Janez Ušan

O JEDNOJ KLASI KVAZIGRUPA

(Doktorska disertacija)

Rukovodilac,
Dr Slaviša Prešić
Vanred.prof. PMF

BEOGRAD 1971.

S A D R Ž A J

O JEDNOJ KLASI KVAZIGRUPA

O JEDNOJ KLASI KVAZIGRUPA

UVOD

Pod kvazigrupom se razume grupoid u kome egzistiraju inverzne operacije. Grupa je asocijativna kvazigrupa. Kao početak razvoja teorije kvazigrupa smatra se 1935. god.; tj. pojava rada [29] R. Moufang-a o neasocijativnim kvazigrupama ([9] ,str. 75.). Međutim, kao što se to često dešava, pojam neasocijativne kvazigrupe pojavio se već 1849. god. u jednom radu L. Euler-a [20] gde se tretira tzv. problem o 36 oficira.

Od autora sa značajnijim prilozima u periodu prvih petnaestak godina treba pomenuti A.A. Albert-a i posebno R.H. Bruck-a. R.H. Bruck je 1958. god. izložio sve značajnije postojeće rezultate teorije kvazigrupa i posebno lupa (kvazigrupa sa jedinicom) u monografiji [13]. V.D. Bjelousov je 1967. god. napisao prvu kompletniju monografiju teorije kvazigrupa [6].

Neki problemi teorije konačnih projektivnih ravni i teorije funkcionalnih jednačina (kao i nekih drugih oblasti matematike) nametnuli su zahtev za izučavanjem univerzalnih algebri sa kvazigrupnim operacijama vezanim nekim zakonom, odnosno sistemom zakona. Tako je V.D. Bjelousov 1958. god. u [7] došao do sledećeg rezultata: Ako četiri kvazigrupe $Q(A_i)$, $i \in N_4$, zadovoljavaju opšti asocijativni zakon,

$$(1) \qquad A_1\left[A_2(x,y),z\right] = A_3\left[x,A_4(y,z)\right],$$

onda su sve $Q(A_i)$, $i \in N_4$, izotopne jednoj te istoj grupi $Q(\cdot)$.

Druge dokaze ove teoreme dali su još - sam Bjelousov u [8] i [9] , J.Aczel u [1] , zajednički J.Aczel, V.D.Bjelousov i M. Hosszu u [2] , M. Hosszu u [25] i veoma prirodan S.B. Prešić u [31] .

Posebnim slučajem opšteg zakona asocijativnosti (1) na algebri kvazigrupnih operacija bavili su se još: T.Evans u [21] , V. Devidé u [18] , V.D. Bjelousov u [11] , A. Sade u [35] , i drugi.

V.Devidé je, npr. u [18] , između ostalog, proučavao tzv. D-grupe, tj. kvazigrupe $Q(*)$ za koje važi jednakost

$$(2) \qquad (a * b) * c = fa * (gb * hc),$$

gde $f, g, h \in Q!$ *). Smenama $x \circ y = fx * y$ i $x \square y = gx * hy$, (2) postaje

---

*) Sa $Q!$ je označen skup svih permutacija skupa Q.

$$(a * b) * c = a \circ (b \square c);$$

što predstavlja poseban slučaj zakona (1).

Veza između opšte asocijativnosti na sistemu kvazigrupa i geometrijskih problema (teorija 3-rešetaka) proučavana je u zajedničkom radu J. Aczel-a, V.D. Bjelousova i M. Hosszu-a [2] , F. Rado-a u [33] i [34] i drugih autora. Kao funkcionalna jednačina, (1) je peoučavana od strane mnogih autora; podaci o tome mogu se naći u [4] .

Pomenuta teorema V.D. Bjelousova zove se i "Teorema o četiri kvazigrupe".

R. Schauffler je 1957. u [38] prvi posmatrao sistem kvazigrupa sa tzv. uopštenim zakonom*) asocijativnosti, tj. sistem kvazigrupa $Q(\Sigma)$ na kome važi zakon (1) uz sledeći uslov

$$(3_1) \qquad A_1, A_2 \in \Sigma \Longrightarrow A_3, A_4 \in \Sigma,$$

odnosno

$$(3_2) \qquad A_3, A_4 \in \Sigma \Longrightarrow A_1, A_2 \in \Sigma .$$

Problem je bio nametnut izvesnim problemima kodiranja. Posle ovog rada R. Schauffler-a, pojavio se niz radova u kojima su izučavani sistemi sa uopštenim zakonima. Monografiju rezultata ovih radova dao je A. Sade 1960. u [36] .

Podstaknut R. Schauffler-ovim radom [36] , V.D. Bjelousov je u [8] dao opis sistema kvazigrupa $Q(\Sigma)$ u kojima je ispunjen zakon (1) uz uslove (3_1), (3_2) i istovremeno (3_1) i (3_2).

Redom su nazvani LA-, RA- i A-sistemi. Oni se zajedničkim imenom nazivaju asocijativni u celom sistemu kvazigrupa.

U poslednje vreme pojavio se niz radova u kojima se izučavaju univerzalne algebre sa jednom n-arnom operacijom, $n \in N$. Takvu algebru, po analogiji sa posebnim slučajem $n = 2$, nazivamo n-grupoidom.

Prvim radom te vrste se smatra rad [19] W. Dörnte-a. Predmet njegovog izučavanja su tzv. n-grupe - n-arni analogoni grupa. Prvu monografiju o n-grupama dao je E.L. Post 1940. u [30] . Naši matematičari G. Čupona i B. Trpenovski izučavali su n-polugrupe (n-grupa je n-polugrupa u kojoj egzistiraju sve inverzne operacije) u radovima [15], [39] i dr.. Ako u n-grupoidu Q(A) egzistiraju sve inverzne operacije, onda za Q(A) kažemo da je n-kvazigrupa. S.A. Čunihin je u [14] prvi detaljnije izučavao neasocijativne n-kvazigrupe; n-kvazigrupe sa tzv. postulatom K. n-Grupoidi igraju značajnu ulogu u nekim geometrijskim problemima (npr. u teoriji rešetaka):

---

*) Ruski-obobščenoe toždestvo. A. Sade u [37] , koristi termin "identité

posebno za $n = 2$ i $n = 3$. F. Rado je 1960. u [33] izučavao vezu između ternarnih kvazigrupa i prostornih rešetaka (koje je tom prilikom i uveo kao analogon ravanskim rešetkama).

Ova izučavanja produžili su 1964. M. Hosszu i F. Rado u [23], te V.D. Bjelousov i M. Hosszu 1965. u [12] . V.D.Bjelousov i M.D. Sandik su 1966. u [10] , između ostalog, utvrdili n-arni analogon čuvenog Albertovog stava [5] , koji tvrdi da je svaka (binarna) kvazigrupa izotopna nekoj lupi.Na istom mestu oni su našli nov dokaz Hosszu-Gluskinovog stava,koji tvrdi da se svaka n-grupa može predstaviti pomoću neke binarne grupe i njenih automorfizama; ovu teoremu su M. Hosszu i L. Gluskin dokazali 1963. i 1964. u [24] i [22] nezavisno jedan od drugog.

U drugom delu rada prvo se uopštava "teorema o četiri kvazigrupe" na ternarni slučaj,tj. dokazuje se sledeća teorema: Ako ternarne kvazigrupe $Q(A_i)$, $i \in N_6$ *),zadovoljavaju opštu ternarnu asocijativnost

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(y,z,u),v\right] = A_5\left[x,y,A_6(z,u,v)\right] \text{ , onda}$$

su sve $Q(A_i)$, $i \in N_6$,izotopne jednoj te istoj ternarnoj grupi sa jedinicom $Q(A)$,pri čemu egzistira binarna grupa $Q(B)$ takva da je

$$A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right].$$

Metode koje su korišćene u dokazu ove teoreme bitno se razlikuju od metoda korišćenih u dokazu "teoreme o četiri kvazigrupe".

Dalje se,isključivo uz pomoć ove teoreme i "teoreme o četiri kvazigrupe", nalazi njihova generalizacija na n-arni slučaj,tj. dokazuje se sledeća teorema:

Ako n-arne kvazigrupe $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$,zadovoljavaju opštu n-arnu asocijativnost, tj. sistem zakona

$$A_1\left[A_2(a_1,\dots,a_{j-1},a_j,\dots,a_n),\dots,a_{j+n-1},\dots,a_{2n-1}\right] =$$
$$= A_{2j-1}\left[a_1,\dots,a_{j-1},A_{2j}(a_j,\dots,a_{j+n-1}),a_{j+n},\dots,a_{2n-1}\right]$$

za sve $j \in \{2,\dots,n\}$, onda su sve $Q(A_i)$, izotopne jednoj te istoj n-arnoj grupi sa jedinicom $Q(A)$, pri čemu egzistira binarna grupa $Q(B)$, tako da je

$$A(a_1,a_2,\dots,a_n) = B\left[B(\dots(B(B(a_1,a_2),a_3),\dots),a_{n-1}),a_n\right].$$

Teorema je ključna u ovom delu rada.Njome je ustvari rešen i problem sistema funkcionalnih jednačina n-arne asocijativnosti na sistemu n-arnih kvazigrupa.

---

*) $N_6 \stackrel{def}{=} \{1,2,3,4,5,6\}$.

Kao direktna posledica ove teoreme nalazi se da je tačno sledeće tvrđenje: Ako je $Q(G)$ proizvoljna n-grupa (sa ili bez jedinice)*) onda egzistira binarna grupa $Q(B)$ i permutacije γ, α_i, $i \in N_n$, tako da je

$$G(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \gamma^{-1}B\left[B(\ldots(B(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2),\alpha_3x_3),\ldots),\alpha_nx_n\right].$$

Ovo tvrđenje je, ustvari, pomenuta Hosszu - Gluskinova teorema.

Za (n-1) - torku $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ se kaže da je i-neutralan slog n-grupoida $Q(G)$, ako je

$$G(e_1,\ldots,e_{i-1},x,e_{i+1},\ldots,e_{n-1}) = x \quad \text{za svaki } x \text{ koji}$$

pripada Q. Ako je $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ i-neutralan za svaki $i \in N_n$, onda se za $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ kaže da je neutralan. Kao što je poznato [30], u svakoj n-grupi postoji 1- i n-neutralan slog, pri čemu je i svaka njegova ciklična permutacija takođe 1- i n-neutralan slog. (Ovo tvrđenje predstavlja generalizaciju rezultata o jedinici u binarnoj grupi.) Korišćenjem osnovne teoreme drugog dela, kao i nakih drugih rezultata, dokazuje se sledeće tvrđenje: Ako n-grupa $Q(G)$ poseduje neutralni slog, onda ona poseduje jedinicu, tj. elemenat $e \in Q$ takav da je

$$G(\underbrace{e,\ldots,e}_{i},x,\underbrace{e,\ldots,e}_{n-i+1}) = x$$

za svaki $x \in Q$ i svaki $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, U drugom delu utvrđuje se i sledeći rezultat: Ako n-grupa $Q(A)$ poseduje jedinicu, onda egzistira binarna grupa $Q(B)$ takva da je

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_n) = B\left[B(\ldots(B(x_1,x_2),x_3),\ldots),x_n\right].$$

Pored toga utvrđuje se i s t e p e n t a č n o s t i kojom je određena n-grupa sa jedinicom i permutacije iz izotopija $Q(A)$ sa $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, pri datim $Q(A_i)$, $i \in N_{2n}$, koje zadovoljavaju opštu n-arnu asocijativnost.

U prvom delu su izloženi pojmovi i rezultati na koje se vrši pozivanje u drugom i trećem delu.

U četvrtom delu se uvode i opisuju asocijativni u celom sistemi ternarnih kvazigrupa. Teorema 1. iz drugog dela je ovde uporišna. U prvom odeljku ovog dela se uvode pojmovi i utvrđuju najelementarnije osobine.

Za razliku od binarnog slučaja, gde se govori samo o LA-, RA- i A-sistemima, ovde se govori o 1A-, 2A-, 3A- i A-sistema. Sistem $Q(\Sigma)$ je A-sistem, ako je iA-sistem za sve $i \in N_3$. Za sistem $Q(\Sigma)$ kažemo npr.

---

*) Kao što je poznato [30], n-grupe, za razliku od binarnih, ne moraju posedovati jedinicu.

da je 1A-sistem, kada $A_1, A_2 \in \mathcal{L} \Longrightarrow A_3, A_4, A_5, A_6 \in \mathcal{L}$ tako da je

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(y,z,u),v\right] = A_5\left[x,y,A_6(z,u,v)\right]$$ za svaku petorku $x, y, z, u, v \in Q$.

U drugom odeljku ovog dela nalazi se ternarni analogon Schauffler-ove teoreme, tj. dokazuje se sledeća teorema: Ako je Ω skup svih ternarnih kvazigrupnih operacija na Q onda je $Q(\Omega)$ A-sistem ako i samo ako je $n \leq 3$, gde je n moć skupa Q.

U trećem odeljku prvo se uopštava pojam kvaziautomorfizma grupe na ternarni slučaj, i utvrđuju neke njegove osobine, koje su potrebne za dalje proučavanje iA-sistema, $i \in N_3$.

Dalje se dokazuju dve teoreme, koje omogućavaju konstrukciju oslabljanih i-asocijativnih sistema ternarnih kvazigrupa. Zatim se:

- utvrđuje teorema koja omogućuje konstrukcije iA-sistema;
- nalaze primeri A-sistema, važnih za dalje opisivanje iA-sistema, $i \in N_3$;
- nalaze dve teoreme, koje opisuju ternarne grupe u iA-sistemima;
- utvrđuju neke osobine maksimalnih iA-sistema;
- utvrđuje broj operacija u maksimalnom A-sistemu na konačnom skupu; itd.

Većina rezulata rada prikazani su u okviru Odseka za algebru, matematičku logiku i teoriju brojeva Matematičkog instituta SRS u Beogradu (18.III 1970., 12.XII 1970., 23.XII 1970. i 13.I 1971.).

I DEO

P O Z I V A J U Ć I   R E Z U L T A T I

Ako je $Q^n = \underbrace{Q \times Q \times \ldots \times Q}_{n\text{-puta}}$, $n \in N$, i ako je

$$A : Q^n \longrightarrow Q,$$

onda za $Q(A)$ kažemo da je n-grupoid. Pored oznake $Q(A)$ koristi se i oznaka (Q,A). Za $n = 2$ radi se o običnom (binarnom) grupoidu. Za n kažemo da je dužina operacije A. Ako je A-slika uređene n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elemenat $a_{n+1} \in Q$, onda se to beleži na jedan od sledećih načina:

(1_1) $$a_1 a_2 \ldots a_n A = a_{n+1},$$

(1_2) $$A a_1 a_2 \ldots a_n = a_n+1 \quad \text{i}$$

(1_3) $$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1}.$$

U binarnom slučaju to se (tradicionalno) beleži na sledeći način:

(1_4) $$a_1 A a_2 = a_3 .$$

Od toga se odstupa, ako se na istom skupu posmatraju i operacije dužine $n > 2$. U teoriji kvazigrupa u poslednje vreme, najviše se odomaćila notacija (1_3).

Pod n-arnom kvazigrupom razumemo n-arni grupoid $Q(A)$ u kome egzistiraju sve inverzne operacije operacije A, tj. u kome su jednačine.

(2_1) $$A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots a_n) = b$$

jednoznačno rešive za svaku n-torku $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b \in Q$ i sve $i \in N_n$. Ako je $Q(A)$ binarni grupoid, onda je $Q(A)$ kvazigrupa (2-kvazigrupa), ako su jednačine

(2_2) $$A(a,x) = b \quad \text{i} \quad A(y,a) = b$$

jednoznačno rešive za svaki par $a, b \in Q$. Grupa je asocijativna kvazigrupa.

n-Arna kvazigrupa $Q(A)$ je n-arna grupa [30], ako na $Q(A)$ važi sledeći sistem zakona

(3) $$A\left[A(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}\right] =$$
$$= A\left[a_1, \ldots, a_i, A(a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}), \ldots, a_{2n-1}\right] \quad \text{za sve } i \in \{1, \ldots, n-1\} .$$

Ako n-arni grupoid $Q(A)$ zadovoljava (3), onda za $Q(A)$ kažemo da je n-polugrupa ili n-semigrupa [39]. Pri $n = 2$, $Q(A)$ koji zadovoljava (3) svodi se na binarnu polugrupu, jer tada (3) postaje

$$(3_1) \qquad A\left[A(a_1,a_2),a_3\right] = A\left[a_1,A(a_2,a_3)\right].$$

Za n-arni grupoid $Q(A)$ kažemo da poseduje i-neutralni slog $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, ako je

$$(4) \qquad A(e_1,\dots, e_{i-1},x, e_{i+1},\dots, e_{n-1}) = x$$

za svaki $x \in Q$. Ako je (4) ispunjena za svaki $i \in N_n$, onda za $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ kažemo da je neutralni slog. Ako je $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = e$, onda za e kažemo da je i-neutralni, odnosno neutralni elemenat (ako je i-neutralni za svaki $i \in N_n$).

U [30] je dokazano sledeće tvrđenje: Svaka n-arna grupa $Q(A)$ poseduje 1- i n- neutralni slog, pri čemu je i svaka njegova ciklična permutacija takođe 1- i n-neutralni slog. Ovaj rezultat predstavlja uopštenje rezultata o jedinici u binarnoj grupu. Inače, n-grupa ne mora posedovati neutralni elemenat, a može posedovati i više neutralnih elemenata.

Ako n-arna kvazigrupa $Q(A)$ poseduje bar jedan neutralni elemenat (bar jednu jedinicu), onda za $Q(A)$ kažemo da je n-lupa. U binarnom slučaju to je lupa.

Važi sledeći rezultat: Neka je $Q(A)$ n-grupa. Tada se na skupu Q može definisati grupna operacija o tako da je

$$(5) \qquad A(x_1,\dots,x_n) = x_1 \circ \varphi x_2 \circ \varphi^2 x_3 \circ \dots \circ \varphi^{n-1} x_n \circ k,$$ pri čemu je $k \in Q$ fiksirani elemenat, a φ je automorfizam grupe $Q(\circ)$ takav da je

$$\varphi^{n-1} x = k \circ x \circ k^{-1}, \varphi k = k.$$

(Ovu teoremu je 1963. dokazao M. Hosszu u [24] , a nezavisno od njega i L.M. Gluskin 1964. u [22]. Nov dokaz ove teoreme dali su V.D.Bjelousov i M.D. Sandik u [10]. F.Rado je 1960. u [33] ovu teoremu dokazao za ternarne grupe.)

U teoriji kvazigrupa važnu ulogu igra pojam izotopije (jedno uopštenje izomorfizma). Za binarnu kvazigrupu $Q(B)$ kažemo da je izotopna sa $Q(A)$ ako egzistiraju permutacije α, β, γ, tako da je

$$(6) \qquad B(x,y) = \gamma^{-1} A(\alpha x, \beta y),$$

pri čemu trojku $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ nazivamo izotopijom. Pri tom, za $Q(B)$ kažemo izotop od Q(A). Umesto (6) pišemo još i

(6₁) $$B = A^T, \quad \text{odnosno}$$

(6₂) $$B = A^{(\alpha,\beta,\gamma)}.$$

Ako je $\gamma = I$, gde je I identična permutacija skupa Q, tj. ako je

(6₃) $$B(x,y) = A(\alpha x, \beta y),$$

onda za B kažemo da je glavni izotop od A.

Pri $\alpha = \beta = \gamma$ (6) izražava izomorfizam, koji ponekad beležimo ovako

(6₄) $$B = A^{\alpha}.$$

ako je

(6₅) $$A = A^T,$$

onda se $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ zove autotopija operacije A.

Analogno, za n-arnu kvazigrupu Q(B) kažemo da je izotopna sa Q(A), ako egzistiraju permutacije γ i α_i, $i \in N_n$, tako da je

(6') $$B(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \gamma^{-1}A(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\ldots,\alpha_nx_n),$$

pri čemu (n+1)-torku $T = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\gamma)$ nazivamo izotopijom.

Pri $\gamma = I$ (kao u binarnom slučaju) za B kažemo da je glavni izotop od A.

Ako je Q(A) binarna kvazigrupa, onda su

$$Lx \overset{\text{def}}{=\!=} A(k,x) \quad \text{i} \quad Rx \overset{\text{def}}{=\!=} A(x,k)$$

permutacije skupa Q. Zovemo ih redom leva i desna translacija kvazigrupe Q(A).

Analogno, ako je Q(A) n-arna kvazigrupa, onda su

$$L_ix \overset{\text{def}}{=\!=} A(k_1,\ldots,k_{i-1},x,k_{i+1},\ldots,k_n),$$

za sve $i \in N_n$, permutacije skupa Q. Zovemo ih i-ta translacija n-arne kvazigrupe Q(A).

Pod L-izotopom n-kvazigrupe Q(A) razumemo glavni izotop sledećeg oblika

$$A(L_1^{-1}(\tilde{a})x_1, L_2^{-1}(\tilde{a})x_2,\ldots,L_i^{-1}(\tilde{a})x_i,\ldots,L_n^{-1}(\tilde{a})\,x_n),$$

pri čemu je

$$L_i(\tilde{a})x = A(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n);$$

$a_1, a_2,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots,a_n$ su fiksirani elementi skupa Q[10].

U [5] Albert je 1943. dokazao sledeće tvrđenje: Svaka kvazigrupa je izotopna nekoj lupi, i to glavnoizotopna.

Ovaj rezultat su V.D. Bjelousov i M.D. Saudik 1966. u [10] uopštili na n-arni slučaj, tj. dokazali da je svaka n-arna kvazigrupa izotopna nekoj lupi, i to glavno izotopna. Preciznije: L-izotop n-kvazigrupe je n-lupa.

Sledeći rezultat se u literaturi odomaćio kao Albertov stav [5] : Ako je lupa Q(L) izotopna grupi Q(.), onda je Q(L) takođe grupa, izomorfna sa Q(.).

Između ostalog, Albertov stav kazuje da je izotopija u teoriji grupa neplodna; u teoriji grupa se, naime, izotopija praktično svodi na izomorfizam.

n-Arni analogon Albertovog stava utvrdili su V.D. Bjelousov i M.D. Saudik 1966. god. u [10]. S obzirom na drugačije ponašanje neutralnog elementa u n-arnim grupama, prirodno je što u n-arnom slučaju on važi u nešto "sputanom" obliku. Rezultat glasi: Ako je n-lupa Q(L) izotopna n-grupi sa jedinicom Q(A), onda je Q(L) takođe n-grupa (sa jedinicom), izomorfna n-grupi Q(A). ("Sputanost" se ogleda u zahtevu da n-grupa Q(A) poseduje jedinicu.) Za dokaz ovog rezultata korišćeni su rezultati B. Trpenovskog i G. Čupone iz [39].

