UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

BOSILJKA LAKOVIĆ

Teoreme ulaganja i poklapanja za neke klase funkcija

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

Titograd, 1979. godine

U V O D

U ovom radu se ispituje medjusobna zavisnost nekih uslova koji se odnose na module glatkosti, k-te razlike ili na transformisani Fourierov red 2π- periodične funkcije $f \in L_p$. Rezultati su dati u obliku teorema ulaganja i poklapanja klasa funkcija.

Ako je $\omega_k(f,\delta)_p$ k-ti modul glatkosti, $\Delta_t^k f$ k-ta razlika s korakom t, $\sum A_n(x)$ Fourierov red funkcije $f \in L_p$, $\theta \in (0,\infty)$, $\alpha(t)$ nenegativna funkcija takva da je $\int_0^{2\pi} \alpha(t)dt = \infty$ i $\beta(n)$ brojni niz, onda ti uslovi za 2π - periodičku funkciju $f \in L_p$ jedne nezavisno promjenljive, glase

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt < \infty \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha(t) \left\| \Delta_t^k f(x) \right\|_p^\theta dt < \infty \tag{2}$$

Postoji $F \in L_p$ $([0,2\pi])$ takva da je $F \sim \sum A_n(x)\beta(n)$ (3)

Klase funkcija koje ispunjavaju navedene uslove označavaju se, redom, sa B, Δ, W. Ispitivanju odnosa uslova (1), (2) i (3), odnosno ulaganju i poklapanju klasa B, Δ, W posvećeno je mnogo radova (L.Leindler, O.V. Besov, P.L.Uljanov, A.A. Konjuškov, V.A. Andrienko, T.I.Amanov, M.K.Potapov, i dr.).

Tako na primjer, u radu /1/ dokazuje se da se, uz uslove $p=2$, $\theta=1$, $\alpha(t)$ nerastuća funkcija takva da je $\delta^{-2}\int_0^\delta t^2\alpha(t)dt \le c\int_\delta^{2\pi}\alpha(t)dt$, za $\delta \le \delta_0$ /δ_0 - fiksirano/ i $\beta(n) = \int_{n^{-1}}^{2\pi}\alpha(t)dt$, klase B i W poklapaju. U radovima /18/ i /19/ odnos klasa B i W se utvrdjuje za $\alpha(t) = t^{-r\theta-1}$, $\beta(n) = 2^{r\theta n}$, $r>0$, $1 \le \theta < \infty$, itd.

U radovima M.K. Potapova (/8/, /13/, /14/, /15/, /1... odnos klasa B i Δ se ispituje uz najmanje uslova na funkciju $\alpha(t)$. U navedenim radovima date su i veze izmedju klasa B(k) i B(k_1), kao *izmedju klasa $B(p)$ i $B(q)$.*

U radu /12/ ti rezultati se uopštavaju, a daje se i veza izmedju klasa $B(\theta)$ i $B(\theta_1)$. U istom radu utvrdjen je odnos klasa B i W za proizvoljnu funiciju $\alpha(t)$.

Svi rezultati u tim radovima dokazuju se primjenom osobina najbolje aproksimacije funkcije.

U glavi I ovoga rada već poznate relacije izmedju klasa $B(p)$ i $B(q)$ dokazuju se korišćenjem osobina modula glatkosti funkcija.

U glavi II se ispituju odgovarajuće klase funkcija više /dviju/ nezavisno promjenljivih, 2π - periodičkih po svakoj od promjenljivih. Te klase su označene sa SB, $S\Delta$, SW.

U § 1 glave II utvrdjuje se odnos klasa SB i SW za proizvoljnu funkciju $\alpha(t_1,t_2)$ /teorema 1/. Teorema 2 govori o tačnosti teoreme 1.

U § 2 glave II utvrdjuju se odnosi klasa SB u zavisnosti od parametara $p,\theta,\vec{k}$.

U § 3 iste glave data je veza izmedju klasa SB i $S\Delta$.

U glavi III definišu se odgovarajuće klase funkcija koje pripadaju prostoru $L_{\vec{p}}$ i dokazuju se relacije analogne relacijama dobijenim za klase SB, SW, $S\Delta$ u glavi II.

Rezultati iz glave II ovoga rada izloženi su na "Konferenciji mladih naučnih radnika Mehaniko-matematičkog fakulteta MGU", a dio tih rezultata objavljen je u zborniku radova sa te konferencije.

Najveći dio rezultata ovog rada dobijen je za vrijeme mog stažiranja na Moskovskom državnom univerzitetu "Lomonosov" [illegible]

pod rukovodstvom dr fizičko-matematičkih nauka Mihaila Konstantinovića Potapova, prof. Mehaničko-matematičkog fakulteta.

Dugujem duboku zahvalnost prof. M.K.Potapovu za formulisanje problema kao i brojne konsultacije i savjete.

G L A V A I

§ 1. KLASE $B(p,\theta,k,\alpha)$. TEOREME ULAGANJA PO p

1.1. Oznake, definicije i osnovni rezultati

Sa $L_p([0,2\pi])$, $1\le p\le\infty$ ćemo označavati prostor mjerljivih, 2π - periodičkih funkcija $f(x)$ takvih da je

$$\|f\|_p=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}<\infty\ , \text{ za } p<\infty\ ,$$

$$\|f\|_p=\sup_{x\in[0,2\pi]}\operatorname{vrai}|f(x)|\ , \quad \text{za } p=\infty$$

Sa $\Delta_t^k f(x)$ ćemo označavati k-tu razliku funkcije f s korakom t, tj.

$$\Delta_t^k f(x)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^\nu f(x+\nu t)$$

i sa $\omega_k(f,t)_p$ modul glatkosti reda k funkcije f u metrici L_p, tj.

$$\omega_k(f,\delta)_p=\sup_{|t|\le\delta}\|\Delta_t^k f(x)\|_p$$

Neka je $\alpha(t)$ funkcija mjerljiva na $[0,2\pi]$, integrabilna na $[\delta,2\pi]$ za svako $\delta\epsilon(0,2\pi)$ i $\alpha(t)\ge C>0$.

Klasu $B(p,\theta,k,\alpha)$, $0<\theta<\infty$ odredjujemo kao klasu funkcija $f(x)\epsilon L_p([0,2\pi])$, takvih da je

$$J=\int_0^{2\pi}\alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt<\infty.$$

Kažemo da funkcija $\alpha(t)$ ispunjava σ uslov, ako postoji realan broj σ, takav da je

$$\int_0^\delta\alpha(t)t^\sigma dt<\infty \quad \text{i} \quad \int_0^\delta\alpha(t)t^{\sigma-\varepsilon}dt=\infty\ , \text{ za svako } \delta\epsilon(0,2\pi) \text{ i } \varepsilon>0.$$

Kažemo da funkcija $\alpha(t)$ ispunjava σ^* uslov ako

1^0 ispunjava σ uslov

2^0 postoji realan broj $\sigma^*\ge\sigma$ takav da je

$$\int_0^\delta\alpha(t)t^{\sigma^*}dt\le C\int_\delta^{\delta}\alpha(t)t^{\sigma^*}dt.$$

U radu /14/ je dokazano da se, ako funkcija $\alpha(t)$ ispunjava σ^* uslov, za $k\geq\sigma^*/\theta$, klase $B(p,\theta,k,\alpha)$ poklapaju, a za $k<\sigma^*/\theta$ klasa $B(p,\theta,k,\alpha)$ sadrži samo funkcije ekvivalentne konstanti.

U ovoj glavi ćemo pretpostaviti da $\alpha(t)$ ispunjava σ^* uslov i da je $k\geq\sigma^*/\theta$, pa ćemo, uz ove pretpostavke, za klasu $B(p,\theta,k,\alpha)$ koristiti oznaku $B(p,\theta,\alpha)$.

Lako se dokazuje da, ako funkcija $\alpha(t)$ ispunjava σ^* uslov, onda i funkcija $\alpha^*(t)=\alpha(t)t^{\theta(1/p-1/q)}$, $p<q$ ispunjava isti uslov za $\sigma^*-(1/p-1/q)+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ pa, u tom slučaju, ima smisla oznaka $B(p,\theta,\alpha^*)$.

Uslov σ^* nije dovoljan za inkluziju $B(p,\theta,\alpha)\subset L_q$, $p<q$ /P.L. Uljanov je konstruisao primjer koji to potvrdjuje/ pa se od funkcije $\alpha(t)$ traže dodatni uslovi.

Označimo $p_0(t)=1$, $p_{n_0}(t)=\prod_{\nu=1}^{n_0}\ln_\nu\frac{d_\nu}{t}$, gdje je n_0 prirodan broj, $t\in(0,2\pi]$, $\ln_1 u=\ln u$ $\ln_\nu u=\ln[\ln_{\nu-1}u]$, $\nu=2,3,\dots,n_0$, $\ln_\nu d_\nu=1$.

Kažemo da funkcija $\alpha(t)$ ispunjava (λ,γ,n_0) uslov, ako je, za $\delta<\delta_0$, $\int_{2\delta}^{2\pi}\alpha(t)t^\lambda p_{n_0}^{-\gamma}(t)dt\leq C\delta^\lambda p_{n_0}^{-\gamma+1}(\delta)\int_\delta^{2\delta}\alpha(t)dt$.
Ako je $n_0=0$, kažemo da funkcija $\alpha(t)$ ispunjava λ uslov, tj: funkcija $\alpha(t)$ ispunjava λ uslov ako je

$$\int_{2\delta}^{2\pi}\alpha(t)t^\lambda dt\leq C\int_\delta^{2\delta}\alpha(t)t^\lambda dt$$

Dokazaćemo sledeće teoreme ulaganja po p:

Teorema 1. Neka je $1\leq p<q<\infty$, *funkcija* $\alpha(t)$ *ispunjava* λ *uslov,* $\lambda/\theta\geq 1/p-1/q$ *i* $\alpha^*(t)=\alpha(t)t^{\theta(1/p-1/q)}$. *Tada je*

$$B(p,\theta,\alpha)\subset B(q,\theta,\alpha^*)$$

Teorema 2. Neka je $1\leq p<q\leq\infty$, *funkcija* $\alpha(t)$ *ispunjava* (λ,γ,n_0) *uslov za* $\lambda=\theta(1/p-1/q)$, $\gamma=max(\theta/q,1)$ *i* $\alpha^*=\alpha(t)t^{\theta(1/p-1/q)}p_{n_0}^{-\gamma}($

Tada je

$$B\,(p,\ \theta,\ \alpha) \subset B\,(q,\ \theta,\ \alpha^*)$$

Teorema 3. Neka je $1<p<q\le\infty$, *funkcija* $\alpha(t)$ *ispunjava* λ *uslov za* $\lambda=\theta(1/p-1/q)$, $\alpha^*(t)=\alpha(t)t^{\theta(1/p-1/q)}$ *i* $f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$, $a_\nu\downarrow 0$. *Tada je*

$$B\,(p,\ \theta,\ \alpha) = B\,(q,\ \theta,\ \alpha^*)\,;$$

Primjedba: Navedene teoreme su dokazane u radovima /8/ i /14/ pomoću najbolje aproksimacije. U ovom radu iste teoreme se dokazuju pomoću modula glatkosti i uz uslov da je $\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$ss.

