LJUBOMIR R. PROTIĆ

NEKE NOVE METODE ZA NALAŽENJE PRIBLIŽNIH REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

- doktorska disertacija-

Beograd, 1978.

SADRŽAJ

U V O D

Kao što je poznato u najrazličititijim oblastima savremene nauke i tehnike sve češće se nailazi na matematičke zadatke čija se tačna rešenja ne mogu dobiti klasičnim metodama. Zbog toga se u poslednje vreme poklanja velika pažnja numeričkoj analizi, oblasti matematike čiji je (izmedju ostalog) zadataka da razradjuje metode koje dovode do približnih rešenja takvih zadataka.

Specijalno se mnogi zadaci mehanike, astronomije, tehnike, biologije, medicine itd. opisuju izvesnim diferencijalnim jednačinama ili sistemima diferencijalnih jednačina. Našalost mali je broj tih jednačina čija se rešenja mogu naći pomoću kvadratura. Ta činjenica je uticala da se stvori i razvije čitav niz analitičkih i numeričkih metoda za nalaženje približnih rešenja takvih jednačina. Razvoj savremene elektronske računske tehnike je povećao značaj numeričkih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina, ali se tim ne umanjuje značaj metoda primenom kojih se dobijaju približna rešenja u obliku analitičkih funkcija.

Ovaj rad je posvećen proučavanju metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina. Kroz rad se provlače dve osnovne ideje:

1) Da se daju neke nove metode za diferencijalnu jednačinu

(1) $y' = f(x,y)$

sa zadatim početnim uslovom

(2) $y(x_o) = y_o$

(takodje i da se ukaže na primene tih metoda pri nalaženju približnih rešenja Košijevog zadatka za sisteme diferencijalnih jednačina) primenom kojih se brže dobijaju približna rešenja (sa istom tačnošću) nego primenom poznatih metoda;

2) Da se daju neke nove metode za specijalne diferencijalne jednačine (npr. $u'' + f(x,u) = o$ ili $u''+p(x)u' + q(x)u = r(x)$ i sisteme diferencijalnih jednačina oblika

$$(3)\quad \begin{cases} y' = f(x,z) \\ z' = \varphi(x,y) \end{cases}$$

sa zadatim početnim uslovima

$$(4)\quad y(x_o) = y_o,\ z(x_o)=z_o$$

primenom kojih se brže dobija približno rešenje nego primenom poznatih (njima sličnih) metoda.

Medju metodama koje se u radu predlažu ima i analitičkih i numeričkih. Za diferencijalne jednačine i sisteme diferencijalnih jednačina koje se u radu pominju se pretpostavlja da zadovoljavaju neki od skupa uslova koji obezbedjuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja Košijevog zadatka.

Rad je podeljen na tri glave. Glava I sadrži neke poznate metode za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina. Te metode su izložene radi komparacija sa metodima koje se predlažu u glavi II i glavi III.

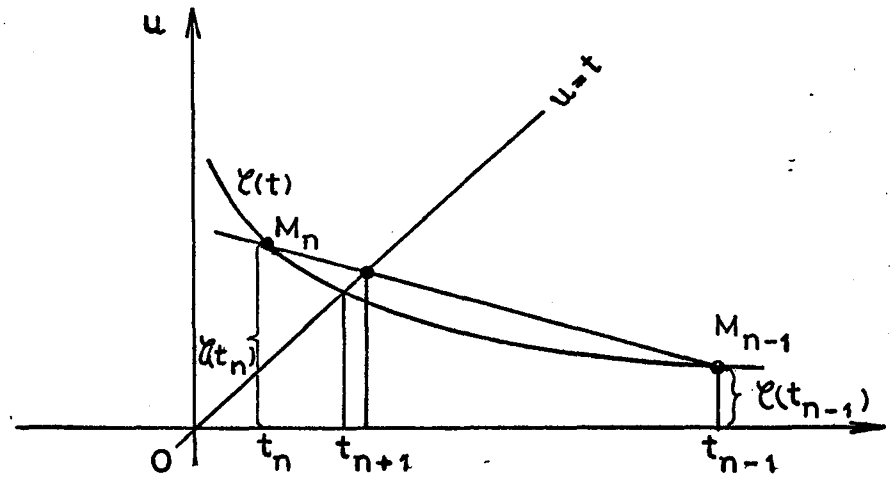
U glavi II se predlaže niz novih metoda za rešavanje zadatka (1) - (2). Sve metode koje se predlažu imaju izvesnih sličnosti sa nekim poznatim metodama za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina npr. Ojler-Košijevom metodom, Adansovom metodom, Milnovom metodom itd. Osnovna inspiracija autoru za konstrukciju tih metoda je dvostruka.

Prvi blok metoda u svojoj suštini sadrži linearnu interpolaciju i inspirisan je jednim ubrzanim postupkom za nalaženje približnih rešenja algebarskih i transcedentnih jednačina (videti [16]). Taj postupak bi u najkraćim crtama mogao biti izložen na sledeći način. Neka je data jednačina

$$(5)\quad t = \varphi(t)$$

čije približno rešenje treba naći.

Pod pretpostavkom da se znaju koordinate dve tačke $M_{n-1}\left[t_{n-1}, \varphi(t_{n-1})\right]$ i $M_n\left[t_n, \varphi(t_n)\right]$ (t_o se zna, a t_1 se izračuna, recimo, metodom obične iteracije) može se kroz te dve tačke konstruisati prava i naći njen presek sa pravom $u = t$ (videti sl.1). Apscisa te tačke se uzima za t_{n+1}.



Sl.1

Biće dakle

$$\left\{\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{u - t_n}{\varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1})},\ u = t,\ t = t_{n+1}\right.$$

pa se odatle dobija

$$t_{n+1} = \frac{t_{n-1}\varphi(t_n) - t_n\varphi(t_{n-1})}{\varphi(t_n) - t_n - \varphi(t_{n-1}) + t_{n-1}},$$

tj. dobija se formula koja se nalazi u glavi II (označena je, u prilagodjenoj formi, sa (II.3)). Pokazuje se da ovako formiran niz $\{t_{n+1}\}$ brže konvergira ka rešenju jednačine (5) od niza koji se formira kod obične iteracije (videti [16]). Drugi blok metoda je takodje inspirisan jednim ubrzanim postupkom za nalaženje približnih rešenja algebarskih i transcedentnih jednačina. Taj postupak se naziva Stefensenov, a suština mu je u transformaciji Aitkena za ubrzanje konvergencije nizova i redova (videti [16] i [7]).

U toj metodi za nalaženje približnog rešenja zadatka (5) se najpre (znajući t_o) izračuna metodom obične iteracije $t_1 = \varphi(t_o)$ i $t_2 = \varphi(t_1)$ i zatim se na ta tri broja primeni Aitkenova transformacija

$$\bar{t}_1 = \frac{t_2 t_o - t_1^2}{t_2 - 2t_1 + t_o}$$

(toj formuli odgovara u prilagodjenom obliku formula (II.35)).

Time je završen jedan korak metode Stefensena. Polazeći od $t_1 = \bar{t}_1$, dalje se postupak može produžiti.

Niz $\{\bar{t}_{n+1}\}$ na ovaj način dobijen brže konvertira ka rešenju jednačine (5) od niza koji se formira kod obične interacije (videti [16] i [7]). Metode predložene u glavi II su korisne za primenu pri sporijoj konvergaciji nizova koji se dobijaju (pri rešavanju zadataka (1) - (2) u, njima, sličnim metodama (videti II.1.3., II.1.7., II.1.7. Napomena 2.itd.).

Glava III je, pretežno, posvećena nalaženju približnih rešenja zadatka (3) - (4) i sadrži takodje niz novih metoda za rešavanje tog zadatka. Sve metode koje se predlažu imaju izvesnih sličnosti sa nekim poznatim analitičkim i numeričkim metodama za nalaženje približnih rešenja zadatka (3) - (4) (Pikarova metoda, Pikar (varijanti Orlova) metoda, Ojler-Košijeva metoda, Levi-Bagotova metoda itd.), a takodje i sa Sajdlovom metodom za nalaženje približnih rešenja sistema linearnih algebarskih jednačina. Pokazuje se (videti III.1.2., III.2.3., III.3.3., III.4.3., III.4.4. itd.) da se primenom predloženih metoda brže dobijaju približna rešenja zadatka (3) - (4) nego primenom poznatih (njima sličnih) metoda što je bitna karakteristika svih tih metoda.

Metode koje se navode u glavi II i glavi III se mogu primeniti i na sisteme od m diferencijalnih jednačina prvog reda, a samim tim i na diferencijalnu jedinačinu m-tog reda. Forma metoda u tim slučajevima se ilustruje kroz nekoliko metoda (poglavlja II.26 i III.12), a na analogan način se mogu i ostale metode prilagoditi za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina i diferencijalnih jednačina višeg reda.

U glavi II i glavi III se prezentira relativno veliki broj novih metoda, pa je autor imao izvesnih teškoća da svim tim metodama da nazive. Odlučio se da se u nazivima tih metoda nalaze imena autora sličnih metoda, a takodje i da se,koliko je bilo moguće i u naslovu istaknu karakteristike tih metoda. Tako se npr. došlo do naziva: Ojler-Košijeva interpolaciona metoda, Stefensen-Adamsova iterativna metoda, Pikar (varijanta Orlova)- Sajdlova metoda itd. Autor se nada da će kod poznavaoca metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina ovi nazivi dovoljno jasno označavati razliku tih metoda u odnosu na Ojler-Košijevu metodu, Adamsovu metodu, Pikar (varijanti Orlova) metodu itd.

Neke od metoda izloženih u ovom radu autor je publikovao u Matematičkom vesniku br. 2 (15) (30), a neke se nalaze u radovima čije publikovanje je u toku.

Autor smatra svojom prijatnom dužnošću da izrazi zahvalnost svim profesorima i kolegama koji su na neki način uticali na oformljenje koncepta rada kao i svim onim kolegama koji su mu dali nih korisnih sugestija u toku izrade rada. Ta zahvalnost se najviše odnosi na profesore M.Bertolina i mentora K.Orlova kao i na kolege R.Miloševića, D.Georgijevića i V.Mićića.

G L A V A I

NEKE POZNATE METODE ZA NALAŽENJE PRIBLIŽNIH REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

I.1. Ojler-Košijeva (Leonard Euler, 1707-1783; Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) iterativna metoda

1.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) najpre se izabere dovoljno malo $h>0$ i formira niz $\{x_i\}$ koristeći se jednakošću

(I.1) $$x_i = x_o + ih \qquad (i = 0,1,2,\ldots).$$

Zatim se izračunava niz vrednosti $\{y_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$, pri čemu se svako y_{i+1} računa korišćenjem niza približavanja odredjenih formulom

(I.2) $$y_{i+1}^{(o)} = y_i + hf(x_i,y_i) \qquad (i = 0,1,2,\ldots)$$

i formulom

(I.3) $$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k-1)})\right] \quad (i,k = 0,1,2,\ldots)$$

1.2. Niz iteracija se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ ne poklope medjusobno na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1}=\bar{y}_{i+1}$, gde je $\bar{y}_{i+1}$ zajednički deo približavanja $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ (videti [1] i [2]).

1.3. Lako se pokazuje da ako funkcija $f(x,y)$ zadovoljava za $x\in[x_o,a]$ Lipšicov (Lipschitz, 1831-1904) uslov sa konstantom $L>0$, tada je uslov za konvergenciju niza

$\{y_{i+1}^{(k)}\}$ (formiranog pomoću formule (I.3)) da se h izabere takvo da bude $h<\frac{L}{2}$. Pokažimo to .
Kako je

(I.4) $$y_{i+1}^{(k+1)}= y_i+\frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)})\right].$$

biće iz (I.4) i (I.3)

$$y_{i+1}^{(k+1)}- y_{i+1}^{(k)} = \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)}) - f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k-1)})\right].$$

Dalje je

$$\left|y_{i+1}^{(k+1)}- y_{i+1}^{(k)}\right|\leq \frac{hL}{2}\left| y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}\right|.$$

Slično je i

$$\left|y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}\right|\leq\frac{hL}{2}\left| y_{i+1}^{(k-1)}- y_{i+1}^{(k-2)}\right|,$$

pa je

$$\left|y_{i+1}^{(k+1)}- y_{i+1}^{(k)}\right|\leq\left(\frac{hL}{2}\right)^2\left|y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i+1}^{(k-2)}\right|.$$

Analogno predhodnom se dobija

$$\left|y_{i+1}^{(k+1)}- y_{i+1}^{(k)}\right|\leq\left(\frac{hL}{2}\right)^k\left|y_{i+1}^{(1)} - y_{i+1}^{(o)}\right|,$$

pa zaista ako se izabere h takvo da je $h<\frac{2}{L}$, niz $\{y_{i+1}^{(k)}\}$ konvergira.

1.4. Nekada se pri nalaženju približnih rešenja zadatka (1)-(2) algoritam Ojler-Košijeve metode modifikuje. Najčešće dve modifikacije su da se umesto prediktora ("nultog približavanja") (I.2) u svojstvu prediktora uzima formula

(I.5) $$y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{2}\left[3fi - f_{i-1}\right] \quad (i = 1,2,3,\ldots),\ f_r = f(x_r,y_r)$$

(r = 0,1,2,...) ili formula

$$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + 2hf_i, \qquad f_i = f(x_i, y_i) \quad (i = 1,2,3,\ldots) \tag{I.6}$$

Pri tome korektor u obe modifikovane metode ostaje formula (I.3), tj. u tim modifikovanim metodama se "nulta vrednost" približnog rešenja na (i+1) -vom koraku računa korišćenjem formula (I.5) ili (I.6) (u oba slučaja je neophodno, pored poznate vrednosti y_o, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnog rešenja zadatka (1)-(2) izračunati vrednost y_1), a sledeće vrednosti se dobijaju upotrebom formule (I.3) (videti [3]). Niz približavanja se produžava kao i u Ojler-Košijevoj metodi dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

1.5. Ojler-Košijeva iterativna metoda (kao i njene modifikovane varijante u odnosu na prediktor) se može primeniti na sisteme diferencijalnih jednačina, a samim tim i na diferencijalne jednačine višeg reda.

I.2. Runge-Kuta (Runge, 1856-1927; Kutta, 1863-1944) metoda

2.1. Metod je prezentiran krajem prošlog stoleća od strane Rungea (1894), a usavršavali su ga, kasnije, Kuta (1901), najviše, Hajne, Žil, Hjuit, Kertis i drugi matematičari ([4], [5] i [6]).

2.2. Ideja i objašnjenje metoda.
Neka je data diferencijalna jednačina (1) sa zadatim početnim uslovom (2). Za funkciju f(x,y) se pretpostavlja da u posmatranoj oblasti ima neprekidne parcijalne izvode do nekog reda s. Tada će traženo rešenje imati neprekidne izvode do reda s + 1 ([7]) i može se zapisati pri izabranom dovoljno malom h u obliku

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \ldots + \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} y^{(s+1)}(x). \tag{I.7}$$

Lako se uočava da za izračunavanje Δy (za neko fiksirano x) svi izvodi koji ulaze u desnu stranu jednakosti (I.7) mogu biti faktički nadjeni.

Npr. $y' = f(x,y) \equiv f$, $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_1$ itd.

Prema Rungeovoj ideji diferencijalna jednačina (1) se najpre zapiše u integralnoj formi

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f[t, y(t)]\, dt.$$

Dalje je

$$\Delta y = \int_x^{x+h} f[t, y(t)]\, dt = h \int_0^1 f[x + \alpha h, y(x + \alpha h)]\, d\alpha. \tag{I.8}$$

Za približno izračunavanje integrala u formuli (I.8) uvodi se tri skupa parametara

$$\text{(I.9)}\quad \begin{cases} \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r & (\alpha) \\ \left.\begin{array}{l} \beta_{21}, \\ \beta_{31}, \beta_{32}, \\ \ldots \ldots \ldots \\ \beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rr-1} \end{array}\right\} & (\beta) \\ p_1, p_2, \ldots, p_r & (p). \end{cases}$$

Pomoću parametra (α) i (β) sastave se veličine

$$\text{(I.10)}\quad \begin{cases} k_1 = hf(x,y) \\ k_2 = hf[x + \alpha_2 h;\ y + \beta_{21} k_1] \\ k_3 = hf[x + \alpha_3 h;\ y + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_r = hf[x + \alpha_r h;\ y + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \ldots + \beta_{rr-1} k_{r-1}]. \end{cases}$$

Ako su parametri (α) i (β) izabrani tada se veličina k_i $(i = \overline{1,r})$ mogu izračunati.

Dalje je (imajući u vidu integral (I.8))

(I.11) $$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{r} p_i k_i .$$

Izbor konstanti p_i, α_i i β_{ij} se izvodi tako da se razlaganja (I.7) i (I.11) po stepenima h poklapaju do što viših stepena h, pri proizvoljnoj funkciji $f(x,y)$ i proizvoljnom koraku h.

Prema tome funkcija

(I.12) $$\varphi_r(h) = \Delta y - \sum_{i=1}^{r} p_i k_i \quad \left(= \sum_{j=1}^{s} \frac{h^j}{j!} \varphi_r^{(j)}(0) + \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \varphi_r^{(s+1)}(\theta h), 0<\theta \right.$$

(greška približne jednakosti (I.11))
pri pogodnom izboru (α), (β), i (p) treba da bude takva da je

(I.13) $$\varphi_r^{(s)}(0) = 0 \quad (j = 0,1,2,\dots, s) \quad \text{i} \quad \varphi_r^{(s+1)} \neq 0 .$$

Pri tome je greška formule (I.11) reda h^{s+1}, tj.

(I.14) $$\varphi_r(h) = \frac{h^{s+1}}{(s+1)!} \varphi_r^{(s+1)}(\theta h) .$$

Primedba 1. Zapis u opštem obliku sistema jednačina za odredjivanje (α), (β) i (p) je komplikovan. Ilustrujmo, zbog toga, metodu na nekim specijalnim slučajevima.

2.2.1. Metod prvog reda tačnosti (r=1).

Pri r=1 formula (I.11) postaje

$$\Delta y \approx p_1 k_1 = p_1 h f(x,y) .$$

Dalje je (I.12)

$$\varphi_1(h) = \Delta y - p_1 k_1 = y(x+h) - y(x) - h p_1 f(x,y) .$$

Diferenciranjem poslednje jednakosti se dobija

$$\varphi_1'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x,y)$$

i

$$\varphi_1''(h) = y''(x+h).$$

Veličina $\varphi_1''(o) = y''(x)$ ne zavisi od uvedenog parametra p_1 i ne može biti jednaka nuli za neki njegov izbor.

Veličina $\varphi_1'(o) = y'(x) - p_1 f(x,y) = (1-p_1) f(x,y)$ je za proizvoljnu funkciju $f(x,y)$ jednaka nuli pri $p_1 = 1$.

Dakle $p_1 = 1$ i (I.11) pri $r = 1$ postaje $\Delta y \approx hf(x,y)$.

Greška te formule je prema (I.14)

$$\varphi_1(h) = \frac{h^2}{2}\varphi_1''(\theta h) = \frac{h^2}{2} y''(x+\theta h) \qquad 0 < \theta < 1.$$

2.2.2. Metod drugog reda tačnosti (r=2).

Pri $r = 2$ formula (I.11) postaje

$$\Delta y \approx p_1 k_1 + p_2 k_2 = hp_1 f(x,y) + hp_2 f\left[x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f(x,y)\right].$$

Da bi se izabralo α_2, β_{21}, p_1 i p_2 najpre se razloži Δy i $p_1 k_1 + p_2 k_2$ po stepenima h.

Dobija se

(I.15)
$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + O(h^4) =$$
$$= hf + \frac{h^2}{2}\left[f_x + ff_y\right] + \frac{h^3}{6}\left[f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)\right] + O(h^4)$$

Za linearnu kombinaciju $p_1 k_1 + p_2 k_2$ može se dati sledeća reprezentacija.

(I.16)
$$p_1 k_1 + p_2 k_2 = hp_1 f(x,y) + hp_2 f\left[x + \alpha_2 h;\ y + h\beta_{21} f(x,y)\right] =$$
$$= hp_1 f(x,y) + hp_2 \left\{f(x,y) + \frac{1}{1!}\left[\alpha_2 h f_x + h\beta_{21} ff_y\right] + \dots\right\} =$$
$$= h\left[p_1 + p_2\right] f + h^2 p_2 (\alpha_2 f_x + \beta_{21} ff_y) + \frac{h^3}{2} p_2 \left[\alpha_2^2 f_{xx} + \right.$$
$$\left. + 2\alpha_2 \beta_{21} ff_{xy} + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy}\right] + O(h^4).$$

Dalje se zahteva poklapanje razlaganja (I.15) i (I.16) do članova sa što je moguće višim stepenom h. Kao rezultat uporedjivanja u tim razlaganjima koeficijenata uz hf, h^2f_x, h^2ff_y dobijaju se tri jednačine

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_2 \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ p_2 \beta_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rešenja predhodnog sistema ima beskonačno mnogo. Npr. za $p_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta y \approx \frac{1}{2}(k_1+k_2)$,

pri čemu je

$k_1=hf(x,y)$, $k_2=hf(x+h,y+k_1)$.

Za $p_2=1$ se dobija $\Delta y \approx k_2$,

gde je

$k_1=hf(x,y)$, $k_2=hf(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_1}{2})$

itd.