Pod centrom n-kvazigrupe Q(A) razumemo skup C svih elemenata $c \in Q$ za koje je

$$(7) \qquad A(a_1,\ldots,a_{i-1},c,a_{i+1},\ldots,a_n) = A(a_1,\ldots,a_{j-1},c,a_{j+1},\ldots,a_n)$$

pri svim $i, j \in N_n$ i za svaku (n-1)-torku elemenata $a_1,a_2,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots$
$\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n \in Q$.

(3) predstavlja sistem od (n-1)-og zakona. Ako na nekom n-grupoidu Q(A) važi samo jedan od zakona iz sistema (3), naime

$$(8) \quad A[a_1,\ldots,a_i,A(a_{i+1},\ldots,a_{i+n}),\ldots,a_{2n-1}] =$$
$$= A[a_1,\ldots,a_j,A(a_{j+1},\ldots,a_{j+n}),\ldots,a_{2n-1}],$$

$i, j \in N_{n-1}$, $i \neq j$, onda kažemo da je na Q(A) ispunjen (i,j)-asocijativni zakon, ili da je Q(A) (i,j)-asocijativna [39].

Ako u n-arnoj kvazigrupi $Q(A)$, odnosno u $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ fiksiramo $j < n$ promenljivih, dobijamo $(n-j)$-arnu kvazigrupu; Q u odnosu na $f \in Q!$ takođe smatramo kvazigrupama (1-arnom). Ova činjenica nam daje mogućnost prikazivanja ternarnih kvazigrupa $Q(A)$ sa konačnim Q pomoću sistema od m Cayleyevih tablica, pri čemu je m moć skupa Q. Neka je $Q(A)$ konačna 3-kvazigrupa.

Uvedimo oznaku

$$(9) \qquad A_{x_1}(x_2,x_3) = A(x_1,x_2,x_3).$$

Ako fiksiramo x_1, onda je $Q(A_{x_1})$ binarna kvazigrupa. Ovu kvazigrupu možemo predstaviti tablicom:

$$\begin{array}{c|ccc}
A_{x_1} & \dots & x_3 & \dots \\
\hline
\vdots & & \vdots & \\
x_2 & \dots & y & \\
\vdots & & &
\end{array},$$

gde je $y = A(x_1,x_2,x_3)$. U ovakvoj tablici se elementi u vrstama i kolonama ne ponavljaju (zbog kvazigrupnosti operacije A_{x_1}). 3-Kvazigrupa $Q(A)$ će biti prikazana sistemom tablica, ako formiramo Cayleyeve tablice za sve kvazigrupe $Q(A_{x_1})$, tj.: za sve kvazigrupe koje se dobijaju iz (9) kada x_1 prođe sav skup Q. Potreban i dovoljan uslov za to da sistem od m Cayleyevih tablica, gde je m moć skupa Q, predstavlja 3-kvazigrupu je: elementi koji stoje u preseku x_2 - e vrste i x_3 - eg stupca u svim tablicama A_{x_1} moraju biti različiti za sve $x_1, x_2, x_3 \in Q$ [10] .

U uvodu je formulisana "teorema o četiri kvazigrupe". U drugom delu potrebni su nam neki detalji njenog dokaza. Zato, uz izmenjene oznake, navodimo dokaz S. Prešića iz [31] .

Neka kvazigrupe A_i, $i \in N_4$, zadovoljavaju zakon

$$(10) \qquad A_1\left[A_2(x,y),z\right] = A_3\left[x,A_4(y,z)\right] .$$

U (10) postavimo redom:

$x = z = k$, $x = k$, $y = k$, $z = k$. Uzimajući u obzir oznake

$L_i x = A_i(k,x)$, $R_i x = A_i(x,k)$, $i \in N_4$,

nalazimo:

$$(11)\qquad \begin{cases} R_1L_2 = L_3R_4, \\ A_1(L_2y,z) = L_3A_4(y,z), \\ A_1(R_2x,z) = A_3(x,L_4,z); \\ R_1A_2(x,y) = A_3(x,R_4,y). \end{cases}$$

Iz (11) sledi da su sve $Q(A_i)$, $i \in N_4$, međusobno izotopne. Posebno sve su izotopne sa $Q(A_1)$. Svi izotopi kvazigrupe $Q(A_1)$ zadovoljavaju jednakost:

$$(12)\qquad A_1(x,y) = \gamma^{-1}A(\alpha x,\beta y); \quad \alpha,\beta,\gamma \in Q!.$$

Uzimajući u obzir (11) i (12) nalazimo jednakosti:

$$(13)\qquad \begin{cases} A_1(x,y) = \gamma^{-1}A(\alpha x,\beta y) \\ A_2(x,y) = \gamma^{-1}R_1^{-1}A(\alpha R_2x,\beta L_4^{-1}R_4y) \\ A_3(x,y) = \gamma^{-1}A(\alpha R_2x,\beta L_4^{-1}y) \\ A_4(x,y) = L_3^{-1}\gamma^{-1}A(\alpha L_2x,\beta y). \end{cases}$$

Smenimo li (13) u (10), nalazimo jednakost:

$$\gamma^{-1}A\left[\alpha\gamma^{-1}R_1^{-1}A(\alpha R_2x,\beta L_4^{-1}R_4y),\beta z\right] =$$

$$= \gamma^{-1}A\left[\alpha R_2x,\beta L_4^{-1}L_3^{-1}\gamma^{-1}A(\alpha L_2y,\beta z)\right].$$

Otuda, uzimajući u obzir prvu jednakost iz (11), nalazimo da je $Q(A)$ grupa, ako je $\gamma = I$, $\alpha = R_1$ i $\beta = L_3L_4$.

Tvrđenje je time dokazano!

Jednakosti (13) se pri tom svode na sledeće jednakosti:

$$(14)\qquad \begin{cases} A_1(x,y) = A(R_1x,L_3L_4y) \\ A_2(x,y) = R_1^{-1}A(R_1R_2x,L_3R_4y) \\ A_3(x,y) = A(R_1R_2x,L_3y) \\ A_4(x,y) = L_3^{-1}A(R_1L_2x,L_3L_4y). \end{cases}$$

U [8] su opisani asocijativni u celom sistemi kvazigrupa. Navodimo pojmove i rezultate iz [8].

Neka je Ω skup svih kvazigrupnih operacija na Q, a Σ njegov podskup. Za $Q(\Sigma)$ se kaže da je oslabljani asocijativni sleva u celom sistem kvazigrupa, ako za svaki par $A_1, A_2 \in \Sigma \Longrightarrow A_3, A_4 \in \Omega$, tako da važi (10). Analogno je definisan oslabljani asocijativni sdesna u celom sistem kvazigrupa. Za $Q(\Sigma)$ se kaže da je asocijativan sleve u celom sistem kvazigrupa, ako za svaki par $A_1, A_2, \in \Sigma \Longrightarrow A_3, A_4 \in \Sigma$ tako da važi (10). Analogno se definiše asocijativan sdesna u celom sistem kvazigrupa. Redom ih obeležavamo: $\overline{LA}$-sistem, $\overline{RA}$-sistem, LA-sistem i RA-sistem. Ako je $Q(\Sigma)$ i LA- i RA-sistem, onda za njega kažemo da je asocijativan u celom sistem. Kraće ga zovemo A-sistem.

Uporišna teorema je "teorema o četiri kvazigrupe".

Osnovne osobine:

1. Sve operacije $\overline{LA}$-, $\overline{RA}$-, LA-, RA-, **A**-sistema izotopne su jednoj te istoj grupi, pa, dakle, i međusobno.

2. Ako $\overline{LA}$-, $\overline{RA}$-, LA-, RA-, A-sistem sadrži lupu, onda je ona grupa.

3. Ako operacija C nije izotopna nijednoj grupi, ona se ne može uključiti ni u jedan od $\overline{LA}$, $\overline{RA}$, LA, RA, A-sistema.

4. (Schauffler-ova teorema) $Q(\Omega)$ je LA-sistem (RA- ili A-sistem) samo pri $n \leq 3$, gde je n moć skupa Q.

POJAM KVAZIAUTOMORFIZMA

Za $\alpha \in Q!$ se kaže da je kvaziautomorfizam grupe $Q(\cdot)$, ako je

$$\alpha(x \cdot y) = \alpha x \cdot (\alpha e)^{-1} \cdot \alpha y$$

za svaki par elemenata $x, y \in Q$, pri čemu je e jedinica grupe $Q(\cdot)$.

Neke osobine:

1° Ako je $\alpha e = e$, onda je kvaziautomorfizam grupe $Q(\cdot)$ sa jedinicom e njen automorfizam.

2° Neka je α_0 automorfizam grupe $Q(\cdot)$, a $k \in Q$ fiksirani elemenat. Tada je $\alpha \in Q!$, definisana sa

$$\alpha x = \alpha_0 x \cdot k,$$

kvaziautomorfizam grupe $Q(\cdot)$.

3°. Neka je α proizvoljan kvaziautomorfizam grupe Q(.).Tada egzistiraju automorfizmi α_o i β_o grupe Q(.) i elementi k, t, $\in$ Q tako da je

$$\alpha x = \alpha_o x \cdot k \qquad \text{i}$$
$$\alpha x = t \cdot \beta_o x .$$

4°. Ako je α kvaziautomorfizam grupe Q(.), onda su

$$\alpha' x = \alpha x \cdot k \qquad \text{i} \qquad \alpha'' x = t \cdot \alpha x,$$

gde su k,t $\in$ Q fiksirani elementi,takođe kvaziautomorfizmi grupe Q(.).

5°. Ako je α kvaziautomorfizam grupe Q(.) sa jedinicom e, onda su

$$\alpha_1 x = \alpha x \cdot (\alpha e)^{-1} \qquad \text{i} \qquad \alpha_2 x = (\alpha e)^{-1} \cdot \alpha x$$

automorfizmi grupe Q(.).

6°. Skup svih kvaziautomorfizama grupe Q(.) čini grupu u odnosu na komponovanje permutacija.

7°. Proizvoljna autotopna permutacija grupe Q(.) je njen kvaziautomorfizam.

8°. Neka je α autotopna permutacija grupe Q(.), tj. neka egzistiraju β, $\gamma \in$ Q! tako da je

$$\alpha (x \cdot y) = \beta x \cdot \gamma y.$$

Tada su β i γ kvaziautomorfizmi grupe Q(.).

9°. Neka $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi \in$ Q!, a Q(.) je grupa.Ako važi jednakost

$$\beta [\alpha(x \cdot y) \cdot z] = \gamma x \cdot \delta (\varphi y \cdot \psi z)$$

za svaku trojku elemenata x, y, z $\in$ Q, onda su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ i ψ kvaziautomorfizmi grupe Q(.).

Korišćenjem osobina 1-4. i $1^\circ - 9^\circ$., utvrđeni su sledeći rezultati:

1'. Neka je Q(Σ) $\overline{\text{LA}}$-sistem.Tada se na Q može definisati grupa Q(.) tako da se proizvoljna C $\in \Sigma$ izražava na sledeći način:

$$C(x,y) = \varphi x \cdot \gamma y,$$

gde je φ automorfizam grupe $Q(.)$, a γ je neka permutacija skupa Q.U slučaju $\overline{RA}$-sistema, γ je automorfizam grupe $Q(.)$, a φ je neka permutacija skupa Q.

2. Ako grupa $Q(o)$ pripada $\overline{LA}$-sistemu, onda se može definisati grupa $Q(.)$ tako da je

$$x \circ y = x \cdot t \cdot y,$$

gde je $t \in Q$ fiksirani elemenat.

3. Neka je $Q(\Sigma)$ La-sistem. tada se na Q može definisati grupa $Q(.)$ tako da se proizvoljna $A \in \Sigma$ izražava na sledeći način:

$$C(x,y) = \varphi x \cdot t \cdot \psi y,$$

pri čemu su φ i ψ automorfizmi grupe $Q(.)$, a $t \in Q$ je neki fiksirani elemenat.Isto važi za slučaj kada je $Q(\Sigma)$ RA-sistem.

4. Ako je
$$\Sigma = \{ C \mid C(x,y) = x \cdot t \cdot y,\ t \in Q \}$$
, a $Q(.)$ grupa,onda je $Q(\Sigma)$ LA-sistem.

5. $Q(\Sigma)$, gde je

$$\Sigma = \{ C \mid C(x,y) = \varphi x \cdot \psi y;\ \varphi, \psi \in \mathcal{A} \},$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ skup svih automorfizama grupe $Q(.)$, predstavlja A-sistem.

6. $Q(\Sigma)$, gde je

$$\Sigma = \{ C \mid C(x,y) = \varphi x \cdot t \cdot \psi y\ ;\ \varphi, \psi \in \mathcal{A},\ t \in Q \},$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ skup svih automorfizama grupe $Q(.)$, predstavlja A-sistem. Ovaj sistem je obeležen sa $\Sigma\{\cdot\}$

7. LA-sistem $\Sigma\{\cdot\}$ je maksimalan, tj. on se ne može uključiti u širi LA-sistem.

8. Ako je Σ maksimalan sistem,on ima oblik $\Sigma\{\cdot\}$

9. Svaki maksimalan LA-sistem je A-sistem.

10. Broj operacija maksimalnog A-sistema, definisanog na konačnom Q, jednak je $n \cdot f^2 \in N$, pri čemu je n moć skupa Q, a f je broj automorfizama generatorne grupe $Q(.)$.

11. Dva maksimalna A-sistema na istom skupu Q ili nemaju zajedničkih operacija ili se podudaraju.

12. Neka je $(R, +)$ grupa svih racionalnih brojeva u odnosu na sabiranje. Tada je $Q(\Sigma)$, gde je

$$\Sigma = \left\{ c \mid c(x,y) = x + ky,\ k \in Z \setminus \{0\} \right\}$$

RA-sistem, ali nije A-sistem.

Na LA-, RA-, odnosno A-sistemima kažemo [9] da je ispunjen zakon (10) sa jednom ili obe od sledećih implikacija:

$$(A_1, A_2) \longrightarrow (A_3, A_4) \qquad \text{i}$$

$$(A_3, A_4) \longrightarrow (A_1, A_2).$$

Postoje, međutim, i takvi sistemi $Q(\Sigma)$ na kojima je neki zakon ispunjen za proizvoljne operacije iz Σ. Možemo tada reći da je zakon t o t a l n o i s p u n j e n.

(U [9] se takav zakon zove "sverhtaždestva".)

II DEO

n-ARNE KVAZIGRUPE I OPŠTA n-ARNA ASOCIJATIVNOST

2.1. GENERALIZACIJA BJELOUSOVLJEVE TEOREME O ČETIRI KVAZIGRUPE NA TERNARNI SLUČAJ

2.1.1. U V O D

U prvom delu naveden je dokaz sledeće teoreme V.D.Bjelousova (str.11).Ako su $Q\ (A_i)$, $i \in N_4$, kvazigrupe i zadovoljavaju opštu asocijativnost

(1) $$A_1[A_2(x,y,),z] = A_3[x,A_4(y,z,)]$$

onda su one izotopne jednoj te istoj grupi $Q\ (A)$.Sledeći stav predstavlja generalizaciju ove teoreme na ternarni slučaj.

T e o r e m a 1. Ako ternarne kvazigrupe $Q\ (A_i)$, $i \in N_6 \overset{def}{=} \{1,2,3,4,5,6\}$,zadovoljavaju opštu ternarnu asocijativnost

(2) $A_1[A_2(x,y,z),u,v] = A_3[x,A_4(y,z,u),v] = A_5[x,y,A_6(z,u,v)]$,onda su sve $Q\ (A_i)$, $i \in N_6$, izotopne jednoj te istoj ternarnoj grupi sa jedinicom $Q\ (A)$, pri čemu egzistira binarna grupa $Q\ (B)$ takva da je $A(x,y,z) = B[B(x,y),z]$.

Teorema 1. je uporišna u trećem delu rada.Pored toga ona je potrebna za generalizaciju teoreme o četiri kvazigrupe na n-arni slučaj.

2.1.2. DOKAZ TEOREME

L e m a 1. Ako ternarne kvazigrupe $Q\ (A_i)$, $i \in N_6$, zadovoljavaju opštu asocijativnost (2), onda su $Q\ (A_i)$ za $i \in N_6 \setminus \{4\}$ međusobno izotopne.

D o k a z

(2) možemo posmatrati kao sledeće jednakosti

$$(2_1)\qquad \begin{aligned} A_1[A_2(x,y,z),u,v] &= A_3[x,A_4(y,z,u),v] \\ A_1[A_2(x,y,z),u,v] &= A_5[x,y,A_6(z,u,v)] \\ A_3[x,A_4(y,z,u),v] &= A_5[x,y,A_6(z,u,v)]. \end{aligned}$$

Postavimo redom $y = z = k$ u (2_1), $x = y = k$ i $u = v = k$ u (2_2) i $z = u = k$ u (2_3), gde je $k \in Q$ fiksirani elemenat.
Nalazimo

$$(3)\quad \begin{cases} A_1\left[A_2(x,k,k),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(k,k,u),v\right] \\ A_1\left[A_2(k,k,z),u,v\right] = A_5\left[k,k,A_6(z,u,v)\right] \\ A_1\left[A_2(x,y,z),k,k\right] = A_5\left[x,y,A_6(z,k,k)\right] \\ A_1\left[A_2(x,y,z),k,k\right] = A_5\left[x,y,A_6(z,k,k)\right] \\ A_1\left[x,A_4(y,k,k),v\right] = A_5\left[x,y,A_6(k,k,v)\right]. \end{cases}$$

Uvođenjem oznaka
$L_i x \stackrel{def}{=} A_i(k,k,x)$, $S_i x \stackrel{def}{=} A_i(k,x,k)$ i $R_i x \stackrel{def}{=} A_i(x,k,k)$, $i \in N_6$, (3) prelazi u

$$(4)\quad \begin{cases} A_1(R_2x,y,z) = A_3(x,L_4y,z) \\ A_1(L_2x,y,z) = L_5A_6(x,y,z) \\ R_1A_2(x,y,z) = A_5(x,y,R_6z) \\ A_3(x,R_4y,z) = A_5(x,y,L_6z) \end{cases}$$

Pošto su translacije L_i, S_i i R_i, $i \in N_6$, permutacije skupa Q, iz (4) nalazimo da su $Q\ (A_i)$, $i \in N_6 \setminus \{4\}$, međusobno izotopne; čime je Lema 1. dokazana.

L e m a 2. 3-Kvazigrupa $Q\ (A_4)$ iz dokaza Leme 1. je izotopna nekoj 3-grupi sa jedinicom $Q\ (A)$.

D o k a z

U (2) postavimo $x = v = k$. Nalazimo

$$A_1\left[A_2(k,y,z,),u,k\right] = S_3A_4(y,z,u) = A_5\left[k,y,A_6(z,u,k)\right], \text{ tj.}$$

$$(5)\quad S_3A_4(x,y,z) = A_1\left[A_2(k,x,y),z,k\right] \quad \text{i}$$

$$(6)\quad A_1\left[A_2(k,x,y),z,k\right] = A_5\left[k,x,A_6(y,z,k)\right]$$

Uvedimo oznake:

$$(7)\quad \begin{cases} B_1(x,y) = A_1(x,y,k) \\ B_2(x,y) = A_2(k,x,y) \\ B_3(x,y) = A_5(k,x,y) \\ B_4(x,y) = A_6(x,y,k) \end{cases} .$$

Iz (6) i (7) nalazimo da $Q\ (B_i)$, $i \in N_4$, zadovoljavaju jednakost

$$(8)\quad B_1\left[B_2(x,y),z\right] = B_3\left[x,B_4(y,z)\right]$$

Pošto su Q (A_i), $i \in N_6$, 3-kvazigrupe, iz (7) nalazimo da su Q (B_i), $i \in N_4$, binarne kvazigrupe.Uzimajući u obzir ovu činjenicu, iz (8), na osnovu teoreme V.D.Bjelousova o četiri kvazigrupe, nalazimo da postoji binarna grupa Q (B) sa kojom je izotopna svaka od kvazigrupa Q (Bi), $i \in N_4$.

Iz (5) i (7) nalazimo da je

(9) $$S_3A_4(x,y,z) = B_1[B_2(x,y),z] .$$

Pošto je desna strana u (9) leva u (1), to su izotopije Q $(B_1) \sim$ Q (B) i Q $(B_2) \sim$ Q (B) sledećeg tipa (videti dokaz Bjelousovljevog stava o četiri kvazigrupe, I deo,str.11):

$$B_1(x,y) = \alpha B(\beta x,\ldots)$$
i
$$B_2(x,y) = \beta^{-1}B(\ldots).$$

gde su α i β permutacije skupa Q.

Uzimajući ovo u obzir, (9) možemo notirati na sledeći način

(10) $S_3A_4(\xi x, \eta y, \zeta z) = B[B(x,y),z]$, pri čemu su ξ, η i ζ permutacije skupa Q, a Q (B) je binarna grupa.

Kratkim računom možemo se uveriti da je Q (A),gde je

$$A(x,y,z) = B[B(x,y),z] ,$$

ternarna asocijativna kvazigrupa sa jedinicom.Otuda,uzimajući u obzir (10), nalazimo da je Lema 2.dokazana.

L e m a 3. 3-Kvazigrupa Q (A_3) iz dokaza Leme 1. izotopna je 3-grupi Q (A) iz tvrđenja Leme 2.

D O K A Z

Iz (2_1) za $z = u = k$ nalazimo da je

$$A_3(x,R_4y,z) = A_1[A_2(x,y,k),k,z] .$$

Uvedimo oznake:

(11) $$\begin{cases} \overline{B}_1(x,y) = A_1(x,k,y) & \text{i} \\ \overline{B}_2(x,y) = A_2(x,y,k) \end{cases}$$

Dakle, A_3 se izražava pomoću $\overline{B}_1$ i $\overline{B}_2$ na sledeći način:

(12) $$A_3(x,R_4y,z) = \overline{B}_1[\overline{B}_2(x,y),z] .$$

U (2_2) postavimo $x = u = k$.

Nalazimo:

(13) $$A_1\left[A_2(k,y,z),k,v\right] = A_5\left[k,y,A_6(z,k,v)\right].$$

Uvedimo oznaku:

(14) $$\overline{B}_4(x,y) = A_6(x,k,y).$$

Uzimajući u obzir (7), (11) i (14), (13) možemo notirati ovako:

(15) $$\overline{B}_1\left[B_2(x,y),z\right] = B_3\left[x,\overline{B}_4(y,z)\right].$$

Otuda, na osnovu Bjelouslovljeve teoreme o četiri kvazigrupe, izlazi da je $Q\ (\overline{B}_1)$ izotopna sa $Q\ (B)$ iz dokaza leme 2.

U (2_1) postavimo $z = v = k$.

Nalazimo:

(16) $$A_1\left[A_2(x,y,k),u,k\right] = A_3\left[x,A_4(y,k,u),k\right].$$

Uvedimo oznake:

(17) $$\begin{cases} C_3(x,y) = A_3(x,y,k) \\ C_4(x,y) = A_4(x,k,y) \end{cases}$$

Uzimajući u obzir (7), (11) i (17), iz (16) nalazimo da je:

(18) $$B_1\left[\overline{B}_2(x,y),z\right] = C_3\left[x.C_4(y,z)\right].$$

Iz (18) nalazimo da je i $Q\ (\overline{B}_2)$ izotopna sa $Q\ (B)$ iz dokaza leme 2.