1.2. Pomoćni stavovi

Koristićemo oznake: $\mu(0)=\int_1^{2\pi}\alpha(t)dt$, $\mu(n)=\int_{2^{-n}}^{2\cdot 2^{-n}}\alpha(t)dt, n>1.$

Lema 1. Postoje konstante c_1 i c_2, takve da je

$$c_1 \sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)\omega_k^\theta\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_p \le \int_0^{2\pi}\alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt \le c_2 \sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)\omega_k^\theta\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_p .$$

Lema 2. /17/. Ako je $1\le p<q\le\infty$ i $\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$ ss, onda je

$$\omega_k^r\left(f,\frac{1}{2^n}\right)_q \le c \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu(1/p-1/q)r}\omega_k^r\left(f,\frac{1}{2^\nu}\right)_p$$

, gdje je $r=1$ za $q=\infty$, $r=q, q<\infty$

Lema 3. /14/. Ako funkcija $\alpha(t)$ ispunjava λ uslov, onda je:

$$2^{n\lambda}\le c\mu(n) \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=0}^{n}\mu(\nu)2^{-\nu\lambda}\le c\mu(n)2^{-n\lambda}.$$

Lema 4 /8/. Ako je $\alpha^*(t)=\alpha(t)t^\lambda p_{n_0}^{-\gamma}(t)$, onda postoje konstante c_1 i c_2 takve da je:

$$c_1 2^{n\lambda}p_{n_0}^{\gamma}\left(\frac{1}{2^n}\right)\mu^*(n)\le\mu(n)\le c_2 2^{n\lambda}p_{n_0}^{\gamma}\left(\frac{1}{2^n}\right)\mu^*(n).$$

Lema 5 /8/. Ako funkcija $\alpha(t)$ ispunjava (λ,γ,n_0) uslov i ako je $\alpha^*(t)=\alpha(t)t^\lambda p_{n_0}^{-\gamma}(t)$, onda je $\sum_{\nu=0}^{n}\mu^*(n)=\beta_n\mu^*(n)$, gdje je $1\le\beta_n\le cp_{n_0}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Lema 6. Neka je $f(x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\cos\nu x$, $a_\nu\downarrow 0$. Tada je

a) Za $1<p<q<\infty$ $\sum_{\nu=2^{n+1}}^{\infty} \nu^{\frac{q}{p}-2}\omega_k^q(f,\frac{1}{\nu})_p \le c\,\omega_k^q(f,\frac{1}{2^n})_q$

b) Za $q=\infty$ $\sum_{\nu=2^{n+1}}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-1}\,\omega_k(f,\frac{1}{\nu})_p \le c\,\omega_k(f,\frac{1}{2^n})_p$

Primjedba: Sa c ćemo označavati konstante /po pravilu različite u svakom koraku/.

1.3. Dokazi teorema 1, 2 i 3

Dokaz teoreme 1. Neka $f\epsilon B(p,\theta,\alpha)$, tj. $\int_0^{2\pi} \alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt<\infty$, $k\ge\sigma^*/\theta$. Na osnovu leme 1 i leme 2 i izražavajući μ^* preko μ biće:

$$J_1=\int_0^{2\pi} \alpha^*(t)\omega_{k_1}^\theta(f,t)_q dt\le c\sum_{n=0}^{\infty}\mu^*(n)\omega_{k_1}^\theta(f,\frac{1}{2^n})_q\le$$

$$\le c\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\theta(1/p-1/q)}\mu(n)\{\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu(1/p-1/q)q}\omega_k^q(f,\frac{1}{2^\nu})_p\}^{\theta/q}.$$

Neka je $0<\theta\le q$. Primjenjujući nejednakost /5/

$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\beta)^{1/\beta}\le(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\alpha)^{1/\alpha}$, $0<\alpha<\beta<\infty$, $a_n\ge 0$, dobijamo:

$$J_1\le\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\theta(1/p-1/q)}\mu(n)\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu\theta(1/p-1/q)}\omega_k^\theta(f,\frac{1}{2^\nu})_p=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu\theta(1/p-1/q)}\omega_k^\theta(f,\frac{1}{2^\nu})_p\sum_{n=0}^{\nu}\mu(n)2^{-n\theta(1/p-1/q)}.$$

Uzimajući u obzir da je $\lambda/\theta\ge 1/p-1/q$ i da funkcija $\alpha(t)$ ispunjava λ uslov, imaćemo, na osnovu leme 3,

$$J_1\le c\sum_{\nu=0}^{\infty}\omega_{k_1}^\theta(f,\frac{1}{2^\nu})_p\mu(\nu)\le c\int_0^{2\pi}\alpha(t)\omega_{k_1}^\theta(f,t)_p dt.$$

Neka je $\theta>q$. Primjenjujući nejednakost /8/:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sum_{\nu=n}^{\infty}b_\nu)^\theta\le\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma_n b_n)^\theta$, $a_n\ge 0$, $b_n\ge 0$, $\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu=a_n\gamma_n$, dobijamo:

$J_1\le c\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)\gamma_n\omega_k^\theta(f,\frac{1}{2^n})_p$, gdje je

$\gamma_n=[\mu(n)]^{-1}2^{n\theta(1/p-1/q)}\sum_{\nu=0}^{n}\mu(\nu)2^{-\nu\theta(1/p-1/q)}$, tj. $\gamma_n\le c$. Tada je

$J_1\le c\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)\omega_k^\theta(f,\frac{1}{2^n})_p$, i, znači, za svako $\theta\epsilon(0,\infty)$:

$$J_1 \leq c \int_0^{2\pi} \alpha(t)\omega_k^\theta (f,t)_p dt.$$

Neka je $k_1 < \sigma^*/\theta$. Tada je $f=c$ /$\alpha(t)$ ispunjava σ^* uslov/ s.s., i, znači, $J_1 < \infty$. Ako je $k_1 \geq \sigma^*/\theta$ klase $B(p,\theta,k,\alpha)$ i $B(p,\theta, k_1,\alpha)$ se poklapaju, pa iz $f \in B(p,\theta,k,\alpha)$ slijedi da $f \in B(p,\theta,k_1,\alpha)$, tj. $\int_0^{2\pi} \alpha(t)\omega_{k_1}^\theta (f,t)_p dt < \infty$, odnosno $J_1 < \infty$.

Kako je $\alpha(t) \geq c > 0$ i $J_1 < \infty$, to je

$$\omega_{k_1}^\theta (f,1)_q \leq \int_1^{2\pi} \omega_{k_1}^\theta (f,t)_q dt \leq c \int_1^{2\pi} \alpha(t)\omega_{k_1}^\theta (f,t)_q dt < \infty.$$

Funkciju $f(x)$, $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ možemo predstaviti u obliku:

$$f(x) = \frac{(-1)^{k_1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_t^{k_1} f dt \quad \text{pa je}$$

$$\|f\|_q \leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_0^{2\pi} \Delta_t^k f dt \right\|_q \leq \sup_{|t| \leq 2\pi} \|\Delta_t^{k_1} f\|_q \leq \omega_{k_1}(f,2\pi)_q \leq c\omega_{k_1}(f,1)_q < \infty, \text{ tj. } f \in L_q.$$

Iz $f \in L_q$ i $J_1 < \infty$, slijedi da $f \in B(q,\theta,\alpha^*)$. Time je teorema 1 dokazana.

Dokaz teoreme 2. Neka $f \in B(p,\theta,\alpha)$. Na osnovu leme 1 i leme 4 je

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \alpha^*(t)\omega_k^\theta (f,t)_q dt \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) 2^{-n\lambda} p_{n_0}^{-\gamma} \omega_{k_1}^\theta (f,\frac{1}{2^n})_q \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(n)\omega_{k_1}^\theta (f,\frac{1}{2^n})_q.$$ Izražavajući modul glatkosti u metrici L_q, preko modula glatkosti u metrici L_p /lema 2/, za $q<\infty$, dobijamo:

$$J_2 \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(n) \{\sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu q(1/p-1/q)} \omega_{k_1}^q (f,\frac{1}{2^n})_p\}^{\theta/q}.$$

Dokaz, dalje, ide kao i dokaz prethodne teoreme samo se treba pozivati na lemu 5, umjesto na lemu 3.

Dokaz teoreme 3. Obzirom na teoremu 2, dovoljno je dokazati inkluziju $B(q,\theta,\alpha^*) \subset B(p,\theta,\alpha)$. Kako je $p<q$, to iz $f \in B(q,\theta,\alpha^*)$ slijedi da $f \in L_p$. Još treba dokazati konačnost integrala $J_3 = \int_0^{2\pi} \alpha(t)\omega_k^\theta (f,t)_p dt$. Primjenjujući lemu 1 i izražavajući μ preko μ^*, imaćemo:

$$J_3 \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(n) 2^{n\theta(1/p-1/q)} \omega_k^\theta(f, \frac{1}{2^n})_p .$$

Neka je $q<\infty$. Neposredno se provjerava da je

$$\{2^{n(1/p-1/q)} \omega_k(f, \frac{1}{2^n})_p\}^\theta = \{2^{n(q-p)/p} \omega_k^q(f, \frac{1}{2^n})_p\}^{\theta/q} \leq$$

$\leq c\{\sum_{\nu=2^{n+1}}^{\infty} \nu^{\frac{q}{p}-2} \omega_k^q(f, \frac{1}{n})_p\}^{\theta/q}$. Primjenjujući lemu 6 dobijamo:

$J_3 \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(n) \omega_k^\theta(f, \frac{1}{2^n})_q$. Kako $f \in B(q,\theta,\alpha^*)$, veličina na desnoj strani je konačna, pa je i $J_3<\infty$. Time je teorema dokazana za $q<\infty$. Za $q=\infty$ treba primijeniti drugi dio leme 6.

G L A V A II

§ 1. MEDJUSOBNA VEZA KLASA $SB(p,\theta,\alpha)$ i $SW(p,\theta,\alpha)$

1.1. Oznake, definicije i osnovni rezultati

Sa $L_p([0,2\pi]^2)$, $1 \le p \le \infty$ ćemo označavati prostor mjerljivih funkcija $f(x,y)$, 2π - periodičkih po svakoj od promjenljivih x i y i takvih da je

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^p dxdy\right)^{1/p} < \infty, \quad \text{za} \quad p < \infty$$

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{x\in[0,2\pi] \\ y\in[0,2\pi]}} \text{vrai} \quad |f(x,y)| < \infty$$

/S.M. Nikoljski /5/ je pokazao da se definicija veličine $\|f\|_p$, $p<\infty$ može proširiti i na slučaj $p = \infty$, ako je $\|f\|_p < \infty$, $p = \infty$/. Ako $f\in L_p([0,2\pi]^2)$ i $\int_0^{2\pi} f dx = \int_0^{2\pi} f dy$ s.s., koristićemo i oznaku $f\in L_p^o([0,2\pi]^2)$.

Sa $\Delta_{t_1}^{k_1} f$ $(\dot{\Delta}_{t_2}^{k_2} f)$ ćemo označavati k_1 - u $(k_2$ - u) razliku funkcije $f(x,y)$ po promjenljivoj x (y), s korakom t_1 (t_2) i sa $\Delta_{t_1\, t_2}^{k_1\, k_2} f$ mješovitu razliku, tj.

$$\Delta_{t_1\, t_2}^{k_1\, k_2} f = \Delta_{t_1}^{k_1} \sum_{n_2=0}^{k_2} (-1)^{k_2-n_2} C_{k_2}^{n_2} f(x+n_2 t_2)$$

Sa $\omega_k(f,\delta_1)_p$ $(\omega_k(f,\delta_2)_p)$ ćemo označavati module glatkosti funkcije f u metrici L_p po promjenljivoj x (y) i sa $\omega_{k_1 k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ mješoviti modul glatkosti, tj.

$$\omega_{k_1 k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p = \sup_{|t_1|\le\delta_1,\ |t_2|\le\delta_2} \|\Delta_{t_1\, t_2}^{k_1\, k_2} f\|_p$$

Ako je $T_{n_1} \varepsilon L_p([0,2\pi]^2)$ $(T_{n_2} \varepsilon L_p([0,2\pi]^2))$ trigonometrijski polinom stepena n_1 (n_2) po x (y), $n_1=0,1,2,\ldots$, $(n_2=0,1,\ldots)$, onda ćemo sa $Y_{n_1 n_2}(f)_p$ označavati najbolju aproksimaciju dvodimenzionalnim uglom, funkcije f po x i y, tj.

$$Y_{n_1 n_2}(f)_p = \inf_{n_1, n_2} \|f-(T_{n_1}+T_{n_2})\|_p$$

Neka je $\alpha(t_1,t_2) \geq C > 0$ funkcija mjerljiva na kvadratu $[0,2\pi]^2$ i integrabilna na pravougaoniku $[\delta_1, 2\pi] \times [\delta_2, 2\pi]$, za svako $\delta_i \varepsilon (0,2\pi)$, i=1,2.

