UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

DRAGAN BANJEVIĆ

OPTIMALNI PLANOVI ZA NEKE MODELE KONTROLE U TEORIJI POUZDANOSTI

- DOKTORSKI RAD -

BEOGRAD, MAJ 1976

Predgovor

Ovaj rad je nastao kao prirodni nastavak mog magistarskog rada "Matematički problemi optimalne preventive i inspekcije u teoriji pouzdanosti". U tom radu je obuhvaćeno više poznatih i uvedeno nekoliko novih modela preventive i inspekcije. Sada je pažnja koncentrisana na odredjeni krug problema optimalne inspekcije, i uzgred zahvaćen jedan pogled na probleme preventive. Pri tome je osnovni cilj bio da se glavni rezultati dobiju za što opštije uvedene funkcije gubitaka i procese, a da se pri tome ne izgubi od efektivnosti, bar teorijski. U pomenutom mag.radu se, nasuprot tome, radilo sa eksplicitno datim funkcijama gubitaka, što je najčešće slučaj i sa meni poznatom literaturom.

Prema tome, karakter rada u odnosu na osnovnu problematiku je teorijski, i ne teži za završnim obrascima i upustvima za potrebe prakse. To ne znači da on nema koristi i za praktičnu stranu, jer izvjesna opštost daje mogućnosti za šira tumačenja.

Rad se sastoji od uvoda i četiri glave. U uvodu se ukratko postavlja problematika i daje pregled onog šta je uradjeno, po glavama. Glave su podijeljene na paragrafe, a paragrafi na tačke. Numeracija formula je jedinstvena za čitavu glavu, a Teorema i Lema za čitav paragraf. Pozivanje na formulu (26) znači pozivanje na formulu (26) iz iste glave, a II(14) na formulu (14) iz glave II. Pozivanje na Teoremu /Lemu/ 2. znači pozivanje na T./L./ 2. iz tog paragrafa, a T./L./ 3.2. na T./L./ 2. iz paragrafa 3. iste glave, a T./L./ I 2. 1. na T./L./1. iz paragrafa 2. glave I. Slična pravila važe i za pozivanje na odredjene tačke ili paragrafe. Na završetku dokaza ili nekog posebnog razmatranja stavljen je, obično, znak ——┘.

Što se tiče literature, knjige se, uglavnom, označavaju slovima a članci brojevima.

Na kraju želim da se zahvalim svojim rukovodiocima i profesorima Stevanu Stojanoviću i Zoranu Ivkoviću bez čije pomoći i stalne podrške ovaj rad ne bi bio gotov na vrijeme.

Maj 1976.
Beograd

D.B.

S A D R Ž A J

U V O D

1. Osnovna figura u radu je nenegativna slučajna veličina X, sa osobinom $P(X=0)<1$, da bi se izbjegle trivijalnosti. Kroz čitav rad se X posmatra kao vrijeme rada bez kvara uredjaja uključenog u nekom momentu $v \geq 0$. Taj rad se posmatra na intervalu $[0,t]$, $t \leq \infty$. Posmatra se takodje i rad niza uredjaja X_1, X_2,... koji su nezavisni i sa istim svojstvima a uključuju se jedan posle drugog, sve dok se ne dostigne momenat t. Pri tome se zadaje funkcional $K(X;\phi_t) \geq 0$, gdje je ϕ_t takozvano pravilo inspekcije /preventive/, i traži se takav ϕ_t^*, da je $K(X;\phi_t^*) = \inf_{\phi_t} K(X;\phi_t)$.

Na primjer: Rad uredjaja X moguće je osmotriti u izolovanim momentima vremena $0 < y_1 < y_2 < \cdots < t = \infty$. Želimo da utvrdimo što tačnije momenat otkaza X. Neka svako posmatranje košta b a vrijeme provedeno u kvaru do momenta otkrivanja a u jedinici vremena. Tada je očekivani gubitak

$$K(X;y_1,y_2,\ldots) = E[bN(X) + a(y_{N(X)} - X); y_1, y_2, \ldots],$$

gdje $N(X)$ predstavlja broj izvedenih provjera, $y_{N(X)}$ momenat otkrivanja otkaza, $N(X) \in \{1,2,\ldots\}$, $y_{N(X)} \in \{y_1, y_2, \ldots\}$. Ovakav model se najčešće iskoristi u literaturi, pri čemu se za $y_1, y_2, \cdots$ ili $F(x) = P(X<x)$ mogu dati neka ograničenja.

U ovom radu je učinjen pokušaj da se ispitaju funkcije "gubitaka" $K(X;\phi_t)$ opštije nego što je ova, upravo opisana.

2. Literatura koja se koristi u osnovnom dijelu rada je [BP], koja ustvari predstavlja pregled onoga što je uradjeno u oblasti teorije pouzdanosti do 1965, a šta nas interesuje. Moramo reći da je ona ipak samo podsticaj za probleme obradjene na ovakav način. Kasnije je izašlo više radova, ali najbliži nama su radovi Beichelta, [7] - [10]. Stvar je u tome što je obilje modela koji se primjenjuju jako veliko, pa su prilazi različiti.

Osnovni matematički aparat koji se koristi su elementi teorije obnavljanja i dinamičkog programiranja. Pri tome se manje koriste same idejne strane din.prog. /na pr. princip optimalnosti/ a više tehnika rada. To je moguće zbog aditivnog oblika funkcija koje su u pitanju, pa zato nije dat neki poseban uvid u din.prog. Sve što se koristi, jasno je iz samog teksta.

3. Daćemo pregled rada po glavama.

I 1. Tu se definiše prosti proces obnavljanja /PO/ preko niza neneg. nezavisnih i jednako rasporedjenih sl.v. X_1, X_2, ... i daje pregled osnovnih svojstava. Izvode se formule za $ES_{N(t)}$, $EX_{N(t)+1}$, $H(t+x)-H(t)$, $H(t)=EN(t)$ - funkcija obnavljanja, da bi se uporedile sa analognim formulama za procese koji se uvode u paragrafu 2. Pri tome je, izmedju ostalog, dokazano

$$EX_{N(t)+1} \geqslant \frac{t^2[1-F(t)]}{\mu}.$$

Dalje je samo pokrenut problem ispitivanja sl.v. $N(T) = \sup\{n \geqslant 0; S_n < T\}$ gdje je T sl.v. nezavisna od $X_1, X_2, \ldots$ Ukazano je na mogućnost primjene u okvirima teme rada.

I 2. Tu se za prosti PO X_1, X_2, ... uvodi jedan novi proces posredstvom sl.v. $y(X,t)$, $0 \leq y(X,t) \leq t$ tako da je

$$z_1(t) = y(X_1,t), \quad z_{i+1}(t) = y(X_{i+1}, t-z_1(t)-\cdots-z_i(t)), \; i=1,2,\ldots$$

što predstavlja odredjeno uopštenje PO. Ovako uveden proces ima dodirnih tačaka sa procesima regeneracije [S], ali se time ne koristimo neposredno. Od interesa su razne veličine vezane za proces z_1, z_2, ... Na prim.

$$M(z,t) = \sup\{i \geqslant 0; z_1(t)+\cdots+z_i(t) < z\} \leq \infty, \quad z \leq t,$$

što odgovara $N(z)$ iz predhodnog paragrafa.

Koristeći funkciju $G(z,t) = EM(z,t)$ izvedene su formule za razne raspodjele vezane za procese z_1, z_2, ... i uporedjene sa odgovarajućima § 1. Na primjer,

$$ES_{M(z,t)+1} = v_1(t) + \int_0^z v_1(t-u)\,dG(u,t),$$

$v_1(t) = Ez_1(t)$, analogno poznatom identitetu Valda I(18). Odatle se, pored ostalog, pod uslovom $0 \leq X \leq y(X,t)$, $X \leq t$, dokazuje analogon elementarne teoreme obnavljanja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t,t)}{t} = \frac{1}{v_1(\infty)}, \quad v_1(\infty) = \lim_{t\to\infty} v_1(t).$$

Ovako uvedeni procesi se koriste u glavama III i IV.

<u>II 1.</u> Tu se definiše osnovni problem inspekcije uredjaja X. Uvodi se momenat otkrivanja otkaza Y, $Y \geq X$, pri čemu je zajednička raspodjela za X i Y, posmatrana na $[0,t]$, $t \leq \infty$, $F_t(x,y)$. $F_t(x,\infty) = F(x)$ se smatra poznatim. Osnovni problem je sledeći:

Za datu funkciju gubitaka $C(X,Y;F_t)$ i klasu H_F^t treba odrediti ono $F_t^* \in H_F^t$ da je

$$EC(X,Y;F_t^*) = \inf_{F_t \in H_F^t} EC(X,Y;F_t).$$

Dalje se razmatraju razni primjeri i mogućnosti zadavanja $C(X,Y;F_t)$ i H_F^t. Za neke specijalne slučajeve se izvode i krajnji rezultati. Zatim se diskutuje o suženju klase $Y(\omega)$ na klasu $Y(X(\omega))$ specijalnog oblika, o čemu se detaljno govori u § 2.

<u>II 2.</u> Izučava se klasa $Y(X)$ oblika

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} I\{y_k \leq X < y_{k+1}\} + t I\{X \geq y_n\}, \quad n \leq \infty$$

gdje je $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t$, u oznaci $[y]_n$ ili $[y]$, zadati niz brojeva koji se naziva planom. Uvodi se funkcija gubitaka $C(X, y_1, \ldots, y_n, t) = C(X,[y],t)$ u opštem obliku i razmatraju neki njeni posebni slučajevi. Kao najprostiji se javlja

$$C(X,[y],t) = \sum_{k=0}^{n} [\ell(k+1) + a \cdot (y_{k+1} - X)] I\{y_k \leq X < y_{k+1}\} + \ell(n+1) I\{X \geq t\}.$$

Beichelt F. na pr. uvodi funkciju $\ell(k+1) + v(y_{k+1} - X)$, $y_k \leq X < y_{k+1}$ gdje je $v(x)$ neprekidna i monotono rastuća, $v(0) = 0$.

Dalje se definišu veličine važne za odredjivanje optimalnog plana kao što su $K(y,[y]_j,t) = EC(X,[y]_j,t) I\{X \geq y\}$, $0 \leq y < y_1 < \cdots < y_j < t$,

$$K_n(y,t) = \inf_{[y]_j,\, 0 \leq j \leq n} K(y,[y]_j,t), \quad K(y,t) = \inf_{[y]_j,\, 0 \leq j \leq \infty} K(y,[y]_j,t),$$

i ispituju osnovne veze medju njima.

Dokazano je da pod izvjesnim uslovima $K_n(y,t) \to K(y,t)$ $n \to \infty$ ./<u>Teorema 1</u>./

Dalje se dokazuje <u>Teorema 2</u>., koja se bavi postojanjem optimalnog plana. Njeni uslovi mogu izgledati dosta obimni, ali zbog opštosti formulacije i mogućnosti postojanja beskonačnih planova, teško ih je izbjeći. Moramo priznati da Teorema 2. ima više analitički nego probabilistički karakter. Ipak, kako se to vidi iz kasnijeg, zbog relativne "prirodnosti" uslova, može se primijeniti na širu klasu modela.

II 3. Ovdje se konkretizuje funkcija gubitaka $C(X,[y];t)$ preko funkcije $C(x,y,i,j)$, $0\le x\le y$, $1\le i\le j$ i dobijaju rekurentne formule i funkcionalne jednačine za funkcije $K_n(y,t)$ i $K(y,t)$ i neke novouvedene $K_{i,j}(y,t)$, $K_i^j(y,t)$, tipa

$$K_{i,j+1}(y,t)=\inf_{y<y_1<t}[\varphi(y,y_1,i,j)+K_{i+1,j}(y_1,t)] ,$$

gdje je $K_1^j(y,t)=K_j(y,t)$ a $K_i^j(y,t)$ se računaju preko $K_{\ell,m}$. Takodje se razmatra postojanje optimalnog plana primjenom Teoreme 2.2. i slična pitanja.

Dalje se ispituje funkcija $C(x,y,i,n)=C(x,y,i)$ i dobijaju odgovarajuća uprošćenja, a posle i $C(x,y,i)=$ $=c\cdot i+C(x,y)$. Tu se na pr. dokazuje da ako $C(x,y)$ zadovoljava odredjene uslove, na intervalu $[y,t]$ ne treba vršiti nikakve provjere, sem u tački t, ako i samo ako

$$\int_y^{y_1}[C(x,t)-C(x,y_1)]\,dF(x)\le c[1-F(y_1)] \quad ,0\le y\le y_1\le t .$$

II 4. Ovdje se razmatra slučaj $t=\infty$. Sada se postavlja problem da li za dati plan $[y]$, $EC(X,[y])<\infty$ ili ne. Na pr. pokazuje se da za slučaj funkcije $C(x,[y])=$ $=b(k+1)+a\cdot(y_{k+1}-x)$, $y_k\le x<y_{k+1}$, $EX<\infty$ nije neophodan uslov postojanja plana $[y]$ takvog da je $EC(X,[y])<\infty$ ali da postoje i raspodjele sa $EX=\infty$ kod kojih za svaki plan $[y]$ važi $EC(X,[y])=\infty$, što znači da svaka funkcija C nije primjenljiva u svim situacijama.

Dalje se za specijalnu klasu funkcija C izvode funkcionalne jednačine, slično kao u § 3.

III 1. U ovoj glavi se proučava inspekcija sa obnavljanjem, tj. na ostatku vremena $t-y(X_1,t)$ se uključuje uredjaj X_2, koji se kontroliše po pravilu $y(X_2,t-y(X_1,t))$, zatim X_3, itd. sve dok se ne dostigne momenat t. Time se problem svodi na procese koji se izučavaju u I 2. U knjigama se može naći model koji ima neke sličnosti sa našim. Tamo je $y(X,t)-X$ sl.v. nezavisna od X, tj. zadaju se dva prosta PO $X_1, X_2, \dots$ i $y_1, y_2, \dots$ pri čemu je u našim oznakama $y(X_1,t)=\min\{X_1+y_1,t\}$, i slično dalje. Znači da je y_1 kašnjenje kontrole posle otkaza./vidi [KO] gl.V i [GBS] gl.VI/.

Ako se sa $k_y(t)$ označi ukupni očekivani gubitak na $[0,t]$ po pravilu y i sa $s_y(t)$ očekivani gubitak od posmatranja prvog uredjaja X_1, pokazuje se da je

$$k_y(t) = s_y(t) + \int_0^t k_y(t-u)\,d\phi(u,t) =$$

$$= s_y(t) + \int_0^t s_y(t-u)\,dG(u,t),$$

ϕ i G definisane u I 2.

Dalje se uvodi specijalni plan kontrole

$$y(X,t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) I\{s_{k-1}(t) \le X < s_k(t)\} + t\,I\{X \ge t\},$$

gdje su $0 < s_k(t) < s_{k+1}(t) \le t$, date funkcije.

<u>III 2.</u> Za klasu $y(X,t)$ definisanu gore i funkciju gubitaka uvedenu preko $c(x,y,k)$, $x \le y$, $1 \le k$, se dobijaju osnovni rezultati. U slučaju $c(x,y,k) = c(x,y)+k\ell$ se izvode rekurentne formule i funkcionalne jednačune potrebne za dobijanje optimalnog riješenja, tipa

$$k_{i+1}(T,t) = \inf_{T<u\le t} [A(T,u)+B(T,u)k_i(0,t-u)+k_i(u,t)],$$

Neformalno rečeno, $k_j(T,t)$ predstavlja minimalne očekivane gubitke na $[T,t]$, po planu sa najviše j provjera, $j \le \infty$, A, B poznate funkcije.

Dalje se za slučaj $t=\infty$, pokazuje da je

$$k_y = \lim_{t\to\infty} \frac{k_y(t)}{t} = \frac{s_y(\infty)}{v_y(\infty)}$$, analogno $I(20)$,

$s_y(\infty) = \lim_{t\to\infty} s_y(t)$, $v_y(\infty)=v_1(\infty)$ definisane u I 2.2., što se obično uzima kao osnova za nalaženje optimalnog plana na $[0,\infty)$.

IV 1. Razmatra se jedan pristup problemima preventive uredjaja. U mogućnosti smo da neprekidno pratimo rad uredjaja, pa nam je cilj da ostareli uredjaj na vrijeme zamijenimo novim. U koliko uredjaj u medjuvremenu otkaže zamijenjuje se novim momentalno. Zato se planira trenutak preventive $S(X,t)$. Ovdje se takodje može koristiti teorija iz glave I 2.

Model preventive se dalje uopštava preko planova oblika S : $S_i(X,t)$, $i = 1, 2, \ldots$ pri čemu je $S_i(X,t)$ plan i -te po redu preventive na ostatku vremena. t . Do sada je bio slučaj $S_i = S$, $i = 1, 2, \ldots$ U ovakvoj formulaciji se dobijaju interesantni rezultati. Ako je $K_j(t; S_j, S_{j+1}, \ldots)$ očekivani gubitak na $[0,t]$ po planu S^i : $S_1^i = S_j$, $S_2^i = S_{j+1}$, ... i $K_j(t) = \inf_{S_j, S_{j+1}, \ldots} K_j(t; S_j, S_{j+1}, \ldots)$ pokazuje se na pr. da važe formule oblika

$$K_j(t) = \inf_{S_j} [C_j(t) + E K_{j+1}(t - Z_1^j)],$$

odakle se izvodi kao specijalan slučaj, poznat u literaturi / [BP] , glava 4.2.4./

$$K_j(t) = K(t) = \min\{ \inf_{0<x<t} [\int_0^x (c_1 + K(t-u)) dF(u) + (c_2 + K(t-x))(1-F(x)), \int_0^t (c_1 + K(t-u)) dF(u) \} ,$$

za odredjeni oblik $S_i = S$ i funkciju gubitaka C .

IV 2. Ovdje se metodom sličnim onom u predhodnom § daje opšti pogled na probleme inspekcije i izvode formule slične navedenoj za $K_j(t)$ u IV 1. Pokazuje se izvjesno proširenje funkcionalnih jednačina obradjenih u III 2.2.

Primijetimo da metodi glave IV daju mogućnosti za različita dalja ispitivanja za davanjem specijalnih funkcija gubitaka i vrsta planova inspekcije. To se ovdje ne radi jer bi suviše odvelo u širinu.

I Teorija obnavljanja

I 1. Elementi teorije obnavljanja

1. Niz nenegativnih, nezavisnih i jednako rasporedjenih slučajnih veličina

$$(1) \qquad X_1, X_2, X_3, \dots$$

se naziva /prosti/ proces obnavljanja/ PO / [k] . Neka je

$$(2) \qquad F(x) = P(X_i < x), \; i=1,2,\dots, \quad F^{(n)}(x) = P(X_1 + \dots + X_n < x), \; n=1,2,\dots$$

Neka je

$$(3) \qquad S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i, \quad i=1,2,\dots$$

Proces S_i , $i=1,2,\dots$ se ponegdje naziva proces obnavljanja [F] .

Ako je $F_1(x) = P(X_1 < x)$, $F(x) = P(X_i < x)$, $i=2,3,\dots$ proces (1) se naziva opšti proces obnavljanja.

Da proces ne bi bio trivijalan, predpostavljamo nadalje da je

$$(4) \qquad P(X_i = 0) = F(+0) < 1, \quad i=1,2,\dots$$

a najčešće i da je $F(+0) = 0$. Prema tome

$$(5) \qquad \mu = EX_i = \int_0^\infty x\, dF(x) = \int_0^\infty [1-F(x)]\, dx > 0, \quad i=1,2,\dots$$

Slučajne veličine $X_1, X_2, \dots$ se mogu shvatiti kao neprekidna vremena rada do kvara nezavisnih uredjaja iste vrste koji se uključuju postupno jedan za drugim. Tada su $S_1, S_2, \dots$ momenti obnavljanja /uključivanja, zamjene/ procesa $X_1, X_2, \dots$. Često ćemo umjesto fraze "uredjaj/ elemenat/ sa slučajnim vremenom rada X_i " govoriti "uredjaj /elemenat/ X_i ".

Neka je

$$(6) \qquad N(t) = \sup\{n \geq 0;\, S_n < t\}, \; t > 0, \; N(0) = 0, \; S_0 = 0.$$

broj obnavljanja za period vremena t, od početka procesa. Tada je

$$(7)\qquad N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\{S_i < t\}.$$

Zadnji momenat obnavljanja na $[0,t)$ i prvi na $[t,\infty)$ su $S_{N(t)}$ i $S_{N(t)+1}$:

$$(8)\qquad S_{N(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n I\{N(t)=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I\{S_n < t\},$$

$$(9)\qquad S_{N(t)+1} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} I\{N(t)=n\} = \sum_{n=0}^{\infty} X_{n+1} I\{S_n < t\}.$$

Za njih važi relacija

$$(10)\qquad S_{N(t)} < t \leq S_{N(t)+1} = S_{N(t)} + X_{N(t)+1}.$$

Slučajna veličina $N(t)$ je konačna s.s., [K], [F], [P1] i ima konačne momente svih redova.

Od osnovnog značaja je funkcija

$$(11)\qquad H(t) = EN(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t) < \infty,\ t>0,\ H(0)=0,$$

očekivani broj obnavljanja na $[0,t)$. Ona zadovoljava jednačinu

$$(12)\qquad H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-u)\,dF(u) = F(t) + \int_0^t F(t-u)\,dH(u).$$

Pod dovoljno opštim uslovima [F], 426, na primjer, za $Q(t)$ nenegativna, nerastuća i integrabilna funkcija, a $F(x)$ nearitmetička raspodjela, važi

$$(13)\qquad \int_0^t Q(t-x)\,dH(x) \to \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} Q(x)\,dx,\ t\to\infty.$$

Ako je $F(x)$ aritmetička, biće

$$(14)\qquad \int_0^t Q(t-x)\,dH(x) \to \frac{\lambda}{\mu}\sum_k Q(k\lambda),\ t=n\lambda\to\infty.$$

/Raspodjela je aritmetička ako sve tačke rasta pripadaju nizu $k\lambda$, $k=1,2,\ldots$, za neko $\lambda>0$, pri čemu se uzima najveće takvo λ./Ovo tvrdjenje se naziva Osnovna teorema obnavljanja. Ona je ekvivalentna sa Teoremom Blekvela [S],

(15) $$H(t+x)-H(t) \to \frac{x}{\mu}\,, \quad t\to\infty\,,\quad x\geq 0\,,$$

gdje se za aritmetičku raspodjelu uzima x djeljivo sa λ.

