Dragovan Blagojević

PRILOG PROBLEMU OPŠTIH REŠENJA
U TEORIJI
POLARNIH ELASTIČNIH MATERIJALA

Beograd 1969.

P r e d g o v o r

Pitanje opštih rešenja u teoriji nepolarnih elastičnih materijala uspešno su rešili R.S. Rivlin i J. L. Ericksen u vremenu od 1948. do 1954. godine. S obzirom na veliki značaj ovih rešenja, kao i na aktuelnost teorije polarnih elastičnih materijala, prof. Dr Rastko Stojanović predložio mi je da proučim mogućnost dobijanja opštih rešenja za te materijale.

U toku rada na ovom problemu vodio sam korisne diskusije sa članovima Grupe za reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku, na čemu im se i ovog puta zahvaljujem.

Pričinjava mi posebno zadovoljstvo da se na ovom mestu najtoplije zahvalim prof. Dr Rastku Stojanoviću za uvodjenje i usmeravanje u savremenu teoriju elastičnosti, za umešno vodjenje u ovom radu, kao i za sva zadovoljstva koja donosi takav rad.

Beograd, juna 1969. D. Blagojević

1. U V O D

Klasična linearna teorija elastičnosti zasnovana je na linearnim vezama izmedju napona i deformacije, tj. na pretpostavci da su deformacije infinitezimalne, i na pretpostavci da je naponsko stanje deformabilne sredine u potpunosti odredjeno poljem simetričnog tenzora napona. Konkretni problemi, zasnovani na ovoj teoriji elastičnosti, svode se isključivo na probleme matematičke prirode, tj. na rešavanje poznatih diferencijalnih jednačina sa zadatim graničnim uslovima.

U cilju što realnijeg opisivanja naponskog stanja, kvantitativnog i kvalitativnog, vršena su uopštavanja teorije elastičnosti od strane velikog broja autora i to na taj način što su ukidana ograničenja i pretpostavke iz klasične linearne teorije. U prvom redu generalizacija klasične linearne teorije izvršena je ukidanjem pretpostavke da su deformacije infinitezimalne, već konačne veličine, što povlači za sobom nelinearnost jednačina koje to stanje opisuju. I pored velikih teškoća oko integracije tako dobijenih diferencijalnih jednačina, u posebnim problemima one pokazuju ne samo kvantitativnu razliku u rezultatu, već i čitave nove klase pojava koje nisu čak ni aproksimativno obuhvaćene u linearnoj teoriji. Najzad, ovako proširena teorija doprinosi boljem shvatanju prvobitne teorije koju generališe - priroda aproksimacije može se potpuno shvatiti samo ako se tačno zna šta je to što se aproksimira.

Neka je $\mathcal{M}$ neki trodimenzioni skup materijalnih tačaka (neprekidne sredine), koje ćemo označiti velikim latinskim slovima sa viticom $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$, ... Ako sa (K), (L), ... obeležimo koordinatne sisteme u prostoru $\mathcal{M}$, tada koordinate materijalne tačke $\underset{\sim}{X}$ u koordinatnom sistemu (K) možemo da označimo sa $X^K(\underset{\sim}{X})$, $K = 1,2,3$ i to se naziva <u>materijalne koordinate</u>.

Kretanje neprekidne sredine $\mathcal{M}$ jeste jednoparametarska familija preslikavanja prostora $\mathcal{M}$ u Euklidski prostor $\mathcal{E}$. Ako sa (i), (i'), ... označimo koordinatne sisteme prostora $\mathcal{E}$, tada se slika $x = x_t(\underset{\sim}{X})$ tačke zove položaj tačke $\underset{\sim}{X}$ u trenutku t. Ili opštije, slika $\underset{\sim}{x}_t(S)$ ma kog skupa tačaka $S \subset \mathcal{M}$ se zove konfiguracija S u trenutku t. Uvodjenjem koordinata u $\mathcal{M}$ i $\mathcal{E}$ lokalno kretanje sredine $\mathcal{M}$ može biti izraženo pomoću tri realne funkcije -<u>prostorne koordinate</u>

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3; t), \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

koje zavise od četiri realne promenljive: tri materijalne koordinate X^1, X^2, X^3 i vremena t.

Inverzijom relacije (1.1), pod pretpostavkom da je odgovarajući Jakobijan različit od nule

$$J \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(X^1, X^2, X^3)} \neq 0, \tag{1.2}$$

dobija se

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3; t). \quad K = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

U ovom radu koriščena je notacija dvostrukih tenzorskih polja. Sve veličine koje se transformišu kao tenzori u odnosu na transformaciju koordinata X^K, $K = 1,2,3$, sa metričkim tenzorom G_{KL} obeležene su velikim latinskim slovima sa indeksima velikih latinskih slova. Veličine koje se transformišu kao tenzori u odnosu na transformaciju koordinata x^i, $i = 1,2,3$, sa metričkim tenzorom g_{ij} označene su malim talinskim slovima sa indeksima malih latinskih slova. Analogno ovome, veličine obeležene malim ili velikim latinskim slovima sa mešovitim indeksima (malim i velikim latinskim slovima) predstavljaju dvostruka tenzorska polja. Tako, npr. T^M_m ponaša se kao kontravarijantni tenzor pri transformaciji materijalnih koordinata X^K, a kao kovarijantni tenzor pri transformaciji prostornih koordinata x^k.

Izlaganje odeljaka 1.1 i 1.2 ovoga rada uglavnom je bazirano na monografiji C. Truesdella [1] u kojoj je navedena iscrpna bibliografija.

1.1. Klasična teorija elastičnosti pri konačnim deformacijama.

Mehanika neprekidnih sredina bazirana je na osnovnim zakonima dinamike i termodinamike, tj. na principima konzervacije (ili ravnoteže): mase, količine kretanja, kinetičkog momenta i energije. Karakteristična jednačina ravnoteže ima opšti oblik:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \Psi \, dv = \oint_{\mathcal{S}} P^k[\Psi] \, da_k + \int_{\mathcal{V}} I[\Psi] \, dv, \tag{1.4}$$

gde je $\mathcal{V}$ materijalnopodručje (oblast), $\mathcal{S}$ granična površ oblasti $\mathcal{V}$, Ψ gustina količine koja se nalazi u ravnoteži, $P^k[\Psi]$ protok (uliv ili odliv) količine Ψ kroz graničnu površ, a $I[\Psi]$ izvor (ili ponor) količine Ψ unutar oblasti. Sa $\frac{D}{Dt}(\quad) \equiv \dot{\overline{(\quad)}}$ obeležen je materijalni izvod količine $(\quad)$ po vremenu, a to je apsolutni izvod po vremenu količine $(\quad)$ u kome se materijalne koordinate ne menjaju ($X^K = \text{const}$).

Količina, koja nema protoka i izvora, jeste invarijanta po vremenu. U klasičnoj mehanici takva količina je masa. Ako sa ρ obeležimo gustinu mase, zakon konzervacije mase, prema (1.4) može da se napiše u obliku

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = \frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} dm = 0. \tag{1.5}$$

Relacija (1.5) mora da važi za proizvoljnu oblast $\mathcal{V}$ u telu, pa s toga mora da važi i u svakoj tački tela, tako da se dobija:

$$\dot{\rho} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} = 0 \tag{1.6}$$

lokalni zakon konzervacije mase u prostornom obliku.

Ako sa x^i ($i = 1,2,3$) obeležimo Dekartoe pravougle koordinate, t^{ij} tenzor napona, f^i zapreminsku silu, da_j orijentisani element granične površi $\mathcal{S}$ oblasti $\mathcal{V}$, $\dot{x}^i$ izvod po vremenu koordinate x^i, tada je $x^{[i}\dot{x}^{j]} \equiv \frac{1}{2}(x^i\dot{x}^j - x^j\dot{x}^i)$ moment brzine, $x^{[i}t^{j]k}da_k \equiv \frac{1}{2}(x^i t^{jk} - x^j t^{ik}) n_k da$ moment sile napona $t^{jk}n_k$ koji dejstvuje na element površine da. Jednačine ravnoteže količine kretanja i kinetičkog momenta, prema (1.4), sada mogu da se napišu u obliku:

$$\frac{D}{Dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \dot{x}^i \, dv = \oint_{\mathcal{S}} t^{ij} \, da_j + \int_{\mathcal{V}} \rho f^i \, dv, \tag{1.7}$$

(1.8) $$\frac{D}{Dt}\int_V \rho x^{[i}\dot{x}^{j]}dv = \oint_S x^{[i}t^{j]k}da_k + \int_V \rho x^{[i}f^{j]}dv \,.$$

S obzirom da je posmatrana oblast v tela proizvoljna, relacije (1.7) i (1.8) moraju da važe u svakoj tački tela, tako da se dobijaju:

(1.9) $$t^{ij}{}_{,j} + \rho f^i = \rho \ddot{x}^i ,$$

(1.10) $$t^{ij} = t^{ji} ,$$

osnovne diferencijalne jednačine kretanja, tzv. prvi i drugi Košijev zakon. Iz (1.10) proizilazi da je tenzor napona simetričan, tj. da je naponsko stanje u jednoj tački deformabilnog tela potpuno odredjeno sa šest nezavisnih koordinata tenzora napona.

Ukupna energija $\mathcal{E}$ sistema jednaka je zbiru:

(1.11) $$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{W} ,$$

gde je

(1.12) $$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{x}^i \dot{x}_i dv$$

kinetička energija sistema, a

(1.13) $$\mathcal{W} = \int_V \rho W dv \,,$$

ukupna unutrašnja energija sistema (nezavisna od kinetičke energije), koja nije vezana samo za pojam povratnog procesa i vezana je relacijom (1.13) za lokalnu unutrašnju energiju W, definisanu za jedinicu mase sistema. Ukoliko je proces povratan, što je slučaj sa primitivnom osobinom elastičnosti, tada unutrašnja energija $\mathcal{W}$, odnosno W, prelazi u potencijalnu energiju sistema i naziva se energija deformacije.

Prema principu lokalnog dejstva, gustina unutrašnje energije W u nekoj tački $\underset{\sim}{X}$ deformisane sredine odredjena je trenutnom konfiguracijom $x_t(N)$ neke proizvoljno male okoline tačaka $N(\underset{\sim}{X})$, koja sadrži posmatranu tačku $\underset{\sim}{X}$. Pretpostavimo da $x_t(N)$ ima n izvoda u $N(\underset{\sim}{X})$. Tada se relativni vektor položaja tačke $X' \subset N(\underset{\sim}{X})$ u odnosu na tačku $\underset{\sim}{X}$ može da napiše u obliku:

$$x^i(X') - x^i(X) = x^i_{;K}(X)\,dX^K + \frac{1}{2}x^i_{;KL}(X)\,dX^K dX^L + \dots + \frac{1}{n!}x^i_{;K_1K_2\dots K_n}(X)\,dX^{K_1}\dots dX^{K_n} + O(d^{n+1}), \tag{1.14}$$

gde je $O(d^{n+1})$ član, reda veličine $n+1$ po prečniku d posmatrane oblasti, a $x^i_{;K}$, $x^i_{;KL}$, ... gradijenti deformacije. Na ovaj način, moguće konfiguracije tačaka posmatrane oblasti odredjene su sve tačnije i tačnije vrednostima viših gradijenata deformacije u tački X.

S obzirom na princip lokalnog dejstva, gustina unutrašnje energije u klasičnoj teoriji elastičnsti uzima se u obliku

$$W = W(x^i_{;K}, X^K), \tag{1.15}$$

što znači da su sve konfiguracije tačaka u oblasti $N(X)$ koje odgovaraju istoj vrednosti gradijenta deformacije prvog reda $x^i_{;K}(X)$ preslikane na istu vrednost gustine energije u tački X.

Brzina promene ukupne energije (1.11) data je prvim zakonom termodinamike:

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{K} + \mathcal{W}) = \dot{\mathcal{A}} + \dot{\mathcal{Q}}, \tag{1.16}$$

gde je

$$\dot{\mathcal{A}} = F^i\dot{x}_i = \oint_s t^{ij}\dot{x}_i\,da_j + \int_v \rho f^i\dot{x}_i\,dv \tag{1.17}$$

efekt mehaničkog rada sila koje dejstvuju na tačke sistema, a

$$\dot{\mathcal{Q}} = \oint_s h^j da_j + \int_v \rho q\,dv \tag{1.18}$$

efekt rada nemehaničkog porekla, pri čemu je sa h^j obeležen protok kroz element da zatvorene površi s oblasti v, a sa q izvor unutar oblasti v po jedinicu mase sistema.

S obzirom na (1.12), (1.13), (1.17) i (1.18) prvi zakon termodinamike (1.16) dobija oblik:

$$\frac{D}{Dt}\int_v \rho\left(\frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}_i + W\right)dv = \oint_s \left(t^{ij}\dot{x}_i + h^j\right)da_j + \int_v \rho\left(f^i\dot{x}_i + q\right)dv, \tag{1.19}$$

Ova relacija, prema (1.4), predstavlja jednačinu ravnoteže energije sistema u globalnom obliku. Pošto je oblast v integracije proizvoljna, relacija (1.19) mora da važi u svakoj tački sistema, tako se dobija zakon ravnoteže energije u lokalnom obliku:

$$\rho \dot{W} = t^{(ij)} d_{ij} + h^{i}_{,i} + \rho q \,, \tag{1.20}$$

gde je

$$d_{ij} = \dot{x}_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(\dot{x}_{i,j} + \dot{x}_{j,i}) \tag{1.21}$$

tenzor brzine deformacije. Relacija (1.20) poznata je u literaturi pod nazivom Furije-Kirhof-C.Nojmanova jednačina energije.

Protok h^{i} i izvor q energije su, kao što je napred rečeno, nemehaničkog karaktera i mogu biti toplotnog, elektromagnetskog i sl. karaktera. Ako je posmatrano telo izolovano, tada je protok $h^{i} = 0$. Ako još nema izvora, $q = 0$, tada relacija (1.20) ima oblik

$$\frac{\rho}{\rho_0} \dot{W} = t^{(ij)} d_{ij} \,, \tag{1.22}$$

gde je ρ_0 gustina u početnoj konfiguraciji, a uvedena je isključivo radi podesnosti daljeg računa.

S obzirom na (1.15) i (1.21) jednačina energije (1.22) može da se napiše u obliku

$$\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial x^{k}_{;K}} \overline{\dot{x}^{k}_{;K}} = g_{in}\, t^{(ij)} \dot{x}^{n}_{,j} \,, \tag{1.23}$$

odakle je

$$t^{(ij)} = \frac{\rho}{\rho_0} g^{il} \frac{\partial W}{\partial x^{l}_{;K}} x^{j}_{;K} \,, \tag{1.24}$$

pošto je

$$\dot{x}^{n}_{,j} = \overline{\dot{x}^{n}_{;N}}\, X^{N}_{;j} \,. \tag{1.25}$$

Relacije (1.8), (1.9) i (1.24) predstavljaju potpun sistem od 1+3+6 = 10 jednačina za odredjivanje 1+3+6 = 10 nepoznatih: ρ, x^{i} i $t^{(ij)}$.

U teoriji grupa se pokazuje da se svaki tenzor može rastaviti na svoje nesvodljive delove, a tenzorska jednačina mora da zadovolji jednakost nesvodljivih delova. Nesvodljivi delovi tenzora drugog reda dva put kontravarijantnog, ili dva put kovarijantnog, su simetričan i antisimetričan deo.

Leva strana tenzorske jednačine (1.24) simetrična je po i i j, dok je desna nesimetrizovana. Na osnovu prethodnog, antisimetrični deo desne strane mora biti jednak nuli, tj.

(1.26) $$\left[g^{il}\frac{\partial W}{\partial x^{l}_{;K}}x^{j}_{;K}\right]_{[ij]} = 0.$$

Tenzorska jednačina (1.26) predstavlja sistem od tri homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sa devet nezavisnih promenljivih $x^{k}_{;K}$. Opšte rešenje ovih jednačina jeste funkcija od 9-3 = 6 nezavisnih rešenja. Šest nezavisnih rešenja jednačine (1.26) predstavljaju koordinate Grinovog tenzora deformacije:

(1.27) $$C_{MN} = g_{mn}\, x^{m}_{;M}\, x^{n}_{;N},$$

a energija deformacije W je proizvoljna funkcija od C_{MN}:

(1.28) $$W = W(C_{MN}).$$

Zamenom rešenja (1.27) u (1.24) dobijamo vezu izmedju napona i deformacije u materijalnom obliku:

(1.29) $$t^{(ij)} = 2\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial C_{KL}}\, x^{i}_{;K}\, x^{j}_{;L}.$$

U slučaju anizotropnog elastičnog tela, relacija (1.29) izražena preko Grinovog tenzora deformacije ili odgovarajuće relacije izražene preko bilo kog materijalnog tenzora deformacije pokazuju se kao korektne i jedino ispravne. Medjutim, kada je elastično telo izotropno, tada je funkcija energije deformacije izotropna funkcija od C_{MN}, tj.

(1.30) $$W = W(I_{\underset{\sim}{c}}, II_{\underset{\sim}{c}}, III_{\underset{\sim}{c}}),$$

gde su $I_{\underset{\sim}{c}}$, $II_{\underset{\sim}{c}}$, $III_{\underset{\sim}{c}}$ tri osnovne invarijante tenzora (1.27). S obzirom na vezu izmedju osnovnih invarijanata [2]

(1.31) $$I_{\underset{\sim}{c}} = \frac{II_{\underset{\sim}{c}}}{III_{\underset{\sim}{c}}}, \quad II_{\underset{\sim}{c}} = \frac{I_{\underset{\sim}{c}}}{III_{\underset{\sim}{c}}}, \quad III_{\underset{\sim}{c}} = \frac{1}{III_{\underset{\sim}{c}}}$$

Košijevog (prostornog) tenzora deformacije

(1.32) $$c_{ij} = G_{KL}\, X^{K}_{;i}\, X^{L}_{;j}$$

i Grinovog tenzora deformacije (1.27), funkcija energije deformacije (1.30) može da se piše u obliku

(1.33) $$W = W(I_c, II_c, III_c).$$

Na taj način, energija deformacije za izotropne materijale može se uzeti kao proizvoljna funkcija Košijevog tenzora deformacije

(1.34) $$W = W(c_{ij}),$$

ili bilo kojeg prostornog tenzora deformacije.