Primedba 2. Sa povišenjem tačnosti kod Runge-Kuta metode se pojavljuje sve više ograničenja na parametre (kojih je takodje sve više). Naprimer za r=4 se dobija sistem

$$\text{(I.17)} \quad \begin{cases} p_1+p_2+p_3+p_4=1 \\ p_2\alpha_2+p_3\alpha_3+p_4\alpha_4=\frac{1}{2} \\ p_2\alpha_2^2 + p_3\alpha_3^2 + p_4\alpha_4^2 = \frac{1}{3} \\ p_2\alpha_2^3 + p_3\alpha_3^3 + p_4\alpha_4^3 = \frac{1}{4} \\ p_3\beta_{32}\alpha_2 + p_4\beta_{42}\alpha_2 + p_4\beta_{43}\alpha_4 = \frac{1}{6} \\ \vdots \end{cases}$$

$$
\text{(I.17)}\quad \begin{cases}
p_3\beta_{32}\alpha_2 + p_4\beta_{42}\alpha_4\alpha_2 + p_4\beta_{43}\alpha_4\alpha_3 = \frac{1}{8} \\
p_3\beta_{32}\alpha_2^2 + p_4\beta_{42}\alpha_2^2 + p_4\beta_{43}\alpha_3^2 = \frac{1}{12} \\
p_4\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{24} \\
\beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} = \alpha_4 \\
\beta_{31} + \beta_{32} = \alpha_3 \\
\beta_{21} = \alpha_2
\end{cases}
$$

Jedno rešenje tog sistema je

$\alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = 1, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = 0, \beta_{32} = \frac{1}{2}, \beta_{41} = 0,$

$\beta_{42} = 0, \beta_{43} = 1, \quad p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = \frac{1}{6}.$

Odgovarajuće formule su formule Runge-Kuta četvrtog reda tačnosti (greška je $O(h^5)$). Te formule se najčešće upotrebljavaju u praksi i one se,obično,nazivaju u literaturi metodom Runge-Kuta bez naznačavanja tipa ili reda. U svim primerima u kojima se u ovom radu koristi metoda Runge-Kuta koristi se metoda četvrtog reda, a naziva se samo metodom Runge-Kuta. Ona se prema prethodno izloženom opisuje sledećim formulama

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

gde je

$$k_1 = hf(x,y) \quad , \quad k_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x+\frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}), \qquad k_4 = hf(x+h, y + k_3).$$

Napomena 1. Iz sistema (I.17) se mogu dobiti i druge formule Runge - Kuta četvrtog reda. U čestoj upotrebi su i formule

$$\Delta y \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{2}k_4\right)$$

gde su

$$k_1 = hf(x,y) \quad , \; k_2 = hf\left(x+\frac{1}{2}h, \quad y + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{1}{2}h, \quad y - \frac{1}{2}k_1 + k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x+h, \; y + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3\right).$$

2.2.3. Na sličan način se dobijaju formule Runge - Kuta viših redova tačnosti. Ilustracije radi za $r=8$ se dobija metod Runge - Kuta šestog reda tačnosti $(O(h^7))$.
Te formule su sledeće

$$\Delta y \approx \frac{1}{840}(41k_1 + 216k_3 + 27k_4 + 272k_5 + 27k_6 + 216k_7 + 41k_8)$$

gde su

$$k_1 = hf(x,y)$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{1}{9}h, \; y + \frac{1}{9}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{1}{6}h, \; y + \frac{k_1+3k_2}{24}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x + \frac{1}{3}h, \; y + \frac{k_1 - 3k_2 + 4k_3}{6}\right)$$

$$k_5 = hf\left(x + \frac{1}{2}h, \quad y + \frac{-5k_1 + 27k_2 - 24k_3 + 6k_4}{8}\right)$$

$$k_6 = hf(x + \tfrac{2}{3}h, \quad y + \frac{221k_1 - 981k_2 + 867k_3 - 102k_4 + k_5}{9})$$

$$k_7 = hf(x + \tfrac{5}{6}h, \quad y + \frac{-783k_1+678k_2-472k_3-66k_4+80k_5+3k_6}{48})$$

$$k_8 = hf(x + h, \quad y + \frac{761k_1-2079k_2+1002k_3+834k_4-454k_5-9k_6+72k_7}{82})$$

I.3. Adamsove (Adams, John Cauch, 1819-1892) metode

3.1. Neka je data diferencijalna jednačina (1) sa zadatim početnim uslovom (2). Dalje se u ovoj metodi pretpostavlja da je, na bilo koji način, nadjeno približno rešenje zadatka (1)-(2) u tačkama x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, ... x_{i-k} ($x_{i-j}=x_i-jh$) i neka su to vrednosti $y(x_j)=y_j$. Ako se uvede oznaka $f_j=f(x_j,y_j)$, lako se uočava da imajući f_i, f_{i-1}, ..., f_{i-k}, se može konstruisati neka predstava funkcije $f[x,y(x)]$ u vidu funkcije koja se lako integrali. Neka je to $\varphi(x)$. Tada je približno

$$y_{i+1} = y_{i-j} + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx. \tag{I.18}$$

Na taj način se pomera tablica vrednosti $y(x)$ za jedan korak. Navedeni način se može ponovo primeniti, izračunati sledeća vrednost $y(x)$ itd. Da bi se mogao započeti ovaj postupak neophodno je znati osim početne vrednosti y_o još i vrednosti y_1, y_2, ..., y_k u tačkama x_1, x_2, ..., x_k. Te vrednosti se mogu računati na bilo koji način, naprimer metodom Runge - Kuta.

Jedan od najprostijih načina približnog predstavljanja funkcije $f[x,y(x)]$ je pomoću nekog interpolacionog polinoma. Ako se označi sa $L_{i,k}(x)$ interpolacioni polinom koji u tačkama x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k} ima vrednosti f_i, f_{i-1}, ..., f_{i-k} biće

(I.19) $$L_{i,k}(x) = \sum^{k} f_{i-j}P_j(x),$$

gde $P_j(x)$ ne zavisi od f_r.

Neka je dalje

$$x - x_i = th.$$

Tada $P_j(x)$ prelazi u polinom $Q_j(t)$, stepna k, a taj polinom ne zavisi ni od h ni od i.

Na taj način se dobija

(I.20) $$y_{i+1} = y_{i-j} + \int_{x_{i-j}}^{x_{i+1}} L_{i,k}(x)dx = y_{i-j} + h\left|\sum_{s=0}^{K}\beta_s f_{i-s}\right.,$$

gde je

(I.21) $$\beta_s = \int_{-j}^{1} Q_j(t)dt,$$

tj. β_s su konstante koje ne zavise ni od, f ni od i, ni od h.

Birajući razne vrednosti j i različite interpolacione polinome, dobijaju se razne diferencne formule za nalaženje približnog rešenja diferencijalne jednačine. Te formule se nazivaju ekstrapolacione jer su dobijene putem integracije interpolacionog polinoma, ekstrapoliranog na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ (videti [7] i [8]).

Pri konstrukciji interpolacionog polinoma može se iskoristiti osim f_i, f_{i-1}, ..., f_{i-k} još i nepoznata vrednost f_{i+1}. Ponovivši predhodna rasudjivanja dolazi se do formule

$$y_{i+1} = y_{i-j} + h\sum_{s=-1}^{k} \gamma_s f_{i-s}. \tag{I.22}$$

Pri tome i u levoj i u desnoj strani jednakosti se pojavljuje nepoznata vrednost y_{i+1}. Dakle za traženje y_{i+1} treba rešiti algebarsku ili transcedentnu jednačinu. Obično se to čini metodom niza približavanja. Za konvergenciju takvog postupka je potrebno da bude ispunjen uslov $h|\gamma_{-1}|M_1<1$, gde je $M_1 = \sup\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ u posmatranoj oblasti (dokaz sličan dokazu I.13.).

Formule tipa (I.22) se nazivaju interpolacionim. Poznato je, iz teorije interpolacija, da je, obično, tačnost ekstrapolacije manja od tačnosti interpolacije, pa se i formule tipa (I.22) tačnije od formula (I.20) ([7]).

3.2. Neke ekstrapolacione formule za integraciju diferencijalnih jednačina prvog reda.

Razmotrimo neke specijalne slučajeve diferencnih formula.

3.2.1. Neka je j=0 i ako se $L_{i,k}(x)$ zapiše u vidu Njutnovog (Newton Isaac, 1642-1727) interpolacionog polinoma za kraj tablice

$$L_{i,k}(x) = f_i + tf^1_{i-1/2} + \frac{t(t+1)}{2} f^2_{i-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} f^k_{i-\frac{k}{2}} \tag{I.23}$$

$$\left(f_{s+1} - f_s = f^1_{s+\frac{1}{2}},\quad f^2_s = f^1_{\frac{2s+1}{2}} - f^1_{\frac{2s-1}{2}},\ \dots\right)$$

biće

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i,k}(x)\,dx = h\int_0^1 L_{i,k}(x_i + th)\,dt,$$

pa je

$$\Delta y_i = h\int_0^1\left[f_i + tf^1_{i-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2}f^2_{i-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!}f^k_{i-\frac{k}{2}}\right]dt$$

odakle je definitivno

$$\Delta y_i = h\left[f_i + a_1 f^1_{i-\frac{1}{2}} + a_2 f^2_{i-1} + \dots + a_k f^k_{i-\frac{k}{2}}\right], \tag{I.24}$$

gde je

$$\begin{cases} a_1 = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}, \\ a_2 = \int_0^1 t\frac{(t+1)}{2}\,dt = \frac{5}{12}, \\ a_3 = \int_0^1 \frac{t(t+1)(t+2)}{6}\,dt = \frac{3}{8}, \\ a_4 = \int \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24}\,dt = \frac{251}{720} \end{cases} \tag{I.25}$$

Sledeće vrednosti koeficijenta a_s ($s = 5,6,7 \dots$)

su

$$a_5 = \frac{95}{280},\ a_6 = \frac{19087}{60480},\ a_7 = \frac{5275}{17280},\ a_8 = \frac{1070017}{3628800},\ a_9 = \frac{1082753}{7257600} \tag{I.26}$$

Na taj način formula (I.24) postaje

$$\Delta y_i = h\left[f_i + \frac{1}{2}f^1_{i-\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}f^2_{i-1} + \frac{3}{8}f^3_{i-\frac{3}{2}} + \frac{251}{720}f^4_{i-2} + \dots\right]. \tag{I.27}$$

Nakada se u razmatranje uvode veličine $q_j = hf(x_j y_j)$. Tada se formula (I.27) može zapisati u obliku

$$\text{(I.28)} \qquad \Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}q^1_{i-\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}q^2_{i-1} + \frac{3}{8}q^2_{i-\frac{3}{2}} + \frac{251}{720}q^4_{i-2} + \ldots \; .$$

Formule (I.27) i (I.28) nose naziv ekstrapolacionih formula Adamsa.

Shema za izračunavanje Δy_i i y_{i+1} prema Adamsovoj ekstrapolacionoj formuli izgleda:

x	y	Δy	$q=hf$	q^1	q^2	q^3
...	...	...	...	...	...	...
x_{i-3}	y_{i-3}		q_{i-3}			
		Δy_{i-3}		$q^1_{i-\frac{5}{2}}$		
x_{i-2}	y_{i-2}		q_{i-2}		q^2_{i-2}	
		Δy_{i-2}		$q^1_{i-\frac{3}{2}}$		$q^3_{i-\frac{3}{2}}$
x_{i-2}	y_{i-1}		q_{i-1}		q^2_{i-1}	
		Δy_{i-1}		$q^1_{i-\frac{1}{2}}$		
x_i	y_i		q_i			
		Δy_i				
	y_{i+1}					

Pretpostavimo da su treće razlike medjusobno skoro jednake. Tada se, prilikom primene Adamsove ekstrapolacione formule, mogu od formule (I.28) zadržati samo prva četiri člana.

Ako su vrednosti y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i poznate tada se najpre nadju vrednosti q_{i-3}, q_{i-2}, q_{i-1} i q_i. Zatim se po formuli Adamsa nadje vrednost Δy_i i potom izračuna y_{i+1}. Postupak se, dalje, na isti način nastavlja.

Nekada je celishodnije izraziti vrednosti Δy neposredno kroz $y_i' = f_i$. Da bi se to učinilo najpre se izraze razlike koje ulaze u formule (I.27) i (I.28) preko y_i. Tada se dobija

(I.29)
$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h}{2}(y_i' - y_{i-1}') + \frac{5h}{12}(y_i' - 2y_{i-1}' + y_{i-2}') + \frac{3h}{8}(y_i' - 3y_{i-1}' + 3y_{i-2}' - y_{i-3}') + \dots ,$$

ili u obliku

(I.30)
$$y_{i+1} - y_i = hf_i + \frac{h}{2}(f_i - f_{i-1}) + \frac{5h}{12}(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) + \frac{3h}{8}(f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}) + \dots .$$

Ako se u poslednjoj formuli uzme samo jedan član desnog dela jednakost dobija se, poznata Ojlerova formula

$$y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Dva prva člana desnog dela daju

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}).$$

Tri prva člana desnog dela daju

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}).$$

Uzimajući četiri prva člana formule (I.30) dobija se

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}),$$

itd.

3.2.2. Neka je $j = 1$ i neka je ponovo uočen drugi Njutnov interpolacioni polinom. Tada se dobija

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Big[f_i + tf^1_{i-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2} f^2_{i-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ \ldots\ (t+k-1)}{k!} f^k_{i-\frac{k}{2}} \Big] dx = h \int_{-1}^{1} \Big[f_i + tf^1_{1-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{t(t+1)}{2} f^2_{i-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+k-1)}{k!} f^k_{i-\frac{k}{2}} \Big] dt$$

tj.

(I.31)
$$y_{i+1} - y_{i-1} = a_o q_i + a_1 q^1_{i-\frac{1}{2}} + \ldots + a_k q^k_{i-\frac{k}{2}}$$

(I.32)

gde su

$$\left\{ \begin{aligned} a_o &= \int_{-1}^{1} dt = 2 \\ a_1 &= \int_{-1}^{1} tdt = 0 \\ a_2 &= \int_{-1}^{1} \frac{t(t+1)}{2}\, dt = \frac{1}{3} \\ a_3 &= \int_{-1}^{1} \frac{t(t+1)(t+2)}{6} dt = \frac{1}{3} \\ a_4 &= \frac{29}{90},\ a_5 = \frac{28}{90},\ a_6 = \frac{18229}{60480},\ a_7 = \frac{35424}{12096},\ \ldots \end{aligned} \right.$$

Biće dakle definitivno

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2q_i + \frac{1}{3} q^2_{i-1} + \frac{1}{3} q^3_{i-\frac{3}{2}} + \frac{29}{90} q^4_{i-2} + \dots \qquad \text{(I.33)}$$

Ako se u formuli (I.33) uzme samo jedan član desnog dela jednakosti dobija se

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hf_i$$

Dva člana desnog dela jednakosti (I.33) daju

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right].$$

Tri prva člana desnog dela formule (I.33) daju

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left[8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right].$$

Ako se zaustavimo na razlikama četvrtog reda i uzmemo u u svojstvu koeficijenta pri četvrtoj razlici umesto $\frac{29}{90}$ broj $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$, tj. izmenimo taj koeficijent samo za $\frac{1}{90}$ dobija se formula

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left[9f_i - 9f_{i-1} + 10f_{i-2} - 5f_{i-3} + f_{i-4}\right].$$

Na sličan način se mogu dobiti i druge formule viših redova.

3.3. Neke interpolacione formule za integraciju deferencijalnih jednačina prvog reda.

3.3.1. Ako se uoči drugi Njutnov interpolacioni polinom i za početnu tačku uzme x_{i+1} biće

$$L_{i,k}(x) = f_{i+1} + t \cdot f^1_{i+\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2} f_i^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ \ldots\ (t+k-1)}{k!} f^k_{i+1-\frac{k}{2}} .$$

Neka je dalje $j = 0$. Biće tada

(I.34) $$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[f_{i+1} + tf^1_{i+\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2} f_i^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ldots(t+k-1)}{k!} f^k_{i+1-\frac{k}{2}} \Big] dx = h \int_{-1}^{0} \Big[f_{i+1} + tf^1_{i+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{t(t+1)}{2} f_i^2 + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+k-1)}{k!} f^k_{i+1-\frac{k}{2}} \Big] dt =$$

$$= a_o q_{i+1} + a_1 q^1_{i+\frac{1}{2}} + a_2 q_i^2 + \ldots + a_k q^k_{i+1-\frac{k}{2}} .$$

Pri tome je

(I.35) $$\begin{cases} a_o = \int_{-1}^{0} dt = 1 \\ a_1 = \int_{-1}^{0} t dt = -\frac{1}{2} \\ a_2 = \int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)}{2} dt = -\frac{1}{12} \\ a_3 = \int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)(t+2)}{6} dt = -\frac{1}{24} \\ a_4 = -\frac{19}{720},\ a_5 = -\frac{9}{160},\ a_6 = -\frac{863}{60480},\ a_7 = -\frac{275}{24195}, \\ a_8 = -\frac{33953}{3628800},\ \ldots \end{cases}$$

pa se dobija Adamsova interpolaciona formula

(I.36) $$y_i = q_{i+1} - \frac{1}{2}q^1_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}q^2_i - \frac{1}{24}q^3_{i-\frac{1}{2}} - \frac{19}{720}q^4_{i-1} + \dots$$

Formula (I.36) može biti korišćena za kontrolu izračunavanja izvedenih prema ekstrapolacionim formulama. Pri tom se može koristiti ista shema kao i za ekstrapolacionu formulu Adamsa. U tom slučaju se najpre nadje približna vrednost y_{i+1}. Zatim se izračunaju q_{i+1}, $q^1_{i+\frac{1}{2}}$, q^2_i, $q^3_{i-\frac{1}{2}}$, ... Koristeći se tim veličinama pomoću Adamsove interpolacione formule (I.36) se nadje Δy_i, tj. y_{i+1}. Zatim se isprave vrednosti q_{i+1}, $q^1_{i+\frac{1}{2}}$, q^2_i, ..., pa ponovo nadje po Adamsovoj interpolacionoj formuli y_{i+1}. Ovaj postupak se produžava dok se ne postigne odgovarajuća tačnost.

Takodje se može Δy_i predstaviti u vidu linearne kombinacije y_i i $y'_i = f_i$, a potom izvoditi niz približavanja. Pri tom ako se u formuli (I.36) uzme samo prvi član dobija se

$$y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}.$$

Sa dva člana je

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_{i+1} + f_i\right].$$

Sa tri člana se dobija

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right].$$

Četiri člana daju

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right].$$

Sa pet članova se dobija

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right].$$

itd.

3.3.2. Neka je u svojstvu $L_{i,k}(x)$ uočen Stirlinov interpolacioni polinom

$$L_{i,k}(x) = f_i + tf_i^1 + \frac{t^2}{2}f_i^2 + \frac{t(t^2-1)}{6}f_i^3 + \frac{t^2(t^2-1)}{24}f_i^4 + \dots$$

i neka je $j = 1$.

Integracijom se dobija

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\left[f_i + tf_i^1 + \frac{t^2}{2}f_i^2 + \frac{t(t^2-1)}{6}f_i^3 + \frac{t^2(t^2-1)}{24}f_i^4 + \dots\right]dx$$

$$= h\int_{-1}^{1}\left[f_i + tf_i^1 + \frac{t^2}{2}f_i^2 + \frac{t(t^2-1)}{6}f_i^3 + \frac{t^2(t^2-1)}{24}f_i^4 + \dots\right]dt =$$

$$= h\left[a_0 f_i + a_1 f_i^1 + a_2 f_i^2 + a_3 f_i^3 + a_4 f_i^4 + \dots\right],$$

gde je

$$\begin{cases} a_0 = \int_{-1}^{1} dt = 2 \\ a_1 = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \\ a_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{2}dt = \frac{1}{3} \\ a_3 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t^2-1)}{6}dt = 0 \\ a_4 = -\frac{1}{90}, \dots \end{cases}$$

pa je definitivno

$$y_{i+1} - y_{i-1} = h\left[2f_i + \frac{1}{3}f_i^2 - \frac{1}{90}f_i^4 + \dots\right].$$

Ako se u poslednjoj formuli izraze razlike preko f_i dobija se redom

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2hf_i,$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left[f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}\right],$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{90}\left[- f_{i+2} + 38f_{i+1} + 114f_i + 26f_{i-1} - f_{i-2}\right].$$

itd.

Očigledno je da već poslednja formula nije pogodna za upotrebu jer je pri računanju vrednosti y_{i+1} potrebno računanje vrednosti $f_{i+2} = f(x_{i+2}, y_{i+2})$.

I.4. Milnova (William Edmund Milne) metoda

4.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se nekom od postojećih metoda za nalaženje približnog rešenja zadatka (1)-(2) izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3 kao i odgovarajuće vrednosti $f_i = f(x_i, y_i)$ $(i = 1,2,3)$. Dalje je

(I.37) $$y_{i+1}^{(1)} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right] \quad (i = 3,4,5,\dots).$$

Potom se izračuna vrednost

$$f_{i+1}^{(1)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)})$$

i nalazi "drugo približavanje"

(I.38) $$y_{i+1}^{(2)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(1)}\right] \qquad (i = 3,4,5,\ldots)$$

Miln je pokazao da je apsolutna greška vrednosti $y_{i+1}^{(2)}$ približno

(I.39) $$\mathcal{E}_{i+1} = \frac{1}{29}\left|y_{i+1}^{(2)} - y_{i+1}^{(1)}\right|,$$

pa prema tome ako je $\mathcal{E}_{i+1} \leq \mathcal{E}$, gde je $\mathcal{E}$ granica zadane greške, onda je $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(2)}$ i postupak se dalje produžava. Ako je $\mathcal{E}_{i+1} > \mathcal{E}$"... tada treba smanjiti h (počevši od izvesnog mesta). Pri tom se srećemo sa neprijatnom neophodnošću ponovnog računanja odgovarajućeg "početnog odsečka"." [2].