Klasu funkcija $SB(p,\theta,\alpha)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \theta < \infty$ definišemo kao klasu funkcija $f \varepsilon L_p([0,2\pi]^2)$, takvih da je

$$I_1^\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 < \infty$$

$$I_2^\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1}(f,t_1)_p \, dt_1 dt_2 < \infty$$

$$I_3^\theta = \int_1^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_2}(f,t_2)_p \, dt_1 dt_2 < \infty$$

Za $n_1 \geq 1$ i $n_2 \geq 1$ uvedimo sledeće oznake:

$$\beta_0^\theta(n_1,n_2) = \int_{1/n_1}^{2\pi} \int_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 ;$$

$$\beta_1^\theta(n_1,n_2) = n_1^{k_1\theta} \int_0^{1/n_1} \int_{1/n_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) t_1^{k_1\theta} dt_1 dt_2 ;$$

$$\beta_2^\theta(n_1,n_2) = n_2^{k_2\theta} \int_{1/n_1}^{2\pi} \int_0^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2) t^{k_2\theta} dt_1 dt_2 \;;$$

$$\beta_3^\theta(n_1,n_2) = n_1^{k_1\theta} n_2^{k_2\theta} \int_0^{1/n_1} \int_0^{1/n_2} \alpha(t_1,t_2) t_1^{k_1\theta} t_2^{k_2\theta} dt_1 dt_2$$

Klasu funkcija $SW(p,\theta,\alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 < \theta < \infty$ odredjujemo kao klasu funkcija $f \in L_p([0,2\pi]^2)$ koje zadovoljavaju uslov: Ako je

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} A_{n_1 n_2}(x,y)$$

Fourierov red funkcije $f(x,y)$, onda postoji funkcija $g(x,y) \in L_p([0,2\pi]^2)$ čiji je Fourierov red

$$g \sim \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta(n_1,n_2) A_{n_1 n_2}(x,y)$$

gdje je $\beta(0,0)=\beta_0(1,1)$, $\beta^{\theta}(n_1,0)=\beta_1^{\theta}(n_1,1)+\beta_0^{\theta}(n_1,1)$, za $n_1 \geq 1$, $\beta^{\theta}(0,n_2)=\beta_2^{\theta}(1,n_2)+\beta_0^{\theta}(1,n_2)$, za $n_2 \geq 1$, $\beta^{\theta}(n_1,n_2)=\beta_0^{\theta}(n_1,n_2)+\beta_1^{\theta}(n_1,n_2)+\beta_2^{\theta}(n_1,n_2)+\beta_3^{\theta}(n_1,n_2)$, $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$.

Sa M označimo klasu funkcija $f(x,y) \in L_p([0,2\pi]^2)$ čiji je Fourierov red:

$$f \sim \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1} b_{n_2} \cos n_1 x \cos n_2 y, \quad a_{n_1} \downarrow 0, \quad b_{n_2} \downarrow 0.$$

Klasu funkcija $f(x,y) \in L_p([0,2\pi]^2)$ koje imaju Fourierov red oblika

$$f \sim \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1} b_{n_2} \cos n_1 x \cos n_2 y ,$$

gdje je $a_{n_1}=a^{*}_{n_1}$, za $n_1=2^{m_1}$, $a_{n_1}=0$, za $n_1 \neq 2^{m_1}$, $m_1=0,1,2,\ldots$; koeficijenti b_{n_2} su odredjeni analogno, ćemo označavati sa L.

U ovom paragrafu ćemo dokazati sledeće teoreme:

Teorema 1. a) Ako je $\max(2,p) \leq \theta < \infty$, *onda je*

$$SW(p,\theta,\alpha) \subset SB(p,\theta,\alpha)$$

b) Ako je $0 < \theta \leq \min(2,p)$, *onda je*

$$SB(p,\theta,\alpha) \subset SW(p,\theta,\alpha)$$

Posledice: 1. Klase $SW(2,2,\alpha)$ i $SB(2,2,\alpha)$ se poklapaju.

2. Ako je $p\neq 2$ i $\min(2,p)<\theta<\max(2,p)$, klase $SW(p,\theta,\alpha)$ i $SB(p,\theta,\alpha)$ se sijeku i mogu se naći funkcije f i g takve da $f\in SW(p,\theta,\alpha)-SB(p,\theta,\alpha)$, $g\in SB(p,\theta,\alpha)-SW(p,\theta,\alpha)$.

Teorema 2. Ako je $1 < p < \infty$, onda je

a) $M\cap SB(p,p,\alpha)=M\cap SW(p,p,\alpha)$

b) $L\cap SB(p,2,\alpha)=L\cap SW(p,2,\alpha)$

Primjedbe: 1. Teorema 1 je uopštenje na funkcije dveju promjenljivih rezultata rada /1/.

2. Analogni rezultati za funkciju jedne promjenljive dati su u radovima /12/, /13/, /14/.

3. Teorema 1 ranije je dokazana /15/ u ovom specijalnom slučaju: $\theta=\max(2,p)$ u tački a), $\theta=\min(2,p)$ u tački b), a funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ima oblik $\alpha(t_1,t_2)=\alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2)$ pri čemu funkcija $\alpha_i(t_i)$ ispunjava uslov

$$\int_0^{\delta_i}\alpha_i(t_i)^{k_i\theta}dt \leq c\delta^{k_i\theta}\int_\delta^{2\pi}\alpha_i(t_i)dt_i\ ,\delta_i\in(0,2\pi),i=1,2$$

1.2. Pomoćni stavovi

Za dokazivanje navedenih teorema koristićemo:

1. poznate brojne nejednakosti, najčešće uopštenu nejednakost Minkowskoga.
2. osobine modula glatkosti:

$$\omega_k(f,\delta)_p\leq C\|f\|_p;\quad \omega_k(f+g,\delta)_p\leq\omega_k(f,\delta)_p+\omega_k(g,\delta)_p;$$

postoje konstante C_1 i C_2 takve da je: $\omega_k(f,r\delta)_p\leq C_1\,\omega_k(f,\delta)_p, r>0$;

$$\frac{\omega_k(f,\delta_2)_p}{\delta_2^k}\leq C_2\frac{\omega_k(f,\delta_1)_p}{\delta_1^k}\ ,\ \delta_1<\delta_2.$$

Navedene osobine ima i mješoviti modul glatkosti.

3. sledeće leme:

Lema 1. /2/. Ako $f\in L_p^o([o,2\pi]^2)$, onda je

$$\omega_{k_1 k_2}(f,t_1)_p \le C\, \omega_{k_1 k_2}(f,t_1,1)_p \quad \text{i} \quad \omega_{k_2}(f,t_2)_p \le C\, \omega_{k_1 k_2}(f,1,t_2)_p$$

Lema 2. /2/. Ako $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, onda je

$$Y_{n_1 n_2}(f)_p \le C\omega_{k_1 k_2}\left(f,\frac{1}{n_1+1},\frac{1}{n_2+1}\right)_p$$

Lema 3. /3/. Svaka funkcija $f\in L_p([0,2\pi]^2)$ ima jednoznačnu reprezentaciju:

$$f(x,y)=F(x,y)+F_1(x)+F_2(y)+F_0,$$

$F\in L_p^o([0,2\pi]^2)$, $F_1\in L_p^o([0,2\pi])$, $F_2\in L_p^o([0,2\pi])$, F_0 - konstanta.

Parcijalne sume Fourierovog reda funkcije $F(x,y)$ reda n_1 po x, n_2 po y, n_1 po x i n_2 po y ćemo označavati, redom, sa $s_{n_1\infty}$, $s_{\infty n_2}$, $s_{n_1 n_2}$. Sume $s_{n_1\infty}(f-s_{\infty n_2})$, $s_{\infty n_2}(f-s_{n_1\infty})$ i $s_{n_1\infty}+s_{\infty n_2}-s_{n_1 n_2}$ ćemo označavati, redom, sa T_{n_1}, Q_{n_2}, $U_{n_1 n_2}$.

Zapisom $f(x)\ll g(x)$ ćemo označavati da postoji konstanta $c>0$ koja ne zavisi od x, takva da je $f(x)\le cg(x)$. Ako je istovremeno $f(x)\ll g(x)$ i $g(x)\ll f(x)$, koristićemo i oznaku $f(x)\asymp g(x)$.

Lema 4. /4/. Ako $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, $1<p<\infty$, onda je

$$Y_{n_1 n_2}(f)_p \asymp \|f-U_{n_1 n_2}\|_p$$

Lema 5. Ako $f\in L_p([o,2\pi]^2)$, onda je

$$\omega_{k_1 k_2}\left(s_{n_1 n_2},\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)_p \asymp n_1^{-k_1} n_2^{-k_2}\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} s_{n_1 n_2}\right\|_p .$$

Dokaz. Iz nejednakosti /9/:

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} T_{n_1 n_2}(x,y)\right\|_p \le \left(\frac{n_1}{2\sin n_1 h_1}\right)^{k_1}\left(\frac{n_2}{2\sin n_2 h_2}\right)^{k_2}\left\|\Delta^{k_1 k_2}_{h_1 h_2} T_{n_1 n_2}\right\|_p,$$

gdje je $T_{n_1 n_2}(x,y)$ trigonometrijski polinom stepena $\le n_1$ u odnosu na x i stepena $\le n_2$ u odnosu na y, $1\le p\le\infty$, $h_1\in(0,\pi/n_1)$, $h_2\in(0,\pi/n_2)$, za $h_1=\frac{\pi}{2n_1}$, $h_2=\frac{\pi}{2n_2}$, slijedi da je

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} T_{n_1 n_2}\right\|_p \ll n^{k_1} n^{k_2}\left\|\Delta^{k_1 k_2}_{\frac{\pi}{2n_1},\frac{\pi}{2n_2}} T_{n_1 n_2}\right\|_p.$$ Iz definicije i osobina modula glatkosti, dalje, slijedi:

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} T_{n_1 n_2}\right\|_p \ll n_1^{k_1} n_2^{k_2}\,\omega_{k_1 k_2}\left(T_{n_1 n_2},\frac{\pi}{2n_1},\frac{\pi}{2n_2}\right)_p \asymp$$

$$\asymp n_1^k\, n_2^k\, \omega_{k_1 k_2}(T_{n_1 n_2}, 1/n_1, 1/n_2)_p$$

Nejednakost u obrnutom smjeru je posledica nejednakosti Bernštajna.

Lema 6. (teorema Littlewood-Paley)./5/. Neka funkcija $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, $1<p<\infty$, ima Fourierov red $f\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}A_{n_1 n_2}(x,y)$ i neka je $\Delta_{m_1 m_2}(x,y)=\sum_{n_1=[2^{m_1-1}]+1}^{2^{m_1}}\sum_{n_2=[2^{m_2-1}]+1}^{2^{m_2}} A_{n_1 n_2}(x,y)$, gdje je $[2^{m_i-1}]=0$, za $m_i=0$ i $[2^{m_i-1}]=2^{m_i-1}$, $m_i=1,2,3,\ldots$

Tada je $\|f\|_p \asymp \left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1 m_2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$

Lema 7. (Lema Marcinkiewicz-a). /5/. Neka je λ_{n_1,n_2} brojni niz, $\Delta_1\lambda_{n_1,n_2}=\lambda_{n_1+1,n_2}-\lambda_{n_1,n_2}$, $\Delta_2\lambda_{n_1,n_2}=\lambda_{n_1,n_2+1}-\lambda_{n_1,n_2}$, $f\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}A_{n_1 n_2}(x,y)$ i neka je $|\lambda_{n_1,n_2}|\le M$ i

$$\sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}\sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1}\left|\Delta_1\Delta_2\lambda_{m_1,m_2}\right|\le M.$$

Tada postoji funkcija $\phi(x,y)\in L_p([0,2\pi]^2)$ čiji je Fourierov red

$\phi\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda_{n_1 n_2}A_{n_1 n_2}(x,y)$ i $\|\phi\|_p<C_p M\|f\|_p$.

