\alpha)l_1l_2}q_{(\alpha)}^{l_1l_2}+\dots\right)-$$

$$(3.4.52.)\quad -\varrho_{(\alpha)}\left(\theta^{-1}h_{(\alpha)}+C_{(\alpha)m_1}h_{(\alpha)}^{m_1}+C_{(\alpha)m_1m_2}h_{(\alpha)}^{m_1m_2}+\dots\right)\geq 0.$$

Uslov diskontinuiteta dobićemo iz $(3.4.45.)_2$, kada iskoristimo $(3.4.50.)_{1,2}$, tj.

$$(3.4.53.)\quad \left[\!\left[\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}-u)-\theta^{-1}q_{(\alpha)}-C_{(\alpha)l_1}q_{(\alpha)}^{l_1}-C_{(\alpha)l_1l_2}q_{(\alpha)}^{l_1l_2}-\dots\right]\!\right]\geq 0.$$

U slučaju kada su momenti hladjenja jednaki nuli, dobićemo odgovarajuću entropijsku nejednakost α -og sastojka mešavine u obliku

$$(3.4.54.)\quad \varrho_{(\alpha)}\grave{\eta}_{(\alpha)}+\varrho\hat{\beta}_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}-\frac{\varrho_{(\alpha)}h_{(\alpha)}}{\theta}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{S}}\left(\frac{q_{(\alpha)}}{\theta}\right)\geq 0,$$

a uslov diskontinuiteta u obliku

$$(3.4.55.)\quad \left[\!\left[\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}-u)-\frac{q_{(\alpha)}}{\theta}\right]\!\right]\geq 0.$$

Da bismo dobili entropijsku nejednakost za mešavinu, potrebno je u (3.4.54.) izvršiti sabiranje po svim sastojcima mešavine i iskoristiti fundamentalnu identičnost (3.4.12.), stavljajući da je $\Psi_{(\alpha)}=\eta_{(\alpha)}$ i $\Psi=\eta$, tj.

$$(3.4.56.)\quad \varrho\mathring{\eta}+\sum\frac{\partial}{\partial\mathcal{S}}(\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}u_{(\alpha)})-\frac{\varrho h^{I}}{\theta}-\frac{\partial}{\partial\mathcal{S}}\left(\frac{q^{I}}{\theta}\right)\geq 0,$$

gde je

$$\varrho\eta=\sum\varrho_{(\alpha)}\eta_{(\alpha)}$$

$$(3.4.57.)\quad \varrho h^{I}=\sum\varrho_{(\alpha)}h_{(\alpha)},\quad \varrho h=\varrho h^{I}+\sum\varrho_{(\alpha)}(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r})$$

$$q^{I}=\sum q_{(\alpha)},\quad q=q^{I}+\sum\left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}^{k}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)k}-\right.$$

$$\left.-\varrho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}+\frac{1}{2}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)s}i_{(\alpha)}^{rs}\right)\right].$$

Uslov diskontinuiteta mešavine, koristeći gornje definicije, biće oblika

$$\left[\!\left[\sum \rho_{(\alpha)} \eta_{(\alpha)} u_{(\alpha)} + \rho \eta (\dot{\mathcal{Y}} - u) - \frac{q^I}{\theta} \right]\!\right] \geq 0 . \tag{3.4.58.}$$

U daljoj primeni pogodnije je koristiti funkciju slobodne energije α-og sastojka $\Psi_{(\alpha)}$, umesto unutrašnje energije α-og sastojka $\epsilon_{(\alpha)}$. Te veličine su vezane sledećom relacijom

$$\Psi_{(\alpha)} = \epsilon_{(\alpha)} - \theta \eta_{(\alpha)} . \tag{3.4.59.}$$

Ako iskoristimo ovu relaciju i (3.4.4o.), iz (3.4.54.) dobićemo entropijsku nejednakost α-og sastojka mešavine u obliku

$$\begin{aligned} & -\rho_{(\alpha)} (\grave{\Psi}_{(\alpha)} + \grave{\theta} \eta_{(\alpha)}) + \underset{\sim}{t}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{Y}} + \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \mathcal{Y}} + (\underset{\sim}{\bar{t}}^{r}_{(\alpha)} - \lambda^r \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}) \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + \\ & + \frac{q_{(\alpha)}}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{Y}} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \left(\tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)}\right) + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} \geq 0 , \end{aligned} \tag{3.4.6o.}$$

koja se može napisati i u razvijenom obliku

$$\begin{aligned} & -\rho_{(\alpha)} (\grave{\Psi}_{(\alpha)} + \grave{\theta} \eta_{(\alpha)}) + t^{k}_{(\alpha)} \left(\frac{\delta v_{(\alpha)k}}{\delta \mathcal{Y}} + \nu_{(\alpha)rk} \lambda^r \right) + t^{rm}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu_{(\alpha)mr}}{\delta \mathcal{Y}} + \\ & + (\bar{t}^{rk}_{(\alpha)} - 2 \lambda^r t^{k}_{(\alpha)}) \nu_{(\alpha)(kr)} + \frac{q_{(\alpha)}}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{Y}} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \left(\tfrac{1}{2} v^2_{(\alpha)} - \Psi_{(\alpha)} \right) + \\ & + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)kr} \nu_{(\alpha)ks} \geq 0 . \end{aligned} \tag{3.4.61.}$$

3.5. MIKROMORFNA TEORIJA ŠTAPA PRVOG STEPENA

Za primenu opštih lokalnih zakona balansa na specijalne klase materijala, tzv. mikropolarne materijale, u specijalnom slučaju kod jednodimenzionalnih tela, odnosno štapova, i odredjivanje odgovarajućih konstitutivnih jednačina, potrebne su nam jednačine mikromorfne teorije štapa prvog stepena, koje su date sledećim sistemom jednačina:

Konzrvacija mase α-og sastojka mešavine

(3.5.1.)
$$\grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)}$$
$$[\![\rho_{(\alpha)} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 .$$

Konzervacija tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine

(3.5.2.)
$$\rho_{(\alpha)} \left(\overline{i^{k}_{(\alpha)}}^{\,\grave{}} - \nu^{k}_{(\alpha) r} \, i^{r}_{(\alpha)} \right) = \rho \left(\hat{\beta}^{k}_{(\alpha)} - \hat{\beta}_{(\alpha)} \, i^{k}_{(\alpha)} \right)$$
$$[\![\rho_{(\alpha)} \, i^{r}_{(\alpha)} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0$$

(3.5.3.)
$$\rho_{(\alpha)} \left(\overline{i^{kl}_{(\alpha)}}^{\,\grave{}} - \nu^{k}_{(\alpha) r} \, i^{rl}_{(\alpha)} - \nu^{l}_{(\alpha) r} \, i^{kr}_{(\alpha)} \right) = \rho \left(\hat{\beta}^{kr}_{(\alpha)} - \hat{\beta}_{(\alpha)} \, i^{kr}_{(\alpha)} \right)$$
$$[\![\rho_{(\alpha)} \, i^{kl}_{(\alpha)} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 .$$

Konzervacija količine kretanja α-og sastojka mešavine

(3.5.4.)
$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} + \rho_{(\alpha)} (\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}) = \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$$
$$[\![\underset{\sim}{t}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} (\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u)]\!] = 0 .$$

Konzervacija momenta količine kretanja α-og sastojka mešavine

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}^{l}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} + \lambda^{l} \underset{\sim}{t}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}^{l}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} \underset{\sim}{f}^{l}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{\grave{\mathcal{C}}}^{l}_{(\alpha)} = 0. \tag{3.5.5.}$$

$$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}^{l}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} (i^{l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + i^{kl}_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)k})(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u) \right]\!\right] = 0 ,$$

gde je

$$\underset{\sim}{\grave{\mathcal{C}}}^{l}_{(\alpha)} = \rho(\hat{\beta}^{l}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}) + \rho_{(\alpha)} i^{l}_{(\alpha)} \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} i^{kl}_{(\alpha)} (\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\alpha)k} + \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \nu^{r}_{(\alpha)k}).$$