Iz (15) slijedi elementarna teorema obnavljanja, koja se može i direktno dokazati:

(16) $$\frac{1}{t}H(t)\to\frac{1}{\mu}\,,\quad t\to\infty\,,\quad \frac{1}{\mu}=0\,,\ \mu=\infty\,.$$

2. Neka su $X_1, X_2, \dots$ i $Y_1, Y_2, \dots$ prosti PO, takvi je Y_{n+1} nezavisno od $S_n^x = \sum_1^n X_i$. Neka je $S_n^y = \sum_1^n Y_i$, i $N_x(t)$, $N_y(t)$ odgovarajući broj obnavljanja na $[0,t)$. Tada iz

(17) $$S^y_{N_x(t)+1} = \sum_{i=0}^{\infty} Y_{i+1}\, I\{S_i^x < t\}$$

slijedi identitet Valda:

(18) $$E\,S^y_{N_x(t)+1} = E\,Y_1\,[1+H_x(t)]\,.$$

Odatle za $Y_i = X_i$, $i=1,2,\dots$ slijedi

(19) $$1+H(t)\geq\frac{t}{\mu}\,.$$

Na osnovu (18) važi

(20) $$\lim_{t\to\infty}\frac{E\,S^y_{N_x(t)}}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{E\,S^y_{N_x(t)+1}}{t} = \frac{E\,Y_1}{E\,X_1}\,.$$

Dokaz: Neka $Z_i = \min\{Y_i, C\}$, $C>0$, konstanta. Tada $S_n^z \leq S_n^y$, $S^z_{N_x(t)+1} = S^z_{N_x(t)} + Z_{N_x(t)+1} \leq S^y_{N_x(t)} + C$, $E\,\frac{S^z_{N_x(t)+1}-C}{t} \leq E\,\frac{S^y_{N_x(t)}}{t} \leq \frac{E\,S^y_{N_x(t)+1}}{t}$, i koristeći (18) i (16),

$$\frac{E\,Z_1}{E\,X_1} \leq \underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{E\,S^y_{N_x(t)}}{t} \leq \overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{E\,S^y_{N_x(t)}}{t} \leq \frac{E\,Y_1}{E\,X_1}\,.$$

Kako $E\,Z_1 = E\min\{Y_1, C\}\nearrow E\,Y_1$, $C\to\infty$, to važi (20).

U slučaju $X_i = Y_i$, važi

(21) $$E\,S_{N(t)} = \int_0^t x[1-F(t-x)]\,dH(x)\,.$$

Dokaz: $E\, S_{N(t)} = E \sum_1^\infty S_i I\{S_i < t \le S_i + X_{i+1}\} =$

$= \sum_1^\infty E\, S_i\, E[I\{S_i < t \le S_i + X_{i+1}\} / S_i] =$

$= \sum_1^\infty E S_i I\{S_i < t\} P(X_{i+1} \ge t - S_i / S_i) = \sum_1^\infty E\, S_i [1 - F(t - S_i)]\, I\{S_i < t\} =$

$= \sum_1^\infty \int_0^t x[1 - F(t-x)]\, dF^{(i)}(x) = \int_0^t x[1 - F(t-x)]\, dH(x).$

Na sličan način je

(22) $$E\, X_{N(t)+1} = \int_t^\infty x\, dF(x) + \int_0^t \int_{t-u}^\infty x\, dF(x)\, dH(u).$$

Iz (22) je $E X_{N(t)+1} \ge \int_t^\infty x\, dF(x) + \int_0^t \int_t^\infty x\, dF(x)\, dH(u) =$

$= [1 + H(t)] \int_t^\infty x\, dF(x) \ge [1 + H(t)]\, t[1 - F(t)] \ge \frac{1}{\mu} t^2 [1 - F(t)]$ tj.

(23) $$E X_{N(t)+1} \ge \frac{t^2[1 - F(t)]}{\mu}.$$

Dokazaćemo da je [Ko]

(24) $$H(t+x) - H(t) \le 1 + H(x), \quad x \ge 0.$$

$N(t+x) - N(t) = \sum_1^\infty [I\{S_i < t+x\} - I\{S_i < t\}] = \sum_1^\infty I\{t \le S_i < t+x\}$

predstavlja broj obnavljanja na intervalu $[t, t+x)$. Tada je

$H(t+x) - H(t) = E[N(t+x) - N(t)] =$

$= E \sum_1^\infty I\{S_{i-1} < t \le S_i < t+x\} \sum_{k=i}^\infty I\{S_k < t+x\} =$

$= E \sum_{i=1}^\infty I\{S_{i-1} < t \le S_i < t+x\} [1 + \sum_{k=1}^\infty I\{S_{i+k} < t+x\}] =$

$= E \sum_{i=1}^\infty I\{S_{i-1} < t \le S_i < t+x\} [1 + \sum_{k=1}^\infty I\{S_k^i < t+x - S_i\}] =$, $S_k^i = \sum_{j=1}^k X_{i+j}$,

$= \sum_{i=1}^\infty E\, E[\quad / S_i] = \sum_{i=1}^\infty E[1 + H(t+x-S_i)]\, I\{S_{i-1} < t \le S_i < t+x\} =$

$= E \sum_{i=1}^\infty [1 + H(t+x-S_i)]\, I\{S_{i-1} < t \le S_i < t+x\} =$

$= E[1 + H(t+x - S_{N(t)+1}); S_{N(t)+1} < t+x] \le$

$\le [1 + H(x)]\, P(S_{N(t)+1} < t+x) \le 1 + H(x),$

jer je, prije svega S_k nezavisno od S_i i $H(t+x-S_{N(t)+1}) \leq$ $\leq H(x)$, pošto je H rastuća funkcija.

3. Jednostavno uopštenje procesa $N(t)$ se može dobiti ako se posmatra umjesto t , slučajna veličina T nezavisna od $X_1, X_2, \ldots$. Tada je

$$(25) \qquad N(T) = \sup\{n\,;\, S_n < T\} = \sum_{i=1}^{\infty} I\{S_i < T\},$$

$$EN(T) = \sum_{1}^{\infty} P(S_i < T) = \sum_{1}^{\infty} E[P(S_i < T)/T] =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} E F^{(i)}(T) = E \sum_{1}^{\infty} F^{(i)}(T) = EH(T)\ , \text{ tj.}$$

$$(26) \qquad EN(t) = EH(T)\,.$$

Kako je $T \leq S_{N(T)+1} = \sum_{i=0}^{\infty} X_{i+1} I\{S_i < T\}$, biće

$$E S_{N(T)+1} = \sum_{i=0}^{\infty} EX_{i+1} P(S_i < T) = EX_1[1 + EN(T)] \geq ET,$$

odakle je

$$(27) \qquad EN(T) \geq \frac{ET}{EX_1} - 1\,,$$

analogno sa (19) .

Jasno je da se mogu posmatrati i druge karakteristike i dobiti odgovarajući rezultati. Ovdje nam to nije od većeg interesa.

Opisani proces se može primijeniti kao model inspekcije ispravnosti rada uredjaja T .Momenti $S_1, S_2, \ldots$ su slučajni momenti kontrole pri čemu se u $S_{N(T)+1}$ otkriva otkaz uredjaja i prekida kontrola. $N(T)+1$ je broj izvršenih kontrola.

I 2. Neka uopštenja procesa obnavljanja

1. Neka je $X \geq 0$ sl.v. i $Y(X,t) = Y(X(\omega), \omega, t), t \geq 0$ slučajni proces takav da je $Y(X,0) = 0$, $0 \leq Y(X,t) \leq t$. Neka je $X_1, X_2, \ldots$ prost PO. Definišemo procese

(28) $z_1(t) = y(X_1,t)$, $z_{i+1}(t) = y(X_{i+1}, t-z_1(t)-\cdots-z_i(t))$, $i=1,2,\cdots$

(29) $M(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} I\{z_1(t)+\cdots+z_i(t)<z\} = \sum_{i=1}^{\infty} I\{S_i(t)<z\}$, $z\le t$.

Proces $z_i(t)$ je u izvjesnom smislu uopštenje PO, jer se za $y(X,t) = \min\{X,t\}$, procesi $X_1,X_2,\cdots$ i $z_1,z_2,\cdots$ poklapaju na $[0,t]$. Prema tome, proces $M(z,t)$ je analogan $N(z)$.

Svakako je $z_1(t)+\cdots+z_i(t)\le t$,ali u opštem slučaju može biti $P(z_1+z_2+\cdots<t)>0$. Zato se postavlja pitanje konačnosti $M(z,t)$. Ako je $P(z_1+z_2+\cdots=t)=1$, onda je i $P(M(z,t)<\infty)=1$, $z<t$. Ako je $G(z,t)=EM(z,t)<\infty$ to je svakako i $M(z,t)<\infty$, s.s.,mada obrnuto ne važi.

Neka je

(30) $\phi(z,t) = P(y(X_1,t)<z) = H_1(z,t)$,

(31) $H_i(z,t) = P(z_i(t)<z)$, $i=1,2,\cdots$

(32) $G_i(z,t) = P(z_1(t)+\cdots+z_i(t)<z)$, $i=1,2,\cdots$

Za $i=1$ predpostavljamo da nam je raspodjela poznata. Dalje je, za $z\le t$,

$H_{i+1}(z,t) = P(z_{i+1}(t)<z) = E\,P(y(X_{i+1},t-z_1-\cdots-z_i)<z/z_1) =$

$= E\,H_i(z,t-z_1) = \int_0^{t+0} H_i(z,t-u)\,d\phi(u,t) = \int_0^{t} H_i(z,t-u)\,d\phi(u,t) +$

$+ [1-\phi(t,t)]$, jer je $H_i(z,t)=1$, za $z>t$, tj. važi

(33) $H_{i+1}(z,t) = \int_0^{t+0} H_i(z,t-u)\,d\phi(u,t)$, $i=1,2,3,\cdots$

Na sličan način je

(34) $G_{i+1}(z,t) = \int_0^{z} G_i(z-u,t-u)\,d\phi(u,t)$, $i=1,2,\cdots$

Kako je $G_i(z,t)=\phi(z,t)$,analogno sa $F^{(i)}(t)$ možemo pisati $G_i(z,t) = \phi^{(i)}(z,t)$, pa je $\phi^{(i+1)}(z,t) = G_{i+1}(z,t) =$

$= E\,P(z_1+\cdots+z_{i+1}<z\,|\,z_1+\cdots+z_i) = E\,\phi(z-z_1-\cdots-z_i, t-z_1-\cdots-z_i) =$

$$= \int_0^z \phi(z-u,t-u)\, d\, G_i(u,t) = \int_0^z \phi(z-u,t-u)\, d\, \phi^{(i)}(u,t), \text{ tj.}$$

(35) $$G_{i+1}(z,t) = \int_0^z \phi(z-u,t-u)\, d\, G_i(u,t),$$

i na sličan način

(36) $$H_{i+1}(z,t) = \int_0^{t+0} \phi(z,t-u)\, d\, G_i(u,t).$$

Pošto je $M(z,t)$ diskretna sl.v., odredićemo i $p(M(z,t)=k)$. Prema (34) je

$$p_k(z,t) = P(M(z,t)=k) = G_k(z,t) - G_{k+1}(z,t) =$$
$$= \int_0^z [G_{k-1}(z-u,t-u) - G_k(z-u,t-u)]\, d\, \phi(u,t) =$$
$$= \int_0^z p_{k-1}(z-u,t-u)\, d\, \phi(u,t), \quad k=1,2,\dots, \quad p_0(z,t) = P(Z_1(t) \geq z) = 1-\phi(z,t).$$

Prema (35) je

$$p_k(z,t) = G_k(z,t) - \int_0^z \phi(z-u,t-u)\, d\, G_k(u,t) =$$
$$= \int_0^z [1-\phi(z-u,t-u)]\, d\, G_k(u,t) = \int_0^z p_0(z-u,t-u)\, d\, G_k(u,t), \quad k=1,2,\dots$$

Neka je

(37) $$v_i(t) = E\, Z_i(t), \quad i=1,2,\dots$$

Tada je, slično ranijem, $(v_i(0)=0)$

(38) $$v_{i+1}(t) = \int_0^t v_i(t-u)\, d\, \phi(u,t) = \int_0^t v_1(t-u)\, d\, G_i(u,t).$$

Neka je

(39) $$V(t) = E(Z_1(t) + Z_2(t) + \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t),$$

(40) $$G(z,t) = E\, M(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(z,t).$$

Tada na osnovu (38) slijedi jednačina

(41) $$V(t) = v_1(t) + \int_0^t V(t-u)\, d\, \phi(u,t),$$

a ako je $G(z,t) < \infty$, $z \leq t$, i rješenje izraženo preko G

(42) $$V(t) = v_1(t) + \int_0^t v_1(t-u)\, d\, G(u,t).$$

Za $G(z,t)$ se dobija

$$(43)\qquad G(z,t)=\phi(z,t)+\int_0^z G(z-u,t-u)\,d\phi(u,t)=\phi(z,t)+\int_0^z \phi(z-u,t-u)\,dG(u,t).$$

analogno sa (12) .

Definišimo , slično sa (9) ,

$$(44)\qquad S_{M(z,t)+1}=\sum_{i=0}^{\infty} z_{i+1} I\{z_1+\dots+z_i<z\}\le t .$$

Ukoliko je $M(z,t)<\infty$, to je $S_{M(z,t)+1}\ge z$, a za $M(z,t)=$ $=\infty$,svodi se na $\sum_0^\infty z_{i+1}\le z$. Tada je

$$E S_{M(z,t)+1}=E z_1(t)+\sum_1^\infty E z_{i+1} I\{z_1+\dots+z_i<z\}=$$

$$=v_1(t)+\sum_1^\infty E E(z_{i+1}/S_i)\, I\{S_i<z\}=$$

$$=v_1(t)+\sum_1^\infty E v_1(t-S_i) I\{S_i<t\}=v_1(t)+\sum_{i=1}^\infty \int_0^z v_1(t-u)\,dG_i(u,t).$$

Ako je $G(z,t)<\infty$, to je

$$(45)\qquad E S_{M(z,t)+1}=v_1(t)+\int_0^z v_1(t-u)\,dG(u,t)$$

što možemo uporediti sa (18) .

Ukoliko je $M(z,t)<\infty$, definišimo

$$(46)\qquad z_{M(z,t)+1}=\sum_0^\infty z_{i+1} I\{S_i<z\le S_i+z_{i+1}\}.$$

Tada se može pokazati da je

$$(47)\qquad E z_{M(z,t)+1}=\int_z^t u\,d\phi(u,t)+\sum_{i=1}^\infty \int_0^z \int_{z-u}^{t-u+} x\,\phi(dx,t-u)\,G_i(du,t)=$$

$$=\int_z^t u\,d\phi(u,t)+\int_0^z \int_{z-u}^{t-u+} x\,\phi(dx,t-u)\,G(du,t),$$

za $G(z,t)<\infty$, $z\le t$, slično sa (22) .

Razmotrimo još problem $G(z,t)<\infty$. Ako je z_1+z_2+ $+\dots<t$ s.s., to je $G(t,t)=\infty$,a za $G(z,t)$ se ne može ništa odredjeno reći. Ako je $z_1+z_2+\dots=t$ s.s.,što je ekvivalentno sa $G_n(t-\varepsilon,t)=P(z_1+z_2+\dots+z_n+\varepsilon\le t)\to 0,\ n\to\infty$ za svako $\varepsilon>0$, ne slijedi da red $\sum_n G_n(t-\varepsilon,t)<\infty$ .Medjutim važi

Lema 1. Ako je $v_1(x) \geq c > 0$ za $t - z_0 \leq x \leq t$ to je $G(z,t) < \infty$, $z \leq z_0$.

Dokaz: Kao što smo vidjeli izvodeći (45), važi

$$t \geq E S_{M(z,t)+1} = v_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^z v_1(t-u)\, dG_i(u,t) \geq$$

$$\geq v_1(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c \int_0^z dG_i(u,t) = v_1(t) + c\, G(z,t) \text{ , tj.}$$

$$G(z,t) \leq \frac{1}{c}(t - v_1(t)) < \infty \quad , z \leq t.$$

Pomenimo i to da se može pokazati, kao u (21),

$$E S_{M(z,t)} = \int_0^z u[1 - \phi(z-u, t-u)]\, dG(u,t) < z .$$

2. Neka je proces $y(X,t)$, razmotren u tački 1. takav da

(48) $$X \leq Y \leq t \text{ , za } X < t, \quad y = t, \text{ za } X \geq t.$$

Definišimo i proces

(49) $$u_{i+1}(t) = \min\{X_{i+1}, t - z_1 - \dots - z_i\}, \ i = 1, 2, \dots, \quad u_1 = \min\{X_1, t\}$$

Tada je $u_i(t) \leq z_i(t)$. Na osnovu (48) je

$P(\sum_1^i z_j(t) < z) \leq P(\sum_1^i X_j < z) \to 0$, $i \to \infty$, pa $\sum_1^{\infty} z_j(t) = t$, s.s. i $M(z,t) < \infty$ s.s., i

$$G(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\sum_1^i z_j < z) \leq \sum_1^{\infty} P(\sum_1^i X_j < z) = H(z) < \infty, \ z \leq t.$$

Prema tome, sve formule iz tačke 1. u kojima se traži $G(z,t) < \infty$ su tačne.

Ako je $H_i^2(z,t) = P(u_i(t) < z)$, to za H_i^2 važe formule iste kao (33), (36), (38), (41), (42) gdje se umjesto $H_1(z,t)$ stavlja $H_1^2(z,t) = P(u_1(t) < z)$ i umjesto $v_1(t)$ stavlja $v_1^2(t) = E u_1(t)$.

Koristeći (49), nije teško pokazati da je

(50) $$H_{i+1}^2(z,t) = 1 - (1 - F(z))\, G_i(t - z + 0, t) \quad , z$$

(51) $$v_{i+1}^2(t) = \int_0^t [1 - F(z)]\, G_i(t - z, t)\, dz$$

$$(52) \qquad V^2(t) = \int_0^t [1-F(x)][1+G(t-x,t)]\,dx .$$

Ispitaćemo posebno jednačinu (45) . Prema (48) je $v_1(t) \geq E\min\{X_1,t\} = v_1^2(t) = g(t) = \int_0^t [1-F(x)]dx$, odakle je

$t \geq ES_{M+1} \geq v_1(t) + \int_0^z g(t-u)\,dG(u,t) \geq v_1(t) + g(t-z)G(z,t)$ tj.

$$(53) \qquad G(z,t) \leq \frac{t-v_1(t)}{g(t-z)} \leq \frac{t-g(t)}{g(t-z)} \quad , \; z < t$$

Predpostavimo da postoji $\lim_{t\to\infty} v_1(t) = v_1(\infty) < \infty$. To znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $T > 0$ i da za $t \geq T$ $|v_1(t) - v_1(\infty)| < \varepsilon$. Neka $t \geq T+z$. Tada je

$$(54) \qquad [v_1(\infty)-\varepsilon][1+G(z,t)] \leq ES_{M(z,t)+1} \leq [v_1(\infty)+\varepsilon][1+G(z,t)] .$$

Lema 2. Neka postoji $v_1(\infty) < \infty$. Tada

$$(55) \qquad \lim_{t\to\infty} G(z,t) \geq \frac{z}{v_1(\infty)} - 1 \qquad \text{/uporedi sa (19)/,}$$

$$(56) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{ES_{M(z,t)+1}}{1+G(z,t)} = v_1(\infty) \; , \; \lim_{t\to\infty} [ES_{M(z,t)+1} - v_1(\infty)(1+G(z,t))] = 0 \; ,$$

$$(57) \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} G(t,t) = \frac{1}{v_1(\infty)} \quad , \qquad \text{/uporedi sa (16) /.}$$

Dokaz: Iz (54) je $G(z,t) \geq \frac{z}{v_1(\infty)+\varepsilon} - 1$, za $t \geq T+z$, $z \geq 0$, odakle je $\lim_{t\to\infty} G(z,t) \geq \frac{z}{v_1(\infty)+\varepsilon} - 1$, za svako $\varepsilon > 0$, tj. (55) .

Za (56) prvi dio slijedi odmah iz (54) , kad se sve podijeli sa $1+G(z,t)$, a drugi takodje iz (54) , kad se napiše $-\varepsilon[1+H(z)] \leq -\varepsilon[1+G(z,t)] \leq ES_{M(z,t)+1} - v_1(\infty) \cdot$ $\cdot(1+G(z,t)) \leq \varepsilon[1+G(z,t)] \leq \varepsilon[1+H(z)]$,

i pusti da $t \to \infty$ i $\varepsilon \to 0$.

Po analogiji sa (24) će zbog nezavisnosti procesa od predhodnog, uslovno $S = S_{M(t-k,t)+1}$, na $[t-k,t)$ biti ukupno $1+M(t-S, t-S)$ obnavljanja, pa važi

$$G(t,t)-G(t-k,t)=E[1+M(t-S_{M(t-k,t)+1}, t-S_{M(t-k,t)+1});$$

$$; S_{M(t-k,t)+1}<t]\leq E[1+N(t-S_{M(t-k,t)+1})]\leq E[1+N(k)]=1+H(k) \quad (*)$$

Neka su ε i T kao u (54). Tada $\frac{1}{t}G(t,t)\geq\frac{G(t-T,t)}{t}\geq$ $\frac{t-T}{t}\frac{1}{\upsilon_1(\infty)+\varepsilon}-\frac{1}{t}$ i $\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{G(t,t)}{t}\geq\frac{1}{\upsilon_1(\infty)+\varepsilon}$,za svako $\varepsilon>0$, tj $\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{G(t,t)}{t}\geq\frac{1}{\upsilon_1(\infty)}$. Na osnovu (*) i (54) je $\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}G(t,t)\leq\overline{\lim}_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}G(t-T,t)+\frac{1}{t}(1+H(T))\right]\leq\overline{\lim}_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\upsilon_1(\infty)-\varepsilon}-\frac{1}{t}+\frac{1+H(T)}{t}\right]=\frac{1}{\upsilon_1(\infty)-\varepsilon}$, za svako $\varepsilon>0$, tj. $\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{G(t,t)}{t}\leq$ $\leq\frac{1}{\upsilon_1(\infty)}$,što daje (57) . Iz dokaza se vidi i da je

$$\lim_{t\to\infty}\frac{G(t-T,t)}{t}=\frac{1}{\upsilon_1(\infty)}, \quad T\geq 0.$$

Moguće je dobiti rezultate slične (13) , (15) , ali nam to nije cilj.