Da bismo u relaciju (1.24) uveli prostorne mere deformacije neophodno je da se ista prethodno napiše u prostornom obliku, tj. u funkciji prostornih gradijenata deformacije $X^K_{;k}$:

(1.35) $$t^{(ij)} = \frac{\rho}{\rho_0} g^{il} \frac{\partial W}{\partial X^M_{;m}} \frac{\partial X^M_{;m}}{\partial x^l_{;K}} x^j_{;K}.$$

Iz veze prostornih i materijalnih gradijenata deformacije

(1.36) $$X^M_{;m} x^m_{;N} = \delta^M_N$$

dobija se

(1.37) $$\frac{\partial X^M_{;m}}{\partial x^l_{;K}} = - X^M_{;l} X^K_{;m},$$

pa relacija (1.35) dobija prostorni oblik:

(1.38) $$t^{(ij)} = - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial X^K_{;j}} X^K_{;i}$$

S obzirom na (1.34) i (1.32) relacija (1.38) postaje:

(1.39) $$t^{(ij)} = - 2 \frac{\rho}{\rho_0} g^{il} \frac{\partial W}{\partial c_{jn}} c_{nl}.$$

Na osnovu napred iznete osobine tenzorskih relacija, antisimetrični deo desne strane relacije (1.39) mora biti jednak nuli, tj.

(1.40) $$\left(g^{il} \frac{\partial W}{\partial c_{jn}} c_{nl} \right)_{[ij]} = 0,$$

što predstavlja sistem od tri homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda sa šest nezavisnih promenljivih (1.32). Opšti integral ovih jednačina jeste proizvoljna funkcija od 6-3 = 3 nezavisna integrala. Ta tri nezavisna integrala su tri osnovne invarijante tenzora deformacije (1.32):

$$(1.41) \qquad I_{\underset{\sim}{c}} = \delta^i_j c^j_i , \quad II_{\underset{\sim}{c}} = \frac{1}{2}\delta^{ij}_{kl} c^k_i c^l_j , \quad III_{\underset{\sim}{c}} = \frac{1}{6}\delta^{ijn}_{klm} c^k_i c^l_j c^m_n .$$

Unošenjem rešenja (1.41) u (1.39) dobijamo:

$$(1.42) \qquad t^{(ij)} = -2\frac{\rho}{\rho_0}\left[III_{\underset{\sim}{c}}\frac{\partial W}{\partial III_{\underset{\sim}{c}}} g^{ij} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_{\underset{\sim}{c}}} + I_{\underset{\sim}{c}}\frac{\partial W}{\partial II_{\underset{\sim}{c}}}\right)c^{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_{\underset{\sim}{c}}} c^{ik} c^j_k\right].$$

Osnovne invarijante recipročnog tenzora deformacije (1.32)

$$(1.43) \qquad \overset{-1}{c}{}^{ij} = G^{KL} x^i_{;K} x^j_{;L}$$

i tenzora deformacije (1.27) jednake su, tako da je veza izmedju osnovnih invarijanata tenzora (1.32) i (1.43) analogna sa (1.31). Korišćenjem ove činjenice, kao i Kejli-Hamiltonove teoreme u obliku [2]

$$\overset{-1}{c}{}^m_n = I_{\underset{\sim}{c}^{-1}}\delta^m_n - II_{\underset{\sim}{c}^{-1}} c^m_n + III_{\underset{\sim}{c}^{-1}} c^m_k c^k_n$$

relacije izmedju napona i deformacije (1.42) mogu da se napišu u tzv. Fingerovom obliku:

$$(1.44) \qquad t^{(ij)} = \frac{2\rho}{\rho_0}\left[\left(II\frac{\partial W}{\partial II} + III\frac{\partial W}{\partial III}\right)g^{ij} + \frac{\partial W}{\partial I}\overset{-1}{c}{}^{ij} - III\frac{\partial W}{\partial II} c^{ij}\right]$$

gde se invarijante I, II i III odnose na osnovne invarijante tenzora $\overset{-1}{\underset{\sim}{c}}$, a radi jednostavnosti i ubuduće ćemo ih pisati bez indeksa.

Relacija (1.44) dobijena je u elegantnom i pogodnom obliku za traženje egzaktnih rešenja opšte teorije elastičnosti zahvaljujući Fingerovoj upotrebi prostorne mere deformacije (1.43) za izotropne materijale.

Kod nestišljivih materijala zapremina je invarijantna, $dV = dv$, odakle je $III_{\underset{\sim}{c}} = III = 1$ i $\rho = \rho_0$. Kao posledica sledi $J = 1$, pa je $\dot{x}^k_{,k} = I_{\underset{\sim}{d}} = 0$. Na osnovu ovoga, ako naponu (u relaciji (1.22)) dodamo proizvoljan hidrostatički pritisak pg^{ij}:

$$\left(t^{(ij)} - pg^{ij}\right)d_{ij} = t^{(ij)}d_{ij} - pI_{\underset{\sim}{d}} \equiv t^{(ij)}d_{ij}$$

vidimo da on ne vrši rad. Na taj način, iz relacije (1.44) dobijamo Rivlinove veze izmedju napona i deformacije za nestišljive elastične materijale:

$$t^{(ij)} = -pg^{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I}\overset{-1}{c}{}^{ij} - 2\frac{\partial W}{\partial II}c^{ij}. \tag{1.45}$$

Na vezama izmedju napona i deformacije (1.44) i (1.45) zasnivaju se Rivlinova egzaktna rešenja problema.

1.2. Egzaktna rešenja opštih jednačina teorije elastičnosti.

Rešenje jednačina (1.44), (1.9) i (1.6) predstavljalo bi egzaktno rešenje, jer ove jednačine su opšte jednačine teorije elastičnosti. Jedan od osnovnih problema za nalaženje egzaktnih rešenja jeste taj da su veze izmedju napona i deformacije (1.44) ili (1.43) date preko energije deformacije W, koja je proizvoljna funkcija osnovnih invarijanata tenzora (1.43). Medjutim, Rivlin [3]-[6] je prvi primetio i pokazao mogućnost dobijanja egzaktnih rešenja, čime je otvorio novu oblast teorije elastičnosti. Sam metod rešavanja je obrnut: pretpostavlja se klasa deformacija pa se smenom u relacije (1.44) ili (1.45) i pomoću jednačina ravnoteže (1.9), kada se stavi $\ddot{x}^i = 0$, odrede, ako je to moguće, naponi koji su potrebni da izazovu takvu deformaciju. Na taj način Rivlin je dobio u nekoliko važnih slučajeva rešenja opštih jednačina elastičnosti za izotropna elastična tela. Zatim je Eriksen [7] pokazao u kojim se problemima mogu dobiti egzaktna rešenja i odredio ih u preostalim slučajevima.

Problemi u teoriji elastičnosti za koje je moguće dobiti (i za koje su odredjena) egzaktna rešenja, matematički se mogu okarakterisati na sledeći način: (i) sistem koordinata X^K bira se tako da metrički tenzori G_{KL}, G^{KL} budu funkcije jedne promenljive, na primer X^1, (ii) sistem koordinata x^i bira se, na sličan način, tako da metrički tenzori g_{ij}, g^{ij} budu funkcije samo jedne promenljive, na primer x^1; (iii) deformacija se tada definiše relacijama izmedju koordinatnih sistema X^K i x^i, koje su takve da x^1 bude funkcija samo od X^1, dok su x^2 i x^3 linearne funkcije promenljivih X^2 i X^3.

Pri ovim uslovima gradijent deformacije $x^i_{;K}$ se svodi na konstantu ili funkciju jedne promenljive x^1 (ili X^1). Na taj način, koordinate tenzora deformacije c_{ij} i $\overset{-1}{c}_{ij}$ takodje se svode bilo na konstante bilo na funkciju od X^1 (ili x^1). U tom slučaju, iz relacije (1.44) ili (1.45) sledi da tenzor napona $t^{(ij)}$ u odnosu na sistem koordinata x^i takodje ne zavisi od x^2 i x^3, pa se jednačine ravnoteže (1.9) svode na obične diferencijalne jednačine, pri čemu su nepoznate u tim jednačinama funkcije jedne promenljive X^1.

Uslovi (i) i (ii) biće zadovoljeni ako su krivolinijski sistemi X^K i x^i polarno-cilindarski ili Dekartovi pravougli sistemi. Identifikujući oba sistema sa polarno-cilindarskim koordinatnim sistemima dobijaju se cilinarsko simetrični problemi. Izbor Dekartovih pravouglih koordinata za sistem X^K i polarno-cilindarskih kordinata za sistem x^i dovodi do problema savijanja. Ako krive x^i obrazuju Dekartov pravougli sistem, a krive X^K polarno-cilindarske koordinate, dobija se problem obrnutog tipa od prethodnog, tj. telo je u početnoj konfiguraciji iskrivljen paralelepiped, a u deformisanoj konfiguraciji ograničen ravnim površinama. Slučaj homogene deformacije dobija se ako su oba referentna koordinatna sistema X^K i x^i pravolinijska-pravougaona.

Od homogenih deformacija posebno je interesantno rešenje problema čistog smicanja, u kome se eksplicitno pokazuju Kelvinov i Pointingov efekt. Ovi efekti, predvidjeni u specijalnim teorijama (Kelvin 1867. g. [8] i Pointing 1905. g. [9]) i eksperimentalno potvrdjeni, ukazuju na kvalitativnu razliku opšte i linearne teorije. Medjutim, za naredno izlaganje ovoga rada homogene deformacije nisu od interesa, za razliku od rešenja torzije i savijanja, koja će biti ukratko prikazana.

1.2.1. Torzija nestišljivog, homogenog, izotropnog, kružnog cilindra.

U slučaju cilindarsko simetričnih problema, kao što je napred rečeno, za materijalne kordinate X^K i prostorne x^i usvajamo polarno-cilindarske koordinate, tako da je:

(1.46) $\{X^1, X^2, X^3\} = \{R, \Theta, Z\}$, $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, z\}$,

koje su za materijalne i prostorne Dekartove pravougle koordinate vezane obrascima:

(1.47) $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$; $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$.

Deformacije, simetrične u odnosu na z -osu, zadate su jednačinama:

(1.48) $r = r(R)$, $\vartheta = a\Theta + bZ$, $z = m\Theta + nZ$,

ili

(1.49) $R = R(r)$, $\Theta = (n\vartheta - bz)/\lambda$, $Z = (az - m\vartheta)/\lambda$; $\lambda = an - bm$

gde su a, b, m i n konstantne. Ova deformacija sadrži čistu torziju (a = 1, b = K, m = 0, n = 1); torziju pravog kružnog cilindra prvobotno podvrgnutog istezanju u pravcu z-ose (a = 1, b = λK, m = 0, n = λ); savijanje prvobitno krivog paralelepipeda (b = m = 0, an = λ) i dr.

Za koordinate metričkih tenzora iz (1.47) dobijamo:

(1.50) $\{G_{KL}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$, $\{G^{KL}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$, $\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$, $\{g^{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Za slučaj čiste torzije (a = 1, b = K, m = 0, n = 1, gde je K ugao torzije) koordinate tenzora deformacije (1.32) i (1.43) iz (1.48) i (1.49), a s obzirom na (1.50), biće:

(1.51) $$\{c^i_j\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{r^2} & -\frac{K^2R^2}{r^2} \\ 0 & -KR^2 & 1+K^2R^2 \end{Bmatrix}, \quad \{\overset{-1}{c}{}^i_j\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{dr}{dR}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2(K^2R^2+1)}{R^2} & K \\ 0 & Kr^2 & 1 \end{Bmatrix}$$

Iz izraza za treću osnovnu invarijantu III tenzora deformacije $(1.51)_2$

(1.52) $$\overline{\overline{III}} = \det(\overset{-1}{c}{}^i_j) = \left(\frac{dr}{dR}\right)^2 \frac{r^2}{R^2}$$

i uslova nestišljivosti (III = 1), dobijamo:

(1.53) $\quad R^2 = z^2 + A$

gde je A integraciona konstanta. Za pun cilindar z mora biti jednako nuli kada je $R = 0$, pa je $A = 0$ i

(1.54) $\quad R = z$.

Preostale dve osnovne invarijante tenzora deformacije $\overset{-1}{C}$ sada su iz (1.51), s obzirom na (1.54),

$$I = trag(\overset{-1}{c}{}^i_j) = 3 + K^2 z^2,$$
(1.55)
$$II = trag(c^i_j) = 3 + K^2 z^2.$$

Relacija napon-deformacija za nestišljiv izotropan elastični materijal data je sa (1.45). Smenom dobijenih vrednosti za tenzore deformacije (1.51) u relaciju (1.45), a imajući u vidu (1.54) i (1.50), dobijamo:

$$(1.56) \quad \{t^{(ij)}\} = -p\{g^{ij}\} + 2\frac{\partial W}{\partial I}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+z^2K^2}{z^2} & K \\ 0 & K & 1 \end{Bmatrix} - 2\frac{\partial W}{\partial II}\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z^2} & -K \\ 0 & -K & 1+z^2K^2 \end{Bmatrix},$$

ili, u eksplicitnom obliku, kontravarijantne koordinate tenzora napona su:

$$t^{11} = -p + 2\frac{\partial W}{\partial I} - 2\frac{\partial W}{\partial II}, \quad z^2 t^{22} = -p + 2(1+z^2K^2)\frac{\partial W}{\partial I} - 2\frac{\partial W}{\partial II},$$
(1.57)
$$t^{33} = -p + 2\frac{\partial W}{\partial I} - 2(1+z^2K^2)\frac{\partial W}{\partial II}, \quad t^{23} = 2K\left(\frac{\partial W}{\partial I} + \frac{\partial W}{\partial II}\right),$$
$$t^{12} = t^{13} = 0.$$

Iz jednačina kretanja (1.9) i (1.10), za slučaj ravnoteže ($\ddot{x}^i = 0$), proizilazi da je svaka deformacija moguća ako postoji dovoljno velika zapreminska sila f^i da je izazove. Problem postaje netrivijalan postavljanjem zahteva da je zapreminska sila jednaka nuli. U tom slučaju, jednačine ravnoteže su:

$$(1.58) \quad t^{ij}{}_{,j} = 0, \quad t^{ij} = t^{ji}.$$

Kako su koordinate t^{12} i t^{13} tenzora napona jednake nuli, a preostale koordinate tenzora napona funkcije samo promenljive z (što je lako zaključiti iz (1.33), (1.54), (1.55) i (1.57)), jednačina ravnoteže $(1.58)_1$ dobija oblik:

(1.59) $$t^{ij}{}_{,j} = 0 .$$

Kao što se vidi, od tri jednačine $(1.58)_1$ dve su identički zadovoljene, pa razvijanjem kovarijantnog izvoda (1.59) dobijamo:

(1.60) $$\frac{dt^{11}}{dz} + \frac{t^{11} - z^2 t^{22}}{z} = 0 , \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 ,$$

gde je parcijalni izvod po z zamenjen totalnim, pošto je promenljiva samo z. Iz $(1.60)_{2,3}$ vidimo da je i hidrostatički pritisak p funkcija samo od z. Integraljenjem $(1.60)_1$ imamo:

(1.61) $$t^{11} = \int_a^z (z^2 t^{22} - t^{11}) \frac{dz}{z} ,$$

gde je integraciona konstanta odredjena uslovom $t^{11} = 0$ na cilindru $z = a$ (a je poluprečnik cilindra).

Eliminisanjem hidrostatičkog pritiska p iz $(1.57)_2$ i $(1.57)_3$ pomoću $(1.57)_1$, dobijamo:

(1.62) $$z^2 t^{22} = t^{11} + 2z^2 K^2 \frac{\partial W}{\partial I} , \quad t^{33} = t^{11} - 2z^2 K^2 \frac{\partial W}{\partial II} .$$

Iz $(1.62)_1$ vidimo da razlika $z^2 t^{22} - t^{11}$, koja se javlja u integralu (1.61), ne zavisi od hidrostatičkog pritiska p, tako da za napon t^{11} dobijamo:

(1.63) $$t^{11} = 2K^2 \int_a^z z \frac{\partial W}{\partial I} dz .$$

Relacijama $(1.57)_{4,5,6}$, $(1.58)_2$, $(1.62)_{1,2}$ i (1.63) sistem napona je potpuno odredjen. Sama činjenica da napon t^{33} nije jednak nuli ukazuje na kvalitativnu razliku u odnosu na klasičnu linearnu teoriju elastičnosti. U klasičnoj linearnoj teoriji elastičnosti da bi se izvršila čista torzija štapa potrebno je dejstvovati samo torzionim naponom. Ovde, u nelinearnoj teoriji, to nije moguće, već se mora dejstvovati i naponom t^{33} duž štapa. U suprotnom, ukoliko se ne dejstvuje naponom t^{33}, štap će se izdužiti, što je i eksperimentima pokazano. Ova fizička karakteristika materijala naziva se Pointingov efekt.

Ukupan moment M uvijanja punog cilindra dat je integralom:

$$(1.64)\qquad M = \int_0^a z\, t\langle 23\rangle\, 2z\pi\, dz\,,$$

gde je sa $t\langle 23\rangle$ označena fizička koordinata t^{23} napona. S obzirom na $(1.57)_4$ i $(1.50)_3$ iz (1.64) dobijamo da je moment uvijanja:

$$(1.65)\qquad M = 4\pi K \int_0^a z^3\left(\frac{\partial W}{\partial I} + \frac{\partial W}{\partial II}\right) dz\,.$$

Invarijante (1.55) parne su funkcije ugla uvijanja K. Kako je energija deformacije W funkcija invarijanata (1.55) to su i parcijalni izvodi ove funkcije parne funkcije po K. Na taj način, iz (1.65) proizilazi da je moment uvijanja neparna funkcija ugla uvijanja K.

Ukupna normalna sila N, kojom treba dejstvovati na ravne površine punog cilindra da bi se ostvarila čista torzija, data je integralom:

$$(1.66)\qquad N = \int_0^a t\langle 33\rangle\, 2z\pi\, dz\,.$$

Iz $(1.62)_2$ i (1.63), a s obzirom na $(1.50)_3$, za fizičku koordinatu $t\langle 33\rangle$ napona dobijamo:

$$(1.67)\qquad t\langle 33\rangle = 2K^2 \int_a^z z\frac{\partial W}{\partial I} dz - 2z^2K^2\frac{\partial W}{\partial II}\,.$$

Zamenom (1.67) u (1.66) dobijamo da je normalna sila

$$(1.68)\qquad \frac{N}{4\pi} = K^2\int_0^a z\,dz \int_a^z z\frac{\partial W}{\partial I} dz - K^2\int_0^a z^3\frac{\partial W}{\partial II} dz\,.$$

Ako se izvrši parcijalna integracija prvog člana s desne strane (1.68) imamo:

$$(1.69)\qquad \int_0^a z\,dz \int_a^z z\frac{\partial W}{\partial I} dz = \frac{1}{2}z^2\int_a^z z\frac{\partial W}{\partial I} dz\,\Big|_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a z^3\frac{\partial W}{\partial I} dz\,,$$

pa kako je $\int_0^a z\frac{\partial W}{\partial I} dz = 0$ iz (1.63), jer je $t^{11} = 0$ za $z = a$, izraz (1.68) za normalnu silu konačno dobijamo u obliku:

$$(1.70)\qquad N = -2\pi K^2\int_0^a z^3\left(\frac{\partial W}{\partial I} + 2\frac{\partial W}{\partial II}\right) dz\,.$$

Relacija (1.70) izražava Pointingov efekt u njegovom najznačajnijem obliku, jer odredjuje normalnu aksijalnu silu potrebnu za ostvarenje čiste torzije. Kao što je napred napomenuto, parcijalni izvodi funkcije W su parne funkcije od K, pa prema (1.70) proizilazi da je normalna sila pri malim torzijama proporcionalna drugom stepenu ugla K uvijanja. To je razlog zašto se u linearnoj teoriji ne pojavljuje Pointingov efekt.