Balans energije α-og sastojka mešavine

$$\rho_{(\alpha)} \grave{\epsilon}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} - \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \mathcal{S}} - (\underset{\sim}{\bar{t}}^{r}_{(\alpha)} - \lambda^{r} \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}) \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} - \frac{\partial q_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{S}} - \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)} =$$

$$= \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} (\tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \epsilon_{(\alpha)}) + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} \tag{3.5.6.}$$

$$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + q_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)} (\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} i^{rs}_{(\alpha)})(\grave{\mathcal{S}}_{(\alpha)} - u) \right]\!\right] = 0.$$

3.6. MIKROPOLARNA TEORIJA ŠTAPA

Mikropolarna teorija je specijalni slučaj mikromorfne teorije, kao što su i mikropolarni materijali specijalna klasa mikromorfnih materijala, koji pokazuju mikrorotacione efekte, što znači da se mikropomeranja sastoje samo od rotacije.

U ovom slučaju je giracioni tenzor antisimetričan, tj,

$$\nu_{(\alpha)kl} = -\nu_{(\alpha)lk} . \tag{3.6.1.}$$

Vektor

(3.6.2.) $$\nu_{(\omega)m} = \frac{1}{2}\epsilon_{mkr}\nu_{(\omega)}^{kr}, \quad \nu_{(\omega)}^{kr} = -\epsilon^{krm}\nu_{(\omega)m}$$

odredjuje brzinu rotacije materijalne tačke mikropolarnog tela.

Ako pretpostavimo da je

(3.6.3.) $$i_{(\omega)}^{k} = 0$$

što fizički znači da se centar mase makroelementa nalazi u istoj tački, onda ćemo imati da je

(3.6.4.) $$\grave{\underset{\sim}{\sigma}}{}^{l}_{(\omega)} = \rho_{(\omega)}\dot{i}^{kl}_{(\omega)}(\grave{\underset{\sim}{\nu}}_{(\omega)k} + \underset{\sim}{\nu}_{(\omega)r}\nu^{r}_{(\omega)k}) + \rho(\hat{\beta}^{l}_{(\omega)}\underset{\sim}{v}_{(\omega)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\omega)}\underset{\sim}{\nu}_{(\omega)r}),$$

ili u komponentalnom obliku

(3.6.5.) $$\grave{\sigma}^{lm}_{(\omega)} = \rho_{(\omega)}\grave{\overline{\dot{i}^{kl}_{(\omega)}\nu^{m}_{(\omega)k}}} - \rho_{(\omega)}\dot{i}^{rk}_{(\omega)}\nu^{l}_{(\omega)k}\nu^{m}_{(\omega)r} + \rho(\hat{\beta}^{l}_{(\omega)}v^{k}_{(\omega)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\omega)}\nu_{(\omega)rk}),$$

odakle sledi da je

(3.6.6.) $$\epsilon_{lmk}\grave{\sigma}^{lm}_{(\omega)} = \rho_{(\omega)}\grave{\overline{(\dot{i}^{p}_{(\omega)p}g_{kl} - \dot{i}_{(\omega)kl})\nu^{l}_{(\omega)}}} + \rho\epsilon_{lmk}(\hat{\beta}^{l}_{(\omega)}v^{k}_{(\omega)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\omega)}\nu_{(\omega)rk}),$$

gde je ϵ_{lmk} Ričijev tenzor alternacije i gde smo koristili (3.6.2.).

Ako uvedemo oznaku

(3.6.7.) $$\dot{j}_{(\omega)kl} = \dot{i}^{p}_{(\omega)p}g_{kl} - i_{(\omega)kl}$$

imaćemo da je

(3.6.8.) $$\dot{j}_{(\omega)kl}\nu^{l}_{(\omega)} = \sigma_{(\omega)k},$$

odnosno

$$\rho_{(\alpha)}\grave{\sigma}_{(\alpha)k} = \rho_{(\alpha)}\overline{\grave{j}_{(\alpha)kl}\nu^{l}_{(\alpha)}} = \rho_{(\alpha)}\left(i^{p}_{(\alpha)p}\nu_{(\alpha)k} - i^{p}_{(\alpha)k}\nu_{(\alpha)p}\right) =$$
(3.6.9.)
$$= \varepsilon_{lmk}\grave{\sigma}^{lm}_{(\alpha)} - \rho\,\varepsilon_{lmk}\left(\hat{\beta}^{l}_{(\alpha)}v^{k}_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\alpha)}\nu_{(\alpha)rk}\right).$$

Pri daljem radu koristićemo sledeću relaciju

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}^{l}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} = \underset{\sim}{t}^{l}_{(\alpha),k}\frac{\partial x^{k}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} = \left(t^{lm}_{(\alpha)}\underset{\sim}{g}_{m}\right)_{,k}\frac{\partial x^{k}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} =$$
(3.6.1o.)
$$= t^{lm}_{(\alpha),k}\underset{\sim}{g}_{m}\frac{\partial x^{k}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} = \frac{\delta t^{lm}_{(\alpha)}}{\delta \varphi}\underset{\sim}{g}_{m}.$$

Ako u mikromorfnoj teoriji prvog stepena iskoristimo (3.6.3.), dobićemo sledeći sistem jednačina mikropolarne teorije:

Konzervacija mase α-og sastojka mešavine

$$\grave{\rho}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)}\frac{\partial \grave{\varphi}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}$$
(3.6.11.)
$$\left[\!\left[\rho_{(\alpha)}\left(\grave{\varphi}_{(\alpha)} - u\right)\right]\!\right] = 0 .$$

Konzervacija tenzora mikroinercije α-og sastojka mešavine

$$\rho_{(\alpha)}\left(\overline{\grave{i}^{kl}_{(\alpha)}} - \nu^{k}_{(\alpha)r}i^{rl}_{(\alpha)} - \nu^{l}_{(\alpha)r}i^{kr}_{(\alpha)}\right) = \rho\left(\hat{\beta}^{kr}_{(\alpha)} - \hat{\beta}_{(\alpha)}i^{kr}_{(\alpha)}\right)$$
(3.6.12.)
$$\left[\!\left[\rho_{(\alpha)}i^{kl}_{(\alpha)}\left(\grave{\varphi}_{(\alpha)} - u\right)\right]\!\right] = 0.$$

Balans količune kretanja α-og sastojka mešavine

$$\frac{\partial \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} + \rho_{(\alpha)}\left(\underset{\sim}{f}_{(\alpha)} - \grave{\underset{\sim}{v}}_{(\alpha)}\right) = \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$$
(3.6.13.)
$$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\left(\grave{\varphi}_{(\alpha)} - u\right)\right]\!\right] = 0.$$