II Inspekcija bez obnavljanja

II 1. Uvod

1. Vrijeme rad bez kvara uredjaja je sl. v. $X \geq 0$. On se prati pomoću nekog drugog uredjaja, sistema, Njemu je cilj da konstatuje otkaz uredjaja X , pri čemu može doći do kašnjenja, ali ne i do lažne uzbune. Prema tome, za momenat konstatovanja otkaza Y , važi $Y \geq X$. Ako se posmatranje vrši na intervalu $[0,t]$, to je $0 \leq X \leq Y \leq t$, za $X \leq t$ i $Y = t$, za $X > t$, što se interpretira kao obustava rada i posmatranja. Neka je zajednička funkcija raspodjele za (X,Y) , $F_t(x,y)$. Neka je data i funkcija $C(X,Y;F_t) \geq 0$ koja predstavlja trošak od otkrivanja otkaza u momentu Y , nastalog u X , po "pravilu" F_t .

Neka je

$$(1) \qquad \mathcal{H}_F^t = \{F_t : F_t(x,\infty) = F(x)\} \quad , H_F^t \subset \mathcal{H}_F^t$$

Osnovni problem koji se razmatra je da se za datu klasu H_F^t odredi ono F_t^* za koje je

$$(2) \qquad K(F_t^*) = \inf_{F_t \in H_F^t} K(F_t) \quad , \quad K(F_t) = EC(X,Y;F_t).$$

Može se pokazati da je

$$(3) \qquad \mathcal{H}_F^t = \bigcup_{G \leq F} H_{F,G}^t \ ,$$

$$(4) \qquad H_{F,G}^t = \{F_t : \max\{F(x)+G(y)-1,0\} \leq F_t(x,y) \leq \min\{F(x),G(y)\}, x < y < t\}$$

prema $[HT]$ uzimajući u obzir da je $P(Y < x) = G(x) \leq F(x), G(0)=0.$

U opštem slučaju je

$$K(F_t) = EC(X,Y;F_t) = EC_t I\{0 \leq X \leq Y < t\} + EC_t I\{0 \leq X < t, Y \geq t\} +$$
$$+ EC_t I\{X \geq t\} =$$

$$(5) \qquad \iint\limits_{0 \leq x \leq y < t} c(x,y;F_t)\,dF_t(x,y) + \int\limits_{0 \leq x < t} c(x,t;F_t)\,d[F(x) - F_t(x,t)] +$$

$$+ C(t,t;F_t)[1-F(t)],$$

jer $P(0 \leq X < x, Y \geq t) = P(0 \leq X < x) - P(0 \leq X < x, Y < t) = F(x) - F_t(x,t).$

2. Primjeri:

2.1. Neka je za t fiksirano, $P(Y<t)=0$, odakle je $F_t(x,t)=0$, $x<t$, što znači da se do t kontrola i ne vrši. Tada je

$$K(F_t)=K(t)=\int_{0\le x<t} c(x,t;F_t)\,dF(x)+c(t,t;F_t)[1-F(t)]=$$

$$=\int_{0\le x<t} c(x,t)\,dF(x)+c(t,t)[1-F(t)].$$

2.2. Neka se kontrola vrši samo u tački $0<y_1<t$, a kvar se otkriva sa vjerovatnoćom p, tj.

$$P(X<x,\ Y=y_1)=\begin{cases} pF(x), & x\le y_1\\ pF(y_1), & x>y_1\end{cases}$$

$$P(X<x,\ Y<t)=P(X<x,\ Y=y_1).$$

Tada je $C(X,Y;F_t)=C(X,Y;p,y_1)$, $0\le p\le 1$, $0<y_1<t$,

$$K(F_t)=p\int_0^{y_1}c(x,y_1;F_t)\,dF(x)+(1-p)\int_0^{y_1}c(x,t;F_t)\,dF(x)+$$

$$+\int_{y_1}^{t}c(x,t;F_t)\,dF(x)+c(t,t;F_t)[1-F(t)].$$

Treba naći one p^* i y_1^*, za koje je

$$K(F_t^*)=K(p^*,y_1^*,t)=\inf_{p,y_1}K(p,y_1,t).$$

Mogu se razmotriti p ili y_1 fiksirani.

2.3. Neka je za $t=\infty$,

/a/ $C(X,Y;F_\infty)=C(X,Y;\lambda)=aY+\frac{1}{\lambda}+b(Y-X)$,

gdje je $aY+\frac{1}{\lambda}$ trošak kontrole, a $b(Y-X)$ trošak kašnjenja, i $E(Y-X/X)=\lambda$, tj. $E(Y/X)=X+\lambda$.

Tada je

$$K(\lambda)=EE[C(X,Y;\lambda)/X]=$$

$$=E\,a\,E(Y/X)+\frac{1}{\lambda}+b\,E[(Y-X)/X]=aEX+(a+b)\lambda+\frac{1}{\lambda}.$$

Odatle je $k(\lambda^*) = \min_{\lambda>0} k(\lambda)$ i $\lambda^* = \frac{1}{\sqrt{a+e}}$.

/b/ Za $C(X,Y;\lambda) = \frac{e}{\lambda} Y + a(Y-X)$ se na isti način

dobija $\lambda^* = \sqrt{\frac{e}{a}\mu}$, $\mu = EX$.

2.4. Model koji se najčešće javlja u literaturi: Y je diskretnog tipa

$$Y = \begin{cases} y_{i+1}, & y_i \le X < y_{i+1} \\ t, & X \ge t \end{cases} = \sum_{i=0}^{n} y_{i+1} I\{y_i \le X < y_{i+1}\} + t I\{X \ge t\}.$$

što znači da se otkaz primjećuje u narednom momentu provjere, posle otkaza. Tada je

$$F_t(x,y) = \begin{cases} F(y_j), & y_j < y \le y_{j+1}, \ 0 \le j \le k \\ F(x), & y_{k+1} < y \end{cases}, \quad y_k < x \le y_{k+1},\ k < n$$

pa je $c(X,Y;F_t) = c(X,Y;y_1,y_2,\ldots,y_n,t)$ i

(6) $$k(y_1,\ldots,y_n,t) = \sum_0^{n-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} c(x,y_{j+1};F_t)\,dF(x) + \int_{y_n}^{t} c(x,t;F_t)\,dF(x) + c(t,t;F_t)[1-F(t)], \quad y_0 = 0,$$

jer je $dF(x,y) = dF(x)$, $0 \le x < y = y_{k+1}$ i

$$F(x) - F(x,t) = \begin{cases} 0, & y_k < x \le y_{k+1}, \ k < n \\ F(x) - F(y_n), & y_n < x \le t \end{cases}, \quad t\,j.$$

$d[F(x) - F(x,t)] = dF(x)$, $y_n < x \le t$, što je bilo jasno i direktno.

2.5. Neka je sada

$$P(Y = y_j / X,\ y_i \le X < y_{i+1}) = P_{ij} \begin{cases} > 0, & j > i \\ = 0, & j \le i \end{cases}.$$

Tada je /za $t = \infty$ /

$$k(F_\infty) = EE[c(X,Y;F_t)/X] = E\sum_0^\infty I\{y_i \le X < y_{i+1}\}\cdot E[c(X,Y;F_t)/X] =$$

$$= E\sum_0^\infty I\{y_i \le X < y_{i+1}\} \sum_{j \ge i+1} c(X,y_j;F_t) P_{ij} =$$

$$= \sum_{i \ge 0} \sum_{j \ge i+1} \int_{y_i}^{y_{i+1}} c(x,y_j;F_t)\,dF(x)\,P_{ij}.$$

Mogu se, na pr. odredjivati samo P_{ij} ili samo $y_1, y_2, \ldots$

2.6. /a/ Neka je $Y=\varphi(X)$, tj. direktno zavisi od X, kao u primjeru 4. Tada je

$$K(F_t)=K(\varphi,t)=E\,C(X,\varphi(X);\varphi,t)=$$

$$=\int_{\varphi(x)<t} c(x,\varphi(x);\varphi,t)\,dF(x)+\int_{x<t\le\varphi(x)} c(x,t;\varphi,t)\,dF(x)+c(t,t;\varphi,t)[1-F(t)]=$$

$$=\int_{x<t} c(x,m_t(x);\varphi,t)\,dF(x)+c(t,t;\varphi,t)[1-F(t)],$$

$$m_t(x)=\min\{\varphi(x),t\}.$$

/b/ Neka je $c(X,\varphi(X);\varphi,t)=m_t(X)-X+\frac{l}{E[m_t(X)-X;X<t]}\,m_t(X),\ X<t,\ c(t,t;\varphi,t)=\frac{l\,t}{E[m_t(X)-X;X<t]}.$

Tada je

$$K(\varphi,t)=\int_{x<t}[m_t(x)-x+\frac{l}{E}m_t(x)]\,dF+\frac{l}{E}t[1-F(t)]=$$

$$=\int_{X<t}[m_t(x)-x+\frac{l}{E}(m_t(x)-x)+\frac{l}{E}x]\,dF+\frac{l}{E}t[1-F(t)]=$$

$$=[1+\frac{l}{E}]\int_{x<t}[m_t(x)-x]\,dF+\frac{l}{E}[\int_0^t x\,dF+t[1-F(t)]]=$$

$$=[1+\frac{l}{E}]E+\frac{l}{E}\int_0^t[1-F(x)]\,dx=l+E+\frac{l}{E}\mu_t.$$

Prema tome, $\inf_\varphi K(\varphi,t)=\inf_E K(E,t)$.

Kako je $E=\int_{x<t}[m_t(x)-x]\,dF\le\int_{x<t}(t-x)\,dF=t-\int_0^t[1-F]\,dx$, to se $\inf_E K(E,t)$ postiže za $E=\sqrt{l\mu_t}$, ako je $\sqrt{l\mu_t}\le t-\mu_t$ i za $E=t-\mu_t$, ako je $\sqrt{l\mu_t}\ge t-\mu_t$ pa je $E^*=\min\{\sqrt{l\mu_t},t-\mu_t\}$.

/c/ Neka je, kao u primjeru 4. $\varphi(X)=x_1 I\{0\le X<x_1\}+t\,I\{x_1\le X\}$. Tada je

$$E=\int_{x<t}[m_t(x)-x]\,dF=tF(t)-F(x_1)(t-x_1)-\int_{x<t}x\,dF=$$

$$=t-\mu_t-F(x_1)(t-x_1)=\min\{\sqrt{l\mu_t},t-\mu_t\},\ \text{tj.}$$

$$F(x_1)(t-x_1)=t-\mu_t-\min\{\sqrt{l\mu_t},t-\mu_t\}=$$

$$= \begin{cases} t - \mu_t - \sqrt{l_1 \mu_t} & , \sqrt{l_1\mu_t} \le t - \mu_t \\ 0 & , t - \mu_t > \sqrt{l_1 \mu_t}, \text{ tj } x_1 = 0 \text{ ili } x_1 = t, \end{cases}$$

što je isto. Iz te jednačine se može odrediti x_1, na pr. za F neprekidno.

Ako je $\sup\limits_{0<x_1<t} F(x_1)(t-x_1) < t - \mu_t - \sqrt{l_1\mu_t}$ mogu se uzimati $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < t$, sve dok odgovarajuća jednačina ne bude imala rješenje.

/d/ Neka je $m_t(x) = \min\{x + c, t\}$, $c \ge 0$, konstanta, tj. provjera kasni fiksirano vrijeme. Biće

$$E[m_t(x) - x; x < t] = \int_0^{t-c} [1 - F(x)]dx - (t-c) + tF(t) - \int_{x<t} x\, dF =$$

$$= t - \mu_t + \mu_{c'} - c' = \min\{\sqrt{l_1\mu_t}, t - \mu_t\}, \quad c' = t - c,$$

odakle je $\mu_{c'} - c' = \min\{\sqrt{l_1\mu_t}, t - \mu_t\} - (t - \mu_t) =$

$$= \begin{cases} 0, \sqrt{l_1\mu_t} \ge t - \mu_t, \text{ tj } c' = 0 \text{ ili } c' = t, \text{ tj}, c = 0 \text{ ili } c = t. \\ \sqrt{l_1\mu_t} - t + \mu_t, \quad \sqrt{l_1\mu_t} \le t - \mu_t. \end{cases}$$

Kako je $-t \le \sqrt{l_1\mu_t} - t + \mu_t < 0$, a za $f(c') = \mu_{c'} - c'$ je $f(0) = 0$, $f(t) = \mu_t - t \le \mu_t - t + \sqrt{l_1\mu_t}$, to pošto je $f(c')$ neprekidna, postoji jedinstveno c koje zadovoljava datu jednačinu.

3. Daćemo nekoliko opštih napomena.

Često se razmatra minmak problem. Neka $F \in \mathcal{F}$ i za svaki $F \in \mathcal{F}$ definisana klasa $H_F^t \subset \mathcal{H}_F^t$. Neka je

$H^t = \bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}} H_F^t$, i neka za $F_t \in H^t$, $\mathcal{F}_{F_t} = \{F : F_t \in H_F^t\}$.

Tada je kriterijum za odredjivanje optimalnog $F_t^* \in H^t$

$$\inf_{F_t \in H^t} \sup_{F \in \mathcal{F}_{F_t}} E\,C(X, Y; F_t).$$

Kako je $E\,C(X, Y; F_t) = E\,E[C(X, Y; F_t)/X] = E\,K(X; F_t)$, $K(X; F_t) = E[C(X, Y; F_t)/X]$ to se osnovni problem može i opštije [illegible] za dati skup pravila inspekcije F_t odrediti optimalno F_t^* u smislu $K(F_t^*) = \inf\limits_{F_t} E\, K(X; F_t)$. Ovdje F_t ne mora imati značenje raspodjele, čime naš prvobitni problem dobija suviše u širini. Sa druge strane, zavisno od funkcije C, problem se može i suziti, na razne načine. Neka je, za dato F_t, funkcija $C(X, y; F_t)$ neprekidna po y, $X \leq y \leq t$, $X < t$. Tada za svako X $0 \leq X < t$, postoji $y(X) = \varphi(X)$ za koje je $K(X; F_t) = C(X, y(X); F_t) = E[C(X, y; F_t) | X]$ /teorema o srednjoj vrijednosti/. Prema tome, problem se svodi na odredjivanje funkcije φ, kao u primjeru 6.

U koliko je $C(X, y(X); F_t) = C(X; y(X), t)$ neprekidna po y uniformno po X, u smislu: $|y(X) - y'(X)| < \delta$ za sve $X < t \Rightarrow |C(X; y(X), t) - C(X; y'(X), t)| < \varepsilon$ za sve $X < t$ to se funkcija $y(X)$ može aproksimirati funkcijom oblika

$$y(X) = \sum_k y_{k+1} I\{y_k \leq X < y_{k+1}\},$$

kao u primjeru 4., tako da se problem svodi na relativno jednostavnu klasu pravila inspekcije. U daljem se najvećim dijelom i razmatra takva klasa pravila.

II 2. Inspekcije u izolovanim tačkama

1. Želimo da posebno obradimo slučaj inspekcije koja se vrši u izolovanim momentima na $[0, t]$, do otkrića otkaza, tj.

$$y = y(X) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} I\{y_k \leq X < y_{k+1}\} + t\, I\{X \geq y_n\}$$

gdje je $0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < t$.

Nazovimo niz $y_1, y_2, \ldots$ planom i označimo ga sa $[y]$. Ako niz ima n tačaka, možemo to podvući i pisati $[y]_n$. Tada je

$$C(X, y; F_t) = C(X, [y], t) = C(X, y_1, y_2, \ldots, y_n, t), \quad X \leq t.$$

/ $X > t$ interpretiramo kao $X = t$ /.

(7) $$E\, C(X,[y],t) = \int_0^t c(x,[y],t)\,dF(x) + c(t,[y],t)[1-F(t)].$$

1.1. U literaturi se najčešće javlja funkcija troškova

(8) $$c(X,[y],t) = \sum_{k=0}^{n} [b(k+1) + a(y_{k+1} - X)]\, I\{y_k \le X < y_{k+1}\} + b(n+1)\, I\{X \ge t\},$$

$a>0,\ b>0,\ y_{n+1}=t$, gdje svaka provjera "košta" b a vrijeme provedeno u kvaru do provjere a u jedinici vremena.

1.2. Predpostavimo da i neizvršene provjere imaju uticaja na troškove, na pr.

$$c(X,[y],t) = \sum_{k=0}^{n} [b(k+1) + a(y_{k+1}-X) + c(k,n)]\, I\{y_k \le X < y_{k+1}\} + b(n+1)\, I\{X \ge t\},$$

gdje je,recimo, $c(k,n) = c\cdot(n-k)$ ili $c(k,n) = c(q^0 + q^1 + \dots + q^{n-k-1}) =$ $= c\,\dfrac{1-q^{n-k}}{1-q}$, $0<q<1$, pa je $c\,q^j$ trošak od neizvršene provjere j -te po redu posle završetka.

1.3. Neka cijena izvršene provjere opada, na pr. k -ta po redu košta $b\,q^{k-1}$, $0<q<1$, a neizvršena $c\,q^{k-1}$, $c<b$. Neka

(9) $$c(X,[y],t) = b\,\frac{1-q^{k+1}}{1-q} + a(y_{k+1}-X) + c\,q^{k+1}\,\frac{1-q^{n-k}}{1-q},$$

$y_k \le X < y_{k+1} < t$.

$$c(X,[y],t) = b\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + a(t+d-X), \quad y_n \le X \le t,\ d \ge 0.$$

Za $n \to \infty$ je iz (9)

$$c(X,[y]_\infty,t) = b\,\frac{1-q^{k+1}}{1-q} + a(y_{k+1}-X) + c\,\frac{q^{k+1}}{1-q}, \quad y_k \le X < y_{k+1},$$

1.4. Slično sa 3. ,neka,je,

$$c(X,[y],t) = \begin{cases} c(y_1,\dots,y_{k+1}) + a(y_{k+1}-X), & y_k \le X < y_{k+1} < t \\ c(y_1,\dots,y_n,t) + a(t-X) + \dfrac{d}{F(t)-F(y_n)}, & y_n \le X \le t, \end{cases}$$

gdje je $d \geq 0$ i $F(x)$ f. rasp. za X, strogo rastuća. Za $n = \infty$ se može uzeti

$$c(x,[y],t) = c(y_1,\dots,y_{k+1}) + a(y_{k+1} - X), \quad y_k \leq X < y_{k+1}.$$

1.5. Direktno uopštenje za 1. je $c(X,[y],t) = c(X,y,k)$, $0 \leq X \leq y \leq t$, gdje je y momenat otkrivanja otkaza a k broj izvršenih provjera, $k \geq 1$.

Od interesa su nam funkcije $c(X,y,k)$ kod kojih

(10) $$c(X,y,k) \leq c(X,y,k+1), \quad 0 \leq X \leq y, \quad k \geq 1,$$

što bi značilo da veći broj provjera donosi veće gubitke. S druge strane brže otkrivanje otkaza smanjuje troškove, što se može izraziti kao

(11) $$c(X,y,k) \geq c(X',y,k), \quad X < X' < y, \quad ili$$

(12) $$0 < y' - X' \leq y - X \Rightarrow c(X,y,k) \geq c(X',y',k).$$

1.6. Neka trošak zavisi od svih izvršenih provjera, tj.

$$c(X,[y],t) = c(X,y_1,\dots,y_k,k), \quad X \leq t, \quad y_{k-1} \leq X < y_k.$$

Specijalni slučajevi

$$\begin{aligned} c(X,[y],t) &= c(y_1,\dots,y_k) + \varphi(X,y_k) \\ &= c(y_1,\dots,y_{k-1}) + \varphi(X,y_k,k) \\ &= c(y_1,\dots,y_{k-1},\varphi(X,y_k,k)) \\ &= c(X,y_k) + c(y_k,k) \\ &= c(X,y_k) + c(k) \\ &= c(y_k - X) + c(k). \end{aligned}$$

Funkciju $l \cdot k + \vartheta(y_k - X)$, gdje je ϑ neprekidna i monotono rastuća u beskonačnost, $\vartheta(0) = 0$, proučavao je Beichelt F. [7]-[10].

1.7. Neka

(13) $$c(X,[y],t) = c(X,y_1,\dots,y_k) + c(y_{k+1},\dots,t), \quad y_{k-1} \leq X < y_k$$

(14) $$= c(y_1,\dots,y_{k-1}) + c(X,y_k,y_{k+1},\dots,t), \quad y_{k-1} \leq X < y_k$$

U slučaju (13) trošak od neizvršenih provjera ne zavisi od izvršenih, a u drugom slučaju trošak od izvršenih prije kraja provjere ne zavisi od situacije kod zadnje provjere.

1.8. Jedno "prirodno" svojstvo funkcije $c(X,[y],t)$ je

(15) $c(X,y_1,\dots,y_k,y_{k+1},\dots,t) \geq c(X,y_{k+1},\dots,t)$, $y_k \leq X$

(16) $c(X,y_1,\dots,t) \geq c(X,t)$ ako za sve k, $X \geq y_k$,

što znači da nevršenje provjera smanjuje trošak, ako nije došlo do otkaza u medjuvremenu.

Ukoliko je $F(x) < 1$ za sve x, to je na beskonačnom intervalu nužan beskonačan plan $[y]$.
Na konačnom može biti i konačan i beskonačan. Ako nam je funkcija $c(X,[y],t)$ definisana samo za konačne planove, može se dodefinisati i za beskonačne, na primjer

(17) $c(X,[y]_\infty,t) = c(X,[y]_k,t)$, $y_{k-1} \leq X < y_k$

(18) $c(X,[y]_\infty,t) = \lim\limits_{n\to\infty} c(X,[y]_n,t)$ - ako postoji

Ako je $c(X,[y]_n,t) \leq c(X,[y]_m,t)$, $n \leq m$, $X < y_n$, to $\lim$ u (18) postoji.

Neka je $[y]_n$ usječeni na n provjera plan $[y]$.
Može se nametnuti uslov

(19) $c(X,[y]_n,t) \leq c(X,[y],t)$, $X < y_n$, $n=1,2,\dots$

$c(t,[y]_n,t) \leq c(t,[y],t)$, $n=0,1,2,\dots$

$n=0$ znači da se ne vrši ni jedna provjera.

Kao što se vidi, neki "prirodan" uslov takve vrste ne može se nametnuti na $c(X,[y]_n,t)$ i $c(X,[y],t)$ za $y_n \leq X < t$.

U primjeru 3. se vidi da je $c(X,[y]_n,t) \leq c(X,[y],t)$, $X < y_n$, i da je $\lim\limits_{n\to\infty} c(X,[y]_n,t) = c(X,[y],t)$.
Medjutim, $c(X,[y]_n,t) > c(X,[y],t) + \delta$ za $y_n \leq X < t$,

uniformno po n, ako je $d > \frac{c}{\alpha} \frac{q}{1-q}$, $0 < q < 1$.