1.2.2. Savijanje nestišljivog, homogenog, izotropnog paralelepipeda.

Posmatraćemo telo koje u nedeformisanom stanju predstavlja homogeni izotropni nestišljivi paralelepiped i na njemu proučiti problem savijanja. Za materijalne koordinate X^K usvojićemo Dekartov pravougli koordinatni sistem, a za prostorne koordinate x^i polarno-cilindarski koordinatni sistem:

$$\{X^1, X^2, X^3\} = \{X, Y, Z\}, \quad \{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, z\}. \tag{1.71}$$

Koordinate metričkih tenzora g_{ij} i g^{ij}, s obzirom na $(1.71)_2$, date su relacijama $(1.50)_{3,4}$, dok je s obzirom na $(1.71)_1$

$$\{G_{KL}\} = \{G^{KL}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{1.72}$$

Razmotrićemo deformaciju, koja je zadata vezama izmedju prostornih i materijalnih koordinata, pri čemu su prostorne koordinate proizvoljne funkcije:

$$r = r(X), \quad \vartheta = \vartheta(Y), \quad z = z(Z). \tag{1.73}$$

Iz (1.73), (1.72) i $(1.50)_{3,4}$ tenzor deformacije (1.43) možemo da napišemo u obliku:

$$\{\overset{-1}{c}{}^i_j\} = \begin{Bmatrix} (r')^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2(\vartheta')^2 & 0 \\ 0 & 0 & (z')^2 \end{Bmatrix}, \tag{1.74}$$

gde je sa primom ($'$) označen izvod funkcije po promenljivoj od koje zavisi ta funkcija. Treća osnovna invarijanta tenzora (1.74) je

$$\underline{III} = (z z' \vartheta' z')^2, \tag{1.75}$$

a uslov nestišljivosti, $\underline{III}$ = 1, biće ispunjen ako je:

$$z z' = k, \quad \vartheta' = \frac{1}{\lambda k}, \quad z' = \lambda, \tag{1.76}$$

gde su k i λ konstante. Integraljenjem relacija (1.76) dobijamo:

$$z = (2kX + K)^{1/2}, \quad \vartheta = \frac{Y}{\lambda k}, \quad z = \lambda Z, \tag{1.77}$$

gde je K integraciona konstanta, pri čemu su preostale dve integracione konstante izjednačene sa nulom. Relacije (1.77) opisuju takvu deformaciju paralelepipeda, da: (i) svaka ravan, koja je prvobitno bila upravna na X-osu, postaje u deformisanoj konfiguraciji deo cilindra čija je osa Z-osa; (ii) ravni, koje su prvobitno bile upravne na Y-osu, postaju u deformisanoj konfiguraciji ravni koje sadrže Z-osu; (iii) paralelepiped se ravnomerno isteže u pravcu Z-ose.

Ako ravan $X = -a$ postane $z = z_1$, $X = +a$ postane $z = z_2$, a $Y = \pm b$ postane $\vartheta = \pm\vartheta_0$, tada iz (1.77) dobijamo da su konstante:

$$k = \frac{z_2^2 - z_1^2}{4a}, \quad K = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2}, \quad \lambda = \frac{4ab}{\vartheta_0 (z_2^2 - z_1^2)}. \tag{1.78}$$

Tenzore deformacije (1.43) i (1.32) dobijamo iz (1.74) i (1.76) i možemo da ih napišemo u obliku:

$$\{\overset{-1}{c}{}^i_j\} = \begin{Bmatrix} \frac{k^2}{z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{\lambda^2 k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{Bmatrix}, \quad \{c^i_j\} = \begin{Bmatrix} \frac{z^2}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2 k^2}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{Bmatrix} \tag{1.79}$$

a odavde, osnovne invarijante ovih tenzora su:

$$I = II_c = trag(c^{-1}{}^i_j) = \frac{k^2}{z^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 k^2} + \lambda^2,$$

(1.80) $$II = I_c = trag(c^i_j) = \frac{z^2}{k^2} + \frac{\lambda^2 k^2}{z^2} + \frac{1}{\lambda^2},$$

$$III = III_c = 1.$$

Kako je energija deformacije W proizvoljna funkcija invarijanata (1.80), koje zavise samo od promenljive z, proizilazi da je i energija deformacije proizvoljna funkcija samo od promenljive z:

(1.81) $$W = W(z).$$

Zamenom (1.79) u Rivlinove relacije napona i deformacije (1.45), i imajući u vidu (1.50)$_4$, dobijamo koordinate tenzora napona:

(1.82)
$$t^{11} = -p + \frac{2k^2}{z^2}\frac{\partial W}{\partial I} - \frac{2z^2}{k^2}\frac{\partial W}{\partial II}, \quad z^2 t^{22} = -p + \frac{2z^2}{\lambda^2 k^2}\frac{\partial W}{\partial I} - \frac{2\lambda^2 k^2}{z^2}\frac{\partial W}{\partial II},$$
$$t^{33} = -p + 2\lambda^2\frac{\partial W}{\partial I} - \frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial W}{\partial II}, \quad t^{12} = t^{13} = t^{23} = 0.$$

Jednačine ravnoteže (1.57)$_1$, analogno (1.59), svode se na:

(1.83) $$\frac{dt^{11}}{dz} + \frac{t^{11} - z^2 t^{22}}{z} = 0, \quad \frac{\partial t^{22}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial t^{33}}{\partial z} = 0.$$

Kako je iz (1.81) $W = W(I, II) = W(z)$ izvod funkcije W po z, s obzirom na (1.80)$_{1,2}$, možemo da napišemo u obliku

(1.84) $$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial I}\left(-\frac{2k^2}{z^3} + \frac{2z}{\lambda^2 k^2}\right) + \frac{\partial W}{\partial II}\left(\frac{2z}{k^2} - \frac{2\lambda^2 k^2}{z^3}\right).$$

Kada se izraz $(t^{11} - z^2 t^{22})/z$ odredi iz (1.82)$_{1,2}$ i uporedi sa (1.84) dobija se

$$\frac{t^{11} - z^2 t^{22}}{z} = -\frac{dW}{dz}$$

što omogućava da se (1.83)$_1$ napiše u obliku

(1.85) $$\frac{d}{dz}\left(t^{11} - W\right) = 0.$$

Eliminacijom hidrostatičkog pritiska p iz $(1.82)_{2,3}$ pomoću $(1.82)_1$, koordinate tenzora napona, s obzirom na (1.85) i (1.84), dobijamo konačno:

(1.86) $$t^{11} = W + C, \quad z^2 t^{22} = z\frac{dW}{dz} + W + C, \quad t^{33} = 2\left(\lambda^2 - \frac{k^2}{z^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I} + \frac{z^2}{\lambda^2 k^2}\frac{\partial W}{\partial II}\right) + W + C,$$

gde je C proizvoljna integraciona konstanta. Ovim je sistem napona odredjen. Sile, koje dejstvuju na površinama $z = z_1$ i $z = z_2$ svode se samo na normalno naprezanje i biće jednake nuli samo ako je

(1.87) $$W(z_1) = W(z_2) = -C.$$

Iz $(1.86)_2$ fizičku koordinatu $t\langle 22\rangle$ napona možemo da napišemo u obliku

(1.88) $$t\langle 22\rangle = z^2 t^{22} = \frac{d}{dz}\left[z(W + C)\right],$$

pa je rezultujuća normalna sila po jedinici visine, koja dejstvuje na svakoj strani $\vartheta = \pm\vartheta_0$,

(1.89) $$N_2 = \int_{z_1}^{z_2} t\langle 22\rangle\, dz = \left[z(W + C)\right]_{z_1}^{z_2}.$$

Odavde proizilazi da je normalna sila N_2 jednaka nuli samo ako su obe površine $z = z_1$ i $z = z_2$ oslobodjene naprezanja, tj. ako je zadovoljen uslov (1.87). Rezultujući spreg M_2 po jedinici visine, koji deluje na svakoj strani $\vartheta = \pm\vartheta_0$, jednak je

$$M_2 = \int_{z_1}^{z_2} z\, t\langle 22\rangle\, dz = \int_{z_1}^{z_2} z\left(z\frac{dW}{dz} + W + C\right) dz.$$

S obzirom na (1.88) i (1.87) i primenom parcijalne integracije prethodni izraz dobija oblik

(1.90) $$M_2 = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2)C - \int_{z_1}^{z_2} zW\, dz.$$

Poluprečnik z_0 neutralnog vlakna dobija se rešavanjem jednačine $\overset{-1}{C}{}^2_2 = 1$, tj. $z_0^2/\lambda^2 k^2 = 1$, odakle je $z_0^2 = \lambda^2 k^2$. Uslov (1.87), s obzirom da je $W = W(I, II)$, svodi se na zahtev:

(1.91) $$I(z_1) = I(z_2), \quad II(z_1) = II(z_2).$$

Zahtev (1.91) nametnut invarijantama (1.80) biće zadovoljen ako je $k^2 = r_1 r_2/\lambda$. Ova relacija smanjuje broj konstanti na dve, na primer r_1 i λ, za jednoznačno odredjivanje deformacije, a zamenom vrednosti k^2 u izraz za poluprečnik neutralnog vlakna, dobijamo:

$$r_0 = (\lambda r_1 r_2)^{1/2}. \tag{1.92}$$

U slučaju čistog savijanja λ je jednako jedinici, pa je poluprečnik neutralnog vlakna $r_0 = (r_1 r_2)^{1/2}$, a to je upravo rezultat koji daje i klasična linearna teorija elestičnosti. Postojanje normalnog napona $(1.86)_3$ ukazuje da je čisto savijanje nestišljivog tela moguće ako se na površine paralelelne ravni savijanja dejstvuje odgovarajućim normalnim silama. Ovaj fenomen naziva se Pointingov efekt za savijanje.

2. TEORIJA POLARNIH ELASTIČNIH MATERIJALA

U odeljku 1.1 prikazana je klasična teorija elastičnosti, koja se po novijoj terminologiji naziva nepolarna teorija elastičnosti. Kao što se videlo, glavna karakteristika ove teorije jeste da je naponsko stanje u nekoj tački deformabilne sredine potpuno odredjeno simetričnim delom tenzora napona, tj. sa šest koordinata tenzora napona. Medjutim, pri proučavanju različitih problema teorije elastičnosti, kako tehničke prirode (tanki štapovi, ljuske), tako i fizičke (kada se sa diskretne kristalne rešetke predje na kontinuum), neki autori [10], [11] i [12] su primetili, još pre više od pola veka, da je naponsko stanje potpuno odredjeno nesimetričnim tenzorom napona i tenzorom naponskog sprega. Ova teorija, koja uzima u obzir nesimetričan tenzor napona i tenzor naponskog sprega, naziva se polarna teorija elastičnosti.

Polarna teorija elastičnosti bila je neopravdano zapostavljena, sa izuzetkom malog broja autora, sve do petnaest godina unazad. Od 1955. godine na ovamo ovoj teoriji se posvećuje velika pažnja i razvija se u dva pravca: (i) formiranje opšte teorije i fizička interpretacija iste [13] - [25] i (ii) formiranje linearne teorije i ispitivanje uticaja naponskih spregova na koncentraciju napona oko diskontuiteta (prskotina, otvora itd.) [26] - [35].

Proširenje broja nezavisnih podataka o naponskom stanju može da se veže za dva moguća proširenja teorije elastičnosti: a) uvodjenje izvoda pomeranja ili deformacije višeg reda po koordinatama u izraz za energiju deformacije i b) uvodjenje dopunskih rotacionih stepena slobode za čestice materijala. Prvo proširenje potiče od Sen Venana, dok je drugo predložio Fojgt [10], a razradila su ga braća Kosera [11].

a) Prirodno proširenje izraza za energiju deformacije (1.15), saglasno principu lokalnog dejstva (izloženog u odeljku 1.1) i (1.14), jeste pretpostavka da funkcija energije deformacije može takodje da zavisi, bez obzira u koliko maloj meri, i od gradijenata deformacije višeg reda. Na taj način, u opštem slučaju, relaciju (1.15) možemo da napišemo u obliku:

$$(2.1) \qquad W = W(x^i_{;K}, x^i_{;KL}, \ldots, x^i_{;K_1K_2\ldots K_n}; X^K).$$

Klasična teorija zasnovana na izrazu za energiju deformacije u obliku (1.15) naziva se i teorija savršeno elastičnih prostih materijala, za razliku od ne prostih materijala [36] , kada se u (2.1) uzme ma koji gradijent višeg reda. Složen materijal je reda n ako je n najviši red gradijenta deformacije, koji se stvarno javlja kao argument u funkciji energije deformacije. Proučavanja su vršena uglavnom na materijalima reda 2,

$$(2.2) \qquad W = W(x^i_{;K}, x^i_{;KL}; X^K),$$

jer kvalitativno obuhvata osobine materijala višeg reda. Tupin [14] je ovoj teoriji dao elegantnost, a dalja razrada i primena data je u [10] , [20] i [21]

b) Uvodjenje tri dopunska rotaciona stepena slobode svakom deliću, pored tri stepena slobode vezana za pomeranje, predstavlja model orijentisanog kontinuuma. Neka su $d^k_{(\lambda)}$ (k = 1,2,3) koordinate vektora $\vec{d}_{(\lambda)}$ (λ = 1,2,3) trijedra vezanog za svaku česticu sredine. Dok Günther [24] , Schaefer [25] i drugi uzimaju da je energija deformacije proizvoljna funkcija, pored ostalih argumenata, i od vektora orijentacije $\vec{d}_{(\lambda)}$, Stojanović i Djurić [23] su eksplicitno pokazali da energija deformacije orijentisanog materijala ne može da zavisi od vektora orijentacije. Prema tome, za orijentisan materijal reda 2 energija deformacije (2.2) biće proizvoljna funkcija, pored gradijenata deformacije prvog i drugog reda, i od gradijenta $d^i_{(\lambda);K}$ vektoraa $d^i_{(\lambda)}$ koji karakterišu trijedar vezan za element sredine [16] , [23] :

$$(2.3) \qquad W = W(x^i_{;K}, x^i_{;KL}; d^i_{(\lambda);K}; X^K).$$

Naponsko stanje u ovakvoj sredini odredjeno je nesimetričnim tenzorom napona t^{ij}, tenzorom naponskog sprega $m^{ijk} = -m^{jik}$, i tenzorom napona uvijanja $h^{(\lambda)ij}$, koji je vezan za "deformaciju orijentacije" vektora $\vec{d}_{(\lambda)}$ (videti npr. [16] , [17] , [18] i dr.).

Primenom jednačine ravnoteže (1.4) iz zakona konzervacije mase, dobija se (1.6):

$$\overset{\circ}{\rho} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} = 0 \; ; \tag{2.4}$$

iz zakona količine kretanja:

$$\rho \ddot{x}^i = t^{ij}{}_{,j} + \rho f^i \; ; \tag{2.5}$$

iz zakona kinetičkog momenta:

$$t^{[ij]} = m^{ijk}{}_{,k} + d^{[i}_{(\lambda),k} h^{(\lambda)j]k} + \rho l^{ij} \; ; \tag{2.6}$$

iz zakona ravnoteže vektora $\vec{d}_{(\lambda)}$:

$$\rho i^{\lambda\mu} \ddot{d}^i_{(\lambda)} = h^{(\mu)ij}{}_{,j} + \rho k^{(\mu)i} \; ; \tag{2.7}$$

i iz zakona ravnoteže energije, s obzirom na (2.3):

$$t^{(ij)} = \rho g^{il} \left(\frac{\partial W}{\partial x^l_{;K}} x^j_{;K} + \frac{\partial W}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;KL} \right), \tag{2.8}$$

$$m^{i(jk)} = -\rho g^{il} \frac{\partial W}{\partial x^l_{;KL}} x^j_{;K} x^k_{;L} + x^j_{;K} \left(\frac{\partial W}{\partial d_{(\lambda)i;K}} d^k_{(\lambda)} \right)_{[ik]}, \tag{2.9}$$

$$h^{(\lambda)ij} = \rho g^{il} \frac{\partial W}{\partial d^l_{(\lambda);K}} x^j_{;K} . \tag{2.10}$$

U prethodnim relacijama je: $t^{[ij]}$ antisimetrični deo tenzora napona, l^{ij} zapreminski spreg, $i^{\lambda\mu}$ koeficijent gustine inercije i $k^{(\mu)i}$ zapreminska sila uvijanja. Relacije (2.8), (2.9) i (2.10) predstavljaju konstitutivne relacije orijentisanog materijala reda 2 u materijalnom obliku. Primenom principa invarijantnosti energije deformacije pri krutim kretanjima, kao i poznate osobine tenzorskih jednačina da i nesvodljivi delovi zadovoljavaju tenzorsku jednakost, relacije (2.8) - (2.10) svode se na oblik:

$$t^{(ij)} = \rho \left(\frac{\partial W}{\partial C_{KL}} x^i_{;K} x^j_{;L} + \frac{\partial W}{\partial D_{KLM}} x^{(i}_{;L} x^{j)}_{;KM} \right), \tag{2.11}$$

$$m^{i(jk)} = -\frac{2}{3} \rho \frac{\partial W}{\partial D_{MKL}} x^i_{;K} x^{(j}_{;L} x^{k)}_{;M} , \tag{2.12}$$

(2.13) $$h^{(\lambda)ij} = \rho \frac{\partial W}{\partial F_{\lambda\mu K}^{\xi}} d^{i}_{(\xi)} x^{j}_{;K} ,$$

gde su $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{D}$ i $\underset{\sim}{F}$ materijalni tenzori deformacije:

(2.14) $$C_{KL} = g_{kl} x^{k}_{;K} x^{l}_{;L} , \quad D_{KLM} = \frac{2}{3} C_{M[L,K]} , \quad F_{\lambda\mu K}^{\xi} = \left(g_{kl} d^{k}_{(\lambda)} d^{l}_{(\xi);K} \right)_{(\lambda\mu)} .$$

Izvodjenje relacije (2.4) - (2.14) i njihovo tumačenje može se naći npr. u [18]. U slučaju neorijentisanog kontinuuma sve ove relacije se svode na relacije date u teoriji elastičnih materijala reda 2 [14].