Uzimajući u obzir već pomenuti dokaz Bjelousovljeve teoreme o četiri kvazigrupe (videti I deo, str. 11), za (15) i (18) nalazimo sledeće jednakosti:

Za (15) -

(19) $$\begin{cases} \overline{B}_1(x,y) = B\ (\overline{R}_1 x,\ldots) \\ B_2(x,y) = \overline{R}_1^{\,-1}(B\ldots); \end{cases}$$

Za (18) -

(20) $$\begin{aligned} B_1(x,y) &= B\ (R_1' x,\ldots) \\ \overline{B}_2(x,y) &= R_1'^{\,-1} B\ (\ldots). \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir (11) i (7), nalazimo da je $\overline{R}_1 x = A_1(x,k,k)$ i $R_1' x = A_1(x,k,k)$, što znači da je $\overline{R}_1 = R_1'$.

Uzimajući u obzir (19), (20) i $\overline{R}_1 = R_1'$, nalazimo da su izotopije $Q\ (\overline{B}_1) \sim Q\ (B)$ i $Q\ (\overline{B}_2) \sim Q\ (B)$ sledećeg tipa:

$$\begin{aligned} \overline{B}_1(x,y) &= B\ (\beta x,\ldots) \\ \overline{B}_2(x,y) &= \beta^{-1} B\ (\ldots). \end{aligned}$$

Otuda, uzimajući u obzir (12), nalazimo da je:

(21) $$A_3(\varphi x, \psi y, \vartheta z) = B[B(x,y),z],$$
gde su φ, ψ i ϑ permutacije skupa Q, a Q (B) je binarna grupa iz dokaza leme. 2. Kako je Q (A), gde je A definisana sa

$$A(x,y,z) = B[B(x,y),z],$$

ternarna grupa iz tvrđenja leme 2, to je, obzirom na (21), lema dokazana.

Uzimajući u obzir leme 1-3, nalazimo da je teorema 1. dokazana.

Teorema 1. sa navedenim dokazom publikovana je u radu [41]

NAPOMENA:

Ako se izvesni delovi dokaza lema 1-3. dopune detaljima, onda se, uz nešto računa, mogu dobiti sledeće jednakosti:

$$(22)\qquad \begin{cases} A_1(x,y,z) = A(R_1x, S_3L_4x, L_5L_6z) \\ A_2(x,y,z) = R_1^{-1}A(R_1R_2x, S_3R_4y, L_5R_6z) \\ A_3(x,y,z) = A(R_1R_2x, S_3y, L_5L_6z) \\ A_4(x,y,z) = S_3^{-1}A(R_1S_2x, L_5R_6y, L_5S_6z) \\ A_5(x,y,z) = A(R_1R_2x, S_3R_4y, L_5z) \\ A_6(x,y,z) = L_5^{-1}A(R_1L_2x, S_3L_4y, L_5L_6z) \end{cases}$$

Pri čemu je Q (A) ternarna grupa sa jedinicom iz tvrđenja Teoreme 1.

2.2. GENERALIZACIJA BJELOUSOVLJEVE TEOREME O ČETIRI KVAZIGRUPE NA n-ARNI SLUČAJ

T e o r e m a 2. Ako n-arne kvazigrupe Q (A_i), $i \in N_{2n}$, zadovoljavaju opštu n-arnu asocijativnost, tj. sistem zakona

(1) $$A_1[A_2(a_1,a_2,\ldots,a_{j-1},a_j,\ldots,a_n),\ldots,a_{j+n-1},\ldots,a_{2n-1}] =$$

$$= A_{2j-1}[a_1,\ldots,a_{j-1},A_{2j}(a_j,\ldots,a_{j+n-1}),a_{j+n},\ldots,a_{2n-1}] \quad \text{za sve}$$

$j \in \{2,\ldots,n\}$, onda su sve Q (A_i), $i \in N_{2n}$, izotopne jednoj te istoj n-arnoj grupi sa jedinicom Q (A), pri čemu egzistira binarna grupa Q (B) tako da je

$$A(a_1,a_2,\ldots,a_n) = B[B(\ldots B(B(a_1,a_2),a_3),\ldots),a_{n-1}),a_n].$$

D O K A Z   T E O R E M E

Opšta (1,j)-asocijativnost i neke posebne oznake

Za fiksirani $j \in \{2,\ldots,n\}$ iz (1) dobijamo jedan zakon, koji ćemo zvati ([39] , I deo, str. 9): opšti (1,j) - asocijativni zakon.

Tako je

$$(1') \quad A_1\left[A_2(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n),a_{n+1},\ldots,a_{2n-1}\right] = A_{2n-1}\left[a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},A_{2n}(a_n,a_{n+1},\ldots,a_{2n-1})\right]$$

opšti (1,n)-asocijativni zakon.

Koristićemo i opšti (1,n-1) -asocijativni zakon:

$$(1'') \quad A_1\left[A_2(a_1\ldots,a_{n-2},a_{n-1},a_n),a_{n+1},\ldots,a_{2n-2},a_{2n-1}\right] = A_{2n-3}\left[a_1,\ldots a_{n-2},A_{2n-2}(a_{n-1},a_n,\ldots,a_{2n-2}),a_{2n-1}\right].$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$(2_1) \quad A_2^{(L,d)}(a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n) = A_2(k,k,\ldots,k,a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n),$$

$$(2_2) \quad A_2^{(R,d)}(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1}) = A_2(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},k,k,\ldots,k),$$

$$(2_3) \quad A_1^{(L,d)}(a_1,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) = A_1(a_1,k,k,\ldots,k,a_i,\ldots,a_n) \text{ i}$$

$$(2_4) \quad A_1^{(R,d)}(a_1,a_2,\ldots,a_i) = A_1(a_1,a_2,\ldots,a_i,k,k,\ldots,k),$$

gde je d dužina operacija $A_2^{(L,d)}$, $A_2^{(R,d)}$, $A_1^{(L,d)}$ i $A_1^{(R,d)}$, $d \in \{2,\ldots,n-1\}$, a k je fiksirani elemenat skupa Q.

Neki asocijativni sistemi kvazigrupa arnosti niže od n indukovani sa (1)

U (1) postavimo

$$\begin{cases} a_1 = k & \text{i} \quad a_{n+1} = k \\ a_1 = a_2 = k & \text{i} \quad a_{n+1} = a_{n+2} = k \\ \text{-----------------} & \\ \text{-----------------} & \\ a_1 = \ldots = a_{n-2} = k & \text{i} \quad a_{n+1} = \ldots = a_{2n-1} = k. \end{cases}$$

Nalazimo redom:

sistem (n-1)-arnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu (n-1)-arnu asocijativnost, sistem (n-2) -arnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu (n-2)-arnu asocijativnost,

----

----

sistem ternarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu ternarnu asocijativnost,

sistem binarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu asocijativnost.

Pri tom, prva kolona u (3_1) daje kvazigrupe tipa (2_1), a druga kolona u (3_1) daje kvazigrupe tipa (2_3), redom obrazovane od A_2 i A_1.

Sistem binarnih kvazigrupa formiranih na način (3_1) zadovoljavaju sledeću jednakost:

$$\text{(A)} \qquad A_1^{(L,2)}\left[A_2^{(L,2)}(x,y),z\right] = C_3\left[x,C_4(y,z)\right].$$

U (1) postavimo redom

$$(3_2) \qquad \begin{cases} a_n = k & \text{i} \quad a_{2n-1} = k \\ a_n = a_{n-1} = k & \text{i} \quad a_{2n-1} = a_{2n-2} = k \\ \text{-----------------------} & \\ \text{-----------------------} & \\ a_n = \dots = a_3 = k & \text{i} \quad a_{2n-1} = \dots = a_{n+2} = k. \end{cases}$$

Nalazimo redom:

sistem (n-1) -arnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu (n-1) -arnu asocijativnost,

sistem (n-2) -arnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu (n-2) -arnu asocijativnost,

----

----

sistem ternarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu ternarnu asocijativnost,

sistem binarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju opštu asocijativnost.

Pri tom, prva kolona u (3_2) daje kvazigrupe tipa (2_2), a druga kolona kvazigrupe tipa (2_4), redom obrazovane od A_2 i A_1.

Sistem binarnih kvazigrupa formiranih na način (3_2) zadovoljava sledeću jednakost:

$$(B) \qquad A_1^{(R,2)}\left[A_2^{(R,2)}(x,y),z\right] = C_3'\left[x, C_4'(y,z)\right]$$

Za $a_1 = \ldots = a_{n-2} = k$ i $a_{n+2} = \ldots = a_{2n-1} = k$, iz (1') nalazimo da je

$$(C) \qquad A_1^{(R,2)}\left[A_2^{(L,2)}(x,y),z\right] = C_3''\left[x, C_4''(y,z)\right].$$

Oznake polijadičnih grupa sa jedinicom

Koristićemo sledeće oznake:

$Q\ (A)$ za n-arnu grupu sa jedinicom,

$Q\ (B_i)$ za i-arnu grupu sa jedinicom, $i \in \{2,\ldots,n-1\}$,

i $Q\ (B_2) = Q\ (B)$ za binarnu grupu.

Dve leme i induktivna pretpostavka

Na osnovu Bjelousovljeve teoreme o četiri kvazigrupe, uzimajući u obzir njen dokaz iz [31] (I deo, str. 11), (A), (B) i (C), nalazimo da važi sledeće lema.

L e m a 1. Binarne kvazigrupe $A_1^{(L,2)}$, $A_1^{(R,2)}$, $A_2^{(L,2)}$ i $A_2^{(R,2)}$ izotopne su jednoj te istoj grupi $Q\ (B)$, pri čemu je

$$(4_1) \qquad \begin{cases} A_1^{(L,2)}(x,y) = B\ (R_1^{(L,2)}x, \ldots) \\ A_2^{(L,2)}(x,y) = R_1^{(L,2)^{-1}}B(\ldots) \\ A_1^{(R,2)}(x,y) = B\ (R_1^{(R,2)}x, \ldots) \\ A_2^{(R,2)}(x,y) = R_1^{(R,2)^{-1}}B(\ldots). \end{cases}$$

Neka je

$$(a) \qquad A_1^{(L,3)}\left[A_2^{(L,3)}(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5\right] = A_3'\left[a_1, A_4'(a_2,a_3,a_4),a_5\right] \quad \text{i}$$

$$(b) \qquad A_1^{(R,3)}\left[A_2^{(R,3)}(a_1,a_2,a_3),a_4,a_5)\right] = \bar{A}_3\left[\bar{a}_1, \bar{A}_4(a_2,a_3,a_4),a_5\right].$$

Za $a_1 = a_5 = k$ iz (a) nalazimo da je

(c) $$A_4'(x,y,z) = A_1^{(L,3)}\left[A_2^{(L,2)}(x,y),z,k\right]$$

Z a $a_3 = a_4 = k$ iz (b) nalazimo da je

(d) $$\overline{A}_3(x,\varphi y,z) = A_1^{(R,3)}\left[A_2^{(R,2)}(x,y),k,z\right]$$

Iz (C) sledi da je

(D) $$A_2^{(L,2)} \sim A_2^{(R,2)} \sim B$$, gde je $Q\ (B)$ binarna grupa, a sa $\sim$ je označena izotopija.

Uzimajući sada u obzir Teoremu 1.,(a),(b), dokaze lema 3. i 4. iz 2.1.2., (c), (d) i (D), nalazimo da su $A_1^{(L,3)}$, $A_2^{(L,3)}$, $A_1^{(R,3)}$ i $A_2^{(R,3)}$ izotopne 3-grupi sa jedinicom $Q\ (A)$, pri čemu je $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$, gde je $Q\ (B)$ binarna grupa iz (D).

Otuda, uzimajući u obzir NAPOMENU iz 2.1.2, nalazimo da važi sledeće tvrđenje:

L e m a 2. Ternarne kvazigrupe $A_1^{(L,3)}$ $A_2^{(L,3)}$, $A_1^{(R,3)}$ i $A_2^{(R,3)}$ izotopne su jednoj te istoj 3-grupi sa jedinicom $Q\ (B_3)$, pri čemu je

1° $$B_3(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right],$$

gde je $Q\ (B)$ iz tvrđenja Leme 1.; i

2°

$$(4_2)\quad \begin{cases} A_1^{(L,3)}(x,y,z) = B_3(R_1^{(L,3)}x,\ldots) \\ A_2^{(L,3)}(x,y,z) = {R_1^{(L,3)}}^{-1} B_3(\ldots) \\ A_1^{(R,3)}(x,y,z) = B_3(R_1^{(R,3)}x,\ldots) \\ A_2^{(R,3)}(x,y,z) = {R_1^{(R,3)}}^{-1} B_3(\ldots). \end{cases}$$

I n d u k t i v n a p r e t p o s t a v k a i-arne kvazigrupe $A_1^{(L,i)}$, $A_2^{(L,i)}$, $A_1^{(R,i)}$ i $A_2^{(R,i)}$, $i \in \{3,\ldots,n-1\}$, izotopne su jednoj te istoj i-arnoj grupi sa jedinicom $Q\ (B\ )$, pri čemu je

1° $$B_i(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i) = B\left[B_{i-1}(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1}),a_i\right],$$

gde je $Q\ (B)$ binarna grupa iz tvrđenja Leme 1., a $B_2 = B$; i

2°

$$(4_3)\qquad \begin{cases} A_1^{(L,i)}(a_1,a_2,\dots,a_i) = B_i(R_1^{(L,i)}\, a_1,\dots) \\ A_2^{(L,i)}(a_1,a_2,\dots,a_i) = R_1^{(L,i)^{-1}}\, B_i(\dots) \\ A_1^{(R,i)}(a_1,a_2,\dots,a_i) = B_i(R_1^{(R,i)} a_1,\dots) \\ A_2^{(R,i)}(a_1,a_2,\dots,a_i) = R_1^{(R,i)^{-1}}\, B_i(\dots). \end{cases}$$

Translacije $R_1^{(L,d)}$ i $R_1^{(R,d)}$, $d \in \{2,\dots,n-1\}$

Uzimajući u obzir dogovore o operacijama $A_1^{(L,d)}$ i $A_1^{(R,d)}$, nalazimo da važi i sledeća lema.

L e m a 3. $R_1^{(L,i)} = R_1^{(R,i)} = R_1$ za svaki i iz skupa $\{2,\dots,n-1\}$ pri čemu je $R_1 x = A_1(x,k,k,\dots,k)$.

Izotopija operacija A_{2j}, $j \in \{2,\dots,n-1\}$

L e m a 4. n-Arne kvazigrupe Q $(A_{2j}), j \in \{2,\dots,n-1\}$, iz (1) izotopne su jednoj te istoj n-arnoj grupi sa jedinicom Q (A), pri čemu je

$$A\,(a_1,a_2,\dots,a_n) = B\left[B_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n\right],$$ gde su

B i B_{n-1} iz lema 1-2. i induktivne pretpostavke.

D O K A Z

Iz (1) za $a_1 = a_2 = \dots = a_{j-1} = k$ i $a_{j+n} = a_{j+n+1} = \dots = a_{2n-1} = k$ nalazimo da je

(5)

$$L_{2j-1}A_{2j}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n) = A_1^{(R,j)}\left[A_2^{(L,n-j+1)}(a_1,a_2,\dots,a_{n-j+1}),\dots,a_n\right]$$

za svaki $j \in \{2,\dots,n-1\}$, pri čemu je L_{2j-1} translacija n-kavzigrupe A_{2j-1}.

S obzirom da iz $j \in \{2,\dots,n-1\}$ sledi $n-j+1 \in \{2,\dots,n-1\}$, iz (5), na osnovu induktivne pretpostavke i Leme 3., nalazimo da je A_{2j}, $j \in \{2,\dots,n-1\}$, izotopna sa Q (A), gde je

$$(6)\qquad A(a_1,a_2,\dots,a_n) = B_j\left[B_{n-j+1}(a_1,\dots,a_{n-j+1}),\dots,a_n\right].$$

Uzimajući u obzir Lemu 1., Lemu 2. i 1° iz induktivne pretpostavke, indukcijom nalazimo da se B_i za svaki $i \in \{3,\dots,n-1\}$ može predstaviti binarnom grupom Q (B) iz leme 1. na sledeći način:

$$B_i(a_1,a_2,\dots,a_i) = B\left[B(\dots(B(a_1,a_2),a_3),\dots),a_i\right]. \tag{7}$$

Pošto je Q (B) binarna grupa i $B_2 = B$, iz (7) i (6), nalazimo da je Q (A) n-arna grupa sa jedinicom, koja se pomoću B predstavlja na način (7).

Izotopija operacije A_{2n-3} sa A_{2j}, $j \in \{2,\dots,n-1\}$

L e m a 5. n-Arna kvazigrupa Q (A_{2n-3}) iz (1) izotopna je n-grupi Q(A) a tvrđenja iz Leme 4.

D O K A Z

Iz (1'') za $a_n = a_{n+1} = \dots = a_{n-2} = k$ nalazimo da je

$$\begin{aligned} A_{2n-3}(a_1,a_2,\dots,R_{n-2}a_{n-1}) &= \\ &= A_1^{(L,2)}\left[A_2^{(R,n-1)}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n\right], \end{aligned} \tag{8}$$

pri čemu je R_{2n-2} translacija kvazigrupe Q (A_{2n-2}).

Iz (8), na osnovu induktivne pretpostavke i Leme 3., nalazimo da je Q (A_{2n-3}) izotopna sa

$B\left[B_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n\right]$, odnosno Q (A) iz tvrđenja Leme 4.

Međusobna izotopija operacija $A_1, A_2, A_{2n}, A_{2j-1}, j \in \{2,\dots,n\}$

Korišćenjem metode iz dokaza teoreme o četiri kvazigrupe (I deo, str.71), nalazimo da važi i sledeća lema.

L e m a 6. n-Arne kvazigrupe A_1, A_2, A_{2n}, A_{2j-1}, $j \in \{2,\dots,n\}$, iz (1) međusobno su izotopne.

Z A K L J U Č A K

Konačno, uzimajući u obzir leme 4-6., obzirom da je A_{2n-3} zahvaćena lemom 6., nalazimo da je Teorema 2. dokazana.

2.3. NEKE POSLEDICE KOJE SE ODNOSE NA n-ARNE GRUPE

Ako u (1) iz 2.2. postavimo $A_1 = A_2 = A_{2j-1} = A_{2j}$ za sva $j \in \{2,\dots,n\}$, na osnovu Teoreme 2., nalazimo da važi sledeće tvrđenje.

T e o r e m a 3. Svaka n-arna grupa Q (G) izotopna je nekoj n-arnoj grupi sa jedinicom Q (A), pri čemu egzistira binarna grupa Q (B) tako da je $A(a_1,\dots,a_n) = B[B(\dots(B(B(a_1,a_2),a_3),\dots),a_n]$.

NAPOMENA 1.

Poznato je da se svaka n-arna grupa Q (G) može predstaviti pomoću binarne grupe Q (B) i njenog specijalnog automorfizma (Hosszu-Gluskinov stav, I deo, str. 7). Teoremu 3. možemo formulisati i na sledeći način: ako je Q (G) n-arna grupa, onda egzistira binarna grupa Q (B) i permutacije α_i, $i \in N_n$, tako da je

$$G(a_1,\dots,a_n) = B[B(\dots(B(B(\alpha_1 a_1,\alpha_2 a_2), \;_3a_3),\dots),\alpha_n a_n].$$

Dakle, Teorema 3. je slabija od Hosszu-Gluskinove utoliko što ne opisuje permutacije α_i, $i \in N_n$.

NAPOMENA 2.

U [10] je utvrđeno da je L-izotop (I deo, str. 8-9) proizvoljne n-arne kvazigrupe n-arna lupa. Takođe je utvrđeno da, ako je n-lupa Q (L) izotopna n-grupi sa jedinicom Q (A), onda je Q (L) takođe n-grupa (sa jedinicom), izomorfna sa Q (A) (Bjelousov-Sandikov stav-generalizovan Albertov stav). Zato, uzimajući u obzir Teoremu 3., nalazimo da važi sledeće tvrđenje:

T e o r e m a 3′: L-izotop proizvoljne n-grupe je n-grupa sa jedinicom.

Uzimajući u obzir Teoremu 3′, lako se dokazuje sledeće tvrđenje.

T e o r e m a 4. Ako n-grupa poseduje jedinični slog, onda je ona n-grupa sa jedinicom.

D O K A Z

Neka je $e_1,e_2,\dots,e_{n-1}$ jedinični slog n-grupe Q (G) (I deo, str. 7), koji obeležimo kraće sa $\tilde{a}$. Tada je $L_i(\tilde{a}) = I$ za svaki

$i \in N_n$, pri čemu je I identična permutacija skupa Q. To znači da je L-izotop n-grupe Q (G) sama n-grupa Q (G), jer je

$$G(L_1^{-1}a_1,\dots,L_n^{-1}a_n) = G(Ia_1,\dots,Ia_n) = G(a_1,\dots,a_n).$$

Otuda, na osnovu Teoreme 3', nalazimo da je tvrđenje tačno.

Obrnuto tvrđenje je trivijalno.

Ako je Q (B) binarna grupa, onda je Q (G), gde je

$G(a_1,\dots,a_n) = B\left[B(\dots(B(B(a_1,a_2),a_3),\dots),a_n\right]$, n-grupa sa jedinicom. Tvrđenje je evidentno. Dokazaćemo obrnuto tvrđenje, tj. sledeći stav.

T e o r e m a 5. Neka je Q $(\bar{A})$ n-grupa sa jedinicom e. Tada egzistira binarna grupa Q $(\bar{B})$, tako da je

$1°$ $\bar{A}(a_1,\dots,a_n) = \bar{B}\left[\bar{B}(\dots(\bar{B}(\bar{B}(a_1,a_2),a_3),\dots),a_n\right]$ i

$2°$ $\bar{B}(x,y) = \bar{A}(x,y,e,e,\dots,e).$

D o k a z t e o r e m e

L e m a 1. Neka su Q (A) i Q $(\bar{A})$ izomorfni n-grupoidi. Ako je F izomorfizam Q (A) na Q $(\bar{A})$ i ako $k \in Q$ pripada centru (I deo, str. 9) n-grupoida Q (A), onda je Fk u centru n-grupoida Q $(\bar{A})$.

Tvrđenje je evidentno. Evidentno je i sledeće tvrđenje.

L e m a 2. Neka je Q (A) n-grupa sa jedinicom e, i neka je

$A(a_1,\dots,a_n) = B\left[B(\dots(B(B(a_1,a_2),\dots),a_n\right]$, gde je Q (B) binarna grupa. Tada je e u centru n-grupe Q (A).