Balans energije α-og sastojka mešavine

$$\rho_{(\alpha)}\grave{\epsilon}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \underset{\sim}{\lambda}\times\underset{\sim}{\nu}\right) - \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial q_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \rho_{(\alpha)}h_{(\alpha)} =$$
(3.6.14.)
$$= \rho\hat{\beta}_{(\alpha)}\left(\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \epsilon_{(\alpha)}\right) + \tfrac{1}{2}\rho\hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}$$
$$\left[\!\left[\underset{\sim}{t}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \underset{\sim}{t}^{r}_{(\alpha)}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} + q_{(\alpha)} - \rho_{(\alpha)}\left(\epsilon_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}\underset{\sim}{v}_{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}\underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s}i^{rs}_{(\alpha)}\right)\left(\grave{\varphi}_{(\alpha)} - u\right)\right]\!\right] = 0,$$

$$\lambda^r \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} = \lambda_r \nu^{kr}_{(\alpha)} \underset{\sim}{g}_k = -\underset{\sim}{\lambda} \times \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)}$$

gde je

$$\underset{\sim}{\bar{t}}^r_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} = \bar{t}^{rm}_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)rm} = 0 ,$$

obzirom na (3.6.1.), (3.6.2.) i

3.6.15.) $$t'^{kl}_{(\alpha)} = t'^{lk}_{(\alpha)} \Rightarrow \bar{t}^{kl}_{(\alpha)} dv = \int_{dv} t'^{kl}_{(\alpha)} dv' = \bar{t}^{lk}_{(\alpha)} .$$

onzervacija momenta količine kretanja dobija se iz $(3.5.5.)_1$, ko-
isteći (3.6.1o.) u komponentalnom obliku

3.6.16.) $$\frac{\delta t^{lm}_{(\alpha)}}{\delta \varphi} + \lambda^l t^m_{(\alpha)} - \bar{t}^{lm}_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} f^{lm}_{(\alpha)} - \grave{\sigma}^{lm}_{(\alpha)} = 0 .$$

ko pomnožimo ovu jednačinu sa ϵ_{lmk}, što je ekvivalentno operaciji
iredjivanja njenog antisimetričnog dela, koristeći oznake

.6.17.) $$\mathcal{M}_{(\alpha)k} = \epsilon_{lmk} t^{lm}_{(\alpha)} , \quad l_{(\alpha)k} = \epsilon_{lmk} f^{lm}_{(\alpha)}$$

(3.6.9.), dobićemo zakon balansa momenta količine kretanja u obli-

.6.18.) $$\frac{\delta \mathcal{M}_{(\alpha)k}}{\delta \varphi} + \epsilon_{lmk} \lambda^l t^m_{(\alpha)} + \rho_{(\alpha)} l_{(\alpha)k} = \rho_{(\alpha)} \grave{\sigma}_{(\alpha)k} + \rho \epsilon_{lmk} \left(\hat{\beta}^l_{(\alpha)} v^k_{(\alpha)} + \hat{\beta}^{kl}_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)rk} \right) .$$

S obzirom da član $\underset{\sim}{t}^r_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \varphi}$ u (3.6.14.) možemo napisati u
ugom obliku

.6.19.) $$\underset{\sim}{t}^r_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r}}{\partial \varphi} = \underset{\sim}{t}^r_{(\alpha)} \frac{\delta \nu_{(\alpha)rm}}{\delta \varphi} \underset{\sim}{g}^m = t^{rm}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu_{(\alpha)mr}}{\delta \varphi} = -\epsilon_{mrk} t^{rm}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu^k_{(\alpha)}}{\delta \varphi} =$$
$$= \epsilon_{rmk} t^{rm}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu^k_{(\alpha)}}{\delta \varphi} = \mathcal{M}_{(\alpha)k} \frac{\delta \nu^k_{(\alpha)}}{\delta \varphi} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} ,$$

čemu je iskorišćeno (3.6.2.) i (3.6.17.), tada je novi oblik
ansa energije α-og sastojka mešavine

6.2o.) $$\rho_{(\alpha)} \grave{\epsilon}_{(\alpha)} - \underset{\sim}{t}_{(\alpha)} \left(\frac{\partial \underset{\sim}{v}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \underset{\sim}{\lambda} \times \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)} \right) - \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{(\alpha)} \frac{\partial \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial q_{(\alpha)}}{\partial \varphi} - \rho_{(\alpha)} h_{(\alpha)} =$$
$$= \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \left(\frac{1}{2} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} \underset{\sim}{v}_{(\alpha)} - \epsilon_{(\alpha)} \right) + \frac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)r} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)s} .$$

3.7. KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

Da bismo imali odredjen sistem jednačina, mora da postoji onoliko jednačina koliko i promenljivih. U mikromorfnim jednačinama balansa α-og sastojka promenljive su

$$
\begin{aligned}
& t^{kl}_{(\alpha)},\ t^{k}_{(\alpha)},\ 2^{k}_{(\alpha)},\ \Psi_{(\alpha)};\ \eta_{(\alpha)} \\
& x_{(\alpha)k},\ \chi_{(\alpha)kK},\ \theta \\
(3.7.1.)\qquad & \dot{i}^{kl}_{(\alpha)},\ \rho_{(\alpha)} \\
& \nu^{lm}_{(\alpha)},\ v^{l}_{(\alpha)},\ \epsilon_{(\alpha)},\ \grave{\rho}_{(\alpha)},\ \grave{v}^{l}_{(\alpha)} \\
& f^{l}_{(\alpha)},\ h_{(\alpha)},\ t
\end{aligned}
$$

Pretpostavlja se da su promenljive u $(3.7.1.)_5$ zadate, dok su one u $(3.7.1.)_4$ odredjene pomoću preostalih promenljivih. Promenljive u $(3.7.1.)_3$ date su sa (3.4.4.) i (3.4.1o.) za p=2. Za kretanje i temperaturu u $(3.7.1.)_2$, pretpostavlja se da su nezavisno promenljive, jer ne zavise od procesa. Preostale promenljive u $(3.7.1.)_1$ su nezavisno promenljive.

U $(3.7.1.)_2$ postoji (12n+1) promenljivih, gde je $\alpha = 1,2,\dots n$ i još 17n promenljivih u $(3.7.1.)_1$, što ukupno daje (29n+1) promenljivih. Koristeći jednačinu balansa količine kretanja za α-ti sastojak (3.4.22.), jednačinu balansa momenata količine kretanja za α-ti sastojak (3.4.29.) za p=1, kao i jednačinu balansa energije za mešavinu (3.4.42.), imaćemo (12n+1) jednačina. Ako pišemo konstitutivnu jednačinu za svaku zavisno promenljivu kao funkciju nezavisno promenljivih, imaćemo još 17n jednačina, što je ukupno (29n+1) jednačina za (29n+1) promenljivih, čime je sistem jednačina odredjen.

Za mikromorfnu teoriju mešavina opšti oblik konstitutivne jednačine je

$$\Psi_{(\alpha)}(S_{(\alpha)},t)=\Psi_{(\alpha)}\left\{u_{(\alpha-\beta)k},\frac{\delta x_{(\gamma)k}}{\delta S_{(\gamma)}},\chi_{(\gamma)kK},\frac{\delta \chi_{(\gamma)kK}}{\delta S_{(\gamma)}},\Lambda_{(\alpha)K},\theta,S_{(\alpha)}\right\} \tag{3.7.2.}$$

$$\alpha=1,2,\dots,n \quad , \quad \beta=1,2,\dots)\alpha(\dots,n \, .$$

Konstitutivnim jednačinama se nameću ograničenja principom objektivnosti, čime se zahteva da konstitutivna funkcija bude invarijantnog oblika unutar podesne grupe ortogonalnih transformacija Q_{kl} prostornog koordinatnog sistema, tj.