4.2. Izvodjenje formula Milna ([9], [2].

Ako se uoči Njutnov interpolacioni polinom, sa razlikama do trećeg reda, koji je napisan za y' u okolini x_k biće

$$y' = y_k' + q\Delta y_k' + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_k' + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_k',$$

ili u obliku

(I.40) $$y' = y_k' + q\Delta y_k' + \frac{1}{2}(q^2-q)\Delta^2 y_k' + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q)\Delta^3 y_k',$$

gde je

$$q = \frac{x - x_k}{h}.$$

Ako se stavi da je $k = i - 3$ i integrali jednakosti (I.40) u granicama od x_{i-3} do x_{i+1} dobija se

$$\int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} y'dx = \int_{x_{i-3}}^{x_{i+1}} \left[y_{i-3}' + q\Delta y_{i-3}' + \frac{1}{2}(q^2-q)\Delta^2 y_{i-3}' + \frac{1}{6}(q^3-3q^2+2q)\Delta^3 y_{i-3}'\right] d$$

odakle, posle smene $qh = x - x_{i-3}$, $hdq = dx$, će biti

$$y_{i+1} - y_{i-3} = h\left\{\int_0^4 y'_{i-3}dq + \int_0^4 \Delta y'_{i-3}q\,dq + \int_0^4 \Delta y'_{i-3}\frac{q^2-q}{2}dq + \int_0^4 \Delta^3 y'_{i-3}\frac{q^3-3q^2+2q}{6}dq = h\left[4y'_{i-3} + 8\Delta y'_{i-3} + \frac{20}{3}\Delta^2 y'_{i-3} + \frac{8}{3}\Delta^3 y'_{i-3}\right].\right. \tag{I.41}$$

Kako je dalje

$$\Delta y'_{i-3} = y'_{i-2} - y'_{i-3},$$

$$\Delta^2 y'_{i-3} = y'_{i-1} - 2y'_{i-2} + y'_{i-3},$$

i

$$\Delta^3 y'_{i-3} = y'_i - 3y'_{i-1} + 3y'_{i-2} - y'_{i-3}$$

zamenom u formulu (I.41) dobija se

$$y_{i+1} - y_{i-3} = h\left[4y'_{i-3} + 8(y'_{i-2} - y'_{i-3}) + \frac{20}{3}(y'_{i-1} - 2y'_{i-2} + y'_{i-3}) + \frac{8}{3}(y'_i - 3y'_{i-1} + 3y'_{i-2} - y'_{i-3})\right]$$

odakle se dobija prva Milnova formula, (I.37), u obliku

$$y_{i+1} - y_{i-3}\ \frac{4h}{3}\left[2y'_{i-2} - y'_{i-1} + 2y'_i\right].$$

Za izvodjenje druge Milnove formule se može staviti $k = i - 1$ u formulu (I.40). Biće tada

$$\int_0^2 y'dx = h\left\{\int_0^2\left[y'_{i-1} + q\Delta y'_{i-1} + \frac{1}{2}(q^2-q)\Delta^2 y'_{i-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{6}(q^3-3q^2+2q)\Delta^3 y'_{i-1}\right]dq\right\}$$

pa se odatle dobija

$$y_{i+1} - y_{i-1} = h(2y'_{i-1} + 2\Delta y'_{i-1} + \frac{1}{3}\Delta^2 y'_{i-1}),$$

a dalje, imajući u vidu da je

$\Delta y'_{i-1} = y'_i - y'_{i-1}$ i $\Delta^2 y'_{i-1} = y'_{i+1} - 2y'_i + y'_{i-1}$ se dobija

druga Milnova formula, (I.38), u obliku

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right].$$

4.3. Greška Milnove metode

Ako se ocene glavni članovi greški $\varepsilon^{(1)}_{i+1}$ i $\varepsilon^{(2)}_{i+1}$ prve i druge formule Milna dobija se

$$\varepsilon^{(1)}_{i+1} = h\int_0^4 \frac{1}{24}(q^4-6q^3 + 11q^2 - 6q)\Delta^4 y'_{i-3}dq = \frac{28}{90}h\Delta^4 y'_{i-3} \quad \text{i}$$

$$\varepsilon^{(2)}_{i+1} = h\int_0^2 \frac{1}{24}(q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q)\Delta^4 y'_{i-1}dq = -\frac{h}{90}\Delta^4 y'_{i-1}.$$

Odatle, smatrajući da su četvrte razlike $\Delta^4 y'_j$ konstantne na intervalu dužine 4h, se dobija

$$\mathcal{E}_{i+1}^{(1)} = -28\mathcal{E}_{i+1}^{(2)} .$$

Kako je

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(1)} + \mathcal{E}_{i+1}^{(1)} = y_{i+1}^{(1)} - 28\mathcal{E}_{i+1}^{(2)} \qquad \text{i}$$

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(2)} + \mathcal{E}_{i+1}^{(2)}$$

biće

$$\mathcal{E}_{i+1}^{(2)} = \frac{1}{29}(y_{i+1}^{(1)} - y_{i+1}^{(2)}),$$

pa je

$$\mathcal{E}_{i+1} = \left|\mathcal{E}_{i+1}^{(2)}\right| = \left|\frac{y_{i+1}^{(1)} - y_{i+1}^{(2)}}{29}\right| .$$

I.5. Levi-Bagotova (H.Levi, E.A.Baggot) metoda

5.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) najpre se ([10], [1]) formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se nekom od postojećih metoda za nalaženje približnog rešenja zadatka (1)-(2) izračunaju vrednosti y_1 i y_2. Saglasno metodi niz vrednosti $\{y_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2, \ldots)$ se računa na taj način da se svako y_{i+1} računa korišćenjem niza približavanja odredjenih formulom

$$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right] \qquad (i = 2,3,4,\ldots),$$

$$f_r = f(x_r, y_r) \qquad (r = 0,1,2, \ldots)$$

kao i formulom

$$y_{i+1}^{(k)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(k-1)}\right] \quad (i = 3,4,5, \ldots),$$

$$f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+2}^{(k)}) \quad (k = 1,2,3, \ldots)$$

5.2. Kao i kod svih sličnih metoda niz iteracija se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ $(m = 0,1,2\ldots$ ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1} = \bar{y}_{i+1}$, gde je $\bar{y}_{i+1}$ zajednički deo približavanja $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$.

Primedba. Metoda Runge-Kuta, Adamsove metode i metoda Levi-Bagot se mogu primeniti na sisteme diferencijalnih jednačina, a samim tim i na diferencijalne jednačine višeg reda.

I.6. Pikarova (Picard Emil, 1856-1941) metoda

6.1. Neka je data diferencijalna jednačina (1) sa zadatim početnim uslovom (2). Prema Pikarovoj metodi sukcesivnih aproksimacija diferencijlna jednačina (1) se najpre zapiše u integralnom obliku.

(I.42) $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx,$$

a zatim se formiraju nizovi uzastopnih približnih rešenja koristeći se formulom

(I.43) $$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{i-1}(x))dx \quad (i = 1,2,3,\ldots).$$

Pod pretpostavkom da funkcija $f(x,y)$ zadovoljava uslove Koši-Pikarove teoreme (u oblasti

$\mathfrak{J} = \{ (x,y), |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b \}$ $a,b = \text{const}$) lako se dokazuju sledeća tvrdjenja (videti [11] i [12]):

a) Sve funkcije niza $\{y_i(x)\}$ $(i = 1,2,3, \ldots)$ definisane su i neprekidne za $|x - x_o| \leq h$ i nalaze se u $\mathcal{J}(h=\min(a,\frac{b}{M}),\ |f(x,y)| \leq M$ za $(x,y) \in \mathcal{J})$;

b) Niz neprekidnih funkcija uniformno konvergira za $|x - x_o| \leq h$, pa je i granična funkcija $y = y(x)$ neprekidna na pomenutom intervalu;

c) Granična funkcija $y(x)$ nalazi se u oblasti $\mathcal{J}$ za $|x - x_o| \leq h$;

d) Rešenje diferencijalne jednačine (1) $y = y(x)$ koje zadovoljava početni uslov (2) je jedinstveno

e) Važi ocena

$$|y(x) - y_i(x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{i+1}|x - x_o|^{i+1}}{(i+1)!} \quad \text{za} \quad x_o \leq x \leq x_o + h.$$

Dokažimo tvrdjenje pod e)

Ako se uvede oznaka $\varepsilon_i(x) = |y(x) - y_i(x)|$, tada će biti, imajući u vidu (I.42) i (I.43),

$$\varepsilon_i = |y(x) - y_i(x)| = \left| \int_{x_o}^{x} \left[f(x,y(x) - f(x), y_{i-1}(x) \right] dx \right|.$$

Dalje je za $x_o \leq x \leq x_o + h$, koristeći se činjenicom da funkcija $f(x,y)$ zadovoljava Lipšicov (Lipschitz,1831-1904) uslov,

(I.44) $$\varepsilon_i(x) \leq L \int_{x_o}^{x} \varepsilon_{i-1}(x)\,dx.$$

Kako je prema (I.42)

$$\varepsilon_o(x) = |y(x) - y_o(x)| \leq \left| \int_{x_o}^{x} |f((x,y(x))|\,dx \right| \leq M \left| \int_{x_o}^{x} dx \right|,$$

dobija se

$$\varepsilon_0(x) \leqslant M|x-x_0|.$$

Dalje je prema (I.44)

$$\varepsilon_1(x) \leqslant LM \int_{x_0}^{x} |x - x_0| dx = \frac{M}{L} \frac{L^2|x-x_0|^2}{2!},$$

$$\varepsilon_2(x) \leqslant \frac{M}{L}L^2 \int_{x_0}^{x} L\frac{|x-x_0|^2}{2!} dx = \frac{M}{L} \frac{L^3|x-x_0|^3}{3!},$$

itd.

Očigledno je da se, matematičkom indukcijom lako pokazuje da važi ocena pod e).

6.2. Na isti način se dokazuje da ako je dat sistem diferencijalnih jednačina

(I.45) $$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1, \ldots, y_m) \qquad (i = \overline{1,m})$$

sa zadanim početnim uslovima

(I.46) $$y_i(x_o) = y_i^o \qquad (i = \overline{1,m})$$

pri čemu su sve funkcije $f_i(x,y_1,\ldots, y_m)$ neprekidne funkcije od svojih argumenata u oblasti

(A) $$x_o - a \leqslant x \leqslant x_o + a \quad , \quad y_i^o - b \leqslant y_i \leqslant y_i^o + b$$

(one su tada i ograničene u oblasti (A), tj.

$$|f_i(x,y_1, \ldots, y_m)| \leqslant M)$$

i u (A) zadovoljavaju Lipšicov uslov, tj.

$$\left| f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \right| \leq$$

$$L \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| Y_i - y_i \right| \right\} \qquad (i = \overline{1, m}),$$

važe zaključci koji odgovaraju zaključcima pod a), b), c) i d), a takodje važi i procena

$$\left| y_i(x) - y_i^n(x) \right| \leq \frac{M}{mL} \cdot \frac{\left[(mL) \left| x - x_o \right| \right]^{n+1}}{(n+1!}$$

Specijalno za $m = 2$ se dobija

$$\left| y_i(x) - y_i^n(x) \right| \leq \frac{M}{2L} \frac{\left[(2L) \left| x - x_o \right| \right]^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (i = 1,2)$$

(videti [13]).

Primedba 1. Nešto bolja procena za greške se može dobiti primenom Pikarove metode na sistem diferencijalnih jednačina (3), sa zadanim početnim uslovima (4), što će biti pokazano u glavi III.

Primedba 2. Od bitnijih karakteristika Pikarove metode mogu se istaći sledeće: a) Pikarova metoda se može primeniti na široke klase diferencijalnih jednačina (1) i sistema diferencijalnih jednačina (I.45).
(pri tome nije potrebna analitičnost funkcija $f(x,y)$ i $f_i(x, y_1, \ldots, y_m)$; b) Osnovni problem primene te metode je taj što se realizujući je, nekada, može doći do veoma komplikovanih (ili nerešivih) tipova integrala. Tada se za rešavanje zadatka (1)-(2) ili (I.45)-(I.46) mora upotrebiti neka druga metoda npr. Pikar (varijanta Orlova) metoda koja je izložena u I.7.

1.7. Pikar (varijanta Orlova) metoda)

7.1. Neka je data diferencijalna jednačina (1) sa početnim uslovom (2). Približno rešenje diferencijalne jednačine (1) sa zadatim uslovom (2) se nalazi, saglasno ovoj metodi (videti [14] i [6] korišćenjem nizova približavanja odredjenih formulom

$$y_i^*(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} \overline{f(x,y_{i-1}^*(x)dx}^{\,i}, \quad y_o^* = y_o \qquad (i = 1,2,3,\ldots), \tag{I.47}$$

gde simbol $\underline{f(x,y_{i-1}^*(x))}_{\,i}$ označava da odgovarajuću funkciju $f(x,y_{i-1}^*(x))$ treba razviti u Tejlorov (Taylor Brook, 1685-1731) red po $(x-x_o)$ i zadržati i prvih članova tog razvitka.

7.2. Karakteristike ove metode su sledeće:

a) Metod se može primeniti kada je funkcija $f(x,y)$ analitička funkcija u blizini $x = x_o$, $y = y_o$.

b) Uzastopne aproksimacije su polinomi sve većeg stepena.

c) Svi ti polionomi su delimični zbirovi Tejlorovog reda - integrala date jednačine za $x = x_o$, $y = y_o$, tako da ova metoda ustvari predstavlja metodu integracije pomoću Tejlorovog reda.

d) Aproksimacije se uvek mogu izvoditi do ma koje granice željene tačnosti.

e) Računske teškoće prilikom izračunavanja daljih aproksimacija ne povećavaju se osetno u odnosu na prve aproksimacije.

f) Metoda se lako generališe na sistem od n deferencijalne jednačine prvog reda, pri tom obim računanja raste otprilike sa n.

g) Samim tim metod se može primeniti i na diferencijalne jednačine višeg reda.

h) U slučaju kada je traženi Cauchy-jev integral polinom može se dobiti tačno rešenje

Primedba 1. Tvrdjenja pod b) i c) su dokazana u [14], a na jedan drugi način u [15].

Primedba 2. Za ovaj rad su naročito interesantne karakteristike navedene pod f) i g). Lako je uočiti da će se npr. za sistem diferencijalnih jednačina oblika

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \varphi(x,y,z) \end{cases} \tag{I.48}$$

sa zadatim početnim uslovima

$$y(x_o) = y_o, z(x_o) = z_o \tag{I.49}$$

koristiti nizovi približavanja odredjeni formulama

$$\begin{cases} y_i^*(x) = y_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{f(x, y_{i-1}^*(x), z_{i-1}^*(x))}^{\,i} dx \\ z_i^*(x) = z_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x, y_{i-1}^*(x), z_{i-1}^*(x))}^{\,i} dx. \end{cases} \tag{I.50}$$

što će biti korišćeno u glavi III.

GLAVA II

NEKE NOVE NUMERIČKE METODE ZA NALAŽENJE PRIBLIŽNIH REŠENJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

II.1. Ojler-Košijeva interpolaciona metoda

1.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) najpre se izabere dovoljno malo $h>0$ i formira niz $\{x_i\}$ koristeći se jednakošću (I.1). Zatim se izračunava niz vrednosti $\{y_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2,\dots)$, pri čemu se svako y_{i+1} računa korišćenjem niza približavanja odredjenih formula

(II.1) $$y_{i+1}^{(o)} = y_i + hf(x_i,y_i) \qquad (i = 0,1,2,\dots)$$

i

(II.2) $$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(o)})\right] \qquad (i = 0,1,2,\dots),$$

kao i formulom

(II.3) $$y_{i+1}^{(k+2)} = \frac{y_{i+1}^{(k)} \cdot \mathscr{C}(y_{i+1}^{(k+1)}) - y_{i+1}^{(k+1)} \cdot \mathscr{C}(y_{i+1}^{(k)})}{\mathscr{C}(y_{i+1}^{(k+1)}) - y_{i+1}^{(k+1)} - \mathscr{C}(y_{i+1}^{(k)}) + y_{i+1}^{(k)}} \qquad (i,k = 0,1,2,\dots),$$

gde je

(II.4) $$\mathscr{C}(y_{i+1}^{(k)}) = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)})\right] \qquad (i,k = 0,1,2,\dots$$

1.2. Niz iteracija se produžava dok se dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(\ell)}$ i $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $\mathscr{C}(y_{i+1}^{(\ell+1)})$ ili $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $(y_{i+1}^{(\ell)})$

$(\ell = 0,1,2,\dots)$ ne poklope medjusobno na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je

$y_{i+1} = \bar{y}_{i+1}$, gde je $\bar{y}_{i+1}$ zajednički deo približavanja $y_{i+1}^{(\ell)}$ i $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $\mathcal{E}(y_{i+1}^{(\ell+1)})$ ili $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $\mathcal{E}(y_{i+1}^{(\ell)})$.

1.3. Niz $\{y_{i+1}^{(k)}\}$ definisan formulama (II.1), (II.2), (II.3) i (II.4) konvergira brže od niza $\{\bar{y}_{i+1}^{(s)}\}$ pri čemu je

(II.5) $$\bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_i + hf(x_i,\bar{y}_i) \qquad (\bar{y}_o = y_o,\ i = 0,1,2,\ \ldots)$$

i

(II.6) $$\bar{y}_{i+1}^{(s)} = \bar{y}_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,\bar{y}_i) + f(x_{i+1},\ \bar{y}_{i+1}^{(s-1)})\right] \quad (i = 0,1,2,\ldots;$$

$(s = 1,2,3,\ldots)$

tj. od niza koji se formira u Ojler-Košijevoj iterativnoj metodi, pa je očigledno da Ojler-Košijevu interpolacionu metodu treba koristiti pri sporijoj konvergenciji niza definisanog formulama (II.5) i (II.6). Dokaz za predhodno tvrdjenje se relativno lako izvodi (videti [16]) i konstatuje se da je za Ojler-Košijevu iterativnu metodu

$\varepsilon_n = y(x_{i+1}) - \bar{y}_{i+1}^{(n)} = K_1\varepsilon_{n-1}$, a za Ojler-Košijevu interpolacionu metodu $\varepsilon_n = y(x_{i+1}) - y_{i+1}^{(n)} = K_2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_{n-2}$ gde je $y(x_{i+1})$ tačno rešenja zadatka (1)-(2) za $x = x_{i+1}$, a K_1 K_2, konstante koje se računaju pomoću h, f'_y i f''_{y^2} za $x = x_{i+1}$ i $y = y(x_{i+1})$.

1.4. Izraz $\mathcal{E}(y_{i+1}^{(k+1)}) - y_{i+1}^{(k+1)} - \mathcal{E}(y_{i+1}^{(k)}) + y_{i+1}^{(k)}$, koji je imenilac, formule (II.3), je mali za veliko k, pa nalaženje vrednosti $y_{k+1}^{(k+2)}$ treba izvoditi sa više značajnih cifara predhodno dobijenih vrednosti $\varphi(y_{i+1}^{(k+1)})$, $\varphi(y_{i+1}^{(k)})$, $y_{i+1}^{(k+1)}$ i $y_{i+1}^{(k)}$.

1.5. Algoritam izložene metode može se nekada izmeniti i to na nekoliko načina:

a) Vrednosti $y_{i+1}^{(r)}$ se računaju pomoću formula (II.5) i (II.6) do izvesnog r_o, a zatim korišćenjem formula (II.2), (II.3) i (II.4);

b) Vrednosti $y_{i+1}^{(r)}$ se računaju do izvesnog r_1 upotrebljavajući formule (II.1), (II.2), (II.3) i (II.4), a za $r > r_1$ se koristi formula (II.6);

c) Vrednosti $y_{i+1}^{(r)}$ se računaju kombinujući a) i b). Korisnost izmene predloženog algoritma u konkretnim primerima je jasna.

1.6. Napomena 1. Sve što je rečeno u tačkama 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. odnosi se, bez izmena (samo se u formulacijama upotrebljavaju druge formule) na sve metode koje se dobijaju korišćenjem linearne interpolacije, a koje će u daljem tekstu biti prezentirane.

1.7. Primer.

Neka je data diferencijalna jednačina

$y' = x^2 + y^2, \quad y(2) = 2, \quad h = 0,1.$

Ojler-Košijevom iterativom i Ojler-Košijevom metodom dobijenom korišćenjem linearne interpolacije naći y(2.1) na četiri decimale.

a) Ojler-Košijevom interpolacionom metodom se dobija

$$y_1^{(o)} = y_o + hf(x_o, y_o) = 2,8,$$

$$y_1^{(1)} = \varphi(y_1^{(o)}) = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o, y_o) + f(x_1, y_1^{(1)})\right] = 3,0125,$$

$$\varphi(y_1^{(1)}) = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o) + f(x_1,y_1^{(1)})\right] = 3{,}0742578,$$

$$y_1^{(2)} = \frac{y_1^{(o)} \cdot \varphi(y_1^{(1)}) - y_1^{(1)} \varphi(y_1^{(o)})}{\varphi(y_1^{(1)}) - y_1^{(1)} - \varphi(y_1^{(o)}) + y_1^{(o)}} = 3{,}0995593,$$

$$\varphi(y_1^{(2)}) = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o) + f(x_1,y_1^{(2)})\right] = 3{,}100863,$$

$$y_1^{(3)} = \frac{y_1^{(1)}\varphi(y_1^{(2)}) - y_1^{(2)} \cdot \varphi(y_1^{(1)})}{\varphi(y_1^{(2)}) - y_1^{(2)} - \varphi(y_1^{(1)}) + y_1^{(1)}} = 3{,}1014377$$

i

$$\varphi(y_1^{(3)}) = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o) + f(x_1 y_1^{(3)})\right] = 3{,}1014457,$$

pa je, na četiri decimale $y_1 = 3{,}1014$.

b) Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija

$\bar{y}_1^{(o)} = 2{,}8,$ $\bar{y}_1^{(1)} = 3{,}0125,$ $\bar{y}_1^{(2)} = 3{,}0742578,$

$\bar{y}_1^{(3)} = 3{,}093053,$ $\bar{y}_1^{(4)} = 3{,}0988488,$ $\bar{y}_1^{(5)} = 3{,}1006431,$

$\bar{y}_1^{(6)} = 3{,}1011993,$ $\bar{y}_1^{(7)} = 3{,}101378$ i $\bar{y}_1^{(8)} = 3{,}1014253.$

Dobija se, dakle, isti rezultat, ali sa više računanja.

Napomena 2. Isti zadatak, sa $\mathcal{E} = 10^{-5}$ i zahtevom da se nadje y(2,2), je realizovan na računaru IBM 360/44. Tom prilikom je dobijeno da je $y_2 = 5{,}62941$ Ojler-Košijevom metodom sa korišćenjem linearne interpolacije i to u 7 iteracija. Ojler-Košijevom iterativnom metodom je dobijeno $y_2 = 5{,}62940$ u 21-voj iteraciji što jasno ilustruje različitu efikasnost metoda.