2.1. Svodjenje konstitutivnih relacija na prostorni oblik

Konstitutivne relacije (2.8) - (2.10) napisane su u materijalnom obliku i kao takve važe i u slučaju kada je materijal anizotropan. Uvodjenje materijalnih tenzora deformacije (2.14) ove relacije su svedene na (2.11) - (2.13), koje su, svakako, prikladnije. Medjutim, u ovim relacijama, i pored mera deformacije (2.14), i dalje figurišu gradijenti deformacije, što ih za konkretnu primenu u rešavanju problema čine nepogodnim. Da se u ovom obliku ne mogu eliminisati gradijenti deformacije potvrdjuju rezultati nepolarne teorije elastičnosti (videti npr. (1.29)), iako se tamo radilo o daleko jednostavnijoj teoriji u odnosu na polarnu teoriju elastičnosti. Put, koji vodi elegantnijim oblicima konstitutivnih relacija, analogan je onom u nepolarnoj teoriji elastičnosti, tj. svodjenje konstitutivnih relacija na prostorni oblik.

Ne umanjujući opštost, konstitutivne relacije će biti izvedene u statičkom slučaju. Prvi zakon termodinamike (1.16) sada može da se napiše u obliku

(2.15) $$\dot{\mathcal{W}} = \overset{\circ}{\mathcal{A}} ,$$

pri čemu je uzeto $\dot{\mathcal{Q}} = 0$, tj. da je protok i izvor nemehaničkog efekta jednak nuli (proces reverzibilan izotermičan ili adijabatski). Efekt mehaničkog rada $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ usled sila koje deluju na tačke posmatranog sistema je ([18] jedn. (33))

(2.16) $$\dot{A} = \oint_S (t^{ik}\dot{x}_i - m^{ijk}\dot{x}_{i,j} + h^{(\alpha)ik}\dot{d}_{(\alpha)i})da_k + \dot{A}_1,$$

gde je $\dot{A}_1$ efekt rada zapreminskih sila $\underset{\sim}{f}$, zapreminskih spregova $\underset{\sim}{\ell}$ i zapreminskih direktrorskih sila $\underset{\sim}{k}$. S obzirom da zapreminske sile ne utiču na konstitutivne relacije pretpostavićemo da one i ne dejstvuju na posmatrano telo, tj. član $\dot{A}_1$ u prethodnoj relaciji na dalje nećemo uzimatiu obzir. Korišćenjem Stoksove teoreme površinski integral u (2.16) može da se pretvori u zapreminski, pa s obzirom na (1.13), relacija (2.15) postaje:

(2.17) $$\frac{D}{Dt}\int_v \rho W dv = \int_v [(t_i^{\cdot i} - m_i^{\cdot ik}{}_{,k})\dot{x}^i_{,j} - m_i^{\cdot (jk)}\dot{x}^i_{,jk} + h^{(\alpha)ij}\dot{d}_{(\alpha)i,j}]dv.$$

Kako je oblast v integracije proizvoljna, relacija (2.17) mora da važi u svakoj tački sistema, tj.

(2.18) $$\frac{\rho}{\rho_0}\dot{W} = (t_i^{\cdot i} - m_i^{\cdot jk}{}_{,k})\dot{x}^i_{,j} - m_i^{\cdot (jk)}\dot{x}^i_{,jk} + h^{(\alpha)\cdot j}{}_i \dot{d}^i_{(\alpha),j},$$

gde je gustina ρ_0 u početnoj konfiguraciji uvedena iz istih razloga kao i u nepolarnoj teoriji elastičnosti (1.22).

Veza izmedju prostornih i materijalnih gradijenata deformacije prvog reda (1.36) može da se napiše i u obliku:

(2.19) $$x^m_{;M} X^M_{;n} = \delta^m_n,$$

a odavde je veza izmedju prostornih i materijalnih gradijenata deformacije drugog reda:

(2.20) $$X^N_{;mn} = -x^l_{;PQ} X^P_{;m} X^Q_{;n} X^N_{;l}.$$

Materijalnim diferenciranjem po vremenu relacije (2.19) dobija se da je gradijent brzine prvog reda:

(2.21) $$\dot{x}^i_{,j} = -\overline{\dot{X}^M_{;j}}\, x^i_{;M},$$

a materijalnim diferenciranjem po vremenu relacije (2.20) i korišćenjem (2.21) dobija se gradijent brzine drugog reda:

$$(2.22)\qquad \dot{x}^i_{,jk} = -\overline{X^M_{;jk}}^{\bullet}\, x^i_{;M} + 2\overline{X^M_{;j}}^{\bullet}\, X^N_{;nk}\, x^n_{;M}\, x^i_{;N}\,.$$

Gradijent brzine promene direktora $\dot{d}^i_{(\alpha),j}$ može da se napiše u obliku:

$$(2.23)\qquad \dot{d}^i_{(\alpha),j} = \overline{d^i_{(\alpha);M}}^{\circ}\, X^M_{;j}\,,$$

pa zamenom (2.21), (2.22) i (2.23) u (2.18) dobija se jednačina energije u obliku:

$$(2.24)\qquad \begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0}\dot{W} = &\left(m_i{}^{;jk}{}_{,k}\, x^i_{;M} - t_i{}^{j} x^i_{;M} - 2m_i{}^{;(jk)} x^m_{;M}\, x^i_{;N}\, X^N_{;mk}\right)\overline{X^M_{;j}}^{\circ} + \\ &+ m_i{}^{;(jk)} x^i_{;M}\,\overline{X^M_{;jk}}^{\bullet} + h^{(\alpha);j}_{i}\, X^M_{;j}\,\overline{d^i_{(\alpha);M}}^{\circ}\,. \end{aligned}$$

Energija deformacije, prema (2.3), jeste proizvoljna funkcija materijalnih gradijenata deformacije prvog i drugog reda i gradijenta direktora. Kako relacije (2.19) i (2.20), koje predstavljaju sistem algebarskih jednačina, uspostavljaju jednoznačnu vezu izmedju prostornih i materijalnih gradijenata deformacije prvog i drugog reda, bez ikakvih ograničenja može se uzeti da je energija deformacije W proizvoljna funkcija prostornih gradijenata deformacije prvog i drugog reda i gradijenta direktora, tj.

$$(2.25)\qquad W = W(X^M_{;j}\,,\ X^M_{;jk}\,;\ d^i_{(\alpha);M})$$

Posrednim materijalnim diferenciranjem po vremenu energije deformacije (2.25) preko nezavisnih argumenata $X^M_{;j}$, $X^M_{;jk}$ i $d^i_{(\alpha);M}$ dobijamo:

$$(2.26)\qquad \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial X^M_{;j}}\,\overline{X^M_{;j}}^{\bullet} + \frac{\partial W}{\partial X^M_{;jk}}\,\overline{X^M_{;jk}}^{\circ} + \frac{\partial W}{\partial d^i_{(\alpha);M}}\,\overline{d^i_{(\alpha);M}}^{\circ}\,.$$

Uvrštavanjem (2.26) u (2.24) jednačina energije može da se napiše u obliku:

$$(2.27)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial X^M_{;j}} - m_i{}^{;jk}{}_{,k}\, x^i_{;M} + t_i{}^{j} x^i_{;M} + 2m_i{}^{;(jk)} x^m_{;M}\, x^i_{;N}\, X^N_{;mk}\right)\overline{X^M_{;j}} + \\ &+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial X^M_{;jk}} - m_i{}^{;(jk)} x^i_{;M}\right)\overline{X^M_{;jk}}^{\bullet} + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial d^i_{(\alpha);M}} - h^{(\alpha);j}_{i}\, X^M_{;j}\right)\overline{d^i_{(\alpha);M}}^{\circ} = 0 \end{aligned}$$

Struktura jednačine energije (2.27), kao i iskustvo sa jednostavnijim teorijama elastičnosti, dovodi do zaključka da su napon, naponski spreg i napon uvijanja funkcije istih promenljivih koje su dovoljne za odredjivanje vrednosti energije deformacije, a konstitutivne relacije su takve da zadovoljavaju energetsku jednačinu (2.27) identički. Drugim rečima, jednačina (2.27) ni na koji način ne ograničava polje kretanja i polje direktora.

Prethodni uslovi biće zadovoljeni ako su i sami ako su tenzor napona, tenzor naponskog sprega i tenzor napona uvijanja vezani sa funkcijom energije deformacije sledećim relacijama:

$$t^{ij} - m^{ijk}{}_{,k} = -\frac{\rho}{\rho_o} g^{il}\left(\frac{\partial W}{\partial X^K_{;j}} X^K_{;l} + 2\frac{\partial W}{\partial X^K_{;jk}} X^K_{;kl}\right), \tag{2.28}$$

$$m^{i(jk)} = \frac{\rho}{\rho_o} g^{il} \frac{\partial W}{\partial X^K_{;jk}} X^K_{;l}, \tag{2.29}$$

$$h^{(\lambda)ij} = \frac{\rho}{\rho_o} g^{il} \frac{\partial W}{\partial d^l_{(\lambda);K}} x^j_{;K}. \tag{2.30}$$

Konstitutivne relacije, koje opisuju proces deformacije, ne smeju da zavise od kretanja posmatrača, tj. moraju biti invarijantne u odnosu na kruta kretanja prostornog koordinatnog sistema u odnosu na prvobitno izabran sistem prostornih koordinata. Ovaj tzv. princip objektivnosti zahteva da tenzori napona, naponskog sprega i napona uvijanja budu objektivne veličine. Ovaj princip biće zadovoljen ako je funkcija energije deformacije (2.25) skalarna invarijanta

$$W(X^M_{;j}, X^M_{;jk}, d^i_{(\lambda);M}) = W(\overline{X^M_{;j}}, \overline{X^M_{;jk}}, \overline{d^i_{(\lambda);M}}) \tag{2.31}$$

kada se transformacija prostornih koordinata, oblika

$$\bar{x}^m = (\delta^m_n + \omega^m{}_{\cdot n}) x^n \tag{2.32}$$

primeni na njene argumente. Na taj način dobija se izraz za invarijantnost energije pri krutim kretanjima

(2.33) $$\left[g^{il}\left(-\frac{\partial W}{\partial X^{M}_{;j}}X^{M}_{;l}-\frac{\partial W}{\partial X^{M}_{;jk}}X^{M}_{;kl}+\frac{\partial W}{\partial d^{l}_{(\lambda);M}}d^{j}_{(\lambda);M}\right)\right]_{[ij]}=0.$$

Dekompozicijom tenzorske jednačine (2.28) na nesvodljive delove (jednakost simetričnih, odnosno antisimetričnih, delova leve i desne strane) dobija se simetričan deo tenzora napona u obliku:

(2.34) $$t^{(ij)}=-\frac{\rho}{\rho_0}\left[g^{il}\left(\frac{\partial W}{\partial X^{K}_{;j}}X^{K}_{;l}+2\frac{\partial W}{\partial X^{K}_{;jk}}X^{K}_{;kl}\right)\right]_{(ij)},$$

a antisimetričan deo tenzora napona, s obzirom na (2.33) i (2.30) svodi se na oblik:

(2.35) $$t^{[ij]}=\left(m^{ijk}+h^{[ij]k}\right)_{,k},$$

gde je h^{ijk} tenzor hipernapana [15], [22]

(2.36) $$h^{ijk}=d^{i}_{(\lambda)}h^{(\lambda)jk}.$$

Relacija (2.35) predstavlja Koseraovu jednačinu (2.6) u statičkom slučaju kada se zanemare zapreminski spregovi $\underset{\sim}{l}$ i zapreminske direktorske sile $\underset{\sim}{k}$. Prema tome, antisimetrični deo tenzora napona ne dobija se iz energetske jednačine, tj. neposredno preko funkcije energije deformacije, pa on nema nikakav energetski značaj. Relaciju (2.35) treba shvatiti kao definiciju antisimetričnog dela tenzora napona.

U energetskoj jednačini (2.18) tenzor naponskog sprega $m_{i}^{\cdot jk}$ zamenjen je simetričnim delom $m_{i}^{\cdot(jk)}$ zbog simetrije $\mathring{x}^{i}_{;jk}=\mathring{x}^{i}_{;kj}$. To znači da i antisimetrični deo tenzora naponskog sprega $m_{i}^{\cdot[ij]}$ nema energetski značaj, pa se iz tog razloga javlja njegova konstitutivna neodredjenost.

Konstitutivne relacije za simetričan deo tenzora napona (2.34), simetričan deo tenzora naponskog sprega (2. 29) i tenzor napona uvijanja (2.30), napisane u funkciji prostornih gradijenata deformacije prvog i drugog reda i gradijenta direktora, sada se mogu izraziti preko prostornih tenzora deformacije.

Prostorni tenzori deformacije, koji odgovaraju materijalnim tenzorima deformacije (2.14), su:

$$c_{mn} = G_{MN} X^{M}_{;m} X^{N}_{;n} \,, \tag{2.37}$$

$$d_{mnr} \equiv {}_{p}c_{mn,r} = \frac{2}{3} c_{r[n,m]} = \frac{1}{3} G_{MN}\left(X^{M}_{;rm} X^{N}_{;n} - X^{M}_{;rn} X^{N}_{;m}\right) , \tag{2.38}$$

$$f_{\lambda}^{\cdot mn} = g^{nr} d^{m}_{(\lambda);M} X^{M}_{;r} \,, \tag{2.39}$$

gde je sa ${}_{p}c_{mn,r}$ obeležen glavni deo tenzora $c_{mn,r}$ kada se rastavi na nesvodljive delove [14], [19]. Analogno nepolarnoj teoriji elastičnosti (odeljak 1.1), kada je posmatrani materijal izotropan, energija deformacije je proizvoljna funkcija prostornih tenzora deformacije (2.37) - (2.39):

$$W = W(c_{mn} \,, d_{mnr} \,, f_{\lambda}^{\cdot mn}). \tag{2.40}$$

Materijalni izvod po vremenu funkcije energije deformacije (2.40) može da se napiše u obliku:

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial c_{mn}} \dot{\overline{c_{mn}}} + \frac{\partial W}{\partial d_{mnr}} \dot{\overline{d_{mnr}}} + \frac{\partial W}{\partial f_{\lambda}^{\cdot mn}} \dot{\overline{f_{\lambda}^{\cdot mn}}} \,,$$

što, s obzirom na (2.37) - (2.39), postaje:

$$\dot{W} = \left\{ G_{MN}\left[2\frac{\partial W}{\partial c_{jn}} X^{N}_{;n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial W}{\partial d_{njr}} X^{N}_{;rn} - \frac{\partial W}{\partial d_{jnr}} X^{N}_{;rn} \right)\right] + g^{nj} \frac{\partial W}{\partial f_{\lambda}^{\cdot mn}} d^{m}_{(\lambda);M} \right\} \dot{\overline{X^{M}_{;j}}}$$
$$+ \frac{2}{3} G_{MN} \frac{\partial W}{\partial d_{knj}} X^{N}_{;n} \dot{\overline{X^{M}_{;jk}}} + g^{mn} \frac{\partial W}{\partial f_{\lambda}^{\cdot in}} X^{M}_{;m} \dot{\overline{d^{i}_{(\lambda);M}}} \,. \tag{2.41}$$

Kada se (2.41) uvrsti u (2.24), tako dobijen oblik energetske jednačine biće identički zadovoljen ako su tenzori napona, naponskog sprega i napona uvijanja vezani sa funkcijom energije sledećim relacijama:

$$t^{(ij)} = -\frac{\rho}{\rho_0}\left[g^{il}\left(2\frac{\partial W}{\partial c_{nj}} c_{nl} + 2\frac{\partial W}{\partial d_{mjn}} d_{mln} + \frac{\partial W}{\partial d_{mnj}} d_{mnl} + g^{nj} \frac{\partial W}{\partial f_{\lambda}^{\cdot mn}} f_{\lambda \cdot l}^{\cdot m} \right)\right]_{(ij)} , \tag{2.42}$$

(2.43) $$m^{i(jk)} = -\frac{2}{3}\frac{\rho}{\rho_0} g^{il}\frac{\partial W}{\partial d_{n(jk)}} c_{nl} ,$$

(2.44) $$h^{(\lambda)ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial f_{\lambda ij}} ,$$

(2.45) $$t^{[ij]} - m^{ijk}{}_{,k} = -\frac{\rho}{\rho_0}\left[g^{il}\left(2\frac{\partial W}{\partial c_{nj}} c_{nl} + 2\frac{\partial W}{\partial d_{mjn}} d_{mln} + \frac{\partial W}{\partial d_{mnj}} d_{mnl} + g^{mj}\frac{\partial W}{\partial f_\lambda^{\cdot mn}} f_{\lambda\cdot l}^{\ m}\right)\right]_{[ij]}$$

Invarijantnost funkcije energije deformacije (2.40) pri krutim kretanjima, s obzirom na (2.32) i (2.37) - (2.39), sada se svodi na oblik:

(2.46) $$\left[g^{il}\left(2\frac{\partial W}{\partial c_{nj}} c_{nl} + 2\frac{\partial W}{\partial d_{mjn}} d_{mln} + \frac{\partial W}{\partial d_{mnj}} d_{mnl} - \frac{\partial W}{\partial f_\lambda^{\cdot ml}} f_\lambda^{\cdot mj} - \frac{\partial W}{\partial f_\lambda^{\cdot lm}} f_\lambda^{\cdot jm}\right)\right]_{[ij]} = 0.$$

Korišćenjem uslova invarijantnosti energije pri krutim kretanjima (2.46) i relacije (2.44) antisimetrični deo tenzora napona iz (2.45) svodi se na (2.35).

Relacije (2.42) - (2.44) predstavljaju konstitutivne relacije u tzv. prostornom obliku. U ovim relacijama, za razliku od materijalnog oblika (2.11)-(2.13), ne figurišu gradijenti deformacije već isključivo tenzori deformacije. Ovakav oblik konstitutivnih relacija omogućuje njihovu dalju modifikaciju u cilju nalaženja nekih opštih rešenja.

