U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Rašković D. Miodrag

LOGIKE SA MEROM U LAJBNICOVOM UNIVERZUMU

(doktorska disertacija)

BEOGRAD, 1983. godine

S A D R Ž A J

UVOD

Veliki nemački matematičar i filozof Lajbnic (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) radeći sa beskonačno malim veličinama (infinitezimalama) stvorio je nezavisno od svog slavnog savremenika Njutna (Newton Isaac, 1642-1727) diferencijalni i integralni račun. Međutim, uticaj Lajbnica na dalji razvoj matematike, koji proističe iz snage njegovih metoda i broja njegovih naslednika (na primer braća Bernuli (Bernoulli)), mnogo je veći.

Kako primećuje Branislav Petronijević (v. [37]) Lajbnic je beskonačno male veličine posmatrao u postojanju a ne u postajanju.

Oznake,koje su ostale skoro neizmenjene do danas, i metode koje je on uveo pokazale su se izuzetno plodnim. Pomoću njih su ubrzo rešena tri veoma značajna problema:

1) problem tangente
2) problem maksimuma i minimuma
3) problem kvadrature krivoliniskih figura

Ali, od samog početka, javile su se sumnje u postojanje infinitezimala. Sam Lajbnic koji je u njihovo postojanje verovao, bezuspešno je pokušavao da izvede njihovo postojanje iz svoje metafizike (v. [44]). To pitanje je i posle njega ostalo otvoreno, pogotovu što su mnogi pogrešnom primenom Lajbnicovih principa i nemajući njegovu intuiciju došli do pogrešnih zaključaka.

Stoga se, u toku dugogodišnjih pokušaja zasnivanja analize, nastojalo da se infinitezimale izbace iz matematike.

Veliki doprinos u tom pravcu dao je Koši (Cauchy) ali je i on radio sa infinitezimalama. One su izbačene (mislilo se zauvek) stvaranjem Vajerštrasovog (Weierstrass) $\varepsilon - \delta$ računa.

Međutim, Abraham Robinson (1918-1974) je šezdesetih godina ovog veka, sredstvima teorije modela, izvršio racionalnu rekonstrukciju Lajbnicovih ideja. On je pokazao da radeći po tačno određenim pravilima sa infinitezimalama ne možemo doći do protivurečnosti ako do nje nismo došli radeći sa konačnim veličinama (brojevima).

Problem zasnivanja infinitezimala je na takav način bio rešen, ali se nastavilo sa traženjem novih mogućnosti. Treba posebno istaći Vopenkinu (P. Vopenka) alternativnu teoriju skupova (kraće AST) u kojoj se polazeći od, bar po Vopenki, intuitivno prihvatljivih aksioma mogu direktno ostvariti mnoge Lajbnicove ideje.

Rekonstrukcija koju je izvršio, podstakla je Robinsona da reafirmiše upotrebu infinitezimala i stvori takozvanu nestandardnu analizu. U njoj se neki pojmovi iz analize, kao na primer neprekidnost, algebrizuju.

Nestandardna analiza postala je snažna metoda i u isto vreme značajna oblast matematike.

Primena nestandardne analize na teoriju mere bilo je i pre fundamentalnog Lebovog (P. Loeb) rada [27] u kome je pokazao kako se prirodno može preći sa konačnih verovatnosnih prostora na beskonačne. Od tog rada primena argumenata konbinatorike je moguća i u kontinuiranom prostoru, pa onda nije čudo što je Lebova mera koja je tom prilikom uvedena postala jedno od centralnih područja istraživanja u nestandardnoj analizi.

Lebova mera nastaje od najjednostavnije, t. zv. prebrajajuće, mere i Lebegova (Lebesque) mera se može dobiti iz Lebove. Merljivim funkcijama odgovaraju, kao dobre aproksimacije, hiperkonačne funkcije koje imaju sve"dobre"osobine konačnih funkcija. Takođe, integralu odgovara **hiperkonačna suma.**

Džerom Kisler (H.J. Keisler) je nastojeći da primeni teoriju modela na verovatnoću, uveo nekoliko novih logika koje se od klasične razlikuju po tome što umesto kvantora $\forall$ i $\exists$ imaju verovatnosne kvantore. On je zajedno sa Huverom (Hoover) dokazao mnoge modelsko teoretske stavove koji se odnose na ove logike. U dokazima tih stavova bitno se koristi nestandardna analiza i posebno Lebova mera.

Centralni pojam u ovom radu,podeljenom u tri dela,čini Lebova mera.

U prvom delu dat je pregled osnovnih pojmova i stavova iz nestandardne analize i teorije mere koje dalje koristimo. Originalan doprinos dat je jedino u okviru podnaslova:Primena na funkcionalne jednačine. Tu je, primenom lifting teorema, za dosta široku klasu funkcionalnih jednačina pokazano da je svako merljivo rešenje neprekidno. Kao posledica se dobija dobro poznati stav, da ako je f merljiva funkcija i zadovoljava Košijevu (Cauchy) jednačinu $f(x+y)=f(x)+f(y)$, onda je $f(x)=f(1)\cdot x$.

U drugom delu izgrađuju se logike $L_{\omega M}$, $L_{\omega_1 M}$, $L_{\mathcal{A} M}$ i $L^{S}_{\mathcal{A} M}$ kod kojih su za razliku od verovatnosnih logika (v. [14], [15], [24]) modeli σ-konačni.

Interes za razmatranje ovakvih struktura dolazi od toga što postoji veliki broj važnih σ-konačnih mernih prostora, kao što je na primer Lebegov prostor na R, a takođe se i mnoge značajne teoreme kao na primer Fubinijeva mogu raširiti sa konačnog na σ-konačni slučaj.

Pored jednakosti za logičke simbole uzimamo i niz $(R_n : n\in\omega)$ unarnih relacija. One se interpretiraju kao σ-pokrivač univerzuma.

Osnovna ideja je u svođenju σ-konačnog slučaja na konačni. Da bi se to postiglo uvodi se pojam ograničene formule i pokazuje da je svaka formula ekvivalentna Bulovoj (Boole) kombinaciji ograničenih. Odatle sledi da se uvedeni modeli mogu dobro aproksimirati konačnim modelima što nam omogućava da primenimo rezultate Kislera i Huvera za verovatnosne logike.

Aksiome koje dajemo su ili modifikovane aksiome iz [14] i [24] ili su potpuno nove, kao na primer aksiome σ-konačnosti.

Dokazani su stavovi potpunosti, Barvajzova (Barwise) potpunost i kompaktnost za L_{AM}, teorema elementarne ekvivalencije, teorema Robinsonove konzistencije, više interpolacionih teorema, gornja Skolem-Levenhajmova teorema i teorema o normalnoj formi.

Uvođenje ovih logika je u neposrednoj vezi sa istraživačkim problemom 5.3. [24]. Sa tom činjenicom smo se upoznali tek kada su svi rezultati u ovom radu, izuzev teoreme 14, bili dobijeni.

U trećem delu se prvo na početku sažeto izlaže, bez ulaženja u motive njenog uvođenja, AST.

Zatim se izgrađuje i razmatra struktura realnih brojeva. Naročito je interesantna posledica teoreme 25 koja tvrdi da su monada i skup racionalnih brojeva uređajno izomorfni.

Na kraju se izgrađuje Lebova mera u AST. Date su neke teoreme koje su analogne onima dobijenim u nestandardnoj analizi.

Dokazi su, budući da je AST slabija teorija, ponekad komplikovaniji (kao na primer dokaz teoreme 32).

Data su i neka ograničenja ove teorije. Tako na primer metateorema 4 pokazuje da se familija svih merljivih klasa ne može kodirati, pa prema tome ne možemo raditi sa čitavom familijom kao objektom.

Dat je i nov dokaz poznate Luzinove teoreme.

Želim istaći da je Seminar za matematičku logiku, koji je utemeljio, prvenstveno, prof. S. Prešić, imao veliki uticaj na moj naučni rad.

Koristim priliku da se zahvalim prof. S. Prešiću, doc. D. Aranđeloviću, doc. Ž. Mijajloviću i dr Z. Markoviću na korisnim savetima prilikom izrade ovog rada.

Naročitu zahvalnost dugujem doc. Ž. Mijajloviću, rukovodiocu ovog rada, za višegodišnju stručnu pomoć i moralnu podršku.

PRVI DEO

LEBOVA MERA

Osnovni pojmovi iz nestandarne analize

Svaka matematička struktura sastoji se iz univerzuma kao i iz operacija,relacija,familija podskupova i drugih objekata na njemu.Svi ti objekti se mogu prestaviti pa čak i shvatiti,kao elementi takozvane superstrukture formirane nad univerzumom.

Pretpostavimo da je skup realnih brojeva R sadržan u skupu X.Superstruktura nad X je iterirani partitivni skup V(X) koji se definiše na sledeći način:

$$V_0(X)=X$$

$$V_{n+1}(X)=V_n(X)\cup P(V_n(X))$$

$$V(X)=\bigcup_{n\in\omega}V_n(X)$$

Pritom je $\emptyset\notin X$ i $(\forall x\in X)(x\cap V(X)=\emptyset)$.

Za formulu teorije skupova kažemo da je ograničena,ako su joj svi kvantifikatori ograničeni,t.j. oblika $(\forall x\in y)$ i $(\exists x\in y)$.

Neka je:

1) $X\subseteq {}^*X$ i $R\subseteq {}^*R$

2) (Lajbnicov princip) $*$ preslikava V(X) u $V({}^*X)$ tako da je identičko na X i čuva ograničene formule,t.j. za svaku ograničenu formulu $\underline{F}$ sa najviše slobodnim promenljivim $x_1,\dots,x_n$

$$V(X)\models\underline{F}(a_1,\dots,a_n) \text{ akko } V({}^*X)\models\underline{F}({}^*a_1,\dots,{}^*a_n)$$

3) (k-zasićenost) Za svaki $o<n<\omega$ i svaki opadajući lanac $X_0\supseteq\dots X_\alpha\supseteq\dots$ $(\alpha<k)$ nepraznih skupova $X_\alpha\in{}^*V_n(X)$

$$\bigcap_{\alpha<k}X_\alpha\neq\emptyset$$

Skup $V(X)\overset{def}{=}\bigcup_{n<\omega}{}^*V_n(X)$ je nestandardna superstruktura.

Izuzev u dokazu teoreme 13(drugi deo) dovoljno je da $k=\omega_1$.

Egzistencija preslikavanja $*$,kao i nestandarne superstrukture sledi iz Lošove teoreme i leme Mostovskog o kolapsiranju.

Element iz $^*V(X)$ je internalni skup ,a element iz $V(^*X)-{}^*V(X)$ eksternalni skup.Tako je na primer $^*N$ internalni, a N eksternalni skup.

Sledeća dva fakta su veoma značajna.

Fakt 1.

Skup $^*V(X)$ je tranzitivan,t.j. element internalnog skupa je internalan.

Fakt 2. (internalni definicioni princip)

Neka je $\underline{F}(x_1,\dots,x_n,y)$ ograničena formula i neka su A, $A_1,\dots,A_n$ internalni skupovi.Tada je skup:

$$\{x\in A:\ (V(^*X),\in)\models\underline{F}(A_1,\dots,A_n,x)\}$$

internalan.

Pomoću fakta 2 se lako može pokazati da je unija i razlika dva internalna skupa,internalan skup ,pa otuda skup internalnih podskupova internalnog skupa A čini Bulovu algebru skupova.

Kako je $R\subseteq{}^*R$ to je i $N\subseteq{}^*N$.Elementi iz$^*R-R$ ($^*N-N$) su nestandarni realni (prirodni) brojevi.

Polje nestandarnih realnih brojeva $^*R$ je očigledno nearhimedovsko.

Uočavamo:

skup konačni nestandarnih realnih brojeva

$$\mathcal{O}=\{x\in{}^*R:(\exists n\in N)(|x|\leqslant n)$$

skup beskonačno malih nestandardnih realnih brojeva

<u>(infinitezimala)</u>

$$m(o)=\sigma=\{x\in{}^*R:(\forall n\in N-\{o\})(|x|\leq\frac{1}{n})$$

<u>skup beskonačno velikih brojeva</u> $R-\mathcal{O}$

relaciju <u>beskonačno blizu</u> na $\mathcal{O}$

$$x\approx y\longleftrightarrow(\exists r\in R)(x-y\in m(o))\quad(\text{gde je } m(r)=r+m(o)\ )$$

i operaciju standardni deo $st:{}^*R\cup\{\infty,-\infty\}\rightarrow R\cup\{\infty,-\infty\}$ tako da je

$$st(x)=\begin{cases} r & \text{ako } x\in\mathcal{O}, r\in R \text{ i } x\approx r \\ \infty & \text{ako } x\in{}^*R\cup\{\infty,-\infty\}-\mathcal{O}\end{cases}$$

<u>Fakt 3</u>.

Skup $\mathcal{O}$ je podprsten od R,linearno uređen i Arhimedov integralni domen,dok je skup m(o) maksimalan pravi ideal od $\mathcal{O}$ i takođe uređen ideal od $\mathcal{O}$.

<u>Fakt 4</u>.

Uređen kvocijent prsten $\mathcal{O}/\sigma$ je izomorfan sa R.

Napomenimo da su skupovi $R,N,\mathcal{O},\sigma,st,\approx$ eksternalni.

Internalni skup A je <u>hiperkonačan</u> ,ako postoji $H\in{}^*N$ i internalna bijekcija $f:H\xrightarrow{na}A$.Pritom je A internalne kardinalnosti $|A|=H$.

Polazeći od internalnog niza $a:{}^*N\longrightarrow B$ postavlja se pitanje kakav je smisao sume $\sum_{n\leq H}a_n$ za $H\in{}^*N-N$ i kakva joj je vrednost?Na osnovu internalnog definicionog principa lako se pokaže da postoji tačno jedna funkcija s tako da je $s(K)=s(K-1)+a_K$ za $o\leq K\leq H$.Tada je $\sum_{n\leq H}a_n=s(H)$.

Veoma je važno da se niz $b:N\longrightarrow C$,gde je C internalni skup,može raširiti do niza $\overline{b}:{}^*N\longrightarrow C$.To svojstvo je takozvano <u>svojstvo komprehensije</u>.

Zaista,neka je $D_n=\{f | f:{}^*N \longrightarrow C \wedge (\forall m\leq n)(f(m)=b_m)\}$ za $o\leq n<\omega$, $D_n\neq\emptyset$ i $D_n\supseteq D_{n+1}$.Na osnovu ω_1-zasićenosti $\bigcap_{n<\omega} D_n\neq\emptyset$,pa postoji $\overline{b}$ sa željenim svojstvom.

Zanimljivo da je internalni skup ili konačan ili kardinalnosti najmanje 2^ω .Da bismo to pokazali,pretpostavimo da je B internalni skup i Card(B)$\geq\omega$.Funkciju $f:N \xrightarrow{1-1} B$ možemo na osnovu komprehensije da raširimo do funkcije $\overline{f}:{}^*N \longrightarrow B$.Neka je

$A=\{n\in{}^*N | "f\restriction n \text{ je } 1-1"\}$

Kako je A internalni,to je $N \subsetneq A$.Za $H\in A-N$ očigledno je Card(B)$\geq$ Card(H).

Ako uočimo hiperkonačan skup $T_H=\{\frac{k}{H}:k\leq H\}$,t.zv. hiperkonačni vremenski interval,tada kako $st:T_H \xrightarrow{na} [o,1]$ imamo da je Card(H)$\geq$Card(T_H)$\geq 2^\omega$.Odatle,konačno Card(B)$\geq$Card(H)$\geq 2^\omega$.

Napomenimo,da ako su u pitanju t.zv. polisaturirani modeli (Card(V(X))-saturirani),onda svi hiperkonačni skupovi imaju,gledano spolja,istu kardinalnost.Ako se pak,nestandardna superstruktura ostvaruje preko ultrastepena nad prebrojivim ultrafiltrom onda su svi internalni skupovi spoljnje kardinalnosti 2^ω.Naravno u oba slučaja se misli na beskonačne skupove.

Lebova mera

Dajemo sada definicije i stavove iz teorije mere koji su nam potrebni u radu.

Skup A je kvaziinternalan ako je prebrojiva unija rastućeg niza internalnih skupova koji su podskupovi nekog fiksiranog internalnog skupa.Znači ako je B internalan skup i skupovi $A_i\subseteq B$ su internalni,tada je skup $A=\bigcup_{i\in\omega} A_i$ kvaziinternalan.

Trojka $(A,\mathcal{A},\mu)$ je <u>internalni merni prostor</u> ako su $A,\mathcal{A}$

i μ internalni objekti, $\mathcal{A}\subseteq{}^*P(A)$ Bulova algebra merljivih skupova koja sadrži singltone i $\mu:\mathcal{A}\longrightarrow{}^*R\cup\{\infty,-\infty\}$ konačno aditivna nenegativna funkcija.

Primer

Internalni merni prostor čini trojka $(T_H, {}^*P(T_H), \mu)$ gde je $\mu(A)=\frac{|A|}{|H|}$, za $A\in{}^*P(T_H)$.

Posebno, ako $\mu(A)\in\mathcal{O}$ onda je $(A,\mathcal{A},\mu)$ konačan internalni merni prostor. Ako je $\mu(A)=1$ onda je μ verovatnosna mera. Kada je A hiperkonačan skup, tada je za $B\in\mathcal{A}$, $\mu(B)=\sum_{a\in B}\mu(a)$.

Internalnu meru μ prevodimo u standardnu $\bar{\mu}$, definišući za $B\in\mathcal{A}$:

$$\bar{\mu}(B)=\mathrm{st}\,\mu(B)$$

Neka je $(B,\mathcal{B},\mu)$ internalni merni prostor i $\{A_i:\ i\geq o\}$ familija internalnih podskupova iz $\mathcal{B}$ tako da je $\bar{\mu}(A_i)<\infty$ i $A_i\subseteq A_{i+1}$. Ako je $\mathcal{A}=\mathcal{B}\cap A=\{\bar{B}\cap A:\ \bar{B}\in\mathcal{B}\}$ i $\bar{\mu}_A(\bar{B}\cap A)=\sup_i\bar{\mu}(B\cap A_i)$, gde $\bar{B}\cap A\in\mathcal{A}$ i $A=\bigcup_{i\geq o}A_i$, tada je $(A,\mathcal{A},\bar{\mu}_A)$ <u>kvaziinternalan merni prostor</u>.

Primetimo da $\bar{\mu}_A$ nije kvaziinternalan skup. Skupovi A_i su σ-pokrivač skupa A.

Primer

Neka je $B=\{-H,-H+\frac{1}{H},-H+\frac{2}{H},\ldots,H-\frac{2}{H},H-\frac{1}{H},H\}$, $\mathcal{B}={}^*P(B)$ i μ <u>izbrajajuća (uniformna) mera</u> ($\mu(A)=\frac{|A|}{2H}$ za $A\in{}^*P(B)$). Ako je $T=\bigcup_{k\geq o}T_H^k$, gde je $T_H^k=\{-k,-k+\frac{1}{H},\ldots,k-\frac{1}{H},k\}$, tada je $(T,\mathcal{B}\cap T,\mu_T)$ kvaziinternalni merni prostor.

Ako je $\mathcal{A}$ neka familija skupova onda sa $S(\mathcal{A})$ označavamo najmanju σ-algebru generisanu sa $\mathcal{A}$.

Dajemo dve značajne teoreme iz teorije mere (v.[10])

Teorema 1.

Ako je μ σ-konačna mera na prstenu $\mathcal{A}$, tada postoji jedinstvena mera $\bar{\mu}$ na σ-prstenu $S(\mathcal{A})$ tako da je za E iz $\mathcal{A}$ $\bar{\mu}(E)=\mu(E)$; mera $\bar{\mu}$ je σ-konačna.

Teorema 2.

Ako je μ mera na σ-prstenu S, tada klasa $\bar{S}$ svih skupova oblika $E\Delta Q$, gde $E\in S$ i Q je podskup skupa mere nula u S, čini σ-prsten i skupovna funkcija $\bar{\mu}$ definisana sa $\bar{\mu}(E\Delta Q)=\mu(E)$ je kompletna mera na $\bar{S}$.

Lema 1.

Kvaziinternalan skup $A=\bigcup_{i\geq 0} A_i$ je internalan akko je $A=A_n$ za neko $n\in\omega$.

Dokaz: Za $A=A_n$ jasno da je skup A internalan. Da bismo dokazali lemu u drugu stranu, možemo pretpostaviti da niz $\{A_i : i\in\omega\}$ raste, odnosno niz $\{A-A_i \; i\in\omega\}$ opada. Ako je A internalan skup, tada činjenica da

$$\bigcap_{n\in\omega}(A-A_n)=A-\bigcup_{n\in\omega}A_n=\phi$$

nije u kontradikciji sa ω_1-zasićenošću akko je $A=A_n$ za neko $n\in\omega$

Iz teorema 1 i 2 i leme 1 sledi neposredno Lebova teorema.

Teorema 3.

Neka je $(A,\mathcal{A},\mu)$ konačan internalni merni prostor. Tada postoji jedinstvena kompletna mera $\bar{\bar{\mu}}$ na σ-algebri,koja raširuje odgovarajuću standardnu meru $\bar{\mu}=st\mu$.

Ako je $L(A)$ skup svih Leb-merljivih (t.j. $\bar{\bar{\mu}}$-merljivih) skupova na A,tada je $(A,L(A),\bar{\bar{\mu}})$ Lebov prostor.Često ćemo za $\bar{\bar{\mu}}$ koristiti sugestivniju oznaku $L(\mu)$.

Teorema 4.

Za svaki skup $D\subseteq A$,sledeće je ekvivalentno:

i) D je Leb-merljiv

ii) Postoji internalan skup $B\in\mathcal{A}$,tako da je $\bar{\bar{\mu}}(B\Delta D)=0$

iii) Za svaki realan $\varepsilon>0$ postoje internalni skupovi C_1, $C_2\subseteq A$ tako da je $C_1\subseteq D\subseteq C_2$ i $\mu(C_1-C_2)<\varepsilon$.

Lako se vidi da je $S(\mathcal{E})\cap A=S(\mathcal{E}\cap A)$,gde je $\mathcal{E}$ klasa skupova na X i $\mathcal{E}\cap A=\{E\cap A:E\in\mathcal{E}\}$.

Teorema 5.

Neka je $(A,\mathcal{A},\bar{\mu}_A)$ kvaziinternalni merni prostor.Tada postoji jedinstvena kompletna mera $\bar{\bar{\mu}}_A$ na σ-algebri koja raširuje meru $\bar{\mu}_A$.

