Blažo Okiljević, asistent
Elektro-tehničkog fakulteta

TEORIJA INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA I NJIHOVA PRIMENA NA INTEGRALJENJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

B e o g r a d
1961 god.

S A D R Ž A J

Uvod.. 1

G L A V A I

POJAM INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

1. Definicija 4
2. Simbol infinitezimalne transformacije 5
3. Grupe kao integrali diferencijalnih jednačina..... 6
4. Trajektorije.. 9
5. Uslovi invarijantnosti diferencijalnih jednačina prvog reda prema infinitezimalnim transformacijama 11
6. Integracioni faktor 17

G L A V A II

TRANSFORMACIJE I NJIHOVA UOPŠTENJA

7. Definicije transformacija i njihovih grupa beskrajnih transformacija, i infinitezimalnih transformacija 19
8. Veze koeficijenata sistema dve obične diferencijalne jednačine prvog reda sa koeficijentima odgovarajućih infinitezimalnih transformacija............ 21
9. Veze koeficijenata obične diferencijalne jednačine drugog reda sa koeficijentima odgovarajuće infinitezimalne transformacije........................ 23
10. Pojam produženih infinitezimalnih transformacija.. 23

G L A V A III

OPŠTI OBLIK OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA DRUGOG REDA KOJE DOPUŠTAJU KONFORMNU PRODUŽENU INFINITEZIMALNU TRANSFORMACIJU

11. Opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina drugog reda 25
12. Opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina trećeg reda 26
13. Opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina n-tog reda 28

14. Generalizacija konformne transformacije. Koeficijenti transformacije 29
15. Provera za partikularni slučaj 32
16. Opšti oblik diferencijalnih jednačina drugog reda koje dopuštaju produženu infinitezimalnu transformaciju oblika $\xi = U(x,y)$, $\eta = V(x,y)$ 33

GLAVA IV

OPŠTI OBLIK SISTEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA KOJE DOPUŠTAJU PROJEKTIVNE INFINITEZIMALNE TRANSFORMACIJE

17. Slučaj kad sistem ima dve diferencijalne jednačine 37
18. Opšti oblik sistema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje dopuštaju projektivnu infinitezimalnu transformaciju......................... 37
19. Slučaj kad imamo sistem od tri diferencijalne jednačine prvog reda 38
20. Slučaj sistema od n diferencijalnih jednačina..... 40

GLAVA V

KANONIČKA TEORIJA INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

21. Definicija 42
22. Teorija infinitezimalnih transformacija 43
23. Kanonička teorija infinitezimalnih transformacija. Veza izmedju integracionih faktora i infinitezimalnih transformacija 48
24. Osobine kanoničkih infinitezimalnih transformacija 60
25. Slučaj jedne jednačine drugog reda 62

GLAVA VI

PROBLEM INTEGRALJENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE DOPUŠTAJU PRODUŽENU KONFORMNU INFINITEZIMALNU TRANSFORMACIJU

26. Integraljenje diferencijalne jednačine drugog reda 63
27. Integraljenje diferencijalne jednačine drugog reda koja dopušta produženu infinitezimalnu konformnu transformaciju 66
28. Integraljenje diferencijalne jednačine n-tog reda. 69

G L A V A VII

PROBLEM INTEGRALJENJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE DOPUŠTAJU PROJEKTIVNU INFINITEZIMALNU TRANSFORMACIJU

29. Integraljenje sistema dveju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje dopuštaju projektivnu infinitezimalnu transformaciju 74
30. Integraljenje sistema od tri obične diferencijalne jednačine 77
31. Integraljenje sistema od n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda................................ 80

G L A V A VIII

PRIMENA KANONIČKE TEORIJE INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA NA INTEGRALJENJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

32. Uvod 84
33. Kanoničke infinitezimalne transformacije 85
34. Grupe unfinitezimalnih transformacija 92
35. Integraljenje sistema od dve diferencijalne jednačine sa dve infinitezimalne transformacije 93
36. Integraljenje sistema od tri jednačine 96

LITERATURA 108

U V O D

Problemu integraljenja diferencijalnih jednačina, razni matematičari su prilazili sa različitih gledišta.

Već Charpit 1784, Lagrange, Jacobi i Bour upotrebljavaju matematičke obrasce, koje Sophus Lie naziva infinitezimalnim transformacijama.

U želji da stvori jedinstvenu metodu integraljenja svih diferencijalnih jednačina, Sophus Lie stvara i razvija početkom osme decenije prošlog veka, naročitu matematičku disciplinu - Teoriju neprekidnih grupa. Istovremeno sa ovom teorijom on razvija i Teoriju infinitezimalnih transformacija koja je imala u mnogom da olakša ostvarivanje njegove pomenute zamisli.

Sophus Lie pokazuje da se neprekidna konačna grupa može formirati uzastopnom primenom beskrajno mnogo puta infinitezimalne transformacije. Tako on pokazuje da se grupa obrazuje pomoću beskrajnog reda čiji se svaki novi član dobija uzastopnom primenom infinitezimalne transformacije V (f) na prethodni član. Time on vezuje teoriju grupa za teoriju infinitezimalnih transformacija. Iz ove veze Sophus Lie izvodi svoje osnovne teoreme o neprekidnim grupama i infinitezimalnim transformacijama.

"Stara istraživanja metoda integraljenja diferencijalnih jednačina - kaže Sophus Lie ([5], 1) - nemaju nikakvog sistema, jer matematičarima nije pošlo za rukom da za to pronadju opšti postupak. Tim povodom Sophus Lie piše svom prijatelju A. Mayer-u u pismu, koje je ovaj primio 3.II.1874, sledeće: "Ich möchte jedenfalls bitten, zu versuchen zu verstehen, was ich geschrieben habe. Ich gebe es zu, es ist nur ein Anfang, aber es ist ein Anfang, der etwas für die Zukunft verspricht." Takvoj metodi - veli on dalje - ležala bi osnova u pojmu infinitezimalne transformacije, s kojom je u tesnoj vezi pojam jednočlane grupe. Docnije ovaj osnovni pojam Sophus Lie proširuje i na višečlane grupe.

U primeni na diferencijalne jednačine Sophus Lie obično posmatra i neprekidne grupe i infinitezimalne transformacije uporedo. Pri tom on uvodi stav da diferencijalna jednačina dopušta konačnu grupu transformacija kad dopušta infinitezimalnu transformciju. Medjutim u poznijim radovima, u članku od 15 oktobra 1876 godine, pokazao je Sophus Lie kako se može iskoristiti pojam infinitezimalnih transformacija neposredno i nezavisno od uvodjenja pojma neprekidnih grupa. Ovo drugo gledište obradjivali su Jordan 1887 i A.Mayer 1893, a u novije vreme Buhl, Appell i N.Saltykow.

Dakle, na dva različita, već pomenuta načina, Sophus Lie uvodi pojam infinitezimalnih transformacija za integraljenje diferencijalnih jednačina. Prvi način on zasniva na opštoj teoriji neprekidnih grupa, vezujući ove za pojam jednočlane infinitezimalne transformacije, koju dopušta jedna obična diferencijalna jednačina prvog reda. Da bi taj pojam proširio na jednačine drugog i višeg reda, Sophus Lie ga generališe u obliku produžene infinitezimalne transformacije.

Pri tome on odmah primećuje da produženu infinitezimalnu transformaciju ne dopušta svaka diferencijalna jednačina drugog reda. Zato on u jednom pismu od 19.IV.1874 ([5],V,599), upućeno opet A.Mayer-u, veli:

"Jeder Differentialgleichung entspricht eine gewisse Gruppe, der Inbegriff nämlich aller Berührungstransformationen, welche die Gleichung in sich überführen. Zwei Differentialgleichungen gehören derselben Klasse an, wenn die Gruppen durch irgendeine analytische Umformung in einander überführbar sind. Hierbei ist indes wohl zu bemerken, dass es Differentialgleichungen gibt, welche überhaupt keine Transformation in sich gestatten. Die Gruppe ist also hier nicht mehr vorhanden. Hierin liegt die Beschränkung der Anwendung meiner Theorie auf Differentialgleichungen". Kao takvu jednačinu on navodi svoj klasični primer ([5],384):

$$y = xy + e^{y'} + e^{-y'} \qquad (\alpha)$$

koji Dickson ([19],355) uprošćava odbacujući aditivni član $e^{-y'}$, pa dobija

$$y = xy + e^{y'} \qquad (\beta)$$

Dalje u pomenutom pismu Sophus Lie kaže:

"Nichtsdestoweniger ist meine Gruppentheorie ein erster Schritt zum Studium von Differtialgleichungen. Der nächste Schritt verlangt, glaube ish, höhere analytische Umformungen, die nicht mehr Berührungstransformationen sind. Wenn das sich machen liebe !!!"

Koliko su mu mnogo briga zadavale njegove ideje pri stvaranju teorije grupa najbolje o tom govore njegove reči u pismu ([7],V,599) Mayer-u:

"Die Schreckliche Arbeit mit den Transformationsgruppen hat mich ganz von meinen alten Sachen Weggezogen".

Druga Sophus Lie-ova definicija infinitezimalne transformacije predstavlja generalizaciju poznatog Abel-ovog algoritma o korenima algebarskih jednačina.

Tim povodom on sam ističe da je čitavu teoriju infinitezimalnih transformacija najpre izvodio na ovaj drugi način ([4],str. 489-90).

Prema stanovištu Jordan-Mayer-a, suprotno malopredjašnjem stavu Sophus Lie-a i Dickson-a, i suprotno njihovim navedenim primerima, izlazi da svaka diferencijalna jednačina, kao i svaki sistem diferencijalnih jednačina, shodno modernim shvatanjima teorije infinitezimalnih transformacija opšteg oblika, uvek dopušta infinitezimalne transformacije.

Ovu osobinu mi ćemo dalje stalno isticati, jer je očigledno da postoji bitna razlika izmedju onih prvih produženih i ovih drugih infinitezimalnih transformacija opšteg oblika.

Na osnovu ovih novih definicija mi ćemo proučiti opšti oblik diferencijalnih jednačina koje dopuštaju konformne, projektivne i opšte infinitezimalne transformacije i pokazaćemo način njihovog integraljenja metodama N.Saltykow-a, izloženim u radovima [12],[14],[15], u njegovim Louvain-skim predavanjima, držanim 1928-1930 godine, kao i u onima koja je držao na Beogradskom univerzitetu u prvom semestru 1954/5 godine u okviru medjufakultetske saradnje.

Radi obaveštenja čitalaca i lakšeg razumevanja kao uvod u ovaj rad izložićemo u prvoj glavi Teoriju neprekidnih konačnih grupa u najsažetijem obliku.

G L A V A I

POJAM INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

1. Definicija. Sophus Lie daje ime infinitezimalne transformacije jednom obrascu kojim su se matematičari ~~već~~ i ranije ponekad služili. Originalnost i njegov ~~novi način~~ prilaženja ovom problemu privukli su veliku pažnju mnogih matematičara. Posle svojih istraživanja objavljenih na norveškom jeziku, Sophus Lie pominje infinitezimalne transformacije prvi put na nemačkom jeziku 1872. Medjutim, njihovu definiciju daje tek krajem 1874 godine u svom radu "Uber Gruppen von Transformationen" ([3],529-43). On u svojim sabranim delima ([7],2,red 16): - na drugoj strani u 16 redu - najpre pominje identičnu transformaciju

$$X = f(x,\alpha), \tag{1}$$

koja se za

$$\alpha = \alpha_0$$

identički svodi na

$$f(x,\alpha_0) = x. \tag{2}$$

Sa ovog slučaja on odmah prelazi u 19 i 20 redu na slučaj gde je

$$\alpha = \alpha_0 + d\alpha,$$

što daje

$$x_1 = x + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha. \tag{3}$$

Dobijenu vezu (5) smatra on kao transformaciju koju naziva "Unendlich kleine" i piše je kraće

$$dx = Xd\alpha,$$

gde je

$$X = \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\alpha_0}$$

Odmah zatim na istoj strani u 25 redu naziva je <u>infinitezimalnom transformacijom</u>.

Dve godine docnije ([7],12), S.Lie ponavlja definiciju infinitezimalne transformacije. Tako on sada kaže: "Eine Transformation hei t infinitesimal, wenn sie die Forme:

$$x_1 = x + F(x)\delta t \tag{4}$$

besitzt, wo δt eine infinitesimale Grösse ist".
Gornja se jednačina (4) piše i ovako:

$$\delta x = F(x)\delta t.$$

U prvom od navedenih radova ([3],529-43) Sophus Lie pominje infinitezimalne transformacije da bi pomoću njih izveo oblik jednočlane, dvočlane, i tročlane grupe, dok u drugom radu on ulazi dublje u osobine posmatranih grupa.

2. Simbol infinitezimalne transformacije.- Posmatrajmo jedan sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi(x_1,y_1), \qquad \frac{dy_1}{dt} = \eta(x_1,y_1), \tag{5}$$

i transformacione obrasce:

$$x_1 = \Phi(x,y,t), \qquad y_1 = \Psi(x,y,t). \tag{6}$$

Neka ovi obrasci čine inverznu grupu, to znači da za $t = 0$, imamo

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y. \tag{7}$$

Uzimamo ma koju proizvoljnu funkciju

$$f(x_1,y_1). \tag{8}$$

Ova funkcija (8) prema smenama (6), postaje

$$f(\Phi,\Psi),$$

Njen izvod po t glasi

$$\frac{df(x_1y_1)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\frac{dy_1}{dt}, \tag{9}$$

gde zagrade označavaju da su x_1 i y_1 zamenjeni prema obrascima (6).
Obrazac (9), s obzirom na sisteme (5) i (7), dobija se

$$\left[\frac{df(x_1,y_1)}{dt}\right]_{t=0} = \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

Sophus Lie naziva obrazac (10) infinitezimalnom transformacijom, koju označava simbolom $U(f)$, tako da je

$$\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = U(f). \tag{11}$$

Označimo kratko funkciju (8) sa f_1.
Pretpostavimo da je ona analitička u blizini tačke $M_1(x_1,y_1)$, tako da se može razviti u red

$$f_1 = \left[f_1\right]_{t=0} + \frac{t}{1!}\left[\frac{df_1}{dt}\right]_{t=0} + \dots + \frac{t^n}{n!}\left[\frac{d^nf_1}{dt^n}\right]_{t=0} + \dots \tag{12}$$

Uvedimo kao što smo maločas rekli, sledeću oznaku za funkciju (8):

$$f(x_1y_1) = f_1 \tag{13}$$

i analogno

$$f(x,y) = f \tag{14}$$

S obzirom na (11) i (13), relacija (9) prima kraći oblik,

$$\frac{df_1}{dt} = U_1f_1.$$

Tada je:

$$\frac{d^2f_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}\ (U_1F_1) = U_1(U_1F_1),$$

$$\frac{d^3f_1}{dt^3} = \left[U_1U_1(U_1f_1)\right]$$

$$\frac{d^nf_1}{dt^n} = U_1\left[\ldots U_1\left[U_1(U_1f_1)\right]\ldots\right].$$

Prema oznakama (13) i (14) jednakost (12) postaje:

$$f_1 = f + tUf + \frac{t^2}{2!}U(Uf) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^n}{n!}U\left[\ldots U\left[U(Uf)\right]\ldots + \right]\ldots \tag{15}$$

Za dva partikularna slučaja: $f=x_1$, $f=y_1$, prethodna jednačina (15) postaje:

$$x_1 = X + tUx + \frac{t^2}{2!}U(Ux) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^n}{n!}U \ldots U\ U(Ux) \ldots + \ldots \tag{16}$$

$$y_1 = y + tUy + \frac{t^2}{2!}U(Uy) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^n}{n!}U \ldots U\ U(Uy) \ldots + \ldots \tag{17}$$

Tako se u obliku beskrajnih redova (16) i (27) izražavaju jednačine grupe transformacija pomoću simbola Uf, koji se u svakom narednom članu primenjuje na prethodni. Znači da svaka infinitezimalna transformacija promenljivih x i y odredjuje neprekidnu jenočlanu grupu.

3. Grupe kao integrali diferencijalnih jednačina.

Uzmimo opet sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx_1}{dt} = \xi(x_1y_1), \qquad \frac{dy_1}{dt} = \eta(x_1y_1), \tag{18}$$

kome odgovara jedna jednačina s dve promenljive

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1,y_1)} = \frac{dx_1}{\eta(x_1,y_1)} \tag{19}$$

Poznato je da ova jednačina, u izvesnoj oblasti regularnosti, ima samo jednu jedinu integralnu krivu

$$V(x_1y_1) = C \tag{20}$$

koja prolazi kroz tačku $M(x,y)$. Da bi smo prointegralili sistem (18), pretpostavimo da je za jednačinu (19) već nadjen integral (20). Odredimo iz ovog integrala y_1, pa tako dobijenu vrednost unesimo u prvu jednačinu (18). Sad integraleći ovu jednačinu dobijamo

$$W(x_1,C) - t = C',$$

gde je C' nova proizvoljna konstanta. Kad se ovde smeni C sa $V(x_1,y_1)$, naš integral prima oblik

$$U(x_1y_1) - t = C'.$$

Uvodeći uslov da, za $t = 0$, x_1 i y_1 postaju x, odnosno y, ([19],293-4) biće:

$$U(x_1,y_1) - t = U(x,y), \quad V(x_1,y_1) = V(x,y). \tag{21}$$

Poslednje veze (21), izražene u eksplicitnom obliku glase:

$$x_1 = \Phi(x,y,t), \quad y_1 = \psi(x,y,t). \tag{22}$$

Pretpostavimo da su funkcije Φ i ψ odredjene u oblasti gde je t jednako nuli. Dokažimo da jednačine (22) čine grupu. Zaista, ako prema transformacijama (22), formiramo nove transformacije imaćemo

$$x_2 = \Phi(x_1,y_1,t'), \quad y_2 = \psi(x_1,y_1,t'), \tag{23}$$

pa ćemo dokazati da se one svode na sledeće:

$$x_2 = \Phi(x,y,t+t'), \quad y_2 = \psi(x,y,t+t'). \tag{24}$$

Pošto su jednačine (22) rešeni oblik jednačina (21), to se i jednačine (23) mogu napisati ovako:

$$U(x_2,y_2) = U(x_1,y_1) + t', \quad V(x_2,y_2) = V(x_1,y_1) \tag{25}$$

Posle eliminacije x_1 i y_1 iz jednačina (21) i (25) biva

$$U(x_2,y_2) = U(x,y) + t + t', \quad V(x_2,y_2) = V(x,y), \tag{26}$$

koje u rešenoj formi primaju baš nagovešteni oblik (24).

Dakle, dve uzastopne transformacije (22), sa parametrima t i t', čine opet istu transformaciju (22) sa parametrom $t + t'$. Za $t + t' = 0$, veze (26) se svode na identičnu transformaciju, a veze (22), za $t = - t'$, na inverznu.

Uvodeći nove promenljive:

$$U(x,y) = X, \qquad V(x,y) = Y,$$

jednačine (21) postaju:

$$X_1 = X + t, \qquad Y_1 = Y. \tag{27}$$

Znači: kad je parametar t ograničen na dovoljno male brojne vrednosti, integrali (22), sistema diferencijalnih jednačina (18) čine neprekidnu jednočlanu grupu koja može da bude svedena na translacionu grupu (27).

4. Trajektorije. Uzmimo primer konformne transformacije:

$$x_1 = ax, \qquad y_1 = ay, \tag{28}$$

i tačku $M_0(x_0,y_0)$, koja se ne poklapa sa koordinatnim početkom. Razne transformacije (28) dobijene promenom parametra $\underline{a}$, pomeraju tačku M_0 u razne položaje $M(ax_0,ay_0)$. Eliminacijom parametra $\underline{a}$ dobija se geometrijsko mesto tih tačaka M, koje predstavlja pravu

$$x_0y - y_0x = 0 \tag{29}$$

što prolazi kroz koordinatni početak. Pošto bismo do iste veze (29) došli i onda kad bismo pošli od transformacije

$$x_1 = a'x, \qquad y_1 = a'y,$$

to se svaka prava koja prolazi kroz koordinatni početak naziva trajektorijom konformne grupe (28).

Posmatrajmo sad grupu transformacija najopštijeg oblika:

$$x_1 = g(x,y,a), \qquad y_1 = h(x,y,a). \tag{30}$$

koju ćemo simbolički označavati simbolom Ta.
Kroz svaku tačku M_0, koja nije invarijantna prema grupi (30), prolazi trajektorija C_0. Njene parametarske jednačine su:

$$x = g(x_0,y_0,a), \qquad y = h(x_0,y_0,a) \tag{31}$$

Eliminacijom parametra $\underline{a}$ dobija se njena jednačina

$$\theta(x,y,x_0,y_0) = 0 \tag{32}$$

Ako ni funkcija g ni funkcija h ne sadrže $\underline{a}$, onda ne postoji ni funkcija θ, pa se za $\underline{a} = \underline{a}_0$ funkcije g i h identički svode na x_0 i y_0, te tačka M_0 nije invarijantna prema transformaciji (28).

Da kriva C_0 prolazi kroz tačku M_0 izlazi iz toga što smo uzeli da je $\underline{a} = \underline{a}_0$. Ako koordinatne tačke M(x,y) krive C_0 transformujemo transformacionom grupom T_a, koja je data izrazima (30), dobićemo tačku $M_1(x_1,y_1)$ krive C_0. Zato možemo smatrati jednačine (31) kao transformacionu grupu (30), prema kojoj se tačka $M_0(x_0,y_0)$ pomera u tačku M(x,y). Pošto je proizvod transformacija T_bT_a opet transformaciona grupa T_c, koja izaziva pomeranje tačke M_o u M_1, biće:

$$x_1 = g(x_o,y_o,c), \qquad y_1 = h(x_o,y_o,c)$$

pa je dakle i tačka M_1 na krivoj C_o odredjenoj jednačinom (32).

Tako se jednačina neke trajektorije dobija eliminacijom a iz jednačine (31), ili što je isto iz jednačina (30), koje - kao što ćemo videti, pretstavljaju rešenja diferencijalne jednačine sa dve promenljive, te se trajektorije mogu smatrati integralnim krivim diferencijalne jednačine.

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} . \tag{33}$$

Zaista, neka je integral ove jednačine

$$V(x,y) = C.$$

Diferencijaljenjem se dobija

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = 0. \tag{34}$$

Kako su prema (33) dx i dy proporcionalni sa ξ i η biće

$$\frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta = 0,$$

ili

$$U(V) = 0,$$

gde je $U(V)$ poznati simbol infinitezimalne transformacije.

Obratno ako je dato $V(x,y)$ kao rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine

$$U(f) = 0,$$

onda je i

$$\frac{dV(x_1,y_1)}{dt} = 0.$$

Prema tome je $V(x_1,y_1)$ nezavisno od t, a za $t = 0$, prema obrascima (10) i (11), postaje $V(x,y)$.

Znači da transformaciona grupa smenjuje svaku tačku $M(x,y)$ krive $V(x,y) = C$ tačkom $M_1(x_1,y_1)$ iste krive, koja prema tome nije ništa drugo nego trajektorija. Iz toga sad izlazi, prema Sophus Lie-u, sledeća teorema: Trajektorije jedne infinitezimalne transformacije $U(f)$ dobijamo kad rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine

$$U(f) = 0$$

izjednačimo sa proizvoljnom konstantom C. Koeficijent pravca trajektorije u tački M(x,y) je $\frac{\eta}{\xi}$.

5. Uslovi invarijantnosti diferencijalnih jednačina drugog reda prema infinitezimalnim transformacijama.-

Potražimo najopštiju transformaciju

$$x_1 = \varphi(x,y), \qquad y_1 = \psi(x,y) \tag{35}$$

kojom se pretvara diferencijalna jednačina familije pravih linija

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{36}$$

u jednačinu istog oblika

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0, \tag{37}$$

čiji opšti integral takodje pretstavlja familiju pravih linija u novim promenljivim koordinatama.