$$\begin{aligned}\Psi_{(\alpha)}&\left\{u_{(\alpha-\beta)k},\frac{\delta x_{(\gamma)k}}{\delta S_{(\gamma)}},\chi_{(\gamma)kK},\frac{\delta \chi_{(\gamma)kK}}{\delta S_{(\gamma)}},\Lambda_{(\alpha)K},\theta,S_{(\alpha)}\right\}=\\ &=\Psi_{(\alpha)}\left\{Q_{kl}u_{(\alpha-\beta)k},Q_{kl}\frac{\delta x_{(\gamma)k}}{\delta S_{(\gamma)}},Q_{kl}\chi_{(\gamma)kK},Q_{kl}\frac{\delta \chi_{(\gamma)kK}}{\delta S_{(\gamma)}},\Lambda_{(\alpha)K},\theta,S_{(\alpha)}\right\}\end{aligned} \tag{3.7.3.}$$

gde je $u_{(\alpha-\beta)k}$ relativni vektor mikropremeštanja dat sa

$$u_{(\alpha-\beta)k}=u_{(\alpha)k}-u_{(\beta)k} \tag{3.7.4.}$$

i gde je prema definiciji

$$\begin{aligned}u_{(\alpha)k}&=x_{(\alpha)k}-X_{(\alpha)K}\delta_{Kk}\\ u_{(\beta)k}&=x_{(\beta)k}-X_{(\beta)K}\delta_{Kk}\,.\end{aligned} \tag{3.7.5.}$$

Uslov (3.7.3.), za skalarnu vrednost funkcije vektorskih promenljivih $\Psi_{(\alpha)}(b_k^{(r)})$, r=1,2,...,r_o , k=1,2,3 , pretpostavlja da je

$$\Psi_{(\alpha)}(b_k^{(r)})=\Psi_{(\alpha)}(Q_{kl}b_k^{(r)})=\Psi_{(\alpha)}(B^{(pr)}) \tag{3.7.6.}$$

$$p=1,2,3 \quad , \quad r=1,2,\dots,r_o \geq 3$$

gde $B^{(pr)}$ sadrži jedan nezavisan skup svih mogućih skalarnih proizvoda formiranih od vektora $b_k^{(r)}$, tj.

$$B^{(pr)}\equiv b_k^{(p)}b_k^{(r)} \quad , \quad p=1,2,3 \quad , \quad r=1,2,\dots,r_o\geq 3 \tag{3.7.7.}$$

i kako je $\quad b_k^{(r)} = \sum_p B^{(pr)^{-1}(p)} b_k \quad , \quad b_k^{(s)} = \sum_q B^{(qs)^{-1}(q)} b_k$

to su preostali skalarni proizvodi

$$(3.7.8.) \qquad b_k^{(r)} b_k^{(s)} = \sum_{p,q=1}^{3} B^{(pr)} B^{(qs)} B^{-1(pq)} \quad , \quad r,s = 1,2,\dots,r_o \,.$$

Entropijska nejednakost takodje stavlja ograničenja konstitutivnim jednačinama. Pošto, zbog odredjenosti sistema jednačina, može biti korišćena samo jednačina energije za mešavinu, to moramo koristiti entropijsku nejednakost za mešavinu u razvijenom obliku (3.4.6o.), tj.

$$(3.7.9.) \qquad \begin{aligned} &\sum_\alpha \Big\{ -\rho_{(\alpha)} \big(\dot{\Psi}_{(\alpha)} + \dot{\theta}\eta_{(\alpha)} \big) + t^k_{(\alpha)} \Big(\frac{\delta v_{(\alpha)k}}{\delta \mathcal{S}} + \nu_{(\alpha)rk} \lambda^r \Big) + t^{rw}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu_{(\alpha)wr}}{\delta \mathcal{S}} + \\ &+ \big(\bar{t}^{rk}_{(\alpha)} - 2\lambda^r t^k_{(\alpha)} \big) \nu_{(\alpha)(kr)} + \frac{q_{(\alpha)}}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{S}} + \rho \hat{\beta}_{(\alpha)} \big(\tfrac{1}{2} v^2_{(\alpha)} + \Psi_{(\alpha)} \big) + \tfrac{1}{2} \rho \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)kr} \nu_{(\alpha)ks} \Big\} \geq 0, \end{aligned}$$

Pri izvodjenju konstitutivnih jednačina mi ćemo se zadržati na slučaju mikropolarne mešavine, kao specijalne klase mikromorfne mešavine, isključujući pri tom postojanje hemijskih reakcija. Tada je

$$(3.7.1o.) \qquad \nu_{(\alpha)(kr)} = 0 \quad , \quad \hat{\beta}_{(\alpha)} = 0 \quad , \quad \hat{\beta}^{rs}_{(\alpha)} = 0 \,.$$

Pošto je sada tenzor $\chi_{(\alpha)kK}$ ortogonalan, što znači da ima tri medjusobno nezavisne koordinate, to se broj promenljivih u $(3.7.1.)_2$ smanjio, tako da ih je sada (6n+1), odnosno sa 17n promenljivih iz $(3.7.1.)_1$ ukupno (23n+1) promenljivih. Koristeći jednačine balansa količine kretanja (3.6.13.), momenta količine kretanja (3.6.18.) α-og sastojka mikropolarne mešavine i jednačinu balansa energije mešavine, imaćemo (6n+1) jednačina, što zajedno sa preostalih 17n jednačina daje ukupno (23n+1) jednačina.

Koristeći (3.7.1o.), iz (3.7.9.) sledi

$$(3.7.11.) \qquad \begin{aligned} &\sum_\alpha \Big\{ -\rho_{(\alpha)} \big(\dot{\Psi}_{(\alpha)} + \dot{\theta}\eta_{(\alpha)} \big) + t^k_{(\alpha)} \Big(\frac{\delta v_{(\alpha)k}}{\delta \mathcal{S}} + \nu_{(\alpha)rk} \lambda^r \Big) + \\ &\qquad + t^{rw}_{(\alpha)} \frac{\delta \nu_{(\alpha)wr}}{\delta \mathcal{S}} + \frac{q_{(\alpha)}}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{S}} \Big\} \geq 0, \end{aligned}$$

odnosno

$$-\sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)}\left(\dot{\Psi}_{(\alpha)} + \dot{\theta}\,\eta_{(\alpha)}\right) + \sum_{\gamma}\Big\{ t^{k}_{(\gamma)}\left(\frac{\delta v_{(\gamma)k}}{\delta \mathcal{S}} + \nu_{(\gamma)rk}\lambda^{r}\right) + t^{rw}_{(\gamma)}\frac{\delta \nu_{(\gamma)wr}}{\delta \mathcal{S}} + \frac{q_{(\gamma)}}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{S}}\Big\} \geq 0. \tag{3.7.12.}$$

Ako u (3.7.12.) unesemo (3.7.2.) i iskoristimo pravilo vezanog diferenciranja, dobićemo

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\left(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \theta} + \eta_{(\alpha)}\right)\dot{\theta} + \sum_{\alpha}\Big\{\frac{q_{(\alpha)}}{\theta} - \rho_{(\alpha)}\left(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \theta} + \eta_{(\alpha)}\right)u_{(\alpha)}\Big\}\frac{\partial \theta}{\partial \mathcal{S}} + \\
&+\sum_{\gamma}\left(t^{k}_{(\gamma)} - \sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}}J_{(\gamma)}\right)\frac{\delta v_{(\gamma)k}}{\delta \mathcal{S}} + \\
&+\sum_{\gamma}\left(t^{rk}_{(\alpha)} - \sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K}J_{(\gamma)}\right)\frac{\delta \nu_{(\gamma)kl}}{\delta \mathcal{S}} - \\
&-\sum_{\gamma}\Big[\sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\left(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K,S} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K}\right) - t^{l}_{(\gamma)}\lambda^{k}\Big]\nu_{(\gamma)kl} - \\
&-\sum_{\alpha}\sum_{\gamma}\rho_{(\alpha)}J^{-1}_{(\gamma)}w_{(\alpha-\gamma)}\Big(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}}x_{(\gamma)k,S^{2}} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}}\chi_{(\gamma)kK,S^{2}} + \\
&\qquad + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK}}\chi_{kK,S} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial u_{(\alpha-\gamma)k}}\Lambda_{(\alpha)K}\delta_{Kl}\Big) \geq 0\,,
\end{aligned} \tag{3.7.13.}$$