Lako se provjerava da nizovi: $\frac{\beta(2^{m_1},0)}{\beta(n_1,0)}$, $\frac{\beta(0,2^{m_2})}{\beta(0,n_2)}$, $\frac{\beta(2^{m_1},2^{m_2})}{\beta(n_1,n_2)}$, $\frac{2^{m_i k_i}}{n_i^{k_i}}$, $2^{m_i-1}<n_i\le 2^{m_i}$, $i=1,2$ kao i nizovi njihovih recipročnih vrijednosti, ispunjavaju uslove leme 7 /ograničeni su i monotoni/.

Lema 8. Uz oznake leme 6 važi ekvivalencija:

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{n_1}2^{n_2}}\right\|_p\asymp\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{m_2=0}^{n_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta_{m_1m_2}\right]^{\frac12}\right\|_p$$

Dokaz. Ako je $T_{n_1n_2}(x,y)=\sum_{m_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{m_2=1}^{2^{n_2}}2^{m_1k_1}2^{m_2k_2}A_{n_1n_2}(x,y)$, onda je, prema lemi 6,

$$\|T_{n_1n_2}(x,y)\|_p\asymp\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{m_2=0}^{n_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta_{m_1m_2}\right]^{\frac12}\right\|_p \quad\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

S druge strane, niz $\frac{n_1^{k_1}n_2^{k_2}}{2^{m_1k_1}2^{m_2k_2}}$ ispunjava uslove leme 7, pa je $\sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{\nu_2=1}^{2^{n_2}}A_{\nu_1\nu_2}(x,y)\,\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}$ Fourierov red neke funkcije $Q_{n_1n_2}(x,y)$ i, obzirom na lemu 6, $\|Q_{n_1n_2}\|_p\le\|T_{n_1n_2}\|_p$ .... (2)

Kako je $\|Q_{n_1n_2}\|_p=\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{n_1}2^{n_2}}\right\|_p$, to, iz (1) i (2) slijedi da je $\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{n_1}2^{n_2}}\right\|_p\ll\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{n_1}\sum_{m_2=0}^{n_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta_{m_1m_2}\right]^{\frac12}\right\|_p$.

Analogno se, koristeći činjenicu da niz $\frac{2^{m_1k_1}2^{m_2k_2}}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}}$ ispunjava uslove leme 7, dobija nejednakost u obrnutom smjeru.

Lema 9. /6/. Neka je $f(x)\in L_p$, $1<p<\infty$, $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, $a_n\downarrow 0$. Tada je $\omega_k(f,1/n)_p\asymp n^{-k}\{\sum_{m=1}^{n}a_m^p\,m^{(k+1)p-2}\}^{1/p}+\{\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m^p\,m^{p-2}\}^{1/p}$

Lema 10. /6/. Neka $f(x)\in L_p$, $1\le p<\infty$, $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, $a_n=a_n'$, za $n=2^m$ i $a_n=0$, za $n\ne 2^m$. Tada je:

$$\omega_k(f,1/n)_p\asymp n^{-k}\{\sum_{m=1}^{n}a_m^2\,m^{2k}\}^{1/2}+\{\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m^2\}^{1/2}.$$

Lema 11. Ako $f\in L_p^0([0,2\pi]^2)$, $1\le p<\infty$, $0<\theta<\infty$ i

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1 dt_2<\infty \quad , \text{ onda je}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(f,t_1)_p dt_1 dt_2<\infty \ \text{ i} \int_1^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_2}(f,t_2)_p dt_1 dt_2<\infty$$

Dokaz: Kako $f\in L_p^0$, to je, prema lemi 1, $\omega_{k_1}(f,t_1)_p<<\omega_{k_1k_2}(f,t_1,1)_p$, pa će, za $t_2\in(1,2\pi)$, biti:

$\omega_{k_1}(f,t_1)_p<<\omega_{k_1k_2}(f,\ t_1,t_2/t_2)_p\approx\omega_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p$ i, znači,

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(f,t_1)_p dt_1 dt_2\le\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(f,t_1)_p dt_1 dt_2<<$$

$$<<\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1 dt_2<\infty\ .$$

Analogno se dokazuje konačnost drugog integrala.

Sa $\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$ ćemo označavati klasu funkcija $f(x,y)\in$ $\in L_p([0,2\pi]^2)$, takvih da je

$$I_4^{\theta}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(F,t_1,t_2)_p dt_1 dt_2<\infty$$

$$I_5^{\theta}=\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(F_1,t_1)_p dt_1 dt_2<\infty$$

$$I_6^{\theta}=\int_1^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_2}(F_2,t_2)_p dt_1 dt_2<\infty,$$

gdje su F, F_1, F_2 funkcije iz leme 3.

Lema 12. Klase funkcija $SB(p,\theta,\alpha)$ i $\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$ se poklapaju.

Dokaz: Neka $f\in SB(p,\theta,\alpha)$, tj. $I_1<\infty$, $I_2<\infty$, $I_3<\infty$, gdje su I_1, I_2, I_3 veličine kojima se odredjuje klasa $SB(p,\theta,\alpha)$. Kako je $\omega_{k_1k_2}(F,\ t_1,\ t_2)_p=\omega_{k_1k_2}(f,\ t_1,\ t_2)_p$, to, iz $I_1<\infty$, slijedi $I_4<\infty$. Uzimajući u obzir /očigledne/ relacije:

$\omega_{k_1}(F_1,t_1)_p=\omega_{k_1}(f-F,t_1)_p\le\omega_{k_1}(f,\ t_1)_p+\omega_{k_1}(F,t_1)_p$, dobijamo:

$$I_5^{\theta}\le\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(f,\ t_1)_p dt_1 dt_2+\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1}(F,t_1)_p dt_1 dt_2 .$$

Prema pretpostavci, prvi integral je konačan. Iz $I_4<\infty$, na osnovu leme 11 slijedi konačnost i drugog integrala, a time i konačnost integrala I_5.

Analogno se dokazuje da je $I_6^\theta<\infty$.

Iz konačnosti integrala I_4, I_5 i I_6 slijedi da $f\in\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$.

Obrnuto, neka $f\in\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$, tj. $I_4<\infty$, $I_5<\infty$, $I_6<\infty$.

Iz relacija $\omega_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p=\omega_{k_1k_2}(F,t_1,t_2)_p$ i $I_4<\infty$, slijedi $I_1<\infty$.

Kako je $\omega_{k_1}(f,t_1)_p=\omega_{k_1}(F+F_1,t)_p\le\omega_{k_1}(F,t_1)_p+\omega_{k_1}(F_1,t_1)_p$, to, za $t_2\in(1,2\pi)$, prema lemi 1, imamo:

$\omega_{k_1}(f,t_1)_p\le\omega_{k_1k_2}(F,t_1,t_2)_p+\omega_{k_1}(F_1,t_1)_p$ i, znači,

$$I_2^\theta\le\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1k_2}(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2+$$
$$\int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1}(F,t_1)_p dt_1dt_2<I_4^\theta+I_5^\theta<\infty\ .$$

Analogno: $I_3<\infty$. Time je lema dokazana.

Lema 13 /Teorema Palye) /7/. Neka je $\{C_n\}$ niz nenegativnih brojeva koji konvergira nuli i $\{C_n^*\}$ nerastući niz istih brojeva. Označimo: $M^r=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^r\,n^{r-2}$ i $M^{*r}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{*r}\,n^{r-2}$

Tada: a) Ako je $M<\infty$, postoji funkcija $f\in L_p$, $p\ge2$, $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{inx}$, $\|f\|_p\le A_pM^*$, gdje je A_p konstanta koja zavisi samo od p.

b) Ako $f\in L_p$, $p\le2$ i $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{inx}$, onda je $M^*\le A_p'\|f\|_p$, gdje je A_p' konstanta koja zavisi samo od p.

Leme 2, 4, 5, 6, 7, 8 su uopštenja na funkcije dveju promjenljivih odgovarajućih lema za slučaj funkcije jedne nezavisno promjenljive.

1.3. Dokazi teorema 1 i 2.

Dokaz teoreme 1 a). Neka $f\in SW(p,\theta,\alpha)$ i $f\sim\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A_{n_1n_2}(x,y)$. Iz definicije klase $SW(p,\theta,\alpha)$ slijedi postojanje funkcije $g\in L_p([0,2\pi]^2)$, $g\sim\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\beta(n_1,n_2)A_{n_1n_2}(x,y)$. Klase $SB(p,\theta,\alpha)$ i $\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$ se poklapaju, /lema 12/, pa treba dokazati da iz $f\in SW(p,\theta,\alpha)$ slijedi da je $I_4<\infty$, $I_5<\infty$, $I_6<\infty$.

Uvedimo oznake: $\mu(0,0)=\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2$,

$\mu(\nu,0)=\int_{1/2^{\nu}}^{2/2^{\nu}}\int_1^{2\pi}\alpha(t\ ,t\ )dt\ dt$, za $\nu=1,2,...$ i za $\nu_1=1,2,...$;

$\nu_2=1,2,...$: $\mu(\nu_1,\nu_2)=\int_{1/2^{\nu_1}}^{2/2^{\nu_1}}\int_{1/2^{\nu_2}}^{2/2^{\nu_2}}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2$.

Tada je $I_4^\theta=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta}(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p=$

$=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}+T_{2^{\nu_1}}+Q_{2^{\nu_2}}+s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p$.

Iz osobina modula glatkosti i relacije $(a+b)^\theta\asymp a^\theta+b^\theta$, $a,b,\theta,>0$, slijedi da je

$$I_4^\theta\ll\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\Big[\omega_{k_1k_2}^{\theta}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p+$$
$$+\omega_{k_1k_2}^{\theta}(T_{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p+\omega_{k_1k_2}^{\theta}(Q_{2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p+\omega_{k_1k_2}^{\theta}(s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\Big],$$

ili, primjenjujući lemu 5,

$$I_4^\theta\ll\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\Big[\omega_{k_1k_2}^{\theta}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p+\frac{1}{2^{\nu_1k_1\theta}}\Big\|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}T_{2^{\nu_1}}\Big\|_p^\theta+$$
$$+\frac{1}{2^{\nu_2k_2\theta}}\Big\|\frac{\partial^{k_2}}{\partial y^{k_2}}Q_{2^{\nu_2}}\Big\|_p^\theta+\frac{1}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}\Big\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\Big\|_p^\theta\Big]=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Na osnovu osobina modula glatkosti i leme 6, biće:

$$J_1=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\le$$
$$\le\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\|F-U_{2^{\nu}2^{\nu}}\|_p^\theta\asymp$$
$$\asymp\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\ \Big\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}\Big]^{p/2}dxdy\Big\}^{\theta/p}.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga ($\theta\ge p$), imaćemo:

$$J_1\ll\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\Big[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\Big]^{\theta/2}\Big\}^{p/\theta}dxdy\Big)^{\theta/p}.$$

Prema pretpostavci je $\theta\ge2$, pa, ponovo primjenjujući nejednakost Minkowskoga, dobijamo:

$$J_1\ll\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}\beta_0^2(2^{m_1},2^{m_2})\Big\}^{p/2}dxdy.$$

Iz leme 8 slijedi da je

$$J_2 = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta}} \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}} T_{2^{\nu_1}}\right\|_p^\theta \asymp$$

$$\asymp \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta}} \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} 2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right\}^{\theta/p},$$

a iz pretpostavke $\theta\geq p$, primjenom nejednakosti Minkowskoga, da je

$$J_2 \ll \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\beta_1^2(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{p/2}dxdy\right)^{\theta/p}.$$

Analogno se dokazuje da je

$$J_3 = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_2 k_2\theta}} \left\| \frac{\partial^{k_2}}{\partial y^{k_2}} Q_{2^{\nu_2}}\right\|_p^\theta \ll$$

$$\ll \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta_{m_1m_2}(x,y)\beta_2^2(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{p/2}dxdy\right)^{\theta/p}.$$

Najzad, na osnovu leme 8 i nejednakosti Minkowskoga ($\theta\geq p$, $\theta\geq 2$), imamo da je $J_4 = \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}} \left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} S_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\right\|_p^\theta \asymp$

$$\asymp \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=0}^{\nu_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right\}^{\theta/p}\ll$$

$$\ll\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta_3^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right)^{\theta/p}.$$

Sabirajući ocjene za J_1, J_2, J_3 i J_4, dobijamo:

$$I_4^\theta \ll J_1+J_2+J_3+J_4 \asymp \left(J_1^{p/\theta}+J_2^{p/\theta}+J_3^{p/\theta}+J_4^{p/\theta}\right)^{\theta/p}\ll$$

$$\ll\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} \beta^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right)^{\theta/p},$$

ili, na osnovu leme 6,

$I_4^\theta \ll \|\Psi\|_p^\theta$, gdje je $\Psi(x,y)\sim\sum_{n_1=1}^\infty\sum_{n_2=1}^\infty \beta(2^{m_1},2^{m_2})A_{n_1n_2}(x,y)$.

