

Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet

Mr Mladen BERKOVIĆ, dipl. inž.

KONAČNI ELEMENTI MEMBRANA

Doktorska disertacija

Beograd 1977.

## SADRŽAJ

PREDGOVOR .....	VII
1. - UVOD .....	1
2. - NEKE OSNOVNE RELACIJE TEORIJE MEMBRANA .....	4
2.1. - Kinematika membrana .....	4
2.2. - Osnovne termomehaničke veličine .....	5
2.2.1. - Masa .....	5
2.2.2. - Mehanička snaga (efekt rada) .....	6
2.2.3. - Unutrašnja energija .....	6
2.2.4. - Kinetička energija .....	6
2.2.5. - Toplotna energija .....	6
2.2.6. - Entropija .....	7
2.2.7. - Slobodna energija .....	7
2.3. - Globalni zakoni balansa .....	7
2.3.1. - Zakon o očuvanju energije .....	7
2.3.2. - Zakon o balansu momenta količine kretanja .....	8
2.3.3. - Zakon o balansu količine kretanja .....	8
2.3.4. - Zakon o očuvanju mase .....	8
2.4. - Drugi zakon termodinamike .....	8
2.5. - Lokalni zakoni balansa .....	8
2.5.1. - Zakon o očuvanju mase .....	8
2.5.2. - Zakon o balansu količine kretanja .....	9
2.5.3. - Zakon o balansu momenta količine kretanja .....	10
2.5.4. - Zakon o očuvanju energije .....	10
2.6. - Nejednačina Clausius - Dühema .....	11
3. - KONSTITUTIVNE JEDNAČINE .....	12
3.1. - Termomehanički jednostavan materijal .....	12
3.2. - Termoelastičan materijal .....	14
3.2.1. - Izotropan linearan termoelastičan materijal .....	15

4. - KONAČNI ELEMENTI MEMBRANA .....	19
4.1. - Podela membrane na konačne elemente .....	19
4.2. - Kinematika elemenata .....	20
4.3. - Raspored temperature .....	21
4.4. - Jednačine kretanja sistema konačnih elemenata .....	21
4.5. - Jednačine provodjenja toplote u sistemu konačnih elemenata...	22
4.5.1. - Jednačine provodjenja toplote za termomehanički jednostavan materijal .....	23
5. - REŠAVANJE JEDNAČINA KRETANJA I PROVODJENJA TOPLOTE .....	25
5.1. - Opšte napomene .....	25
5.2. - Linearizacija jednačina kretanja .....	25
5.3. - Linearizacija jednačina provodjenja toplote .....	26
5.4. - Linearizovane jednačine kretanja za linearan termoelastičan materijal .....	28
5.5. - Linearizovane jednačine provodjenja toplote za linearan termo- elastičan materijal .....	29
5.6. - Matrični oblik jednačina kretanja i provodjenja toplote .....	30
5.7. - Implicitni postupak rešavanja .....	32
5.7.1. - Dinamički slučaj .....	33
5.7.2. - Statički slučaj .....	33
5.7.3. - Nestacionarno provodjenje toplote .....	34
5.7.2. - Stacionarno provodjenje toplote .....	34
5.8. - Eksplicitni postupak rešavanja .....	34
5.8.1. - Postupak Belytschka .....	35
5.8.2. - Povećanje tačnosti iterativnog postupka .....	36
5.8.3. - Prediktor - korektor šema .....	37
5.9. - Iteracije kod implicitne procedure .....	38
5.10. - Stabilnost numeričke procedure .....	39
6. - EFEKTIVNO IZRAČUNAVANJE VELIČINA POVEZANIH SA JED- NAČINAMA KRETANJA .....	41

6.1. - Osnovni metrički tenzor .....	41
6.2. - Matrica masa .....	42
6.3. - Matrica sila .....	43
6.4. - Matrica krutosti .....	44
6.4.1. - Membrane izložene čistom smicanju .....	45
6.4.2. - Četvorougao ni element sa četiri čvora .....	47
6.4.3. - Četvorougao ni element sa osam čvorova .....	48
6.5. - Ostale matrice .....	50
6.6. - Tenzor deformacije .....	50
6.7. - Tenzor membranskih sila .....	51
6.7.1. - Homogen linearno elastičan materijal .....	51
6.7.2. - Glavne membranske sile .....	52
6.7.3. - Glavni pravci .....	53
7. - NUMERIČKI PRIMERI .....	54
7.1. - Sistem dvaju štapova .....	54
7.1.1. - Granični uslovi .....	54
7.1.2. - Početni uslovi .....	55
7.1.3. - Konačni elementi .....	55
7.1.4. - Vrednosti pojedinih matrica .....	56
7.1.5. - Fizičke konstante .....	57
7.1.6. - Jednačine kretanja i provodjenja toplote .....	58
7.1.7. - Analitičko rešenje .....	59
7.1.8. - Numerička rešenja dinamičkog problema .....	60
7.1.9. - Numerička rešenja spregnutog problema .....	61
7.2. - Vitoperena kutija .....	65
7.2.1. - Ispitivanje konvergencije .....	69
7.2.2. - Efekti vitoperenosti .....	71
7.3. - Membrana oblika hiperboličnog paraboloida (hipara) .....	71
7.4. - Prostiranje talasa brzine u štapu .....	75
8. - DISKUSIJA I ZAKLJUČCI .....	78
DODATAK - AKSIJALNO NAPREGNUTI ŠTAPOVI .....	79
8.1. - Kinematika štapa .....	80

D. 2. - Osnovne termomehaničke veličine .....	80
D. 2.1. - Masa .....	80
D. 2.2. - Mehanička snaga (efekt rada) .....	80
D. 2.3. - Unutrašnja energija .....	81
D. 2.4. - Kinetička energija .....	81
D. 2.5. - Toplotna energija .....	81
D. 2.6. - Entropija .....	81
D. 3. - Globalni zakoni balansa .....	82
D. 3.1. - Zakon o očuvanju energije .....	82
D. 3.2. - Zakon o balansu momenta količine kretanja .....	82
D. 3.3. - Zakon o balansu količine kretanja .....	82
D. 3.4. - Zakon o očuvanju mase .....	82
D. 4. - Drugi zakon termodinamike .....	82
D. 5. - Lokalni zakoni balansa .....	83
D. 5.1. - Zakon o očuvanju mase .....	83
D. 5.2. - Zakon o balansu količine kretanja .....	83
D. 5.3. - Zakon o balansu momenta količine kretanja .....	83
D. 5.4. - Zakon o očuvanju energije .....	83
D. 6. - Nejednačina Clausius - Dühema .....	83
D. 7. - Konstitutivne jednačine .....	84
D. 7.1. - Termomehanički jednostavan materijal .....	84
D. 7.2. - Linearan izotropan termoelastičan materijal .....	84
D. 8. - Konačni elementi štapova .....	85
POPIS LITERATURE .....	87

## PREDGOVOR

Pojava ovoga rada bila je inicirana tekućim potrebama u praksi proračuna složenih tankozidnih sistema, kao što su konstrukcije aviona, brodova i sl. Tradicionalne inženjerske aproksimacije koje se uspešno koriste pri proračunu ovakvih konstrukcija, često podrazumevaju pretpostavke membranske teorije.

Uvodjenje metode konačnih elemenata omogućilo je detaljno tretiranje vrlo složenih konstrukcija ove vrste. Međutim, istovremeno su porasli zahtevi u smislu korektnosti osnovnih postavki.

Automatizovana obrada inženjerskih podataka zahteva obiman rad na razvoju i održavanju programa, pripremi i korekcijama ulaznih podataka, kao i interpretaciji rezultata, koji se za složene konstrukcije iskazuje u desetina ma čovek-godina, dok se cena obrade na računaru penje na nekoliko miliona ND.

Samo letimičan pogled na ove cifre ukazuje da je opravdan svaki napor na poboljšanju teorijskih osnova koji može da doprinese kvalitetu tako skupocennih rezultata.

U toku pisanja ovoga rada veliko ohrabrenje su mi pružali korisni rezultati dobijeni sa do sada realizovanim produkcionim programima za proračun avionskih konstrukcija metodom konačnih elemenata u Vazduhoplovnotehničkom institutu u Žarkovu, kao i postojani interes za teorijske osnove metode konačnih elemenata pokazan na Institutu za mehaniku Prirodno - matematičkog fakulteta u Beogradu.

## 1. - UVOD

U teorijskim razmatranjima membrane se gotovo redovno tretiraju kao specijalan slučaj ljuski. Medjutim, dok se teorija ljuski<sup>5</sup>, oslanja bilo na koncept površi Cosserata, bilo na trodimenzionalni kontinuum, teorija membrana može da se shvati kao teorija običnog dvodimenzionalnog kontinuuma<sup>8</sup>, i kao takva da se posmatra samostalno.

Sa praktične tačke gledišta, zanimljivo je citirati Novožilova<sup>9</sup>:

"Zbog svoje male debljine, ljuske nisu dobro prilagodjene savijanju. Relativno mali momenti savijanja izazivaju velike napone i ugibe.

Savijanje je prema tome opasno i nepogodno sa tehničke tačke gledišta. Ovakvo stanje mora svakako da se izbegne odgovarajućim izborom oblika ljuske, načina oslanjanja, i ponekad uvodjenjem dodatnih oslonaca....

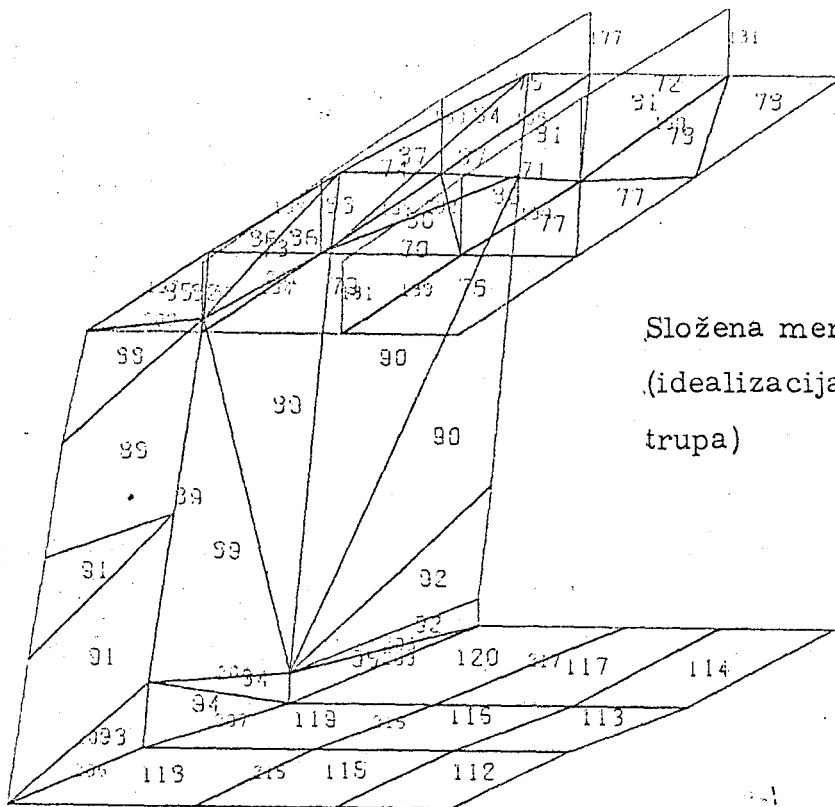
Nasuprot tome, membransko stanje napona, u kome je ljuska ravnomerno opterećena po celoj debljini, a spoljnje opterećenje se prenosi na oslonce na najracionalniji način, najpogodnije je sa tehničke tačke gledišta...."

U pogledu uslova koje ljuska treba da zadovolji kako bi membranska teorija mogla da se primeni, teško je reći bilo šta novo. Postoji čitav niz izvanrednih studija o ovoj temi, posebno sovjetske<sup>19</sup> i holandske<sup>10</sup> škole.

Medjutim, primena membranske teorije je šira nego što bi to moglo da se zaključi iz klasičnih rezultata teorije ljuski. Tankozidne konstrukcije, nezaobilazne u tehničkim oblastima u kojima su uštede na materijalu ili na težini konstrukcije od primarnog značaja, predstavljaju u suštini sisteme membrana (Slika 1).

Cilindrične i konične tankozidne konstrukcije uspešno se analiziraju pomoću teorije tankozidnih štapova<sup>20, 21, 7</sup>. Pretpostavke ove teorije često podrazumevaju membransko stanje napona. Kako kaže Obrazcov (<sup>7</sup> str. 51)"... prihvatamo, da se naponsko stanje ljuske, kao i u bezmomentnoj teoriji, ne menja po debljini ove".

U okviru ove teorije moguća su i dalja uprošćenja - u smislu da se nošenje normalnih napona poveri uzdužnim i poprečnim ojačanjima, dok delovi membrana između ovih ojačanja nose samo smičuće napone<sup>21</sup>. Makoliko ova pretpostavka bila gruba, ona poseduje jedan značajan kvalitet u tome što je kontinualni problem ljuske preveden u diskretni problem sistema štapova i



Slika 1

Složena membranska konstrukcija  
(idealizacija segmenta avionskog  
trupa)

membrana. Teren za pojavu metode konačnih elemenata bio je pripremljen. Na bazi ovakvog modela, Argyris<sup>22</sup> je razvio složenu ali sistematsku aparaturu za proračun avionske konstrukcije "metodom sila". Već tom prilikom pojavio se naizgled marginalni problem četvorougaoog elementa membrane opterećenog čistim smicanjem, pravih ivica, ali sa čvorovima koji ne leže u istoj ravni. Problem je rešen posmatranjem globalne ravnoteže konačnog elementa, uz dopunsku pretpostavku o konstantnom naponu unutar elementa<sup>22,24</sup>. Kasnije<sup>23</sup>, problem je rešen bez uvođenja pomenute dopunske pretpostavke. Poslednja dostignuća iz ove oblasti publikovao je Robinson<sup>24</sup>.

Pojavom metode konačnih elemenata u njenom savremenom obliku<sup>25</sup>, omogućeno je pokrivanje proizvoljne membranske površi skupom trouglova. Ako se radi o prostornom četvorougaoom elementu membrane, ovaj može da se zameni sa dva, ili četiri trougla (kao kod elementa QDMEM iz poznatog paketa programa NASTRAN<sup>26</sup>). Pokušavajući da zamene relativno neefikasne<sup>27</sup> trougaone elemente, izvesni autori koristili su ravne četvorouglove, dozvoljavajući diskontinuitete konture na mestima čvorova. Medjutim, Haf-



tka i Robinson<sup>28</sup> publikovali su podatke o velikom rasipanju rezultata u takvim situacijama.

Sa druge strane, neki autori su, na osnovu određenih statičkih i kinematskih razmatranja, pokušali da modificiraju ravne elemente kako bi ovi mogli da posluže u opštem slučaju<sup>24, 29</sup>. Ovakvi prilazi su po pravilu praćeni glomaznim izvodjenjima, ograničeni su na specijalne slučajeve, i nije zapaženo da su publikovani ma kakvi numerički rezultati.

U oblasti konačnih elemenata tankih ljuski prilaz je bio teorijski korektniji. Tako Oden<sup>57</sup> načelno razmatra primenu materijalnih krivolinijskih koordinata, dok Wilson<sup>39</sup> praktično koristi ovakav prilaz. Prvi autor rasmatrao je i membranske elemente<sup>3</sup>, ali isključivo u ravnom slučaju. Korektne formulacije za membranske elemente u opštem slučaju prvi je dao, prema Ironsu<sup>58</sup>, Ahmad. Medjutim pomenuti prilaz je bio prilično glomazan, pošto se autori služe lokalnim koordinatnim sistemima u tangencijalnoj ravni. Sem toga, ovaj model koristili su samo kao osnovu za razvoj konačnih elemenata tankih ljuski.

Prilaz izabran u ovom radu podrazumevao je da se pre svega formulišu kinematske relacije, jednačine polja i konstitutivne relacije čvrstih membrana na način korektan sa gledišta savremene mehanike kontinuuma, a istovremeno pogodan za rešavanje metodom konačnih elemenata. Pokazalo se da ovakav pristup potencijalno sadrži velike mogućnosti uopštavanja, u smislu korišćenja konačnih elemenata pri rešavanju složenih termomehaničkih problema.

Takodje, u slučaju najjednostavnijih ali i najčešćih primena na linearno elastične probleme, predloženi prilaz omogućuje jednostavnu numeričku proceduru i daje logične i upotrebljive rezultate.

## 2. - NEKE OSNOVNE RELACIJE TEORIJE MEMBRANA

Teorija membrana je svakako klasična disciplina - dobro poznata kao specijalan slučaj teorije tankih ljuski. Prema tome, cilj ovog poglavlja nije izlaganje novih rezultata, već registrovanje nekih osnovnih relacija membranske teorije na način i u obimu neophodnom za dalji rad. Pri usvajanju terminologije i oznaka korišćeni su uglavnom radovi Naghdija<sup>5</sup> i Odena<sup>3</sup>.

### 2.1. - Kinematika membrana

Materijalne tačke membrane, kao dvodimenzionalnog kontinuuma, zauzimaju oblast definisanu srednjom površi membrane  $S$  i njenom konturom  $C$ . Položaj materijalne tačke u oblasti određen je materijalnim krivolinijskim koordinatama

$$\xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.1.1)$$

Položaj ove tačke u prostoru i vremenu odredićemo parametarskim jednačinama površi  $S$

$$x^i = x^i(\xi^\alpha, t) \quad (2.1.2)$$

gde su

$$x^i, \quad i = 1, 2, 3$$

Descartesove koordinate tačke  $\xi^\alpha$  u trenutku  $t$ .

Brzinu i ubrzanje materijalne tačke  $\xi^\alpha$  odredićemo diferenciranjem (2) po vremenu

$$\dot{x}^i = \partial x^i / \partial t; \quad \ddot{x}^i = \partial^2 x^i / \partial t^2 \quad (2.1.3)$$

Bazni vektori definisani su izrazom

$$x_\alpha^i = \partial x^i / \partial \xi^\alpha \quad (2.1.4)$$

Kvadrat dužine linijskog elementa dat je poznatom relacijom

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (2.1.5)$$

Zamenom (4) u (5) dobićemo da je

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2.1.6)$$

gde je

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x_\alpha^i x_\beta^j \quad (2.1.7)$$

osnovni metrički tenzor u trenutku  $t$ .

Element površine na membranskoj površi dat je izrazom poznatim iz diferencijalne geometrije

$$dS = \sqrt{a} \, d\xi^1 \, d\xi^2 \quad (2.1.8)$$

gde je

$$a = \det a_{\alpha\beta} \quad (2.1.9)$$

Registrujmo odmah da su kontravarijantne koordinate osnovnog metričkog tenzora  $a^{\alpha\beta}$

$$a^{11} = a_{22}/a ; \quad a^{12} = a^{21} = -a_{12}/a ; \quad a^{22} = a_{11}/a \quad (2.1.10)$$

Položaj materijalne tačke u referentnoj konfiguraciji biće

$$X^i = X^i(\xi^\alpha, t_0)$$

gde je  $t_0$  početni trenutak vremena. Sledstveno tome, osnovni metrički tenzor u referentnoj konfiguraciji je

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{ij} X_\alpha^i X_\beta^j \quad (2.1.11)$$

Sada možemo definisati tenzor relativne deformacije

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \quad (2.1.12)$$

kao i brzinu deformacije

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (x_\alpha^i \dot{x}_\beta^j + \dot{x}_\alpha^i x_\beta^j) \quad (2.1.13)$$

## 2.2. - Osnovne termomehaničke veličine

U ovom odeljku definisaćemo osnovne termomehaničke veličine membranske teorije, a na način uobičajen u savremenoj mehanici kontinuuma<sup>1, 2, 3, 4, 5, 6</sup>

### 2.2.1. - Masa

Masa je nenegativna, aditivna i nepromenljiva osobina kontinuuma. Postulira se egzistencija kontinualne mere mase  $\rho$ , nazvane gustina mase, ili kraće gustina, koja predstavlja masu po jedinici zapremine kontinuuma.

U teoriji membrana gustina se definiše kao masa po jedinici površine membranske površi, i označićemo je sa

$$\bar{\rho} = \rho \, d \quad (2.2.1)$$

gde je  $d$  debljina membrane, Ukupna masa membrane  $M$  data je izrazom

$$M = \int_S \bar{\rho} dS \quad (2.2.2)$$

gde se integracija proteže po materijalnoj površi membrane.

### 2.2.2. - Mehanička snaga (efekt rada)

Rad spoljnih sila koje deluju na membranu je skalarni proizvod ovih sila i pomeranja njihovih napadnih tačaka.

Pod mehaničkom snagom membrane podrazumevaćemo rad spoljnih sila u jedinici vremena

$$W = \int_S \bar{\rho} \delta_{ij} F^i \dot{x}^j dS + \int_C \delta_{ij} N^i \dot{x}^j ds \quad (2.2.3)$$

Ovde su  $F^i$  spoljne sile po jedinici mase membrane, a  $N^i$  spoljne sile po jedinici dužine konture membranske površi.

### 2.2.3. - Unutrašnja energija

Pod unutrašnjom energijom  $U$  podrazumeva se sposobnost unutrašnjih sila da vrše rad. U mehanici kontinuuma postulira se egzistencija gustine unutrašnje energije  $\epsilon$ , koja predstavlja unutrašnju energiju po jedinici mase, pa je

$$U = \int_S \bar{\rho} \epsilon dS \quad (2.2.4)$$

### 2.2.4. - Kinetička energija

Kako je to uobičajeno u mehanici kontinuuma, kinetičku energiju membrane definisaćemo izrazom

$$V = \frac{1}{2} \int_S \bar{\rho} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dS \quad (2.2.5)$$

### 2.2.5. - Toplotna energija

Pored rasmatranja čisto mehaničkih veličina, danas je kako u teoriji, tako i u praksi, teško izbeći rasmatranje toplotnih veličina i veze između toplotnih i mehaničkih veličina.

Toplotna energija koju membrana prima ili otpušta u jedinici vremena sastoji se od toplotnog fluksa  $\bar{q}$  po jedinici dužine konture i toplotnog izvora  $r$  po jedinici mase membrane:

$$Q = \int_S \bar{\rho} r dS + \int_C \bar{q} ds \quad (2.2.6)$$

### 2.2.6. Entropija

Entropija  $H$  je fundamentalna osobina kontinuuma. Postuliraćemo da je  $H$  kontinualna u odnosu na masu i aditivna:

$$H = \int_S \bar{\rho} \eta \, dS \quad (2.2.7)$$

Ovde je  $\eta$  specifična entropija po jedinici mase. Ukupna proizvodnja entropije u jedinici vremena biće

$$\Gamma = \frac{dH}{dt} = \int_S \bar{\rho} \frac{r}{\theta} \, dS - \int_C \frac{\bar{q}}{\theta} \, ds \quad (2.2.8)$$

gde su  $r/\theta$  i  $\bar{q}/\theta$  izvor i fluks entropije respektivno, dok je  $\theta$  apsolutna temperatura.

### 2.2.7. Slobodna energija

U teoriji toploprovodnih materijala uvodi se pojam specifične slobodne energije  $\Psi$ , po jedinici mase:

$$\Psi \equiv \epsilon - \eta \theta \quad (2.2.9)$$

## 2.3. Globalni zakoni balansa

### 2.3.1. Zakon o očuvanju energije

Iskustvo ukazuje<sup>4</sup> da su sve energije sistema aditivne, i da se sve promene energije i rada uravnotežuju unutrašnjom energijom. Ovaj zakon očuvanja energije postulira se kao fundamentalni aksiom mehanike:

Materijalna brzina<sup>6</sup> promene kinetičke i unutrašnje energije jednaka je efektu mehaničkog rada i promeni svih ostalih energija sistema u jedinici vremena.

$$\dot{V} + \dot{U} = W + \sum_{\alpha} \dot{E}_{\alpha} \quad (2.3.1)$$

Tačka ovde označava promenu u jedinici vremena, dok  $E_{\alpha}$  predstavlja mehanički ekvivalent promene  $\alpha$ -te vrste energije u jedinici vremena (npr. toplotne, električne, hemijske energije).

U studiji termomehaničkih fenomena rasmatramo mehaničke i toplotne energije, pa je

$$\dot{V} + \dot{U} = W + Q$$



Izraz (2.3.2) predstavlja ustvari prvi zakon termodinamike. Ako zamenimo (2.4), (2.5) i (2.6) u (2) dobićemo prvi zakon termodinamike u razvijenom obliku

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S \bar{\rho} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) dS \\ = \int_S \bar{\rho} \left( \delta_{ij} F^i \dot{x}^j + r \right) dS + \int_C \left( \delta_{ij} N^i \dot{x}^j + \bar{q} \right) dS \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Kada se poslužimo uslovima invarijantnosti pri superponiranim krutim kretanjima iz (3) dobijamo <sup>5</sup>:

2.3.2. Zakon o balansu momenta količine kretanja

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{\rho} x^k [\dot{x}^i] dS = \int_S \bar{\rho} x^k [F^i] dS + \int_C x^k [N^i] ds \quad (2.3.4)$$

2.3.3. Zakon o balansu količine kretanja

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{\rho} \dot{x}^i dS = \int_S \bar{\rho} F^i dS + \int_C N^i ds \quad (2.3.5)$$

2.3.4. Zakon o očuvanju mase

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{\rho} dS = 0 \quad (2.3.6)$$

2.4. Drugi zakon termodinamike

Ukupna proizvodnja entropije u jedinici vremena uvek je veća ili jednaka nuli.

$$\Gamma \geq 0 \quad (2.4.1)$$

Sledstveno (2.8)

$$\dot{H} \geq \int_S \bar{\rho} \frac{r}{\theta} dS + \int_C \frac{\bar{q}}{\theta} ds \quad (2.4.2)$$

2.5. Lokalni zakoni balansa

2.5.1. Zakon o očuvanju mase

Pod pretpostavkom da (3.6) važi za svaku podelu  $S$ , a imajući u vi-

du (1.8), dobićemo da je

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho} \sqrt{a} = 0 \quad (2.5.1)$$

### 2.5.2. Zakon o balansu količine kretanja

Primenom (3.5) i (3.3) na elementarni trougao membranske površi<sup>5,8</sup>, dobijamo da je

$$N^i = N^{i\beta} v_\beta ; \quad \bar{q} = \bar{q}^\beta v_\beta \quad (2.5.2)$$

$$N^i = N^{i(\beta)} \sqrt{a^{\beta\beta}} ; \quad \bar{q}^\beta = \bar{q}^{(\beta)} \sqrt{a^{\beta\beta}}$$

Veličine  $N^{i\beta}$  i  $\bar{q}^\beta$  nazvaćemo vektorima membranskih sila i fluksa respektivno. Veličine  $N^{i(\beta)}$  i  $\bar{q}^{(\beta)}$  su fizičke koordinate membranskih sila i fluksa po jedinici dužine koordinatne linije  $\xi^\beta$ , dok je  $v_\beta$  vektor normale na konturu, sa koordinatama

$$v_1 = \frac{ds_{(2)}}{ds} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} ; \quad v_2 = \frac{ds_{(1)}}{ds} \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \quad (2.5.3)$$

gde su

$$ds_{(1)} = \sqrt{a_{11}} d\xi^1 ; \quad ds_{(2)} = \sqrt{a_{22}} d\xi^2 \quad (2.5.4)$$

elementi koordinatnih linija  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ , respektivno.

Tenzor membranskih sila  $N^{\alpha\beta}$  je veličina čijom kontrakcijom sa baznim vektorima dobijamo vektore membranskih sila:

$$N^i{}^\beta = x^i{}_\alpha N^{\alpha\beta} \quad (2.5.5)$$

Ovo je tenzor u površi, u odnosu na transformacije koordinata površi<sup>5</sup> (str. 498).

Zamenom (5) u (2) dobićemo

$$N^i - x^i{}_\alpha N^{\alpha\beta} v_\beta = 0 \quad (2.5.6)$$

granične uslove za membranu. Zamenom  $N^i$  iz (6) u (3.5), jednačina balansa količine kretanja postaje

$$\frac{d}{dt} \int_S \bar{\rho} x^i dS = \int_S \bar{\rho} F^i dS + \int_C x^i{}_\alpha N^{\alpha\beta} v_\beta ds \quad (2.5.7)$$

Diferenciranjem integrala na levoj strani, uzimajući u obzir (1), i primenom teoreme o divergenciji na drugi integral desne strane, dobićemo da je

$$\int_S [ (x_\alpha^i N^{\alpha\beta}) |_\beta + \bar{\rho} (F^i - \dot{x}^i) ] dS = 0 \quad (2.5.8)$$

odakle slede lokalne jednačine kretanja

$$(x_\alpha^i N^{\alpha\beta}) |_\beta + \bar{\rho} F^i = \bar{\rho} \dot{x}^i \quad (2.5.9)$$

Kao što će se kasnije videti, ovakav oblik Cauchyevih jednačina izuzetno je pogodan za primene u metodi konačnih elemenata.