Skica dokaza: Primetimo da je $A_i\cap L(A)=L(A_i)$ pa za $B\in L(A)$ imamo $B=\bigcup_{i\in\omega}B\cap A_i$ i $B\cap A_i\in L(A_i)$.Otuda je $\bar{\bar{\mu}}_A(B)=\sup_i\bar{\bar{\mu}}(B\cap A_i)$ tražena mera.

Označimo sa st_H restrikciju st na T_H .Sledeća teorema daje zanimljivu vezu između Lebove mere $\bar{\bar{\mu}}$ generisane uniformnom merom na T_H i Lebegove mere μ_L na $[0,1]$.

<u>Teorema 6.</u>

Skup $A\subseteq[0,1]$ je Lebeg-merljiv akko je $st_H^{-1}(A)$ Leb-merljiv i u tom slučaju je

$$\mu_L(A)=\bar{\mu}(st_H^{-1}(A))$$

Neka je A internalan (kvaziinternalan) skup. Funkcija $f:A\longrightarrow R$ je <u>Leb-merljiva</u> akko za svaki $r\in R,\{x\in A: f(x)\leq r\}\in L(A)$.

Funkcije f i g su jednake skoro svuda, što kraće pišemo f=g s.s., ako je $\mu\{x\in A: f(x)\neq g(x)\}=0$.

Internalna (kvaziinternalna) funkcija $F:A\longrightarrow {}^{*}R$, gde je A internalni (kvaziinternalni) skup, je <u>dizajuća funkcija</u> za $f:A\longrightarrow R$ akko je stF=f s.s..

<u>Teorema 7.</u>

Funkcija f je Leb-merljiva akko ima dizajuću funkciju F. Ako je pri tome $|f(x)|\leq n$ za svako $x\in A$, tada možemo naći dizajuću funkciju F sa istim ograničenjem.

Kažemo da je internalna funkcija $F:T_H^k\longrightarrow {}^{*}R$ <u>dizajuća</u> za funkciju $f_0:[-k,k]\longrightarrow R$ ako je $stF(t)=f_0(st(t))$ s.s. na T_H^k.

<u>Teorema 8.</u>

Funkcija $f_0:[-k,k]\longrightarrow R$ je Lebeg-merljiva akko ima dizajuću funkciju $F:T_H^k\longrightarrow {}^{*}R$.

Dokaz sledi neposredno iz teoreme 6.

Ako je f(t)=stF(t) vidimo da važi sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} T_H^k \arrow[r, "F"] \arrow[d, "st"'] \arrow[dr, "f"] & {}^{*}R \arrow[d, "st"] \\ {[-k,k]} \arrow[r, "f_0"'] & R \end{tikzcd}$$

Ako je A internalan (kvaziinternalan) skup, tada je internalna (kvaziinternalna) funkcija $F:A \longrightarrow {}^*R$ uniformno dizajuća ako je $stF(x)=f(x)$ za svako $x \in A$.

Teorema 9.

Neka funkcija f preslikava internalni skup A u R. Funkcija f ima uniformno dizajuću funkciju F akko su $\{x:f(x) \geq r\}$ i $\{x:f(x) \leq r\}$ prebrojivi preseci internalnih skupova.

Posledica

Funkcija $f_o: [-k,k] \longrightarrow R$ ima uniformno dizajuću funkciju F $(stF(t)=f_o(st(t))$ za svako $t \in T_H^k)$ akko je neprekidna.

Pređimo sada na proizvod meru i integraciju. Pojmovi kao što su jednostavna i integrabilna funkcija kao i integral definišu se na uobičajen način.

Teorema 10. (Leb)

Neka je A hiperkonačan skup, $\bar{\mu}(A) < \infty$, funkcija $f:A \longrightarrow R$ merljiva i ograničena, a funkcija $F:A \longrightarrow {}^*R$ dizajuća za f. Tada je:

$$\int_A f(x) \bar{\mu}(dx) \approx \sum_{x \in A} F(x) \cdot \frac{1}{|A|}$$

Do kraja odeljka sa $L(\mu)$ označićemo Lebovu meru generisanu internalnom ili kvaziinternalnom merom μ.

Neka su $(A,\mathcal{A},\mu)$, $(A',\mathcal{A}',\mu')$ i $(A \times A',\mathcal{B},\lambda)$ internalni merni prostori (odnosno $(A,\mathcal{A},\bar{\mu}_A)$, $(A',\mathcal{A}',\bar{\mu}'_{A'})$ i $(A \times A',\mathcal{B},\bar{\lambda}_{A \times A'})$ kvaziinternalni merni prostori) tako da je $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$ i za $B \in \mathcal{A}$ i $B' \in \mathcal{A}'$ imamo $\lambda(B \times B')=\mu(B) \cdot \mu'(B')$ (odnosno $\bar{\lambda}_{A \times A'}(B \times B')=\bar{\mu}_A(B) \cdot \bar{\mu}'_{A'}(B')$). Neka su, dalje, $(A,L(A),L(\mu))$, $(A',L(A'),L(\mu'))$, $(A \times A',L(A \times A'),L(\mu \times \mu'))$ odgovarajući standardni Lebovi prostori,a $(A\times A', L(A)\times L(A'), L(\mu)\times L(\mu'))$ kompletan proizvod prostor.

Važi sledeća Andersonova teorema,pod uslovom da je u internalnom slučaju $L(\mu)(A)<\infty$ i $L(\mu')(A')<\infty$.

<u>Teorema 11.</u>

Ispunjene su sledeće dve relacije:

$$L(A)\times L(A')\subseteq L(A\times A')$$

$$L(\mu\times\mu')|_{L(A)\times L(A')}=L(\mu)\times L(\mu')$$

Uslov da je $L(\mu)(A)<\infty$ i $L(\mu')(A')<\infty$ je nužan,kao što pokazuje sledeći primer.

<u>Primer</u>

Neka je $A=\{a\}$,$\mathcal{A}=\{\emptyset,\{a\}\}$,$\mu(\{a\})=\varepsilon$,$A'=\{a'\}$,$\mathcal{A}'=\{\emptyset,\{a\}\}$ i $\mu'(\{a'\})=\frac{1}{\varepsilon}$,gde je $\varepsilon\approx 0$.Tada je $L(\mu\times\mu')(A\times A')=st(\mu\times\mu')(A\times A')=st(\mu(A)\cdot\mu'(A'))=st(\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon})=st(1)=1$;dok je sa druge strane $L(\mu)\times L(\mu')(A\times A')=L(\mu)(A)\cdot L(\mu')(A')=st(\varepsilon)\cdot st(\frac{1}{\varepsilon})=0\cdot(+\infty)=0$.

Sledeći Huverov primer pokazuje da inkluzija u teoremi 11 može da bude prava.

<u>Primer</u>

Neka je $A=T_H$,$A=2^{T_H}$ i $H=\{(x,y):y(x)=0\}$.Tada se može pokazati da $H\notin L(A)\times L(A')$,dok očigledno $H\in L(A\times A')$.

Važe i sledeće dve Fubinijeve teoreme koje navodimo bez dokaza.

<u>Teorema 12.</u>

Neka su A i A' internalni(kvaziinternalni) skupovi,a

$(A,S(A),L(\mu))$ i $(A,S(A'),L(\mu'))$ odgovarajući konačni (σ-konačni) Borelovi prostori.

Neka $S\in S(A\times A')$. Tada:

i) Za svako $b\in A$

$$\{a:(a,b)\in S\}\in S(A')$$

ii) Za svako $r\in R\cup\{\infty,-\infty\}$

$$\{b:L(\mu')(\{a:(a,b)\in S\})>r\}\in S(A)$$

iii) Ako je $L(\mu\times\mu')(S)=0$, tada

$$L(\mu)(\{b:L(\mu')(\{a:(a,b)\in S\})>0\})=0$$

<u>Teorema 13.</u>

Neka su A i A' internalni (kvaziinternalni) skupovi, a $(A,L(A),L(\mu))$, $(A',L(A'),L(\mu'))$ i $(A\times A',L(A\times A'),L(\mu\times\mu'))$ konačni (σ-konačni) Lebovi prostori.

Ako je funkcija $f:A\times A'\longrightarrow R$ $L(\mu\times\mu')$-integrabilna, tada

i) Funkcija $f^u(v)=f(u,v)$ je $L(\mu')$-integrabilna $L(\mu)$-s.s.

ii) $F(u)=\int f(u,v)L(\mu')(dv)$ je $L(\mu)$-integrabilna

iii) $\int F(u)L(\mu)(du)=\int f(u,v)L(\mu\times\mu')(duv)$

<u>Primena na funkcionalne jednačine</u>

Primenićemo sada teoreme o dizajućoj funkciji na jednu klasu funkcionalnih jednačina. Kao posledica naredne Hanove teoreme, dobija se dobro poznati rezultat da merljiva funkcija f koja zadovoljava Košijevu jednačinu

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

ima oblik $f(x)=f(1)\cdot x$.

Teorema 14.

Neka je funkcija $f:R\longrightarrow R$ merljiva u smislu Lebega, funkcija $g:R^4\longrightarrow R$ neprekidna i neka je

$$f(x+y)=g(f(x),f(y),x,y)$$

Tada je i f neprekidna funkcija.

Dokaz: Neka je $(T_H^{2k},P(T_H^{2k}),\mu)$ internalni merni prostor gde je μ izbrajajuća funkcija i $\bar{\bar{\mu}}$ odgovarajuća Lebova mera. Očigledno je $\bar{\bar{\mu}}(T_H^{2k})=4k$.

Lebeg-merljiva funkcija $f_k=f\restriction[-2k,2k]$ prema teoremi 8 ima dizajuću funkciju F_o. Otuda prema teoremi 4,iii) postoji internalni skup $A\subseteq T_H^{2k}$, tako da $\bar{\bar{\mu}}(A)>3k$.

Tvrdimo da je za $x\in T_H^k$,

$$(x-A)\cap A\neq\emptyset \qquad (*)$$

U suprotnom bilo be

$$4k\geq\bar{\bar{\mu}}(((x-A)\cap T_H^{2k})\cup A)=\bar{\bar{\mu}}((x-A)\cap T_H^{2k})+\bar{\bar{\mu}}(A)>2k+3k=5k$$

što je nemoguće.

Relacija $(*)$ nam omogućava da za $x\in T_H^k$ definišemo "popravljenu" dizajuću funkciju na sledeći način:

$$F(x)=\min\{{}^*g(F_o(y),F_o(z),y,z): x=y+z\wedge y,z\in A\}$$

Ako je $x=y_o+z_o$ tada

$$st(F(x))=st({}^*g(F_o(y_o),F(z_o),y_o,z_o))=$$
$$g(st(F_o(y_o)),st(F_o(z_o)),st(y_o),st(z_o))=$$
$$g(f(st(y_o)),f(st(z_o)),st(y_o),st(z_o))=$$
$$f(st(y_o)+st(z_o))=f(st(y_o+z_o))=f(st(x))$$

Vidimo da je F uniformno dizajuća funkcija na $[-k,k]$ za funkciju f_k pa prema posledici teoreme 9 i neprekidna na tom intervalu. Kako to pak važi za svako k iz N, to je funkcija f neprekidna.

Kažemo da su operacije $x=h(y,z)$ i $x=t(y,z)$ suprotne jedna drugoj ako je

$$x=t(y,z)\leftrightarrow y=h(x,z)$$

Važi sledeće uopštenje teoreme 14. Dokaz je sličan pa ga izostavljamo.

Teorema 15.

Neka je $f:R\longrightarrow R$ merljiva funkcija, dok su funkcije $g:R^4\longrightarrow R$, $t:R^2\longrightarrow R$ i $h:R^2\longrightarrow R$ neprekidne. Ako su funkcije t i h uzajamno suprotne i ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

i) $f(t(x,y))=g(f(x),f(y),x,y)$

ii) $(\forall k\in N-\{o\})(\exists\varepsilon>o)(\exists l\geq k)(\forall A\subseteq T_H^1)((\text{"A internalan"}$

$$\bar{\mu}(A\Delta T_H^1)<\varepsilon)\rightarrow(\forall x\in[-k,k])({}^*h(x,A)\cap A\neq\emptyset))\qquad (H\in{}^*N-N)$$

tada je i funkcija f neprekida.

Primer

Funkcije $x=az+by$ i $x=\frac{y-az}{b}$ za $a,b\in Z$ i $b\neq o$ su suprotne i zadovoljavaju uslove teoreme.

Takođe se jednostavnom iteracijom lako može pokazati sledeća teorema.

Teorema 16.

Neka je funkcija $f:[o,1]\longrightarrow[o,1]$ merljiva i neka su funkcije $g:[o,1]^n\longrightarrow[o,1]$ i $h:[o,1]^n\longrightarrow[o,1]$ neprekidne. Ako je $f(g(x_1,\dots,x_n))=h(f(x_1),\dots,f(x_n))$, za svako $x_1,\dots,x_n$

$[0,1]$,tada za f,g i h postoje respektivno dizajuće funkcije F,G i H tako da

$$F(G(x_1,\ldots,x_n))=H(F(x_1),\ldots,F(x_n))$$

za sve $x_1,\ldots,x_n \in U$ ($\mu(U)=1$).Pritom ako $x_1,\ldots,x_n \in U$ tada $g(x_1,\ldots,x_n) \in U$.

DRUGI DEO

LOGIKE SA MEROM

Jezik za logike $L_{\omega M}$ i $L_{\omega_1 M}$ sastoji se od relaciskih simbola i simbola za konstante. Pored = za logičke simbole uzimamo niz $\{R_n : n<\omega\}$ unarnih relaciskih simbola.

Formule se razlikuju od formula za $L_{\omega\omega}$ i $L_{\omega_1\omega}$ po tome što umesto kvantifikatora $\forall$ i $\exists$ imaju kvantifikatore oblika $M\vec{x}\geq r$, $M\vec{x}>r$, $M\vec{x}\leq r$ i $M\vec{x}<r$, gde $r\in R\cup\{\infty,-\infty\}$ i $\vec{x}$ je konačan niz promenljivih.

Napomenimo, da se za razliku od njima sličnih logika $L_{\omega_1 P}$ i $L_{\omega P}$, ostali kvantifikatori nemogu izraziti preko kvantifikatora tipa $Mx\geq r$. Takođe je dovoljno koristiti kvantifikatore oblika $Mx\geq r$, $Mx>r$, $Mx\leq r$ i $Mx<r$ ne smanjujući snagu logike, ali je praktičnije koristiti sve kvantifikatore.

Model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$, gde je $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\ldots)$ i koga ćemo niže bliže odrediti, sastoji se od klasične strukture $\mathfrak{A}=(A,\ldots)$ i familije mernih prostora $((A^n,\mathcal{A}_n,\mu_n):n<\omega)$

Zadovoljenje za kvantifikator $M\vec{x}\geq r$ definišemo sa:

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(M\vec{x}\geq r)\underline{F}(\vec{x}) \text{ akko } \mu_n(\{\vec{a}\in A^n:(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\underline{F}(\vec{a})\})\geq r$$

Slično se definiše zadovoljenje i za ostale kvantifikatore.

Da vidimo sada kroz neke primere šta se u ovoj logici može da izrazi.

Kažemo da je model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ bez tačaka pozitivne mase ako je $\mu_1(\{a\})=o$ za svaki $a\in A$.

<u>Tvrđenje 1.</u>

Model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ je bez tačaka pozitivne mase akko

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\neg(Mx>o)(My>o)(x=y)$$

Dokaz: Očigledno

$$\mu_1(\{a\})>o \text{ akko } (\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(My>o)(x=y)(a)$$

Tako ako model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ nema tačaka pozitivne mere, tada

$$\{a\in A:(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(My>o)(x=y)(a)\}=\emptyset$$

pa je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\neg(Mx>o)(My>o)(x=y)$

Sa druge strane, ako je $\mu_1(\{b\})>o$ tada

$$\mu_1(\{a\in A:(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(My>o)(x=y)(a)\})\geq\mu_1(\{b\})>o$$

pa je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(Mx>o)(My>o)(x=y)$.

Neka je f funkcija iz A u $R\cup\{\infty\}$. U logici $L_{\omega_1 M}$ možemo izraziti više svojstava funkcije f u slučaju da L sadrži, za svako $s\in Q$, relaciski simbol $[f>s](\cdot)$ koji se interpretira sa:

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models[f>s](a) \text{ akko } f(a)>s$$

Tvrđenje 2.

Funkcija f je skoro svuda konačna akko

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models \bigwedge_n \bigvee_{\substack{q\in Q\\ q>o}} (Mx<\tfrac{1}{n})(\neg\,[f>-q](x)\vee[f>q](x))$$

Tvrđenje 3.

Niz funkcija $(f_n:n\in\omega)$ konvergira funkciji f skoro svuda akko

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(Mx\leq o)(\bigvee_n \bigwedge_{m_o} \bigvee_{m\geq m_o} \bigvee_{q\in Q}([f>q](x)\wedge\neg[f_m>q-\tfrac{1}{n}](x)))$$

Tvrđenje 4.

Niz funkcija $(f_n:n\in\omega)$ konvergira po meri funkciji f akko

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\bigwedge_n \bigwedge_k \bigvee_{m_o} \bigwedge_{m\geq m_o}(Mx<\tfrac{1}{n})(\bigvee_{q\in Q}([f>q](x)\wedge \neg[f_m>q-\tfrac{1}{k}](x)))$$

Ako formulu iz tvrđenja 3 označimo sa $\underline{A}$ a onu iz tvrđenja 4 sa $\underline{B}$, tada je u $L_{\omega_1 P}$ (gde je $\mu_1(A)=1<\infty$) $\models \underline{A}\to\underline{B}$ pa zbog njene potpunosti imamo $\vdash \underline{A}\to\underline{B}$. Međutim, kako su naši modeli beskonačne mere, to nije $\models \underline{A}\to\underline{B}$ pa time i nije $\vdash \underline{A}\to\underline{B}$.

Def. 1.

Merni model je struktura $(\mathfrak{A},\vec{\mu})=(\mathfrak{A},\mu_n)_{n\in\omega}$ gde:

1) $\mathfrak{A}=(A,S_i,c_j)_{i\in I, j\in J}$ je klasičan model bez funkcija

2) Za $0<n<\omega$, μ_n je mera na A^n

3) Za $0<m,n<\omega$, $\mu_m \times \mu_n \subseteq \mu_{m+n}$

4) Mera μ_n je invarijantna u odnosu na permutacije. Tako, ako je π permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$, $K\in dom(\mu_n)$ i $\pi K=\{(a_{\pi(1)},\dots,a_{\pi(n)}):(a_1,\dots,a_n)\in K\}$ tada $\pi K\in dom(\mu_n)$ i $\mu_n(\pi K)=\mu_n(K)$

Neka $S\in dom(\mu_{m+n})$, tada:

5) Za svaki $\vec{a}\in A^n$

$$\{\vec{y}\in A^m:(\vec{y},\vec{a})\in S\}\in dom(\mu_m)$$

6) Za svaki $r\in R\cup\{\infty,-\infty\}$

$$\{\vec{x}\in A^n:\mu_m(\{\vec{y}\in A^m:(\vec{y},\vec{x})\in S\})>r\}\in dom(\mu_n)$$
$$\vec{x}\in A^n:\mu_m(\{y\in A^m:(\vec{y},\vec{x})\in S\})\geq r\}\in dom(\mu_n)$$
$$\vec{x}\in A^n:\mu_m(\{y\in A^m:(\vec{y},\vec{x})\in S\})<r\}\in dom(\mu_n)$$
$$\vec{x}\in A^n:\mu_m(\{y\in A^m:(\vec{y},\vec{x})\in S\})\leq r\}\in dom(\mu_n)$$

7) Ako je $\mu_{m+n}(S)=0$, tada

$$\mu_n(\{\vec{x}\in A^n:\mu_m(\{\vec{y}\in A^m:(\vec{y},\vec{x})\in S\})>0\})=0$$

8) $\mu_{m+n}(S)=\int\mu_m(dx)\int\chi_S\mu_n(dy)$

9) Sve atomske formule su merljive

10) $A=\bigcup_{i\in\omega}R_i^{\mathfrak{A}}$ i $\mu_1(A)=\infty$

11) Skup relacija $\{R_i : i<\omega\}$ čini σ-pokrivač skupa A,t.j. za $i\in\omega, \mu_1(R_i)<\infty$ i $R_i \subseteq R_{i+1}$.

Sledeće tvrđenje koje pokazuje korektnost relacije zadovoljenja sledi iz tačke 6) prethodne definicije.

Tvrđenje 5.

Ako je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ merni model, tada za svaku formulu $\underline{A}(\vec{x},\vec{y})$ iz $L_{\omega_1 M}$ i svaki niz $\vec{b}\in A^n$ skup

$$\{\vec{a}\in A^m : (\mathfrak{A},\vec{\mu})\models \underline{A}(\vec{a},\vec{b})\} \quad \mu_m\text{-merljiv.}$$

Dokaz se izvodi indukcijom po izgrađenosti formula.

Može se postaviti pitanje zašto se ne posmatra samo produkt mera, t.j. zašto nismo pretpostavili da je $\mu_n=(\mu_1)^n$? Odgovor bi bio da su za praksu interesantni i slučajevi kada je $\mu_n \times \mu_m \subseteq \mu_{n+m}$.

Pre nego što damo spisak aksioma i pravila izvođenja za logike $L_{\omega M}$ i $L_{\omega_1 M}$ definišimo "desnu negaciju" $\underline{A}^\urcorner$.

Def. 2.