Brojni niz $\lambda_{n_1n_2}=\frac{\beta(2^{m_1},2^{m_2})}{\beta(n_1,n_2)}$ za $2^{m_1-1}< n_1\leq 2^{m_1}$, ispunjava uslove leme 7[1])

pa ako je $G\sim\sum_{n_1=1}^\infty\sum_{n_2=1}^\infty\beta(n_1,n_2)A_{n_1n_2}(x,y)$, onda je $\|\Psi\|_p\leq\|G\|_p$.

Kako $f\in SW(p,\theta,\alpha)$, to je $\|G\|_p<\infty$, odnosno i $I_4<\infty$.

[1]) Analogna konstatacija za jednostruki niz glasi:

Ako je $\beta_1^\theta(n)=n^{k\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt$ i $\beta_2(n)=\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt$, i ako je $2^{m-1}<n\le 2^m$, onda brojni niz $\lambda_n=\dfrac{\beta_1^\theta(2^m)+\beta_2^\theta(2^m)}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}$ ispunjava uslove leme Marcinkiewicza. Zaista:

a) $\lambda_n=J_1+J_2$, gdje je $J_1=\dfrac{\beta_1^\theta(2^m)}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}$. Biće:

$$J_1<\frac{\beta_1^\theta(2^m)}{\beta_1^\theta(n)}<\frac{2^{mk\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt}{2^{(m-1)k\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt}<2^{k\theta}\quad \text{i}\quad J_2=\frac{\beta_2^\theta(2^m)}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}=$$

$$=\frac{\int_{2^{-m}}^{n^{-1}}\alpha(t)dt+\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}=J_3+J_4.\quad J_3=\frac{\int_{2^{-m}}^{n^{-1}}\alpha(t)dt}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}<\frac{\int_{2^{-m}}^{n^{-1}}\alpha(t)dt}{\beta_1^\theta(n)}=$$

$$=\frac{\int_{2^{-m}}^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}t^{-k\theta}dt}{\beta_1^\theta(n)}\le\frac{2^{mk\theta}\int_{2^{-m}}^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt}{2^{(m-1)k\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt}<2^{k\theta};\quad J_4=\frac{\beta_2^\theta(n)}{\beta_1^\theta(n)+\beta_2^\theta(n)}<1.$$

Iz dobijenih nejednakosti slijedi da je $\lambda_n^\theta<2^{k\theta}+2^{k\theta}+1$ i, znači $|\lambda_n|=\lambda_n<M$

b) $\lambda_n-\lambda_{n+1}=\beta(2^m)\left[\dfrac{1}{\beta(n)}-\dfrac{1}{\beta(n+1)}\right]=\dfrac{\beta(2^m)}{\beta(n)\beta(n+1)}\times$

$$\times\left\{\left[(n+1)^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt+\int_{(n+1)^{-1}}^{1}\alpha(t)dt\right]^{1/\theta}-\left[n^{k\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt+\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt\right]^{1/\theta}\right\}=$$

$=\dfrac{\beta(2^m)}{\beta(n)\beta(n+1)}A(n)$. Izraz $A(n)$ je pozitivan:

$$(n+1)^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt+\int_{(n+1)^{-1}}^{1}\alpha(t)dt-n^{k\theta}\int_0^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt-\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt=$$

$$=(n+1)^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt+\int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}}\alpha(t)dt+\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt-n^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt-$$

$$-n^{k\theta}\int_{(n+1)^{-1}}^{n^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt-\int_{n^{-1}}^{1}\alpha(t)dt=(n+1)^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt-n^{k\theta}\int_0^{(n+1)^{-1}}\alpha(t)t^{k\theta}dt>0,$$ tj.

$|\lambda_n-\lambda_{n+1}|=\lambda_n-\lambda_{n+1}$ i, znači

$$\sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\le\lambda_{2^{m-1}+1}=\frac{\beta(2^m)}{\beta(2^{m-1}+1)}<M$$

Analogno se dokazuje odgovarajuće tvrdjenje za dvostruki niz $\lambda_{n_1 n_2}$.

Koristeći osobine modula glatkosti, dobijamo:

$$I_5^\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\,\omega_{k_1}^\theta(F_1,t_1)_p\,dt_1dt_2 \asymp \sum_{n_1=0}^{\infty}\mu(n_1,0)\,\omega_{k_1}^\theta\left(F_1,\frac{1}{2^{n_1}}\right)_p <<$$

$$<< \sum_{n_1=0}^{\infty}\mu(n_1,0)\,\omega_{k_1}^\theta\left(s_{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_1}}\right)+\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu(n_1,0)\,\omega_{k_1}^\theta\left(F_1-s_{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_1}}\right)_p = J_5+J_6.$$

/Sa $s_{2^{n_1}}$ smo označili parcijalnu sumu Fourierovog reda funkcije $F_1(x)$/. Na osnovu leme 5 i leme 8, biće:

$$J_5 \asymp \sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,0)}{2^{n_1k_1\theta}}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{n_1}2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1}(x)\right]^{p/2}dx\right\}^{\theta/p},$$

odakle, primjenjujući nejednakost Minkowskoga, dobijamo:

$$J_5 \le \left(\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta_{m_1}(x)\,2^{2m_1k_1}\left[\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\frac{\mu(n_1,0)}{2^{n_1k_1\theta}}\right]^{2/\theta}\right\}^{p/2}dx\right)^{\theta/p}, \quad \text{ili}$$

$$J_5 \le \left(\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\beta_1^2(2^{m_1},1)\right]^{p/2}dx\right)^{\theta/p}$$

Ocijenimo, još, veličinu J_6. Iz osobina modula glatkosti slijedi da je $J_6 \le \sum_{n_1=0}^{\infty}\mu(n_1,0)\|F-s_{2^{n_1}}\|_p^\theta$.

Primjenjujući lemu 6, a zatim nejednakost Minkowskoga, dobijamo:

$$J_6 << \sum_{n_1=0}^{\infty}\mu(n_1,0)\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=n_1}^{\infty}\Delta_{m_1}(x)\right]^{p/2}dx\right\}^{\theta/p} <<$$

$$<< \left(\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta_{m_1}(x)\left[\sum_{n_1=0}^{m_1}\mu(n_1,0)\right]^{2/\theta}\right\}^{p/2}dx\right)^{\theta/p}, \quad \text{ili}$$

$$J_6 << \left(\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\beta_0^2(2^{m_1},1)\Delta_{m_1}(x)\right]^{p/2}dx\right)^{\theta/p}.$$

Sabirajući ocjene za J_5 i J_6, dobijamo ocjenu za I_5:

$$I_5^\theta << \left(\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta_{m_1}(x)\left[\beta_1^2(2^{m_1},1)+\beta_0^2(2^{m_1},1)\right]\right\}^{p/2}dx\right)^{\theta/p} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta_{m_1}(x)\beta^2(2^{m_1},0)\right]^{p/2}dx\right)^{\theta/p}.$$

Na osnovu leme 6, biće

$I_5 << \|\Psi_1\|_p$, gdje je $\Psi_1(x) \sim \sum_{n_1=1}^{\infty}\beta(2^{m_1},0)A_{n_1}(x)$

Brojni niz $\lambda_{n_1}=\frac{\beta(2^{m_1},0)}{\beta(n_1,0)}$, $2^{m_1-1}<n_1\leq 2^{m_1}$, ispunjava uslove leme 7, pa je $\|\Psi_1\|_p\leq\|G_1\|_p$, gdje je $G_1\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\beta(n_1,0)A_{n_1}(x)$. Kako je $\|G_1\|_p<\infty(f\in SW(p,\theta,\alpha))$, to je $I_5<\infty$. Analogno se dokazuje da je i $I_6<\infty$.

Time je tvrdjenje a) teoreme 1 dokazano.

b). Neka $f\in SB(p,\theta,\alpha)$. Tada /lema 12/ $f\in\Sigma SB^0(p,\theta,\alpha)$.

Da bi dokazali da $f\in SW(p,\theta,\alpha)$, treba dokazati postojanje funkcija G, G_1, G_2 iz leme 3 čiji su Fourierovi redovi

$G\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\beta(n_1,n_2)A_{n_1n_2}(x,y)$, $G_1\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\beta(n_1,0)A_{n_10}(x,y)$, $G_2\sim\sum_{n_2=1}^{\infty}\beta(0,n_2)A_{0n_2}(x,y)$.

U tom cilju, prvo ćemo dokazati postojanje funkcije

$\Psi(x,y)\in L_p([0,2\pi]^2)$, $\Psi\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\beta(2^{m_1},2^{m_2})A_{n_1n_2}(x,y)$.

Veličinu /lema 6/ $\|\Psi\|_p$,

$\|\Psi\|_p^p\asymp\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy$, predstavimo u obliku:

$$\|\Psi\|_p^p=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\left[\beta^{\theta}(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{2/\theta}\}^{p/2}dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\left[\beta_0^{\theta}+\beta_1^{\theta}+\beta_2^{\theta}+\beta_3^{\theta}\right]^{2/\theta}\}^{p/2}dxdy\asymp$$

$$\asymp\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)(\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)\}^{p/2}dxdy\asymp J_7+J_8+J_9+J_{10}.$$

Ocijenićemo pojedinačno dobijene integrale.

$$J_7=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\beta_0^2(2^{m_1},2^{m_2})\}^{p/2}dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\{\sum_{\nu_1=0}^{m_1}\sum_{\nu_2=0}^{m_2}\mu(\nu_1,\nu_2)\}^{2/\theta})^{p/2}dxdy.$$

Prema pretpostavci je $\theta\leq 2$ i $\theta\leq p$, pa, primjenom nejednakosti Minkowskoga, dobijamo da je:

$J_7\leq\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right]^{\theta/2}\}^{p/\theta}dxdy$, odnosno

$$J_7 \le \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right\}^{\theta/p}\right)^{p/\theta}.$$

Primjenjujući, redom, lemu 6, lemu 4 i lemu 2, dobijamo:

$$J_7 << \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\|F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\|_p^{\theta}\right)^{p/\theta} \cong \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(F)_p\right)^{p/\theta} \le$$

$$\le \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_p\right)^{p/\theta} \asymp I_4^p .$$

Kako $f\in\Sigma SB^{0}(p,\theta,\alpha)$, integral I_4 je konačan, pa je i $J_7<\infty$.

