P R E D G O V O R

Ovaj rad nosi naslov "Moore - Smith-ova konvergencija u opstoj topologiji",jer je ona ili predmet razmatranja ili glavno sredstvo u dokazima i konstrukcijama ovde provedenim.

Oznake su manje vise standardne,a uglavnom prema J.Kelley-u [2] , a terminologija onakva kakva je kod nas uobicajena u topologiji(Dj.Kurepa [1],Z.Mamuzic [1]).Posebno bi istakli da je prazan skup belezen sa ,komplement skupa A sa A',a zatvorenost od A sa A^{-}.

Inace,rad se deli na cetiri dela i u svakom delu numeracija definicija,lema i teorema pocinje iznova.Kad se citira neki rezultat van tog dela ,pise se i oznaka dela ,ovde rimski broj.Tako naprimer Teorema I.3 znaci da se nalazi u I delu i da je tamo po redu treca.

Literatura je navedena na kraju i u tekstu se nalaze samo imena autora sa oznakom rada nakoji se misli.

I. U V O D.

Predmet ovoga paragrafa je kratak istorijski osvrt i glavni rezultati iz Moore-Smith-ove konvergencije. Svi izlozeni stavovi su bez dokaza a dokazi se mo u naci u citiranoj literaturi. Terminoloski a i inace izlaganje sledi u mnogom J.L.Kelley-jevu knjigu [2] .

Jedan od osnovnih pojmova Matematike, pojam limesa moze se naci tu i tamo u, na prvi pogled, razlicitim vidovima. Najpre, obicno, dolazi pojam limesa niza realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, koji se definise kao realan broj a_0 sa svojstvom da za proizvoljno odabrani $\varepsilon > 0$, razlika $|a_n - a_0| < \varepsilon$ ako je n dovoljno veliko tj. ako je $n \geqslant N(\varepsilon)$. Limes realne funkcije f(x) u tacki $x = x_0$ je opet broj y_0 takav da je $|y_0 - f(x)| < \varepsilon$, za $|x - x_0| < \eta(\varepsilon)$. Odmah pada u oci razlika ali i velika slicnost izmedju ova dva pojma. Pri definiciji Riemann-ovog integrala nailazimo opet na jedan pojam limesa, gde umesto dovoljno velikog prirodnog broja ili dovoljno bliske tacke, imamo limes uzet preko sve finijih i finijih podela. Ovaj treci slucaj je bas povod za jednom sirom definicijom klasicnog limesa, a slicnost i zajednicke osobine koje ono svi imaju cine da idu u jedan te isti okvir. Takvu jednu opstu teoriju limesa dali su 1922 god. americki matematicari E.H.Moore i H.L.Smith [1] , koja je danas poznata pod imenom Moore-Smith-ove konvergencije, dok su problemi integracije bas bili prvi povod za ovu teoriju (Moore [1]).

Pocecemo sa ovde osnovnom definicijom usmerenog skupa.

<u>Definicija 1.</u> <u>Binarna relacija</u> $\geqslant$ <u>usmerava skup</u> D, <u>ako je</u> D <u>neprazan i ako</u>:

(a) $\geqslant$ <u>je tranzitivna, tj. za</u> m, n <u>i</u> p <u>iz</u> D, <u>takve da je</u> $m \geqslant n$, $n \geqslant p$ <u>sledi</u> $m \geqslant p$;

(b) $\geqslant$ <u>je refleksivna tj. za</u> $m \in D$, $m \geqslant m$; <u>i</u>

(c) <u>Za</u> m <u>i</u> n <u>iz</u> D, <u>postoji</u> p <u>iz</u>D <u>takvo da je</u> $p \geqslant m$ <u>i</u> $p \geqslant n$.

<u>Usmereni skup je par</u> $(D, \geqslant)$ <u>takav da</u> $\geqslant$ <u>usmeruje</u> D.

Skup prirodnih i realnih brojeva sa uobicajenim poredkom po velicini su usmereni skupovi. Familija okolina neke tacke u topoloskom prostoru je usmerena sa relacijom $\subseteq$ (tj. podskupovi slede za skupom koji ih sadrzi). Familija svih konacnih podskupova nekog skupa je usmerena relacijom $\supseteq$ (tj. nadskupovi slede). Za interval $[a,b]$ realnih brojeva skup svih konacnih podela se moze usmeriti i to na dva nacina. Obelezimo duzinu intervala I sa $|I|$, a za podelu $\mathcal{S}$, neka je $\|\mathcal{S}\|$ maksimum svih $|I|$, gde I prolazi kroz sve podeone intervale. Tada se familija svih konacnih podela intervala $[a,b]$ moze usmeriti sa:

(I) $\mathcal{S} \geqslant_1 \mathcal{S}'$ ako je $\mathcal{S}$ finija podela od $\mathcal{S}'$, tj. $\mathcal{S}$ sadrzi sve podeone tacke od $\mathcal{S}'$.

(II) $\mathcal{S} \geqslant_2 \mathcal{S}'$ ako je $\|\mathcal{S}\| \leqslant \|\mathcal{S}'\|$.

<u>Definicija 2.</u> <u>Generalisani niz</u> $\{S_n, n \in D\}$ <u>u skupu</u> X, <u>je preslikavanje usmerenog skupa</u> D <u>u</u> X.

Cesto cemo umesto celog generalisani niz, pisati krace g.niz. Napomenimo da u specijalnom slucaju kad je D skup prirodnih, a X skup realnih brojeva dobijamo obicni realni niz. Sama rec niz ostaje za onaj slucaj kada je D skup prirodnih brojeva.

Navescemo sad neke pojmove koji su podesni u radu sa generalisanim nizovima. Kazemo da je g.niz $\{S_n, n \in D\}$, <u>u skupu</u> A ako je $S_n \in A$ za sve $n \in D$, da je <u>gotovo</u> u A ako postoji $m \in D$, takav da je $S_n \in A$ za $n \geqslant m$ i da je <u>frekventan</u> u A ako za svako $m \in D$ postoji $n \in D$ takvo da je $S_n \in A$. Preko ovih pojmova definisacemo konvergentne generalisane nizove u skupovima koji imaju strukturu koja omogucuje da se govori o konvergenciji. Tako, naprimer, g.niz $\{S_n, n \in D\}$ u skupu realnih brojeva konvergira ka realnom broju S_0 ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n(\varepsilon) \in D$ takvo da je $|S_n - S_0| < \varepsilon$, za $n \geqslant n(\varepsilon)$. Kad je f(x) realna funkcija definisana na intervalu $[a,b]$ realnih brojeva, $M(I)$ njen supremum a $m(I)$ infimum nad I, tada su za podelu $\mathcal{S}$,

$$D(\mathcal{S}) = \sum\{|I|\cdot M(I) : I \in \mathcal{S}\} \text{ i } d(\mathcal{S}) = \sum\{|I|\cdot m(I) : I \in \mathcal{S}\},$$

respektivno gornja i donja Darboux-ova suma. Generalisani nizovi

$$\{D(\mathcal{S}), \mathcal{S} \in \mathfrak{S}\} \quad \text{i} \quad \{d(\mathcal{S}), \mathcal{S} \in \mathfrak{S}\}$$

gde je $\mathcal{S}$ familija podela, konvergiraju i njihovi limesi su gornji i donji Darboux-ov integral, bez obzira dali je $\mathcal{S}$ usmereno na (I) ili (II) nacin.

Moore-Smith-ovu konvergenciju u Opstoj Topologiji prvi je primenio G.Birkhoff [1], 1937 god., pa dalje J.W.Tukey [1] i J.L.Kelley [1].

Tako se konvergencija u topologiji moze uzeti za primitivni pojam, odrediti pri kojim uslovima data konvergencija odredjuje topologiju i koju, kao i dati svi pojmovi i uslovi iz topologije u terminima konvergencije. Cesto je taj put laksi a dokazi su jednostavniji, naprimer kao sto je to bio slucaj sa Tihonovom teoremom o kompaktnosti topoloskog proizvoda (Kelley [1]), koja je dokazana isto tako kratko i jednostavno kao i kad se upotrebe filtri koji su u mnogom uporedna teorija Moore-Smith-ovoj konvergenciji, s tim sto je ova poslednja prirodnija i intuitivnija.

Nastavljamo sa definicijom konvergentnog generalisanog niza u topoloskom prostoru.

<u>Definicija 3. Generalisani niz</u> $\{S_n, n\in D\}$ <u>u topoloskom prostoru</u> $(X,\mathcal{T})$, <u>konvergira ka tacki</u> $S\in X$, <u>ako i samo ako je gotovo u svakoj</u> $\mathcal{T}$<u>-okolini tacke</u> S.

U tom slucaju pise se,

$$\lim_{n\in D} S_n = S$$

ili

$$S_n \longrightarrow S \quad (\text{po topologiji } \mathcal{T}),$$

pri tom izostavljajuci oznaku za topologiju odn. oznaku za usmereni skup kad je jasno o kojim se radi.

Napomenimo da jedan generalisani niz moze da konvergira vise nego jednoj tacki. Naprimer, ako je X topoloski prostor sa indiskretnom topologijom tj. ako su jedini otvoreni skupovi ceo prostor X i prazan skup Λ, tada niz $\{x_n, n\in N\}$ konvergira svakoj tacki iz X.

Naredna teorema dovodi u vezu konvergenciju sa pojmovima tacaka nagomilavanja, adherentnih tacaka, zatvorenosti odn. otvorenosti.

<u>Teorema 1. Neka je X topoloski prostor. Tada</u>

(I) Tacka a je tacka nagomilavanja skupa $A \subset X$ ako i samo ako postoji generalisani niz u $A \setminus \{a\}$ koji konvergira ka a.

(II) Tacka a je u zatvorenosti skupa $A \subset X$ ako i samo ako postoji generalisani niz u A koji konvergira ka a.

(III) Skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako nijedan generalisani niz u A ne konvergira nijednoj tacki iz $X \setminus A$.

Dokaz ove i svih daljih teorema u ovom paragrafu moze se naci, naprimer, kod Kelley-a [2].

Gore smo napomenuli da jedan generalisani niz moze konvergirati ne samo jednoj tacki, pa je zato od interesa videti u kojim prostorima konvergiraju samo jednoj tacki jer su tada podesniji za upotrebu a i sami pojam konvergencije je sadrzajniji. Na to nam daje odgovor sledeca

Teorema 2. Jedan topoloski prostor je Hausdorff-ov ako i samo ako svaki konvergentni generalisani niz u tom prostoru konvergira samo jednoj tacki.

Dakle, u slucaju Hausdorff-ovih prostora iz $\lim\limits_{n\in D} x_n = x_1$ i iz $\lim\limits_{n\in D} x_n = x_2$, sledi da je $x_1 = x_2$, gde je znak jednakosti upotrebljen u smislu identicnosti.

Za sledecu definiciju podsetimo se da za familiju skupova $\{D_a : a\in A\}$ direktni proizvod je skup $X\{D_a : a\in A\}$, svih funkcija d na A takvih da je $d_a = d(a)$ clan od D_a za svako $a\in A$.

Definicija 4. Proizvod usmerenih skupova $(D_a, \geqslant_a)$, $a\in A$, je direktni proizvod

$$(X\{D_a : a\in A\}, \geqslant),$$

gde za dva clana d i e iz ovog proizvoda $d \geqslant e$ ako i samo ako je $d_a \geqslant_a e_a$ za svako $a\in A$.

Neka je $\{x_{mn}, n\in N\}$ niz za svako $m\in N$ i neka $x_{mn} \to x_m$, a niz $\{x_m, m\in N\}$ neka takodje konvergira ka x_0, tj. $x_m \to x_0$. Postavlja se pitanje da se nadje niz sastavljen od elemenata x_{mn} koji bi konvergirao ka x_0. No, to nije uvek moguce i tu su potrebni generalisani nizovi. Navedimo jedan, ne bas elementaran primer, da obicni nizovi nisu dovoljni u ovoj konstrukciji. Neka je

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

niz realnih funkcija koje pripadaju prvoj Baire-ovoj klasi i konvergiraju tacka po tacka funkciji f_0 koja pripada drugoj Baire-ovoj klasi. Ova konvergencija je konvergencija u Tihonovljevoj topologiji topoloskog proizvoda $X\{R_a ; a\in R\}$, $R_a = R =$ skupu realnih brojeva sa uobicajenom topologijom. Za funkciju f_m neka je $\{f_{nm}\}$ niz neprekidnih funkcija koje konvergiraju ka f_m, za $m = 1, 2, \ldots$. Tada svaki konvergentni niz sastavljen od funkcija f_{nm}, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, konvergira funkciji koja je najvise prve klase i prema tome ne moze da konvergira ka f_0 .

<u>Teorema 3. Neka je</u> E <u>usmereni skup, neka</u>

$$\{x_{\alpha\eta}, \alpha^\eta \in A^\eta\}, \ \eta \in E$$

<u>bude familija usmerenih skupova takvih da</u>

$$x_{\alpha\eta} \longrightarrow x^\eta \ \text{ i } \ x^\eta \longrightarrow x_0 ,$$

<u>u nekom topoloskom prostoru. Neka je</u>

$$F = (X\{A^\eta : \eta \in E\}, \geqslant)$$

<u>i za</u> $f\in F$ <u>, neka je</u> $x_{(\eta, f)} = x_{f(\eta)}$. <u>Tada niz</u>

$$\{x_{(\eta,f)}, (\eta, f)\in E\times F\}$$

<u>konvergira ka</u> x_0 .

Gornjoj teoremi odgovara sledeci dijagram, koji pitoresno pokazuje njen sadrzaj,

$$\begin{tikzcd} x_{\alpha\eta} \arrow[r, "\alpha^\eta"] \arrow[dr, "x_{(\eta,f)}"'] & x^\eta \arrow[d, "\eta"] \\ & x_0 \end{tikzcd}$$

Ako na realnoj pravoj jedan niz ima tacke nagomilavanja uvek mozemo izdvojiti podniz koji konvergira svakoj posebno. Medjutim u nekim topoloskim prostorima to nije moguce ako ostanemo pri uobicajenim pojmovima podniza, pa je taj pojam prosiren tako da se u svakom topoloskom p prostoru moze dati slican iskaz (Kelley [1]).