Činjenica da tenzor deformacije (2.38) nije opšti tenzor trećeg reda, jer je po definiciji antisimetričan po prva dva indeksa ($d_{mnz} = -d_{nmz}$), omogućava da se konstitutivne relacije (2.42) i (2.43) napišu u pogodnijem obliku. Osam nezavisnih koordinata tenzora (2.38) mogu se predstaviti u obliku relativnog prostornog tenzora drugog reda, koji je definisan izrazima:

(2.47) $$d^{s}_{\cdot z} \equiv \frac{1}{2} e^{smn} d_{mnz} = \frac{1}{3} e^{smn} G_{MN} X^M_{;zm} X^N_{;n} , \quad d_{mnz} = e_{mns} d^{s}_{\cdot z} ,$$

gde su e^{smn} i e_{mns} totalni antisimetrični Ricijevi tenzori. Izmedju devet koordinata $d^{s}_{\cdot z}$ postoji samo jedna veza

(2.48) $$d^{s}_{\cdot s} \equiv 0 ,$$

tako da je funkcionalno nezavisnih koordinata osam. Prema tome, grupa promenljivih $d^{s}_{\cdot r}$ jednoznačno odredjuje grupu promenljivih d_{mnr}, pa funkcija energije deformacije (2.40) može da se napiše u obliku:

$$W = W\left(c_{mn},\, d^{s}_{\cdot r},\, f^{\cdot mn}_{\lambda}\right). \tag{2.49}$$

Konstitutivne relacije (2.42) i (2.43), s obzirom na (2.49) i (2.48), svode se na oblik:

$$t^{(ij)} = -\frac{\rho}{\rho_0}\left[g^{il}\left(2\frac{\partial W}{\partial c_{nj}} c_{nl} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot j}} d^{s}_{\cdot l} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot r}} d^{s}_{\cdot r}\delta^{j}_{l} - \frac{\partial W}{\partial d^{l}_{\cdot r}} d^{j}_{\cdot r} + g^{nj}\frac{\partial W}{\partial f^{\cdot mn}_{\lambda}} f^{\cdot m}_{\lambda\cdot l}\right)\right]_{(ij)}, \tag{2.50}$$

$$m^{i(jk)} = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\rho_0} c^{i}_{n}\left(\frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot j}} e^{skn} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot k}} e^{sjn}\right), \tag{2.51}$$

a uslov invarijantnosti energije deformacije pri krutim kretanjima (2.46) postaje:

$$\left[g^{il}\left(2\frac{\partial W}{\partial c_{nj}} c_{nl} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot j}} d^{s}_{\cdot l} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot r}} d^{s}_{\cdot r}\delta^{j}_{l} - \frac{\partial W}{\partial d^{l}_{\cdot r}} d^{j}_{\cdot r} - \frac{\partial W}{\partial f^{\cdot ml}_{\lambda}} f^{\cdot mj}_{\lambda} - \frac{\partial W}{\partial f^{\cdot lm}_{\lambda}} f^{\cdot jm}_{\lambda}\right)\right]_{[ij]} = 0. \tag{2.52}$$

S obzirom na osobinu tenzorskih jednačina da mora da postoji jednakost odgovarajućih nesvodljivih delova, iz (2.51) dobijamo:

$$\left[c^{i}_{n}\left(\frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot j}} e^{skn} + \frac{\partial W}{\partial d^{s}_{\cdot k}} e^{sjn}\right)\right]_{(ijk)} = 0, \tag{2.53}$$

jer je simetrična kombinacija simetričnog dela tenzora naponskog sprega $m^{(i(jk))}$ jednaka nuli [14], [19].

Tenzorske jednačine (2.52) i (2.53) predstavljaju sistem od 3+10 = 13 homogenih linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje ograničavaju funkcionalnu proizvoljnost funkcije energije deformacije u odnosu na nezavisno promenljive (2.37), (2.39) i $(2.47)_1$. S obzirom da je 6+8+27 = 41 nezavisno promenljivih c_{mn}, $d^{s}_{\cdot r}$ i $f^{\cdot mn}_{\lambda}$, respektivno, opšte rešenje funkcije W jeste proizvoljna funkcija od 41-13 = 28 funkcionalno nezavisnih integrala sistema jednačina (2.52) i (2.53). Integrali jednačina (2.52) i (2.53) su: tri osnovne invarijante tenzora deformacije $\underset{\sim}{c}$

$$I_{\underset{\sim}{c}} = \delta^{m}_{n} c^{n}_{m}, \quad II_{\underset{\sim}{c}} = \frac{1}{2}\delta^{mn}_{pq} c^{p}_{m} c^{q}_{n}, \quad III_{\underset{\sim}{c}} = \frac{1}{6}\delta^{lmn}_{pqr} c^{p}_{l} c^{q}_{m} c^{r}_{n}; \tag{2.54}$$

jedna mešovita (združena) invarijanta tenzora deformacije $\underset{\sim}{c}$ i $\underset{\sim}{d}$

(2.55) $$II_m = c^m_{\cdot n} d^{\cdot n}_{m} ;$$

tri prve invarijante tenzora deformacije $\underset{\sim}{f}$

(2.56) $$I_\alpha = \delta^m_{\cdot n} f_{\alpha \cdot m}^{\;\cdot n} ; \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

dvanaest drugih invarijanata tenzora deformacije $\underset{\sim}{f}$

(2.57) $$II_{\alpha\beta} = II_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\delta^{mn}_{pq} f_{\alpha\cdot m}^{\;\cdot p} f_{\beta\cdot n}^{\;\cdot q} , \quad II^*_{\alpha\beta} = II^*_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\delta^{mn}_{pq} f_{\alpha\cdot m}^{\;\cdot p} f_{\beta n \cdot}^{\;\;\cdot q} ; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

i deset trećih invarijanata tenzora deformacije $\underset{\sim}{f}$

(2.58) $$III_{\alpha\beta\gamma} = III_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{6}\delta^{lmn}_{pqr} f_{\alpha\cdot l}^{\;\cdot p} f_{\beta\cdot m}^{\;\cdot q} f_{\gamma\cdot n}^{\;\cdot r} ; \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

što ukupno iznosi 3+1+3+12+10 = 29 integrala. S obzirom da postoji 28 funkcionalno nezavisnih integrala, očigledno je da izmedju integrala (2.54) - (2.58) mora da postoji jedna funkcionalna veza. Ta veza je:

(2.59) $$\det\{II_{\alpha\beta}\} = \det\{II^*_{\alpha\beta}\} ,$$

jer je

$$\det\{ f_{\alpha\cdot n}^{\;\cdot m} f_{\beta m \cdot}^{\;\;\cdot n} \} = \det\{ f_{\alpha\cdot n}^{\;\cdot m} f_{\beta\cdot m}^{\;\cdot n} \}$$

pošto kvadratna matrica i njoj transponovana imaju jednake determinante. Ako se obeleži

$$\det\{II_{\alpha\beta}\} \equiv P , \quad \det\{II^*_{\alpha\beta}\} \equiv Q ,$$

tada funkcionalna veza (2.59) može da se napiše u obliku:

(2.60) $$F = F(II_{\alpha\beta}, II^*_{\alpha\beta}) \equiv P - Q = 0 .$$

Prema tome, funkcija energije deformacije (2.49) ne zavisi proizvoljno od tenzora $\underset{\sim}{c}$, $\underset{\sim}{d}$ i $\underset{\sim}{f}$, već od njih preko promenljivih (2.54) - (2.58), tj.

(2.61) $$W = W(I_{\underset{\sim}{c}}, II_{\underset{\sim}{c}}, III_{\underset{\sim}{c}} ; II_m ; I_\alpha, II_{\alpha\beta}, II^*_{\alpha\beta}, III_{\alpha\beta\gamma}) .$$

Konstitutivne relacije bazirane na izrazu za funkciju energije deformacije (2.61), s obzirom na vezu (2.60), zgodno je izvesti primenom principa virtualnog rada. Potreban uslov ravnoteže deformisane konfiguracije je

(2.62) $$\frac{\rho}{\rho_0}\delta W = \delta A ,$$

tj. varijacija unutrašnje energije jednaka je radu sila na virtualnom pomeranju. Medjutim, pošto argumenti (2.54) - (2.58) funkcije energije deformacije (2.61) nisu svi nezavisni već postoji veza (2.60), tada i varijacije ovih argumenata nisu nezavisne i moraju da zadovolje uslov

(2.63) $$\delta F = \frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}}\delta II_{\alpha\beta} + \frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\delta II^*_{\alpha\beta} = 0 .$$

Ako se (2.63) pomnoži sa $\lambda\rho/\rho_0$, gde je λ proizvoljni multiplikator, i tako dobijen izraz oduzme od leve strane jednačine (2.62), tada se dobija

(2.64) $$\frac{\rho}{\rho_0}\left(\delta W - \lambda\delta F\right) = \delta A .$$

Pogodnim izborom proizvoljnog multiplikatora λ zavisna varijacija, odredjena uslovom (2.63), može da se eliminiše iz relacije (2.64) tako da su 28 ostalih varijacija proizvoljne.

Razvijanjem varijacija u zagradi s leve strane jednačine (2.64), s obzirom na (2.61) i (2.63), dobijamo:

(2.65) $$\begin{aligned}\delta W - \lambda\delta F = {} & \frac{\partial W}{\partial I_{\underset{\sim}{c}}}\delta I_{\underset{\sim}{c}} + \frac{\partial W}{\partial II_{\underset{\sim}{c}}}\delta II_{\underset{\sim}{c}} + \frac{\partial W}{\partial III_{\underset{\sim}{c}}}\delta III_{\underset{\sim}{c}} + \frac{\partial W}{\partial II_m}\delta II_m + \frac{\partial W}{\partial I_\alpha}\delta I_\alpha + \\ & + \left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}}\right)\delta II_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\right)\delta II^*_{\alpha\beta} + \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\delta III_{\alpha\beta\gamma} .\end{aligned}$$

Rad napona, naponskog sprega i napona uvijanja, kada se zanemari zapreminska sila $\underset{\sim}{f}$, zapreminski spreg $\underset{\sim}{l}$ i direktorska zapreminska sila $\underset{\sim}{k}$, na nizu komparativnih konfiguracija može da se napiše u obliku:

(2.66) $$\delta A = \left(t_i^{\cdot i} - m_{i\ \ ,k}^{\cdot jk}\right)\delta x^i_{;j} - m_i^{\cdot(jk)}\delta x^i_{;jk} + h^{(\lambda)\cdot j}_{\ \ \ i}\,\delta d^i_{(\lambda),j} ,$$

gde su $\delta x^i_{;j}$, $\delta x^i_{;jk}$ i $\delta d^i_{(\lambda),j}$ prvi i drugi gradijent varijacije prostornih koordinata x^i, odnosno direktora $d^i_{(\lambda)}$.

Izražavanjem varijacije invarijanata (2.54) - (2.58) preko varijacija $\delta X^T_{;j}$ i $\delta X^T_{;jk}$ prostornih gradijenata deformacije prvog i drugog reda i varijacije $\delta d^{i}_{(\alpha);K}$ materijalnog gradijenta direktora, imajući u vidu izraze (2.37), (2.39) i (2.47), relacija (2.65) postaje:

$$\delta W-\lambda\delta F=\Big\{G_{AT}\Big[2\frac{\partial W}{\partial I_{c}}g^{aj}X^{A}_{;a}+2\frac{\partial W}{\partial II_{c}}\left(I_{c}g^{aj}-c^{aj}\right)X^{A}_{;a}+2III_{c}\frac{\partial W}{\partial III_{c}}c^{aj}X^{A}_{;j}+$$

$$+\frac{\partial W}{\partial II_{m}}\left(2X^{A}_{;a}d^{(aj)}+\frac{1}{3}e^{caj}c^{b}_{c}X^{A}_{;ab}\right)\Big]+$$

$$+\Big[\frac{\partial W}{\partial I_{\alpha}}\delta^{j}_{a}+\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}}-\lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}}\right)\left(I_{\beta}\delta^{j}_{a}-f_{\beta\cdot a}^{\;j}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial II^{*}_{\alpha\beta}}-\lambda\frac{\partial F}{\partial II^{*}_{\alpha\beta}}\right)\left(I_{\beta}\delta^{j}_{a}-f_{\beta a\cdot}^{\;\;j}\right)+$$

$$(2.67)\qquad +\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\left(II_{\beta\gamma}\delta^{j}_{a}+f_{\beta\cdot b}^{\;j}f_{\gamma\cdot a}^{\;b}-I_{\beta}f_{\gamma\cdot a}^{\;j}\right)\Big]d^{a}_{(\alpha);T}\Big\}\delta X^{T}_{;j}+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial W}{\partial II_{m}}G_{AT}X^{A}_{;a}\left(e^{bka}c^{j}_{b}+e^{bja}c^{k}_{b}\right)\delta X^{T}_{;jk}+$$

$$+\Big[\frac{\partial W}{\partial I_{\alpha}}\delta^{a}_{i}+\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}}-\lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}}\right)\left(I_{\beta}\delta^{a}_{i}-f_{\beta\cdot i}^{\;a}\right)+\left(\frac{\partial W}{\partial II^{*}_{\alpha\beta}}-\lambda\frac{\partial F}{\partial II^{*}_{\alpha\beta}}\right)\left(I_{\beta}\delta^{a}_{i}-f_{\beta i\cdot}^{\;\;a}\right)+$$

$$+\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\left(II_{\beta\gamma}\delta^{a}_{i}+f_{\beta\cdot b}^{\;a}f_{\gamma\cdot i}^{\;b}-I_{\beta}f_{\gamma\cdot i}^{\;a}\right)\Big]X^{K}_{;a}\delta d^{i}_{(\alpha);K}.$$

Prvi i drugi gradijent varijacije prostorne koordinate δx^{i} i gradijent varijacije direktora $\delta d^{i}_{(\alpha)}$, analogno izrazima (2.21) - (2.23), dobijamo u obliku:

$$(2.68)\qquad \delta x^{i}_{;j}=-x^{i}_{;T}\delta X^{T}_{;j},$$

$$(2.69)\qquad \delta x^{i}_{;jk}=-x^{i}_{;T}\delta X^{T}_{;jk}+2X^{N}_{;nk}x^{n}_{;T}x^{i}_{;N}\delta X^{T}_{;j},$$

$$(2.70)\qquad \delta d^{i}_{(\alpha),j}=X^{K}_{;j}\delta d^{i}_{(\alpha);K}.$$

Zamenom (2.68) - (2.70) u (2.66) dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\delta A = &-\left[\left(t_i^{\cdot j} - m_i^{\cdot jk}{}_{,k}\right) x^i_{;T} + 2 m_i^{\cdot (jk)} X^N_{;nk}\, x^n_{;T}\, x^i_{;N}\right] \delta X^T_{;j} + \\
&+ m_i^{\cdot (jk)} x^i_{;T}\, \delta X^T_{;jk} + h^{(\alpha)\cdot j}_{\;\;i}\, X^K_{;j}\, \delta d^i_{(\alpha);K} .
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

Kada se (2.67) i (2.71) uvrsti u relaciju (2.64) tako dobijena relacija, s obzirom na proizvoljnost varijacija prostornih gradijenata deformacije prvog i drugog reda i materijalnog gradijenta direktora, biće zadovoljena ako su tenzor napona, tenzor naponskog sprega i tenzor napona uvijanja dati sledećim relacijama:

$$
\begin{aligned}
-t^{ij} + m^{ijk}{}_{,k} = &\frac{\rho}{\rho_0}\Big\{ 2\Big[III_c \frac{\partial W}{\partial III_c} g^{ij} + \Big(\frac{\partial W}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial W}{\partial II_c}\Big) c^{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_c} c^i_n c^{nj}\Big] + \\
&+ \frac{\partial W}{\partial II_m}\Big(II_m g^{ij} + c^i_n d^{nj} + c^j_n d^{ni}\Big) + \\
&+ \Big[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) + II_{\beta\gamma} \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big] f_\alpha^{\cdot ji} - \\
&- \Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot n}^{\;j} - \Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta n \cdot}^{\;\;\;j} + \\
&+ \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot m}^{\;j} f_{\gamma\cdot n}^{\;m} \Big\} ,
\end{aligned} \tag{2.72}
$$

$$
m^{i(jk)} = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial II_m}\Big(e^{nkl} c^i_l c^j_n + e^{njl} c^i_l c^k_n \Big) , \tag{2.73}
$$

$$
\begin{aligned}
h^{(\alpha)ij} = &\frac{\rho}{\rho_0}\Big\{\Big[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda \frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) + II_{\beta\gamma}\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big] g^{ij} - \\
&- \Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big) f_\beta^{\cdot ji} - \Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) f_\beta^{\cdot ij} + \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_{\beta\cdot n}^{\;i} f_\gamma^{\cdot nj}\Big\} .
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

Simetričan deo tenzora napona dobija se iz relacije (2.72) kada se izjednače simetrični delovi leve i desne strane:

$$
\begin{aligned}
t^{(ij)} = \overset{*}{t}{}^{(ij)} - \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial II_m}\left(II_m g^{ij} + c^i_n d^{nj} + c^j_n d^{ni}\right) - \\
- \frac{\rho}{\rho_0}\Big\{\Big[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) + II_{\beta\gamma}\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big] f_\alpha^{\cdot ji} - \\
(2.75) \qquad - \Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot n}^{\ j} - \Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta n\cdot}^{\ \ j} + \\
+ \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot m}^{\ j} f_{\gamma\cdot n}^{\ m}\Big\}_{(ij)} ,
\end{aligned}
$$

a iz iste relacije antisimetrični deo tenzora napona dobija se u obliku:

$$
\begin{aligned}
t^{[ij]} = m^{ijk}{}_{,k} - \frac{\rho}{\rho_0}\Big\{\Big[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) + II_{\beta\gamma}\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big] f_\alpha^{\cdot ji} - \\
(2.76) \qquad - \Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot n}^{\ j} - \Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta n\cdot}^{\ \ j} + \\
+ \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot m}^{\ j} f_{\gamma\cdot n}^{\ m}\Big\}_{[ij]} .
\end{aligned}
$$

U relaciji (2.75) sa $\overset{*}{t}{}^{(ij)}$ obeležena je dvostruka vrednost prve uglaste zagrade sa desne strane u (2.72), što, prema relaciji (1.42), odgovara tenzoru napona u nepolarnoj teoriji elastičnosti.