Ocijenimo veličinu

$$J_8=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta_1^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right\}^{p/2}dxdy =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\left(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{m_2}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}}\right)^{2/\theta}\right\}^{p/2}dxdy.$$

Uzimajući u obzir da je $\theta\le 2$ i $\theta\le p$, dobijamo:

$$J_8\le\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}}\left(\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right)^{\theta/2}\right\}^{p/\theta}dxdy, \text{ ili}$$

$$J_8\le\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1m_2}(x,y)\right]^{p/2}dxdy\right\}^{\theta/p}\right)^{p/\theta},$$

odakle, na osnovu leme 8, slijedi da je

$$J_8<<\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}}\left\|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}T_{2^{\nu_1}}\right\|_p^{\theta}\right)^{p/\theta}.$$

Lako se provjerava da je $\frac{1}{2^{\nu_1k_1}}\left\|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}T_{2^{\nu_1}}\right\|_p\le\left\|\Delta^{k_1}_{1/2^{\nu_1}}T_{2^{\nu_1}}\right\|_p =$

$=\left\|s_{\nu_1\infty}(F-s_{\infty\nu_2})\right\|_p<<\omega_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_p/2/$, pa je

$$J_8<<\left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_p\right)^{\theta/p}\asymp I_4^p<\infty.$$

Analogno se dokazuje da je

$$J_9=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta_2^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right\}^{p/2}dxdy<<I_4^p<\infty.$$

Razmotrimo integral J_{10}. Zamjenjujući veličinu $\beta_3(2^{m_1},2^{m_2})$, imaćemo:

$$J_{10}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1 m_2}(x,y)\beta_3^2(2^{m_1},2^{m_2})\}^{p/2}dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1 m_2}(x,y)(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}})^{2/\theta}\}^{p/2}dxdy$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga za $2/\theta$ i p/θ, dobijamo:

$$J_{10}\le\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}(\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=0}^{\nu_2}2^{2m_1k_1}2^{m_2k_2}\Delta^2_{m_1m_2})^{\theta/2}\}^{p/\theta}dxdy,\text{ ili}$$

$$J_{10}\le(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=0}^{\nu_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1m_2}\right]^{p/2}dxdy\}^{\theta/p})^{p/\theta}$$

Na osnovu leme 8 je

$$J_{10}<<(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}S_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\right\|_p^{\theta})^{\theta/p},$$ a na osnovu leme 5:

$$J_{10}<<(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega^{\theta}_{k_1 k_2}(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p)^{\theta/p}\approx I_4^p<\infty.$$

Iz ocjena za J_7, J_8, J_9 i J_{10} slijedi da $\Psi\in L_p([0,2\pi]^2)$.

Brojni niz $\lambda_{n_1 n_2}=\frac{\beta(n_1,n_2)}{\beta(2^{m_1},2^{m_2})}$, $2^{m_i-1}<n_i\le2^{m_i}$, $i=1,2$ ispunjava uslove leme 7, prema tome postoji funkcija $G\in L_p([0,2\pi]^2)$,

$$G\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\beta(n_1,n_2)A_{n_1 n_2}(x,y).$$

Ocijenimo, sada, integral S,

$$S^p=\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\beta^2(2^{m_1},0)\Delta^2_{m_1}(x)\}^{p/2}dx=\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1}(x)[\beta^{\theta}(2^{m_1},0)]^{2/\theta}\}^{p/2}dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1}(x)(\beta_1^{\theta}(2^{m_1},1)+\beta_0^{\theta}(2^{m_1},1))^{2/\theta}\}^{p/2}dx=J_{11}+J_{12}.$$

Zamjenjujući β_1 i β_0 i primjenjujući nejednakost Minkowskoga za $2/\theta$, dobijamo:

$$J_{11}=\int_0^{2\pi}\{\sum_{m_1=0}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta^2_{m_1}(x)(\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,0)}{2^{\nu_1k_1\theta}})^{2/\theta}\}^{p/2}dx\le$$

$$\le\int_0^{2\pi}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,0)}{2^{\nu_1k_1\theta}}(\sum_{m_1=0}^{\nu_1}2^{2m_1k_1}\Delta^2_{m_1}(x))^{\theta/2}\}^{p/\theta}dx.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga za p/θ, biće:

$J_{11} \leq (\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,0)}{2^{\nu_1 k_1 \theta}} \{\int_0^{2\pi} [\sum_{m_1=0}^{\nu_1} 2^{2m_1 k_1} \Delta_{m_1}(x)]^{p/2} dx\}^{\theta/p})^{p/\theta}$, odakle, na osnovu leme 5, slijedi da je

$J_{11} \ll \{\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1,0) \omega_{k_1}^{\theta}(F_1, \frac{1}{2^{\nu_1}})\}^{p/\theta}$, ili, zamjenjujući $\mu(\nu_1,0)$ i uzimajući u obzir da je $I_5 < \infty$:

$$J_{11} \ll (\int_0^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) \omega_{k_1}^{\theta}(F_1, t_1) dt_1 dt_2)^{p/\theta} < \infty .$$

Analogno se dokazuje da je i $J_{12} < \infty$, a time je dokazano da je i $S < \infty$, odnosno, uzimajući u obzir lemu 6, da funkcija Ψ_1, $\Psi_1 \sim \sum_{n_1=1}^{\infty} \beta(2^{m_1},0) A_{n_1,0}(x)$ pripada prostoru $L_p([0,2\pi])$.

Brojni niz $\lambda_{n_1} = \frac{\beta(n_1,0)}{\beta(2^{m_1},0)}$, $2^{m_1-1} < n_1 \leq 2^{m_1}$ zadovoljava uslove leme 7, što znači da postoji funkcija $G_1 \varepsilon L_p([0,2\pi])$, $G_1 \sim \sum_{n_1=1}^{\infty} \beta(n_1,0) A_{n_1,0}(x)$.

Analogno se dokazuje postojanje funkcije G_2.

Funkcija $g = G + G_1 + G_2 + G_0$, $G_0 = A_{00}\beta(0,0)$ pripada prostoru $L_p([0,2\pi]^2)$ i ima Fourierov red

$g \sim \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \beta(n_1,n_2) A_{n_1 n_2}(x,y)$ i, slijedi, $f \varepsilon SW(p,\theta,\alpha)$, što je i trebalo dokazati.

Dokaz teoreme 2 a). Uvedimo oznake:

$\eta(0,0) = \int_1^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2$, $\eta(\nu_1,0) = \int_{\frac{1}{\nu_1+1}}^{\frac{1}{\nu_1}} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2$, $\nu_1 \geq 1$

$\eta(\nu_1,\nu_2) = \int_{\frac{1}{\nu_1+1}}^{\frac{1}{\nu_1}} \int_{\frac{1}{\nu_2+1}}^{\frac{1}{\nu_2}} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2$, $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 \geq 1$.

Razmotrimo integral J_1:

$$J_1 = \int_0^1 \int_0^1 \alpha(t_1,t_2) \omega_{k_1 k_2}^{p}(F, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \asymp$$

$\asymp \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \eta(\nu_1,\nu_2) \omega_{k_1 k_2}^{p}(F, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2})_p$. Ako $f(x,y) \varepsilon M$, onda je $f(x,y) =$

$=f(x)f(y)$, i tada je $\omega_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)_p=\omega_{k_1}(f_1,t_1)_p\omega_{k_2}(f_2,t_2)_p$.

Obzirom na to, primjenjujući lemu 9, prostim izračunavanjem dobijamo:

$$J_1\asymp\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2}n_2^{p-2}\{n_1^{k_1p}n_2^{k_2p}\int_0^{n_1^{-1}}\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1p}t_2^{k_2p}dt_1\,dt_2+$$

$$+n_1^{k_1p}\int_0^{n_1^{-1}}\int_{n_2^{-1}}^{1}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1p}dt_1dt_2+n_2^{k_2p}\int_{n_1^{-1}}^{1}\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2p}dt_1dt_2+\int_{n_1^{-1}}^{1}\int_{n_2^{-1}}^{1}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2 \quad \ldots (1)$$

Ocijenimo, sada, integral $J_2=\int_0^1\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1 k_2}^p(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2$.

Kako je, za $t_2\in(1,2\pi)$, $\omega_{k_1 k_2}(F,t_1,t_2)_p\asymp\omega_{k_1}(F,t_1)_p$, to, primjenjujući lemu 9, dobijamo:

$$J_2\asymp\sum_{\nu_1=1}^{\infty}n(\nu_1,0)\omega_{k_1}^p(F,\frac{1}{\nu_1})_p\asymp\sum_{\nu_1=1}^{\infty}n(\nu_1,0)\{\frac{1}{\nu_1^{k_1p}}\sum_{n_1=1}^{\nu_1}a_{n_1}^p n_1^{(k_1+1)p-2}+\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}a_{n_1}^p n_1^{p-2}\}=$$

$$=\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1}^p n_1^{p-2}n_1^{k_1p}\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\frac{n(\nu_1,0)}{\nu_1^{k_1p}}+\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1}^p n_1^{p-2}\sum_{\nu_1=1}^{n_1-1}n(\nu_1,0).$$

Kako red $\sum_{n_2=1}^{\infty}b_{n_2}^p n_2^{p-2}$ konvergira, to je

$$J_2\asymp\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2}n_2^{p-2}\{\int_{n_1^{-1}}^{1}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2+n_1^{k_1p}\int_0^{n_1^{-1}}\int_1^{2\pi}\alpha(t,t)t^{kp}dtdt\} \quad \ldots (2)$$

Analogno dobijamo da je

$$J_3=\int_1^{2\pi}\int_0^1\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1 k_2}^p(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\asymp$$

$$\asymp\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2}n_2^{p-2}\{\int_1^{2\pi}\int_{n_2^{-1}}^{1}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2+n_2^{k_2p}\int_1^{\pi}\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2p}dt_1dt_2\} \quad \ldots . (3)$$

i $$J_4=\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1 k_2}^p(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\asymp$$

$$\asymp\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2}n_2^{p-2}\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1\,dt_2 \quad \ldots\ldots (4)$$

Iz (1), (2), (3) i (4) slijedi da je

$$I_4^p=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1 k_2}^p(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\asymp\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2}n_2^{p-2}\beta^p(n_1,n_2)=S.$$

Neka je $p\geq 2$ i $f\in SB(p,p,\alpha)$. Tada je $I_4^p<\infty$, i, znači $S<\infty$. Primjenjujući lemu 13 zaključujemo da postoji funkcija $G\in L_p([0,2\pi]^2)$,

$G\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}b_{n_2}\beta(n_1,n_2)\cos n_1x\cos n_2y$ i $\|G\|_p\leq I_4<\infty$, tj. $F\in SW(p,p,\alpha)$.

Analogno se dokazuje da za $p\geq 2$ F_1, i F_2 takodje pripadaju klase $SW(p,p,\alpha)$.

Time je dokazano da, ako $f\varepsilon M$ $SB(p,p,\alpha)$ i $p\geq 2$, to $f\varepsilon M\cap SW(p,p,\alpha)$, tj. $M\cap SB(p,p,\alpha)\subset M\cap SW(p,p,\alpha)$.......... (5)

Iz teoreme 1 a) slijedi obrnuta inkluzija:

$M\cap SW(p,p,\alpha)\subset M\cap SB(p,p,\alpha)$ .... (6)

Iz (5) i (6) slijedi tvrdjenje a) teoreme 2 za $p\geq 2$.

Neka je $p\leq 2$ i $f\varepsilon M$ $SW(p,p,\alpha)$. Tada, iz definicije klase $SW(p,p,\alpha)$, slijedi da postoji funkcija $g\varepsilon L_p([0,2\pi]^2)$, $g\sim\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1}b_{n_2}\beta(n_1,n_2)\cos n_1x\cos n_2y$. Na osnovu teoreme Palye slijedi da je $S<\infty$, i, znači $I_4^p<\infty$.