### 2.5.3. - Zakon o balansu momenta količine kretanja

Posmatrajmo (3.4). Diferenciranjem integrala na levoj strani, uzimajući u obzir (1), i primenom teoreme o divergenciji na drugi integral desne strane, a zatim korišćenjem (9) dobijamo da je

$$\int_S x_\beta^k x_\alpha^i N^{\alpha\beta} dS = 0 \quad (2.5.10)$$

Dekompozicijom ovog izraza i zamenom mesta nemih indeksa  $\alpha$  i  $\beta$ , dobićemo

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha} \quad (2.5.11)$$

uslov simetrije tenzora membranskih sila, odnosno drugi Cauchyev zakon za membranu.

### 2.5.4. - Zakon o očuvanju energije

Na osnovu (2.3), a imajući u vidu (1), dobićemo da je

$$\dot{U} = \int_S \bar{\rho} \dot{\epsilon} dS \quad (2.5.12)$$

Na sličan način, iz (2.4) i (1) dobijamo

$$\dot{V} = \int_S \bar{\rho} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dS \quad (2.5.13)$$

Imajući u vidu (2) i (6), drugi integral na desnoj strani (3.3) može se transformisati u integral po površini membrane

$$\int_S ( \delta_{ij} \dot{x}^j x_\alpha^i N^{\alpha\beta} + q^\beta ) |_\beta dS =$$



$$= \int_S [ \delta_{ij} \dot{x}_\beta^j x_\alpha^i N^{\alpha\beta} + \delta_{ij} \dot{x}_\alpha^j (x_\alpha^i N^{\alpha\beta}) |_\beta + \bar{q}^\beta |_\beta ] dS \quad (2.5.14)$$

Imajući u vidu (1.13), (8) i (11), izraz (3.3) svodi se na

$$\bar{\rho} (\dot{\epsilon} - h) - \bar{q}^\beta |_\beta - \frac{1}{2} N^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.5.15)$$

Uvodjenjem Helmholtzove slobodne energije  $\Psi$ , prema (2.9), ovaj izraz može da se napiše u obliku jednačine balansa energije

$$\bar{\rho} \theta \dot{\eta} - \bar{q}^\beta |_\beta - \bar{\rho} r - \partial = 0 \quad (2.5.16)$$

gde je

$$\partial \equiv \frac{1}{2} N^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} - \bar{\rho} (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) \quad (2.5.17)$$

unutrašnja disipacija<sup>3,4</sup>.

## 2.6 - Nejednačina Clausius - Dühema

U lokalnom obliku drugi zakon termodinamike (4.1) postaje

$$\bar{\rho} \theta \dot{\eta} - \bar{q}^\beta |_\beta - \bar{\rho} r + \frac{1}{\theta} q^\alpha \theta_\alpha \geq 0 \quad (2.5.18)$$

gde je

$$\theta_\alpha = \partial \theta / \partial \alpha \quad (2.5.19)$$

Ako se poslužimo izrazom (16) dobićemo da je

$$\partial + \frac{1}{\theta} q^\alpha \theta_\alpha \geq 0 \quad (2.5.20)$$



### 3. - KONSTITUTIVNE JEDNAČINE

U ovom poglavlju biće rasмотрene konstitutivne jednačine membrana. Ovo je neophodno, pošto se u literaturi konstitutivne jednačine daju bilo za tro-dimenzionalna tela, bilo za ljuske<sup>5</sup>, a i to u obliku koji nije posebno pogodan za korišćenje u ovom radu. Pri tome ćemo se zadržati na termomehantički jednostavnim materijalima, u smislu u kome ih definiše Noll<sup>3</sup>. U svakom slučaju ova je klasa dovoljno široka i može da reprezentuje niz najrazličitijih inženjerskih materijala.

#### 3.1. - Termomehantički jednostavan materijal

Ako kao konstitutivne promenljive usvojimo istorije osnovnog metričkog tenzora i apsolutne temperature, i tekući gradijent temperature  $\theta_\alpha(t)$ , konstitutivne funkcionale možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{s=0}^{\infty} \Psi [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_\alpha(t)] \\ N^{\alpha\beta} &= \int_{s=0}^{\infty} N^{\alpha\beta} [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_\alpha(t)] \\ \eta &= \int_{s=0}^{\infty} \eta [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_\alpha(t)] \\ q^\alpha &= \int_{s=0}^{\infty} q^\alpha [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_\alpha(t)] \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Ovde je sa  $t$  označen tekući trenutak vremena, a sa  $s$  neki trenutak u prošlosti. Da bi navedeni funkcionali bili dopustivi, treba da budu zadovoljeni fizički zakoni koji opisuju termomehantičko ponašanje. Rasmotrimo zakon o očuvanju energije (2.5.16) i nejednačinu Clausius - Dühema (2.5.20). Zamenom (2.5.17) u (2.5.20) dobićemo relaciju

$$\frac{1}{2} N^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} - \bar{\rho} (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{\theta} q^\alpha \dot{\theta}_\alpha \geq 0 \quad (3.1.2)$$

Definišimo sada izvod funkcionala slobodne energije po vremenu<sup>3</sup>

$$\dot{\Psi} = \delta\Psi + \dot{a}_{\alpha\beta} D_{a_{\alpha\beta}} \Psi + \dot{\theta} D_\theta \Psi + \dot{\theta}_\alpha D_{\theta_\alpha} \Psi \quad (3.1.3)$$

U ovom izrazu je

$$\delta \Psi = \delta \Psi \Big|_{s=0}^{\infty} [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_{\alpha}(t) | \dot{a}_{\alpha\beta}(t-s), \dot{\theta}(t-s)] \quad (3.1.4)$$

Frechetov diferencijal, linearan po  $\dot{a}_{\alpha\beta}(t-s)$  i  $\dot{\theta}(t-s)$ . Operatore  $D_{a_{\alpha\beta}}$ ,  $D_{\theta}$  i  $D_{\theta_{\alpha}}$  možemo da shvatimo kao parcijalne izvode po  $a_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$  i  $\theta_{\alpha}$ .

Zamenom (3) u (2) dobićemo

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} N^{\alpha\beta} - \bar{\rho} D_{a_{\alpha\beta}} \Psi \right) \dot{a}_{\alpha\beta} - \bar{\rho} (\eta + D_{\theta} \Psi) \dot{\theta} - \bar{\rho} \delta \Psi - \\ - \bar{\rho} \dot{\theta}_{\alpha} D_{\theta_{\alpha}} \Psi + \frac{1}{\theta} q^{\alpha} \theta_{\alpha} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Da bi izraz (5) važio za proizvoljne vrednosti  $\dot{a}_{\alpha\beta}$ ,  $\dot{\theta}$  i  $\dot{\theta}_{\alpha}$ , neophodno je da se koeficijenti uz ove veličine anuliraju, a da preostali članovi budu pozitivni, pa je

$$N^{\alpha\beta} = 2 \bar{\rho} D_{a_{\alpha\beta}} \Psi \quad (3.1.6)$$

$$\eta = - D_{\theta} \Psi \quad (3.1.7)$$

$$D_{\theta_{\alpha}} \Psi = 0 \quad (3.1.8)$$

$$- \bar{\rho} \delta \Psi + \frac{1}{\theta} q^{\alpha} \theta_{\alpha} \geq 0 \quad (3.1.9)$$

Upoređenjem (9) i (2.5.20) dobićemo da je unutrašnja disipacija

$$\partial = - \bar{\rho} \delta \Psi \quad (3.1.10)$$

Saglasno izrazima (6), (7) i (8), termomehanički jednostavni materijali okarakterisani su sa svega dva konstitutivna funkcionala, jednim koji opisuje slobodnu energiju

$$\Psi = \Psi \Big|_{s=0}^{\infty} [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t)] , \quad (3.1.11)$$

i drugim koji opisuje toplotni fluks

$$q^{\alpha} = q^{\alpha} \Big|_{s=0}^{\infty} [a_{\alpha\beta}(t-s), \theta(t-s); a_{\alpha\beta}(t), \theta(t), \theta_{\alpha}(t)] \quad (3.1.12)$$

Problem se sada svodi na eksplicitno izražavanje konstitutivnih funkcionala slobodne energije i toplotnog fluksa za određene materijale koji se koriste u praksi. Ponašanje inženjerskih materijala obično se opisuje kao kombina-

cija elastičnih, plastičnih i viskoznih karakteristika. Načelno, konstitutivni funkcionali za ovakve materijale mogu da se prikažu na način koji su predložili Valanis i drugi<sup>30</sup>. Ono što preostaje jeste eksperimentalno određivanje konstitutivnih koeficijenata za pojedine materijale.

U svojstvu primera, u ovom radu ćemo rasмотрiti konstitutivne jednačine linearne izotropne termoelastične membrane, čiji su koeficijenti poznate fizičke konstante.

### 3.2. - Termoelastičan materijal

Za termoelastičan materijal, funkcional slobodne energije (3.1.11) po jedinici površine referentne površi svodi se na funkciju

$$\bar{\rho}_0 \Psi = \bar{\rho}_0 \Psi [a_{\alpha\beta}(t), \theta(t)] \quad (3.2.1)$$

gde je  $\bar{\rho}_0$  referentna gustina.

Razvijmo ovaj izraz u stepeni red po  $a_{\alpha\beta}$  i  $\theta$ , pa je

$$\bar{\rho}_0 \Psi = c + c^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + c^{\theta} \theta + c^{\alpha\beta\chi\psi} a_{\alpha\beta} a_{\chi\psi} + c^{\alpha\beta\theta} a_{\alpha\beta} \theta + c^{\theta\theta} \theta^2 + \\ + \text{članovi višega reda po } a_{\alpha\beta} \text{ i } \theta \quad (3.2.2),$$

Uobičajeno je da se linearizacija konstitutivnih jednačina izvodi zadržavanjem na članovima reda ne većeg od drugog. Medjutim, primećeno je da ovakav postupak dovodi do rezultata koji nisu u skladu sa klasičnom teorijom termoelastičnog materijala (<sup>3</sup> str. 365). Kako bi se izbegle ove inkonzistencije, primenićemo postupak sličan onome koji je koristio Nowacki<sup>12</sup>, za tro-dimenzionalan materijal.

Za konstitutivno linearan termoelastičan materijal smatraćemo da se  $a_{\alpha\beta}$  ne pojavljuje u članovima reda većeg od drugog. Sve članove reda nezavisne od  $a_{\alpha\beta}$  grupisaćemo u funkciju  $\Phi(\theta)$ , pa je

$$\bar{\rho}_0 \Psi = c^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\chi\psi} a_{\alpha\beta} a_{\chi\psi} + c^{\alpha\beta\theta} a_{\alpha\beta} \theta + \Phi(\theta) \quad (3.2.3)$$

Sledstveno (1.7), entropija po jedinici površine biće

$$\bar{\rho}_0 \eta = - c^{\alpha\beta\theta} a_{\alpha\beta} - d\Phi/d\theta \quad (3.2.4)$$

Saglasno Nowackom<sup>12</sup>, specifičnu toplotu po jedinici površine pri konstantnoj deformaciji definišemo kao

$$DC \equiv \theta \frac{\partial \bar{\rho}_0 \eta}{\partial \theta} \quad (3.2.5)$$

gde je  $D$  debljina membrane u referentnoj konfiguraciji, a  $C$  specifična toplota po jedinici zapremine. Iz (4) sada sledi da je

$$DC = -\theta d^2 \eta / dt^2 \quad (3.2.6)$$

Dvostrukom integracijom ovog izraza, uz uslov da je u referentnoj konfiguraciji  $\eta = 0, \theta = \epsilon$  dobićemo da je

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \psi = c_0 + c^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + c^{\alpha\beta\chi\psi} a_{\alpha\beta} a_{\chi\psi} + c^{\alpha\beta\theta} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \theta \\ + CD \theta (1 - \ln \frac{\theta}{\epsilon}) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

### 3.2.1. Izotropan linearan termoelastičan materijal

Saglasno rasmatranjima Naghdija<sup>5</sup>, koeficijenti konstitutivnih funkcija za izotropnu membranu moraju biti homogene linearne funkcije proizvoda od  $A^{\alpha\beta}$ , pa je

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \psi = c_0 + c_1 A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + (c_2 A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + c_3 A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi}) a_{\alpha\beta} a_{\chi\psi} \\ + c_4 A^{\alpha\beta} (a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \theta + CD \theta (1 - \ln \frac{\theta}{\epsilon}) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Problem koji se sada postavlja jeste da se uspostavi veza izmedju koeficijenata  $c_0 - c_4$  i tehničkih konstanti materijala.

Iz uslova da je u referentnoj konfiguraciji  $\psi = 0$ , sledi da je

$$c_0 = -2c_1 - 4c_2 - 2c_3 - CD \epsilon \quad (3.2.9)$$

Saglasno (1.6) i (2.5.1) membranske sile će biti

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} = 2 \sqrt{A/a} [ c_1 A^{\alpha\beta} + 2(c_2 A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + c_3 A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi}) a_{\chi\psi} \\ + c_4 A^{\alpha\beta} \theta ] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Iz uslova da je u referentnoj konfiguraciji

$$N^{\alpha\beta} = 0, \text{ sledi da je}$$

$$c_1 = -4c_2 - 2c_3 - c_4 \epsilon \quad (3.2.11)$$

Ako (10) rešimo po tenzoru relativne deformacije  $\gamma_{\chi\psi}$  (2.1.12) dobićemo da je

$$\gamma_{\chi\psi} = \frac{1}{8c_3} S_{\chi\psi} - \frac{1}{8c_3} \frac{c_2}{2c_2 + c_3} A_{\chi\psi} S - \frac{1}{4} \frac{c_4}{2c_2 + c_3} A_{\chi\psi} T \quad (3.2.12)$$

gde je  $S_{\chi\psi}$  kovarijantni oblik tenzora membranskih sila svedenog na referentnu konfiguraciju:

$$S_{\chi\psi} = A_{\alpha\chi} A_{\beta\psi} N^{\alpha\beta} \sqrt{a/A} \quad (3.2.13)$$

dok je

$$T = \theta - \epsilon \quad (3.2.14)$$

relativna temperatura. Saglasno (12), termički deo deformacije je

$$\gamma_{\chi\psi}^T = - \frac{1}{4} \frac{c_4}{2c_2 + c_3} A_{\chi\psi} T \quad (3.2.15)$$

Imajući u vidu da je u linearnoj termoelastičnosti

$$\gamma_{\chi\psi}^T = \alpha A_{\chi\psi} T \quad (3.2.16)$$

gde je  $\alpha$  koeficijent temperaturskog širenja, biće

$$\alpha = - \frac{1}{4} \frac{c_4}{2c_2 + c_3} \quad (3.2.17)$$

Sa druge strane, čisto mehanički deo membranske sile je, saglasno (10), (11) i (2.1.12):

$$N^{\alpha\beta} = 8 \sqrt{A/a} (c_2 A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + c_3 A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi}) \gamma_{\chi\psi} \quad (3.2.18)$$

Korišćenjem tehničkih konstanti pri infinitezimalnim deformacijama  $e_{\chi\psi}$ , membranske sile mogu da se prikažu u obliku (<sup>5</sup> str. 581):

$$N^{\alpha\beta} = \frac{2\mu D}{1-\nu} [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] e_{\chi\psi} \quad (3.2.19)$$

gde je  $\mu$  moduo smicanja a  $\nu$  Poissonov koeficijent. Upoređenjem (19) i (18) pri istim uslovima, dobijamo da je

$$c_2 = \frac{1}{4} \mu D \frac{\nu}{1-\nu} ; \quad c_3 = \frac{1}{4} \mu D \quad (3.2.20)$$

Zamenom (20) u (17) dobićemo da je

$$c_4 = - \alpha \mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (3.2.21)$$

Zamenom (21) i (20) u (11) dobićemo da je

$$c_1 = \frac{1}{2} \mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} (2\alpha\epsilon - 1) \quad (3.2.22)$$

Konačno, iz (22), (20) i (9) sledi da je

$$c_0 = \frac{\mu D}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} - (2\mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha + CD) \cdot \epsilon \quad (3.2.23)$$

Sada više nema problema da konstitutivne jednačine (2.2), (2.10) i (2.4) izrazimo preko tehničkih konstanti, pa su

- Slobodna energija

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \psi &= \frac{\mu D}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} - (2\mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha + CD) \epsilon - \\ &- \frac{\mu D}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} (1 - 2\alpha\epsilon) A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} + (2\mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} + CD)\theta + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\mu D}{1-\nu} [\nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu)A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi}] a_{\alpha\beta} a_{\chi\psi} - \\ &- \mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \theta - CD \theta \ln \frac{\theta}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

- Membranske sile

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= 2 \sqrt{A/a} \frac{\mu D}{1-\nu} \left\{ \frac{1+\nu}{2} (2\alpha\epsilon - 1) A^{\alpha\beta} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} [\nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu)A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi}] a_{\chi\psi} \\ &\left. - (1+\nu)\alpha A^{\alpha\beta} \theta \right\} \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

U inverznom obliku biće

$$\begin{aligned} a_{\chi\psi} &= \frac{\sqrt{a/A}}{\mu D} \frac{1}{1+\nu} [(1+\nu)A_{\alpha\chi} A_{\beta\psi} - \nu A_{\chi\psi} A_{\alpha\beta}] N^{\alpha\beta} + \\ &+ (1+2\alpha\theta)A_{\chi\psi} - 2\alpha\epsilon A_{\chi\psi} \end{aligned}$$

- Entropija

$$\bar{\rho}_0 \eta = D\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha (2 - A^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) + CD \ln \frac{\theta}{\epsilon} \quad (3.2.26)$$

Sve navedene konstitutivne funkcije mogu da se izraze i preko relativnih promenljivih  $\gamma_{\alpha\beta}$  i  $T$ , pa su

- Slobodna energija

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \Psi &= \frac{\mu D}{1-\nu} [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\chi\psi} \\ &\quad - 2\mu D \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} T + \\ &\quad + CD \epsilon [ T/\epsilon - (1+T/\epsilon) \ln(1+T/\epsilon) ] \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

- Membranske sile

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= 2\sqrt{A/a} \frac{\mu D}{1-\nu} \{ [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] \gamma_{\chi\psi} - \\ &\quad - (1+\nu) \alpha A^{\alpha\beta} T \} \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Inverzijom ovog izraza dobijamo

$$\gamma_{\chi\psi} = \frac{\sqrt{a/A}}{2\mu D} \frac{1}{1+\nu} [ (1+\nu) A_{\alpha\chi} A_{\beta\psi} - \nu A_{\chi\psi} A_{\alpha\beta} ] N^{\alpha\beta} + A_{\chi\psi} T \quad (3.2.29)$$

- Entropija

$$\bar{\rho}_0 \eta = 2\mu D \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + CD \ln(1+T/\epsilon) \quad (3.2.30)$$

- Toplotni fluks

Što se tiče konstitutivnih jednačina za toplotni fluks, zadržaćemo se na Fourierovom zakonu, pa za izotropnu membranu dobijamo

$$\bar{q}^{\alpha} = D \kappa A^{\alpha\beta} \theta_{\beta} \quad (3.2.31)$$

gde je  $\kappa$  koeficijent toplotne provodljivosti za trodimenzionalan materijal.



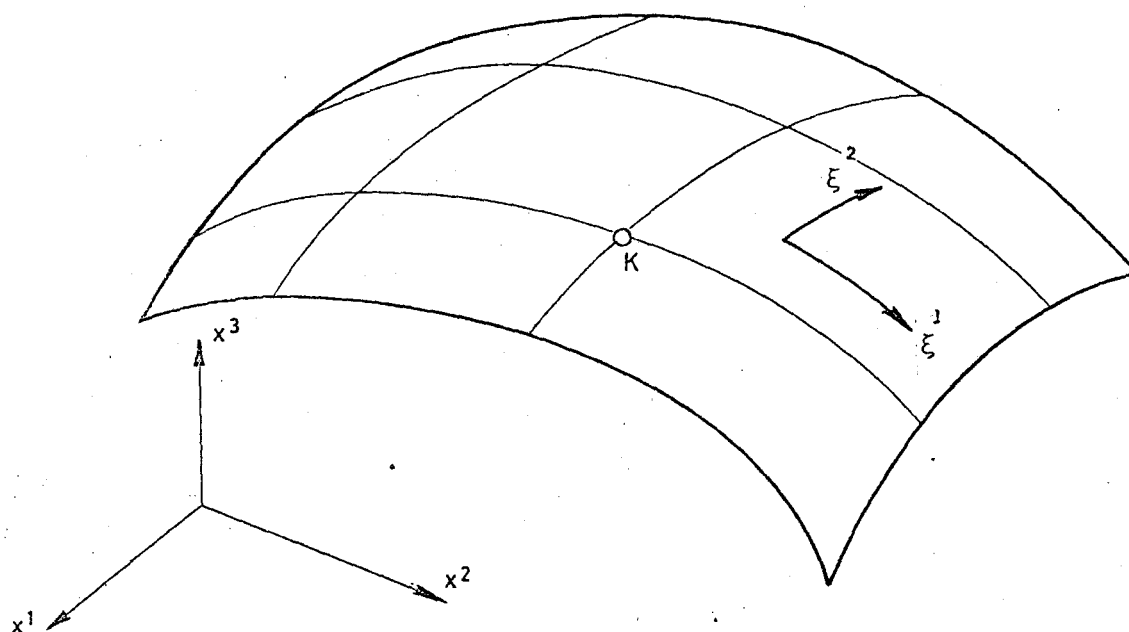
#### 4. - KONAČNI ELEMENTI MEMBRANA

Da bi uveli pojam konačnih elemenata, citiraćemo iscrpnu definiciju Odena<sup>59</sup>:

"Metoda konačnih elemenata je prvenstveno sistematska i veoma moćna metoda interpolacije. Njene najprivlačnije crte su sledeće: prvo, proces interpolacije može da ne zavisi od geometrije posmatranog domena. Sledstveno, lako je interpolirati funkcije na neregularnim, pa i višestruko povezanim domenima. Drugo, interpolant konačnih elemenata omogućuje da se na sistematski način zadovolje granični uslovi. Konačno, pošto su koncepti interpolacije i aproksimacije blisko povezani, pojam konačnih elemenata dovodi nas do veoma moćne metode za približno rešavanje graničnih problema".

##### 4.1. - Podela membrane na konačne elemente

Aproksimirajmo membranu skupom medjusobno povezanih elemenata. Elementi su povezani na ivicama, i ostaju povezani u toku kretanja. Svakom pojedinom elementu asociraćemo materijalne koordinate  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Prostorni Descartesov koordinatni sistem  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , zajednički je za sve elemente (Sl. 2).



Slika 2

U praksi, membranski sistem delimo na konačne elemente u skladu sa postojećom fizičkom podelom posmatrane strukture. Pri tome broj elemenata i kompleksnost svakog pojedinog zavisi od željene tačnosti rešenja datog problema.

#### 4.2. - Kinematika elemenata

Pogodnim izborom interpolacionih funkcija  $P^K(\xi^\alpha)$  položaj proizvoljne tačke nekog elementa možemo prikazati Descartesovim koordinatama ove

$$x^i = P^K(\xi^\alpha) x_K^i(t); \quad K = 1, \dots, n \quad (4.2.1)$$

U ovom izrazu  $x_K^i(t)$  su koordinate čvorova  $K$ , promenljive u toku vremena, dok je  $n$  ukupan broj čvorova. Funkcije  $P^K$  unutar jednog elementa uzimaju vrednosti različite od nule samo za čvorove  $K$  koji pripadaju tom elementu.

Pošto smo u izrazu (1) razdelili promenljive, lako je odrediti brzine i ubrzanja proizvoljne tačke membrane:

$$\dot{x}^i = P^K \dot{x}_K^i; \quad \ddot{x}^i = P^K \ddot{x}_K^i \quad (4.2.2)$$

gde su

$$\dot{x}_K^i = dx_K^i / dt; \quad \ddot{x}_K^i = d^2 x_K^i / dt^2 \quad (4.2.3)$$

brzine i ubrzanja čvornih tačaka,

Takodje je lako izračunati i koordinate baznih vektora

$$x_\alpha^i = P_\alpha^K x_K^i; \quad P_\alpha^K = \partial P^K / \partial \xi^\alpha \quad (4.2.4)$$

Osnovni metrički tenzor će na osnovu (2.1.7) da bude

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{ij} P_\alpha^K P_\beta^L x_K^i x_L^j \quad (4.2.5)$$

dok je brzina deformacije

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \dot{a}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} B_{\alpha\beta}^{KL} x_K^i \dot{x}_L^j \quad (4.2.6)$$

gde je

$$B_{\alpha\beta}^{KL} = \frac{1}{2} (P_\alpha^K P_\beta^L + P_\alpha^L P_\beta^K) \quad (4.2.7)$$

## 4.3. - Raspored temperature

Nema prepreka da se apsolutna temperatura aproksimira već usvojenim sistemom interpolacionih funkcija, pa je

$$\theta = P^K \theta_K \quad (4.3.1)$$

$$\dot{\theta} = P^K \dot{\theta}_K \quad (4.3.2)$$

$$\theta_\alpha = P_\alpha^K \theta_K \quad (4.3.3)$$

## 4.4. - Jednačine kretanja sistema konačnih elemenata

U metodi Galerkina<sup>4</sup> slabo rešenje jednačina (2.5.9) aproksimiramo skupom linearno nezavisnih baznih funkcija. Za tu svrhu upotrebićemo već uvedene interpolacione funkcije  $P^K(\xi^\alpha)$  iz (2.1). Koeficijente uz ove funkcije - u posmatranom slučaju položaje čvornih tačaka, odredićemo iz jednačine

$$\sum_e \int_S (x_\alpha^i N^{\alpha\beta})|_\beta + \bar{\rho} (F^i - \dot{x}^i) P^L dS = 0 \quad (4.4.1)$$

U ovom izrazu integralimo unutar svakog pojedinog elementa, a sumiramo po svim elementima sistema. Prvi član jednačine (1) možemo prikazati u obliku

$$\sum_e \int_S (x_\alpha^i N^{\alpha\beta})|_\beta P^L dS = \sum_e \int_S (x_\alpha^i N^{\alpha\beta} P_\beta^L)|_\beta dS - \sum_e \int_S x_\alpha^i N^{\alpha\beta} P_\beta^L dS$$

Saglasno teoremi o divergenciji i graničnim uslovima (2.5.2), prvi integral na desnoj strani postaje

$$\sum_e \int_S (x_\alpha^i N^{\alpha\beta} P_\beta^L)|_\beta dS = \sum_e \int_C x_\alpha^i N^{\alpha\beta} P_\beta^L v_\beta ds = \sum_e \int_C N^i P^L ds$$

Ako sada upotrebimo relacije (2.2) i (2.3) dobićemo jednačine kretanja u obliku

$$M^{KL} \dot{x}_K^i + S^{KL} x_K^i = R^L i \quad (4.4.2)$$

gde su

$$M^{KL} = \sum_e \int_S \bar{\rho} P^K P^L dS \quad (4.4.3)$$

članovi matrice masa sistema, a

$$S^{KL} = \sum_e \int_S N^{\alpha\beta} P_\alpha^K P_\beta^L dS \quad (4.4.4)$$

članovi matrice sila sistema.

Dalje je

$$R^{Li} = \sum_e \int_S \bar{\rho} F^i P^L dS + \sum_e \int_C N^i P^L ds \quad (4.4.5)$$

vektor generalisanih sila sistema.

Treba zapaziti da jednačine (2) - (5) važe za proizvoljan sistem membranskih elemenata, bez obzira na materijal od kojega su ovi načinjeni. Šta više, može se pokazati da jednačina (2) važi i za trodimenzionalne, kao i za linijske konačne elemente. Izvesno, u ova poslednja dva slučaja razlikovaće se domeni integracije od onih u izrazima (3) - (5).