Izraz (2.73) za simetričan deo tenzora naponskog sprega može da se napiše u drugom obliku. S obzirom da je tenzor naponskog sprega antisimetričan u odnosu na prva dva indeksa, $m^{ijk} = -m^{jik}$, ovaj tenzor može da se predstavi u obliku relativnog tenzora drugog reda:

(2.77) $$m_l^{\cdot k} = \frac{1}{2} e_{lij} m^{ijk}.$$

Devijator tenzora naponskog sprega je po definiciji:

(2.78) $$\underset{s}{\mu}_l^{\cdot k} \equiv {}_D m_l^{\cdot k} = m_l^{\cdot k} - \frac{1}{3} m_I \delta_l^k,$$

pri čemu je prva invarijanta devijatora jednaka nuli, $\underset{s}{\mu}_I = 0$, dok je prva invarijanta tenzora naponskog sprega:

(2.79) $$m_I = \delta_k^l m_l^{\cdot k} = \frac{1}{2} e_{ijk} m^{ijk}.$$

Dualni izraz za devijator tenzora naponskog sprega (2.78) može da se napiše u obliku:

(2.80) $$\underset{s}{\mu}^{ijk} = e^{lij} \underset{s}{\mu}_l^{\cdot k} = m^{ijk} - \frac{1}{3} m_I e^{ijk},$$

odakle je očigledno:

(2.81) $$\underset{s}{\mu}^{i(jk)} = m^{i(jk)}.$$

Korišćenjem relacije (2.78) i (2.81) dolazi se do obrasca koji omogućuje da se nezavisne koordinate devijatora tenzora naponskog sprega izraze preko simetričnih delova tenzora naponskog sprega:

(2.82) $$\underset{s}{\mu}^{ijk} = \frac{2}{3}\left(2m^{i(jk)} + m^{k(ij)}\right).$$

Iz (2.65), s obzirom na (2.82) i (2.80), dobijamo da su osam nezavisnih koordinata devijatora tenzora naponskog sprega dati relacijom:

(2.83) $$\underset{s}{\mu}_l^{\cdot k} = \frac{1}{3} \frac{\varrho}{\varrho_c} \frac{\partial W}{\partial \mathit{II}_{c^n}}\left(3c_l^{\cdot n} c_n^{\cdot k} - 3I_{\underset{\sim}{c}} c_l^k + 2\mathit{II}_{\underset{\sim}{c}} \delta_l^k\right).$$

Relacija (2.76), koja odredjuje antisimetričan deo tenzora napona, može da se svede na jednačinu ravnoteže (2.35) korišćenjem uslova invariantnosti (2.52) i invarijanata (2.54) - (2.58). Uslovi ravnoteže (2.5) - (2.7), kada se zanemare zapreminske sile $\underset{\sim}{f}$, zapreminski spregovi $\underset{\sim}{\ell}$ i zapreminske direktorske sile $\underset{\sim}{k}$, mogu da se napišu u obliku:

(2.84) $$t^{(ij)}_{\ \ ,j} + \left(m^{ijk} + h^{[ij]k}\right)_{,jk} = 0,$$

(2.85) $$t^{[ij]} = \left(m^{ijk} + h^{[ij]k}\right)_{,k} \quad ,$$

(2.86) $$h^{(\alpha)ij}_{\quad ,j} = 0,$$

gde je h^{ijk} dato sa (2.36). Prema tome, iz dobijenih konstitutivnih jednačina (2.75), (2.83) i (2.74) vidimo da se simetričan deo tenzora napona, simetričan deo tenzora naponskog sprega (ili, što je ekvivalentno, devijatorski deo dualnog tenzora naponskog sprega) i tenzora napona uvijanja mogu odrediti funkcijom energije deformacije. Antisimetrični deo tenzora naponskog sprega (ili, što je ekvivalentno, sferni deo dualnog tenzora naponskog sprega) ne može se odrediti funkcijom energije deformacie. Kao što je napred rečeno, ovaj deo naponskog sprega nema nikakvog energetskog značaja i konstitutivne relacije bi trebalo naknadno propisati. S obzirom da se u jednačini ravnoteže (2.84) javljaju drugi izvodi tenzora naponskog sprega i hipernapona, dakle upravo onaj deo tenzora naponskog sprega koji je odredjen konstitutivnim relacijama, za proučavanje jednačine ravnoteže neodredjeni deo tenzora naponskog sprega nije uopšte od uticaja. Konstitutivne relacije za antisimetrični deo tenzora naponskog sprega bi mogle da se protumače samo kao dopunski uslovi za granične uslove.

Konstitutivne relacije za antisimetričan deo tenzora napona (2.85) dobijene su nezavisno od energije deformacije. Korišćenjem relacije (2.85) eliminisan je antisimetrični deo tenzora napona i tako dobijene jednačine (2.84). Dvostruka divergencija tenzora naponskog sprega, koja se javlja u (2.84), nezavisna je od antisimetričnog dela tenzora naponskog sprega, odakle se zaključuje da je funkcija energije deformacije dovoljna za odredjivanje oblika jednačine ravnoteže (2.84).

3. OPŠTA REŠENJA U TEORIJI ELASTIČNIH MATERIJALA REDA 2

Opšta rešenja u teoriji nepolarnih elastičnih materijala, koja su data u odeljcima 1.2, 1.2.1 i 1.2.2 ovoga rada, biće ovde razmotrena za slučaj elastičnih materijala reda 2, tj. kada je funkcija energije deformacije W bazirana na izrazu (2.2). Konstitutivne relacije homogenog izotropnog elastičnog materijala reda 2 dobijaju se neposredno iz relacija (2.74), (2.75) i (2.83) kada se zanemare veličine koje karakterišu deformaciju orijentacije, tj. kada se stavi da je $d^{i}_{(\alpha);K} = 0$. U ovom slučaju napon uvijanja isčezava, a simetrični deo tenzora napona i devijatorski deo dualnog tenzora naponskog sprega svode se na oblik [20] :

$$t^{(ij)} = \overset{*}{t}^{(ij)} - \frac{\rho}{\rho_o}\frac{\partial W}{\partial II_m}\left(II_m g^{ij} + c^{i}_{n} d^{nj} + c^{j}_{n} d^{ni}\right), \tag{3.1}$$

$$\mu_{l}^{\cdot k} = \frac{1}{9}\frac{\rho}{\rho_o}\frac{\partial W}{\partial II_m}\left(3c^{n}_{l}c^{k}_{n} - 3I_{\underset{\sim}{c}}c^{k}_{l} + 2II_{\underset{\sim}{c}}\delta^{k}_{l}\right). \tag{3.2}$$

Kada je materijal nestišljiv gustina je invarijantna, $\rho = \rho_o$, pa se relacije (3.1) i (3.2) svode na:

$$t^{(ij)} = \overset{*}{t}^{(ij)} - \frac{\partial W}{\partial II_m}\left(II_m g^{ij} + c^{i}_{n} d^{nj} + c^{j}_{n} d^{ni}\right), \tag{3.3}$$

$$\mu_{l}^{\cdot k} = \frac{1}{9}\frac{\partial W}{\partial II_m}\left(3c^{n}_{l}c^{k}_{n} - 3I_{\underset{\sim}{c}}c^{k}_{l} + 2II_{\underset{\sim}{c}}\delta^{k}_{l}\right), \tag{3.4}$$

pri čemu se deo tenzora napona $\overset{*}{t}^{(ij)}$, koji odgovara naponu (1.42) u nepolarnom slučaju, svodi na Rivlinov oblik (1.45)

$$\overset{*}{t}^{(ij)} = -pg^{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I}\overset{-1}{c}{}^{ij} - 2\frac{\partial W}{\partial II}c^{ij}. \tag{3.5}$$

Jednačine ravnoteže (2.84) - (2.86) za slučaj elastičnog materijala reda 2 postaju:

$$t^{(ij)}{}_{,j} + m^{ijk}{}_{,jk} = 0, \tag{3.6}$$

$$t^{[ij]} = m^{ijk}{}_{,k}\,. \tag{3.7}$$

Relacije (3.3) - (3.7) predstavljaju opšte jednačine teorije homogenih, izotropnih, nestišljivih, elastičnih materijala reda 2. Neposredno rešenje ovih jednačina je nemoguće dobiti izmedju ostalog i zbog neodredjenog (nepoznatog) oblika funkcije energije deformacije W. Medjutim, rešenje je moguće dobiti u Rivlinovom smislu pod uslovima datim u odeljku 1.2 ovoga rada.

3.1. Torzija nestišljivog, homogenog, izotropnog, kružnog cilindra.

Pri razmatranju problema torzije materijalne i prostorne koordinate identifikujemo sa polarno-cilindarskim koordinatama, datim relacijama (1.46). S obzirom na (1.48), (1.49) i (1.54) čista torzija zadata je jednačinama:

$$r = R, \quad \vartheta = \Theta + KZ, \quad z = Z, \tag{3.8}$$

ili obrnuto, materijalne koordinate izražene preko prostornih

$$R = r, \quad \Theta = \vartheta - Kz, \quad Z = z. \tag{3.9}$$

S obzirom na koordinate metričkih tenzora, date relacijama (1.50), iz (3.8) i (3.9) dobijamo tenzore deformacije (2.37) i (1.43) u matričnom obliku:

$$\{c^i_j\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -K \\ 0 & -r^2K & 1+r^2K^2 \end{Bmatrix}, \quad \{\overset{-1}{C}{}^i_j\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r^2K^2 & K \\ 0 & r^2K^2 & 1 \end{Bmatrix}. \tag{3.10}$$

Osnovne invarijante tenzora deformacije (3.10) su:

$$I_{\underset{\sim}{c}} = II_{\underset{\sim}{c}} = I = II = 3 + r^2K^2, \quad III_{\underset{\sim}{c}} = III = 1, \tag{3.11}$$

odakle vidimo, pošto je $III = 1$, da je deformacija (3.8) izohorna.

Kovarijantnim diferenciranjem kovarijantnih koordinata tenzora deformacije $(3.10)_1$ iz (2.38) i (2.47) dobijamo koordinate tenzora deformacije relativnog prostornog tenzora drugog reda u matričnom obliku:

$$
(3.12) \qquad \{d_{\cdot j}^{k}\} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} \tau K & 0 & 0 \\ 0 & \tau K & -2\tau K^2 \\ 0 & 0 & -2\tau K \end{Bmatrix}.
$$

Združena invarijanta (2.55) tenzora deformacije $(3.10)_1$ i (3.12) je:

$$
(3.13) \qquad \overline{III}_m = 0.
$$

Uvrštavanjem $(3.10)_1$, (3.11), (3.12) i (3.13) u (3.3) i (3.4) dobijamo u matričnom obliku simetrični deo tenzora napona:

$$
(3.14) \qquad \{t^{(ij)}\} = \{\overset{*}{t}{}^{(ij)}\} + \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial \overline{II}_m}\begin{Bmatrix} -2\tau K & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2K}{\tau} & \tau K^2 \\ 0 & \tau K^2 & 4\tau K \end{Bmatrix},
$$

i devijatorski deo dvojnog tenzora naponskog sprega:

$$
(3.15) \qquad \{\mu_{i}^{\cdot k}\} = \frac{1}{9}\frac{\partial W}{\partial \overline{II}_m}\begin{Bmatrix} -\tau^2 K^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\tau^2 K^2 & 3K \\ 0 & 3\tau^2 K & -\tau^2 K^2 \end{Bmatrix}.
$$

Deo simetričnog dela tenzora napona $\overset{*}{t}{}^{(ij)}$, koji odgovara koordinatama tenzora napona u nepolarnom slučaju, dat je relacijom (1.55), odnosno relacijama (1.56). Uporedjujući rezultate u nepolarnoj teoriji (1.55) i u teoriji elastičnih materijala reda 2 (3.14) dolazi se do zaključka da u oba slučaja postoje iste koordinate simetričnog tenzora napona. Prema tome, može se reći da izmedju koordinata simetričnog tenzora napona u nepolarnoj teoriji elastičnosti i teoriji elastičnih materijala reda 2 postoji samo kvantitativna razlika. Ta kvantitativna razlika karakteristična je po tome da se novi članovi u teoriji elastičnih materijala reda 2 razlikuju po redu veličine ugla uvijanja K u odnosu na nepolarnu teoriju. Tako, za slučaj malih deformacija, normalni naponi u nepolarnoj teoriji su srazmerni drugom stepenu ugla uvijanja K, dok su u teoriji elastičnih materijala reda 2 srazmerni prvom stepenu ugla uvijanja K.

S obzirom na (2.77) - (2.81) iz (3.15) nalazimo:

(3.16) $$m^{ijk}{}_{,jk} = 0,$$

pa se jednacina ravnoteže (3.6) svodi na (1.57), tj.:

(3.17) $$t^{(ij)}{}_{,j} = 0.$$

Kako je energija deformacije W funkcija invarijanata (3.11) i (3.13), koje zavise samo od promenljive z, to je i energija deformacije W funkcija samo od z. Na taj način, jednačina ravnoteže (3.17), s obzirom na (3.14), redukuje se na:

(3.18) $$\frac{d}{dz}\left(\overset{*}{t}{}^{11} - \frac{2zK}{3}\frac{\partial W}{\partial \mathit{II}_m}\right) - 2zK^2\frac{\partial W}{\partial I} = 0,$$

Integraljenjem (3.18) dobijamo:

(3.19) $$\overset{*}{t}{}^{11} = \frac{2zK}{3}\frac{\partial W}{\partial \mathit{II}_m} + 2K^2\int_a^z z^2\frac{\partial W}{\partial I}dz$$

ako je omotač $z=a$ cilindra neopterećen. Ovaj napon se svodi na nepolaran slučaj (1.62) kada je $\partial W/\partial \mathit{II}_m = 0$.

Ukupna normalna sila N, kojom treba dejstvovati na ravne površine punog cilindra da bi se ostvarila čista torzija, data je integralom (1.66). Korišćenjem (3.14) i (3.19) dobijamo da je normalna sila:

(3.20) $$N = 2\pi\int_0^a\left[\frac{K}{2}\frac{\partial W}{\partial \mathit{II}_m}z + 2K^2\left(\int_a^z z\frac{\partial W}{\partial I}dz - z^2\frac{\partial W}{\partial \mathit{II}}\right)\right]z\,dz,$$

što je ekvivalentno sa

(3.21) $$N = \overset{*}{N} + \pi K\int_0^a z^2\frac{\partial W}{\partial \mathit{II}_m}dz,$$

gde je $\overset{*}{N}$ -normalna sila u nepolarnom slučaju data relacijom (1.70). Pri malim uglovima uvijanja normalna sila, data izrazom (3.21), proporcionalna je prvom stepenu ugla uvijanja K, za razliku od nepolarne teorije gde je normalna sila (1.70) proporcionalna drugom stepenu ugla uvijanja. Prema tome, Poinтingov efekt je efekt prvog reda u teoriji elastičnih materijala reda 2.

3.2. Savijanje nestišljivog, homogenog, izotropnog paralelepipeda.

U nedeformisanoj konfiguraciji posmatrano telo predstavlja homogeni, izotropni, nestišljivi paralelepiped, dok u deformisanoj konfiguraciji deo šupljeg kružnog cilindra. Da bismo odredili napone potrebne da izazovu ovakvu deformaciju usvojićemo za materijalne koordinate Dekartov pravougli koordinatni sistem $(1.71)_1$, a za prostorne koordinate polarno-cilindarski sistem $(1.71)_2$. Veze izmedju prostornih i materijalnih koordinata, koje opisuju napred navedenu deformaciju, date su relacijama (1.77):

$$(3.22) \qquad z = (2kX + K)^{1/2}, \quad \vartheta = \frac{Y}{\lambda k}, \quad z = \lambda Z.$$

Koordinate tenzora deformacije $\underset{\sim}{c}$ i $\underset{\sim}{c}^{-1}$ date su u matričnom obliku relacijama (1.79), a osnovne invarijante ovih tenzora deformacije relacijama (1.80). Kovarijantnim diferenciranjem kovarijantnih koordinata tenzora deformacije $\underset{\sim}{c}$ i korišćenjem relacija (2.38) i (2.47) dobijamo koordinate tenzora deformacije u obliku relativnog prostornog tenzora drugog reda:

$$(3.23) \qquad \left\{ d^{k}_{\cdot j} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{k^2} + \frac{\lambda^2 k^2}{z^2}\right) & 0 \end{Bmatrix}.$$

Korišćenjem relacije $(1.79)_2$ i (3.23) nalazimo da je mešovita invarijanta (2.55):

$$(3.24) \qquad \underline{II}_m = 0.$$

Kada se relacije $(1.79)_2$, (1.80), (3.23) i (3.24) uvrste u konstitutivne jednačine (3.3) i (3.4) dobijamo u matričnom obliku simetričan deo tenzora napona:

$$\left\{ t^{(ij)} \right\} = \left\{ \overset{*}{t}{}^{(ij)} \right\} + \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial II_m} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{\lambda^2 k^2} + \frac{k^2}{z^3} \\ 0 & \frac{z}{\lambda^2 k^2} + \frac{k^2}{z^3} & 0 \end{Bmatrix}, \tag{3.25}$$

i devijatorski deo dvojnog tenzora naponskog sprega:

$$\left\{ \mu_i{}^{\cdot k} \right\} = -\frac{1}{9}\frac{\partial W}{\partial II_m} \begin{Bmatrix} \lambda^2 + \frac{z^2}{\lambda^2 k^2} - \frac{2k^2}{z^2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \frac{2z^2}{\lambda^2 k^2} + \frac{k^2}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2 + \frac{z^2}{\lambda^2 k^2} + \frac{k^2}{z^2} \end{Bmatrix}. \tag{3.26}$$

Deo simetričnog dela tenzora napona $\overset{*}{t}{}^{(ij)}$ predstavlja ukupan tenzor napona u nepolarnoj teoriji i dat je relacijama (1.82). Uporedjujući rezultate za simetričan tenzor napona u nepolarnoj teoriji elastičnosti i teoriji elastičnih materijala reda 2 može se primetiti da postoji čisto kvalitativna razlika. Dok se u nepolarnoj teoriji elastičnosti glavni pravci napona poklapaju sa glavnim pravcima deformacije, u teoriji elastičnih materijala reda 2 postoji i koordinata smičućeg napona:

$$t^{(23)} = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\lambda^2 k^2} + \frac{k^2}{z^3}\right)\frac{\partial W}{\partial II_m}. \tag{3.27}$$

Iz (3.26), s obzirom na (2.77)-(2.81), dobija se:

$$m^{ijk}{}_{,jk} = 0, \tag{3.28}$$

pa se jednačina ravnoteže svodi na

$$t^{(ij)}{}_{,j} = 0. \tag{3.29}$$

Prema (1.81) i (3.24) proizilazi da je u slučaju savijanja energija deformacije W funkcija samo promenljive τ. Na taj način i tenzor napona, dat relacijama (3.25) i (1.82), takodje je funkcija samo promenljive τ, pa se tenzorska jednačina ravnoteže (3.29) svodi na oblik (1.83), tj.:

(3.30) $$\frac{dt^{11}}{d\tau} + \frac{t^{11} - \tau^2 t^{22}}{\tau} = 0 .$$

S obzirom da su, za slučaj savijanja, u nepolarnoj teoriji i teoriji elastičnih materijala reda 2 koordinate tenzora napona t^{11} i t^{22} jednake, dalji postupak odredjivanja napona istovetan je postupku izloženom u odeljku 1.2.2.