Prema transformaciji (35), izraz (37) postupno postaje:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\psi_x + \psi_y \frac{dy}{dx}}{\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx}},$$

gde φ_x, ψ_x, φ_y i ψ_y označavaju prve parcijalne izvode po x i po y funkcija φ i ψ, a zatim:

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d\,\frac{dy_1}{dx_1}}{dx} : \frac{dx_1}{dx},$$

ako posle naznačenog diferencijaljenja imamo

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(\varphi_x + \varphi_y y')^3}\Big[(\psi_{x^2} + 2\psi_{xy}y' + \psi_{y^2}y'^2 + \psi_y y'')(\varphi_x + \varphi_y y') - (\varphi_{x^2} + 2\varphi_y y' + \varphi_{y^2}y'^2 + \varphi_y y'')(\psi_x + \psi_y y')\Big] \tag{38}$$

Pošto mi tražimo finkcije φ i ψ, date sistemom (35), akve prirode da za sve vrednosti x, y i $y' = \frac{dy}{dx}$, na osnovu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = 0$$

bude zadovoljen uslov (37), obavezno mora desna strana diferencijalne jednačine (38) biti identički ravna nuli, a to zahteva sledeće nove uslove:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_x \psi_{x^2} - \varphi_{x^2}\psi_x = 0\\
&\varphi_y \psi_{x^2} - \varphi_{x^2}\psi_y + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_y) = 0\\
&\varphi_x \psi_{y^2} - \varphi_{y^2}\psi_x + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_y) = 0\\
&\varphi_y \psi_{y^2} - \varphi_{y^2}\psi_y = 0
\end{aligned}
\qquad (39)
$$

gde φ_{x^2}, ψ_{x^2} φ_{y^2} ψ_{y^2} označavaju druge parcijalne izvode po x, odnosno po y, a φ_{xy} i ψ_{xy} mešovite parcijalne izvode istih funkcija φ i ψ. Slične će oznake biti upotrebljavane i za parcijalne izvode višeg reda.

Da bismo prointegralili ovaj sistem jednačina, primetimo da prva i poslednja daju odmah:

$$\frac{\partial\, \lg \varphi x}{\partial x} = \frac{\partial\, \lg \psi x}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\, \lg \varphi y}{\partial y} = \frac{\partial\, \lg \psi y}{\partial y}, \qquad (40)$$

pa je

$$\psi_x = Y\varphi x, \qquad \psi_y = X\varphi_y .$$

gde je X funkcija od x, a Y funkcija od y.

Zamenjujući ψ iz jednačine (40) u srednjim jednačinama (39) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
&(X - Y)\varphi_{x^2}\varphi_y - 2Y'\varphi_x^2 = 0\\
&(X - Y)\varphi_{y^2}\varphi_x - 2X'\varphi_y^2 = 0.
\end{aligned}
\qquad (41)
$$

Ako sad na jednačine (40) primenimo uslov integrabilnosti biće

$$\psi xy = \varphi yx$$

$$(X - Y)\varphi_{xy} - Y'\varphi_x + X'\varphi_y = 0. \qquad (42)$$

Diferencijaljenjem prve jednačine (41) parcijalno po x ima se

$$X'\varphi_{x^2}\varphi_y - (X - Y)(\varphi_{x^3}\varphi_y + \varphi_{x^2}\varphi_{xy}) - 4Y'\varphi_x\varphi_{x^2} = 0. \qquad (43)$$

Kad veličine φ_{x^2} i φ_{xy} odredimo iz prve jednačine (41) i jednačine (42), pa njihove vrednosti uvrstimo u (43), dobijemo posle svodjenja

$$\varphi_{x^3} = \frac{6Y}{(X-Y)^2} \cdot \frac{\varphi_x^3}{\varphi_y^2}$$

Iz ove jednačine i prve (41) sledi

$$\frac{\varphi_{x^3}}{\varphi_{x^2}} = \frac{3}{2}\frac{\varphi_{x^2}}{\varphi_x},$$

čiji je integral

$$\frac{\varphi_{x^2}}{\varphi^3_x} = Y_1$$

funkcija samo promenljive y. Posle stepenovanja brojem $\frac{1}{2}$ biće

$$\frac{\varphi_{x^2}}{\varphi_x^{3/2}} = Y_1^{\frac{1}{2}}$$

Integral ove jednačine je

$$\frac{1}{\varphi_x^{\frac{1}{2}}} = \alpha x + \beta,$$

gde su β i α funkcije samo od y, tako da je

$$\varphi_x = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2}$$

Daljim integraljenjem dobijamo da je

$$\varphi = -\frac{1}{-\alpha x + \beta} + \gamma(y),$$

gde je γ proizvoljna funkcija; ili u obliku razlomka

$$\varphi = \frac{\rho x + \sigma}{\alpha x + \beta},$$

gde α, β, ρ i σ pretstavljaju funkcije samo od y.
Dakle, φ je razlomljena linearna funkcija od x. Potpunom analogijom bismo utvrdili da je φ razlomljena linearna funkcija i od y, te je prema tome

$$\varphi = \frac{d_1xy + a_1x + b_1y + c}{d_3xy + a_3x + b_3y + c_3}.$$

Istim putem bismo našli i da je:

$$\Phi = \frac{d_2xy + a_2x + b_2y + c}{d_3xy + a_3x + b_3y + c_3}.$$

Prva i poslednja od jednačina (39), odmah su zadovoljene. Kad ove vrednosti uvrstimo u srednje dve od pomenutih jednačina, uvidja se da je obavezno

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0.$$

Na taj način φ i ψ primaju definitivne oblike

$$\varphi = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \qquad \psi = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3},$$

koji pretstavljaju projektivne transformacije u ravni.

Pošto se pomoću projektivne transformacije, diferencijalna jednačina

$$y'' = 0$$

pretvara u

$$y_1'' = 0$$

Sophus Lie veli da je diferencijalna jednačina $y''= 0$ invarijantna prema toj transformaciji. To je takodje najopštija punktualna transformacija ravni koja diferencijalnu jednačinu $y''= 0$ ne menja ni u čem. Sada ćemo potražiti potrebne i dovoljne uslove da diferencijalna jednačina prvog reda bude, po Sophus Lie-u, invarijantna prema infinitezimalnoj transformaciji, ili kako se sada kaže da ta diferencijalna jednačina dopušta, ili pak ne, navedenu infinitezimalnu transformaciju.

Dokažimo za to najpre da se krive

$$\omega(x,y) = C$$

medjusobno smènjuju svakom transformacijom grupe $U(f)$, jedino ako je $U(\omega)$ neka funkcija od ω i ako te krive ne predstavljaju identički trajektorije grupe date infinitezimalnom transformacijom.

Odista ako se krive

$$\omega(x,y) = C$$

smenjuju transformacijom T_t koja čini grupu, onda svakom skupu od dve vrednosti t i C odgovara jedna vrednost $\gamma(t,C)$ tako da je

$$\omega(x_1,y_1) = \gamma(t,C)$$

za sve vrednosti x-sa i y-na datih vezom $\omega(x,y) = 0$.

Prema (37) imamo

$$U\omega(x,y) = \left[\frac{\partial\Upsilon(t,C)}{\partial t}\right]_{t=0}$$

što dokazuje da $U(\omega)$ zavisi od C, pa naravno i od .
Dakle

$$U(\omega) = F(\omega) \tag{44}$$

Ako li se pak zna da je

$$U(\omega) = F(\omega)$$

pošto $\omega = C$ nisu trajektorije, $U(\omega)$ nije identički jednako nuli, pa je prema (35)

$$\frac{d\omega_1}{dt} = F(\omega), \text{ gde je } \omega_1 \equiv \omega(x_1,y_1).$$

U izvesnoj oblasti regularnosti postoji integral

$$I(\omega_1) = \int \frac{d\,\omega_1}{F(\omega_1)},$$

jer $F(\omega)$ se ne anulira identički.
Dakle

$$I(\omega_1) = t + K$$

za $t = 0$ $\qquad I(\omega) = K,$

pa je $\qquad I(\omega_1) = I(\omega) + K,$

što u rešenom obliku postaje

$$\omega(x_1,y_1) = \Upsilon(t,C),$$

čime je gornja pretpostavka dokazana.

Na taj način dobijamo teoremu - kazanu Dickson-ovim jezikom:

<u>Za diferencijalnu jednačinu prvog reda koja ima integral $\Phi(x,y) = C$, kaže se da je invarijantna prema infinitezimalnoj transformaciji Uf, jedino ako se $U(\Phi)$ svodi na neku funkciju od Φ.</u>

Mada ova teorema nema praktične vrednosti - jer treba da raspolažemo integralom diferencijalne jednačine, a njega baš i tražimo, ona ima teorijsku vrednost i omogućiće nam da dodjemo do teoreme koja će biti od velike važnosti u primeni. Zaista neka je data diferencijalna jednačina prvog reda

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} \tag{45}$$

gde su A i B funkcije od x i y, kojoj odgovara linearna parcijalna diferencijalna jednačina sa nepoznatom funkcijom $f(x,y)$, naime:

$$Y(f) \equiv \frac{A\partial f}{\partial x} + \frac{B\partial f}{\partial y} = 0. \tag{46}$$

Pretpostavimo da je diferencijalna jednačina (45) invarijantna prema infinitezimalnoj transformaciji

$$Uf \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\ . \tag{47}$$

Lako je proveriti da se vrednost Poisson-ovih zagrada

$$(UP)f = U(Pf) - P(Uf) \tag{48}$$

svodi na

$$(UY)f \equiv (U(A) - Y(\xi)\ \frac{\partial f}{\partial x} - U(B) - Y(\eta)\ \frac{\partial f}{\partial y} \tag{49}$$

Ako je $\Phi(x,y)$ integral diferencijalne jednačine (45), tada je to i integral odgovarajuće parcijalne diferencijalne jednačine (46), pa će biti

$$Y(\Phi) = 0. \tag{50}$$

Kako smo pretpostavili da je diferencijalna jednačina invarijantna prema infinitezimalnoj transformaciji (47), to je prema ranijem

$$U(\Phi) \equiv \psi(\Phi).$$

Tada smenjujući f sa Φ u izrazu (48) imamo

$$(UY)\Phi \equiv U(Y\Phi) - Y(U\Phi) \equiv U(0) - Y(\psi(\Phi)) = 0. \tag{51}$$

Dakle Φ je integral linearne parcijalne diferencijalne jednačine koja se dobija izjednačivanjem sa nulom izraza (49). Znači da su koeficijenti ovako dobijene jednačine proporcionalni koeficijentima jednačine (50), odnosno (46), pa je zato

$$(UY)f \equiv \sigma\, Yf,$$

gde je σ neka funkcija od x i y.

Ako li se ima

$$0 \equiv (UY)\Phi \equiv U(Y\Phi) - Y(U\Phi),$$

tada je

$$0 \equiv Y(U\Phi).$$

To znači da je $U\Phi$ rešenje jednačine

$$Y(f) = 0,$$

pa prema tome je to i funkcija od Φ, i na taj način je diferencijalna jednačina (45) invarijantna prema $U(f)$.

Dakle: Diferencijalna jednačina (45) je invarijantna prema infinitezimalnoj transformaciji $U(f)$ samo onda ako je

$$(UY)f \equiv \sigma Y(f),$$

gde je σ funkcija od x i y, a

$$Y(f) = 0$$

odgovarajuća parcijalna linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

6. Integrabilni faktor. S.Lie ([3],150-1) dokazuje sledeću teoremu:

Ako diferencijalna jednačina

$$Bdx - Ady = 0, \tag{52}$$

kojoj odgovara linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$Y(f) \equiv A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

dopušta infinitezimalnu transformaciju

$$Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{53}$$

i ako trajektorije grupe infinitezimalne transformacije ne pretstavljaju indentički integralne krive diferencijalne jednačine (52), tada je

$$\frac{1}{B\xi - A\eta}$$

integrabilni faktor te diferencijalne jednačine, pri čemu očevidno imenilac

$$B\xi - A\eta = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ A & B \end{vmatrix}$$

mora biti različit od nule tj.

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0.$$

Takodje ne sme postojati identičnost

$$U(\Phi) \equiv 0,$$

jer bi onda Φ bilo zajedničko rešenje sistema jednačina:

$$U(f) = 0 \text{ i } Y(f) = 0.$$

Ali pošto je

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0,$$

to mora da bude

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \text{ i } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Znači

$$\Phi = C$$

pa bismo tako dobili trajektorije.

Zaključak. Ako je diferencijalna jednačina (52) invarijantna PREMA INFINITEZIMALNOJ TRANSFORMACIJI (47), onda je njen integracioni faktor izraz (54) čiji imenilac nije nikako nula.

GLAVA II

TRANSFORMACIJE I NJIHOVA UOPŠTENJA

7. Definicije transformacija i njihovih grupa, beskrajnih transformacija, i infinitezimalnih transformacija. Veliki deo svojih radova S.Lie je posvetio teoriji infinitezimalnih transformacija i proučavanju metoda integraljenja diferencijalni jednačina, jer se on klasičnim metodama integraljenja nije zadovoljavao. On je težio da stvori opštije metode koje bi obuhvatile pojedinačne poznate postupke i načine integraljenja različitih vrsta diferencijalnih jednačina.

Brojni tomovi sabranih dela S.Lie-a sadrže kritičke prikaze njegovih istraživanja, i komentare njegove korespodencije sa saradnicima i prijateljima.

Proučavajući ove materijale, čitalac može da prati razvoj S.Lie-ovih ideja i njegovih stremljenja u toku rada.

Rukovodeć. misao mu je bila uopštenje metoda integraljenja diferencijalnih jednačina. U vezi s tim, S.Lie i F. Klein su detaljno rasp avljali o pojmovima različitih transformacija, kojima su sa druge strane S.Lie i G.Scheffers posvetili više strana u svom udžbeniku [5] "Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig, Teubner, 1891".

S.Lie-u je isprva izgledalo da će mu pojmovi infinitezimalnih transformacija i njihovih grupa, koje je on za tu namenu stvorio i uveo u matemaičku analizu, obezbediti pun uspeh. Medjutim, nastaje razočarenje. On piše svom drugu A.Mayer-u da je došao do zaključka da te njegove metod nisu dovoljno podesne za ostvarenje željenih ciljeva, da je izgubio nadu koju je gajio u tom smislu, i veli dalje da mu se sad čini da su zato potrebni drugi komplikovaniji matematički oblici, pa najzad izražava sumnju da će te oblike uopšte moći ostvariti. ([7],V,S.583-587).

Sa svojim stalnim saradnikom Friedrich-om Engel-om S.Lie je objavio tri opširna toma o teoriji neprekidnih grupa transformacija gde su na veoma vešt, ali istovremeno i vrlo komplikovan način izvedene metode integraljenja diferencijalnih jednačina. Te metode predstavljaju više teorijski nego praktični značaj. Ipak medju navedenim rezultatima nalazi se i značajna teorema kojom se S.Lie s punim pravom ponosio. Ona glasi: Infinitezimalna transformacija homogene obične diferencijalne jednačine prvog reda odredjuje njen integracioni faktor.

U prvoj glavi pomenutog udžbenika su iznesene njegove osnovne ideje Stoga se ovde nećemo baviti tim pitanjima, nego ćemo uputiti čitaoce na pomenuto delo. Mi ćemo samo navesti S. Lie-ovu raspravu o poznatim homogenim običnim diferencijalnim jednačinama prvog reda ([5],285-6):

$$y' = \sigma\left(\frac{y}{x}\right), \tag{55}$$

koje on integrali uvodeći infinitezimalnu transformaciju

$$U(f) \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

za formiranje odgovarajućeg integrabilnog faktora.

Medjutim, pojam infinitezimalne transformacije jedne diferencijalne jednačine ili, kako kaže S.Lie, infinitezimalne transformacije koju dopušta jedna diferencijalna jednačina, nije lako definisati.

Zato, polazeći najpre od pojma jednočlanih produženih infinitezimalnih transformacija, i to konformnih, pa projektivnih, ja prelazim na izučavanje opšteg oblika kanoničnih infinitezimalnih transformacija, čije su definicije veoma jednostavne a teorija neposredna i pristupačna.

V.A.Steklov u svom čuvenom udžbeniku ([21],184), polazeći od pojma beskrajno malih tra sformacija S.Lie-a, uopštio je teoriju homogenih diferencijalnih jednačina na oblik

$$y' = x^{\frac{b}{a}-1}\,\sigma\left(\frac{y^a}{x^b}\right), \tag{56}$$

i integralio ih je pomoću uvodjenja infinitezimalne transformacije oblika

$$U(f) \equiv ax\,\frac{\partial f}{\partial x} + by\,\frac{\partial f}{\partial y} \tag{57}$$

U isto vreme V.A. Steklov je pokazao kako se ista metoda primenjuje na integraljenje običnih diferencijalnih jednačina prvog reda Euler-ovog i Abel-ovog oblika.

U ovom radu mi ćemo izvesti dalja uopštenja na jednačine drugod i višeg reda kao i na sisteme diferencijalnih jednačina koje dopuštaju, kako veli S.Lie, infinitezimalne transformacije konformnog i projektivnog oblika.

8. Veze koeficijenata sistema dve obične diferencijalne jednačine prvog reda i koeficijenata odgovarajućih infinitezimalnih transformacija.

U prethodnom paragrafu izneli smo detaljno definiciju infinitezimalne transformacije za jednu običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Sad ćemo dati, prema S.Lie-u, uopštenje ovog pojma na sistem od dve diferencijalne jednačine, koje je uopštenje on dao u Mathematische Annalen XI 5.496 u obliku četvrte teoreme, polazeći kako sam kaže, od uopštenja Abel-ovih radova, kao što smo to i pomenuli na petoj strani našeg uvoda.

Uzmimo opšti problem sistema dveju diferencijalnih jednačina prvog reda opšteg oblika

$$dy_1 = Y_1 dx, \qquad dy_2 = Y_2 dx, \tag{58}$$

kom odgovara linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \tag{59}$$

gde su Y_1 i Y_2 funkcije od x, y_1, y_2.

Prema malopredjašnjem uopštenju definicije infinitezimalne transformacije, uzmimo takodje i obrazac

$$U(f) \equiv \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y_2}. \tag{60}$$

I ovde su koeficijenti ξ, η_1, η_2 funkcije od x, y_1, y_2.

Da bi sistem (58) dopustio infinitezimalnu transformaciju (60), potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov

$$X(Uf) = \lambda X(f). \tag{61}$$

Dobijeni uslov (61) u razvijenom obliku glasi:

$$X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + X(\eta_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + X(\eta_2)\frac{\partial f}{\partial y_2} - U(Y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - U(Y_2)\frac{\partial f}{\partial y_2} = \lambda X(f)$$

On se raspada u sledeća tri uslova:

$$\lambda = X(\xi)$$

$$X(\eta_1) - U(Y_1) = \lambda Y_1$$

$$X(\eta_2) - U(Y_2) = \lambda Y_2$$

Eliminovanjem funkcije λ iz poslednje tri relacije dobijamo definitivna dva uslova:

$$X(\eta_1) - Y_1 X(\xi) = U(Y_1)$$
$$X(\eta_2) - Y_2 X(\xi) = U(Y_2) \qquad (62)$$

Izvedeni uslovi predstavljaju sistem od dve linearne parcijalne jednačine osobitog oblika, gde svaka jednačina zavisi od parcijalnih izvoda samo jedne nepoznate funkcije; sistem jednačina ovakvog oblika su ranije nosili Jakobijevo ime Medjutim kad je 1928 godine pronadjen Charpit-ev memoar [14], za koji se smatralo da je bio izgubljen, sistem (62) je dobio pravi naziv "Charpit-ev sistem".

Kao što je poznato, ovom sistemu odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$dx = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \frac{d\eta_1}{U(Y_1 + Y_1 X(\xi)} = \frac{d\eta_2}{U(Y_2 + Y_2 X(\xi)} \; . \qquad (63)$$

On se sastoji od polaznog sistema (58) i dve dopunske jednačine

$$d\eta_1 = \left[U(Y_1) + Y_1 X(\xi)\right]dx, \qquad d\eta_2 = \left[U(Y_2) + Y_2 X(\xi)\right]dx \qquad (64)$$

Uslovi (62) služe za rešavanje jednog od dva sledeća S. Lieova problema:

I. Naći opšti oblik koeficijenata infinitezimalne transformacije (60) kada su poznate funkcije Y_1 i Y_2 koji takodje zavise od x, y_1, y_2 kao i same funkcije Y_1 i Y_2.

II. Naći opšti oblik funkcija Y_1 i Y_2 tako da sistem od dve linearne obične diferencijalne jednačine (58) dopušta datu infinitezimalnu transformaciju (60).

9. Veze koeficijenata obične diferencijalne jednačine drugog reda sa koeficijentima odgovarajuće infinitezimalne transformacije.

Uočimo diferencijalnu jednačinu drugog reda:

$$y'' = \psi(x,\ y,\ y'), \tag{65}$$

kojoj odgovara sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda:

$$dy = y'dx, \qquad dy' = \psi\, dx, \tag{66}$$

čija je odgovarajuća jednačina (59):

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \psi\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{67}$$

Uslovi (62) da sistem diferencijalnih jednačina (66) ili jednačina (67) dopušte infinitezimalnu transformaciju (60) u navedenom slučaju postaju:

$$\begin{aligned} X(\eta_1) - y'X(\xi) &= U(y') \\ X(\eta_2) - \psi X(\xi) &= U(\psi). \end{aligned} \tag{68}$$

Uslovi (68) služe kao i uslovi (62) za rešavanje jednog od sledeća dva problema:

I. Naći opšti oblik koeficijenata infinitezimalne transformacije (60) kada je data obična diferencijalna jednačina drugog reda (65).

II. Naći opšti oblik diferencijalnih jednačina drugog reda koje dopuštaju datu infinitezimalnu transformaciju (60).

Napomenimo još da sad η_1 i η_2 zavise od x, y, y'.

10. Pojam produženih infinitezimalnih transformacija.

Da bi S.Lie našao uslov da diferencijalna jednačina (65) dopusti infinitezimalnu transformaciju

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{69}$$

koju ćemo zvati krnjom, jer ξ i η ne zavise od y', nego samo od x i y, on odredjuje ([5],261) pomoću varijacionog računa odgovarajuću promenu za y', i uvodi takozvanu produženu infinitezimalnu transformaciju, dopunjujući izraz (69) aditivnim članom

$\eta' \frac{\partial f}{\partial y'}$, gde je:

$$\eta' = \eta_x + y'\eta_y - y'\xi_x - y'^2\xi_y. \qquad (70)$$

Tada produžena infinitezimalna transformacija (69) postaje

$$U(f) \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}. \qquad (71)$$

Da bi diferencijalna jednačina drugog reda (65) dopustila ovu produženu infinitezimalnu transformaciju (71), potrebno je da budu ispunjeni odgovarajući uslovi (68), pri čemu treba staviti

$$\begin{aligned} &\eta_1 = \eta, \quad \eta_2 \equiv \eta' \equiv \eta_x + y'\eta_y - y'\xi_x - y'^2 \xi_y \\ &y_1 = y, \quad y_2 = y'; \qquad Y_1 = y', \quad Y_2 = \psi . \end{aligned} \qquad (72)$$

Posle ovih smena prvi uslov (68) prelazi u identičnost, a drugi postaje

$$\eta_{x^2} + 2y'\eta_{xy} + y'^2\eta_{y^2} + y'(\xi_{x^2} + 2y'\xi_{xy} + y'^2\xi_{y^2} +$$

$$+ \psi(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) - (\xi\psi_x + \eta\psi_y) - (\eta_x + y'\eta_y - y'\xi_y -$$

$$- y'^2\xi_y)\psi_{y'} = 0, \text{ ili kraće } X(\eta') - \psi X(\xi) = U(\psi). \qquad (73)$$

Dobijenu uslov (73) služi za rešavanje sledeća dva problema:

I. ξ i η su date funkcije od x, y. Tada relacija (73) nameće uslov koji mora da ispuni funkcija ψ, definisana jednačinom (65), ili što je isto, odgovarajuća parcijalna jednačina (67), da bi pomenuta jednačina dopustila produženu infinitezimalnu transformaciju (71).

II. Data je funkcija ψ. Tada relacija (73) predstavlja uslov koji moraju zadovoljiti koeficijenti ξ i η infinitezimalne transformacije (71), da bi tu infinitezimalnu transformaciju dopustila data diferencijalna jednačina drugog reda (65

G L A V A III

OPŠTI OBLIK OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG REDA KOJE DOPUŠTAJU PRODUŽENU KONFORMNU INFINITEZIMALNU TRANSFORMACIJU

11. Slučaj opšteg oblika obične diferencijalne jednačine drugog reda.

Ako je data diferencijalna jednačina (65) i produžena infinitezimalna transformacija (71), za koju je ispunjen uslov (61), treba naći opšti oblik funkcije ψ da bi diferencijalna jednačina drugog reda (65) dopustila pomenutu produženu infinitezimalnu transformaciju.