$$\sum_{\gamma}\Big[\sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\left(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K,S} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K}\right) + t^{k}_{(\gamma)}\lambda^{l}\Big]_{[kl]} = 0\,,$$

gde smo koristili sledeće relacije

$$\begin{aligned}
J_{(\gamma)} &\equiv \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial S_{(\gamma)}}\left(S_{(\gamma)}, t\right)\\
J^{-1}_{(\gamma)} &= \frac{\partial S_{(\gamma)}}{\partial \mathcal{S}}\\
\lambda^{k} &= -J^{-1}_{(\gamma)}\frac{\partial x^{k}}{\partial S_{(\gamma)}}\\
\frac{D^{(\alpha)}}{Dt}\mathcal{S}_{(\gamma)} &= \dot{\mathcal{S}}_{(\gamma)} = w_{(\alpha-\gamma)}
\end{aligned} \tag{3.7.14.}$$

$$\frac{D^{(\alpha)}}{Dt} x_{(\beta)l} = v_{(\alpha)l} - v_{(\beta)l} = \lambda_l w_{(\alpha-\beta)}$$

$$\grave{\Psi}_{(\alpha)}(S_{(\alpha)},t) = \sum_{i,\gamma} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \phi_{(\gamma,i)}} \left\{ \frac{D^{(\gamma)}\phi_{(\gamma,i)}}{Dt} + \phi_{(\gamma,i),S} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)} \right.$$

$$\grave{\theta} = \dot{\theta} + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} u_{(\alpha)}$$

$$\overline{x_{(\gamma)k,S}}^{\,\grave{}} = v_{(\gamma)k,S} + x_{(\gamma)k,S^2} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)}$$

$$\overline{\chi_{(\gamma)kK}}^{\,\grave{}} = \nu_{(\gamma)kl} \chi^{l}_{(\gamma)\cdot K} + \chi_{(\gamma)kK,S} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)}$$

$$\overline{\chi_{(\gamma)kK,S}}^{\,\grave{}} = \nu_{(\gamma)kl,S} \chi^{l}_{(\gamma)\cdot K} + \nu_{(\gamma)kl} \chi^{l}_{(\gamma)\cdot K,S} + \chi_{(\gamma)kK,S^2} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)}$$

$$\overline{u_{(\alpha-\gamma)k}}^{\,\grave{}} = \Lambda_{(\gamma)L} \delta_{Ll} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)} .$$

Pošto su $\dot{\theta}$, $\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}$, $\frac{\delta v_{(\gamma)k}}{\partial \varphi}$, $\nu_{(\gamma)kl}$, $\frac{\delta \nu_{(\gamma)kl}}{\delta \varphi}$ i $\chi_{(\gamma)kK,S^2}$ nezavisno promenljive, tada množitelji uz ove promenljive moraju isčeznuti, a to daje potrebne i dovoljne uslove da konstitutivne jednačine oblika (3.7.2.) budu termodinamički prihvatljive, tj.

$$\eta_{(\alpha)} = - \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \theta}$$

$$\sum_{\alpha} q_{(\alpha)} = 0$$

$$t^{k}_{(\gamma)} = \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}} J_{(\gamma)}$$

$$t^{lk}_{(\gamma)} = \rho_{(\gamma)} \frac{\partial \Psi_{(\gamma)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}} \chi^{l}_{(\gamma)\cdot K} J_{(\gamma)} \tag{3.7.15.}$$

$$t^{r}_{(\gamma)} \lambda^{l} = \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}} J_{(\gamma)} \lambda^{l} = \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}} x^{l}_{(\gamma),S}$$

$$\sum_{\alpha} \sum_{\gamma} \rho_{(\alpha)} J^{-1}_{(\gamma)} w_{(\alpha-\gamma)} \Big(\frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\gamma)k,S}} x_{(\gamma)k,S^2} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK,S}} \chi_{(\gamma)kK,S^2} +$$

$$+ \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \chi_{(\gamma)kK}} \chi_{(\gamma)kK,S} + \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial u_{(\alpha-\gamma)k}} \Lambda_{(\gamma)K} \delta_{Kl} \Big) = 0$$

$$\sum_{\gamma}\Big[\sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\Big(\frac{\partial\Psi_{(\alpha)}}{\partial\chi_{(\gamma)kK,S}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K,S}+\frac{\partial\Psi_{(\alpha)}}{\partial\chi_{(\gamma)kK}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K}\Big)+t^{k}_{(\gamma)}\lambda^{l}\Big]_{[kl]}=0.$$

Ako pretpostavimo sledeću definiciju

$$\rho\Psi^{I}=\sum_{\alpha}\rho_{(\alpha)}\Psi_{(\alpha)}\,, \tag{3.7.16.}$$

onda koristeći $(3.7.15.)_5$, $(3.7.15.)_7$ postaje

$$\sum_{\gamma}\Big(\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\chi_{(\gamma)kK,S}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K,S}+\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial\chi_{(\gamma)kK}}\chi^{l}_{(\gamma)\cdot K}+\frac{\partial\Psi^{I}}{\partial x_{(\gamma)k,S}}x^{l}_{(\gamma),S}\Big)_{[kl]}=0. \tag{3.7.17.}$$

Integrali koji zadovoljavaju uslov objektivnosti za mikropolarnu mešavinu su

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{(\alpha)K}&=x^{k}_{(\alpha),S}\chi_{(\alpha)kK}\\
\mathcal{J}_{(\alpha-\mu)K}&=x^{k}_{(\alpha),S}\chi_{(\mu)kK}\\
\Gamma_{(\alpha)KL}&=\chi^{k}_{(\alpha)\cdot K,S}\chi_{(\alpha)kL}\\
\Gamma_{(\alpha-\mu)KL}&=\chi^{k}_{(\alpha)\cdot K,S}\chi_{(\mu)kL}\\
H_{(\alpha-\mu)KL}&=\chi_{(\alpha)kK}\chi^{k}_{(\mu)\cdot L}\,.
\end{aligned} \tag{3.7.18.}$$

Množeći $(3.7.18.)_5$ sa $\chi^{lK}_{(\alpha)}$, dobićemo

$$\chi_{(\alpha)kK}\chi^{k}_{(\mu)\cdot L}\chi^{lK}_{(\alpha)}=H_{(\alpha-\mu)KL}\chi^{lK}_{(\alpha)}.$$

Kako su

$$\begin{aligned}
\chi^{k}_{(\mu)\cdot L}&=H_{(\alpha-\mu)KL}\chi^{kK}_{(\alpha)}\\
\chi_{(\mu)kL}&=H_{(\alpha-\mu)KL}\chi^{K}_{(\alpha)k}
\end{aligned} \tag{3.7.19.}$$

tada je

$$\chi_{(\mu)kK}\chi^{k}_{(\mu)L} = \left(H_{(\alpha-\mu)MK}\chi^{M}_{(\alpha)k}\right)\left(H_{(\alpha-\mu)NL}\chi^{kN}_{(\alpha)}\right)$$

odnosno

(3.7.20.) $$\delta_{KL} = H_{(\alpha-\mu)MK}H_{(\alpha-\mu)NL}\chi^{kN}_{(\alpha)}\chi^{M}_{(\alpha)k} = \delta^{MN}H_{(\alpha-\mu)MK}H_{(\alpha-\mu)NL}$$

odakle se vidi da je simetrični deo $H_{(\alpha-\mu)MK}$ u funkciji njegovog antisimetričnog dela, tj.