Za jedan usmereni skup D, skup $D_0 \subset D$ je <u>kofinalan</u> sa D ako za svaki $d\in D$ postoji $d'\in D_0$, takav da je $d' > d$. Prirodno je podnizom g. niza $\{x_n, n\in D\}$ smatrati g. niz $\{x_n, n\in D_0\}$ koji ide preko kofinalnih skupova sa D. Ali oni nazalost nisu dovoljni za sve potrebe topologije, tacnije radeci samo sa njima ne mogu se preneti neki stavovi o nizovima inace poznati za metricke prostore. Tako ima primera gde niz ima tacku nagomilavanja ali nijedan podniz ne konvergira joj. (Arens [1]). Sledeca definicija podniza koja potice od J.L.Kelley-a [1] , dovoljna je za skoro sve potrebe.

Definicija 5. Generalisani niz $\{x_{\alpha_\beta}, \beta \in B\}$ je generalisani podniz generalisanog niza $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ ako za svako $\alpha_0 \in A$ postoji $\beta_0 \in$ takvo da je $\alpha_\beta \geqslant \alpha_0$ za $\beta \geqslant \beta_0$.

I sledeca lema potice od J.L.Kelley-a [1] .

Lema 1. Neka $\{S_n, n \in D\}$ bude generalisani niz takav da je frekventan u svakom clanu A familije skupova $\mathcal{A} = \{A\}$, koja je zatvorena s obzirom na konacno presecanje. Tada postoji generalisani podniz ovog generalisanog niza koji je gotovo u svakom $A \in \mathcal{A}$.

Jedna tacka x topoloskog prostora X je kvazi-granicna (engleski : cluster point) za neki generalisani niz ako je ovaj frekventan u svakoj njenoj okolini.

Teorema 4. Tacka x topoloskog prostora X je kvazi-granicna tacka generalisanog niza $\{x_n, n \in D\}$ ako i samo ako neki generalisani podniz ovoga niza konvergira ka x.

Napomenimo da se ova teorema ne moze dobiti ogranicavajuci se na kofinalne podskupove.

Naredna teorema je posebno vazna jer vezuje skup kvazi-granicnih tacaka za operator zatvorenosti.

Teorema 5. Neka $\{x_n, n \in D\}$ bude generalisani niz u nekom topoloskom prostoru i za svako $n \in D$ neka $A_n = \{x_m : m \geqslant n\}$
Tada je x kvazi-granicna tacka ovog niza ako i samo ako pripada skupu

$$\bigcap \{\bar{A_n} : n \in D\}$$

Cesto se desava da se prvo uvede neka konvergencija pa da se onda pokusava da izuci trazeci topoloski prostor u kome bi ova konvergencija bila konvergencija u topologiji tog prostora. Tako su uvedene , konvergencija tacka po tacka, konvergencija po meri, u srednjem itd. pa su posle nadjene odgovarajuce topologije odnosno metrike u poslednja dva slucaja.

Ima medjutim slucajeva kada jedna konvergencija ne mora biti konvergencija u smislu neke topologije.Zato je od interesa videti sta su bitne osobine konvergentnih generalisanih nizova u topoloskim prostorima.Konvergenciju u topoloskom prostoru karakterisu ove osobine:

(a) Ako je $\{S_n, n \in D\}$ generalisani niz takav da je $S_n = S_0$, za svako $n \in D$,tada $S_n \longrightarrow S_0$.

(b)Ako $\{S_n, n \in D\}$ konvergira ka S_0 ,konvergira ka S_0 ,i svaki njegov generalisani podniz.

(c) Ako $\{S_n, n \in D\}$ ne konvergira ka S_0 ,postoji generalisani podniz ovog niza,ciji nijedan generalisani podniz ne konvergira ka S_0.

(d) Neka je E usmereni skup, $\{S_{\alpha\eta}, \alpha\eta \in A\eta\}$ generalisani niz koji konvergira ka S_η ,a generalisani niz $\{S_\eta, \eta \in E\}$ konvergira ka S_0 ,tada $\{S_{(\eta,f)}, (\eta,f) \in E \times F\}$ konvergira ka S_0 .(Teorema 3.).

Ako na skupu X imamo zadatu neku konvergenciju,odnosno ako znamo dali neki generalisani niz u X konvergira nekoj tacki ili ne,i ako ta konvergencija,obelezimo je sa C,ispunjava gornje uslove:(a),(b),(c) i (d) kazacemo da je na X zadata Klasa konvergencije.Tada govorimo da neki g. niz $\{S_n, n \in D\}$ C-konvergira ka S_0 i pisemo

$$C-\lim_n S_n = S_0 \quad \text{ili} \quad S_n \xrightarrow{C} S_0$$

Naredna teorema pokazuje da samo klasa konvergencije odredjuje neku topologiju.

Teorema 6.Neka je C klasa konvergencije na skupu X,za vsaki $A \subset X$, neka $\tau(A)$ bude skup onih tacaka $x \in X$ takvih da postoji generalisani niz u A C-konvergenten ka x.Tada je τ operator zatvorenosti i generalisani niz $\{S_n, n \in D\}$ C-konvergira ka S_0 ako i samo ako konvergira ka S_0 u topologiji prideljenoj skupu X preko operatora τ .

Kao primer konvergencije koja ne odredjuje topologiju mozemo navesti C_1-zbirljivost.Niz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ realnih brojeva je C_1-zbirljiv ako postoji $\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.Ovaj postupak zbirljivosti je permanentan tj.ako jedan niz konvergira onda je i C_1-zbirljiv i to ka istom broju kome konvergira.Niz 1,0,1,0,1,0,... je C_1-zbirljiv ka broju $1/2$.
Medjutim $a_1, a_3, \dots, a_{2n+1}, \dots$,odn.1,1,1,.... je C -zbirljiv

a podniz $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ odn. 0,0,0,... je C_1-zbirljiv ka 0. Dakle, nije ispunjen uslov (b) i C_1-zbirljivost se ne moze uzeti za konvergenciju ni po kojoj topologiji.

Kompaktnost u terminima konvergencije izrazava sledeca

Teorema 7. Topoloski prostor X je kompaktan ako i samo ako svaki generalisani niz u X ima kvazi-granicnu tacku.

Odnosno, X je kompaktan ako i samo ako svaki generalisani niz u X ima konvergentan generalisani podniz.

II. ISPREPLETANI NIZOVI

Za dva niza $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$, ponekad je potrebno naci treci koji ima one i samo one tacke nagomilavanja koje su to vec za date nizove $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$. To se postize tako sto se formira isprepletani niz

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$$

koji se moze napisati preko opsteg clana, kao

$$z_n = \begin{cases} x_{n+1/2} & \text{, za } n \text{ neparno} \\ y_{n/2} & \text{, za } n \text{ parno.} \end{cases}$$

Slicno mozemo definisati isprepletane generalisane nizove za dva data generalisana niza $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ i $\{y_\beta, \beta \in B\}$, stavljajuci

$$z_{(\alpha,\beta,n)} = \begin{cases} x_\alpha & \text{, za } n \text{ parno} \\ y_\beta & \text{, za } n \text{ neparno,} \end{cases}$$

pri cemu je $(\alpha, \beta, n) \in A \times B \times \mathcal{N}$. I za g.nizove vazi

Teorema 1. <u>Za dva generalisana niza $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ i $\{y_\beta, \beta \in B\}$ isprepletani niz $\{z_{(\alpha,\beta,n)}, (\alpha,\beta,n) \in A \times B \times \mathcal{N}\}$ ima za kvazi-granicne tacke one i samo one koje su to vec za date generalisane nizove.</u>

<u>Dokaz</u>. Oznacimo sa $2\mathcal{N}$ odn. $2\mathcal{N}+1$ skup parnih odn. neparnih prirodnih brojeva, pa su tada usmereni skupovi

$$A \times B \times (2\mathcal{N}) \quad \text{i} \quad A \times B \times (2\mathcal{N}+1)$$

kofinalni sa $A \times B \times \mathcal{N}$, te ce g.podnizovi

$$\{z_{(\alpha,\beta,2n)}\} \quad \text{i} \quad \{z_{(\alpha,\beta,2n+1)}\}$$

imati iste kvazi-granicne tacke kao i g.nizovi $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$, $\{y_\beta, \beta \in B\}$ respektivno.

Ostaje da pokazemo da su kvazi-granicne tacke isprepletanog niza, kvazi granicne tacke bar jednog od datih tj. ako z nije kvazi granicna tacka nijednog od nizova $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$, $\{y_\beta, \beta \in B\}$, nije ni niza $\{z_{(\alpha,\beta,n)}\}$. No, po pretpostavci postoji okolina U tacke z takva da

$$x_\alpha \,\overline{\in}\, U, \ za\ \alpha \geqslant \alpha_U \ i\ y_\beta \,\overline{\in}\, U, \ za\ \beta \geqslant \beta_U,$$

i tada ocigledno

$$z_{(\alpha,\beta,n)} \in U, \text{ za } (\alpha,\beta,n) \geq (\alpha_V, \beta_V, 0)$$

sto znaci da z nije kvazi-granicna tacka za $\{z_{(\alpha,\beta,n)} ; (\alpha,\beta,n) \in A\times B\times N\}$.

q.e.d.

Sve ovo vazi i za slucaj konacno mnogo generalisanih nizova,

$$\{z_{\alpha_i}, \alpha_i \in A_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

ciji se ispreplet ani niz moze definisati kao g. niz

$$\{z_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,n)}, (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times N\}$$

gde je

$$z_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,n)} = x_{\alpha_i} \quad \text{,ako je } n \equiv i \ (\mathrm{mod}\ k)$$

Skup svih kvazi-granicnih tacaka jednog generalisanog niza je,po Teoremi I.5.,zatvoren pa je prirodno pitanje dali za dati zatvoreni skup postoji generalisani niz kome bi tacke tog skupa i samo one bile kvazi-granicne tacke.U slucaju jednetacke niz koji bi konvergirao toj tacki sastojao bi se od elemenata proizvoljno odabranih u nekom sistemu okolina te tacke pri cemu bi okoline bile usmereni skup,usmeren inkluzijom. Za slucaj proizvoljnog zatvorenog skupa potreban je pojam ispreplетanog generalisanog niza.Posmatrajmo familiju g. nizova

$$\{x_{\alpha\eta} ; \alpha^\eta \in A^\eta\}, \quad \eta \in E,$$

gde je i E usmeren skup.Neka je,dalje,F skup svih preslikavanja skupa E u $X\{A^\eta, \eta \in E\}$ i oznacimo sa f proizvoljno takvo preslikavanje.Posmatrajmo jos skup $N \times E$ koji cemo usmeriti stavljajuci

$$(n,\eta) \prec (n',\eta') \Longleftrightarrow n < n' \quad \text{ili} \quad n = n', \ \eta < \eta'.$$

Ovaj skup ovako usmeren obelezavacemo sa $\widetilde{N\times E}$,jer ce se podrazumevati da je direktni proizvod uvek usmeren prema Definiciji I.4.

<u>Definicija 1.</u> <u>Za generalisane nizove</u>

$$(*) \quad \{x_{\alpha\eta}, \alpha^\eta \in A^\eta\}, \ \eta \in E$$

<u>njihov ispreplеtani niz s obzirom na E,je</u>

$$(**) \quad \{x_{((n,\eta),f)}, ((n,\eta),f) \in ((\widetilde{N\times E})\times F)\},$$

<u>pri cemu je</u>

$$x_{((n,\eta),f)} = x_{f(\eta)}$$

Dalje ce nam trebati i pojam ekvivalentnih nizova,koji bi se mogao uzeti za definiciju jos opstijeg pojma podniza nego sto je onaj u Definiciji I.5. Ekvivalentni nizovi zadovoljavaju uslov da ako je jedan od njih gotovo u nekoj okolini to je i drugi, a to je osobina koja je najbitnija pri definiciji podniza (Kelley [2]). Umesto uopstavanja pojma podniza mi cemo radije dati sledecu definiciju,

Definicija 2. Zaadva generalisana niza

$$\{x_\alpha, \alpha \in A\} \text{ i } \{x_\beta, \beta \in B\}$$

kazacemo da su ekvivalentni ako su identicni skupovi $\{x_\alpha\}$ i $\{x_\beta\}$, i posmatrani nizovi imaju iste skupove ~~kvazigranicnih~~ tacaka.

Neka je $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ jedan generalisani niz a B proizvoljan usmereni skup, neka je dalje $A \times B$ proizvod usmereni skup skupova A i B, i neka je

$$\{x_{(\alpha,\beta)}, (\alpha,\beta) \in A \times B\}$$

takav generalisani niz da je $x_{(\alpha,\beta)} = x_\alpha$. Ova dva niza su ekvivalentni. Drugi je podniz prvoga kako je to lako proveriti dok obrnuto nije. No, oni imaju isti skup kvazi-granicnih tacaka, jer ako je x kvazi-granicna tacka niza $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$, to za okolinu U od x i proizvoljno α_0 , postoji $\alpha > \alpha_0$ i $x_\alpha \in U$. Neka je U proizvoljna okolina od x, dalje (α_0, β_0) proizvoljni elemenat od $A \times B$, tada postoji $\alpha > \alpha_0$ da je $x_\alpha \in U$. No tada je

$$x_{(\alpha,\beta_0)} = x_\alpha \in U, \ (\alpha,\beta_0) \geqslant (\alpha_0,\beta_0)$$

Za slucaj dva niza, ispreletani niz sadrzi date u vidu podnizova. Slicno je i u opstem slucaju kao sto pokazuje sledeca

Lema 1. Ispreletani niz (**) sadrzi podnizove ekvivalentne nizovima (*). (Definicija 1.)

Dokaz. Nizu $\{x_{\alpha\eta'}, \alpha^{\eta'} \in A^{\eta'}\}$ ekvivalentan je niz $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$, gde je η' fiksirano. Skup $(\widetilde{N \times \eta'}) \times F$ je kofinalan sa $(\widetilde{N \times E}) \times F$, pa je drugi od ovih g. nizova podniz ispreletanog niza.