Svakako, članovi matrice sila sistema (4) zavisice od konstitutivnih jednačina. Tako je za termomehanički jednostavan materijal, saglasno (3.1.6)

$$S^{KL} = \sum_e \int_S \bar{\rho} P_\alpha^K P_\beta^L D_{\alpha\beta}^a \psi dS \quad (4.4.6)$$

#### 4.5. - Jednačine provodjenja toplote u sistemu konačnih elemenata

Nema prepreke da slabo rešenje jednačina (2.6.20) aproksimiramo već uvedenim funkcijama (2.3). Koeficijente uz ove funkcije odredićemo iz jednačine

$$\sum_e \int_S (\bar{\rho} \theta \dot{\eta} - \bar{q}^\beta |_\beta - \bar{\rho} r - \partial) P^L dS = 0 \quad (4.5.1)$$

Drugi član ovog izraza napisaćemo u obliku

$$\sum_e \int_S \bar{q}^\beta |_\beta P^L dS = \sum_e \int_S (\bar{q}^\beta P^L) |_\beta dS - \sum_e \int_S \bar{q}^\beta P_\beta^L dS \quad (4.5.2)$$

Saglasno teoremi o divergenciji i graničnim uslovima (2.5.2), prvi integral desne strane postaje

$$\sum_e \int_S (\bar{q}^{-\beta} P^L) |_{\beta} dS = \sum_e \int_C P^L \bar{q}^{-\beta} v_{\beta} dS = \sum_e \int_C P^L \bar{q} dS \quad (4.5.3)$$

Definitivno je jednačina provodjenja toplote

$$O^{KL} \theta_K + G^L - Q^L - \partial^L = 0 \quad (4.5.4)$$

Ovde je

$$O^{KL} = \sum_e \int_S \bar{\rho} \dot{\eta} P^K P^L dS \quad (4.5.5)$$

matrica promene entropije u jedinici vremena, dok je

$$G^L = \sum_e \int_S \bar{q}^{-\beta} P_{\beta}^L dS \quad (4.5.6)$$

vektor toplotnog fluksa, a

$$Q^L = \sum_e \int_S \bar{\rho} r P^L dS + \sum_e \int_C \bar{q} P^L dS \quad (4.5.7)$$

generalisani fluks (zadani) u čvoru L, i

$$\partial^L = \sum_e \int_S P^L \partial dS \quad (4.5.8)$$

diskretna vrednost disipacije u čvoru L

Jednačine provodjenja toplote koje sunačelno oblika (4) prvi je izveo Oden<sup>3</sup>. Ove jednačine su veoma opšte, i ne zavise od materijala. Medjutim, sa gledišta efektivnog računanja jednačine (4) nisu naročito praktične, pošto promenu temperature u jedinici vremena sadrže implicitno.

4.5.1. - Jednačine provodjenja toplote za termomehanički jednostavan materijal

S obzirom na (3.1.3), (3.1.7) i (3.1.11), možemo napisati da je

$$\dot{\eta} = -\delta D_{\theta} \Psi - \dot{a}_{\chi} \psi - D_{a_{\chi}} \psi - D_{\theta} \Psi - \dot{\theta} D_{\theta}^2 \Psi \quad (4.5.9)$$

Imajući dalje u vidu (2.1.13), i simetriju izraza  $D_{a_{\chi\psi}} \Psi$ , saglasno (3.1.6), jednačine (4) mogu se napisati na sledeći način:

$$D^{KiL} \dot{x}_{Ki} + U^{KL} \dot{\theta}_K + J^{KL} \dot{\theta}_K + G^L - Q^L - \partial^L = 0 \quad (4.5.10)$$

gde je

$$D^{KiL} = -2 \int_e \bar{\rho} \theta x_{\chi}^i P^L P^K_{\psi} D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \Psi dS \quad (4.5.11)$$

$$U^{KL} = - \int_e \bar{\rho} \theta P^K P^L D_{\theta}^2 \Psi dS \quad (4.5.12)$$

$$J^{KL} = - \int_e \bar{\rho} P^K P^L D_{\theta} \delta \Psi dS \quad (4.5.13)$$

Takodje je, saglasno (3.1.10)

$$\partial^L = - \int_e \bar{\rho} P^L \delta \Psi dS \quad (4.5.14)$$

Jednačine (10) prvi put su izvedene u ovom radu. Njihova prednost je u tome što eksplicitno sadrže brzinu promene temperature. Ovo je od ključnog značaja za numeričko rešavanje jednačina provodjenja toplote.

## 5. - REŠAVANJE JEDNAČINA KRETANJA I PROVODJENJA TOPLOTE

### 5.1. - Opšte napomene

U svakom slučaju, jednačine (4.4.2) i (4.5.10) rešavaju se nekim od postupaka<sup>15</sup> za rešavanje sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Medjutim, s obzirom na prirodu problema, ove jednačine imaju niz specifičnosti, čije uzimanje u obzir znatno olakšava numerički postupak.

Ako koristimo eksplicitne procedure, (4.4.2) i (4.5.10) rešavaju se direktno, uz korišćenje odgovarajućih diferentnih šema u vremenu. Za slučaj jednačine (4.4.2) ovakav postupak rešavanja dao je Belytschko<sup>18</sup>. Za specijalni slučaj nelinearnog termoelastičnog materijala drugoga reda, Oden<sup>3</sup> je rešavao simultani sistem (4.4.2) i (4.5.4) metodom Runge-Kutta-Gill.

Medjutim, ako želimo da koristimo implicitne procedure, neophodna je prethodna linearizacija jednačina (4.4.2) i (4.5.10). Ako se radi o jednačinama (4.4.2), ovakva linearizacija može da se sprovede bilo formiranjem "inkrementne" jednačina kretanja<sup>3, 31</sup>, bilo implicitno<sup>16</sup>.

U ovom radu razložićemo jednačine (4.4.2) i (4.5.10) u red Taylora po vremenu, i zadržati linearne članove. Na sličan način je Kao<sup>32</sup> rešavao znatno jednostavniji statički nelinearan problem, pri čemu je razvitak bio, razume se, po pomeranjima.

### 5.2. - Linearizacija jednačina kretanja

Prepišimo jednačine kretanja (4.4.2) u obliku

$$p^{Jj} = M^{IJ} \ddot{x}_I^j + S^{IJ} \dot{x}_I^j - R^{Jj} = 0 \quad (5.2.1)$$

koji se odnosi na stanje sistema u trenutku  $t$ .

Stanje u trenutku  $t+h$  odredićemo razvitkom Taylora

$$p_h^{Jj} = p^{Jj} + M^{IJ} (\ddot{x}_{Ih}^j - \ddot{x}_I^j) + h \dot{S}^{IJ} \dot{x}_I^j + S^{IJ} (\dot{x}_{Ih}^j - \dot{x}_I^j) - R_h^{Jj} + R^{Jj} + \text{članovi višega reda po } t = 0 \quad (5.2.2)$$

Ovde je  $h$  mali period vremena, a indeksom  $h$  označene su veličine u trenutku  $t+h$ . Kada efektivno odredimo izvod  $S^{IJ}$  po vremenu, imajući u vidu (2.5.1), (3.1.3) i (3.1.11), i na izrazu (2) obavimo veći broj elementarnih

operacija tenzorske algebre, uz zanemarivanje članova višega reda pa t, dobićemo konačno linearizovane jednačine kretanja:

$$\begin{aligned} M^{Ii Jj} \dot{x}_{Ii}^h + (K^{Ii Jj} + S^{Ii Jj}) x_{Ii}^h + L^{IJj} \theta_I^h &= \\ = R_h^{Jj} + K^{Ii Jj} x_{Ii} + L^{IJj} \theta_I - h \delta R^{Jj} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

U ovom izrazu je

$$\begin{aligned} M^{Ii Jj} &= \sum_e \int_S \bar{\rho} \delta^{ij} P^I P^J dS \\ K^{Ii Jj} &= 4 \sum_e \int_S \bar{\rho} x_\alpha^j x_\chi^i P_\beta^J P_\psi^I D_{a\alpha\beta} D_{a\chi\psi} \psi dS \\ S^{Ii Jj} &= 2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \delta^{ij} P_\alpha^I P_\beta^J D_{a\alpha\beta} \psi dS \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

$$\delta R^{Jj} = 2 \sum_e \int_S \bar{\rho} x_\alpha^j P_\beta^J D_{a\alpha\beta} \delta\psi dS$$

$$L^{IJj} = 2 \sum_e \int_S \bar{\rho} x_\alpha^j P_\beta^J P^I D_{a\alpha\beta} D_\theta \psi dS$$

Veličine  $R_h^{Jj}$  i  $R^{Jj}$  definisane su izrazom (4.4.5).

## 5.2. - Linearizacija jednačina provodjenja toplote

Prepišimo jednačine (4.5.10) u obliku

$$\dot{\varphi}^J = D^{IiJ} \dot{x}_{Ii} + U^{IJ} \dot{\theta}_I + J^{IJ} \dot{\theta}_I + G^J - Q^J - \partial^J = 0 \quad (5.3.1)$$

koji se odnosi na stanje sistema u trenutku t. Stanje u trenutku t+h odredićemo razvitkom Taylora

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_h^J &= \dot{\varphi}^J + h \dot{D}^{IiJ} \dot{x}_{Ii}^h + D^{IiJ} (\dot{x}_{Ii}^h - \dot{x}_{Ii}) + \\ &+ h \dot{U}^{IJ} \dot{\theta}_I^h + U^{IJ} (\dot{\theta}_I^h - \dot{\theta}_I) + \\ &+ h \dot{J}^{IJ} \dot{\theta}_I^h + J^{IJ} (\dot{\theta}_I^h - \dot{\theta}_I) + \\ &+ h \dot{G}^J - (Q_h^J - Q^J) - h \dot{\partial}^J + \\ &+ \text{članovi višega reda po } t = 0 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$



Kada efektivno odredimo izvode pojedinih veličina po vremenu, i na izrazu (2) obavimo obimne ali jednostavne algebarske operacije, uz zanemarivanje članova višega reda po  $t$ , dobićemo konačno linearizovane jednačine provođenja toplote:

$$D^{IiJ} \dot{x}_{Iih} + F^{IiJ} x_{Iih} + U^{IJ} \dot{\theta}_{Ih} + [H^{IJ} + J^{IJ}] \theta_{Ih} = \\ = Q_h^J + F^{IiJ} x_{Ii} + H^{IJ} \theta_I - G^J + \vartheta^J + h \Delta^J \quad (5.3.3),,$$

Ovde je

$$D^{IiJ} = -2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \psi dS \quad (5.3.4)$$

$$F^{IiJ} = -2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \dot{\theta} x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \psi dS \\ -2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta \dot{x}_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \psi dS \\ -2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \dot{\psi} dS \\ -2 \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} D_{\theta} \delta \psi dS \\ +2 \sum_e \int_S \bar{\rho} x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} \delta \psi dS \\ +2 \sum_e \int_S x_{\chi}^i P_{\beta}^J P_{\psi}^I D_{a_{\chi\psi}} \bar{q}^{\beta} dS$$

$$U^{IJ} = - \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta P^I P^J D_{\theta}^2 \psi dS \quad (5.3.5)$$

$$H^{IJ} = - \sum_e \int_S \bar{\rho} \dot{\theta} P^I P^J D_{\theta}^2 \psi dS \\ - \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta P^I P^J D_{\theta}^2 \dot{\psi} dS \\ - \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta P^I P^J D_{\theta}^2 \delta \psi dS \\ + \sum_e \int_S \bar{\rho} P^I P^J D_{\theta} \delta \psi dS \\ + \sum_e \int_S P^I P_{\beta}^J D_{\theta} \bar{q}^{\beta} dS$$

$$+ \sum_e \int_S P_\alpha^I P_\beta^J D_{\theta_\alpha} \bar{q}^{-\beta} dS \quad (5.3.6)$$

$$J^{IJ} = - \sum_e \int_S \bar{\rho} P_\alpha^I P_\beta^J D_{\theta_\alpha} \delta \Psi dS \quad (5.3.7)$$

$$Q^J = \sum_e \int_S \bar{\rho} P^J r dS + \sum_e \int_C P^J \bar{q} ds \quad (5.3.8)$$

$$\partial^J = - \sum_e \int_S \bar{\rho} P^J \delta \Psi dS \quad (5.3.9)$$

$$G^J = \sum_e \int_S P^J \bar{q}^{-\beta} dS \quad (5.3.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta^J = & - \sum_e \int_S \bar{\rho} \theta P^J D_{\theta_\alpha} \delta^2 \Psi dS \\ & + \sum_e \int_S \bar{\rho} P^J \delta^2 \Psi dS \\ & + \sum_e \int_S P_\beta^J \delta \bar{q}^{-\beta} dS \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

5.4. - Linearizovane jednačine kretanja za linearan termoelastičan materijal

U svojstvu primera, rasmotrićemo jednačine kretanja za linearan termoelastičan materijal, imajući u vidu da su u tome slučaju konstitutivni koeficijenti dobro poznate fizičke konstante.

Zapazimo da je, saglasno (2.2.1)

$$\bar{\rho}_0 = \rho_0 D \quad (5.4.1)$$

gde je  $\rho_0$  referentna gustina odgovarajućeg trodimenzionalnog materijala, kao i da je, prema (2.1.8), element membranske površi u referentnoj konfiguraciji

$$dS_0 = \sqrt{A/a} dS \quad (5.4.2)$$

i, sledstveno (2.5.1)

$$\rho \sqrt{a} = \rho_0 \sqrt{A} \quad (5.4.3)$$

Zamenom izraza za slobodnu energiju (3.2.24) u integrale (1.4), a imajući u vidu (1), (2), i (3), dobićemo da je

$$M^{IiJj} = \sum_e \int_{S_0} \rho_0 \delta^{ij} D P^I P^J dS_0$$

$$S^{IiJj} = \sum_e \int_{S_0} \delta^{ij} P_\alpha^I P_\beta^J \frac{\mu D}{1-\nu} \{ [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] a_{\chi\psi} - (1+\nu) [ 1 + 2\alpha(\epsilon - \epsilon) ] A^{\alpha\beta} \} dS_0 \quad (5.4.4)$$

$$K^{IiJj} = 2 \sum_e \int_{S_0} x_\alpha^j x_\chi^i P_\beta^J P_\psi^I \frac{\mu D}{1-\nu} [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] dS_0$$

$$L^{IJj} = -2 \sum_e \int_{S_0} x_\alpha^j P_\beta^J P_\alpha^I \mu D \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\alpha\beta} dS_0$$

$$R_h^{Jj} = \sum_e \int_{S_0} P^J \rho_0 D F_h^j dS_0 + \sum_e \int_{C_0} P^J N_h^j ds_0$$

$$R^{Jj} = \sum_e \int_{S_0} P^J \rho_0 D F^j dS_0 + \sum_e \int_{C_0} P^J N^j ds_0$$

$$\delta R^{Jj} = 0$$

Sledstveno tome, linearizovane jednačine kretanja za linearan termoelastičan materijal iste su kao i za opšti slučaj termomehanički jednostavnog materijala (1.3), s tim što otpada relaksacioni član  $\delta R^{Jj}$ . Treba zapaziti da u izrazima (4.4) integralimo po referentnoj površi, zahvaljujući činjenici da su konstitutivne jednačine (3.2.24) dobijene razvijanjem u red u okolini referentne konfiguracije.

#### 5.5. - Linearizovane jednačine provodjenja toplote za linearan termoelastičan materijal

Slično kao kod jednačina kretanja, zamenom funkcije slobodne energije (3.2.24) i toplotnog fluksa (3.2.30) i (2.5)-(2.11) dobijamo da su

$$\begin{aligned}
D^{IiJ} &= 2 \int_e \int_{S_0} \theta x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I \alpha_{\mu} D \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\chi\psi} dS_0 \\
F^{IiJ} &= 2 \int_e \int_{S_0} \dot{\theta} x_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I \alpha_{\mu} D \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\chi\psi} dS_0 + \\
&+ 2 \int_e \int_{S_0} \theta \dot{x}_{\chi}^i P^J P_{\psi}^I \alpha_{\mu} D \frac{1+\nu}{1-\nu} A^{\chi\psi} dS_0 \\
U^{IJ} &= \int_e \int_{S_0} P^I P^J DC dS_0 \\
H^{IJ} &= \int_e \int_{S_0} P_{\alpha}^I P_{\beta}^J D \kappa A^{\alpha\beta} dS_0 \tag{5.5.1} \\
Q^J &= \int_e \int_{S_0} P^J \rho_0 D r dS_0 + \int_e \int_{C_0} P^J \bar{q} ds_0 \\
G^J &= \int_e \int_{S_0} \theta_{\alpha} P_{\beta}^J D \kappa A^{\alpha\beta} dS_0
\end{aligned}$$

Saglasno tome, jednačine provodjenja toplote biće iste kao i za opšti slučaj termomehanički jednostavnog materijala (5.2.3), sem što otpadaju relaksacione veličine  $J^{IJ}$ ,  $\partial^J$  i  $h \Delta^J$ .

### 5.6. Matrični oblik jednačina kretanja i provodjenja toplote

Prepišimo nelinearne jednačine kretanja (4.4.1)

$$M^{IJ} \ddot{x}_I^k + S^{IJ} x_I^k - R^{Jk} = 0 \tag{5.6.1}$$

Kompozicijom sa  $\delta^{ij} \delta_{ki}$  dobićemo sistem

$$M^{IiJj} \ddot{x}_{Ii} + S^{IiJj} x_{Ii} - R^{Jj} = 0 \tag{5.6.2}$$

Slično postupku uvođenja Hertzovih oznaka u analitičkoj mehanici, uvešćemo nove indekse, koji će umesto na čvorove i pravce, da se odnose na stepene slobode sistema. Indekse zamenjujemo prema sledećoj šemi:

$$i, j \rightarrow \Gamma, \Lambda = \begin{cases} 3i - 2, 3j - 2 & \text{ako je } i, j = 1 \\ 3i - 1, 3j - 1 & \text{ako je } i, j = 2 \\ 3i, 3j & \text{ako je } i, j = 3 \end{cases} \quad (5.6.3)$$

$\Gamma, \Lambda = 1, \dots, 3n$

Primenom (3) na (2), (4.5.10), (1.3) i (2.3) respektivno, dobićemo nelinearne i linearizovane jednačine kretanja izražene pomoću veličina drugog i prvog reda:

$$M^{\Gamma\Lambda} \ddot{x}_{\Gamma} + S^{\Gamma\Lambda} x_{\Gamma} - R^{\Lambda} = 0 \quad (5.6.4)$$

$$D^{\Gamma J} \dot{x}_{\Gamma} + U^{IJ} \dot{\theta}_I + J^{IJ} \theta_I - G^J - Q^J - \partial^J = 0 \quad (5.6.5)$$

$$\begin{aligned} M^{\Gamma\Lambda} \ddot{x}_{\Gamma h} + (K^{\Gamma\Lambda} + S^{\Gamma\Lambda}) x_{\Gamma h} + L^{I\Lambda} \theta_{Ih} = \\ = R_h^{\Lambda} + K^{\Gamma\Lambda} x_{\Gamma} + L^{I\Lambda} \theta_I - h \delta R^{\Lambda} \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

$$\begin{aligned} D^{\Gamma J} \dot{x}_{\Gamma h} + F^{\Gamma J} x_{\Gamma h} + U^{IJ} \dot{\theta}_{Ih} + (H^{IJ} + J^{IJ}) \theta_{Ih} = \\ = Q_h^J + F^{\Gamma J} x_{\Gamma} + H^{IJ} \theta_I - G_J + \partial^J + h \Delta^J \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Prostim izostavljanjem indeksa, jednačine (4) - (7) mogu da se napišu u uobičajenom matricnom obliku:

$$M \ddot{x} + S x - R = 0 \quad (5.6.8)$$

$$D \dot{x} + U \dot{\theta} + J \theta + G - Q - \partial = 0 \quad (5.6.9)$$

$$M \ddot{x}_h + [K + S] x_h + L \theta_h = \bar{R}_h \quad (5.6.10)$$

$$D \dot{x}_h + F x_h + U \dot{\theta}_h + [H + J] \theta_h = \bar{Q}_h \quad (5.6.11)$$

gde je

$$\bar{R}_h = R_h + K x + L \theta - h \delta R \quad (5.6.12)$$

$$\bar{Q}_h = Q_h + F x + H \theta - G + \partial + h \Delta \quad (5.6.13)$$

U trenutku  $t$ , jednačine (10) i (11) postaju

$$M \ddot{x} + [K + S] x + L \theta = \bar{R} \quad (5.6.14)$$

$$D \dot{x} + F x + U \dot{\theta} + [H + J] \theta = \bar{Q} \quad (5.6.15)$$

Jednačine (14) i (15) možemo svesti na sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

$$\dot{y} = A y + b \quad (5.6.16)$$

gde je

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \{ \ddot{x} \quad \dot{x} \quad \dot{\theta} \} \\ y &= \{ \dot{x} \quad x \quad \theta \} \\ b &= \{ M^{-1} \bar{R} \quad 0 \quad U^{-1} \bar{Q} \} \end{aligned} \quad (5.6.17)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -M^{-1}[K+S] & -M^{-1}L \\ I & 0 & 0 \\ -U^{-1}D & -U^{-1}F & -U^{-1}[H+J] \end{bmatrix} \quad (5.6.18)$$

### 5.7. Implicitni postupak rešavanja

Linearni sistem (16) možemo direktno integraliti implicitno, na više načina. Poslužićemo se prvom parnom kombinacijom Padéovih aproksimacija<sup>14</sup>, t. j. trapeznim pravilom, koje se smatra veoma pogodnim za ovu svrhu, bar kada je reč o čisto dinamičkim jednačinama<sup>16</sup>, ili o čisto termičkim jednačinama (procedura Crank - Nicholsona).

Na osnovu pomenutih aproksimacija, rešenje u trenutku  $t + h$

$$y_h = \{ \dot{x}_h \quad x_h \quad \theta_h \} \quad (5.7.1)$$

nalazimo iz izraza

$$\left[ I - \frac{h}{2} A \right] y_h = \left[ I + \frac{h}{2} A \right] y + \frac{h}{2} \{ b_h + b \} \quad (5.7.2)$$

gde je

$$b_h = \{ M^{-1} \bar{R}_h \quad 0 \quad U^{-1} \bar{Q}_h \} \quad (5.7.3)$$

Korišćenjem izraza (6.8) - (6.18) konačno dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\left[ \frac{4}{h} M + K + S \right] x_h + L \theta_h = R_h + R + \frac{4}{h} M \dot{x} + \left[ \frac{4}{2} M + K - S \right] x + L \theta - h \delta R \quad (5.7.4)$$

$$\left[ \frac{2}{h} D + F \right] x_h + \left[ \frac{2}{h} U + H + J \right] \theta_h = Q_h + Q + \left[ \frac{2}{h} D + F \right] x + \left[ \frac{2}{h} U + H - J \right] \theta - 2G + 2 \vartheta + h \Delta \quad (5.7.5)$$

$$\dot{x}_h = \frac{2}{h} \{ x_h - x \} - \dot{x} \quad (5.7.6)$$

Ove je jednačine lako svesti na inkrementalni oblik

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{h^2} M + K + S & L \\ \frac{2}{h} D + F & \frac{2}{h} U + H + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_h + R + \frac{4}{h} M \dot{x} - 2Sx - h \delta R \\ Q_h + Q - 2J \theta - 2G + 2 \vartheta + h \Delta \end{bmatrix} \quad (5.7.7)$$

$$\dot{x}_h = \frac{2}{h} u - \dot{x} \quad (5.7.8)$$

gde je

$$u = x_h - x \quad (5.7.9)$$

$$\tau = \theta_h - \theta$$

Očigledno je da je spregnuti termomehanički problem moguće rešiti i implicitnom procedurom, mada numerički postupak nije naročito privlačan, pošto je matrica sistema (7) dimenzija  $4n \times 4n$ , i nesimetrična.

Rasmotrimo sada neke specijalne slučajeve

#### 5.7.1. Dinamički slučaj

Jednačina (5.7.7) svodi se na

$$\frac{4}{h^2} [M + K + S] u = R_h + R + \frac{4}{h} M \dot{x} - 2Sx - h \delta R \quad (5.7.10)$$

Ovaj izraz slaže se sa odgovarajućim izrazom za metodu Newmarka<sup>31</sup> pri  $\alpha = 1/4$ . Ako se izuzmu razlike u označavanju i grupisanju članova desne strane, neslaganje je samo u relaksacionom članu  $h \delta R$ , pošto se u pomenutom radu ne tretiraju materijali sa naslednim osobinama,

#### 5.7.2. Statički slučaj

Imajući u vidu (6.8), u odsustvu inercijalnih sila (7.10) svodi se na

$$[K + S]u = R_h - Sx - h \delta R \quad (5.7.11)$$

Ovo je dobro poznat izraz u teoriji i primenama konačnih elemenata, sa izuzetkom poslednjeg člana, koji međutim može da se nadje u odgovarajućoj jednačini kod Besselinga<sup>33</sup>.

Ako se radi o malim pomeranjima i o linearno elastičnom materijalu, izraz (11) svodi se na

$$K u = R \quad (5.7.12)$$

Ova relacija našla je do sada najširu moguću primenu, pošto na zadovoljavajući način rešava niz inženjerskih problema.

### 5.7.3. Nestacionarno provodjenje toplote

Ako zanemarimo relaksacione članove, jednačina za krute provodnike na osnovu (7) postaje

$$\left[ \frac{2}{h} U + H \right] \tau = Q_h + Q - 2G \quad (5.7.13)$$

Ovo ustvari nije ništa drugo nego jednačina procedure Crank-Nicholsona<sup>34</sup>.

### 5.7.4. Stacionarno provodjenje toplote

U stacionarnom slučaju, jednačina (13) svodi se na opšte poznati izraz

$$H T = Q \quad (5.7.14)$$

Imajući u vidu da specijalni slučajevi ovde izvedenih jednačina (7) implicitne procedure rešavanja spregnutog termomehaničkog problema predstavljaju izraze poznate u metodi konačnih elemenata, zaključujemo da, bar sa te tačke gledišta, ne podleže sumnji korektnost ovih jednačina.

### 5.8. Eksplicitni postupak rešavanja

Direktnim rešavanjem (7.2) po  $y_h$  dobićemo rešenje odgovarajuće tačnosti isključivo ako se radi o linearnim diferencijalnim jednačinama sa konstantnim koeficijentima. U suprotnom slučaju valja da (7.2) otvorimo<sup>17</sup> i da iteriramo. Otvorena relacija (7.2) glasi

$$y_h = y + \frac{h}{2} \{ b_h + b \} + \frac{h}{2} A \{ y + y_h \} \quad (5.8.1)$$

Korišćenjem relacija (6.17), (6.18), (6.10), (6.11), (6.14) i (6.15) svodimo (1) na rekurentne obrasce



$$\begin{aligned}\ddot{x}_h &= \ddot{x} + \frac{h}{2} \{ \ddot{x} + \ddot{x}_h \} \\ \dot{x}_h &= \dot{x} + \frac{h}{2} \{ \dot{x} + \dot{x}_h \} \\ \theta_h &= \theta + \frac{h}{2} \{ \dot{\theta} + \dot{\theta}_h \}\end{aligned}\tag{5.8.2}$$

Vrednosti  $\ddot{x}_h$  i  $\dot{\theta}_h$  odredićemo direktno iz nelinearnih jednačina (6.8) i (6.9):

$$\ddot{x}_h = M^{-1} \{ R_h - S_h x_h \}\tag{5.8.3}$$

$$\dot{\theta}_h = U^{-1} \{ Q_h + \vartheta_h - B_h - J_h \theta_h - D_h \dot{x}_h \}$$

Ako za početne vrednosti u trenutku  $t+h$  usvojimo

$$\ddot{x}_h = \ddot{x}; \quad \dot{\theta}_h = \dot{\theta}\tag{5.8.4}$$

možemo da iteriramo, koristeći (2) i (3), sve dok se dve uzastopne vrednosti  $x_h$  i  $\theta_h$  ne slože u zadovoljavajućoj meri. Ovde treba napomenuti da se matrice  $M$  i  $U$  mogu, bez osetnog gubitka na tačnosti, posebno kada je reč o velikim sistemima, svesti na dijagonalni oblik<sup>35,36</sup>. U tome slučaju se čitava procedura praktičnosvodi na operacije sa  $n$ -dimenzionalnim vektorima, umesto sa matricama, što dramatično poboljšava situaciju kada je reč o realizaciji postupka na računaru.