Uzimajući sada u obzir Teoremu 3., generalizovan Albertov stav (I deo, str. 9). Lemu 1. i Lemu 2., nalazimo da važi sledeće tvrđenje.

L e m a 3. Ako je Q $(\bar{A})$ n-grupa sa jedinicom e, onda je e u centru n-grupe Q $(\bar{A})$.

U (1) iz 2.2. postavimo $A_1 = A_2 = A_{2j-1} = A_{2j} = \bar{A}$, $j \in \{2,\dots,n\}$, pri čemu je Q $(\bar{A})$ n-grupa sa jedinicom e. Postavimo dalje $a_n = a_{2n-1} = e$. Ako još uzmemo u obzir Lemu 3., tj. da za svaku (n-1)-torku $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$ elemenata iz Q važe sledeće jednakosti:

$$\overline{A}(a_1,a_2,\dots,a_{m-1},e) = \overline{A}(a_1,a_2,\dots,a_{n-2},e,a_{n-1}) =$$

$$\text{-----------------------}$$

$$\text{-----------------------}$$

$$= \overline{A}(e,a_1,a_2,\dots,a_{n-2},a_{n-1}),$$

onda nalazimo da važi sledeće tvrđenje:

L e m a 4. Ako je $Q\ (\overline{A})$ n-grupa sa jedinicom e, onda je $Q\ (\overline{B}_{n-1})$, gde je

$$\overline{B}_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) = \overline{A}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},e),$$

(n-1)-grupa sa jedinicom e.

Ako u (2) iz 2.1. postavimo $A_i = \overline{A}$, za sve $i \in N_6$, gde je $Q\ (\overline{A})$ 3-grupa sa jedinicom e,i $x = v = e$, uzimajući pritom u obzir Lemu 3. i Lemu 4.,nalazimo da važi i sledeće tvrđenje.

L e m a 5. Neka je $Q\ (\overline{A})$ 3-grupa sa jedinicom e.Tada egzistira binarna grupa $Q\ (\overline{B})$, tako da je

1° $$\overline{A}(a_1,a_2,a_3) = \overline{B}[\overline{B}(a_1,a_2),a_3]$$

2° $$\overline{B}(x,y) = \overline{A}(x,y,e).$$

I n d u k t i v n a p r e t p o s t a v k a. Neka je $Q\ (\overline{A})$ i-arna grupa sa jedinicom e, gde $i \in \{3,\dots,n-1\}$ .Tada egzistira binarna grupa $Q\ (\overline{B})$ tako da je

1° $$\overline{A}(a_1,a_2,\dots,a_i) = \overline{B}[\overline{B}(\dots(\overline{B}(\overline{B}(a_1,a_2),\dots),a_i]$$ i

2° $$\overline{B}(x,y) = \overline{A}(x,y,e,e,\dots,e).$$

U (1,2)-asocijativan zakon za n-grupu $Q\ (\overline{A})$ postavimo

$$a_1 = a_{n+2} = \dots = a_{2n-1} = e.$$

Nalazimo:

$$\overline{A}(a_1,a_2,\dots,a_n) = \overline{B}[\overline{B}_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),a_n],$$ gde je

$$\overline{B}_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) = \overline{A}(e,a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),$$ a

$$\overline{B}(x,y) = \overline{A}(x,y,e,e,\dots,e)$$

Otuda uzimajući u obzir Lemu 5.,Lemu 4. i induktivnu pretpostavku,nalazimo da je Teorema 5. dokazana.

2.4. JEDNA NAPOMENA UZ GENERALIZACIJU TEOREME O ČETIRI KVAZIGRUPE NA n-ARNI SLUČAJ

U okviru dokaza teoreme o četiri kvazigrupe u [31] (I deo, str. 10-11) utvrđene su sledeće jednakosti:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1(x,y) = R_1x.L_3L_4y \\ A_2(x,y) = R_1^{-1}(R_1R_2x.L_3R_4y) \\ A_3(x,y) = R_1R_2x.L_3y \\ A_4(x,y) = L_3^{-1}(R_1L_2x.L_3L_4y) \end{cases}$$

gde je $Q\,(.)$ grupa, a L_i i R_i, $i\in N_4$, su translacije kvazigrupa $Q\,(A_i)$, $i\in N_4$.

Smenama $R_1=\alpha$, $L_3L_4=\beta$, $R_1R_2=\gamma$, $L_3R_4=\delta$ i $L_3=\varphi$, jednakosti (1) postaju sledeće jednakosti:

$$(1_1)\qquad \begin{cases} A_1(x,y) = \alpha x.\beta y \\ A_2(x,y) = \alpha^{-1}(\gamma x.\delta y) \\ A_3(x,y) = \gamma x.\varphi y \\ A_4(x,y) = \varphi^{-1}(\delta x.\beta y) \end{cases}$$

V.D.Bjelousov je u [9] uveo sledeću relaciju ekvivalencije u skupu $Q!$:

(2) $\alpha\sim\beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a,b\in Q)(\forall x\in Q)\,(\alpha x = a.\beta x.b)$, gde je $Q(.)$ binarna grupa.

Ako se umesto $x.y$ piše $B(x,y)$, onda se (2) može izraziti na sledeći način:

$$(2_1)\quad \alpha\sim\beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists a,b\in Q)(\forall x\in Q)(\alpha x = B[a,B(\beta x,b)]).$$

Ekvivalencija iz (2) uvedena je radi formulacije sledećeg rezultata. Grupa $Q(.)$ iz (1_1) određena je sa tačnošću do izomorfizma, a permutacije α - φ sa tačnošću do ekvivalencije $\sim$.

Dokazaćemo n-arni analogon ovog rezultata. U tu svrhu uvodimo sledeću definiciju.

D e f i n i c i j a 1. Za $\alpha,\beta \in Q!$ reći ćemo da su ekvivalentne, u oznakama $\alpha \sim \beta$, ako i samo ako egzistiraju $a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_{n+1},\dots,a_{2n-1}$ $\in Q$ takvi da je za svaki $x \in Q$.

$$(2_2) \qquad \alpha x = A\left[a_1,a_2,\dots,a_{n-1},A(\beta x,a_{n+1},\dots,a_{2n-1})\right],$$

pri čemu je $Q(A)$ n-grupa sa jedinicom.

Za binarnu relaciju definisanu sa (2) lako se dokazuje da je relacija ekvivalencije u $Q!$.Da je binarna relacija u $Q!$ uvedena Definicijom 1. relacija ekvivalencije,potvrđuje sledeći stav.

L e m a 1. Neka je $Q(A)$ n-arna grupa sa jedinicom e.Neka je,dalje, $Q(B)$ binarna grupa takva da je

$$(3) \qquad A(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) = B\left[B(\dots(B(a_1,a_2),a_3),\dots),a_n\right] \;{}^{*)}$$

Ako $\alpha,\beta \in Q!$ zadovoljavaju (2_2) u odnosu na A, onda α,β zadovoljavaju (2_1) u odnosu na B.

D O K A Z

Neka $\alpha,\beta \in Q!$ zadovoljavaju (2_2).Uzimajući u obzir Teoremu 5. i činjenicu da za binarnu grupu $Q(B)$ važi uopštena asocijativnost,(2_2) možemo notirati na sledeći način:

$$(2_3) \quad \alpha x = B\left[B_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}),B\left[\beta x,B_{n-1}(a_{n+1},\dots,a_{2n-1})\right]\right],$$

gde je $\qquad B_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) = B\left[B(\dots(B(a_1,a_2),\dots),a_{n-1}\right],$

a $Q(B)$ je binarna grupa.

Uvođenjem oznaka:

$$B_{n-1}(a_1,a_2,\dots,a_{n-1}) = a \qquad \text{i}$$

$$B_{n-1}(a_{n+1},\dots,a_{2n-1}) = b,$$

(2_3) postaje

$$\alpha x = B\left[a,B(\beta x,b)\right];$$

čime je tvrđenje dokazano.

Neka n-arne kvazigrupe $Q(A_\lambda)$, $\lambda \in N_{2n}$,zadovoljavaju opštu n-arnu asocijativnost.Tada,na osnovu Teoreme 2., važe sledeće jednakosti:

---

*) Na osnovu Teoreme 5..takva Q(B) egzistira.

$$(3)\begin{cases} A_{2j-1}(a_1,\dots,a_m,\dots,a_n) = \varphi_i A(\alpha_{1i}a_1,\dots,\alpha_{mi}a_m,\dots,\alpha_{ni}a_n) \\ A_{2j}(a_1,\dots,a_m,\dots,a_n) = \varphi_t A(\alpha_{1t}a_1,\dots,\alpha_{mt}a_m,\dots,\alpha_{nt}a_n), \end{cases}$$

gde je $i = 2j-1$, $t = 2j$, $m \in N_n$, $\varphi_i, \varphi_t, \alpha_{mi}, \alpha_{mt} \in Q!$, j prolazi sav N_n

Q(A) je n-grupa sa jedinicom.Pritom,neka su permutacije iz (3) dobijene na način koji implicira dokaz Teoreme 2.; translacije operacija A_λ, $\lambda \in N_n$, u okviru dokaza Teoreme 2. formirane su pomoću jednog te istog $k \in Q$.

Važi sledeće tvrđenje.

L e m a 2. U prvoj klasi jednakosti (3) φ_i mogu se smatrati identičnim permutacijama.

D O K A Z

Uzimajući u obzir Teoremu 2. i (1) iz 2.2. nalazimo da za φ_i mogu nastupiti samo sledeće mogućnosti:

1. φ_i su međusobno jednake,

2. φ_i su autotopne u odnosu na A (I deo,str. 8.) i

3. postoje autotopne permutacije $\overline{\varphi}_i$ koje se mogu "izvući ispred A" tako da su kompozitumi $\varphi_i\overline{\varphi}_i$ međusobno jednaki za sve $i = 2j-1$, kada j prođe sav N_n

Posebno treba razmotriti samo 3. slučaj.U drugom slučaju se,naime, φ_i mogu "uneti iza A". Treći slučaj pak, za $\overline{\varphi}_i = I$, gde je I identična permutacija skupa Q, postaje prvi slučaj.Neka su,dakle, $\varphi_i\overline{\varphi}_i$ međusobno jednake permutacije za sve $i = 2j-1$, $j \in N_n$.Uzimajući u obzir Lemu 5. i (8) iz 2.2. te (1_1) ovog odeljka,nalazimo da je $\varphi_{2n-3}\overline{\varphi}_{2n-3} = I$. Tvrđenje je time dokazano.

Važi i sledeće tvrđenje.

L e m a 3. φ_t iz druge klase jednakosti u (3) je L^{-1}_{2j-1}, gde je $L_{2j-1,j}$ j-ta translacija kvazigrupe $Q(A_{2j-1})$; $t = 2j, j \in N_n$.

D O K A Z

U (1) iz 2.2. postavimo $a_1 = \dots = a_{j-1} = a_{j+n} = \dots = a_{2n-1} = k$. Nalazimo

$L_{2j-1,j}A_{2j}(a_j,\ldots,a_{j+n-1}) = A_1\left[A_2(k,\ldots,k,a_j,\ldots,a_n),a_{n+1},\ldots,a_{j+n-1},k,\ldots,k\right]$

Otuda uzimajući u obzir dokaz Teoreme 2. i Leme 2., nalazimo da je tvrđenje tačno.

Uzimajući u obzir Leme 2-3., nalazimo da se (3) može predstaviti na sledeći način.

$$(3') \quad \begin{cases} A_{2j-1}(a_1,\ldots,a_m,\ldots,a_n) = A(\alpha_{1i}a_1,\ldots,\alpha_{mi}a_m,\ldots,\alpha_{ni}a_n) \\ A_{2j}(a_1,\ldots,a_m,\ldots,a_n) = L_{2j-1}^{-1}A(\alpha_{1t}a_1,\ldots,\alpha_{mt}a_m,\ldots,\alpha_{nt}a_n), \end{cases}$$

$i = 2j-1, t = 2j, j$ prolázi sav $N_n, m \in N_n; L_{2j-1,j}a_j =$

$= A_{2j-1}(k,\ldots,k,a_j,k,\ldots,k).$

PRIMEDBA:

Jednakosti (3′) u binarnom slučaju predstavljaju jednakosti (1).U ternarnom slučaju to su jednakosti (22) iz 2.1.2..

Sada možemo formulisati n-arni analogon pomenutog Bjelousovljevog rezulatata.

T e o r e m a 6. Neka n-arne kvazigrupe $A_{2j-1}, A_{2j}, j \in N_n$, zadovoljavaju opštu n-arnu asocijativnost. Tada:

1° egzistira n-arna grupa sa jedinicom Q(A) i permutacije α_{mi}, α_{mt}, $m \in N_n$, $i = 2j-1, t = 2j, j \in N_n$, tako da važe jednakosti (3′);

2° n-arna grupa Q(A) iz (3′) je određena sa tačnošću do izomorfizma;

i 3° permutacije $L_{2j-1;j}, \alpha_{mt}; \alpha_{mi}$, $m \in N_n$, $t = 2j, i = 2j-1$, $j \in N_n$, određene su sa tačnošću do ekvivalencije $\sim$ iz Definicije 1. .

D O K A Z T E O R E M E

Tvrđenje pod 1° predstavlja deo tvrđenja Teoreme 2. i Lema 2-3 iz ovog odeljka.

U tačnost tvrđenja pod 2° možemo se uveriti sledećim razmišljanjem U okviru dokaza Teoreme 2. (i 1.) sva razmišljanja su obavljena uz izbor fiksiranog $k \in Q$. U opštem slučaju, za različite $k \in Q$ treba očekivati različite Q(A) i rezličite α_{mi} i α_{mt}. Na osnovu T eoreme 2., Q(A) iz (3′) može biti zamenjena eventualno n-grupom $Q(\overline{A})$ koja poseduje jedinicu.Dalje,zbog izotopija $Q(A_\lambda), \lambda \in N_n$, sa Q(A), $Q(\overline{A})$ mora biti izotopna sa Q(A). To, međutim,na osnovu generalizovanog Albertovog stava (I deo,str. 9.), znači da $Q(\overline{A})$ mora biti izomorfna sa Q(A),Znači, Q(A) je određena jednoznačno do izomorfizma. Time je dokazano tvrđenje pod 2° ostaje još da se dokaže tvrđenje pod 3°.

Ako u (3′) α_{mi} i α_{mt} zamenimo sa $\bar{\alpha}_{mi}$ i $\bar{\alpha}_{mt}$, $L_{2j-1,j}$ sa $\bar{L}_{2j-1,j}$, a A sa izomorfnom $\bar{A}$, pri čemu su α_{mi}, α_{mt}, $L_{2j-1,j}$ i A dobijeni pri izboru $k \in Q$, a $\bar{\alpha}_{mi}, \bar{\alpha}_{mt}$, $\bar{L}_{2j-1,j}$ i $\bar{A}$ pri izboru $\bar{k} \in Q$, onda jednakosti iz prve klase u (3′) moraju zadovoljiti jednakosti (4_1):

$$A(\alpha_{1i}a_1,\dots,\alpha_{mi}a_m,\dots,\alpha_{ni}a_n) = \bar{A}(\bar{\alpha}_{1i}a_1,\dots,\bar{\alpha}_{mi}a_m,\dots,\bar{\alpha}_{ni}a_n),$$

a jednakosti iz druge klase u (3′) sledeće jednakosti:

$$(4_2) \qquad L^{-1}_{2j-1,j}A(\alpha_{1t}a_1,\dots,\alpha_{mt}a_m,\dots,\alpha_{nt}a_n) =$$

$$= \bar{L}^{-1}_{2j-1,j}\bar{A}(\bar{\alpha}_{1t}a_1,\dots,\bar{\alpha}_{mt}a_m,\dots,\bar{\alpha}_{nt}a_n),$$

$$m \in N_n,\ i = 2j-1, t = 2j, j \in N_n.$$

Prvo ćemo razmotriti (4_1). U tu svrhu posmatrajmo jednakost koja reprezentuje klasu (4_1):

$$(4_1') \qquad A(\beta_1 a_1,\dots,\beta_m a_m,\dots,\beta_m a_n) = \bar{A}(\bar{\beta}_1 a_1,\dots,\bar{\beta}_m a_m,\dots,\bar{\beta}_m a_m),\ m \in N_n.$$

Neka je e jedinica n-arne grupe Q(A). Tada, za

$\beta_1 a_1 = \dots = \beta_{m-1}a_{m-1} = \beta_{m+1}a_{m+1} = \dots \beta_n a_n = e$, iz ($4_1'$) nalazimo da je

$$(4_1'') \qquad \beta_m a_m = \bar{A}(e_1,\dots,e_{m-1},\bar{\beta}_m a_m, e_{m+1},\dots,e_n),$$

gde je

$$e_\lambda = \bar{\beta}_\lambda \beta_\lambda^{-1} e, \lambda \in N_n \setminus \{m\}.$$

Ako je $\bar{e}$ jedinica n-arne grupe $Q(\bar{A})$, onda iz ($4_1''$) sledi jednakost

$$\beta_m a_m = \bar{A}[\underbrace{\bar{e},\dots,\bar{e}}_{p},\bar{A}(e_1,\dots,e_{m-1},\bar{\beta}_m a_m,e_{m+1},\dots,e_n),\underbrace{\bar{e},\dots,\bar{e}}_{q}],$$

$$p+q = n-1; \quad p,q \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Otuda, birajući q tako da je q = m-1, obzirom da je $Q(\bar{A})$ n-arna polugrupa, nalazimo da je

$$\beta_m a_m = \bar{A}\left[\bar{e},\ldots,\bar{e},e_1,\ldots,e_{m-1},\bar{A}(\bar{\beta}_m a_m,e_{m+1},\ldots,e_n,\bar{e},\ldots,\bar{e})\right],$$

tj. $\beta_m \sim \bar{\beta}_m$ za svaki $m \in N_n$,

odnosno

(5₁) $\quad \alpha_{mi} \sim \bar{\alpha}_m$ za svaki $m,j \in N_n$, $i = 2j-1$.

Ostaje da se razmotri (4_2).

Prvo ćemo dokazati da je $L_{2j-1,j} \sim \bar{L}_{2j-1,j}$, gde je $L_{2j-1,1}$ j-ta translacija operacije A_{2j-1} pri izboru fiksnog $k \in Q$, a $\bar{L}_{2j-1,j}$ j-ta translacija iste operacije pri izboru $\bar{k} \in Q$. U tu svrhu uočimo jednakost

$(3_1')$ $$A_{2j-1}(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_n) = \bar{A}(\bar{\alpha}_{1i}a_1,\ldots,\bar{\alpha}_{ji}a_j,\ldots,\bar{\alpha}_{ni}a_n),$$

tj. prvu jednakost iz $(3')$, gde $Q(\bar{A})$ predstavlja n-grupu sa jedinicom, a $\bar{\alpha}_{ji}$, $j \in N_n$, $i = 2j-1$, permutacije skupa Q dobijene pri izboru $\bar{k} \in Q$.

Iz $(3_1')$ za $a_1 = \ldots = a_{j-1} = a_{j+1} = \ldots = a_n = k$ i $a_1 = \ldots = a_{j-1} = a_{j+1} = \ldots = a_n = \bar{k}$ redom nalazimo sledeće jednakosti:

$$L_{2j-1,j}x = \bar{A}(\bar{\alpha}_{1i}k,\ldots,\bar{\alpha}_{j-1,i}k,\bar{\alpha}_{ji}x,\bar{\alpha}_{j+1,i}k,\ldots,\bar{\alpha}_{ni}k) \quad \text{i}$$

$$\bar{L}_{2j-1,j}x = \bar{A}(\bar{\alpha}_{1i}\bar{k},\ldots,\bar{\alpha}_{j-1,i}\bar{k},\bar{\alpha}_{ji}x,\bar{\alpha}_{j+1,i}\bar{k},\ldots,\bar{\alpha}_{ni}\bar{k}).$$

Otuda se dokazuju sledeće ekvivalencije:

$$L_{2j-1,j} \sim \bar{\alpha}_{ji} \qquad \text{i} \qquad \bar{L}_{2j-1,j} \sim \bar{\alpha}_{ji},$$

što, na osnovu simetrije i tranzitivnosti ekvivalencije $\sim$, implicira

(5₂) $\quad L_{2j-1,j} \sim \bar{L}_{2j-1,j}$ za svaki $j \in N_n$

Pošto (5_2) znači da je

$$L_{2j-1,j}x = \bar{A}\left[p_1,\ldots,p_{n-1},\bar{A}(\bar{L}_{2j-1,j}x,p_{n+1},\ldots,p_{2n-1})\right],$$

nalazimo da važi sledeća jednakost:

$$(5_3)\qquad L_{2j-1,j}\overline{L}^{-1}_{2j-1,j}x = \overline{A}\left[p_1,\dots,p_{n-1},\overline{A}(x,p_{n+1},\dots,p_{2n-1})\right].$$

Ako uzmemo u obzir (5_3) i (4_2), nalazimo da je

$$(4_2')\qquad A(\alpha_{1t}a_1,\dots,\alpha_{mt}a_m,\dots,\alpha_{mt}a_n) =$$

$$= \overline{A}\left\{p_1,\dots,p_{n-1},\overline{A}\left[\overline{A}(\overline{\alpha}_{1t}a_1,\dots,\overline{\alpha}_{mt}a_m,\dots,\overline{\alpha}_{mt}a_n),p_{n+1},\dots,p_{2n-1}\right]\right\},$$

$$m \in N_n, t = 2j, j \in N_n.$$

U $(4_2')$ postavimo $\alpha_{1t}a_1 = \dots = \alpha_{m-1,t}a_{m-1} = \alpha_{m+1,t}a_{m+1} = \dots = \alpha_{nt}a_n = e$, gde je e jedinica n-arne grupe Q(A). Nalazimo:

$$(4_2'')\qquad \alpha_{mt}x = \overline{A}\left\{p_1,\dots,p_{n-1},\overline{A}\left[\overline{A}(e_1,\dots,e_{m-1},\overline{\alpha}_{mt}x,e_{m+1},\dots,e_n),\right.\right.$$

$$\left.\left.p_{n+1},\dots,p_{2n-1}\right]\right\}, \text{ gde je } e_\lambda = \overline{\alpha}_{\lambda t}\alpha^{-1}_{\lambda t}e, \ \lambda \in N_n \setminus \{m\}.$$

Iz $(4_2'')$, uzimajući u obzir prvo n-arnu asocijativnost n-grupe $Q(\overline{A})$, analogno razmatranju jednakosti $(4_1'')$, nalazimo da je

$$\alpha_{mt} \sim \overline{\alpha}_{mt} \quad \text{za svaki } m,\ j \in N_n,\quad t = 2j.$$

Teorema je time dokazana.

III DEO

ASOCIJATIVNI U CELOM SISTEMI TERNARNIH KVAZIGRUPA

3.1. U V O D

U [8] je V.D.Bjelousov opisao asocijativne u celom sisteme binarnih kvazigrupa (I deo, str. 11-15). U ovom delu to se uopštava na slučaj ternarnih kvazigrupa.