Neka je x_0 kvazi-granicna tacka g. niza $\{x_{\alpha\eta'}, \alpha^{\eta'} \in A^{\eta'}\}$. Pokazimo da je to i niza $\{x_{((n,\eta'),f)} : ((n,\eta'),f) \in \widetilde{N \times \eta'} \times F\}$. Za proizvoljnu okolinu U tacke x_0 , i za proizvoljni

$$((n,\eta'),f_0) \in (\widetilde{N \times \eta'}) \times F, \ f_0(\eta') = \alpha_0^{\eta'}$$

mozemo odabrati $\alpha_1^{\eta'} > \alpha_0^{\eta'}$, takvo da je $x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U$. Uzmemo li

$f_1 = \begin{cases} f_0 \text{, svuda drugo} \\ \alpha_1^{\eta'} \text{, za } \eta = \eta' \end{cases}$,tada

$$x_{((n_0,\eta'),f_1)} = x_{f_1(\eta')} = x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U$$

i pri tome je

$$((n_0,\eta'),f_1) > ((n_0,\eta'),f_0) \quad u \quad (\widetilde{N \times \eta'}) \times F,$$

sto pokazuje da je x_0 kvazi-granicna tacka niza $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$.

Obrnuto,kad je x_0 kvazi-granicna tacka niza $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$,tada za proizvoljno $\alpha_0^{\eta'} \in A^{\eta'}$ i proizvoljnu okolinu U te tacke posmatrajmo $((n,\eta'),f_0) \in (\widetilde{N \times \eta'}) \times F$, $f_0(\eta') = \alpha_0^{\eta'}$.Po pretpostavci postoji

$$((n,\eta'),f_1) > ((n,\eta'),f_0) \;,\; f_1 > f_0$$

takvo da je

$$x_{((n,\eta'),f_1)} = x_{f_1(\eta')} = x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U.$$

No tada je

$$x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U \;,\; \alpha_1^{\eta'} > \alpha_0^{\eta'} \quad u \quad A^{\eta'}$$

<u>Teorema 2. Neka je u topoloskom prostoru</u> X,

$$\{x_{\alpha^\eta}, \alpha^\eta \in A^\eta\}, \; \eta \in E$$

<u>familija konvergentnih generalisanih nizova i neka</u>

$$x_{\alpha^\eta} \longrightarrow x^\eta$$

<u>Isprepletani niz</u> $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$ <u>ima za skup kvazi-granicnih tacaka,skup</u> $(\bigcup\{x^\eta : \eta \in E\})^-$ <u>,onda i samo onda kad je X regularan.</u>

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je X regularan.Prema Lemi 1.,isprepletani niz ima za kvazi-garnicne tacke svaki x^η , $\eta \in E$,a kako je skup kvazi-granicnih tacaka zatvoren to je

$$(\bigcup\{x^\eta : \eta \in E\})^-$$

podskup skupa svih kvazi-granicnih tacaka isprepletanog niza.Ostaje da pokazemo da su to sve tj.da ako

$$z \,\overline{\in}\, (\bigcup\{x^\eta : \eta \in E\})^-,$$

onda z nije kvazi-granicna tacka isprepletanog niza.Neka su U i V okoline tacke z i skupa $(\bigcup\{x^\eta, \eta \in E\})^-$,koje su disjunktne $U \cap V = \Lambda$ .Tada je V okolina za svako x^η , $\eta \in E$ pa postoji $\bar\alpha_\eta \in A^\eta$,takvo da je

$$x_{\alpha^\eta} \in V \qquad \text{za } \alpha_\eta \geqslant_\eta \bar\alpha_\eta$$

pri svakom $\eta \in E$ .Neka je $\bar f \in F$ tako izabrano da je $\bar f(\eta) = \bar\alpha_\eta$.

Tada je za

$$((n,\eta),f) \geqslant ((1,\eta),\bar f) \quad u \quad (\widetilde{N \times E}) \times F,$$

$$f_1 = \begin{cases} f_0 \text{ ,svuda drugo} \\ \alpha_1^{\eta'} \text{, za } \eta=\eta' \end{cases} \text{ ,tada}$$

$$x_{((n_0,\eta'),f_1)} = x_{f_1(\eta')} = x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U$$

i pri tome je

$$((n_0,\eta'),f_1) > ((n_0,\eta'),f_0) \text{ u } (\widetilde{N\times\eta'})\times F,$$

sto pokazuje da je x_0 kvazi-granicna tacka niza $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$.

Obrnuto, kad je x_0 kvazi-granicna tacka niza $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$, tada za proizvoljno $\alpha_0^{\eta'} \in A^{\eta'}$ i proizvoljnu okolinu U te tacke posmatrajmo $((n,\eta'),f_0) \in (\widetilde{N\times\eta'})\times F$, $f_0(\eta')=\alpha_0^{\eta'}$. Po pretpostavci postoji

$$((n,\eta'),f_1) > ((n,\eta'),f_0),\ f_1 > f_0$$

takvo da je

$$x_{((n,\eta'),f_1)} = x_{f_1(\eta')} = x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U.$$

No tada je

$$x_{\alpha_1^{\eta'}} \in U,\ \alpha_1^{\eta'} > \alpha_0^{\eta'} \text{ u } A^{\eta'}.$$

<u>Teorema 2. Neka je u topoloskom prostoru X,</u>

$$\{x_{\alpha^\eta},\ \alpha^\eta \in A^\eta\},\ \eta \in E$$

<u>familija konvergentnih generalisanih nizova i neka</u>

$$x_{\alpha^\eta} \longrightarrow x^\eta$$

<u>Ispreplетani niz</u> $\{x_{((n,\eta'),f)}\}$ <u>ima za skup kvazi-granicnih tacaka, skup</u> $(\bigcup\{x^\eta : \eta\in E\})^-$, <u>onda i samo onda kad je X regularan.</u>

<u>Dokaz</u>. Pretpostavimo da je X regularan. Prema Lemi 1., ispreplетani niz ima za kvazi-garnicne tacke svaki x^η, $\eta\in E$, a kako je skup kvazi-granicnih tacaka zatvoren to je

$$(\bigcup\{x^\eta : \eta\in E\})^-$$

podskup skupa svih kvazi-granicnih tacaka ispreplетanog niza. Ostaje da pokazemo da su to sve tj. da ako

$$z \,\overline{\in}\, (\bigcup\{x^\eta : \eta\in E\})^-,$$

onda z nije kvazi-granicna tacka ispreplетanog niza. Neka su U i V okoline tacke z i skupa $(\bigcup\{x^\eta, \eta\in E\})^-$, koje su disjunktne $U\cap V=\Lambda$. Tada je V okolina za svako x^η, $\eta\in E$ pa postoji $\bar\alpha_\eta \in A^\eta$, takvo da je

$$x_{\alpha^\eta} \in V \quad \text{za } \alpha_\eta \geqslant_\eta \bar\alpha_\eta$$

pri svakom $\eta\in E$. Neka je $\bar f \in F$ tako izabrano da je $\bar f(\eta)=\bar\alpha_\eta$. Tada je za

$$((n,\eta),f) \geqslant ((1,\eta),\bar f) \text{ u } (\widetilde{N\times E})\times F,$$

$$x_{((n,\eta),f)} = x_{f(\eta)} = x_{\alpha^\eta} \in V$$

jer je $f(\eta) \geqslant \bar{f}(\eta)$ tj. $\alpha^\eta \geqslant \bar{\alpha}^\eta$,sto dokazuje da je isprepletani niz gotovo u V i da z nije njegova kvazi-granicna tacka.

Pretpostavomo sad da isprepletani nizovi imaju za skup kvazi-granicnih tacaka uvek skup $(U\{x^\eta;\eta\in E\})^{-}$,a da prostor nije regularan pa to dovedimo do kontradikcije.Posto po pretpostavci X nije regularan,postoje zatvoreni skup $F\subseteq X$ i $z\in F$ takvi da se ne mogu razdvojiti disjunktnim okolinama,odnosno zatvorenost svake okoline od z sece F.No, tada postoji generalisani niz od elemenata iz U,

$$\{x_{\alpha^U},\ \alpha^U \in A^U\}$$

koji konvergira nekoj tacki iz F.Neka U prolazi nekom okolinskom bazom $\mathcal{U}$ tacke z.Isprepletani niz familije nizova

$$\{x_{\alpha^U};\alpha^U\in A^U\},\ U\in\mathcal{U}$$

ima,kao smo to pretpostavili,za skup kvazi-granicnih tacaka podskup skupa F.Taj niz je frekventan u svakoj proizvoljnoj okolini U tacke z,jer za

$$((n_0,U_0),f_0)\in(\mathcal{N}\times\mathcal{U})\times F$$

je

$$((n_0+1,U),f_0)\geqslant((n_0,U_0),f_0)$$

a

$$x_{((n_0+1,U),f_0)} = x_{f_0(U)} = x_{\alpha_0^U}\in U,$$

sto bi znacilo da je i tacka z kvazi-granicna tacka isprepletanog niza, a to je suprotno sa $z\in F$ .Time je i drugi deo teoreme dokazan.

Napomenimo da je bilo bitno uzeti konvergentne nizove u formulaciji prethodne teoreme,posto su onda oni gotovo u okolini skupa $\{\bigcup_\eta x^\eta\}^{-}$. Naprimer niz

$$1,\ 1/2,\ 2,\ 1/3,\ \ldots,$$

na Euklidskoj pravoj ima samo 0 za kvazi granicnu tacku ali nije gotovo u svakoj okolini 0.

<u>Primer 1.</u> U ovom primeru pokazacemo da u Hausdorff-ovom prostoru koji nije regularan ne vazi Teorema 2.Uzmimo Hausdorff-ov prostor koji se sastoji iz skupa realnih brojeva koji imaju za okoline one podskupove koji su okoline u Euklidskoj topologiji,sem tacke $x=0$ koja ima

za okoline intervale koji sadrze 0 i iz kojih je izbacen bilo koji prebrojiv skup tacaka razlicitih od 0. Tada ovaj prostor nije regularan jer naprimer tacka 0 i zatvoren skup $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, nemaju medjusobno disjunktne okoline. Dalje uzmimo tacke intervala $(1,2)$, $(1/2, 1)$ ..., $(1/n, 1/(n-1))$, ..., usmerene suprotno poredku po velicini realnih brojeva. Tada oni cine generalisane nizove koji redom kako su napisani konvergiraju ka $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$. Znaci skup tacaka kojima pojedinacno konvergiraju je $\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ koji je zatvoren pa je

$$\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}^{-} = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\},$$

dok njihov isprepletani niz konvergira jos i tacki 0. Zaista, za proizvoljno

$$((n_1, n_2), f_0) \in (\widetilde{N \times N}) \times F$$

i proizvoljnu okolinu U, tacke 0, koja sadrzi interval oko nule sa izuzetkom najvise prebrojivo mnogo tacaka, odabracemo $n_1' > n_1$ i n_2' tako da $(1/n_2', 1/(n_2'-1))$ lezi u okolini U sa izuzetkom pomenutih mozda najvise prebrojivo mnogo tacaka. Sad cemo odabrati $f_0' \geq f_0$ u F takvo da je $f_0'(n_2') \in U$. Tada je

$$x_{((n_1', n_2'), f_0')} = x_{f_0'(n_2')} = f_0'(n_2') \in U$$

$$((n_1', n_2'), f_0') \geq ((n_1, n_2), f_0) \quad u \quad (\widetilde{N \times N}) \times F.$$

U Teoremi I.7. dat je uslov kompaktnosti jednog topoloskog prostora u terminima konvergencije. Primenjujuci pojam isprepletanog niza dacemo taj uslov u drugoj formi, gde g. podnizovi ili kvazi-granicne tacke ne figurisu eksplicitno.

<u>**Teorema 3.** Topoloski prostor X je kompaktan ako i samo ako svaki generalisani niz $\{x_\alpha, \alpha \in D\}$ koji ima skup $X_0 \neq \Lambda$ za skup kvazi-granicnih tacaka, gotovo je u svakoj okolini od X_0.</u>

<u>Dokaz.</u> Neka je X kompaktan, $X_0 \subset X$ skup kvazi-granicnih tacaka nekog niza $\{x_\alpha, \alpha \in D\}$ i U proizvoljna otvorena okolina od X_0. Ako $\{x_\alpha\}$ nije gotovo u U on je frekventan u U'. Posto je U' zatvoren podskup od X, U' je kompaktan i ovaj bi generalisani niz imao generalisani podniz u U'. Ali po Teoremi I.7., imao bi tamo i kvazigranicnu tacku sto je suprotno pretpostavci da je X_0 skup svih njegovih kvazi-granicnih tacaka.