### 5.8.1. Postupak Belytschka

Ako se radi o dinamičkim problemima realističnih razmera, praktično jedine rezultate do sada je publikovao Belytschko<sup>18</sup>. Njegova procedura, izvedena sasvim drugim putem, u suštini predstavlja skraćivanje iterativnog postupka (2), (3) na jednu iteraciju unutar koraka.

Zamenom (4a) u (2a) i (2a) u (2b) dobićemo vektor položaja

$$x_h = x + h \dot{x} + \frac{h^2}{2} \ddot{x}\tag{5.8.5}$$

Ubrzanje  $\ddot{x}_h$  dobićemo iz (3a) a brzinu  $\dot{x}_h$  iz (2a), a zatim prelazimo na sledeći korak.

Pošto ova procedura unutar jednog vremenskog koraka sadrži samo jedno izračunavanje ubrzanja, (3a), koje je najskuplja operacija, možemo je smatrati veoma privlačnom sa numeričke tačke gledišta. Šta više, primeri sa jednim stepenom slobode ukazuju na visoku tačnost ovog postupka.

Medjutim, u problemima sa većim brojem stepeni primećeno je da se viši harmonici rešenja, čija je tačnost mala, vrlo slabo prigušuju, dajući rešenjima lažno oscilatoran karakter.

Ovaj problem Belytschko<sup>18</sup> rešava uvodjenjem veštačkog viskoznog prigušenja u fazu (3a) svoje procedure.

Ovakav prilaz neizbežno povećava obim proračuna, a sem toga se postavlja pitanje kako razlikovati uticaj stvarnog i artifičijelnog prigušenja na rešenje.

Ovo je bio razlog što je detaljnije rasmotren postupak kompletne trapezne iteracije, koji konvergira ka vrednostima procedure Newmarka (7.10). Rezultati na primerima sa jednim stepenom slobode su prigušeniji ali i manje tačni od rezultata dobijenih metodom Belytschka.

#### 5. 8. 2. - Povećanje tačnosti iterativnog postupka

Ako rasmotrimo metode numeričke integracije koje koriste vrednosti prvog i drugog izvoda<sup>37</sup> videćemo da je malom korekcijom izraza (2b) moguće postići znatno povećanje tačnosti:

$$x_h = x + \frac{h}{2}(\dot{x} + \dot{x}_h) + \frac{h^2}{12}(\ddot{x} - \ddot{x}_h) \quad (5.8.6)$$

Sa gledišta numeričke realizacije, ovo je jeftina operacija, pošto podrazumeva po jedno sabiranje, oduzimanje i množenje sa konstantom vektora koji se već ionako nalaze u memoriji računara.

Numerički primer sa jednim stepenom slobode ukazuje da procedura (4) i procedura (2), modificirana sa (6) daju rezultate praktično iste tačnosti.

Pri tome je medjutim rešenje procedurom (4) po amplitudi pojačano u odnosu na analitičko rešenje, dok je rešenje modificiranom procedurom (2) prigušeno, kao uostalom i rešenje originalnom procedurom (2), u još većoj meri.

Sa mehaničke tačke gledišta, interesantno je da (6) može da se dobije iz

pretpostavke o linearnoj promeni ubrzanja unutar koraka<sup>48, 49</sup>, a takodje sledi iz druge parne Padéove aproksimacije<sup>14</sup> rešenja dinamičkog problema.

Medjutim, numerički primeri sa većim brojem stepeni slobode pokazali su da iterativne procedure nisu u prednosti u odnosu na proceduru Belytschka, pošto deluju samo u smislu smanjenja učestanosti a ne i amplitude parazitnog dela rešenja.

### 5.8.3. - Prediktor - korektor šema

Dalji numerički eksperimenti na primerima sa većim brojem stepeni slobode ukazali su da neočekivano dobre rezultate u smislu prigušenja parazitnog dela rešenja daje sledeća jednostavna PEC šema:

- Prediktor

$$\dot{x}_h = \dot{x} + h \ddot{x}$$

$$x_h = x + \frac{h}{2} (\dot{x}_h + \dot{x}) \quad (5.8.7)$$

$$\theta_h = \theta + h \dot{\theta}$$

- Evaluacija

Prema (3)

- Korektor

Prema (2)

Dalje poboljšanje rezultata, koje je medjutim marginalno, dobija se ako umesto (2b) koristimo (6). Ovu šemu zvaćemo PEC modificirana.

Ako rasmotrimo dinamički deo ove šeme, videćemo da se od Belytschkove razlikuje samo dodatnim izračunavanjem (2b) ili (6), dakle vrlo jeftinim operacijama. Drugim rečima, procedura Belytschka predstavlja nekompletanu PEC šemu.

Druga je prednost predložene PEC šeme u tome što nedvosmisleno ukazuje na način rešavanja spregnutog problema, koji je diskutabilan kod nekompletnog postupka.

Suštinu izvanrednih rezultata dobijenih korišćenjem PEC šeme treba tražiti u osobinama trapezne integracije, koja filtrira više harmonike<sup>37</sup>.

Sa gledišta primene eksplicitne numeričke integracije na dinamičke probleme, osnovna prednost predloženog postupka je eliminacija lažne oscilatorne komponente rešenja, koja je do sada smatrana<sup>18</sup> neizbežnim pratiocem eksplicitne procedure.

### 5.9. Iteracije kod implicitne procedure

Treba zapaziti da jednačine (7.7) i (7.8) predstavljaju ništa drugo nego aproksimacije nelinearnih jednačina (6.8) i (6.9). Prema tome, potrebno je u svakom koraku iterirati, sve dok jednačine (6.8) i (6.9) ne budu zadovoljene u granicama zadanih tolerancija. Iteriraćemo modificiranom metodom Newtona - Raphsona. U tome slučaju, matrica sistema ostaje ista kao i u (7.7), a na desnoj strani se pojavljuju debalansi nelinearnih jednačina (6.8) i (6.9)

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{h^2} M + K + S & L \\ \frac{2}{h} D + F & \frac{2}{h} U + H + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_h - S_h x_h - M \ddot{x}_h \\ \theta_h + Q_h - B_h - J_h \theta_h - U_h \dot{\theta}_h - D_h \dot{x}_h \end{bmatrix} \quad (5.9.1)$$

Veličine u trenutku  $h$ , potrebne na desnoj strani jednačine, odredićemo iz (7.8), (7.9) i (8.2), pa je

$$\begin{aligned} x_h &= x + u & \theta_h &= \theta + \tau \\ \dot{x}_h &= \frac{2}{h} u - \dot{x} & \dot{\theta}_h &= \frac{2}{h} \tau - \dot{\theta} \\ \ddot{x}_h &= \frac{4}{h^2} u - \frac{4}{h} \dot{x} - \ddot{x} \end{aligned} \quad (5.9.2)$$

Posle svake iteracije, menjamo vrednosti  $u$  i  $\tau$  prema:

$$u = u + \Delta u ; \quad \tau = \tau + \Delta \tau \quad (5.9.3)$$

Ako se radi o čisto dinamičkom problemu, izrazi (1), (2) i (3) svode se na poznati slučaj ravnotežne iteracije<sup>16, 31</sup>

Osnovna prednost implicitne procedure nad eksplicitnom je u tome što se može pokazati<sup>15, 16</sup> da, kako za linearne, tako i za veliki broj nelinearnih problema, numerička stabilnost ne zavisi od dužine koraka. Ovo opravdava

primenu implicitne procedure i kod određenih dinamičkih problema, i pored toga što potreban broj računskih operacija za jedan korak kod implicitne procedure za oko dva reda veličine nadmašuje onaj kod eksplicitne<sup>18</sup>.

Medjutim, kako je Hughes<sup>16</sup> zapazio a Park<sup>40</sup> pokazao, implicitna procedura je nestabilna ako se sistem ponaša kao opruga koja omekšava. Prema tome, primena implicitne procedure zahteva određenu opreznost i ne može se preporučiti u opštem slučaju. Svakako, ako se radi o statičkom problemu (7.12) ili o stacionarnom provodjenju toplote (7.14), implicitna procedura je jedino moguća.

#### 5.10. Stabilnost numeričke procedure

Za diskretni algoritam rešavanja jednačina (6.16) kažemo da je stabilan<sup>16</sup> ako postoje pozitivne konstante  $c_1$  i  $c_2$  takve da za početne uslove  $z_0$  i  $\bar{z}_0$ , odgovarajuća rešenja  $z$  i  $\bar{z}$  respektivno, zadovoljavaju  $\|z - \bar{z}\| \leq c_2 \|z_0 - \bar{z}_0\|$ , za sve  $h < c_1$ .

Kao što je napomenuto u prethodnom odeljku, za implicitni postupak se može pokazati da je za neke klase problema bezuslovno stabilan.

Što se tiče eksplicitnog postupka, ovaj je numerički stabilan ako je<sup>15,17</sup>

$$0 < h < 2 / |\lambda_i| ; i = 1, \dots, k \quad (5.10.1)$$

gde su  $\lambda_i$  svojstvene vrednosti matrice  $A$  (6.18).

Ako se radi o elastičnom materijalu, u praktičnim primenama izraz (1) može da se svede na von Neumannov kriterijum<sup>18</sup>

$$h < \min \alpha \left( \frac{1}{c} \right) \quad (5.10.2)$$

gde je  $l$  jedna dimenzija konačnog elementa dok je  $c$  brzina prostiranja normalnog udarnog talasa. Dalje,  $0.2 < \alpha < 0.9$  je empirijski redukcionni faktor, neophodan da bi se eliminisali destabilizirajući efekti grešaka zaokružavanja.

Poznato je da je brzina prostiranja talasa za trodimenzionalan linearno elastičan materijal

$$c^2 = \frac{2\mu}{\rho_0} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (5.10.3)$$

Brzina prostiranja talasa kroz membranu može se odrediti na način sličan onome koji je Eringen<sup>2</sup> upotrebio za trodimenzionalan materijal, pa se dobija da je

$$c^2 = \frac{2\mu}{\rho_0} \frac{1}{1 - \nu} \quad (5.10.4)$$

Za slučaj štapa, dobićemo poznatu relaciju

$$c^2 = \frac{E}{\rho_0} \quad (5.10.5)$$

gde je  $E$  moduo elastičnosti.

## 6.- EFEKTIVNO IZRAČUNAVANJE VELIČINA POVEZANIH SA JEDNAČINAMA KRETANJA

Koeficijenti jednačina kretanja su posredstvom transformacija (5.6.3) formalno izraženi u matičnom obliku. Da bi se omogućilo programiranje, neophodno je ove veličine i efektivno prikazati matičnim izrazima.

### 6.1. Osnovni metrički tenzor

Korišćenjem matičnih oznaka, koordinate fundamentalnog metričkog tenzora (4.2.5) postaju<sup>41</sup>

$$\begin{aligned} a_{11} &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ a_{12} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ a_{22} &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

U ovim izrazima

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1^T \bar{x}, & y_1 &= P_1^T \bar{y}, & z_1 &= P_1^T \bar{z} \\ x_2 &= P_2^T \bar{x}, & y_2 &= P_2^T \bar{y}, & z_2 &= P_2^T \bar{z} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

su skalarni proizvodi izvoda

$$P_1 = \partial P / \partial \xi, \quad P_2 = \partial P / \partial \eta \quad (6.1.3)$$

vektora interpolacionih funkcija

$$P = P^K(\xi, \eta) \quad (6.1.4)$$

sa vektorima koordinata čvorova

$$\bar{x} = x_K^1; \quad \bar{y} = x_K^2; \quad \bar{z} = x_K^3 \quad (6.1.5)$$

Primeru radi, rasмотрimo četvorougao membranski element prikazan na Sl. 3, čija su četiri čvora proizvoljno raspoređena u prostoru. Za ovaj element usvojićemo materijalni koordinatni sistem čije su koordinatne linije

$\xi$ ,  $\eta = \text{const}$  prave, i za  $\xi$ ,  $\eta = \pm 1$  poklapaju se sa ivicama elemenata. U ovom slučaju koordinatne linije opisuju pravoizvodnu površ koja može da se definiše bilinearnim interpolacionim funkcijama

$$P = \frac{1}{4} \{ (1-\xi)(1-\eta) \mid (1+\xi)(1-\eta) \mid (1+\xi)(1+\eta) \mid (1-\xi)(1+\eta) \} \quad (6.1.6)$$

i koordinatama čvorova

$$\begin{aligned} x_K &= \{ x_J \quad x_L \quad x_M \quad x_N \} \\ y_K &= \{ y_J \quad y_L \quad y_M \quad y_N \} \\ z_K &= \{ z_J \quad z_L \quad z_M \quad z_N \} \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

### 6.2.1 Matrica masa

Ova matrica definisana je izrazima (5.1.4) i (5.4.4).

Ako se radi o četvorougaoanom elementu, sa koordinatnim sistemom definisanim u prethodnom odeljku, članove matrice masa odredićemo iz izraza

$$M^{IiJj} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho_0 D_{\delta^{ij}} P^I P^J \sqrt{A} d\xi d\eta \quad (6.2.1)$$

Korišćenjem numeričke integracije, izraz (1) može da se prepíše kao

$$M = \sum_e p m p^T \quad (6.2.2)$$

U ovom izrazu  $p$  je matrica koja kao kolone ima vektore interpolacionih funkcija u pojedinim tačkama integracije  $I$  koje se nalaze unutar posmatranog elementa.

$$p = [P^1, \dots, P^I, \dots, P^t] \quad [3n \times t] \quad (6.2.3)$$

gde je  $t$  ukupan broj integracionih tačaka elementa. Broj vrsta matrice  $p$  je  $3n$ , ali su različite od nule samo vrste koje odgovaraju čvorovima posmatranog elementa. Članovi ovih vrsta nisu ništa drugo nego vrednosti interpolacionih funkcija  $P$  (1.6) u odgovarajućim tačkama integracije.

Sa  $m$  je označena dijagonalna matrica razmera  $t \times t$



$$m = [ (H D \rho_0 \sqrt{A})_I ] \quad (6.2.4)$$

gde je  $H$  merni koeficijent formule numeričke kvadrature. Ostale su veličine poznate i načelno mogu da budu različite za svaku pojedinu tačku integracije.

Ako koristimo eksplicitni postupak rešavanja sistema (5.6.1) pomoću rekurentnih obrazaca (5.8.2) i (5.8.3), matricu  $M$  možemo izvesti iz izvornog kondenzovanog oblika (4.4.2). U tome slučaju iz izraza (1) otpada član  $\delta^{ij}$ . Izrazi (2) i (3) ostaju formalno isti ali se njihove razmere svode na  $n \times n$ , odnosno  $n \times t$  respektivno pošto umesto po tri identične vrednosti funkcije za svaki čvor, ulazi samo po jedna. Dalje, kondenzovana matrica  $M$  može se svesti na dijagonalnu. U dostupnoj literaturi predložena su dva načina. Jedan se svodi na jednostavno sabiranje članova svake pojedine vrste matrice  $M$  i njihovo koncentrisanje u dijagonalnom članu<sup>36</sup>, a drugi u izboru takvih integracionih formula da se tačke numeričke integracije poklope sa čvorovima elementa<sup>35</sup>. Dalja diskusija ovih postupaka odvela bi nas suviše daleko, ali valja zapaziti da ova imaju mnogo zajedničkog sa tradicionalnim inženjerskim prilazom koncentrisanih (lumped) masa.

Očigledno je da se sada matrica  $M^{-1}$  iz (5.8.3) svodi na  $n$  recipročnih vrednosti članova dijagonalne matrice  $M$ . Takodje treba imati u vidu da će  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}_h$ ,  $\ddot{x}_h$ ,  $\dot{x}_h$ ,  $\ddot{x}_h$ ,  $R_h$  i  $S_h x_h$  iz (5.8.2 i 3) da budu matrice razmera  $n \times 3$ .

### 6.3. Matrica sila

Saglasno (5.4.4) ovu matricu, za četvorougaoone elemente, možemo napisati u obliku

$$S^{IiJj} = \int_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \delta^{ij} P_\alpha^I P_\beta^J S^{\alpha\beta} \sqrt{A} d\xi d\eta \quad (6.3.1)$$

gde je, prema (3.2.13) i (3.1.6)

$$S^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} \sqrt{a/A} = 2 \rho_0 D_{a\alpha\beta} \psi \quad (6.3.2)$$

Za slučaj linearnog termoelastičnog materijala  $N^{\alpha\beta}$  se određuje iz (3.2.25), odnosno (3.2.27). Korišćenjem numeričke integracije, izraz (6.3.1) može da se prepiše u obliku

$$S = \sum_e [ p_1 s^{11} p_1^T + p_1 s^{12} p_2^T + p_2 s^{21} p_1^T + p_2 s^{22} p_2^T ] \quad (6.3.3)$$

gde su.

$$p_1 = [ P_1^1, \dots, P_1^I, \dots, P_1^t ] \quad 3n \times t \quad (6.3.4)$$

$$p_2 = [ P_2^1, \dots, P_2^I, \dots, P_2^t ] \quad 3n \times t$$

Struktura matrica  $p_1$  i  $p_2$  ista je kao i struktura matrice  $p$  (2.3), sem što se umesto vrednosti funkcija  $p$  (1.6) kao članovi pojavljuju vrednosti njihovih izvoda (1.3). Dijagonalne matrice,

$$s^{\alpha\beta} = [ (H S^{\alpha\beta} \sqrt{A})_I ] \quad t \times t \quad (6.3.5)$$

imaju po jedan skalarni član u svakoj tački numeričke integracije.

Imajući u vidu da je  $s^{21} = s^{12}$ , zbog simetrije  $N^{\alpha\beta}$  (2.5.11), (3) može da se prepiše u obliku pogodnijem za numeričko računanje:

$$S = \sum_e q s q^T \quad (6.3.6)$$

gde

$$q = [ Q^1, \dots, Q^I, \dots, Q^t ] \quad (6.3.7)$$

ima po jednu  $3n \times 3$  submatricu

$$Q^I = [ P_1 \quad P_2 + P_1 \quad P_2 ]^I \quad (6.3.8)$$

za svaku tačku numeričke integracije. Matrice  $Q^I$  imaju po tri identične vrste različite od nule za svaki čvor u kome je element vezan. Matrica  $s$  je dijagonalna,

$$s = [ s^1, \dots, s^I, \dots, s^t ] \quad 3t \quad (6.3.9)$$

i ima po jedan dijagonalni blok od po tri člana

$$s^I = [ s^{11} \quad -s^{12} \quad s^{12} \quad s^{22} \quad -s^{12} ] \quad 3 \quad (6.3.10)$$

za svaku tačku numeričke integracije.

Ako koristimo eksplicitni postupak rešavanja sistema (5.6.1), matricu  $S$

možemo izvesti iz izvornog kondenzovanog oblika (4.4.4). U tome slučaju, slično kao kod matrice masa, iz izraza (1) otpada član  $\delta^{ij}$ . Izrazi (3) i (4) ostaju formalno isti, s tim što se njihove razmere svode na  $n \times n$  i  $n \times 3n$ , pošto umesto po tri identične vrednosti izvoda interpolacionih funkcija za svaki čvor, ulazi samo po jedna.

Ovde treba zapaziti još jednu značajnu okolnost. Naime, iz (5.8.3) je evidentno da nam kod eksplicitne procedure matrica  $S$  nije potrebna, već nam je potrebna matrica  $S_x$ , koja ustvari predstavlja skup tri vektora. Kako bismo je formirali, uzećemo matricu  $S$  razvijenu u obliku (3), i množiti je sa desna na levo vektorima koordinata čvorova (6.1.5). Ovo omogućuje znatne uštede u memoriji i radnom vremenu računara.

#### 6.4. Matrica krutosti

Kao što smo videli u poglavlju 5., ova matrica se pojavljuje kod implicitnih metoda rešavanja, i neizbežna je kod statičkih problema. Kao takva, to je hronološki prva matrica rasmatrana u metodi konačnih elemenata, mada ni izdaleka nije najjednostavnija.

Prema (5.4.4) ovu matricu, za četvorougaoone elemente, možemo napisati u obliku

$$K^{IIJJ} = \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x_\alpha^j x_\chi^i P_\beta^J P_\psi^I E^{\alpha\beta\chi\psi} \sqrt{A} d\xi d\eta \quad (6.4.1)$$

gde je, saglasno (5.1.4)

$$E^{\alpha\beta\chi\psi} = 4 \bar{\rho}_0 D_{a_{\alpha\beta}} D_{a_{\chi\psi}} \psi \quad (6.4.2)$$

Za homogeni linearno elastičan materijal je, prema (5.4.4)

$$E^{\alpha\beta\chi\psi} = \frac{2\mu D}{1-\nu} [ \nu A^{\alpha\beta} A^{\chi\psi} + (1-\nu) A^{\alpha\chi} A^{\beta\psi} ] \quad (6.4.3)$$

Numerička kvadratura svodi izraz (6.4.1) na

$$K = \sum_e b_k b_k^T \quad (6.4.4)$$

gde

$$b = [ B^1, \dots, B^I, \dots, B^t ] \quad (6.4.5)$$

ima kao članove submatrice  $B^I$  ( $3n \times 3$ ), po jednu za svaku tačku numeričke integracije.

Matrice  $B^I$  imaju za svaki čvor u kome je element vezan po jedan blok dimenzija  $3 \times 3$ , oblika

$$B_{K}^I = \begin{bmatrix} x_1 P_1 & x_1 P_2 + x_2 P_1 & x_2 P_2 \\ y_1 P_1 & y_1 P_2 + y_2 P_1 & y_2 P_2 \\ z_1 P_1 & z_1 P_2 + z_2 P_1 & z_2 P_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} I \\ \\ K \end{matrix} \quad (6.4.6)$$

Sličnost strukture matrica  $B$  (5), (6) i matrica  $Q$  (3.8) omogućuje da se za njihovo formiranje u računaru koriste gotovo identični postupci. Dalje

$$k = H_I E_I \sqrt{A_I} \quad (6.4.7)$$

je kvazidijagonalna matrica, koja ima po jednu submatricu razmera  $3 \times 3$  za svaku tačku integracije. Razume se,  $E_I$  je ovde matrica konstitutivnih koeficijenata u tački integracije  $l$ . Za slučaj linearno elastičnog materijala,  $E_I$  je ustvari izraz (3) napisan u matričnom obliku, uz korišćenje relacija (2.1.10).

$$E_I = \frac{1}{A^2} \frac{2\mu D}{1-\nu} \begin{bmatrix} A_{22}^2 & -A_{12} A_{22} & \nu A_{11} A_{22} + (1-\nu) A_{12}^2 \\ \frac{1-\nu}{2} A_{11} A_{22} + \frac{1+\nu}{2} A_{12}^2 & -A_{11} A_{12} & \\ \text{SYM} & & A_{11}^2 \end{bmatrix} \quad (6.4.8)$$

#### 6.4.1. Membrane izložene čistom smicanju

U određenim primenama inženjerske prakse koristi se pretpostavka da su tanke membrane sposobne da prime isključivo smicanje (schubfeldschema<sup>21</sup>). Treba zapaziti da je ovoj ekvivalentna pretpostavka o savršenoj kompresibilnosti materijala  $E = 0$ , Imajući u vidu poznatu relaciju

$$E = 2\mu (1 + \nu) \quad (6.4.8)$$

sledi da je, za membrane izložene čistom smicanju

$$\nu = -1 \quad (6.4.9)$$

Zanimljivo je da je ova vrednost  $\nu$  na granici fizičke dopustivosti<sup>22</sup>.

Sledstveno tome moguće je, suprotno uobičajenoj praksi, programe za opšte membrane koristiti i u slučaju membrana opterećenih čistim smicanjem, uvodjenjem  $\nu = -1$  kao ulaznog podatka. Numerički primeri (poglavlje 7) pokazuju da je ovakav prilaz praktično upotrebljiv.

#### 6.4.2. Četvorougao element sa četiri čvora

Do sada izvedeni izrazi u ovom poglavlju važe za ma kako prostorno zakrivljeni četvorougao element. Zbog praktične važnosti matrice krutosti, razmotrićemo neke jednostavne specijalne slučajeve, kakvi mogu da se primene u problemima tipa prikazanog na Sl. 1. Element je prikazan na Sl. 3, interpolacione funkcije date su izrazom (1.6) a koordinate čvorova izrazom (1.7).

Jasno je da će za ovakve elemente biti zadovoljeni uslovi kompatibilnosti, pošto su pomeranja ivica linearna i jednoznačno određena pomeranjima za jedničkih čvorova dvaju susednih elemenata.

Da bi se obezbedila konvergencija<sup>38</sup> za elemente sa linearnim pomeranjima dovoljna je jedna tačka,  $\xi = \eta = 0$ , Gaussove numeričke integracije. U ovoj tački je

$$P_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4.10)$$

pa su

$$x_1 = \frac{1}{4} (-x_J + x_L + x_M - x_N), \quad x_2 = \frac{1}{4} (-x_J - x_L + x_M + x_N) \quad (6.4.11)$$

i t. d.

Matrica  $b$  (5) se u ovom slučaju svodi na svega jedan blok tipa  $B_K^I$ , sastavljen od četiri bloka tipa  $B_K^I$  (6). Matrica  $k$  je sada razmera  $3 \times 3$

$$k = H_0 E_0 \sqrt{A_0} \quad (6.4.12)$$

gde je  $H_0 = 4$ , dok su  $E_0$  i  $A_0$  vrednosti  $E_I$  (8) i  $A$  (2.1.12) u posmatranoj tački integracije. Kao što je uobičajeno u primenama metode konačnih elemenata, za dalje pozivanje na jednom definisan element koristićemo manje - više proizvoljnu skraćenicu, u ovom slučaju MEM 41. Pored veoma privlačne jednostavnosti, numerička integracija u jednoj tački ima i svoje

nedostatke. Naime, ako eliminišemo stepene slobode krutog tela, posmatrani element imaće  $4 \times 3 - 6 = 6$  spoljašnjih stepeni slobode (pomeranja čvorova) na svega tri unutrašnja stepena slobode (deformacije u tački integracije). Sledstveno tome, element se sam po sebi ponaša kao kinematizam, što vodi do toga da pouzdanost rezultata proračuna zavisi od globalnih veza koje elementima nameće posmatrana konstrukcija. U odredjenim primenama (ravna deformacija<sup>18</sup>) ovakav prilaz se pokazao kao dosta pouzdan. Međutim, kao što ćemo videti na primerima, rezultati za membrane nisu naročito ohrabrujući.

Ovo je bio razlog što je rasmotren i pouzdaniji prilaz, za četiri Gaussove tačke numeričke integracije. Kao što je poznato, koordinate ovih tačaka uzimaju vrednosti  $\xi, \eta = \pm \sqrt{3}/3$ . Element je u ovom slučaju označen sa MEM 44. Numerički rezultati su u ovom slučaju logični, i uporedivi, pod istim uslovima, sa rezultatima za poznate pouzdane elemente. Razume se, obim računanja pri formiranju matrica elementa je oko četiri puta veći nego u prethodnom slučaju.

Vredna je pažnje još jedna mogućnost numeričke integracije, a to je generalisano trapezno pravilo pri kome se integracione tačke poklapaju sa čvorovima elementa. Za razliku od Gaussove integracije sa četiri tačke, koja tačno integrali polinome do trećeg stepena po  $\xi$  i  $\eta$ , ova poslednja tačno integrali samo polinome linearne po  $\xi$  i  $\eta$ , kao i pravilo srednje tačke. Međutim, videli smo da je ova tačnost potpuno dovoljna za konvergenciju. Puni smisao ovaj prilaz ima u dinamičkim problemima, pošto generiše dijagonalnu matricu masa.