Za slučaj kad je:

$$\xi = ax, \qquad \eta = by,$$

biće

$$\eta' = (b - a)y'.$$

Tada uslov (73) postaje:

$$ax\psi_x + by\,\psi_x + (b - a)y'\,\psi_y = (b - 2a)\psi.$$

Odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina glasi:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dy'}{(b-a)y'} = \frac{d\psi}{(b - 2a)\psi}\,.$$

Iz njega se dobija traženi oblik funkcije

$$\psi = x^{\frac{b}{a} - 2}\,\Phi(g^a,\ h^a),$$

gde je

$$g = x^{-\frac{b}{a}}y, \qquad h = x^{1 - \frac{b}{x}}\,y'.$$

Prema tome, opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina drugog reda koje dopuštaju konformnu produženu infinitezimalnu transformaciju jeste

$$y'' = x^{\frac{b}{a} - 2}\,\Phi\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right) \tag{74}$$

Dobijeni rezultat predstavlja uopštenje rezultata koji je uveo V.Steklov za slučaj jedne diferencijalne jednačine prvog reda i predstavlja generalisanje poznate klase homogenih diferencijalnih jednačina.

12. Slučaj opšteg oblika diferencijalne jednačine trećeg reda:

Slično diferencijalnoj jednačini drugog reda (65) uzmimo sada diferencijalnu jednačinu trećeg reda

$$y''' = \psi(x, y, y', y''), \tag{75}$$

ili odgovarajući sistem tri obične diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} dy &= y'dx \\ dy' &= y''dx \\ dy'' &= \psi(x, y, y', y'')dx. \end{aligned} \tag{76}$$

Ovom sistemu odgovara linearna parcijalna diferencijalna jednačina

$$Y(f) \equiv f_x + y'f_y + y''f_{y'} + y'''f_{y''} = 0. \tag{77}$$

Neka je pored toga data i dvaput produžena infinitezimalna transformacija

$$V(f) \equiv \xi f_x + \eta f_y + \eta' f_{y'} + \eta'' f_{y''}, \tag{78}$$

gde su ξ i η izvesne funkcije od x i y, a

$$\eta' = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2$$

$$\eta'' = \eta_{x^2} + (2\eta_{xy} - \xi_{x^2})y' + (\eta_{y^2} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{y^2}y'^3 + \tag{79}$$

$$+ (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y''.$$

Da bi sistem (76) dopustio infinitezimalnu transformaciju (78) potrebno je da V(f) zadovolji jednačinu

$$Y(Vf) = 0,$$

ili

$$\begin{aligned} Y(Vf) \equiv\ & Y(\xi)f_x + Y(\eta)f_y + Y(\eta')f_{y'} + Y(\eta'')f_{y''} - \\ & - V(y')f_y - V(y'')f_{y'} - V(\psi)f_{y''} = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Eliminovanjem f_x iz jednačine (80) prema jednačini (77) dobijamo jednačinu

$$\begin{aligned} Y(Vf) &= \left[Y(\eta) - y'Y(\xi) - V(y')\right] f_y + \\ &+ \left[Y(\eta') - y''Y(\xi) - V(y'')\right] f_{y'} + \\ &+ \left[Y(\eta'') - \psi Y(\xi) - V(\psi)\right] f_{y''} \end{aligned} \tag{81}$$

Poslednja jednačina se raspada u sledeća tri uslova:

$$Y(\eta) - y'Y(\xi) - V(y') = 0 \tag{82}$$

$$Y(\eta') - y''Y(\xi) - V(y'') = 0 \tag{83}$$

$$Y(\eta'') - \psi Y(\xi) - V(\psi) = 0 \tag{84}$$

Uslovi (82) i (83) se indentički anuliraju na osnovu izraza (79) pa ostaje samo uslov (84) kao potreban i dovoljan.

$$\eta''_x + y'\eta''_y + y''\eta''_{y'} + \psi(\eta''_{y''} - \xi_x - y'\eta_y) =$$

$$= \xi\psi_x + \eta\psi_y + \eta'\psi_{y'} + \eta''\psi_{y''};$$

i predstavlja jednu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda po ψ.

Odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina će biti:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta'} = \frac{dy''}{\eta''} = \frac{d\psi}{\eta''_x + y'\eta''_y + y''\eta''_{y'} + \psi(\eta''_{y''} - \xi_x - y'\xi_y)} \tag{85}$$

Za slučaj konformne infinitezimalne transformacije, a to znači da je

$$\xi = ax, \qquad \eta = by$$

sistem (85) postaje:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dy'}{(b-a)y'} = \frac{dy''}{(b-2a)y''} = \frac{d\psi}{(b-3a)\psi}.$$

Iz ovog sistema dobijamo četiri integrala:

$$\frac{y^a}{x^b} = C_1, \quad \frac{y'^a}{x^{b-a}} = C_2, \qquad \frac{y''^a}{x^{b-2a}} = C_3, \qquad \psi = x^{\frac{b}{a} - 3} C_4$$

Prema tome, funkcija ψ ima sledeći oblik:

$$\psi = x^{\frac{b}{a} - 3}\, \Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}\right). \tag{86}$$

Znači, opšti oblik diferencijalne jednačine trećeg reda koja dopušta dvaput produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju (78) jeste

$$y''' = x^{\frac{b}{a}-3}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}\right) \qquad (87)$$

Time sam prethodno uopštenje proširio na diferencijalnu jednačinu trećeg reda.

13. Slučaj opšteg oblika obične diferencijalne jednačine n-og reda. Uzmimo opšti oblik obične diferencijalne jednačine n-og reda i n-1 puta produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju:

$$U(f) = axf + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i f_{y^{(i)}} \qquad (88)$$

gde je $\eta_i = (b - ia)y^{(i)}$.

Primenimo slično rasudjivanje na običnu diferencijalnu jednačinu n-og reda

$$y^{(n)} = \psi(x, y, y', \ldots\ldots, y^{(n-1)}).$$

Njoj odgovara sistem od n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda

$$dy^{(i)} = y^{(i+1)}dx, \qquad (i = 0,1,2,\ldots\ldots,n-2), \quad (89)$$

$$dy^{(n-1)} = x^{\frac{b}{a}-n}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}, \ldots, \frac{y^{(n-1)a}}{x^{b-(n-1)a}}\right)dx$$

Linearna parcijalna diferencijalna jednačina koja je ekvivalentna sistemu (89) glasi:

$$Y(f) \equiv f_x + \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i+1)} f_{y^{(i)}} + x^{\frac{b}{a}-n}\Phi f_{y^{(n-1)}} = 0.$$

Radeći slično prethodnom dobićemo opšti oblik funkcije ψ, u sledećem obliku

$$\psi = x^{\frac{b}{a}-n}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}, \ldots\ldots, \frac{y^{(n-1)a}}{x^{b-(n-1)a}}\right).$$

Tako dolazimo do opšteg oblika obične diferencijalne jednačine n-og reda koja dopušta n-1 puta produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju (88).

Time je ovde izvršeno potpuno uopštenje obične diferencijalne jednačine prvog reda koja dopušta maločas pomenutu infinitezimalnu transformaciju.

Ta se uopštena jednačina sada piše u obliku

$$y^{(n)} = x^{\frac{b}{a} - n}\,\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}, \ldots, \frac{y^{(n-1)a}}{x^{b-(n-1)a}}\right) \tag{90}$$

a njena odgovarajuća infinitezimalna transformacija glasi:

$$U^{(n-1)}(f) \equiv axf_x + byf_y + \sum_{i=1}^{n-1} \eta$$

gde je

$$\eta = (b - ia)f_{y^{(i)}}.$$

Generalizacija konformne transformacije

14. Koeficijenti transformacije: $\xi = U(x)$, $\eta = V(y)$.

Neka nam ovog puta koeficijenti infinitezimalne transformacije budu proizvoljne funkcije :

$$\xi = U(x), \qquad \eta = V(y). \tag{91}$$

Potražimo sada takav oblik funkcije $\psi(x,y,y')$ da sistem običnih diferencijalnih jednačina (66), ili, što je isto, odgovarajuća parcijalna diferencijalna jednačina (67), dopusti konformnu produženu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) \equiv U(x)f_x + V(y)f_y + \eta_1(x,y,y')f_{y'}, \tag{92}$$

Koeficijenat η_1 odredjuje se prema jednačini (70), pa će imati vrednost

$$\eta_1 = (V' - U')y'. \tag{93}$$

Tada se prvi uslov (68) svodi na identičnost, dok u drugom, mesto $_2$ treba staviti $_1$ prema (93) i on tada prima oblik

$$Y\left[(V_y' - U_x')y'\right] - \psi Y\left[U(x)\right] = V(\psi). \tag{94}$$

Imajući u vidu značenje operatora Y(...) i V(...), datih jednačinama (67) i (92), a s obzirom još na jednačine (91), uslov (94), u razvijenom i sredjenom obliku, postaje

$$U\psi_x + V\psi_y + (V_y' - U_x')y'\psi_{y'} = (y'V_{y^2}'' - U_{x^2}'')y' + (V_y' - 2U_x')\psi$$

Ovoj linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini po funkciji ψ odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{U(x)} = \frac{dy}{V(y)} = \frac{dy'}{(V_y' - U_x')y'} = \frac{d\,\psi(x,y,y')}{(y'V_{y^2}'' - U_{x^2}'')y' + (V_y' - 2y_x')\psi(x,y,y')} \tag{95}$$

Iz prve dve razmere imamo prvi integral, koji ćemo napisati ovako:

$$X - Y = C_1, \tag{96}$$

pri čemu je

$$X = \int \frac{dx}{U(x)}, \qquad Y = \int \frac{dy}{V(y)} \tag{97}$$

a C_1 je proizvoljna konstanta. Integral (96) napisaćemo u eksplicitnom obliku:

$$y = \theta(x, C_1). \tag{98}$$

Iz prve i treće razmere dobijamo

$$\frac{dy'}{y'} = \left[\frac{(V'_y)}{U} - \frac{U'_x}{U} \right] dx. \tag{99}$$

U jednačini (99) izraz (V'_y) označava da je argumenat y funkcije smenjen prema obrascu (98), pa ćemo ga dalje pisati u obliku $V'_y(\theta)$, tojest

$$(V'_y) = V'_y\left[\theta(x, C_1)\right]. \tag{100}$$

Na taj način jednačina (99) postaje:

$$\frac{dy'}{y'} = \left[\frac{V'_y\left[\theta(x, C_1)\right]}{U(x)} - \frac{U'_x}{U(x)}\right] dx.$$

Odavde integraljenjem nalazimo

$$\lg(Uy') = \int \frac{V'_x\ \theta(x, C_1)\, dx}{U(x)} + \lg C_2,$$

ili

$$C_2 = U\, y' e^{\mu(x, C_1)} \tag{101}$$

pri čemu smo uveli oznaku

$$-\int \frac{V'_y \theta(x, C_1)\, dx}{U(x)} = \mu(x, C_1). \tag{102}$$

Iz jednačine (101) imamo da je

$$y' = C_2 \rho(x, C_1), \tag{103}$$

gde smo stavili

$$\frac{e^{\mu(x, C_1)}}{U(x)} = \rho(x, C_1). \tag{104}$$

Uzimajući prvu i četvrtu razmeru (95) dobijamo, prema obrascu (100), sledeću linearnu diferencijalnu jednačinu po nepoznatoj traženoj funkciji ψ,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{u}\left[V'_y(\theta) - 2U'_x\right]\psi + \frac{1}{u}\left[V''_{y^2}(\theta)C_2^2\rho^2 - U''_{x^2}C_2\rho\right]. \quad (105)$$

integraleći poslednju jednačinu dobijamo

$$\psi(x,y,y') = e^{\int \frac{1}{u}\left[V'_y(\theta) - 2U'_x\right]dx}\left\{C_3 + C_2\int e^{\int\frac{1}{u}\left[2U'_x - V'_y(\theta)\right]dx}\right. .$$

$$\left. .\ \frac{\rho}{u}\left[C_2\rho V''_{y^2}(\theta) - U''_{x^2}\right]dx\right\} \quad (106)$$

Izračunajmo sad integrale jednačine (106). S obzirom na jednačinu(102) imamo:

$$\int\frac{1}{u}\left[2U'_x - V'_y(\theta)\right]dx = \lg U^2 - \mu(x,C_1)$$

$$\int\frac{1}{u}\left[V'_y(\theta) - 2U'_x\right]dx = \mu(x,C_1) - \lg U^2$$

Zato relacija (106) prima prostiji oblik

$$\psi(x,y,y') = \frac{e^{\mu}}{U^2}\left\{C_3 + C_2\int Ue^{-\mu}\rho\left[C_2\rho V''_{y^2}(\theta) - U''_{x^2}\right]dx\right\} \quad (107)$$

Pošto je prema jednačini (104)

$$U\,e^{-\mu}\rho = 1,$$

desna strana relacije (107) dopušta novo uprošćenje, naime

$$\psi(x,y,y') = \frac{\rho}{u}\left\{C_3 + C_2\int\left[C_2\rho V''_{y^2}(\theta) - U''_{x^2}\right]dx\right\}$$

ili

$$\psi(x,y,y') = \frac{\rho}{u}\left\{C_3 + C_2^2\int\rho V''_{y^2}(\theta)dx - C_2U'_x\right\} \quad (108)$$

Rešavajući ovu jednačinu po C_3 imamo

$$C_3 = \frac{U}{\rho}\psi - C_2^2\int\rho V''_{y^2}(\theta)dx + C_2U'_x.$$

Kad eliminišemo vrednosti C_1 i C_2 prema jednačinama (96),(101), (102) i (104), nalazimo:

$$C_3 = U^2\psi e^{-\mu(x,X-Y)} - U^2y^{*2}e^{-2\mu(x,X-Y)}W(x,X-Y) +$$

$$+ Uy'e^{-\mu(x,X-Y)}U'_x, \tag{109}$$

gde je uvedena oznaka

$$W(x,X-Y) = \int \frac{V_y'^2(\theta)e^{\mu(x,C_1)}}{U(x)}\,dx. \tag{110}$$

Prema tome tražena funkcija ψ odredjuje se jednačinom

$$C_3 = \pi(C_1,C_2),$$

gde C_3 ima vrednost datu jednačinom (109), a C_1 i C_2 jednačinama (96) i (101). Znači imaćemo

$$U^2\psi e^{-\mu(x,X-Y)} - U^2y'^2e^{-\mu(x,X-Y)}W(x,X-Y) + Uy'e^{-\mu(x,X-Y)}U'_x =$$

$$= \Pi(X-Y,Uy'e^{-\mu(x,X-Y)}).$$

Rešena po ψ poslednja jednačina glasi:

$$\psi = \frac{e^{\mu(x,X-Y)}}{U^2(x)}\Pi(X-Y,yU(x)e^{-\mu(x,X-Y)}) +$$

$$+ \frac{y'^2W(x,X-Y)}{e^{\mu(x,X-Y)}} - y'\frac{U'_x}{U(x)}, \tag{111}$$

gde se funkcije μ i W odredjuju prelaznim obrascima (102) i (110). Znači opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda koja dopušta uopštenu produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju (92) glasi:

$$y'' = \frac{e^{\mu(x,X-Y)}}{U^2(x)}\Pi\left[X-Y,y'U(x)e^{-\mu(x,X-Y)}\right] - \frac{y'W(x,X-Y)}{e^{\mu(x,X-Y)}}. \tag{112}$$

15. Provera za partikularni slučaj. Iz rezultata (112) možemo dobiti ranije dobijeni rezultat (7),tj. za slučaj kad je

$$\xi = ax, \qquad \eta = by. \tag{113}$$

Tada imamo prema jednačinama (102),(110), i (97):

$$\mu = \int\frac{bdx}{ax} = \lg x^{\frac{b}{a}} \qquad W = \int\frac{e^{\mu}dx}{ax} = 0$$

$$X = \int\frac{dx}{ax} = \lg x^{\frac{1}{a}} \qquad Y = \int\frac{dy}{by} = \lg y^{\frac{1}{b}}.$$

Znači funkcija $\psi(x,y,y')$ imaće oblik:

$$\psi = \frac{x^{\frac{b}{a}}}{a^2x^2}\Pi\left[\lg\frac{x^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{b}}},\ y\acute{a}x\ x^{-\frac{b}{a}}\right]-\frac{y'}{x}$$

ili

$$\psi = \frac{x^{\frac{b}{a}}}{a^2}\Pi\left(\lg\frac{x^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{b}}},\ \frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}\right)-\frac{y'}{x}$$

pošto je

$$\lg\frac{x^{\frac{1}{a}}}{y^{\frac{1}{b}}} = -\frac{1}{ab}\lg\frac{y^a}{x^b},$$

možemo napisati takodje da je

$$\psi = \frac{x^{\frac{b}{a}-2}}{a^2}\Pi_2\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}\right)-\frac{y'}{x},$$

ili još

$$\psi = \frac{x^{\frac{b}{a}-2}}{a^2}\left[\Pi_2\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}\right)-a\frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}\right],$$

i najzad

$$\psi = x^{\frac{b}{a}-2}\Pi\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right), \qquad (114)$$

gde je

$$\pi = \frac{1}{a^2}\Pi_2\left(\frac{y^a}{x^b},\ \frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}\right)-a\frac{ay'}{x^{\frac{b}{a}}-1}.$$

Pošto se dobijeni rezultat (114), poklapa sa onim pod (74), znači da nadjena jednačina (111) obuhvata i partikularni slučaj (113).

16. Opšti oblik diferencijalnih jednačina drugog reda koje dopuštaju produženu infinitezimalnu transformaciju oblika $\xi = U(x,y)$, $\eta = V(x,y)$

Uzmimo sad opšti slučaj gde su koeficijenti infinitezimalne transformacije proizvoljne funkcije od x i od y, naime

$$\xi = U(x,y), \qquad \eta = V(x,y). \tag{115}$$

Potražimo i pod ovim uslovima opšti oblik **funkcije** ψ tako da sistem (66), odnosno odgovarajuća parcijalna diferencijalna jednačina (67) dopusti produženu infinitezimalnu transformaciju oblika (71), drugim rečima transformaciju:

$$V(f) \equiv U(x,y)f_x + V(x,y)f_y + \eta_1(x,y,y')f_{y'} \tag{116}$$

gde koeficijenat ima vrednosti:

$$\eta_1 = V_x + (V_y - U_x)y' - U_y y'^2. \tag{116'}$$

Sada uslov (73) prima sledeći oblik

$$Y\left[V_x + (V_y - U_x)y' - U_y y'^2\right] - \psi Y\left[U(x,y)\right] = V(\psi) \tag{117}$$

S obzirom na poznata značenja operatora $Y(\ldots)$ i $V(\ldots)$, prethodni uslov (117) razvijen i sredjen postaje:

$$\begin{aligned} V_x 2 + (V_{yx} - U_x 2)y' - U_{yx}y'^2 + y'\left[V_{xy} + (V_y 2 - U_{xy})y' - U_y 2y'^2\right] + \\ + \psi(V_y - 2U_x - 3y'U_y) = U\psi_x + V\psi_y + \left[V_x + (V_y - U_x)y' - \right. \\ \left. - U_y y'^2\right]\psi_{y'}. \end{aligned} \tag{118}$$

Sistem običnih diferencijalnih jednačina koji odgovara linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini (118) u odnosu na funkciju ψ glasi:

$$\frac{dx}{U} = \frac{dy}{V} = \frac{dy'}{V_x + (V_y - U_x)y' - U_y y'^2} =$$

$$= \frac{d\psi}{V_x 2 + (V_{xy} - U_x 2)y' - U_{xy}y'^2 + y'\left[V_{xy} + (V_y 2 - U_{xy})y' - U_y 2y'^2\right] + \psi(V_y - 2U_x - 3\,U_y y')} \tag{119}$$

Iz prve dve razmere koje predstavljaju opšti oblik jedne obične diferencijalne jednačine po **x** i **y**, dobijamo integral opšteg oblika koji ćemo uslovno obeležiti ovako:

$$\alpha(x,y) = C_1\,, \tag{120}$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta. Ovaj integral napisan u eksplicitnom obliku glasi

$$y = \theta(x,C_1). \tag{121}$$

Iz prve i treće razmere imamo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{V_x + (V_y - U_x)y' - U_y y'^2}{U}$$

Na osnovu jednačine (121), koeficijenti poslednje jednačine postaju:

$$\left(\frac{V_x}{U}\right) = a(x,C_1),\ \left(\frac{V_y - U_x}{U}\right) = b(x,C_1),\left(\frac{-U_y}{U}\right) = C(x,C_1) \tag{122}$$

gde zagrade (...) označavaju rezultat zamene promenljive y funkcijom $\theta(x,C_1)$.
Uvodeći još, pored toga, smenu $y' = p$, dobijamo Riccati-evu diferencijalnu jednačinu

$$p' = a + bp + Cp^2, \tag{123}$$

gde su koeficijenti a, b, c dati jednačinama (122). Označimo integral ove jednačine na sledeći način

$$\beta(x,y') = C_2, \tag{124}$$

gde je C_2 proizvoljna konstanta.

Napisan u eksplicitnom obliku, on glasi:

$$y' = \sigma(x,C_2). \tag{125}$$

Iz prve i četvrte razmere (119), a s obzirom na (124) i (125), dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu po funkciji $\psi(x,y,y')$:

$$\frac{d\psi}{dx} = A(x,C_1)\psi + B(x,C_1,C_2), \tag{126}$$

gde je

$$A(x,C_1) = \frac{1}{U(x,\theta)}\left[V_y(x,\theta) - 2U_x(x,\theta) - 3U_y(x,\theta)\right], \tag{127}$$

$$B(x,C_1,C_2) = \frac{1}{U(x,\theta)}\Big\{V_y2(x,\theta) + \left[V_{xy}(x,\theta) - U_x2(x,\theta)\right]y' -$$
$$- U_{xy}(x,\theta)y'^2\Big\} + \frac{y'}{U(x,\theta)}\Big\{V_{xy}(x,\theta) + \Big[V_y2(x,\theta) - U_{xy}(x,\theta)y' -$$
$$- U_{xy}(x,\theta)y'^2\Big]\Big\}$$

Integral jednačine (126) glasi:

$$\psi(x,y,y') = e^{\int A dx}\left(C + \int e^{-\int A dx} B dx\right), \qquad (128)$$

ili

$$\psi(x,y,y'') = e^{\int A(x,\alpha) dx}\left[\Pi(\alpha,\beta) + \int e^{-\int A(x,\alpha) dx} B(x,\alpha,\beta) dx\right],$$

gde Π označava proizvoljnu funkciju od α i β.

Na taj način opšti oblik diferencijalne jednačine drugog reda, koja dopušta opštu produženu infinitezimalnu transformaciju (116), glasi:

$$y'' = e^{\int A(x,\alpha) dx}\left[\Pi(\alpha,\beta) + \int e^{-\int A(x,\alpha) dx} B(x,\alpha,\beta) dx\right] \qquad (129)$$

gde argumenti α i β imaju ranije data značenja (120) i (124).