II.2. Ojler-Košijeva interpolaciona metoda (modifikovana varijanta u odnosu na prediktor)

2.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ korišćenjem formule (I.1). Zatim se izračuna y_1 nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina.

Dalje je

(II.7) $$y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{2}\left[3f_i - f_{i-1}\right] \quad (i = 1,2,3,\ldots),\ f_r = f(x_r, y_r)$$

$(r = 0,1,2, \ldots)$

a $y_{i+1}^{(1)}$ se računa korišćenjem formule (II.2). Sledeća približavanja se računaju pomoću formula (II.3) i (II.4) (pri čemu je $i = 1,2,3, \ldots$).

2.2. Sve konstatacije tačaka 1.2, 1.4. i 1.5. važe bez izmene. Takodje važi i konstatacija analogna konstataciji tačke 1.3., tj. niz $\left\{y_{i+1}^{(k)}\right\}$ dobijen pomoću formula (II.7), (II.2), (II.3) i (II.4) konvergira brže od niza $\left\{\bar{y}_{i+1}^{(s)}\right\}$, pri čemu se $\bar{y}_{i+1}^{(o)}$ dobija realizacijom formule

$$\bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_i + \frac{h}{2}\left[3\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}\right] \quad (i=1,2,3,\ldots),$$

$\bar{y}_o = y_o$, $\bar{f}_r = f(x_r, \bar{y}_r)$ $\quad (r = 0,1,2, \ldots)$, a sledeće vrednosti se dobijaju korišćenjem formule (II.6) (videti [3] i [16]).

II.3. Ojler-Košijeva interpolaciona metoda (druga modifikacija u odnosu na prediktor)

3.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja zadatka (1)-(2), izračuna vrednost y_1.

Dalje je

(II.8) $$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + 2hf_i \ , \quad f_i = f(x_i,y_i) \quad (i = 1,2,3, \ldots),$$

a sledeće vrednosti se računaju koristeći se formulama (II.2), (II.3) i (II.4).

3.2. Sve konstatacije tačaka 1.2, 1.3., 1.4. i 1.5. važe.

Adamsove interpolacione metode

Metoda II.4.

4.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) izabere se, najpre, dovoljno malo h i formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Za primenu Metode II.4. je potrebno da se, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina, izračunaju vrednosti y_1 i y_2. Kada je to učinjeno, dalje je

(II.9) $$y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{12}\left[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}\right]$$

$(i = 2,3,4,\ldots)$, $f_r = f(x_r,y_r)$ $(r = 0,1,2,\ldots)$

i

(II.10) $$y_{i+1}^{(1)} = y_1 + \frac{h}{12}\left[5f_{i+1}^{(o)} + 8f_i - f_{i-1}\right] \quad (i = 2,3,4,\ldots),$$

gde je $f_r = f(x_r,y_r)$, $(r = 0,1,1,\ldots)$,

$f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1},y_{i+1}^{(o)})$ $(i = 2,3,4,\ldots)$, a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formule (II.3), gde je

(II.11) $$\mathcal{C}(y_{i+1}^{(k)}) = y_i + \frac{h}{12}\left[5f_{i+1}^{(k)} + 8f_i - f_{i-1}\right],$$

$$f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \quad (i = 2,3,4,\ldots), \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

4.2. Sve konstatacije tačaka 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.4.

4.3. Primer

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = x^2 + y^2 - 7, \quad y(2) = 2, \ h = 0.1.$$

Neka je, dalje, metodom Runge-Kuta nadjeno $y_1 = 2{,}1469066$ i $y_2 = 2{,}4262318$.
Treba naći, približno, $y(2{,}3)$ Metodom II.4. i odgovarajućom Adamsovom metodom.
Metodom II.4. se dobija

$$y_3^{(o)} = y_2 + \frac{h}{12}\left[23f_2 - 16f_1 + 5f_o\right] = 2{,}9129357,$$

$$y_3^{(1)} = \mathcal{C}(y_3^{(o)}) = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(o)} + 8f_2 - f_1\right] = 2{,}9401448,$$

$$\mathcal{C}(y_3^{(1)}) = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(1)} + 8f_2 - f_1\right] = 2{,}9467805,$$

$$y_3^{(2)} = \frac{y_3^{(o)}\,\mathcal{C}(y_3^{(1)}) - y_3^{(1)}\,\mathcal{C}(y_3^{(o)})}{\mathcal{C}(y_3^{(1)}) - y_3^{(1)} - \mathcal{C}(y_3^{(o)}) + y_3^{(o)}} = 2{,}9489194$$

i

$$\mathcal{C}(y_3^{(2)}) = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(2)} + 8f_2 - f_1\right] = 2{,}9489336,$$

pa je $y_3 = 2{,}9489$ na četiri decimale.

Odgovarajućom Adamsoyom metodom se dobija

$\bar{y}_3^{(o)} = 2,9129357$, $\bar{y}_3^{(1)} = 2,9401448$, $\bar{y}_3^{(2)} = 2,9467805$,

$\bar{y}_3^{(3)} = 2,9484082$, $\bar{y}_3^{(4)} = 2,9488079$, $\bar{y}_3^{(5)} = 2,9489062$ i

$\bar{y}_3^{(6)} = 2,9489303$,

pa je $y_3 = 2,9489$ na četiri decimale.

Metoda II.5

5.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) kao i kod predhodne, Metode II.4., se najpre formira niz $\{x_i\}$, a potom se izračunaju, približno, y_1 i y_2.

Dalje je

$$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right] \quad (i = 2,3,4,\ldots), \tag{II.12}$$

$f_r = f(x_r, y_r) \quad (r = 0,1,2,\ldots)$,

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama (II.10), (II.3) i (II.11).

5.2. Konstatacije 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.5.

5.3. Greška prediktora (II.12) je manja od greške prediktora (II.9), pri istom h (videti [7]), pa je računanje, približnih rešenja diferencijalnih jednačina, korišćenjem formula (II.12), (II.10), (II.3) i (II.11) pogodnije od računanja pomoću formula (II.9), (II.10), (II.3) i (II.11).

Metoda II.6

6.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina izračuna y_1, y_2 i y_3.

Dalje je

$$y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right], \tag{II.13}$$

$$(i = 3,4,5,\ldots), \quad f_r = f(x_r, y_2), \quad (r = 0,1,2,\ldots),$$

a sledeće vrednosti se računaju koristeći se formulom

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1}^{(o)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right], \tag{II.14}$$

$$f_m = f(x_m, y_m) \quad (m = 1,2,3,\ldots), \quad f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)})$$

$$(i = 3,4,5,\ldots)$$

i formulom (II.3), gde je

$$\varphi(y_{i+1}^{(k)}) = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1}^{(k)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right], \tag{II.15}$$

$$f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \quad (i = 3,4,5,\ldots), \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

6.2. Konstatacije izrečene za ranije prezentirane metode važe i za Metodu II.6.

Metoda II.7.

7.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) se najpre formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3

Dalje je

$$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots), \tag{II.16}$$

a sledeća približavanja se dobijaju koristeći se formulama (II.14), (II.3) i (II.15).

7.2. Konstatacije 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.7.

7.3. Greška prediktora (II.13) je manja od greške prediktora (II.16) (videti [7], pa je računanje vrednosti približnog rešenja zadatka (1)-(2) Metodom II.6. pogodnije nego metodom II.7.

Metoda II.8.

8.1. Rešavajući zadatak (1)-(2), na ranije navedeni način, se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se, kao kod Metode II.7. i Metode II.8., izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje se "nulto približavanje" za i + 1 -vi korak računa korišćenjem formule (II.13), a sledeća približavanja se računaju pomoću formule

$$y_{i+1}^{(1)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1}^{(o)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots), \tag{II.17}$$

$$f_m = f(x_m, y_m) \quad (m = 1,2,3,\ldots), \quad f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)})$$

$(i = 3,4,5,\ldots)$

i formule (II.3), gde je

$$\varphi(y_{i+1}^{(k)}) = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1}^{(k)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots), \tag{II.18}$$

$$f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \quad (i = 3,4,5,\ldots), \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

8.2. Konstatacije 1.2., 1.3, 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.3.

8.3. Greška formule (II.17) je manja od greške formule (II.14) ([7]), pa je Metoda II.8. pogodnija za primenu od Metode II.6.

Metoda II.9.

9.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje se "nulto približavanje za i + 1 - vi korak računa upotrebom formule (II.16), a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama (II.17), (II.3) i (II.18).

9.2. Konstatacije 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.9.

9.3. Metoda II.9. je pogodnija za primenu od Metode II.7. zbog manjeg broja računanja vrednosti funkcije f(x,y).

Metoda II.10.

10.1. Navedimo još jednu Adamsovu interpolacionu metodu koja se može upotrebljavati za nalaženje približnog rešenja zadatka (1)-(2).

Najpre se, u ovoj metodi, na ranije navedeni način formira niz $\{x_i\}$, a potom, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnog rešenja diferencijalnih jednačina, se izračuna y_1, y_2, y_3 i y_4.

Dalje je

(II.19) $$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[9f_i - 9f_{i-1} + 10f_{i-2} - 5f_{i-3} + f_{i-4}\right]$$

$(i = 4,5,6,\ldots)$, $f_r = f(x_r, y_r)$ $(r = 0,1,2,\ldots)$,

a sledeća približavanja se dobijaju koristeći se formulom

(II.20) $$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1}^{(o)} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right]$$

$(i = 4,5,6,\ldots)$, $f_m = f(x_m, y_m)$ $(m = 1,2,3,\ldots)$,

$f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)})$ $(i = 4,5,6,\ldots)$

i formulom (II.3), gde je

(II.21) $$\varphi(y_{i+1}^{(k)}) = y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1}^{(k)} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right]$$

$(i = 4,5,6,\ldots)$, $f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$ $(i = 4,5,6,\ldots)$,

$(k = 0,1,2,\ldots)$.

10.2. Konstatacije 1.2., 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Metodu II.10.

II.11. Milnova interpolaciona metoda

11.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja zadatka (1)-(2) izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje je

(II.22) $$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$$f_m = f(x_m, y_m) \quad (m = 1,2,3,\ldots)$$

i

(II.23) $$y_{i+1}^{(1)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(o)}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$$f_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(o)}) \quad (i = 3,4,5,\ldots).$$

Ako je $\frac{1}{29}\left|y_{i+1}^{(1)} - y_{i+1}^{(o)}\right| > \varepsilon$, gde je ε zadana granica tačnosti tada se sledeća približavanja računaju koristeći se formulom (II.3), gde je

(II.24) $$\varphi(y_{i+1}^{(k)}) = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(k)}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$$f_{i+1}^{(k)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

11.2. Sve konstatacije tačaka 1.2, 1.4. i 1.5. važe i za Milnovu interpolacionu metodu, a takodje važi i da niz $\left\{y_{i+1}^{(k)}\right\}$ dobijen korišćenjem formula (II.22), (II.23), (II.3) i (II.24) konvergira brže od niza $\bar{y}_{i+1}^{(s)}$ pri čemu se $\bar{y}_{i+1}^{(o)}$ i $\bar{y}_{i+1}^{(1)}$ dobijaju pomoću formula

(II.25) $$\bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2\bar{f}_{i-2} - \bar{f}_{i-1} + 2\bar{f}_i\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$$\bar{f}_m = f(x_m, \bar{y}_m) \quad (m = 1,2,3,\ldots), \quad \bar{y}_o = y_o$$

i

(II.26) $$\bar{y}_{i+1}^{(1)} = \bar{y}_{i-1} + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_{i-1} + 4\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1}^{(o)}\right] \qquad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$$\bar{f}_{i+1}^{(o)} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^{(o)}) \qquad (i = 3,4,5,\ldots),$$

a sledeće vrednosti se dobijaju korišćenjem formule

(II.27) $$\bar{y}_{i+1}^{(s)} = \bar{y}_{i-1} + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_{i-1} + 4\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1}^{(s-1)}\right] \qquad (i = 3,4,5,\ldots),$$

$(s = 1,2,3,\ldots)$, $\bar{f}_{i+1}^{(s)} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^{(s)})$ $(s = 0,1,2,\ldots)$

(videti [9] i [16]).

11.4. Primer

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = -\frac{x^2y^2 + 4xy + 2}{x^2}, \quad y(\tfrac{1}{2}) = -4,8.$$

Miliovom i Milnovom interpolacionom metodom naći $y(0,9)$ na četiri decimale sa $h = 0,1$.

Početne vrednosti se mogu izračunati metodom Runge-Kuta. Dobija se

$y_1=\bar{y}_1= -4,2029098$, $y_2=\bar{y}_2= -3,8095345$ i $y_3=\bar{y}_3= -3,5526396$.

Dalje je

$f_1=\bar{f}_1=4,7993925$, $f_2=\bar{f}_2=3,1745826$ i $f_3=\bar{f}_3=2,016950$.

Milnovom metodom se dobija

$$\bar{y}_4^{(o)} = \bar{y}_o + \frac{4h}{3}\left[2\bar{f}_1 - \bar{f}_2 + 2\bar{f}_3\right] = -3,4055863, \quad \bar{f}_4^{(o)} = 1,0687851,$$

$$\bar{y}_4^{(1)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_2 + 4\bar{f}_3 + \bar{f}_4^{(o)}\right] = -3,3991623, \quad \bar{f}_4^{(1)} = 1,0839480,$$

$$\bar{y}_4^{(2)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_2 + 4\bar{f}_3 + \bar{f}_4^{(1)}\right] = -3,3986172, \quad \bar{f}_4^{(2)} = 1,0851375,$$

$$\bar{y}_4^{(3)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_2 + 4\bar{f}_3 + \bar{f}_4^{(2)}\right] = -3,3986172, \quad \bar{f}_4^{(3)} = 1,0852307$$

i

$$\bar{y}_4^{(4)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_2 + 4\bar{f}_3 + \bar{f}_4^{(3)}\right] = -3,3986141,$$

pa je $y_4 = 3,3986$ na četiri decimale.

Milnovom interpolacionom metodom se dobija

$$f_4^{(1)} = \bar{f}_4^{(1)}, \quad \varphi(y_4^{(o)}) = \bar{y}_4^{(1)}, \quad \varphi(y_4^{(1)}) = \bar{y}_4^{(2)},$$

$$y_4^{(2)} = \frac{y_4^{(o)}\varphi(y_4^{(1)}) - y_4^{(1)}\varphi(y_4^{(o)})}{\varphi(y_4^{(1)}) - y_4^{(1)} - \varphi(y_4^{(o)}) + y_4^{(o)}} = -3,3986077,$$

$$f_4^{(2)} = 1,085253$$

i

$$\varphi(y_4^{(2)}) = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_2 + 4f_3 + f_4^{(2)}\right] = -3,3986134,$$

pa je dobijeno poklapanje i na pet decimala, a na četiri decimale je $y_4 = -3,3986$.

Interesantno je napomenuti da je tačno rešenje polazne Rikatijeve (Jacobo Riccati, 1676-1754) jednačine

$$y = \frac{3,5 - x}{x(x-1,75)}, \text{ pa je } y(0,9) = -3,3987 \text{ na četiri decimale.}$$

II.12. Levi-Bagotova (H.Levy, E.A.Baggot) interpolaciona metoda

12.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) najpre se ([10] i [1]) na ranije navedeni način formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1 i y_2. Dalje je

(II.28) $$y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right] \quad (i = 2,3,4,\ldots),$$

$$f_r = f(x_r, y_r) \quad (r = 0,1,2,\ldots),$$

a $y_{i+1}^{(1)}$ se računa upotrebom formule (II.23).

Sledeće vrednosti približnog rešenja se dobijaju korišćenjem formule (II.3), gde se $\varphi(y_{i+1}^{(k)})$ računa preko formule (II.24).

Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

12.2. Konstatacije 1.2, 1.3., 1.4. i 1.5. važe i za Levi-Bagotovu metodu.

II.13. Neke napomene u vezi sa generalizacijama izloženih metoda

13.1. Sve navedene metode se mogu primeniti i na sisteme od m diferencijalnih jednačina prvog reda (samim tim i na diferencijlnu jednačinu m-tog reda. Npr. za sistem

(II.29) $$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \varphi(x,y,z) \end{cases} \quad y(x_o) = y_o,\ z(x_o) = z_o .$$

Nizovi vrednosti $\{y_{i+1}\}$ i $\{z_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ u Ojler-Košijevoj interpolacionoj metodi se dobijaju korišćenjem formula

(II.30) $$\begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + h\varphi(x_i, y_i, z_i) \end{cases} \quad (i = 0,1,2,\ldots)$$

i

$$
(\mathrm{II}.31)\quad \left\{
\begin{aligned}
y_{i+1}^{(1)} &= y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i,z_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(o)},\ z_{i+1}^{(o)})\right] \\
z_{i+1}^{(1)} &= z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_i,y_i,z_i) + \varphi(x_{i+1},y_{i+1}^{(o)},z_{i+1}^{(o)})\right] \quad (i=0,1,2,\ldots)
\end{aligned}
\right.
$$

kao i formula

$$
(\mathrm{II}.32)\quad \left\{
\begin{aligned}
y_{i+1}^{(k+2)} &= \frac{y_{i+1}^{(k)}\,A_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k+1)}A_{i+1}^{(k)}}{A_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k+1)} - A_{i+1}^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}} \\
z_{i+1}^{(k+2)} &= \frac{z_{i+1}^{(k)}\,B_{i+1}^{(k+1)} - z_{i+1}^{(k+1)}\,B_{i+1}^{(k)}}{B_{i+1}^{(k+1)} - z_{i+1}^{(k+1)} - B_{i+1}^{(k)} + z_{i+1}^{(k)}} \qquad (i,k=0,1,2,\ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

gde je

$$
A_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,y_i,z_i) + f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)},z_{i+1}^{(k)})\right]
$$

$$
B_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_i,y_i,z_i) + \varphi(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)},z_{i+1}^{(k)})\right] \quad (i,k=0,1,2,\ldots).
$$

13.2. Nizovi iteracije se produžavaju dok se po dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(\ell)}$ i $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $y_{i+1}^{(\ell)}$ i $A_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $y_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $A_{i+1}^{(\ell)}$ kao i $z_{i+1}^{(\ell)}$ i $z_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $z_{i+1}^{(\ell)}$ i $B_{i+1}^{(\ell+1)}$ ili $z_{i+1}^{(\ell+1)}$ i $B_{i+1}^{(\ell)}$ jednovremeno ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

13.3. Primer

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$
\left\{
\begin{aligned}
y' &= x + y + z^3 \\
z' &= 2x^2 + y^2 + z \qquad y(1)=z(1) = 1,\ h = 0{,}1.
\end{aligned}
\right.
$$

Ojler-Košijevom iterativom i Ojler-Košijevom interpolacinom metodom naći $y(1,1)$ i $z(1,1)$ na četiri decimale.

Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija

$\bar{y}_1^{(o)} = 1,3,$ $\bar{z}_1^{(o)} = 1,4,$

$\bar{y}_1^{(1)} = 1,4072$ $\bar{z}_1^{(1)} = 1,4755,$

$\bar{y}_1^{(2)} = 1,4359755$ $\bar{z}_1^{(2)} = 1,4937855,$

$\bar{y}_1^{(3)} = 1,443460,$ $\bar{z}_1^{(3)} = 1,4987905,$

$\bar{y}_1^{(4)} = 1,4455151,$ $\bar{z}_1^{(4)} = 1,5001183,$

$\bar{y}_1^{(5)} = 1,4460656,$ $\bar{z}_1^{(5)} = 1,5004816,$

$\bar{y}_1^{(6)} = 1,4462158,$ $\bar{z}_1^{(6)} = 1,5005793,$

$\bar{y}_1^{(7)} = 1,4462563,$ $\bar{z}_1^{(7)} = 1,5006059,$

$\bar{y}_1^{(8)} = 1,4462673,$ $\bar{z}_1^{(8)} = 1,5006131,$

pa je $y_1 = 1,4463$ i $z_1 = 1,5006.$

Ojler-Košijevom interpolacionom metodom se dobija (ako se preskoči $y_1^{(o)}$ i $z_1^{(o)}$, videti tačku 1,5)

$$y_1^{(3)} = \frac{y_1^{(1)}A_1^{(2)} - y_1^{(2)}A_1^{(1)}}{A_1^{(2)} - y_1^{(2)} - A_1^{(1)} + y_1^{(1)}} = 1,4460898,$$

$$z_1^{(3)} = \frac{z_1^{(1)}B_1^{(2)} - z_1^{(2)}B_1^{(1)}}{B_1^{(2)} - z_1^{(2)} - B_1^{(1)} + z_1^{(1)}} = 1,5006814,$$

$$A_1^{(3)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_1^{(3)}\right] = 1{,}4462845,$$

$$B_1^{(3)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi_o + \varphi_1^{(3)}\right] = 1{,}5005928,$$

$$y_1^{(4)} = \frac{y_1^{(2)} \cdot A_1^{(3)} - y_1^{(3)} A_1^{(2)}}{A_1^{(3)} - y_1^{(3)} - A_1^{(2)} + y_1^{(2)}} = 1{,}4463496 \quad \text{i}$$

$$z_1^{(4)} = \frac{z_1^{(2)} B_1^{(3)} - z_1^{(3)} B_1^{(2)}}{B_1^{(3)} - z_1^{(3)} - B_1^{(2)} + z_1^{(2)}} = 1{,}5005693$$

pa je dobijen isti rezultat, ali sa manje računanja.

13.4. Na analogan način se mogu i druge predložene metode prilagoditi za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina i diferencijalnih jednačina višeg reda.