0 Obrnuto neka je svaki generalisani niz u X gotovo u svakoj okolini skupa njegovih kvazi graničnih-tačaka. Pretpostavimo da X nije kompaktan. Tada postoji pokrivač $\mathcal{U}$ čiji nijedan konačni podpokrivač $\mathcal{V}$ ne prekriva X. Tela konačnih podpokrivača $|\mathcal{V}|$ čine usmeren skup inkluzijom. Posmatrajmo g. niz

$$\{x_{\mathcal{V}},\ \mathcal{V}\in\{\mathcal{V}\}\},\quad x_{\mathcal{V}}\,\bar{\in}\,|\mathcal{V}|$$

Ovaj niz nema nijednu kvazi-graničnu tačku. Neka je $\{x_n, n\in\mathcal{N}\}$ niz u X takav da je $x_n = x_0$ za svako $n\in\mathcal{N}$. Ispreplétani niz

$$\{x_{(\mathcal{V},n,n)},\ (\mathcal{V},n,n)\in\{\mathcal{V}\}\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}\},$$

$$x_{(\mathcal{V},n,n)} = \begin{cases} x_{\mathcal{V}} & \text{, za n parno} \\ x_0 & \text{; za n neparno}\end{cases}$$

ima prema Teoremi 1., x_0 za jedinu kvazi-graničnu tačku. No, on nije gotovo u svakoj okolini U od x_0. Zaista neka je $\tilde{\mathcal{V}}$ onaj podpokrivač od $\mathcal{U}$ čije telo $|\tilde{\mathcal{V}}|$ sadrži x_0. Tada je $|\tilde{\mathcal{V}}|$ otvorena okolina od x_0, ali za proizvoljno

$$(\mathcal{V}_0, n_1, n_2)\in\{\mathcal{V}\}\times\mathcal{N}\times\mathcal{N}$$

uzmimo

$$(\mathcal{V}_0\cup\tilde{\mathcal{V}}, n_1, 2n_2)\in\{\mathcal{V}\}\times\mathcal{N}\times\mathcal{N},$$

pa je

$$x_{(\mathcal{V}_0\cup\tilde{\mathcal{V}}, n_1, 2n_2)} = x_{\mathcal{V}_0\cup\tilde{\mathcal{V}}}\,\bar{\in}\,|\mathcal{V}_0\cup\tilde{\mathcal{V}}|$$

pa ovaj član gornjeg niza tim pre nije ni u $|\tilde{\mathcal{V}}|$, što je suprotno sa pretpostavkom da je svaki g. niz gotovo u svakoj okolini skupa njegovih kvazi-graničnih tačaka.

q.e.d.

II. a-USMERENI SKUPOVI I a-GENERALISANI NIZOVI.

1. Definicija a-usmerenih skupova i a-generalisanih nizova i njihove osobine.

Ne samo da nizovi nisu dovoljni da opisu topologiju u opstim topoloskim prostorima, no nisu dovoljni ni generalisani nizovi preko usmerenih skupova ordinalnog tipa, tj. dobro uredjenih skupova, kako to pokazuje ovaj primer koji potice od G. Birkhoff-a [1] .

Neka je S skup karakteristicnih funkcija konacnih skupova na realnoj pravoj. Tada je zatvorenost skupa S s obzirom na topologiju induciranu konvergencijom tacka po tacka, skup S^{-} svih karakteristicnih funkcija. Medjutim, kako nije tesko pokazati, skup $\widetilde{S'}$ onih funkcija koje se mogu dobiti kao limesi generalisanih nizova preko usmerenih skupova ordinalnih brojeva sastoje se samo od karakteristicnih funkcija prebrojivih skupova.

Medjutim u prostorima koji zadovoljavaju prvu aksiomu prebrojivosti obicni nizovi su dovoljni, a izgleda uopste u jednom topoloskom prostoru dovoljni su oni generalisani nizovi koji imaju usmerene skupove kao sto su usmereni skupovi okolina pojedinih tacaka. Dakle, kardinalnost jednog usmerenog skupa nije tako vazna kao njegova "usmerenost" i kako G. Birkhoff istice [1] :"Jedan otvoren problem u opstoj topologiji je da se nadju najbitnije vrste usmerenih skupova. Naprimer medju nizovima (ovde je rec niz upotrebljena za generalisane nizove preko pocetnih komada skupa kardinalnih brojeva) izgleda da su samo oni tipa $(-\infty, w_0)$ i tipova $(-\infty, w(X))$ esencijalni."

Uvodjenjem pojma a-usmerenog skupa ciju cemo definiciju upravo dati izvrsicemo ustvari jednu klasifikaciju usmerenih skupova, ne prema kardinalnosti nego prema "jacini usmerenja", a dobro uredjeni skupovi dolaze otprilike kao oni usmereni skupovi koji pri najmanjoj kardinalnosti imaju najjace usmerenje.

Pri definisanju usmerenog skupa(Definicija I.1.)koji je parcijalno uredjeni skup pri cemu je uredjajna relacija refleksivna uzima se jos da svaka dva elementa,a odatle izlazi i njih konacno mnogo,imaju svog sledbenika.Upravo zahtevajuci tu vise dolazimo do ove definicije,

Definicija 1. Za proizvoljni beskonacni kardinalni broj a,jedan a-usmereni skup je par $(D, \leqslant)$,takav da binarna relacija $\leqslant$ a-usmeruje D,tj.da vaze,

(I).Ako su m,n i p elementi iz D takvi da je $m \geqslant n$ i $n \geqslant p$, tada $m \geqslant p$;

(II).Ako je $m \in D$,tada $m \geqslant m$;i

(III-a).Ako je $M=\{m\}$ podskup od D,takav da je kardinalni broj od M, $K M < a$,tada postoji $p \in D$ takav da je $p > m$ za svako $m \in M$.

Prema ovoj definiciji ispada da je svaki usmereni skup u smislu DefinicijeI.1.,jedan $\aleph_0$ -usmereni skup,a uslov (III-$\aleph_0'$) bio bi uslov (c) u ranijoj definiciji.Dalje je jasno da uslov (III-a) implicira uslov (III-b) ako su a i b dva kardinalnna broja takva da je $a \leqslant b$ .Napomenimo jos da ako je D jedan a-usmereni skup,tada je $KD \geqslant a$ .Zaista za skup $M \leq D$, $KM=b<a$,postoji $p \in M$, $p \in D$ pa je $KD \geqslant b$ i odatle $KD \geqslant \sup_{b<a}\{b\}=a$.

Za dalje ce nam trebati pojam regularnog i iregularnog kardinalnog broja (videti npr.P.S.Aleksandrov [1]) .Kardinalni broj a,koji se moze pretstaviti u vidu zbira $a=\sum\{a_\gamma : \gamma \in T\}$ kardinalnih brojeva $a_\gamma < a$ pri cemu je i $KT < a$ naziva se iregularnim,inace je regularan.Ako je $a=\aleph_\alpha$ iregularan tada $\aleph_{\alpha+1}$ je regularan i uopste su regularni svi alefi sa indeksom koji je ordinalni broj prve vrste,

Lema 1. Za iregularni kardinalni broj $a=\aleph_\alpha$,svaki a-usmereni skup je $\aleph_{\alpha+1}$ -usmeren.

Dokaz. Posto je a iregularan,mozemo ga pretstaviti u vidu sume

$$a=\sum\{a_\gamma : \gamma \in T\},\ a_\gamma<a,\ KT<a.$$

Neka je D a-usmeren a $D_0 \subset D$ takav podskup od D da je $KD_0=a$. Posto je a iregularan,skup D_0 mozemo razbiti na disjunktne podskupove D_γ ,takve da je $KD_\gamma=a_\gamma$ i da

$$D_0=\cup\{D_\gamma, \gamma \in T\},\ KT<a.$$

Za svako γ, mozemo odabrati $m_\gamma \in D$, takvo da bude

$$m_\gamma \geqslant m \quad \text{, za svako } m \in D_\gamma .$$

Time dobijamo skup

$$M = \{ m_\gamma : \gamma \in T \} \subset D \, , \, KM = KT < a .$$

No, sad i za skup M, posto je $KM < a$, mozemo odabrati $m_o \in D$, takvo da bude

$$m_o \geqslant m_\gamma \quad \text{, za svako } \gamma \in T$$

Za proizvoljno $m \in D_o$, postoji $\gamma \in T$ takvo da bude $m \in D_\gamma$ i $m \leqslant m_\gamma$, a posto je $m_\gamma \leqslant m_o$ i relacija $\leqslant$ tranzitivna sledi

$$m_o \geqslant m \quad \text{, za svako } m \in D_o \, .$$

Ovo dokazuje da D ispunjava uslov (III* $\aleph_{\alpha+1}$), pa je D $\aleph_{\alpha+1}$ -usmereni skup.

q.e.d.

Napomena. Prema Lemi 1. zapravo i ne postoje a-usmereni skupovi kad je a iregularan, pa bi se u Definiciji 1., moglo odmah pretpostaviti da je a regularan kardinalan broj.

Primer 1. Kada je a regularan, tada skup ordinalnih brojeva $(-\infty, \omega(a))$ je jedan a-usmereni skup, jer je tada $\omega(a)$ regularan ordinalni broj, t.j. ne postoji kofinalni podskup u $(-\infty, \omega(a))$ manjeg kardinalnog broja od a. Za iregularni kardinalni broj $\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \cdots + \aleph_n + \cdots$, skup ordinalnih brojeva $(-\infty, \omega_\omega)$ je samo $\aleph_0$ -usmeren jer posle $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ ne sledi nijedan ordinalni broj iz $(-\infty, \omega_\omega)$.

Lema 2. Svaki kofinalni podskup jednog a-usmerenog skupa D je i sam a-usmeren.

Dokaz. Prvo kofinalni podskup D_o a-usmerenog skupa D mora imati kardinalni broj $KD_o \geqslant a$, jer bi inace postojao $m_o \in D$, takav da bude $m_o \geqslant m$, za svaki $m \in D_o$. Za $M \subset D_o$ i $KM < a$, postoji $\alpha_M \in D$ i pri tome je $\alpha_M > \alpha$, za sve $\alpha \in M$. D_o, buduci da je kofinalni podskup od D ima element $\alpha_o \in D_o$ takav da bude $\alpha_o \geqslant \alpha_M$ i odatle izlazi

$$\alpha_o \geqslant \alpha \, , \; \text{za } \alpha \in M \subset D_o \, , \; \alpha_o \in D_o ,$$

sto dokazuje lemu.

Lema 3. Ako je $\{ D_\gamma : \gamma \in T \}$ familija a_γ -usmerenih skupova, onda proizvod usmereni skup, usmerenih skupova D_γ,

$$D = X\{D_\gamma : \gamma \in T\}$$

je a-usmereni skup, gde je $a = \inf\{a_\gamma : \gamma \in T\}$.

Dokaz. Oznacimo sa pR_γ, projekciju skupa D u koordinatni skup D_γ. Neka je $D_0 \subset D$ i $K D_0 < a$. Tada su

$$K\{pR_\gamma[D_0]\} < a_\gamma \text{ ,za svako } \gamma \in T$$

Za skup $pR_\gamma[D_0] \subset D_\gamma$, nadjimo $\alpha_\gamma \geqslant_\gamma pR_\gamma(\alpha)$, $\alpha \in D_0$, gde je $\alpha_\gamma \in D_\gamma$. Elemenat,

$$\alpha_0 = X\{\alpha_\gamma, \gamma \in T\} \in D$$

je takav da je za svako $\gamma \in T$,

$$pR_\gamma(\alpha_0) = \alpha_\gamma \geqslant_\gamma pR_\gamma(\alpha), \alpha \in D_0,$$

pa je $\alpha_0 \geqslant \alpha$, za svako $\alpha \in D_0$, sto dokazuje ovu lemu.

U Lemi 3. kardinalni broj a se ne moze zameniti vecim, jer ako je $\gamma_0 \in T$ takav da je $a = a_{\gamma_0}$, onda je za D_0 dovoljno uzeti podskup od D cije su projekcije na D_γ fiksirani jednoclani skupovi za svako $\gamma \in T$ sem $\gamma = \gamma_0$, u kom slucaju je projekcija ceo D_{γ_0}. Tada je $K D_0 = a$, ali ne postoji nijedan elemenat iz D koji bi sledio za svim elementima iz D_0. S druge strane ista lema pokazije da to sto je jedan skup D a-usmeren, ne stoji ni u kakvoj vezi sa kardinalnoscu tog skupasem sto naravno mora uvek biti $K'D \geqslant a$.

Definicija 2. Jedan a-generalisani niz je generalisani niz ciji usmereni skup je a-usmeren.

Tako su obicni nizovi $\aleph_0$ -generalisani nizovi, ali su, naprimer, $\aleph_0$ -generalisani nizovi i

$$\{d(S), S \in \mathcal{S}\} \text{ i } \{D(S), S \in \mathcal{S}\},$$

gde su d(S) i D(S) gornja i donja Darboux-ova suma. U primeru 2. ovog paragrafa imacemo $\aleph_1$ -generalisane nizove.

Pokazimo sada kako se Lema I.1., moze prosiriti i za slucaj a-generalisanih nizova.

Lema 4. Neka $\{S_n, n \in D\}$ bude a-generalisani niz, a $\mathcal{A}$ familija skupova takvih da

(a) $\{S_n, n \in D\}$ je generalisani niz frekventan u svakom skupu $A \in \mathcal{A}$.

(b) Presek podfamilije skupova iz $\mathcal{A}$,koja je kardinalnog broja $< \alpha$,sadrzi neki skup iz $\mathcal{A}$,

Tada postoji generalisani podniz datog generalisanog niza koji je a-generalisani niz i gotovo u svakom A iz $\mathcal{A}$.

Dokaz. Skup $\mathcal{A}$ usmerimo inkluzijom $\leq$,tj. A_1 sledi za A_2 ako je $A_1 \leq A_2$ .Oznacimo sa E skup parova (m,A), $m \in D$, $A \in \mathcal{A}$, takvih da je $S_m \in A$ .Skup E je zbog uslova(a) usmeren kao podskup usmerenog skupa $D \times \mathcal{A}$ .Dokazimo da je E a-usmereni skup.Prvo,prema uslovu (b) $(\mathcal{A}, \leq)$ je a-usmereni skup a po pretpostavci to je i D.Prema Lemi 3., $D \times \mathcal{A}$ je a-usmeren.Dokazimo,dalje,da je E kofinalan podskup od $D \times \mathcal{A}$ .Birajuci proizvoljno $(m_0, A_0) \in D \times \mathcal{A}$,prema uslovu (a) mozemo naci $n_0 \in D$,takvo da je $n_0 \geq m_0$ i $S_{n_0} \in A_0$ .No,tada je $(n_0, A_0) \in E$ i

$$(n_0, A_0) \geq (m_0, A_0) \text{ u } D \times \mathcal{A}$$

sto dokazuje kofinalnost.Prema Lemi 2.,izlazi da je E a-usmeren.