G L A V A - IV

OPŠTI OBLIK SISTEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA KOJE DOPUŠTAJU PROJEKTIVNE INFINITEZIMALNE TRANSFORMACIJE

17. Slučaj kad sistem ima dve diferencijalne jednačine. Pretpostavimo da imamo dve obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$dy_1 = Y_1 dx, \qquad dy_2 = Y_2 dx, \tag{130}$$

čija odgovarajuća parcijalna diferencijalna jednačina glasi:

$$Y(f) = f_x + Y_1 f_{y_1} + Y_2 f_{y_2} = 0, \tag{131}$$

gde su koeficijenti Y_1 i Y_2 funkcije od x, y_1 i y_2.
Uzmimo još transformaciju

$$U(f) = \xi f_x + \eta_1 f_{y_1} + \eta_2 f_{y_2}, \tag{132}$$

čiji su koeficijenti $\xi \eta$ i η takodje funkcije od x, y_1 i y_2, a koju ćemo prema S,Lie-u zvati projektivnom.
Da bi sistem (130) dopustio transformaciju (132), potrebno je da budu ispunjeni uslovi (62), koji sada glase

$$\begin{aligned} Y(\eta\ ) &= Y_1 Y(\xi) + U(Y_1) \\ Y(\eta\ ) &= Y_2 Y(\xi) + U(Y_2). \end{aligned} \tag{133}$$

18. Opšti oblik sistema običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje dopuštaju projektivnu infinitezimalnu transformaciju. Potražimo opšti oblik funkcija Y_1 i Y_2 sistema (130) tako da bi ovaj sistem dopustio projektivnu infinitezimalnu transformaciju oblika

$$U(f) \equiv axf_x + b_1 y_1 f_{y_1} + b_2 y_2 f_{y_2}. \tag{134}$$

Ovaj problem se rešava na osnovu uslova (133) koji daje Charpit-ev sistem od dve parcijalne diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} axY_{1x} + b_1 y_1 Y_{1y_1} + b_2 y_2 Y_{1y_2} &= (b_1 - a)Y_1 \\ axY_{2x} + b_1 y_1 Y_{2y_1} + b_2 y_2 Y_{2y_2} &= (b_2 - a)Y_2\ , \end{aligned} \tag{135}$$

kome odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy_1}{b_1 y_1} = \frac{dy_2}{b_2 y_2} = \frac{dY_1}{(b_1 - a)Y_1} = \frac{dY_2}{(b_2 - a)Y_2}.$$

Iz poslednjeg sistema, slično ranijem, dobijaju se tražene funkcije Y_1 i Y_2 u obliku:

$$Y_1 = x^{\frac{b}{a} - 1} \Phi_1 \left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}} \right),$$

$$Y_2 = x^{\frac{b}{a} - 1} \Phi_1 \left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}} \right),$$

a sistem (130) postaje

$$dy_i = x^{\frac{bi}{a} - 1} \Phi_i \left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}} \right) dx \qquad (136)$$

$$(i = 1,2).$$

Dobijeni rezultat predstavlja novo uopštenje rezultata koje smo postigli u prethodnoj glavi.

<u>19. Slučaj kad imamo sistem od tri diferencijalne jednačine prvog reda</u>. Uzmimo sistem od 3 obične diferencijalne jednačine:

$$dy_i = Y_i dx \qquad (137)$$

$$(i = 1,2,3).$$

Potražimo opšti oblik funkcija Y_1, Y_2, Y_3, tako da sistem (137) dopusti projektivnu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) = axf_x + b_1 y_1 f_{y_1} + b_2 y_2 f_{y_2} + b_3 y_3 f_{y_3}. \qquad (138)$$

Sistemu (137) odgovara linearna parcijalna diferencijalna jednačina:

$$Y(f) \equiv f_x + Y_1 f_{y_1} + Y_2 f_{y_2} + Y_3 f_{y_3} = 0. \qquad (139)$$

Kao što je poznato potrebno je da relacije (138) i (139) ispune uslov:

$$Y(ax)f_x + \left[Y(b_1 y_1) - V(Y_1)\right] f_{y_1} + \left[Y(b_2 y_2) - V(Y_2)\right] f_{y_2} +$$

$$+ \left[Y(b_3 y_3) - V(Y_3)\right] f_{y_3} = 0. \qquad (140)$$

Pošto eleminišemo f_x iz jednačine (139) i (140) imaćemo:

$$Y(Vf) = Y(b_1y_1) - Y_1Y(ax) - V(Y_1)\, f_{y_1} + Y(b_2y_2) -$$

$$- Y_2Y(ax) - V(Y_2)\, f_{y_2} + Y(b_3y_3) - Y_3Y(ax) -$$

$$- V(Y_3)\, f_{y_3} = 0$$

Poslednja jednačina se raspada u sledeće tri:

$$\begin{aligned} Y(b_1y_1) - Y_1Y(ax) - V(Y_1) &= 0 \\ Y(b_2y_2) - Y_2Y(ax) - V(Y_2) &= 0 \\ Y(b_3y_3) - Y_3Y(ax) - V(Y_3) &= 0 \end{aligned} \tag{141}$$

Napisane tri jednačine predstavljaju potrebne i dovoljne uslove da polazni sistem od tri diferencijalne jednačine (137) dopusti projektivnu infinitezimalnu transformaciju (138). Ovi uslovi daju sledeći Charpit-ev sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine;

$$axY_{1x} + b_1y_1Y_{1y_1} + b_2y_2Y_{1y_2} + b_3y_3Y_{1y_3} = (b_1 - a)Y_1$$

$$axY_{2x} + b_1y_1Y_{2y_1} + b_2y_2Y_{2y_2} + b_3y_3Y_{2y_3} = (b_2 - a)Y_2$$

$$axY_{3x} + b_1y_1Y_{3y_1} + b_2y_2Y_{3y_2} + b_3y_3Y_{3y_3} = (b_3 - a)Y_3 ,$$

kome odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy_1}{b_1y_1} = \frac{dy_2}{b_2y_2} = \frac{dy_3}{b_3y_3} = \frac{dY_1}{(b_1-a)Y_1} = \frac{dY_2}{(b_2-a)Y_2} =$$

$$= \frac{dY_3}{(b_3-a)Y_3}$$

Iz ovog sistema slično prethodnom, dobijamo tražene funkcije Y_1, Y_2 i Y_3 u obliku:

$$Y_i = x^{\frac{b_i}{a} - 1}\, \Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \frac{y_3^a}{x^{b_3}}\right), \quad (i = 1, 2, 3),$$

pa sistem (137) postaje

$$dy_i = x^{\frac{bi}{a}-1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \frac{y_2^a}{x^{b_3}}\right)dx \tag{142}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

20. Slučaj sistema od n diferencijalnih jednačina prvog reda. Za opšti slučaj imali bismo sistem od n običnih diferencijalnih jednačina

$$dy_i = Y_i dx \tag{143}$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

kom odgovara jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina

$$Y(f) \equiv f_x + \sum_{i=1}^{n} Y_i f_{yi} = 0 \tag{144}$$

Potražimo opšti oblik funkcija Y_i, tako da sistem (143) dopusti projektivnu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) \equiv axf_x + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i f_{yi} \tag{145}$$

Radeći kao u prethodnom slučaju dobili bismo sistem od n sledećih uslova

$$Y(b_i y_i) - Y_i Y(ax) - V(Y_i) = 0 \tag{146}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ovaj sistem predstavlja Charpit-ev sistem od n linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda,

$$axY_{ix} + \sum_{i=1}^{n} b_j y_j Y_{iy_j} = (b_i - a)Y_i \tag{147}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Sistemu (147) odgovara sistem običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy_1}{b_1 y_1} = \ldots = \frac{dY_1}{(b_1-a)Y_1} = \ldots = \frac{dY_n}{(b_n-a)Y_n} \tag{148}$$

Iz sistema (148) lako dobijamo n traženih funkcija Y_i u obliku

$$Y_i = x^{\frac{bi}{a}-1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \frac{y_3^a}{x^{b_3}}, \ldots \frac{y_n^a}{x^{b_n}}\right).$$

Na taj način sistem (143) koji dopušta projektivnu infinitezimalnu transformaciju (145) glasi

$$dy_i = x^{\frac{bi}{a} - 1} \Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \ldots \frac{y_n^a}{x^{b_n}}\right) dx \tag{149}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dobijeni sistem jednačina (149) predstavlja opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje dopuštaju projektivnu infinitezimalnu transformaciju datu izrazom (145).

GLAVA V

TEORIJA KANONIČNIH INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA

21. Definicija. Pojam infinitezimalne transformacije za integraljenje diferencijalnih jednačina Sophus Lie uvodi na dva različita načina. Radi toga on uopštava Abel-ova ispitivanja osobina korena algebarskih jednačina. Idući jednim novim, potpuno originalnim putem, služeći se opštom matematičkom teorijom neprekidnih grupa, teorijom koju je za tu namenu baš i stvorio, S.Lie generališe već poznate metode integraljenja običnih diferencijalnih jednačina. Sabrana dela S.Lie-a 7 sadrže njegovu prepisku sa A.Mayer-om, iz koje se vidi da je S.Lie uložio mnogo truda u tom pravcu, kao i to da nije bio potpuno zadovoljan dobijenim rezultatima i da je razočaran što nije mogao postići definitivni cilj.

Godine 1887 Camille Jordan je u svom poznatom udžbeniku 9 "Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique" izložio vrlo sažeto i jasno teoriju infinitezimalnih transformacija, ali potpuno nezavisno od teorija grupa neprekidnih transformacija. Time je C.Jordan postigao veliko uprošćavanje u izlaganju teorije infinitezimalnih transformacija kao i primene ove teorije na probleme integraljenja diferencijalnih jednačina.

S.Lie je, možda kao odgovor na Jordanov rad, sa svoje strane, posle godinu dana - 1888 godine 8 , objavio prvu svesku novog obimnog rada pod naslovom "theorie der Transformationsgruppen" u zajednici sa profesorom F.Engelom. U navedenom delu se raspravlja teorija infinitezimalnih transformacija, koja je zasnovana na nizu mnogobrojnih i komplikovanih stavova. Pomenimo samo to da prvi tom, od 632 strane, sadrži 114 različitih teorema, što jasno govori o obilju materijala. Dve godine docnije 8 izlazi II tom posvećen teoriji transformacija dodira, dok nešto 8 kasnije objavljuje i III tom u kome se izlaže problem strukture grupa transformacije.

Sa druge strane, A.Mayer je objavio svoju teoriju infinitezimalnih transformacija 10 , takodje nezavisno od teorije neposrednih grupa. Na ovaj način je nastao nov pravac proučavanja teorije infinitezimalnih transformacija, koje su dalje razradjivali A.Buhl i P.Appell.

Ovaj poslednji, veliki matematičar, je usko povezao Jordan-ove rezultate sa ranijim radovima J.Liouville-a i G.Königs-a. Zatim je N.Saltykow generalisao pomenute rezultate i tako otvorio nov razvoj u izučavanju teorije infinitezimalnih transformacija. Bržem napretku pomenute teorije doprineo je C.Jordan objavljivanjem, u svom čuvenom, Journal de Mathématiques pures et appliquées - 6^{e} Série, t.I, Fasc.1,1905,memoar N.Saltykow-a Étude sur les transformations infinitésimales, koji se odnosio na novu teoriju koja bi se mogla nazvati kanonična teorija infinitezimalnih transformacija.

22. Teorija infinitezimalnih transformacija. Mada je naziv infinitezimalne transformacije uveo Sophus Lie, njihov prvi obrazac koji S.Lie zove "Infinitesimale Beruhrungstransformation", primenio je Charpit još 1784 godine 14 , a zatim su se njime služili i ostali matematičari koji su radili na teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina pre S.Lie-a.

Uočimo običnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$dy - Xdx = 0, \tag{150}$$

gde je X funkcija promenljivih veličina x i y.

Problem integraljenja ove jednačine (150) istovetan je sa problemom integraljenja linearne parcijalne diferencijalne jednačine

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{151}$$

gde je f funkcija od dve nezavisno promenljive veličine x i y, dok simbol X(f) predstavlja kraću oznaku prve strane parcijalne diferencijalne jednačine (151).

Označimo li sa f integral ove jednačine (151), onda jednačina

$$f(x,y) = C, \tag{152}$$

gde je C proizvoljna konstanta, pretstavlja i integral obične diferencijalne jednačine (150).

Ako obrazac

$$U(f) \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{153}$$

gde su ξ i η funkcije od x i y, zadovoljava uslov

$$X\,U(f) = AX(f), \tag{154}$$

pri čemu je A uopšte funkcija promenljivih veličina x i y. S. Lie naziva izraz (153) infinitezimalnom transformacijom bilo jednačine (150) bilo jednačine (151). Generališući na više načina ovu definiciju, S.Lie stvara, u saradnji sa F.Engel-om teoriju infinitezimalnih transformacija običnih diferencijalnih jednačina. Ova teorija je izložena u već pomenutim njegovim predavanjima, kao i u udžbeniku Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen bearbeitet und herausgegeben von Dr. Georg Scheffers. Leipzig. 1891 5 .

Medjutim, C.Jordan taj isti obrazac (153) smatra infinitezimalnom transformacijom običnih diferencijalnih jednačina ako je on istovremeno, kao i funkcija f, integral jednačine (151). Prednost ove diferencije nad S.Lie-ovom je očigledna. Na osnovu nje mora biti

$$X\,U(f) = 0. \tag{155}$$

Navedene dve definicije infinitezimalne transformacije potpuno se razlikuju. Dok Jordan-ova definicija obuhvata S.Lie-ovu, S.Lie-ova ne uključuje Jordan-ovu. Jordan-ova definicija je od veće koristi nego S.Lie-ova. Zaista, da bi stvorio svoju teoriju infinitezimalnih transformacija, S.Lie je primoran da izmišlja drugu, novu, veoma opširnu teoriju grupa neprekidnih transformacija. Naprotiv, C.Jordan-u su dovoljni osnovni pojmovi moderne teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina da bi, polazeći od svoje definicije (155), došao do neophodnih stavova teorije o kojoj je reč.

Nastavljajući delo C.Jordan-a, akademik N.Saltykow je pokazao da je čitava teorija infinitezimalnih transformacija čvrsto vezana sa problemom integraljenja parcijalnih diferencijalnih jednačina, tako da se obe navedene teorije medjusobno upotpunjuju.

Uvedeni uslov (155), razvijen prema obrascu (153), postaje

$$X\,U(f) \equiv X\left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi X(\frac{\partial f}{\partial x}) + X(\eta)\frac{\partial f}{\partial y} + \eta X(\frac{\partial f}{\partial y}) =$$

$$= X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 f}{\partial x dy}) + X(\eta)\frac{\partial f}{\partial y} + \tag{156}$$

$$+ \eta(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Medjutim diferencijaleći identičnost (151). po x odn sno po y, dobijamo identičnosti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{f}{x\,y} + X\frac{f}{y^2} + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{157}$$

Eliminovanjem parcijalnih izvoda drugog reda iz relacije (156) i (157) prema (153) biće:

$$X\,U(f) \equiv X(\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + \left[X(\eta) - U(X)\right]\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{158}$$

Ako sad iz ovog obrasca, i obrasca (151), eliminujemo $\frac{f}{x}$, imaćemo definitivno identičnost

$$X\,U(f) \equiv \left[X(\xi) - XX(\eta) - U(X)\right]\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{158}$$

Pošto je $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, identičnost (158) daje koeficijente infinitezimalne transformacije (153) koji zadovoljavaju uslov

$$X(\eta) - XX(\xi) = U(X). \tag{159}$$

Lako je u isto vreme dokazati i obrnuti stav, naime; da uslov (158) nije samo neophodan, nego da je on i dovoljan da bi obrazac (153) mogao odrediti infinitezimalnu transformaciju date diferencijalne jednačine (150) ili odgovarajuće parcijalne jednačine (151). Zaista, ako vrednosti   i   zadovoljavaju identički obrazac (159), onda je uslov (158) identički ispunjen tj. uslov (155) postoji, prema tome obrazac (153) predstavlja infinitezimalnu transformaciju jednačina (150) ili (151).

Dobijeni uslov (159), u razvijenom obliku glasi

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} + X\frac{\partial\eta}{\partial y} = \xi\frac{\partial X}{\partial y} + \eta\frac{\partial X}{\partial y} + XX(\xi). \tag{160}$$

Uzmemo li za $\xi(x,y)$ na koju funkciju promenljivih

x i y, tada dobijena jednakost (160) služi za odredbu jedne od dveju veličina, η ili X, kad je druga od ovih data. Prema tome, ako je, pored ξ, i funkcija X data, onda se integraljenje diferencijalne jednačine (160) svodi na integraljenje sistema običnih diferencijalnih jednačina:

$$dx = \frac{dy}{X} = \frac{d\eta}{\xi\frac{\partial X}{\partial x} + \eta\frac{\partial X}{\partial y} + XX(\xi)} \tag{161}$$

Prva se dva člana ovog sistema poklapaju sa datom jednačinom (150). Označimo njen integral sa

$$\omega(x,y) = C_1, \tag{162}$$

a drugi integral sistema (161) sa

$$\Omega(x,y,\xi,\eta) = C_2 \tag{163}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Prema tome opšti integral sistema (161) je $\Phi(\omega, \Omega)$, ili pak

$$\Omega(x,y,\xi,\eta) = \Psi\left[\omega(x,y)\right], \tag{164}$$

gde su Φ i Ψ dve proizvoljne funkcije. Dobijena relacija (164) odredjuje opšti oblik koeficijenata η, pa samimtim i infinitezimalnu transformaciju posmatrane jednačine (150) ili (151). Otud proizilazi da jednačine (150) ili (151) dopuštaju neograničen broj infinitezimalnih transformacija, koje se sve dobijaju pomoću opšteg integrala sistema (161).

Medjutim, ako su vrednosti ξ i η date, to je onda u relaciji (160) nepoznata funkcija X. Tada se ova odredjuje integraljenjem sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dX}{X(\eta)-XX(\xi)}. \tag{165}$$

Označimo integrale napisanog sistema sa

$$\omega_1(x,y) = C_1' \quad \text{i} \quad \omega_2(x,y,X) = C_2', \tag{166}$$

gde su C_1' i C_2' dve proizvoljne integracione konstante. Prvi od integrala (166) sadrži dve promenljive x i y, a predstavlja integral linearne parcijalne diferencijalne jednačine

$$U(f) = 0, \tag{167}$$

čija je leva strana infinitezimalna transformacija (153).

Integral $\omega_1(x,y)$ zove se INVARIJANTOM DATE INFINITEZIMALNE TRANSFORMACIJE (153).

Iz ovog izlazi zaključak da se opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina (150), koji se odredjuje odgovarajućom vrednošću funkcije X, definiše jednačinom opšteg oblika

$$\Omega_1(x,y,X) = \theta\left[\omega_1(x,y)\right],$$

gde je proizvoljna funkcija. Prema tome, opšti oblik obične diferencijalne jednačine (150), koja ima infinitezimalnu transformaciju (153), može se predstaviti u sledećem obliku

$$\Omega_1(x,y,\frac{dy}{dx}) = \theta\left[\omega_1(x,y)\right],$$

gde je θ proizvoljna funkcija, a ω invarijanta naše infinitezimalne transformacije (153). Na ovaj način se rešavaju problemi odredbe infinitezimalnih transformacija za datu običnu diferencijalnu jednačinu (150). kao i iznalaženje obične diferencijalne jednačine koja ima datu infinitezimalnu transformaciju (153)

Kao primer navešću problem iz predavanja akademika N.Saltykow-a, držanih 1925 godine u Louvain-u. Naime, traži se opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina koje dopuštaju konformnu infinitezimalnu transformaciju datog oblika

$$ax\frac{\partial f}{\partial x} + by\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{168}$$

gde su a i b dva stalna koeficijenta.

Pošto pod navedenim pretpostavkama imamo:

$$\xi = ax, \quad \eta = by, \quad X(\ldots) = \frac{\partial(\ldots)}{\partial x} + X\frac{\partial(\ldots)}{\partial y},$$

u našem slučaju sistem (165) postaje

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dX}{(a-b)X}. \tag{169}$$

Ovaj sistem diferencijalnih jednačina ima dva sledeća integrala

$$\omega_1 = \frac{x^b}{y^a}, \quad \frac{X^a}{x^{a-b}}$$

Prema tome, traženi opšti oblik običnih diferencijalnih jednačina glasi:

$$y' = x^{1-\frac{b}{a}} F\left(\frac{x^b}{y^a}\right),$$

gde je F proizvoljna funkcija.

Sličan rezultat dobija takodje i V.A.Steklov u svom čuvenom udžbeniku "Osnovi teorije integraljenja običnih diferencijalnih jednačina" objavljenom 1927 godine u Moskvi i Lenjingradu (V.str.188).

Polazeći od definicije infinitezimalnih transformacija, V.A.Steklov dolazi do naših jednačina (169).

Ovde izloženom teorijom utvrdjuje se, kao što je to gore navedeno, da svaka obična diferencijalna jednačina ima samo jednu infinitezimalnu transformaciju, koja medjutim, može da bude napisana na bezbroj različitih načina pomoću integrala posmatrane diferencijalne jednačine. Medjutim, S.Lie posmatra sisteme nekoliko infinitezimalnih transformacija, ne ulazeći u razmatranje njihove prirode, što može da izazove neke sumnje i zahteva naknadna istraživanja. Takodje u pogledu na ovu činjenicu Jordan-ova metoda istraživanja ima preimućstva zahvaljujući kanoničkom obliku infinitezimalne transformacije.

<u>23. Kanonička teorija infinitezimalnih transformacija. Veza izmedju integracionih faktora i infinitezimalnih transformacija.</u> Ovde ću da iznesem osobine infinitezimalnih transformacija, nastavljajući njihovu kanoničku teoriju, koja je bila razvijana u suprotnom pravcu od onoga na kome je naročito radio Sophus Lie. Dok je stvaranje teorije neprekidnih grupa transformacija zahtevalo velik i veoma naporan rad od njenog tvorca S.Lie-a, kanonička teorija infinitezimalnih transformacija se svodi u suštini na probleme parcijalnih linearnih diferencijalnih jednačina, pri čemu se obe dotične teorije uzajamno dopunjuju i usavršavaju.

U težnji da usavrši i unapredi generalizaciju problema integraljenja diferencijalnih jednačina, Sophus Lie je ovaj pojam povezao sa nizom nekih drugih, i time je od samog početka, i suviše komplikovao postavljeni problem. Naprotiv, C.Jordan godine 1887, je pokazao kako se ovaj problem može uprostiti i metod pojednostaviti. Na ovaj način je nastala takozvana kanonička teorija infinitezimalnih transformacija.

Kao dokaz preimućstva kanoničke teorije infinitezimalnih transformacija služi sledeća činjenica. Naime, čuvena veza izmedju infinitezimalnih transformacija i integrabilnog faktora obične diferencijalne jednačine, kojom se S.Lie toliko ponosio,.predstavlja neposrednu posledicu definicije infinitezimalnih transformacija. Zaista uočimo li običnu diferencijalnu jednačinu

$$y' = X, \tag{168}$$

gde je X funkcija promenljivih x i y. Neka je f(x,y) integral linearne parcijalne jednačine

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + X\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{169}$$

koja odgovara polaznoj jednačini (168). Ako je izraz

$$z\,\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{170}$$

gde je z funkcija od x i y, takodje integral jednačine (169), tj.

$$X(z\,\frac{\partial f}{\partial y}) = 0 \tag{171}$$

onda je izraz $\frac{1}{z}$, prema navedenoj teoremi S.Lie-a, integrabilni faktor jednačine (168).

Zaista indentičnost (171) daje:

$$X(z)\frac{\partial f}{\partial y} + zX(\frac{\partial f}{\partial y}) = 0. \tag{172}$$

Iz identičnosti (169) i iz identičnosti koja se iz nje dobija diferencijaljenjem po y izlazi:

$$X(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + X\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial X \partial f}{\partial y \partial y} = 0.$$

Prema tome, identičnost (172) uzastopno postaje

$$\left[X(z) - z\frac{\partial X}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial y} = C, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0, \quad X(z) - z\frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Na osnovu simbola (169) imamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + X\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}z. \tag{172'}$$

Poslednja identičnost, deobom sa z^2, daje

$$\frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial x} + X\frac{\partial \frac{1}{z}}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y}\frac{1}{z}$$

i dokazuje tačnost S.Lie-ovog stava da je $\frac{1}{z}$ integracioni faktor jednačine (168).

Da bismo generalisali izneseni stav na sistem dve jednačine i integracione faktore Jakobija, uočimo sistem dveju običnih diferencijalnih jednačina

$$dy_1 = X_1 dx, \qquad dy_2 = X_2 dx, \tag{173}$$

gde su X_1 i X_2 funkcije od x, y_1 i y_2. Označimo sa f_1 i f_2 oba različita integrala parcijalne linearne jednačine

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \tag{174}$$

koja je ekvivalentna sistemu (173), tako da imamo identičnosti:

$$X(f_k) = 0, \quad (k = 1,2). \tag{175}$$

Uvedimo sad pojam kanonične infinitezimalne transformacije sistema (173) i odgovarajuće parcijalne jednačine (174) analogno transformaciji (170). Ako je f integral jednačine (124) i ako je izraz:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} \tag{176}$$

takodje integral jednačine (174), pri čemu su z_1 i z_2 dve različite funkcije promenljivih x, y_1, y_2, onda se obrazac (176) naziva kanoničkom infinitezimalnom transformacijom parcijalne jednačine (174) a takodje i sistema običnih diferencijalnih jednačina (173).