#### 6.4.3. Četvorougoni element sa osam čvorova

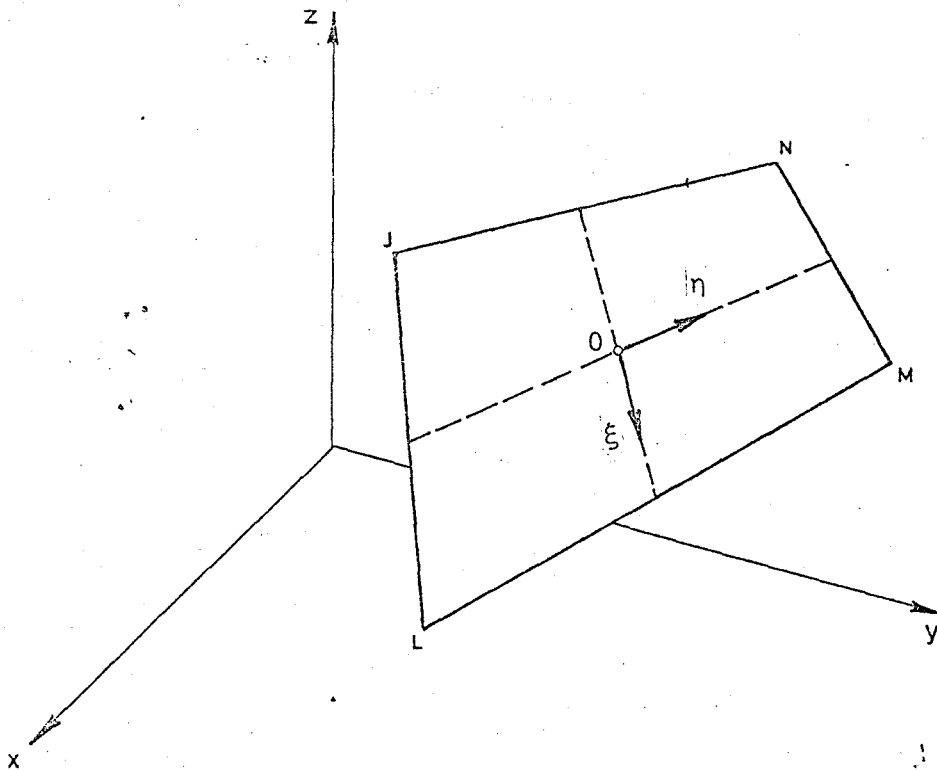
Ovakav element, prikazan na Sl. 4, dozvoljava adekvatnije modeliranje prostorno zakrivljene membrane, uz korišćenje složenijih interpolacionih funkcija<sup>42</sup>, i to

$$P^K = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_K) (1 + \eta \eta_K) (\xi \xi_K + \eta \eta_K - 1) \text{ za } \xi_K, \eta_K = \pm 1$$

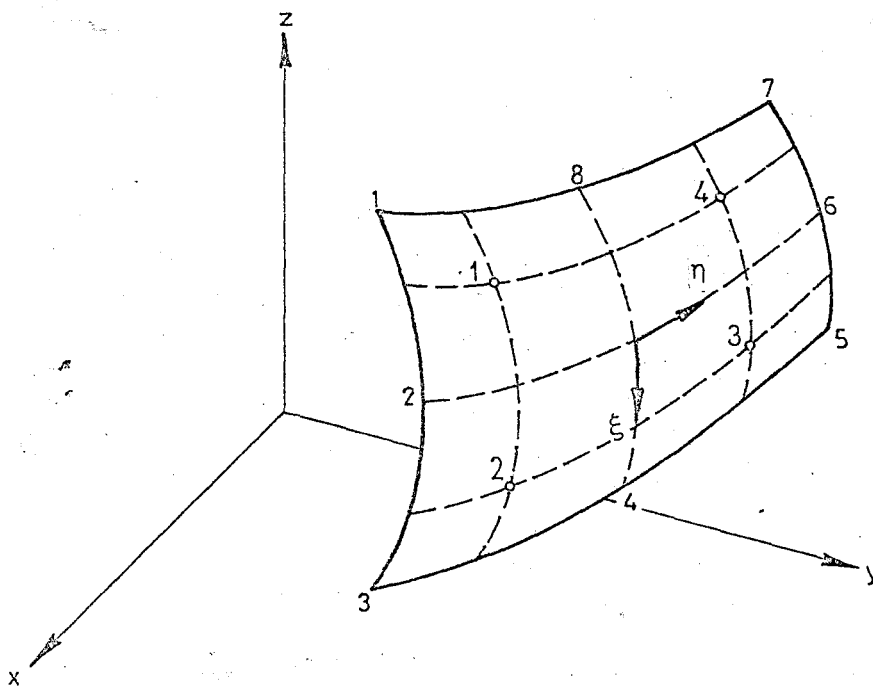
$$P^K = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_K) (1 - \eta^2) \text{ za } \xi_K = \pm 1; \eta_K = 0 \quad (6.4.13)$$

$$P^K = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_K) \text{ za } \xi_K = 0; \eta_K = \pm 1$$

Sa ovim elementom obavljani su numerički eksperimenti vrlo ograničenog



Slika 3 VITOPERENI ČETVOROUGAONI ELEMENT MEM 41



Slika 4 ČETVOROUGAONI ELEMENT SA OSAM ČVOROVA MEM 84

obima uz korišćenje četiri Gaussove tačke numeričke integracije. Rezultati su dosta diskutabilni, što nije čudno ako se ima u vidu  $8 \times 3 - 6 = 18$  spoljašnjih stepeni slobode, uz svega 12 unutrašnjih. Po podacima iz literature, za ravne probleme je uspešno korišćena Gaussova šema  $2 \times 2$ , međutim, tu je broj spoljašnjih stepeni slobode svega  $8 \times 2 - 3 = 13$ .

Za slučaj membrane, pouzdani rezultati mogu se očekivati sa 9 tačaka Gaussove ili integracije po čvorovima.

### 6.5. Ostale matrice

Formiranjem matrica  $M$ ,  $S$  i  $K$  dobili smo sve potrebne elemente za rešavanje čisto dinamičkih problema. Matrice za spregnute termomehaničke i probleme provodjenja toplote mogu da se odrede na sličan način.

Imajući u vidu da rešavanje spregnutih problema implicitnom procedurom (odjeljak 6.4) nije naročito praktičan postupak, kao interesantne ostaju matrice  $U$  (5.2.5) i  $H$  (5.2.6). Evidentno je međutim da prva od njih ima strukturu identičnu matrici  $M$ , dok, bar za linearno termoelastičan materijal i krute provodnike, struktura druge odgovara matrici  $S$ . Prema tome, matrice  $U$  i  $H$  mogu u većini primena da se formiraju uz pomoć postojećih programa za formiranje matrica  $M$  i  $S$ .

### 6.6. Tenzor deformacije

Tenzor deformacije definisan je izrazom (2.1.12), koji je pogodan i za numeričko računanje, posebno ako se radi o velikim deformacijama i eksplisnim postupcima rešavanja jednačina kretanja.

Međutim, kod implicitnih procedura (5.7.7) umesto sa vektorima položaja pogodnije je operisanje sa njihovim inkrementima, označenim matričnim simbolom  $u$ . Pojedini članovi matrice-kolone  $u$  (5.7.9) nisu ništa drugo nego koordinate vektora pomeranja, ako konfiguraciju u trenutku  $t$  privremeno shvatimo kao referentnu, a u trenutku  $t+h$  kao tekuću.

U svakom slučaju, ukupan vektor pomeranja  $u_j$  tačke  $x^i$  određen je u odnosu na referentne koordinate  $X^i$  poznatom relacijom

$$x^i = X^i + \delta^{ij} u_j \quad (6.6.1)$$

Ista relacija važi i za čvorne tačke, dakle

$$x_K^i = X_K^i + \delta^{ij} u_{Kj} \quad (6.6.2)$$



Zamenom (2) u (4.2.5) i (4.2.5) u (2.1.12) definitivno dobijamo da je

$$\gamma_{\alpha\beta} = (B_{\alpha\beta}^{KL} X_K^i + \frac{1}{2} P_{\alpha}^K P_{\beta}^L \delta^{ij} u_{jK}) u_{iL} \quad (6.6.3)$$

Za slučaj malih pomeranja, relacija (3) svodi se na

$$e_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}^{KL} X_K^i u_{iL} \quad (6.6.4)$$

Ovaj izraz može jednostavno da se svede na matrični oblik

$$e = B^T u \quad (6.6.5)$$

gde je

$$e = \{e_{11} \quad e_{12} + e_{21} \quad e_{22}\} \quad (6.6.6)$$

Za četvorougao ni konačni element sa četiri čvora

$$B = \begin{bmatrix} B_K \\ B_L \\ B_M \\ B_N \end{bmatrix}$$

pri čemu imamo po jednu matricu oblika (4.6) za svaki čvor. Vrednosti interpolacionih funkcija u matricama  $B_K$  odgovaraju tački u kojoj posmatramo deformaciju. Sa  $u$  je u (5) označena matrica-kolona Descartesovih pomeranja čvorova elementa.

## 6.7. Tenzor membranskih sila

Načelno, tenzor membranskih sila odredićemo iz konstitutivnih jednačina, saglasno (3.1.6). Za specijalni slučaj homogenog linearno termoelastičnog materijala, koristićemo relacije (3.2.25), odnosno (3.2.27).

### 6.7.1. Homogen linearno elastičan materijal

Za homogen linearno elastičan materijal, tenzor membranskih sila povezan je sa tenzorom relativne deformacije jednostavnim izrazom

$$N^{\alpha\beta} = \sqrt{A/a} E^{\alpha\beta\chi\psi} \gamma_{\chi\psi} \quad (6.7.1)$$

gde je  $E^{\alpha\beta\chi\psi}$  dato relacijom (4.3). Imajući u vidu (3.2.13), tenzor membranskih sila sveden na referentnu konfiguraciju biće

$$S^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\chi\psi} \gamma_{\chi\psi} \quad (6.7.2)$$

Ako su deformacije male, što je slučaj kod većine konstruktivnih materijala, promena metrike je zanemarljiva, pa je  $S^{\alpha\beta} \cong N^{\alpha\beta}$ .

U slučaju malih pomeranja, (6.7.2) svodi se na

$$S^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\chi\psi} e_{\chi\psi} \quad (6.7.3)$$

gde je tenzor deformacije  $e_{\chi\psi}$  dat relacijom (6.4). Izraz (3) lako je prepisati u matičnom obliku

$$\bar{S} = E e \quad (6.7.4)$$

gde je

$$\bar{S} = \{ S^{11} \quad S^{12} \quad S^{22} \} \quad (6.7.5)$$

vektor membranskih sila svedenih na referentnu konfiguraciju,

#### 6.7.2. Glavne membranske sile

Membranske sile možemo da predstavimo u obliku (5) bez obzira na koji su način određene. U svakom slučaju  $S^{\alpha\beta}$  može da se odredi prema (3.2).

Kada su membranske sile u nekoj realnoj konstrukciji na bilo koji način određene, sa inženjerske je tačke gledišta potrebno utvrditi da li se ove nalaze u granicama dozvoljenim za posmatrani materijal. Membranske sile date su u materijalnim koordinatama  $\xi^\alpha$ . Da bi ih uporedili sa dozvoljenim vrednostima, treba da ih prevedemo u neki lokalni Descartesov koordinatni sistem u kome membranske sile imaju uobičajene dimenzije, sile po jedinici dužine. Pogodan za ovu svrhu je sistem glavnih osa membranskih sila.

Glavne vrednosti membranskih sila su svojstvene vrednosti  $\Sigma$  problema

$$[ S^{\alpha\beta} - \Sigma A^{\alpha\beta} ] n_\alpha = 0 \quad \beta \quad (6.7.6)$$

gde je  $n_\alpha$  vektor pravca glavne sile  $\Sigma$ , dok je  $0^\beta$  nula-vektor. Konačno se dobija da su glavne sile<sup>39</sup>

$$\Sigma_{1,2} = \frac{1}{2} S^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \pm \Sigma_s \quad (6.7.7)$$

gde je

$$\Sigma_s = \frac{1}{2} [ ( S^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} )^2 - 4A \det S^{\alpha\beta} ]^{1/2} \quad (6.7.8)$$

maksimalna smičuća sila. Glavne napone i maksimalni smičući napon dobi-

ćemo delenjem (7) i (8) sa debljinom membrane u referentnoj konfiguraciji D.

### 6.7.3. Glavni pravci

Glavne pravce odredićemo preko sinusa i cosinusa ugla  $\varphi$  izmedju ose  $\xi^1$  i pravca glavne sile  $\Sigma_1$ .

$$\sin \varphi = \varepsilon_{\alpha\beta} \Xi^\alpha N^\beta \quad (6.7.9)$$

$$\cos \varphi = a_{\alpha\beta} \Xi^\alpha N^\beta = \Xi^\alpha N_\alpha \quad (6.7.10)$$

Ovde je

$$\Xi^\alpha = \delta^{1\alpha} / \sqrt{A_{11}} \quad (6.7.11)$$

jedinični vektor ose  $\xi^1$ , dok je

$$N_\alpha = n_\alpha / \sqrt{A^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta} \quad (6.7.12)$$

jedinični vektor pravca glavne sile  $\Sigma_1$ . Što se tiče vektora pravca  $n_\alpha$ , ovaj je do konstantnog množioca određen kao vrsta ili kolona adjungovane matrice sistema (6), odnosno kao linearna kombinacija vrsta ili kolona pomenute matrice. Ako se poslužimo prostom linearnom kombinacijom, zbirom kolona ili vrsta, dobićemo da je

$$n_1 = S^{22} - S^{12} - S(A^{22} - A^{12}) \quad (6.7.13)$$

$$n_2 = S^{11} - S^{21} - S(A^{11} - A^{21})$$

Zamenom (13), (12) i (11) i (9) i (10), i delenjem (9) sa (10) definitivno dobijamo da je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S + A_{12}(S^{22} - S^{12}) - A_{11}(S^{11} - S^{12})}{S(A_{11} + A_{12}) - A(S^{22} - S^{12})} \sqrt{A} \quad (6.7.14)$$

Ako je referentni koordinatni sistem Descartesov, gornji izraz svodi se na

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S - S^{11} + S^{12}}{S - S^{22} + S^{12}} \quad (6.7.15)$$

čiju je korektnost lako proveriti.

## 7. - NUMERIČKI PRIMERI

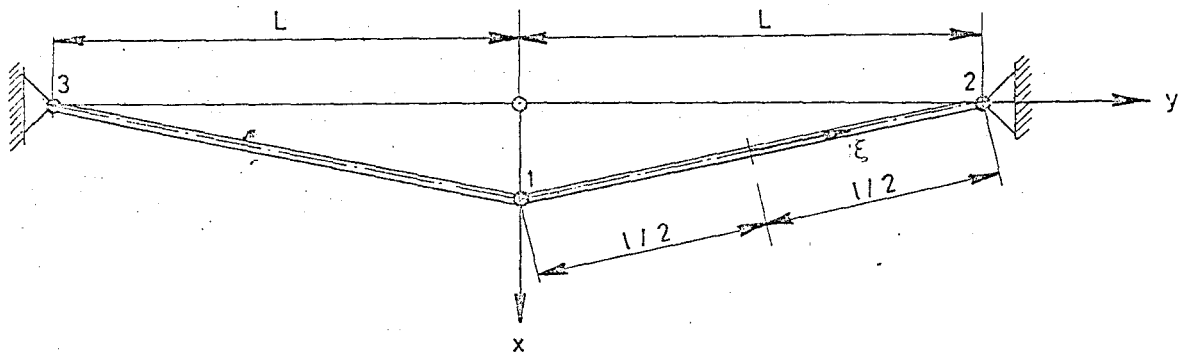
Cilj ovog poglavlja je da se kroz numeričke primere ilustruju prilazi i postupci opisani u ovom radu.

### 7.1. Sistem dvaju štapova

Ovaj je primer izabran pošto omogućuje da se na najjednostavniji način modelira geometrijski nelinearno ponašanje membrane. Zahvaljujući jednostavnosti primera, moguće je da se izrazi za članove pojedinih matrica metode konačnih elemenata dobiju u zatvorenom obliku, i na taj način stekne uvid u njihov fizički smisao. Sem toga, rezultujuće jednačine kretanja i provodjenja toplote su dostupne analitičkom rešavanju, pa mogu da se uporede numerička i analitička rešenja.

Medjutim, izbor ovog primera zahtevao je da se, u najkraćem obliku, izlože i neke osnovne relacije teorije aksijalno napregnutih štapova, što je i učinjeno u okviru poglavlja DODATAK 1.

Geometrijske karakteristike posmatranog primera u trenutku  $t$  prikazane su na Sl. 5.



Slika 5.

#### 7.1.1. Granični uslovi

Pretpostavka je da je sistem simetričan i simetrično opterećen sopstvenom težinom. U tačkama 2 i 3 štapovi su zglobno vezani sa masivnim krutim telom, tako da su granični uslovi po pomeranjima

$$x_2 = x_3 = 0 \quad (7.1.1)$$

$$y_2 = L, \quad y_3 = -L, \quad y_1 = 0$$

a po temperaturama

$$\theta_2 = \theta_3 = \theta \quad (7.1.2)$$

gde je  $\theta$  temperatura masivnog tela, dok u tački 1 imamo granični uslov po toplotnom fluksu

$$q_1 = 0. \quad (7.1.3)$$

### 7.1.2. Početni uslovi

Pretpostavićemo da je u referentnoj konfiguraciji

$$x_1 = x = 0; \quad \theta_1 = \theta = \theta \quad (7.1.4)$$

$$\dot{x}_1 = 0$$

### 7.1.3. Konačni elementi

Smatraćemo da svaki štap za sebe predstavlja konačni element. Zbog simetrije, dovoljno je da posmatramo štap 12.

Ako pretpostavimo da je vektor položaja svake pojedine tačke elementa linearna funkcija koordinata čvorova 1 i 2, kao i da je temperatura svake pojedine tačke elementa takodje linearna funkcija temperatura u čvorovima 1 i 2, interpolacione funkcije će biti

$$P^I = \frac{1}{2} [ 1 - \xi \quad 1 + \xi ] \quad (7.1.5)$$

dok su njihovi izvodi

$$P_{\xi}^I = \frac{1}{2} [ -1 \quad 1 ] \quad (7.1.6)$$

Saglasno (D. 1. 3) i (4. 2. 4) bazni vektor je

$$x_{\xi}^j = P_{\xi}^I x_I^j \quad (7.1.7)$$

sa koordinatama

$$x_{\xi}^1 = P_{\xi}^1 x_I = \frac{1}{2} [-1 \ 1] \{ x_1 \ x_2 \} = -x_1/2 \quad (7.1.8)$$

$$x_{\xi}^2 = P_{\xi}^1 y_I = \frac{1}{2} [-1 \ 1] \{ y_1 \ y_2 \} = L/2$$

Na osnovu (4.2.5) i (D.1.6) osnovni metrički tenzor je

$$a = \frac{1}{4} (L^2 + x_1^2) \quad (7.1.9)$$

odnosno

$$A = L^2/4 \quad (7.1.10)$$

u referentnoj konfiguraciji, dok je raspored temperature u štapu

$$\theta = P_{\xi}^1 \theta_I = \frac{1}{2} [(1 - \xi) \theta_1 + (1 + \xi) \epsilon] \quad (7.1.11)$$

#### 7.1.4. Vrednosti pojedinih matrica

Ove veličine izračunaćemo saglasno izrazima (D.8.1-11). Zbog uprošćenosti primera, matrice se svode na po jedan član, a integralimo u zatvorenom obliku. Tako je relevantni član matrice masa

$$M^{1111} = \int_{-1}^1 \rho_0 B \delta^{11} (P_{\xi}^1)^2 \sqrt{A} d\xi = \rho_0 B L/3 \quad (7.1.12)$$

matrice sila

$$\begin{aligned} S^{1111} &= \int_{-1}^1 \delta^{11} (P_{\xi}^1)^2 EB \left[ \frac{1}{2} (a-A) - \alpha A (\theta - \epsilon) \right] A^{-3/2} d\xi \\ &= EB \left[ x_1^2 - \alpha T_1 L^2 \right] / 2 L^3 \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

matrice krutosti

$$K^{1111} = \int_{-1}^1 (x_{\xi}^1)^2 (P_{\xi}^1)^2 EBA^{-3/2} d\xi = EB x_1^2 / L^3 \quad (7.1.14)$$

i vektora spoljnih sila

$$R^{11} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \rho_0 B P_{\xi}^1 g L d\xi = \frac{1}{3} \rho_0 B L g \quad (7.1.15)$$

gde je  $g$  ubrzanje zemljine teže.

Na sličan način dobićemo članove povezane sa toplotnim veličinama

$$U^{11} = \int_{-1}^1 (P^1)^2 C B \sqrt{A} d \xi = C B L/3 \quad (7.1.16)$$

$$H^{11} = \int_{-1}^1 (P^1_{\xi})^2 \kappa B A^{-1/2} d \xi = \kappa B/L \quad (7.1.17)$$

$$G^1 = \int_{-1}^1 \theta_{\xi} P^1_{\xi} \kappa B A^{-1/2} d \xi = \kappa B (\theta_1 - \theta) / L \quad (7.1.18)$$

$$Q^1 = 0$$

kao i članove koji opisuju međusobni uticaj toplotnih i mehaničkih veličina

$$L^{111} = - \int_{-1}^1 \theta x^1_{\xi} P^1_{\xi} P^1 E B \alpha A^{-1/2} d \xi = - E B x_1 / 2L \quad (7.1.19)$$

$$D^{111} = \int_{-1}^1 \theta x^1_{\xi} P^1_{\xi} P^1 E B \alpha A^{-1/2} d \xi = E B \alpha x_1 (2 \theta_1 + \theta) / 6L \quad (7.1.20)$$

$$\begin{aligned} F^{111} &= \int_{-1}^1 (\dot{\theta} x^1_{\xi} + \theta \dot{x}^1_{\xi}) P^1_{\xi} P^1 E B \alpha A^{-1/2} d \xi = \\ &= E B \alpha [ 2 \dot{\theta}_1 x_1 + (2 \theta_1 + \theta) \dot{x}_1 ] / 6L \quad (7.1.21) \end{aligned}$$

#### 7.1.5. Fizičke konstante

Da bi problem mogao numerički da se reši, potrebno je poznavati vrednosti fizičkih konstanti koje se pojavljuju u pojedinim izrazima.

Ako pretpostavimo da je materijal štapa čelik, prosečne vrednosti konstanti<sup>43, 44</sup> biće:

$$\rho_0 = 7.88 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$E = 2 \cdot 10^{10} \text{ N / m}^2$$

$$C = 502 \text{ J / kg } ^\circ\text{K}$$

$$\kappa = 50.2 \text{ J / m s } ^\circ\text{K}$$

$$\alpha = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{K}$$

(7.1.22)

Takodje usvajamo da je

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

### 7.1.6. Jednačine kretanja i provodjenja toplote

Posmatrajmo nelinearne jednačine (5.6.8) i (5.6.9). Ako i njih uvrstimo vrednosti posmatranog problema dobićemo sistem od dve jednačine

$$\frac{1}{3} \rho_o B L \ddot{x}_1 + \frac{EB}{2L^3} [x_1^2 - \alpha(\theta_1 - \epsilon)L^2] x_1 = \frac{1}{3} \rho_o B L g \quad (7.1.23)$$

$$\frac{EB\alpha}{GL} (2\theta_1 + \epsilon) \dot{x}_1 x_1 + \frac{CBL}{3} \dot{\theta}_1 + \frac{\kappa B}{L} (\theta_1 - \epsilon) = 0$$

### 7.1.7. Analitičko rešenje

Rešiti čak i ovako jednostavan sistem u zatvorenom obliku je sve samo ne lako. Međutim, ako pretpostavimo da su priraštaji temperature  $T_1 = \theta_1 - \epsilon$  mali, sistem se raspada na dve nezavisne jednačine

$$\frac{1}{3} \rho_o L \ddot{x}_1 + \frac{E}{2L^3} x_1^3 = \frac{1}{3} \rho_o L g \quad (7.1.24)$$

$$\frac{E\alpha}{2L} \epsilon \dot{x}_1 x_1 + \frac{CL}{3} \dot{\theta}_1 = 0$$

Pre nego što predjemo na rešavanje sistema (23) odnosno (24), rasmotrimo stacionaran slučaj  $\ddot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0$ . Iz druge jednačine sada dobijamo  $\theta_1 = \epsilon$ , a iz prve

$$x_1 = (2 \rho_o L^4 g / 3E)^{1/3} \quad (7.1.25)$$

što nije ništa drugo nego statički ugib posmatranog sistema usled sopstvene težine.



Jednačina (24 a) može da se reši kvadraturama preko eliptičnih funkcija, što je zametan posao ali izvodljiv pomoću nekih poznatih transformacija<sup>11,13</sup>

Rešenje je

$$x_1 = e \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3}-1)\operatorname{cn} u} \quad (7.1.26)$$

Ovde je

$$e = (8 \rho_0 L^4 g / 3E)^{1/3} \quad (7.1.27)$$

$$u = (2g \sqrt{3}/e)^{1/2} t$$

gde je  $t$  vreme. U početnom trenutku  $t = 0$ ,  $\operatorname{cn} u = 1$  pa je  $x_1 = 0$  i rešenje evidentno zadovoljava početne uslove. Funkcija  $\operatorname{cn} u$  je periodična, pa tako i rešenje (26), koje maksimalnu vrednost  $x_1 = e$  uzima za  $\operatorname{cn} u = -1$ .

Ako dužinu štapa  $L$  u referentnoj konfiguraciji usvojimo tako da je  $e=1$ , maksimalni dinamički ugib prema (16) biće  $x_1 = 1$  m a statički, prema (25),  $x_1 = .629\ 96052$  m.

Za poredjenje analitičkog rešenja sa numeričkim vrednostima od interesa je još period koji za funkciju  $\operatorname{cn} u$  iznosi  $4K$ . Za naš slučaj je  $K = 1.598142005$ . Saglasno tome, za  $u = 4K$  i  $e = 1$  iz (27) dobijamo da je period oscilovanja funkcije  $x_1(t)$

$$T = \frac{4K}{\sqrt{2g\sqrt{3}}} = 1.096\ 593\ 185\ \text{s} \quad (7.1.28)$$

Razmotrimo sada jednačinu (24 b). Ova takodje može da se reši kvadraturama, i rezultat je

$$T_1 = -3E \alpha \epsilon x_1^2 / 4CL^2 \quad (7.1.29)$$

Za usvojenu vrednost  $e = 1$  dobijamo iz (27) da je

$$L = 31.617\ 759\ 1\ \text{m}$$

Usvojimo za referentnu temperaturu  $\epsilon = 300^\circ\text{K}$ , pa je, saglasno (22)

$$T_1 = -.137\ 140\ 136\ x_1^2\ ^\circ\text{K} \quad (7.1.30)$$

Izračunata vrednost je stvarno mala u odnosu na referentnu temperaturu, pa je prema tome ispunjena pretpostavka na osnovu koje smo formirali jednačine (24).

### 7.1.8. Numerička rešenja dinamičkog problema

Dinamički deo posmatranog problema rešavan je implicitnom (Odeljak 5.7) i pomoću tri varijante eksplicitne procedure (Odeljak 5.8). Uporedni rezultati dati su u tablici T-1.

Usvojeni korak pri integraciji bio je  $T/40$  gde je  $T$  period oscilovanja. Kri- tična dužina koraka može da se izračuna saglasno (5.10.1) i iznosi u ovom slučaju  $h_c = 5.95 T/40 x_1$ . Numerički primer je tako podešen da je maksimalna vrednost  $x_1 = 1$ , pa će zavisno od položaja na putanji dozvoljena vrednost koraka biti  $h \approx 5.95 T/40$ . Stvarno se pokazalo da trapezna iteracija konvergira za  $h = 7T/40$ , a divergira za  $h = 7.5 T/40$ .

Kod linearnih problema kritična dužina koraka je nezavisna od položaja na putanji, pa se naprimer za harmonijski oscilator dobija iz (5.10.1) da je  $h_c = T/\pi$ .

Što se tiče implicitne procedure, numerička računica je pokazala da ova konvergira, za posmatrani primer, nezavisno od koraka.

Poredjenjem numeričkih rezultata iz T-1 možemo da zaključimo da

- trapezna iteracija daje rezultate praktično identične implicitnoj proceduri, a prigušene u odnosu na analitičko rešenje
- procedura Belytschka daje nešto tačnije vrednosti od prethodne dve, ali pojačane u odnosu na analitičko rešenje
- modificirana trapezna iteracija daje rezultate praktično iste tačnosti kao procedura Belytschka, ali je, kao i trapezna, mada u manjoj meri, prigušena u odnosu na analitičko rešenje.

Bilo bi svakako preuranjeno davati ocenu predloženih postupaka na osnovu jednog elementarnog primera. Ono što može da se zaključi jeste da su svi rasmatrani postupci sa numeričke tačke gledišta korektni, i da ima osnove da se trapezna i modificirana trapezna iteracija dalje istražuju na realističnim primerima, imajući posebno u vidu poželjan prigušeni karakter rešenja. Treba takodje napomenuti da su sve navedene procedure primenjene i na slučaj harmonijskog oscilatora, gde je ponašanje rezultata bilo slično kao i u posmatranom slučaju.