(3.7.21.) $$H_{(\alpha-\mu)(MK)} = H_{(\alpha-\mu)(MK)}\left(H_{(\alpha-\mu)L}\right)$$

jer je

$$H_{(\alpha-\mu)M} = \frac{1}{2}\epsilon_{MKL}H_{(\alpha-\mu)KL} = \frac{1}{2}\epsilon_{MKL}\chi_{(\alpha)kK}\chi^{k}_{(\mu)\cdot L}$$

odnosno

(3.7.22.) $$H_{(\alpha-\mu)[KL]} = \epsilon_{KLM}H_{(\alpha-\mu)M}$$

Na sličan način se pokazuje da se i $(3.7.18.)_2$ i $(3.7.18.)_4$ mogu izraziti preko antisimetričnog dela $H_{(\alpha-\mu)KL}$, tj.

(3.7.23.)
$$\mathcal{T}_{(\alpha-\mu)N} = \mathcal{T}_{(\alpha-\mu)N}\left(\mathcal{T}_{(\mu)K}, H_{(\alpha-\mu)K}\right),$$

$$\Gamma_{(\alpha-\mu)NL} = \Gamma_{(\alpha-\mu)NL}\left(\Gamma_{(\mu)M}, H_{(\alpha-\mu)M}\right).$$

Na taj način će rešenje saglasno (3.7.7.) i (3.7.8.), biti oblika

(3.7.24.) $$\Psi^{I} = \Psi^{I}\left(u_{(\alpha-\mu)k}, \mathcal{T}_{(\gamma)k}, \Gamma_{(\gamma)K}, H_{(\alpha-\mu)K}, \Lambda_{(\gamma)K}, \vartheta\right)$$

$\gamma = 1,2,\dots,n$, $\mu = 1,2,\dots)\alpha(\dots,n$.

Zahtevajući od funkcije slobodne energije mešavine Ψ^I i funkcije slobodne energije α-og sastojka $\Psi_{(\alpha)}$ da zadovoljavaju princip objektivnosti, dobijamo dalja ograničenja nad konstitutivnim jednačinama. Ograničenje oblika (3.7.3.) može biti pretstavljeno u obliku parcijalne diferencijalne jednačine

$$\epsilon_{klm}\sum_{\gamma}\left(\frac{\partial\Psi^I}{\partial u_{(\mu-\gamma)l}}u_{(\mu-\gamma)m}+\frac{\partial\Psi^I}{\partial x_{(\gamma)l,S}}x_{(\gamma)m,S}+\frac{\partial\Psi^I}{\partial\chi_{(\gamma)lK}}\chi_{(\gamma)mK}+\frac{\partial\Psi^I}{\partial\chi_{(\gamma)lK,S}}\chi_{(\gamma)mK,S}\right)=0 \quad (3.7.25.)$$

i sa istom ovakvom jednačinom za $\Psi_{(\gamma)}$. Oduzimajući (3.7.17.) od (3.7.25.), dobićemo

$$\epsilon_{klm}\sum_{\gamma}\frac{\partial\Psi^I}{\partial u_{(\mu-\gamma)l}}u_{(\alpha-\gamma)m}=0$$

i na sličan način (3.7.26.)

$$\epsilon_{klm}\sum_{\gamma}\sum_{\mu}S_{(\gamma)}\frac{\partial\Psi_{(\gamma)}}{\partial u_{(\alpha-\mu)l}}u_{(\alpha-\mu)m}=0.$$

Ako iskoristimo (3.7.7.) i (3.7.8.), onda se rešenja gornjih jednačina mogu napisati u sledećem obliku

$$\Psi^I=\Psi^I\left(y^{(\gamma\mu)},\mathcal{T}_{(\gamma)K},\Gamma_{(\gamma)K},H_{(\beta-\mu)K},\Lambda_{(\gamma)K},\theta\right) \quad (3.7.27.)$$

$\gamma=1,2,\ldots,n$, $\mu=1,2,\ldots)\beta(\ldots,n$, $\alpha=1,2,\ldots,n$

$$\Psi_{(\alpha)}=\Psi_{(\alpha)}\left(\mathcal{F}_{(\mu)K},\mathcal{T}_{(\gamma)K},\Gamma_{(\alpha)K},H_{(\beta-\mu)K},\Lambda_{(\alpha)K},\theta\right) \quad (3.7.28.)$$

gde smo koristili (3.7.21.), (3.7.23.), (3.7.24.) i definicije

$$\mathcal{F}_{(\alpha,\alpha-\mu)K}=x_{(\alpha)kK}\,u_{(\alpha-\mu)k}\overset{def}{=\!=}\mathcal{F}_{(\mu)K} \quad (3.7.29.)$$

(3.7.30.) $$y^{(\delta\mu)} = u_l^{(\alpha-\delta)} u_l^{(\alpha-\mu)} = \mathcal{F}_K^{(\delta)} \mathcal{F}_K^{(\mu)} .$$

Ovde oznaka δ uzima tri vrednosti u cikličnom nizu α .

Kada (3.7.28.) zamenimo u (3.7.15.), dobićemo odgovarajuće konstitutivne jednačine

(3.7.31.) $$t_{(\delta)}^{k} = \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial x_{(\delta)k,S}} = J_{(\delta)} \chi_{(\delta)K}^{k} \sum_{\alpha} \rho_{(\alpha)} \frac{\partial \Psi_{(\alpha)}}{\partial \mathcal{F}_{(\delta)K}} = \rho J_{(\delta)} \chi_{(\delta)\cdot K}^{k} \frac{\partial \Psi^{I}}{\partial \mathcal{F}_{(\delta)K}}$$

(3.7.32.) $$t_{(\delta)}^{lk} = \frac{1}{2} \rho_{(\delta)0} \chi_{(\delta)lK} \chi_{(\delta)kR} \epsilon_{KRM} \frac{\partial \Psi_{(\delta)}}{\partial \Gamma_{(\delta)M}}$$

(3.7.33.) $$M_{(\delta)m} = \rho_{(\delta)0} \chi_{(\delta)mM} \frac{\partial \Psi_{(\delta)}}{\partial \Gamma_{(\delta)M}}$$

(3.7.34.) $$p_{(\delta)} = \sum_{\alpha} (\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\gamma\rho} - \delta_{\gamma\sigma} \delta_{\alpha\rho}) J_{(\rho)}^{-1} \rho_{(\sigma)}^{\cdot} \Big(\frac{\partial \Psi_{(\sigma)}}{\partial x_{(\rho)k,S}} x_{(\rho)k,S}^{2} + \frac{\partial \Psi_{(\sigma)}}{\partial \chi_{(\rho)kK}} \chi_{(\rho)kK,S} + \frac{\partial \Psi_{(\sigma)}}{\partial u_{(\sigma-\rho)k}} \Lambda_{(\rho)K} \delta_{Kl} \Big) = 0$$

PREDGOVOR

Rezultati dobijeni u ovom radu izloženi su na sastanci-
a Grupe za reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku, kojom
rilikom su mi diskusije saradnika Grupe bile od koristi, na čemu
m se zahvaljujem. Koristim priliku da se najtoplije zahvalim do-
entu Dr Jovi Jariću, koji mi je pri izradi ove teme pružio veli-
u i nesebičnu pomoć.