Sistem (algebru) svih ternarnih kvazigrupnih operacija obeležićemo sa $Q(\Omega)$. Često ćemo samo za Ω reći da je sistem svih ternarnih kvazigrupa.

D e f i n i c i j a 1. Za sistem ternarnih kvazigrupa Σ reći ćemo da je o s l a b l j e n 1-a s o c i j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično $\overline{1A}$-sistem, ako za s v a k i par $A_1, A_2 \in \Sigma$ postoji četvorka A_3, A_4, A_5, $A_6 \in \Omega$ tako da važe jednakosti (2) iz 2.1. .

Za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ reći ćemo da je o s l a b - l j e n i 2-a s o c i j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično $\overline{2A}$-sistem, ako za s v a k i par A_3, $A_4 \in \Sigma$ postoji četvorka A_1, A_2, A_5 i $A_6 \in \Omega$, tako da važe jednakosti (2) iz 2.1. .

Analogno, za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ kazaćemo da je 3-a s o c i j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično $\overline{3A}$-sistem, ako za svaki par A_5, $A_6 \in \Sigma$ postoji četvorka A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \Omega$, tako da važe jednakosti (2) iz 2.1. .

Zajedničkim imenom ove šiteme ćemo zvati o s l a b l j e n i i-a s o c i j a t i v n i u c e l o m sistemi ternarnih kvazigrupa, simbolično $\overline{iA}$-sistemi, $i \in N_3$.

D e f i n i c i j a 2. Za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ reći ćemo da je 1-a s o c i j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično 1A-sistem, ako za svaki par A_1, $A_2 \in \Sigma$ postoji četvorka A_3, A_4, A_5, $A_6 \in \Sigma$, tako da važe jednakosti (2) iz 2.1. .

Za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ kazaćemo da je 2-a s o c i - j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično 2A-sistem, ako za s v a k i par A_3, $A_4 \in \Sigma$ postoji četvorka A_1, A_2, A_5, $A_6 \in \Sigma$ tako da važe jednakosti (2) iz 2.1. .

Analogno, za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ reći ćemo da je 3-a s o c i j a t i v a n u c e l o m sistem ternarnih kvazigrupa, simbolično 3A-sistem, ako za svaki par A_5, $A_6 \in \Sigma$ postoji četvorka A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \Sigma$, tako da su ispunjene jednakosti (2) iz 2.1. .

Ove sisteme ćemo zajedničkim imenom zvati i-a s o c i j a t i v n i u c e l o m sistemi ternarnih kvazigrupa, simbolično iA-sistemi, $i \in N_3$.

D e f i n i c i j a 3. Za sistem ternarnih kvazigrupa $\Sigma \subseteq \Omega$ reći ćemo da je a s o c i j a t i v a n u c e l o m, simbolično A-sistem, ako je iA-sistem za svaki $i \in N_3$.

PRIMEDBA:

Po analogiji sa terminologijom koja se koristi u binarnom slučaju, 1A-sistem bismo zvali a s o c i j a t i v a n u c e l o m s l e v a, simbolično LA-sistem, a 3A-sistem a s o c i j a t i v a n u c e l o m s d e s n a, sibolično RA-sistem. Za 2A-sistem bismo pak, morali reći a s o c i j a t i v a n u c e l o m s i s t e m s a s r e d i n e.

Teorema 1. iz 2.1. je ovde uporišna.

3.2. OSNOVNE OSOBINE

Uzimajući u obzir Teoremu 1. iz II dela, nalazimo da važi sledeće tvrđenje.

T e o r e m a 1. Neka je $Q(\Sigma)$ $\overline{iA}$-, iA- ili A-sistem, $i \in N_3$. Tada

1° sve operacije iz Σ izotopne su jednoj te istoj ternarnoj grupi sa jedinicom $Q(A)$;

2° sve operacije iz Σ su međusobno izotopne; i

3° $A \in \Sigma$.

T e o r e m a 2. Neka je $Q(\Sigma)$ $\overline{iA}$-, iA- ili A-sistem, $i \in N_3$. Ako $L \in \Sigma$, gde je $Q(L)$ 3-lupa, onda je $Q(L)$ 3-grupa (sa jedinicom).

D O K A Z

Na osnovu Teoreme 1, prvo, nalazimo da je $Q(L)$ izotopna nekoj 3-grupi $Q(A)$ sa jedinicom. Otuda, na osnovu generalizovanog Albertovog stava (I deo, str. 9), izlazi da je $Q(L)$ izomorfna sa $Q(A)$ tj. da je $Q(L)$ 3-grupa (sa jedinicom).

Iz Teoreme 1. neposredno sledi i sledeći stav.

T e o r e m a 3. Ako ternarna kvazigrupa Q(M) nije izotopna ni jednoj 3-grupi definisanoj na Q, onda se ona ne može uključiti ni u jedan od sistema $\overline{iA}$-, iA- ili A-sistem, $i\in N_3$, definisanih na Q.

3.3. TERNARNI ANALOGON SCHAUFFLER-ove TEOREME

U [38] je R.Schauffler dokazao sledeću teoremu Q (Ω), gde je Ω skup svih binarnih kvazigrupnih operacija, je LA-sistem samo pri $n\leq 3$, gde je n moć skupa Q.(I deo,str. 12.)(Za ovu teoremu V.D.Bjelousov je u [8] našao prostiji dokaz).

Ovde se dokazuje ternarni analogon Schauffler-ove teoreme,tj. sledeći stav.

T e o r e m a 4. Q(Ω),gde je Ω skup svih ternarnih kvazigrupnih operacija,je A-sistem samo za $n\leq 3$,pri čemu je n moć skupa Q.

DOKAZ TERNARNOG ANALOGONA SCHAUFFLER-ove TEOREME

L e m a 1. Sistem svih ternarnih kvazigrupnih operacija Ω na skupu Q m o ž e b i t i iA-sistem samo pri $n\leq 3$, gde je n broj elemenata skupa Q.

D O K A Z

Dokaz ćemo osloniti na binarni analogon Leme 1.V.D.Bjelousov je u [8],naime,dokazao sledeći stav.Sistem svih binarnih kvazigrupnih operacija Ω na skupu Q m o ž e b i t i iA-sistem samo pri $n\leq 3$, pri čemu je n broj elemenata skupa Q. (I deo,str. 12.).Dokaz tog stava izveden je u sledeća dva koraka:

1. Pri $n>4$ na Q se može definisati (binarna) lupa koja nije grupa.Na osnovu binarnog analogona Teorema 2. (I deo,str. 12.) ta lupa se ne može uklopiti ni u jedan asocijativan u celom sistem kvazigrupa (u protivnom,ona bi bila grupa); i

2. Pri $n = 4$ postoje dve neizomorfne (binarne) grupe.Po Albertovom stavu (I deo,str. 9.),one nisu izotopne.Otuda,na osnovu binarnog analogona Teorema 1. (I deo,str. 12.),na Q postoje kvazigrupe koje su van eventualno postojećeg asocijativnog u celom sistema kvazigrupa.

Dokaz Leme 1. izvešćemo analogno, tj. razmatrajući sledeća dva slučaja: $n>4$ i $n = 4$.

1.' Da bismo dokazali da pri $n \geq 4$ $Q(\Omega)$ nije A-sistem, konstruisaćemo 3-lupu koja nije 3-grupa. Takva 3-lupa se, naime, ne može uklopiti ni u jedan iA-sistem, jer bi, na osnovu Teoreme 2, u protivnom bila 3-grupa. Pomenutu 3-lupu konstruisaćemo pomoću binarne lupe koja nije grupa.

Neka je, dakle, $Q(B)$ binarna lupa koja nije grupa. Zato postoji bar jedna trojka $a, b, c \in Q$ takva da je

$$\text{(a)} \qquad B[B(a,b),c] \neq B[a,B(b,c)] .$$

3-grupoid $Q(A)$, definisan sa

$$\text{(b)} \qquad A(x,y,z) = B[B(x,y),z] ,$$

je 3-lupa, pri čemu je jedinica e lupe $Q(B)$ ujedno jedinica 3-lupe $Q(A)$.

$Q(A)$ nije 3-grupa. Iz (b), naime, prvo nalazimo da je

$$A(x,y,e) = A(x,e,y) = B(x,y),$$

a otuda

$$\text{(c)} \qquad A[A(a,b,e),c,e] = B[B(a,b),c] \qquad \text{i}$$

$$\text{(d)} \qquad A[a,A(b,e,c),e] = B[a,B(b,c)] .$$

Iz (a), (c) i (d), konačno, nalazimo da je

$$A[A(a,b,e),c,e] \neq A[a,A(b,e,c),e] ;$$

što znači da 3-lupa $Q(A)$ nije 3-grupa. Dokazali smo, dakle, da pri $n > 4$ $Q(\Omega)$ ne može biti A-sistem.

2.' $Q(\Omega)$ nije A-sistem ni pri $n = 4$. Na osnovu Teoreme 1, naime, prvo nalazimo da se na Q od 4 elementa mogu konstruisati dve 3-grupe sa jedinicom $Q(A)$ i $Q(\bar{A})$, definisane na sledeći način:

$$\text{(a)} \qquad A(x,y,z) = B[B(x,y),z] \qquad \text{i}$$

$$\text{(b)} \qquad \bar{A}(x,y,z) = \bar{B}[\bar{B}(x,y),z] ,$$

pri čemu je recimo $Q(B)$ četvorna, a $Q(\bar{B})$ ciklična grupa. Kao što je poznato, $Q(B)$ i $Q(\bar{B})$ su neizomorfne, pa po Albertovom stavu i neizotopne.

Dokazaćemo da $Q(A)$ i $Q(\bar{A})$ nisu izomorfne. U tu svrhu pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\text{(c)} \qquad FA(x,y,z) = \bar{A}(Fx,Fy,Fz).$$

Iz (a), (b) i (c) nalazimo da je

$$FB[B(x,y),z] = \overline{B}[\overline{B}(Fx,Fy),Fz] . \tag{d}$$

Ako u (d) stavimo $z = k \in Q$, nalazimo da je

$$FR_1B(x,y,) = R_2\overline{B}(Fx,Fy);$$

što znači da su $Q(B)$ i $Q(\overline{B})$ izotopne. Kako to, na osnovu Albertovog stava, znači da su izomorfne, $Q(A)$ i $Q(\overline{A})$ nisu izomorfne. One nisu ni izotopne, jer bi u protivnom s obzirom da poseduju jedinice, na osnovu generalizovanog Albertovog stava, to značilo da su izomorfne. Otuda, na osnovu Teoreme 1; konačno nalazimo da pri $n = 4$ $Q(\Omega)$ ne može biti asocijativan u •elom sistem ternarnih kvazigrupa.

Lema 1. je time dokazana.

Uzimajući u obzir Lemu 1., nalazimo da će Teorema 4. biti dokazana, ako još dokažemo da $Q(\Omega)$ pri $n \leq 3$ jeste A-sistem. U tu svhu dokazujemo još nekoliko lema.

$\alpha \in Q!$ je a u t o t o p n a u odnosu na A, ako egzistiraju β, γ, δ Ω Q! tako da je $A(x,y,z) = \alpha A(\beta x, \gamma y, \delta z)$ (I deo, str. 8). U [8] je dokazano da su sve permutacije skupa Q autotopne u odnosu na cikličnu grupu (binarnu) $Q(B)$, ako je moć skupa Q manja ili jednaka 3.

Ternarni analogon ovog stava je sledeća lema.

L e m a 2. Neka je $Q(B)$ ciklična (binarna) grupa, a moć skupa Q manja ili jednaka 3. Ako je $Q(A)$ 3- grupa sa jedinicom, definisana na sledeći način

$$A(x,y,z) = B[B(x,y),z] ,$$

onda je svaka permutacija skupa Q autotopna u odnosu na A.

D O K A Z

Uzimajući u obzir da je svaka permutacija skupa Q autotopna u odnosu na $Q(B)$, ako je moć skupa Q manja ili jednaka 3, nalazimo da je

$$\alpha A(x,y,z) = \alpha B[B(x,y),z] = B[\beta B(x,y), \gamma z] = B[B(\varphi x, \psi y), \gamma z] =$$
$$A(\varphi x, \psi y, \gamma z);$$ čime je lema dokazana.

L e m a 3. Ako su $Q(A)$ i $Q(\overline{A})$ 3-grupe sa jedinicama, i ako su $Q(B)$ i $Q(\overline{B})$ izomorfne, pri čemu je

$$A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right] \quad \text{i}$$
$$\overline{A}(x,y,z) = \overline{B}\left[\overline{B}(x,y),z\right] ,$$

onda su $Q(A)$ i $Q(\overline{A})$ takođe izomorfne.

D O K A Z

Uzimajući u obzir $F\overline{B}(x,y) = B(Fx,Fy)$, nalazimo da je

$$F\overline{A}(x,y,z) = F\overline{B}\left[\overline{B}(x,y),z\right] = B\left[F\overline{B}(x,y),Fz\right] = B\left[B(Fx,Fy),Fz\right] =$$
$$= A(Fx,Fy,Fz);$$ čime je tvrđenje dokazano.

L e m a 4. Ako je n moć skupa Q i ako je $n \leqslant 3$, onda je na skupu Q jedina 3-lupa 3-grupa sa jedinicom.

D O K A Z

a) Za $n = 1$ tvrđenje je trivijalno.

b) Za $n = 2$ postoji 3-grupa sa jedinicom $Q(A)$, definisana sledećim Cayleyevim tablicama:

A_1	1	2
1	1	2
2	2	1

A_2	1	2
1	2	1
2	1	2

Tab. 1.

$Q(A)$ je definisana pomoću do izomorfizma jedine $Q(B)$, na sledeći način $A(x,y,z) = B\left[B(x,y,),z\right]$. Zato je $Q(A)$, na osnovu Teoreme 5. iz 2.3. i Leme 3, do izomorfizma jedina 3-grupa sa jedinicom.

3-Lupa koja nije 3-grupa može se dobiti jedino izmenom nešrafiranih polja u Tab. 1. To, međutim, dovodi do gubljenja kvazigrupnosti. Tvrđenje je, dakle, tačno.

c) Za $n = 3$ postoji 3-grupa sa jedinicom $Q(A)$, definisana sledećim Cayleyevim tablicama

A_1	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

A_2	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

A_3	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Tab. 2

$Q(A)$ je definisana pomoću do izomorfizma jedine binarne grupe $Q(B)$, na sledeći način $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$. Zato je $Q(A)$, na osnovu Teoreme 5. iz 2.3. i Leme 3, do izomorfizma jedina 3-grupa sa jedinicom.

Da bismo na Q od tri elementa konstruisali 3-lupu koja nije 3-grupa, možemo se poslužiti Tab. 2..Pri tom,od Tab. 2. moraju ostati neizmenjena sva šrafirana polja,jer ona kazuju da je elemenat $1 \in Q$ jedinični elemenat 3-lupe koju nameravamo konstruisati.Dalje,cela prva tabela mora ostati neizmenjana,jer svaka izmena na njoj dovodi do gubljenja (binarne) kvazigrupnosti.Druga i treća tabela će sačuvati (binarnu) kvazigrupnost samo pri zameni druge i treće kolone (vrste).Verifikacijom se,međutim,možemo uveriti da tada sistem od tako dobijene tri tablice ne ispunjava uslov ternarne kvazigrupnosti (I deo,str. 10.).Tvrđenje je time dokazano i za $n = 3$.

Uzimajući u obzir Lemu 4. i stav da je svaka n-arna kvazigrupa izotopna nekoj n-arnoj lupi (I deo,str. 9.),nalazimo da važi i sledeće tvrđenje.

L e m a 5. Svaka 3-kvazigrupa $Q(C)$ je pri $n \leqslant 3$ izotopna 3-grupi sa jedinicom; n je moć skupa Q.

Konačno,možemo privesti kraju dokaz Teoreme 4. Neka je $Q(\Omega)$ algebra svih ternarnih kvazigrupa, a moć skupa Q neka je manja ili jednaka 3.Neka su,dalje, A_1 i A_2 proizvoljne operacije iz Ω .Na osnovu Leme 5,nalazimo da je

$$A_1(x,y,z) = \alpha^{-1}A(\beta x, \gamma y, \delta z) \qquad \text{i}$$

$$A_2(x,y,z) = \alpha_1^{-1}A(\beta_1 x, \gamma_1 y, \delta_1 z),$$

pri čemu su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i δ_1 permutacije skupa Q, a $Q(A)$ je 3-grupa sa jedinicom.

Polazeći od Teoreme 5. iz 2.3, uzimajući pri tom u obzir Lemu 2, nalazimo sledeći niz jednakosti

$$A_1[A_2(x,y,z),u,v] = \alpha^{-1}A[\beta\,\alpha_1^{-1}A(\beta_1 x,\gamma_1 y,\delta_1 z),\gamma u,\delta v] =$$
$$= A[\varphi A(\beta_1 x,\gamma_1 y,\delta_1 z),\psi u,\vartheta v] =$$
$$= A[A(\varphi_1 x,\varphi_2 y,\varphi_3 z),\psi u,\vartheta v] =$$
$$= A[\varphi_1 x,A(\varphi_2 y,\varphi_3 z,\psi u),\vartheta v] =$$
$$= A[\varphi_1 x,\varphi_2 y,A(\varphi_3 z,\psi u,\vartheta v)] .$$

Konačno,uvođenjem oznaka

$$A_3(x,y,z) = A(\varphi_1 x,y,\vartheta z)$$
$$A_4(x,y,z) = A(\varphi_2 x,\varphi_3 y,\psi z)$$
$$A_5(x,y,z) = A(\varphi_1 x,\varphi_2 y,z)$$
$$A_6(x,y,z) = A(\varphi_3 x,\psi y,\vartheta z),$$

nalazimo da $Q(\Omega)$ pri $n \leqslant 3$ jeste 1A-sistem.Sličnim razmišljanjem (iz poslednje faze dokaza), nalazimo da je pri $n\leqslant 3$ $Q(\Omega)$ i 2A-sistem i 3A-sistem,tj. A-sistem. Teorema 4. je time dokazana.

3.4. KONSTRUKCIJE ASOCIJATIVNIH U CELOM SISTEMA TERNARNIH KVAZIGRUPA

U ovom odeljku utvrđuju se neke osobine asocijativnih u celom sistema ternarnih kvazigrupa koje omogućuju izgradnju ovih sistema i utvrđuju neke njihove međusobne odnose.

U binarnom slučaju za te svrhe pokazao se korisnim pojam kvaziautomorfizma grupe. V.D.Bjelousov je u [8] ,kao što je poznato iz I dela (str. 12.),uveo pojam kvaziautomorfizma grupe na sledeći način.Permutacija α skupa Q je kvaziautomorfizam grupe Q(.), ako je za svaki $x,y \in Q$ $\alpha(x.y) = \alpha x.(\alpha e)^{-1}.\alpha y$, pri čemu je jedinica grupe Q(.).Sa istim ciljem,uvodimo ternarni analogom kvaziautomorfizma grupe,odnosno kvaziautomorfizam ternarne grupe sa jedinicom, i utvrđujemo neke njegove osobine.

3.4.1 Kvaziautomorfizam ternarne grupe sa jedinicom

D e f i n i c i j a 1. Za permutaciju α skupa Q reći ćemo da je kvaziautomorfizam ternarne grupe sa jedinicom Q(A), ako je za svaku trojku $x,y,z \in Q$ ispunjena jednakost.

$$(1) \qquad \alpha A(x,y,z) = A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},A(\alpha y,(\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] ,$$

pri čemu je e jedinica 3-grupe Q(A), a $(\alpha e)^{-1}$ je inverzni elemenat elementa αe u binarnoj grupi Q(B), gde je $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$.

L e m a 1. Automorfizam ternarne grupe sa jedinicom je specijalan slučaj kvaziautomorfizma ternarne grupe sa jedinicom.

D O K A Z

Zaista, ako je $\alpha e = e$, onda je $(\alpha e)^{-1} = e$, pa važi sledeći niz jednakosti

$$\alpha A(x,y,z) = A\left[\alpha x,e,A(\alpha y,e,\alpha z)\right] = A\left[\alpha x A(e,\alpha y,e),\alpha z\right] = A(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$

čime je lema dokazana.

PRIMEDBA:

Analogno tvrđenje važi i o kvaziautomorfizmima binarnih grupa; I deo, str. 12., osobina 1°

L e m a 2. Ako je α kvaziautomorfizam ternarne grupe Q(A) sa jedinicom, onda je α kvaziautomorfizam i grupe Q(B), pri čemu je $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$; i obrnuto.

D O K A Z

1. Neka je α kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A), tj. neka je

$$(1) \qquad \alpha A(x,y,z) = A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},A(\alpha y,(\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] .$$

Uzimajući u obzir a) činjenicu da u svakoj ternarnoj grupi Q(A) sa jedinicom e pripada binarna grupa Q(B) sa istom jedinicom e, tako da je $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$ (Teorema 5. iz 2.3.); b) činjenicu da je $(\alpha e)^{-1}$ inverzni elemenat elementa αe u Q(B) za $z = e$ iz (1), nalazimo da je

$$\alpha B(x,y) = \alpha A(x,y,z) = A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},B\left[\alpha y,B((\alpha e)^{-1},\alpha e)\right]\right] =$$

$$= A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},B(\alpha y,e)\right] = A(\alpha x,(\alpha e)^{-1},\alpha y) = ,$$

$$= B\left[\alpha x,B((\alpha e)^{-1},\alpha y)\right] ; =$$

čime je lema u jednom smeru dokazana,

2. Neka je sada α kvaziautomorfizam grupe Q(B), tj. neka je

$$(2) \qquad \alpha B(x,y) = B\left[\alpha x,B((\alpha e)^{-1},\alpha y)\right] .$$

Neka je,dalje, Q(A) definisana pomoću Q(B) na sledeći način

$$(3) \qquad A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right] .$$

Uzimajući u obzir (2) i (3), nalazimo sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}\alpha A(x,y,z) &= \alpha B\left[B(x,y),z\right] = \\ &= B\left[\alpha B(x,y),B((\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] = \\ &= B\left[B\left[\alpha x,B((\alpha e)^{-1},\alpha y)\right],B((\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] = \\ &= B\left[A(\alpha x,(\alpha e)^{-1},\alpha y),B((\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] = \\ &= A\left[A(\alpha x,(\alpha e)^{-1},\alpha y),(\alpha e)^{-1},\alpha z\right] = \\ &= A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},A(\alpha y,(\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] ;\end{aligned}$$

čime je lema u potpunosti dokazana.

Uzimajući u obzir Lemu 2., osobine kvaziautomorfizama 1° - 6° binarnih grupa (I deo,str.12-13.) i niz jednakosti

$$B(x,y) = B\left[B(x,y),e\right] = A(x,y,e),$$

pri čemu je e jedinica grupe Q(B),nalazimo da važe sledeća tvrđenja.