2. Neka je $y \geq 0$, i plan $[y]_n$, takav da je $y < y_1$, i

(20) $$K(y,[y]_n,t) = E\,C(X,[y]_n,t)I\{y \leq X\} =$$
$$= \int_y^t c(x,[y]_n,t)\,dF(x) + c(t,[y]_n,t)[1-F(t)],\ 0 \leq n \leq \infty.$$

Neka je

(21) $$K_0(y,t) = K(y,[y]_0,t) = \int_y^t c(x,t)\,dF(x) + c(t,t)[1-F(t)],$$

(22) $$K_n(y,t) = \inf_{[y]_j,\,0 \leq j \leq n} K(y,[y]_j,t),\ n = 1,2,\dots$$

(23) $$\bar{K}(y,t) = \inf_{[y]_j,\,0 \leq j < \infty} K(y,[y]_j,t),$$

(24) $$K(y,t) = \inf_{[y]_j,\,0 \leq j \leq \infty} K(y,[y]_j,t),$$

tj. u (22) se uzimaju planovi najviše reda n, u (23) svi konačni planovi a u (24) i beskonačni planovi. Očigledno je

(25) $$K_0(y,t) \geq K_n(y,t) \geq K_{n+1}(y,t) \geq \bar{K}(y,t) \geq K(y,t) \quad i$$
$$K_n(y,t) \searrow \bar{K}(y,t),\ n \to \infty.$$

Ostaje pitanje da li je $\bar{K}(y,t) = K(y,t)$, tj. da li optimalni plan može da se aproksimira konačnim planom, ili je i sam konačan.

Predpostavimo da funkcija C zadovoljava uslove iz (19). Tada je

(26) $$K(y,[y]_n,t) = E\,C(X,[y]_n,t)[I\{y \leq X < y_n\} + I\{y_n \leq X < t\} + I\{X \geq t\}] \leq$$
$$\leq E\,C(X,[y],t)I\{y \leq X < y_n\} + E\,C(X,[y]_n,t)I\{y_n \leq X < t\} +$$
$$+ c(t,[y],t)[1-F(t)] = K(y,[y],t) + E[C(X,[y]_n,t) - C(X,[y],t)]I\{y_n \leq X < t\}$$

Ukoliko $y_n \to t$ i važi uslov da za svaki plan $[y]$ postoji konstanta M tako da za n dovoljno veliko

27) $$C(X,[y]_n,t) \le C(X,[y],t)+M \quad , \text{po } X, \ y_n \le X < t,$$

Zadnji sabirak u (26) će da teži nuli, pa je

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, k(y,[y]_n,t) \le k(y,[y],t).$$

U koliko $y_n \nearrow t' < t$, problem je nešto složeniji. Analogno sa (19) predpostavimo da je

19') $$C(X,[y]_n,t',t) \le C(X,[y],t) \quad , X < y_n \text{ ili } t' \le X \le t,$$

a analogno (27)

27') $$C(X,[y]_n,t',t) \le C(X,[y],t)+M \quad \text{po } X, y_n \le X < t', \text{ u } d.v.$$

Tada je na isti način kao gore

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \, k(y,[y]_n,t',t) \le k(y,[y],t).$$

Naravno, ako je

(28) $$C(X,[y],t) = \lim_{n\to\infty} C(X,[y]_n,t), X \le t \text{ uniformno po } X < t$$

za svaki plan $[y]$, biće $\lim_{n\to\infty} k(y,[y]_n,t) = k(y,[y],t)$.
Odatle slijedi

Teorema 1. Neka funkcija C zadovoljava uslove (19') i (27') za svaki beskonačni plan $[y]$, $y_n \nearrow t' \le t$ ili neka važi (28) . Tada

(29) $$k(y,t) = \bar{k}(y,t) = \lim_{i\to\infty} k_i(y,t).$$

U primjeru funkcije 1.3. su uslovi (19) i (27) ispunjeni, pa bez obzira na $C(X,[y]_n,t) > C(X,[y],t)+\delta$ važi (29). Medju tim, u 1.4. je $C(X,[y]_n,t) = C(X,[y],t)$, $X < y_n$ ali se pod izvjesnim uslovima može pokazati da (29) ne važi. Neka je u 1.4. $c(y_1,\dots,y_n) \le c < \infty$ za sve n . Tada

$$\int_{y_n}^{t} c(x,[y]_n,t)\,dF(x) = [F(t)-F(y_n)]\,c(y_1,\dots,y_n,t) + a\int_{y_n}^{t} (t-x)\,dF(x) + d,$$

$$\int_{y_n}^{t} c(x,[y],t)\,dF(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} [c(y_1,\dots,y_{k+1}) + a(y_{k+1}-x)]\,dF(x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [c(y_1,\dots,y_{k+1})[F(y_{k+1})-F(y_k)] + a\int_{y_k}^{y_{k+1}} (y_{k+1}-x)\,dF(x)] \le$$

$$\leq c\,[F(t)-F(y_n)] + \int_{y_n}^{t}(t-x)\,dF(x).$$

Ako definišemo $c(t,[y]_n,t) \gtrless c(t,[y],t)$,što ne zavisi od $c(x,[y]_n,t)$, $x<t$. , to za $d>c$ važi $k(y,[y],t)+\delta \leq$ $\leq k(y,[y]_n,t)$, gdje δ od n ne zavisi, pa je $k(y,t)<$ $<\bar{k}(y,t)$. Ovaj primjer, inače, nije tipičan.

Lema 1. Neka $c(t,t)=c(t,[y]_0,t)\leq c(t,[y]_j,t)$, $1\leq j\leq n$, tada

(30) $$\lim_{y\to t} k_n(y,t) = c(t,t)[1-F(t)].$$

Uopšte

(31) $$\lim_{y\to t} k_n(y,t) = \inf_{[y]_j,\,0\leq j\leq n} c(t,[y]_j,t)[1-F(t)]\,,\ n\leq\infty.$$

Dokaz: $c(t,t)[1-F(t)] \leq c(t,[y]_j,t)[1-F(t)]+\int_y^t c(x,[y]_j,t)\,dF$,

pa i $c(t,t)[1-F(t)]\leq k_n(y,t)\leq k_0(y,t)$.

Kako $\int_y^t c(x,t)\,dF(x)\to 0,\ y\to t$, to (30) važi.

$$\inf_{[y]_j,\,j\leq n} \overbrace{c(t,[y]_j,t)}^{[1-F(t)]} \leq k(y,[y]_m,t)\ ,\quad m\leq n$$

$$\inf_{[y]_j,\,j\leq n} \overbrace{c(t,[y]_j,t)}^{[1-F(t)]} \leq k_n(y,t)\leq \overbrace{c(t,[y]_m,t)}^{[1-F(t)]}+\int_y^t c(x,[y]_m,t)\,dF(x),$$

i za $y\to t$ $\overline{\lim_{y\to t}}\, k_n(y,t)\leq \overbrace{c(t,[y]_m,t)}^{[1-F(t)]}$ za sve $m\leq n$, pa je i

$$\overline{\lim_{y\to t}}\, k_n(y,t)\leq \inf_{[y]_j,\,0\leq j\leq n} \overbrace{c(t,[y]_j,t)}^{[1-F(t)]}.$$

3. Razmotrimo u daljem postojanje optimalnog plana. Predhodno pokažimo da za proizvoljnu funkciju $c(y_1,y_2,\dots)$ $y_i\in A_i$ važi

(32) $$\inf_{y_1,y_2,\dots} c(y_1,y_2,\dots) = \inf_{y_1}\ \inf_{y_2,y_3,\dots} c(y_1,y_2,\dots).$$

ili kraće napisano $c = \inf_{y_1} c(y_1)$.

Biće $c\leq c(y_1,y_2,\dots)$ i $c\leq \inf_{y_2,y_3,\dots} c(y_1,y_2,\dots)=c(y_1)$, $c\leq \inf_{y_1} c(y_1)$. Dalje je $c(y_1,y_2,\dots)\geq \inf_{y_2,y_3} c(y_1,y_2,y_3,\dots)=c(y_1)$

odakle je $c(y_1,y_2,\dots)\geq \inf_{y_1} c(y_1)$ i $c=\inf_{y_1,y_2} c(y_1,y_2,\dots)\geq$ $\geq \inf_{y_1} c(y_1)$.

Neka je

$$(33)\quad c_k(y,t)=\inf_{[y]_j,\,k\le j\le\infty} K(y,[y]_j,t), \quad \bar{c}_k(y,t)=\inf_{[y]_k} K(y,[y]_k,t).$$

Tada je

$$(34)\quad c_k(y,t)=\min\{\bar{c}_k(y,t),\, c_{k+1}(y,t)\},$$

što označava minimalne troškove sa bar k provjera. Neka je

$$(35)\quad N=\begin{cases}\min\{k:\bar{c}_k\le c_{k+1},\, k\ge 0\}, & \exists k \text{ da } \bar{c}_k\le c_{k+1}\\ \infty, & \forall k\ge 0,\ \bar{c}_k> c_{k+1}\end{cases}$$

Lema 2. $K(y,t)=\bar{c}_N(y,t)$, tj. ili je optimalni plan reda N, ili se medju planovima reda N nalazi proizvoljno dobra aproksimacija optimalnog plana, ako postoji.

Dokaz: Neka je N konačno. Tada je $c_0=\min\{\bar{c}_0, c_1\}=c_1<\bar{c}_0$, $=c_2<\bar{c}_1, \dots, c_{N-1}=c_N=\bar{c}_N\le c_{N+1}$ tj. $c_0=\bar{c}_N$, tj.

$$\inf_{[y]_j,\,0\le j\le\infty} K(y,[y]_j,t)=\inf_{[y]_N} K(y,[y]_N,t).$$

Kako je $\delta_k=\bar{c}_k-\bar{c}_N>0$, za $k<N$ i $\delta_k\ge 0$ za $k>N$ to za $\forall\varepsilon>0$ može da se odredi plan $[y]_N$, da je

$$(36)\quad K(y,[y]_k,t)\ge \bar{c}_N+\delta_k\ge K(y,[y]_N,t)+\delta_k-\varepsilon.$$

Za $N=\infty$ je

$$\inf_{[y]_\infty} K(y,[y]_\infty,t)<\inf_{[y]_k} K(y,[y]_k,t), \quad 0\le k<\infty.$$

Neka $\varepsilon_i\to 0$ i neka je plan $[y^i]_N$ takav da $c_N=\bar{c}_N\ge K(y,[y^i]_N,t)-\varepsilon_i\ge c_N-\varepsilon_i$. To znači da $\lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_N,t)=c_N$. Predpostavimo da $y_\ell^i\to y_\ell^*$, $\ell=1,2,\dots,N$, $y_\ell^*\le y_{\ell+1}^*$, $\ell=1,\dots,N-1$, što ne smanjuje opštost, jer se iz niza $(y_1^i, y_2^i,\dots, y_N^i)$ dijagonalnim postupkom može izdvojiti podniz sa tim osobinama.

Analogno tome, nazovimo uslovom (T) predpostavke

(37) Ako je $[y^i]_k$, $k\le\infty$, niz planova takav da $y_\ell^i\to y_\ell$, $y\le y_1\le\dots\le y_\ell\le\dots\le t$, to postoji

$$\lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_k,t)=K(y,[y]_k,t).$$

) Ako je $y < y_1 < \cdots < y_k < t$, $k < \infty$, ili ako je $k = \infty$ i $y_\ell \nearrow t_0 \le t$, $F(t_0) = 1$ tada

$$\dot{k}(y,[y]_k,t) \geq k(y,[y]_k,t).$$

b) Ako je za neko j, $j = \overline{0,k}$, $y_0 = y$, $y_{k+1} = t$, $k \le \infty$ $y_j = y_{j+1}$ tada

$$\dot{k}(y,y_1,\dots,y_j,y_{j+1},\dots,t) \geq \dot{k}(y,y_1,\dots,y_j,y_{j+2},\dots,t)$$

ko je za $k = \infty$, za neko j, $j \ge 0$, $y_j = y_{j+1} = \cdots = t_0$, $\le t$, $F(t_0)=1$, tada je ~~očigledno~~ $\dot{k}(y,y_1,\dots,y_j,y_{j+1},\dots,t) \geq$ $\dot{k}(y,y_1,\dots,y_j,t)$ $\cdot f$

<u>Teorema 2.</u> /a/ Neka za N definisano u (35) va- $N < \infty$, i neka važe uslovi (T) za $k < \infty$. Tada stoji optimalni plan $[y^*]_N$, za koji je $k(y,t) = k(y,[y^*]_N,t)$.

/b/ Neka je $F(x)$ neprekidna u tačkama za koje je $(t_0)=1$, i $\inf\limits_{y_k \le x \le t} c(x,y_1,\dots,y_k,t) = z_k \to \infty$, $k \to \infty$, i neka važe uslovi (T) $k \le \infty$. Tada takodje postoji opt.plan $[y^*]_N$, $N \le \infty$.

<u>kaz:</u> /a/ Izdvojimo, kao posle <u>Leme 2.</u>, za $N < \infty$ jedan z planova $[y^i]_N$, za koji $y_\ell^i \to y_\ell^*$, $\ell = \overline{1,N}$. Prema (38) eba dokazati da je $y < y_1^* < \cdots < y_N^* < t$ jer je tada $\bar{C}_N =$ $\lim\limits_{i\to\infty} k(y,[y]_N^i,t) = \dot{k}(y,[y^*]_N,t) \geq k(y,[y^*]_N,t) \geq \bar{C}_N$ tj. $(y,[y^*]_N,t) = \bar{C}_N$. Predpostavimo suprotno. Neka $[\bar{y}]_{N-1}$ dstavlja niz $[y]_N$ iz koga je uklonjen neki od susjednih nakih planova. Uzmimo bilo koji niz planova $[y]_{N-1}$, za ko- $y_\ell^j \to \bar{y}_\ell$, $j \to \infty$, odakle je $C_N = \dot{k}(y,[y^*]_N,t) \geq$ $\dot{k}(y,[\bar{y}]_{N-1},t) = \lim\limits_{j\to\infty} k(y,[y^j]_{N-1},t) \geq \inf\limits_{[y]_{N-1}} k(y,[y]_{N-1},t) = \bar{C}_{N-1}$ rotno definiciji N.

/b/ Kako je $c(t,[y],t) \geq \lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{y_k \le x \le t} c(x,[y],t) = \infty$, je za $F(t) < 1$, $N < \infty$, pa se svodi na /a/. Neka $F(t) = 1$. Tada je od interesa slučaj $N = \infty$. Tre- dokazati da za gornjim postupkom dobijeni niz $[y^*]_\infty$ važi $y_1^* < y_2^* < \cdots < t_0 \le t$, $y_\ell^* \to t_0$, $F(t_0) = 1$

Dokazaćemo prvo da je $F(t_0) = F(t) = 1$. Biće
$K(y,[y^i]_\infty,t) = \int_y^t c(x,[y^i]_\infty,t)dF(x) \geq \int_{y_\ell}^t c(x,[y^i]_\infty,t)dF(x) \geq$
$\geq z_\ell[F(t) - F(y_\ell^i)] = z_\ell[1-F(y_\ell^i)]$.

Za i d. veliko je $y_\ell^i \leq y_\ell^* + \varepsilon$ i $F(y_\ell^i) \leq F(y_\ell^* + \varepsilon)$,
tj. $\overline{\lim_{i\to\infty}} F(y_\ell^i) \leq F(y_\ell^* + \varepsilon)$ za svako ε , pa je i
$\overline{\lim_{i\to\infty}} F(y_\ell^i) \leq F(y_\ell^*+0) \leq F(t_0+0)$. Tada je i $c_\infty = \lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_\infty,t) \geq$
$\geq \underline{\lim_{i\to\infty}} z_\ell[1-F(y_\ell^i)] \geq z_\ell[1-F(t_0+0)]$, i $c_\infty \geq \lim_{\ell\to\infty} z_\ell[1-F(t_0+0)]$,
pa mora biti $1-F(t_0+0) = 0$, tj. $F(t_0) = F(t_0+0) = 1$.

Tada na osnovu (39) , slično sa /a/, slijedi da je $y < y_1^* < \cdots < y_k^* < \cdots < t_0$ pošto niz y_ℓ^* ne može biti konačan.

Kao što vidimo, uslovi teoreme su dosta jaki, ali zbog opštosti postavke problema i ne mogu imati neki mnogo jednostavniji oblik. Sem toga, u dobrom broju praktičnih situacija imaju smisla. Na kraju krajeva i samo postojanje optimalnog plana je više fikcija nego realnost, s obzirom na to da se u konkretnom računu uvijek dobija aproksimativna vrijednost, dovoljno dobra, čak i kad optimalni plan ne postoji.

4. Ispitajmo još funkcije $K_n(y,t)$, $K(y,t)$ po neprekidnosti za y , što će nam kasnije koristiti. Razmotrićemo samo slučaj funkcije $K(y,t)$ jer je prvi prostiji.

Lema 3.

(40) $$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} K(y+\varepsilon,t) \leq K(y,t), \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} K(y-\varepsilon,t) \leq K(y,t).$$

Dokaz: Neka je plan $[y]$ takav da je $y+\varepsilon < y_1$. Tada je

(41) $$K(y,[y],t) = E\,c(X,[y],t)[I\{y \leq X < y+\varepsilon\} + I\{y+\varepsilon \leq X\}] =$$
$$= E\,c(X,[y],t)I\{y \leq X < y+\varepsilon\} + K(y+\varepsilon,[y],t) \geq K(y+\varepsilon,[y],t) \geq K(y+\varepsilon,t),$$

odakle je $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} K(y+\varepsilon,t) \leq K(y,[y],t)$ za $y < y_1$,

pa i $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} K(y+\varepsilon,t) \leq K(y,t)$.

Neka je $y < y_1$. Ako se u (41) stavi $y-\varepsilon$ umjesto y, biće $k(y-\varepsilon,t) \le k(y-\varepsilon,[y],t) = E\,c(X,[y],t)I\{y-\varepsilon \le X < y\} + k(y,[y],t) < \infty$ za planove koji su nam od interesa. Tada je

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(y-\varepsilon,t) \le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, E\,c(X,[y],t)I\{y-\varepsilon \le X < y\} + k(y,[y],t) =$$

$$= k(y,[y],t), \quad i \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(y-\varepsilon,t) \le k(y,t).$$

Lema 4. /a/ Ako funkcija $c(x,[y],t)$ ispunjava uslov formulisan u $1.8.$ /str. 20/ tada $k(y-\varepsilon,t) \ge k(y,t)$ a time i $\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(y-\varepsilon,t) \ge k(y,t)$.

/b/ Ako važe uslovi (37) iz $(+)$, pod kojima se dokazuje Teorema 2., opet važi $\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(y-\varepsilon,t) \ge k(y,t)$.

Dokaz: /a/ Neka $y-\varepsilon < y_1$. Tada $\exists\, k$ da je $y_k \le y < y_{k+1}$, ili $y_k \le y$ za sve k, i

$$k(y-\varepsilon,[y],t) \ge E\,c(X,[y],t)I\{y \le X\} =$$

$$= E\,c(X,y_1,\dots,y_k,y_{k+1},\dots,t)I\{y \le X\} \ge E\,c(X,y_{k+1},\dots,t)I\{y \le X\} =$$

$$= k(y,y_{k+1},\dots,t) \ge k(y,t).$$

Kako je $k_0(y-\varepsilon,t) \ge k_0(y,t)$, to je i $k(y-\varepsilon,t) \ge k(y,t)$.

/b/ U opštem slučaju važi

$$(42) \qquad k(y,t) = \min\{\inf_{0\le k<\infty}\, \inf_{[y]_k} k(y,[y]_k,t),\ \inf_{[y]_\infty} k(y,[y]_\infty,t)\}.$$

Tada $k(y-\varepsilon,t) \ge \min\{\inf_{0\le k<\infty}\, \inf_{y-\varepsilon<y_1<\dots<y_k<t} k(y,[y]_k,t),$ $\inf_{y-\varepsilon<y_1<\dots<t} k(y,[y],t)\}$ i $\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(y-\varepsilon,t) \ge \lim_{\varepsilon\to 0} \min\{\quad\} =$ $= \min\{\lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{0\le k<\infty}[\;],\ \lim_{\varepsilon\to 0}[\;]\}$, pošto su članovi u min, monotono neopadajuće funkcije po ε, i $\lim$ postoji.

Neka $\varepsilon_i \to 0$, $\delta_i \to 0$, tako da za niz $[y^i]_k$ važi $\inf_{y-\varepsilon_i<y_1<\dots<y_k<t} k(y,[y]_k,t) \ge k(y,[y^i]_k,t) - \delta_i$ i $y^i_e \to y^*_e$, $i \to \infty$, $y \le y^*_1 \le y^*_i \le \dots \le y^*_k \le t$. Po predpostavci postoji jedinst-

~~s~~oveni $\lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_k,t)=\dot{K}(y,[y^*]_k,t)\geq \inf_{y<y_1<\cdots<y_k<t} K(y,[y]_k,t)$,

jer za niz $[y^j]_k$ kod koga je $y<y_l^j \to y_l^*$, važi da je
$\lim_{j\to\infty} K(y,[y^j]_k,t)\geq \inf_{[y]_k,\, y<y_1} K(y,[y]_k,t)$. Slična relacija se pokazuje i za beskonačni plan, pa je

$$\min\{\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{0\leq k<\infty}[\ ],\ \lim_{\varepsilon\to 0}[\ ]\}\geq \min\{\inf_{0\leq k<\infty}\dot{K}(y,[y^*]_k,t),$$

$$K(y,[\bar{y}^*],t)\}\geq \min\{\inf_{0\leq k<\infty}\inf_{[y]_k,\, y<y_1} K(y,[y]_k,t),\inf_{[y]_\infty,\, y<y_1}K(y,[y]_\infty,t\}=$$

$$=K(y,t)\ ,\quad \text{tj. } \lim_{\varepsilon\to 0} K(y-\varepsilon,t)\geq K(y,t).$$

Lema 5. Ako $C(X,[y],t)\leq M$ za $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ i $y\leq \leq X<y+\varepsilon_0<y_1$ za sve $[y]$, i F neprekidna u y, tada

$$K(y,t)\leq \lim_{\varepsilon\to 0} K(y+\varepsilon,t). \tag{43}$$

Dokaz: $K(y,t)\leq K(y,[y],t)=K(y+\varepsilon,[y],t)+E\,C(X,[y],t)\cdot$
$\cdot I\{y\leq X<y+\varepsilon\}\leq K(y+\varepsilon,[y],t)+M[F(y+\varepsilon)-F(y)]$ i

$K(y,t)\leq K(y+\varepsilon,t)+M[F(y+\varepsilon)-F(y)]$, tj

$$K(y,t)\leq \lim_{\varepsilon\to 0} K(y+\varepsilon,t).$$

III 3. Specijalne funkcije troškova

1. Razmotrimo neke posebne funkcije troškova. Neka je data funkcija

$$C(X,Y,i,j)\geq 0\ ,\ 0\leq X\leq Y,\quad 1\leq i\leq j. \tag{44}$$

Definišimo

$$C(X,[y]_n,t)=C(X,y_{i+1},i+1,n+1)\,,\ y_i\leq X<y_{i+1},\ i+1\leq n+1, \tag{45}$$

što znači da se uzimaju u obzir zadnji momenat provjere, broj izvršenih i predvidjenih provjera. Neka je

(46) $$C(X,[y]_n,t) = c(t,t,n+1,n+1) \quad , X \geq t.$$

Primjer za takve fuhkcije dat je u 2.1.2.