Analogno: $I_5^p<\infty$ i $I_6^p<\infty$. Time je dokazano da $f\varepsilon\Sigma SB^0(p,p,\alpha)$. Obzirom na lemu 10, zaključujemo, da za $p\leq 2$,

$M\cap SW(p,p,\alpha)\subset M\cap SB(p,p,\alpha)$ .... (7)

Iz teoreme 1 b) slijedi da je za $p\leq 2$

$M\cap SB(p,p,\alpha)\subset M\cap SW(p,p,\alpha)$ .... (8)

Iz (7) i (8) slijedi tvrdjenje a) teoreme 2 i za $p\leq 2$.

b) Razmotrimo integral J_5:

$$J_5=\int_0^1\int_0^1 \alpha(t_1,t_2)\omega^2_{k_1k_2}(F,t_1t_2)_p dt_1dt_2\approx\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\eta(\nu_1,\nu_2)\omega^2_{k_1k_2}(F,\tfrac{1}{\nu_1},\tfrac{1}{\nu_2})_p$$

Primjenjujući lemu 8, lako se dobija da je:

$$J_5\approx\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}a^2_{n_1}b^2_{n_2}\{n_1^{2k_1}n_2^{2k_2}\int_0^{n_1^{-1}}\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{2k_1}t_2^{2k_2}dt_1dt_2+\int_{n_1^{-1}}^1\int_{n_2^{-1}}^1\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2+$$

$$+n_1^{2k}\int_0^{n_1^{-1}}\int_{n_2^{-1}}^1\alpha(t_1,t_2)t_1^{2k}dt_1dt_2+n_2^{2k_2}\int_{n_1^{-1}}^1\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{2k_2}dt_1dt_2\ .$$

Na isti način može se dokazati da je za, $t\ \varepsilon(1,2\pi)$:

$$J_6=\int_0^1\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^2_{k_1k_2}(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\approx\int_0^1\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^2_{k_1}(F,t_1)_p dt_1dt_2\approx$$

$$=\sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1}^2\{n_1^{2k_1}\int_0^{n_1^{-1}}\int_1^{\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{2k_1}dt_1dt_2+\int_{n_1^{-1}}^{1}\int_1^{\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Uzimajući u obzir konvergenciju reda $\Sigma b_{n_2}^2$, dobijamo:

$$J_6\simeq\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2b_{n_2}^2\{n_1^{2k_1}\int_0^{n_1^{-1}}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{2k}dt_1dt_2+\int_{n_1^{-1}}^{1}\int_1^{\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\} .$$

Analogno:

$$J_7=\int_1^{2\pi}\int_0^1 \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^2(F,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\simeq$$

$$\simeq\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2b_{n_2}^2\{n_2^{2k_2}\int_1^{2\pi}\int_0^{n_2^{-1}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{2k_2}dt_1dt_2+\int_1^{2\pi}\int_{n_2^{-1}}^{1}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\},\ \text{i}$$

$$J_8=\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^2(F,\ t_1,t_2)_p\simeq\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2b_{n_2}^2\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2.$$

Sabirajući J_5, J_6, J_7, J_8 dobijamo:

$$I_4^2=J_5+J_6+J_7+J_8\simeq\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2b_{n_2}^2\beta^2(n_1,n_2)=\|G\|_p^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

gdje $G\varepsilon L_p([0,2\pi]^2)$, $G\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}b_{n_2}\beta(n_1,n_2)\cos n_1x\cos n_2y$.

Iz tvrdjenja (*) slijedi da, ako $F\varepsilon L\cap SB(p,2,\alpha)$, onda $F\varepsilon L\cap SW(p,2,\alpha)$, i obrnuto.

Analogno se dokazuje da, ako $F_i\ \varepsilon L\cap SB(p,2,\alpha)$, onda $F_i\varepsilon L\cap SW(p,2,\alpha)$ i obrnuto, $i=1,2$.

Uzimajući, još, u obzir lemu 3, dobijamo tvrdjenje b) teoreme 2.

§ 2. ODNOS KLASA $SB^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ PO PARAMETRIMA $p,\theta,\vec{k}$,

2.1. Oznake, definicije i osnovni rezultati

Klasu $SB^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$, $1\le p\le\infty$, $0<\theta<\infty$, $\vec{k}=(k_1,k_2)$, $k_1,k_2\varepsilon N$, $\alpha=\alpha(t_1,\ t_2)$ funkcija odredjena u 1.1., odredjujemo kao klasu funkcija $f(x,y)\varepsilon L_p^0([0,2\pi]^2)$ i takvih da je

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)dt_1dt_2<\infty .$$

Kažemo da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2)$ uslov, ako postoje realni brojevi σ_1 i σ_2 takvi da za svako $\delta_1 \varepsilon (0,2\pi)$, $\delta_2 \varepsilon (0,2\pi)$, $\varepsilon_1 > 0$ i $\varepsilon_2 > 0$ važe relacije:

$$1^0 \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1} t_2^{\sigma_2} dt_1dt_2 < \infty.$$

$$2^0 \quad a) \int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1-\varepsilon_1} t_2^{\sigma_2-\varepsilon_2} dt_1dt_2 = \infty$$

$$b) \int_0^{\delta_1}\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1-\varepsilon_1} dt_1dt_2 = \infty$$

$$c) \int_1^{2\pi}\int_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{\sigma_2-\varepsilon_2} dt_1dt_2 = \infty$$

Kažemo da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}^* = (\sigma_1^*,\sigma_2^*)$ ako

1^0 zadovoljava $\vec{\sigma}$ uslov

$$2^0 \quad a) \int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1^*} t_2^{\sigma_2^*} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1^*} t_2^{\sigma_2^*} dt_1dt_2$$

$$b) \int_0^{\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1^*} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1^*} dt_1dt_2$$

$$c) \int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_0^{\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{\sigma_2^*} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{\sigma_2^*} dt_1dt_2$$

Navedene definicije su uopštenja definicija datih za funkciju jedne nezavisno promjenljive u radu /12/. U radu /12/, kao primjer navedena je funkcija koja ne zadovoljava $\vec{\sigma}$ - uslov ni za jedno $\vec{\sigma}$, kao i funkcija koja zadovoljava $\vec{\sigma}$ uslov, ali ne zadovoljava $\vec{\sigma}^*$ uslov ni za jedno $\vec{\sigma}^* > \vec{\sigma}$. Odgovarajući primjeri mogu se konstruisati i u slučaju funkcije dveju nezavisno promjenljivih.

Kažemo da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2)$ uslov ako postoje realni brojevi λ_1 i λ_2 takvi da je:

$$1^0 \quad \int_{2\delta_1}^{2\pi}\int_{2\delta_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2} dt_1dt_2$$

$$2^0 \quad \int_{2\delta_1}^{2\pi}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1} dt_1dt_2$$

$$3^0 \quad \int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{2\delta_2}^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)t_2^{\lambda_2} dt_1dt_2 \le c\int_{\delta_1}^{2\delta_1}\int_{\delta_2}^{2\delta_2} \alpha(t_1,t_2)t_2^{\lambda_2} dt_1dt_2$$

U ovom paragrafu dokazaćemo sledeće teoreme:

Teorema 1. Neka je $1\le p\le\infty$, $0<\theta<\infty$ *i neka funkcija* $\alpha(t_1,t_2)$ *zadovoljava* $\vec{\sigma}=(\sigma,\sigma)$ *uslov. Tada:*

a) Ako je $k_i\theta<\sigma_i$, $i=1,2$, *onda klasa* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *sadrži sve konstante i samo njih.*

b) Ako je $k_1\theta\ge\sigma_1^*$ *i* $k_2\theta<\sigma_2$, *klasa* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *sadrži sve funkcije koje ne zavise od* y *i samo njih.*

c) Ako je $k_1\theta<\sigma_1$ *i* $k_2\theta\ge\sigma_2^*$, *klasa* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *sadrži sve funkcije koje ne zavise od* x *i samo njih.*

Teorema 2. Ako za brojeve p *i* θ *i vektore* $\vec{\sigma}^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*)$, $\vec{k}=(k_1,k_2)$, $\vec{k}^*=(k_1^*,k_2^*)$ *važe nejednakosti:* $1\le p\le\infty$, $0<\theta<\infty$, $\vec{k}\theta\ge\vec{\sigma}^*$, $\vec{k}^*\theta\ge\vec{\sigma}^*$, *a funkcija* $\alpha(t_1,t_2)$ *ispunjava* $\vec{\sigma}^*$ *uslov, onda se klase* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *i* $SB^o(p,\theta,\vec{k}^*\alpha)$ *poklapaju.*

Teorema 3. Ako je $\sigma_i\le k_i\theta<\sigma_i^*$, $i=1$ *ili* $i=2$, *onda se klase* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *ne poklapaju s klasama* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ *za* $\vec{k}\theta<\vec{\sigma}$, *takodje ni sa klasama* $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ $\vec{k}\theta\ge\vec{\sigma}^*$.

Teorema 4. Neka za brojeve p, q, θ, k_i, k_i^*, λ_i, σ_i^*, $i=1,2$ *važe nejednakosti:* $1\le p<q<\infty$, $0<\theta<\infty$, $k_i\theta\ge\sigma_i^*$, $k_i^*\ge\frac{\sigma_i^*}{\theta}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, $\frac{\lambda_i}{\theta}\ge\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, *funkcija* $\alpha(t_1,t_2)$ *ispunjava* $\vec{\sigma}^*$ *i* $\vec{\lambda}$ *- uslove i neka je*

$\alpha_1(t_1,t_2)=\alpha(t_1,t_2)t_1^{\theta(1/p-1/q)}t_2^{\theta(1/p-1/q)}$. *Tada je*

$SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)\subset SB^o(q,\theta,\vec{k}^*,\alpha_1)$

Teorema 5. Neka za brojeve p, q, r *i* θ *važe relacije:* $1\le p<q\le\infty$, $r<\theta<\infty$, $r=q$, *za* $q<\infty$ *i* $r=1$ *za* $q=\infty$ *i neka funkcija* $\alpha(t_1,t_2)=\alpha(t_1)\alpha(t_2)$ *ispunjava uslove:*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(t_1 t_2)^{\theta(1/p-1/q+1/r)}\alpha(t_1)\alpha(t_2)\}^{\frac{r}{r-\theta}}dt_1dt_2=M<\infty \quad i$$

$$\alpha_1(t_1,t_2)=\{(t_1t_2)^{\theta(1/p-1/q+1/r)}\alpha(t_1,t_2)\}^{\frac{r}{r-\theta}}\cdot$$

$$\cdot\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}[(y_1y_2)^{\theta(1/p-1/q+1/r)}\alpha(y_1,y_2)]^{\frac{r}{r-\theta}}dy_1dy_2\}^{-\frac{\theta}{r}}$$

Tada je $SB(p,\theta,\alpha)\subset SB(q,\theta,\alpha_1)$

Teorema 6. Ako je $\alpha_1(t_1,t_2)=\frac{1}{t_1t_2}\{\int_{\frac{t_1}{2}}^{t_1}\int_{\frac{t_2}{2}}^{t_2}\alpha(y_1,y_2)dy_1dy_2\}^{\frac{\theta_1}{\theta}}$

i $\theta<\theta_1$, *onda je* $SB(p,\theta,\alpha)\subset SB(p,\theta_1,\alpha_1)$.

Teorema 7. Ako je $\theta_1<\theta$ *i* $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\frac{\alpha_1^{\theta}(t_1,t_2)}{\alpha^{\theta_1}(t_1,t_2)}\}^{\frac{1}{\theta-\theta_1}}dt_1dt_2<\infty$

onda je $SB(p,\theta_1,\alpha)\subset SB(p,\theta,\alpha_1)$

Primjedba: Analogni rezultati za funkciju jedne promjenljive dati su u /12/ i /14/.

2.2. Pomoćni stavovi

Lema 1. Ako funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava σ^* uslov, onda, za $k_1\geq\frac{\sigma_1^*}{\theta}$, $k_2\geq\frac{\sigma_2^*}{\theta}$, $m_1\geq 0$, $m_2\geq 0$ važe nejednakosti:

$$\text{a) } S=\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}<<\frac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{m_2k_2\theta}}$$

$$\text{b) } S_1=\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\frac{\mu(n_1,0)}{2^{n_1k_1\theta}}<<\frac{\mu(m_1,0)}{2^{m_1k_1\theta}} \qquad \text{c) } S_2=\sum_{n_2=m_2}^{\infty}\frac{\mu(0,n_2)}{2^{n_2k_2\theta}}<<\frac{\mu(0,m_2)}{2^{m_2k_2\theta}}$$

/Veličina $\mu(n_1,n_2)$, $n_1=0,1,2,\ldots$, $n_2=0,1,2,\ldots$ definisana je u §1/.