Neka je $N : E \longrightarrow D$,takvo preslikavanje da je $N(m,A) = m$. Tada je N izotono preslikavanje i skup vrednosti funkcije N je kofinalni podskup od D,posto je prema uslovu (a), $\{S_n, n \in D\}$ frekventan u svakom $A \in \mathcal{A}$ .Tako dobijamo podniz

$$\{S_{N(m,A)}, (m,A) \in D \times \mathcal{A}\}$$

generalisanog niza $\{S_n, n \in D\}$,pa pokazimo da je on trazeni podniz. Neka je A proizvoljni skup iz $\mathcal{A}$,a m iz D takav da je $S_m \in A$,odaberimo $(n,B) \in E$ koji sledi za (m,A),odn. $(n,B) \geq (m,A)$ .Tada

$$S_{N(n,B)} = S_n \in B \leq A,$$

pa je generalisani niz $\{S_{N(m,A)}, (m,A) \in D \times \mathcal{A}\}$ gotovo u A,sto dokazuje nasu lemu.

Kao posledica Leme 4.navodimo ovo delom uopstenje Teoreme I.4.

Posledica Leme 4. Ako je x takva tacka u topoloskom prostoru X da da njen sistem okolina predstavlja a-usmereni skup(uredjen inkluzijom) i ako je x kvazi-granicna tacka nekog generalisanog niza,tada tada postoji a-generalisani podniz ovoga niza koji konvergira ka x.

P.S.Aleksandrov i P.S.Urysohn [1] ,dali su sledecu definiciju:

Najmanji kardinalni broj koji je moc bilo koje baze prostora R u tacki x, zove se karakter prostora R u tacki x i oznacava sa $\chi_x R$.
Mi cemo ovu definiciju preneti na usmerene skupove.

Definicija 3. Najmanji kardinalni broj koji je moc bilo kog kofinalnog podskupa usmerenog skupa D, zove se karakter skupa D i oznacava sa χD .

Ako je D a-usmeren tada je $\chi D \geqslant a$. Za a-usmereni skup (a-generalisani niz), govoricemo da je striktno a-usmeren (striktno a-generalisani niz) ako nije $\aleph_{\alpha+1}$-usmeren ($\aleph_{\alpha+1}$ -generalisani niz), pri $a=\aleph_\alpha$. Dalje, za generalisani niz $\{x_n, n\in D\}$ kaze se da je gotovo konstantan ako postoji $n_0\in D$ takav da je $x_n = x_{n_0}$, za $n\geqslant n_0$.

Lema 5. Ako je $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ generalisani niz a $\{x_{\alpha_\beta}, \beta\in B\}$, bilo koji njegov generalisani podniz koji je b-generalisani niz tada je $b\leqslant \chi A$.

Dokaz. Neka je $A_0 \subset A$ kofinalni podskup od A, sa $\chi A = k A_0$. Kad bi bilo $b > \chi A$, imali bi po definiciji generalisani podniza, za svako $\alpha_0\in A_0$, jedno $\beta_0\in B$ takvo da je $\alpha_\beta > \alpha_0$ za sve $\beta > \beta_0$. No, posto je moc skupa ovakvih β_0, $\leqslant \chi A$ a $b > \chi A$, postojalo bi $\tilde{\beta}\in B$ vece od svih β_0 . Posto je $\tilde{\beta} > \beta_0$, to je $\alpha_{\tilde{\beta}} > \alpha_0$ za svako $\alpha_0\in A_0$, a to je suprotno sa pretpostavkom da je A_0 kofinalno sa A. Dakle, $b\leqslant \chi A$.

q.e.d.

Teorema 1. Neka je $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ jedan a-generalisani niz koji konvergira ka tacki u Hausdorff-ovom prostoru X. Ako je karakter sistema okolina tacke , kardinalnog broja b, gde je $a > b$, tada je $\{x_\alpha, \alpha\in A\}$ gotovo konstantan.

Dokaz. Prema Lemi 2., striktno je a-usmerena svaka baza $\mathcal{U}=\{U\}$, tacke x_0 . Posto $x_\alpha \longrightarrow x_0$, za svaki $U\in\mathcal{U}$ postoji $\alpha_U \in D$ takav da je

$$(*)\qquad x_\alpha \in U \quad , \text{za } \alpha\geqslant \alpha_U$$

Neka je

$$A_0 = \{\alpha_U \,;\, U\in\mathcal{U}\}$$

Tada je $k A_0 \leqslant b < a$, pa postoji $\alpha_0\in D$, takvo da je $\alpha_0 > \alpha_U$, za svako $\alpha_V \in A_0$. Za proizvoljno $V \in \mathcal{U}$, prema (*) je za svako $\alpha \geqslant \alpha_0$, $x_\alpha \in V$, jer iz $\alpha \geqslant \alpha_0$ i $\alpha_0 \geqslant \alpha_V$ sledi da je $\alpha \geqslant \alpha_V$.

No, posto je

$$x_\alpha \in V \text{ , za svako } \alpha \geqslant \alpha_0 \text{ i svako } V \in \mathcal{U} \text{ ,}$$

i posto je prostor X Hausdorff-ov izlazi

$$x_\alpha \in \bigcap \{V : V \in \mathcal{U}\} = x_0 \text{ , } \alpha \geqslant \alpha_0$$

tj.

$$x_\alpha = x_0 \text{ , za } \alpha \geqslant \alpha_0$$

Posledica Teoreme 1. U Hausdorff-ovom prostoru X, koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti svaki konvergentni a-generalisani niz za $\alpha \geqslant \aleph_1$ je gotovo konstantan.

Primer 2. U asimptotskoj analizi cesto se pojavljuje ovaj usmereni skup: Neka je S skup svih pozitivnih beskonacnih nizova realnih brojeva, tj.

$$x \in S \Longleftrightarrow x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \quad \text{i} \quad \xi_i > 0, \ i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

dok je $\prec$ klasicna asimptotska relacija,

$$x \prec y \Longleftrightarrow \lim_{i \to \infty} \frac{\xi_i}{\eta_i} = 0 \text{ , } y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots)$$

Tada je $(S, \succ)$ usmereni skup, jer je ocigledno relacija $\succ$, refleksivna i tranzitivna a za $x = (\xi_i)$ i $y = (\eta_i)$ iz S, niz

$$z = (\zeta_i) \text{ , } \zeta_i = i \cdot \max\{\xi_i, \eta_i\}$$

je takav da je $x \prec z$ i $y \prec z$, sto sledi iz

$$\frac{\xi_i}{\zeta_i} \text{ ili } \frac{\eta_i}{\zeta_i} \leqslant \frac{1}{i} \longrightarrow 0 \text{ , kad } i \longrightarrow \infty \text{ .}$$

Pokazimo da je $(S, \succ)$ $\aleph_1$-usmeren. Prvo za skup

$$\{x_n : n \in N\} \subset S$$

formirajmo skup $\{x_n' : n \in N\}$ tako da je $x_n' \succ x_n$, $n = 1, 2, \dots$, sto je moguce buduci da je S usmereni skup. No, po poznatoj teoremi P. du Bois Reymond-a (K. Knopp, [1]), postoji niz $x^* \in S$ koji brze raste od svih x_n', $n = 1, 2, \dots$, tj.

$$x^* \succ \dots \succ x_n' \succ \dots \succ x_2' \succ x_1',$$

pa je odatle,

$$x^* \succ x_n \text{ , za svako } n = 1, 2, \dots,$$

sto pokazuje da je $(S, \succ)$ $\aleph_1$-usmeren.

Prema Posledici Teoreme 1., sledi odatle da je svaki konvergentni realni niz $\{f(x), x \in S\}$ gotovo konstantan, sto je bilo dokazano u Bojanic, Karamata i Vuilleumier, [1].

Posledica 2, Teoreme 1. Neka je $\{\mathcal{K}, \supseteq\}$ usmereni skup svih kompaktnih podskupova jednog lokalno kompaktnog topoloskog prostora X. Ako je $\{\mathcal{K}, \supseteq\}$ a-usmeren sa $a \geq \aleph_1$, onda je svaka neprekidna realna funkcija na X ogranicena.

Dokaz. Za $K \in \mathcal{K}$, $f[K]$ je kompaktan skup u $(-\infty, +\infty)$, buduci da je f neprekidna. Tada

$$\overline{x_K} = \sup\{f[K]\} \text{ i } \underline{x_K} = \inf\{f[K]\}$$

su dva odredjena realna broja. Posmatrajmo generalisane nizove

$$(*) \ \{\overline{x_K}, K \in \mathcal{K}\} \text{ i } \{\underline{x_K}, K \in \mathcal{K}\}$$

Posto iz $K_1 \supseteq K_2$ sledi $\overline{x_{K_1}} \geq \overline{x_{K_2}}$, odn. $\underline{x_{K_1}} \leq \underline{x_{K_2}}$, izlazi da su nizovi (*) monotoni pa prema tome konvergentni. Kako su to a-generalisani nizovi sa $a \geq \aleph_1$, oni moraju biti po Posledici 1, Teoreme 1, gotovo konstantni, tj.

$$\overline{x_K} = \overline{x_0}, \text{ za } K \supseteq K_0; \ \underline{x_K} = \underline{x_0}, \text{ za } K \supseteq K_0$$

Kako $\overline{x_K}$ i $\underline{x_K}$ nisu $+\infty$ ni $-\infty$, izlazi da je $-\infty < \underline{x_0} \leq \overline{x_0} < +\infty$. Dakle,

$$f[X] \subseteq [\underline{x_0}, \overline{x_0}].$$

Teorema 2. Neka su X i Y dva topoloska prostora, pri cemu je Y T_1-prostor, neka je sistem okolina $\mathcal{U}_x$ tacke $x \in X$ striktno a_x-usmeren skup. Ako je $a = \inf\{a_x : x \in X\}$ i $b = \sup\{\chi_y Y, y \in Y\}$ pri cemu je $a > b$, tada je svako neprekidno preslikavanje prostora X u prostor Y lokalno konstantno.

Dokaz. Neka je $f: X \to Y$ neprekidno. Za $x_0 \in X$, neka je $f(x_0) = y_0$. Uzmimo okolinsku bazu tacke y_0 kardinalnog broja $\chi_{y_0} Y$ i recimo da je to $\mathcal{V} = \{V\}$. Tada je

$$\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\} = y_0,$$

posto je Y T_1-prostor. Dalje, odatle

$$f^{-1}(y_0) = f^{-1}[\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\}]$$
$$= \bigcap\{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$$

Posto je $\chi_{y_0} Y \leq b < a \leq a_{x_0}$, skup

$$\bigcap\{f^{-1}[V] : V \in \mathcal{V}\}$$

je okolina tacke x_0 na kojoj je $f(x) = y_0$.

q.e.d.

Posledica 1, Teoreme 2. Ako je X topoloski prostor kod koga je okolinska baza svake tacke a-usmerena pri cemu je $a \geq \aleph_1$, tada je svaka realna neprekidna funkcija na X lokalno konstantna.

Primer 3. Na skupu ordinalnih brojeva $(-\infty, \omega_1]$ sa uredjajnom topologijom, svaka neprekidna realna funkcija je konstantna na nekom intervalu $[\alpha, \omega_1]$, jer su kompaktni skupovi sadrzani u intervalima $(-\infty, \alpha]$, i tako cine jedan $\aleph_1$ -usmereni skup.

Posledica 2, Teoreme 2. Ne postoji koneksan kompletno regularan prostor, niti kompaktan prostor u kome bi svaka okolinska baza bila -usmerem skup, $a \geq \aleph_1$.

Dokaz. Kod kompletno regularnih prostora zbog koneksnosti svaka realna funkcija bila bi konstantna sto je nemoguce, a ako je prostor kompaktan imao bi jednu koneksnu komponentu gde bi svaka realna funkcija bila konstantna.

Za dalje su nam potrebni jos neki pojmovi koje su uveli P.S.Aleksandrov i P.S.Urison [1]. Za familiju $\mathcal{B}' = \{B'\}$ okolina tacke x u topoloskom prostoru X kaze se da je Pseudobaza tacke x ako je

$$x = \bigcap \{B' : B' \in \mathcal{B}'\}$$

Najmanji kardinalni broj svih pseudobaza tacke x zove se pseudokarakter prostora X u tacki x i obelezava sa $\psi_x X$. Ako je X kompaktan, onda je $\psi_x X = \chi_x X$. Dokazimo sad da vazi sledeca

Lema 6. Ako u kompaktnom topoloskom prostoru X, tacka x ima $\chi_x X \geq \aleph_1$, tada postoji $\aleph_1$ -generalisani niz koji konvergira ka x i koji nije gotovo konstantan.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{B\}$ baza tacke x, takva da je $K\mathcal{B} = \chi_x X$. Tada (videti P.S.Aleksandrov i P.S.Urysohn [1]) presek od prebrojivo elemenata iz $\mathcal{B}$ nije samo tacka x, jer bi inace $\psi_x X = \aleph_0$. Formirajmo usmereni skup $\mathcal{P} = \{P\}$ koji se sastoji od svih prebrojivih preseka elemenata iz $\mathcal{B}$ usmeren inkluzijom. Za $P \in \mathcal{P}$ neka je $x_P \in P$ i jos $x_P \neq x$, jer je $P \neq x$. Generalisani niz

$$\{x_P : P \in \mathcal{P}\}$$

konvergira ka x. Zaista za okolinu $B \in \mathcal{B}$ i proizvoljno $P \in \mathcal{P}$,

$$B \cap P = P_0 \in \mathcal{P},$$

pa je

$$x_P \in P_0 \quad ,\text{za} \quad P \subseteq P_0$$

Teorema 3. Neka je X kompaktan topoloski prostor, takav da je $\chi_x X \geqslant \aleph_1$, za svako $x \in X$. Ako je

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots,$$

niz zatvorenih nepraznih skupova takvih da je $F_{n+1} \subset \operatorname{int} F_n$, tada je skup

$$F_0 = \bigcap \{F_n : n \in N\}$$

kompaktan podprostor od X i $\chi_x F_0 \geqslant \aleph_1$, za svako $x \in F_0$.