eograd, decembra 1976.g. Predrag Cvetković

Strana

4. ZAKLJUČAK

Ovaj rad predstavlja pokušaj da se zakoni balansa mikro-
orfne mehanike jednokomponentalnog tela proizvoljnog stepena [1]
rimene na teoriju mešavina. Uporedjujući dobijene rezultate sa ra-
ovima R.J. Twiss-a i A.C. Eringen-a [4] i [5] , lako se može iz-
esti zaključak da je njihova teorija specijalni slučaj naše. Naime,
ko se u slučaju teorije višeg stepena uzme da je p=1,2 i pretpo-
tavi da je $\dot{i}^{k}_{(\alpha)}=o$, dobija se teorija R.J. Twiss-a i A.C. Eringen-a.
edjutim, u obe teorije,u pojedinim jednačinama balansa za mešavinu,
ojavljuju se članovi koji izazivaju odstupanje od u Uvodu navedenog
izičkog principa c), koji zahteva da se kretanje mešavine opisuje
stim jednačinama kao i ~~za~~ prosto, jednokomponentalno telo, čime je
ažnost tog fizičkog principa, kada se radi o materijalima sa mikro-
trukturom, dovedena u pitanje. Isti problem je uočio N.T. Dunwoody
24] . Dok pomenuti fizički princip važi za jednačine balansa kla-
ične mešavine, dotle ne važi za mešavinu sa mikrostrukturom, jer u
om slučaju neke definisane veličine nisu invarijantne pri superpo-
iranom krutom kretanju mešavine.

S.J. Allen i K.A. Kline [14] su takodje proučavali meša-
inu sa mikrostrukturom. Oni su postulirali integralne oblike za
alans energije i entropijsku nejednakost, uvodeći u njih članove
oji su posledica mikrostrkture. Usvajajući navedeni fizički prin-
ip i koristeći pogodne definicije, izvode odgovarajuće jednačine
alansa za celokupnu mešavinu koje taj fizički princip zadovoljava-
ı. R.J. Twiss i A.C. Eringen komentarišu te njihove rezultate i
poredjujući ih sa svojima, tvrde da su oni izgubili članove koji
ezadovoljavaju postavljeni fizički princip, jer su ih u pojedinim
ednačinama balansa za sastojak sjedinili sa drugim članovima.

Za izvodjenje zakona balansa mikromorfne mešavine višeg
tepena kao celine, bitna je sledeća relacija

$$(4.1.)\quad \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{k_1\dots k_p} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)} + \sum \rho_{(\alpha)} i_{(\alpha)}^{k_1\dots k_p l} \underset{\sim}{\nu}_{(\alpha)l} = \rho\, i^{\cdot k_1\dots k_p} \underset{\sim}{\nu} + \rho\, i^{k_1\dots k_p l} \underset{\sim}{\nu}_l \,,$$

koja nije postulirana već konsekventno izvedena (1.4. Kinematika, jednačina (1.4.21.)). Iz te relacije se jasno vidi da se o srednjoj brzini mešavine može govoriti samo u paru sa srednjim tenzorom uvrtanja.

Na primer, S.J. Allen i K.A. Kline [14] postuliraju sledeću jenakost (2.11.)$_2$

$$\rho I_{ik} w_{kj} = \sum \rho^{N} I_{ik}^{N} w_{kj}^{N} , \tag{4.2.}$$

gde je w_{kj} srednji tenzor uvrtanja, a to je specijalni slučaj naše relacije kada je podvrgnemo uslovima da je p=1 i $i^{k}_{(\alpha)}$=o.

Što se tiče samog modela, naš je prostiji od modela R.J. Twiss-a i A.C. Eringen-a utoliko, što su oni, zbog načina usrednjenja odgovarajućih veličina išli na mikromikrostrukturu mešavine, a mi na mikrostrukturu. Medjutim to ne predstavlja suženje samog problema jer smo mi, primenjujući zakone balansa mikromorfne mehanike jednokomponentalnog tela [1] na teoriju mešavina sa mikrostrukturom, koristili zaključak da je krajnji rezultat takve strukture uvek srednja vrednost individualnih kretanja. Smatramo da je zbog toga naš prilaz konsekventan i da su odgovarajuće veličine daleko jednostavnije za tumačenje.

Postoji još jedna razlika izmedju naše teorije i teorije R.J. Twiss-a i A.C. Eringen-a [4]. Naime, u njihovoj teoriji je uzeta u obzir interakcija izmedju različitih sastojaka mešavine. Oni uvode jednu funkciju definisanu na površini mikroelementa kao zbir dva člana, od kojih je prvi sabirak različit od nule na svim delovima površine mikroelementa koje se dodiruju sa mikroelementima sastojka iste vrste, dok je drugi sabirak različit od nule na onim delovima površine koje se dodiruju sa mikroelementima sastojka druge vrste. Na taj način se tenzor napona koji se odnosi na γ-ti sastojak α-og mikroelementa deli na dva dela (6.1.)

$$\overset{*}{t}{}^{(\gamma\alpha)}_{kl} = t^{(\gamma\alpha)}_{kl} + \hat{t}^{(\gamma\alpha)}_{kl} , \tag{4.3.}$$

od kojih ni jedan ne može biti istovremeno biti različit od nule u istoj tački. Otuda se pojavljuje veličina definisana kao, $(6.15.)_1$

$$p_l^{(\beta)} \equiv \langle * \hat{t}_{kl}^{(\beta\alpha)} n_k^{(\beta\alpha)} * \rangle , \tag{4.4.}$$

koja se naziva silom interakcije β -og sastojka. Pošto mi nismo vršili takvo razlaganje, nismo ni mogli dobiti silu interakcije. Medjutim to će biti predmet našeg daljeg istraživanja.

Kako se problem oko važnosti fizičkog principa c) javlja i kod dvodimenzionalnog (ljuska) i jednodimenzionalnog (štap) slučaja, to bi važili isti zaključci kao i za trodimenzionalno telo. To je i bio razlog zbog čega smo se u tim slučajevima zadržali samo na teoriji za stepene p=1,2. Izuzetno smo izvodili zakone balansa momenata količine kretanja višeg stepena, da bismo došli do mikromorfne teorije štapa prvog stepena i mikropolarne teorije štapa, koju smo kasnije koristili pri izvodjenju konstitutivnih jednačina.

S obzirom da konstitutivna teorija za klasičnu mešavinu nije još dovoljno razradjena, jer osnovnu teškoću predstavlja izbor promenljivih koje figurišu u konstitutivnim pretpostavkama, mi smo se opredelili za postupak koji su za trodimenzionalno telo primenili R.J. Twiss i A.C. Erigen [5] , prilagodjavajući ga za slučaj štapa. Pri tom smo, kao u [5] , izveli konstitutivne jednačine u odsustvu hemijskih reakcija. Iako smo već zanemarili interakciju izmedju sastojaka, ipak smatramo da njihovo izostavljanje može biti opravdano u slučaju kada se radi o specijalnom modelu, odnosno o jednodimenzionalnom telu, gde se to zanemarivanje može izvršiti. Zbog toga smo pri izvodjenju konstitutivnih jednačina, član koji je vezan za interakciju izjednačili sa nulom.

U našem radu nije razmatran nijedan konkretan problem iz prakse, kao što je to bio slučaj u radovima [19] i [20] , jer nam je osnovni cilj bio da ispitamo primenu fizičkih principa koje je postavio C. Truesdell za mešavinu. Medjutim u toku daljeg rada i to će biti predmet našeg istraživanja.

Da bismo izbegli obimnost rada zbog dužine same računice, naročito kada su u pitanju jednačine balansa višeg stepena za mešavinu, u radu su izneti samo konačni rezultati.

Na kraju, uporedjujući mikromorfnu teoriju mešavina vi-
eg stepena sa klasičnim teorijama mešavina, prva se lako može
vesti na klasičnu ukoliko se eliminišu članovi koji su posledica
ikropomeranja, odakle se, s obzirom na prethodnu diskusiju, može
aključiti da su sve dosadašnje teorije specijalni slučaj te teo-
ije.