Sada je

(47) $$K(y,[y]_n,t) = \sum_{k=0}^{n} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+1,n+1)dF(x) + c(t,t,n+1,n+1)(1-F(t)),$$

$$y = y_0 < y_1 < \cdots < y_n < y_{n+1} = t.$$

Uvedimo funkcije koje će nam poslužiti prilikom nalaženja optimalnog rješenja

(48) $$K_{i,n}(y,[y]_n,t) = \sum_{k=0}^{n} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i,n+i)dF(x) + c(t,t,n+i,n+i)[1-F(t)] \quad , i \geq 1, \ n \geq 0.$$

Tada je

(49) $$K_{i,0}(y,[y]_0,t) = \int_y^t c(x,t,i,i)dF(x) + c(t,t,i,i)(1-F(t)).$$

Neka je

(50) $$K_{i,n}(y,t) = \inf_{[y]_n} K_{i,n}(y,[y]_n,t),$$

(51) $$K_i^j(y,t) = \min_{0 \leq n \leq j} K_{i,n}(y,t).$$

Tada je

(52) $$K_i^{j+1}(y,t) = \min_{0 \leq l \leq j+1} K_{i,l}(y,t) = \min\{K_{i,j+1}(y,t), K_i^j(y,t)\}$$

Medjutim, za $K_{i,j+1}$ ćemo naći rekurentnu vezu. Biće

$$K_{i,j+1}(y,[y]_{j+1},t) = \int_{y_0}^{y_1} c(x,y_1,i,j+i+1)dF + \sum_{k=1}^{j+1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i,j+1+i)dF(x) + c(t,t,j+i+1,j+i+1)[1-F(t)] =$$

$$= \varphi(y,y_1,i,j) + K_{i+1,j}(y_1,y_2,\ldots,y_{j+1},t)$$ odakle je

(53) $$K_{i,j+1}(y,t) = \inf_{y<y_1<t} [\varphi(y,y_1,i,j) + K_{i+1,j}(y_1,t)].$$

Naš cilj je da odredimo $K_1^j(y,t)$, $j \geq 0$. Na osnovu

(52): prvo treba odrediti $k_{1,0}(y,t) = k_1^0(y,t)$. Predpostavimo da smo odredili $k_1^{j-1}(y,t)$. Treba odrediti još $k_{1,j}(y,t)$. On se nalazi iz (53) pomoću $k_{2,j-1}(y,t)$ i tako redom, preko niza $k_{j+1,0}(y,t) \to k_{j,1}(y,t) \to \cdots \to k_{2,j-1}(y,t) \to$ $\to k_{1,j}(y,t)$.

Postoji i drugi, obrnuti, metod za nalaženje funkcija k_1^j . Neka je sada

$$\bar{K}_{i,n}(y,[y]_n,t) = \sum_{k=0}^{n} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+1,n+i)\,dF(x) + c(t,t,n+1,n+i)(1-F(t)) =$$

$$= \sum_{0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+1,n-1+i+1)\,dF + c(y_n,y_n,n,n-1+i+1)[1-F(y_n)] +$$

$$+ \int_{y_n}^{y_{n+1}} c(x,y_{n+1},n+1,n+i)\,dF(x) + c(t,t,n+1,n+i)[1-F(t)] -$$

$$- c(y_n,y_n,n,n+i)[1-F(y_n)] = \bar{K}_{i+1,n-1}(y,y_1,\ldots,y_{n-1},y_n) + \Psi(y_n,t,i,n),$$

odakle je

$$(54)\qquad \bar{K}_{i,n}(y,t) = \inf_{[y]_n} \bar{K}_{i,n}(y,[y]_n,t) =$$

$$= \inf_{y<y_n<t} [\bar{K}_{i+1,n-1}(y,y_n) + \Psi(y_n,t,i,n)],\quad i$$

$$k_1^{j+1}(y,t) = \min_{0\le n\le j+1} \bar{K}_{1,n}(y,t) = \min\{\bar{K}_{1,j+1}(y,t),\ k_1^j(y,t)\}$$

što se odredjuje slično predhodnom.

Razmotrimo pitanja pokrenuta u <u>Teoremama 2.1.</u> i <u>2.2.</u> Kao što se vidi iz (45) , $c(x,[y]_n,t) = c(x,t,n+1,n+1)$, $y_n \le x \le t$, pa je prirodno definisati, za beskonačni plan

$$(55)\qquad c(x,[y],t) = \lim_{n\to\infty} c(x,t,n,n)\ ,\ y_n \to t',\ t' \le x \le t.$$

Ako je $x < y_n$, prirodno je definisati

$$(55')\qquad c(x,[y],t) = \lim_{i\to\infty} c(x,y,i,n) = c(x,y,i,\infty),\ x < y \le y_n,\ i \le n,$$

te se uslovi (19) , (19') svode na

$$(56)\qquad c(x,t,n,n) \le \lim_{n\to\infty} c(x,t,n,n),$$

$$(56')\qquad c(x,y,i,n) \le c(x,y,i,\infty)\ ,\ i<n,\ n \ge n_0\ \text{d.o.}$$

Uslovi (27) i (27') svode se na to da za svako $t' \le t$
z dovoljno blizu t' postoji konstanta M i n_0 da

(57) $c(x,t',n,n) \le c(x,t',n,n+1) \le c(x,y,n,\infty)+M$ za $z \le x \le y \le t'$, $n \ge n_0$.

Prema tome, ako važe uslovi (56), (56') i (57), po teoremi 2.1. je $\lim k_i(y,t) = k(y,t) = F(y,t)$.

Razmotrimo i pitanje optimalnog plana.

Ako su sabirci $\int_{y_j}^{y_{j+1}} c(x,y_{j+1},j+1,n+1)\,dF(x)$ neprekidni po y_j i y_{j+1}, to će biti ispunjeni uslovi (T)(37), i (38) za $k<\infty$. To će se ostvariti ako je recimo $c(x,y,k,n)$ ograničena po $x \le y$ i neprekidna po y; $F(x)$ takodje neprekidna.

Ako su sabirci $\int_{y_j}^{y_{j+1}} c(x,y_{j+1},j+1,\infty)\,dF(x)$ neprekidni po y_j, y_{j+1}, tada je uslov (T)(37) ispunjen za $k=\infty$. Pokažimo da je tada i ispunjen i uslov (T)(38). Neka je $[y^i]_\infty$ niz planova da $y_k^i \to y_k$, $i \to \infty$, $y_k \to t_0$, $F(t_0)=1$.

Tada

$$\lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_\infty,t) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{y_k^i}^{y_{k+1}^i} c(x,y_{k+1}^i,k+1,\infty)\,dF(x) \ge$$

$$\ge \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \quad = \sum_{k=1}^{\ell} \lim_{i\to\infty} \int_{y_k^i}^{y_{k+1}^i} \quad = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+1,\infty)\,dF(x), \ \ell \ge 1$$

pa je i
$$K(y,[y]_\infty,t) = \lim_{i\to\infty} K(y,[y^i]_\infty,t) \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+1,\infty)\,dF(x) = K(y,[y]_\infty,t).$$

Lako se vidi da je uslov (T)(39) ispunjen ako je

$$c(x,y,i,n) \le c(x,y,i+1,n+1), \quad x \le y \le t, \ i$$

$$c(x,y,i,\infty) \le c(x,y,i+1,\infty),$$

što slijedi iz prvog, kad $n \to \infty$.

Na osnovu učinjenih predpostavki važe uslovi Teoreme 2.2. /a/.

Pošto je $c(x,[y],t) = c(x,y_i,i,n),\ y_k \le x < y_i,\ k < i \le n \le \infty$ i $c(t,[y],t) = c(t,t,n,n)$, to je $\inf\limits_{y_k \le x \le t} c(x,[y],t) =$

$$= \min\{\inf_{k<i\le n}\ \inf_{y_{i-1}\le x<y_i} c(x,y_i,i,n),\ c(t,t,n,n)\} = z_k .$$

Tada $z_k \nearrow \infty$, $k \to \infty$, ako je na primjer

$$(*)\quad c(x,y,i,n) \le c(x,y,i+1,n) \quad i \quad \inf_{y_k \le x \le y \le t} c(x,y,k,n) \to \infty,\ k \to \infty$$

Prema tome ako je ispunjeno $(*)$ i $F(x)$ neprekidna, važe uslovi Teoreme 2.2. /b/.

U koliko postoji, optimalni plan se nalazi pomoću funkcija $k_{i,j+1}(y,t)$. Ako predpostavimo da je $c(x,y,i,j+1)$ rastuća po i, biće zadovoljeni uslovi Leme 2.4./a/. Ako je $F(x)$ neprekidna i ako je $c(x,y_1,i,j+i+1)$ ograničena za $x \le y_1 \le t$, to $E\,c(x,y_1,i,j+i+1)\,I\{y \le x < y+\varepsilon\} \to 0,\ \varepsilon \to 0$, uniformno po y_1, pa će važiti tvrdjenje Leme 2.5. Kako Lema 2.3. važi uopšte, pod nabrojenim uslovima će sve $k_{i,j+1}$ biti neprekidne po y. /Dokazivanje za slučaj $k_{i,j+1}$ ide istim putem kao za K, a čak je i prostije./

Neka je $K_i^{j+1}(y,t) = K_i^{j}(y,t) = \dots = K_i^{\ell}(y,t) = K_{i,\ell}(y,t) > K_i^{\ell-1}(y,t)$.
Tada plan ima ℓ provjera i nalazi se iz $K_{i,\ell}(y,t) =$

$$= \varphi(y,y_1,i,\ell-1) + \varphi(y_1,y_2,i+1,\ell-2) + \dots + \varphi(y_{\ell-1},y_\ell,i+\ell-1,0) + k_{\ell+1,0}(y_\ell,t).$$

2. Ako predpostavimo da je

$$(58)\qquad c(x,y,i,n) = c(x,y,i) \qquad \text{za svako } n$$

stvar se uprošćava, jer je

$$K_i^{j+1}(y,t) = \min_{0\le \ell \le j+1} k_{i,\ell}(y,t) = \min\{k_{i,0}(y,t),\ \min_{1\le \ell\le j+1} k_{i,\ell}(y,t)\} =$$

$$= \min\{k_{i,0}(y,t),\ \inf_{y<y_1<t}[\varphi(y,y_1,i) + \min_{1\le \ell\le j+1} k_{i+1,\ell-1}(y_1,t)]\} =$$

$$(59) = \min\{k_{i,0}(y,t), \inf_{y<y_1<t}[\varphi(y,y_1,i)+k^{j}_{i+1}(y_1,t)]\},$$

tako da se k_i^{j+1} računaju direktno preko $k^{j}_{i+1}, k^{j-1}_{i+2}, \dots,$ $k^{0}_{i+j+1} = k_{i+j+1,0}(y,t)$.

Ako se definiše

$$(60) \qquad k_i(y,t) = \inf_{0\le j\le\infty} k_{i,j}(y,t)$$

to je na sličan način

$$(61) \qquad k_i(y,t) = \min\{k_{i,0}(y,t), \inf_{y<y_1<t}[\varphi(y,y_1,i)+k_{i+1}(y_1,t)]\},$$

pa se problem računanja svodi na zadavanje početnih uslov...

Kao i u Lemi 2.1. iz nejednakosti $c(t,t,i)(1-F(t)) \le$ $k_i(y,t) \le c(t,t,i)(1-F(t))+\int_y^t c(x,t,i)\,dF(x)$ slijedi

$$(62) \qquad \lim_{y\to t} k_i(y,t) = c(t,t,i)(1-F(t))$$

a ako je F neprekidna u y i

$$(63) \qquad \lim_{t\to y} k_i(y,t) = [1-F(y)] \lim_{t\to y} c(t,t,i).$$

Analognim razmatranjem, u vezi postojanja optimalnog plana, u ovoj situaciji se uslovi uprošćavaju i vidi se da je dovoljno da važi

$$c(x,y,i) \le c(x,y,i+1),$$

$$\inf_{z\le x\le y\le t} c(x,y,i) \to \infty \quad , i\to\infty$$

$F(x)$ neprekidna po, x, $\int_y^z c(x,z,i)\,dF(x)$ neprekidan po y i z.

Ako je još za svako $t'\le t$ i z dovoljno blizu t'

$$c(x,t',i) \le c(x,y,i)+M \quad , \text{za} \quad z\le x\le y\le t' \;, i\ge i_0,$$

to i $k_i(y,t) \to k(y,t)$, $i\to\infty$.

3. Vrlo jednostavan oblik se dobija ako je

$$(64) \qquad c(x,y,i) = c\cdot i + c(x,y).$$

Tada je

$$K(y,[y]_{n+1},t) = \int_y^{y_1}[c(x,y_1)+c]dF(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})+$$

$$+ c(k+1)]\,dF(x) + [c(t,t)+c(n+1)][1-F(t)] =$$

$$= \int_y^{y_1}[c(x,y_1)+c]dF(x) + \sum_0^n \int_{y_{k+1}}^{y_{k+2}}[c(x,y_{k+2})+c(k+1)]dF(x)+$$

$$+[c(t,t)+cn][1-F(t)] + c[1-F(y_1)] =$$

$$= \int_y^{y_1}c(x,y_1)dF(x) + c[1-F(y)] + K(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1},t).$$

Ista formula važi i za beskonačni plan, pa se za

$$(65)\qquad K^i(y,t) = \inf_{0\le u\le i} K(y,[y]_u,t)$$

dobija

$$(66)\qquad K^{i+1}(y,t) = \min\{k_0(y,t), \inf_{y<y_1<t}[\Psi(y,y_1)+K^i(y_1,t)]\},$$

i

$$(67)\qquad K(y,t) = \min\{k_0(y,t), \inf_{y<y_1<t}[\Psi(y,y_1)+K(y_1,t)]\}.$$

Analogno se dobija da je

$$K(y,[y]_u,t) = k(y,[y]_{u-1},y_u) + c[1-F(y_u)] + \int_{y_u}^t c(x,t)dF(x)+$$

$$+c(t,t)[1-F(t)] - c(y_u,y_u)[1-F(y_u)] = k(y,[y]_{u-1}) + h(y_u,t),$$

odakle je

$$(68)\qquad K^{i+1}(y,t) = \min\{k_0(y,t), \inf_{y<y_i<t}[K^i(y,y_i)+h(y_i,t)]\}.$$

Za $i\to\infty$ se odatle dobija

$$(69)\qquad K(y,t) = \min\{k_0(y,t), \inf_{y<u<t}[K(y,u)+h(u,t)]\}.$$

Želimo da ispitamo kada na $[0,t)$ nije potrebno vršiti ni jednu provjeru. Koristeći (47), vidimo da je $K(y,[y]_u,t)\ge k_0(y,t)$ ekvivalentno sa

$$K(y,[y]_n,t)-K_0(y,t)=\sum_{k=0}^{n}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})+c(k+1)-c(x,t)-c]\,dF(x)+$$

$$+[c(t,t)+(n+1)c-c(t,t)-c][1-F(t)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})-c(x,t)]\,dF(x)+c\sum_{k=0}^{n}k[F(y_{k+1})-F(y_k)]+$$

$$+nc[1-F(t)]=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})-c(x,t)]\,dF(x)+c\sum_{k=0}^{n-1}[1-F(y_{k+1})]\geq 0,$$

$$(70)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,t)-c(x,y_{k+1})]\,dF\leq c\sum_{k=0}^{n-1}[1-F(y_{k+1})].$$

Za $n=1$ se odatle dobija

$$(71)\qquad \int_{y}^{y_1}[c(x,t)-c(x,y_1)]\,dF(x)\leq c[1-F(y_1)],\ y\leq y_1\leq t.$$

Interesuje nas uslov koji sadrži ograničen broj promjenljivih, na pr. y_1 . To bi značilo da je uslov (71) i dovoljan, što će zavisiti od funkcije $c(x,y)$.

Lema 1. Neka je $c(x,t)\geq c(x,v)$, $v\leq t$.
Tada je uslov (71) potreban i dovoljan da za svako n važi

$$K(y,[y]_n,t)\geq K_0(y,t).$$

Dokaz: Neka važi (71) . Tada $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,t)-c(x,y_{k+1})]\,dF\leq$ $\leq\sum_{0}^{n-1}\int_{y}^{y_{k+1}}[c(x,t)-c(x,y_{k+1})]\,dF\leq c\sum_{0}^{n-1}[1-F(y_{k+1})]$, za sve planove $[y]_n$; pošto je uslov i potreban, Lema je dokazana.

Uslov $c(x,t)\geq c(x,v)$, $v\leq t$, se može zamijeniti slabijim

$$(72)\qquad 0\leq\int_{y}^{u}[c(x,t)-c(x,v)]\,dF,\ y\leq u\leq v\leq t,$$

jer je tada opet $\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,t)-c(x,y_{k+1})]\,dF\leq\int_{y}^{y_{k+1}}[c(x,t)-c(x,y_{k+1})]\,dF.$

Prema Lemi 1. slijedi da je plan $[y]_0$ bolji od bilo kog drugog konačnog plana. Ako se razmatraju beskonačni planovi, mora biti $1-F(t)=0$, pa (70) važi i za $n=\infty$,

) znači da Lema 1. važi i za beskonačne planove. Prema tome,
) je $c(x,t)\geq c(x,v)$, $v\leq t$ /ili (72) /, to je (71)
trebno i dovoljno da se na $[0,t)$ ne vrše nikakve provjere.

U skladu sa Lemom 1. kao početni uslov za $k(y,t)$ žemo uzeti

$$k(y,t)=k_0(y,t)\ ,\ y_0\leq y\leq t,$$

$$y_0=\inf\{y: y\leq t\ ,\ k(y,t)=k_0(y,t)\}=$$

$$=\inf\{y:\int_y^v[c(x,t)-c(x,u)]dF\leq c[1-F(v)],\ \text{za sve}\ y\leq v\leq t\},$$

i

$$k(y,t)=k_0(y,t)\ ,\ y\leq t\leq t_1$$

$$t_1=\sup\{t:\int_y^v[c(x,t)-c(x,v)]dF\leq c[1-F(v)],\ y\leq v\leq t\}.$$

U ovom slučaju je za postojanje optimalnog plana doboljna neprekidnost $F(x)$ po x i $\int_y^z c(x,z)\,dF(x)$ po z i y.

Ako se predpostavi da je F apsolutno neprekidna, o se diferenciranjem izraza $k(y,[y]_n,t)$ dobija sistem jednačina

(6) $$c(y_{k+1},y_{k+2},k+2,n+1)=c(y_{k+1},y_{k+1},k+1,n+1)+$$
$$\frac{1}{f(y_{k+1})}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}c(x,y_{k+1},k+1,n+1)\,dF(x)\ ,\ k=\overline{0,n-1}$$

li za $c(x,y,i,n)=c(x,y)+ci$

(7) $$c(y_{k+1},y_{k+2})=c(y_{k+1},y_{k+1})+\frac{1}{f(y_{k+1})}\int_{y_k}^{y_{k+1}}\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}c(x,y_{k+1})\,dF(x)-c,$$
$$k=\overline{0,n-1}\ ,\ y_0=y,\ y_{n+1}=t.$$

Da bi se odatle dobilo optimalno rješenje, potrebno je naći ili optimalno n, ili opt. y_1, na pr. iz jednačine (67).

II 4. Beskonačni interval

1. Da bi imalo smisla posmatrati beskonačni interval, neka je $F(x)<1$, $x<\infty$. Tada se neke stvari uprošćavaju pošto se koriste jedino beskonačni planovi, ali se postavlja problem konačnosti očekivanih gubitaka.

Sada je $c(x,[y])=c(x,y_1,y_2,\dots)$, gdje je $0<y_1<y_2<\cdots,\ y_i\nearrow\infty$. Neka je za $y_1>y$

$$K(y)=\inf_{[y]}K(y,[y])=\inf_{[y]}E\,c(X,[y])I\{X\geq y\}= \tag{78}$$

$$=\inf_{[y]}\int_y^\infty c(x,[y])\,dF(x).$$

Postavljamo dva pitanja:

1/ Da li za datu funkciju gubitaka $c(x,[y])$ i za svako F postoji $[y]$ da je $E_F\,c(x,[y])<\infty$.

2/ Da li za dato $c(x,[y])$ postoji F da je za neki $[y]$, $E_F\,c(X,[y])<\infty$, tj. da li svaka funkcija c ima smisla kao funkcija gubitaka, bar nekad.

Odgovor na prvo pitanje je negativan u opštem slučaju. Ako je $c(X,[y])$ ograničeno, to je potvrdan odgovor na 1/ trivijalan. Manje trivijalan slučaj daje

<u>Lema 1.</u> Neka je $c(x,[y])\leq f(y_{k+1}-y_k)+ck$, $y_k\leq X<y_{k+1}$ i $EX<\infty$. Tada postoji $[y]$ takvo da je $E\,c(X,[y])<\infty$.