$\underline{A}^\urcorner$ je $\neg\underline{A}$ ako je $\underline{A}$ atomska formula

$(\bigwedge_{n<\omega}\underline{A}_n)^\urcorner$ je $\bigvee_{n<\omega}\neg\underline{A}_n$

$(\bigvee_{n<\omega}\underline{A}_n)^\urcorner$ je $\bigwedge_{n<\omega}\underline{A}_n$

$(\neg\underline{A})^\urcorner$ je $\underline{A}$

$((M\vec{x}>r)\underline{A})^\urcorner$ je $(M\vec{x}\leq r)\underline{A}$

$((M\vec{x}\geq r)\underline{A})^\urcorner$ je $(M\vec{x}<r)\underline{A}$

$((M\vec{x}<r)\underline{A})^\urcorner$ je $(M\vec{x}\geq r)\underline{A}$

$((M\vec{x}\leq r)\underline{A})^\urcorner$ je $(M\vec{x}>r)\underline{A}$

Aksiome i pravila izvođenja za $L_{\omega M}$ i $L_{\omega_1 M}$

1) $\underline{A} \longrightarrow (\underline{B} \longrightarrow \underline{A})$

2) $(\neg \underline{B} \longrightarrow \neg \underline{A}) \longrightarrow (\underline{A} \longrightarrow \underline{B})$

3) $(\underline{A} \longrightarrow (\underline{B} \longrightarrow \underline{C})) \longrightarrow ((\underline{A} \longrightarrow \underline{B}) \longrightarrow (\underline{A} \longrightarrow \underline{C}))$

4) $(\neg \underline{A}) \longleftrightarrow (\underline{A}^{\neg})$

5) $(\wedge \phi) \longrightarrow \underline{A}$, gde $\underline{A} \in \phi$

6) $x=x$

7) $x=y \longrightarrow y=x$

8) $\underline{A}(x) \wedge x=t \longrightarrow \underline{A}(t)$ (t je term slobodan za x u $\underline{A}(x)$)

9) $\dfrac{\underline{B},\ \underline{B} \longrightarrow \underline{A}}{\underline{A}}$

10) $\dfrac{\underline{B} \longrightarrow \underline{A} \text{ za svako } \underline{A} \in \phi}{\underline{B} \longrightarrow \wedge \phi}$

11) $\dfrac{\underline{A}(x)}{\underline{A}(t)}$

Aksiome i pravila izvođenja mernog kvantifikatora

12) $(M\vec{x} \geq r)\underline{A}(\vec{x}) \longrightarrow (M\vec{x} \geq s)\underline{A}(\vec{x})$ $s<r$, $r,s \in R \cup \{\infty, -\infty\}$

13) $(M\vec{x} > r)\underline{A}(\vec{x}) \longrightarrow (M\vec{x} > s)\underline{A}(\vec{x})$

14) $(M\vec{x} > r)\underline{A}(\vec{x}) \longrightarrow (M\vec{x} \geq r)\underline{A}(\vec{x})$

15) $(M\vec{x} \geq r)\underline{A}(\vec{x}) \longleftrightarrow (M\vec{y} \geq r)\underline{A}(\vec{y})$

16) $(Mx > r)\underline{A}(\vec{x}) \longleftrightarrow (M\vec{y} > r)\underline{A}(\vec{y})$

17) $(Mx \geq o)(x=x)$

18) $\dfrac{\underline{B} \quad \underline{A}(\vec{x})}{\underline{B} \quad (M\vec{x} \geq \infty)\underline{A}(\vec{x})}$

19) $\dfrac{\underline{B} \quad \underline{A}(\vec{x})}{\underline{B} \quad (M\vec{x} \leq o)\neg \underline{A}(\vec{x})}$

20) $((M\vec{x}\leq o)(\underline{A}(\vec{x})\wedge \underline{B}(\vec{x}))\wedge (M\vec{x}\geq r)\underline{A}(\vec{x})\wedge (M\vec{x}\geq s)\underline{B}(\vec{x}))$
$\longrightarrow (Mx\geq r+s)(\underline{A}(x)\vee \underline{B}(x))$

21) $((Mx\leq r)\underline{A}(x)\wedge (Mx\leq s)\underline{B}(x))\longrightarrow (Mx\leq r+s)(\underline{A}(x)\vee \underline{B}(x))$

Aksiome i pravilo izvođenja σ-konačnosti

22) $(Mx<\infty)R_i(x)\wedge (Mx\leq o)(R_i(x)\wedge \neg R_{i+1}(x))$ $\quad i\in\omega$

23) $(Mx\geq i)R_i(x)$

Neka je $R_i^n(x_1,\dots,x_n)\doteq R_i(x_1)\wedge\dots\wedge R_i(x_n)$

24) $$\frac{\underline{B}\longrightarrow (Mx\leq r)(\underline{A}(x)\wedge R_i^n(x))\quad i\in\omega}{\underline{B}\longrightarrow (Mx\leq r)\underline{A}(x)}$$

Aksiome i pravila izvođenja neprekidnosti

25) Za svako $n>o, i>o, r\in R^+, \underline{B}(\vec{x},\vec{y})$ i gde je s dužina niza $\vec{y}$:

$$\frac{\underline{A}\longrightarrow (My\geq \frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[r-\frac{1}{m},r))\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))\quad m\in\omega-\{o\}}{\underline{A}}$$

Pritom je: $(M\vec{x}\in[r,s))\underline{A}(x)\longleftrightarrow (Mx\geq r)\underline{A}(x)\wedge (Mx<s)\underline{A}(x)$

26) $\bigwedge_n \bigvee_m (M\vec{y}<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[r-\frac{1}{m}))\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))$ $\quad i\in\omega \quad r\in R^+$

27) Za svako $n>o, i>o, r\in R^+, \underline{B}(\vec{x},\vec{y})$ i gde je s dužina niza $\vec{y}$:

$$\frac{\underline{A}\text{---}(M\vec{y}\geq \frac{1}{n})(((M\vec{x}\in(r,r+\frac{1}{m}])\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))\quad m\in\omega-\{o\}}{\underline{A}}$$

Pritom je: $(M\vec{x}\in(r,s])\underline{A}(\vec{x})\longleftrightarrow (M\vec{x}>r)\underline{A}(\vec{x})\wedge (M\vec{x}\leq s)\underline{A}(\vec{x})$

28) $\bigwedge_n \bigvee_m (My<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in(r,r+\frac{1}{m}])\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))$ $\quad i\in\omega, r\in R^+$

29) $$\frac{\underline{A}\longrightarrow (My\geq \frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[m,\infty))\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))\quad m>o, n>o}{\underline{A}}$$

30) $\bigwedge_n \bigvee_m (M\vec{y}<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[m,\infty))\underline{B}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^s(\vec{y}))$ $\quad i>o$

31) $\bigwedge_n \bigvee_{\substack{\Phi_o\,\text{kon.}\\ \Phi_o\subseteq\Phi}} (My<\frac{1}{n})(\bigwedge\Phi_o(\vec{y})\wedge\neg\bigwedge\Phi(\vec{y})\wedge R_i^s(\vec{y}))$

Fubinijeve aksiome

Neka je π permutacija skupa $\{1,\dots,n\}$ i $x^{\pi}=(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$

32) $(M\vec{x} \geq r)\underline{A}(\vec{x}) \longleftrightarrow (Mx^{\pi} \geq r)\underline{A}(\vec{x})$

33) $(M\vec{x} > r)A(\vec{x}) \longleftrightarrow (M\vec{x}^{\pi} > r)A(\vec{x})$

Neka je $o = s_1 \leq s_2 \ldots \leq s_n$ i s je zbir dužina nizova $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

34) $$\Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} (M\vec{x} \leq r_i)(M\vec{y} \in [s_i, s_{i+1}))(\underline{A}(\vec{x},\vec{y}) \wedge R_j^s(\vec{x},\vec{y}))\Big) \wedge (M\vec{x} \leq o)(M\vec{y} \in [s_n, \infty))(\underline{A}(\vec{x},\vec{y}) \wedge R_j^s) \longrightarrow (M\vec{x}\vec{y} \leq \Sigma r_i s_{i+1})(\underline{A}(\vec{x},\vec{y}) \wedge R_j^s(\vec{x},\vec{y}))) \quad j \in \omega$$

35) $$\Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n-1} (M\vec{x} \geq r_i)(M\vec{y} \in [s_i, s_{i+1}))(\underline{A}(\vec{x},\vec{y}) \wedge R_j^s(\vec{x},\vec{y}))\Big) \longrightarrow (M\vec{x}\vec{y} \geq \Sigma r_i s_i)(\underline{A}(\vec{x},\vec{y}) \wedge R_j^s(\vec{x},\vec{y}))) \quad j \in \omega$$

Aksioma i pravilo za konstante

36) $\bigvee_{i \in \omega} R_i(d)$ d je konstanta iz jezika

37) $$\frac{\underline{A} \longrightarrow \neg R_i(d)}{\underline{A}}$$

Aksiome i pravila 1,2,3,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17, 18,19,20,21,22,23,24,25,27,29,32,33,34,35 i 37 odnose se na $L_{\omega M}$ logiku,a aksiome i pravila 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, 13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,26,28,30,31,32,33,34,35 36 odnose na $L_{\omega_1 M}$ logiku.Primetimo,da je i $L_{\omega M}$ logika ustvari beskonačna.

Najčešće,nećemo raditi sa čitavim skupom formula,već samo jednim podskupom koji će najčešće biti prebrojiv.On će biti zatvoren za podformule i formiranje formula (v.[6],[20]).

Def. 3.

Skup formula $Y \subseteq L_{\omega_1 M}$ je <u>fragment</u> ,ako zadovoljava jedan od sledeća tri uslova:

i) $Y = L_{\omega_1 M}$

ii) $Y = L_{\mathcal{A} M} = L_{\omega_1 M} \cap \mathcal{A}$, je prebrojiv dopustiv skup

iii) $Y \subseteq L_{\omega M}$ i postoji podpolje F od R tako da je

$Y=\{\underline{A}$: $\underline{A}$ je formula iz $L_{\omega M}$ i za svaki od kvantifikatora $M\vec{x}\geq r$, $M\vec{x}>r$, $M\vec{x}\leq r$ i $M\vec{x}<r$ koji se pojavljuje u $\underline{A}$ imamo $r\in F\cup\{\infty,-\infty\}$

Neka je $F(Y)=\{r\in R$: Neki od kvantifikatora $M\vec{x}\geq r, M\vec{x}>r$, $M\vec{x}\leq r$ i $M\vec{x}<r$ su sadržani u nekoj formuli $\underline{A}\in Y\}$.

Važno je primetiti,da za svaku formulu $\underline{A}\in L_{\omega_1 M}$ postoji najmanji prebrojiv fragment koji je sadrži.

Def. 4.

Slab merni model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ ima sve osobine kao i merni model,izuzev,7) i 8) i mere μ_n su konačno aditivne.

Kažemo da je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ slab merni model za fragment Y ako je:

i) Za svaki $\vec{a}\in A^m$ i svaku formulu $\underline{A}(\vec{x},\vec{y})$ Y,tako da je niz $\vec{y}$ dužine n,formula $\underline{A}(\vec{a},\vec{y})$ je μ_n-merljiva

ii) Za svaku aksiomu $\underline{A}(\vec{x})\in Y$ i svaki $\vec{a}\in A^m$

$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\underline{A}(\vec{a})$

iii) Model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ čuva pravila izvođenja

Slab merni model je tehnički pojam kao i svojstvo neprotivurečnosti koje ćemo sad definisati.

Def. 5.

Neka je Y prebrojiv gragment,C prebrojiv skup novih konstantnih simbola i Y(C) skup formula koje se dobijaju takošto se neke od slobodnih promenljvih u formuli iz Y zamene konstantnim simbolima iz C.

Svojstvo neprotivurečnosti za Y je skup S prebrojivih skupova rečenica iz $Y(C)$ tako da su za svaki $W\in S$ zadovoljeni sledeći uslovi:

(0) Trivijalno pravilo

Ako $\Delta\subseteq W$, tada $\Delta\in S$

(1) Pravilo neprotivurečnosti

$\underline{A}\notin W$ ili $\neg\underline{A}\notin W$

(2) $\neg$-pravilo

Ako $\neg\underline{A}\in W$, tada $W\cup\{\underline{A}^{\neg}\}\in S$

(3) $\wedge$-pravilo

Ako $\wedge\Phi\in W$, tada $W\cup\{\underline{A}\}\in S$ za svaki $\underline{A}\in\Phi$

(4) $\vee$-pravilo

Ako $\vee\Phi\in W$, tada $W\cup\{\underline{A}\}\in S$ za neki $\underline{A}\in\Phi$

(5) M-pravilo

Ako $(M\vec{x}>o)\underline{A}(\vec{x})\in W$, tada $W\cup\{\underline{A}(\vec{c})\}\in S$ za neki $\vec{c}\in C^n$

(6) Neka je $\underline{A}(\vec{x})\in Y(C)$ aksioma, tada

i) $W\cup\{\underline{A}(t)\}\in S$

ii) $W\cup\{(M\vec{x}\geq\infty)\underline{A}(\vec{x})\}\in S$

Sledeće pravilo nije potrebno za prebrojive fragmente $L_{\mathcal{A}M}$ gde $\omega\in\mathcal{A}$.

(7) Za svaki $n>o$, svaki $r\in F(Y)$ i svaku formulu $A(\vec{x},\vec{y})\in Y(C)$, postoje $m_o>o$, $m_1>o$ i $m_2>o$ tako da:

i) $W\cup\{(My<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in(r,r+\frac{1}{m_o}])A(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^S(\vec{y}))\}\in S$

ii) $W\cup\{(My<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[r-\frac{1}{m_1},r))\underline{A}(\vec{x},\vec{y}))\wedge R_i^S(\vec{y}))\}\in S$

iii) $W\cup\{(My<\frac{1}{n})(((M\vec{x}\in[m,\infty))\underline{A}(x,y))\wedge R_i^S(\vec{y}))\}\in S$

(8) R-pravilo

Ako $(M\vec{x}>o)\underline{A}(\vec{x})\in W$, tada $W\cup\{(M\vec{x}>o)(\underline{A}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))\}\in S$ za neki i

Primer

Kažemo da je konačan skup rečenica $W \subseteq Y(C)$ sa samo konačno mnogo novih konstantnih simbola, formalno konzistentan ako je $\nvdash \neg \bigwedge W$ (t.j. $W \nvdash \underline{A} \wedge \neg \underline{A}$). Tada je skup svih formalno konzistentnih skupova svojstvo neprotivurečnosti.

Lema 1. (Stav o egzistenciji modela)

Ako je S svojstvo neprotivurečnosti i $W \in S$, tada postoji slab merni model za W.

Elementarna ekvivalentnost se definiše na uobičajen način.

Def. 6.

Neka je $K \subseteq L_{\omega_1 M}$ i neka je za istotipne modele $(\mathfrak{A}, \vec{\mu})$ i $(\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$:

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_K (\mathfrak{B}, \vec{\lambda}) \text{ akko } (\forall \underline{A} \in K)((\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \models \underline{A} \text{ akko } (\mathfrak{B}, \vec{\lambda}) \models \underline{A})$$

Tada ako je $(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_K (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$, kažemo da su modeli $(\mathfrak{A}, \vec{\mu})$ i $(\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$ elementarno ekvivalentni u K.

Lema 2.

Za svaki slab merni model $(\mathfrak{A}, \vec{\mu})$ postoji merni model $(\underline{\mathfrak{A}}, \underline{\vec{\mu}})$, tako da je $(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_{L_{\omega_1 M}} (\underline{\mathfrak{A}}, \underline{\vec{\mu}})$.

Daćemo sada našu glavnu teoremu. Pojmovi kao što su dokazivost i valjanost definišu se na uobičajen način.

Teorema 1. (Stavovi potpunosti za $L_{\omega M}$ i $L_{\omega_1 M}$)

i) Za svaku formulu $\underline{A}$ iz $L_{\omega M}$:

$\vdash_{L_{\omega M}} \underline{A}$ akko $\models \underline{A}$

ii) Za svaku formulu $\underline{A}$ iz $L_{\omega_1 M}$:

$\vdash_{L_{\omega_1 M}} \underline{A}$ akko $\models \underline{A}$

Skica dokaza: Dokaz implikacija sa leva na desno sledi iz činjenice da su aksiome zadovoljene u svim modelima i da pravila izvođenja čuvaju valjanost.

Da bismo dokazali implikacije u drugom smeru dovoljno je pokazati da ako $\nvdash \underline{A}$ tada $\nvDash \underline{A}$, t.j. postoji $(\mathfrak{U},\vec{\mu})$ tako da je $(\mathfrak{U},\vec{\mu}) \models \neg\underline{A}$. Ako uočimo svojstvo neprotivurečnosti S dato u primeru, primećujemo da $\{\neg\underline{A}\} \in S$, pa na osnovu lema 1 i 2 takav $(\mathfrak{U},\vec{\mu})$ postoji.

Skica dokaza leme 1.: Neka je Y(C) najmanji prebrojiv fragment koji sadrži W i neka je $(\underline{A}_n : n \in \omega)$ niz svih rečenica iz Y(C). Definišimo kompletan niz $(W_n : n \in \omega)$ elemenata iz S na sledeći način.

Neka je $W_o = W$.

Za dato W_n definišimo W_{n+1} tako da zadovoljava sledeće uslove:

1) $W_n \subseteq W_{n+1}$

2) Ako $W_n \cup \{\underline{A}_n\} \in S$, tada $\underline{A}_n \in W_{n+1}$

3) Ako $W_n \cup \{\underline{A}_n\} \in S$ i $\underline{A}_n = \bigvee \Phi$, tada za neki $\underline{B} \in \Phi$,
$\underline{B} \in W_{n+1}$

4) Ako $W_n \cup \{\underline{A}_n\} \in S$ i $\underline{A}_n = \neg\underline{B}$, tada $\underline{B}^{\neg} \in W_{n+1}$

5) Ako $W_n \cup \{\underline{A}_n\} \in S$ i $\underline{A}_n = (M\vec{x} > o)\underline{B}(\vec{x})$ tada za neko $\vec{c} \in C^n$,
$\underline{B}(\vec{c}) \in W_{n+1}$

6) Ako $W_n \cup \{\underline{A}_n\} \in S$ i $\underline{A}_n = (M\vec{x} > o)\underline{B}(\vec{x})$ tada za neko $i \in \omega$

$(M\vec{x}>o)(\underline{A}(\vec{x})\wedge R_i(\vec{x}))\in W_{n+1}$

Sledeći uslov ne odnosi se na fragmente oblika $L_{\mathcal{A}M}$, gde $\omega\in\mathcal{A}$.

7) Neka je $((\underline{B}_n(x,y),r_n):n\in\omega)$ niz parova koje čine formule iz Y(C) sa najviše konačno mnogo slobodnih promenljivih i brojeva iz F(Y), tako da se uz svaku formulu pojave svi brojevi i uz svaki broj sve formule. Tada za neke $m_o>o$, $m_1>o$ i $m_2>o$

$$(M\vec{y}<\tfrac{1}{n})(M\vec{x}\in[r_n-\tfrac{1}{m_o},r_n))\underline{B}_n\in W_{n+1}$$
$$(M\vec{y}<\tfrac{1}{n})(M\vec{x}\in(r_n,r_n+\tfrac{1}{m_1}])\underline{B}_n\in W_{n+1}$$
$$(M\vec{y}<\tfrac{1}{n})(M\vec{x}\in[m_2,\infty))\underline{B}_n\in W_{n+1}$$

Neka je $W_\omega=\bigcup_{n\in\omega}W_n$ i neka je D skup svih konstantnih simbola iz Y(C).

Lako se pokaže da je relacija

$$d_i\equiv d_j \text{ akko } d_i=d_j\in W_\omega$$

relacija ekvivalencije. Neka je $A=D/\equiv$ i $[d]=\{c\in D: c\equiv d\}$

Ako je T n-arni relaciski simbol iz L definišimo $T^{\mathfrak{A}}$ sa

$$([d_1],\ldots,[d_n])\in T^{\mathfrak{A}} \text{ akko } T(d_1,\ldots,d_n)\in W_\omega$$

Definišimo konačno aditivnu meru μ_n, na potskupovima od A^n definisanim pomoću formula iz Y (sa parametrima iz A^m), sa

$$\mu_n(\{([c_1],\ldots,[c_n]):\underline{B}(\vec{c},\vec{a})\in W_\omega\})=$$
$$=\sup(\{r:(M\vec{x}\geq r)\underline{B}(\vec{x},\vec{a})\in W_\omega\})$$

Nije teško pokazati da je sve dobro definisano i da je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})=((A,T^{\mathfrak{A}},\ldots,[d],\ldots),\vec{\mu})$ slab merni model.

Takođe se indukcijom pokaže da

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\underline{A} \text{ akko } \underline{A}\in W_\omega$$

Otuda je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models W_\omega$.

Da bismo dokazali lemu 2 uočimo superstrukturu $V(R\cup A)$ i primetimo da se formule iz $Y(C)$ mogu predstaviti tako da budu podskupovi od $V_2(R\cup A)$.

U tom cilju kodirajmo veznike i kvantifikatore $\wedge$, $\neg$, $\{Mx_1\ldots x_n \geq r_m : n,m\in\omega\}$, $\{Mx_1\ldots x_n > r_m : n,m\in\omega\}$, $\{Mx_1\ldots x_n \leq r_m : n,m\in\omega\}$ i $\{Mx_1\ldots x_n < r_m : n,m\in\omega\}$, redom sa $o,1,\{2\cdot 3^n\cdot 5^m : m,n>o\}$, $\{2^2\cdot 3^n\cdot 5^m : m,n>o\}$, $\{2^3\cdot 3^n\cdot 5^m : m,n>o\}$ i $\{2^4\cdot 3^n\cdot 5^m : m,n>o\}$, gde je $r_o=\infty$ i $r_1,r_2,\ldots$ prebrojiv niz realnih brojeva iz $Y(C)$. Simbole konstanata $c_o,c_1,\ldots$,promenljive $x_o,x_1,\ldots$ i relaciske simbole $S_o,S_1,\ldots$ kodiraćemo redom sa $\{7^n : n>o\}$, $\{11^n : n>o\}$, $\{13^n : n>o\}$.

Uočimo drvo ω^ω koje ima prebrojivo čvorova i kod koga se svaki čvor račva prebrojivo puta. Ako je $p_1,p_2,\ldots$ niz prostih brojeva, kodirajmo sa $p_1^{t_1}.p_2^{t_2}\ldots p_n^{t_n}$ onaj čvor kojim je određen početni komad grana oblika $(t_1,\ldots,t_n,\ldots)$

Svakoj formuli iz $Y(C)$ odgovara drvo tako da su u čvorovima kodovi logičkih simbola ili simbola jezika. Formula će prema tome biti graf preslikavanja iz tog drveta u poddrvo drveta ω^ω.

Kako je, dakle, formula skup uređenih parova prirodnih brojeva to je ona podskup od $V_2(R\cup A)$, dok je $Y(C)$ podskup od $V_3(R\cup A)$.

Takođe se jednostavno može kodirati i relacija zadovoljenja $\models$ na modelu $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$, jer je to skup uređenih parova, gde je prvi element formula iz $Y(C)$, a drugi deo valuacije koji odgovara slobodnim promenljivama iz formule. Očigledno $(\mathfrak{A},\vec{\mu})\in V(R\cup A)$.