II.14. Stefensen-Ojler-Košijeva iterativna metoda

14.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) najpre se izabere dovoljno malo $h>0$ i formira se $\{x_i\}$ koristeći se jednakošću (I.1). Zatim se izračunava niz vrednosti $\{y_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2,\ldots)$, pri čemu se svako y_{i+1} računa (ako je izračunato y_i) iterativnim putem. Pri tome se najpre računa vrednost $y_{i+1,o}^{(o)}$ preko formule

$$y_{i+1,o}^{(o)} = y_i + hf_i, \qquad f_i = f(x_i, y_i), \tag{II.33}$$

a sledeće vrednosti približnog rešenja y_{i+1} se računaju koristeći se formulama

$$
\text{(II.34)} \quad \begin{cases} y^{(1)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f^{(o)}_{i+1,k}\right], \\ y^{(2)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f^{(1)}_{i+1,k}\right], \end{cases}
$$

i

$$
\text{(II.35)} \quad y^{(o)}_{i+1,k+1} = \frac{y^{(2)}_{i+1,k} \cdot y^{(o)}_{i+1,k} - \left[y^{(1)}_{i+1,k}\right]^2}{y^{(2)}_{i+1,k} - 2y^{(1)}_{i+1,k} + y^{(o)}_{i+1,k}} \qquad (k = 0,1,2,\ldots),
$$

gde je $f^{(s)}_{i+1,k} = f(x_{i+1}, y^{(s)}_{i+1,k})$ $(s=0,1;\ k = 0,1,2,\ldots)$.

14.2. Niz iteracija se produžava dok se dve uzastopne vrednosti $y^{(2)}_{i+1,m}$ i $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ ili $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ i $y^{(1)}_{i+1,m+1}$ ili ili $y^{(1)}_{i+1,m}$ i $y^{(2)}_{i+1,m}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ ne poklope medjusobno na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1} = \bar{y}_{i+1}$, gde je y_{i+1} zajednički deo približavanja $y^{(2)}_{i+1,m}$ i $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ ili $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ i $y^{(1)}_{i+1,m+1}$ ili $y^{(1)}_{i+1,m}$ i $y^{(2)}_{i+1,m}$.

14.3. Niz $\left\{y^{(s)}_{i+1,k}\right\}$ definisan formulama (II.33), (II.34) i (II.35) konvergira brže od niza koji se formira u iterativnoj Ojler-Košijevoj metodi formule (II.5) i (II.6), videti [16] .

14.4. Izraz $y^{(2)}_{i+1,k} - 2y^{(1)}_{i+1,k} + y^{(o)}_{i+1,k}$ koji je imenilac formule (II.35) je mali za veliko k, pa nalaženje vrednosti $y^{(o)}_{i+1,k+1}$ treba izvoditi sa više značajnih cifara prethodno dobijenih vrednosti $y_{i+1,k}^{(2)}$, $y_{i+1,k}^{(1)}$ i $y_{i+1,k}^{(o)}$.

14.5. Algoritam izložene metode može se nekada izmeniti i to na nekoliko načina:

a) Vrednosti $y_{i+1,o}^{(s)}$ se računaju pomoću formula (II.5) i (II.6) do izvesnog s_o, a zatim korišćenjem formula (II.34) i (II.35);

b) Vrednosti $y_{i+1,r}^{(s)}$ se do izvesnih $r=r_1$ i $s=s_1$ računaju upotrebljavajući formule (II.33), (II.34) i (II.35), a za $r > r_1$ (ili $r = r_1$ i $s > s_1$) se koristi formula (II.6);

c) Vrednosti $y_{i+1,r}^{(s)}$ se računaju kombinujući a) i b). Korisnost izmene predloženog algoritma u konkretnim primerima je jasna.

14.6. Sve što je rečeno u tačkama 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. odnosi se, bez izmena (samo se u formulacijama upotrebljavaju druge formule) na sve metode koje autor predlaže do kraja druge glave.

14.7. Primer

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y'=4 + 2x^2 + 1,5y^2, \quad y(1) = 1,1; \ h = 0,1.$$

Ojler-Košijevom iterativnom i Stefensen-Ojler-Košijevom iterativnom metodom naći y(1,1,) na četiri decimale.

Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija

$$\bar{y}_1^{(o)} = \bar{y}_o + hf(x_o,\bar{y}_o) = 1,8815,$$

$$\bar{y}_1^{(1)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(o)}\right] = 2,0772531,$$

$$\bar{y}_1^{(2)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(1)}\right] = 2,1353735,$$

$$\bar{y}_1^{(3)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(2)}\right] = 2,1537364,$$

$$\bar{y}_1^{(4)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(3)}\right] = 2,1596435,$$

$$\bar{y}_1^{(5)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(4)}\right] = 2,1615545,$$

$$\bar{y}_1^{(6)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(5)}\right] = 2,1621738,$$

$$\bar{y}_1^{(7)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(6)}\right] = 2,1623746,$$

$$\bar{y}_1^{(8)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(7)}\right] = 2,1624397,$$

$$\bar{y}_1^{(9)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(8)}\right] = 2,1624609$$

i

$$\bar{y}_1^{(10)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_o + \bar{f}_1^{(9)}\right] = 2,1624677,$$

pa je, na četiri decimale $y_1 = 2,1625$.

Stefensen-Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija

$$y_{1,o}^{(o)} = y_o + hf_o = \bar{y}_1^{(o)} = 1,8815,$$

$$y_{1,o}^{(1)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,o}^{(o)}\right] = 2,0772531,$$

$$y_{1,o}^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,o}^{(1)}\right] = 2,1353735,$$

$$y_{1,1}^{(o)} = \frac{y_{1,o}^{(o)} \cdot y_{1,o}^{(2)} - \left[y_{1,o}^{(1)}\right]^2}{y_{1,o}^{(o)} - 2y_{1,0}^{(1)} + y_{1,0}^{(2)}} = 2{,}1599169,$$

$$y_{1,1}^{(1)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,1}^{(o)}\right] = 2{,}161643,$$

$$y_{1,1}^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,1}^{(1)}\right] = 2{,}1622025,$$

$$y_{1,2}^{(o)} = \frac{y_{1,1}^{(o)} \cdot y_{1,1}^{(2)} - \left[y_{1,1}^{(1)}\right]^2}{y_{1,1}^{(o)} - 2y_{1,1}^{(1)} + y_{1,1}^{(2)}} = 2{,}1624378,$$

$$y_{1,2}^{(1)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,2}^{(o)}\right] = 2{,}1624602,$$

$$y_{1,2}^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,2}^{(1)}\right] = 2{,}1624675.$$

Dobija se da je $y_1 = 2{,}1625$, dakle isti rezultat, ali sa manje računica.

II.15. Stefensen-Ojler-Košijeva iterativna metoda (modifikovana varijanta u odnosu na prediktor)

15.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ korišćenjem formule (I.1). Zatim se izračuna y_1 nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina.

Dalje je

$$y_{i+1,o}^{(o)} = y_i + \frac{h}{2}\left[3f_i - f_{i-1}\right] \quad (i = 1,2,\ldots), \quad (f_i = f(x_i,y_i), \tag{II.36}$$

a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula (II.34) i (II.35).

15.2. Sve konstatacije tačaka 14.2., 14.4. i 14.5. važe bez izmene. Takodje važi i konstatacija analogna konstataciji tačke 14.3., tj. niz $\left\{y_{i+1,k}^{(s)}\right\}$ dobijen pomoću formula (II.36), (II.34) i (II.35) konvergira brže od niza $\left\{\bar{y}_{i+1}^{(s)}\right\}$, kod koga se $\bar{y}_{i+1}^{(o)}$ dobija realizacijom formule

$$\bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_i + \frac{h}{2}\left[3\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}\right] \quad (i = 1,2,3,\ldots),$$

$$\bar{y}_o = y_o, \ \bar{f}_r = f(x_r, \bar{y}_r) \qquad (r = 0,1,2\ldots)$$

a sledeće vrednosti se dobijaju korišćenjem formule (II.6) (videti [3] i [16]).

15.3. Primer

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = x^2 + y^2 - 6, \quad y(2) = 2$$

i neka je h = 0,1. Treba naći, približno y(2.2) na četiri decimale Ojler-Košijevom iterativnom i Stefensen-Ojler--Košijevom iterativnom metodom (modifikovana varijanta u odnosu na prediktor). Ako se najpre nadje, metodom Runge-Kuta y(2,1) dobija se da je y(2,1) = 2,2680.

Dole je Ojler-Košijevom iterativnom metodom

$\bar{y}_2^{(o)} = 2,6233824,$ $\qquad$ $\bar{y}_2^{(1)} = 2,7317979,$

$\bar{y}_1^{(2)} = 2,7608271,$ $\qquad$ $\bar{y}_1^{(3)} = 2,7687995,$

$\bar{y}_1^{(4)} = 2,7710037,$ $\qquad$ $\bar{y}_1^{(5)} = 2,7716142,$

$\bar{y}_1^{(6)} = 2,7717834$ i $\bar{y}_1^{(7)} = 2,7718303,$

pa je na četiri decimale $y_2 = 2,7718$.
Stefensen-Ojler-Košijevom metodom (modifikovanom varijantom u odnosu na prediktor) se dobija

$$y_{2,o}^{(o)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[3f_1 - f_o\right] = 2,7010736,$$

$$y_{2,o}^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_{2,o}^{(o)}\right] = 2,7524811,$$

$$y_{2,o}^{(2)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_{2,o}^{(1)}\right] = 2,7664988,$$

$$y_{2,1}^{(o)} = \frac{y_{2,o}^{(o)} \cdot y_{2,o}^{(2)} - \left[y_{2,o}^{(1)}\right]^2}{y_{2,o}^{(o)} - 2 \cdot y_{2,o}^{(1)} + y_{2,o}^{(2)}} = 2,7717559$$

i

$$y_{2,1}^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_{2,1}^{(o)}\right] = 2,7718227,$$

pa se dobijen isti rezultat, ali sa tri računanja manje nego Ojler-Košijevom iterativnom metodom.

II.16. Stefensen-Ojler-Košijeva iterativna metoda (druga modifikacija u odnosu na prediktor)

16.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja zadatka (1)-(2) izračuna vrednost y_1.

Dalje je

(II.37) $$y_{i+1,o}^{(o)} = y_{i-1} + 2hf_i,$$

a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula (II.34) i (II.35).

16.2. Sve konstatacije tačaka 14.2,14.3., 14.4. i 14.5. važe.

Stefensen-Adamsove iterativne metode

Metoda II.17.

17.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) izabere se, najpre, dovoljno malo h i formira niz $\{x_i\}$koristeći se formulom (I.1). Za primenu metode II.4. je potrebno da se, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina, izračunaju vrednosti y_1 i y_2. Kada je to učinjeno, dalje je

$$y_{i+1,o}^{(o)}=y_i+\frac{h}{12}\left[23f_i - 16f_{i-1}+ 5f_{i-2}\right], \tag{II.38}$$

a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1,k}^{(1)}&= y_i+\frac{h}{12}\left[5f_{i+1,k}^{(o)}+ 8f_i-f_{i-1}\right], \\ y_{i+1,k}^{(2)}&= y_1+ \frac{h}{12}\left[5f_{i+1,k}^{(1)}+ 8f_i- f_{i-1}\right] \qquad (k = o,1,2,\dots) \end{aligned}\right. \tag{II.39}$$

kao i formule (II.35).

17.2. Sve konstatacije tačaka 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.17.

Metoda II.18.

18.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) kao i kod predhodne, Metode II.17, se najpre formira niz $\{x_i\}$, a potom se izračunaju, približno, y_1 i y_2.

Dalje je

(II.40) $$y^{(o)}_{i+1,o} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right],$$

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama (II.39) i (II.35).

18.2. Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.18.

18.3. Greška prediktora (II.40) je manja ($\frac{1}{3}h^4$) od greške prediktora (II.38) ($\frac{3}{8}h^4$), pri istom h, pa je računanje približnih rešenja diferencijalnih jednačina korišćenjem formula (II.40), (II.39) i (II.35) pogodnije od računanja pomoću formula (II.38), (II.39) i (II.35).

Metoda II.19.

19.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina izračuna y_1, y_2 i y_3.

Dalje je

(II.41) $$y^{(o)}_{i+1,o} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right],$$

a sledeće vrednosti se računaju koristeći se formulama

(II.42) $$\begin{cases} y^{(1)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f^{(o)}_{i+1,k} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right] \\ y^{(2)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f^{(1)}_{i+1,k} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right] \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

i formulom (II.35).

19.2. Konstatacije izrečene za ranije prezentirane metode važe i za Metodu II.19.

Metoda II.20.

20.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje je

$$y_{i+1,o}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right], \tag{II.43}$$

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama (II.42) i (II.35).

20.2. Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.20.

20.3. Greška prediktora (II.41) je manja ($\frac{251}{720}h^5$) od greške prediktora (II.43) koja je($-\frac{29}{30}h^5$)pri istom h, pa je računanje korišćenjem Metode II.19. pogodnija nego upotrebom Metode II.20.

Metoda II.21.

21.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se kao kod Metode II.19. i Metode II.20. izračunaju vrednosti y_1,y_2 i y_3.

Dalje se "nulto približavanje" $(y_{i+1,o}^{(o)})$ za $(i+1)$-vi korak računa korišćenjem formule (II.41), a sledeća približavanja se računaju pomoću formula

$$
\text{(II.44)} \quad \begin{cases} y_{i+1,k}^{(1)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1,k}^{(o)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \\ \\ y_{i+1,k}^{(2)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1,k}^{(1)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \end{cases}
$$

i formule (II.35),

21.2. Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.21.

21.3. Greška korektora (II.44) je $-\frac{1}{90}h^5$, a greška korektora (II.42) je $-\frac{19}{720}h^5$. Računanje pomoću formule (II.44) se realizuje sa jednim računanjem manje vrednosti funkcije $f(x,y)$ nego računanje preko formule (II.42), pa je zbog svega toga Metoda II.21 pogodnija za primenu od Metode II.19.

Metoda II.22

22.1. Pri rešavanju zadatka (1)-(2) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje se "nulto približavanje" za $(i+1)$-vi korak računa upotrebom formule (II.43), a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula (II.44) i (II.35).

22.2 Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.22.

22.3. Metoda II.22. je pogodnija za primenu od Metode II.20. zbog manjeg broja računanja vrednosti funkcije $f(x,y)$.

Metoda II.23.

23.1. Navedimo još jednu Stefensen-Adamsovu iterativnu metodu koja se može koristiti za nalaženje približnih rešenja zadatka (1)-(2). Najpre se u ovoj metodi, na ranije navedeni način formira niz $\{x_i\}$, a potom, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja diferencijalnih jednačina, se izračuna y_1, y_2, y_3 i y_4.

Dalje je

$$y_{i+1,o}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[9f_i - 9f_{i-1} + 10f_{i-2} - 5f_{i-3} + f_{i-4}\right], \tag{II.45}$$

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1,k}^{(1)} &= y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1,k}^{(o)} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right] \\ y_{i+1,k}^{(2)} &= y_i + \frac{h}{720}\left[251f_{i+1,k}^{(1)} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right] \end{aligned}\right. \tag{II.46}$$

i formulom (II.35).

23.2. Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Metodu II.23.

II.24. Stefensen-Milnova iterativna metoda

24.1. Rešavajući zadatak (1)-(2) najpre se formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Zatim se nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja zadatka (1)-(2) izračunaju vrednosti y_1, y_2 i y_3.

Dalje je

$$y_{i+1,o}^{(o)} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right], \tag{II.48}$$

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1,k}^{(1)} &= y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1,k}^{(o)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \\ y_{i+1,k}^{(2)} &= y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1,k}^{(1)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \end{aligned}\right. \tag{II.49}$$

i formulom (II.35).

24.2. Sve konstatacije tačkama 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Stefensen-Milnovu iterativnu metodu.

24.3. Primer

Stefensen-Milnovom iterativnom metodom naći približno rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = -\frac{y^2x^3 + (x+2)y}{x(x+1)}, \qquad y(\tfrac{1}{2}) = -6$$

na četiri decimale, uzimajući za $h = 0,1$.

Početne vrednosti se mogu izračunati Runge-Kuta metodom. Dobija se

$y_1 = -4,9383551$, $y_2 = -4,336858$ i $y_3 = -4,0180138$.

Dalje je

$f_1 = 7.8875582$, $f_2 = 4,4187036$ i $f_3 = 2,0725612$,

pa je

$$y_{4,o}^{(o)} = y_o + \frac{4h}{3}\left[2f_1 - f_2 + 2f_3\right] = -3,9331287,$$

$$f_{4,o}^{(o)} = f(x_4, y_{4,o}^{(o)}) = 0,0753258,$$

$$y_{4,o}^{(1)} = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_{4,o}^{(o)} + 4f_3 + f_2\right] = -3,9107156,$$

$$f_{4,o}^{(1)} = f(x_4, y_{4,o}^{(1)}) = 0,1122635,$$

$$y_{4,o}^{(2)} = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_{4,o}^{(1)} + 4f_3 + f_2\right] = -\ 3,9094843,$$

$$y_{4,1}^{(o)} = \frac{y_{4,o}^{(o)} \cdot y_{4,o}^{(2)} - \left[y_{4,o}^{(1)}\right]^2}{y_{4,o}^{(o)} - 2y_{4,o}^{(1)} + y_{4,o}^{(2)}} = -\ 3,9093939,$$

$$f_{4,1}^{(o)} = f(x_4, y_{4,1}^{(o)}) = 0,1144283$$

i

$$y_{4,1}^{(1)} = y_2 + \frac{h}{3}\left[f_{4,1}^{(o)} + 4f_3 + f_2\right] = -3,9094122.$$

Dobija se, dakle, da je na četiri decimale $y_4 = -3,9094$.

Za polaznu jednačinu može se naći tačno rešenje. Dobija se da je $y(x) = \dfrac{x+1}{x^2(x-1,5)}$ to traženo rešenje, odakle je $y(0,9) = -3,9094650$.

II.25. Stefensen-Levi-Bagotova iterativna metoda

25.1. Prilikom rešavanja zadatka (1)-(2) najpre se ([10] i[1]) na ranije navedeni način formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1 i y_2.

Dalje je

$$y^{(o)}_{i+1,o} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right], \tag{II.50}$$

a sledeće vrednosti približnog rešenja se dobijaju korišćenjem formula (II.49) i (II.35).

25.2. Konstatacije 14.2., 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za Stefensen-Levi-Bagotovu iterativnu metodu.

II.26. Napomene o generalizacijama metoda II.14. do II. 25.

26.1. Sve metode (od II.14. do II.25.) se mogu primeniti i na sisteme od m diferencijalnih jednačina prvog reda, a samim tim i na diferencijalnu jednačinu m-tog reda. Npr. za sistem

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \varphi(x,y,z) \qquad y(x_o) = y_o, \quad z(x_o) = z_o, \end{cases} \tag{II.51}$$

nizovi vrednosti $\{y_{i+1}\}$ i $\{z_{i+1}\}$ $(i = 0,1,2,\dots)$ u Stefensen-Ojler-Košijevoj iterativnoj metodi se dobijaju korišćenjem formula

$$\begin{cases} y^{(o)}_{i+1,o} = y_i + hf_i \\ z^{(o)}_{i+1,o} = z_i + h\varphi_i \qquad f_i = f(x_i,y_i,z_i), \ \varphi_i = \varphi(x_i,y_i,z_i) \end{cases} \tag{II.52}$$

kao i formula

$$\text{(II.53)}\quad \begin{cases} y^{(1)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f^{(o)}_{i+1,k}\right] \\ z^{(1)}_{i+1,k} = z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi_i + \varphi^{(o)}_{i+1,k}\right] \\ y^{(2)}_{i+1,k} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f^{(1)}_{i+1,k}\right] \\ z^{(2)}_{i+1,k} = z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi_i + \varphi^{(1)}_{i+1,k}\right] \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \\ f^{(s)}_{i+1,k} = f(x_{i+1}, y^{(s)}_{i+1,k}, z^{(s)}_{i+1,k}), \quad \varphi^{(s)}_{i+1,k} = \varphi(x_{i+1}, y^{(s)}_{i+1,k}, z^{(s)}_{i+1,k}) \end{cases}$$

$(s = 0,1)$

i formula

$$\text{(II.54)}\quad \begin{cases} y^{(o)}_{i+1,k+1} = \dfrac{y^{(2)}_{i+1,k} \cdot y^{(o)}_{i+1,k} - \left[y^{(1)}_{i+1,k}\right]^2}{y^{(2)}_{i+1,k} - 2y^{(1)}_{i+1,k} + y^{(o)}_{i+1,k}} \\ z^{(o)}_{i+1,k+1} = \dfrac{z^{(2)}_{i+1,k} \cdot z^{(o)}_{i+1,k} - \left[z^{(1)}_{i+1,k}\right]^2}{z^{(2)}_{i+1,k} - 2z^{(1)}_{i+1,k} - z^{(o)}_{i+1,k}} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

26.2. Nizovi iteracija se produžavaju dok se po dve uzastopne vrednosti $y^{(2)}_{i+1,m}$ i $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ ili $y^{(o)}_{i+1,m+1}$ i $y^{(1)}_{i+1,m+1}$ ili $y^{(1)}_{i+1,m}$ i $y^{(2)}_{i+1,m}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ kao i $z^{(2)}_{i+1,m}$ i $z^{(o)}_{i+1,m+1}$ ili $z^{(o)}_{i+1,m+1}$ i $z^{(1)}_{i+1,m+1}$ ili $z^{(1)}_{i+1,m}$ i $z^{(2)}_{i+1,m}$ jednovremeno ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

26.3. Konstatacije 14.3., 14.4. i 14.5. važe i za ovu metodu primenjenu na sistem diferencijalnih jednačina (II.51).

26.4. Primer

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} y' = e^x + y + z^3 \\ z' = x^2 + y^2 + z^2 \qquad y(1) = z(1) = 1, \quad h = 0{,}1. \end{cases}$$

Ojler-Košijevom iterativnom i Stefensen-Ojler-Košijevom iterativnom metodom naći $y(1{,}1)$ i $z(1{,}1)$ na četiri decimale.

Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija

$\bar{y}_1^{(o)} = 1{,}4718281,$ $\quad\bar{z}_1^{(o)} = 1{,}3,$

$\bar{y}_1^{(1)} = 1{,}5695636,$ $\quad\bar{z}_1^{(1)} = 1{,}4033138,$

$\bar{y}_1^{(2)} = 1{,}6027769,$ $\quad\bar{z}_1^{(2)} = 1{,}4321409,$

$\bar{y}_1^{(3)} = 1{,}6131291,$ $\quad\bar{z}_1^{(3)} = 1{,}441496,$

$\bar{y}_1^{(4)} = 1{,}6165437,$ $\quad\bar{z}_1^{(4)} = 1{,}4445048,$

$\bar{y}_1^{(5)} = 1{,}6176541,$ $\quad\bar{z}_1^{(5)} = 1{,}4454903,$

$\bar{y}_1^{(6)} = 1{,}6180183,$ $\quad\bar{z}_1^{(6)} = 1{,}4458123,$

$\bar{y}_1^{(7)} = 1{,}6181375,$ $\quad\bar{z}_1^{(7)} = 1{,}4459178,$

$\bar{y}_1^{(8)} = 1{,}6181765,$ $\quad\bar{z}_1^{(8)} = 1{,}4459523,$

$\bar{y}_1^{(9)} = 1{,}6181893$ i $\quad\bar{z}_1^{(9)} = 1{,}4459636$

pa je, na četiri decimale, $y_1 = 1{,}6182$ i $z_1 = 1{,}4460$. Stefensen-Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobija, uzevši za $y_{1,o}^{(o)} = \bar{y}_1^{(1)}$, $y_{1,o}^{(1)} = \bar{y}_1^{(2)}$, $\bar{y}_{1,o}^{(2)} = \bar{y}_1^{(3)}$,

$z_{1,o}^{(o)} = \bar{z}_1^{(1)}$, $z_{1,o}^{(1)} = \bar{z}_1^{(2)}$ i $z_{1,o}^{(2)} = \bar{z}_1^{(3)}$ (tačka 14.5.),

$$y_{1,1}^{(o)} = \frac{y_{1,o}^{(2)} \cdot y_{1,o}^{(o)} - \left[y_{1,o}^{(1)}\right]^2}{y_{1,o}^{(2)} - 2y_{1,o}^{(1)} + y_{1,o}^{(o)}} = 1{,}6178136,$$

$$z_{1,1}^{(o)} = \frac{z_{1,o}^{(2)} \cdot z_{1,o}^{(o)} - \left[z_{1,o}^{(1)}\right]^2}{z_{1,o}^{(2)} - 2z_{1,o}^{(1)} + z_{1,o}^{(o)}} = 1{,}4459891,$$

$$y_{1,1}^{(1)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,1}^{(o)}\right] = 1{,}6181827,$$

$$z_{1,1}^{(1)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi_o + \varphi_{1,1}^{(o)}\right] = 1{,}4459102,$$

$$y_{1,1}^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,1}^{(1)}\right] = 1{,}6181764,$$

$$z_{1,1}^{(2)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi_o + \varphi_{1,1}^{(1)}\right] = 1{,}4459585.$$

Korišćenjem izmene algoritma (tačka 14.5) se dalje dobija

$$y_{1,1}^{(3)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f_o + f_{1,1}^{(2)}\right] = 1{,}6181912 \quad \text{i}$$

$$z_{1,1}^{(3)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi_o + \varphi_{1,1}^{(2)}\right] = 1{,}4459645,$$

pa je, na četiri decimale, dobijen isti rezultat, ali sa dva računanja manje.

26.5. Na analogan način se mogu i ostale metode, od II.15. do II.25., prilagoditi za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina i diferencijalnih jednačina višeg reda.

GLAVA III

NEKE NOVE METODE ZA NALAŽENJE PRIBLIŽNIH REŠENJA KOŠIJEVOG ZADATKA IZVESNIH SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

U ovoj glavi se uglavnom rasmatra zadatak (3)-(4) i daje nekoliko analitičkih i numeričkih metoda za nalaženje približnog rešenja tog zadatka. Sve metode koje se predlažu mogu se (kako je u uvodu rečeno) primeniti i na diferencijalne jednačine drugog reda oblika $u'' + p(x)u' + q(x)u = r(x)$ ili pak oblika $z'' = \alpha(x,z)$. Prednost metoda koje se predlažu u odnosu na njima slične metode je u bržem dobijanju približnog rešenja sa istom tačnošću.

III.1. Pikar-Sajdlova metoda

1.1. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (3) sa zadatim uslovima (4).

Prema Pikar-Sajdlovoj metodi sistem diferencijalnih jednačina (3) se, najpre zapiše u integralnom obliku

$$\text{III.1)}\quad \begin{cases} y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,z)\,dx \\ z = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx, \end{cases}$$

a zatim se formiraju nizovi uzastopnih približnih rešenja

$$
\text{(III.2)}\quad
\begin{cases}
y_1(x) = y_o + \int\limits_{x_o}^{x} f(x,z_o)\,dx, & z_1(x) = z_o + \int\limits_{x_o}^{x} \varphi(x,y_1(x))\,dx,\\
y_2(x) = y_o + \int\limits_{x_o}^{x} f(x,z_1(x))\,dx, & z_2(x) = z_o + \int\limits_{x_o}^{x} \varphi(x,y_2(x))\,dx,\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\\
y_n(x) = y_o + \int\limits_{x_o}^{x} f(x,z_{n-1}(x))\,dx, & z_n(x) = z_o + \int\limits_{x_o}^{x} \varphi(x,y_n(x))\,dx,\\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Pod pretpostavkom da funkcije $f(x,z)$ i $\varphi(x,y)$ zadovoljavaju uslove Koši-Pikarove teoreme u oblasti
$\mathcal{J}=\{(x,y,z)\,|\,|x-x_o|\leq a,\ |y-y_o|\leq b,\ |z-z_o|\leq b\}$ (a,b = const.)
lako se dokazuju (npr. [12], [13] i [17]) sledeća tvrdjenja:

a) Sve funkcije nizova $\{y_i(x)\}$ i $\{z_i(x)\}$ $(i = 1,2,3,\dots)$ definisane su u neprekidne za $|x-x_o|\leq h$ i nalaze se u $\mathcal{J}$ $(h = \min(a,\frac{b}{M}),\ |f|\leq M$ i $|\varphi|\leq M$ za $(x,y,z)\ \mathcal{J})$;

b) Nizovi neprekidnih funkcija uniformno konvergiraju za $|x - x_o|\leq h$, pa su i granične funkcije $y = y(x)$ i $z=z(x)$ neprekidne na pomenutom intervalu;

c) Granične funkcije $y(x)$ i $z(x)$ nalaze se u oblasti $\mathcal{J}$ za $|x - x_o|\leq h$;

d) Rešenje sistema (3), $y = y(x)$, $z = z(x)$ sa početnim uslovima $y(x_o)=y_o$, $z(x_o) = z_o$ je jedinstveno. Način dokazivanja tvrdjenja a), b), c) i d) je isti kao u Koši-Pikarovoj teoremi.

1.2. Nizovi $\{y_i(x)\}$ i $\{z_i(x)\}$ $(i = 1,2,3\dots)$ dobijeni Pikar-Sajdlovom metodom konvergiraju brže ka rešenju zadatka (3)-(4) od nizova $\{y_i^*(x)\}$ i $\{z_i^*(x)\}$ $(i = 1,2,3,\dots)$ dobijenih Pikarovom metodom i važe procene

$$
(\text{III}.3)\quad \begin{cases} |y(x)-y_n(x)| \leq \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{2n}|x-x_o|^{2n}}{(2n)!} \\ \text{i} \\ |z(x)-z_n(x)| \leq \frac{M}{L}\cdot\frac{L^{2n+1}|x-x_o|^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases} \qquad (n = 1,2,3,\ldots),
$$

gde je L Lipšicova konstanta za funkcije $f(x,z)$ i $\varphi(x,y)$ u oblasti $\mathcal{J}$.

Za dokazivanje nejednakosti (II.3) uvedimo najpre oznake

$$
\varepsilon_n = |y(x)-y_n(x)| \quad \text{i} \quad \delta_n = |z(x)-z_n(x)|.
$$

Biće tada, prema (III.1) i III.2)

$$
\varepsilon_n = \left|\int_{x_o}^{x}\left[f(x,z)-f(x,z_{n-1}(x))\right]dx\right| \leq \left|\int_{x_o}^{x}\left|f(x,z)-f(x,z_{n-1}(x))\right|dx\right| \leq
$$

$$
\leq L\int_{x_o}^{x}\left|z(x)-z_{n-1}(x)\right|dx = L\int_{x_o}^{x}\delta_{n-1}dx
$$

i slično

$$
\delta_n = \left|\int_{x_o}^{x}\left[\varphi(x,y)-\varphi(x,y_n(x))\right]dx\right| \leq L\int_{x_o}^{x}\varepsilon_n dx.
$$

Kako je

$$
\varepsilon_o = |y-y_o| = \left|\int_{x_o}^{x} f(x,z)dx\right| \leq \left|\int_{x_o}^{x}|f(x,z))|dx\right| \leq M\left|\int_{x_o}^{x}dx\right| = M|x-x_o| =
$$

$$
= \frac{M}{L}\cdot\frac{L|x-x_o|}{1!} \quad \text{i}
$$

$$
\delta_o = |z-z_o| = \left|\int_{x_o}^{x}\varphi(x,y)dx\right| \leq \frac{M}{L}\cdot\frac{L|x-x_o|}{1!}
$$

dalje se dobija

$$
\varepsilon_1 \leq L\int_{x_o}^{x}\frac{M}{L}\cdot\frac{L|x-x_o|}{1!}dx = \frac{M}{L}\cdot\frac{L^2|x-x_o|^2}{2!},
$$

$$\delta_1 \leq L \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \cdot \frac{L^2 |x-x_0|^2}{2!} dx = \frac{M}{L} \frac{L^3 |x-x_0|^3}{3!},$$

$$\varepsilon_2 \leq L \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3 |x-x_0|^3}{3!} dx = \frac{M}{L} \frac{L^4 |x-x_0|^4}{4!},$$

$$\delta_2 \leq L \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \cdot \frac{L^4 |x-x_0|^4}{4!} dx = \frac{M}{L} \frac{L^5 |x-x_0|^5}{5!}$$

itd.

Očigledno je da se lako pokazuje, matematičkom indukcijom, da za $n \in N$ važi

$$\varepsilon_n \leq \frac{M}{L} \frac{L^{2n} |x-x_0|^{2n}}{(2n)!} \quad \text{i} \quad \delta_n \leq \frac{M}{L} \frac{L^{2n+1} |x-x_0|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

čime su dobijene ocene za greške (III. 3).

1.3. Primenom Pikarove metode na sistem diferencijalnih jednačina (3), pri čemu se odgovarajući nizovi približnih rešenja dobijaju pomoću formula

$$\text{(III. 4)} \begin{cases} y_n^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x, z_{n-1}^*(x))dx \\ z_n^*(x) = z_0^* + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_{n-1}^*(x))\, dx \quad (n = 1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

$(y_0^* = y_0,\ z_0^* = z_0)$,

dobijaju se formule za greške (videti I.6.2 i I.6.2. primedba 1)

$$\varepsilon_n^* = |y(x) - y_n^*(x)| \leq \frac{M}{L} \frac{L^{n+1} |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{i}$$

$$\delta_n^* = |z(x)-z_n(x)| \leq \frac{M}{L}\,\frac{L^{n+1}|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!}$$

na bazi nejednakosti

$$\varepsilon_n^* \leq L\int_{x_o}^{x}\delta_{n-1}^*\,dx \quad \text{i} \quad \delta_n^* \leq L\int_{x_o}^{x}\varepsilon_{n-1}^*\,dx$$

kao i nejednakosti

$$\varepsilon_o^* \leq \frac{M}{L}\,\frac{L|x-x_o|}{1!} \quad \text{i} \quad \delta_o^* \leq \frac{M}{L}\,\frac{L|x-x_o|}{1!}.$$

Dalje se vidi da je

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^*} = \frac{L^{n-1}|x-x_o|^{n-1}}{(n+2)(n+3\ldots(2n)} < \frac{L^{n-1}|x-x_o|^{n-1}}{(n-1)!(2n)},$$

pa je

$$\varepsilon_n < \frac{L}{M}\cdot\frac{1}{2n}\varepsilon_{n-2}^*\cdot\varepsilon_n^*\,.$$

Slično je

$$\delta_n < \frac{L}{M}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\delta_{n-1}^*,\ \delta_n^*$$

što jasno govori o brzini konvergencije nizova formiranih u Pikar-Sajdlovoj metodi (ε_j^* i δ_j^* teže nuli kada $j \to \infty$).

1.4. Očigledno je, iz tačke 1.2., da su za isto n veližine ε_n i δ_n različite, pa sa aspekta primene nije svejedno u kom redosledu se zapisuju jednačine $y'=f(x,z)$ i $z'=\varphi(x,y)$ što treba imati u vidu prilikom rešavanja zadatka (3)-(4) Pikar-Sajdlovom metodom.

1.5. Karakteristike Pikar-Sajdlove metode su iste (izuzev brzine konvergencije) kao i Pikarove metode, što znači i da se npr. Pikar-Sajdlova metoda može primeniti na široke klase sistema diferencijalnih jednačina oblika (3) (pri tome nije neophodna analitičnost funkcija $f(x,z)$ i $\varphi(x,y)$), a takodje i da je osnovni problem primene te metode taj što se realizujući je nekada može doći do veoma komplikovanih (ili nerešivih) tipova integrala. U takvim slučajevima se za rešavanje zadatka (3)-(4) mora upotrebiti neka druga metoda npr. Pikar (varijanta Orlova)-Sajdlova metoda koja će biti izložena kasnije.

1.6. Primer 1.

Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} y' = 2z^2-x^2 \\ z' = y+2x^3-1 \qquad y(0)=1,\ z(0)=0 \end{cases}$$

Pikarovom i Pikar Sajdlovom metodom naći nekoliko uzastopnih aproksimacija (približnih rešenja).

Pikarovom metodom se dobija

$$y_1^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x,z_0^*)\,dx = 1 + \int_0^x (-x^2)\,dx = 1 - \frac{x^3}{3},$$

$$z_1^*(x) = z_0^* + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0^*)\,dx = \int_0^x 2x^3 dx = \frac{1}{2}x^4,$$

$$y_2^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x,z_1^*(x))\,dx = 1 + \int_0^x (\tfrac{1}{2}x^8 - x^2)\,dx = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{18}x^9,$$

i

$$z_2^*(x) = z_0^* + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_1^*(x)\ dx = \int_0^x \frac{5}{3}x^3 = \frac{5}{12}x^4.$$

Slično je dalje

$$y_3^*(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{25}{9\cdot 72}x^9 , \quad z_3^*(x) = \frac{5}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^{10} ,$$

$$y_4^*(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{25}{9.72}x^9 + \frac{1}{9.12.15}x^{15} + \frac{2}{(180)^2.21}x^{21} ,$$

$$z_4^*(x) = \frac{5}{12}x^4 + \frac{5}{18\cdot 72}\, x^{10} \qquad \text{itd.}$$

Pikar-Sajdlovom metodom se dobija

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x,z_o)\,dx = 1 - \frac{x^3}{3} ,$$

$$z_1(x) = z_o + \int_{x_o}^{x} \varphi(x,y_1(x))dx = \int_0^x \frac{5}{3}x^3 dx = \frac{5}{12}x^4 ,$$

$$y_2(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} f(x),z_1(x))\,dx = 1 + \int_0^x (\frac{25}{72}x^8 - x^2)\,dx = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{25}{9.72}x^9 ,$$

$$z_2(x) = z_o + \int_{x_o}^{x} \varphi(x,y_2(x))\,dx = \int_0^x (\frac{5}{3}x^3 + \frac{25}{9.72}x^9)\,dx = \frac{5}{12}x^4 + \frac{5}{18.72}x^{10}$$

itd.

Očigledno je da je $y_1(x) = y_1^*(x)$, $z_1(x) = z_2^*(x)$, $y_2(x) = y_3^*(x)$, $z_2(x) = z_4^*(x)$, tj. do istog rezultata se dolazi Pikar-Sajdlovom metodom kao i Pikarovom metodom sa dva puta manje računanja.

Primer 2.
Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} y' = \lambda + xz \\ z' = 1 + \mu x - x^2 + y \end{cases} \quad y(0)=0, \quad z(0)=0, \ \lambda, \mu \in R.$$

Treba naći tri približna rešenja Pikarovom i Pikar-Sajdlovom metodom i proceniti greške tih približnih rešenja u oblasti

$$\mathcal{J}_3 = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, |x| \leq \tfrac{1}{2},\ |y| \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}$$

pri $\lambda = \mu = 1$.

Pikarovom metodom se dobija

$$y_1^*(x) = \lambda x, \qquad z_1^*(x) = x + \frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

$$y_2^*(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\mu}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5, \qquad z_2^*(x) = x + \frac{\lambda+\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

$$y_3^*(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda+\mu}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5 \quad \text{i} \quad z_3^*(x) = x + \frac{\lambda+\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{\mu}{40}x^5 + \frac{x^6}{90}$$

Pikar-Sajdlovom metodom se dobija

$$y_1(x) = \lambda x, \qquad z_1(x) = x + \frac{\lambda+\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda+\mu}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5,$$

$$z_2(x) = x + \frac{\lambda+\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{\lambda+\mu}{40}x^5 + \frac{1}{90}x^6$$

$$y_3(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\lambda+\mu}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{72}x^6 + \frac{\lambda+\mu}{280}x^7 + \frac{1}{720}x^8,$$

$$z_3(x) = x + \frac{\lambda+\mu}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{\lambda+\mu}{40}x^5 + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{504} + \frac{\lambda+\mu}{2240}x^8 + \frac{x^9}{6480},$$

pa je za $\lambda = \mu = 1$

$$y_3^*(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{15}x^5 \quad \text{i} \quad z_3^*(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{x^6}{90} \quad \text{kao i}$$

$$y_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{72}x^6 + \frac{1}{140}x^7 + \frac{1}{720}x^8 \quad \text{i}$$

$$z_3(x) = x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{90}x^6+\frac{1}{504}x^7+\frac{1}{1120}x^8+\frac{1}{6480}x^9.$$

Lako se izračuna da su

$$L = 1,\quad M = \frac{11}{4} \text{ i } h = \frac{4}{11},$$

pa je za $|x|<\frac{4}{11}$

$$|y(x)-y_3^*(x)| < \frac{M}{L}\,\frac{L^4h^4}{4!} = 0{,}0020032\approx 0{,}002.$$

Takodje je i

$$|z(x) - z_3^*(x)| \approx 0{,}002.$$

Greške za $y_3(x)$ i $z_3(x)$ su

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{M}{L}\,\frac{L^6h^6}{6!} \leq 0{,}000007$$

i

$$|z(x) - z_3(x)| \leq \frac{M}{L}\,\frac{L^7h^7}{7!} \leq 0{,}0000003$$

odakle je očigledno da je Pikar-Sajdlovom metodom postignuta dosta veća tačnost nego Pikarovom metodom.

III.2. Pikar (varijanta Orlova) - Sajdlova metoda

2.1. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (3) sa početnim uslovima (4). Približno rešenje sistema diferencijalnih jednačina (3) sa zadatim uslovima (4) se nalazi korišćenjem nizova približavanja odredjenih sledećim formulama

$$
(\mathrm{III}.5)\begin{cases}
y_1(x) = y_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_o)dx}^{\,1}, & z_1(x) = z_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_1(x)dx}^{\,2}, \\
y_2(x) = y_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_1(x)dx}^{\,3}, & z_2(x) = z_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_2(x))dx}^{\,4}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n(z) = y_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_{n-1}(x))dx}^{\,2n-1}, & z_n(x) = z_o + \displaystyle\int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_n(x))}^{\,2n}\, dx, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

gde simboli $\overline{f(x,z_{s-1}(x)}^{\,2s-1}$ i $\overline{\varphi(x,y_s(x)}^{\,2s}$ $(s=1,2,3,\ldots)$

označavaju da odgovarajuće funkcije treba razviti u Tejlorov red po $(x-x_o)$ i zadržati respektivno $2s-1$ odnosno $2s$ prvih članova tih redova.

2.2. Sve karakteristike Pikarove (varijanta Orlova) metode [14] i [6] prenose se i na Pikar (varijanti Orlova) - Sajdlovu metodu tj.:

1) Metoda se može primeniti kada su funkcije $f(x,z)$ i $\varphi(x,y)$ analitičke u blizini tačke $M_o(x_o,y_o,z_o)$;

2) Uzastopne aproksimacije su polinomi sve većeg stepena;

3) Svi ti polinomi su delimični zbirovi Tejlorovih redova (integrala datog sistema) za $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$ tako da ova metoda predstavlja metodu integracije pomoću Tejlorovog reda;

4) Aproksimacije se uvek mogu izvoditi do ma koje željene tačnosti.

2.3. Ako se uporedi Pikar (varijanta Orlova) - Sajdlova metoda sa Pikarovom (varijanta Orlova) metodom koja je odredjena formulama (glava I, poglavlje I.7)

$$
\text{(III.6)}\quad
\begin{cases}
y_1^*(x) = y_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_o^*}^{\,1} dx, & z_1^*(x) = z_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_o^*)}^{\,1} dx, \\
y_2^*(x) = y_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_1^*(x)}^{\,2} dx, & z_2^*(x) = z_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_1^*(x)}^{\,2} dx, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
y_n^*(x) = y_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{f(x,z_{n-1}^*(x)}^{\,m} dx, & \\
z_m^*(x) = z_o^* + \int_{x_o}^{x} \overline{\varphi(x,y_{m-1}^*(x)}^{\,m} dx, & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
y_o^* = y_o, \ z_o^* = z_o &
\end{cases}
$$

(gde simboli $\overline{f(s,z_{s-1}^*(x)}^{\,s}$ i $\overline{\varphi(x,y_{s-i}^*(x)}^{\,s}$ imaju isti smisao kao u formulama (III.5) može se uočiti da je $y_m(x) = y_{2m-1}^*(x)$ i $Z_m(x) = z_{2m}^*(x)$ $(m = 1,2,3,\ldots)$, tj. za dobijanje polinoma istih stepena Pikar (varijanta Orlova) - Sajdlovom metodom je potrebno dva puta manje računanja nego Pikarovom (varijanta Orlova) metodom, što je osnovni kvalitet te metode.