<u>Dokaz:</u> Neka je $y_{k+1}-y_k=T$. Tada je

$$E\,c(X,[y])=\sum_0^\infty E\,c(X,[y])I\{y_k\leq X<y_{k+1}\}\leq$$

$$\leq\sum_0^\infty f(y_{k+1}-y_k)[F(y_{k+1})-F(y_k)]+\frac{c}{T}\sum_0^\infty\int_{y_k}^{y_{k+1}}Tk\,dF(x)\leq$$

$$\leq f(T)+\frac{c}{T}\sum_0^\infty\int_{y_k}^{y_{k+1}}x\,dF(x)=f(T)+\frac{c}{T}EX.$$

Neka je F neprekidna i strogo rastuća funkcija raspodjele. Neka je $c(x,[y]) = \frac{1}{F(x)}$. Tada je $Ec(X,[y]) = \int_0^\infty \frac{dF}{F} = \infty$. /Kasnije ćemo dati i manje trivijalan primjer./Dokažimo i jači rezultat. Neka je F proizvoljna f.r. sa konačno mnogo skokova. Tada postoji tačka rasta x_0 sa osobinom $F(x)-F(x_0) > 0$, $x > x_0$, Tada je za

$$c(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le x_0 \\ \dfrac{1}{F(x)-F(x_0)} & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad , Ec(x) = \infty .$$

Može se konstruisati niz a_i, $a_0 = \infty$, $a_i > x_0$, sa osobinom $F(a_{i+1}) - F(x_0) \le \frac{1}{2}[F(a_i) - F(x_0)]$. Tada je

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dF}{F-F_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_{k+1}}^{a_k} \frac{dF}{F-F_0} \geq \sum_0^\infty \frac{F(a_k)-F(a_{k+1})}{F(a_k)-F(x_0)} =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{F(a_k)-F(x_0)-[F(a_{k+1})-F(x_0)]}{F(a_k)-F(x_0)} = \sum_0^\infty \left[1 - \frac{F(a_{k+1})-F(x_0)}{F(a_k)-F(x_0)}\right] \geq$$

$$\geq \sum_0^\infty \left[1-\tfrac{1}{2}\right] = \infty .$$

Ako F ima beskonačno mnogo tačaka prekida, to neka je za $P(X=x_k) = P_k$, $c(x_k) = \frac{1}{P_k}$, pa je

$$E\,c(X) \geq \sum_k c(x_k)\,P(X=x_k) = \infty . \Big|$$

Odgovor na pitanje 2/ je potvrdan. Neka je $c(x,[y]) < \infty$ za sve $x \geq 0$. Neka je $A = \{x : c(x,[y]) > 1\}$. Ako je A konačan skup, to je, jasno, $E\,c(x,[y]) < \infty$. Ako je A beskonačan skup, neka je izabran niz $a_i \in A$, $i=1,2,\ldots$ Tada red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c(a_i)} \frac{1}{2^i} < \sum_1^\infty \frac{1}{2^i} = 1$ konvergira, pa se može definisati X da je $P(X=a_i) = \frac{1}{c(a_i)2^i}$ i dodefinisati van A. Tada je

$$Ec(X,[y]) \le 1 + \sum_1^\infty c(a_i,[y])\,P(a_i) = 2 < \infty$$

za dati plan $[y]$.

Prodiskutujmo posebno funkciju $C(x,[y]) = c(k+1)+ c(x, y_{k+1}), y_k \le x < y_{k+1}$. Uvjek se može naći plan $[y]$, da je $E\,C(X,[y]) = \infty$.

Dokaz: $E\,C(X,[y]) = \sum_0^\infty \int_{y_k}^{y_{k+1}} [c(k+1)+c(x,y_{k+1})]dF \ge$ $\ge \sum_0^\infty \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(k+1)dF = c\sum_{k=0}^\infty [1-F(y_k)]$. Uvjek se može izabrati $[y]$ da $\sum_0^\infty [1-F(y_k)]$ divergira. Neka je $k_1 = \min\{k : F(+0) < 1-\frac{1}{k+1}, k \ge 1\}$. Izaberimo proizvoljan niz $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{k_1}$, da je $F(y_{k_1}) < 1 + \frac{1}{k_1+1}$, što je moguće. Izaberimo y_{k_1+1} tako da je $y_{k_1} < y_{k_1+1}$ i $F(y_{k_1+1}) < 1 - \frac{1}{k_1+1+1}$. Tu postoje dva slučaja. Ili se može naći y_{k_1+1} da je $1-\frac{1}{k_1+1} \le F(y_{k_1+1}) < 1 - \frac{1}{k_1+1+1}$, ili je $F(y_{k_1+1}) \le 1-\frac{1}{k_1+1} < 1-\frac{1}{k_1+1+1}$. Bez obzira na takvu situaciju, niz $y_1, y_2, \dots$ se može birati tako da za svako $k \ge 0$ postoji $m > k$ da je $1-\frac{1}{k+1} \le F(y_m) < 1-\frac{1}{m+1}$, što znači da $y_k \to \infty, k \to \infty$. /Ako je F neprekidna funkcija, dovoljno je staviti $F(y_k) = 1-\frac{1}{k+1}$, za $F(x) > 0$ ./ Tada za $k \ge k_1$ važi $1-F(y_k) \ge \frac{1}{k+1}$, pa red $\sum_0^\infty [1-F(y_k)] = \infty$.) i $c(x,y) = a(y-x)$.

Prema Lemi 1., ako $EX < \infty$, to postoji plan za koji je $E\,C(X,[y]) < \infty$. Medjutim $EX < \infty$ nije i potreban uslov. Na pr. za $F(x) = 1-\frac{1}{x}, x \ge 1$, je $EX = \infty$ dok plan $y_k = (k+1)^2, k \ge 0$ daje $E\,C(X,[y]) < \infty$.

Lema 2. Neka je $EX = \infty$. Neka je $C(x,[y]) = c(k+1) + c(x, y_{k+1}), y_k \le x < y_{k+1}$. Tada je uslov

$\sup_k (y_{k+1} - y_k) = \infty$ potreban za važenje $E\,c(X,[y]) < \infty$.

Dokaz: Neka je $y_{k+1} - y_k \le T$, tj. $y_{k+1} \le x_0 + (k+1)T$.
Tada

$$\sum_0^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (k+1)\,dF(x) = \frac{1}{T} \sum_0^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (k+1)T\,dF(x) \ge$$
$$\ge \frac{1}{T} \sum_0^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (x - x_0)\,dF(x) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{\infty} (x - x_0)\,dF(x) = \infty.$$

Postupkom sličnim ranijem se može odrediti niz y_k da red $\sum_0^{\infty} [1-F(y_k)]$ konvergira. To još ne znači da se takav niz može odrediti i da $E\,c(X,[y]) < \infty$. Pokazaćemo da postoji raspodjela F tako da za svaki $[y]$, $E\,c(X,[y]) = \infty$.

Dokaz: Neka je $c(x,y,i) = a(y-x) + i\,b$. Tada je za $F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \ge 1$, $E\,c(x,[y]) = b \sum_0^{\infty} [1-F(y_k)] +$

$$+ a \sum_0^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (y_{k+1} - x)\,dF = b \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y_k}} + a \sum_1^{\infty} \frac{(\sqrt{y_{k+1}} - \sqrt{y_k})^2}{\sqrt{y_k}}.$$

Ako je niz y_k takav da red $\sum \frac{1}{\sqrt{y_k}}$ divergira, to je $E\,c(X,[y]) = \infty$. Neka zato $\sum \frac{1}{\sqrt{y_k}}$ konvergira. Dokazaćemo da tada red $\sum \frac{(\sqrt{y_{k+1}} - \sqrt{y_k})^2}{\sqrt{y_k}}$ divergira. Neka je $\sqrt{y_k} = a_k$
$1 < a_1 < a_2 < \cdots$.

Redovi $\sum \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{a_k}$ i $\sum \left[\frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{a_k} + \frac{1}{a_k}\right]$ su ekvikonvergentni. Medjutim $\sum \frac{(a_{k+1} - a_k)^2 + 1}{a_k} \ge \sum \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} =$
$= \sum \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{a_k}\,dx \ge \sum \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{x}\,dx = \int_{a_1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$. /Dokaz po ideji J. Vukmirovića/

Ovime smo opet dali negativan odgovor na pitanje 1/, za manje trivijalan slučaj.

2. U opštem slučaju mogu se navesti teoreme o egzistenciji optimalnog rješenja, slične onima za $t<\infty$ i neprekidnosti funkcije $K(y)$, po y. Na tome se nećemo zadržavati.

Razmotrimo

(79) $$c(x,[y]) = c(x, y_{k+1}, k+1), \quad y \le y_k \le X < y_{k+1} < \infty .$$

Neka je

(80) $$k_i(y,[y]) = \sum_0^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x, y_{k+1}, k+i)\,dF(x),$$

$$k_1(y,[y]) = E\,c(X,[y])\,I\{X \ge y\}.$$

Tada je

$$k_i(y,y_1,\dots) = \int_y^{y_1} c(x,y_1,i)\,dF(x) + \sum_0^{\infty}\int_{y_{k+1}}^{y_{k+2}} c(x,y_{k+2},k+i+1)\,dF =$$

$$= \varphi(y,y_1,i) + k_{i+1}(y_1,y_2,\dots)$$

Ako se stavi

(81) $$k_i(y) = \inf_{[y]} k_i(y,[y])$$

biće

(82) $$k_i(y) = \inf_{y<y_1<\infty} [\varphi(y,y_1,i) + k_{i+1}(y_1)]$$

<u>Lema 3.</u> Ako je $k_i(y)<\infty$ za neko i i za neko y, to je $k_j(x)<\infty$ za sve j i sve x.

<u>Dokaz:</u> Ako $k_i(y)<\infty$, znači da postoji $[y]$ da je $k_i(y) \le k_i(y,[y])<\infty$. Neka je $x<y_{j+1}$, za neko $j \ge 1$. Neka je izabran niz $x = z_0 < z_1 < \dots < z_{j+l} < y_{j+1}$, $l=-1,0,1$. Tada

$$k_{i-l}(x) \le k_{i-l}(x,z_1,\dots,z_{j+l},y_{j+1},\dots) =$$

$$= \sum_0^{j+l-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} c(x,z_{k+1},k+i-l)\,dF + \int_{z_{j+l}}^{y_{j+1}} c(x,y_{j+1},j+i)\,dF +$$

$$+\sum_{k=j+1}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i)\,dF(x)<\infty,\ \text{tj.}\ k_{i-1}(x),k_i(x),k_{i+1}(x)<\infty,$$

što znači da za svako j , $k_j(x)<\infty$.

Ako $k_i(y)<\infty$, to postoji niz y_1 , y_2 , ... $\nearrow\infty$ takav da $k_{i+j}(y_j)\to 0$, $j\to\infty$, jer

$$k_{i+j}(y_j)\le k_{i+j}(y_j,y_{j+1},\dots)=\sum_{0}^{\infty}\int_{y_{j+k}}^{y_{j+k+1}} c(x,y_{j+k+1},j+k+i)\,dF\to 0,\ j\to\infty$$

kao ostatak konvergentnog reda.

Ako je $c(x,y,i)$ neopadajuća po i , to

$$k_i(y)\le k_{i+1}(y). \tag{83}$$

Lema 4. Neka važi (83) . Ako za neko y_0 , $k_i(y_0)<\infty$ to $k_i(y)\to 0$, $y\to\infty$.

Dokaz: Neka je j dovoljno veliko da je $\sum_{k=j}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i)\cdot dF(x)\le\varepsilon$. Tada je $k_{i+j}(y_j)\le\varepsilon$. Neka je $y_j\le x$ i specijalno $y_n\le x<y_{n+1}$, $n\ge j$. Tada je $k_i(x)\le k_{i+n}(x)\le$

$$\le\int_{x}^{y_{n+1}} c(x,y_{n+1},n+i)\,dF(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i)\,dF(x)\le$$

$$\le\sum_{k=j}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}} c(x,y_{k+1},k+i)\,dF(x)\le\varepsilon,$$

tj. za svako $\forall\varepsilon>0$, postoji y_j , takvo da za $x\ge y_j$, $k_i(x)\le\varepsilon$, tj. $k_i(x)\to 0$, $x\to\infty$, uniformno po $i\le i_0$.

Ova Lema daje mogućnost aproksimacije $k_i(x)\approx 0$, x d.v.

Razmotrimo posebno slučaj $c(x,y,i)=c(x,y)+c\cdot i$

Tada je

$$k_1(y,[y])=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})+c(k+1)]\,dF(x)=$$

$$=\int_{y}^{y_1}[c(x,y_1)+c]\,dF(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\int_{y_k}^{y_{k+1}}[c(x,y_{k+1})+c(k+2)]=$$

$$=\int_{y}^{y_1} c(x,y_1)\,dF(x)+c[F(y_1)-F(y)]+\sum_{k=0}^{\infty} c\int_{y_{k+1}}^{y_{k+2}} dF+$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{y_{k+1}}^{y_{k+2}} [c(x, y_{k+1}) + c(k+1)] \, dF(x) = \int_{y}^{y_1} c(x, y_1) \, dF(x) +$$

$$+ c[1-F(y)] + k_1(y_1, y_2, \dots) = \varphi(y, y_1) + k_1(y_1, y_2, \dots)$$

odakle je za $k_1(y) = k(y)$, definisano u (81),

$$(84) \qquad k(y) = \inf_{y < x < \infty} [\varphi(y, x) + k(x)],$$

tj. računanje $k(y)$ se uprošćava u odnosu na predhodni slučaj.

Prema Lemi 4. $k(y) \to 0$, $y \to 0$. Medjutim

$$\sum_{0}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} [c(x, y_{k+1}) + c(k+1)] \, dF \geq c \sum_{k=0}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+1}} (k+1) \, dF =$$

$$= c \sum_{0}^{\infty} [1 - F(y_k)] \geq c[1 - F(y)]$$

pa se može uzeti

$$(85) \qquad k(y) \approx c[1 - F(y)], \quad y \text{ dovoljno veliko.}$$

Ako je F apsolutno neprekidna, to za niz optimalnih provjera važe formule iste kao u (76) i (77) zavisno od c pri čemu je $y_0 = y$, $k = 0, 1, 2, \dots$ a y_1 je potrebno odrediti na drugi način.

Razmotrimo još odnos $k_i(y, t)$ i $k_i(y)$.

Lema 5. Neka $k_{n+1+i}(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots) \geq c(y_{n+1}, y_{n+1}, n+i) \cdot [1 - F(y_{n+1})]$, za sve $n \geq n_0 \geq 0$. Tada $\lim_{t \to \infty} k_i(y, t) \leq k_i(y)$.

Dokaz: Neka je $y_1, y_2, \dots$ proizvoljan plan. Tada

$$k_i(y, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots) = k_i(y, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) +$$

$$+ k_{n+1+i}(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots) - c(y_{n+1}, y_{n+1}, n+i)[1 - F(y_{n+1})] \quad i$$

$k_i(y,[y]_n,y_{n+1}) \leq k_i(y,[y])$, tj. $k_i(y,y_{n+1}) \leq k_i(y,[y])$.

Neka je za $\varepsilon > 0$, $[y]$ takav plan da je $k_i(y,[y]) \leq$
$\leq k_i(y) + \varepsilon$. Tada je $k_i(y,y_{n+1}) \leq k_i(y,[y]) \leq k_i(y) + \varepsilon$,

odakle je $\underline{\lim}_{t\to\infty} k_i(y,t) \leq \lim_{n\to\infty} k_i(y,y_{n+1}) \leq k_i(y)+\varepsilon$ tj.

$\underline{\lim}_{t\to\infty} k_i(y,t) \leq k_i(y).$

III Inspekcija sa obnavljanjem

III 1. Uvod

1. Proširimo naš model tako da se proces ne prekida otkrivanjem otkaza, već se uključuje novi uredjaj koji se posmatra na ostatku vremena, i tako redom dok se ne dostigne momenat t. Prema tome, za datu sl.v. X i svako t definiše se sl.v. $y(X,t)$ koja predstavlja momenat otkrivanja otkaza X, sa osobinama

$$(1)\qquad X \le y(X,t) \le t\,,\ \text{za}\ X < t\,,\quad y(X,t) = t\,,\ \text{za}\ X \ge t\,.$$

Time problem svodimo na procese izučavane u I 2.2. Ovdje $z_i(t)$ predstavlja dužinu i-te kontrole, $u_i(t)$ dužinu rada i-tog uredjaja, $M(z,t)$ broj obnavljanja uredjaja do momenta z.

Neka je, kao i u II 1.1., $c(X,y,t) = c(X,y;F_t)$ gubitak od posmatranja X na intervalu $[0,t]$, po planu y. Tada za niz $X_1, X_2, \dots$ dužina rada uredjaja, niz

$c(X_1,z_1,t),\ c(X_2,z_2,t-z_1),\ c(X_3,z_3,t-z_1-z_2),\ \dots$ predstavlja niz gubitaka respektivno na intervalima $[0,z_1]$, $(z_1,z_1+z_2]$, ... Ukupni broj obnavljanja je $M(t,t)$ a ukupni gubitak je

$$(2)\qquad c(y,t) = \sum_{i=1}^{M(t,t)+1} c(X_i,z_i,t-S_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c(X_i,z_i,t-S_{i-1})\,,\quad S_i = \sum_{j=1}^{i} z_j\,,\quad S_0 = 0\,.$$

Neka je

$$(3)\qquad K(y,t) = K_y(t) = E\,C(y,t)\,,\quad \Delta_y(t) = E\,C(X_1,z_1,t)\,.$$

Biće

$$K_y(t) = E\sum_{j=1}^{\infty} c(X_i,z_i,t-S_{i-1}) =$$

$$= E c(X_1, z_1, t) + E\,E\Big[\sum_{i=2}^{\infty} c(X_i, z_i, t - S_{i-1}) \mid z_1\Big] =$$

$$= s_y(t) + E\,k_y(t - z_1) \quad , \text{tj}$$

(4) $$k_y(t) = s_y(t) + \int_0^t k_y(t-u)\, d\phi(u,t).$$

Ako stavimo

(5) $$\bar{c}_j(y,t) = \sum_{i=1}^{j} c(X_i, z_i, t - S_{i-1}), \quad \bar{k}_y^j(t) = E\,\bar{c}_j(y,t),$$

biće

(6) $$\bar{k}_y^{j+1}(t) = s_y(t) + \int_0^t \bar{k}_y^j(t-u)\, d\phi(u,t).$$

Uvjek je $\bar{k}_y^j(t) \rightrightarrows k_y(t)$, $j \to \infty$.

Metodom sličnim onom u I 2.1. se dobija da je

(7) $$k_y(t) = s_y(t) + \int_0^t s_y(t-u)\, d\,G(u,t),$$

(8) $$\bar{k}_y^{j+1}(t) = s_y(t) + \int_0^t s_y(t-u)\, d\Big[\sum_{i=1}^{j} G_i(u,t)\Big]$$

Neka $c(X,t,t) = c(X,t)$ označava gubitak od rada uređaja na $[0,t]$ koji se kontroliše samo u tački t $X < t$. Neka je $c(t,t)$ taj gubitak za $X \geq t$. Predpostavimo da je

(9) $$c(X,t) \leq L(t_0) \quad , \text{za sve } X \leq t,\ t \leq t_0\ ;\ c(X,0) = 0,$$

tj., uniformno ograničeno.

Neka je

(10) $$c_j(y,t) = \sum_{i=1}^{j} c(X_j, z_j, t - S_{i-1}) + c(X_{j+1}, t - S_j)$$

(11) $$k_j(y,t) = E\,c_j(y,t) \ , \ \ell(t) = E\,c(X_1, t)$$

Tada je

(12) $$k_0(y,t) = k_0(t) = \ell(t)$$

(13) $$K_{j+1}(y,t) = A_y(t) + \int_0^t K_j(y,t-u)\,d\phi(u,t) =$$

$$= A_y(t) + \int_0^t A_y(t-u)\,d[\sum_{i=1}^{j} G_i(u,t)] + \int_0^t \ell(t-u)\,d\,G_j(u,t).$$

Neka je

(14) $$K_j(t) = \inf_y K_j(y,t) \quad , K(t) = \inf_y K(y,t).$$

što predstavlja minimalne gubitke sa najviše j obnavljanja, a drugo uopšte.

Po predpostavci (9) , $E\,C(X_{j+1}, t-S_j) =$

$$= E\,C \cdot I\{0 < t - S_j\} + E\,0 \cdot I\{0 = t - S_j\} \leq L(t_0) P(0 < t - S_j) \to 0 \, , j \to \infty,$$

pa

(15) $$K_j(y,t) \to K(y,t) \quad , i$$

$$K_1(t) \geq K_2(t) \geq \cdots \geq K_j(t) \searrow K(t).$$

Neka $C(X,y,t) \geq c$, $t \geq 0$, $C(X,t) \geq c$, $t > 0$ što praktično znači da svako novo uključivanje košta bar c.

Tada je $K_j(y,t) \geq c[1 + \sum_{i=1}^{j} G_i(t,t)]$ i $K(y,t) \geq c[1 + G(t,t)]$.

Problematika nalaženja optimalnog plana u smislu (14) za $j < \infty$ nije naš cilj, pa se time nećemo dalje baviti. Tome bi se morala pokloniti posebna pažnja.

2. Uvešćemo plan kontrole, koji se najčešće koristi. Neka je $S_i(t)$ niz mjerljivih funkcija, $i = 1,2,\cdots, t \geq 0$ $0 = S_0(t) < S_1(t) < \cdots \leq t$, $S_i(t) \to t$, $i \to \infty$, $S_i(0) = 0$. Ako je za neko i i neko t_0 , $S_i(t_0) = t_0$, to se može uzeti $S_{i+k}(t_0) = t_0$, $k = 1,2,\ldots$. Definišimo

(16) $$y(X,t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t) I\{S_{k-1}(t) \leq X < S_k(t)\} + t\, I\{X \geq t\},$$

tj. $S_1(t)$, $S_2(t)$,... su uzastopni momenti kontrole, a $y(X_1,t)$ je onaj prvi u kome se otkriva otkaz. Tada je

$$(17)\qquad \phi(z,t) = \begin{cases} F(S_k(t)) & , \ S_k(t) < z \le S_{k+1}(t) \\ 1 & , \ z > t \end{cases} .$$

Odatle je, na pr., u skladu sa I(33),

$$H_{i+1}(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} H_i(z, t-S_k(t))[F(S_k(t)) - F(S_{k-1}(t))] + [1-F(t)],$$

$$\sigma_1^1(t) = E\, y(X_1,t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(t)[F(S_k(t)) - F(S_{k-1}(t))] + t[1-F(t)].$$

U ovakvoj situaciji ima smisla uvesti proces

$$(18)\qquad N(X,t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, I\{S_{k-1}(t) \le X < S_k(t)\} +$$

$$+ \sup\{k+1 : S_k(t) < t, k \ge 0\} \cdot I\{X \ge t\} \le \infty ,$$

što predstavlja broj izvedenih provjera, računajući i onu u tački t .

Analogno sa procesima u I 2.1. uvodimo proces

$$(19)\qquad N_1(t) = N(X_1,t)\ , \quad N_{i+1}(t) = N(X_{i+1}, t-S_i)\ , \quad i=1,2,\ldots$$

Za funkciju $H_i^3(z,t) = P(N_i(t) < z)$ važe iste formule kao I(33) , I(36) , I(39) , I(41) , I(42), gdje se umjesto $H_1(z,t) = \phi(z,t)$ stavlja $H_1^3(z,t) = P(N_1(t) < z)$.

III 2. Specijalne funkcije gubitaka

1. Za planove oblika (16) za dato t , definišemo usječeni plan reda j, kao onaj plan kod koga se izvodi najviše j provjera ukupno, na $[0,t]$ .Posto-

je dvije mogućnosti. Ili plan S dopušta j provjera najviše, ili provjere prekidamo kada ih se navrši j - -računajući i onu u tački t .