Radi uvida u ponašanje numeričke procedure pri većem broju koraka, modificirana trapezna procedura je, za korak  $T/80$ , primenjena na računaru u

1600 koraka. Rezultati prikazani na Sl. 6 ukazuju na stabilno ponašanje numeričkog procesa.

#### 7.1.9. Numerička rešenja spregnutog problema

Spregnuti problem je, za  $h = T / 40$  rešavan prvo trapeznom procedurom (5.8.2 i 3). Iz T-1 vidi se da se rezultati po koordinati  $x_1$  samo marginalno razlikuju od čisto dinamičkog slučaja, u smislu smanjenja. Ovo je i razumljivo, zbog hladjenja štapova pri izduživanju. Što se tiče promene temperature, ova se za maksimalnu vrednost  $x_1$  razlikuje od analitički procenjene vrednosti (7.1.30) za manje od 0,5%.

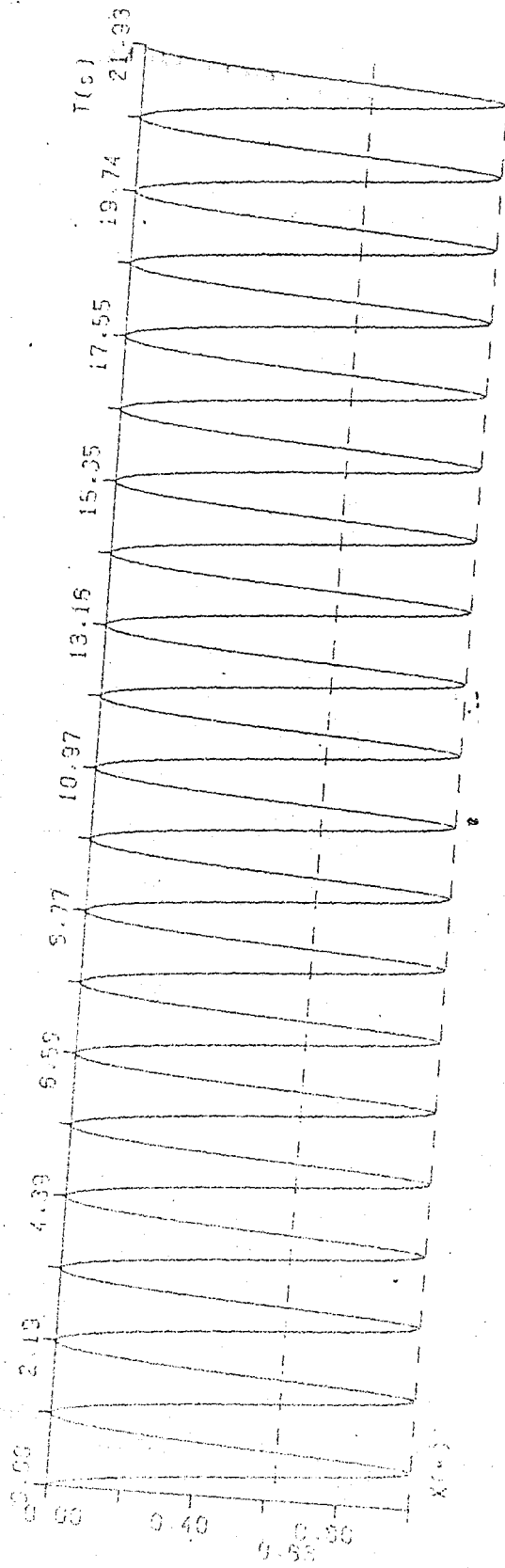
Problem je rešavan i na računaru modificiranom trapeznom procedurom, sa 1600 koraka  $h = T / 80$  i rezultati su prikazani na Sl. 7. Numeričko rešenje se ponaša stabilno, slično kao u dinamičkom slučaju.

Prema tome, može da se zaključi da predložena procedura rešavanja spregnutog problema, posebno s obzirom na svoju jednostavnost, zaslužuje određenu pažnju.

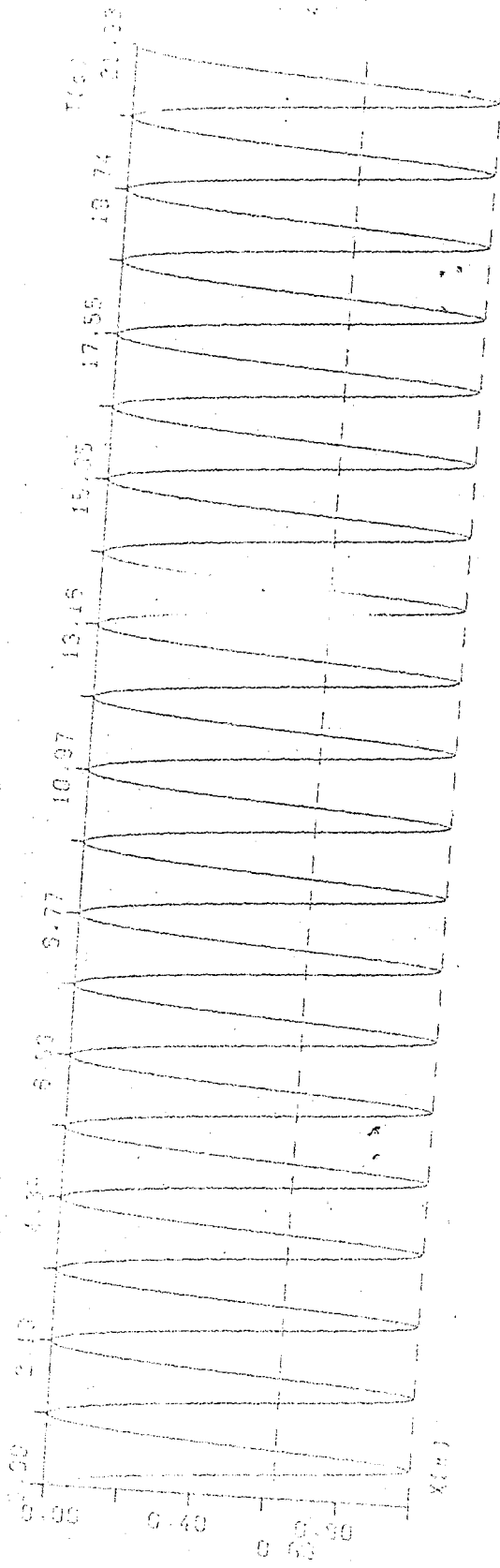
Poznato je da u slučaju velikih gradijenata temperature, kakvi se pojavljuju npr. prilikom oscilovanja greda, makrotermoelastično prigušenje predstavlja odlučujući deo prigušenja uopšte, pri čemu postoji, prema Zeneru<sup>45,46</sup>, odlično slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Da bi simulirali ovakvu situaciju na posmatranom primeru, koji se inače odlikuje malim gradijentima temperature, pomnožićemo specifičnu toplotu  $C$ , koeficijent toplotnog širenja  $\alpha$  i koeficijent toplotne provodljivosti  $\kappa$  faktorima  $10^{-1}$ ,  $10$  i  $10^5$  respektivno. Rezultati su prikazani na Sl. 8 i logični su sa fizičke tačke gledišta. Evidentan je prigušeni karakter rešenja po koordinati  $x_1$  koja konvergira ka statičkoj vrednosti ( $x_1 = 0.63$ ), dok temperatura konvergira ka referentnoj vrednosti.

TABLICA T - 1

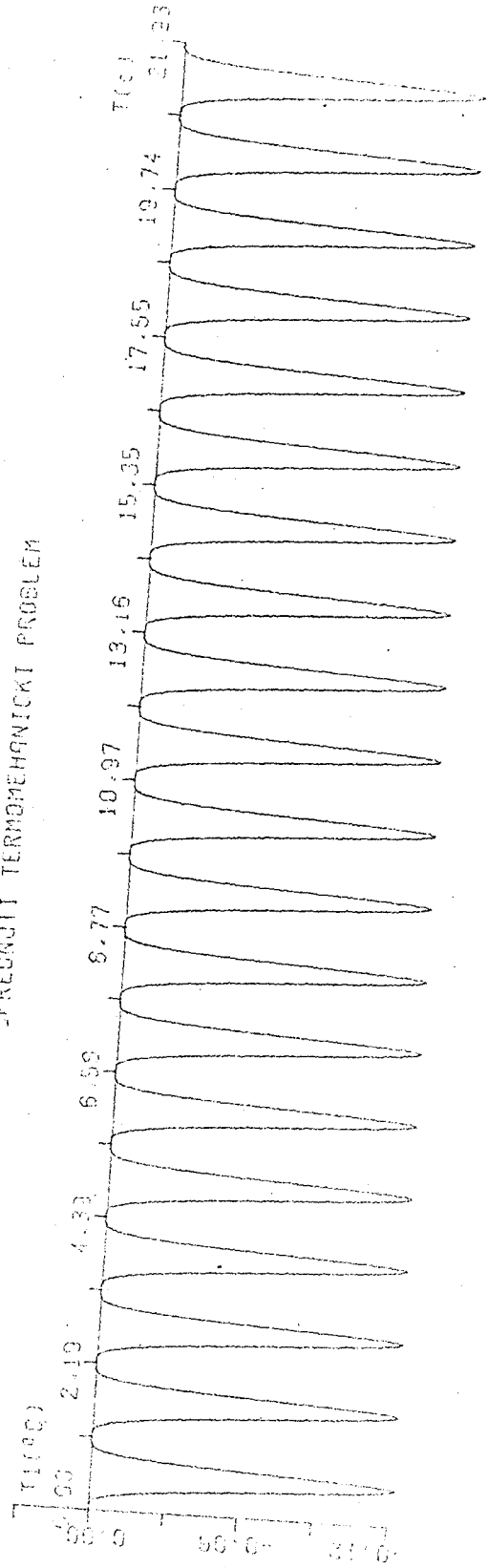
Korak	M E T O D A						
	ANALITIČKA	IMPLICITNA	TRAPEZNA	MODIFICIRANA TRAPEZNA	BELYTSCHKO	SPREGNUTI PROBLEM TRAPEZNA	
	$x_1$ (m)	$x_1$ (m)	$x_1$ (m)	$x_1$ (m)	$x_1$ (m)	$x_1$ (m)	T (°K)
1	3.68646-3	3.68646-3	3.68646-3	3.68646-3	3.68646-3	3.68646-3	-.372748-5
2	1.47458-2	1.47458-2	1.47458-2	1.47458-2	1.47459-2	1.47458-2	-.372746-4
3	3.31790-2	3.31778-2	3.31778-2	3.31779-2	3.31781-2	3.31778-2	-.167732-3
4	5.89817-2	5.89807-2	5.89807-2	5.89812-2	5.89822-2	5.89807-2	-.506883-3
5	9.21513-2	9.21474-2	9.21474-2	9.21493-2	9.21531-2	9.21473-1	-.121102-2
6	1.32668-1	1.32657-1	1.32657-1	1.32662-1	1.32674-1	1.32657-1	-.248025-2
7	1.80485-1		1.80456-1	1.80470-1	1.80499-1	1.80455-1	-.455648-2
8	2.35492-1		2.35427-1	2.35459-1	2.35523-1	2.35426-1	-.771840-2
9	2.97472-1		2.97342-1	2.97406-1	2.97535-1	2.97340-1	-.122708-1
10	3.66025-1		3.65785-1	3.65904-1	3.66143-1	3.65781-1	-.185240-1
11	4.40472-1		4.40058-1	4.40264-1	4.40677-1	4.40048-1	-.267584-1
12	5.19726-1		5.19054-1	5.19388-1	5.20059-1	5.19036-1	-.371688-1
13	6.02155-1		6.01132-1	6.01641-1	6.02666-1	6.01098-1	-.497854-1
14	6.95455-1		6.83989-1	6.84719-1	6.86191-1	6.83931-1	-.643778-1
15	7.66568-1		7.64603-1	7.65581-1	7.67560-1	7.64507-1	-.803590-1
16	8.41725-1		8.39281-1	8.40498-1	8.42965-1	8.39131-1	-.967267-1
17	9.06660-1		9.03874-1	9.05262-1	9.08078-1	9.03652-1	-.112090-1
18	9.57030-1		9.54186-1	9.55605-1	9.58480-1	9.53875-1	-.124824+0
19	9.89022-1		9.86537-1	9.87780-1	9.90287-1	9.86122-1	-.133357+0
20	1.00000+0		9.98361-1	9.99187-1	1.00082-1	9.97832-1	-.136525+0



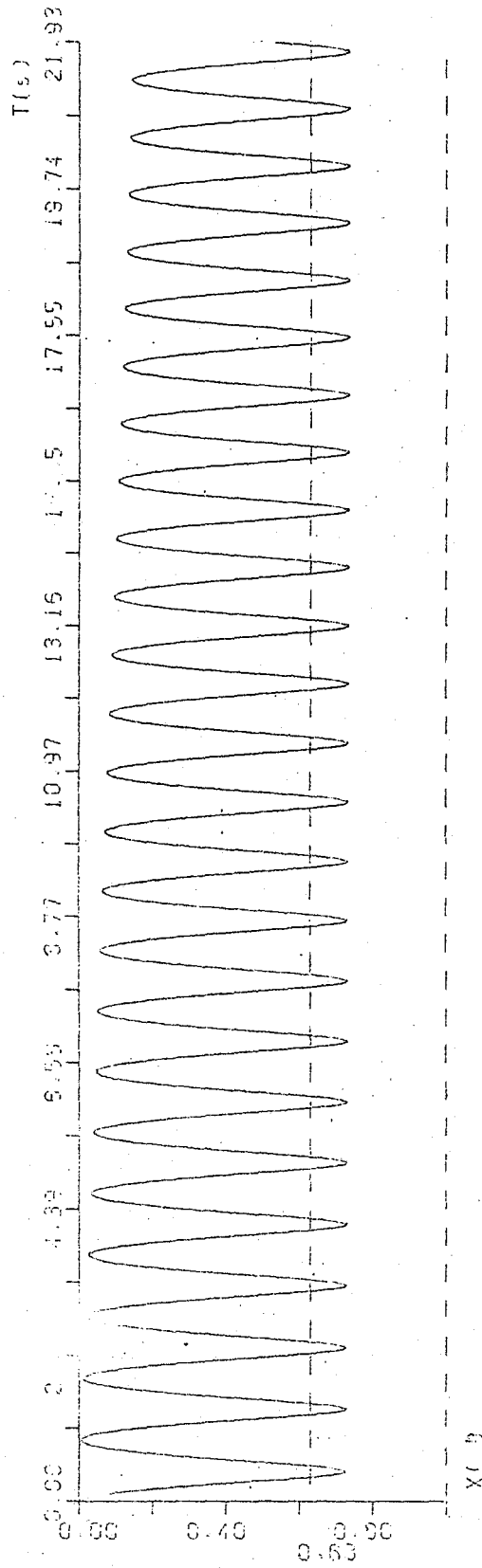
Slika 6



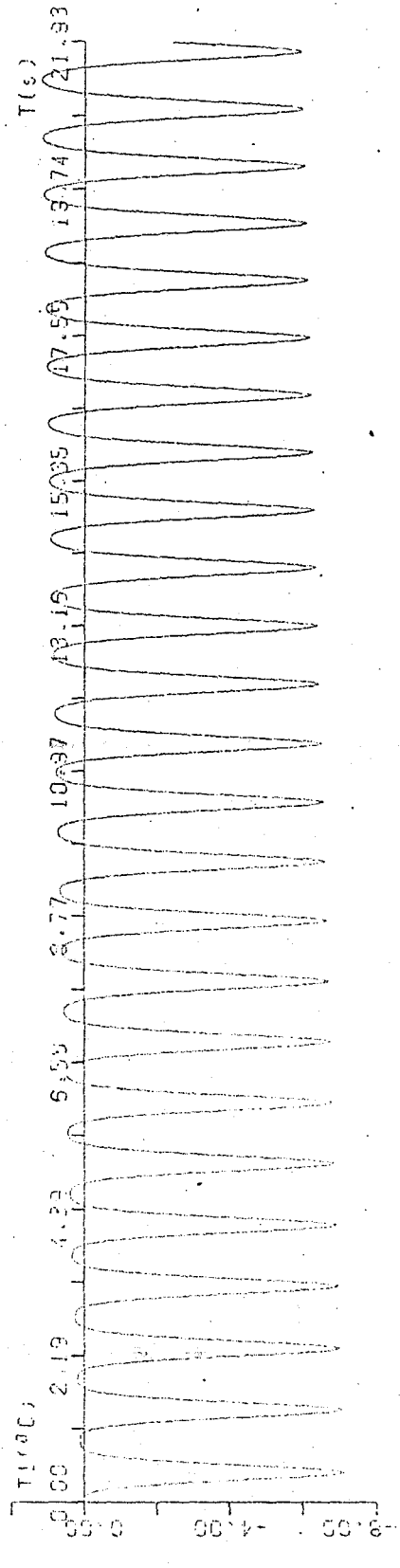
SPREKNUTI TERMO-MEHNICKI PROBLEM



Slika 7



SPREGNUTI TERMO-MECHANICK. PROBLEM



Slika 8

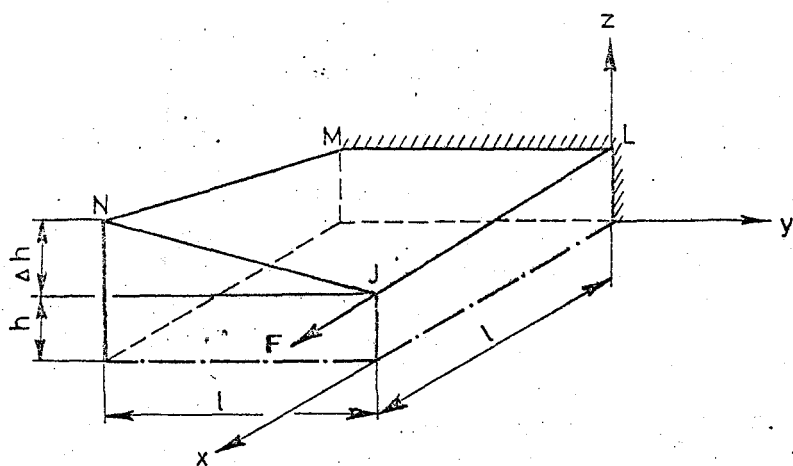
## 7.2. Vitoperena kutija

Veoma je malo publikovanih rezultata o performansama membranskih elemenata u neplanarnim konfiguracijama, čak i kada se radi o linearnom statičkom problemu. U radu Haftke<sup>28</sup>, koji je posvećen upravo ovom problemu, rasmatrani su samo ravni četvorougoni elementi, i upoređeni su sa NASTRAN<sup>26</sup> QDMEM elementima. Primer iz pomenutog rada je takozvana kutijasta konzola, prikazana na Sl. 9, inače uprošćena tipična šema konstrukcije avionskog krila. Konstrukcija je simetrična u odnosu na ravan xy, i na crtežu je prikazan samo gornji simetrični deo. Opterećenje je spreg u ravni zx, dakle antisimetrično u odnosu na ravan xy, i možemo ga zameniti koncentrisanom silom F u tački J.

U tačkama J i N pretpostavljene su krute vertikale. Radi poredjenja sa rezultatima iz navedenog rada, ponovljen je numerički račun sa elementima QDMEM, koji ustvari predstavljaju substrukture sastavljene od po četiri trougla dobijena deljenjem četvorougla dijagonalama. Ova šema prikazana je na Sl. 10. Treba zapaziti da se u neplanarnom slučaju dijagonale ne seku, što je kod ovog elementa pretpostavka i u planarnom slučaju, tako da u suštini element sačinjavaju dva nezavisna sloja od po dva trougla. Rezultati za ovaj slučaj prikazani su donjom punom linijom dijagrama na Sl. 13. Ovde dolazi do izražaja prekomerna krutost trougaonih elemenata u ovakvim situacijama. Uobičajeno lečenje ovog nedostatka kod primena na avionske konstrukcije<sup>47</sup> jeste idealizacija bočnih ploča elementima napregnutim isključivo na smicanje (Odeljak 6.4.1). Uz ovakvu pretpostavku, posmatrana struktura postaje znatno fleksibilnija. Odgovarajući rezultati prikazani su donjom isprekidanom linijom dijagrama na Sl. 13, i u potpunosti se slažu sa rezultatima iz literature<sup>28</sup>.

Napomenimo još jednom da je u ovom primeru analiziran samo statički linearan slučaj, zbog poredjenja sa postojećim rezultatima. Treba međjutim imati u vidu da ovaj slučaj obuhvata najsloženiju matricu metode konačnih elemenata - matricu krutosti, a sem toga ima i veliki praktični značaj, pa je razumljivo da se kod analize performansi konačnih elemenata podje od njega.





$$l = 254 \text{ cm}$$

$$h = 12,7 \text{ cm}$$

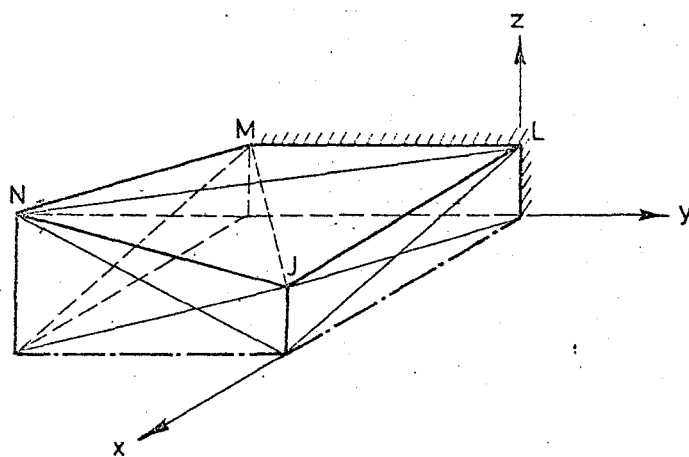
$$t = 0,102 \text{ cm}$$

$$\nu = 0,3$$

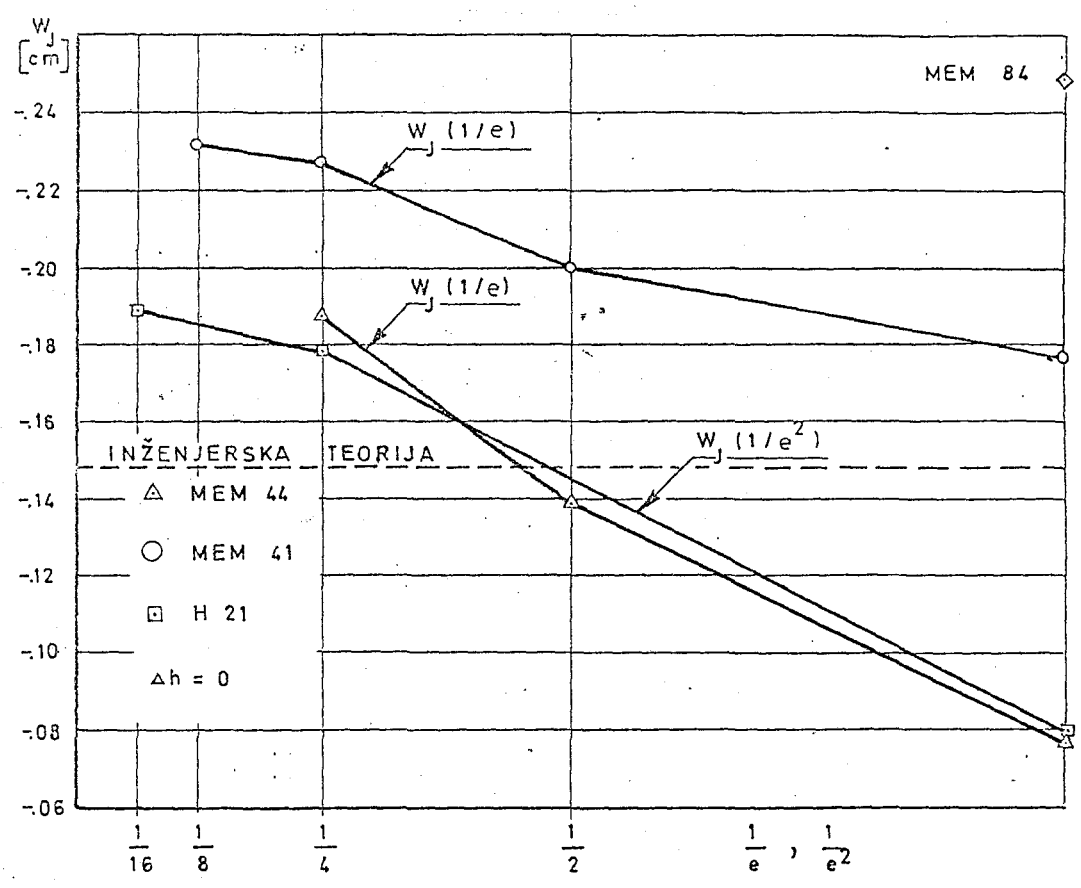
$$G = 3307 \text{ KN/cm}^2$$

$$F = 9,81 \text{ KN}$$

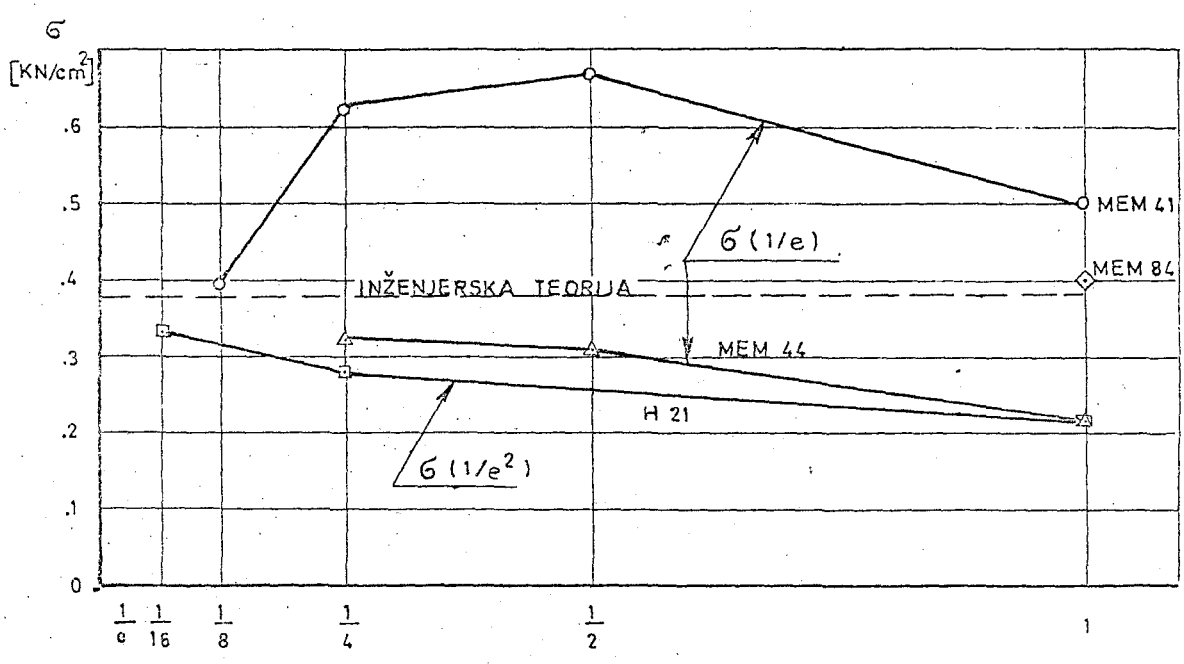
Slika 9 KONFIGURACIJA PROBNE STRUKTURE



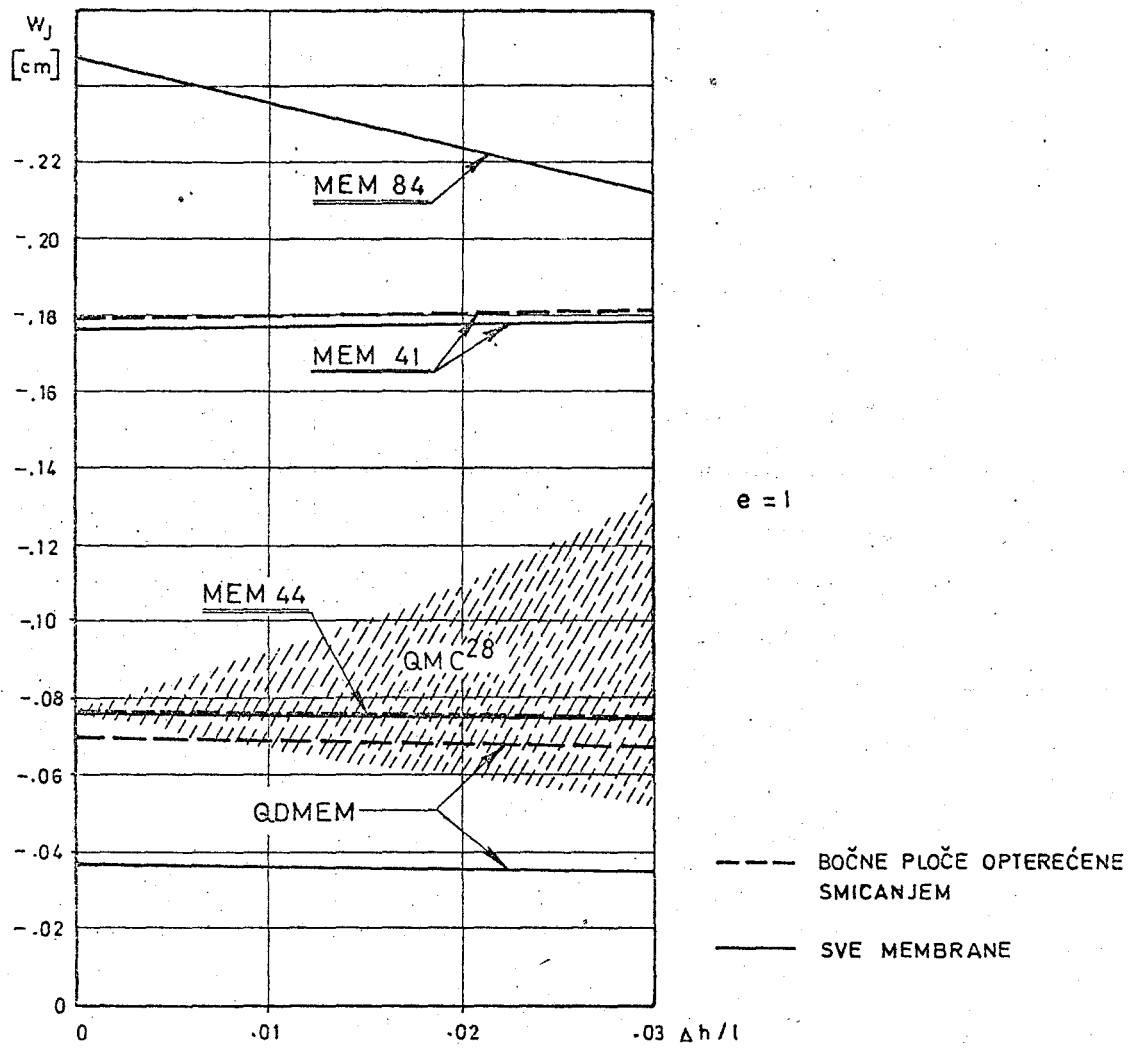
Slika 10 IDEALIZACIJA QDMEM ELEMENTIMA



Slika 11 ISPITIVANJE KONVERGENCIJE PO UGIBU



Slika 12 INTENZITET NAPONA U TEŽIŠTU OSNOVNE PLOČE



Slika 13 VERTIKALNO POMERANJE ČVORA J

### 7.2.1. Ispitivanje konvergencije

Konvergencija elemenata MEM 41 i MEM 44 opisanih u odeljku 6.4.1 ispitivana je korišćenjem različitih mreža. Podele gornje ploče bile su  $e_x$ , a bočnih ploča  $e_x$ , gde je  $e=1, 2, 4, 8$  bio broj elemenata po ivici.