Kada predjemo na nestandardnu superstrukturu ${}^*V(R\cup A)$ tada možemo uočiti objekte kao što su na primer ${}^*\underline{F}$, ${}^*\models$ i $({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu_n)_{n\in{}^*N}$.

Neka je $\mathcal{A}^m_n=\{\{(x_1,\dots,x_n):({}^*\mathfrak{A},{}^*\mu_n)_{n\in{}^*N}\models\underline{F}(x_1,\dots,x_n)\wedge R^n_m(\vec{x})\}:\underline{F}\in{}^*Y(C)\}$.Tada polazeći od internalnih prostora $(({}^*R^m_n,\mathcal{A}^m_n,{}^*\mu_n):n,m\in\omega)$ možemo definisati odgovarajuće Lebove prostore $((R^m_n,S(\mathcal{A}^m_n),\overline{\mu}_n):n,m\in\omega)$.

Neka je $\underline{\underline{A}}^m=\bigcup_{n\geq o}{}^*R^m_n,\underline{\underline{\mathcal{A}}}^m$ σ-algebra na $\underline{\underline{A}}$ tako da je $\mathcal{A}^m_n=R^m_n\cap\underline{\underline{\mathcal{A}}}^m$ i $\overline{\overline{\mu}}_{\underline{\underline{m}}}(B)=\sup\limits_i\overline{\mu}_m(B\cap R^m_i)$.Označimo sa $(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})$ merni model koji odgovara mernim prostorima $((\underline{\underline{A}}^m,\underline{\underline{\mathcal{A}}}^m,\overline{\overline{\mu}}_{\underline{\underline{m}}})\ m\geq o)$.Primetimo da mere $\overline{\overline{\mu}}_{\underline{\underline{m}}}$ nisu kompletne.

Dokaz leme 2.: Treba pokazati prvo da je $(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})$ merni model, a zatim da za svaku formulu $\underline{F}(\vec{x})\in Y$ i svaki niz $\vec{a}\in A$

$$(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}(\vec{a})\ \text{akko}\ (\mathfrak{A},\vec{\mu})\models\underline{F}(\vec{a})$$

Prvi deo sledi iz Fubinijevih aksioma i uobičajene ekstenzije sa konačnog na σ-konačan slučaj.

Da bismo dokazali zadnju ekvivalenciju,dovoljno je da pokažemo sledeću relaciju:

$$(*)\quad \overline{\overline{\mu}}_{\underline{\underline{n}}}(\{\vec{c}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}(\vec{c},\vec{a})\}\triangle\{\vec{c}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*\underline{F}(\vec{c},\vec{a})\})$$

gde je $\vec{a}\in\underline{A}^m$.

Pritom je:

$$({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*((M\vec{x}\geq r)\underline{F}(\vec{x}))\ \text{akko}\ {}^*\mu_n(\{\vec{x}\in{}^*A:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*\underline{F}(\vec{x})\})\geq r$$

$$({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models(Mx\geq r)^*\underline{F}(\vec{x})\ \text{akko}\ \overline{\mu}_n(\{\vec{x}\in\underline{A}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*\underline{F}(\vec{x})\})\geq r$$

$$(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models(M\vec{x}\geq r)F(\vec{x})\ \text{akko}\ \overline{\overline{\mu}}_{\underline{\underline{n}}}(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}(\vec{x})\})\geq r$$

i slično za druge kvantifikatore.

Dokaz relacije (*) izvodimo indukcijom po izgrađenosti formula.

Jedini zanimljivi slučajevi su kada je $\underline{F}=\bigwedge_{i\in N}\underline{F}$ ili $\underline{F}=(M\vec{x}\,\varrho r)\underline{Z}(\vec{x})$, gde je $\varrho\in\{\leq,\geq,>,<\}$. Zbog kratkoće izostavljamo parametre.

Neka je $\underline{F}=\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i$. Na osnovu aksiome 31) za svaki $k\in N$ postoji $m\in N$ tako da

$${}^*\mu_n(\{\vec{x}\in{}^*R_i^n:\{({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\}\Delta\{({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models\bigwedge_{i\leq m}{}^*\underline{F}_i\}\})<\frac{1}{k}$$

Pa je

$$\bar{\bar{\mu}}_n(\{x\in{}^*R_i^n:\{({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\}\Delta\{({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models\bigwedge_{i\in N}{}^*\underline{F}_i\}\})=$$

$$=\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{x}\in{}^*R_i^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models{}^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\Delta\bigwedge_{i\in N}{}^*\underline{F}_i(x)\})=0$$

A odatle

$$\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models{}^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\Delta\bigwedge_{i\in N}{}^*\underline{F}_i(\vec{x})\})=$$
$$\sup_i\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{x}\in R_i^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models{}^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\Delta\bigwedge_{i\in N}{}^*\underline{F}_i\})=0$$

Kako je na osnovu indukciske pretpostavke za $i>0$

$$\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n\ (\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}_i(\vec{x})\}\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models{}^*\underline{F}_i(\vec{x})\})=0$$

i $\bigcap_{i\in N}A_i\Delta\bigcap_{i\in N}B_i\subseteq\bigcup_{i\in N}(A_i\Delta B_i)$

to je

$$\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{x\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models\bigwedge_{i\in N}{}^*\underline{F}_i(\vec{x})\}\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(x)\})$$
$$\leq\sum_{i\in N}\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models{}^*\underline{F}_i(\vec{x})\}\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}_i(\vec{x})\})=0$$

Na osnovu identiteta

$$(A\Delta B)\subseteq(A\Delta C)\cup(C\Delta B)$$

imamo konačno

$$\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}(x)\}\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models{}^*\underline{F}(\vec{x})\})$$
$$\underline{\underline{\bar{\bar{\mu}}}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})\models\underline{F}(x)\}\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n:({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models\bigwedge_{i\in N}{}^*F_i(\vec{x})\})+$$

$$\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models \bigwedge^*_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x})\}\,\Delta\,\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)^*\models^*(\bigwedge_{i\in N}\underline{F}_i(\vec{x}))\})=0$$

Neka je sada $\underline{F}=(M\vec{x}\geq r)\underline{Z}(\vec{x})$, gde $r\in R$.

Za svaki $n\in N$ postoji $m\in N$, tako da je na osnovu aksiome 26) ili pravila 25)

$$\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{y}\in{}^*R^n_i : ({}^*\alpha,{}^*\mu)^*\models^*((M\vec{x}\geq r)\underline{Z}(\vec{y},\vec{x}))\}\,\Delta$$

$$\Delta\,\{\vec{y}\in{}^*R^n_i : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models(M\vec{x}\geq r)^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\ )\leq$$

$${}^*\mu_n(\{\vec{y}\in{}^*R^n_i : r-\tfrac{1}{m}\leq{}^*\mu(\{\vec{x}\in\underline{A}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)^*\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})<r\})<\tfrac{1}{n}$$

pa je

$$\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models^*((M\vec{x}\geq r)\underline{Z}(\vec{y},\vec{x}))\Delta(M\vec{x}\geq r)^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})=0$$

Po induktivnoj pretpostavci je

$$\bar{\bar{\mu}}_{m+n}(\{(\vec{y},\vec{x})\in\underline{\underline{A}}^{m+n} : ({}^*\alpha,{}^*\mu)^*\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\}\,\Delta$$

$$\Delta\{(\vec{y},\vec{x})\in\underline{\underline{A}}^{m+n} : (\underline{\underline{\alpha}},\underline{\underline{\mu}})\models\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})=0$$

Tako za sve $\vec{y}$-ove, sem za $\bar{\bar{\mu}}_n$-mere nula

$$\bar{\bar{\mu}}_{m+n}(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)^*\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\}\,\Delta\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^m : (\underline{\underline{\alpha}}\ ,\underline{\underline{\mu}})\models\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})=0$$

Odatle

$$\bar{\bar{\mu}}_m(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^m : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})\geq r$$

akko

$$\bar{\bar{\mu}}_m(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^m : (\underline{\underline{\alpha}},\underline{\underline{\mu}})\models\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})\geq r$$

Na osnovu pravila 24)

$$\bar{\bar{\mu}}_m(\{\vec{x}\in\underline{\underline{A}}^m : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})\geq r$$

akko

$$\bar{\mu}_m(\{\vec{x}\in A^m :\ ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})\geq r$$

Prema tome

$$\bar{\bar{\mu}}_n(\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\alpha,{}^*\mu)\models(M\vec{x}\geq r)^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\}\,\Delta$$

$$\Delta\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : (\underline{\underline{\alpha}},\underline{\underline{\mu}})\models(M\vec{x}\geq r)\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})=0$$

Konačno

$$\bar{\underline{\underline{\mu}}}_n(\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models^*\underline{F}(\vec{y})\}\,\Delta\,\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : (\underline{\mathfrak{A}},\underline{\vec{\mu}})\models\underline{F}(\vec{y})\}) \leqslant$$
$$\bar{\underline{\underline{\mu}}}_n(\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : ({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})^*\models^*((M\vec{x}\geqslant r)\underline{Z}(\vec{y},\vec{x}))\,\Delta\,(M\vec{x}\geqslant r)^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\})+$$
$$+\,\bar{\underline{\underline{\mu}}}_n(\{\vec{y}\in\underline{A}^n : ({}^*\mathfrak{A},{}^*\vec{\mu})\models(Mx\geqslant r)^*\underline{Z}(\vec{y},\vec{x})\}\,\Delta\,\{\vec{y}\in\underline{\underline{A}}^n : (\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\vec{\mu}})\models\underline{F}(\vec{y})\})=0$$

Slično se razmatraju i ostali slučajevi.

Sledeće dve teoreme slede iz leme 1 i opštih sintaktičkih pogodnosti koje su posledica činjenice da je $\mathcal{A}$ dopustiv skup. Dokaze izostavljamo jer su analogni onima za slučaj $L_{\omega_1\omega}$ logike.

<u>Teorema 2.</u> (Barvajzova kompletnost)

Neka je $\omega\cup L\in\mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{A}$ prebrojivo dopustiv. Tada je skup valjanih rečenica od $L_{\mathcal{A}M}$ Σ_1 na $\mathcal{A}$.

<u>Teorema 3.</u> (Barvajzova kompaktnost)

Neka $\omega\in\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ je prebrojivo dopustiv skup i neka je T skup rečenica od $L_{\mathcal{A}M}$ koji je Σ_1 na $\mathcal{A}$. Ako svaki $T_0\subseteq T$ tako da $T_0\in\mathcal{A}$ ima model, tada i T ima model.

Za $L_{\omega_1 P}$ logiku važi sledeća značajna teorema koja pokazuje da je važenje nekog skupa formula u konkretnom modelu određeno važenjem jedne klase jednostavnih formula. Naš cilj će zatim biti da dobijemo sličnu teoremu u našoj $L_{\omega_1 M}$ logici.

<u>Teorema 4.</u>

Neka su $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ i $(\mathfrak{B},\vec{\lambda})$ verovatnosni modeli (V. [14]) i neka je $K=\{(M\vec{x}\geqslant r)\underline{A}(\vec{x}) : \underline{A}(\vec{x})$ je konjukcija atomskih formula$\}$

Tada ako je

$$(\mathfrak{a},\vec{\mu})=_K(\mathfrak{b},\vec{\lambda})$$

onda

$$(\mathfrak{a},\vec{\mu})=_{L_{\omega_1 M}}(\mathfrak{b},\vec{\lambda})$$

Def. 7.

Skup formula sa ograničenim kvantifikatorima (ili kraće:OK formula) je najmanji skup tako da

i) Atomske formule su OK formule

ii) Konjukcija i negacija OK formule je OK formula

iii) Ako je $\underline{F}$ OK formula tada su $(M\vec{x}\leq r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$ i $(M\vec{x}>r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$ OK formule za svako $r\in R$ i $i\in\omega$.

Lema 3.

Svaka formula iz $L_{\omega_1 M}$ ekvivalentna je OK formuli.

Dokaz: Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formula. Jasno je da je atomska formula OK formula i da ako su $\underline{F}$ i $\underline{Z}$ ekvivalentne OK formulama, tada su i $\underline{F}\wedge\underline{Z}$ i $\neg\underline{F}$ ekvivalentne OK formulama.

Neka je $\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\leftrightarrow\underline{T}(\vec{x},\vec{y})$, gde je $\underline{T}(\vec{x},\vec{y})$ OK formula. Kako je:

$$(M\vec{x}\leq r)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longleftrightarrow\bigwedge_{i\in\omega}(M\vec{x}\leq r)(\underline{T}(\vec{x},\vec{y})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$(M\vec{x}>r)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longleftrightarrow\bigvee_{i\in\omega}(M\vec{x}>r)(\underline{T}(\vec{x},\vec{y})\wedge R_i^n(\vec{x}))\qquad r\in R\cup\{\infty\}$$

$$(M\vec{x}\geq r)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longleftrightarrow\bigwedge_{n>0}\bigvee_{i\in\omega}(M\vec{x}>r-\tfrac{1}{n})(\underline{T}(\vec{x},\vec{y})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$(M\vec{x}<r)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longleftrightarrow\bigvee_{n>0}\bigwedge_{i\in\omega}(M\vec{x}\leq r-\tfrac{1}{n})(\underline{T}(x,y)\wedge R_i^n(\vec{x}))\quad r\in R$$

$$(M\vec{x}\geq\infty)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longrightarrow\bigwedge_{n>0}\bigvee_{i\in\omega}(M\vec{x}>n)(\underline{T}(\vec{x},\vec{y})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$(M\vec{x}<\infty)\underline{F}(\vec{x},\vec{y})\longleftrightarrow\bigvee_{n>0}\bigwedge_{i\in\omega}(M\vec{x}\leq n)(\underline{T}(\vec{x},\vec{y})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

to vidimo da su i formule $(M\vec{x}\leq r)\underline{F}$,$(M\vec{x}<r)\underline{F}$,$(M\vec{x}\geq r)\underline{F}$ i $(M\vec{x}>r)\underline{F}$ ekvivalentne OK formulama.

Def. 8.

Kažemo da je $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m$ monotona konjukcija ako je $\models \underline{F}_{m+1}\rightarrow \underline{F}_m$ za svaki $m\in\omega$, a $\bigvee_{m\in\omega}\underline{F}_m$ monotona disjunkcija ako je $\models \underline{F}_m\rightarrow \underline{F}_{m+1}$ za svaki $m\in\omega$.

Def. 9.

Skup monotonih OK formula (kraće MOK formula) je najmanji skup tako da:

i) Svaka OK formula od $L_{\omega M}$ je MOK formula

ii) Monotona konjukcija MOK formula je MOK formula

iii) Monotona disjunkcija MOK formula je MOK formula

Def. 10.

Monotona kompleksnost MOK formule se definiše na sledeći način:

i) Monotona kompleksnost OK formule iz $L_{\omega M}$ je nula

ii) Monotona kompleksnost od $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m$ $(\bigvee_{m\in\omega}\underline{F}_m)$ je za jedan veća od supremuma kompleksnosti formula $\underline{F}_m$

Lema 4.

Svaka OK formula ekvivalentna je MOK formuli.

Dokaz: Neka je $\underline{M}$ skup OK formula koje su ekvivalentne MOK formulama. Pokazaćemo indukcijom po složenosti formula da M sadrži sve OK formule.

Svaka atomska formula očigledno pripada M.

Kako je svaka prebrojiva konjukcija $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m$ ekvivalentna monotonoj konjukciji $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{Z}_m$, gde je $\underline{Z}_m=\underline{F}_o\wedge\ldots\wedge\underline{F}_m$ dovoljno je dokazati da je M zatvoren za negaciju, konačnu i monotonu konjukciju i ograničenu kvantifikaciju.

Lako se pokaže indukcijom po monotonoj kompleksnosti da ako $\underline{F}\in M$, tada $\neg\underline{F}\in M$.

Pretpostavimo da $\underline{F}_m(\vec{x})\in M$ za svako $m\in\omega$ i $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x})$ je monotona konjukcija. Za svaki m izaberimo monotonu formulu $\underline{Z}_m$ ekvivalentnu sa $\underline{F}_m(\vec{x})$. Tada je $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{Z}(\vec{x})$ MOK formula ekvivalentna formuli $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x})$, pa $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x})\in M$.

U slučaju da su $\bigvee_{m\in\omega}\underline{F}_m$ i $\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m$ redom monotona disjunkcija i konjukcija primetimo da za $r\in R$

$$\models(M\vec{x}>r)((\bigvee_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x}))\wedge R_i^n(\vec{x}))\leftrightarrow\bigvee_{m\in\omega}(M\vec{x}>r)(\underline{F}_m(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$\models(M\vec{x}>r)((\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x}))\wedge R_i^n(\vec{x}))\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\bigvee_{k>o}\bigwedge_{m\in\omega}(M\vec{x}>r+\tfrac{1}{k})(\underline{F}_m(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$\models(M\vec{x}<r)((\bigvee_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x}))\wedge R_i^n(\vec{x}))\leftrightarrow\bigwedge_{m\in\omega}(M\vec{x}<r)(\underline{F}_m(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

$$\models(M\vec{x}<r)((\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x}))\wedge R_i^n(\vec{x}))\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\bigwedge_{k>o}\bigvee_{m\in\omega}(M\vec{x}\ r+\tfrac{1}{k})(\underline{F}_m(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$$

Nije teško pokazati da su formule na desnoj strani ekvivalencije monotone. Kada se još zna da su za konačnu formulu $\underline{F}(\vec{x})$ i formule $(M\vec{x}<r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$ i $(M\vec{x}>r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$ konačne pa kime i MOK, lako se pokazuje indukcijom po monotonoj kompleksnosti da $(M\vec{x}<r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$, $(M\vec{x}>r)(\underline{F}(\vec{x})\wedge R_i^n(\vec{x}))$ M ako $\underline{F}(\vec{x})\in M$.

Dokažimo da je M zatvoren za konačne konjukcije. U tom cilju fiksirajmo n-torku $\vec{x}$.

Za svaku formulu $\underline{F}(\vec{x})$ iz $L_{\omega_1 M}$ neka je

$$K(\underline{F})=\{\underline{Z}(\vec{x}):\ \underline{F}\vee\neg\underline{Z},\neg\underline{F}\vee\underline{Z},\underline{F}\wedge\underline{Z}\in M\}$$

Skup $K(\underline{F})$ je zatvoren za ekvivalencije. Na osnovu simetrije ako $\underline{Z}\in K(\underline{F})$ tada $\underline{F}\in K(\underline{Z})$. Kako je M zatvoren za monotone konjukcije i disjunkcije i $K(\underline{F})$ je zatvoren za njih.

Očigledno svaka formula iz $L_{\omega M}$ je u M.

Pretpostavimo da je $\underline{C}(\vec{x})$ iz $L_{\omega M}$. Tada $\underline{Z}\in K(\underline{C})$ za svaku OK formulu $\underline{Z}$ iz $L_{\omega M}$, pa prema tome $\underline{Z}\in K(\underline{C})$ za svaku MOK formulu $\underline{Z}$.

Ako pak sad, $\underline{F}(\vec{x})\in M$, tada za svaku OK formulu $\underline{Z}(\vec{x})$ iz $L_{\omega M}$ imamo $\underline{F}\in K(\underline{Z})$, pa time i $\underline{Z}\in K(\underline{F})$. Odatle, kao gore, $\underline{Z}\in K(\underline{F})$ za svaku OK formulu iz M. Prema tome ako $\underline{F},\underline{Z}$ M, tada $\underline{F}\wedge\underline{Z}\in M$.

Napomenimo da u slučaju neograničene kvantifikacije nemora da važi implikacija

$$(M\vec{x}\ r)\Big(\bigwedge_{m\in\omega}\underline{F}_m(\vec{x})\Big)\longrightarrow\bigwedge_{k>0}\bigvee_{m\in\omega}\Big(M\vec{x}\leq r+\frac{1}{k}\Big)\underline{F}_m(\vec{x})$$

<u>Def. 11.</u>

Neka je $(\alpha,\vec{\mu})$ merni model i $(R_i : i\in\omega)$ pokrivač skupa A. Za svaki $i\in\omega$ definišimo model $(\alpha_i,\vec{\mu}^i)$, tako da

i) $A_i=A\cap R_i$

ii) Za svaku n-arnu relaciju S modela $(\alpha,\vec{\mu})$, $S_i=S\cap R_i^n$

iii) c je konstanta u $(\alpha_i,\vec{\mu}^i)$ akko je c konstanta u $(\alpha,\vec{\mu})$ i $c\in R_i$

iv) $\mu_n^i=\mu_n\restriction(\mathrm{dom}(\mu_n)\cap R_i)$

Neka je J_i skup OK formula tako da ako R_k ograničava neku promenljivu mora biti $k\leq i$ i sve konstante koje se pojavljuju moraju pripadati A_i. Otuda J_i zavisi od modela, mada to ne ističemo u oznaci.

<u>Lema 5.</u>

Neka je $\underline{F}$ OK formula iz J_i. Tada za $j\geq i$ i $\vec{a}\in A_j$ važi

$(\alpha_j,\vec{\mu}^j)\models\underline{F}(\vec{a})$ akko $(\alpha,\vec{\mu})\models\underline{F}(\vec{a})$

Dokaz se sprovodi lako, indukcijom po izgrađenosti.

Neka je $(\alpha_i, \frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\cdot\vec{\mu}^i)$ merni model tako da je

$$\frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i=\left(\frac{\mu_1}{\mu_1(R_i)},\dots,\frac{\mu_n}{\mu_n(R_i)},\dots\right)$$

Ako je $\underline{F}$ OK formula, tada je ${}^{\Delta}\underline{F}$ OK formula koja se dobije iz $\underline{F}$ tako što se broj r zameni sa $\frac{r}{\mu_n(R_i^n)}$.

Sledeća lema pokazuje da je svaka konačna mera u određenom smislu ekvivalentna verovatnosnoj meri.

<u>Lema 6.</u>

Za svaku OK formulu $\underline{F}(\vec{x})$ iz J_i i svaki niz $\vec{a}\in A_i^n$

$(\alpha_i,\vec{\mu}^i)\models F(\vec{a})$ akko $(\alpha_i,\frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i)\models{}^{\Delta}F(\vec{a})$

Dokaz: Dokaz se provodi indukcijom po izgrađenosti formula. Jedini interesantan slučaj je ograničena kvantifikacija.