Dokaz. Skup F_0 je neprazan kao presek monotono opadajuce familije zatvorenih skupova u kompaktnom prostoru, a buduci da je zatvoren F_0 je kompaktan. Pretpostavimo da je u nekoj tacki $x_0 \in F_0$, $\chi_{x_0} F = \aleph_0$. Tada

$$\bigcap \{F_0 \cap O_n : n \in N\} = x_0,$$

gde su O_n otvorene okoline tacke x_0 u X. Dalje

$$x_0 = F_0 \cap (\bigcap \{O_n : n \in N\}) = (\bigcap \operatorname{int} F_n) \cap (\bigcap O_n),$$

pa posto je $x_0 \in \operatorname{int} F_n$, pseudokarakter tacke x_0 u X bi bio $\aleph_0$, sto nije slucaj. Dakle,

$$\chi_x F_0 \geqslant \aleph_1 \text{, za svako } x \in F_0 .$$

q.e.d.

Ova teorema kazuje da presek familije skupova koji su gore navedeni ne moze biti "suvise mali", a ima neposredno sledecu posledicu:

Posledica Teoreme 3. Ako je X kompaktan topoloski prostor takav da je $\chi_x \geqslant \aleph_1$, za svako $x \in X$, tada je $k X \geqslant 2^{\aleph_1}$. (S. Mrowka [1]).

Dokaz. Postoji realna funkcija $f : X \xrightarrow{na} [0,1]$. Razbijmo X, tako sto dalje posmatramo delove

$$f^{-1}[[0,1/2)],\ f^{-1}[(1/2,1]],$$

pa slicno dalje svaki od ovih delova, stim sto ce prema teoremi nijhov presek kad cine monotono opadajucu familiju, opet biti prostor sa osobinama koje su navedene. Taj postupak se moze produziti transfinitno preko svih ordinalnih brojeva prve idruge klase. Pridelujemo li pri tom tackama koje ostaju u svim presecima simbole o ili 1, dobija se preslikavanje jednog podskupa od X, koje je obostrano jednoznacno, na skup transfinitnih nizova simbola o i 1, preko svih ordinalnih brojeva prve i druge klase a koji ima moc $2^{\aleph_1}$. Inace, ovaj postupak potice od P.S. Aleksandrova i P.S. Urysohna koji su pokazali da svaki savrseno normalni prostor koji je kompaktan, zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti i nema izolovanih tacaka ima moc c.

P.S.Aleksandrov i P.S.Urysohn [1] ,pokazali su da svaki kompaktni prostor koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti ima moc $\geqslant c$ .Za slucaj savrsene normalnih prostora pokazali su,kao sto smo to vec napomenuli,da je moc bas jednaka c i postavili hipotezu da svaki kompaktni prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti ima moc $\leqslant c$ .Medjutim ova hipoteza ostala je i do danas nedokazana.Navescemo neka razmatranja u vezi sa tim problemom.

Neka je X kompaktni prostor bez izolovanih tacaka koji zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.Tada:

1.Ako je skup $A \subset X$ moci c,to je i njegova zatvorenost A^- .

Za $a_o \in A^-$,postoji niz $a_n \longrightarrow a_o$, $a_n \in A$,posto prostor zadovoljava prvu aksiomu prebrojivosti.Dakle svakom $a_o \in A^-$ mozemo prideliti jedan niz elemenata iz A s tim sto za razne a_o' i a_o'' iz A^- ,imamo razlicite nizove.Ovde kompaktnost ne igra nikakvu ulogu.

2.Ako X ima svaku okolinu c-seperabilnu (tj.postoji podskup moci c koji je gust u toj okolini) tada je moc od X jednaka c.

Za svaku tacku x nadjemo okolinu koja je c-seperabilna.Posto je prostor kompaktan izdvojimo konacno mnogo okolina i unija skupova koji su gusti u njima ima moc c i gusta je u celom prostoru.Dakle,u X postoji skup M moci c,pa je prema 1. i moc od X jednaka c.

3.Prostor X se razbija na dva dela,otvoreni (X_o') koji se sastoji od svih tacaka koje imaju c-separabilne okoline i zatvoreni X_o u kome su tacke bez c-separabilnih okolina.

Svaka c separabilna okolina ima c-separabilnu podokolinu.

Posmatrajmo familiju $\mathcal{F}$ svih zatvorenih skupova $F \subset X$,takvih da je $kF = c$ .Familiju $\mathcal{F}$ uredimo inkluzijom tako da F_1 sledi za F_2 ako je $F_1 \supseteq F_2$ .Pretpostavimo da je moc skupa X veca od c.

4.Familija $\mathcal{F}$ je c-usmereni skup.

Za podfamiliju $\mathcal{F}_o$ kardinalnog broja $\leqslant c$,skup $F_o = \cup\{F : F \in \mathcal{F}_o\}$ je moci c pa je i njegova zatvorenost.Odatle $F_o \in \mathcal{F}$ i $F_o \supseteq F$,za svaki $F \in \mathcal{F}_o$.

5.~~Postoji~~ Svaka striktno rastuca familija skupova iz $\mathcal{F}$ ordinalnog tipa ω_1 je takva da je unija ovih skupova zatvorena.

Neka je

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_\alpha \subset \cdots, \alpha < \omega_1, F_\alpha \in \mathcal{F}$$

posmatrajmo uniju $F_0 = \bigcup\{F_\alpha, \alpha < \omega_1\}$. Tada za $x \in F_0^-$, postoji niz $x_n \to x_0$, $x_n \in F_0$. Dalje je $x_n \in F_{\alpha_n}$, $\alpha_n < \omega_1$ tj. $x_n \in (\bigcup\{F_{\alpha_n}, n \in N\})^- \in F_{\alpha_0}$, $\alpha_0 = \sup\{\alpha_n\}$, pa je dakle $x_0 \in F_{\alpha_0}$ i tim pre $x_0 \in F_0$.

6. Skup X_0 ne moze se sastojati samo iz jedne tacke: x_0.

Tada bi generalisani niz

(*) $\{x_F : F \in \mathcal{F}\}$, $x_F \in X \setminus (F \cup \{x_0\})$,

morao imati neprazan skup kvazi-granicnih tacaka. Ali to ne bi bila nijedna tacka iz $(X_0)'$, jer za $x' \in (X_0)'$ postojala bi okolina $O_{x'}$ takva da je $O_{x'}^- \in \mathcal{F}$, pa generalisani niz (*) ne bi bio frekventan u $O_{x'}$. Tako $x_F \to x_0$, a to je nemoguce prema Teoremi 1., buduci da ovaj niz nije gotovo konstantan.

7. Skup X_0 nema izolovanih tacaka.

Tada bi postojala zatvorena okolina te tacke u X, koja ne bi sadrzala nijednu drugu tacku iz X_0 pa bi kao u 6. dosli do kontradikcije.

8. Skup X_0 nije tipa $G_{\delta(\aleph)}$, gde je $\aleph \leq \mathcal{C}$.

Generalisani niz

$$\{x_F : F \in \mathcal{F}'\}, x_F \in X_0 \cup F,$$

gde je $\mathcal{F}'$ usmereni skup zatvorenih podskupova iz $(X_0)'$, ima za skup kvazi-granicnih tacaka podskup od $fr\, X_0$. Prema Teoremi II.3., ovaj generalisani niz je gotovo u svakoj okolini od X_0, pa kad bi bilo $X_0 = \bigcap\{O_\zeta, \zeta \in Z\}$, $k Z = \aleph \leq \mathcal{C}$, pocev od nekog F_0, $x_F \in X_0$, za $F \supseteq F_0$, a to je nemoguce, posto je suprotno sa definicijom ovog niza.

2. a-generalisani nizovi i uopstena kompaktnost

Pocetkom teorije kompaktnih topoloskih prostora posluzila je ova osnovna teorema koju su dokazali P.S.Aleksandrov i P.S.Urysohn [1], 1922 godine,

Sledeca tri svojstva topoloskog prostora X su medjusobno ekvivalentna:

1.Svaki beskonacni skup u X ima bar jednu tacku maksimalnog nagomilavanja.

2.Svaki dobro uredjeni sistem nepraznih,po inkluziji monotono opadajucih,zatvorenih skupova iz X

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots,$$

ima neprazan presek.

3.Svaki beskonacni otvoreni pokrivac prostora X ima konacan podpokrivac.

U svakom od ovih slucajeva prostor X se naziva kompaktnim (a u starijoj literaturi i sad gotovo iskljucivo ruskoj bikompaktan).Ovi autori su pokazali da se kompaktnost moze okarakterisati ako se u svojstvima 1.,2. i 3. sistem skupova koji imaju proizvoljan kardinalan broj zamene onim ciji je kardinalan broj regularan,odn,proizvoljan ordinalni broj regularnim.Taj rezultat ih je doveo do vrlo generalne definicije kompaktnosti,a naime:

Neka su data dva beskonacna kardinalna broja a i b, $a \leq b$;topoloski prostor X naziva se kompaktnim u intervalu moci $[a,b]$,ili $[a,b]$ -kompaktnim,ako poseduje bilo koje od sledecih svojstava:

A.Svaki beskonacni skup A iz X,cija je moc regularni kardinalni broj iz intervala $[a,b]$ (tj. $a \leq KA \leq b$)ima u X tacku maksimalnog nagomilavanja.

B.Svaki dobro uredjeni sistem koji se sastoji od nepraznih,monotono opadajucih,zatvorenih skupova prostora X,

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots$$

i koji ima regularan uredjajni tip θ ,sa $w(a) \leq \theta \leq w(b)$ ima neprazan presek.

C. Svaki otvorena pokrivac prostora X,koji ima regularnu moc m, $a \leq m \leq b$,sadrzi podpokrivac moci $< a$.

Ekvivalentnost svojstava A i B pokazali su P.S.Aleksandrov i P.S. Urysohn [1] ,dok je ekvivalentnost svojstva C sa A i B pokazao Yu. Smirnov [1] .Kada je $a=\aleph_1$ a $b=\infty$,dobija se slucaj finalno kompaktnih prostora.Za $a=b=\aleph_0$ dobijaju se prebrojivo kompaktni prostori.Ako je $a=b$ i ako su iregularni,tad je svaki prostor trivijalno $[a,b]$ -kompaktan.Na svojstva A,B i C moze se gledati kao na karakterizaciju kompaktnosti,redom,u terminima tacaka nagomilavanja,zatvorenih skupova i pokrivaca.Njima cemo pridruziti i sledece svojstvo,koje bi doslo kao karakterizacija uopstene kompaktnosti u terminima konvergencije.

D.Svaki m-generalisani niz $\{x_\alpha, \alpha \in D\}$ u prostoru X,sa $a \leq m \leq b$ i sa regularnim $k'D$,ima bar jednu kvazi-granicnu tacku.

<u>Teorema 1.</u> <u>Iz svojstva</u> C <u>sledi svojstvo</u> D,<u>a iz</u> D <u>svojstvo</u> B.

<u>Dokaz.</u> $C \Longrightarrow D$ .Pretpostavimo da X poseduje svojstvo C a da postoji m-generalisani niz $\{x_n, n \in D\}$, $a \leq m \leq b$,kD je regularan, koji nema kvazi granicnih tacaka u X.Tada je prema Teoremi I.5.,

$$\bigcap\{A_\alpha^-, \alpha \in D\} = \Lambda$$

gde je A_α^- zatvorenost skupa $A_\alpha=\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$.No,tada po de Morgan-ovim pravilima sledi

$$\bigcup\{(A_\alpha^-)' : \alpha \in D\} = X,$$

tj.familija otvorenih skupova $\{(A_\alpha^-)' : \alpha \in D\}$ je pokrivac regularne moci,pa se prema svojstvu C,moze izdvojiti podpokrivac

$$\{(A_\alpha^-)' : \alpha \in D_0\},\ kD_0 < a.$$

Tada iz $X=\bigcup\{(A_\alpha^-)' : \alpha \in D_0\}$,sledi

$$(*)\quad \bigcap\{A_\alpha^- : \alpha \in D_0\} = \Lambda$$

a tim pre je

$$\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in D_0\} = \Lambda$$

Posto je D m-usmeren,postoji $\alpha_0 \in D$,takvo da je $\alpha_0 > \alpha$,za svako $\alpha \in D$ .Odatle je $x_{\alpha_0} \in A_\alpha$,za svako $\alpha \in D_0$,pa je

$$\bigcap\{A_\alpha, \alpha \in D_0\} \neq \Lambda$$

sto je suprotno sa (*).Ova kontradikcija dokazuje $C \Longrightarrow D$.

$\mathcal{D} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Pretpostavimo da vazi D i posmatrajmo sistem zatvorenih skupova

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots, \ \alpha < \Theta, \ w(a) \leq \Theta \leq w(b),$$

gde je Θ regularan ordinalan broj. Birajuci $x_\alpha \in F_\alpha$ dobijamo generalisani niz $\{x_\alpha, \alpha \in (-\infty, \Theta)\}$ koji je $\mathcal{K}(-\infty, \Theta)$ -usmeren i ciji usmereni skup ima regularnu moc. Posto je ovaj niz gotovo u svakom F_α ,

$$A_\alpha = \{x_\beta, \beta \geq \alpha\} \subseteq F_\alpha \text{ i } \bar{A_\alpha} \subseteq F_\alpha,$$

to je prema svojstvu D,

$$\bigcap \{F_\alpha : \alpha < \Theta\} \supseteq \bigcap \{\bar{A_\alpha}, \alpha < \Theta\} \neq \Lambda$$

q.e.d.

Da je kD bilo neophodno ograniciti na interval moci $[a, b]$ - pokazuje

<u>Primer 1.</u> Prostor $(-\infty, w_1)$ ordinalnih brojeva prve i druge klase sa uredjajnom topologijom je $[\aleph_0, \aleph_0]$ -kompaktan. G. niz,

$$z(\xi, n) = \xi \quad , \ (\xi, n) \in (-\infty, w_1) \times N$$

je $\aleph_0$ -generalisani niz, ali nema nijedne kvazigranicne tacke u $(-\infty, w_1)$ jer je $\mathcal{K}((-\infty, w_1) \times N) = \aleph_1$.