Označimo sa $V(z,t,S)$, $V_j(z,t,S)$, $z<t$, gubitke na intervalu $[z,t]$, ako sistem počinje sa radom u z , po planu S , / S usječenom na j /. Po definiciji je $V(z,t,S) = V(0,t-z,S)$. Neka je

$$(19) \qquad U(T,t,S) = I\{T \le X_1\} V(0,t,S) \quad , S_1(t) = T_1 > T ,$$

$$(20) \qquad K(T,t,S) = EU(T,t,S) \quad , K_i(T,t,S) = EU_i(T,t,S).$$

U opštem slučaju eksplicitni izraz nije jednostavan /o tome će biti više riječi u glavi IV/, a sada i nije potreban. Ako za $y(x,t)$ prihvatimo (16) a $c(x,y,t) = c(x, s_k(t), k)$, $s_{k-1}(t) \le x < s_k(t)$, biće

$$(21) \qquad s(t) = E\,c(X_1, z_1, t) = \sum_{1}^{\infty} \int_{s_{k-1}(t)}^{s_k(t)} c(x, s_k(t), k)\,dF(x) + c(t,t,n)[1-F(t)],$$

$$n = \sup\{k+1 : s_k(t) < t\}.$$

U slučaju $c(t,t,\infty) = \infty$ i $[1-F(t)] > 0$ jasno je da beskonačni planovi nemaju smisla jer daju beskonačni gubitak.

Neka je

$$(22) \qquad K(T,t) = \inf_{S} K(T,t,S) \,, \quad 0 \le T < T_1 \le t$$

$$K_i(T,t) = \inf_{S,\,1 \le j \le i} K_i(T,t,S) \,, \quad 0 \le T < T_1 \le t.$$

Tada je

$$(23) \qquad K_1(T,t) = \int_T^t c(x,t,1)\,dF(x) + c(t,t,1)[1-F(t)] \,, \quad t > 0 \,,$$

$$0 \le T \le t, \qquad K_1(T,t) = 0 \,, \quad t = 0.$$

4) $K_1(T,t) \geq k_i(T,t) \geq k_{i+1}(T,t) \geq k(T,t) \geq$
$\geq \inf_n c(t,t,n)[1-F(t)]$.

Lema 1. Neka je $c(x,y,k) \geq c(x,y,1)$ i
$|c(x,y,1) - c(x,y+\varepsilon,1)| \leq \delta(\varepsilon)$, uniformno po $x \leq x_0$,
$y \leq y_0$, $\delta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Tada

5) $K(T,t,S) \geq \lim_{i \to \infty} k_i(T,t,S)$.

Dokaz: Neka je z momenat kontrole u kome je uključen uredjaj čiji je ili rad ili otkaz konstatovan u $n-1$-vom momentu kontrole X_{n-1}, $z < X_{n-1} < t$. Neka su $X_n, X_{n+1}, \ldots$ momenti kontrole po planu S, za slučaj da uredjaj koji radi u momentu X_{n-1}, ne otkazuje. Neka je Y dužina rada uredjaja uključenog u momentu z. Neka je $t-z=u$, $y_i = X_i - z$, $i=n-1,n,\ldots$. Neka je X dužina rada uredjaja uključenog u momentu X_{n-1}, ako je tu zatečen otkaz. Tada je

$$V(0,t,S) - V_n(0,t,S) = (V-V_n)I\{y < y_{n-1}\} + (V-V_n)I\{y \geq y_{n-1}\} =$$
$$= [V(0,t-X_{n-1},S) - V_1(0,t-X_{n-1},S)]I\{y < y_{n-1}\} +$$
$$+ [V-V_n][\sum_{i=n-1}^{\infty} I\{y_i \leq y < y_{i+1}\} + I\{y \geq u\}].$$

Ako su $t_1, t_2, \ldots$ momenti kontrole uredjaja X na $[0, t-X_{n-1}]$, biće

$$V(0,t,S) - V_n(0,t,S) \geq I\{y < y_{n-1}\}\sum_{i=1}^{\infty}[c(X,t_i,1) - c(X,t-X_{n-1},1)] \cdot$$
$$\cdot I\{t_{i-1} \leq X < t_i\} + \sum_{i=n-1}^{\infty}[c(y,y_i,1) - c(y,t-z,1)]I\{y_i \leq y < y_{i+1}\},$$

zbog $V(0,t-X_{n-1},S) \geq \sum_{i=1}^{\infty} c(X,t_i,i)I\{t_{i-1} \leq X < t_i\}$

i osobine $c(X,t_i,i) \geq c(X,t_i,1)$. Na sl.način je i za drugi sabirak.

Kako je $t_i \leq t - X_{n-1} < \varepsilon$ za n d.v. i

$$|c(X, t_i, 1) - c(X, t - X_{n-1}, 1)| < \delta(\varepsilon)$$

$$|c(Y, y_i, 1) - c(Y, t - z, 1)| < \delta(\varepsilon) \text{ to}$$

$V - V_n \geq -\delta(\varepsilon)$ za n d.v. , tj. $V \geq V_n + B_n$

gdje $B_n \to 0$, $n \to \infty$, s.s. i B_n ograničeno. Prema Lebegovoj teoremi, iz $EV \geq EV_n + EB_n$ slijedi

$$EV \geq \lim_{n\to\infty} EV_n + \lim_{n\to\infty} EB_n = \lim_{n\to\infty} EV_n .$$

Posledica Leme 1.

$$K(T,t) = \lim_{i\to\infty} K_i(T,t).$$

Lema 2. Neka je $c(X,Y,K)$ neopadajuća po K , i uniformno neprekidna po X i Y u smislu:

$$|c(X+\varepsilon, y+h, K) - c(X, Y, K)| \leq \delta(\varepsilon, h) \to 0, \ \varepsilon, h \to 0$$

uniformno po x , y i K .

Tada su funkcije $K_i(T,t)$ i $K(T,t)$ neprekidne po $t > T$.

Dokaz: Neka je S proizvoljan plan na $[0,t]$. Neka je S' plan na $[0,t+\varepsilon]$ koji na $[0,t)$ postupa kao S , u tački t ne vrši provjeru a na $[t,t+\varepsilon]$ vrši provjeru samo u $t+\varepsilon$. Neka je z momenat u kome je uključen uredjaj zatečen u momentu t , bilo u radu, bilo u otkazu. Ako sa Y označimo njegovu dužinu rada, biće

$$V(0,t+\varepsilon,S') - V(0,t,S) = I\{Y<t-z\}[c(Y,t+\varepsilon-z,K) -$$
$$-c(Y,t-z,K)] + I\{t-z \leq Y < t+\varepsilon-z\}[c(Y,t+\varepsilon-z,K) - c(t-z,t-z,K)] +$$
$$+ I\{Y \geq t+\varepsilon-z\}[c(t+\varepsilon-z,t+\varepsilon-z,K) - c(t-z,t-z,K)] \leq \delta(\varepsilon,\varepsilon),$$

odakle je $K(T,t+\varepsilon) \le K(T,t+\varepsilon,S') \le k(T,t,S) + \delta(\varepsilon,\varepsilon)$

za svaki S , pa je i $K(T,t+\varepsilon) \le K(T,t) + \delta(\varepsilon,\varepsilon)$.

Neka je, sada, S proizvoljni plan na $[0,t+\varepsilon]$, i S' plan na $[0,t]$ koji na $[0,t)$ postupa kao S a u tački t ima zadnju provjeru. Neka su tačke $t = x_0 \le x_1$, $x_2, \ldots$ momenti provjere na $[t,t+\varepsilon]$ po S u slučaju da uredjaj koji radi u t ne otkazuje. Tada je

$$V(0,t+\varepsilon,S) - V(0,t,S') = I\{y < t-z\}[c(y,x_1-z,k) +$$
$$+ V(0,t+\varepsilon-x_1,S) - c(y,t-z,k)] + I\{t-z \le y < x_1-z\}[c(y,x_1-z,k) +$$
$$+ V(0,t+\varepsilon-x_1,S) - c(t-z,t-z,k)] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{\infty} I\{x_i - z \le y < x_{i+1}-z\}[c(y,x_{i+1}-z,k+i) +$$
$$+ V(0,t+\varepsilon-x_{i+1},S) - c(t-z,t-z,k)] +$$
$$+ I\{y \ge t+\varepsilon-z\}[c(t+\varepsilon-z,t+\varepsilon-z,N) - c(t-z,t-z,k)] \ge$$
$$\ge I\{y < t-z\}[c(y,x_1-z,k) - c(y,t-z,k)] +$$
$$+ \sum_{0}^{\infty} I\{x_i - z \le y < x_{i+1}-z\}[c(y,x_{i+1}-z,k) - c(t-z,t-z,k)] +$$
$$+ I\{y \ge t+\varepsilon-z\}[c(t+\varepsilon-z,t+\varepsilon-z,k) - c(t-z,t-z,k)] \ge$$
$$\ge -\delta(\varepsilon,\varepsilon),$$

pa je $k(T,t) \le K(T,t,S') \le K(T,t+\varepsilon,S) + \delta(\varepsilon,\varepsilon)$ za svaki S, odakle je $k(T,t) \le k(T,t+\varepsilon) + \delta(\varepsilon,\varepsilon)$, i ukupno

$$|k(T,t) - k(T,t+\varepsilon)| \le \delta(\varepsilon,\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Dokaz za $k_i(T,t)$ je istog tipa a prostiji je.

Posledica Leme 2. $k_i(T,t) \to k(T,t)$, uniformno po t na konačnim intervalima.

2. Razmotrimo funkciju $c(x,y,k)=c(x,y)+kc_1$. Neka je plan S takav da je $T<T_1=S_1(t)<t$,i X_1 prvi uredjaj koji se uključuje. Tada je

$$u(T,t,S)=I\{T\le X_1<T_1\}[c(X_1,T_1)+c_1+V(0,t-T_1,S)]+I\{T_1\le X_1\}[c_1+V(0,t,S')],$$

gdje je S' izmijenjeni S utoliko da je $S_i'(t)=S_{i+1}(t)$, u t , $i=1,2,\ldots$, tj. u T_2 se ne predvidja provjera. Odatle je

$$K(T,t,S)=\int_T^{T_1}c(x,T_1)\,dF(x)+c_1[1-F(t)]+$$
$$+[F(T_1)-F(T)]K(0,t-T_1,S)+K(T_1,t,S')=$$
$$=A(T,T_1)+B(T,T_1)K(0,t-T_1,S)+K(T_1,t,S'),\ 0\le T<T_1<t.$$

Kako dio plana na $[0,t-T_1]$ ne zavisi od dijela plana na $[T_1,t]$ to je

$$K_{i+1}(T,t)=\min\{K_1(T,t),\ \inf_{T<T_1<t}[A(T,T_1)+$$
$$+B(T,T_1)K_i(0,t-T_1)+K_i(T_1,t)]\}.$$

Ako definišemo

(26) $$K_i(0,0)=K_i(t,t)=K(0,0)=K(t,t)=0\ ,\ A(T,t)=K_1(T,t),$$

biće

(27) $$K_{i+1}(T,t)=\inf_{T<u\le t}[A(T,u)+B(T,u)K_i(0,t-u)+K_i(u,t)],$$

(28) $$K(T,t)=\inf_{T<u\le t}[A(T,u)+B(T,u)K(0,t-u)+K(u,t)].$$

Koristeći jednačine (27) , (28) možemo odrediti optimalni plan na $[T,t]$, $0\le T<t$.

Ponavljajući potpuno dokaz Leme II 2.3., gdje samo umjesto X treba staviti X_1 , umjesto $[y]$ - S i umjesto y i y_1, T i T_1 dobijamo da je

(29) $\qquad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(T+\varepsilon,t) \le k(T,t)\,, \quad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(T-\varepsilon,t) \le k(T,t)$

Ako se predpostavi da je $c(x,y,k)$ opadajuća po k, na isti način kao u Lemi II 2.4. /a/ se dobija

(30) $\qquad k(T-\varepsilon,t) \ge k(T,t) \quad i \quad \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(T-\varepsilon,t) \ge k(T,t).$

Medjutim, rezultat analogan onome iz Leme II 2.5. ne dobija se na isti način, pa ćemo dokazati:

Lema 3. Neka je $F(x)$ neprekidna funkcija i u slučaju $c(x,y,k) = c(x,y) + k\ell$, $c(x,y)$ ograničena po $x \le y$ na konačnim intervalima. Tada je

(31) $\qquad \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, k(T+\varepsilon,t) \ge k(T,t).$

Dokaz: Neka $T+\varepsilon < T_1$. Tada je

$$u(T,t,S) = I\{T \le X_1 < T+\varepsilon\}[c(X_1,T_1) + V(0,t-T_1,S)] + u(T+\varepsilon,t,S)\cdot$$

$$k(T,t,S) \le [F(T+\varepsilon) - F(T)][c + k(0,t-T_1,S)] + k(T+\varepsilon,t,S)$$

odakle je, kao u (28)

$$k(T,t) \le \inf_{T_1}\{\inf_{S} k(T+\varepsilon,t,S) + [F(T+\varepsilon)-F(T)][c + k(0,t-T_1)]\},$$

pošto dio plana na $[T+\varepsilon,t]$ ne zavisi od dijela plana na $[0,t-T_1]$. Kako je i $k(0,t-T_1)$ ograničeno po $T_1 \ge 0$ to je $k(T,t) \le k(T+\varepsilon,t) + [F(T+\varepsilon)-F(T)]\cdot D$, D konstanta. Odatle izlazi (31).

Slični dokazi važe i za funkcije $k_i(T,t)$

Prema tome ako $c(x,y,k)$ zadovoljava uslove Leme 3. slijedi da je $k(T,t)$ neprekidna po $0 \le T < t$.

Teorema 1. Neka je $c(x,y,k) = c(x,y) + k\cdot\ell$. Neka je $c(x,y)$ neprekidna po y uniformno po x, i neka važe uslovi Leme 3. Tada postoji optimalni plan S^* za koji je $k(T,t,S^*) = k(T,t)$.

Dokaz: Ako je $F(T)=1$, to je $k(T,t)=0$, pa je plan proizvoljan. Neka je zato $F(T)<1$. Pošto je

$$A(T,T_1) = \int_T^{T_1} c(x,T_1)\,dF(x) + l[1-F(T)] \quad , T\le T_1<t$$

$$k_1(T,t) = \int_T^t [c(x,t)+l]\,dF + [c(t,t)+l][1-F(t)]$$

to je

$$\lim_{T_1\to T}[A(T,T_1)+B(T,T_1)k(0,t-T_1)+k(T_1,t)] = \lim_{T_1\to T} k(T,T_1,t) =$$
$$= l[1-F(T)] + k(T,t) > k(T,t).$$

$$\lim_{T_1\to t} k(T,T_1,t) = A(T,t-0) + B(T,t)k(0,+0) + k(t-0,t).$$

$$k(t-0,t) = \min\{[c(t,t)+l][1-F(t)],\ l[1-F(t)]+k(t-0,t)\}$$

odakle je $k(t-0,t) = [c(t,t)+l][1-F(t)]$.

Na sličan način $k(0,+0) = \min\{l+c(+0,+0),\ l+k(+0,+0)\}$

$k(+0,+0) = \min\{c(+0,+0)+l,\ l+k(+0,+0)\}$ odakle je

$$k(+0,+0) = c(+0,+0)+l \quad i \quad k(0,+0) = k(+0,+0) = c(+0,+0)+l.$$

Tada je

$$\lim_{T_1\to t} k(T,T_1,t) = \int_T^t c(x,t)\,dF(x) + l[1-F(t)] +$$
$$+[F(t)-F(T)][c(+0,+0)+l] + [l+c(t,t)][1-F(t)] \ge k_1(T,t).$$

Ako je $k(T,t)=k_1(T,t)$, optimalni plan je $S_0(t)=t$. Neka je $k(T,t)<k_1(T,t)$. Zbog neprekidnosti funkcija $k(T,t)$ po T i po t, postoji T_1, $T<T_1<t$, da je

$$k(T,t) = A(T,T_1)+B(T,T_1)k(0,t-T_1)+k(T_1,t) =$$
$$= \sum_{j=1}^{i}[A(T_{j-1},T_j)+B(T_{j-1},T_j)k(0,t-T_1-\dots-T_j)] + k(T_i,t), \quad T_0=T,$$

sve dok je $k(T_i,t) < k_1(T_i,t)$.

Kako je $\sum_{j=1}^{i} A(T_{j-1},T_j) \ge \sum_{j=1}^{i} l[1-F(T_{j-1})] \ge i\,l[1-F(T_{i-1})]$ to je

$$k(T,t) \ge i\,l[1-F(T_{i-1})].$$

Ako je $F(t)<1$, to postoji i da je $k(T_i,t)=$ $=k_1(T_i,t)$, jer u suprotnom $l_i[1-F(T_{i-1})]\to\infty$, što nije moguće. Na isti način se rastavljaju svi $k(0,t-T_1-\dots-T_i)$, i dobijaju konačni djelovi plana.

Neka je $F(t)=1$. Tada su moguća, u principu, tri slučaja:

1/ Ako $T_i \to t$, to $k(T_i,t)\to k(t-0,t)=$ $=[c(t,t)+l][1-F(t)]=0$, čime se dobija odgovarajući dio plana.

2/ Ako $T_i \to t_0 < t$, $F(t_0)<1$, to $l_i[1-F(T_i)]\to+\infty$, što nije moguće.

3/ Ostaje slučaj $T_i \to t_0 < t$, $F(t_0)=1$. Tada $k(T_i,t)\to k(t_0,t)=0$, što opet daje dio optimalnog plana.

Isto zaključivanje se primjenjuje na $k(0,t-T_1-\dots-T_j)$.

Prema tome postoji optimalni plan koji se može dobiti opisanim postupkom. Za slučaj $k_i(T,t)$ je dokaz još jednostavniji./

Za izračunavanje se koristi opisani metod, preko $k_i(T,t)$ ili preko $k(T,t)$. Za izračunavanje $k(T,t)$ je potrebno imati već izračunate $k(0,v)$, $v<t$, i početnu vrijednost za $k(u,t)$, $T<u<t$. Na osnovu toga se postepeno računa za T opadajuće i dobija $k(0,t)$ što daje mogućnost računanja za veće t i sve $0\le T<t$ Početna vrijednost je $k(T,t)=k_1(T,t)$ za $T=t$ d.m.

3. U slučaju beskonačnog intervala vremena, kao kriterijum optimalnosti se može uzeti

$$\lim_{t\to\infty}\frac{k_y(t)}{t}=k_y \quad (32)$$

Ovdje je od značaja veličina $s_v(t)=E\,C(X_1,Z_1,t)$.

Lema 4. Neka je $s_Y(t)$ ograničena po t, i postoji $\lim_{t\to\infty} s_Y(t) = s_Y(\infty) < \infty$. Neka postoji $\lim_{t\to\infty} v_Y(t) = v_Y(\infty) < \infty$ / $v_Y(t) = E\, z_1(t)$ /. Tada

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K_Y(t)}{t} = \frac{s_Y(\infty)}{v_Y(\infty)} = K_Y \qquad \text{/uporedi sa } I(20)/$$

Dokaz: Na osnovu jednačine (7) je $s_Y(t) + \int_0^{t-T} s_Y(t-u)\, dG(u,t) \le K_Y(t) = s_Y(t) + \int_0^{t-T} s_Y(t-u)\, dG(u,t) + \int_{t-T}^{t} s_Y(t-u)\, dG(u,t)$.

Neka je za $\varepsilon > 0$, T d.v. da je za $t \geq T$ $|s_Y(t) - s_Y(\infty)| < \varepsilon$. Tada

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{K_Y(t)}{t} \geq \underline{\lim}_{t\to\infty} [s_Y(\infty) - \varepsilon] \frac{1 + G(t-T,t)}{t} = \frac{s_Y(\infty) - \varepsilon}{v_Y(\infty)},$$

za svaki $\varepsilon > 0$, prema Lemi I 2.4. i $\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{K_Y(t)}{t} \geq \frac{s_Y(\infty)}{v_Y(\infty)}$.

Neka je $s_Y(t) \le K$. Tada

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{K_Y(t)}{t} \le \overline{\lim}_{t\to\infty} \left\{ [s_Y(\infty) + \varepsilon] \frac{1 + G(t-T,t)}{t} + K \frac{G(t,t) - G(t-T,t)}{t} \right\} =$$

$$= [s_Y(\infty) + \varepsilon] \lim_{t\to\infty} \frac{1 + G(t-T,t)}{t} + K \lim_{t\to\infty} \frac{G(t,t) - G(t-T,t)}{t} = \frac{s_Y(\infty) + \varepsilon}{v_Y(\infty)},$$

za svako $\varepsilon > 0$, pa je i $\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{K_Y(t)}{t} \le \frac{s_Y(\infty)}{v_Y(\infty)}$.

Neka za slučaj kontrole u obliku plana $S_i(t)$, $S_i(t) \to S_i,\ t \to \infty,\ S_i \to \infty,\ i \to \infty$. Neka

$v_Y = \sum_1^{\infty} S_k [F(S_k) - F(S_{k-1})] < \infty$ i

$$v_Y(t) = \sum_1^{\infty} S_k(t) [F(S_k(t)) - F(S_{k-1}(t))] + t[1 - F(t)] \to v_Y$$

Ako je $s_Y(t) = \sum_1^{\infty} \int_{S_{k-1}(t)}^{S_k(t)} c(x, S_k(t), k)\, dF(x) + c(t,t,u)[1 - F(t)] \to$

$\rightarrow s_y(\infty) = \sum_1^\infty \int_{S_{k-1}}^{S_k} c(x, S_k, k)\, dF(x)$, $t \to \infty$ tada

$$(33) \qquad \frac{K_y(t)}{t} \to \frac{\sum_1^\infty \int_{S_{k-1}}^{S_k} c(x, S_k, k)\, dF(x)}{\sum_1^\infty S_{k}[F(S_k) - F(S_{k-1})]}, \quad t \to \infty .$$

Interesuje nas onaj plan S_k za koji se postiže $\inf$ u (33). Nalaženje tog $\inf$ se svodi na odredjivanje broja α za koji je $D(\alpha) = \inf_y [s_y(\infty) - \alpha\, v_y(\infty)] = 0$, $\alpha \in R$, ili specijalno za (33),

$$D(\alpha) = \inf_S \sum_1^\infty \int_{S_{k-1}}^{S_k} [c(x, S_k, k) - \alpha S_k]\, dF(x).$$

O nekim detaljima se može vidjeti u [BP]. gdje se obradjuje jednostavniji vid funkcije $c(x, y, k)$.