Tako, ako je na primer, $\underline{F}=(M\vec{x}>r)(\underline{Z}(\vec{x})\wedge R_j^n(\vec{x}))$, onda je $F=(M\vec{x}>\frac{r}{\mu_n(R_i^n)})({}^{\Delta}\underline{Z}(\vec{x})\wedge R_j)$.

Prema tome $(\alpha_i,\vec{\mu}^i)\models\underline{F}$

akko

$$\mu_n(\{\vec{x}:(\mathfrak{A}_i,\vec{\mu}^i)\models \underline{Z}(\vec{x})\wedge R^n_j(\vec{x})\})>r$$

akko

$$\frac{1}{\mu_n(R^n_i)}\mu_n(\{\vec{x}:(\mathfrak{A}_i,\frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i)\models {}^{\Delta}\underline{Z}(\vec{x})\wedge R^n_j(\vec{x})\})>\frac{r}{\mu_n(R^n_i)}$$

akko

$$(\mathfrak{A}_i,\frac{1}{\vec{\mu}(R^n_i)}\vec{\mu}^i)\models(M\vec{x}>\frac{r}{\mu_n(R^n_i)})({}^{\Delta}\underline{Z}(\vec{x})\wedge R^n_i(\vec{x}))$$

akko

$$(\mathfrak{A}_i,\frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i)\models\underline{F}$$

Slično se pokazuje i kada je $\underline{F}=(M\vec{x}\leq r)(\underline{Z}(\vec{x})\wedge R^n_i(\vec{x}))$.

Neka je $K=\{(M\vec{x}\geq r)\underline{Z}(\vec{x}):\underline{Z}(\vec{x})$ je konjukcija atomskih formula, $\underline{Z}(x)\in L_{\omega M}, r\in R\}$ i M skup svih MOK formula.

Lema 7.

Neka su $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ i $(\mathfrak{B},\vec{\lambda})$ merni modeli. Tada ako

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\equiv_K(\mathfrak{B},\vec{\lambda})$$

onda

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\equiv_M(\mathfrak{B},\vec{\lambda})$$

Dokaz: Kako je

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\equiv_{K\cap J_1\cap M}(\mathfrak{B},\vec{\lambda})$$

pa je prema lemi 5

$$(\mathfrak{A}_i,\vec{\mu}^i)\equiv_{K\cap J_1\cap M}(\mathfrak{B}_i,\vec{\mu}^i)$$

Na osnovu leme 6, dalje imamo

$$(\mathfrak{A}_i,\frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i)\equiv_{K\cap J_1\cap M}(\mathfrak{B}_i,\frac{1}{\vec{\lambda}(R_i)}\vec{\lambda}^i)$$

jer je zbog $(\mathfrak{A},\vec{\mu})\equiv_K(\mathfrak{B},\vec{\lambda}),\mu_n(R^n_i)=\lambda_n(R^n_i)$

Iz teoreme 4 sledi

$$(\mathfrak{A}_i, \frac{1}{\vec{\mu}(R_i)}\vec{\mu}^i) \equiv_{J_i \cap M} (\mathfrak{B}_i, \frac{1}{\vec{\lambda}(R_i)}\vec{\lambda}^i)$$

pa po lemi 6

$$(\mathfrak{A}_i, \vec{\mu}^i) \equiv_{J_i \cap M} (\mathfrak{B}_i, \vec{\lambda}^i)$$

Konačno, na osnovu leme 5

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_{J_i \cap M} (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

pa kako to važi za svaki i o, to je

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_M (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

Teorema 5. (Stav elementarne ekvivalentnosti)

Neka je

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_K (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

tada je

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_{L_{\omega_1 M}} (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

Dokaz: Ako je $(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_K (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$ to je prema lemi 7

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_M (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

Odatle, ako sa M označimo OK formule, iz leme 4 sledi

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_M (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

Konačno, na osnovu leme 3

$$(\mathfrak{A}, \vec{\mu}) \equiv_{L_{\omega_1 M}} (\mathfrak{B}, \vec{\lambda})$$

Navodimo sada Robinsonovu teoremu konzistencije za verovatnosnu ($L_{\omega_1 P}$) logiku, pomoću koje ćemo dokazati odgovarajuću teoremu za $L_{\omega_1 M}$ logiku.

Teorema 6.

Ako su $(\mathfrak{A}, \vec{\mu})$ i $(\mathfrak{B}, \vec{\nu})$ verovatnosni modeli respektivno za jezike L_1 i L_2 i

$$(\mathcal{O}\!\restriction\! L,\vec{\mu}) \equiv_{L_{\omega_1 P}} (\mathcal{B}\!\restriction\! L,\vec{\nu}) \quad \text{za } L=L_1\cap L_2$$

tada postoji model $(\mathcal{M},\vec{\lambda})$ za $L_1\cup L_2$ tako da

$$(\mathcal{M}\!\restriction\! L_1,\vec{\lambda}) \equiv_{(L_1)_{\omega_1 P}} (\mathcal{O},\vec{\mu})$$

i

$$(\mathcal{M}\!\restriction\! L_2,\vec{\lambda}) = _{(L_2)_{\omega_1 P}} (\mathcal{B},\vec{\nu})$$

Na osnovu leme 6 i prethodne teoreme lako se pokazuje sledeća posledica,gde je da se potsetimo M skup svih MOK formula a $(\mathcal{O}_i,\vec{\mu}^i)$ se dobija iz $(\mathcal{O},\vec{\mu})$ po definiciji 11.

<u>Posledica</u>

Ako je $(\mathcal{O}_i\!\restriction\! L,\vec{\mu}^i) \equiv_{J_i\cap M} (\mathcal{B}_i\!\restriction\! L,\vec{\nu}^i)$ za $L=L_1\cap L_2$,tada postoji model $(\mathcal{M},\vec{\lambda})$ za $L_1\cup L_2$ tako da je

$$(\mathcal{M}_i\!\restriction\! L_1,\vec{\lambda}^i) \equiv_{J_i^1\cap M} (\mathcal{O}_i,\vec{\mu}^i)$$

i

$$(\mathcal{M}_i\!\restriction\! L_1,\vec{\lambda}^i) \equiv_{J_i^2\cap M} (\mathcal{B}_i,\vec{\nu}^i)$$

Sledeća teorema ima sličnu formulaciju kao teorema 6 i njena posledica.

<u>Teorema 7.</u> (Robinsonova teorema konzistencije za $L_{\omega_1 M}$)

Ako su $(\mathcal{O},\vec{\mu})$ i $(\mathcal{B},\vec{\nu})$ merni modeli respektivno za jezike L_1 i L_2 i

$$(\mathcal{O}\!\restriction\! L,\vec{\mu}) \equiv_{L_{\omega_1 M}} (\mathcal{B}\!\restriction\! L,\vec{\nu}) \quad \text{za } L=L_1\cap L_2$$

tada postoji model $(\mathcal{M},\vec{\lambda})$ za $L_1\cup L_2$ tako da je

$$(\mathcal{M}\!\restriction\! L_1,\vec{\lambda}) \equiv_{(L_1)_{\omega_1 M}} (\mathcal{O},\vec{\mu})$$

i

$$(\mathfrak{M}\restriction L_2,\vec{\lambda})\equiv_{(L_2)_{\omega_1 M}}(\mathfrak{B},\vec{\nu})$$

Dokaz: Imajući u vidu leme 3 i 4 primetimo da su modeli $(\mathfrak{M}_o,\vec{\lambda}^o),(\mathfrak{M}_1,\vec{\lambda}^1),\ldots$ neka vrsta aproksimacije željenog modela $(\mathfrak{M},\vec{\lambda})$.

Koristeći se, zatim, mogućnostima koje nam pruža teorema 5 definišimo niz $(\mathfrak{N}_o,\vec{\eta}^o),(\mathfrak{N}_1,\vec{\eta}^1),\ldots$ na sledeći način.

Neka je $(\mathfrak{N}_o,\vec{\eta}^o)=(\mathfrak{M}_o,\vec{\lambda}^o)$

Ako smo model $(\mathfrak{N}_n,\vec{\eta}^n)$ već definisali, stavimo

1) $N_{n+1}=N_n\cup(M_{n+1}-M_n)$

2) Ako je $S\in L_1\cup L_2$ k-arni relaciski simbol

$$S^{\mathfrak{N}_{n+1}}=S^{\mathfrak{N}_n}\cup S^{\mathfrak{M}_{n+1}}\cap(M^k_{n+1}-M^k_n)$$

3) $c^{\mathfrak{N}_{n+1}}$ je konstanta akko je $c^{\mathfrak{N}_{n+1}}=c^{\mathfrak{N}_n}$ ili $c^{\mathfrak{N}_{n+1}}=c^{\mathfrak{M}_{n+1}}$

4) $\mathrm{dom}(\eta^{n+1}_k)=\{A\cup B: A\in\mathrm{dom}(\eta^n_k), B\in\mathrm{dom}(\lambda^{n+1}_k)\cap(M_{n+1}-M_n)$ i $\eta^{n+1}_k(A\cup B)=\eta^n_k(A)+\lambda^{n+1}_k(B)$, gde je $A\in\mathrm{dom}(\eta^n_k)$ i $B\in\mathrm{dom}(\lambda^{n+1}_k)$

Pritom je $M_n=R^{\mathfrak{M}}_n$.

Indukcijom po n se lako pokazuje da je za svaku formulu $\underline{F}\in L_{\omega M}$ bez kvantifikatora

$$\eta^n_k(\{x\in N^k_n:\mathfrak{N}_n\models\underline{F}(\vec{x})\})=\lambda^n_k(\{\vec{x}\in M^k_n:\mathfrak{M}_n\models F(\vec{x})\})$$

pa je prema teoremi 5 $\mathfrak{N}_n\equiv_{L_{\omega_1 M}}\mathfrak{M}_n$

Neka je $M=\bigcup_{n\geq o}N_n$, $S^{\mathfrak{M}}=\bigcup_{n\geq o}S^{\mathfrak{N}_n}$ za k-arni relaciski simbol $S\in L_1\cup L_2$, $c^{\mathfrak{M}}=c^{\mathfrak{N}_n}$ za neko $n\geq o$ i $\lambda_k=\sup_n(\eta^n_k)$

Nije teško pokazati na osnovu prethodnih lema (posebno lema 3 i 4) i zadnje posledice da je $(\mathfrak{M},\vec{\lambda})$

traženi model.

Primenom prethodne teoreme možemo dokazati sledeću interpolacionu teoremu.

Teorema 8.(Krejgova interpolaciona teorema za $L_{\mathcal{A}M}$)

Neka je $\mathcal{A}$ prebrojiv dopustiv skup tako da $\omega\in\mathcal{A}$. Ako su $\underline{F}$ i $\underline{Z}$ rečenice iz $L_{\mathcal{A}M}$ tako da je $\models \underline{F}\rightarrow\underline{Z}$, tada postoji rečenica $\underline{D}$ od $L_{\mathcal{A}M}$ tako da je $\models\underline{F}\rightarrow\underline{D}$ i $\models\underline{D}\rightarrow\underline{Z}$ i svaki relaciski i konstantni simbol koji se pojavljuje u $\underline{D}$ pojavljuje se i u $\underline{Z}$ i $\underline{F}$.

Skica dokaza: Neka je L_1 jezik koji se sastoji od ne logičkih simbola koji se pojavljuju u $\underline{F}$, a L_2 odgovarajući jezik za $\underline{Z}$.

Neka je S skup parova (s_1,s_2) gde su s_1 i s_2 konzistentni prebrojivi skupovi rečenica respektivno iz $L_1(C)_{\mathcal{A}M}$ i $L_2(C)_{\mathcal{A}M}$ (C je prebrojiv skup novih konstantnih simbola), tako da samo konačno mnogo konstanata iz C pripada $s_1\cup s_2$ i za svake dve rečenice $\underline{D}_1$ i $\underline{D}_2$ iz $(L_1\cap L_2)(C)_{\mathcal{A}M}$ kad god je $\models\bigwedge s_1\rightarrow\underline{D}_1$ i $\models\bigwedge s_2\rightarrow\underline{D}_2$, tada je rečenica $\underline{D}_1\wedge\underline{D}_2$ konzistentna.

Može se pokazati modifikovana lema 1 (t.j. teorema o egzistenciji modela). Otuda za svaki par $(s_1,s_2)\in S$ postoje modeli $(\mathfrak{A}\restriction L_1,\vec{\mu})$ i $(\mathfrak{A}\restriction L_2,\vec{\lambda})$ tako da je $(\mathfrak{A}\restriction L_1,\vec{\mu})\models s_1$ i $(\mathfrak{A}\restriction L_2,\vec{\lambda})\models s_2$, i za svako $n>o$, mere μ_n i λ_n se slažu na σ-algebri podskupova od A^n definisanoj pomoću formula iz $(L_1\cap L_2)_{\omega_1 M}$ sa parametrima iz A.

Primenjujući teoremu 7 na modele $(\mathfrak{A}\restriction L_1,\vec{\mu})$ i

$(\mathfrak{A}\restriction L_2,\hat{\lambda})$ dobijamo model za $\bigwedge s_1 \wedge \bigwedge s_2$. Otuda, kako $\models \underline{F}\to\underline{Z}$ to $(\underline{F},\neg\underline{Z})\notin S$. To dalje znači da možemo naći rečenice $\underline{D}_1$, $\underline{D}_2 \in (L_1\cap L_2)(C)_{\lambda M}$ tako da

$$\models \underline{F}\to\underline{D}_1,\ \models\neg\,\underline{Z}\to\underline{D}_1$$

i rečenica $\underline{D}_1\wedge\underline{D}_2$ je konzistentna.

Sledi da je $\models\underline{D}_1\to\neg\underline{D}_2$, $\models\neg\underline{D}_2\to\underline{Z}$ i odatle $\models\underline{D}_1\to\underline{Z}$.

Ako je $\underline{D}_1=\underline{D}_1(c_0,\dots,c_n)$, gde su $c_0,\dots,c_n$ svi elementi iz C koji se pojavljuju u $\underline{D}_1$, i ako te konstantne simbole zamenimo promenljivama $y_0,\dots,y_n$, tada rečenica $\underline{D}=(My_0,\dots,y_n\geq\infty)\underline{D}_1(y_0,\dots,y_n)$ ima tražena svojstva.

<u>Posledica</u>

Neka su $\underline{F}(x_1,\dots,x_n)$ i $\underline{Z}(x_1,\dots,x_n)$ formule iz $L_{\lambda M}$, takve da $\underline{F}(x_1,\dots,x_n)\quad\underline{Z}(x_1,\dots,x_n)$. Tada postoji formula $\underline{D}(x_1,\dots,x_n)$ iz $L_{\lambda M}$ tako da je $\models\underline{F}\to\underline{D}$ i $\models\underline{D}\to\underline{Z}$ i svaki relaciski i konstantni simbol koji se pojavljuje u $\underline{D}$ pojavljuje se i u $\underline{F}$ i u $\underline{Z}$.

Na isti način kao u [20] može se iz Krejgove dokazati sledeća teorema.

<u>Teorema 9.</u> (Betova interpolaciona teorema za $L_{\lambda M}$)

Neka su P i Q dva nova n-arna simbola. Neka je $\underline{F}(P)$ rečenica jezika $(L\cup\{P\})_{\lambda M}$ i $\underline{F}(Q)$ rečenica koja se dobije kada se P zameni sa Q. Pretpostavimo da

$$\models \underline{F}(P)\wedge\underline{F}(Q)\to(P(x_1,\dots,x_n)\leftrightarrow Q(x_1,\dots,x_n))$$

t.j. $\underline{F}(P)$ definiše P implicitno. Tada postoji formula

$\underline{D}(x_1,\dots,x_n)$ iz $L_{\lambda M}$, tako da

$$\models \underline{F}(P) \to (P(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow Q(x_1,\dots,x_n))$$

t.j. $\underline{F}(P)$ definiše P eksplicitno.

Takođe, uz slične modifikacije kao u [20] važi sledeća teorema.

Teorema 10. (Lindonova interpolaciona teorema za $L_{\mathcal{A}M}$)

Pretpostavimo da su $\underline{F}$ i $\underline{Z}$ rečenice iz $L_{\mathcal{A}M}$, tako da je $\models \underline{F} \to \underline{Z}$. Tada postoji rečenica $\underline{D} \in L_{\mathcal{A}M}$ tako da:

i) $\models \underline{F} \to \underline{D}$ i $\models \underline{D} \to \underline{Z}$

ii) Svaki relaciski simbol koji se pojavljuje pozitivno (negativno) u D pojavljuje se pozitivno (negativno) i u F i u Z.

Napomenimo da se simbol pozitivno u formuli ako je pod dejstvom parnog broja negacija, inače je njegovo pojavljivanje negativno. Simbol se može pojaviti pozitivno, negativno ili na oba načina u formuli.

Huver je pokazao u [15] da važi sledeća teorema o normalnoj formi za $L_{\omega_1 P}$ logiku.

Teorema 11.

Svaka formula $\underline{F} \in L_{\omega_1 P}$ je $\mathcal{b}$-Bulova (t.j. propoziciona) kombinacija formula oblika $(M\vec{x} \geq r)(\bigwedge_{i \leq m} S_i(\vec{x},\vec{y}))$ $(r \in [0,1])$

Na osnovu ove teoreme i lema koje prethode teoremi 5 može se dokazati sledeća teorema.

Teorema 12. (Teorema o normalnoj formi formula)

Svaka formula $\underline{F} \in L_{\omega_1 M}$ je $\mathcal{b}$-Bulova kombinacija formula oblika $(M\vec{x}>r)\underline{Z}$,gde je $\underline{Z}$ konjukcija atomskih formula.

Def. 12.

Kažemo da je merni model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ esencijalne kardinalnosti k,i pišemo ess Card$((\mathfrak{A},\vec{\mu}))=k$,ako je k najmanji kardinal tako da pstoji merliv skup $B\subseteq A$ tako da je Card$(B)=k$ i $\mu_1(A-B)=o$.

Teorema 13. (Gornja Skolem-Levenhajmova teorema)

Ako je $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ merni model čija je esencijalna kardinalnost veća od ω,tada $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ ima elementarnu ekstenziju proizvoljno velike esencijalne kardinalnosti.

Dokaz: Kako je ess Card$((\mathfrak{A},\vec{\mu}))>\omega$,to postoji R_n tako da je

$$(\mathfrak{A},\vec{\mu})\models(Mx>o)(My=o)(x=y\wedge R_n(x)\wedge R_n(y)) \qquad (*)$$

Neka je kao u dokazu leme 2,$(\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}})$ elementarno proširenje od $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$,stim što je superstruktura $^*V(R\cup A)$ k-zasićena.

Ako uočimo skup $S=\{a\in R_n: {}^*\mu_1(a)=o\}$,tada je sobzirom na $(*)$,$\underline{\underline{\bar{\mu}}}_1(S)>o$.

Pretpostavimo da postoji $B\subseteq A$ tako da je $\mu_1(A-B)=o$ i Card(B) $<k$.Tada je za $B_n=B\cap R_n$,$\underline{\underline{\bar{\mu}}}_1(R_n-B_n)=o$ i Card$(B_n)<k$

Očigledno mora biti Card$(B_n\cap S)<k$ i $\underline{\underline{\bar{\mu}}}_1(B_n\cap S)>o$

Kako je za svaki niz $a_1,\dots,a_m\in B_n\cap S$,${}^*\mu_1(\{a_1,\dots,a_m\})=o$, to na osnovu k-zasićenosti postoji internalan skup $K\subseteq{}^*R_n$ tako da je $B_n\cap S\subseteq K$ i ${}^*\mu_1(K)=o$.Odatle je $\underline{\underline{\bar{\mu}}}_1(B_n\cap S)=\underline{\underline{\bar{\mu}}}_1(K)=$ $=st({}^*\mu_1(K))=o$,što je u kontradikciji sa pretpostavkom,pa je prema tome ess Card$((\underline{\underline{\mathfrak{A}}},\underline{\underline{\vec{\mu}}}))>k$.

Na kraju odeljka definišemo strogi merni model i strogu mernu logiku $L^{s}_{\mathcal{A}M}$ i dokazujemo odgovarajući stav ptpunosti.Pritom su formule iste kao u $L_{\mathcal{A}M}$.

U dokazu stava potpunosti za $L^{s}_{\mathcal{A}M}$ logiku koristimo analogno "profinjenje" onom koje je dobio Kisler za $L_{\mathcal{A}P}$ logiku (v.[24]).

Def. 12.

Neka je $(A,\mathfrak{S},\mu)$ -konačan merljiv prostor tako da je svaki singlton merljiv.Tada je

$$(A^{n},\mathfrak{S}_{(n)},\mu_{(n)})$$

σ -konačan merljiv prostor,takav da je $\mathfrak{S}_{(n)}$ σ-algebra generisana pravougaonicima i dijagonalnim skupovima $\{\vec{x}\in A^{n}:x_{i}=x_{j}\}$ i $\mu_{(n)}$ je restrikcija od kompletiranja mere μ^{n} na $\mathfrak{S}_{(n)}$.

Def. 13.

Strogi merni model za jezik L je struktura

$$\mathfrak{A}=(A,R_{i}^{\mathfrak{A}},c_{j}^{\mathfrak{A}},\mu)_{i\in I,j\in J}$$

gde je μ σ-konačna mera na M takva da je svaki singlton merljiv.Takođe ako je S_{i} n_{i}-arni relaciski simbol tada je $S_{i}^{\mathfrak{A}}$, $\mu_{(n_{i})}$ merljiv skup.

Kraće,standardni merni model označavamo sa $(\mathfrak{A},\mu)$ gde je $\mathfrak{A}$ klasična relaciska struktura.

Zadovoljenje se definiše,slično kao kod mernih modela,samo što umesto mera μ_{n} koristimo mere $\mu_{(n)}$.

Aksiome za $L^{s}_{\mathcal{A}M}$ logiku su iste kao i za $L_{\omega_{1}M}$ $(L_{\mathcal{A}M})$

stim što se dodaje sledeći niz novih aksioma:

38) $(M\vec{x}\vec{y}\vec{z}\geq s)R_n^k(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\longrightarrow$

$\longrightarrow((M\vec{x}\geq r)(M\vec{y}>o)(M\vec{z}\geq r)((\underline{F}(\vec{x},\vec{z})\longleftrightarrow\underline{F}(\vec{y},\vec{z}))\wedge R_n^k(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$

za $n>o, s^t>r^k$ (ako je $\vec{x}=x_1,\dots,x_t$)

Pritom su promenljive $\vec{x},\vec{y}$ i $\vec{z}$ međusobno različite, svaka kvantifikacija u $\underline{F}(\vec{x},\vec{y})$ je ograničena sa R_n i ako se kvantifikator $M\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\geq t$ pojavljuje u $\underline{F}(\vec{x},\vec{y})$, mora biti $s^p>t^k$ i slično za ostale kvantifikatore.