Prema navedenoj definiciji kanoničke infinitezimalne transformacije imaćemo identičnost:

$$X(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}) = 0 \tag{177}$$

Odavde se dobijaju jednačine za odredbu koeficijenata z_1 i z_2

$$\sum_{k=1}^{2} X(z_k\frac{\partial f}{\partial y_k}) = 0.$$

Razvijajući simbole X(...), nalazimo uzastopne identičnosti:

$$\sum_{k=1}^{2}\left[z_k X(f_{y_k}) + f_{y_k}X(z_k)\right] = 0,$$

ili

$$\sum_{k=1}^{2}\left[z_k(\frac{\partial^2 f}{\partial y_k\, x} + \sum_{i=1}^{2} X_i\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_k}) + X(z_k)\frac{\partial f}{\partial y_k}\right] = 0. \tag{178}$$

Diferencijaleći po y_k identičnost koja se dobija iz (174) za svaki njen integral f, nalazimo nove identičnosti:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y_k} + \sum_{i=1}^{2}(X_i\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_k} + \frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i}) = 0,$$

ili

$$\frac{{}^2 f}{x\ y_k} + \sum_{i=1}^{2} X_i\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_k} = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad (k = 1,2).$$

Prema tome identičnosti (178) postaju

$$\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial f}{\partial y_k}X(z_k) - \sum_{i=1}^{2} z_k\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i}\right] = 0. \tag{179}$$

Drugi izraz leve strane relacija (179) sadrži dvostruki zbir

$$\sum_{k=1}\sum_{i=1} z_k\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i}. \tag{180}$$

Vrednost ovih izraza se ne menja ako se uzajamno razmene indeksi sabiranja k i i, i ako se zatim izmeni red sabiranja u odnosu na te indekse, tako se dobija:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y_k},$$

pa identičnost (179) poprima oblik

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial y_k}\left[X(z_k) - \sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i}\right] = 0. \tag{181}$$

Pošto identičnost (174) sadrži član $\frac{\partial f}{\partial x}$ koji ne figuriše u identičnosti (181), ova ne može biti posledica jednakosti (174). Ona se, prema tome, mora identički anulirati tako da svaki od koeficijenata uz $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ mora biti identički jednal nuli. Na taj način iz identičnosti (181) proizilaze dve nove:

$$X(z_k) - \sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i} = 0, \qquad (k = 1,2). \tag{182}$$

Dobijeni sistemi jednačina (182) služe za odredjivanje koeficijenata z_k kanoničke infinitezimalne transformacije ~~datog~~ sistema diferencijalnih jednačina (173).

Nadjeni rezultat (182) je od velikog značaja za ovu teoriju infinitezimalnih transformacija, jer, kao što ćemo to domalo videti, daje neposrednu generalizaciju na sistem dve diferencijalne jednačine, čuvenog S.Lie-ovog stava (172) o vezi njegove infinitezimalne transformacije (172′) sa Euler-ovim integracionim faktorom jedne obične diferencijalne jednačine (168).

Napomenimo da sistem (182) pretstavlja partikularni slučaj za dve nepoznate funkcije z_1 i z_2 generalisanog sistema Charpit-a, koji je pronašao akademik N.Saltykow i proučavao u svom memoaru "Étude sur les intégrales d'un systéme des équationes différentielles aux dérivées partielles de llusieurs fonctions inconnues" (Journal des Mathématiques pures et appliquées, t.III, 5^{e} série p.423 Paris 1897), i u radu "Rechershes sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, (Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2eme série, Tome X, N° 1, Kharkow 1907).

Sistem (173) dopušta sistem od dva integraciona množitelja, μ_1 i μ_2, koje je Jacobi definisao relacijom:

$$\mu_1(dy_1 - X_1dx) + \mu_2(dy_2 - X_2dx) = df(x_1,y_1,y_2).$$

Iz ove relacije proističu sledeće tri:

$$\mu_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\mu_1X_1 - \mu_2X_2. \tag{183}$$

One definišu funkciju f kao integral sistema (173). Zaista eliminujući μ_1 i μ_2 iz sistema (183) dobijamo:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0. \tag{184}$$

No iz relacija (183) sledi:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial y_2} = \frac{\partial \mu_2}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\mu_1 - \frac{\partial X_2}{\partial y_1}\mu_2$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + X_1\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial \mu_2}{\partial y_2} = -\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\mu_1 - \frac{\partial X_2}{\partial y_1}\mu_2 \tag{185}$$

Na osnovu prve relacije (185) proizilaze identičnosti:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial \mu_1}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial \mu_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial X_1}{\partial y_1}\mu_1 - \frac{\partial X_2}{\partial y_1}\mu_2$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + X_1\frac{\partial \mu_2}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial \mu_2}{\partial y_2} = -\frac{\partial X_1}{\partial y_2}\mu_1 - \frac{\partial X_2}{\partial y_2}\mu_2 \tag{186}$$

Dokažimo obrnutu teoremu: <u>Svako rešenje jednačina (186) dovodi do integracionih množitelja sistema (173)</u>. Zaista, pošto je jednačina (184) identički zadovoljena svojim integralom f, njenim diferencijaljenjem po y_k dolazimo do novih identičnosti:

$$X\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \qquad (k = 1,2) \tag{187}$$

Poredjujući identičnosti (186) sa odgovarajućim identičnostima (187), izlazi da su izrazi:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

respektivno rešenja jednačina (186), to jest:

$$\mu_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \mu_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

što dokazuje gore formulisanu teoremu.

Prema tome će kanonička infinitezimalna transformacija (176) biti:

$$z_1\mu_1 + z_2\mu_2,$$

i time se uopštava S.Lie-ova teorema (170) i sada se izražava simbolom $\sum z_s \mu_s$, gde su z_s koeficijenti kanoničke infinitezimalne transformacije, dok su μ_3 Jacobi-evi integracioni množitelji sistema (173).

24. Osobine kanoničkih infinitezimalnih transformacija. Dobijeni sistem (182) istovremeno služi za rešavanje dva sledeća problema:

1. Odredjivanje koeficijenata kanoničkih infinitezimalnih transformacija z_k kad je dato, bilo sistem jednačina (173) bilo odgovarajuća parcijalna jednačina (174).

2. Odredba sistema jednačina oblika (173) ili jednačina (174), koje dopuštaju kanoničke infinitezimalne transformacije oblika (176) čiji su koeficijenti z_k dati.

U isto vreme izložena teorija daje odgovor na pitanje o broju različitih infinitezimalnih transformacija, koje dopušta jedan sistem diferencijalnih jednačina (173). Zaista, S.Lie se nije bavio ovim problemom i ostavio ga je otvorenim. Medjutim, izvedeni uslovi (172) u potpunosti rešavaju pomenuti problem. Ovi uslovi, značajni po svom sklopu, pretstavljaju čuveni Charpit-ev sistem parcijalnih jednačina u odnosu na veličine z_k ili pak X_k, koje se bilo po z_k ili X_k odvojeno posmatraju kao različiti sistemi promenljivih.

Zaista, pomenuti sistem (182) predstavlja uopšteni Charpit-ev sistem, bilo da uzmemo kao nepoznate promenljive koeficijente z_k ili pak koeficijente X_k.

Uočimo prvo sistem od dve diferencijalne jednačine (173) sa datim koeficijentima x_1 i x_2. Potražimo koeficijente kanoničke infinitezimalne transformacije (176) z_1 i z_2. Odgovarajući sistem (182) u razvijenoj formi glasi:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x} + X_1\frac{\partial z_k}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial z_k}{\partial y_2} = \frac{\partial X_k}{\partial y_1}\,z_1 + \frac{\partial X_k}{\partial y_2}\,z_2, \quad (k = 1,2) \tag{188}$$

Odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina će biti:

$$dx = \frac{dy_1}{X_1} = \frac{dy_2}{X_2} = \frac{\partial z_1}{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial X_1}{\partial y_i}\,z_i} = \frac{dz_2}{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial X_2}{\partial y_i}\,z_i}, \tag{189}$$

gde tri prva odnosa predstavljaju dve date jednačine (173).

Prema tome, problem nalaženja kanoničkih infinitezimalnih transformacija sistema običnih diferencijalnih jednačina istovetan je sa problemom njihovog integraljenja. Isto je i sa teorijom Euler-ovog integracionog faktora jedne obične diferencijalne jednačine. Analogno, navedena metoda infinitezimalnih transformacija može da bude od koristi i za nalaženje infinitezimalne transformacije izvesnih klasa rešenja pomenutog problema diferencijalnih jednačina, ili za nalaženje diferencijalnih običnih jednačina koje dopuštaju infinitezimalne transformacije datog odredjenog oblika. U tu svrhu iskorišćavamo ponovo obrazac (182) gde su funkcije z_k datog oblika pa se traže sistemi jednačina oblika (173), čiji su koeficijenti X_1 i X_2 nepoznati.

Da bismo ove koeficijente našli napišimo jednačine (182) kao parcijalnu jednačinu prvog reda sa dve nepoznate funkcije X_1 i X_2 u razvijenom, ali opštem Charpit-ovom obliku i to smatrajući X_1 i X_2 kao nepoznate funkcije, naime

$$\sum_{i=1}^{2} z_i\frac{\partial X_k}{\partial y_i} = \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial z_k}{\partial y_i}X_i, \qquad (k = 1,2) \tag{190}$$

Sistem običnih diferencijalnih jednačina koji odgovara ovom Charpit-ovom sistemu (190) sada glasi:

$$\frac{dy_1}{z_1} = \frac{dy_2}{z_2} = \frac{dX_1}{X(z_1)} = \frac{dX_2}{X(z_2)}\ . \tag{191}$$

Na taj način će se koeficijenti X_1 i X_2 izraziti kao funkcije invarijanata kanoničke infinitezimalne transformacije.

25. Slučaj jedne jednačine drugog reda. Uočimo jednu običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$y'' = X(x,y,y'),$$

ili napisanu u obliku

$$\frac{dy'}{dx} = X(x,y,y'), \tag{192}$$

ili

$$dy' = X(x,y,y')dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

U ovim jednačinama ulogu dveju nepoznatih funkcija imaju promenljive veličine y i y'.

Prema tome, u ovom slučaju sistem jednačina (173) postaje

$$dy = y'dx, \qquad dy' = X(x,y,y')dx \tag{193}$$

pa kanonička infinitezimalna transformacija (176) sistema (194) prima sledeći oblik:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_2\frac{\partial f}{\partial y'},$$

a sistem parcijalnih jednačina (182) za odredjivanje koeficijenata z_1 i z_2 koji postaju funkcije od x,y i y' pišu se ovako:

$$X(z_k) = \frac{\partial z_k}{\partial x} + y'\frac{\partial z_k}{\partial y} + X\frac{\partial z_k}{\partial y'}, \qquad (k = 1,2). \tag{194}$$

Prema tome odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačina glasi:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{X} = \frac{dz_1}{z_1\frac{\partial X_1}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial X_1}{\partial y_2}} = \frac{dz_2}{z_1\frac{\partial X_2}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial X_2}{\partial y_2}} \tag{195}$$

G L A V A VI

Problem integraljenja diferencijalnih jednačina koje dopuštaju produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju.

Za integraljenje običnih diferencijalnih jednačina drugog i višeg reda koje dopuštaju odgovarajuću produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju primenićemo metode N. Saltykow-a objavljene 1905 u Parizu [15] i u njegovim luvenskim i beogradskim predavanjima.

26. Integraljenje diferencijalne jednačine drugog reda.

Uzmimo ranije dobijenu jednačinu drugog reda, naime:

$$y'' = x^{\frac{b}{a}-2}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right), \tag{196}$$

gde je   proizvoljna funkcija. Ranije je pokazano da jednačina (196) dopušta konformnu produženu infinitezimalnu transformaciju. Ovoj jednačini odgovara sledeći sistem od dve diferencijalne jednačine:

$$dy = y'dx, \quad dy' = x^{\frac{b}{a}-2}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right)dx, \tag{197}$$

ili jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina

$$Y(f) \equiv f_x + y'f_y + x^{\frac{b}{a}-1}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}\right)f_{y'} = 0. \tag{198}$$

Konformna produžena infinitezimalna transformacija koja, prema prethodnom, odgovara ovoj (198) jednačina glasi:

$$V(f) \equiv axf_x + byf_y + (b-a)y'f_{y'}. \tag{199}$$

Uvedimo sad diferencijalne invarijante ove transformacije. One pretstavljaju vrednosti promenljivih veličina koje anuliraju posmatranu infinitezimalnu transformaciju, tj. pretstavljaju integrale linearne parcijalne doferencijalne jednačine.

$$axf_x + byf_y + (b-a)y'f_{y'} = 0.$$

To su očevidno sledeći izrazi

$$\frac{y^a}{x^b} = g^a, \qquad \frac{y'^a}{x^{b-a}} = h^a.$$

Iz prethodne dve jednačine imamo:

$$y = x^{\frac{b}{a}} g, \qquad y' = x^{\frac{b}{a} - 1} h$$

$$g = x^{-\frac{b}{a}} y, \qquad h = x^{-\frac{b}{a} + 1} y'$$

Ako u funkciju $f(x,y,y')$ uvedemo g i h kao nove promenljive mesto y i y' dobićemo da je

$$f(x,y,y') = \varphi(x,g,h).$$

Obrasci transformacije glase:

$$f_x = \varphi_x - \frac{b}{a} x^{-1} g\varphi_x + (1 - \frac{b}{a}) x^{-1} h\varphi_h$$

$$f_y = x^{-\frac{b}{a}} \varphi_g, \quad f_{y'} = x^{1-\frac{b}{a}} \varphi_h.$$

Prema tome transformisana jednačina (198) i odgovarajuća joj infinitezimalna transformacija (199) postaju:

$$Y'(\varphi) = \varphi_x + \frac{1}{ax}\left\{(ah - bg)\varphi_g + \left[(a - b)h + a\Phi'(g,h)\right]\varphi_h\right\} = 0$$

$$V'(\varphi) = ax\varphi_x \tag{200}$$

gde su uvedene sledeće nove oznake: Y' za transformisanu levu stranu jednačine (198), V' za levu stranu transformisane infinitezimalne transformacije (199). Sem toga je uvedena i oznaka

$$\Phi'(g,h) = \Phi(g^a,h^a).$$

Pošto se Poisson-ove zagrade

$$Y'(\varphi), \ V'(\varphi)$$

anuliraju na osnovu prve jednačine (200), to je sistem jednačina

$$Y'(\varphi) = 0, \quad V'(\varphi) = C,$$

zatvoren, pri čemu smo izjednačili obrazac infinitezimalne transformacije $V'(\varphi)$ sa proizvoljnom konstantom C.

Prema tome jednačine:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax}$$

i

$$\varphi_g + \frac{(a-b)h + a\Phi'(g,h)}{ah - bg}\varphi_k + \frac{C}{ah-bg} = 0$$

čine normalni sistem.

No ovo se integraljenje svodi na integraljenje sistema jednačina u totalnim diferencijalima:

$$\begin{aligned} dh &= \frac{(a-b)h + a\Phi'(g,h)}{ah-bg}dg \\ d\varphi &= \frac{C}{ax}dx + \frac{C}{ah-bg}dg. \end{aligned} \tag{201}$$

Prema tome, problem integraljenja polaznog sistema diferencijalnih jednačina (197) svodi se na integraljenje prve obične diferencijalne jednačine sa dve nezavisno promenljive veličine g i h sistema (201) i jedne naknadne kvadrature kao i jednog naknadnog diferencijaljenja.

Zaista, ako obeležimo opšti integral prve jednačine (201) sa

$$h = F(g,C_1), \tag{202}$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta, onda druga jednačina (201) postaje

$$d\varphi = C\left[\frac{dx}{ax} + H(g,C_1)dg\right],$$

gde je

$$H = \frac{1}{aF(g,C_1)-bg}$$

Pošto su promenljive razdvojene, integral gornje jednačine nalazimo pomoću nagoveštene kvadrature

$$\varphi = C\left[\frac{\lg x}{a} + \int H(g,C_1)dg\right] + C_2,$$

gde je C_2 proizvoljna konstanta. Najzad opšti integral datog sistema (197), odredjuje se prema pomenutoj metodi N.Saltykow-a skupom jednačine (202) i nove jednačine, koja se dobija pomenutim diferenciranjem,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = C',$$

ili

$$\frac{\lg x}{a} + \int H(g,C_1)dg = C',$$

sa dve proizvoljne konstante C_1 i C'.

Izloženi se način integraljenja proširuje i na sve druge gore formirane diferencijalne jednačine, kao što ćemo to odmah pokazati.

<u>27. Integraljenje diferencijalne jednačine trećeg reda</u>. Uočimo jednačinu

$$y''' = x^{\frac{b}{a}-3}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}\right), \tag{203}$$

gde je proizvoljna funkcija. Ranije smo dokazali da jednačina ovog oblika dopušta dvaput produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju.

Njoj odgovara sledeći sistem od tri obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\begin{gathered} dy = y'dx, \qquad dy' = y''dx, \\ dy'' = x^{\frac{b}{a}-3}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}\right) \end{gathered} \tag{204}$$

ili jedna, ovom sistemu (204) ekvivalentna, linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$\begin{aligned} Y(f) \equiv f_x + y'f_y + y''f_{y'} + \\ x^{\frac{b}{a}-3}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}\right). \end{aligned} \tag{205}$$

Respektivna konformna dvaput produžena infinitezimalna transformacija glasi:

$$V(f) \equiv axf_x + byf_y + (b-a)y'f_{y'} + (b-2a)y''f_{y''}. \tag{206}$$

Kao što je poznato, diferencijalne invarijante se dobijaju kao integrali linearne diferencijalne jednačine

$$axf_x + byf_y + (b-a)y'f_{y'} + (b-2a)y''f_{y''} = 0.$$

To su ustvari sledeća tri integrala:

$$\frac{y^a}{x^b} = g_1^a, \qquad \frac{y'^a}{x^{b-a}} = g_2^a, \qquad \frac{y''^a}{x^{b-2a}} = g_3^a$$

Iz ove tri relacije imamo;

$$y = x^{\frac{b}{a}} g_1, \qquad y' = x^{\frac{b}{a}-1} g_2, \qquad y'' = x^{\frac{b}{a}-2} g_3,$$

ili

$$g_1 = x^{-\frac{b}{a}} y, \qquad g_2 = x^{1-\frac{b}{a}} y', \qquad g_3 = x^{2-\frac{b}{a}} y''. \tag{207}$$

Uvedimo u funkciju $f(x,y,y',y'')$ veličine g_1, g_2 i g_3 kao nove promenljive umesto y, y' i y''. Obeležimo funkciju f u novim promenljivim veličinama sa φ na sledeći način

$$f(x,y,y',y'') = \varphi(x,g_1,g_2,g_3).$$

Tada obrasci transformacije glase:

$$f_x = \varphi_x - \frac{b}{ax} g_1 \varphi_{g_1} + \frac{a-b}{ax} g_2 \varphi_{g_2} + \frac{2a-b}{ax} g_3 \varphi_{g_3}$$

$$f_y = x^{-\frac{b}{a}} \varphi_{g_1}, \quad f_{y'} = x^{1-\frac{b}{a}} \varphi_{g_2}, \quad f_{y''} = x^{2-\frac{b}{a}} \varphi_{g_3}.$$

Na taj način, transformisana jednačina (205), i odgovarajuća infinitezimalna transformacija (206), uz nove oznake $Y'(f)$ i $V'(f)$, i Φ' postaju:

$$Y'(\varphi) = \varphi_x + \frac{1}{ax}\left\{(ag_2 - bg_1)\varphi_{g_1} + \left[ag_3 + (a-b)g_2\right]\varphi_{g_2} + \right.$$

$$\left. + \left[(2a-b)g_3 + a\Phi'\right]\varphi_{g_3}\right\} = 0$$

$$V'(\varphi) = ax\varphi_x. \tag{208}$$

Uvedimo pomoćnu proizvoljnu konstantu C, stavljajući da je

$$ax\varphi_x = C.$$

Za sistem jednačina:

$$Y'(\varphi) = 0 \quad \text{i} \quad V'(\varphi) = C, \tag{209}$$

Poisson-ove zagrade $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$ se anuliraju na osnovu prve jednačine (208), pa je zbog toga sistem jednačina (209) zatvoren.

Prema tome jednačina:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax}, \quad \varphi_{g_1} = \frac{ag_3 + (a-b)g_2}{ag_2 - bg_1}\varphi_{g_2} + \frac{(2a-b)g_3 + a\,\Phi'}{ag_2 - bg_1}\varphi_{g_3} +$$

$$+ \frac{C}{ag_2 - bg_1} = 0,$$

čine normalni sistem čije se integraljenje svodi na integraljenje sistema od tri diferencijalne jednačine u totalnim diferencijalima:

$$\begin{aligned} dg_2 &= \frac{ag_3 + (a-b)g_2}{ag_2 - bg_1}\, dg_1 \\ dg_3 &= \frac{(2a-b)g_3 + a\,\Phi'}{ag_2 - bg_1}\, dg_1 \\ d\varphi &= C\left[\frac{dx}{ax} + \frac{dg_1}{ag_2 - bg_1}\right]dx. \end{aligned} \tag{210}$$

Iz gornjeg izlazi da se problem integraljenja diferencijalne jednačine trećeg reda (203), ili njoj odgovarajućeg sistema jednačina (204), svodi na integraljenje sistema od prve dve obične diferencijalne jednačine (210) sa tri nezavisno promenljive g_1, g_2, g_3, dve naknadne kvadrature kao i još jednog naknadnog diferencijaljenja.

Ako izrazimo opšti integral prve dve pomenute jednačine sistema (210) sistemom jednačina:

$$\begin{aligned} g_2 &= F(g_1, C_1, C_2) \\ g_3 &= G(g_1, C_1, C_2), \end{aligned} \tag{211}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, onda treća jednačina (210) postaje:

$$d\varphi = C\left[\frac{dx}{ax} + H(g_1, C_1, C_2)\right]dg, \tag{212}$$

pri čemu je

$$H = \frac{1}{a(C') - \rho g_1},$$

a gde zagrade (- -) označavaju rezultat smene g_2 i g_3 prema obrascima (211). Pošto su promenljive razdvojene, integral jednačine (212) se nalazi kvadraturom

$$\varphi = C\left[\frac{\lg h}{a} + \int H(g_1, C_1, C_2)dg\right] + C_3 \tag{213}$$

Opšti integral sistema (204), odredjuje se kao i pre, skupom jednačina (211) i izvodne jednačine dobijene diferencijaljenjem jednačine (213), naime jednačine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = C',$$

gde je C' nova proizvoljna konstanta.

Ova se jednačina može drukčije napisati ovako:

$$\frac{1}{a} \lg x + \int H(g_1, C_1, C_2)dg = C'. \tag{214}$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se sva tri integrala sistema (204) izražavaju jednačinama sistema (211) i (214) sa tri proizvoljne konstante C_1, C_2 i C', pri čemu g_1, g_2 i g_3 treba smeniti starim promenljivim veličinama y, y' i y'', na osnovu obrasca (207).

<u>28. Integraljenje diferencijalne jednačine n-tog reda.</u> Neka je data diferencijalna jednačina n-og reda

$$y^{(n)} = x^{\frac{b}{a} - n}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \ldots \frac{y^{(n-1)^a}}{x^{b-(n-1)a}}\right), \tag{215}$$

gde je proizvoljna funkcija, koja dopušta (n-1) puta produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju.