4. OPŠTA REŠENJA U TEORIJI ORIJENTISANIH ELASTIČNIH MATERIJALA

U ovom odeljku biće razmatrana mogućnost dobijanja opštih rešenja relacija koje opisuju stanje napona homogenih, nestišljivih, izotropnih, orijentisanih materijala. Konstitutivna relacija za simetričan tenzor napona orijentisanog materijala, data sa (2.75), za slučaj nestišljivog materijala ($\rho = \rho_0$) može da se napiše u obliku:

$$t^{(ij)} = t_1^{(ij)} + \Delta t^{(ij)}, \tag{4.1}$$

gde je

$$t_1^{(ij)} = -p g^{ij} + 2\frac{\partial W}{\partial I} c^{-1\,ij} - 2\frac{\partial W}{\partial II} c^{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_m}\left(II_m g^{ij} + c^i_n d^{nj} + c^j_n d^{ni}\right)$$

napon neorijentisanog elastičnog materijala reda 2, dat relacijama (3.1) i (3.5), a prema (2.75)

$$\begin{aligned} \Delta t^{(ij)} = -\Big\{ & \Big[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) + II_{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big] f_\alpha^{\cdot ji} - \\ & - \Big(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot n}^{\,j} - \Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\Big) f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta n\cdot}^{\,j} + \\ & + \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_\alpha^{\cdot ni} f_{\beta\cdot m}^{\,j} f_{\gamma\cdot n}^{\,m}\Big\}_{(ij)}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

priraštaj napona usled deformacije orijentacije.

Tenzor naponskog sprega ne zavisi od deformacije orijentacije i za nestišljiv materijal dat je relacijom (3.4).

Tenzor napona uvijanja (2.74) postoji isključivo usled deformacije orijentacije i za nestišljiv materijal ($\rho = \rho_0$) dat je relacijom:

$$\begin{aligned} h^{(\alpha)ij} = & \left[\frac{\partial W}{\partial I_\alpha} + I_\beta\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\right) + II_{\alpha\beta}\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\right] g^{ij} - \\ & - \left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II_{\alpha\beta}} + I_\gamma\frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}}\right) f_\beta^{\cdot ji} - \left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha\beta}} - \lambda\frac{\partial F}{\partial II^*_{\alpha\beta}}\right) f_\beta^{\cdot ij} + \\ & + \frac{\partial W}{\partial III_{\alpha\beta\gamma}} f_{\beta\cdot n}^{\;\; j} f_\gamma^{\cdot ni} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Jednačine ravnoteže orijentisanog elastičnog materijala date su relacijama (2.84) i (2.86), dok relacija (2.85), kao što je napred rečeno, definiše antisimetričan deo tenzora napona.

4.1. Savijanje nestišljivog, homogenog, izotropnog paralelepipeda.

Ovde posmatramo paralelepiped od nestišljivog, homogenog i izotropnog materijala, čija je svaka tačka u nedeformisanoj konfiguraciji nosilac orijentacije okarakterisane trijedrom ortogonalnih jediničnih vektora $\vec{D}_{(\alpha)}$ (α = 1,2,3), pri čemu je skalarni proizvod:

$$\vec{D}_{(\alpha)} \cdot \vec{D}_{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} . \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{4.5}$$

Za materijalne koordinate usvajamo Dekartov pravougli koordinatni sistem

$$\{X^1, X^2, X^3\} = \{X, Y, Z\} , \tag{4.6}$$

čije su ose paralelne ivicama paralelepipeda, dok su jedinični vektori orijentacije $\vec{D}_{(\alpha)}$ svake tačke paralelni sa ovim osama. Deformacijom savijanja paralelepiped prelazi u deo šupljeg cilindra, pa za prostorne koordinate usvajamo polarno-cilindarski koordinatni sistem:

$$\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \vartheta, z\} . \tag{4.7}$$

Deformacija nastala pomeranjem tačaka definisana je vezama izmedju prostornih i materijalnih koordinata, a ove veze date su relacijama (3.22). Ova deformacija proučena je u odeljku 3.2 i odnosi se na deo napona $t_1^{(ij)}$ u relaciji (4.1), a koji je za slučaj savijanja dat relacijom (3.25).

Što se tiče deformacije orijentacije pretpostavićemo da su vektori $\vec{D}_{(\alpha)}$ iz nedeformisane konfiguracije prešli u vektore $\vec{d}_{(\alpha)}$ u deformisanoj konfiguraciji tako da im se intenzitet, kao i medjusobni položaj vektora u trijedru, nije promenio, tj. da se može napisati:

$$\vec{d}_{(\alpha)} \cdot \vec{d}_{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \,, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

dok je njihov položaj u odnosu na prostorni Dekartov koordinatni sistem takav da su koordinate vektora date relacijama:

$$\begin{aligned} \{d^i_{(1)}\} &= \{\cos(\vartheta+\varphi),\ \sin(\vartheta+\varphi),\ 0\}, \\ \{d^i_{(2)}\} &= \{-\sin(\vartheta+\varphi),\ \cos(\vartheta+\varphi),\ 0\}, \\ \{d^i_{(3)}\} &= \{0,\ 0,\ 1\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Drugim rečima, deformacije vektora orijentacije $\vec{D}_{(\alpha)}$ sastoji se u krutoj rotaciji trijedra oko vektora $\vec{D}_{(3)}$ za ugao $\vartheta + \varphi$, gde je ϑ polarno-cilindarska koordinata tačke u deformisanoj konfiguraciji, a φ ugao za koji pretpostavljamo da zavisi samo od koordinate z, tj. $\varphi = \varphi(z)$.

Transformacijom Dekartovih koordinata (4.9) vektora $\vec{d}_{(\alpha)}$ dobijamo odgovarajuće prostorne kontravarijante koordinate u polarno-cilindarskom sistemu:

$$\begin{aligned} \{d^i_{(1)}\} &= \{\cos\varphi,\ \tfrac{1}{z}\sin\varphi,\ 0\}, \\ \{d^i_{(2)}\} &= \{-\sin\varphi,\ \tfrac{1}{z}\cos\varphi,\ 0\}, \\ \{d^i_{(3)}\} &= \{0,\ 0,\ 1\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Za napred opisanu deformaciju savijanja paralelepipeda treba odrediti napone koji su potrebni da takvu deformaciju izazovu. Prema tome, sam metod rešenja je analogan Rivlinovom metodu [3] - [6] u slučaju teorije nepolarnih elastičnih materijala: pretpostavi se deformacija pa se odredi napon.

S obzirom da su deo napona (4.2) i naponski spreg (3.4), koji nastaju usled pomeranja tačaka, odredjeni u odeljku 3.2 i dati relacijama (3.25) i (3.26), preostaje da se odredi priraštaj napona (4.3) i napona uvijanja (4.4), koji nastaju usled deformacije orijentacije.

Tenzore deformacije orijentacije, koji su definisani reracijom (2.39), iz (4.10) dobijamo u obliku:

$$\left\{f^{m}_{1\cdot n}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\varphi' \sin\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \frac{\varphi'}{z}\cos\varphi & \frac{1}{z}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\},$$

(4.11)
$$\left\{f^{m}_{2\cdot n}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\varphi' \cos\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ -\frac{\varphi'}{z}\sin\varphi & -\frac{1}{z}\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\},$$

$$\left\{f^{m}_{3\cdot n}\right\} = \{0\},$$

gde je sa primom (') obeležen izvod po z, tj. $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$. Kako je po pretpostavci $\varphi = \varphi(z)$, to su i tenzori deformacije (4.11) funkcije samo koordinate z.

Invarijante (2.56) - (2.58) tenzora deformacije (4.11) su:

$$I_1 = \frac{1}{z}\cos\varphi - \varphi'\sin\varphi, \quad I_2 = -\varphi'\cos\varphi - \frac{1}{z}\sin\varphi, \quad I_3 = 0;$$

(4.12)
$$II_{\alpha\beta} = 0; \quad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

$$II^{*}_{11} = -\frac{1}{2}(I_2)^2, \quad II^{*}_{12} = \frac{1}{2}I_1 I_2, \quad II^{*}_{22} = -\frac{1}{2}(I_1)^2, \quad II^{*}_{3\alpha} = II^{*}_{\alpha 3} = 0 \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$III_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3)$$

Funkcionalna veza (2.60) izmedju invarijanata, na osnovu (4.12), identički je jednaka nuli, tj.

$$F = 0 . \tag{4.13}$$

Zamenom (4.11) - (4.13) u relaciji (4.3), imajući u vidu da su metrički tenzori g_{ij} i g^{ij} za usvojeni polarno-cilindarski sistem dati relacijama $(1.50)_{3,4}$, dobijamo da je priraštaj napona usled deformacije orijentacije:

$$\begin{aligned} \Delta t^{11} = {} & \varphi' \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial I_1} + \varphi' \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial I_2} + \left(\varphi'^2 \cos^2\varphi + \frac{\varphi'}{2z} \sin 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \\ & + \left(\frac{\varphi'}{z} \cos 2\varphi - \varphi'^2 \sin 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} + \left(\varphi'^2 \sin^2\varphi - \frac{\varphi'}{2z} \sin 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} , \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} z^2 \Delta t^{22} = {} & -\frac{1}{z} \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{z} \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial I_2} + \left(\frac{1}{z^2} \sin^2\varphi + \frac{\varphi'}{2z} \sin 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \\ & + \left(\frac{1}{z^2} \sin 2\varphi + \frac{\varphi'}{z} \cos 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} + \left(\frac{1}{z^2} \cos^2\varphi - \frac{\varphi'}{2z} \sin 2\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} , \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} 2 \Delta t^{(12)} = {} & \left(\frac{1}{z^2} \sin\varphi - \frac{\varphi'}{z} \cos\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{z^2} \cos\varphi + \frac{\varphi'}{z} \sin\varphi\right) \frac{\partial W}{\partial I_2} + \\ & + \left[\frac{\varphi'}{z^2} + \left(\frac{\varphi'^2}{2z} + \frac{1}{2z^3}\right) \sin 2\varphi\right] \frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \left(\frac{\varphi'^2}{z} + \frac{1}{z^3}\right) \cos 2\varphi \frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} + \\ & + \left[\frac{\varphi'}{z^2} - \left(\frac{\varphi'^2}{2z} + \frac{1}{2z^3}\right) \sin 2\varphi\right] \frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Preostale koordinate tenzora napona usled deformacije orijentacije jednake su nuli. Ukupan simetričan deo tenzora napona za posmatrano savijanje paralelepipeda dobija se kada se u (4.1) uvrsti (1.82), (3.25) i (4.14) - (4.16):

$$t^{11}=-p+\frac{2k^2}{\tau^2}\frac{\partial W}{\partial I}-\frac{2\tau^2}{k^2}\frac{\partial W}{\partial II}+\Delta t^{11},$$

$$\tau^2 t^{22}=-p+\frac{2\tau^2}{\lambda^2 k^2}\frac{\partial W}{\partial I}-\frac{2\lambda^2 k^2}{\tau^2}\frac{\partial W}{\partial II}+\tau^2\Delta t^{22},$$

(4.17) $$t^{33}=-p+2\lambda^2\frac{\partial W}{\partial I}-\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial W}{\partial II},$$

$$t^{(12)}=\Delta t^{(12)},\quad t^{(23)}=\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{\lambda^2 k^2}+\frac{k^2}{\tau^3}\right)\frac{\partial W}{\partial II_m},\quad t^{(13)}=0.$$

U prethodnim relacijama izrazi za koordinate tenzora napona (4.14) - (4.16) nisu smenjeni, već samo naznačeni sa $\Delta t^{(ij)}$, kako bi se bar delimično izbegla glomaznost u pisanju.

Na osnovu relacija (4.17) i rezultata rešenja savijanja u teoriji nepolarnih elastičnih materijala (odeljak 1.2.2), može se zapaziti: (i) postojanje priraštaja napona t^{11} i t^{22} usled deformacije orijentacije, što predstavlja kvantitativnu razliku izmedju teorije nepolarnih i orijentisanih elastičnih materijala, i (ii) postojanje napona $t^{(12)}$ i $t^{(23)}$ kao rezultat posmatranja polarnih elastičnih materijala, što predstavlja kvalitativnu razliku.

Kada se u relaciju (4.4) smeni (4.11) - (4.13), dobijamo koordinate tenzora napona uvijanja:

(4.18) $$h^{(\alpha)11}=\frac{\partial W}{\partial I_\alpha}+\frac{1}{\tau}\cos\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 1}}+\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 1}}\right)-\frac{1}{\tau}\sin\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 2}}+\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 2}}\right),$$

(4.19) $$\tau^2 h^{(\alpha)22}=\frac{\partial W}{\partial I_\alpha}-\varphi'\sin\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 1}}+\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 1}}\right)-\varphi'\cos\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 2}}+\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 2}}\right),$$

(4.20) $$h^{(\alpha)33} = \frac{\partial W}{\partial \Pi_\alpha} + \left(\frac{1}{z}\cos\varphi - \varphi' \sin\varphi\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 1}} + \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 1}}\right) - \left(\frac{1}{z}\sin\varphi + \varphi' \cos\varphi\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 2}} + \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 2}}\right),$$

(4.21) $$z^2 h^{(\alpha)12} = -z\varphi' \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 1}} + z\varphi' \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 2}} + \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 1}} + \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 2}},$$

(4.22) $$z^2 h^{(\alpha)21} = \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 1}} + \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi_{\alpha 2}} - z\varphi' \cos\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 1}} + z\varphi' \sin\varphi \frac{\partial W}{\partial \Pi^*_{\alpha 2}},$$

pri čemu α može da uzima vrednosti 1, 2 i 3. Preostale koordinate tenzora napona uvijanja jednake su nuli. Koordinate tenzora napona uvijanja (4.18) - - (4.22), kao i ukupan simetričan deo tenzora napona (4.17), funkcije su samo promenljive z, jer je energija deformacije W proizvoljna funkcija invarijanata (1.80), (3.24) i (4.12), koje zavise samo od z i φ, a $\varphi = \varphi(z)$.

Jednačine ravnoteže (2.84) i (2.86), koje treba da zadovolje naponi, s obzirom na (3.28), svode se na oblik:

(4.23) $$t^{(ij)}{}_{,j} + h^{[ij]k}{}_{,jk} = 0,$$

(4.24) $$h^{(\alpha)ij}{}_{,j} = 0.$$

Razvijanjem kovarijantnog izvoda (4.24), imajući u vidu da u relacijama (4.18) - (4.22) figuriše samo promenljiva z, jednačine ravnoteže za napon uvijanja (4.24) možemo da napišemo u obliku:

(4.25) $$h^{(\alpha)3j}{}_{,j} = \frac{dh^{(\alpha)33}}{dz} + \frac{h^{(\alpha)11} - z^2 h^{(\alpha)22}}{z} = 0,$$

$$(4.26) \qquad h^{(\alpha)2j}{}_{,j} = \frac{dh^{(\alpha)21}}{dz} + \frac{h^{(\alpha)12} + 2h^{(\alpha)21}}{z} = 0,$$

$$(4.27) \qquad h^{(\alpha)3j}{}_{,j} = 0.$$

Od devet jednačina ravnoteže (4.25) - (4.27) tri su (4.27) identički zadovoljeni. Zamenom (4.18) i (4.19) u (4.25), a (4.21) i (4.22) u (4.26) jednačine ravnoteže za napon uvijanja postaju:

$$(4.28) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial I_\alpha}\right)' + \frac{1}{z}\cos\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 1}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 1}}\right)' - \frac{1}{z}\sin\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 2}} + \frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 2}}\right)' = 0,$$

$$(4.29) \qquad \begin{aligned} &\left[\left(\varphi'^2 + \frac{1}{z^2}\right)\sin\varphi - \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{z}\right)\cos\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 1}} + \left[\left(\varphi'^2 + \frac{1}{z^2}\right)\cos\varphi + \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{z}\right)\sin\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 2}} + \\ &+ \frac{1}{z}\sin\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 1}}\right)' + \frac{1}{z}\cos\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II_{\alpha 2}}\right)' - \varphi'\cos\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 1}}\right)' + \varphi'\sin\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{\alpha 2}}\right)' = 0. \end{aligned}$$

U prethodne dve jednačine sa primom ($'$) je, kao i do sada, obeležen izvod odgovarajuće količine po promenljivoj z, a α može da uzima vrednosti 1, 2 i 3. Na taj način, imamo šest jednačina ravnoteže napona uvijanja, koje nisu identički zadovoljene.