Teorema 14. (Stav potpunosti za $L^s_{\mathcal{A}M}$)

Za svaku formulu $\underline{F}$ iz $L^s_{\mathcal{A}M}$

$$\vdash_{L^s_{\mathcal{A}M}} \underline{F} \text{ akko } \models_s \underline{F}$$

gde $\models_s \underline{F}$ podrazumeva važenje u svim strogim mernim modelima.

Skica dokaza: Implikacija sa leva na desno dokazuje se na uobičajen način proverom aksioma i pravila izvođenja.

Ukoliko je pak $\not\vdash_{L^s_{\mathcal{A}M}} \underline{F}$,tada na isti način kao u dokazu stava potpunosti za $L_{\mathcal{A}M}$ (teorema 1.) nađemo merni model $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ u kome ne važi $\underline{F}$.

Neka su $(\mathfrak{A}_i,\vec{\mu}^i)$ konačno-merni modeli koji se dobijaju iz $(\mathfrak{A},\vec{\mu})$ kao u Def. 11.

Na osnovu lema 5 i 6,aksioma 38) i teoreme 2.3.4 (v.[24]) postoje strogi merni modeli $(\mathfrak{N}_i,\eta^i)$ tako da je

$$(\mathfrak{A}_i,\vec{\mu}^i)\equiv(\mathfrak{N}_i,\eta^i)$$

Na isti način kao u dokazu teoreme 7 konstruišimo merni model $(\mathfrak{M},\nu)$,tako da je $(\mathfrak{M}_i,\nu^i)\equiv(\mathfrak{N}_i,\eta^i)$.

Model $(\mathfrak{M},\nu)$ će biti strogi merni model i na osnovu teoreme 5

$$(\mathfrak{A},\not\mu)=(\mathfrak{M},\nu)$$

Odatle sledi da će formula $\underline{F}$ biti falsifikovana u $(\mathfrak{M},\nu)$.

TREĆI DEO

LEBOVA MERA U ALTERNATIVNOJ TEORIJI SKUPOVA

Aksiome alternativne teorije skupova i prve posledice

Slično kao i Kantorova teorija skupova, alternativna teorija skupova (kraće AST) je intuitivna teorija. Stoga ćemo dati samo aksiome jednog njenog formalizovanog fragmenta u kome ćemo raditi. Pritom ćemo, bez opasnosti da dođe do nesporazuma, i taj fragment zvati AST. Uz aksiome i pojmove koji se definišu nećemo uvek davati motivaciju jer se ona može naći u [45].

AST je teorija u jeziku prvog reda sa jednakošću i jednim binarnim simbolom $\in$. Promenljive (za klase) su $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots$.

Def. 1.

Skupovi su elementi klasa ili

$$\mathrm{Set}(X) \leftrightarrow (\exists Y)(X \in Y)$$

Zbog kratkoće zapisa uvodimo skupovne promenljive $x, y, z, \ldots$. Tako izraze $(\forall X)(\mathrm{Set}(X) \rightarrow \underline{F}(X))$ i $(\exists X)(\mathrm{Set}(X) \wedge \underline{F}(X))$ skraćeno pišemo respektivno sa $(\forall x)\underline{F}(x)$ i $(\exists x)\underline{F}(x)$. Formule kod kojih možemo eliminisati sve klasovne promenljive su skupovne formule.

Ax 1. (Grupa šema aksioma za teoriju skupova)

U AST se prihvataju aksiome ZF_{fin}. Naročito treba istaći aksiomu indukcije

$$(\underline{F}(\emptyset) \wedge (\forall x, y)(\underline{F}(x) \rightarrow \underline{F}(x \cup \{y\}))) \rightarrow (\forall x)\underline{F}(x)$$

Na uobičajen način se definišu osnovne operacije i relacije među skupovima kao što su $\emptyset,\cap,\cup,P(\ )$,par,uređen par, i t.d.

Ax 2. (Aksioma ekstenzionalnosti)

$$(\forall X,Y)(X=Y\leftrightarrow(\forall z)(z\in X\leftrightarrow z\in Y))$$

Ax 3. (Aksioma komprehensije)

$(\exists Y)(\forall z)(z\in Y\leftrightarrow \underline{F}(z))$ za svaku formulu $\underline{F}(x)$

Ove dve aksiome nam omogućavaju da realizujemo mnoge značajne matematičke objekte. Tako se operacije $\cap,\cup,-,X_1\times X_2$, X^{-1}, dom( ), rng( ) i P( ) definišu slično kao za skupove, dok je

$V=\{x:x=x\}$ (univerzalna klasa)

$X\restriction Y=X\cap(V\times Y)$ (restrikcija)

$X''Y=\{z:(\exists y\in Y)((y,z)\in X)\}$ (slika od Y)

$Rel(X)\leftrightarrow X\subseteq V\times V$ (relacija)

$Fnc(X)\leftrightarrow Rel(X)\wedge(\forall x,y,z)((x,y)\in X\wedge(x,z)\in X\rightarrow y=x)$ (funkcija)

$1\text{-}1\ Fnc(X)\leftrightarrow Fnc(X)\wedge(\forall x,y,z)((y,x)\in X\wedge(z,x)\in X\rightarrow y=z)$ (1-1 funkcija)

$F:X\approx Y\leftrightarrow 1\text{-}1\ Fnc(F)\wedge dom(F)=X\wedge rng(F)=Y$

$X\approx Y\leftrightarrow(\exists F)(F:X\approx Y)$ (izomorfizam)

$X\lesssim Y\leftrightarrow(\exists F)(\exists Z)(Z\subseteq Y\wedge F:X\approx Z)$ (potapanje)

Relacije kao što su "klasa R je linearno uređenje klase X" i "klasa X sa relacijom linearnog uređenja R izomorfna je klasi Y sa relacijom linearnog uređenja S" dafinišu se lako preko relacija datih gore.

Def. 2.

Klasa R je dobro uređenje klase X (u oznaci We(X,R)) ako je linearno uređenje i

$$(\forall Y)(\emptyset \neq Y \wedge Y \subseteq X \rightarrow (\exists x \in Y)(\forall z \in Y)((x,z) \in R))$$

Na uobičajen način se uvodi pojam početnog komada.

Def. 3.

Klasa X je konačna ako su svi njeni delovi skupovi, t.j.

$$Fin(X) \leftrightarrow (\forall Y)(Y \subseteq X \rightarrow Set(Y))$$

Tako se jasno vidi da je svaka konačna klasa skup, ali ne važi obratno.

Def. 4.

Semiskup je podklasa skupa, odnosno

$$Sms(X) \longleftrightarrow (\exists y)(X \subseteq y)$$

Ax 4.

Postoji pravi poluskup. Simbolički

$$(\exists X)(Sms(X) \wedge \neg Set(X))$$

Def. 5.

Klasa X je prebrojiva (u oznaci Count(X)) ako nije konačna i postoji dobro uređenje $\leqslant$ na njoj tako da je

$$(\forall x)(Fin(\{y : (y,x) \in \leqslant\}))$$

Pokazuje se da postoji prebrojiva klasa, kao i da su svake dve prebrojive klase izomorfne.

Ax 5. (Aksioma izbora)

Univerzalna klasa se može dobro urediti, t.j.

$$(\exists R)We(V,R)$$

Ax 6. (Aksioma kardinalnosti)

Postoje samo dve beskonačne kardinalnosti

$$(\forall X)(\neg Fin(X) \rightarrow (Count(X) \veebar X \approx V))$$

Poslednja veoma značajna aksioma uslovljava "zasićenost" ove teorije.

Ax 7. (Aksioma produženja)

Svaka prebrojiva funkcija F se može raširiti sa funkcijom f koja je skup.

$$(\forall F)((Fnc(F) \wedge Count(F)) \longrightarrow (\exists f)(Fnc(f) \wedge F \subseteq f))$$

Za metamatematička razmatranja (kada se na primer formule izgrađuju u teoriji kao skupovi) grupa aksioma ZF_{fin} zamenjuje se sledećom jačom aksiomom

Ax Γ.

$$V \vDash ZF_{fin}$$

Navodimo sada neke osobine konačnih skupova i prebrojivih klasa i videćemo da su one slične osobinama koje imaju respektivno konačni skupvi i prebrojivi skupovi u ZF.

Tako ako su X i Y poluskupovi tada su poluskupovi i $X \cap Y, X \cup Y, X-Y, X \times Y, \bigcup X, P(X), dom(X), rng(X), X^{-1}, Y''X$.

Klasa definabilna pomoću skupovne formule nemože biti skup.

Teorema 1. (Indukcija za konačne skupove)

Ako $\emptyset \in Z$ i ako za svaki $x \in Z$ i svaki $y, x \cup \{y\} \in Z$, tada je svaki konačan skup u Z.

Koristeći indukciju za konačne skupove lako se pokazuju sledeće teoreme.

Teorema 2.

Ako funkcija F ima za domen konačan skup, tada je i ona konačna.

Teorema 3.

Ako je x konačan skup i $x \approx X$, tada je i X konačan skup i $X \approx x$ (t.j. $(\exists f)(f: x \approx X)$).

Teorema 4.

Ako su x i y konačni skupvi, tada su $P(x)$, $\cup x$ i $x \times y$ konačni skupovi.

Teorema 5.

Skup x je beskonačan akko za svaki $y \notin x$ imamo $x \approx x \cup \{y\}$.

Teorema 6.

Ako su X i Y prebrojive klase tada su i klase $X \cup Y$, $X \times Y$, $\cup X$ i $P(X) = \{x : x \subseteq X\}$ prebrojive.

Teorema 7.

Neka je X prebrojiva klasa. Tada postoji skup y i linearno uređenje na njemu $\leqslant$ (koje je skup), tako da je

$$X = \{x \in y : \mathrm{Fin}\{z \in y : z \leqslant x\}\}$$

Posledica

Svaka prebrojiva klasa je poluskup.

Ponekad je potrebno da posmatramo kolekciju objekata čiji su elementi klase. Da bismo radili u teoriji, moramo predstaviti kolekciju kao klasu, t.j. kodirati je.

Def. 6.

Kod je binarna relacija.

Sledećom definicijom zamenjuje se intuitivni pojam pripadanja klase kolekciji sa η-pripadanjem klase klasi.

Def. 7.

i) $X\eta K \leftrightarrow (\exists y\in dom(K))(X=K''\{y\})$ (X je η-element od K)

ii) Klasa K kodira kolekciju "$\{X:\underline{F}(X)\}$" akko

$$(\forall X)(\underline{F}(X)\leftrightarrow(\exists y\in dom(K))(X=K''\{y\}))$$

iii) Klase K i S kodiraju istu kolekciju (u oznaci $K\sim S$) ako

$$(\forall X)((\exists x\in dom(K))(X=K''\{x\})\leftrightarrow(\exists y\in dom(S))(X=S''\{y\}))$$

Klasu K koja kodira neku kolekciju $\mathcal{F}$, zovemo kodom kolekcije $\mathcal{F}$ (očigledno je to metapojam).

Kažemo da je kod K ekstenzionalan ako $x\neq y$ povlači $K''\{x\}\neq K''\{y\}$. Pomoću aksiome izbora možemo da pokažemo da za svaki kod K postoji kod $S\sim K$, tako da je ekstenzionalan.

Napomenimo da je klasa R klasa ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

Metateorema 1.

Sledeće kolekcije se mogu kodirati:

a) Faktor klasa $Z/R=\{X:(\exists y\in Z)(X=Z\cap R''\{y\})\}$ gde je R relacija ekvivalencije

b) $Z^Y=\{F:Fnc(F)\wedge dom(F)=Y\wedge rng(F)\subseteq Z\}$,ako je Count(Y)

c) $P_\omega(Z)=\{X:X\subseteq Z\wedge(Fin(X)\vee Count(X))$

Def. 8.

Klasa X je selektor za ekvivalenciju R ako zadovoljava:

(1) $(\forall x,y\in X)((x,y)\in R\rightarrow x=y)$

(2) $(\forall x)(\exists y\in X)((x,y)\in R)$

Teorema 8.

a) Klasa X je selektor za ekvivalenciju R akko $R\cap X\times V$ je ekstenzionalan kod.

b) Svaka klasa ekvivalencije ima selektor.

c) Neka je R relacija.Tada postoji funkcija $F\subseteq R$ tako da je dom(F)=dom(R).

d) Ako je R relacija,dom(R) prebrojiva klasa i za svaki $x\in dom(R)$,$R''\{x\}$ poluskup,tada je i R poluskup .

Napomenimo da ćemo,zbog intuitivnosti,za kod K koristiti oznaku $\{K''\{x\}:x\in dom(K)\}_\eta$ ili pisati čak nekorektno $\{K_x\}_{x\in dom(K)}$.

Def. 9.

Klasa X je razotkrivena ako za svaku prebrojivu klasu $Y\subseteq X$ postoji skup z tako da $Y\subseteq z\subseteq X$.

Teorema 9.

Svaka klasa definabilna skupovnim formulama je razotkrivena.

Def. 10.

Neka je $\{A_i\}_{i\in B}$ kod. Tada uniju i presek definišemo na sledeći način:

$$X=\bigcup\{A_i\}_{i\in B}\leftrightarrow X=\{x:(\exists i\in B)(x\in A_i)\}.$$

$$X=\bigcap\{A_i\}_{i\in B}\leftrightarrow X=\{x:(\forall i\in B)(x\in A_i)\}$$

Metateorema 2.

Kolekcija "$\{X:X\subseteq V\}$" se nemože kodirati.

Dokaz: Pretpostavimo da S kodira "$\{X:X\subseteq V\}$". Neka je $Y=\{x\in K:x\notin S''\{x\}\}$ Tada je $Y\subseteq V$ i za svako $x\in dom(S)$, $Y\neq S''\{x\}$.

Metateorema 3.

Ako se kolekcija "$\{X:\underline{F}(X)\}$" može kodirati i $(\forall X)(\underline{F}(X)\rightarrow\underline{Z}(X))$ onda se i kolekcija "$\{X:\underline{Z}(X)\}$" može kodirati.

Def. 11.

$$X=\{Y,Z\}_\eta\leftrightarrow Rel(X)\wedge dom(X)=\{1,2\}\wedge X''\{1\}=Y\wedge X''\{2\}=Z$$

(X je par Y i Z)

$$X=(Y,Z)_\eta\leftrightarrow(\exists U,V)(U=\{Y,Y\}_\eta\wedge V=\{Y,Z\}_\eta\wedge X=\{U,V\}_\eta)$$

(X je uređen par klasa Y i Z)

Slično se definišu i uređena trojka, četvorka i t.d. Takođe se često indeks η izostavlja.

Sada želimo da navedemo i dokažemo neke posledice aksiome o produženju (Ax 7.) koje ćemo kasnije koristiti.

Teorema 10.

Neka je X prebrojiva klasa. Klasa $\bigcup X(\bigcap X)$ je skup akko postoji $z\subseteq X$ tako da je $\bigcup X=\bigcup z$ $(\bigcap X=\bigcap z)$.

Posledica

Ako je X prebrojiva klasa tako da je $\bigcap X=\emptyset$, tada postoji $z \subseteq X$, tako da je $\bigcap z = \emptyset$.

Teorema 11.

Neka su X i Y prebrojive, disjunktne klase. Tada postoje disjunktni skupovi x i y tako da $X \subseteq x$ i $Y \subseteq y$.

Dokaz: Definišimo funkciju F na $X \cup Y$, stavljajući $F(x) = \emptyset$ za $x \in X$ i $F(x) = \{\emptyset\}$ za $x \in Y$. Na osnovu aksiome o produženju postoji funkcija $f \supseteq F$. Neka je $x = \{z \in dom(f) : f(x) = \emptyset\}$ i $y = \{z \in dom(f) : f(z) = \{\emptyset\}\}$. Očigledno su x i y željeni skupovi.

Teorema 12.

Neka su X i Y prebrojive klase tako da $(\bigcup X) \cap (\bigcup Y) = \emptyset$. Tada postoje disjunktni skupovi x i y takvi da $\bigcup X \subseteq x$ i $\bigcup Y \subseteq y$.

Dokaz: Neka je a beskonačan skup i $\leqslant$ linearno uređenje na njemu koje je skup. Takođe, uočimo prebrojivu klasu

$$Z = \{z \in a : Fin(\{y \in a : y \leqslant z\})$$

i funkcije $F : Z \approx X$, $G : Z \approx Y$, $F \subseteq f$ i $G \subseteq g$.

Stavimo $\hat{f}(z) = \bigcup f''(\{y \in a : y \leq z\})$, $\hat{g}(z) = \bigcup g''(\{y \in a : y \leq z\})$ i $a_1 = \{z \in a : \hat{f}(z) \cap \hat{g}(z) = \emptyset\}$. Tada očigledno $z \subseteq a_1$ i skupovi $x = \bigcup(f''(a_1))$ i $y = \bigcup(g''(a_1))$ imaju željena svojstva.

Posledica

Neka s u X i Y prebrojive klase tako da $\bigcup X \subseteq \bigcap Y$. Tada postoji skup u tako da $\bigcup X \subseteq u \subseteq \bigcap Y$.

Def. 12.

Kažemo da je klasa Z usmerena (dualno usmerena) u odnosu na inkluziju ako iz uslova da $x, y \in Z$ sledi da postoji $z \in Z$ tako da $z \supseteq x \cup y$ $(z \subseteq x \cap y)$.

Teorema 13.

Neka se usmerena (dualno usmerena) klasa Z može definisati skupovnom formulom. Tada za svaki poluskup $X \subseteq Z$ postoji $u \in Z$, tako da je za svaki $x \in X, x \subseteq u$ $(u \subseteq x)$.

Dokaz: Razmotrimo slučaj kada je klasa usmerena. Ako je $Z = \emptyset$ nemamo šta da dokazujemo.

Pretpostavimo da je $X \neq \emptyset$. Kako je $\bigcup X$ poluskup, to postoji skup t, tako da $\bigcup X \subseteq t$. Lako se vidi da je skup $a = \{x \in t : (\exists z \in Z)(x \subseteq z)\}$ zatvoren za uniju i $X \subseteq a$. Ako je y maksimalan element u a u odnosu na inkluziju, tada će $u \in Z$, tako da je $y \subseteq u$, biti željeni skup.

Drugi deo tvrđenja, kada je Z dualno usmeren, dokazuje se slično.

Teorema 14.

Neka je klasa Z definabilna u teoriji skupova i neka je X usmeren (dualno usmeren) podpoluskup od Z. Tada postoji $u \in Z$ tako da za svaki $x \in X$ vredi $x \subseteq u$ $(u \subseteq x)$.

Dokaz: Dovoljno je dokazati prvi deo. Neka je a linearno uređen skup relacijom $\leqslant$ i $X = \{x \in a : Fin(\{y \in a : y \leq x\})\}$. Neka je $a_1 = \{x \in a : (\exists u \in Z)(\forall y \in a)(y \in x \rightarrow y \subseteq u)\}$. Kako $X \subseteq a_1$ izaberimo $\hat{x} \in a_1 - X$. Tada $u \in Z$ tako da $(\forall y \in a)(y \leq \hat{x} \rightarrow y \subseteq u)$ ima traženo svojstvo.

Prirodni, racionalni i realni brojevi u AST

Prirodni brojevi u AST se izgrađuju slično kao i u ostali teorijama skupova. Tako je $o = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{o, 1\}$ i t.d.

Klasa prirodnih brojeva N je definabilna formulom

$(\forall y \in x)(y \subseteq x) \wedge (\forall y,z \in x)(y \in z \vee y = z \vee z \in y)$

Prirodne brojeve označavamo malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \ldots$

Daćemo sada dve jednostavne teoreme koje pokazuju dobro poznate osobine prirodnih brojeva.

Teorema 15.

Klasa N je linearno uređena relacijom $\{(\alpha,\beta) : \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta\}$

Napomenimo da ćemo pod uređenjem na N, ako se drukčije ne definiše, podrazumevati uređenje iz teoreme 15.

Teorema 16.

Važe sledeće činjenice:

a) $\emptyset \in N$ i $\emptyset$ je najmanji element

b) Ako $\alpha \in N$ tada je $\alpha \cup \{\alpha\}$ prvi sledeći u N

c) Ako $\alpha \in N$ i $\alpha \neq \emptyset$ tada postoji prethodnik β, tako da $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

Sledeća teorema pokazuje da skupove možemo prebrojavati.

Teorema 17.

Za svaki skup x postoji jedinstven prirodan broj α (broj elemenata skup x) tako da je $x \approx \alpha$ (t.j. $(\exists f)(f : x \approx \alpha)$).

Def. 12.

Sabiranje i množenje prirodnih brojeva definiše se na sledeći način:

$\gamma = \alpha + \beta$ akko $\gamma \approx \alpha \cup (\{0\} \times \beta)$

$\gamma = \alpha \cdot \beta$ akko $\gamma \approx \alpha \times \beta$

$S(\alpha) = \alpha + 1$

Na osnovu aksiome 4 i teoreme 17 postoje beskonačni prirodni brojevi.

<u>Klasa konačnih prirodnih brojeva</u> $FN=\{\alpha\in N:Fin(\alpha)\}$ je prema tome prava podklasa od N.

Konačne prirodne brojeve obeležavamo malim latiničnim slovima $m,n,p,\ldots$ .Može se pokazati da je klasa FN poluskup i dobro uređena relacijom $\{(m,n):m\in n\vee m=n\}$.

Sledeća teorema pokazuje zatvorenost klase FN za osnovne operacije.

<u>Teorema 18.</u>.

Važe sledeće činjenice:

a) $o\in FN\wedge(\forall n\in FN)(n+1\in FN)$

b) $(\forall m,n\in FN)(m+n\in FN\ \ m\cdot n\in FN\ \ m^n\in FN)$

Može se pokazati da strukture $(N,+,\cdot,S,o)$ i $(FN,+,\cdot,S,o)$ zadovoljavaju aksiome Peanove aritmetike.

<u>Teorema 19.</u> (Indukcija po konačnim prirodnim brojevima)

Neka $o\in X$ i ako $n\in X$ sledi da $n+1\in X$.Tada $FN\subseteq X$.