Njoj odgovara sledeći sistem od n običnih diferencijalnih jednačina

$$dy^{(i)} = y^{(i+1)}dx, \quad (i = 0,1,2,\ldots n-2)$$
$$dy^{(n-1)} = x^{\frac{b}{a} - n}\Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y''^a}{x^{b-2a}}, \ldots \frac{y^{(n-1)^a}}{x^{b-(n-1)a}}\right)dx, \tag{216}$$

ili samo jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$Y(f) = f_x + \sum_{i=o}^{n-1} y^{(i+1)} f_{y^{(i)}} + x^{\frac{b}{a} - n} \Phi\left(\frac{y^a}{x^b}, \frac{y'^a}{x^{b-a}}, \frac{y^{(n-1)^a}}{x^{b-(n-1)a}}\right) f_{y^{(n-1)}} = 0 \tag{217}$$

Odgovarajuća n-1 puta produžena konformna infinitezimalna transformacija će biti

$$V(f) = axf_x + \sum_{k=o}^{n-1} (b-ka) y^{(k)} f_{y^{(k)}}. \tag{218}$$

Potražimo i ovog puta diferencijalne invarijante. To su kao što je poznato, funkcije za koje se anulira desna strana izraza (218). Znači treba naći integrale parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda,

$$axf_x + \sum_{k=o}^{n-1} (b-ka) y^{(k)} f_{y^{(k)}} = 0. \tag{219}$$

Očigledno je da će to biti sistem od n sledećih funkcija:

$$\frac{y^{(i)^a}}{x^{b-ia}} = g_{i+1}^a, \quad (i=0,1,2,\dots,n-1).$$

Iz ovih n relacija imamo sledećih n promenljivih izraženih obrascima:

$$y^{(i)} = x^{\frac{b}{a} - i} g_{i+1}, \quad (i=0,1,2,\dots,n-1),$$

ili ako iz njih odredimo g_i dobićemo:

$$g_{i+1} = x^{i - \frac{b}{a}} y^{(i)}, \quad (i=0,1,2,\dots,n-1). \tag{220}$$

Ako u funkciju $f(x,y,y', \dots ,y^{(n-1)})$ uvedemo $g_1, g_2, \dots, g_n$ kao nove promenljive mesto $y,y',y'', \dots , y^{(n-1)}$, označićemo tada funkciju f u novim promenljivim ovako:

$$f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}) = \quad (x,g_1,g_2,\dots ,g_n),$$

gde označava novu funkciju.

Obrasci transformacije jednačine (217) i izraza (218) jesu:

$$f_x = \varphi_x + \frac{1}{ax}\sum_{i=o}^{n-1}(ia-b)g_{i+1}\ \varphi_{gi+1}$$

$$f_y(i) = x^{i - \frac{b}{a}}\varphi_{gi+1}, \quad (i=0,1,2, \ \dots \ ,n-1).$$

Na taj način transformisana jednačina (217), i odgovarajuća n-1 puta produžena konformna infinitezimalna transformacija (218), uz nove oznake $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$ i Φ'postaju

$$Y'(\varphi) = \ _x + \frac{1}{ax}\left[\sum_{i=o}^{n-2}\left\{ag_{i+2} + (ia-b)g_{i+1}\right\}\varphi_{g_{i+1}} + \right.$$

$$\left. + \left\{\left[(n-1)a-b\right]g_n + a\Phi'\right\}\varphi_{g_n}\right] = 0.$$

$$V'(\varphi) = ax\ _x. \tag{221}$$

Poisson-ove zagrade $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$ se anuliraju na osnovu prve jednačine (221).

Sad opet uvedimo pomoćnu proizvoljnu konstantu C na ovaj način:

$$V'(\varphi) = C.$$

Prema gornjoj osobini sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$Y'(\varphi) = 0 \text{ i } V'(\varphi) = C,$$

je zatvoren.

Zato sistem jednačina:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax}$$

$$\varphi_{g_1} + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{ag_{i+2} + (ia-b)g_{i+1}}{ag_2 - bg_1}\varphi_{g_{i+1}} + \frac{\left[(n-1)a-b\right]g_n + a\Phi'}{ag_2 - bg_1}\varphi_{g_n} +$$

$$+ \frac{C}{ag_2 - bg_1} = 0,$$

čini normalni sistem, čije se integraljenje svodi na integraljenje sistema od n diferencijalnih jednačina u totalnim diferencijalima:

$$dg_{i+1} = \frac{ag_{i+1} + (ia-b)g_{i+1}}{ag_2 - bg_1}\, dg_1$$

$$(i = 1,2, \ldots ,n-2)$$

$$dg_n = \frac{[(n-1)a-b]g_n + a\Phi'}{ag_2 - bg_1}\, dg_1 \tag{222}$$

$$d\varphi = C\left[\frac{1}{a}\frac{dx}{x} + \frac{dg_1}{ag_2 - bg_1}\right]$$

Prema tome, problem integraljenja diferencijalne jednačine n-tog reda (215), koja dopušta n-1 puta produženu konformnu infinitezimalnu transformaciju (218), svodi se na integraljenje od prvih n-1 običnih diferencijalnih jednačina sistema (222) sa n nezavisno promenljivih $g_1, g_2, \ldots, g_n$, dve naknadne kvadrature, kao i još jednog naknadnog diferencijaljenja. Ako obeležimo opšti integral pomenutog sistema od prvih n-1 jednačina sistema (222) sistemom jednačina

$$g_i = Fi(g_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \tag{223}$$

$$(i = 2,3, \ldots ,n),$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ proizvoljne konstante, onda poslednja jednačina (222) postaje:

$$d\varphi = C\,\frac{dx}{ax} + H(g_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dg_1\,, \tag{224}$$

pri čemu je

$$H = \frac{1}{a(\Phi') - bg_1}\,,$$

a gde zagrade (...) označavaju rezultat smene $g_1, g_2, \ldots, g_n$ prema obrascima (223). Pošto su time promenljive razdvojene, integral jednačine (224) se nalazi kvadraturom

$$\varphi = \left[C\,\frac{1}{a}\,\lg x + \int H(g_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dg_1 + C_n \right. \tag{225}$$

Opšti integral sistema (216), odredjuje se, kao što je to i ranije radjeno, skupom jednačina (223) i izvodne jednačine dobijene diferencijaljenjem jednačine (225), naime jednačine

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C} = C',$$

gde je C' nova proizvoljna konstanta. Ova poslednja jednačina može se i ovako napisati:

$$\frac{1}{a} \lg x + \int H(g_1, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) dg_1 = C' \tag{226}$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se svih n integrala sistema diferencijalnih jednačina (216), izražava jednačinama (223) i jednačinom (226) sa n proizvoljnih konstanata: $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ i C', pri čemu promenljive $g_1, g_2, \ldots, g_n$ treba smeniti starim promenljivim $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, na osnovu relacija (220).

G L A V A VII

PROBLEM INTEGRALJENJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE DOPUŠTAJU PROJEKTIVNE INFINITEZIMALNE TRANSFORMACIJE

29. Integraljenje sistema dveju običnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje dopuštaju projektivnu infinitezimalnu transformaciju. Predjimo na problem integraljenja dve obične diferencijalne jednačine oblika:

$$dy_i = x^{\frac{b_i}{a} - 1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}\right)dx, \quad (i = 1,2), \tag{227}$$

gde su Φ_1 i Φ_2 dve proizvoljne funkcije. Kao što smo već pokazali sistem (227) dopušta projektivnu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) \equiv axf_x + b_1y_1f_{y_1} + b_2y_2f_{y_2}. \tag{228}$$

Sistemu od dve diferencijalne jednačine (227) odgovara jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda

$$Y(f) \equiv f_x + x^{\frac{b_1}{a} - 1}\Phi_1\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}\right)f_{y_1} + x^{\frac{b_2}{a} - 1}\Phi_2\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}\right)\cdot$$

$$\cdot f_{y_2} = 0. \tag{229}$$

Uvedimo odgovarajuće diferencijalne invarijante koje se odredjuju kao integrali linearne parcijalne diferencijalne jednačine,

$$axf_x + b_1y_1f_{y_1} + b_2y_2f_{y_2} = 0.$$

To su očigledno sledeća dva integrala:

$$\frac{y_1^a}{x^{b_1}} = g_1^a, \qquad \frac{y_2^a}{x^{b_2}} = g_2^a$$

Odavde imamo:

$$y_1 = x^{\frac{b_1}{a}} g_1, \qquad y_2 = x^{\frac{b_2}{a}} g_2,$$

ili pak

$$g_1 = x^{-\frac{b_1}{a}} y_1, \qquad g_2 = x^{-\frac{b_2}{a}} y_2 \qquad (230)$$

Ako sad u funkciju $f(x,y_1,y_2)$ uvedemo g_1 i g_2 kao nove promenljive mesto y_1 i y_2, imaćemo

$$f(x,y_1,y_2) = \varphi(x,g_1,g_2).$$

Tada obrasci transformacije glase:

$$f'_x = \varphi_x - \frac{b_1}{ax} g_1 \varphi_{g_1} - \frac{b_2}{ax} g_2 \varphi_{g_2}$$

$$f_{y_1} = x^{-\frac{b_1}{a}} \varphi_{g_1}, \qquad f_{y_2} = x^{-\frac{b_2}{a}} \varphi_{g_2}$$

Prema tome, transformisana jednačina (229) i odgovarajuća infinitezimalna transformacija (228) primaju sledeće oblike:

$$Y'(\varphi) \equiv \varphi_x + \frac{1}{ax}\left[(a\Phi'_1 - b_1 g_1)\varphi_{g_1} + (a\Phi'_2 - b_2 g_2)\varphi_{g_2}\right] = 0$$

$$V'(\varphi) \equiv ax\varphi_x, \qquad (231)$$

gde su uvedene nove oznake $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$, Φ'_1 i Φ'_2 slično kao što je to bilo u prethodnoj glavi.

Pošto se Poisson-ove zagrade

$$(Y'(\varphi), V'(\varphi)) = 0$$

anuliraju na osnovu prve jednačine (231), to je sledeći sistem jednačina

$$Y'(\varphi) = 0, \qquad V'(\varphi) = C, \qquad (232)$$

gde je C nova uvedena proizvoljna konstanta, zatvoren. Ovaj sistem (232) prelazi u normalni sistem jednačina:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax},$$

$$\varphi_{g_1} + \frac{a\Phi_2' - b_2g_2}{a\Phi_1' - b_1g_1}\varphi_{g_2} + \frac{C}{a\Phi_1' - b_1g_1} = 0.$$

Integraljenje ovog sistema svodi se na integraljenje sistema jednačina u totalnim diferencijalnima:

$$dg_2 = \frac{a\Phi_2' - b_2g_2}{a\Phi_1' - b_1g_1}dg_1$$

$$d\varphi = \frac{C}{ax}dx + \frac{C}{a\Phi_1' - b_1g_1}dg_1 \qquad (233)$$

To znači, problem integraljenja polaznog sistema diferencijalnih jednačina (227), svodi se na integraljenje prve obične diferencijalne jednačine sistema (223) sa dve nezavisno promenljive veličine g_1 i g_2, i dve naknadne kvadrature, kao što ćemo to odmah pokazati.

Zaista, ako obeležimo opšti integral prve jednačine (233) sa

$$g_2 = F(g_1,C_1), \qquad (234)$$

gde je C_1 proizvoljna konstanta, onda druga jednačina (233) postaje

$$d\varphi = C\left[\frac{dx}{ax} + H(g_1,C_1)dg_1\right], \qquad (235)$$

pri čemu je

$$H = \frac{1}{a\Phi_1' - b_1g_1},$$

gde zagrade (...) označavaju rezultat smene g_2 prema obrascu (234). Pošto su promenljive razdvojene, integral jednačine (235) nalazi se kvadraturom

$$\varphi = C\left[\frac{\lg x}{a} + \int H(g_1,C_1)dg_1\right] + C_2 \qquad (236)$$

Opšti integral sistema (227) odredjuje se kao i ranije, skupom jednačine (234) i izvodne jednačine (236), naime

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C} = C',$$

gde je C'nova proizvoljna konstanta.Ova se jednačina može i drukčije napisati ovako:

$$\frac{\lg x}{a} + \int H(g_1, C_1)dg_1 = C'. \tag{237}$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se obe integralne jednačine sistema (227) izražavaju jednačinama (234) i (237) sa dve različite proizvoljne konstante C i C′, pri čemu se g_1 i g_2 u starim promenljivim veličinama izražavaju pomoću obrasca (230).

30. Integraljenje sistema od tri obične diferencijalne jednačine. Uzmimo sad da integralimo sistem diferencijalnih jednačina

$$dy_i = x^{\frac{b_i}{a} - 1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \frac{y_3^a}{x^{b_3}}\right)dx, \tag{237}$$

$$(i = 1,2,3)$$

gde su Φ_1, Φ_2, Φ_3 proizvoljne funkcije.

Ovaj sistem običnih diferencijalnih jednačina dopušta projektivnu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) = axf_x + \sum_{i=1}^{3} b_i y_i f_{y_i} \tag{238}$$

Sistemu jednačina (237) odgovara jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda, naime,

$$Y(f) = f_x + \sum_{i=1}^{3} x^{\frac{b_i}{a} - 1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \frac{y_3^a}{x^{b_3}}\right)f_{y_i} = 0 \tag{239}$$

Uvedimo još odgovarajuće diferencijalne invarijante preko parcijalne diferencijalne jednačine.

$$axf_x + \sum_{i=1}^{3} b_i y_i f_{y_i} = 0.$$

To će biti očigledno integrali:

$$\frac{y_i^a}{x^{b_i}} = g_i^a, \qquad (i = 1,2,3).$$

Odavde imamo

$$y_i = x^{\frac{b_i}{a}} g_i$$

ili

$$g_i = x^{-\frac{b_i}{a}} y_i \quad (i = 1,2,3). \tag{240}$$

Sada ćemo, kao što smo to i ranije činili, uvesti nove promenljive g_1, g_2 i g_3 mesto starih y_1, y_2, y_3, pa ćemo onda imati da je

$$f(x, y_1, y_2, y_3) = \varphi(x, g_1, g_2, g_3).$$

Tada obrasci transformacije glase:

$$f_x = \varphi_x - \sum_{i=1}^{3} \frac{b_i g_i}{ax} \varphi_{g_i}$$

$$f_{y_i} = x^{-\frac{b_i}{a}} \varphi_{g_i}, \quad (i = 1,2,3).$$

Na taj način, transformisana jednačina (239) i odgovarajuća infinitezimalna transformacija (238) primaju nove oblike:

$$\begin{aligned} Y'(\varphi) &= \varphi_x + \frac{1}{ax} \sum_{i=1}^{3} (a\Phi_i' - b_i g_i) \varphi_{g_i} = 0 \\ V'(\varphi) &= ax\varphi_x, \end{aligned} \tag{241}$$

gde nam $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$ i Φ_i' imaju značenja slična ranijim.

Pošto se i ovom prilikom anuliraju Poisson-ove zagrade $Y'(\varphi), V'(\varphi)$ na osnovu prve relacije (241), to je sistem jednačina:

$$Y'(\varphi) = 0 \qquad V'(\varphi) = C, \tag{242}$$

gde je C nova uvedena konstanta, zatvoren, i tako ovaj sistem (242) prelazi u normalni sistem jednačina:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax}$$

$$\varphi_{g_1} + \frac{a\Phi_2' - b_2 g_2}{a\Phi_1' - b_1 g_1} \varphi_{g_2} + \frac{a\Phi_3' - b_3 g_3}{a\Phi_1' - b_1 g_1} \varphi_{g_3} + \frac{C}{a\Phi_1' - b_1 g_1} = 0.$$

Integraljenje ovog sistema svodi se na integraljenje sistema diferencijalnih jednačina u totalnim diferencijalima:

$$dg_2 = \frac{a\Phi_2' - b_2 g_2}{a\Phi_1' - b_1 g_1} dg_1$$

$$dg_3 = \frac{a\Phi_3' - b_3 g_3}{a\Phi_1' - b_1 g_1} dg_1$$

$$d\varphi = C\left[\frac{1}{a}\frac{dx}{x} + \frac{dg_1}{a\Phi_1' - b_1 g_1}\right] \tag{243}$$

Prema tome, problem integraljenja polaznog sistema običnih diferencijalnih jednačina (156), svodi se na integraljenje sistema prve dve obične diferencijalne jednačine (243) sa tri nezavisno promenljive g_1, g_2 i g_3 a dve naknadne kvadrature, kao i još jednog naknadnog diferencijaljenja.

Zaista, ako obeležimo opšti integral prve dve pomenute jednačine sistema (243) sistemom jednačina:

$$\begin{aligned} g_2 &= F(g_1, C_1, C_2) \\ g_3 &= G(g_1, C_1, C_2) \end{aligned} \tag{244}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante, onda treća jednačina sistema (243) postaje

$$d\varphi = C\,\frac{1}{a}\frac{dx}{x} + H(g_1, C_1, C_2)dg_1\,, \tag{245}$$

pri čemu je

$$H = \frac{1}{a\Phi_1' - b_1 g_1}\,,$$

gde zagrade (...) označavaju re ultat smene promenljivih g_2 i g_3 prema relacijama (240).

Pošto su promenljive razdvojene, integral jednačine (245) se odredjuje kvadraturom

$$\varphi = C\left[\frac{1}{a}\lg x + \int H(g_1, C_1, C_2)dg_1\right] + C_3. \tag{246}$$

Opšti integral sistema jednačina (156), odredjuje se, kao i dosad, skupom jednačina (244) i izvodne jednačine dobijene diferencijaljenjem jednačine (246), naime jednačine

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C} = C',$$

gde je C' nova proizvoljna konstanta.

Poslednja jednačina se može i ovako napisati:

$$\frac{1}{a}\lg x + \int H(g_1,C_1,C_2)dg_1 = C'. \tag{247}$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se sva tri integrala sistema (244) i (247) sa tri proizvoljne konstante C_1, C_2 i C', pri čemu još promenljive g_1, g_2 i g_3 treba, prema relacijama (240), smeniti starim promenljivim veličinama y_1, y_2 i y_3.

31. Integraljenje sistema od n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Neka je dat sistem od n jednačina

$$dy_i = x^{-\frac{b_i}{a}-1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \dots, \frac{y_n^a}{x^{b_n}}\right)dx \tag{248}$$

$$(i = 1,2,\dots,n).$$

gde su $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ proizvoljne funkcije

Ovom sistemu je ekvivalentna jedna linearna parcijalna diferencijlna jednačina prvog reda

$$Y(f) \equiv f_x + x^{-\frac{b_i}{a}-1}\Phi_i\left(\frac{y_1^a}{x^{b_1}}, \frac{y_2^a}{x^{b_2}}, \dots, \frac{y_n^a}{x^{b_n}}\right)f_{y_i} = 0 \tag{249}$$

Pokazali smo da ovaj sistem od n običnih diferencijalnih jednačina prvog reda dopušta projektivnu infinitezimalnu transformaciju

$$V(f) \equiv axf_x + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i f_{y_i} \tag{250}$$

Uvedimo, kao i uvek, odgovarajuće diferencijalne invarijante preko parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

$$axf_x + \sum^{n} b_i y_i f_{y_i} = 0.$$

To je očigledno sledeći sistem od n integrala

$$\frac{y_i^a}{x^{b_i}} = g_i^a, \qquad (i = 1,2, \ldots ,n).$$

Odavde imamo

$$y_i = x^{\frac{b_i}{a}} g_i \qquad (i = 1,2, \ldots ,n),$$

ili ako ovaj sistem rešimo po veličinama g_i, imaćemo

$$g_i = x^{-\frac{b_i}{a}} y_i \ (i = 1,2, \ldots ,n). \tag{251}$$

Ako sad uvedemo nove promenljive g_i mesto starih y_i, imaćemo mesto funkcije f novu funkciju φ datu na sledeći način:

$$f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) = \varphi(x,g_1,g_2,\ldots,g_n).$$

Tada transformacioni obrasci glase :

$$f_x = \varphi_x - \frac{1}{ax}\sum_{i=1}^{n} b_i g_i f_{g_i}$$

$$f_{y_i} = x^{-\frac{b_i}{a}} \varphi_{g_i}, \ (i = 1,2, \ldots ,n).$$

Zato transformisama jednačina (250) i odgovarajuća projektivna infinitezimalna transformacija (248) primaju nove oblike:

$$Y'(\varphi) = \varphi_x + \frac{1}{ax}\sum_{i=1}^{n}(a\Phi_i' - b_i g_i)\varphi_{g_i} = 0$$
$$V'(\varphi) = ax\varphi_x, \tag{252}$$

gde su uvedene kao i ranije, nove oznake:

$$Y'(\varphi),\ V'(\varphi) \text{ i } \Phi_i'.$$

Pošto se poisson-ove zagrade $Y'(\varphi)$, $V'(\varphi)$ anuliraju na osnovu prve jednačine (252) to je sledeći sistem jednačina

$$Y'(\varphi) = 0, \qquad V'(\varphi) = C, \tag{253}$$

gde je C nova uvedena konstanta, zatvoren, te sistem (253) prelazi u normalni sistem jednačina:

$$\varphi_x = \frac{C}{ax}$$

$$\varphi_{g_1} + \frac{1}{a\Phi_1' - b_1 g_1}\left[\sum_{i=1}^{n}(a\Phi_i' - b_i g_i \varphi_{g_i} + C\right] = 0.$$

Integraljenje ovog sistema svodi se na integraljenje sistema od n diferencijalnih jednačina u totalnim diferencijalima:

$$dg_{i+1} = \frac{a\Phi_{i+1}' - b_i g_i}{a\Phi_1' - b_1 g_1} dg_1, \quad (i = 1,2, \dots ,n-1) \qquad (254)$$

$$d\varphi = C\left[\frac{1}{a}\frac{dx}{x} + \frac{dg}{a\Phi_1' - b_1 g_1}\right]$$

Dakle, problem integraljenja polaznog sistema običnih diferencijalnih jednačina (249), svodi se na integraljenje sistema prvih n-1 običnih diferencijalnih jednačina (254) sa n nezavisno promenljivih $g_1, g_2, \dots, g_n$, dve naknadne kvadrature, kao i još jednog naknadnog diferencijaljenja.

Zaista, ako obeležimo opšti integral prvih n-1 pomenutih jednačina sistema (254) sistemom jednačina:

$$g_i = F_i(g_1, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$
$$(i = 2,3, \dots .n), \qquad (255)$$

gde su $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ proizvoljne konstante, onda poslednja jednačina sistema (254) postaje

$$d\varphi = C\left[\frac{1}{a}\frac{dx}{x} + H(g_1, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})dg\right], \qquad (256)$$

pri čemu je

$$H = \frac{1}{a\,\Phi_1' - b_1 g_1}$$

a gde zagrade (...) označavaju rezultat smene promenljivih $g_1, g_2, \dots, g_n$ prema relacijama (255). Kako su sad promenljive razdvojene, integral jednačine (256) se odredjuje kvadraturom

$$\varphi = C\left[\frac{1}{a}\lg x + \int H(g_1, C_1, C_2, \dots ,C_{n-1})dg_1 + C_n \qquad (257)\right.$$

Opšti oblik sistema jednačina (249), se odredjuje, kao i uvek, skupom jednačina (249) i izvodne jednačine koja se dobija iz (257), naime jednačine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = C',$$

gde je C' nova proizvoljna konstanta.

Ova se jednačina može i na drugi način napisati:

$$\frac{1}{a} \lg x + \int H(g_1, C_1; C_2, \ldots, C_{n-1}) dg_1 = C'. \quad (258)$$

Dobijeni rezultat pokazuje da se svih n integralnih jednačina sistema (249), izražavaju jednačinama sistema (255) i jednačinom (258), sa n proizvoljnih konstanata: C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$ i C', pri tom još nove promenljive $g_1, g_2, \ldots, g_n$ treba, prema relacijama (251), smeniti starim promenljivim veličinama $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

G L A V A VIII

PRIMENA KANONIČKE TEORIJE INFINITEZIMALNIH TRANSFORMACIJA NA INTEGRALJENJE DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

32. U v o d. Sophus Lie je uveo pojam infinitezimalne transformacije radi uopštavanja metoda integraljenja diferencijalnih jednačina. Pod tim pojmom je on podrazumevao jedan linearni izraz po parcijalnim izvodima integrala jedne obične diferencijalne jednačine. Ove transformacije su se pojavile prilikom geometrijskih transformacija koje su vršili S.Lie i F.Klein. Ova ideja je navela S.Lie-a da stvori svoju opštu teoriju neprekidnih grupa transformacija [8] koje je on primenjivao na integraljenje diferencijalnih jednačina koje dopuštaju infinitezimalnu transformaciju o kojima je reč. Ali ova uvedena teorija i odgovarajući argoritam zahtevali su veoma složena rasmatranja.