Da bismo tri jednačine ravnoteže (4.23) napisali u razvijenom obliku, posmatraćemo odvojeno član $t^{(ij)}{}_{,j}$ od simetričkog dela tenzora napona i član $h^{[ij]k}{}_{,jk}$ od antisimetričkog dela hipernapona. Kovarijantnim diferenciranjem simetričkog dela tenzora napona, dobijamo tri izraza oblika:

$$(4.30) \qquad t^{(1j)}{}_{,j} = \frac{dt^{11}}{dz} + \frac{t^{11} - z^2 t^{22}}{z},$$

(4.31) $$t^{(2j)}_{\ ,j} = \frac{dt^{(12)}}{dz} + \frac{3}{z} t^{(12)},$$

(4.32) $$t^{(3j)}_{\ ,j} = 0.$$

Zamenom izraza za t^{11} i t^{22} iz $(4.17)_1$, odnosno $(4.17)_2$, u relaciju (4.30), imamo:

$$t^{(1j)}_{\ ,j} = \frac{dt^{11}}{dz} + \left(\frac{2k^2}{z^3} - \frac{2z}{\lambda^2 k^2}\right)\frac{\partial W}{\partial I} + \left(\frac{2\lambda^2 k^2}{z^3} - \frac{2z}{k^2}\right)\frac{\partial W}{\partial II} +$$

(4.33) $$+\left(\frac{\varphi'^2}{z}\cos^2\varphi - \frac{1}{z^3}\sin^2\varphi\right)\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} - \left(\frac{\varphi'^2}{z} + \frac{1}{z^3}\right)\sin 2\varphi\,\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} +$$

$$+\left(\frac{\varphi'^2}{z}\sin^2\varphi - \frac{1}{z^3}\cos^2\varphi\right)\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} +$$

$$+\left(\frac{\varphi'}{z}\sin\varphi + \frac{1}{z^2}\cos\varphi\right)\frac{\partial W}{\partial I_1} + \left(\frac{\varphi'}{z}\cos\varphi - \frac{1}{z^2}\sin\varphi\right)\frac{\partial W}{\partial I_2},$$

a smenom (4.16) u (4.31), ova relacija postaje:

$$
\begin{aligned}
2t^{(2j)}_{\;,j} = & \left[\left(\frac{\varphi'^2}{r} + \frac{1}{r^3}\right)\sin\varphi - \left(\frac{\varphi''}{r} + \frac{\varphi'}{r^2}\right)\cos\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial I_1} + \\
& + \left[\left(\frac{\varphi''}{r} + \frac{\varphi'}{r^2}\right)\sin\varphi + \left(\frac{\varphi'^2}{r} + \frac{1}{r^3}\right)\cos\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial I_2} + \\
& + \left[\frac{\varphi''}{r^2} + \frac{\varphi'}{r^3} + \left(\frac{\varphi'^3}{r} + \frac{\varphi'}{r^3}\right)\cos 2\varphi + \left(\frac{\varphi'\varphi''}{r} + \frac{\varphi'^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \\
& + \left[\left(\frac{2\varphi'\varphi''}{r} + \frac{2\varphi'^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi - \left(\frac{2\varphi'^3}{r} + \frac{2\varphi'}{r^3}\right)\sin 2\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} + \\
& + \left[\frac{\varphi''}{r^2} + \frac{\varphi'}{r^3} - \left(\frac{\varphi'\varphi''}{r} + \frac{\varphi'^2}{r^2}\right)\sin 2\varphi - \left(\frac{\varphi'^3}{r} + \frac{\varphi'}{r^3}\right)\cos 2\varphi\right]\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} + \\
& + \left(\frac{1}{r^2}\sin\varphi - \frac{\varphi'}{r}\cos\varphi\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)' + \left(\frac{1}{r^2}\cos\varphi + \frac{\varphi'}{r}\sin\varphi\right)\left(\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)' + \\
& + \left[\frac{\varphi'}{r^2} + \left(\frac{\varphi'^2}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\sin 2\varphi\right]\left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}}\right)' + \left(\frac{\varphi'^2}{r} + \frac{1}{r^3}\right)\cos 2\varphi\left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}}\right)' + \\
& + \left[\frac{\varphi'}{r^2} - \left(\frac{\varphi'^2}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right)\sin 2\varphi\right]\left(\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}}\right)' .
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Dvostruki kovarijantni izvod antisimetričkog dela tenzora hipernapona (2.36), s obzirom na jednačinu ravnoteže (4.23), može da se napiše u obliku:

$$
2h^{[ij]k}_{\;\;\;,jk} = f^{\;i}_{\alpha\cdot k,j}\,h^{(\alpha)jk} + f^{\;i}_{\alpha\cdot k}\,h^{(\alpha)jk}_{\;\;,j} - f^{\;j}_{\alpha\cdot k,j}\,h^{(\alpha)ik} - f^{\;j}_{\alpha\cdot k}\,h^{(\alpha)ik}_{\;\;,j} .
\tag{4.35}
$$

Razvijanjem prethodnog izraza i zamenom odgovarajućih vrednosti iz (4.11), (4.18) - (4.22) i njihovih kovarijantnih izvoda, dobijamo:

(4.36) $$h^{[1j]k}{}_{,jk} = 0\,,$$

$$
\begin{aligned}
2h^{[2j]k}{}_{,jk} = & \Big[\Big(\frac{\varphi''}{z}+\frac{\varphi'}{z^2}\Big)\cos\varphi - \Big(\frac{\varphi'^2}{z}+\frac{1}{z^3}\Big)\sin\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial I_1} - \\
& -\Big[\Big(\frac{\varphi''}{z}+\frac{\varphi'}{z^2}\Big)\sin\varphi + \Big(\frac{\varphi'^2}{z}+\frac{1}{z^3}\Big)\cos\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial I_2} + \\
& +\Big[\Big(\frac{\varphi''}{z^2}-\frac{\varphi'^3}{z}\Big)\cos 2\varphi - \Big(\frac{2\varphi'^2}{z^2}+\frac{\varphi'\varphi''}{z}+\frac{1}{z^4}\Big)\sin 2\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \\
& +\Big[\Big(\frac{2\varphi'^3}{z}-\frac{2\varphi''}{z^2}\Big)\sin 2\varphi - \Big(\frac{4\varphi'^2}{z^2}+\frac{2\varphi'\varphi''}{z}+\frac{2}{z^4}\Big)\cos 2\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} + \\
& +\Big[\Big(\frac{2\varphi'^2}{z^2}+\frac{\varphi'\varphi''}{z}+\frac{1}{z^4}\Big)\sin 2\varphi + \Big(\frac{\varphi'^3}{z}-\frac{\varphi''}{z^2}\Big)\cos 2\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} + \\
& +\Big(\frac{\varphi'}{z}\cos\varphi+\frac{1}{z^2}\sin\varphi\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial I_1}\Big)' + \Big(\frac{1}{z^2}\cos\varphi-\frac{\varphi'}{z}\sin\varphi\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial I_2}\Big)' + \\
& +\Big[\frac{\varphi'}{z^2}\cos 2\varphi + \Big(\frac{1}{2z^3}+\frac{\varphi'^2}{2z}\Big)\sin 2\varphi\Big]\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}}\Big)' + \\
& +\Big[\Big(\frac{1}{z^3}-\frac{\varphi'^2}{z}\Big)\cos 2\varphi - \frac{2\varphi'}{z^2}\sin 2\varphi\Big]\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}}\Big)' + \\
& +\Big[\Big(\frac{\varphi'^2}{2z}-\frac{1}{2z^3}\Big)\sin 2\varphi - \frac{\varphi'}{z^2}\cos 2\varphi\Big]\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}}\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

(4.38) $$h^{[3j]k}{}_{,jk} = 0\,.$$

Konačno, sada možemo da napišemo jednačine ravnoteže (4.23) za posmatrani slučaj savijanja. Prvu jednačinu ravnoteže (kada je $i = 1$ u (4.23)) dobijamo ako izraz (4.33) izjednačimo sa nulom, pošto je deo od hipernapona (4.36) jednak nuli. Iz ovako dobijene jednačine integraljenjem se dobija koordinata t^{11} tenzora napona:

$$
\begin{aligned}
t^{11} = \int \Big[& \Big(\frac{2z}{\lambda^2 k^2} - \frac{2k^2}{z^3}\Big)\frac{\partial W}{\partial I} + \Big(\frac{2z}{k^2} - \frac{2\lambda^2 k^2}{z^3}\Big)\frac{\partial W}{\partial II} - \\
& - \Big(\frac{\varphi'}{z}\sin\varphi + \frac{1}{z^2}\cos\varphi\Big)\frac{\partial W}{\partial I_1} - \Big(\frac{\varphi'}{z}\cos\varphi - \frac{1}{z^2}\sin\varphi\Big)\frac{\partial W}{\partial I_2} - \\
& - \Big(\frac{\varphi'^2}{z}\cos^2\varphi - \frac{1}{z^3}\sin^2\varphi\Big)\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} + \Big(\frac{\varphi'^2}{z} + \frac{1}{z^3}\Big)\sin 2\varphi\,\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} - \\
& - \Big(\frac{\varphi'^2}{z}\sin^2\varphi - \frac{1}{z^3}\cos^2\varphi\Big)\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}}\Big]dz + C,
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

gde je C integraciona konstanta. Eliminisanjem hidrostatičkog pritiska p iz $(4.17)_2$ i $(4.17)_3$ pomoću $(4.17)_1$, s obzirom na (4.39), simetričan deo tenzora napona je time potpuno odredjen.

Druga jednačina ravnoteže (kada je $i = 2$ u (4.23)) dobija se sabiranjem (4.34) i (4.37) i izjednačavanjem sa nulom toga zbira:

$$
\begin{aligned}
& \Big[\Big(\varphi'' + \frac{\varphi'}{z}\Big)\cos^2\varphi - \Big(\varphi'^2 + \frac{1}{z^2}\Big)\sin\varphi\cos\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}} - \Big[\Big(\varphi'^2 + \frac{1}{z^2}\Big)\cos 2\varphi + \Big(\varphi'' + \frac{\varphi'}{z}\Big)\sin 2\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}} \\
& + \Big[\Big(\varphi'' + \frac{\varphi'}{z}\Big)\sin^2\varphi + \Big(\varphi'^2 + \frac{1}{z^2}\Big)\sin\varphi\cos\varphi\Big]\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}} + \sin\varphi\Big(\frac{\partial W}{\partial I_1}\Big)' + \cos\varphi\Big(\frac{\partial W}{\partial I_2}\Big)' + \\
& + \Big(\varphi'\cos^2\varphi + \frac{1}{z}\sin\varphi\cos\varphi\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{11}}\Big)' + \Big(\frac{1}{z}\cos 2\varphi - \varphi'\sin 2\varphi\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{12}}\Big)' + \\
& + \Big(\varphi'\sin^2\varphi - \frac{1}{z}\sin\varphi\cos\varphi\Big)\Big(\frac{\partial W}{\partial II^*_{22}}\Big)' = 0.
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Treća jednačina ravnoteže (kada je i = 3 u (4.23)), s obzirom na (4.32) i (4.38), identički je jednaka nuli.

Šest jednačina ravnoteže napona uvijanja (4.28) i (4.29) i jednačina ravnoteže napona (4.40) nisu identički jednake nuli. Medjutim, ako se jednačina (4.28) za α = 1 pomnoži sa $\sin\varphi$, za α = 2 sa $\cos\varphi$, a jednačina (4.29) za α = 1 pomnoži sa $-\cos\varphi$, za α = 2 sa $\sin\varphi$ i tako dobijene četiri jednačine saberu, dobija se jednačina (4.40). Prema tome, jednačina (4.40) nije nezavisna, tj. biće zadovoljena ako su zadovoljene (4.28) i (4.29).

Očigledno je da preostale jednačine ravnoteže (4.28) i (4.29) neće biti identički zadovoljene za bilo kakvu funkciju energije deformacije W i za bilo kakvu funkciju $\varphi = \varphi(z)$. Usaglašavanjem ovih šest jednačina dobija se funkcionalno ograničenje za energiju deformacije W, a iz tako usaglašenih jednačina nalazi se rešenje funkcije φ, tj. rešenje za deformaciju orijentacije.

Za male vrednosti ugla φ i gradijenta $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$ funkcija energije deformacije W može da se aproksimira polinomom drugog reda:

$$
\begin{aligned}
W = {} & \alpha I_{\underset{\sim}{c}}^2 + \beta II_{\underset{\sim}{c}} + \gamma I_{\underset{\sim}{c}} I_1 + \delta I_{\underset{\sim}{c}} I_2 + \eta I_{\underset{\sim}{c}} I_3 + \varkappa II_m + \\
& + a(I_1)^2 + b(I_2)^2 + c(I_3)^2 + d I_1 I_2 + e I_2 I_3 + f I_3 I_1 + \\
& + g II_{11} + h II_{12} + k II_{22} + l II_{13} + m II_{23} + n II_{33} + \\
& + p II_{11}^* + q II_{12}^* + s II_{22}^* + t II_{13}^* + v II_{23}^* + u II_{33}^* ,
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

gde koeficijenti uz invarijante predstavljaju materijalne konstante. U tom slučaju, jednačine (2.28) i (2.29), za α = 1,2,3, postaju:

$$\frac{d}{dz}\left(\gamma I_{\underset{\sim}{c}} + 2a I_1 + d I_2 + f I_3\right) = 0, \tag{4.42}$$

$$\frac{d}{dz}\left(\delta I_{\underset{\sim}{c}} + 2b I_2 + d I_1 + e I_3\right) = 0, \tag{4.43}$$

(4.44) $$\frac{d}{dz}\left(\eta I_{\varepsilon} + 2cI_3 + eI_2 + fI_1\right) = 0,$$

(4.45) $$p\left(\frac{\varphi}{z^2} - \varphi'' - \frac{\varphi'}{z}\right) + \frac{q}{z^2} = 0,$$

(4.46) $$q\left(\frac{\varphi}{z^2} - \varphi'' - \frac{\varphi'}{z}\right) + \frac{s}{z^2} = 0,$$

(4.47) $$t\left(\frac{\varphi}{z^2} - \varphi'' - \frac{\varphi'}{z}\right) + \frac{v}{z^2} = 0.$$

Invarijante (4.12) u ovom slučaju su:

(4.48) $$I_1 = \frac{1}{z}, \quad I_2 = -\varphi' - \frac{\varphi}{z}, \quad II_{12}^{*} = -\frac{\varphi'}{2z} - \frac{\varphi}{2z^2}, \quad II_{22}^{*} = -\frac{1}{2z^2},$$

dok su sve preostale jednake nuli. Smenom (4.48) u jednačine (4.42) - (4.47), a zatim primenom naznačenog diferenciranja u jednačinama (4.42) - (4.44), dobijamo:

(4.49) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} + \frac{2a}{d}\frac{1}{z^2} - \frac{\gamma}{d}\frac{dI_{\varepsilon}}{dz} = 0,$$

(4.50) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} + \frac{d}{2b}\frac{1}{z^2} - \frac{\delta}{2b}\frac{dI_{\varepsilon}}{dz} = 0,$$

(4.51) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} + \frac{f}{e}\frac{1}{z^2} - \frac{\eta}{e}\frac{dI_{\varepsilon}}{dz} = 0,$$

(4.52) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} - \frac{q}{p}\frac{1}{z^2} = 0,$$

(4.53) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z^2} - \frac{\varphi}{z^2} - \frac{s}{q}\frac{1}{z^2} = 0,$$

(4.54) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} - \frac{v}{t}\frac{1}{z^2} = 0.$$

Da bi jednačine (4.49) - (4.54) bile saglasne, materijalne konstante moraju da ispunjavaju sledeće uslove:

(4.55) $$\gamma = \delta = \eta = 0,$$

(4.56) $$\frac{2a}{d} = \frac{d}{2b} = \frac{f}{e} = -\frac{g}{p} = -\frac{s}{q} = -\frac{v}{t} = D,$$

gde je D konstanta. Relacije (4.55) i (4.56) predstavljaju funkcionalno ograničenje energiji deformacije W, i to: (i) u izrazu (4.41) ne mogu da figurišu proizvodi $I_{\underset{\sim}{c}} I_{\alpha}$ (α = 1, 2,3), i (ii) materijalne konstante u slučaju izotropnog elastičnog materijala ne mogu da budu sve nezavisne već izmedju njih postoji veza (4.56).

Jednačine (4.49) - (4.54), s obzirom na (4.55) i (4.56), svode se na jednu jednačinu oblika:

(4.57) $$\varphi'' + \frac{\varphi'}{z} - \frac{\varphi}{z^2} + \frac{D}{z^2} = 0.$$

Rešenje diferencijalne jednačine (4.57) je:

(4.58) $$\varphi = \frac{C_1 z}{2} + \frac{C_2}{z} + D,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante, koje se odredjuju iz odgovarajućih graničnih uslova. Na taj način odredjena je i funkcija φ, tj. deformacija orijentacije.

L i t e r a t u r a :

[1] Truesdell, C.: Journ. Rat. Mech. Anal. 1, 125-300 (1952)

[2] Stojanović R.: Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma. Beograd (1965)

[3] Rivlin,R.S.: Phil.Trans.R.Soc.(A) 240, 459-490 (1948)

[4] Rivlin,R.S.: Phil.Trans.R.Soc.(A) 240, 491-508 (1948)

[5] Rivlin,R.S.: Phil.Trans.R.Soc.(A) 240, 509-525 (1948)

[6] Rivlin,R.S.: Phil.Trans.R.Soc.(A) 241, 379-397 (1948)

[7] Ericksen,J.L.: Z.angew.Math.Phys. 5, 466 (1954)

[8] Thomson,W.(Lord Kelvin) and P.G.Tait: "Treatise on Natural Philosophy", Cambridge University Press, New York, part I.

[9] Poynting, J.H.: Radiation-pressure, Phil. Mag. (6). 9, 393-406, (1905)

[10] Voigt,W.: Abh.Ges.Wiss., Göttingen, 34, 100 (1887)

[11] Cosserat, E. et F.: Théorie des Corps Déformables. Paris (1909)

[12] Heun,K.: Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik. Enz. math.Wiss. 4^2 (1904-1935), art. 11

[13] Ericksen,J.L. and C.Truesdell: Arch.Rat.Mech.Anal. 1, 295-323 (1958)

[14] Toupin,R.: Arch.Rat.Mech.Anal. 11, 385 (1962)

[15] Toupin,R.: Arch.Rat.Mech.Anal. 17, 85 (1964)

[16] Stojanović,R., S.Djurić i L.Vujošević: Matematički vesnik 1 (16), 127 (1964)

[17] Stojanović,R., S.Djurić i L.Vujošević: Arch.Mech.Stosowanej 1, 16, 103 (1964)

[18] Djurić,S.: Dinamika kontinuuma sa unutrašnjom orijentacijom i njegove male oscilacije. Doktorska disertacija, Beograd (1964)

[19] Blagojević,D. i R.Stojanović: Tehnika 2, 240 (1969)

[20] Stojanović,R. i D.Blagojević: Int.J.Solids Structures 5, 251-260 (1969)

[21] Blagojević,D.: Opšta rešenja u teoriji elastičnih materijala reda 2. Saopšteno na IX jugoslovenskom kongresu racionalne i primenjene mehanike, Split 1968 (u štampi zbornika radova IX kongresa)

[22] Stojanović,R.: Mechanics of Generalized Continua-IUTAM Symposium 1967 (editor E.Kröner). Spinger Verlag Berlin, 152-155 (1968)

[23] Stojanović,R. i S.Djurić: Teoria die Continui Polari - Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 211-228 (1969)

[24] Günther,W.: Abh.Brauschw.Wiss.Ges. 10, 195-213 (1958)

[25] Schaefer,H.: Miszellaneen der Angew. Mechanik, Festschrift W. Tollmien, Berlin (1962)

[26] Mindlin, R.D. and H.F.Tiersten: Arch.Rat.Mech.Anal. 11, 415 (1962)

[27] Mindlin,R.D. Exp.Mechanics 3, 1 (1963)

[28] Mindlin,R.D.: Arch.Rat.Mech.Anal. 16, 51 (1964)

[29] Bert,C.W.: Exp. Mechanics 3, 307 (1963)

[30] Koiter,W.T.: Proc.Ned.Acad.Sci. B67, 17 (1964)

[31] Schijve, J.: J.Mech.Phys.Solids 14, 65 (1966)

[32] Muki,R. and E.Sternberg: Z.Augew.Math.Mech. 16, 611 (1965)

[33] Sternberg,E and R.Muki: Int.J.Solids Structures 3, 69 (1967)

[34] Huilgol,R.R.: Int.J.Engng.Sci. 5, 81 (1967)

[35] Banks,C.B. and M.Sokolowski: Int.J. Solids Structures 4, 15 (1968)

[36] Truesdell,C. and W.Noll: The Non-Linear Field Theories of Mechanics Handbuch der Physik, Bd.III/3. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1965)