Dajemo sada teoreme koje omogućuju definisanje rekurzijom po prirodnim brojevima,odnosno konačnim prirodnim brojevima.

<u>Teorema 20.</u>

Neka je $\underline{F}(x,y)$ formula teorije skupova tako da $(\forall x)(\exists_1 y)\underline{F}(x,y)$.Tada postoji tačno jedna funkcija G, definabilna u teoriji skupova,tako da $dom(G)=FN$ i $\underline{F}(G\restriction n,G''\{n\})$

<u>Teorema 21.</u>

Ako $(\forall X)(\exists_1 Y)\underline{F}(X,Y)$,tada postoji tačno jedna relacija

R,tako da dom(R)$\subseteq$FN i za svako n vredi $\underline{F}(R\upharpoon n, R''\{n\})$.

Može se pokazati da postoji neprebrojiva klasa Ω, tako da FN$\subseteq\Omega\subseteq$N i pritom je dobro uređena,tako da joj je svaki početni komad ili konačan ili prebrojiv.Pritom je Ω zatvorena za sabiranje i množenje.

Sledeće teoreme,slične prethodnim,omogućavaju rekurziju po Ω.

Teorema 22.

Ako $(\forall X)(\exists_1 Y)\underline{F}(X,Y)$,tada postoji tačno jedna relacija R,tako da dom(R)$\subseteq\Omega$ i za svko $\alpha\in\Omega$ imamo $\underline{F}(R\upharpoon(\alpha\cap\Omega), R''\{\alpha\})$.

Teorema 23.

Neka za svako najviše prebrojivo Y postoji x,tako da je $\underline{F}(x,Y)$.Tada postoji funkcija G tako da je dom(G)=Ω i $\underline{F}(G(\alpha), G\upharpoon(\alpha\cap\Omega))$,za svako $\alpha\in\Omega$.

Daćemo sada konstrukciju polja realnih brojeva, osnovne algebarsko topološke strukture koja nas interesuje.

Prethodno ćemo definisati klase celih ,konačno celih, racionalnih,konačnih racionalnih i ograničenih racionalnih brojeva.

Klasa celih brojeva je $Z=N\cup\{(\alpha,\{1\}):\alpha\in N-\{o\}\}$,a klasa konačnih celih brojeva $FZ=FN\cup\{(n,\{1\}):n\in N-\{o\}\}$.Operacije + i $\cdot$ i relacija $\leqslant$ se na uobičajen način proširuju sa N i FN na Z i FZ respektivno.

Klasu racionalnih brojeva RN definišemo kao količničku klasu klase Z.Tako na Z^2 možemo uvesti relaciju ekvivalencije $\sim$ sa

$$(\alpha,\beta)\sim(\gamma,\delta) \text{ akko } \alpha\delta=\gamma\beta$$

Tada je klasa racionalnih brojeva

$$RN=\{(\alpha,\beta):(\forall\gamma,\delta\in Z)((\alpha,\beta)\sim(\gamma,\delta)\rightarrow|\alpha|+|\beta|\leq|\gamma|+|\delta|\wedge\beta>0\}$$

Racionalan broj (α,β) jednostavnije pišemo $\frac{\alpha}{\beta}$.

<u>Def. 14.</u>

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\tau}{\theta}$ akko $\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta}\sim\frac{\tau}{\theta}$

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\tau}{\theta}$ akko $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\sim\frac{\tau}{\theta}$

$\frac{\alpha}{\beta}\leq\frac{\gamma}{\delta}$ akko $\alpha\delta\leq\gamma\beta$

Lako se pokazuje da je sve dobro definisano.

Tako je onda $FRN=\{\frac{m}{n}\in RN:m,n\in FN\wedge n\neq 0\}$ <u>klasa konačnih racionalnih brojeva</u> i $BRN=\{x:x\in RN\wedge(\exists n\in FN)(|x|<n)$ <u>klasa ograničenih racionalnih brojeva</u>.

Jasno je da su klase FZ i FRN prebrojive, a klase Z, RN i BRN neprebrojive.

Među racionalnim brojevima se uvodi relacija $\doteq$ (beskonačno blizu) tako da

$$x\doteq y \text{ akko } (\forall n\in FN)(|x-y|<\tfrac{1}{n})\vee(\forall n\in FN)(y,x>n)\vee(\forall n\in FN)(x,y<-n)$$

Lako se pokazuje da je $\doteq$ relacija kongruencije na BRN.

Neka je klasa $\bar{R}\subseteq BRN$ selektor za relaciju kongruencije $\doteq$. Izaberimo klasu R tako da je $FRN=RN\cap R$ i $F:\bar{R}\approx R$ za neko F. Klasu R zvaćemo <u>klasom realnih brojeva</u>.

Definišimo operaciju standardni deo $st:BRN\rightarrow R$ tako da je

$$st(x)=y \text{ akko } (\exists z\in\bar{R})(F(z)=y\wedge x\doteq z)$$

<u>Def. 15.</u>

Sabiranje, množenje i poredak na R se definišu:

$x+y=z$ akko $F^{-1}(x)+F^{-1}(y)\doteq F^{-1}(z)$

$x\cdot y=z$ akko $F^{-1}(x)\cdot F^{-1}(y)\doteq F^{-1}(z)$

$x\leqslant y$ akko $F^{-1}(x)\leqslant F^{-1}(y)$

<u>Teorema 24.</u>

Klasa R sa operacijama + i $\cdot$ i relacijom $\leqslant$ čini uređeno, realno zatvoreno i kompletno polje tako da je klasa FRN gusta u R.

Zadržaćemo se sada na relaciji kofinalnosti (Cof) i koinicijalnosti (Coin) između dobrih uređenja.

Pretpostavimo da je $\leqslant_1$ dobro uređenje na V. Neka je $\underline{n}=\{(m,k):m\in k\wedge m\in n\wedge k\in n\}$, $\Omega_0=\{(n,m):n\in FN\wedge m\in FN\wedge n\in m\}$ i $\Omega_1=\{(x,y):x,y\in V\wedge x\leqslant_1 y\}$. Tada ako je Q jedan od $\underline{n},\Omega_0,\Omega_1$ imamo:

$$Q\leqslant_{Cof}(X,R)\longleftrightarrow(\exists Y\subseteq X)((Y,R\restriction Y^2)\cong Q\wedge(\forall x\in X)(\exists y\in Y)((x,y)\in R))$$

$$Q\leqslant_{Coin}(X,R)\longleftrightarrow(\exists Y\subseteq X)((Y,R\restriction Y^2)\cong Q\wedge(\forall x\in X)(\exists y\in Y)((y,x)\in R))$$

Pritom se pod $(X,R)\cong Q$ podrazumeva $(X,R)\cong(\mathrm{dom}(Q),Q)$.

<u>Def. 16.</u>

$$\mathrm{Cof}(X,R)=0\longleftrightarrow X=\emptyset$$

$$\mathrm{Cof}(X,R)=\underline{n+1}\longleftrightarrow\underline{n+1}\leqslant_{Cof}(X,R)\wedge\neg\,\underline{n}\leqslant_{Cof}(X,R)\qquad n\in FN$$

$$\mathrm{Cof}(X,R)=\Omega_0\longleftrightarrow\Omega_0\leqslant_{Cof}(X,R)\wedge(\forall n\in FN)\neg\,\underline{n}\leqslant_{Cof}(X,R)$$

$$\mathrm{Cof}(X,R)=\Omega_1\longleftrightarrow\Omega_1\leqslant_{Cof}(X,R)\wedge\neg\,\Omega_0\leqslant_{Cof}(X,R)$$

Slično se definiše i Coin(X,R). Često se, ako je iz konteksta jasno šta je R, piše kraće Cof(X) i Coin(X). Takođe $Y\subseteq X$, tako da se $(Y,R\restriction Y^2)\cong\mathrm{Cof}(X,R)$ zove <u>kofinalna podklasa</u> od

X. Analogno se definiše i <u>koinicijalna podklasa</u>.

Def. 17.

Neka je:

$M(o)=\{x\in RN : x\doteq o\}$

$M(a)=\{x\in RN : x\doteq a\}$ za $a\in R$

$M^+(a)=\{x\in M(a) : x\geq o\}$

$RN^+=\{x\in RN : x\geq o\}$

$Inf=\{x\in RN : (\forall k\in FN)(k<|x|)$

$Inf^+=\{x\in Inf : x>o\}$

Neka je $\overline{N}\subseteq N-FN$ selektor za relaciju $\simeq\subseteq N^2$, gde je

$x\simeq y \longleftrightarrow |x-y|\in FN$

Podrazumevaćemo da je uređenje na RN standardno.

Lema 1.

Važe sledeće jednakosti:

a) $Cof(N)=Cof(\overline{N})$

b) $Coin(N-FN)=Coin(\overline{N})$

c) $Cof(RN)=Cof(N)$

d) $Cof(M(o))=Coin(Inf^+)=Coin(N-FN)$

e) $Cof(RN)=Cof(\overline{N})$

f) $Cof(M(o))=Coin(\overline{N})$

Dokaz: Tačke a), b) i c) su neposredno jasne.

d) Neka je $F:M^+(o)\rightarrow Inf^+$ definisano sa $F(r)=\frac{1}{r}$ za $r\in M^+(o)$ i $G:N-FN\rightarrow Inf^+$ definisana sa $G(n)=n$. Tada su $rng(F)$ i $rng(G)$ koinicijalni sa Inf^+.

Tačke e) i f) su posledice prethodnih.

Lema 2.

Sledeći uslovi su ekvivalentni:

a) $(RN,\leq)_\eta \cong (M(a),\leq)_\eta$ za svaki $a\in RN$

b) $(RN,\leq)_\eta \cong (M(o),\leq)_\eta$

c) $Cof(RN)=Cof(M(o))$

d) $Cof(RN)=Coin(\overline{N})$

Dokaz:

a)$\longleftrightarrow$b) Funkcija $F:RN\rightarrow RN$, tako da je $F(r)=r+a$ je izomorfizam između $M(o)$ i $M(a)$.

d)$\longleftrightarrow$c) Sledi neposredno iz prethodne leme.

b)$\longrightarrow$c) Trivijalno.

c)$\longrightarrow$b) Dovoljno je pokazati da su $(RN^+,\leq)_\eta$ i $(M^+(o),\leq)_\eta$ izomorfni.

Neka su $\{a_\alpha:\alpha\in A\}$ i $\{b_\alpha:\alpha\in A\}$ $(A\subseteq N)$ rastuće kofinalne podklase od $M^+(o)$ i RN^+, respektivno. Definišimo sledeće izomorfizme:

$$F_o:[o,a_o)\longrightarrow[o,b_o) \qquad F_o(x)=\frac{b_o}{a_o}\cdot x$$

$$F_n:[a_n,a_{n+1})\longrightarrow[b_n,b_{n+1})$$

gde je za $n\in FN$

$$F_n(x)=\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}\,x+(b_n-\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n})$$

Tada je $F=\bigcup\{F_n:n\in A\}$ traženi izomorfizam.

Neka je $x\lessdot y\longleftrightarrow y\leq x$. Definišimo funkciju $s:N-FN\longrightarrow\overline{N}$, tako da je $s(x)=s(y)$ akko $|x-y|\in FN$.

Važi sledeća lema.

Lema 3.

Neka je X otvoren interval u $\overline{N}$ i B otvoren interval u N. Tada

a) $(B,\leq)_\eta \cong (B,\grave{\leq})_\eta$

b) $(X,\leq)_\eta = (X,\grave{\leq})_\eta$

c) $Cof(X)=Coin(X)=Coin(\overline{N})$

Dokaz:

a) Neka je $B=\{x\in N: n<x<m\}$. Definišimo funkciju $F:B\to B$, tako da je $F(x)=n+m-x$. Očigledno $F:(B,\leq)_\eta \cong (B,\grave{\leq})_\eta$.

b) Neka je $X=\{z\in\overline{N}: x<z<y\}$, gde $x,y\in\overline{N}$. Tada postoje $m,n\in N-FN$ tako da je $s(m)=x, s(n)=y$ i $m<n$. Odredimo funkciju $\overline{F}: X\to X$ sa $\overline{F}(s(p))=s(F(p))$ za $x<s(p)<y$ i $p\in N-FN$. Lako se vidi da je $\overline{F}:(X,\leq)_\eta = (X,\grave{\leq})_\eta$.

c) Na osnovu prethodne tačke je $Cof(X)=Coin(X)$. Ako je $B_1=\{x\in N: o<x<m-n\}$, tada je $G(p)=p+m$ $(p\in B_1)$ izomorfizam. Odatle i funkcija $\overline{G}:X\to\{x\in\overline{N}: x<s(m-n)\}$, tako da je $\overline{G}(s(p))=s(G(p))$, je izomorfizam. Sledi da je $Coin(X)=Coin(\overline{N})$.

<u>Teorema 25.</u>

Važi da je $Cof(N)=\Omega_1$ i $Coin(N-FN)=\Omega_1$

Dokaz: Pretpostavimo da je $Cof(N)=\Omega_0$. Tada postoji funkcija $F:FN\to N$, tako da za svaki $x\in N$ postoji $n\in FN$ sa osobinom $x\leq F(n)$

Neka je $F\subseteq f$ i

(*) $a=\{x\in dom(f): \text{"}x \text{ pr.br."} \wedge \text{"}f(x) \text{ pr.br."} \wedge (\forall y\leq x)(f(y)\leq f(x))\}$

Kako je $FN\subseteq a$, to postoji $\alpha\in a-FN$ tako da $(\forall n\in FN)(F(n)\leq f(\alpha))$.

Međutim, to je protivurečnost.

Dokažimo sada drugi deo tvrđenja. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju,da je $Coin(N-FN)=\Omega_0$.Odatle,postoji funkcija $F:FN\rightarrow N-FN$ takva da $(\forall x\in N-FN)(\exists n\in FN)(F(n)\leq x)$.

Neka $f\supseteq F$ zadovoljava $(*)$.Kako je $rng(f)\subseteq N$,to postoji najmanji $n_0\in N-FN$,tako da je $f(n_0)\leq f(n_0+1)$ i $(\forall m<n_0)(f(m+1)<f(m))$ Sledi da je za $m<m'<n_0,f(m')+m'-m\leq f(m)$.

Neka je $m_0\in N-FN$ i $2m_0<n_0$.Tada iz $f(2m_0)+m_0\leq f(m_0)$ dobijamo $m_0\leq f(m_0)$.

Zbog toga što je $f(m_0)<F(k)$ za $k\in FN$ i $k<m_0<n_0$,i koinicijalnosti $rng(F)$ u $N-FN$,$f(m_0)$ pripada FN.To je,međutim suprotno izboru broja m_0.

Posledica koja sledi pokazuje da se skup racionalnih brojeva na neki način "oslikava" u monadi.

Posledica

$$(M(o),\leq)_\eta=(RN,\leq)_\eta$$

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme je $Cof(N)=Coin(N-FN)$,dok je na osnovu leme 2 dovoljno pokazati da je $Cof(RN)=Cof(M(o))$ To međutim sledi iz leme 1,tačke c) i d).

Lebova i Lebegova mera

Operacija izbrojavanja skupa,vodi nas do pojma brojčanosti (kardinalnosti) i upoređivanju skupova po brojnosti.Nekada je,međutim,važnije znati koliko je puta skup iz neke familije veći ili manji od nekog fiksiranog skupa,a to saznavanje je merenje.

Neka je $y\subseteq x$,α broj elemenata skupa x i β broj elemenata skupa y.Tada je izbrajajuća (ili prebrajajuća) mera skupa y u odnosu na skup x definisana sa $\rho_x(y)=\frac{\beta}{\alpha}$. Pritom, kako će skup x biti poznat iz konteksta i fiksiran, izostavljamo indeks x.

Na osnovu aksiome indukcije lako se može pokazati aditivnost funkcije ρ. Naime, ako je $\{y_\alpha : \alpha\in\beta\}$ $(\beta > 0)$ niz disjunktnih podskupova od x, tada je

$$\rho(\cup\{y_\alpha : \alpha\in\beta\}) = \sum_{\alpha<\beta}\rho(y_\alpha)$$

Pritom možemo postaviti pitanje značenja i postojanja sume $\sum_{\alpha<\beta} f(\alpha)$? To se lako rešava, jer ako je $dom(f)=\beta$ indukcijom možemo pokazati da

$$(\exists_1 g)(dom(g)=\beta+1 \wedge (\forall\gamma<\beta)(g(\gamma+1)=g(\gamma)+f(\gamma)))$$

pa je $\sum_{\alpha<\beta} f(\alpha) \overset{def}{=\!=} g(\beta)$.

Takođe se indukcijom, za niz $\{x_n : n\in FN\}$ realnih brojeva, može uvesti zbir $\sum_{n\in FN} x_n$

Kako je zgodnije raditi sa kompletnim poljem R, nego sa RN, uvodimo funkciju $p:P(x)\to R$, sa $p(y)=st(\rho(y))$.

<u>Teorema 26.</u>

Neka je $\{y_n : n\leq m\}$ niz disjunktnih podskupova od x. Tada je $p(\cup\{y_n : n\leq m\}) = \sum_{n\leq m} p(y_n)$

Skica dokaza: Tvrđenje sledi iz indukcije po konačnim prirodnim brojevima i činjenice da je $st(x+y)=st(x)+st(y)$ za $x,y\in RN$.

Naročito su interesantni beskonačni skupovi, koji sadrže prave podklase. Poluskup X se nemože meriti direktno, ali se može aproksimirati skupovima "iznutra" i "spolja". Ako se granični brojevi mera unutrašnjih i spoljašnjih aproksimacija poklapaju onda je poluskup X Leb merljiv.

Def. 18.

Neka je $A \subseteq x$

a) Unutrašnja mera klase A je $U(A)=\sup\{p(y):y \subseteq A\}$

b) Spoljna mera klase A je $S(A)=\inf\{p(y):A \subseteq y\}$

c) Klasa A je Leb merljiva ako je $S(A)=U(A)$. Pritom je mera klase A, $p(A)=S(A)=U(A)$

Sledeće tri leme se mogu lako pokazati.

Lema 4.

Klasa A je merljiva akko za svako $\varepsilon>0$ postoje skupovi y i z, tako da je $y \subseteq A \subseteq z$ i $p(z-y)<\varepsilon$.

Lema 5.

$S(A)=1-U(x-A)$

Lema 6.

Ako su A i B merljive klase, tako da je $A \cap B=\emptyset$, tada je i klasa $A \cup B$ merljiva i $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$.

Odatle se lako pokaže da je Lebova mera zatvorena za konačne unije i preseke kao i konačno aditivna.

Napomenimo, da se klasa Leb merljivih skupova ne može kodirati (što ćemo kasnije pokazati) već samo može dati u intenzionalnom obliku formulom $S(A)=U(A)$.

Stoga je sledeća, Lebova teorema, data u nešto izmenjenom obliku.

Teorema 27.

Neka je dat kod $\{A_i\}_{i\in FN}$ Leb merljivih disjunktnih podklasa od x. Tada je i $A=\cup\{A_i:i\in FN\}$ Leb merljiva klasa i $p(A)=\sum_{i\in FN} p(A_i)$.

Dokaz: Dovoljno je da se zadržimo na slučaju kada je za svako $i\in FN, A_i\subseteq A_{i+1}$.

Neka je za $i\in FN, p(A_i)=a_i$ i $\lim_{i\in FN} a_i=a$.

Da bismo primenili lemu 1 treba da odredimo skupove y i z tako da je $y\subseteq A\subseteq z, p(y)\geq a-\varepsilon$ i $p(z)\leq a+\varepsilon$.

Skup y se određuje lako. Odaberimo $n\in FN$, tako da je $a_n\geq a-\frac{\varepsilon}{2}$. Kako je A_n merljiva klasa, postoji $y\subseteq A_n$ tako da je $p(y)\geq a_n-\frac{\varepsilon}{2}$. Tada $y\subseteq A$ i $p(y)\geq a-\varepsilon$.

Nađimo sada skup z. Izaberimo z_n' tako da $A_n\subseteq z_n'$ i $p(z_n')\leq a_n+\frac{\varepsilon}{2^n}$. Formirajmo monoton niz $\{z_n\}_{n\in FN}$, tako da je $z_n=\bigcup_{m\leq n} z_m'$

Dokažimo, indukcijom po konačnim prirodnim brojevima da je $p(z_n)\leq a_n+(1-\frac{1}{2^n})\varepsilon$. Za n=1 nejednakost sledi na osnovu izbora skupa z_1. Koristeći induktivnu pretpostavku imamo da

$$p(z_{n+1})=p(z_n\cup z'_{n+1})=p(z_n)+p(z_n'-z_n)\leq p(z_n)+p(z'_{n+1}-A_n)=$$
$$=p(z_n)+p(z'_{n+1})-p(A_n)\leq a_n+(1-\frac{1}{2^n})\varepsilon+a_{n+1}+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}-a_n=$$
$$=a_{n+1}+(1-\frac{1}{2^{n+1}})\varepsilon.$$

Neka je $s_n=\{z\in P(x):\wp(z)\leq a+\varepsilon \wedge z_n\subseteq z\}$. Tada očigledno $z\in s_n$ i $s_n\supseteq s_{n+1}$. Na osnovu teoreme 14, kako je klasa $S=\{s_n:n\in FN\}$ dualno usmerena, postoji $\emptyset\neq s\subseteq s_n$. Za $z\in s$ tada imamo $p(z)=st\wp(z)\leq a+\varepsilon$ i $A\subseteq z$.

Preći ćemo sada na uvođenje Lebegove mere preko Lebove. Neka je $\alpha\in N-FN, t=\{\frac{\beta}{\alpha}:\beta\leq\alpha\}$ i $st_t=st\upharpoonright t$. Očigledno, st_t

preslikava t na klasu $[o,1]=\{x\in R: o\leq x\leq 1$ .Indeks t ćemo najčešće izostavljati.

Daćemo sada nekoliko lema o osnovnim vezama operacije st sa presekom i unijom klasa.

Lema 7.

Ako je $\{A_i\}_{i\in FN}$ kod, tada su $\{st(A_i)\}_{i\in FN}$ i $\{st^{-1}(A_i)\}_{i\in FN}$ kodovi.

Lema 8.

a) Ako je $A\subseteq[o,1]$, tada je $st(st^{-1}(A))=A$

b) Ako je $A\leq t$, tada je $st^{-1}(st(A))\supseteq A$

Lema 9.