Camille Jordan je, sa svoje strane, primenio jednu drugu teoriju infinitezimalnih transformacija koje se zovu kanoničkim [9].

S.Lie u svojim istraživanjima rasmatra infinitezimalne transformacije koje su linearne po parcijalnim izvodima i koje zavise od dve nezavisno promenljive x i y. On te transformacije naziva infinitezimalnim transformacijama tačke. Diferencijalne jednačine koje ih dopuštaju su obične diferencijalne jednačine prvog ili višeg reda istih promenljivih. Prema tome, diferencijalne jednačine o kojima je reč, moraju biti partikularnog oblika da bi dopustile odgovarajuće infinitezimalne transformacije, koje on naziva produženim. Tako nastaje ograničenje zbog suženog proučavanja diferencijalnih jednačina i njihovih infinitezimalnih transformacija partikularnog-užnjeg oblika. Prema tome Lieova teorija nema karakter opšte teorije u pravom smislu reči, a oblast njene primene takodje mora biti sužena. Medjutim, uvodeći koncepcije C.Jordan-a i N.Saltykow-a, teorija kanoničkih infinitezimalnih transformacija ponovo dobija opšti karakter, pa je primena šira od navedene Lie-ove. U svakom slučaju, u svojim ispitivanjima ćemo uvesti plodne S.Lie-ove ideje o strukturi transformacionih grupa. Tako dobijeni rezultati koje Jordan nije proučavao predstavljaju uopštenja njegove teorije. Naša teorija je slična po svom izgledu S.Lie-ovoj, ali je ona zamišljena u opštijem smislu i daje značajno proširenje C.Jordan-ove teorije. On se ne služi pojmom struktura, jer on formira izvesne infinitezimalne transformacije da bi mogao odrediti tražene integrale integraljenjem odgovarajućih linearnih jednačina. Medjutim, uvodeći strukturu grupa kanoničkih infinitezimalnih transformacija dolazimo do prednosti da dobihemo na nov podesniji način definicione jednačine traženih integrala.

<u>33. Kanoničke infinitezimalne transformacije</u>. Uzmimo sistem od dve obične diferencijalne jednačine:

$$dy_1 = X_1 dx, \qquad dy_2 = X_2 dx, \tag{259}$$

ekvivalentan linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini sjednom nepoznatom funkcijom $\underline{f}$, tj. :

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0 \tag{260}$$

X_1 i X_2 su funkcije promenljivih x, y_1 i y_2, dok je $X(f)$ skraćeni simbol prvog dela jednačine (260).

Predpostavimo da sitem (259), ili jednačina (260), dopušta opštu infinitezimalnu transformaciju:

$$U(f) \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} \tag{261}$$

ξ, η_1 i η_2 su funkcije promenljivih x, y_1 i y_2. Napišimo uslov S.Lie-a:

$$U(X) \equiv \rho(x, y_1, y_2)\, X(f) \tag{262}$$

koji mora biti ispunjen, imajući u vidu da simbol $U(X)$ ima sledeće značenje:

$$U(X) \equiv U(X(f)) - X(U(f)); \tag{263}$$

ρ je odredjena funkcija promenljivih x, y_1 i y_2 ([5], 316). Prema C.Jordan-u [9], lako se svodi infinitezimalna transformacija (261) na kanonički oblik:

$$U(f) = \eta_1' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2' \frac{\partial f}{\partial y_2}, \tag{264}$$

gde koeficijenti η_1' i η_2' imaju sledeća značenja:

$$\eta_1' = \eta_1 - \xi X_1, \quad \eta_2' = \eta_2 - \xi X_2.$$

Prema tome uočimo izraz oblika

$$V(f) \equiv z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}; \tag{265}$$

z_1 i z_2 označavaju funkcije promenljivih x, y_1 i y_2 ma kog oblika. Rećićemo, prema C.Jordan-u da izraz (265) definiše kanoničku infinitezimalnu transformaciju sistema (259), ili parcijalne jednačine (260), uvek kad god su i f i izraz (265) integrali te jednačine (260).

Prednost kanoničke infinitezimalne transformacije, proučavane od strane C.Jordan-a, sastoji se u tome, što problem integraljenja sistema (259), ili jednačine (260), se svodi na problem direktnog integraljenja linearnih parcijalnih jednačina u involuciji, čija je teorija dobro razradjena i daje bogat izbor postupaka integraljenja.

Na prvom mestu navedimo teoremu B.M.Okiljevića [26] kojom se dokazuje da jednačina (260) dopušta kanoničku infinitezimalnu transformaciju (264), kao integral, gde koeficijenti z_1 i z_2 indentički zadovoljavaju uslove ([26],(32),p.9), to jest:

$$X(z_k) - \sum_{i=1}^{2} z_i \frac{\partial X_k}{\partial y_i} = 0, \quad (k = 1,2).$$

Kao primer uzmimo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0. \tag{266}$$

Ona dopušta kanoničku infinitezimalnu transformaciju:

$$V(f) \equiv y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

jer postoji identičnost

$$(X(f), V(f)) = 0. \tag{267}$$

Pošto promenljive jednačine (266) mogu biti razdvojene u sistem dveju jednačina:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b_1, \qquad y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_2} = - b_1, \tag{268}$$

gde je b_1 proizvoljna konstanta, lako je na osnovu uslova (267) obrazovati Jacobi-ev sistem od tri sledeće jednačine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b_1,$$

$$y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_2} = - b_1, \qquad y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = b_2, \tag{269}$$

gde b_2 označava drugu proizvoljnu konstantu. Na taj način integraljenje jednačine (266), (to znači odredba dva različita integrala poslednje jednačine), se svodi na integraljenje Jacobi-evog sistema od tri jednačine (269).

Sa druge strane, integraljenje ovog sistema se svodi na integraljenje sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{b_2 y_1 - b_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{b_1 y_1 + b_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \tag{270}$$

koji se dobija rešavanjem prethodnog sistema (269) po parcijalnim izvodima.

Smatrajući y_2 kao konstantu, dobija se integral druge jednačine (270) kao što sledi:

$$f = b_2 \lg\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - b_1 \operatorname{arctg}\frac{y_1}{y_2} + \varphi(y_2), \tag{271}$$

gde je   proizvoljna funkcija od y_2. Da bismo imali vrednost te funkcije uvedimo izraz (271) u treću jednačinu (270), pa ćemo imati:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0, \qquad \varphi = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. Prema tome, na osnovu druge jednačine (269) imaćemo:

$$f = b_1\left(x - \operatorname{arctg}\frac{y_1}{y_2}\right) + b_2 \lg\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + C. \tag{272}$$

Ovaj rezultat predstavlja potpuni integral sistema linearnih parcijalnih jednačina prvog reda.

$$X(f) = 0, \quad V(f) = b_2.$$

Njihov potpuni sistem različitih integrala je dat, prema teoremi N.Saltykow-a [16] izrazima:

$$\frac{\partial \psi}{\partial b_1} = C_1, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial b_2} = C_2,$$

gde su C_1 i C_2 dve prozvoljne konstante, integralima:

$$x - \operatorname{arctg} \frac{y_1}{y_2}, \qquad y_1^2 + y_2^2 .$$

Kao drugi primer uzmimo linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda: (273)

$$X(f) \equiv (x^2 + y_1^2 + y_1 y_2)\frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 + y_1^2 - xy_2)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (x + y_1)y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

Pošto je ova jednačina homogena po nezavisnim promenljivim x, y_1 i y_2 ona takodje dopušta infinitezimalnu transformaciju koja će isto tako biti homogena [11], to znači:

$$U(f) \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}. \tag{274}$$

Izrazi $X(f)$ i $U(f)$ zadovoljavaju uslov

$$(X(f), U(f)) = - X(f).$$

Prema tome, izraz (274) je infinitezimalna transformacija S.Lie-a.

Dakle sistem od dve odgovarajuće linearne parcijalne jednačine prvog reda

$$X(f) = 0, \qquad U(f) = 0, \tag{275}$$

čini zatvoreni sistem.

Rešavajući ga po parcijalnim izvodima $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, ako je determinanta:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 + y_1^2 + y_1 y_2 & x^2 + y_1^2 - xy_2 \\ x & y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2 + y_1^2)(y_1 + y_2 - x) \neq 0,$$

dobija se Jacobi-ev sistem

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{xy_2}{x^2+y_1^2}\frac{\partial f}{\partial y_2}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y_1}+\frac{y_1y_2}{x^2+y_1^2}\frac{\partial f}{\partial y_2}=0 \qquad (276)$$

Odgovarajuća diferencijalna jednačina se piše

$$dy_2=\frac{xy_2}{x^2+y_1^2}dx+\frac{y_1y_2}{x^2+y_1^2}dy_1,$$

ili

$$\frac{dy_2}{y_2}=\frac{xdx+y_1dy_1}{x^2+y_1^2},$$

pa je:

$$d\lg y_2=d\lg\sqrt{x^2+y_1^2}.$$

Njen integral je izraz

$$\frac{y_2}{\sqrt{x^2+y_1^2}} \qquad (277)$$

Pošto integraljenje date jednačine (273) se svodi na integraljenje sistema (276), ili pak prve jednačine (276), čija infinitezimalna transformacija dopušta oblik druge jednačine sistema (276) i na poznati integral (277), integraljenje jednačine (273) se svodi na kvadraturu. Zaista, uzimajući dobijeni integral (277), mesto y_2, kao novu promenljivu koju ćemo označavati sa y, data jednačina (273) se svodi na linearnu parcijalnu jednačinu prvog reda sa dve nezavisno promenljive. Ta jednačina takodje dopušta infinitezimalnu transformaciju sa dve nezavisno promenljive. Prema tome, obična diferencijalna jednačina ima S.Lie-ov integracioni faktor.

Lako je videti da transformisana jednačina (273) postaje:

$$X'(f)\equiv(x^2+y_1^2+y_1y\sqrt{x^2+y_1^2})\frac{\partial F}{\partial x}+$$
$$+(x^2+y_1^2-xy\sqrt{x^2+y_1^2})\frac{\partial F}{\partial y}=0, \qquad (278)$$

dok se njena infinitezimalna transformacija (274) izražava relacijom:

$$V'(F) \equiv x\frac{\partial F}{\partial x} + y_1\frac{\partial F}{\partial y_1}. \tag{279}$$

Prema tome drugi integral jednačine (273) se dobija kvadraturom.

Zaista, odmah imamo identičnost:

$$(X'(F), V'(F)) \equiv x_1\frac{\partial F}{\partial x} + x_2\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial F}{\partial x} 2X_1 - \frac{\partial F}{\partial y_1} 2X_2 =$$

$$= X_1\frac{\partial f}{\partial x} - X_2\frac{\partial F}{\partial y_1} = X'(F).$$

Vidi se dakle da jednačina (278) dopušta infinitezimalnu transformaciju S.Lie-a (279). Prema tome, odgovarajući sistem od dve linearne parcijalne jednačine prvog reda:

$$X'(F) = 0, \quad V'(F) = \alpha, \tag{280}$$

gde je α proizvoljna konstanta, čini zatvoreni sistem.

Rešimo poslednji sistem (280), po parcijalnim izvodima: $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y_1}$. Tada se dobija Jacobi-ev sistem

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\alpha X_2}{\Delta} = -\frac{\alpha}{\Delta}(x^2 + y_1^2 - xy\sqrt{x^2+y_1^2})$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\alpha X_1}{\Delta} = \frac{\alpha}{\Delta}(x^2 + y_1^2 + yy_1\sqrt{x^2 + y_1^2}) \tag{281}$$

gde smo stavili

$$\Delta = (x^2 + y_1^2)(y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2}) \neq 0,$$

pri čemu $\underline{y}$ ima ulogu proizvoljne konstante. Prema jednačinama (281) dobijamo:

$$dF = \frac{\alpha}{\Delta}\left[(x^2 + y_1^2 - xy\sqrt{x^2 + y_1^2})dx - (x^2+y_1^2 + yy_1\sqrt{x^2+y_1^2})dy_1\right] =$$

$$= -\frac{\alpha}{\Delta}\left[(1 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y_1^2}})dx - (1 + \frac{yy_1}{\sqrt{x^2 + y_1^2}})dy_1\right],$$

$$\Delta_1 = y_1 - x + \sqrt{x^2 + y_1^2},$$

ili pak

$$dF = \frac{\alpha}{y_1 - x + y\sqrt{x + y_1^2}}\left[d(y_1 - x) + y\frac{x dx + y_1 dy_1}{\sqrt{x^2 + y_1^2}}\right]$$

Prema tome imamo:

$$dF = \frac{\alpha d(y_1 - x) + y\sqrt{x^2 + y_1^2}}{y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2}} = d\lg(y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2})^{\alpha},$$

čiji traženi integral postaje

$$F = \lg\beta(y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2})^{\alpha},$$

gde je β nova proizvoljna konstanta, tako da traženi **integral** sistema (280) može biti stavljen u sledeći oblik:

$$y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2}\,. \tag{282}$$

Tako izrazi (277) i (282) predstavljaju dva integrala tražene jednačine (273).

S druge strane uzmimo običnu diferencijalnu jednačinu koja odgovara jednačini (278):

$$\frac{dx}{x^2 + y_1^2 + yy_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{dy_1}{x^2 + y_1^2 - xy\sqrt{x^2 + y_1^2}}$$

gde je $\underline{y}$ proizvoljna konstanta koja predstavlja prvi dobijeni integral (277).

Ova poslednja jednačina u normalnom obliku glasi:

$$\frac{dy_1}{dx} = X, \tag{283}$$

gde smo stavili da je:

$$X = \frac{1 + (\frac{y_1}{x})^2 - y\sqrt{1 + (\frac{y_1}{x})^2}}{1 + (\frac{y_1}{x})^2 + y\frac{y_1}{x}\sqrt{1 + (\frac{y_1}{x})^2}}\,.$$

Što se tiče infinitezimalne transformacije (279), ona se sad javlja u kanoničkom obliku:

$$U(F) \equiv z_1\frac{\partial f}{\partial y_1},$$

gde smo stavili

$$z_1 = y_1 - xX,$$

čija recipročna vrednost čini S.Lie-ov integracioni faktor jednačine (283), tako da integral poslednje jednačine glasi:

$$\int \frac{1}{z_1}\left[dy - Xdx\right] = \gamma,$$

gde γ označava novu prozvoljnu konstantu. Pošto se izvrše svi potrebni računi dobija se definitivni rezultat

$$y_1 - x + y\sqrt{x^2 + y_1^2} = \gamma$$

koji odgovara drugom integralu (282) koji je dobijen ranije.

34. Grupe infinitezimalnih transformacija. Ako sistem od dve obične diferencijalne jednačine prvog reda (259) dopušta dva različita integrala čije su leve strane različiti odgovarajući integrali parcijalne jednačine prvog reda (260), taj će sistem imati najmanje dve različite infinitezimalne transformacije. To znači da ne sme postojati nikakva linearna veza izmedju ovih transformacija. U datom slučaju, kad poznajemo dve različite infinitezimalne transformacije sistema, to predstavlja prednost u pogledu integraljenja tog sistema prema slučaju gde se zna samo jedna transformacija. Ova prednost proizilazi iz toga što infinitezimalne transformacije daju naknadne uslove za formiranje novih diferencijalnih jednačina koje olakšavaju integraljenje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda.

35. Integraljenje sistema od dve diferencijalne jednačine sa dve različite infinitezimalne transformacije. Neka je dat sistem od dve obične diferencijalne jednačine:

$$dy_1 = X_1 dx, \qquad dy_2 = X_2 dx, \tag{284}$$

gde su X_1 i X_2 funkcije promenljivih x, y_1 i y_2, ili što je isto neka je data jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda:

$$X(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0. \qquad (285)$$

Pretpostavimo da sistem (284), ili pak jednačina (285), dopušta dve različite kanoničke infinitezimalne transformacije.

$$U_i(f) \equiv \eta_{i_1}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{i_2}\frac{\partial f}{\partial y_2}, \qquad (i = 1,2). \qquad (286)$$

Prema S.Lie-ovom izučavanju struktura grupa transformacija, mogu nastupiti tri slučaja:

1^o Dve transformacije (286) su u involuciji, što znači da je

$$(U_1(f),U_2(f)) = 0, \qquad (287)$$

2^o Infinitezimalne transformacije (286) zadovoljavaju uslov

$$(U_1(f),U_2(f)) = \varphi U_1(f), \qquad (288)$$

gde je φ funkcija promenljivih x, y_1 i y_2.

3^o Transformacije (286) ispunjavaju uslov

$$(U_1(f),U_2(f)) = \varphi_1 U_1(f) + \varphi_2 U_2(f), \qquad (289)$$

gde su φ_1 i φ_2 dve različite funkcije promenljivih x, y_1 i y_2.

Kako smo pretpostavili da su infinitezimalne transformacije (286) bile kanoničke, imaćemo pod pretpostavkom 1^o, da su transformacije (286) u involuciji (287). Prema tome, tri linearne parcijalne jednačine prvog reda od jedne nepoznate funkcije f:

$$X(f) = 0, \quad U_1(f) = b_1, \quad U_2(f) = b_2, \qquad (290)$$

gde su b_1 i b_2 dve proizvoljne konstante, obuhvataju taj sistem (290) u involuciji. U tom slučaju nastaju dve pretpostavke, prema tome, da li su jednačine (290) rešljive ili ne po parcijalnim izvodima nepoznate funkcije f.

Pretspostavimo najpre da su jednačine (290) rešljive po parcijalnim izvodima i da njihovi koeficijenti zadovoljavaju uslov

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & \eta_{11} & \eta_{12} \\ 0 & \eta = 1 & \eta = 2 \end{vmatrix} \not< 0. \tag{291}$$

Pošto je samim tim, sistem (290) rešljiv po parcijalnim izvodima: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}$, on se svodi na sistem od tri jednačine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = -\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Odavde dobijamo pomoću kvadratura funkciju $\underline{f}$ u obliku:

$$\underline{f} \equiv \psi(x, y_1, y_2, b_1, b_2) + b, \tag{292}$$

gde b_1 i b_2 figurišu linearno, dok je b nova proizvoljna konstanta.

Prema tome, prema teoremi N.Saltykow-a [16], koja generališe Jacobi-evu teoremu [2], dobijaju se integrali sistema (290) u obliku:

$$\frac{\partial \psi}{\partial b_1} = b_1', \qquad \frac{\partial \psi}{\partial b_2} = b_2', \tag{293}$$

gde su b_1' i b_2' dve nove proizvoljne konstante, dok b_1 i b_2 uopšte ne figurišu u dobijenim integralima (293).

Uzmimo sad drugu pretpostavku, suprotnu onoj pod (291), to znači da je $\Delta = 0$. U t om slučaju tri jednačine (290) se svode na samo dve različite, dok je treća njihova posledica. Pretpostavimo dakle da postoji relacija izmedju dve transformacije:

$$U_2(f) \equiv kU_1(f),$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti tako da u stvari jednačina (285), u ovoj pretpostavci, dopušta samo jednu infinitezimalnu transformaciju $U_1(f)$.

Da bi pod ovom pretpostavkom prointegralili jednačinu (285) formirajmo normalni sistem dveju jednačina:

$$X(f) = 0, \quad U_1(f) = b, \tag{294}$$

gde b označava proizvoljnu konstantu. Odredjivanje jednog integrala ovog sistema od dve parcijalne linearne jednačine jedne nepoznate funkcije f od tri proizvoljne promenljive x, y_1, y_2, se svodi na jednu operaciju integraljenja jedne jednačine u totalnim diferencijalima od tri promenljive, koja je definitivno ekvivalentna integraljenju jedne obične diferencijalne jednačine od dve promenljive.

Drugi integral jednačine (285) dobija se kvadraturom pomoću integraljenja jedne linearne parcijalne jednačine koja dopušta jednu infinitezimalnu transformaciju; oba simbola su funkcija od dve nezavisno promenljive kao i u slučaju proučenom ranije u jednačini (278) i infinitezimalnih transformacija (279). Na taj način problem pod 1^o je rešen u potpunosti.

Predjimo sad na izučavanje drugog slučaja pod 2^o, gde date transformacije (286) zadovoljavaju uslov (288). U ovom slučaju treba razlikovati tri pretpostavke.

Pretpostavimo najpre da funkcija φ degeneriše u konstantu.

Taj slučaj, kao i drugi bili su proučeni od strane S.Lie-a i N.Saltykow-a. Bitna razlika izmedju njihovih gledišta sastoji se u tome što S.Lie traži rešenje postavljenih problema pomoću svojih neprekidnih grupa transformacija čija je opšta teorija izložena u obimnom izdanju S.Lie - E.Engel kao i u onom S.Lie - G.Scheffer, [8][5]. Medjutim, N.Saltykow je izložio svoju metodu ispitivanja na taj način što je produbio C.Jordan-ovu teoriju i na taj način je uspeo da uprosti potrebni račun.

Bitni doprinos koji je on tako dao bio je u proširenju značajne Jacobi-eve teoreme o integraljenju običnih diferencijalnih jednačina kanoničkog oblika na jednačine u totalnim diferencijalima koje imaju osobine slične kanoničkim običnim jednačinama a koje je i on nazivao kanoničkim.

Uvedena metoda je dozvolila da se zameni niz S.Lie-vih kvadratura jednom jedinom ([12],p.2).

Cilj mog rada je da dobijene rezultate N.Saltykow-a primenim na rešavanje pomenutih problema i da ih detaljno proučim.

Što se tiče integraljenja u slučaju pod 2^o, pod pretpostavkom da je φ konstanta, metoda integraljenja je izložena u radu N.Saltykow-a ([12],p.67), stavljajući $\varphi = 1$.

U drugoj pretpostavci, slučaj pod (288), gde je koeficijenat φ proizvoljna funkcija promenljivih x, y_1, y_2, φ pretstavlja prvi integral sistema (284) prema poznatoj teoremi S. Lie-a ([9], p. 95, N°78).

Predjima najzad na proučavanje slučaja 3° gde je potreban uslov (289).

Pretpostavimo najpre da su dva koeficijenta φ_1 i φ_2 konstantni. Integraljenje u ovom slučaju se svodi na integraljenje nove infinitezimalne transformacije koja glasi:

$$U'(f) \equiv \varphi_1 U_1(f) + \varphi_2 U_2(f),$$

gde $_1$ i $_2$ imaju stalne vrednosti. Zato ćemo posmatrati grupu dveju transformacija: $U'(f)$ i $U_2(f)$, koje zadovoljavaju uslov:

$$(U'(f), U_2(f)) = \varphi_1 U'(f), \tag{295}$$

koji zamenjuje uslov koji pretstavlja izraz (289). Dobijena relacija (295) je analogna onoj iz predhodnog slučaja 2°. Prema tome dva tražena integrala se dobijaju metodom koju smo maločas izložili. Medjutim, vraćajući se na stari simbol (289) kada koeficijenti φ_1 i φ_2 pretstavljaju funkcije promenljivih x, y_1 i y_2, koeficijenti φ_1 i φ_2 pretstavljaju, prema S. Lie-ovoj teoremi, dva tražena integrala sistema (284).

36. Integraljenje sistema od tri jednačine. Uzmimo sistem od tri obične diferencijalne jednačine:

$$dy_i = X_i dx, \qquad (i = 1,2,3), \tag{296}$$

gde je odgovarajuća linearna parcijalna jednačina

$$X(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + X_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \tag{297}$$

i gde su koeficijenti x_1, x_2, x_3 proizvoljne funkcije promenljivih x, y_1, y_2, y_3.

Pretpostavimo da koeficijenti datih jednačina (296) dopuštaju grupu od tri kanoničke infinitezimalne transformacije:

$$U_1(f),\ U_2(f),\ U_3(f)$$

gde je stavljeno

$$U_i(f) \equiv \sum_{i=1}^{3} \eta_{ik}\frac{\partial f}{\partial y_k} \quad (i = 1,2,3). \tag{298}$$

Pretpostavimo da Poisson-ove zagrade sastavljene od ovih transformacija kao elemenata, ne daju novih integrala, ali da se mogu pisati, (za k=1,2,3), ovako:

$$(U_i, U_k) \equiv AU_1 + BU_2 + CU_3;$$

A,B i C su proizvoljne konstante. Zaista, ako bi ovi koeficijenti A,B i C bili funkcije promenljivih x, y_1, y_2, y_3, oni bi dali integrale polaznog sistema (296), suprotno uvedenoj pretpostavci.