IV Opšti pristup preventivi i inspekciji

IV 1. Preventivne zamjene

1. Cilj preventivnih zamjena je da se predupredi otkaz uredjaja. To znači da dopuštamo zamjenu uredjaja koji još radi, ali je "star". Prema tome, poznato nam je stanje uredjaja u svakom momentu, pa ili vršimo zamjenu uredjaja koji još radi ili momentalno zamjenjujemo uredjaj koji otkaže, sve do nekog momenta t .

Posmatrajmo interval $[0,t]$. Neka je

(1) $$0 \leq S(X,t) \leq t \quad , \quad S(X,0)=0 \ ,$$

momenat planirane zamjene za uredjaj X . Tada je momenat stvarne zamjene

(2) $$0 \leq Y(X,t) = \min\{X, S(X,t)\} \leq t \ ,$$

što je, istovremeno, i ukupna dužina rada uredjaja X . Tada su

(3) $$z_1(t) = Y(X_1,t) \quad , \quad z_{i+1}(t) = Y(X_{i+1}, t-z_1-\cdots-z_i) \ , \ i=1,2,\ldots$$

uzastopne dužine rada uredjaja $X_1, X_2, \ldots$

Tada se na procese definisane u (1) , (2) , (3) može primijeniti čitava teorija razradjena u I 2.1., pri čemu ovdje dolazi do izražaja slučaj kad ne mora biti $G(z,t) < \infty$, $z \leq t$.

Ako uvedemo proces

(4) $$S_1(t) = S(X_1,t) \ , \ S_{i+1}(t) = S(X_{i+1}, t-z_1-\cdots-z_i) \ , \ i=1,2,\ldots$$

što predstavlja momente planirane zamjene X_{i+1} -vog uredjaja, takodje se sva teorija iz I 2.1. može primijeniti.

Neka $C(X,S,t)$, $t \geq 0$, $C(X,S,0)=0$, predstavlja gubitak od preventive po S , za sl.v. X na $[0,t]$ .Tada je ukupni gubitak

(5) $$C(S,t) = \sum_{i=1}^{\infty} C(X_i, S_i, t - z_1 - \cdots - z_{i-1}).$$

Neka je

(6) $$K_S(t) = E\,C(S,t).$$

Za funkciju $K_S(t)$ važe formule kao i za $K_Y(t)$ definisane u III 1.1., na pr. III (4), III (6) – (8), ali pod uslovom da je $G(t,t) < \infty$, pri čemu se, naravno umjesto $\Lambda(t)$ uzima $c(t) = E\,C(X_1, S_1, t)$.

Od interesa su nam oni S za koje je $\sum_1^{\infty} z_i(t) = t$, s.s. i $K_S(t) < \infty$. Tada je, bez obzira na $G(z,t)$

(7) $$K_S(t) = c_S(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t c_S(t-u)\,d\,G_i(u,t) < \infty, \quad i$$

(8) $$K_S(t) = c_S(t) + \int_0^t K_S(t-u)\,d\phi_S(u,t), \quad \phi_S(u,t) = P(z_1(t) < u).$$

S obzirom na definiciju (2) i (3), važi

(9) $$G(z,t) \geq H(z).$$

Specijalni slučaj, koji se obično izučava, je

(10) $$S(X,t) = S(t), \quad Y(X,t) = \min\{X, S(t)\},$$

(11) $$C(X,S,t) = c_1 I\{X < S(t)\} + c_2 I\{X \geq S(t), S(t) < t\}, \quad c_1 > c_2.$$

U skladu sa tim se mogu uprostiti odgovarajuće raspodjele, jer je

(12) $$\phi(z,t) = F(z) I\{z \leq S(t)\} + I\{z > S(t)\}.$$

2. Model provjera se može uopštiti pomoću niza funkcija $S_i(X,t)$, $S_i \in D_i$. Time jednačine za procese $z_i(t) = \min\{X_i, S_i(X_i, t - z_1 - \cdots - z_{i-1})\}$ postaju komplikovanije, ali nam to i nije cilj.

Za plan S : $S_i = S_i(X,t)$, $i = 1, 2, \cdots$ definišemo usječeni na j plan S' : S_i', $i = 1, 2, \cdots$ kod koga je $S_i^{\prime} = S_i$, $i=1,2,\dots,j$, $S_i^{\prime}(X,t)=t$, $i=j+1, j+2, \dots$, što znači da se planira najviše j preventiva.

Neka je sada $C(X, S_i, t)$ gubitak vezan za preventivu X , po planu S_i na t .

Definišimo i

$$(13)\qquad z_1^{j}(t) = \min\{X_1, S_j(X_1,t)\}$$
$$z_{i+1}^{j}(t) = \min\{X_{i+1}, S_{i+j}(X_{i+1}, t - z_1^{j} - \dots - z_i^{j})\}$$

Dalje neka je

$$K_j(t; S_j, S_{j+1}, \dots) = E\sum_{i=1}^{\infty} C(X_i, S_{j+i-1}, t - z_1^{j} - \dots - z_i^{j}) =$$
$$= E\,C(X_1, S_j, t) + E\sum_{i=2}^{\infty} C(X_i, S_{j+i-1}, t - z_1^{j} - \dots - z_{i-1}^{j}) =$$
$$= E\,C(X_1, S_j, t) + E[E\,\Sigma C \mid z_1^{j}] =$$
$$= C_j(t) + E\,K_{j+1}(t - z_1^{j}, S_{j+1}, S_{j+2}, \dots)$$

tj.

$$(14)\qquad K_j(t; S_j, S_{j+1}, \dots) = C_j(t) + E\,K_{j+1}(t - z_1^{j}; S_{j+1}, S_{j+2}, \dots)$$

$$(15)\qquad C_j(t) = E\,C(X_1, S_j, t)$$

Ako stavimo

$$(16)\qquad K_j(t) = \inf_{S_j, S_{j+1}, \dots} K_j(t; S_j, S_{j+1}, \dots)$$

biće

$$K_j(t) = \inf_{S_j \in O_j} [C_j(t) + \inf_{S_{j+1}, \dots} E\,K_{j+1}(t - z_1^{j}; S_{j+1}, \dots)] =$$

$$(17)\qquad = \inf_{S_j \in O_j} [C_j(t) + E\,K_{j+1}(t - z_1^{j})],$$

pošto $C_j(t)$ i z_1^{j} zavise od S_j , a E je po z_1^{j} .Treba još pokazati da je $\inf E K_{j+1} = E \inf k_{j+1}$ .Ukratko: neka je $\varepsilon > 0$ .Tada za svako $y = z_1^j$ postoji plan S^y :

S^y_{j+1} , S^y_{j+2} ,... da je $K_{j+1}(t-y; S^y) \le k_{j+1}(t-y)+\varepsilon.$

Definišimo novi plan S : S_{j+1} ,... tako da je $S_{j+1}(X,u) = S^{t-u}_{j+1}(X,u)$, $S_{j+k}(X,v) = S^{t-u}_{j+k}(X,v)$, $v \le t-u$, $k=2,3,\ldots$ tj. ako je do prve zamjene došlo u tački $y = t-u$, na ostatku vremena u postupamo po planu S^y . Tada $K_{j+1}(t-y;S) =$

$= K_{j+1}(t-y;S^y) \le k_{j+1}(t-y)+\varepsilon$ pa je i

$$E K_{j+1}(t-y,S) \le E k_{j+1}(t-y)+\varepsilon .$$

Ako su svi $D_j = D$, tj. svi S_j su istog tipa, znači da $K_j(t) = k(t)$ -ne zavisi od j , pa je

$$(18) \qquad k(t) = \inf_{S\in D}[C_S(t) + E\,k(t-z_1)] =$$

$$= \inf_{S\in D}[E\,C(X_1,S,t) + \int_0^t k(t-u)\,d\phi_S(u,t)] .$$

Rezultati u (17) i (18) su osnovni,i do njih smo došli baš na osnovu predpostavki o uopštenom planu S .

Za slučaj $S_i(X,t) = S_i(t)$ je

$$(19) \qquad \phi_j(u,t) = P(z_1^j(t) < u) = F(u)I\{u \le S_j(t)\} + I\{u > S_j(t)\},$$

pa je

$$(20) \qquad k_j(t) = \inf_{S_j(t)\in D_j}[c_j(t) + \int_0^{S_j(t)} k_{j+1}(t-u)\,dF(u) + k_{j+1}(t-S_j(t))(1-F(S_j(t)))],$$

a ako je

$$(21) \qquad C(X,S_j,t) = C_1 I\{X_1 < S_j(t)\} + C_2 I\{X_1 \ge S_j(t),\ S_j(t) < t\},$$

biće i

$$(22) \qquad c_j(t) = E\,C(X,S_j,t) = C_1 F(S_j(t)) + C_2[1-F(S_j(t))]\, I\{S_j(t) < t\},$$

$$(23)\qquad K_j(t)=\min\{\inf_{0<S_j(t)<t}[\int_0^{S_j(t)}[C_1+K_{j+1}(t-u)]dF(u)+$$

$$+[C_2+K_{j+1}(t-S_j(t))][1-F(S_j(t))],\ \int_0^{S_j(t)=t}[C_1+K_{j+1}(t-u)]dF(u);\ S_j(t)\in D_j\}$$

jer je $K_{j+1}(0)=0$, po def.

Ako je $D_j=D$ a D ne ograničava $S_j(t)$ na neki podskup od $(0,t]$, to je

$$(24)\qquad K(t)=\min\{\inf_{0<x<t}[\int_0^x(C_1+K(t-u))dF(u)+$$

$$+(C_2+K(t-x))(1-F(x))],\ \int_0^t(C_1+K(t-u))dF(u)\}.$$

Rezultat u (24) je poznat i predstavlja standardni rezultat u teoriji preventivnih zamjena [B P] .

Ako se obratimo na usječene planove, neka je

$$(25)\qquad K_e(t;S_e,S_{e+1},\dots)=K_e(t;S_e,\dots,S_j),\ i$$

$$(26)\qquad K_e^j(t)=\inf_{S_e,\dots,S_j}K_e(t;S_e,\dots,S_j).$$

Na osnovu (17) je jasno da

$$(27)\qquad K_e^j(t)=\inf_{S_e\in D_e}[C_e(t)+EK_{e+1}^j(t-Z_1^e)],\ \ell=\overline{1,j}$$

$$K_{j+1}^j(t)=K_0(t)+\int_0^t K_0(t-u)\,dH(u),\ K_0(t)=EC(X_1,t,t).$$

Ako su $D_i=D$, to S_i od i ne zavise, pa ako označimo

$$(28)\qquad K_e^j(t)=K^{j-e+1}(t),$$

$$(29)\qquad K^{i+1}(t)=\inf_{S\in D}[C(t)+EK^i(t-Z_1)],\ K^0(t)=EC(X_1,t,t).$$

Od daljeg interesa je ispitivanje funkcija $K_1^j(t;S_1,\dots,S_j)$ i njihovog odnosa sa $K_1(t;S_1,S_2,\dots)$, tj. da li $\lim_i K^i(t)=$

$= k(t)$, i slično, postojanje optimalnog plana i njegovo nalaženje. Osnovne jednačine daju jedan od puteva za rješavanje tih problema. Ovdje smo ih samo naznačili i nećemo se udubljivati. Specijalni slučaj $S_i = S_i(t)$ je najčešće ispitivan, sa raznih prilaza. U odredjenim situacijama je dokazano da se opšti slučaj svodi na taj specijalni, tj. da se umjesto slučajnih planiranih momenata zamjena, mogu uzeti neslučajni.

IV 2. Inspekcija sa obnavljanjem

1. Metod sličan onom u 2.2. daje interesantne rezultate i za probleme razmatrane u glavi III.

Neka je $y_i(X_i t)$ niz sl. veličina za koje važi

$$(30)\qquad X \le y_i(X_i,t) \le t, \quad y_i \in D_i$$

D_i -takozvani skup dopustivih momenata inspekcije. Neka je, slično sa (13)

$$(31)\qquad z_1^j(t) = y_j(X_j,t),\ z_{i+1}(t) = y_{j+i-1}(X_{j+i-1}, t - z_1^j - \dots - z_i^j),\ i=1,2,\dots$$

Neka je $c(X, y_i, t)$ gubitak od inspekcije i uključivanja na $[0,t]$, elementa X , i

$$(32)\qquad c_i(t) = E\,c(X, y_i, t) = E\,c(X_i, y_i, t)$$

Neka je

$$(33)\qquad c_j(t; y_j, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} c(X_{j+i-1}, y_{j+i-1}, t - z_1^j - \dots - z_{i-1}^j) =$$

$$= c(X_j, y_j, t) + c_{j+1}(t - z_1^j, y_{j+1}, \dots).$$

Odatle je za

$$(34)\qquad k_j(t; y_j, \dots) = E\,c_j(t; y_j, \dots)$$

$$(35)\qquad k_j(t; y_j, \dots) = E\,c(X_1, y_j, t) + E\,k_{j+1}(t - z_1^j; y_{j+1}, \dots).$$

Neka je

(36) $$K_j(t) = \inf_{y_j, y_{j+1}, \dots} K_j(t; y_j, \dots)$$

odakle je

(37) $$K_j(t) = \inf_{y_j} [C_j(t) + E K_{j+1}(t - z_1^j)]$$

slično sa (17) ; ovdje $C_j(t)$ i z_1^j zavise od y_j .

2. Pokazaćemo kako se iz opštih zaključaka paragrafa 1. mogu izvesti neki osnovni rezultati u <u>III2.2</u>.

Neka je

(38) $$z_1^j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^j(t) I\{s_{i-1}^j(t) \le X < s_i^j(t)\} + t I\{X \ge t\} .$$

Neka je $T < s_1^j(t) < t$ i

(39) $$V_j(T, t; y_j, \dots) = I\{T \le X_j\} C_j(t; y_j, \dots) .$$

Tada je, slično kao u <u>III 2.2</u>.

$$V_j(T, t; y_j, \dots) = I\{T \le X_j < s_1^j(t)\} C_j + I\{s_1^j(t) \le X_j\} C_j =$$

$$= C(X_j, y_j, t) I\{T \le X_j < s_1^j\} + I\{T \le X_j < s_1^j\} C_{j+1}(t - s_1^j; y_{j+1}, \dots) +$$

$$+ I\{s_1^j \le X_j\} C_j(t; y_j^{\prime}, y_{j+1}, \dots) + I\{s_1^j \le X_j\}[C(X_j, y_j, t) -$$

$$- C(X_j, y_j^{\prime}, t)] =$$

$$= C(X_j, y_j, t) I\{T \le X_j < s_1^j\} + I\{s_1^j \le X_j\}[C(X_j, y_j, t) - C(X_j, y_j^{\prime}, t)] +$$

$$+ I\{T \le X_j < s_1^j\} V_{j+1}(0, t - s_1^j; y_{j+1}, \dots) + V_j(s_1^j, t; y_j^{\prime}, y_{j+1}, \dots) ,$$

gdje je $y_j^{\prime}$ plan u kome je $s_i^{\prime j}(t) = s_{i+1}^j(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Odatle je

$$K_j(T, t; y_j, \dots) = E V_j(T, t; y_j, \dots) =$$

$$= E\, C(X_j, y_j, t) I\{T \le X_j < s_1^j\} + E[C(X_j, y_j, t) - C(X_j, y_j^{\prime}, t)] I\{s_1^j \le X\} +$$

$$+ [F(s_1^j) - F(T)] K_{j+1}(0, t - s_1^j; y_{j+1}, \dots) + K_j(s_1^j, t; y_j^{\prime}, y_{j+1}, \dots) =$$

$$= A(T, S_1^j(t)) + B(T, S_1^j(t)) K_{j+1}(0, t-S_1^j; y_{j+1}, \dots) +$$
$$+ K_j(S_1^j(t), t; y_j', y_{j+1}, \dots) .$$

koliko prvi i drugi sabirak zavise samo od T i S_1^j , a
e od y_j u cjelosti.

U tom slučaju se za

$$\text{0)} \qquad K_j(T, t) = \inf_{y_j, y_{j+1}, \dots} K_j(T, t; y_j, y_{j+1}, \dots)$$

obija

$$\text{11)} \qquad K_j(T, t) = \min \{ K_1(T, t), \inf_{T < S_1^j(t) < t} [A(T, S_1^j(t)) +$$
$$+ B(T, S_1^j(t)) K_{j+1}(0, t - S_1^j(t)) + K_j(S_1^j(t), t)] \} ,$$

er plan na $[0, t - S_1^j(t)]$ ne zavisi od dijela plana na
$[S_1^j, t]$,a $K_1(T, t) = EV_1(T, t; t)$,tj. provjera se
rši samo u tački t . Ako K_j od j ne zavisi, dobi-
a se slična formula.

Ako sa $C_j^i(t; y_j, \dots)$ označimo troškove po plano-
ima y_j , y_{j+1}, ... gdje se dopušta najviše i provjera
kupno, za $K_j^i(T, t)$ i $K^i(T, t)$,definisane slično sa
(26) i (28) , se dobijaju odgovarajuće formule.

U slučaju $c(x, y, k) = c(x, y) + k \cdot \ell$ je zahtjev
a $A(T, S_1^j(t))$ i $B(T, S_1^j(t))$ ne zavise od y_j u
jelosti ispunjen. Primijetimo da,u suštini, taj zahtjev i
e može biti ispunjen, ukoliko funkcija gubitaka nema ne-
u formu sličnu sa takvom.

LITERATURA

I

[A] Adamović D.D. O gornjem i donjem limesu Zbornik: Izabrana poglavlja iz matematike,I ,Zavod za izd.udžb.NRS, Beograd, 1961.

[BK] Bellman R.,Kalaba R. Dyn .Prog and Modern Control Theory /Bellman R.,Kalaba R. Din. Prog. i Sovrem. Teorija Upravl. ,M. "Nauka" 1969.

[BP] Barlow R.E.,Proschan F. Math.Theory of Reliab. /Barlou R.,Prošan F. Mat. Ter. Nadežnosti , M. "Sov.Radio",1969./

[F] Feller W. An Intr. to Prob.Th. and Its Appl. II /Feller V. Vvedenie v teoriju ver. i ee pril.II M. "Mir", 1967./

[GK] Gabasov R.,Kirillova F.M. Osnovi dinamičeskogo programmirovanija , Minsk 1975

[GBS] Gnedenko B.V.,Beljajev J.K.,Solovjev A.D. Mat. metodi v teorii nadežnosti ,M. "Nauka" ,1965.

[HT] Hennequin P.L.,Tortrat A. Theorie des probabilites et quelques applications /Henneken P.L.,Tortra A. Teor. Ver. i nekotorie ee pril. ,M. "Nauka",1974./

[J] Jorgenson D.W.,McCall J.J.,Radner R. Optimal Replacement Policy , North-Holl.,Amst.,1967.

[Ko] Kopocinski B. Zarus teorii odnowy i niezavodności , Warszawa , 1973.

[K] Cox D.R., Renewal Theory /Koks,Smit Teorija vosstanovlenija , "Sov.Radio" ,1967./

[P1] Pyke R. Markov renewal processes:Def. and prelim. prop.

[P2] M.R.P. with finitely many states, AMS ,v.32, 4.

[R1] Raikin A.L. Elementi teorii nadežnosti dlja proektir.tehn. sistem , M."Sov.radio" ,1967.

[R2] Verojatn. modeli funkcionir. rezervir. ustroistv , M."Nauka" ,1971.

[S] Smith W.L. Renewal Theory and its ramifications /Koks,Smit T.v. ,M."S.R." ,1967./

II

[1] Andronov A.M.,Gercbah I.B.: Opt. prof. u odnoi modeli nakoplenija povrežd.,Izv.ANSSSR T.kib.,1972,4,67-75.
[2] Baklan V.V.: Opt.plan kontr. pribora min. srednii ubitok, tr.Sem."Kibernetika"Doneckoe otd. Vip 1.,Kiev 1968,35-47.
[3] Balaban H.S.: A selected bibl. on reliab.,IRE Trans.Rel. and Qual.Control,1962,11,2,86-1o3.
[4] Barzilovič E.J.: Opred.opt.srokov prof.rabot na avt. sist.,Izv.ANSSSR T.kib.,1964,3,38-45.
[5] :Opt.per. kontr. sistem nedostupnih nepr. prov.,Avt.i telemeh.,1969,8,175-177.
[6] ,Kaštanov V.A.,Kovalenko I.N.: O minmaks. krit.v zadačah nad.,Izv.ANSSSR T.kib.,1971,3,87-99.
[7] Beichelt F.:Zuverlässigkeit und Erneuerung-Die optimale Instandhaltung,Berlin VEB.Verl.Techn.,197o.
[8] :Minmax-Inspektionsstrategien bei partielen Information über die Lebenszeitverteilung,Wiss.z.Techn. Univ.Dresden,1971,2o,2,557-562.
[9] :Optimale Inspektionsstrategien bei Beliebibiger Verlustfuntion,Biometr.Z.,1971,13,6,384-395.
[1o] :Uber eine klasse von Inspektions modellen der Zuverlässigkeitstheorie ,Math.Oper.forsch.und Stat.1974, 5,4-5,315-332.
[11] Bessonov A.A.:Opt.alg.indik.otkazov, sb.tr.Leningrad. meh.in-ta,1967,62,27-3o.
[12] Ghita Aleksandru:The influence of intermittent operation on reliability,Rev.roum.m.pures et appl.,1972,17,4, 519-53o.
[13] Keller Joseph B.:Opt.checking schedules for systems subject of random failure ,Mang.Sci.,1974,21,3,256-26o.
[14] Lebedinceva E.P.:Raspredelenie funkcii stoimosti poter v zadačah kontrolja,Kib.,1969,5,118-121.
[15] Mališev V.A.,Pinskii A.I.:Optimalnost odnorodnogo uprav. v odnoi zadače teorii nad.,T.ver.i ee pr.,197o,15,1, 149-154.
[16] Makabe Hajime,Morimura Hidenori,:On some prev.maintenance policies, J.Oper.Res.Soc.Jap.,1963,6,1,17-47.
[17] Marno I.B.: O cikličnosti opt.upr. v zadače o prof., Izv.ANSSSR,T.kib.,1969,5,38-43.
[18] Roeloffs R.:Minmax surveillance schedules for replaceable units,Nav.Res.Log.Quart.,1967,14,4,461-471.
[19] Saas D.:Ob odnoi nelineinoi zadače opt.,Stud.Sci.math. hung.,1975,9,1-2,93-1oo.
[2o] Špak V.D.:O nad. sistem s zaščitoi pri vost.otkazov po rezult.kontr.prov.,u sb. Alg.met.v t.nad.,Kiev,1974,49-6o

Spisak je pravljen prema Ref.Žurnalu-Mat.,i odnosi se na probleme inspekcije i bliske njima.Lit. za period do 1963 se može naći u [BP] ili u [3].Literatura iz spiska nije čitava korišćena aktivno,zbog razlika u prilazu.