Ako $A_i\subseteq[o,1]$, za $i\in FN$, tada važe sledeći identiteti:

a) $st^{-1}(\bigcup\{A_i\}_{i\in FN})=\bigcup\{st^{-1}(A_i)\}_{i\in FN}$

b) $st^{-1}(\bigcap\{A_i\}_{i\in FN})= \{st^{-1}(A_i)\}_{i\in FN}$

Sledeća lema se pokazuje primenom teoreme 14.

Lema 10.

Ako $a_i\leq t$, za $i\in FN$, tada je $st(\bigcup\{a_i: i\ FN\})=\bigcup\{st(a_i): i\in FN\}$

Daćemo sada neke elemente topologije na R.

Za a,b R, $[a,b]=\{x\in R: a\leq x\leq b\}$ je zatvoren a $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$ otvoren interval. Kolekciju intervala čiji su krajevi konačni racionalni brojevi kodiramo klasom $I=\{((a,b),x): a,b\in FRN\wedge a<x<b\}$

Otvorene klase su prebrojive unije intervala iz I. Kolekciju otvorenih klasa kodiramo klasom

$O=\{(f,x): FN\leq dom(f)\wedge rng(f\upharpoonright FN)\subseteq FRN^2\wedge x\in R\wedge(\exists y)(y\in rng(f\upharpoonright FN)\ \wedge$

$1^{st}(y) \leq x \leq 2^{nd}(y))$

Zatvorene klase su komplementi otvorenih, pa je kod kolekcije zatvorenih klasa $C=\{(f,x): x \notin O''\{f\} \wedge f \in dom(O) \wedge x \in R\}$

Otvorenu klasu, obično, obeležavamo sa G, a zatvorenu sa F. Za R se mogu pokazati očekivane topološke osobine. Tako je, na primer, R sa O Hauzdorfov prostor, pa je F zatvorena i ograničena klasa akko je kompaktna klasa.

Uvodimo sada Lebegovu meru na intervalu $[o,1]$.

Def. 19.

Klasa $A \subseteq [o,1]$ je Lebeg merljiva ako je klasa $st^{-1}(A)$ Leb merljiva i pritom je Lebegova mera od $A, \lambda(A)=p(st^{-1}(A))$.

Teorema 28.

Neka je $\{A_i\}_{i \in FN}$ kod Lebeg merljivih disjunktnih podklasa od $[o,1]$. Tada je $\cup\{A_i : i \in FN\}$ Lebeg merljiva klasa i

$$\lambda(\cup\{A_i : i\ FN\}) = \sum_{i \in FN} \lambda(A_i)$$

Dokaz: Prema lemi 9 a) klasa $st^{-1}(\cup\{A_i : i \in FN\})$ je Leb merljiva pa je i klasa $\cup\{A_i : i \in FN\}$ Lebeg merljiva. Pritom je

$$\lambda(\cup\{A_i : i \in FN\}) = p(st^{-1}(\cup\{A_i : i \in FN\})) =$$
$$p(\cup\{st^{-1}(A_i) : i \in FN\}) = \sum_{i \in FN} p(st^{-1}(A_i)) = \sum_{i \in FN} \lambda(A)$$

Dajemo sada u obliku lema neke osobine Lebegove mere i funkcije st.

Lema 11.

Otvoren interval (a,b) $(a,b \in FRN)$ je merljiv i $\lambda((a,b))=b-a$

Lema 12.

Svaka otvorena ili zatvorena podklasa od $[0,1]$ je Lebeg merljiva.

Lema 13.

Ako je $b\leq t$, tada je $st(b)$ zatvorena klasa.

Teorema 29.

Za svaku merljivu klasu A važe sledeće jednakosti:

a) $\lambda(A)=\sup\{\lambda(F):F\leq A\wedge(\exists f)(F=C''\{f\})\}$

b) $\lambda(A)=\inf\{\lambda(G):A\leq G\wedge(\exists f)(G=O''\{f\})\}$

Dokaz:

a) Neka je $F\leq A$. Tada je $st^{-1}(F)\leq st^{-1}(A)$ i $\lambda(F)=p(st^{-1}(F))\leq p(st^{-1}(A))=\lambda(A)$. Otuda je

$$\sup\{\lambda(F):F\leq A\wedge(\exists f)(F=C''\{f\})\}\leq\lambda(A) \qquad (*)$$

Sa druge strane, ako $b\leq A$ tada je na osnovu prethodne leme $st(b)$ zatvorena klasa i $b\leq st^{-1}(st(b))\leq st^{-1}(A)$. Odatle

$$\lambda(A)\leq\sup\{\lambda(F):F\leq A\wedge(\exists f)(F=C''\{f\})\} \qquad (**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ sledi jednakost.

b) Sledi iz a).

Slično kao na $[0,1]$ definiše se Lebegova mera na $[-n,n]$.

Def. 20.

Klasa $A\subseteq R$ je Lebeg merljiva ako su klase $A\cap[-n,n]$ Lebeg merljive za $n\in FN$. Pritom je $\lambda(A)=\sum_{n\in FN}\lambda(A\cap[-n,n])$.

Def. 21.

Neka je $K_n=\{x\in[0,1]:\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}\ x\ \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}+\frac{1}{3^i}\ a\in\{0,2\}^n$

Tada je $K=\bigcap\{K_n:n\in FN\}$ Kantorova klasa.

Metateorema 4.

Kolekcija podklasa od $[0,1]$ merljivih u Lebegovom smislu, a koja se intenzionalno može dati formulom $U(st^{-1}(X))=S(st^{-1}(X))$, ne može se kodirati.

Dokaz: Kako je Lebegova mera kompletna, to je "$\{X:X\leq K\}$" podkolekcija kolekcije merljivih podklasa klase $[0,1]$.

Na osnovu metateoreme 3 dovoljno je pokazati da se kolekcija "$\{X:X\ K\}$" ne može kodirati.

Ako bi, suprotno tvrđenju, klasa S bila kod kolekcije "$\{X:X\subseteq K\}$" i $F:V\approx K$, tada bi klasa $T=\{(i,x):(i,F(x))\in S\}$ bila kod za kolekciju "$\{X:X\subseteq V\}$" a što je suprotno metateoremi 2.

Posledica

Kolekcija svih Leb merljivih podklasa od t (t.j. "$\{X\subseteq t:S(X)=U(X)\}$") se ne može kodirati.

Merljive funkcije

Pojmovi kao što su neprekidna, merljiva, dizajuća (lifting) i uniformno dizajuća funkcija definišu se analogno kao u prvom delu stim što ulogu skupa $^*R$ uzima skup RN. Takođe se sledeće teoreme mogu dokazati dosta slično kao u nestandarnoj analizi.

Teorema 30.

Funkcija $F:b\to R$, gde je $b\leq t$ i $t=\{\frac{\beta}{\alpha}:\beta\leq\alpha\}$, je Leb merljiva akko ima dizajuću funkciju $f:b\to RN$.

Posledica

Funkcija $F:[0,1]\to R$ je merljiva u Lebegovom smislu akko ima dizajuću funkciju.

Teorema 31.

Funkcija $F:b\to R$ ima uniformno dizajuću funkciju akko za svaki $r\in R$, klase $\{s\in b:F(s)\leq r\}$ i $\{s\in b:F(s)\geq r\}$ su prebrojivi preseci skupova iz $P(b)$.

Naredna teorema ima svoj analogon u nestandardnoj analizi i tamo se dokazuje trivijalno iz prethodne teoreme. Taj dokaz, međutim, ne možemo provesti u AST.

Teorema 32.

Neka je $B=st(b)$. Funkcija $F:B\to R$ je neprekidna akko ima uniformno dizajuću funkciju.

Dokaz: Pretpostavimo prvo da F ima uniformno dizajuću funkciju f. Funkcija f je ujedno i uniformno dizajuća za $F_o:b\to R$, gde je $F_o(x)=F(st(x))$.

Tada je prema lemi 10 za $r\in R, \bar{r}\in RN$ i $st(\bar{r})=r$

$$\{x\in B:F(x)\leq r\}=st_b(\{x\in b:F_o(x)\leq r\})=st_b(\bigcap_{n\in FN}\{x\in b:f(x)\leq \bar{r}+\tfrac{1}{n}\})$$
$$=\bigcap_{n\in FN} st_b(\{x\in b:f(x)\leq \bar{r}+\tfrac{1}{n}\})$$

zatvorena klasa, pa je funkcija F neprekidna.

Neka je sada funkcija F neprekidna na B. Ne smanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $rng(F)\subseteq[0,1]$.

Formirajmo niz konačnih podskupova od B, tako da je svaki prethodni sadržan u sledećem.

Pretpostavimo da su podskupovi $b_1,b_2,\ldots,b_n$ već izabrani Koristeći kompaktnost klase B elemente skupa b_{n+1} biramo na sledeći način:

$$b^1_{n+1}=\min(B)$$

$$b^{i+1}_{n+1}=\begin{cases}(\mu x)(x\in B\wedge x\geq b^i_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}}). & i>0 \text{ i } (\exists x)(x\geq b^i_{n+1}+\frac{1}{2^{n+1}})\\ b^i_{n+1} & \text{inače}\end{cases}$$

Neka je $b_{n+1}=b_n\cup\{b^1_{n+1},\ldots,b^k_{n+1}\}$,gde je k prvi broj tako da je $b^k_{n+1}=b^{k+1}_{n+1}$.

Izaberimo skupove $a_n=\{a^i_n:1\leq i\leq k\}\subseteq b$,tako da je $a^i_n\in a$ akko $st(a^i_n)=b^i_n$.

Neka je $H(a)=2\cdot\inf\{\varepsilon\in R^+:(\forall x,y\in B)(|x-y|<\frac{1}{2^n}\rightarrow|F(x)-F(y)|<\varepsilon)$

Tada ako $n\rightarrow\infty$,onda $H(n)\rightarrow\infty$ monotono.

Neka je $\{g_n:n\in FN\}$ niz funkcija tako da je $dom(g_n)=b_n$, $rng(g_n)\subseteq t$ i

$$(\forall y\in dom(g_n))(st(g_n(y))=F(st(y))) \qquad (*)$$

Definišimo niz $\{d_n\}_{n\in FN}$ na sledeći način:

$$d_n=\{f:b\rightarrow t\,|\,f\restriction b_n=g_n\wedge(\forall x,y\in b)(|x-y|<\frac{1}{2^n}\rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{2}{h(n)})$$

Lako se vidi da je $d_n\neq\emptyset$ i $d_{n+1}\subseteq d_n$.Prema teoremi 13 postoji $\emptyset\neq\bar{d}\subseteq d_n$.Neka $f\in\bar{d}$.

Dokažimo da je f tražena dizajuća funkcija.

Ako $x\in b$, za svaki $n\in FN$ postoji a^i_{n+1},tako da

$$|x-a^i_{n+1}|<\frac{1}{2^{n+1}} \qquad (1)$$

pa i

$$|f(x)-f(a^i_{n+1})|<\frac{2}{h(n)} \qquad (2)$$

Iz (1)

$$|st(x)-b^i_{n+1}|\leq\frac{1}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^n} \qquad (3)$$

Iz (2) i (*)

$$|st(f(x))-F(b^i_{n+1})|\leq\frac{2}{h(n+1)}<\frac{1}{h(n)} \qquad (4)$$

Iz (3) i neprekidnosti funkcije F

$$|F(st(x)) - F(b^i_{n+1})| < \frac{1}{h(n)} \tag{5}$$

Iz (4) i (5)

$$|st(f(x))-F(st(x))| \leq |st(f(x))-F(b^i_n)| + |F(b^i_n)-F(st(x))|$$

$$< \frac{2}{h(n)} = o$$

Odatle je $st(f(x))=F(st(x))$.

Kao posledicu prethodne teoreme možemo pokazati sledeću poznatu Luzinovu teoremu.

Teorema 33.

Funkcija $F:[o,1]\longrightarrow R$ je merljiva akko za svako $\varepsilon>o$ postoji zatvorena klasa K, tako da je $\lambda([o,1]-K)<\varepsilon$ i F je neprekidna na K.

Dokaz: Ako je F merljiva, tada prema teoremi 30 ima dizajuću funkciju na nekoj klasi $A\subseteq t$, gde je $p(A)=1$. Neka je $a\subseteq A$, tako da je $p(a)>1-\varepsilon$. Tada, prema prethodnoj teoremi F je neprekidna na zatvorenoj klasi $st(a)$ i $\lambda([o,1]-st(a))=1-\lambda(st(a))=$ $1-p(st^{-1}(st(a))\leq 1-p(a)<\varepsilon$.

Neka je sada F neprekidna na zatvorenim klasama K_i $(i\in FN)$ tako da je za $\varepsilon>o$

$$\lambda([o,1]-K_i)<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{1}$$

Možemo odrediti rastući niz skupova k_i, tako da $k_i\subseteq st^{-1}(K_i)$ i

$$p(st^{-1}(K_i)-k_i)<\frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{2}$$

Iz (1),(2) i $\lambda(K_i)=p(st^{-1}(K_i))$ dobijamo da $p(t-k_i)<\frac{\varepsilon}{2^i}$

Takođe je zbog $k_i\subseteq st^{-1}(st(k_i))$ i

$$\lambda([o,1]-st(k_i))=1-\lambda(st(k_i))\leq 1-p(k_i)<\frac{\varepsilon}{2^i}$$

Neka je f_i dizajuća funkcija za $F\upharpoonright st(k_i)$. Kako je za

$\alpha \in N-FN$

$$a_n=\{f|\ f:t \to [-\alpha,\alpha] \wedge f \upharpoonright k_n=f_n\}$$

niz nepraznih monotono opadajućih skupova to prema teoremi 13 postoji funkcija $f \in \bigcap_{n \in FN} a_n$, tako da je dizajuća za F na klasi $\bigcup_{n \in FN} k_n$. Pritom je $p(\bigcup_{i \in FN} k_i)=1$.

ISTORIJSKE NAPOMENE

Ove napomene odnose se prvenstveno na rezultate dobijene zadnjih dvadesetak godina.

Napomene za Prvi deo

Možemo reći da su osnovni pojmovi iz nestandardne analize vezani za fundamentalne Robinsonove radove iz šezdesetih godina (videti radove [71] , [82] i [86] u [34])

Teoreme 1 i 2 su dobro poznate u teoriji mere kao Karateodorijeve (Carathéodory) teoreme.

Teoreme 3,4,7,8 i 10 dokazao je Leb u svom poznatom radu 27 .

Teoreme 6 i 11 pripadaju Andersonu (v.[2]).

Kisler je dokazao teoremu 9 u [23] , a teoremu 12 u [21].

Teorema 14 esencijalno pripada Hanu (Hahn).

Napomene za Drugi deo

Logike $L_{\omega P}$, $L_{\omega_1 P}$ i $L_{\mathcal{A} P}$, srodne logikama koje se razmatraju ovde uveo je Kisler u 21 .Veliki doprinos je dao i Huver u radovima [13] i [15].

Stav potpunosti za klasičnu logiku i prebrojiv jezik dokazao je Gedel (K. Gödel) 1930.g.,dok ga je Maljcev (Мальцев) 1936.g. dokazao bez ograničenja na jezik. Ovaj stav je kasnije dokazivan za mnoge druge logike. Potpunost za $L_{\omega P}$, $L_{\omega_1 P}$ i $L_{\mathcal{A} P}$ dokazao je Huver u [13] .

Barvajzovu kompletnost (potpunost) i kompaktnost dokazao je za klasičnu logiku, naravno, Barvajz (v.[6]), dok je za verovatnosnu logiku $L_{\mathcal{A}P}$ odgovarajuće stavove dokazao Huver u [13].

Teoremu 4 dokazao je Huver u [14].

Robinson je dokazao svoju teoremu konzistencije 1956.g., dok ju je za verovatnosnu logiku dokazao Huver u [13].

Krejg (Craig) je dokazao svoju interpolacionu teoremu za klasičnu logiku 1957, dok je odgovarajuću teoremu za $L_{\mathcal{A}P}$ (teorema 8) dokazao Huver u [13].

Bet (Beth) je dokazao svoju interpolacionu teoremu 1953. g. a Lindon (Lyndon) svoju 1959.g. Odgovarajuće teoreme za L_P dokazao je Huver u [13].

Teoremu 11 je pokazao Huver u [15].

Gornju Skolem-Levenhajmovu (Skolem-Löwenheim) teoremu za klasičnu logiku dokazao je Skolem 1920.g. Analogan rezultat za verovatnosne logike dao je Huver u [13].

Stav koji odgovara teoremi 14 u $L_{\mathcal{A}P}$ logici dokazao je Kisler (v. [24])

Napomene za Treći deo

Svi osnovni pojmovi i prvih dvadeset i četiri teorema pripadaju Vopenki, Sohoru i njihovim saradnicima iz Praga.

Vrlo je teško, nekome van Praga da zna kakav je doprinos svakoga od njih pojedinačno u odnosu na neku konkretnu teoremu.

Stav analogan teoremi 25 u nestandardnoj analizi dao je Šizuo (Shizuo) u [39].

Sve teoreme u okviru poslednjeg podnaslova trećeg dela su analogne teoremama iz prvog dela, izuzev teoreme 33, koja kao što je dobro poznato pripada Luzinu.

L I T E R A T U R A

[1] Aczel J. Lectures on functional equation and their application, Academic Press,1966.

[2] Anderson R. A nonstandard representation of Brownian motion and Ito integration,Israel J. Math.(1976),st. 15-46

[3] Anderson R. Star-finite probability theory,Ph.D. Thesis, Yale Univ.,1977.

[4] Anderson R. Star-finite representations of measure spaces, Trens. Amer. Math. Soc. 271 (1982),st. 667-688.

[5] Aranđelović D. i Mijajlović Ž. Uvod u nestandardnu analizu, u pripremi.

[6] Barwise J. Admissible sets and structures,Springer-Verlag, 1975.

[7] Chang C.C. and Keisler H.J. Model Theory,North-Holland,1977.

[8] Chang C.C. and Keisler H.J. Continuous Model Theory, Princeton Univ. Press,1966.

[9] Gaifman H. and Snir M. Probabilities over rich languages, testing and randomness,J. Symb. Logic 47 (1982) st. 495-548.

[10] Halmos P. Measure Theory, Van Nostrand,1950.

[11] Helms L. and Loeb P. A nonstandard proof of the martingale convergence theorem,Rocky Mountain J. of Math. 12 (1981), st. 165-170.

[12] Henson W. Analytic sets,Baire sets and the standard part map, Can. J. Math. 31 (1979),st. 663-672.

[13] Hoover D. Model theory of probability logic, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin,1978.

[14] Hoover D. Probability logic, Ann. Math. Logic 14 (1978), st. 287-313.

[15] Hoover D. A normal form theorem for $L_{\omega_1 P}$,with applications, J. Symb. Logic 47 (1982),st. 605-624.

[16] Hoover D. Relations on probability spaces and arrays of random variables, u štampi.

[17] Hoover D. and Keisler H.J. Adapted probability distribution, u štampi.

[18] Hrbacek K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis, Fund. Math. 98 (1978),st 1-19.

[19] Keisler H.J. Foundations of infinitesimal calculus, Prindle,Weber and Schmidt,1976.

[20] Keisler H.J. Model theory for infinitary logic,North-Holland,1971.

[21] Keisler H.J. Hyperfinite model theory,st. 5-110 u Logic Colloquium 76,R.C. Gandy and J.M.E. Hyland (izdavači), North-Holland,1977.

[22] Keisler H.J. An infinitesimal approach to stochastic analysis,u štampi.

[23] Keisler H.J. Hyperfinite probability theory and probability

logic,nepublikovana predavanja,Univ. of Wisconsin 1979.

[24] Keisler H.J. Probability cvantifiers,u štampi.

[25] Leibniz G.W. Izabrani filozofski spisi,Naprijed,Zagreb 1980.

[26] Lindstrom T. Hyperfinite stochastic integration I-III, Math. Skand. 46 (1980),st. 265-333.

[27] Loeb P.A. Conversion from non-standard to standard measure spaces and applications in probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975),st. 113-122.

[28] Loeb P.A. An introduction to non-standard analysis and hyperfinite probability theory,st. 105-142 u Probabilistic analysis and related topics 2, A.T. Bharucha-Reid (izdavači), Academic Press,1979.

[29] Loeb P.A. Weak limits of measures and standard part map, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979),st. 128-135.

[30] Luxemburg W.A.J. and Stroyan K.D. Introduction to the theory of infintesimals, Academic Press, 1976.

[31] Rašković M. On existence of expansion of complex function, Publ. Inst. Math. Nouvelle série 26(40) (Beograd 1979) st. 269-271.

[32] Rašković M. Measure and integration in the alternative set theory, Publ. Inst. Math. Nouvelle série 29(43) (Beograd 1981), st. 191-197.

[33] Robinson A. Non-standard analizis, North-Holland, 1966.

[34] Robinson A. Selected Papers,Vol. 2,North-Holland, 1979.

[35] Rodenhausen H. The completeness theorem for adapted probability logic, Ph. D. Thesis, Univ. of Heidelberg, 1982.

[36] Rodenhausen H. A Characterization of nonstandard liftings of measurable functions and stochastic processes, Israel J. Math. 43 (1982), st. 1-21.

[37] Petronijević B. Istorija novije filozofije,Nolit,1982.

[38] Seneta E. Regularly varing functions,Lecture N. in Math. 508, 1976.

[39] Shizuo K. Nonstandard natural nummber systems and non-standard models, J. Symb. Logic 46 (1981),st. 365-376.

[40] Sochor A. The alternative set theory,st. 259-271 u Set Theory and Hierarchy Theory,Lecture N. in Math. 537,1976.

[41] Sochor A. Diferential calculus in the alternative set theory,st. 273-284 u Set Theory and Hierarchy Theory V, Lecture N. in Math. 619,1977.

[42] Stroyan K.D. and Bayod J.M. Foundation of infinitesimal stochastic analysis, u štampi.

[43] Stroyan K.D. Infinitesimal analysis of curves and surfaces st. 197-231 u Handbook of Math. Logic,J. Barwise (izdavač) North-Holland, 1977.

[44] Šajković R. Lajbnic i opšte dobro,Prosveta,Beograd, 1975.

[45] Vopěnka P. Mathematics in alternative set theory,Teubner-Texte, Leipzig, 1979.

[46] Vopěnka P.,Sochor A., Revealments, Comment. Math. Univ. Carolinae 21 (1980), st. 605-629.

[47] Vopěnka P.,Sochor A. The axiom of Reflection, Comment. Math. Univ. Carolinae 22 (1981), st. 87-111.