Pretpostavimo najpre da je

$$(U_1, U_2) \equiv U_1, \tag{299}$$

što je uvek dozvoljeno jer smo u prethodnom zadatku dokazali da se uvek može doći na tu pretpostavku.

Što se tiče drugih pretpostavki, neka su one izražene ovako:

$$\begin{aligned} (U_1, U_3) &\equiv \sum_{i=1}^{3} \alpha_i U_i \\ (U_2, U_3) &\equiv \sum_{i=1}^{3} \beta_i U_i \end{aligned} \tag{300}$$

Potražimo nov sistem od tri kanoničke infinitezimalne transformacije, ali čije zagrade uzimaju prostiji oblik.

U tom cilju iskoristimo Jacobi-evu identičnost koja glasi:

$$(U_1,(U_2,U_3)) + (U_2,(U_3,U_1)) + (U_3,(U_1,U_2)) = 0,$$

Na osnovu izraza (299) i (300) prethodna relacija postaje:

$$(U_1, \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3) + (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3, U_2) + (U_3, U_1) \equiv 0.$$

Prema tome, grupišući članove u zagradama, imamo:

$$(U_1, \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3) \equiv \beta_2 U_1 + \beta_3(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3)$$

$$(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3, U_2) \equiv \alpha_1 U_1 - \alpha_3(\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 + \beta_3 U_3)$$

$$(U_3,U_1) \equiv -(\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2+\alpha_3 U_3).$$

Vodeći računa o ovim identičnostima, Jacobi-eva identičnost postaje:

$$U_1(\beta_2+\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+U_2(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2-\alpha_2)-U_3\alpha_3 \equiv 0,$$

i pošto su funkcije U_i, $(i=1,2,3)$, po pretpostavci nezavisne mora biti ispunjen sistem uslova:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0 \\ \beta_2+\alpha_1\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2(\beta_3-1) &= 0 \end{aligned} \qquad (301)$$

Proučimo prvi slučaj, tj. da $\alpha_2 = 0$. Na osnovu (301) izlazi da je

$$(U_1,U_3) \equiv \alpha_1 U_1 \equiv \alpha_1(U_1,U_2).$$

Ova pretpostavka nam pokazuje da zagrade (299) i (300): (U_1,U_2), (U_2U_3), (U_1U_3) nisu različite. Da bi to one bile mora se pretpostaviti da je $\alpha_2 \neq 0$, i da determinanta sistema (299) i jednačine (300) bude različita od nule, znači:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Tako se dolazi do druge pretpostavke tj. da je:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 1, \\ \beta_2+\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

Zagrade (299) i (300) tada imaju oblike:

$$\begin{aligned} (U_1,U_2) &\equiv U_1 \\ (U_1,U_3) &\equiv \alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2 \\ (U_2,U_3) &\equiv \beta_1 U_1-\alpha_1 U_2+U_3 \end{aligned} \qquad (302)$$

α i β se zovu koeficijentima strukture grupe infinitezimalnih transformacija.

Da bismo uprostili oblik ove strukture uvedimo jednu novu transformaciju U_3' vezanu za ranije relacijom

$$U_3' \equiv U_3 + \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2,$$

gde će stalni koeficijenti biti definisani tako da se uprosti prethodna tablica. Zato formirajmo Poisson-ove zagrade.

$$\begin{aligned} (U_1 U_3') &\equiv \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \lambda_1 U_1 \equiv (\alpha_1 + \lambda_1) U_1 + \alpha_2 U_2 \\ (U_2, U_3') &\equiv \beta_1 U_1 - \alpha_2 U_2 + U_3 - \lambda_1 U_1 \equiv \\ &\equiv (\beta_1 - \lambda_1) U_1 - \alpha_1 U_2 + U_3' - \lambda_1 U_1 - \lambda_2 U_2 \equiv \\ &\equiv (\beta_1 - 2\lambda_1) U_1 - (\alpha_1 + \lambda_2) U_2 + U_3'. \end{aligned} \tag{303}$$

Definišimo λ_1 i λ_2 relacijama:

$$\beta_1 - 2\lambda_1 = 0, \qquad \alpha_1 + \lambda_2 = 0.$$

U tom slučaju relacije (303) postaju:

$$(U_1 U_3) \equiv \alpha_2 U_2, \qquad (U_2, U_3') \equiv U_3$$

Uvedimo mesto U_1 transformaciju $\bar{U}_1 \equiv aU_1$, mesto U_2, transformaciju $\bar{U}_2 \equiv V_2$, a mesto U_3 transformaciju $\bar{U}_3 \equiv aU_3'$, tako ćemo imati

$$(\bar{U}_1, \bar{U}_2) \equiv \alpha \bar{U}_1, (\bar{U}_1, \bar{U}_3) = a^2 \alpha_2 \bar{U}_2, (\bar{U}_2, \bar{U}_3) \equiv \bar{U}_3.$$

ako se a definiše relacijom $a^2 \alpha = 2$, dobija se nova tablaca grupe, koja se piše, ispuštajući crticu zbog veće jednostavnosti, ovako:

$$(U_1, U_2) \equiv V_1, \quad (V_1 U_3) \equiv 2V_2, \quad (V_2, V_3) \equiv V_3. \tag{304}$$

Videćemo da ova struktura daje više prednosti za integraljenje našeg sistema, ali treba primetiti da dobijanje ove tablice počiva na pretpostavci da je $\Delta \neq 0$.

U suprotnoj pretpostavci gde je $\Delta = 0$, treba razlikovati tri posebna slučaja:

1° $(U_1, U_2) \equiv 0, \quad (U_1, U_3) \equiv U_1, \quad (U_2, U_3) \equiv \begin{cases} CU_2, & \text{za } C \neq 0 \\ U_2, & \text{za } C = 1 \end{cases}$

2^0 $(U_1,U_2) \equiv 0,\quad (U_1,U_3) \equiv U_1,\quad (U_2U_3) \equiv \begin{cases} U_1 + U_2 \\ 0 \end{cases}$

3^0 $(U_1,U_2) \equiv 0,\quad (U_1,U_3) \equiv U_1,\quad (U_2,U_3) \equiv \begin{cases} U_1 \\ 0 \end{cases}$

Podjimo od prvog slučaja:

$$(U_1,U_2) \equiv 0,\quad (U_1,U_3) \equiv U_1 \quad (U_2,U_3) \equiv \begin{cases} CU_2, & \text{za } C \neq 0 \\ U_2, & \text{za } C = 1 \end{cases} \tag{305}$$

i sastavimo odgovarajući sistem

$$X(f) = 0,\quad U_1(f) = 0, \tag{306}$$

Prema formulama strukture, U_1 i U_2 smatrane infinitezimalnim transformacijama jednačine (296) biće:

$$(X,U_1) \equiv 0,\quad (X,U_2) \equiv 0,\quad (U_1,U_2) \equiv 0. \tag{307}$$

Uslovi (307) dokazuju da je sistem (306) normalan i možemo ga uvek transformisati u Jacobi-ev sistem.

Zaista sistem (307) glasi:

$$X(f) = 0,$$

$$\eta_{11}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{21}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{31}\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \tag{308}$$

$$\eta_{12}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{22}\frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{32}\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Taj sistem (308) je linearan po parcijalnim izvodima $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, $\frac{\partial f}{\partial y_3}$.

Pretpostavimo da ga možemo rešiti po tri parcijalna izvoda koji će biti izraženi u funkcijama četvrtog naime $\frac{\partial f}{\partial y_2}$.

Neka je determinanta sistema (308):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 \\ 0 & \eta_{11} & \eta_{21} \\ 0 & \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Označimo sa D_i ono što postaje determinanta D kada se u njoj elementi (i-1)-ve kolone zamene odgovarajućim elementima kolone koja sadrži parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial y_3}$, znači elementima X_3, η_{31}, η_{32}, pa ćemo imati:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{D_1}{D}\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{D_2}{D}\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \qquad (309)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{D_3}{D}\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Integraljenje sistema (309) se završava kvadraturama, jer ovaj sistem dopušta U_3 kao infinitezimalnu transformaciju. Da bismo dobili kanoničku infinitezimalnu transformaciju sistema (309) dovoljno je da zato smenimo u simbolu U_3, definisanom relacijom (298), vrednosti $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ i $\frac{\partial f}{\partial y_2}$, date sistemom (309). Označavajući dobijenu transformaciju sa U, imaćemo:

$$U = \eta\frac{\partial f}{\partial y_3} \qquad (310)$$

gde je

$$\eta \equiv -\frac{1}{D}(\eta_{13}D + \eta_{23}D_3 + \eta_{33}D).$$

Jednačina u totalnim diferencijalima koja odgovara sistemu (309), glasi:

$$dy_3 = \frac{D_1}{D}dx + \frac{D_2}{D}dy_1 + \frac{D_3}{D}dy_2$$

Medjutim, jednačina u totalnim diferencijalima koja dopušta infinitezimalnu transformaciju oblika (310), dopušta kao integracioni faktor izraz $-\frac{1}{\eta}$ [12]. Prema tome,

$$\frac{1}{\eta}(dy_3 - \frac{D_1}{D}dx - \frac{D_2}{D}dy_1 - \frac{D_3}{D}dy_2) = 0$$

je jednačina u totalnim diferencijalima čiji se prvi član svodi na tačan diferencijal. Integraleći je imamo:

$$\int \frac{1}{\eta}(dy_3 - \frac{D_1}{D}dx - \frac{D_2}{D}dy_1 - \frac{D_3}{D}dy_2) = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta. Dakle dobijamo jedan integral sistema (309). To će u isto vreme biti integral prve jednačine, ovog sistema, to znači jednačine (297). Dobili smo tako jedan integral koji ćemo označiti sa $\underline{f_1}$, jednom jedinom kvadraturom.

Dakle problem se svodi na sledeći: data je jednačina (297) koja dopušta transformacije (298) i zna se jedan partikularni integral $\underline{f_1}$; uvodi se $\underline{f_1}$, kao nova promenljiva, time se svodi jednačina (297) na jednačinu s tri promenljive (vidi gore) i problem se dovršava kvadraturama.

2^o

$$(U_1,U_2) \equiv 0, \quad (U_1,U_3) \equiv U_1, \quad (U_2,U_3) \equiv \begin{cases} U_1 + U_2 \\ 0 \end{cases} \tag{311}$$

Očigledno je da sistem (306) i dalje važi, to znači da su zagrade identički nule. Tako će se dospeti do sistema od tri jednačine po parcijalnim izvodima od četiri promenljive. Sva prethodna rasmatranja se takodje primenjuju i ovde, i integrali sistema (306) se dobijaju kvadraturama.

3^o

$$(U_1,U_2) \equiv 0, \quad (U_1,U_3) \equiv U_1, \quad (U_2,U_3) \equiv \begin{cases} U_1 \\ 0 \end{cases}$$

Ovaj sistem se može zameniti sledećim:

$$X(f) = 0, \qquad U_1(f) = 0. \tag{312}$$

Iz ovog sistema od dve jednačine, koje dopuštaju dve transformacije U_2 i U_3 u involuciji, dobijamo dva integrala pomoću dve kvadrature.

Slučaj kad je $\Delta \neq 0$:

$$(U_1,U_2) \equiv U_1, \quad (U_1,U_3) \equiv 2U_2, \quad (U_2,U_3) \equiv U_3.$$

Sastavimo nov sistem jednačina oblika:

$$X(f) = 0, \quad X_1(f) \equiv U_1(f) - 1 \equiv 0, \quad X_2(f) \equiv U_2(f) - f = 0$$
$$X_3(f) \equiv U_3(f) - f^2 = 0, \tag{313}$$

od kojih je prva data jednačina (397) homogena a druge tri heterogene. Možemo, kao što smo i ranije radili, ovaj sistem transformisati u homogeni sistem. Zaista, ako su jednačine sistema (313) saglasne i ako one dopuštaju jedno rešenje:

$$F(x, y_1, y_2, y_3, f) = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta dobijamo transformacione formule:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1,2,3),$$

iz kojih izlazi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial f}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial f}}, \qquad (i = 1,2,3).$$

Smenimo ove poslednje vrednosti u jednačinama (313), pa će biti:

$$\begin{aligned}
X(F) &\equiv \frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + X_3\frac{\partial F}{\partial y_3} = 0,\\
X_1(F) &\equiv \eta_{11}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \eta_{21}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \eta_{31}\frac{\partial F}{\partial y_3} + \frac{\partial F}{\partial f} = 0,\\
X_2(F) &\equiv \eta_{12}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \eta_{22}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \eta_{32}\frac{\partial F}{\partial y_3} + f\frac{\partial F}{\partial f} = 0,\\
X_3(F) &\equiv \eta_{13}\frac{\partial F}{\partial y_1} + \eta_{23}\frac{\partial F}{\partial y_2} + \eta_{33}\frac{\partial F}{\partial y_3} + f^2\frac{\partial F}{\partial f} = 0.
\end{aligned} \qquad (314)$$

Obavezno sad moramo kontrolisati da li su jednačine ovog sistema saglasne:

Ovde su kanoničke promenljive rasporedjene ovako:

$$\begin{matrix} x, & y_1, & y_2, & y_3, & f, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{\partial F}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial F}{\partial y_2}, & \dfrac{\partial F}{\partial y_3}, & \dfrac{\partial F}{\partial f}. \end{matrix}$$

Jednačine (314) mogu se napisati ovako:

$$\begin{aligned}
X(F) &\equiv \frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial y_2} + X_3\frac{\partial F}{\partial y_3} = 0,\\
X_1(F) &\equiv U_1(F) + \frac{\partial F}{\partial f} = 0,\\
X_2(F) &\equiv U_2(F) + f\frac{\partial F}{\partial f} = 0\\
X_3(F) &\equiv U_3(F) + f^2\frac{\partial F}{\partial f} = 0.
\end{aligned}$$

Prema tome, lako je dokazati njihovu saglasnost; zaista, odgovarajuće zagrade uzimaju sledeći oblik:

$$(X,X_1) = (X,U_1) + (X,\frac{\partial F}{\partial f}) = (X,\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv 0,$$

jer drugi elemenat ne zavisi od izvoda po y_1, y_2, y_3, i X ne zavisi od izvoda po f; slično rezonujući imamo:

$$(X,X_2) \equiv (X,U_2) + (X,f\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv (X,f\frac{\partial F}{\partial f}) = 0$$

$$(X,X_3) \equiv (X,U_3) + (X,f^2\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv (X,f^2\frac{\partial F}{\partial f}) = 0$$

$$(X_1,X_2) \equiv (U_1 + \frac{\partial F}{\partial f},U_2 + f\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv (U_1,U_2) + (U_1,f\frac{\partial F}{\partial f}) +$$

$$+ (\frac{\partial F}{\partial f},U_2) + (\frac{\partial F}{\partial f},f\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv U_1 + \frac{\partial F}{\partial f} = X_1(F).$$

Na osnovu druge jednačine (314) imamo:

$$(X_1,X_3) \equiv (U_1 + \frac{\partial F}{\partial f},U_3 + f^2\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv (U_1,U_3) + (U_1,f^2\frac{\partial F}{\partial f}) +$$

$$+ (\frac{\partial F}{\partial f},U_1) + (\frac{\partial F}{\partial f},f^2\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv 2U_2 + f\frac{\partial F}{\partial f} = X_2(f) = 0.$$

Prema trećoj jednačini sistemu (314), biće:

$$(X_2,X_1) \equiv (U_2 + f\frac{\partial F}{\partial f},U_3 + f^2\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv (U_2,U_3) + (U_2,f^2\frac{\partial F}{\partial f}) +$$

$$+ (f\frac{\partial F}{\partial f},U_3) + (f\frac{\partial F}{\partial f},U_3) + (f\frac{F}{f},f^2\frac{\partial F}{\partial f}) \equiv U_3 + 2f^2\frac{\partial F}{\partial f} -$$

$$- f^2\frac{\partial F}{\partial f} \equiv X_3(F) = 0,$$

na osnovu četvrte jednačine sistema (314).

Ove jednačine dakle pokazuju da je sistem (314) saglasan i zatvoren; sad se može formirati jedna jednačina u totalnim diferencijalima koja će biti ekvivalentna ovom zatvorenom sistemu, ali najpre ćemo svesti ovaj sistem na Jacobi-ev sistem. Toga radi uvedimo determinantu:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} \\ 0 & \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} \\ 0 & \eta_{12} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{vmatrix}$$

Označimo sa Δ_{1+i} ono što postaje Δ, kad se u njoj elementi od $(1+i)$-te kolone respektivno zamene koeficijentima uz $\frac{\partial F}{\partial f}$ u uzastopnim jednačinama, to znači koeficijentima: $0, 1, f, f^2$. Prema tome, imaćemo sledeću determinantu:

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} \\ f & \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} \\ f^2 & \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{vmatrix}$$

Rešavajući sistem (314), dobijamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\Delta_{1+i}}{\Delta}\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \qquad (i = 1,2,3) \tag{315}$$

gde je

$$\Delta_k = a_k + b_k f + c_k f^2, \qquad (k = 1,2,3,4).$$

Posmatrani Jacobi-ev sistem (315) je ekvivalentan jednačini i totalnim diferencijalima:

$$df = \frac{\Delta_1}{\Delta}dx + \frac{\Delta_2}{\Delta}dy_1 + \frac{\Delta_3}{\Delta}dy_2 + \frac{\Delta_4}{\Delta}dy_3, \tag{316}$$

gde je

$$\frac{\Delta_k}{\Delta} = \alpha_k + \beta_k f + \gamma_k f^2, \qquad (k = 1,2,3,4)$$

Označavajući sa α_k, β_k i γ_k odnose $\frac{a_k}{\Delta}, \frac{b_k}{\Delta}, \frac{c_k}{\Delta}$.
Ali prema Mayer-ovoj teoremi , može se jednačina (316) svesti na običnu diferencijalnu jednačinu. Radi toga se smenjuje y_1, y_2, y_3, linearnim funkcijama promenljivih, i transformisana jednačina uzima oblik:

$$df = A dx \tag{317}$$

gde A ima oblik $\alpha + \beta f + \gamma f^2$; α, β i γ su izraženi u funkciji od $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$. Jednačina (217) može se napisati ovako:

$$\frac{df}{dx} = \alpha + \beta f + \gamma f^2 \tag{318}$$

gde su α, β, γ funkcije od x, y_1, y_2, y_3 koje sad ulaze kao parametri. Ova jednačina (318) je dobro poznata Riccati-eva jednačina.

Odmah se dobijaju tri integrala iz polazne jednačine.

Zaista, pretpostavljamo da je integral Riccati-eve jednačine (318):

$$\varphi(x,y_1,y_2,y_3,C), \tag{319}$$

gde C označava proizvoljnu konstantu, a prema izloženoj teoriji funkcija φ je jedan integral jednačine (297), koji zavisi od jedne proizvoljne konstante. Dajući konstanti C tri partikularne vrednosti: C_1, C_2, C_3 imamo tri integrala:

$$f_i = \varphi_i(x,y_1,y_2,y_3,C_k), \qquad (i = 1,2,3). \tag{320}$$

Integraljenje sistema (296) treba odrediti, ako su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ različite. Dokazaćemo da je to uvek moguće. Zaista, pretpostavimo da su te tri funkcije φ_i vezane relacijom:

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0. \tag{321}$$

Iz ovog proizilazi:

$$\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i} = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$

Dakle možemo pisati:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i}\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_k} = \frac{\partial\pi}{\partial\varphi_k} = 0, \quad (k = 1,2,3) \tag{322}$$

Pošto su tri funkcije $_i$ rešenja Riccati-eve jednačine imamo identičnosti oblika:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_h} = a'_h + b'_h\,{}_i + c'_h\,{}^2_i,$$

za posmatrane vrednosti indeksa i i h. Smenjujući ih u jednačine (322), imaćemo:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i})a'_h + (\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i}\varphi_i)b'_h + (\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}\varphi_i^2)c'_h, \quad (h=1,2,3) \tag{323}$$

Ovaj sistem (323) je sistem od tri homogene jednačine sa tri nepoznate

$$(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}), \qquad (\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi}\varphi_i), \qquad (\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_i}\varphi_i^2)$$

Pošto je determinanta koeficijenata ovoga sistema:

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

različita od nule imaćemo:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_i}\varphi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_i}\varphi_i^2 = 0$$

Posmatrajmo dve moguće pretpostavke da bi ove jednakosti bile zadovoljene:

1°
$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_i} = 0, \qquad (i = 1,2,3).$$

Ove jednakosti nisu moguće jer smo pretpostavili da postoji relacija

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0.$$

2°

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \varphi_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ova Vandermonde-ova determinanta se može napisati u obliku:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_3 - \varphi_1) = 0.$$

Bar jedna od ove tri razlike mora biti jednaka nuli, medjutim, mi smo pretpostavili da to nije slučaj. Pretpostavka (321) je prema tome neprihvatljiva, i integrali (320) su tri različita integrala uočenog sistema (296).

LITERATURA

1. Eulero Leonhardo: Institutionum calculi integralis, Volumen secundum. Petropoli, 1769.

2. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik, Berlin, 1884, S.157 Zwanzigste Vorlesung.

3. Lie S.: Göttingen Nachrichten 1874, N° 22 Vom 3 dec S.529 - 543.

4. .... Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Mathematische Annalen, Bd.XI, S.487, Leipzig.

5. .... Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekanten infinitesimalen Transformationen. Hrsg.von G., Scheffers. Leipzig, 1891.

6. .... Vorlesungen über Continuirliche gruppen mit geom. und auderen Anwendungen. Bearb. von G.Scheffers, Leipzig, 1893.

7. .... Gesammetle Abhanlungen Hrsg. von F.Engel und P.Heegaard Bde:I,II,IV,V, Leipzig 1922-1935.

8. Lie S. i F.Engel: Theorie der Transformationsgruppen t.I-III.

9. Jordan C.: Cours d'Analyse t.III., Paris, 1959.

10. Mayer A.: Zur Theorie der Infinitesimalen Transformationen. Sitzung vom 4. December 1893.

11. Saltykow N.: Sur les Transformations infinitésimales des équations différentielles, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris 1897, p.429.

12. .... Théorie des Transformations infinitésimales, Journal des Mathématiquées. purés et appliquées, Paris, 1905.

13. .... Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue, Bruxelles, 1924.

14. .... Étude bibliographique sur le memoire inédit de Charpit, Bulletin des Sciences Mathématiques, 20 série, LIV, août 1930, Paris.

15. .... Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er

ordre, Mémorial des Sciences Mathématiques p.7, Académie des Sciences, Paris, 1931.

16. Saltykow N.: Equations cannoniques, systéme de Jacobi, et leur généralisation. Méthodes classiques d'integration des équations partielles du premier ordre. Mémoire des Sciencs Mathématiques, fasciclele 50, chapitre IV.

17. .... Méthodes modérnes d'integration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, Paris, 1935.

18. .... Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom Srpska akademija nauka, Beogra, 1947.

19. Vivanti G.:.... Groupes de transformations, Paris, 1904.

20. Dickson L.E.: Differential equations From the group standpoint, Annals of math. ser.2 vol.25, pp. 287-378. Princeton, 1924.

21. Bianchi L.: Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transfomazioni. Zanichelli. Bologna, 1928.

22. Kowalewsky G.: Einfuhrung in die Theorie der Kontinuirlichen Gruppen, 1931.

23. Steklov V.A.: Osnovi teorije integraljenja običnih diferencijalnih jednačina, Moskva, 1927.

24. Eisenhart L.P.: Continuous groups of transformations. Princenton, 1933.

25. Okiljević B.: Prilog Sophus Lie-ovoj teoriji infinitezimalnih transformacija za integraljenje običnih diferencijalnih jednačina. Vesnik društva matematičara i fizičara NR Srbije, VI, 3-4 Beograd, 1954.

26. .... Sur la Théorie canonique des transformations infinitésimales, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, Serija: Matematika i fizika, N° 44 (1960).