L e m a 3. Neka je α_o automorfizam 3-grupe Q(A) sa jedinicom e. Tada je permutacija α, definisana sa

$$(4_1) \qquad \alpha x = A(\alpha_o x,t,e),$$

odnosno sa

$$(4_2) \qquad \alpha x = A(t,\alpha_o x,e),$$

gde je t neki fiksirani elemenat iz Q, kvaziautomorfizam ternarne grupe Q(A) sa jedinicom e.

L e m a 4. Ako je α kvaziautomorfizam ternarne grupe $Q(A)$ sa jedinicom e, onda se on može izraziti na sledeća dva načina

$$(4_1') \qquad \alpha x = A(\alpha_0 x, k, e) \qquad \text{i}$$

$$(4_2') \qquad \alpha x = A(t, \beta_0 x, e),$$

pri čemu su α_0 i β_0 automorfizmi 3-grupe $Q(A)$, a k i t su fiksirani elementi iz Q.

L e m a 5. Ako je α kvaziautomorfizam ternarne grupe $Q(A)$ sa jedinicom e, onda su

$$\alpha_1 x = A(\alpha x, k, e) \quad \text{i} \quad \alpha_2 x = A(k, \alpha x, e)$$

takođe kvaziautomorfizmi 3-grupe $Q(A)$, pri čemu je k fiksirani elemenat skupa Q.

L e m a 6. Ako je α kvaziatomorfizam 3-grupe $Q(A)$ sa jedinicom e, onda su

$$\alpha_1 x = A(\alpha x, (\alpha e)^{-1}, e) \qquad \text{i}$$

$$\alpha_2 x = A((\alpha e)^{-1}, \alpha x, e)$$

automorfizmi 3-grupe $Q(A)$ sa jedinicom e, pri čemu je $(\alpha e)^{-1}$ inverzan elemenat elementa αe u grupu $Q(B)$, kojom je definisana $Q(A)$ na sledeći način $A(x,y,z) = B[B(x,y),z]$.

L e m a 7. Skup svih kvaziautomorfizama ternarne grupe $Q(A)$ sa jedinicom ima strukturu grupe u odnosu na komponovanje permutacija.

Sledeća tri tvrđenja o kvaziautomorfizmima ternarnih grupa sa jedinicom dokazaćemo neposredno.

L e m a 8. Proizvoljna autotopna permutacija α ternarne grupe sa jedinicom $Q(A)$ je kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(A)$.

D O K A Z

Neka je α autotopna permutacija ternarne grupe $Q(A)$ sa jedinicom e. Tada egzistiraju $\beta, \gamma, \delta \in Q!$, tako da je

$$(5) \qquad \alpha A(x,y,z) = A(\beta x, \gamma y, \delta z)$$

U (5) redom postavimo: $x = y = e$, $x = z = e$, $y = z = e$ i $x = y = z = e$. Nalazimo :

$$(6_1) \qquad \alpha z = A(\beta e, \gamma e, \delta z)$$

$$(6_2) \qquad \alpha y = A(\beta e, \gamma y, \delta e)$$

$$(6_3) \qquad \alpha x = A(\beta x, \gamma e, \delta e)$$

$$(6_4) \qquad \alpha e = A(\beta e, \gamma e, \delta e)$$

Uzimajući u obzir da je

$$(7) \qquad A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right] ,$$

gde je $Q(B)$ binarna grupa, (6_1) - (6_3) možemo transformisati u sledeće jednakosti:

$$(8_1) \qquad \delta z = A((\gamma e)^{-1},(\beta e)^{-1},\alpha z)$$

$$(8_2) \qquad \gamma y = A((\beta e)^{-1},\alpha y,(\delta e)^{-1}) \qquad \text{i}$$

$$(8_3) \qquad \beta x = A(\alpha x,(\delta e)^{-1},(\gamma e)^{-1}),$$

pri čemu su $(\beta e)^{-1}, (\gamma e)^{-1}$ i $(\delta e)^{-1}$ inverzni elelenti redom elemenata βe, γe i δe u binarnoj grupi $Q(B)$.

Smenimo li (8_1) - (8_3) u (5), nalazimo da je

$$A(x,y,z) = A\left\{A(\alpha x,(\delta e)^{-1},(\gamma e)^{-1}),A((\beta e)^{-1},\alpha y,(\gamma e)^{-1}), ,A((\delta e)^{-1},(\beta e)^{-1},\alpha z)\right\} ,$$

odnosno

$$\alpha A(x,y,z) = A\left\{\alpha x, A\left[(\delta e)^{-1},(\gamma e)^{-1},A((\beta e)^{-1},\alpha y,(\delta e)^{-1})\right], ,A((\gamma e)^{-1},(\beta e)^{-1},\alpha z)\right\} .$$

Otuda, uzimajući u obzir (7) i (6_4), nalazimo sledeću jednakost:

$$\alpha A(x,y,z) = A\left\{\alpha x,A((\alpha e)^{-1},\alpha y,(\delta e)^{-1}),A((\gamma e)^{-1},(\beta e)^{-1},\alpha z)\right\} ,$$

odnosno, još jednom uzimajući u obzir (7) i (6_4), nalazimo da je

$$\alpha A(x,y,z) = A\left[\alpha x,(\alpha e)^{-1},A(\alpha y,(\alpha e)^{-1},\alpha z)\right] ;$$

čime je tvrđenje dokazano.

L e m a 9. Permutacije β, γ i δ iz (5) takođe su kvaziautomorfizmi ternarne grupe Q(A) sa jedinicom e.

D O K A Z

Uzimajući u obzir (7) i (8_3), nalazimo da je

$$\beta x = B\left[\alpha x, B((\delta e)^{-1},(\gamma e)^{-1})\right] = B(\alpha x, k) = B\left[B(\alpha x, k), e\right] =$$
$$= A(\alpha x, k, e);$$

čime je na osnovu Leme 5.,tvrđenje za β dokazano.

Analogno se može dokazati tvrđenje za δ.

Tvrđenje za γ možemo dokazati na sledeći način.

Iz (8_2), uzimajući u obzir (7), nalazimo da je

$$\gamma y = B\left[(\beta e)^{-1}, B(\alpha y, (\delta e)^{-1})\right],$$

odnosno

$$B((\beta e), \gamma y) = B(\alpha y, (\delta e)^{-1}),$$

što se,zbog (7), svodi na

$$A((\beta e), \gamma y, e) = A(\alpha y, (\delta e)^{-1}, e). \tag{9}$$

Na osnovu Leme 6,desna strana u (9) je neki kvaziautomorfizam ternarne grupe Q(A).Obeležimo ga sa φ.Iz (9), sada, uzimajući u obzir (7), nalazimo da važe sledeće jednakosti:

$$\varphi y = A((\beta e), \gamma y, e) = B(k, \gamma y),$$

odnosno da je

$$\gamma y = B(t, \varphi y) = A(t, \varphi y, e),$$

pri čemu je $t = k^{-1} = \beta e$.

Otuda na osnovu Leme 5, pošto je φ kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A), nalazimo da je i γ kvaziautomorfizam ternarne grupe Q(A); čime je lema u potpunosti dokazana.

L e m a 10. Neka su α, β, $\gamma_1 - \gamma_7$ i $\delta_1 - \delta_6$ permutacije skupa Q.Neka je, dalje, na ternarnoj grupi Q(A) sa jedinicom e ispunjen niz jednakosti:

(10) $$\alpha A[\beta A(x,y,z),u,v] =$$
$$= \gamma_1 A[\gamma_2 x, \gamma_3 A(\gamma_4 y, \gamma_5 z, \gamma_6 u), \gamma_7 v] =$$
$$A[\delta_1 x, \delta_2 y, \delta_3 A(\delta_4 z, \delta_5 u, \delta_6 v)] .$$

Tada su $\alpha, \beta, \gamma_1 - \gamma_7$ i $\delta_1 - \delta_6$ kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A).

D O K A Z

(10) Možemo posmatrati kao sledeće jednakosti:

(10_1) $\alpha A[\beta A(x,y,z),u,v] = \gamma_1 A[\gamma_2 x, \gamma_3 A(\gamma_4 y, \gamma_5 z, \gamma_6 u), \gamma_7 v]$

(10_2) $\alpha A[\beta A(x,y,z),u,v] = A[\delta_1 x, \delta_2 y, \delta_3 A(\delta_4 z, \delta_5 u, \delta_6 v)]$ i

(10_3) $\gamma_1 A[\gamma_2 x, \gamma_3 A(\gamma_4 y, \gamma_5 z, \gamma_6 u), \gamma_7 v] =$
$$= A[\delta_1 x, \delta_2 y, \delta_3 A(\delta_4 z, \delta_5 y, \delta_6 v)] .$$

Ako u (10_2) postavimo $u = v = e$, nalazimo jednakost

(11) $$\alpha\beta A(x,y,z) = A(\delta_1 x, \delta_2 y, \vartheta z),$$

gde je

(11′) $$\vartheta z = \delta_3 A(\delta_4 z, \delta_5 e, \delta_6 e) = \delta_3 R \delta_4 z,$$

pri čemu je R translacija 3-grupe Q(A).

Iz (11), na osnovu lema 8. i 9, nalazimo da su

$$\alpha\beta, \delta_1, \delta_2 \text{ i } \vartheta$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A).

Ako sada u (10_2) postavimo $x = y = e$, nalazimo da je

$$\alpha\beta A(x,y,z) = L\delta_3 A(\delta_4 x, \delta_5 y, \delta_6 z),$$

odnosno

(12) $$\delta_3^{-1} L^{-1} \alpha\beta A(x,y,z) = A(\delta_4 x, \delta_5 y, \delta_6 z),$$

gde je $Lx = A(\delta_1 e, \delta_2 e, x)$ leva translacija 3-grupe Q(A).

Iz (12), na osnovu lema 8. i 9, nalazimo da su

$$\delta_3^{-1}L^{-1}\alpha/\beta,\ \delta_4,\ \delta_5 \quad \text{i} \quad \delta_6$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A).

Lako je uočiti da su translacije L i R 3-grupe Q(A) njene autotopne permutacije, pa, dakle, na osnovu leme 8, njeni kvaziautomorfizmi. Zato, iz (11′) i činjenice da je δ_4 kvaziautomorfizam, na osnovu leme 7, nalazimo da je i δ_3 kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A). Utvrdili smo, dakle, da su

$$\alpha/\beta,\ \delta_1,\ \delta_2\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta_5 \quad \text{i} \quad \delta_6$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A).

Ako u (10_2) smenimo x i y sa e, a z sa $\beta^{-1}z$, nalazimo da je

$$\alpha A(x,y,z) = L\delta_3 A(\delta_4\beta^{-1}x, \delta_5 y, \delta_6 z),$$

odnosno

$$(13) \qquad \delta_3^{-1}L^{-1}\alpha A(x,y,z) = A(\delta_4\beta^{-1}x, \delta_5 y, \delta_6 z).$$

Iz (13), na osnovu leme 8, nalazimo da je

$$\delta_3^{-1}L^{-1}\alpha$$

kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Kako su δ_3 i L kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A), na osnovu leme 7, otuda nalazimo da je α kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Pošto je α/β kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A), otuda, na osnovu leme 7, nalazimo da je β kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Tvrđenje, dakle, treba dokazati još za $\gamma_1 - \gamma_7$.

(10_3) možemo transformisati u sledeću jednakost

$$(10_3') \qquad \gamma_1 A\left[x, \gamma_3 A(y,z,u), v\right] =$$

$$= A\left[\delta_1\gamma_2^{-1}x, \delta_2\gamma_4^{-1}y, \delta_3 A(\delta_4\gamma_5^{-1}z, \delta_5\gamma_6^{-1}u, \delta_6\gamma_7^{-1}v)\right].$$

U $(10_3')$ postavimo z = u = e. Nalazimo:

$$\gamma_1 A(x, \gamma_3 y, z) = A(\delta_1\gamma_2^{-1}x, \delta_2\gamma_4^{-1}y, \delta_3 L\delta_6\gamma_7^{-1}z),$$

odnosno

$$(10_3'') \qquad \gamma_1 A(x,y,z) = A(\delta_1 \gamma_2^{-1}x, \delta_2 \gamma_4^{-1}\gamma_3^{-1}y, \delta_3 L \delta_6 \gamma_7^{-1} z).$$

Iz $(10_3'')$, na osnovu lema 8. i 9, nalazimo da su

$$\gamma_1, \delta_1\gamma_2^{-1}, \quad \delta_2\gamma_4^{-1}\gamma_3^{-1} \quad \text{i} \quad \delta_3 L \delta_6 \gamma_7^{-1}$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A). Otuda, na osnovu leme 7, nalazimo da su

$$\gamma_1, \quad \gamma_2 \quad \text{i} \quad \gamma_7$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A),

Ako u (10_1) postavimo $\gamma_7 v = \gamma_5 z = e$ i uzmemo u obzir (7), nalazimo sledeću jednakost

$$\alpha B[\beta B(x,Ry),Rz] = \gamma_1 B[\gamma_2 x, \gamma_3 B(\gamma_4 y, \gamma_6 z)],$$

odnosno

$$\alpha B[\beta B(x,y),z] = \gamma_1 B[\gamma_2 x, \gamma_3 B(\gamma_4 R^{-1}y, \gamma_6 R^{-1}z)].$$

Otuda,na osnovu osobine 9^o. kvaziautomorfizma binarnih grupa (I deo, str. 13.) Lema 2, nalazimo da su

$$\gamma_3, \quad \gamma_4, \quad \text{i} \quad \gamma_6$$

kvaziautomorfizmi 3-grupe Q(A).

Tvrđenje treba dokazati još za γ_5.

U (10_1) postavimo $\gamma_4 y = \gamma_7 v = e$. Nalazimo:

$$\alpha B[\beta B(x,Ly),Rz] = \gamma_1 B[\gamma_2 x, \gamma_3 B(\gamma_5 y, \gamma_6 z)],$$

odnosno

$$\alpha B[\beta B(x,y),z] = \gamma_1 B[\gamma_2 x, \gamma_3 B(\gamma_5 L^{-1}y, \gamma_6 R^{-1}z)].$$

Otuda,konačno,na osnovu osobine 9^o. kvaziautomorfizma binarnih grupa (I deo, str. 13.) nalazimo da je $\gamma_5 L^{-1}$ kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

S obzirom da je $Lx = B(k,x) = A(e,k,x)$, na osnovu leme 7, otuda nalazimo da je i γ_5 kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A); čime je tvrđenje dokazano.

3.4.2. KONSTRUKCIJE $\overline{iA}$ SISTEMA

T e o r e m a 5. Neka je na Q zadan $\overline{iA}$- sistem Σ, $i \in N_3$. Tada se može definisati 3-grupa $Q(\overline{A})$ sa jedinicom tako da proizvoljna operacija $C \in \Sigma$ ima oblik

$$C(x,y,z) = \overline{A}(\omega_1 x, \omega_2 y, \omega_3 z), \tag{a}$$

gde su pri $i = 1$ ω_2 i ω_3 neke permutacije skupa Q a ω_1 je automorfizam 3-grupe Q(A), pri $i = 2$ ω_1 i ω_3 neke permutacije a ω_2 je automorfizam, i pri $i = 3$ ω_1 i ω_2 neke permutacije a ω_3 je automorfizam 3-grupe Q(A).

D O K A Z

Dokaz navodimo samo za $i = 1$, tj. samo za $\overline{1A}$-sisteme, jer su dokazi za $\overline{2A}$- i $\overline{3A}$-sisteme analogni.

Neka je $Q(\Sigma)$ $\overline{1A}$-sistem. Neka, dalje, 3-kvazigrupe $Q(A_i)$, $i \in N_6$, od kojih su A_1 i A_2 obavezno iz Σ, zadovoljavaju opštu ternarnu asocijativnost

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(y,z,u),v\right] = \tag{1}$$
$$= A_5\left[x,y,A_6(z,u,v)\right] .$$

Tada, na osnovu Teoreme 1. iz 2.1.1., egzistira ternarna grupa Q(A) sa jedinicom takva da je izotopna sa svakom od $Q(A_i)$, $i \in N_6$. Dakle:

$$\left\{\begin{array}{l} A_1(x,y,z) = \alpha^{-1}A(\beta x, \gamma y, \delta z) \\ A_2(x,y,z) = \varphi^{-1}A(\psi x, \vartheta y, \zeta z) \\ \text{-------------------------------} \\ A_6(x,y,z) = \varphi_2^{-1}A(\psi_2 x, \vartheta_2 y, \zeta_2 z), \end{array}\right. \tag{2}$$

gde je Q(A) ternarna grupa sa jedinicom.

Smenimo li (2) u (1), nalazimo da je

$$\alpha A[\beta\varphi^{-1}A(\psi x, \vartheta y, \zeta z), \gamma u, \delta v] = \dots = \dots . \tag{3}$$

Uvođenjem smena $\varphi x \longrightarrow x$, $\vartheta y \longrightarrow y$, $\eta z \longrightarrow z$, $\gamma \longrightarrow u$, $\delta v \longrightarrow v$, (3) prelazi u sledeći niz jednakosti

$$(4) \qquad \alpha A[\beta\varphi^{-1}A(x,y,z),u,v] = \dots = \dots \quad .$$

Iz (4) na osnovu Leme 10, nalazimo da je

$$(5) \qquad \beta\varphi^{-1} = \xi$$

kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Ako u Σ odaberemo A_1 i A_2 tako da je $A_1 = A_2$, tj. $\beta = \psi$, itd., nalazimo da je i

$$(6) \qquad \psi\varphi^{-1} = \xi_1$$

takođe kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Neka je sada A_1 fiksirana, a A_2 proizvoljna operacija iz Σ. Tada je β fiksirana permutacija. Izrazimo sada φ i ψ pomoću β, ξ i ξ_1:

$$(7) \qquad \varphi = \xi^{-1}\beta \quad \text{i} \quad \psi = \xi_1\xi^{-1}\beta \, .$$

Iz (2) i (7) nalazimo da proizvoljna operacija ($C = A_2$) iz Σ ima sledeći oblik:

$$C(x,y,z) = \beta^{-1}\xi A(\xi_1\xi^{-1}\beta x, \vartheta y, \eta z),$$

odnosno

$$C(x,y,z) = \beta^{-1}A[\xi\xi_1\beta x, (\xi e)^{-1}, A(\xi\vartheta y, (\xi e)^{-1}, \xi\eta z)] \; ,$$

jer je ξ kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

Otuda, uzimajući u obzir

$(\xi e)^{-1} = A(e,e,(\xi e)^{-1}) = A[(\xi\xi_1\xi^{-1}e)^{-1}, e, A(\xi\xi_1\xi^{-1}e,e,(\xi e)^{-1})]$, uz pomoć nešto računa, nalazimo da je

$$(8) \qquad C(x,y,z) = \beta^{-1}A[A(\xi\xi_1\xi^{-1}\beta x, (\xi\xi_1\xi^{-1}e)^{-1}, e, A(\xi\xi_1\xi^{-1}e, (\xi e)^{-1}, \xi\vartheta y), A(e, (\xi e)^{-1}, \xi\eta z)] \; ,$$

pri čemu su $(\xi\xi_1\xi^{-1}e)^{-1}$ i $(\xi e)^{-1}$ inverzni elementi redom elemenata $\xi\xi_1\xi^{-1}e$ i ξe u binarnoj grupi $Q(B)$, gde je

$$A(x,y,z) = B[B(x,y),z].$$

Uvođenjem oznaka

$$(9)\qquad \begin{cases} \lambda x = A(\xi\xi_1\xi^{-1}x,(\xi\xi_1\xi^{-1}e)^{-1},e) \\ \mu y = A(\xi\xi_1\xi^{-1}e,(\xi e)^{-1},\xi\vartheta y) \\ \delta z = A(e,(\xi e)^{-1},\xi\eta z), \end{cases} \qquad \text{i}$$

(8) postaje

$$(10)\qquad C(x,y,z) = \beta^{-1}A(\lambda\beta x,\mu y,\delta z).$$

Iz (9) na osnovu Leme 6. i Leme 7, nalazimo da je λ automorfizam 3-grupe $Q(A)$.

Novu operaciju $\overline{A}$ uvedimo na sledeći način:

$$(11)\qquad \overline{A}(x,y,z) = \beta^{-1}A(\beta x,\beta y,\beta z),$$

gde je β fiksirana permutacija iz(2)

$Q(\overline{A})$ je izomorfna sa $Q(A)$. Zato je $Q(\overline{A})$ 3-grupa sa jedinicom.

Iz (10) i (11) nalazimo da je

$$C(x,y,z) = \overline{A}(\beta^{-1}\lambda\beta x,\beta^{-1}\mu y,\beta^{-1}\delta z),$$

odnosno

$$(12)\qquad C(x,y,z) = \overline{A}(\omega_1 x,\omega_2 y,\omega_3 z),$$

pri čemu je

$$(13)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \beta^{-1}\lambda\beta, \\ \omega_2 = \beta^{-1}\mu \\ \omega_3 = \beta^{-1}\delta. \end{cases} \qquad \text{i}$$

ω_1 je automorfizam 3-grupe $Q(\overline{A})$. Zaista:

$$\omega_1\bar{A}(x,y,z) = \beta^{-1}\lambda\beta\bar{A}(x,y,z) = \beta^{-1}\lambda\beta\,\beta^{-1}A(\beta x,\beta y,\beta z) =$$

$$= \beta^{-1}\lambda\, A(\beta x,\beta y,\beta z) = \beta^{-1}A(\lambda\beta x,\lambda\beta y,\lambda\beta z) =$$

$$= \beta^{-1}A(\beta\omega_1 x,\beta\omega_1 y,\beta\omega_1 z) =$$

$$= \bar{A}(\omega_1 x,\omega_1 y,\omega_1 z).$$

Konačno, uzimajući u obzir (9) i (13) te činjenicu da je ω_1 automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, nalazimo da je tvrđenje za $\overline{1A}$-sisteme dokazano.

Verifikacijom se može utvrditi da važi i sledeći stav.

T e o r e m a 6. Neka je $Q(\bar{A})$ ternarna grupa sa jedinicom. Neka, dalje,

1. Σ_1 obrazuju operacije

$$C(x,y,z) = \bar{A}(\omega_1 x,\omega_y,\omega_3 z),$$

gde je ω_1 automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, a ω_2 i ω_3 su proizvoljne permutacije skupa Q;

2. Σ_2 obrazuju operacije C, gde je ω_2 automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, a ω_1 i ω_3 su proizvoljne permutacije skupa Q; i

3. Σ_3 obrazuju operacije C, gde je ω_3 uatomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, a ω_1 i ω_3 su proizvoljne permutacije skupa Q.

Tada je $Q(\Sigma_1)$ $\overline{1A}$-sistem, $Q(\Sigma_2)$ $\overline{2A}$-sistem i $Q(\Sigma_3)$ $\overline{3A}$-sistem.

Teoreme 5. i 6, omogućuju konstrukcije $\overline{iA}$-sistema.