IV. JEDNA TOPOLOGIJA NA PARTITATIVNOM SKUPU

U ovom paragrafu razmotricemo jednu topologiju na partitativnom skupu proizvoljnog skupa $\mathcal{X}$, koji cemo radi izvesnog pojednostavljenja a i iz razloga sto i sam pretstavlja jedan novi skup, nadskup od $\mathcal{X}$, obelezavati sa $\mathcal{X}^*$. Same elemente iz $\mathcal{X}^*$, kad zelimo da naglasimo da su delovi od $\mathcal{X}$, tj. da imaju granularnu strukturu, oznacavacemo sa X a kad hocemo da istaknemo da su samo elementi iz $\mathcal{X}^*$, oznacavacemo ih radije sa $\mathcal{X}^*$. Ovde zvezdica ima smisao jednog skupovnog operatora i istice pojmovnu povezanost a granularnost elemenata $X \in \mathcal{X}^*$ omogucuje uvek vise od onoga sto pruza sama organizacija tih elemenata u skupu $\mathcal{X}^*$ (Dj. Kurepa [2]).

Poznato je da se cesto, a narocito u teoriji mera, posmatraju izvesni limesi nizova elemenata iz $\mathcal{X}^*$. Tako ako je za dati skup $\mathcal{X}$, $\{X_n\}$ $X_n \in \mathcal{X}^*$ jedan niz podskupova uvodi se pojam (glavnog) limesa. Naime za niz $\{X_n\}$ skup onih tacaka iz $\mathcal{X}$ koji pripadaju jednoj beskonacnoj podfamiliji skupova iz $\{X_n\}$ zove se (glavni) <u>limes superior</u> i obelezava sa $\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} X_n$; a skup onih tacaka iz $\mathcal{X}$ koje pripadaju svim skupovima iz $\{X_n\}$ sem njih najvise konacno mnogo zove se (glavni) <u>limes inferior</u> i obelezava se $\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} X_n$. U slucaju kad se ova dva limesa podudaraju, kaze se da je to (glavni) <u>limes</u> niza $\{X_n\}$ i belezi se sa $\underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} X_n$. Koristeci operacije unije i preseka, gornja dva limesa se mogu napisati i kao

$$\overline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} X_n = \bigcap_{i=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{j=i}^{\infty} X_i\Big), \quad \underline{\mathrm{Lim}}_{n\to\infty} X_n = \bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{j=i}^{\infty} X_i\Big)$$

Nas je cilj, ovde, da uvedemo jednu topologiju odn. konvergenciju u partitativnom skupu $\mathcal{X}^*$, datog skupa $\mathcal{X}$, nepretpostavljajuci nista o topoloskoj strukturi samog skupa $\mathcal{X}$ i da ovim limesa kako je dat gore, prenesemo na generalisane nizove skupova ili tako da dobijena klasa konvergencije odredjuje jednu dosta "pravilnu" topologiju.

Samo topologiziranje skupa delova pojavljuje se novi kao Hausdorff-ova metrika. Naime, ako je (X,d) metricki prostor i familija zatvorenih skupova u X, neka

$$U_r(F)=\{x : dist(x,F)<r\}$$

gde je r realan broj. Tada je za dva skupa F_1 i $F_2 \in \mathcal{F}$,

$$d'(F_1,F_2)=\inf\{r : F_1 \subset V_r(F_2),\ F_2 \subset V_r(F_1)\}$$

metrika za $\mathcal{F}$. Sama topologija metrickog prostora $(\mathcal{F},d')$ nije odredjena topologijom prostora (X,d). Tako, naprimer, ako je X skup realnih brojeva metrike

$$d_1(x,y)=\left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right| \text{ i } d_2(x,y)=\min\{1,|x-y|\}$$

su ekvivalentne ali su razlicite topologije $(\mathcal{F},d_1')$ i $(\mathcal{F},d_2')$. Ovo pokazuje da se moze ocekivati da topologije zadate na partitivnom skupu nisu uvek odredjene topoloskom strukturom skupa X, nego zavise i od neke "uniformnosti" na X.

Kada je X topoloski prostor, tada se prema K. Kuratowskom [1] uvodi pojam topoloskog limesa. Naime, niz podskupova $\{A_n\}$, $A_n \subset X$ ima skup $\overline{A}$ za limes superior, $\lim\sup A_n=\overline{A}$, ako za svaki $x\in\overline{A}$ i svaku okolinu O_x, presek $A_n \cap O_x \neq \Lambda$ za beskrajno mnogo indeksa n, a skup $\underline{A}$ za limes inferior ako za $x\in\underline{A}$ i okolinu O_x, presek $A_n\cap O_x\neq\Lambda$ za sve n sem njih konacno mnogo. Kad je $\overline{A}=\underline{A}$, kaze se da postoji limes niza $\{A_n\}$ i belezi se sa $\lim A_n$.

U radovima R. Fischer-a [1], Z. Frolik-a [1], te G. Grimeisen-a [1], ovaj pojam topoloskog limesa je prenosen dalje na limese filtrirajucih familija odn. generalisanih nizova skupova. Tako je u radu Z. Frolika uvedena topologija na sistemu zatvorenih skupova jednog topoloskog prostora, polazeci od pojma limesa generalisanog niza podskupova, dok G. Grimeisen proucava konvergenciju delova i u onim slucajevima kada je na X data opstija topoloska struktura tj, kad su zadovoljeni samo neki od aksioma koje zadovoljava operator Kuratowsko $\tau : X \to X^*$.

Dalje, u vezi sa problemom neprekidnih razbijanja bikompakta, V.I. Ponomarev [1], posmatrao je dve razlicite topologije na sistemu zatvorenih skupova jednog topoloskog prostora.

No,u svim prethodnim slucajevima pretpostavlja se unapred neka topologija na X,odn.neka konvergencija tacaka u X.U ovom sto sledi,mi nista ne pretpostavljamo o konvergenciji tacaka u X,cak takva konvergencija je trivijalna kad posmatramo iz konvergencije elemenata iz X^*, sto ce ,naravno,zavisiti od toga kako su elementi skupa X organizovani odn.koje njegove delove kad isticemo.Tako je nasa ideja potpuno obrnuta jer ce nas interesovati kako iz topologije partitativnog skupa nekom podesnom korespondencijom mozemo topologizirati sam skup.

Neka je $\mathcal{X}$ beskonacan skup, $\mathcal{X}^*$ njegov artitativni skup. Posmatrajmo generalisani niz $\{X_\alpha,\ \alpha\in A\}$ u $\mathcal{X}^*$.Definisimo konvergenciju ovog niza na sledeci nacin:

Definicija 1. Generalisani niz $\{X_\alpha,\alpha\in A\}$ konvergira ka $X_0\in\mathcal{X}^*$ ako i samo ako za svaki $x\in X_0$,postoji $\alpha_x\in A$ takav da je

$$x\in X_\alpha \quad ,\text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_x$$

i svaki $x'\in X_0'$,postoji $\alpha_{x'}\in A$ takav da

$$x'\in X_\alpha \quad ,\text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_{x'}$$

Ovu konvergenciju zvacemo φ -konvergencija i moze se proveriti da φ -konvergencija odredjuje klasu konvergencije po tome i neku topologiju na $\mathcal{X}^*$ .No umesto da radimo tako mi cemo dokazati sledecu

Teoremu 1. Za $X\in\mathcal{X}^*$,neka su $A\subset X$ i $B\subset X'$,dva konacna skupa i neka je

$$U^*(X;A,B)=\{Y:Y\in\mathcal{X}^*,\ A\subset Y\subset B'\}$$

Skupovi $U^*(X;A,B)$ su sistem otvorenih okolina elementa X,za neku topologiju Φ na $\mathcal{X}^*$ .Konvergencija po ovoj topologiji je identicna sa φ -konvergencijom.

Dokaz. Proverimo uslove za sistem okolina koji moraju biti ispunjeni u slucaju topoloskog prostora.

1. $A\subset X\subset B'$,t.j. $X\in U^*(X;A,B)$

2. Ako su $\mathcal{U}^*(X;A_1,B_1)$ i $\mathcal{U}^*(X;A_2,B_2)$ dve okoline elementa $X\in\mathfrak{X}^*$, tada

$$\mathcal{U}^*(X;A_1,B_1)\cap\mathcal{U}^*(X;A_2,B_2)=\mathcal{U}^*(X;A_1\cup A_2,B_1\cup B_2),$$

je opet okolina od X, jer su skupovi $A_1\cup A_2<X$, $B_1\cup B_2<X'$ konačni.

3. Za $Y\in\mathcal{U}^*(X;A,B)$ imamo $\mathcal{U}^*(Y;A,B)=\mathcal{U}^*(X;A,B)$.

Neka sad

$$X_\alpha\xrightarrow{\varphi}X,$$

da pokažimo da konvergira i po topologiji Φ. Neka je $\mathcal{U}^*(X;A,B)$ proizvoljna Φ-okolina elementa X. Za svaki element a_i iz skupa $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, postoji α_i takav da je

$$a_i\in X_\alpha,\ \text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_i$$

pa postoji $\alpha_0\geqslant\alpha_i$, $i=1,2,\dots,m$, takvo da je

$$A\subseteq X_\alpha,\ \text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_0$$

Slično za svaki b_i iz $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ postoji α_i' takav da

$$b_i\,\overline{\in}\,X_\alpha,\ \text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_i'$$

pa i $\alpha_0'\geqslant\alpha_i'$, $i=1,2,\dots,n$ takvo da

$$X_\alpha\subseteq B',\ \text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_0'.$$

Tako ćemo za $\tilde{\alpha}\geqslant\alpha_0$ i α_0' imati

$$X_\alpha\in\mathcal{U}(X;A,B),\ \text{pri}\ \alpha\geqslant\tilde{\alpha}.$$

Dakle, $X_\alpha\xrightarrow{\Phi}X$.

Obrnuto, neka $X_\alpha\xrightarrow{\Phi}X$. Tada za $x\in X$ i $x'\in X'$, skup $\mathcal{U}^*(X;\{x\},\{x'\})$ je Φ-okolina od X. Dakle postoji $\alpha_0\in A$, takvo da

$$x\in X_\alpha\ \text{i}\ x'\,\overline{\in}\,X_\alpha,\ \text{za}\ \alpha\geqslant\alpha_0,$$

ili još drukčije $X_\alpha\xrightarrow{\varphi}X$. Pošto da se ove dve konvergencije podudaraju moraju se podudarati i odgovarajuće topologije.

q.e.d.

Pošto smo pokazali podudarnost ovih dveju konvergencija, ubuduće ćemo pisati samo jednu oznaku, naprimer Φ.

Dokažimo, dalje, sledeću lemu,

<u>Lema 1. Operacija unijanja po proizvoljnom skupu indeksa je neprekidna u Φ-topologiji, tj, za svako</u> $\eta\in E$,

$$X_\alpha^\eta\longrightarrow X_0^\eta,\ \alpha\in(D,\geqslant).$$

tada
$$\bigcup\{X_\alpha^\eta : \eta\in E\} \xrightarrow{\Phi} \bigcup\{X_0^\eta : \eta\in E\},$$

kao i operacija uzimanja komplementa, t.j. iz $X_\alpha \longrightarrow X_0$ sledi $X_\alpha' \longrightarrow X_0'$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in \bigcup X_0^\eta$. Tada postoji $\eta_0 \in E$ takvo da je $x_0 \in X_0^\eta$. No zbog $X_\alpha^{\eta_0} \longrightarrow X_0^{\eta_0}$ postoji $\alpha_0 \in D$ takav da za $\alpha \geqslant \alpha_0$ je $x_0 \in X_\alpha^{\eta_0}$. Tako je pri $\alpha \geqslant \alpha_0$, $x_0 \in \bigcup_\eta X_\alpha^\eta$ sto znaci da
$$\bigcup_\eta X_\alpha^\eta \longrightarrow \bigcup_\eta X_0^\eta$$

Ako $X_\alpha \longrightarrow X_0$, tada za $x_0' \in X_0'$ imamo $x_0' \bar{\in} X_0$, t.j. postoji $\alpha_1 \in D$ sa osobinom $x_0' \bar{\in} X_\alpha$ pri $\alpha \geqslant \alpha_1$. Dakle za $\alpha \geqslant \alpha_1$, $x_0' \in X_\alpha'$. Slicno za $y_0' \bar{\in} X_0'$ sledi da postoji $\alpha_2 \in D$ sa osobinom $y_0' \bar{\in} X_\alpha'$, $\alpha \geqslant \alpha_2$.

q.e.d.

Kako iz
$$X_\alpha \longrightarrow X_0 \Longleftrightarrow X_\alpha' \longrightarrow X_0'$$
vidimo da je preslikavanje $(\cdot)'$ homeomorfizam. Dalje posto je
$$X \cap Y = (X' \cap Y')'$$
to je i operacija presecanja neprekidna. Zaista
$$X_\alpha^\eta \longrightarrow X_0^\eta \Longrightarrow (X_\alpha^\eta)' \longrightarrow (X_0^\eta)'$$
$$\Longrightarrow \bigcup_\eta (X_\alpha^\eta)' \longrightarrow \bigcup_\eta (X_0^\eta)' \Longrightarrow \left(\bigcup_\eta (X_\alpha^\eta)'\right)' \longrightarrow \left(\bigcup_\eta (X_0^\eta)'\right)'$$
$$\Longrightarrow \bigcap_\eta X_\alpha^\eta \longrightarrow \bigcap_\eta X_0^\eta.$$

Iz gornje proizilazi da je svaka kombinacija skupova formirana od unija, preseka i konacno puta primenjene operacije uzimanja komplementa neprekidna u Φ-topologiji.

Teorema 2. Prostor $(\mathcal{X}^*, \Phi)$ je potpuno regularan.

Dokaz. Dokazacemo prvo da je Hausdorff-ov. Neka su X i Y dva razlicita elementa u $\mathcal{X}^*$. Tada postoji bar jedan elemenat u jednom od ovih skupova koji nije sadrzan u drugom. Recimo postoji $y \in Y$ i $y \bar{\in} X$. Disjunktne okoline za X i Y su tada
$$U^*(X; A, \{y\}) \text{ i } U^*(Y; \{y\}, B),$$
pa svaki $Z \in \mathcal{X}^*$ koji pripada prvoj okolini sadrzi $\{y\}$ i tako ne moze pripadati drugoj.