Radi poredjenja, probni primer bio je računat i pomoću verovatno najboljeg postojećeg četvoročvornog elementa za ravno naprezanje, hibridnog<sup>51,27</sup> elementa nazvanog H21, koji je autor ovoga rada ispitao na niz najrazličitijih statičkih i dinamičkih problema, uz dobro slaganje sa sopstvenim i tuđim analitičkim, numeričkim i eksperimentalnim<sup>52, 53</sup> rezultatima. Element H21 ima kompletnu linearnu ravnotežnu raspodelu napona, i konvergira kvadratno<sup>27</sup>.

Poredjenje je obavljeno na Sl.11, posmatranjem vertikalnog ugiba u tački J. Ako se rezultati za element H21 uzmu kao pouzdani, može se zaključiti da primenom elementa MEM 41 konstrukcija postaje previše fleksibilna. Konvergencija je prema očekivanju za ovaj tip elementa (nekompletne linearne deformacije) približno linearna, ali rezultati teže ka vrednosti koja je očigledno znatno viša od predviđjene pomoću elementa H21. U svakom slučaju ovo je posledica integracije u jednoj tački, i kinematskih stepeni slobode elementa sa time u vezi (Odeljak 6.4.1).

Primenom četiri tačke numeričke integracije (MEM 44), situacija se popravlja, i rezultati su vrlo bliski rezultatima sa elementom H21.

Za slučaj jednog elementa, numerički test je izvršen i za element MEM 84 (Odeljak 6.4.2). Rezultati ponovo ukazuju na preteranu fleksibilnost elementa.

Na sličan način upoređeni su i naponi u težištu gornjeg panela konstrukcije. Rezultati za element MEM 41 ukazuju da konvergencija po naponima u svakom slučaju nije monotona, i da se rezultati skokovito menjaju sa gustinom mreže. Što se tiče elementa MEM 44, konvergencija po naponima je očigledno monotona, i rezultati su opet veoma uporedivi sa H21.

Rezultati su upoređeni i sa rešenjima dobijenim pomoću inženjerskih formula za kutijaste tankozidne nosače<sup>54</sup>. Dobijeno je dobro slaganje po naponima, dok rezultati po ugibima ukazuju na nedovoljnu pouzdanost priručnih obrazaca.

### 7.2.2. Efekti vitoperenosti

U radu Haftke, efekti vitoperenosti ispitivani su pomoću ravnih elemenata sa bilinearnom raspodelom pomeranja, na kakve se u suštini svodi i element posmatran u ovom radu, kada mu sve četiri tačke leže u jednoj ravni. Modeliranje je obavljeno tako da je ravan elementa sukcesivno provlačena kroz po tri tačke od tačaka J, L, N, M, prikazanih na Sl. 9. Rasturanje rezultata, prikazano šrafiranom površinom na Sl. 13, na velu je autore na zaključak da primena ravnih četvorougaoonih elemenata nema nikakvog smisla ako neplanarnost posmatranog polja konstrukcije prelazi vrednost  $h/l = 0.05$ .

Što se tiče elementa MEM 41, Sl. 13 ponovo ukazuje na njegovu preteranu fleksibilnost, a uz to na neosetljivost na vitoperenje. Šta više, dobija se ne-logičan rezultat da je vitoperena konstrukcija fleksibilnija od nevitoperene. Element MEM 84 je još gipkiji, ali uz logičan odnos ugiba u vitoperenom i nevitoperenom slučaju.

Medjutim, primenom elementa MEM 44 dobijamo veoma ohrabrujuće rezultate. Za planarni slučaj, vrednosti se slažu sa podacima za element QMC<sup>28</sup>, dok u neplanarnim situacijama element ponaša stabilno i logično, slično elementu QDMEM, ali povoljnije u smislu fleksibilnosti. Za razliku od QDMEM, efekat opterećivanja bočnih ploča isključivo smicanjem je zanemarljiv, pa otpada jedna od tema za razmišljanje prilikom postavljanja određenih inženjerskih problema.

Na osnovu izloženog može se zaključiti da je membranski element MEM 44 vredan pažnje kada se rešavaju konstrukcije sa neplanarnim površima (Sl. 1).

### 7.3. Membrana oblika hiperboličnog paraboloida (hipara)

Da bi se ispitalo ponašanje predloženih konačnih elemenata i u klasičnim membranskim situacijama, rasmotren je slučaj hiperboličnog paraboloida opterećenog konstantnim, kontinualnim opterećenjem, za koji u linearnom slučaju postoji analitičko rešenje<sup>55</sup>. Konfiguracija probnog primera (Sl. 14) uzeta je iz rada<sup>56</sup>, u kome su dati rezultati proračuna metodom konačnih razlika, kao i eksperimentalne vrednosti.

Saglasno Flüggau<sup>55</sup>, membrana je napregnuta čistim smicanjem pri čemu je intenzitet smičuće sile

$$N_s = \frac{1}{2} \frac{a^2}{h} p \quad (7.3.1)$$

Za numeričke vrednosti sa Sl.14 dobijamo da je  $N_s = 34.39 \text{ kN/m}$ .

Rezultati proračuna metodom konačnih elemenata dobro se slažu sa analitičkim vrednostima, sem za elemente u uglovima konstrukcije. Ovo je i razumljivo, pošto su graničnim uslovima fiksirana po tri čvora ugaonih elemenata. Interesantno je da po naponima gotovo da nema razlike izmedju rezultata dobijenih elementima MEM 41 i MEM 44. Ovo je posledica činjenice da u ovom specijalnom slučaju pomeranja čvorova konačnih elemenata ne uključuju stepene slobode koji se neadekvatno numerički integrale pravilom jedne tačke.

Za uporedjivanje kvaliteta rešenja pogodna je unutrašnja energija, kao skalar na veličina. S obzirom da su membranske sile konstantne, unutrašnju energiju lako je izračunati iz poznatog izraza

$$U = N_s^2 S / 2 G t \quad (7.3.2)$$

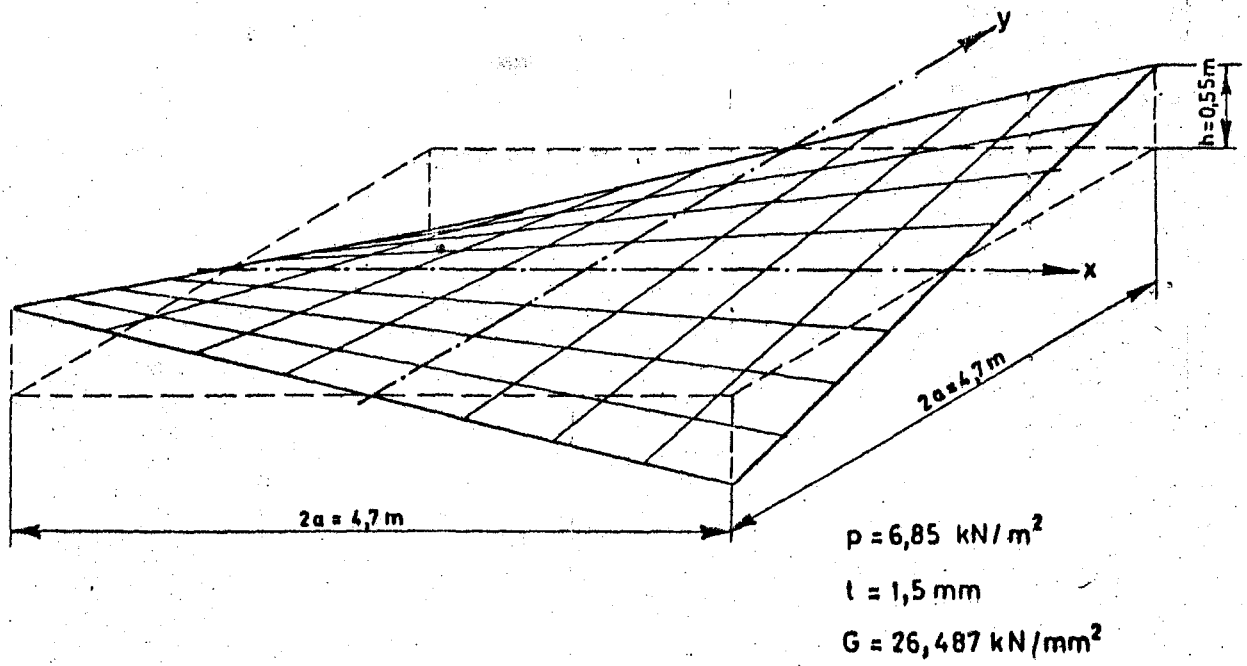
Ovde je  $S$  ukupna površina membrane, koju na osnovu (2.1, 8) možemo da izračunamo prema

$$S = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \sqrt{A} d\xi d\eta \quad (7.3.3)$$

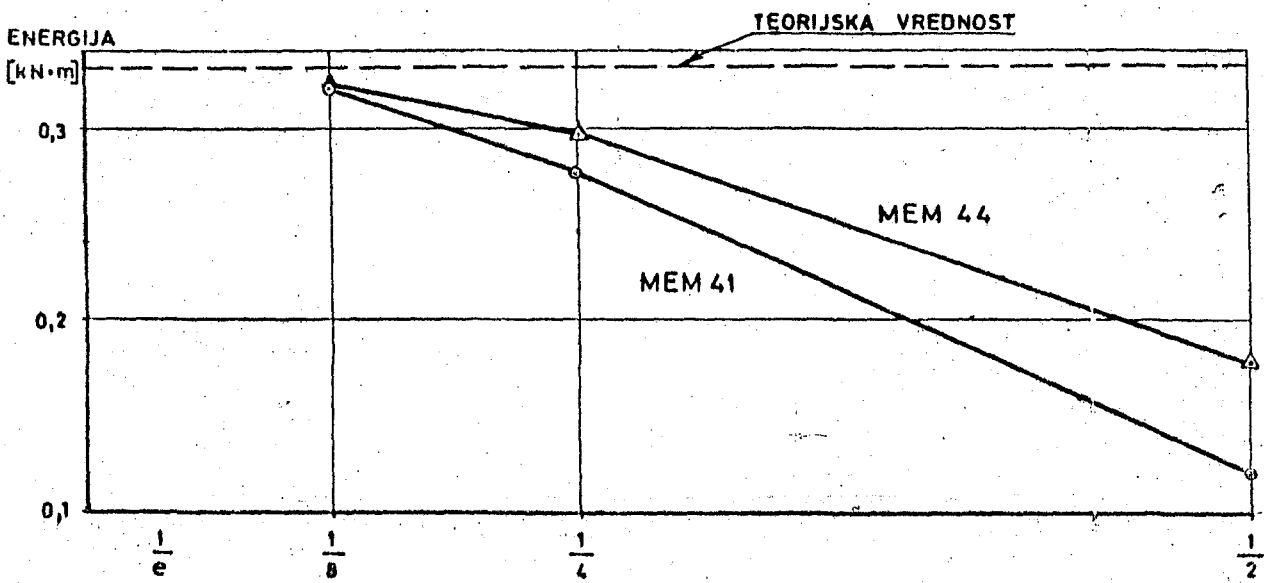
gde je  $\xi, \eta = \pm 1$  za  $x, y = \pm a$ . Izračunata vrednost energije prikazana je isprekidanom linijom dijagrama na Sl.15. Rezultati po energiji za različite gustine mreže konačnih elemenata prikazani su u istom dijagramu. Vidi se da vrednosti dobijene metodom konačnih elemenata brzo konvergiraju ka tačnom rešenju. Greška koja postoji je u suštini posledica već pomenute neadekvatne deformacije ugaonih elemenata.

Ono što je posebno interesantno kod ovog primera, i što je izazvalo određene diskusije prilikom izlaganja rada<sup>41</sup> na Svetskom kongresu jeste da elementi MEM 44 u ovom slučaju daju fleksibilniju strukturu nego elementi sa reduciranom integracijom MEM 41, što protivureči svim dosadašnjim opažanjima u sličnim situacijama.

Objašnjenje leži u činjenici da se radi o konstrukciji sa konstantnim naponom, za koju će ma kakav tip elementa da da praktično tačno rešenje. Greška nastupa samo kod ugaonih elemenata, unutar kojih pravilo integracije sa četiri



Slika 14 MEMBRANA OBLIKA HIPERBOLIČNOG PARABOLOIDA



Slika 15 HIPAR MEMBRANA (KONVERGENCIJA PO ENERGIJI)

tačke adekvatnije integrali energiju.

U svakom slučaju, ovaj kao i prethodni primer ukazuju da su neophodne određene rezerve prema reduciranoj integraciji, koja se u pojedinim radovima vrlo cenjenih autora<sup>18, 50</sup>, a na osnovu odličnih rezultata u pojedinim primerima, veoma preporučuje.



#### 7.4 Prostiranje talasa brzine u štapu

U cilju provere predloženih postupaka na dinamičkim prelaznim (transient) fenomenima, rasmotrićemo ovaj jednostavni primer, ali uz korišćenje realističnog broja stepeni slobode. Šema problema prikazana je na Sl. 16.

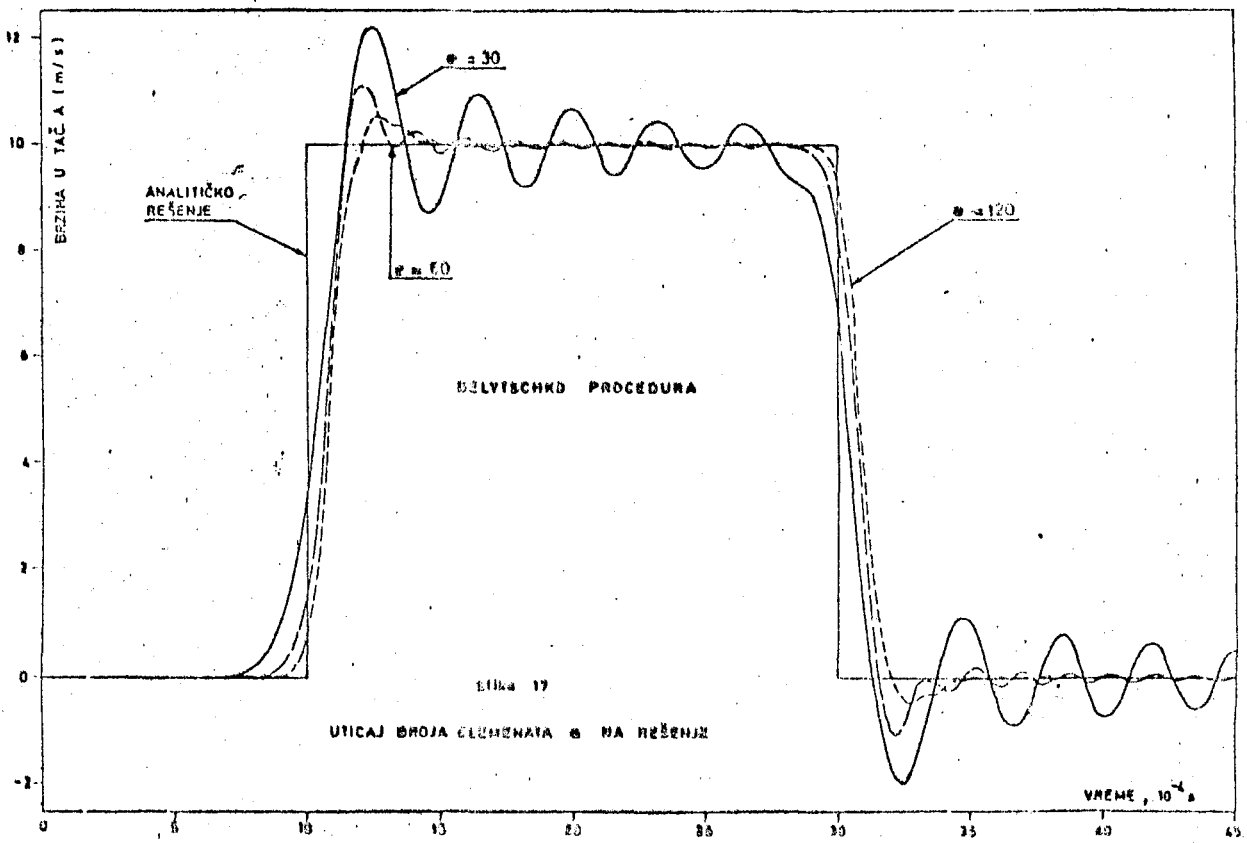
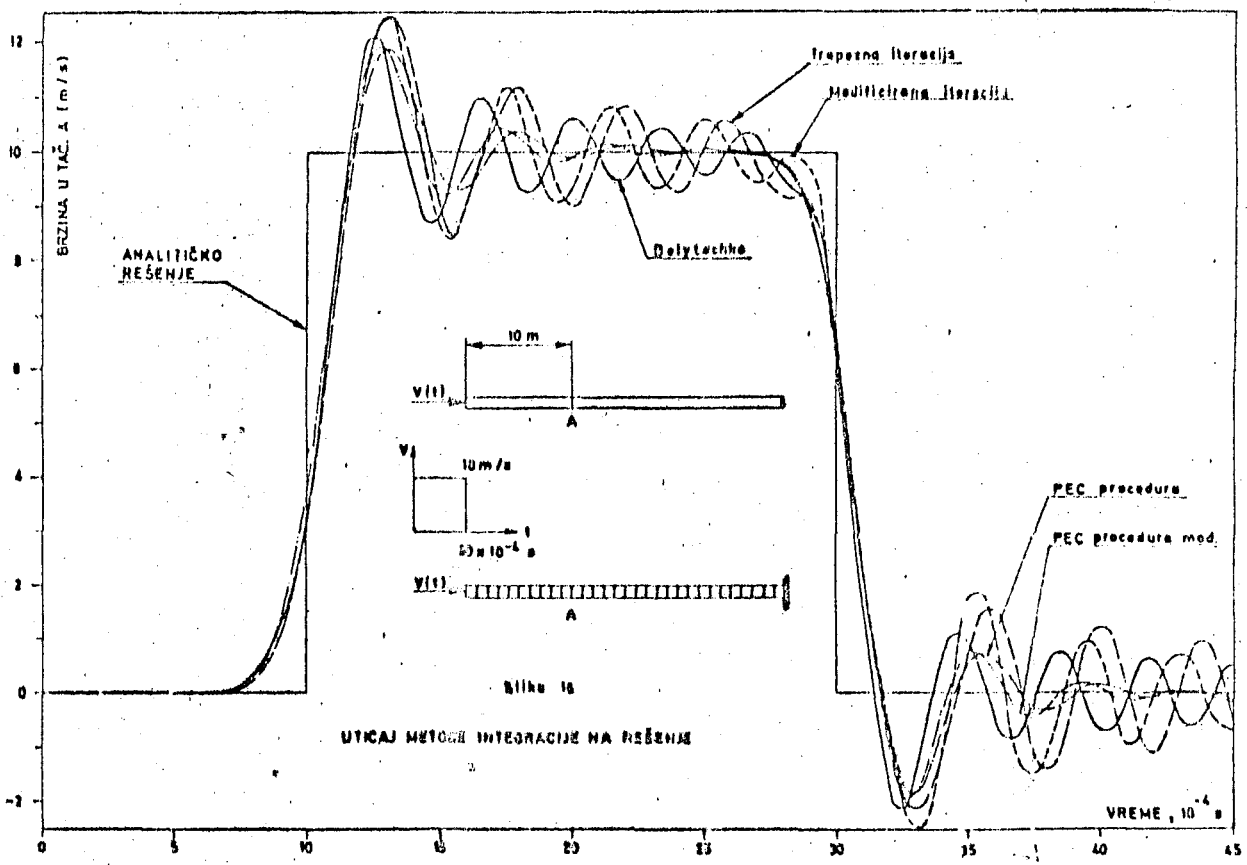
Tip elementa isti je kao i u primeru 7.1, sem što su mase, saglasno razmatranjima u odeljcima 5.8 i 6.2, redukovane na čvorove pa je matrica masa sistema dijagonalna. Radi lakšeg upoređivanja rešenja sa postojećim numeričkim i analitičkim rezultatima<sup>18</sup>, koji su dati u anglosaksonskim jedinicama, mere nisu prevodjene već samo zamenjene metričkim.

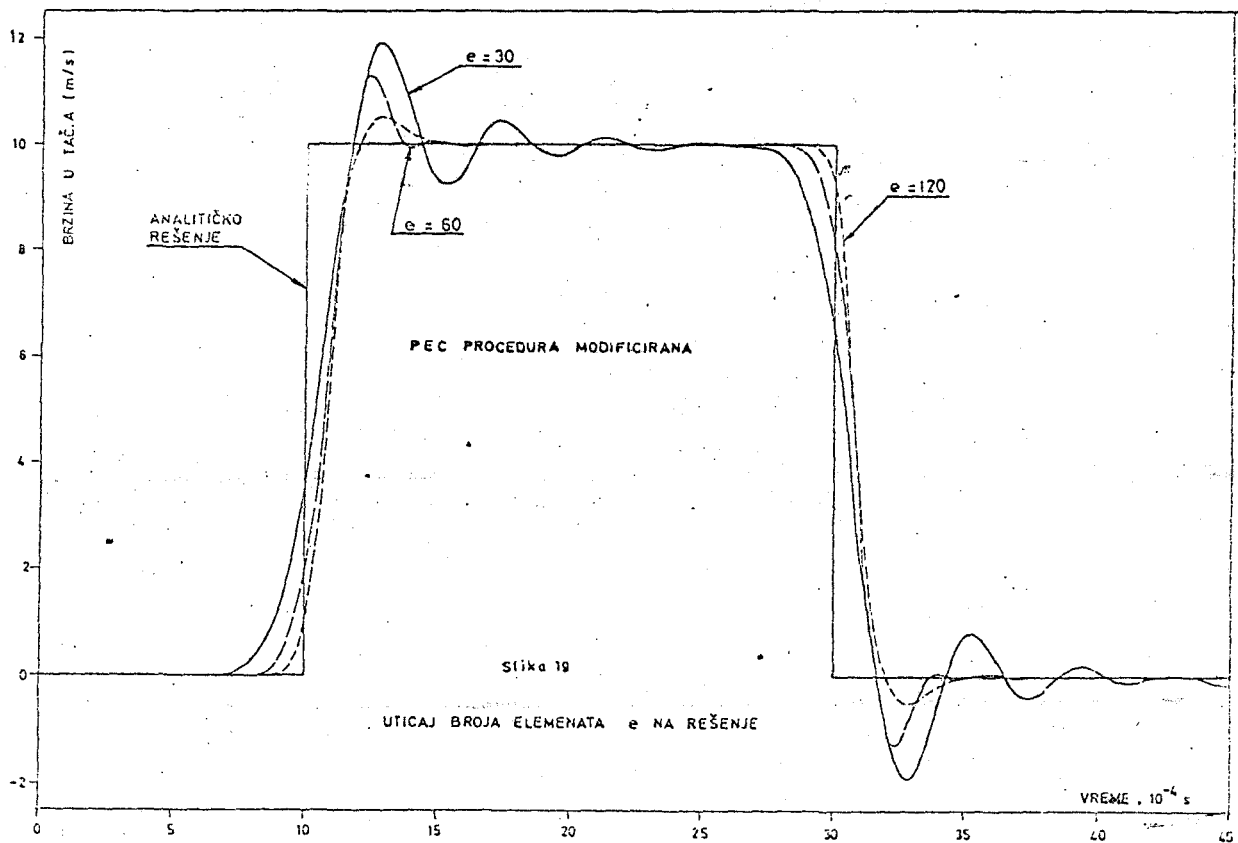
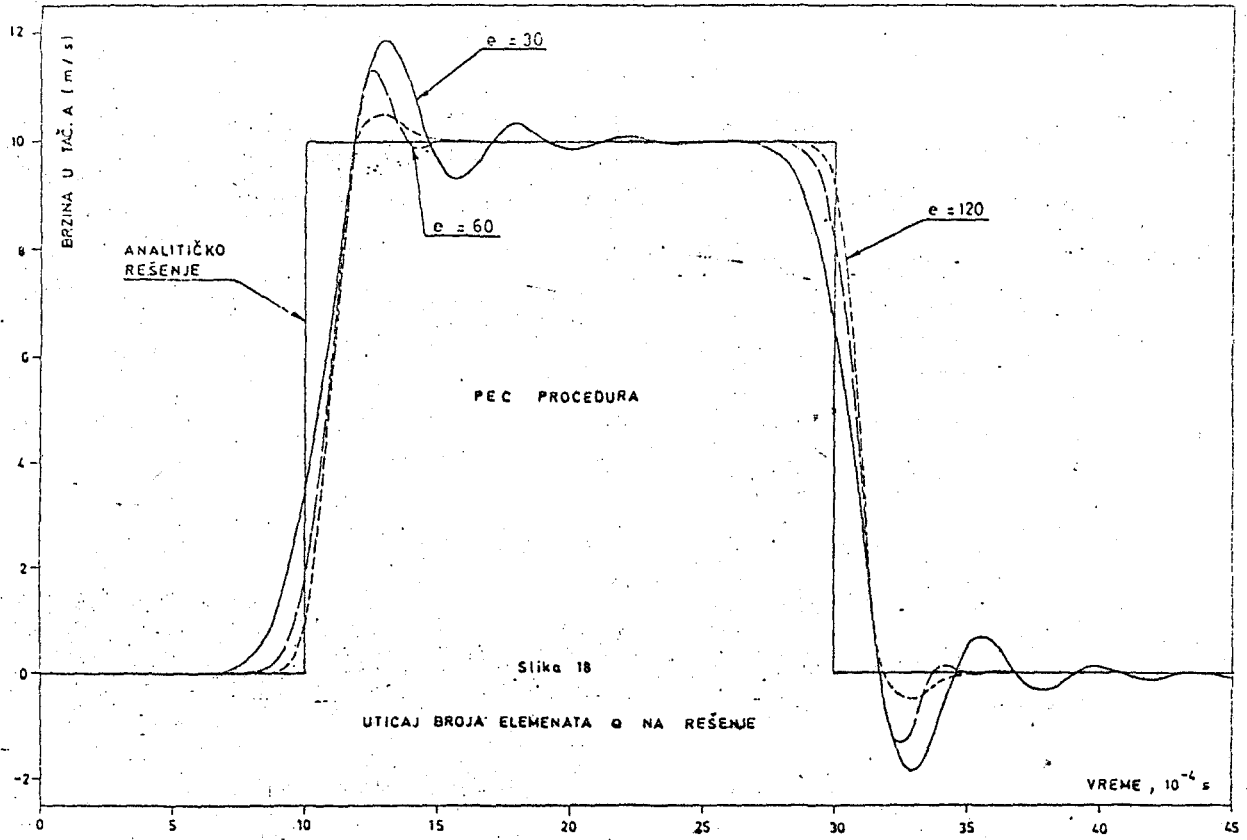
Brzina prostiranja talasa se analitički lako određuje iz (5.10.5) a odgovarajući vremenski korak iz (5.10.2). Za posmatrani primer usvojen je redukcionni faktor  $\alpha = 0.5$ .