3.4.3. KONSTRUKCIJE iA - SISTEMA

T e o r e m a 7. Neka je na Q zadan iA-sistem Σ, $i \in N_3$. Tada se može definisati 3-grupa $Q(\bar{A})$ sa jedinicom tako da proizvoljna operacija u Σ ima sledeći oblik:

(a_1) $$C(x,y,z) = \bar{A}(\alpha x, T\beta y, T'\gamma z),$$

ako je Σ 1A-sistem;

(a_2) $$C(x,y,z) = \bar{A}(T\alpha x, \beta y, T'\gamma z),$$

ako je Σ 2A-sistem; i

(a_3) $$C(x,y,z) = \bar{A}(T\alpha x, T'\beta y, \gamma z),$$

ako je Σ 3A-sistem;

pri čemu su α, β i γ automorfizmi 3-grupe $Q(\bar{A})$, a T i T' su translacije 3-grupe $Q(\bar{A})$ oblika $\bar{A}(e,k,x)$ ili $\bar{A}(x,k,e)$, gde je e jedinica 3-grupe $Q(\bar{A})$, a k je neki elemenat iz Q.

D O K A Z

Dokaz tvrđenja navodimo samo za 1A-sisteme, jer se za 2A- i 3A-sisteme tvrđenje dokazuje analogno.

1A-sistem je i $\overline{1A}$-sistem. Zato na Q egzistira 3-grupe $Q(\bar{A})$ takva da sve operacije $C_i \in \Sigma$ imaju sledeći oblik (Teorema 5.)

(1) $$C_i(x,y,z) = \bar{A}(\alpha_i x, \beta_i y, \gamma_i z),$$

pri čemu je α_i automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, a β_i i γ_i su neke permutacije skupa Q.

Neka je $C_i \in \Sigma$, $i \in N_6$, jedna šestorka koja pri izboru C_1 i C_2 zadovoljava opštu ternarnu asocijativnost.

(2) $$C_1[C_2(x,y,z),u,v] = C_3[x,C_4(y,z,u),v] = C_5[x,y,C_6(z,u,v)].$$

Kao u dokazu Teoreme 5, neka je C_1 fiksirana, a C_2 proizvoljna operacija iz Σ.

Smenimo li (1) u (2), nalazimo da je

(3) $$\bar{A}[\alpha_1\bar{A}(\alpha_2 x,\beta_2 y,\gamma_2 z),\beta_1 u,\gamma_1 v] =$$
$$= \bar{A}[\alpha_3 x,\beta_3\bar{A}(\alpha_4 y,\beta_4 z,\gamma_4 u),\gamma_3 v] =$$
$$= \bar{A}[\alpha_5 x,\beta_5 y,\gamma_5\bar{A}(\alpha_6 z,\beta_6 u,\gamma_6 v)].$$

U (3) postavimo $x = \beta_2 y = e$, gde je e jedinica 3-grupe $Q(\bar{A})$. Nalazimo sledeću jednakost:

$$L\gamma_5\bar{A}(\alpha_6 x,\beta_6 y,\gamma_6 z) = \bar{A}(\alpha_1\gamma_2 x,\beta_1 y,\gamma_1 z),$$

odnosno sledeću

$$(3_1)\qquad L\gamma_5\bar{A}(x,y,z) = \bar{A}(\alpha_1\gamma_2\alpha_6^{-1}x,\beta_1\beta_6^{-1}y,\gamma_1\gamma_6^{-1}z),$$

pri čemu je L translacija 3-grupe $Q(\bar{A})$.

Iz (3_1), na osnovu Leme 9, nalazimo da je

$$\alpha_1\gamma_2\alpha_6^{-1} = \rho$$

kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$. Otuda, uzimajući u obzir Lemu 1. i Lemu 7, s obzirom da su α_1 i α_6 automorfizmi 3-grupe $Q(\bar{A})$, nalazimo da je γ_2 kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$. Zato, na osnovu Leme 3, γ_2 možemo predstaviti kao sledeći kompozitum

$$\gamma_2 = T\gamma,$$

gde je T translacija 3-grupe $Q(\bar{A})$ oblika $\bar{A}(e,t,x)$ ili $\bar{A}(x,t,e)$, a γ je automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$. (Automorfizam γ menja se u zavisnosti od izbora oblika translacije $\bar{A}(x,t,e)$ ili $\bar{A}(e,t,x)$).

Iz (3) možemo izdvojiti sledeću jednakost:

$$(3_2)\qquad \bar{A}\left[\alpha_1\bar{A}(x,y,z),u,v\right] =$$

$$= \bar{A}\left[\alpha_3\alpha_2^{-1}x,\beta_3\bar{A}(\alpha_4\beta_2^{-1}y,\beta_4\gamma_2^{-1}z,\gamma_4\beta_1^{-1}u),\gamma_3\gamma_1^{-1}v\right].$$

U (3_2) postavimo $x = v = e$, gde je e jedinica 3-grupe $Q(\bar{A})$. Nalazimo da je

$$\bar{A}\left[\alpha_1\bar{A}(e,y,z),u,e\right] = S\beta_3\bar{A}(\alpha_4\beta_2^{-1}y,\beta_4\gamma_2^{-1}z,\gamma_4\beta_1^{-1}u),$$

gde je S translacija 3-grupe $Q(\bar{A})$.

Otududa, uzimajući u obzir $A(x,y,z) = B\left[B(x,y),z\right]$ (Teorema 5, iz 2.3.) nalazimo da je:

$$\overline{A}(\alpha_1 x, \alpha_1 y, z) = S\beta_3\overline{A}(\alpha_4\beta_2^{-1}x, \beta_4\gamma_2^{-1}y, \gamma_4\beta_1^{-1}z),$$

odnosno

$$(3_3) \qquad \beta_3^{-1}S^{-1}\overline{A}(x,y,z) = \overline{A}(\alpha_4\beta_2^{-1}\alpha_1^{-1}x, \beta_4\gamma_2^{-1}\alpha_1^{-1}y, \gamma_4\beta_1^{-1}z).$$

Iz (3_3), na osnovu Leme 9, nalazimo da je

$$(4) \qquad \alpha_4\beta_2^{-1}\alpha_1^{-1} = \xi$$

kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\overline{A})$. Pošto su α_1 i α_4 automorfizmi 3-grupe $Q(\overline{A})$, na osnovu Leme 1. i Leme 9, iz (4) nalazimo da je β_2 kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\overline{A})$. Otuda, na osnovu Leme 3, nalazimo da je

$$\beta_2 = T'\beta$$

gde je T' translacija 3-grupe $Q(\overline{A})$ oblika $\overline{A}(x,t,e)$ ili $\overline{A}(e,t,x)$ a β je automorfizam 3-grupe $Q(\overline{A})$. (Kao i u vezi γ_2, automorfizam β se menja u zavisnosti od izbora translacije $\overline{A}(x,t,e)$ ili $\overline{A}(e,t,x)$).

Tvrđenje za 1A-sisteme je time dokazano.

Osnovno usmeravanje u gradnju iA-sistema, $i \in N_3$, daje Teorema 7. Za konstrukcije nekih A-sistema od koristi će biti i sledeći stavovi.

L e m a 11. Neka je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom e. Neka su, dalje, α i β njeni automorfizmi, a T translacija oblika $A(e,t,x)$. Tada je $\alpha T\beta = T'\delta$, gde su δ automorfizam, a T' translacija oblika $A(e,k,x)$ 3-grupe $Q(A)$.

Tvrđenje neposredno sledi iz Leme 7, i Leme 4.

Uzimajući u obzir činjenicu da je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom e, Lemu 3. i Lemu 4, nalazimo da važe sledeća dva tvrđenja.

L e m a 12. Neka je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom e. Neka su, dalje, α, β i γ automorfizmi, a T_1 i T_2 translacije oblika $A(e,t,x)$ 3-grupe $Q(A)$. Tada egzistiraju automorfizmi α', β', γ', i translacija $Tx = A(e,k,x)$, tako da je

1. $A(\alpha x, T_1\beta y, T_2\gamma z) = A(\alpha x, T\beta' y, \gamma z)$,

2. $A(T_1\alpha x, T_2\beta y, \gamma z) = A(T\alpha' x, \beta y, \gamma z)$ i

3. $A(T_1\alpha x, \beta y, T_2\gamma z) = A(T\alpha' x, \beta' y, \gamma z)$.

L e m a 13. Neka je Q(A) 3-grupa sa jedinicom e. Neka su, dalje, α, β, γ, njeni automorfizmi, a T je translacija oblika $A(e,k,x)$. Tada egzistiraju automorfizmi α', β', β'' i translacije T_1 i T_2 oblika $A(e,t,x)$, tako da je

$$A(T\alpha x, \beta y, \gamma z) = A(\alpha' x, T_1\beta' y, \gamma z) = A(\alpha' x, \beta'' y, T_2\gamma z).$$

L e m a 14. Neka je Q(A) 3-grupa sa jedinicom e. Tada je S, gde je $Sx = A(k,x,t)$, kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A).

D O K A Z

Uzimajući u obzir Teoremu 5. iz 2.3. i da je Q(A) 3-polugrupa, za $x = k$ i $v = t$ nalazimo sledeću jednakost:

$$SA(x,y,z) = A(Lx,y,Rz), \tag{5}$$

pri čemu su $Lx = A(e,k,x)$ i $Rx = A(x,t,e)$.

Iz (5), na osnovu Leme 8, nalazimo da je S kvaziautomorfizam 3-grupe Q(A). Tvrđenje je time dokazano.

L e m a 15. Neka je Q(A) 3-grupa sa jedinicom e. Ako su S_1 i S_2 translacije oblika $A(k,x,t)$, onda egzistiraju translacije S_3 i S_4 istog oblika tako da je

$$A(S_1x, y, S_2z) = S_3A(x, S_4y, z).$$

D O K A Z

Uzimajući u obzir da je Q(A) asocijativna 3-kvazigrupa, nalazimo sledeći niz jednakosti:

$$A(S_1x,y,S_2z) = A\left[A(k_1,x,t_1),y,A(k_2,z,t_2)\right] =$$

$$= A\left\{k_1, A\left[x,A(t_1,y,k_2),z\right], t_2\right\} = S_3A(x,S_4y,z);$$

čime je tvrđenje dokazano.

P r i m e r 1.

Neka je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom e. Neka je, dalje, $\mathcal{A}$ skup svih automorfizama 3-grupe $Q(A)$, a T_i neka su translacije oblika $A(e,t_i,x)$. Tada je $Q(\sum_A^T)$, gde je

$$\sum\nolimits_A^T = \{C \mid C(x,y,z) = A(\alpha x, T_1\beta y, T_2\gamma z);\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{A}, t_1,t_2 \in Q\},$$

A-sistem ternarnih kvazigrupa.

D O K A Z

Prvo, na osnovu Leme 12. i Leme 13, s obzirom da raspolažemo sa skupom $\mathcal{A}$ svih automorfizama i skupom $\mathcal{T}$ svih translacija T oblika $A(e,t,x)$, nalazimo da se svaka operacija C iz $\sum_A^T$ može predstaviti na sledeći način:

(a) $$C(x,y,z) = A(\alpha x, \beta y, T\gamma z),$$

gde $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{A}$, a $T \in \mathcal{T}$.

Neka su C_1 i C_2 proizvoljne operacije iz $\sum_A^T$ predstavljene na način (a). Nalazimo sledeći niz jednakosti:

(b) $$C_1[C_2(x,y,z),u,v] =$$

$$= A[A(\alpha_1\alpha_2 x, \alpha_1\beta_2 y, \alpha_1 T_2\gamma_2 z), \beta_1 u, T_1\gamma_1 v] =$$

$$= A[\alpha_1\alpha_2 x, A(\alpha_1\beta_2 y, \alpha_1 T_2\gamma_2 z, \beta_1 u), T_1\gamma_1 v] =$$

$$= A[\alpha_1\alpha_2 x, \alpha_1\beta_2 y, A(\alpha_1 T_2\gamma_2 z, \beta_1 u, T_1\gamma_1 v)].$$

Ako u (b) uzmemo u obzir Leme 11-13, nalazimo sledeći niz jednakosti

(c) $$C_1[C_2(x,y,z),u,v] =$$

$$= A[\alpha_1\alpha_2 x, A(\alpha_1\beta_2 y, T_2'\gamma_2' z, \beta_1 u), T_1\gamma_1 v] =$$

$$= A[\alpha_1\alpha_2 x, \alpha_1\beta_2 y, A(\gamma_2'' z, \beta_1' u, T_1'\gamma_1 v)].$$

Uvođenjem oznaka:

$$
(d)\qquad \begin{cases} C_3(x,y,z) = A(\alpha_1\alpha_2 x, y, T_1\gamma_1 z) \\ C_4(x,y,z) = A(\alpha_1\beta_2 x, T_2'\gamma_2' y, \beta_1 z) \\ C_5(x,y,z) = A(\alpha_1\alpha_2 x, \alpha_1\beta_2 y, z) \\ C_6(x,y,z) = A(\gamma_2'' x, \beta_1' y, T_1'\gamma_1 z), \end{cases}
$$

(c) prelazi u sledeći niz jednakosti:

$$
(e)\qquad C_1\left[C_2(x,y,z),u,v\right] = C_3\left[x,C_4(y,z,u),v\right] = C_5\left[x,y,C_6(z,u,v)\right] .
$$

Ako u C_4 uzmemo u obzir Lemu 13, iz (d) nalazimo da C_3, C_4, C_5, $C_6 \in \sum_A^T$. To znači da je $Q(\sum_A^T)$ 1A-sistem.

Analogno se može dokazati da je $Q(\sum_A^T)$ 2A- i 3A-sistem. $Q(\sum_A^T)$ je, dakle, A-sistem; što je trebalo dokazati.

PRIMEDBA:

Leme 11-13. bile su primenljive (bez ograda) zato što automorfizmi i translacije oblika $A(e,t,x)$ pri formiranju operacija iz $\sum_A^T$ prolaze redom sav skup $\mathcal{A}$ i sav skup $\mathcal{T}$.

P r i m e r 2.

Neka je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom. Neka je, dalje, $\mathcal{A}$ skup svih automorfizama 3-grupe $Q(A)$. Tada je $Q(\sum_A)$, gde je

$$
\sum_A = \{ C \mid C(x,y,z) = A(\alpha x, \beta y, \gamma z);\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A} \},
$$

A-sistem ternarnih **kvazigrupa**.

Tvrđenje se može dokazati proverom, uzimajući pri tom u obzir da α, β i γ prolaze sav skup $\mathcal{A}$.

P r i m e r 3.

Neka je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom. Neka je, dalje, $\mathcal{S}$ skup svih translacija oblika $A(k,x,t,)$. Tada je $Q(\sum_S)$, gde je

$$
\sum_S = \{ C \mid C(x,y,z) = A(x, Sy, z);\ S \in \mathcal{S} \},
$$

D O K A Z

Neka su C_1, $C_2 \in \sum_S$. Nalazimo:

$$C_1\left[C_2(x,y,z),u,v\right] = A\left[A(x,S_2y,z),S_1u,v\right] =$$
$$= A\left[x,A(S_2y,z,S_1u),v\right] =$$
$$= A\left[x,S_2y,A(z,S_1u,v)\right] .$$

Otuda, uzimajući u obzir Lemu 15, uvođenjem oznaka

$$C_3(x,y,z) = A(x,S_3y,z)$$
$$C_4(x,y,z) = A(x,S_4y,z),$$

nalazimo da je

$$(6) \qquad C_1\left[C_2(x,y,z),u,v\right] = C_3\left[x,C_4(y,z,u),v\right] = C_2\left[x,y,C_1(z,u,v)\right];$$

čime smo dokazali da je $Q(\sum_S)$ 1A-sistem. Analogno se dokazuje da je $Q(\sum_S)$ 2A- i 3A-sistem. $Q(\sum_S)$ je, dakle, A-sistem ternarnih kvazigrupa.

NAPOMENA:

Iz (6) nalazimo da je na $Q(\sum_S)$ t o t a l n o i s p u n j e n (I deo, str. 15.) (1,3)-asocijativan z a k o n tipa

$$A\left[B(x,y,z),u,v\right] = B\left[x,y,A(z,u,v)\right].$$

Otuda, za A = B, nalazimo da su sve operacije iz $\sum_S$ (1,3)-asocijativne ternarne kvazigrupe.

3.4.4. Ternarne grupe sa jedinicom u iA-sistemima

T e o r e m a 8. Neka je $Q(\sum)$ iA-sistem, $i \in N_3$. Neka su, dalje, operacije iz $\sum$ generirane 3-grupom $Q(A)$ sa jedinicom e. Ako je $Q(\bar{A})$ 3-grupa sa jedinicom $\bar{e}$ i $\bar{A} \in \sum$, onda je

$$(7) \qquad \bar{A}(x,y,z) = A(x,Sy,z),$$

gde je S translacija oblika $A(k,x,k)$.

D O K A Z

Ako je $Q(\Sigma)$ iA-sistem, on je i $\overline{iA}$-sistem. Zato, na osnovu Teoreme 5, imamo da je

$$(8) \qquad \overline{A}(x,y,z) = A(\alpha x, \beta y, \gamma z),$$

gde je pri $i = 1$ α automorfizam, pri $i = 2$ β automorfizam, a pri $i = 3$ γ automorfizam 3-grupe $Q(A)$.

Iz (8) za $x = y = \bar{e}$, $x = z = \bar{e}$, $y = z = \bar{e}$ i $x = y = z = \bar{e}$ nalazimo redom:

$$(9) \qquad \begin{cases} z = A(\alpha\bar{e}, \beta\bar{e}, \gamma z) \\ y = A(\alpha\bar{e}, \beta y, \gamma\bar{e}) \\ x = A(\alpha x, \beta\bar{e}\ \gamma\bar{e}) \\ \bar{e} = A(\alpha\bar{e}\ \beta\bar{e}\ \gamma\bar{e}). \end{cases}$$

Iz (9) nalazimo da je

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha x = A(x, (\gamma\bar{e})^{-1}, (\beta\bar{e})^{-1}) \\ \beta y = A((\alpha\bar{e})^{-1}, y, (\gamma\bar{e})^{-1}) \\ \gamma z = A((\beta\bar{e})^{-1}, (\alpha\bar{e})^{-1}, z) \\ \bar{e}^{-1} = A(\bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-1}, \bar{e}^{-1}), \end{cases}$$

gde su $(\alpha\bar{e})^{-1}$, $(\beta\bar{e})^{-1}$, $(\gamma\bar{e})^{-1}$ i $\bar{e}^{-1}$ inverzni elementi redom elemenata $\alpha\bar{e}$, $\beta\bar{e}$, $\gamma\bar{e}$ i $\bar{e}$ u binarnoj grupi $Q(B)$ kojom je definisana A na sledeći način $A(x,y,z) = B[B(x,y),z]$ (Teorema 5. iz 2.3.).

Uzimajući u obzir (10) i da je $Q(A)$ 3-polugrupa, iz (8) nalazimo da je

$$\overline{A}(x,y,z) = A[x, A(\bar{e}^{-1}, y, \bar{e}^{-1}), z],$$

odnosno

$$\overline{A}(x,y,z) = A(x, Sy, z),$$

gde je $Sx = A(k,x,k)$. Teorema je time dokazana.

Nameće se sledeće pitanje: da li svaka operacija C definisana pomoću 3-grupe sa jedinicom i njenom translacijom S oblika $A(k,x,k)$ na način (7) predstavlja 3-grupu sa jedinicom ? Na to pitanje odgovara sledeći stav.

T e o r e m a 9. Ako je $Q(A)$ 3-grupa sa jedinicom e, onda je $Q(C)$, gde je

$$(11) \qquad C(x,y,z) = A(x,Sy,z) \quad \text{a} \quad Sx = A(k,x,k),$$

3-grupa sa jedinicom. Jedinica 3-grupe $Q(C)$ je k^{-1}, pri čemu je k^{-1} inverzan elemenat elementa k u binarnoj grupi $Q(B)$, kojom je definisana A na način

$$A(x,y,z) = B\left[B(x,y,),z\right].$$

D O K A Z

Operaciju C, definisanu sa (11), možemo pisati na sledeći način:

$$(11') \qquad C(x,y,z) = A\left[x,A(k,y,k),z\right].$$

Iz (11'), uzimajući u obzir Teoremu 5. iz 2.3, činjenicu da je jedinica e 3-grupe $Q(A)$ ujedno i jedinica binarne grupe $Q(B)$, kojom je A definisana na način $A(x,y,z) = B\left[B(x,y,),z\right]$, te asocijativnost operacija A i B, nalazimo redom:

$$C(k^{-1},k^{-1},z) = z,$$

$$C(k^{-1},y,k^{-1}) = y \qquad \text{i}$$

$$C(x,k^{-1},k^{-1}) = x,$$

gde je k^{-1} inverzan elemenat elementa k u binarnoj grupi $Q(B)$. Time je dokazano da je $Q(C)$ ternarna lupa.

$Q(C)$ je i ternarna polugrupa. Uzimajući u obzir Lemu 15, iz $S_1x = S_2x = A(k,x,k)$, nalazimo da je $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$. U (6) je tada $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$.

Teorema je time dokazana.

3.4.5. O maksimalnim iA-sistema ternarnih kvazigrupa

Pregledom primera 1-3, nalazimo da je $\sum_S \subset \sum_A^T$ i $\sum_A \subset \sum_A^T$.
$Q(\sum_A^T)$ je najopširniji iA-sistem u skupu sistema generiranih istom 3-grupom sa jedinicom. To tvrdi sledeći stav.

T e o r e m a 10. A-sistem iz Primera 1. $Q(\sum_A^T)$, generiran 3-grupom $Q(A)$ sa jedinicom e, je m a k s i m a l a n, tj. on se ne može uključiti u širi iA-sistem, $i \in N_3$.