5. SPISAK OZNAKA

oznaka	
$\epsilon_{(\alpha)}$	Gustina unutrašnje energije po jedinici mase α-og sastojka
ϵ	Gustina unutrašnje energije po jedinici mase mešavine
$\epsilon_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor momenata gustine unutrašnje energije po jedinici mase α-og sastojka
$\epsilon^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor momenata gustine unutrašnje energije po jedinici mase mešavine
$\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}$	Vektor zapreminske sile α-og sastojka
$\underset{\sim}{f}$	Vektor zapreminske sile mešavine
$\underset{\sim}{f}_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_p}$	Vektor momenata zapreminske sile α-og sastojka
$\underset{\sim}{f}^{k_1 \dots k_p}$	Vektor momenata zapreminske sile mešavine
$h_{(\alpha)}$	Specifična proizvodnja toplote po jedinici zapremine α-og sastojka
h	Specifična proizvodnja toplote po jedinici zapremine mešavine
$h_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor momenata specifične proizvodnje toplote po jedinici zapremine α-og sastojka
$h^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor momenata specifične proizvodnje toplote po jedinici zapremine mešavine
$i_{(\alpha)}^{k}$	Tenzor mikroinercije α-og sastojka
i^{k}	Tenzor mikroinercije mešavine
$i_{(\alpha)}^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor mikroinercije α-og sastojka p-og reda
$i^{k_1 \dots k_p}$	Tenzor mikroinercije mešavine p-og reda
$J_{(\alpha)}$	Jakobijan α-og sastojka
$q_{(\alpha)}^{k}$	Vektor toplotnog fluksa α-og sastojka
q^{k}	Vektor toplotnog fluksa mešavine

oznaka	
$q^{kl_1\ldots l_p}_{(\alpha)}$	Tenzor momenata toplotnog fluksa α-og sastojka
$q^{kl_1\ldots l_p}$	Tenzor momenata toplotnog fluksa mešavine
$S_{(\alpha)}$	Luk krive α-og sastojka
$\underset{\sim}{t}^{k}_{(\alpha)}$	Vektor napona α-og sastojka
$\underset{\sim}{t}^{k}$	Vektor napona mešavine
$\underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}$	Vektor naponskog momenta α-og sastojka
$\bar{\underset{\sim}{t}}^{l_1\ldots l_p}_{(\alpha)}$	Vektor momenata prosečnog napona α-og sastojka
$\underset{\sim}{t}^{l_1\ldots l_p}$	Vektor naponskog momenta mešavine
$\bar{\underset{\sim}{t}}^{l_1\ldots l_p}$	Vektor momenata prosečnog napona mešavine
$\underset{\sim}{u}_{(\alpha)}$	Brzina difuzije α-og sastojka tela
$\bar{u}^{\lambda}_{(\alpha)}$	Brzina difuzije α-og sastojka ljuske
$\mathcal{U}_{(\alpha)}$	Brzina difuzije α-og sastojka štapa
$u_{(\alpha-\mu)k}$	Relativni vektor mikropremeštanja
$\underset{\sim}{v}_{(\alpha)}$	Brzina α-og sastojka tela
$\underset{\sim}{v}$	Brzina mešavine tela
$\underset{\sim}{v}^{\lambda}_{(\alpha)}$	Brzina α-og sastojka ljuske
$\underset{\sim}{v}^{\lambda}$	Brzina mešavine ljuske
$\dot{\mathcal{S}}_{(\alpha)}$	Brzina α-og sastojka štapa
$\dot{\mathcal{S}}$	Brzina mešavine štapa
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	Sastojci mešavine
δ^{KL}, δ^{kl}	Kronekerov simbol
$\underset{\sim}{\theta}_{(\alpha)}$	Difuzno obrtanje α-og sastojka
$\Lambda^{K}_{(\alpha)}$	Jedinični vektor tangente krive α-og sastojka u nedeformisanoj konfiguraciji
$\lambda^{k}_{(\alpha)}$	Jedinični vektor tangente krive α-og sastojka u deformisanoj konfiguraciji
$\underset{\sim}{\nu}^{k}_{(\alpha)}$	Giracioni tenzor (tenzor uvrtanja) α-og sastojka
$\underset{\sim}{\nu}^{k}$	Giracioni tenzor (tenzor uvrtanja) mešavine

oznaka	
$\rho_{(\alpha)}$	Gustina α-og sastojka
ρ	Gustina mešavine
$\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}$	Zapreminska promena mase α-og sastojka usled hemijskih reakcija
$\rho\hat{\beta}_{(\alpha)}^{\ell_1 \ldots \ell_p}$	Zapreminska promena mase α-og sastojka p-og reda usled hemijskih reakcija
$\Psi_{(\alpha)}$	Funkcija slobodne energije α-og sastojka
$\chi_{(\alpha),K}^{k}$	Gradijenti mikrodeformacije α-og sastojka
$\eta_{(\alpha)}$	Specifična entropija α-og sastojka
η	Specifična entropija mešavine
$\eta_{(\alpha)}^{\ell_1 \ldots \ell_p}$	Momenti specifične entropije α-og sastojka
$\eta^{\ell_1 \ldots \ell_p}$	Momenti specifične entropije mešavine

6. LITERATURA

[1] A.C.Eringen, Int. J. Engng Sci. 8, 819 (197o)

[2] J.Jarić, Mikromorfna teorija štapova

[3] J.Jarić, M.Plavšić i D.Ružić, Teorijska i primenjena MEHANIKA 1, (1975)

[4] R.J.Twiss and A.C.Eringen, Int. J. Engng Sci. 9, 1o19 (1971)

[5] R.J.Twiss and A.C.Eringen, Int. J. Engng Sci. 1o, 437 (1972)

[6] P.D.Kelly, Int. J. Engng Sci. 2, 129 (1964)

[7] C.Truesdell and R.Toupin, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik III/1 (196o)

[8] C.Truesdell, Rational Thermodynamics, (1969)

[9] A.E.Green and P.M.Naghdi, Int. J. Engng Sci. 3, 231 (1965)

[1o] A.E.Green and P.M.Naghdi, Arch. Ration. Mech. Analysis, 24 (1967)

[11] A.E.Green and P.M.Naghdi, Int. J. Engng Sci. 6, 631 (1968)

[12] A.E.Green and P.M.Naghdi, Acta Mechanica 9(197o)

[13] I.Muller, Arch. Ration. Mech. Analysis 28, 1 (1968)

[14] S.J.Allen and K.A.Kline, Z. angew. Math. Phys. 2o, 145 (1969)

[15] N.Mills and T.R.Steel, Acta Mechanica 9, (197o)

[16] M.E.Gurtin and A.S.Vargas, Arch. Ration. Mech. Analysis 43, 179 (1971)

[17] M.E.Gurtin, Arch. Ration. Mech. Analysis 43, 198 (1971)

[18] R.M.Bowen and D.J.Garcia, Arch. of Mechanics 23, 289 (1971)

[19] C.N.DeSilva and M.Siochansi, Acta Mechanica 19, 89 (1974)

[2o] M.A.Rizzi, A.B.Whitman and C.N.DeSilva, Acta Mechanica 21, 241 (1975)

[21] R.J.Atkin and R.E.Crain, Q.J Mech. appl. Math. 29, 2o9 (1976)

[22] C.B.Kafadar and A.C.Eringen, Int. J. Engng Sci. 9, 271 (1971)

[23] C.B.Kafadar, Int. J. Engng Sci. 1o, 369 (1972)

[24] N.T.Dunwoody, Z. angew. Math. Phys. 26, 1o5 (1975)