U daljem cemo se osloniti na cinjenicu da je topologija topoloske grupe kompletno regularan prostor (videti napr. N. Bourbaki [1]) i tako izvesti indirektan dokaz. Skup $\mathcal{X}^*$ je grupa s obzirom na simetricnu razliku, tj. operaciju Δ,

$$X \Delta Y = (X \cap Y') \cup (X' \cap Y).$$

Kako su prema Lemi 1., operacije koje fi urisu na desnoj strani ove jednakosti neprekidne, neprekidna je i operacija Δ. Dakle, $(\mathcal{X}^*, \Delta)$ je topoloska grupa i otuda je prostor $(\mathcal{X}^*, \Phi)$ kompletno regularan.

q.e.d.

U Teoremi 2. je dokazano da je $(\mathcal{X}^*, \Phi)$ kompletno regularan prostor. Prirodno je, sad, postaviti pitanje koliko razlicitih topoloskih mogucnosti pretstavljaju ovi prostori. Dokazacemo da kad se odabere podesno da se svaki kompletno regularni prostor Y moze smatrati, do na homeomorfizam, podprostorom nekog $\mathcal{X}^*$. Tako izlazi da su prostori $(\mathcal{X}^*, \Phi)$ univerzalni za kompletno regularne prostore. Naime, dokazacemo ovo tvrdjenje,

<u>Teorema 3.</u> <u>Svaki kompletno regularni prostor</u> Y <u>moze se homeomorfno preslikati u neki</u> $(\mathcal{X}^*, \Phi)$.

<u>Dokaz.</u> Oznacimo sa Q interval $[0,1]$ realnih brojeva, sa Q^Z topoloski proizvod $X\{Q : \zeta \in Z\}$ prostora Q "Z puta" sa samim sobom. Tada se Z moze odabrati tako da je Y homeomorfan sa nekim podskupom F prostora Q^Z, tj.

$$Y \cong F \subset Q^Z$$

Elemente skupa F oznacavacemo sa f, a konvergencija u Q^Z je prosto konvergencija po koordinatama. S druge strane, posmatrajmo skup $\mathcal{X} = Z \times Q$ u kome se svaki element iz Q^Z moze shvatiti kao jedan odredjeni podskup. Zato pridelimo svakom $f \in F$ podskup od odredjen na sledeci nacin

$$[f] = \{q : q \in Q_\zeta, f(q) < f(\zeta), \zeta \in Z\}$$

tj. $[f]$ je skup onih tacaka iz $Z \times Q$ koje su manje od odgovarajucih vrednosti funkcije f, tj.

$$(\zeta, q) \in [f] \Leftrightarrow q < f(\zeta)$$

Lako se vidi da je ova korespondencija obostrano jednoznacna. Skupovi $[f]$ su elementi iz $\mathcal{X}^*$, pa je skup svih $[f]$, $f \in F$ podskup od $(\mathcal{X}^*, \Phi)$ i prema tome jedan kompletno regularan prostor.

Dokažimo da je korespondencija $f \longleftrightarrow [f]$ homeomorfizam.

U teoremi 1. je opisana konvergencija u $(\mathcal{X}^*, \Phi)$, pa je najlakse ovo dokazati preko konvergencije. Dokazacemo prvo da je

(1) $f_\alpha \longrightarrow f_0 \Longrightarrow [f_\alpha] \xrightarrow{\Phi} [f_0], (\alpha \in D)$

Neka je $(\zeta, q) \in [f_0]$ tj. $0 \leq q < f_0(\zeta)$. Tada postoji $\alpha_\zeta \in D$ takvo da je

$$|f_0(\zeta) - f_\alpha(\zeta)| < \varepsilon < f_0(\zeta) - q,$$

jer niz $\{f_\alpha, \alpha \in D\}$ konvergira po koordinatama. Odatle je $0 \leq q < f_\alpha(\zeta)$ za $\alpha > \alpha_\zeta$ tj.

$$(\zeta, q) \in [f_\alpha] \text{, za } \alpha > \alpha_\zeta$$

Slicno se dokazuje da za $(\zeta, y) \bar{\in} [f_0]$, postoji $\alpha_\zeta' \in D$ takav da

$$(\zeta, y) \bar{\in} [f_\alpha] \text{, za } \alpha > \alpha_{\zeta'}.$$

Ostaje da dokazemo obrnuto, tj. da

(2) $[f_\alpha] \xrightarrow{\Phi} [f_0] \Longrightarrow f_\alpha \longrightarrow f_0$.

Neka je $O = X\{O_\zeta, \zeta \in Z\}$ okolina elementa f_0 u Q^Z, gde su Q_ζ otvoreni skupovi u koordinatnim prostorima i neka su $Q_\zeta = Q$ za sve $\zeta \in Z$ sem $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ za koje vrednosti indeksa ζ mozemo uzeti da su Q_ζ otvoreni intervali:

$$(f_0(\zeta_1) - \varepsilon_1, f_0(\zeta_1) + \varepsilon_1), \dots, (f_0(\zeta_n) - \varepsilon_n, f_0(\zeta_n) + \varepsilon_n).$$

Za $(\zeta_i, q_i) \in [f_0]$, takve da je $f_0(\zeta_i) - \varepsilon_i < q_i$, postoji $\alpha_i \in D$ takav da je $(\zeta_i, q_i) \in [f_\alpha]$ pri $\alpha > \alpha_i$. Isto tako za $(\zeta_i, f_0(\zeta_i) + \varepsilon_i) \bar{\in} [f_0]$ postoje $\beta_i \in D$ takvi da je $(\zeta_i, f_0(\zeta_i) + \varepsilon_i) \bar{\in} [f_\alpha]$ za $\alpha > \beta_i, i = 1, \dots, n$. Birajuci najzad α_0 vece od svih $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ dobijamo da

$$(\zeta_i, q_i) \in [f_\alpha] \Longrightarrow f_0(\zeta_i) - \varepsilon_i < f_\alpha(\zeta_i), \text{ za } \alpha > \alpha_0$$

i

$$(\zeta_i, f_0(\zeta_i) + \varepsilon_i) \bar{\in} [f_\alpha] \Longrightarrow f_\alpha(\zeta_i) < f_0(\zeta_i) + \varepsilon_i, \ \alpha > \alpha_0$$

tako da poslednje dve relacije znace da je niz $\{f_\alpha, \alpha \in D\}$ oto-vo u O. Time je (2) dokazano a zajedno (1) i (2) dokazuju nasu teoremu.

Neka je $\mathcal{S}_\varepsilon$ sistem svih svera poluprecnika ε u metrickom prostoru M. Posmatrajmo preslikavanje skupa M na $\mathcal{S}_\varepsilon$ dato sa

$$x \longrightarrow \mathcal{S}_\varepsilon(x),\ \mathcal{S}_\varepsilon(x) \in \mathcal{S}_\varepsilon$$

Skup $\mathcal{S}_\varepsilon$ je podskup od M^* pa kao takav je topoloski prostor sa indukovanom Φ -topologijom. U slucaju kad je korespondencija $x \longleftrightarrow \mathcal{S}_\varepsilon(x)$ obostrano jednoznacna, Φ -topologija sa $\mathcal{S}_\varepsilon$ indukira jednu topologiju na M. Prirodno je sad postaviti sledeci

<u>Problem 1. Kad su prostori</u> $(\mathcal{S}_\varepsilon, \Phi)$ <u>i M homeomorfni</u> ?

No, vec pitanje obostrane jednoznacnosti gornje korespondencije neizgleda lako, tj. pitanje koji su to metricki prostori koji imaju "dovoljno" svera tako da za neko $\varepsilon > 0$, familija $\mathcal{S}_\varepsilon$ razlikuje tacke u M.

Pokazimo da <u>u normiranom prostoru</u> N <u>za svako</u> $r > 0$ <u>familija</u> $\mathcal{S}_r$ <u>razlikuje tacke</u>. Neka su $\mathcal{S}_r(x)$ i $\mathcal{S}_r(y)$ svere u N. Pokazimo da tada

$$x \neq y \Longrightarrow \mathcal{S}_r(x) \neq \mathcal{S}_r(y)$$

Posmatrajmo tacku $z_\alpha = \alpha x + (1-\alpha)y$. Tada je

$$\|z_\alpha - x\| = |1-\alpha| \cdot \|x-y\|$$

$$\|z_\alpha - y\| = |\alpha| \cdot \|x-y\|$$

Birajuci $\alpha_0 = -r/\|x-y\|$ nalazimo

$$\|z_0 - y\| = r \quad \text{tj.} \quad z_0 \in \mathcal{S}_r(y)$$

dok

$$\|z_0 - x\| = \left(1 + \frac{r}{\|x-y\|}\right) \cdot \|x-y\| = \|x-y\| + r$$

tj. zbog $\|x-y\| > 0$, sledi $z_0 \notin \mathcal{S}_r(x)$ pa je zato

$$\mathcal{S}_r(x) \neq \mathcal{S}_r(y)$$

Da u proizvoljnom metrickom prostoru ne mora postojati nijedna familija svera, kako smo ih ovde naveli, a koja bi razlikovala tacke pokazuje nam sledeci primer.

Neka je $K = (0,1] \times [0,1]$ kvadrat raslojen na delove $x \times [0,1]$, $x \in (0,1]$. Definisimo rastojanje dveju tacaka iz K na sledeci nacin

$$d(M,N) = \begin{cases} 0, & M \equiv N \\ x, & \text{za } M, N \in x \times [0,1] \\ \max\{x,y\}, & \text{za } M \in x \times [0, \end{cases}$$

Lako se vidi da je (K,d) metricki prostor. Proverimo samo relaciju broj 14. Neka su

$$M\in x\times[0,1],\ N\in y\times[0,1],\ P\in z\times[0,1],$$

tri tacke iz K. Sada je

$$d(M,N)=\max\{x,y\},\ d(M,P)=\max\{x,z\},\ d(P,N)=\max\{y,z\}$$

pa je sigurno

$$d(M,N)\leq d(M,P)+d(P,N)$$

Za svako $\varepsilon>0$ uvek postoje tacke, i to one sa prvom koordinatom $<\varepsilon$ takve da im se sfere poluprecnika ε podudaraju. Kako niz $(\frac{1}{n},0)$ koji je Cauchy-ev ne konvergira, K nije kompletan. Medjutim dodajuci samo jednu tacku $O=(0,0)$ i uzimajuci

$$d(O,M)=x,\ M\in x\times[0,1]$$

ovaj prostor postaje kompletan ali sfere i dalje ne razlikuju tacke, tako da kompletnost nije dovoljna osobina.

Pretpostavimo opet da je korespondencija $x\longrightarrow S_1(x)$ obostrano jednoznacna. Tada se moze pokazati da je indukovana Φ-topologija na M slabija od postojece metricke topologije, tj. da iz

$$x_n\longrightarrow x_0 \Longrightarrow S(x_n)\xrightarrow{\Phi} S(x_0).$$

Ako $x_n\longrightarrow x_0$ bice tada $d(x_0,x_n)<\eta$ za $n>N(\eta)$. Neka je $y\in S(x_0)$

Imamo
$$d(x_0,y)=1-\varepsilon<1.$$

Sada je za $n>N$,

$$d(x_n,y)\leq d(x_n,x_0)+d(x_0,y)\leq\eta+1-\varepsilon$$

Odabere li se $\eta=\varepsilon/2$, imacemo jos

$$d(x_n,y)\leq 1-\varepsilon/2<1,\ \text{za}\ n\geq N(\varepsilon/2)$$

tj.

$$y\in S(x_n),\ \text{za}\ n\geq N(\varepsilon/2)$$

Slicno se dokaze da iz $y'\in S(x_0)$, sledi $y'\overline{\in} S(x_n)$ za $n\geq N'$.

Problem 2. Pitanje dali je prostor svake topoloske grupe normalan negativno je resio A.A.Markov [1], uvodeci pojam slobodne topoloske grupe.

Dali su prostori $(\mathcal{X}^*,\Phi)$ normalni ?

L I T E R A T U R A:

1. P.S. Aleksandrov i P.S. Urysohn, O kompaktnyh topologiceskih prostranstvah, (P.S. Urysohn, Trudy II, Moskva 1951)

1. P.S. Aleksandrov, , Vvedenie v obscuju teriju mnozestv i funkcij, Moskva 1948.

2. P.S. Aleksandrov,

1. R. Arens, Note on convergence in general topology, Math. Mag. 23 (1950) 229-234.

1. G. Birkhoff, Moore-Smith convergence in general topology, Ann. of Math. (2) 38 (1937, 39-56.

1. Bojanic, Karamata, Vuilleumier, A contribution to the asymptotic analysis in partially ordered groups (u rukopisu)

1. N. Bourbaki, Topologie Generale.

1. J.L. Kelley, Convergence in topology, Duke Math. J. 17 (1950), 277-283.

2. J.L. Kelley, General Topology, 1956.

1. K. Knopp, Theory and applications of infinite series, London 1951.

1. Dj. Kurepa, Teorija Skupova, Zagreb 1951.

1. A.A. Markov, O svobodnyh topologiceskih gruppah, Izvestija Akademii Nauk SSSR, 9 (1945) 3-58.

1. Mamuzic Z., Uvod u topologiju, Beograd, 1959.

1. E.H. Moore, Definition of limit in general integral analysis, Proc. Nat. Ac. Sci. USA (1915) 628.

1. E.H. Moore and H.L. Smith, A general theory of limits, Amer. J. Math. 44 (1922) 102-121.

1SS. Mrowka, On the potency of compact spaces and first axiom of countab., Bull. Ac. Pol. 4(1), 1958.

1. Ponomarev V.I., Novoe prostranstvo zamknutyh mnozestv, Mat. Sbornik 48(90), N. 2, 190-212.

1. Ju. Smirnov, O prostranstvah kompaktnyh v danom otrezke moscnostej, Izvestija Ak. Nauk SSSR, 1950.

1. J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. Studies 2(1940).