D O K A Z

Pretpostavimo da je

$$\Sigma' \supseteq \Sigma_A^T \quad , \tag{12}$$

gde je Σ neki 1A-sistem. Na osnovu Teoreme 7, sve operacije C iz Σ' imaju sledeći oblik:

$$C(x,y,z) = \bar{A}(\alpha x, T\beta y, T'\gamma z), \tag{13}$$

gde je $Q(\bar{A})$ 3-grupa sa jedinicom. Zato je Σ' podsistem A-sistema $\Sigma_{\bar{A}}^{\bar{T}}$. Dakle, važi

$$\Sigma_A^T \subseteq \Sigma \subseteq \Sigma_{\bar{A}}^{\bar{T}} . \tag{14}$$

To znači da 3-grupa A sa jedinicom e pripada i sistemu $\Sigma_{\bar{A}}^{\bar{T}}$. Na osnovu Teoreme 8, to dalje znači da je

$$A(x,y,z) = \bar{A}(x,\bar{S}y,z) , \tag{15}$$

gde je $$\bar{S}x = \bar{A}(k,x,k).$$

Ako jedinicu 3-grupe Q(A) označimo sa e, onda, na osnovu Teoreme 9, imamo da je $e = k^{(-1)}$, gde je $k^{(-1)}$ inverzni elemenat elementa k u binarnoj grupi $Q(\bar{B})$, kojom je definisana $\bar{A}$ na način $\bar{A}(x,y,z) = \bar{B}\left[\bar{B}(x,y),z\right]$. (15) možemo, dakle, pisati ovako:

$$A(x,y,z) = \bar{A}\left[x,\bar{A}(e^{(-1)},y,e^{(-1)}),z\right] . \tag{15'}$$

Iz (15′) za $x = z = \bar{e}$ gde je $\bar{e}$ jedinica 3-grupe $Q(\bar{A})$, nalazimo da je

$$A(\bar{e},y,\bar{e}) = \bar{A}(e^{(-1)},y,e^{(-1)}). \tag{16}$$

Iz (15′) i (16) nalazimo da je

$$A(x,y,z) = \bar{A}\left[x,A(\bar{e},y,\bar{e}),z\right] .$$

Uvođenjem smene $y = A(\bar{e}^{(-1)},\eta,\bar{e}^{-1})$ (gde je $\bar{e}^{-1}$ inverzni elemenat elementa $\bar{e}$ u binarnoj grupi Q(B), kojom je definisana A na način $A(x,y,z) = B\left[B(x,y,)z\right]$), s obzirom da je

$$A\left[\bar{e},A(\bar{e}^{-1},\eta,\bar{e}^{-1}),\bar{e}\right] = \eta ,$$

otuda nalazimo jednakost

$$\bar{A}(x,y,z) = A\left[x,A(\bar{e}^{-1},y,\bar{e}^{-1}),z\right] , \tag{17}$$

Neka je sada $\overline{\varphi}$ automorfizam 3-grupe $Q(\overline{A})$, tj.

(18) $$\overline{\varphi}\,\overline{A}(x,y,z) = \overline{A}(\overline{\varphi}x,\overline{\varphi}y,\overline{\varphi}z).$$

Iz (17) i (18) nalazimo da je

(19) $$\overline{\varphi}A(x,Sy,z) = A(\overline{\varphi}x,S\overline{\varphi}\,y,\overline{\varphi}\,z).$$

Otuda, na osnovu Leme 8, nalazimo da je $\overline{\varphi}$ kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(A)$.

Ako $\overline{C} \in \sum_{\overline{A}}^{\overline{T}}$, onda je

(20) $$\overline{C}(x,y,z) = \overline{A}(\alpha x,\overline{T}\beta y,\overline{T}'\gamma z),$$

na osnovu Teoreme 7.

Iz (17) i (20), uzimajući u obzir da je S, gde je $Sx = A(k,x,k)$, kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(A)$ (Lema 14.) i Lemu 5, nalazimo da je

(21) $$\overline{C}(x,y,z) = A(\varphi x,\psi y,\vartheta z),$$

gde su φ,ψ i ϑ kvaziautomorfizmi 3-grupe $Q(A)$.

Uzimajući u obzir Lemu 4, (21) možemo pisati ovako

(21′) $$\overline{C}(x,y,z) = A(T_1\varphi_o x,T_2\psi_o y,T_3\vartheta_o z),$$

gde su φ_o, ψ_o i ϑ_o automorfizmi 3-grupe $Q(A)$, $T_1x = A(x,t_1,e)$, $T_2x = A(t_2,e,x)$ i $T_3x = A(e,t_3,x)$.

Iz (21′), uzimajući u obzir asocijativnost 3-grupe $Q(A)$, nalazimo da je

(21″) $$\overline{C}(x,y,z) = A(\varphi_o x,T_2'\psi_o y,T_3\vartheta_o z),$$

gde je $T_2'x = A(e,t_2',x)$, a $t_2' = A(t_1,t_2,e)$.

Iz (21″) sledi da $\overline{C} \in \sum_A^T$. To, međutim, znači da

(22) $$\sum_{\overline{A}}^{\overline{T}} \subseteq \sum_A^T$$

Iz (22), (14) i (12) sledi da je

$$\sum_A^T = \sum_{\overline{A}}^{\overline{T}} = \sum \quad ;$$

čime je teorema dokazana.

Uzimajući u obzir Teoremu 7, Primer 1. i Teoremu 10, nalazimo da važe redom sledeća dva tvrđenja:

T e o r e m a 11. Ako je $\sum$ maksimalan iA-sistem, $i \in N_3$, onda je $\sum$ oblika $\sum_A^T$ iz 1. primera.

T e o r e m a 12. Proizvoljan maksimalan iA-sistem je A-sistem.

Važi i sledeće tvrđenje.

T e o r e m a 13. Broj operacija u maksimalnom A-sistemu ternarnih kvazigrupa, definisanom na konačnom skupu Q, je $n.f^3 \in N$, gde je n moć skupa Q, a f broj automorfizma generatorne 3-grupe sa jedinicom Q(A).

D O K A Z

Neka je Q konačan skup moći $n \in N$. Neka je, dalje, $Q(\sum_A^T)$ maksimalan A-sistem generiran 3-grupom sa jedinicom Q(A). Tada, uzimajući u obzir dokaz u vezi 1. primera, nalazimo da se proizvoljne A_1, $A_2 \in \sum_A^T$ mogu predstaviti na sledeći način:

$$A_1(x,y,z) = A(\alpha_1 x, \beta_1 y, T_1\gamma_1 z) \quad \text{i}$$

$$A_2(x,y,z) = A(\alpha_2 x, \beta_2 y, T_2\gamma_2 z),$$

gde su α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2 i γ_2 automorfizmi 3-grupe Q(A), a T_1 i T_2 su translacije oblika A(x,k,e), pri čemu je e jedinica 3-grupe Q(A).

$A_1 = A_2$ ako i samo ako je $T_1 = T_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Tvrđenje je u jednom smeru trivijalno. Tvrđenje ćemo dokazati u drugom smeru. U tu svrhu neka je $A_1 = A_2$, tj.

$$\text{(a)} \qquad A(\alpha_1 x, \beta_1 y, T_1\gamma_1 z) = A(\alpha_2 x, \beta_2 y, T_2\gamma_2 z).$$

U (a) postavimo $x = y = z = e$. Nalazimo:

$$\text{(b)} \qquad T_1 = T_2.$$

Ako u (a) postavimo $x = y = e$ i uzmemo u obzir (b), nalazimo da je

$$T_1\gamma_1 = T_2\gamma_2 ,$$

odnosno
$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Analogno utvrđujemo da je $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$.

Pošto je translacija T jednoznačno određena elementom $k \in Q$, to se broj operacija u $\sum_A^T$ izražava formulom $n.f^3$,

gde je n moć skupa Q, a f moć skupa svih automorfizama 3-grupe Q(A).

Broj $f \in N$ je sa $\sum_A^T$ jednoznačno određen. U to se možemo uveriti sledećim razmišljenjem. Sve 3-grupe sa jedinicom koje pripadaju $\sum_A^T$ su izomorfne (generalizovan Albertov stav, I deo, str. 9.). Neka je α izomorfizam 3-grupe sa jedinicom Q(A) na 3-grupu $Q(\bar{A})$, a φ automorfizam 3-grupe Q(A), Tada je $\alpha^{-1}\varphi\alpha$ automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$ (drugi deo dokaza Teoreme 5). Dakle, ako je f_A broj svih automorfizama 3-grupe Q(A), a $f_{\bar{A}}$ 3-grupe $Q(\bar{A})$, onda je

(c) $$f_A \leq f_{\bar{A}}.$$

Analognim razmišljanjem, nalazimo da je i

(c_2) $$f_{\bar{A}} \leq f_A.$$

Iz (c_1) i (c_2), konačno, nalazimo da je $f_A = f_{\bar{A}}$.

T e o r e m a 14. Dva maksimalna asocijativna u celom sistema ternarnih kvazigrupa na istom skupu Q ili se podudaraju ili nemaju zajedničkih operacija.

D O K A Z

Neka su $\sum_1$ i $\sum_2$ maksimalni A-sistemi na Q. Neka je, dalje, $\sum_1$ generiran sa 3-grupom Q(A), koja poseduje jedinicu e, a $\sum_2$ sa 3-grupom $Q(\bar{A})$, koja poseduje jedinicu $\bar{e}$.

Pretpostavimo da $\sum_1 \cap \sum_2$ sadrži operaciju C, tj. da je

(a) $$\begin{cases} C(x,y,z) = A(\alpha x, \beta y, T\gamma z) & \text{i} \\ C(x,y,z) = \bar{A}(\bar{\alpha} x, \bar{\beta} y, \bar{T}\bar{\gamma} z), \end{cases}$$

pri čemu su α, β, γ automorfizmi 3-grupe Q(A), $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ automorfizmi 3-grupe $Q(\bar{A})$, a T i $\bar{T}$ translacije definisane redom sa A(x,k,e) i $\bar{A}(x,t,\bar{e})$

Iz (a) nalazimo da je

(b) $$A(\alpha x,\beta y,T\gamma z) = \bar{A}(\bar{\alpha}x,\bar{\beta}y,\bar{T}\bar{\gamma}z).$$

Kako (b) znači da su $Q(A)$ i $Q(\bar{A})$ izotopne,to, na osnovu generalizovanog Albertovog stava (I deo,str. 9.), znači da su $Q(A)$ i $Q(\bar{A})$ izomorfne.Ako sa δ označimo jedan izomorfizam $Q(A)$ na $Q(\bar{A})$, imamo da je

(c) $$A(x,y,z) = \delta^{-1}\bar{A}(\delta x,\delta y,\delta z).$$

Iz (b) i (c) nalazimo sledeću jednakost:

$$\bar{A}(\bar{\alpha}\alpha^{-1}x,\bar{\beta}\beta^{-1}y,\bar{T}\bar{\gamma}\gamma^{-1}T^{-1}z) = \delta^{-1}\bar{A}(\delta x,\delta y,\delta z).$$

Otuda,uzimajući u obzir Lemu 8. iz 3.4.1, nalazimo da je δ kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$. Zato,uzimajući u obzir Lemu 7. iz 3.4.1. i definiciju kvaziautomorfizma 3-grupa sa jedinicom,nalazimo da (c) implicira sledeću jednakost:

$$A(x,y,z) = \bar{A}\left[\delta^{-1}(\delta x),(\delta^{-1}\bar{e})^{(-1)},\bar{A}(\delta^{-1}(\delta y),(\delta^{-1}\bar{e})^{(-1)},\delta^{-1}(\delta z))\right],$$

odnosno

$$A(x,y,z) = \bar{A}\left[x,(\delta^{-1}\bar{e})^{(-1)},\bar{A}(y,(\delta^{-1}\bar{e})^{(-1)}, z)\right].$$

Otuda,uzimajući u obzir asocijativnost 3-grupe $Q(\bar{A})$,nalazimo da je

(d) $$A(x,y,z) = \bar{A}(x,\bar{S}y,z),$$

gde je $\bar{S}x = \bar{A}(k,x,k)$ a $k = (\delta^{-1}\bar{e})^{(-1)}$; $a^{(-1)}$ je inverzni elemenat elementa a u binarnoj grupi $Q(\bar{B})$,pri čemu je

$$\bar{A}(x,y,z) = \bar{B}\left[\bar{B}(x,y),z\right].$$

U okviru drugog dela dokaza Teoreme 5. dokazano je da važi sledeće tvrđenje: Neka su $Q(A)$ i $Q(\bar{A})$ izomorfne 3-grupe sa jedinicama,pri čemu je δ izomorfizam $Q(A)$ na $Q(\bar{A})$.Tada, ako je φ automorfizam 3-grupe $Q(A)$, onda je

$$\bar{\varphi} = \delta^{-1}\varphi\delta$$

automorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$.Uzimajući ovo u obzir,na osnovu Leme 7. iz 3.4.1. i činjenice da je δ kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$, nalazimo da je

$$\varphi = \delta\bar{\varphi}\delta^{-1}$$

kvaziautomorfizam 3-grupe $Q(\bar{A})$. Zato se proizvoljna operacija $P \in \sum_1$, obzirom na (d) i (c), izražava na sledeći način:

$$\begin{aligned}P(x,y,z) &= A(\alpha x,\beta y,T\gamma z) = \bar{A}(\alpha x,\bar{S}/\beta\, y,T\gamma z) = \\ &= \bar{A}\left[\alpha x,\bar{S}/\beta\, y,A(\gamma z,t,e)\right] = \\ &= \bar{A}\left[\alpha x,\bar{S}/\beta\, y,\delta^{-1}\bar{A}(\delta\gamma z,\delta t,\delta e)\right] = \\ &= \bar{A}\left[\alpha x,\bar{S}/\beta\, y,\delta^{-1}\bar{A}(\delta\gamma z,\delta t,\bar{e})\right] = \\ &= \bar{A}(\alpha x,\bar{S}/\beta\, y,\vartheta z),\end{aligned}$$

gde sú α, $\bar{S}/\beta$ i ϑ kvaziautomorfizmi 3-grupe $Q(\bar{A})$. Otuda na osnovu Leme 4. iz 3.4.1, nalazimo da je

$$P(x,y,z) = \bar{A}(\bar{T}_1\bar{\alpha}x,\bar{T}_2/\bar{\beta}y,\bar{T}_3\bar{\gamma}z).$$

Uzimajući u obzir ovu jednakost,lako je pokazati da se $P \in \Sigma_1$ može predstaviti na sledeći način:

$$P(x,y,z) = \bar{A}(\bar{\alpha}_1 x,\bar{\beta}_1 y,\bar{T}\bar{\gamma}_1 z),$$

gde su $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$ i $\bar{\gamma}_1$ automorfizmi 3-grupe $Q(\bar{A})$, a $\bar{T}$ je translacija oblika $\bar{A}(x,t,\bar{e})$, tj. da je $P \in \Sigma_2$, odnosno

$$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \tag{e}$$

S obzirom da je Σ_1 maksimalan A-sistem, iz (e) nalazimo da je $\Sigma_1 = \Sigma_2$. Dakle, ako je $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$, onda je $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

3.4.6. PRIMER iA-SISTEMA KOJI NIJE A-SISTEM

Neka je $R(+)$ aditivna grupa svih racionalnih brojeva.Neka je, dalje, Σ skup svih i samo ternarnih operacija oblika

$$A(x,y,z) = x + p\,(y + q\,z),$$

pri čemu su p i q od nule različiti celi brojevi, a py i qz proizvodi u $(R,\cdot)$.

1° <u>$R(\Sigma)$ je 3A-sistem.</u>

Neka su

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} A_5(x,y,z) = x + p_5\,(y + q_5\,z) & \text{i} \\ A_6(x,y,z) = x + p_6\,(y + q_6\,z) \end{cases}$$

proizvoljne operacije iz $\sum$.

Uzimajući u obzir (a), nalazimo da je:

$$A_5\left[x,y,A_6(z,u,v)\right] = x + p_5y + p_5q_5\ (z + p_6u + p_6q_6v) =$$

$$= x + p_5y + p_5q_5z + p_5q_5p_6u + p_5q_5p_6q_6v =$$

$$= x + p_5(y + q_5z + q_5p_6u) + p_5q_5p_6q_6v =$$

$$= (x + p_5y + p_5q_5z) + p_5q_5p_6u + p_5q_5p_6q_6v.$$

Otuda, uvođenjem oznaka

$$A_3(x,y,z) = x + p_5(y + q_5p_6q_6z)$$

$$A_4(x,y,z) = x + q_5(y + p_6z)$$

$$A_1(x,y,z) = x + p_5(y + q_5z)$$

$$A_2(x,y,z) = x + p_5q_5p_6(y + q_6z),$$

nalazimo 1.- da je

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(y,z,u),v\right] = A_5\left[x,yA_6(z,u,v)\right]$$

i 2.- da $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \sum$;

čime je tvrđenje 1° dokazano.

2° <u>R ($\sum$) nije 1 A-sistem.</u>

Neka su

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} A_1(x,y,z) = x + p_1(y + q_1z) & \text{i} \\ A_2(x,y,z) = x + p_2(y + q_2z) \end{cases}$$

proizvoljne operacije iz $\sum$.

Uzimajući u obzir (b), nalazimo da je:

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] =$$

$$= (x + p_2y + p_2q_2z) + p_1u + p_1q_1v =$$

$$= x + (p_2y + p_2q_2z + p_1u) + p_1q_1v =$$

$$= x + p_2y + (p_2q_2z + p_1u + p_1q_1v).$$

Uvođenjem oznaka

$$A_3(x,y,z) = x + p_1y + p_1q_1z$$

$$A_4(x,y,z) = \frac{p_2}{p_1}x + \frac{p_2}{p_1}y + z$$

$$A_5(x,y,z) = x + p_2y + z$$

$$A_6(x,y,z) = p_2q_2x + p_1y + p_1q_1z,$$

nalazimo 1) da je

$$A_1\left[A_2(x,y,z),u,v\right] = A_3\left[x,A_4(y,z,u),v\right] =$$

$$= A_5\left[x,y,A_6(z,u,v)\right] \quad , \text{ i}$$

2) da, ako $A_3 \in \sum$, onda A_4, u opštem slučaju, nije u $\sum$.

Tvrđenje 2° je time dokazano.

Dakle, $R(\sum)$ jeste 3A-sistem, ali nije A-sistem.

L I T E R A T U R A

[1] J.Aczel, Yorlesungen uiber Funkcionaleichungen und ihre Anvendungem, Berlin,VEB Deutch.Verl.Wiss,1961.

[2] J.Aczel,V.D.Belousov,M.Hosszú,Generalized associativity and bisymmety on quasigraups,Acta Math.Sci.Hung. 11,№ 1-2 (1960),127-136.

[3] J.Aczel,G.Pickert,F.Rado,Nomogramme,Gewebe und Quasigruppen,Mathematica 2, № 25,Fasc. 1 (1960),5-24.

[4] Ja.Acelj,Nekatorije obščije metodi v teorii funkcionaljnih uravnjenij odnoj peremennoj.Novije primenjenija funkcionaljnih uravnjenij, UMN 11,vip. 3 (69),(1956),3-68.

[5] A.A.Albert, Quasigroups I,Trans.Amer.Math. Soc.,№ 54 (1943),507-519.

[6] V.D.Bjelousov,Osnovi teorii kvazigrupp i lup,Nauka,Moskva 1967.

[7] V.D.Bjelousov,Associativnije sistemi kvazigrupp,UMN 13,vip.3 (1958) str.243.

[8] V.D.Bjelousov,Associativnije v celom sistemi kvazigrupp,Matem.sb. 55 (97): 2 (1961),221-236.

[9] V.D.Bjelousov, Sistemi kvazigrupp s obobščennimi toždestvami,UMN,t.XX, vip. 1 (121),1965.,75-146.

[10] V.D.Bjelousov,M.D.Sandik, n-Arnije kvazigruppi i lupi,Sibirskij matematičeskij žurnal,Tom VII,№ 1, 1966,31-54.

[11] V.D.Bjelousov, Ostrukture D-kvazigrupp,Naučn. dokl.visš.školi Fiz,-matem.nauki,№ 6 (1958), 8-13.

[12] V.D. Belousov,Hosszú M.,Some problems on ternary quasigroups,Publ. Math.Debrecen,12 (1965).

[13] R.H. Bruck,A survey of binary systems,Berlin-Heidelberg-Göttingen,1958.

[14] S.A.Čunihin, K teorii neassociativnih n-grupp s postulatom k,Dokladi Ak. nauk SSSR,48 (1945),7-10.

[15] G.Čupona,Za finitarnite operacii,Godišen zb. prirodno-matem.fak.un-t Skopje,kn.12,№ 11 (1959-1961),7-49.

[16] G.Čupona, O polijadičnim algebarskim strukturama,saopštenje na IV Kongresu mat.fiz. i astr.Jugoslavije,Sarajevo 6.X.1965.

[17] G.Čupona, Za n-arnite podpolugruppi,Bilten.Drinet.matem.i fiz.,kn.12 (1961),5-13.

[18] V. Devidé, Über eine Klasse von Gruppoiden,Glasnik mat.fiz.i astronomski 10 (1955),265-285.

[19] W.Dörnte, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math,Zeits,29 (1928),1-19.

[20] L.Euler, Commentationes Arithmeticae,Peterburg,1849,302-361.

[21] T.Evans, A note on the associative low,Journal London,Math.Soc.25 (1950),196-201.

[22] L.M. Gluskin, O pozicionih operativah,Dokladi Ak.nauk SSSR,157,№ 4 (1964),767-770.

[23] M. Hosszú,F. Rado, Über eine Klasse von ternaren Quasigruppen,Acta Math. Hung,15,№ 1-2(1964),29-36.

[24] M.Hosszú, On the explicit form of n-group operations.Publ.math.,10, № 1-4 (1963),88-92.

[25] M. Hosszú, On a theorem of Belousov and some of its applications, Maguar Fud.Akad,Matem, es Fiz., oszt.Kozl. 9,(1959),51-56.

[26] M. Holl, Kombinatornij analiz,M. IL.1962.

[27] A.Đ.Kurepa,Viša algebra I i II,šk,Zagreb,1965.

[28] A.G.Kuroš,Lekcii po obščej algebre,FM,Moskva 1962.

[29] R.Manfang,Zur Struktur von Alternativ Körpern,Math.Ann.,1935, 110, 416-430.

[30] E.L.Post,Polyadic groups, Trans.Amer.Math.Soc. 48 (1940),208-350.

[31] S.B.Prešić,Zbirka zadataka iz algebre,Beograd PMF,1962.

[32] S.B.Prešić, Uvod u matematičku logiku,Mat.bibl.34,Beograd 1968.

[33] F.Rado, Generalizarea tesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Stúdia.Univ. "Babes-Bolyai" Math.-phys.,№ 1 (1960),41-55

[34] F.Rado,Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe,Mathematica (RPR) 2, № 2 (1960),325-334.

[35] A.Sade, Entropie demosienne de multigroupoides et de quasigroupes,Soc. Sci.Bruxeles,ser.1,73 (1959),302-309.

[36] A.Sade,Théorie des systémes demosiens de groupoides,Pacif.Journ.Math. 10, № 2 (1960), 625-660.

[37] A.Sade, Quasigroupes obéissant a certains lois,Rev.Fac.Sci.Univ. Istambul 22 (1957),151-184.

[38] R. Schauffler, Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen, Math.Zetschr.67, № 5 (1957),428-435.

[39] B.Trpenovski,G.Čupona,Finitarni asocijativni operacii so neutralni elementi,Bilten Društvoto na matem.i fiz.od NR Makedonija,kniga XII,1961,15-24.

[40] Ja.Ušan,Adnoopredelenije gruppi i jejo obobščenije na n-arnij slučaj, Matem.vesnik,5 (20),Sv.2,1968. 145-149.

[41] Ja.Ušan, Obobščenije teoremi V.D.Bjelousova o četirjoh kvazigrup na ternarnij slučaj,Bilten na Društvoto na mat. i fiz. od SR Makedonija, kniga ---- (u štampi).