Na Sl. 16 uporedno su prikazani rezultati za više metoda, a sa istim brojem elemenata. Numeričke vrednosti svakako ne mogu da prate analitičko rešenje na frontu talasa, gde imamo diskontinuitet brzine. Kao posledicu imaćemo određeno iskakanje rezultata iznad  $v = 10$  m/s. Kod metode Belytschka ovaj porast praćen je blago prigušenom oscilatornom komponentom rešenja. Trapezna iteracija daje rešenje sa još većim skokom u okolini fronta, uz takodje umereno prigušenje. Primetno je medjutim manja učestanost oscilatorne komponente rešenja. Slična je situacija sa modificiranom trapeznom procedurom, koja je po učestanosti izmedju prethodne dve.

Primenom PEC procedure situacija se vidno poboljšava. Oscilacije rešenja su snažno prigušene, a učestanost odgovara trapeznoj iteraciji. PEC modificirana procedura daje slične rezultate, uz učestanost koja odgovara modificiranoj trapeznoj iteraciji.

Radi detaljnijeg uvida u ponašanje posmatranih postupaka, primer je rešavan sa različitim gustinama mreže, 30, 60 i 120 elemenata, a rezultati su prikazani na Sl. 17, 18 i 19. Očigledne su prednosti PEC procedura u odnosu na postupak Belytschka. Medjutim, izmedju dveju PEC procedura razlike su suptilnije. Detaljniji uvid u numeričke rezultate ukazuje na marginalno veću tačnost PEC modificirane, što uz nešto strmiji front talasa opravdava razmatranje eventualne buduće upotrebe ove metode u produkcionim programima.





## 8. - DISKUSIJA I ZAKLJUČCI

Cilj ovog rada bio je da se razviju konačni elementi membrana upotrebljivi u svim situacijama u kojima je membranska aproksimacija opravdana. Postavljeni problem zahtevao je pre svega da se osnovne relacije membranske teorije postave na način pogodan za rešavanje metodom konačnih elemenata (poglavljje 2). U poglavlju 3 formulisane su konstitutivne jednačine za čvrste termomehanički jednostavne membrane, i detaljno je analiziran slučaj termoelastičnog materijala.

Aproksimaciji membrana konačnim elementima posvećeno je poglavljje 4. U ovom poglavlju pokazano je i da se, za termomehanički jednostavan materijal, brzina promene temperature eksplicitno pojavljuje u jednačinama provodjenja toplote (4.5.10), što je od ključne važnosti za numeričko rešavanje.

Poglavljje 5 posvećeno je linearizaciji i rešavanju jednačina kretanja i provodjenja toplote sistema konačnih elemenata. Razmotreno je simultano rešavanje ovih jednačina implicitnim i eksplicitnim postupkom, i pokazano je da procedure koje se danas sa uspehom koriste u metodi konačnih elemenata predstavljaju specijalne slučajeve predloženih postupaka.

Imajući u vidu da je metoda konačnih elemenata nezamisliva bez primene računara, neophodno je sistematizovati izračunavanje pojedinih veličina koje ulaze u jednačine kretanja, da bi se omogućilo programiranje. Takodje je neophodno da se na odgovarajući način interpretiraju rezultati proračuna (pomeranja, membranske sile, itd.). Ova pitanja dotaknuta su u poglavlju 6.

U poglavlju 7 rasmotreni su numerički primeri. Pokazana je korektnost predloženih postupaka poredjenjem sa analitičkim i numeričkim rešenjima pomoću poznatih procedura. Takodje je konstatovano regularno ponašanje predloženih membranskih elemenata u nekim tipičnim situacijama. Numerički rezultati na primerima sa realističnim brojem stepeni slobode ukazuju na značajne prednosti predložene prediktor-korektor metode pri rešavanju prelaznih dinamičkih problema.

Konačno, kako zbog praktične primene kao ojačanja membranskih konstrukcija, tako i zbog pogodnosti koje pružaju pri postavljanju probnih primera, u dodatku su ukratko rasmotreni aksijalno napregnuti štapovi.

## D O D A T A K - AKSIJALNO NAPREGNUTI ŠTAPOVI

U tehničkoj praksi uobičajeno je da se membranske konstrukcije ojačavaju uzdužnim elementima, koje možemo tretirati kao aksijalno napregnute štapove. Sem toga, rasmatranje ponašanja nekih jednostavnih sistema štapova može da da kvalitativni uvid u određena membranska stanja. Ovo je razlog što će u ovom poglavlju biti rasмотрene neke osnovne relacije teorije aksijalno napregnutih štapova.

### D.1 Kinematika štapa

Materijalne tačke štapa, kao jednodimenzionalnog kontinuuma, zauzimaju oblast definisanu srednjom linijom štapa  $L$ . Položaj materijalne tačke u oblasti određen je materijalnom krivolinijskom koordinatom  $\xi$ .

Položaj ove tačke u prostoru i vremenu odredićemo parametarskim jednačinama linije  $L$

$$x^i = x^i(\xi, t) \quad (D.1.1)$$

gde su

$$x^i, i = 1, 2, 3$$

Descartesove koordinate tačke  $\xi$  u trenutku  $t$ . Brzinu i ubrzanje tačke odredićemo diferenciranjem (1) po vremenu:

$$\dot{x}^i = \partial x^i / \partial t, \quad \ddot{x}^i = \partial^2 x^i / \partial t^2 \quad (D.1.2)$$

Bazni vektor definisan je izrazom

$$x_{\xi}^i = \partial x^i / \partial \xi \quad (D.1.3)$$

Kvadrat dužine linijskog elementa dat je kao i uvek relacijom

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (D.1.4)$$

Imajući u vidu (1) i (3) ovaj izraz možemo prepisati u obliku:

$$ds^2 = a_{\xi\xi} (d\xi)^2 \quad (D.1.5)$$

gde

$$a_{\xi\xi} = \delta_{ij} x_{\xi}^i x_{\xi}^j \quad (D.1.6)$$

odredjuje metriku štapa u trenutku  $t$ . Zapazimo da se u slučaju aksijalno napregnutog štapa osnovni metrički tenzor sveo na skalarnu veličinu  $a_{\xi\xi}$ .

Kontravarijantni oblik veličine  $a_{\xi\xi}$  nije ništa drugo nego recipročna vrednost ove:

$$a^{\xi\xi} = 1 / a_{\xi\xi} \quad (D.1.7)$$

Položaj materijalne tačke u referentnoj konfiguraciji biće

$$X^i = X^i(\xi, t_0) \quad (D.1.8)$$

gde je  $t_0$  početni trenutak vremena. Sledstveno tome, osnovni metrički tenzor u referentnoj konfiguraciji je

$$A_{\xi\xi} = \delta_{ij} X^i_{\xi} X^j_{\xi} \quad (D.1.9)$$

Sada je tenzor relativne deformacije

$$\gamma_{\xi\xi} = \frac{1}{2} (a_{\xi\xi} - A_{\xi\xi}) \quad (D.1.10)$$

dok je brzina deformacije

$$\dot{\gamma}_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \dot{a}_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (x^i_{\xi} \dot{x}^j_{\xi} + \dot{x}^i_{\xi} x^j_{\xi}) \quad (D.1.11)$$

## D.2 Osnovne termomehaničke veličine

U ovom odeljku opisaćemo osnovne termomehaničke veličine teorije štapova, slično kao što je to u odeljku 2.2 učinjeno za teoriju membrana.

### D.2.1 Masa

U teoriji štapova gustina se definiše kao masa po jedinici dužine linije štapa i označićemo je sa

$$\bar{\rho} = \rho b \quad (D.2.1)$$

gde je  $b$  površina poprečnog preseka štapa. Ukupna masa štapa  $M$  biće

$$M = \int_L \bar{\rho} ds \quad (D.2.2)$$

gde integralimo duž materijalne linije štapa.

### D.2.2 Mehanička snaga (efekt rada)

Rad spoljnih sila koje deluju na štap je skalarni proizvod ovih sila i pomeranja njihovih napadnih tačaka.

Pod mehaničkom snagom štapa podrazumevaćemo rad spoljnih sila u jedinici vremena

$$W = \int_L \bar{\rho} \delta_{ij} F^i x^j ds + \delta_{ij} \left( \Pi^i_J \dot{x}^j_J + \Pi^i_K \dot{x}^j_K \right) \quad (D.2.3)$$

Ovde su  $F^i$  spoljne sile po jedinici mase štapa, dok su  $\Pi^i_J$  i  $\Pi^i_K$

fizičke koordinate spoljnih sila koje deluju na krajevima štapa J i K .

### D.2.3 Unutrašnja energija

Unutrašnja energija štapa data je izrazom

$$U = \int_L \bar{\rho} \epsilon \, ds \quad (D.2.4)$$

gde je  $\epsilon$  unutrašnja energija po jedinici mase štapa.

### D.2.4 Kinetička energija

Kinetičku energiju štapa definisaćemo na uobičajeni način

$$V = \frac{1}{2} \int_L \bar{\rho} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \, ds \quad (D.2.5)$$

### D.2.5 Toplotna energija

Toplotna energija koju štap prima ili otpušta u jedinici vremena sastoji se od toplotnog fluksa  $\bar{q}_J$  i  $\bar{q}_K$  na krajevima štapa, i toplotnog izvora  $r$  po jedinici mase štapa:

$$Q = \int_L \bar{\rho} r \, ds + \bar{q}_J + \bar{q}_K \quad (D.2.6)$$

### D.2.6 Entropija

Slično kao za membranu, napišaćemo da je

$$H = \int_L \bar{\rho} \eta \, ds \quad (D.2.7)$$

Ukupna proizvodnja entropije biće

$$\Gamma = \frac{dH}{dt} - \int_L \bar{\rho} \frac{r}{\theta} \, ds - \frac{\bar{q}_J}{\theta_J} - \frac{\bar{q}_K}{\theta_K} \quad (D.2.8)$$

gde su  $\theta_J$  i  $\theta_K$  apsolutne temperature u tačkama J i K .

## D.3 Globalni zakoni balansa

## D.3.1 Zakon o očuvanju energije

Identično kao kod membrana, aksiom o očuvanju energije napisaćemo u obliku

$$V + U = W + Q \quad (\text{D.3.1})$$

Zamenom (2.4), (2.5) i (2.6) u (1) dobićemo da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_L \bar{\rho} \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \right) ds &= \\ &= \int_L \bar{\rho} \left( \delta_{ij} F^i \dot{x}^j + r \right) ds + \delta_{ij} \left( \Pi_J^i \dot{x}_J^j + \Pi_K^i \dot{x}_K^j \right) \\ &\quad + \bar{q}_J + \bar{q}_K \end{aligned} \quad (\text{D.3.2})$$

Kada se poslužimo uslovima invarijantnosti pri superponiranim krutim kretanjima, iz (2) dobijamo:

## D.3.2 Zakon o balansu momenta količine kretanja

$$\frac{d}{dt} \int_L x^k \dot{x}^i ds = \int_L \bar{\rho} x^k F^i ds + x_J^k \Pi_J^i + x_K^k \Pi_K^i \quad (\text{D.3.3})$$

## D.3.3 Zakon o balansu količine kretanja

$$\frac{d}{dt} \int_L \bar{\rho} x^i ds = \int_L \bar{\rho} F^i ds + \Pi_J^i + \Pi_K^i \quad (\text{D.3.4})$$

## D.3.4 Zakon o očuvanju mase

$$\frac{d}{dt} \int_L \bar{\rho} ds = 0 \quad (\text{D.3.5})$$

## D.4 Drugi zakon termodinamike

$$\dot{H} = \int_L \bar{\rho} \frac{r}{\theta} ds + \frac{\bar{q}_J}{\theta_J} + \frac{\bar{q}_K}{\theta_K} \quad (\text{D.4.1})$$



## D.5 Lokalni zakoni balansa

Lokalni zakoni balansa za aksijalno napregnute štapove mogu da se izvedu na sličan način kao za membrane, a dobijeni izrazi su takodje slični, tako da ćemo ih samo registrovati u daljem tekstu.

### D.5.1 Zakon o očuvanju mase

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho} \sqrt{a_{\xi\xi}} = 0 \quad (\text{D.5.1})$$

### D.5.2. Zakon o balansu količine kretanja

Primenom (D.3,4) na element štapa, dobijamo granične uslove za štap

$$\Pi^i - x_{\xi}^i \Pi^{\xi\xi} \sqrt{a_{\xi\xi}} = 0 \quad (\text{D.5.2})$$

i jednačine kretanja

$$(x_{\xi}^i \Pi^{\xi\xi})|_{\xi} + \bar{\rho} F^i = \bar{\rho} \dot{x}^i \quad (\text{D.5.3})$$

U ovim izrazima je  $\Pi^{\xi\xi}$  tenzor aksijalne sile, koji je sa fizičkom aksijalnom silom  $\Pi$  povezan relacijom

$$\Pi = a_{\xi\xi} \Pi^{\xi\xi} \quad (\text{D.5.4})$$

### D.5.3 Zakon o balansu momenta količine kretanja

Za slučaj aksijalno naprignutog štapa, ovaj aksiom je lokalno identički zadovoljen.

### D.5.4 Zakon o očuvanju energije

Slično kao kod membrane, ovaj zakon može da se svēde na jednačinu balansa entropije

$$\bar{\rho} \dot{\theta} - \bar{q}^{\xi}|_{\xi} - \bar{\rho} h - \partial = 0 \quad (\text{D.5.5})$$

gde je

$$\partial \equiv \frac{1}{2} \Pi^{\xi\xi} \dot{a}_{\xi\xi} - \bar{\rho} (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) \quad (\text{D.5.6})$$

unutrašnja disipacija.

## D.6 Nejednačina Clausius - Dühema

$$\bar{\rho} \dot{\theta} - \bar{q}^{\xi}|_{\xi} - \bar{\rho} h + \frac{1}{\theta} \bar{q}^{\xi} \theta_{\xi} \geq 0 \quad (\text{D.6.1})$$

Na osnovu (5) dobijamo da je

$$\partial + \frac{1}{\theta} \bar{q}^{\xi\theta} \xi \geq 0 \quad (\text{D. 6. 2})$$

## D. 7 Konstitutivne jednačine

### D. 7.1 Termomehanički jednostavan materijal

Konstitutivne jednačine za štapove mogu da se izvedu na isti način kao sa membrane, tako da se može pokazati da je aksijalna sila

$$\Pi^{\xi\xi} = 2 \bar{\rho} D_{a_{\xi\xi}} \Psi \quad (\text{D. 7. 1})$$

i entropija

$$\eta = - D_{\theta} \Psi \quad (\text{D. 7. 2})$$

dok je unutrašnja disipacija

$$\partial = - \bar{\rho} \delta \Psi \quad (\text{D. 7. 3})$$

Opet analogno membranskom slučaju, imaćemo dva konstitutivna funkcionala, slobodne energije

$$\Psi = \int_{s=0}^{\infty} \Psi [ a_{\xi\xi}(t-s), \theta(t-s); a_{\xi\xi}(t), \theta(t) ] \quad (\text{D. 7. 4})$$

i toplotnog fluksa

$$\bar{q}^{\alpha} = \int_{s=0}^{\infty} \bar{q}^{\alpha} [ a_{\xi\xi}(t-s), \theta(t-s); a_{\xi\xi}(t), \theta(t), \theta_{\xi}(t) ] \quad (\text{D. 7. 5})$$

### D. 7.2 Linearan izotropan termoelastičan materijal

Može se pokazati da je za posmatrani materijal slobodna energija

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \Psi = & B \left[ \frac{1}{8} E - \frac{1}{2} E \alpha \theta - C \theta + \right. \\ & + \frac{Ea}{4A} (2\alpha \theta - 1) + \frac{1}{8} E (a/A)^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} E \alpha (1 - a/A) \theta + C \theta (1 - \ln \theta / \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{D. 7. 6})$$

dok je vektor toplotnog fluksa, prema Fourierovom zakonu.

$$\bar{q}^{\xi} = - B \kappa A \xi \xi \theta_{\xi} \quad (\text{D. 7. 7})$$

i povezan je sa fizičkim toplotnim fluksom  $\bar{q}$  relacijom

$$\bar{q} = \bar{q}^{\xi} \sqrt{A_{\xi\xi}}$$

Radi konciznosti u izrazu za slobodnu energiju, i dalje, koristimo oznake

$$A = A_{\xi\xi}; \quad a = a_{\xi\xi} \quad (D.7.8)$$

#### D.8 Konačni elementi štapova

Konačni element štapa se lako definiše kao segment između dva susedna preseka štapa.

Jednačine kretanja i provodjenja toplote izvode se i rešavaju na isti način kao i za membrane.

Da bi izbegli ponavljanje, registrovaćemo samo izraze za pojedine matrice metode konačnih elemenata, a za linearno termoelastičan materijal, koje će nam biti potrebne pri rešavanju ilustrativnih primera:

$$M^{Ii Jj} = \sum_e \int_{L_0} \rho_0 B_{ij} P^I P^J \sqrt{A} d\xi \quad (D.8.1)$$

$$S^{Ii Jj} = \sum_e \int_{L_0} \delta_{ij} P^I P^J \frac{EB}{A^2} \left[ \frac{1}{2} (a-A) - \alpha A (\theta - \theta_0) \right] \sqrt{A} d\xi \quad (D.8.2)$$

$$K^{Ii Jj} = \sum_e \int_{L_0} x_{\xi}^j x_{\xi}^i P^J P^I \frac{EB}{A^2} \sqrt{A} d\xi \quad (D.8.3)$$

$$L^{Ij} = - \sum_e \int_{L_0} x_{\xi}^i P^J P^I \frac{EB}{A} \alpha \sqrt{A} d\xi \quad (D.8.4)$$

$$Q^J = \sum_e \int_{L_0} P^J \rho_0 B r \sqrt{A} d\xi + \sum_e \bar{q}^J \quad (D.8.5)$$

$$R^{Jj} = \sum_e \int_{L_0} P^J \rho_0 B F^j \sqrt{A} d\xi + \sum_e \Pi^{Jj} \quad (D.8.6)$$

$$G^J = \int_{e L_0} \theta_{\xi} P_{\xi}^J B \kappa / \sqrt{A} d \xi \quad (D.8.7)$$

$$U^{IJ} = \int_{e L_0} P^I P^J C B \sqrt{A} d \xi \quad (D.8.8)$$

$$D^{IIJ} = \int_{e L_0} \theta x_{\xi}^i P_{\xi}^I P^J \frac{EB}{A^*} \alpha \sqrt{A} d \xi \quad (D.8.9)$$

$$F^{IIJ} = \int_{e L_0} \dot{\theta} x_{\xi}^i P_{\xi}^I P^J EB \alpha / \sqrt{A} d \xi + \\ + \int_{e L_0} \theta \dot{x}_{\xi}^i P_{\xi}^I P^J EB \alpha / \sqrt{A} d \xi \quad (D.8.10)$$

$$H^{IJ} = \int_{e L_0} P_{\xi}^I P_{\xi}^J B \kappa / \sqrt{A} d \xi \quad (D.8.11)$$

U ovim izrazima  $B$  je poprečni presek štapa u referentnoj konfiguraciji.

## POPIS LITERATURE

1. T. P. Andjelić: Tenzorski račun, Naučna knjiga, Beograd 1973.
2. A. C. Eringen: Elastodynamics, Vol. 1, Finite Motions, Academic Press, New York 1974.
3. J. T. Oden: Finite elements of nonlinear continua, Mc Graw - Hill, New York 1972.
4. J. T. Oden: "Finite element applications in mathematical physics", The mathematics of finite elements and its applications, Academic Press, London 1973.
5. P. M. Naghdi: "The theory of shells and plates", Handbuch der Physik, Band VI a/2, Springer, Berlin, 1972.
6. R. Stojanović: Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma, Beograd 1965.
7. И.Ф. Образцов, Г.Г. Онанов: Строительная механика скошенных тонкостенных систем, Машиностроение, Москва 1973.
8. R. Aris: Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, 1962.
9. M. Soare: Application of finite difference equations to shell analysis, Pergamon, Oxford-Academieii, Bucharest, 1967.
10. H. S. Rutten: Theory and design of shells on the basis of asymptotic analysis, Rutten + Kruisman, Rijswijk, Holland, 1976.
11. G. A. Korn and T. M. Korn: Mathematical handbook for scientists and engineers, Mc Graw - Hill, New York 1961.
12. В. Новацкий: Теория упругости. Мир, Москва, 1975.
13. Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, Наука, Москва, 1969.

14. D. M. Trujillo: "The direct numerical integration of linear matrix differential equations using Padé approximations", *Int. J. num. Meth. Engng*, 9, 259-270 (1975)
15. Н.С. Бахвалов: Численные методы I, Наука, Москва 1973.
16. T. J. R. Hughes: "Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics", *Comput. Struct*, 6, 313-324 (1976)
17. I. Cormeau: "Numerical stability in quasi-static elasto/viscoplasticity", *Int. J. num. Meth. Engng*, 9, 109-127 (1975)
18. T. Belytschko, R. L. Chiapetta, and H. D. Bartel: "Efficient large scale non-linear transient analysis by finite elements", *Int. J. num. Meth. Engng*, 10, 579-596, (1976).
19. A. L. Gol'denveizer: "Geometric criteria for the membrane state of stress in elastic thin shells", *Problems of Continuum Mechanics*, SIAM, Philadelphia, 1961.
20. N. Hajdin: Štapovi sa tankim zidovima i otvorenim profilom, Geokarta, Beograd 1965.
21. N. Hajdin: Ograničena torzija tankozidnih štapova sa zatvorenim poprečnim presekom, Beograd, 1968.  
  
J. H. Argyris and S. Kelsey: *Modern Fuselage Analysis and the Elastic Aircraft*, London, Butterworths, 1963. (Originally published in a series of articles in *Aircraft Engineering* 1959).
23. M. Berković: Odredjivanje pomeranja i sila u sektoru avionskog trupa oslabljenom velikim otvorom, Saopštenje VTI, VS-243, Beograd, 1969.
24. J. Robinson, *Integrated Theory of Finite Element Methods*, London, Wiley, 1973.

25. M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin and L. J. Topp: "Stiffness and deflection analysis of complex structures", J. Aer. Sci., 23, 805-823, 1956.
26. R. H. Mac Neal, ed., The NASTRAN Theoretical Manual, (Level 15.5), The MacNeal-Schwendler Corp., Los Angeles, 1974.
27. M. Berković: Konačni elementi sa pretpostavljenim naponima unutar elementa i pomeranjima granica u ravnom problemu teorije elastičnosti i teorije elastičnih konstrukcija, Magistarski rad, PMF, 1974.
28. R. T. Haftka and J. C. Robinson: "Effect of out - of - planeness of membrane quadrilateral finite elements", AIAA J. 11, 742-744 and 1792
29. J. Robinson: "A Warped Quadrilateral Strain Membrane Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 1975.
30. G. Wempner and J. Aberson: "A formulation of inelasticity from thermal and mechanical concepts", Int. J. Solids Structures, 12, 705-721, 1976.
31. K. J. Bathe, E. Ramm and E. L. Wilson: "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis", Int. J. num. Meth. Engng, 9, 353-386, 1975.
32. R. Kao: "A comparison of Newton - Raphson methods and incremental procedures for geometrically nonlinear analysis", Computers and Structures, 4, 1091-1097, 1974.
33. J. F. Besseling: "Nonlinear analysis", World congress on finite element methods in structural mechanics, Bournemouth, 1975.
34. R. D. Henshell: "Thermal transients, displacements and stresses", World congress on finite element methods in structural mechanics, Bournemouth, 1975.
35. I. Fried, D. Malkus: "Finite element mass matrix lumping by

- numerical integration with no convergence rate loss",  
Int. J. Solids Structures, 2, 461-466, 1975.
36. R. D. Krieg, S. W. Key, "Transient shell response by numerical time integration",  
Int. J. num. Meth. Engng. 7, 273-286, 1973.
37. R. W. Hamming: Numerical methods for scientists and engineers, Mc Graw-Hill, New York, 1962.
38. I. Fried: "Numerical integration in the finite element method", Computers and structures, 4, 921-932.
39. J. Wilson : The finite element analysis of thin elastic shells, Arizona State University, Ph. D. 1973.
40. P. S. Jensen: "Stiffly stable methods for undamped second order equations of motion", SIAM J. Numer. Anal. 13, 549-563.
41. M. Berković: "General membrane isoparametric elements", World congress on finite element methods in structural mechanics, Bournemouth, 1975.
42. S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zeinkiewicz: "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements"  
Int. J. num. Meth. Engng. 2, 419-451 (1970).
43. В.М.Марченко: Температурные поля и напряжения в конструкции летательных аппаратов, Машиностроение, Москва, 1965
44. H. Schumann: Metallografie, Leipzig 1962.
45. И.И. Гольденблат: Нелинейные проблемы теории упругости, Наука, Москва, 1969
46. B. J. Lazan: "Damping of materials and members in structural mechanics, Pergamon, Oxford, 1968.
47. P. R. Miller: Displacement Method of Structural Analysis, BAC, Weybridge, 1970.
48. M. Berković: "Izoparametarski elementi čvrstih tela", Simpozijum o primeni me toda konačnih elemenata u tehnici, Vrnjačka Banja, 1975.



49. J. S. Archer: "Dynamic analysis", World congress on finite element methods in structural mechanics, Bournemouth, 1975.
50. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. M. Too: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, University of Wales, Swansea, 1970.
51. T. H. H. Pian: "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions", AIAA J., 2, 1333-1336 (1964).
52. M. Berković: "Proračun statičkih i dinamičkih karakteristika konstrukcija letelica metodom konačnih elemenata", I Jugoslovenski aerokosmonautički kongres, Beograd, 1973.
53. M. Berković: "Programi za strukturalnu analizu avionskih konstrukcija", II Jugoslovenski aerokosmonautički kongres, Zagreb, 1975.
54. Н.С. Ачеркан и др: Справочник машиностроителя, том 3, Машгиз, Москва, 1963.
55. W. Flügge: Stresses in shells, Springer, Berlin, 1960.
56. П.Г.Еремеев: Исследование предварительно-напряженной мембранной оболочки в форме гипара, Строительная механика 1975.
57. J. T. Oden: "Calculation of stiffness matrices for finite elements of thin shells of arbitrary shape" AIAA J., 6, 969-972.
58. D.G. Ashwell and R.H. Gallagher: "Finite elements for thin shells and curved members, Wiley, London, 1976.
59. J. T. Oden: An introduction to the mathematical theory of finite elements, Wiley, New York, 1976.