2.4. Primer.

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$
\begin{cases}
y' = 1 + 2x + \sin z \\
z' = 1 + x^2 + y
\end{cases}
$$

sa zadatim početnim uslovima $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Pikarovom (varijanta Orlova) i Pikar (varijanta Orlova) - Sajdlovom metodom treba naći približno rešenje do polinoma petog i šestog stepena. Pikarovom (varijanta Orlova) metodom se dobija

$$y_1^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} \overline{f(x,z_0^* dx}^{\,1} = \int_0^x \overline{(1+2x)dx}^{\,1} = \int_0^x dx = x,$$

$$z_1^*(x) = z_0^* + \int_{x_0}^{x} \overline{\varphi(x,y_0^*)dx}^{\,1} = \int_0^x \overline{(1+x^2)dx}^{\,1} = \int_0^x dx = x,$$

$$y_2^*(x) = y_0^* + \int_{x_0}^{x} \overline{f(x,z_1^*(x)dx}^{\,2} = \int_0^x \overline{(1+2x+\sin x)dx}^{\,2} = \int_0^x (1+2x+x)dx =$$

$$= x + \frac{3}{2}x^2 \quad , \quad \text{i}$$

$$z_2^*(x) = z_0^* + \int_{x_0}^{x} \overline{\varphi(x,y_1^*(x)dx}^{\,2} = \int_0^x \overline{(1+x^2+x)dx}^{\,2} = \int_0^x (1+x)dx = x+\frac{x^2}{2}.$$

Analognim postupkom dalje se dobija

$$y_3^*(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} \;, \qquad z_3^*(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3,$$

$$y_4^*(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6}, \qquad z_4^*(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \;,$$

$$y_5^*(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{24} \;, \quad z^*{}_5(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} \;,$$

$$y_6^*(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{24} - \frac{x^6}{12} \qquad \text{i}$$

$$z_6^*(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{144}.$$

Pikar (varijanta Orlova)-Sajdlovom metodom se dobija

$$y_1(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} \overset{1}{\overline{f(x,z_o)}}\,dx = x,$$

$$z_1(x) = z_o + \int_{x_o}^{x} \overset{2}{\overline{\varphi(x,y_1(x)}}\,dx = \int_{0}^{x} \overset{2}{\overline{(y+x^2+ x)}}\,dx = \int_{0}^{x}(1+x)\,dx = x+\frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = y_o + \int_{x_o}^{x} \overset{3}{\overline{f(x,z_1(x)}}\,dx = \int_{0}^{x} \overset{3}{\overline{\left[(1+2+\sin(x+\frac{x^2}{2})\right]}}\,dx = \int_{0}^{x}(1+3x+\frac{x^2}{2})\,dx =$$

$$= x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}, \quad \text{i}$$

$$z_2(x) = z_o + \int_{x_o}^{x} \overset{4}{\overline{\varphi(x,y_2(x))}}\,dx = \int_{0}^{x} 1+x^2+ x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}) \, dx =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^4}{24}.$$

Dalje se dobija da je

$$y_3(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{24}, \quad \text{i}$$

$$z_3(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{144}.$$

Očigledno je da je $y_3(x) = y_5^*(x)$ i $z_3(x) = z_6^*(x)$, tj. dobija se isti rezultat, ali dosta lakše (šest integracija i šest razvijanja funkcija u Tejlorov red manje) Pikar (varijanta Orlova)-Sajdlovom metodom nego Pikarovom (varinta Orlova) metodom.

2.5. Primedba 1. Primena Pikarove metode pri rešavanju ovog zadatka bila bi praktično nemoguća.

2.6. Primedba 2. Pikar-Sajdlova i Pikar (varijanta Orlova)-Sajdlova metoda se, na očigledan način, mogu primeniti i za nalaženje približnog rešenja sistema diferencijalih jednačina oblika

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \varphi(x,y,z) \qquad y(x_o) = y_o, \quad z(x_o) = z_o, \end{cases}$$

a takodje i na sisteme od n jednačina prvog reda (potpune ili ne). Samim tim se mogu primeniti i na diferencijalne jednačine višeg reda.

2.7. Primedba 3. Diferencijalna jednačina $u''+p(x)u'+q(x)u=r(x)$ se, poznatom, smenom $u(x) = e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx} z(x)$ svodi na diferencijalnu jednačinu oblika $z''=\alpha(x,z)$, a ova dalje smenom $z'= y$ se prevodi na sistem diferencijalnih jednačina (3), pa se obe predložene metode (takodje i sve metode koje će biti predložene do kraja rada) mogu tretirati kao metode za nalaženje Košijevog rešenja diferencijalnih jednačina drugog reda $u''+p(x)u'+q(x)u=r(x)$ i $z''=\alpha(x,z$

III.3. Ojler-Koši-Sajdlova metoda

3.1. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (3) sa zadatim uslovima (4).
Metoda Ojler-Koši-Sajdl se sastoji u tome da se najpre izabere dovoljno malo $h>0$ i formira niz $\{x_i\}$ koristeći se jednakošću (I.1). Vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} $(i = 0,1,2,...)$ se izračunavaju koristeći se formulama

$$\text{(III.7)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + hf_i \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + h\varphi_i \quad (f_i= f(x_i,z_i), \varphi_i= \varphi(x_i,y_i), \quad i=0,1,2,... \end{cases}$$

kao i formulama

$$
\text{(III.8)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}^{(k-1)}\right] \\ z_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi_i + \varphi_{i+1}^{(k)}\right] \end{cases} \qquad (i = 0,1,2,\ldots),
$$

gde je $f_{i+1}^{(k-1} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1})$,

$$\varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}), \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

3.2. Niz iteracija se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$ $(m = 0,1,2,\ldots)$ jednovremeno ne poklope medjusobno na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1} = \bar{y}_{i+1}$ i $z_{i+1} = \bar{z}_{i+1}$, gde su $\bar{y}_{i+1}$ i $\bar{z}_{i+1}$ zajednički delovi približavanja $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$.

3.3. Ako se uporedi Ojler-Koši-Sajdlova metoda sa Ojler-Koši-jevom metodom (glava I, poglavlje I.1) kod koje se vrednosti y_{i+1} i z_{i+1} dobijaju pomoću formula

$$
\text{(III.9)} \quad \begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_i + h\bar{f}_i \\ \bar{z}_{i+1}^{(o)} = \bar{z}_i + h\bar{\varphi}_i \qquad \bar{y}_o = y_o, \quad \bar{z}_o = z_o, \quad \bar{f}_i = f(x_i, \bar{z}_i) \end{cases}
$$

$\bar{\varphi}_i = \varphi(x_i, \bar{y})$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ i formula

$$
\text{(III.10)} \begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{(k)} = \bar{y}_i + \frac{h}{2}\left[\bar{f}_i + \bar{f}_{i+1}^{(k-1)}\right] \\ \bar{z}_{i+1}^{(k)} = \bar{z}_i + \frac{h}{2}\left[\bar{\varphi}_i + \bar{\varphi}_i^{(k-1)}\right], \quad \bar{f}_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, \bar{z}^{(k-1)}), \\ \bar{\varphi}_{i+1}^{(k-1} = \varphi(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^{(k-1)}) \qquad (k = 1,2,3,\ldots) \end{cases}
$$

može se konstatovati da je za $i = 0,1,2,...$

$$y_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_{i+1}^{(o)} \quad i \quad z_{i+1}^{(o)} = \bar{z}_{i+1}^{(o)}$$

kao i da je

$$y_{i+1}^{(m)} = \bar{y}_{i+1}^{(2m-1)} \quad i \quad z_{i+1}^{(m)} = \bar{z}_{i+1}^{(2m)} \qquad (m = 1,2,3,...),$$

tj. da je za dostizanje iste tačnosti iterativnom Ojler-Koši-Sajdlovom metodom potrebno oko dva puta manje računanja nego Ojler-Košijevom metodom.

Takodje je jasno da su uslovi koji obezbedjuju konvergenciju nizova $\bar{y}_{i+1}^{(k)}$ i $\bar{z}_{i+1}^{(k)}$ dovoljni za obezbedjenje konvergencije nizova $y_{i+1}^{(k)}$ i $z_{i+1}^{(k)}$ (koji se dobijaju korišćenjem formula (III.7) i (III.8).

3.4. Formule za iterativnu Ojler-Koši-Sajdlovu metodu se mogu unekoliko modifikovati. U tim modifikovanim varijantama se umesto prediktora (III.7) u svojstvu prediktora mogu koristiti formule

$$\text{(III.11)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{2}\left[3f_i - f_{i-1}\right] \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + \frac{h}{2}\left[3\varphi_i - \varphi_{i-1}\right] \qquad (i = 1,2,3,...), \end{cases}$$

$$f_m = f(x_m,z_m), \quad \varphi_m=\varphi(x_m,y_m), \qquad (m = 0,1,2,...)$$

ili formule

$$\text{(III.12)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + 2hf_i \\ z_{i+1}^{(o)} = z_{i-1} + 2h\varphi_i \quad (f_i= f(x_i,z_i), \ \varphi_i=\varphi(x_i,y_i), \quad i=1,2,3,... \end{cases}$$

(glava I, poglavlje I.1, tačke I.5 i I.6).

U obe ove modifikacije se mora najpre izračunati y_1 i z_1 nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina, npr. metodom Runge-Kuta.

3.5. Napomena. Računanje prediktora $y_{i+1}^{(o)}$ i $z_{i+1}^{(o)}$ upotrebom formule (III.12) je lakše (samo jednom se računaju vrednosti funkcija $f(x,z)$ i $\varphi(x,y)$) nego računanje prediktora korišćenjem formule (III.11), pa je Ojler-Koši-Sajdlova metoda sa prediktorom (III.12) pogodnija za primenu od metode sa prediktorom (III.11).

3.6. Primer

Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} y' = 1 + 2x^2 + z^2 \\ z' = 2 + x + y \qquad y(o) = o, z(o) = o \end{cases}$$

i neka je izabrano $h = 0,1$. Treba naći $y(0,1)$ i $z(0,1)$, na pet decimala, Ojler-Košijevom i Ojler-Koši-Sajdlovom metodom.

Ojler-Košijevom metodom se dobija

$$\bar{y}_1^{(o)} = \bar{y}_o + hf(x_o, \bar{z}_o) = 0,1,$$

$$\bar{z}_1^{(o)} = \bar{z}_o + h\varphi(x_o, \bar{y}_o) = 0,2,$$

$$\bar{y}_1^{(1)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o, \bar{z}_o) + f(x_1, \bar{z}_1^{(o)})\right] = 0,103,$$

$$\bar{z}_1^{(1)} = \bar{z}_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o, \bar{y}_o) + \varphi(x_1, \bar{y}_1^{(o)})\right] = 0,21,$$

$$\bar{y}_1^{(2)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o, \bar{z}_o) + f(x_1, \bar{z}_1^{(1)})\right] = 0,10320,$$

$$\bar{z}_1^{(2)} = \bar{z}_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o, \bar{y}_o) + \varphi(x_1, \bar{y}_1^{(1)})\right] = 0,21016,$$

$$\bar{y}_1^{(3)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,\bar{z}_o) + f(x_1,\bar{z}_1^{(2)})\right] = 0{,}10321,$$

$$\bar{z}_1^{(3)} = \bar{z}_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,\bar{y}_o) + \varphi(x_1,\bar{y}_1^{(2)})\right] = 0{,}21016$$

$$\bar{y}_1^{(4)} = \bar{y}_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,\bar{z}_o) + f(x_1,\bar{z}_1^{(3)})\right] = 0{,}10321,$$

pa je, imajući u vidu da je $\bar{z}_1^{(4)} = 0{,}21016$, ovom metodom dobijeno da je $y_1 = 0{,}10321$ i $z_1 = 0{,}21016$.

Ojler-Koši-Sajdlovom metodom se dobija

$$y_1^{(o)} = \bar{y}_1^{(o)} = 0{,}1, \qquad z_1^{(o)} = \bar{z}_1^{(o)} = 0{,}2$$

$$y_1^{(1)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,z_o) + f(x_1,z_1^{(o)})\right] = \bar{y}_1^{(1)} = 0{,}103,$$

$$z_1^{(1)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o) + \varphi(x_1,y_1^{(1)})\right] = \bar{z}_1^{(2)} = 0{,}21016,$$

$$y_1^{(2)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,z_o) + f(x_1,z_1^{(1)})\right] = \bar{y}_1^{(3)} = 0{,}10321,$$

$$z_1^{(2)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o) + \varphi(x_1,y_1^{(2)})\right] = \bar{z}_1^{(4)} = 0{,}21016,$$

pa je (imajući u vidu da je $y_1^{(3)} = y_1^{(2)}$ dobijen isti rezultat za y_1 i z_1, ali sa manje računanja.

Adams-Sajdlove metode

Navedimo nekoliko Adams-Sajdlovih metoda za rešavanje zadatka (3)-(4). Sve te metode imaća izvesnih sličnosti sa Adamsovim metodama, (glava I, poglavlje I.3) a takodje i sa, već prezentiranom, Ojler-Koši-Sajdlovom metodom.

Metoda III.4.

4.1. Pri rešavanju zadatka (3)-(4) izabere se, najpre, dovoljno malo h i formira niz $\{x_i\}$ koristeći se formulom (I.1). Za primenu metode je potrebno dalje da se (nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina) izračunaju vrednosti y_1, y_2, z_1 i z_2. Kada je to učinjeno dalje će biti

$$(\text{III.13}) \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{12}\left[23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + \frac{h}{12}\left[23\varphi_i - 16\varphi_{i-1} + 5\varphi_{i-2}\right] \end{cases} \quad (i = 2,3,4,\ldots),$$

gde je $f_m = f(x_m, z_m)$ i $\varphi_m = (x_m, y_m)$ $(m = 0,1,2,\ldots)$, a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula

$$(\text{III.14}) \begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{12}\left[5f_{i+1}^{(k-1)} + 8f_i - f_{i-1}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{12}\left[5\varphi_{i+1}^{(k)} + 8\varphi_i - \varphi_{i-1}\right] \end{cases} (i=2,3,4,\ldots;\ k=1,2,3,\ldots$$

$f_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1)})$, $\varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$, $(i = 2,3,4,\ldots;$ $k = 1,2,3,\ldots)$.

4.2. Niz približavanja se produžava, kao i u predhodno izloženoj metodi, dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

4.3. Ako se uporedi Adams-Sajdlova metoda III.4. sa, njoj, korespodentnom Adamsovom metodom kod koje je prediktor odredjen formulama

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_i + \frac{h}{12}\left[23\bar{f}_i - 16\bar{f}_{i-1} + 5\bar{f}_{i-2}\right] \\ \bar{z}_{i+1}^{(o)} = \bar{z}_i + \frac{h}{12}\left[23\bar{\varphi}_i - 16\bar{\varphi}_{i-1} + 5\bar{\varphi}_{i-2}\right] \quad (i = 2,3,4,\ldots) \end{cases}$$

$$\bar{y}_o = y_o,\ \bar{z}_o = z_o,\ \bar{f}_{i+1} = f(x_m, \bar{z}_m),\ \bar{\varphi}_m = (x_m, \bar{y}_m) \quad (m = 0,1,2,\ldots)$$

a korektor formulama

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1}^{(k)} = \bar{y}_i + \frac{h}{12}\left[5\bar{f}_{i+1}^{(k-1)} + 8\bar{f}_i - \bar{f}_{i-1}\right] \\ \bar{z}_{i+1}^{(k)} = \bar{z}_i + \frac{h}{12}\left[5\bar{\varphi}_{i+1}^{(k-1)} + 8\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}_{i-1}\right] \quad (i = 2,3,4,\ldots), \end{cases}$$

gde je

$$\bar{f}_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, \bar{z}_{i+1}^{(k-1)}),\ \varphi_{i+1}^{(k-1)} = \varphi(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}^{(k-1)}) \quad (k=1,2,3,\ldots)$$

lako se konstatuje da je

$$y_{i+1}^{(o)} = \bar{y}_{i+1}^{(o)} \quad \text{i} \quad z_{i+1}^{(o)} = \bar{z}_{i+1}^{(o)}$$

kao i da je

$$y_{i+1}^{(m)} = \bar{y}_{i+1}^{(2m-1)} \quad \text{i} \quad z_{i+1}^{(m)} = \bar{z}_{i+1}^{(2m)} \qquad (m = 1,2,3,\ldots)$$

tj. da je za dostizanje iste tačnosti Adams-Sajdlovom metodom III.4. potrebno oko dva puta manje računanja nego, njoj, odgovarajućom Adamsovom metodom.

Uslovi koji obezbedjuju konvergenciju nizova $\left\{\bar{y}_{i+1}^{(k)}\right\}$ i $\left\{\bar{z}_{i+1}^{(k)}\right\}$ su dovoljni za obezbedjenje konvergencije nizova $\left\{y_{i+1}^{(k)}\right\}$ i $\left\{z_{i+1}^{(k)}\right\}$ (koji se dobijaju u Adams-Sajdlovoj metodi III.4).

4.4. Ove dve važne primedbe će važiti i za sve ostale metode koje će biti izložene do kraja rada.

4.5. Primer

Data je diferencijalna jednačina

$$z''=z^2+3x, \quad z(o)=o, \quad z'(o)=5.$$

Adams-Sajdlovom metodom III.4. i korespodentnom Adamsovom metodom naći približno rešenje date jednačine za $x=0{,}3$ na pet decimala.

Ako se u polaznu jednačinu uvede smena

$z'=y+x^2+1$, dobija se

$$\begin{cases} y' = x + z^2 \\ z' = 1 + x^2 + y \qquad y(o) = 4, \quad z(o) = o. \end{cases}$$

Metodom Runge-Kuta, sa $h=0{,}1$, se dobija

$$y_1=4{,}01335, \ z_1=0{,}50071, \ y_2=4{,}08712 \text{ i } z_2=1{,}00690.$$

Dalje je

$$f_o=0, \ f_1=0{,}3507105, \ f_2=1{,}2138476,$$

$$\varphi_o=o, \ \varphi_1=5{,}02335 \text{ i } \varphi_2=5{,}12712.$$

Adamsovom metodom se dobija (imajući u vidu da je

$$y_i=\bar{y}_i, \ z_i=\bar{z}_i \ (i=1,2) \text{ i } f_j=\bar{f}_j \text{ i } \varphi_j=\bar{\varphi}_j \quad (j=0,1,2))$$

$$\bar{y}_3^{(o)}=\bar{y}_2+\frac{h}{12}\left[23\bar{f}_2-16\bar{f}_1+5\bar{f}_o\right]=4{,}2730127,$$

$$\bar{z}_3^{(o)}=\bar{z}_2+\frac{h}{12}\left[23\bar{\varphi}_2-16\bar{\varphi}_1+5\bar{\varphi}_o\right]=1{,}5281513,$$

$$\bar{f}_3^{(o)}=2{,}6352467, \qquad \bar{\varphi}_3^{(o)}=5{,}3630127,$$

$\bar{y}_3^{(1)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{f}_3^{(o)} + 8\bar{f}_2 - \bar{f}_1\right] = 4,2749225,$

$\bar{z}_3^{(1)} = \bar{z}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{\varphi}_3^{(o)} + 8\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\right] = 1,5303056,$

$\bar{f}_3^{(1)} = 2,6418352, \quad \bar{\varphi}_3^{(1)} = 5,3649225,$

$\bar{y}_3^{(2)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{f}_3^{(1)} + 8\bar{f}_2 - \bar{f}_1\right] = 4,275197,$

$\bar{z}_3^{(2)} = \bar{z}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{\varphi}_3^{(1)} + 8\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\right] = 1,530385,$

$\bar{f}_3^{(2)} = 2,6420785, \qquad \bar{\varphi}_3^{(2)} = 5,365197,$

$\bar{y}_3^{(3)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{f}_3^{(2)} + 8\bar{f}_2 - \bar{f}_1\right] = 4,2752071,$

$\bar{z}_3^{(3)} = \bar{z}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{\varphi}_3^{(2)} + 8\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\right] = 1,5303966,$

$\bar{f}_3^{(3)} = 2,6421137, \qquad \bar{\varphi}_3^{(3)} = 5,3652071$

$\bar{y}_3^{(4)} = \bar{y}_2 + \frac{h}{12}\left[5\bar{f}_3^{(3)} + 8\bar{f}_2 - \bar{f}_1\right] = 4,2752086$

i

$\bar{z}_3^{(4)} = \bar{z}_2 + \frac{h}{12}\left[5\,\bar{\varphi}_3^{(3)} + 8\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1\right] = 1,530397,$

pa je na pet decimala

$y(0,3) = 4,27521$ i $z(0,3) = 1,53040$

Adams-Sajdlovom metodom III.4. se dobija

$$y_3^{(o)} = \bar{y}_3^{(o)} = 4{,}2730127, \quad z_3^{(o)} = \bar{z}_3^{(o)} = 1{,}5281513 \quad \text{i}$$

$$f_3^{(o)} = \bar{f}_3^{(o)} = 2{,}6352467.$$

Dalje je

$$y_3^{(1)} = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(o)} + 8f_2 - f_1\right] = 4{,}2749225, \quad \varphi_3^{(1)} = 5{,}3649225,$$

$$z_3^{(1)} = z_2 + \frac{h}{12}\left[5\varphi_3^{(1)} + 8\varphi_2 - \varphi_1\right] = 1{,}530385, \quad f_3^{(1)} = 2{,}6420785,$$

$$y_3^{(2)} = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(1)} + 8f_2 - f_1\right] = 4{,}2752071, \quad \varphi_3^{(2)} = 5{,}3652071,$$

$$z_3^{(2)} = z_2 + \frac{h}{12}\left[5\varphi_3^{(2)} + 8\varphi_2 - \varphi_1\right] = 1{,}530397, \quad f_3^{(2)} = 2{,}6421149,$$

i

$$y_3^{(3)} = y_2 + \frac{h}{12}\left[5f_3^{(2)} + 8f_2 - f_1\right] = 4{,}2752087,$$

pa je $y_3 = 4{,}27521$ i $z_3 = 1{,}53040$, tj. do istog rezultata z(0,3) se dolazi, ali sa manje računanja.

Očigledno je, takodje, da je

$$y_3^{(1)} = \bar{y}_3^{(1)}, \quad z_3^{(1)} = \bar{z}_3^{(2)}, \quad y_3^{(2)} = \bar{y}_3^{(3)} \quad \text{itd.}$$

Metoda III.5.

5.1. Rešavajući zadatak (3)-(4), kao i kod predhodne metode, najpre se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2, z_1 i z_2.

Dalje je

$$(III.15)\quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(o)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7\varphi_i - 2\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right] \end{cases} \qquad (i = 2,3,4,\ldots)$$

$$(f_m = f(x_m, z_m),\quad \varphi_m = \varphi(x_m, y_m),\quad m = 0,1,2,\ldots),$$

a sledeća približavanja se dobijaju koristeći se formulama (III.14).

5.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

Metoda III.6.

6.1. Rešavajući zadatak (3)-(4) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se, nekom od postojećih metoda izračunaju vrednosti $y_1, y_2, y_3,\ z_1, z_2$ i z_3.

Dalje je

$$(III.16)\quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + \frac{h}{24}\left[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + \frac{h}{24}\left[55\varphi_i - 59\varphi_{i-1} + 37\varphi_{i-2} - 9\varphi_{i-3}\right] \end{cases} \quad (i=3,4,5,\ldots),$$

$$(f_m = f(x_m, z_m),\quad \varphi_m = \varphi(x_m, y_m),\quad m = 0,1,2,\ldots),$$

a sledeća približavanja se dobijaju korišćenjem formula

$$(III.17)\begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f_{i+1}^{(k-1)} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{24}\left[9\varphi_{i+1}^{(k)} + 19\varphi_i - 5\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right] \end{cases}$$

$(i = 3,4,5,\ldots;\quad k = 1,2,3,\ldots)$,

$(f_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1)}),\quad \varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$

$(i = 3,4,5,\ldots;\quad k = 1,2,3,\ldots)$.

6.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

Metoda III.7.

7.1. Pri rešavanju zadatka (3)-(4) na ranije navedeni način se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 i z_3.

Dalje je

$$(III.18)\begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(o)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[8\varphi_i - 5\varphi_{i-1} + 4\varphi_{i-2} - \varphi_{i-3}\right] \quad (i=3,4,5,\ldots) \end{cases}$$

$(f_m = f(x_m, z_m),\quad \varphi_m = \varphi(x_m, y_m)\quad (m=0,1,2,\ldots))$,

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama (III.17).

7.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

Metoda III.8.

8.1. Rešavajući zadatak (3)-(4) najpre se formira niz $\{x_i\}$. Zatim se kao kod Metode III.6. i Metode III.7. izračunaju vrednosti y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 i z_3. Dalje se "nulto približavanje" (prediktor) za (i+1)-vi korak računa pomoću formula (III.16), a sledeća približavanja se dobijaju korišćenjem formula

$$\text{(III.19)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i+1}^{(k-1)} + 4f_i + f_{i-1}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(k)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[\varphi_{i+1}^{(k)} + 4\varphi_i + \varphi_{i-1}\right] \quad (i = 3,4,5,\ldots), \end{cases}$$

gde je $f_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1)})$ i $\varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}$

$(k = 1,2,3,\ldots)$.

8.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

Metoda III.9.

9.1. Pri rešavanju zadatka (3)-(4) najpre se formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 i z_3. Dalje se "nulto približavanje" za (i + 1)-vi korak računa upotrebom formula (III.18), a sledeća približavanja se računaju korišćenjem formula (III.19).

9.2. Niz približavanja na taj način dobijen, se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

Metoda III.10.

9.1. Prezentirajmo još jednu Adams-Sajdlovu metodu za rešavanje zadatka (3)-(4). Najpre se i u ovoj metodi formira niz $\{x_i\}$, a potom, nekom od postojećih metoda za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina izračunaju $y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3$ i z_4.

Dalje će biti prediktor

$$
\text{(III.20)} \quad \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[9f_i - 9f_{i-1} + 10f_{i-2} - 5f_{i-3} + f_{i-4}\right] \\ z_{i+1}^{(o)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[9\varphi_i - 9\varphi_{i-1} + 10\varphi_{i-2} - 5\varphi_{i-3} + \varphi_{i-4}\right] \quad (i=4,5,6,\ldots \end{cases}
$$

$(f_m = f(x_m, z_m)$, $\varphi_m = \varphi(x_m, y_m)$, $m = 0,1,2,\ldots)$,

a sledeća približavanja se računaju koristeći se formulama

$$
\text{(III.21)} \begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{720}\left[251 f_{i+1}^{(k-1)} + 646 f_i - 246 f_{i-1} + 106 f_{i-2} - 19 f_{i-3}\right] \\ z_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{720}\left[251 \varphi_{i+1}^{(k)} + 646\varphi_i - 246\varphi_{i-1} + 106\varphi_{i-2} - 19\varphi_{i-3}\right] \\ (i = 4,5,6,\ldots) \end{cases}
$$

$(f_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1)})$, $\varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$,

$i = 4,5,6,\ldots;\quad k = 1,2,3,\ldots)$.

9.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je y_{i+1} i z_{i+1} $(i = 4,5,6,\dots)$ zajednički deo tih približavanja.

9.3. Napomena. Koristeći se Adamsovim formulama višeg reda mogu se, na analogan način, konstruisati odgovarajuće Adams-Sajdlove metode.

III.10. Miln-Sajdlova metoda

10.1. Prilikom rešavanja zadatka (3)-(4) najpre se na navedeni način formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2, y_3, z_1, z_2 i z_3 (glava I, poglavlje I.4). Sledeće vrednosti približnih rešenja računaju se koristeći se formulama

$$\text{(III.22)}\quad \begin{cases} y_{i+1}^{(1)} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i\right] \\ \\ z_{i+1}^{(1)} = z_{i-3} + \frac{4h}{3}\left[2\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1} + 2\varphi_i\right] \qquad (i = 3,4,5,\dots) \end{cases}$$

$$(f_m = f(x_m, z_m),\ \varphi_m = \varphi(x_m, y_m),\qquad m = 1,2,3,\dots)$$

i formulama

$$\text{(III.23)}\quad \begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(k-1)}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(k)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}^{(k)}\right] \ (i=3,4,5,\dots;k=2,3,4,\dots) \end{cases}$$

$$(f_{i+1}^{(k-1)} = f(x_{i+1}, z_{i+1}^{(k-1)}),\ \varphi_{i+1}^{(k)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}),$$

$$i = 3,4,5,\dots;\ k = 2,3,4,\dots).$$

10.2. Niz iteracija se produžava dok se po dve vrednosti $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$ istovremeno ne poklope, medjusobno, na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1}=\bar{y}_{i+1}$ i $z_{i+1}=\bar{z}_{i+1}$ gde su $\bar{y}_{i+1}$ i $\bar{z}_{i+1}$ zajednički delovi približavanja $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$. Dobivši na ovaj način y_{i+1} i z_{i+1} dalje se analogno nastavlja računanje sledećih vrednosti.

III.11. Levi-Bagot-Sajdlova metoda

11.1. Prilikom rešavanja zadatka (3)-(4) najpre se (glava I, poglavlje I.5) na ranije navedeni način formira niz $\{x_i\}$ i izračunaju vrednosti y_1, y_2, z_1 i z_2.

Dalje je prediktor

$$\text{(III.24)}\quad \begin{cases} y_{i+1}^{(1)} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(1)} = z_{i-1} + \frac{h}{3}\left[7\varphi_{i-2} - 2\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right] \end{cases}$$

$$(f_m = f(x_m, z_m), \quad \varphi_m = \varphi(x_m, y_m), \qquad m = 0,1,2,\ldots),$$

a sledeće vrednosti približnog rešenja se dobijaju korišćenjem formula (III.23).

11.2. Niz približavanja se produžava dok se po dve uzastopne vrednosti ne poklope na odgovarajući broj dekadnih znakova.

11.3. Primer

Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} y' = x^2 + z^2 - 7 \\ z' = -2 + x + y \end{cases}$$

sa početnim uslovima $y(2) = 2$, $z(2) = 2$.

Levi-Bagotovom i Levi-Bagot-Sajdlovom metodom naći približno $y(2,3)$ i $z(2,3)$ na pet decimala.

Metodom Runge-Kuta se dobija

$$y_1 = \bar{y}_1 = 2{,}1633282, \qquad y_2 = \bar{y}_2 = 2{,}4696906,$$

$$z_1 = \bar{z}_1 = 2{,}2120767 \quad \text{i} \quad z_2 = \bar{z}_2 = 2{,}4574099.$$

Dalje je

$$f_o = \bar{f}_o = 1, \; f_1 = \bar{f}_1 = 2{,}3032833, \quad f_2 = \bar{f}_2 = 3{,}878863,$$

$$\varphi_o = \bar{\varphi}_o = 2, \; \varphi_1 = \bar{\varphi}_1 = 2{,}2633282, \quad \varphi_2 = \bar{\varphi}_2 = 2{,}6696906.$$

Dalje je Levi-Bagotovom metodom

$$\bar{y}_3^{(1)} = \bar{y}_1 + \frac{h}{3}\left[7\bar{f}_2 - 2\bar{f}_1 + \bar{f}_o\right] = 2{,}9481773,$$

$$\bar{z}_3^{(1)} = \bar{z}_1 + \frac{h}{3}\left[7\bar{\varphi}_2 - 2\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_o\right] = 2{,}7507826,$$

$$\bar{f}_3^{(1)} = f(x_3, \bar{z}_3^{(1)}) = 5{,}856804, \quad \bar{\varphi}_3^{(1)} = \varphi(x_3, \bar{y}_3^{(1)}) = 3{,}2481773,$$

$$\bar{y}_3^{(2)} = \bar{y}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_3^{(1)} + 4\bar{f}_2 + \bar{f}_1\right] = 2{,}9525128,$$

$$\bar{z}_3^{(2)} = \bar{z}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{\varphi}_3^{(1)} + 4\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\right] = 2{,}7517522,$$

$\bar{f}_3^{(2)} = f(x_3, \bar{z}_3^{(2)}) = 5{,}862140$, $\bar{\varphi}_3^{(2)} = \varphi(x_3, \bar{y}_3^{(2)}) = 3{,}2525128$,

$\bar{y}_3^{(3)} = \bar{y}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_3^{(2)} + 4\bar{f}_2 + \bar{f}_1\right] = 2{,}9526907$,

$\bar{z}_3^{(3)} = \bar{z}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{\varphi}_3^{(2)} + 4\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\right] = 2{,}7518967$,

$\bar{f}_3^{(3)} = f(x_3, \bar{z}_3^{(3)}) = 5{,}862935$, $\bar{\varphi}_3^{(3)} = \bar{\varphi}(x_3, \bar{y}_3^{(3)}) = 3{,}2526907$,

$\bar{y}_3^{(4)} = \bar{y}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_3^{(3)} + 4\bar{f}_2 + \bar{f}_1\right] = 2{,}9527172$,

$\bar{z}_3^{(4)} = \bar{z}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{\varphi}_3^{(3)} + 4\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\right] = 2{,}7519027$,

$\bar{f}_3^{(4)} = f(x_3, \bar{z}_3^{(4)}) = 5{,}862968$, $\bar{\varphi}_3^{(4)} = \varphi(x_3, \bar{y}_3^{(4)}) = 3{,}2527172$,

$\bar{y}_3^{(5)} = \bar{y}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{f}_3^{(4)} + 4\bar{f}_2 + \bar{f}_1\right] = 2{,}9527183$

$\bar{z}_3^{(5)} = \bar{z}_1 + \frac{h}{3}\left[\bar{\varphi}_3^{(4)} + 4\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1\right] = 2{,}7519036$

Levi-Bagot-Sajdlovom metodom se dobija $y_3^{(1)} = \bar{y}_3^{(1)}$,

$z_3^{(1)} = \bar{z}_3^{(1)}$ i $f_3^{(1)} = \bar{f}_3^{(1)}$. Dalje je

$y_3^{(2)} = y_1 + \frac{h}{3}\left[f_3^{(1)} + 4f_2 + f_1\right] = \bar{y}_3^{(2)} = 2{,}9525128$,

$\varphi_3^{(2)} = \varphi(x_3, y_3^{(2)}) = \bar{\varphi}_3^{(2)} = 3{,}2525128$,

$z_3^{(2)} = z_1 + \frac{h}{3}\left[\varphi_3^{(2)} + 4\varphi_2 + \varphi_1\right] = \bar{z}_3^{(3)} = 2{,}7518967$,

$f_3^{(2)} = f(x_3, z_3^{(2)}) = \bar{f}_3^{(3)} = 5{,}862935$,

$$y_3^{(3)} = y_1 + \frac{h}{3}\left[f_3^{(2)} + 4f_2 + f_1\right] = \bar{y}_3^{(4)} = 2{,}9527172,$$

$$\varphi_3^{(3)} = \varphi(x_3, y_3^{(3)}) = \bar{\varphi}_3^{(4)} = 3{,}2527172,$$

$$z_3^{(3)} = z_1 + \frac{h}{3}\left[\varphi_3^{(3)} + 4\varphi_2 + \varphi_1\right] = \bar{z}_3^{(5)} = 2{,}71519036$$

$$f_3^{(3)} = f(x_3, z_3^{(3)}) = \bar{f}_3^{(5)} = 5{,}862973 \quad \text{i}$$

$$y_3^{(4)} = y_1 + \frac{h}{3}\left[f_3^{(3)} + 4f_2 + f_1\right] = \bar{y}_3^{(6)} = 2{,}9527184$$

pa je na pet decimala dobijen isti rezultat (y_3=2,95272, z_3=2,71519), ali sa manje računanja.

III.12. Napomene o generalizacijama metoda III.3. do III.11.

12.1. Sve metode (od III.3. do III.11.) se mogu primeniti i na sisteme od n diferencijalnih jednačina prvog reda, a samim tim i na diferencijalnu jednačinu n-tog reda. Npr. za sistem (II.51) nizovi vrednosti $\{y_{i+1}\}$ i $\{z_{i+1}\}$ (i = 0,1,2,...) u Ojler-Koši-Sajdlovoj metodi se dobijaju korišćenjem formula

$$\text{(III.25)} \begin{cases} y_{i+1}^{(o)} = y_i + hf_i \\ z_{i+1}^{(o)} = z_i + h\varphi_i \qquad f_i = f(x_i, y_i, z_i), \ \varphi_i = \varphi(x_i, y_i, z_i) \ (i=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

kao i formula

$$
(\mathrm{III}.26)\begin{cases} y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f_i + f_{i+1}^{(k-1,k-1)}\right] \\ \\ z_{i+1}^{(k)} = z_i + \frac{h}{2}\left[\varphi_i + \varphi_{i+1}^{(k,k-1)}\right] \qquad (i = 0,1,2,\ldots), \end{cases}
$$

gde je

$$f_{i+1}^{(k-1,k-1)} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}, z_{i+1}^{(k-1)}) \text{ i}$$

$$\varphi_{i+1}^{(k,k-1)} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}, z_{i+1}^{(k-1)}), \quad (i=0,1,2,\ldots;\ k=1,2,3,\ldots).$$

12.2. Nizovi iteracija se produžavaju dok se po dve uzastopne vrednosti $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$ $(m=0,1,2,\ldots)$ jednovremeno ne poklope medjusobno na odgovarajući broj dekadnih znakova. Kada je to postignuto stavi se da je $y_{i+1}=\bar{y}_{i+1}$ i $z_{i+1}=\bar{z}_{i+1}$, gde su $\bar{y}_{i+1}$ i $\bar{z}_{i+1}$ zajednički delovi približavanja $y_{i+1}^{(m)}$ i $y_{i+1}^{(m+1)}$ kao i $z_{i+1}^{(m)}$ i $z_{i+1}^{(m+1)}$.

12.3. Na analogan način se mogu i ostale metode, od III.4. do III.11., prilagoditi za nalaženje približnih rešenja sistema diferencijalnih jednačina i diferencijalnih jednačina višeg reda.

12.4. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$
\begin{cases} y' = e^x + y + z^3 \\ \\ z' = x^2 + y^2 + z^2 \qquad y(1)=1,\ z(1)=1,\ h=0,1 \end{cases}
$$

Ojler-Košijevom iterativnom i Ojler-Koši-Sajdlovom metodom naći y(1,1) i z(1,1) na četiri decimale.

Ovaj zadatak je uradjen u glavi II, poglavlje II.26. tačka 26.4. Ojler-Košijevom iterativnom i Stefensen-Ojler-Košijevom iterativnom metodom. Ojler-Košijevom iterativnom metodom se dobilo da je na četiri decimale $y_1=1,6182$ i $z_1=1,4460$ u devet iteracija.

Ojler-Koši-Sajdlovom metodom se dobija

$$y_1^{(o)}= y_o+ hf(x_o,y_o,z_o) = 1,4718281,$$

$$z_1^{(o)}= z_o+ h\varphi(x_o,y_o,z_o) = 1,3,$$

$$y_1^{(1)}= y_o+ \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(o)}, z_1^{(o)})\right]=1,5695636,$$

$$z_1^{(1)}= z_o+ \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(1)}, z_1^{(o)})\right]= 1,4181764$$

$$y_1^{(2)}= y_o+ \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x,y_1^{(1)}, z_1^{(1)})\right]= 1,607214,$$

$$z_1^{(2)}= z_o+ \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(2)}, z_1^{(1)})\right]= 1,440218,$$

$$y_1^{(3)}= y_o+ \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(2)}, z_1^{(2)})\right]= 1,61585,$$

$$z_1^{(3)}= z_o+ \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(3)}, z_1^{(2)})\right]= 1,4447599,$$

$$y_1^{(4)}= y_o+ \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(3)}, z_1^{(3)})\right]= 1,6176994,$$

$$z_1^{(4)}= z_o+ \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(4)}, z_1^{(3)})\right]= 1,4457141,$$

$$y_1^{(5)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(4)}, z_1^{(4)})\right] = 1,6180908,$$

$$z_1^{(5)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(5)}, z_1^{(4)})\right] = 1,4459153,$$

$$y_1^{(6)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(5)}, z_1^{(5)})\right] = 1,6181734,$$

$$z_1^{(6)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(6)}, z_1^{(5)})\right] = 1,4459578,$$

$$y_1^{(7)} = y_o + \frac{h}{2}\left[f(x_o,y_o,z_o) + f(x_1,y_1^{(6)}, z_1^{(6)})\right] = 1,6181909$$

i

$$z_1^{(7)} = z_o + \frac{h}{2}\left[\varphi(x_o,y_o,z_o) + \varphi(x_1,y_1^{(7)}, z_1^{(6)})\right] = 1,4459667,$$

pa je na četiri decimale dobijen isti rezultat kao sa Ojler-Košijevom iterativnom metodom ali sa manje računanja.

L I T E R A T U R A

1 К.С. КУНЦ: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ, КИЕВ, 1964, СТ.194-196.

2 Б.П.ДЕМИДОВИЧ, И.А.МАРОН, Э.З.ШУВАЛОВА: ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА, МОСКВА 1967, СТ. 149-151.

3 G.M. PHILLIPS, P.S. TAYLOR: THEORY AND APPLICATIONS OF NUMERICAL ANALYISIS, PP. 312-314.

4 В.И.КРЫЛОВ, В.В.БОБКОВ, П.И.МОНАСТЫРНЫЙ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ (ТОМ 2) МИНСК 1975, СТ. 71-85.

5 Э.КАМКЕ: СПРОВОЧНИК ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ, МОСКВА 1971, СТ. 167-168.

6 K.ORLOV: NUMERIČKA ANALIZA (SKRIPTA ZA STUDENTE PMF), BEOGRAD 1970, st.109-112 i 115-119.

7 И.С. БЕРЕЗИН, Н.П.ЖИДКОВ: МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ, ТОМ ВТОРОЙ, МОСКВА 196o, СТ. 286-327

8 BASHFORTH, S., AND ADAMS, J.C., AN ATTEMPT TO TEST THE THEORIES OF CAPILLARY ACTION... WITH AN EXPLANATION OF THE METHOD OF INTEGRATION EMPLOYED, CAMBRIDGE 1883,PP 15-62.

9 WILLIAM EDMUND MILNE: NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS NEW YORK 1970, PP.57-73.

10 H.LEVY AND E.A.BAGGOT: NUMERICAL STUDIES IN DIFFERENTIAL EQUATIONS, VOL.I. PP.132-133, C.A.WATS CO.LTD, LONDON, 1934.

1 MILORAD BERTOLINO: MATEMATIKA II, BEOGRAD 1971, ST.201-205.

2 TADIJA PEJOVIĆ: DIFERENCIJALNE JEDNAČINE (EGZISTENCIJA REŠENJA), BEOGRAD 1965, ST.10-26 i 59-78.

3 Н.П.ЕРУГИН: КНИГА ДЛЯ ЧТЕНИЯ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МИНСК 197о, СТ. 169-177.

4 K.ORLOV: JEDNA METODA APROKSIMIRANJA ZA INTEGRALE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA, SRPSKA KRALJEVSKA AKADEMIJA, GLAS SAN-a CLXIII 1934, BEOGRAD.

5 R.MILOŠEVIĆ: (DOKTORSKA TEZA), BEOGRAD 1976, ST.40-54.

6 В.И.КРЫЛОВ, В.В.БОБКОВ, П.И. МОНАСТЫРНЫЙ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ, ТОМ 1, МИНСК 1972, СТ 2о-24.

7 Н.М. МАТВЕЕВ: МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, МИНСК 1974, СТ. 263-276.

LJUBOMIR R. PROTIĆ

NEKE NOVE METODE ZA NALAŽENJE PRIBLIŽNIH REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

BEOGRAD, 1978.