Dokaz. a) Sumu S predstavimo u obliku:

$$S=\sum_{n_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2+1}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}+\sum_{n_1=m_1+1}^{\infty}\frac{\mu(n_1,m_2)}{2^{k_1n_1\theta}2^{k_2m_2\theta}}+$$

$$+\sum_{n_2=m_2+1}^{\infty}\frac{\mu(m_1,n_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}+\frac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{m_2k_2\theta}}$$

Zamjenjujući veličinu $\mu(n_1,n_2)$, dobijamo:

$$S=\int_0^{2^{-m_1}}\int_0^{2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}\,t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2+\frac{1}{2^{k_2m_2\theta}}\int_0^{2^{-m_1}}\int_{2^{-m_2}}^{2\cdot 2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}\,dt_1dt_2+$$

$$+\frac{1}{2^{k_1m_1\theta}}\int_{2^{-m_1}}^{2\cdot 2^{-m_1}}\int_0^{2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2+\frac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{m_2k_2\theta}}=S_3+S_4+S_5+S_6$$

Obzirom da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ ispunjava $\vec{\sigma}^*$ uslov biće:

$$S_3\le C\int_{2^{-m_1}}^{2\cdot 2^{-m_1}}\int_{2^{-m_2}}^{2\cdot 2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2=C\int_{2^{-m_1}}^{2\cdot 2^{-m_1}}\int_{2^{-m_2}}^{2\cdot 2^{-m_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{\sigma_1^*}t_2^{\sigma_2^*}t_1^{k_1\theta-\sigma_1^*}t_2^{k_2\theta-\sigma_2^*}dtdt$$

Kako je $k_i\theta\ge\sigma_i^*$, to je

$$S_3<<C2^{-m_1(k_1\theta-\sigma_1^*)}2^{-m_2(k_2\theta-\sigma_2^*)}\ \frac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1\sigma_1^*}2^{m_2\sigma_2^*}}<<\frac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{m_2k_2\theta}}\ .$$

Na isti način se dokazuje da su i sume S_i: $S_i<<\dfrac{\mu(m_1,m_2)}{2^{m_1k_1\theta}2^{m_2k_2\theta}}$, $i=4,5,6$.

Tvrdjenja b) i c) dokazuju se analogno.

Lema 2 /5/. Neka je $a_k\ge0$, $0<\alpha<\beta<\infty$.

Tada je $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta}\right)^{1/\beta}\le\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha}\right)$

Lema 3/8/. Neka je $a_n\ge0$, $b_n\ge0$, $1<\theta<\infty$.

Tada je a) Ako je $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu=a_n\beta_n$, onda je $\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\left(\sum_{n=1}^{\nu}b_n\right)^{\theta}\le$

$$\le\theta^{\theta}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_\nu b_\nu)^{\theta}.$$

b) Ako je $\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu=a_n\gamma_n$, onda je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\left(\sum_{n=\nu}^{\infty}b_n\right)^{\theta}\le\theta^{\theta}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\gamma_\nu b_\nu)^{\theta}.$$

Lema 4 /2/. Neka $f\in L_p^0(|0,2\pi|^2)$, $1\le p\le q\le\infty$.

Tada je $Y_{[2^{n_1}-1][2^{n_2}-1]}(f)_q\le C\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)(1/p-1/q)}Y_{[2^{\nu_1}-1][2^{\nu_2}-1]}(f)_p$,

gdje je veličina $Y_{n_1n_2}$ definisana u § 1.

Lema 5 /2/. Neka $f\in L_p^0([0,2\pi]^2)$, $1\le p\le q\le\infty$. i

$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{(\nu_1+1)(\nu_2+1)\}^{(1/p-1/q)-1}Y_{\nu_1\nu_2}(f)_p<\infty$. Tada $f\in L_q([0,2\pi]^2)$.

Lema 6 /2/. Neka $f\in L_p([0,2\pi]^2)$ i $2^{\nu_i}\le l_i\le2^{\nu_i+1}$, $i=1,2$.

Tada je $\omega_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2})_p \le \frac{C}{T_1^{k_1} T_2^{k_2}} \sum_{n_1=0}^{\nu_1+1} \sum_{n_2=0}^{\nu_2+1} 2^{n_1k_1} 2^{n_2k_2} Y_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]}(f)_p$.

Lema 7 /17/. Ako $f\in L_p^0([0,2\pi]^2)$, $1\le p\le q\le\infty$, onda

$$\omega^r_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_q << \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{r(\nu_1+\nu_2)(1/p-1/q)} \omega^r_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p ,$$

gdje je $r=1$ za $q=\infty$ i $r=q$ za $q<\infty$.

Lema 8 . Ako $f\in L_p^0([0,2\pi]^2)$, $1\le p\le\infty$, $0<\theta<\infty$, onda je

$$Y^\theta_{00}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^\theta_{2^{\nu_1}0}(f)_p+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^\theta_{02^{\nu_2}}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^\theta_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p<<$$

$$<<\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1 dt_2=J.$$

Dokaz: Kako je $Y_{00}(f)_p<<\omega_{k_1 k_2}(f,1,1)_p$ /lema 2.1.2/ i $\alpha(t_1,t_2)\ge c>0$, to je $Y^\theta_{00}(f)_p<<\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)dt_1dt_2<<J\ldots$ (1)

Na osnovu iste leme, za $t_2\in(1,2\pi)$, biće:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^\theta_{2^{\nu_1}0}(f)_p=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}Y^\theta_{2^{\nu_1}0}(f)_p\int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2<<$$

$$<<\int_1^{2\pi}\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,t_1,1)_p dt_1dt_2\le$$

$$<<\int_1^{2\pi}\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}}\alpha(t_1,t_2)\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1dt_2\le J \quad\ldots\ldots \qquad (2)$$

Analogno: $\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^\theta_{02^{\nu_2}}(f)_p<<J$ .... (3)

Pozivajući se još jedanput na istu lemu imamo:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^\theta_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p<<\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)\omega^\theta_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\approx J \quad .. \quad (4)$$

Iz (1), (2), (3) i (4) slijedi tvrdjenje leme.

Lema 9. Neka $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, $1\le p\le\infty$, $0<\theta<\infty$, $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}^*$ uslov, $\vec{k}\theta\ge\vec{\sigma}^*$. Tada je

$$J<<Y^\theta_{00}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^\theta_{2^{\nu_1}0}(f)_p+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^\theta_{02^{\nu_2}}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^\theta_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p.$$

Dokaz: Iz leme 6 slijedi da je

$$J= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \mu(n_1,n_2)\omega^{\theta}_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p <<$$

$$<< \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\{Y_{00}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{n_1}2^{\nu_1k_1}Y_{2^{\nu_1}0}(f)_p+\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{\nu_2k_2}Y_{02^{\nu_2}}(f)_p+$$

$$+\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{\nu_1k_1}2^{\nu_2k_2}Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\}^{\theta}=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Primjenjujući lemu 1, dobijamo:

$$J_1=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}Y^{\theta}_{00}(f)_p<<\mu(0,0)Y^{\theta}_{00}(f)_p<<Y^{\theta}_{00}(f)_p$$

Neka je $0<\theta\le 1$. Tada je /lema 2/

$$J_2=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}2^{\nu_1k_1}Y_{2^{\nu_1}0}(f)_p\}^{\theta}\le\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}2^{\nu_1k_1\theta}Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}(f)_p=$$

$$=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}2^{\nu_1k_1\theta}Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}(f)_p\sum_{n_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}<<\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}(f)_p.$$

/U zadnjem koraku smo koristili $\vec{\sigma}*$ uslov/.

Na isti način dokazujemo da je, za $0<\theta\le 1$,

$$J_3=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\{\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{\nu_2k_2}Y_{02^{\nu_2}}(f)_p\}^{\theta}<<\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^{\theta}_{02^{\nu_2}}(f)_p \quad \text{i}$$

$$J_4=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{\nu_1k_1}2^{\nu_2k_2}Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p\}^{\theta}<<$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p.$$

Sabirajući J_1, J_2, J_3 i J_4 dobijamo tvrdjenje leme za $0<\theta\le 1$.

Neka je $1<\theta<\infty$. Označimo: $\beta_{n_1}=\frac{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}{\mu(n_1,n_2)}\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,n_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}$

Primjenjujući lemu 1, iz nejednakosti

$$\beta_{n_1}<<\frac{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}{\mu(n_1,n_2)}\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}\text{, slijedi da je } \beta_{n_1}<<1.$$

Označavajući $B_{\nu_1}=\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{\nu_1k_1}2^{\nu_2k_2}Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p$ i primjenjujući lemu 3, dobijamo

$$J_4=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\{\sum_{\nu_1=0}^{n_1}B_{\nu_1}\}^{\theta}<<\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\left[\beta_{n_1}B_{n_1}\right]^{\theta}\}<<$$

$$<< \sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\left[\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}2^{n_1k_1}2^{n_2k_2}Y_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_p\right]^{\theta}\}.$$

Ako je $\beta^*_{n_2}=\frac{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}{\mu(n_1,n_2)}\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty}\frac{\mu(n_1,\nu_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{\nu_2k_2\theta}}$, to, iz leme 1, slijedi da je $\beta^*_{n_2}<<1$. Označavajući $B^*_{n_2}=2^{n_1k_1}2^{n_2k_2}Y_{2^{n_1}2^{n_2}}$ i primjenjujući lemu 3, dobijamo: $J_4<<\sum_{n_1=0}^{\infty}\{\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1k_1\theta}2^{n_2k_2\theta}}[\beta^*_{n_2}B^*_{n_2}]^{\theta}\}$, ili $J_4<<\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu(n_1,n_2)Y^{\theta}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_p$

Ocjene za J_2 i J_3 dobijamo na isti način.

Time je lema dokazana za svako $\theta\in(0,\infty)$.

Lema 10. Ako funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\lambda}$ uslov, onda

a) $2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}<<\mu(n_1,n_2)$ b) $S=\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\mu(\nu_1,\nu_2)2^{-\nu_1\lambda_1}2^{-\nu_2\lambda_2}<<\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}$.

Dokaz: a) Kako je $\alpha(t_1,t_2)\geq c>0$, to je, za $n_1\geq 1$ i $n_2\geq 1$:

$$c<<\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}dt_1dt_2\leq\int_{\frac{2}{2^{n_1}}}^{2\pi}\int_{\frac{2}{2^{n_2}}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}dt_1dt_2.$$

Primjenjujući $\vec{\lambda}$ uslov, dobijamo:

$$c<<2^{-n_1\lambda_1}2^{-n_2\lambda_2}\int_{\frac{1}{2^{n_1}}}^{\frac{2}{2^{n_1}}}\int_{\frac{1}{2^{n_2}}}^{\frac{2}{2^{n_2}}}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2=\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}$$

Tvrdjenje leme za slučaj $n_1=0$ ili $n_2=0$ izvodimo takodje koristeći $\vec{\lambda}$ uslov.

b) Sumu S predstavimo u obliku:

$$S=\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1\lambda_1}2^{\nu_2\lambda_2}}+\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\frac{\mu(\nu_1,n_2)}{2^{\nu_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}+\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\frac{\mu(n_1,\nu_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{\nu_2\lambda_2}}+\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}.$$

Lako se dokazuje da se sve dobijene sume majoriraju veličinom $\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}$. Zaista:

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\nu_1\lambda_1}2^{\nu_2\lambda_2}}\approx\int_{\frac{2}{2^{n_1}}}^{2\pi}\int_{\frac{2}{2^{n_2}}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}dt_1dt_2<<\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}.$$

Primjenjujući $\vec{\lambda}$, dobijamo:

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\frac{\mu(\nu_1,n_2)}{2^{\nu_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}\approx\frac{1}{2^{n_2\lambda_2}}\int_{\frac{1}{2^{n_2}}}^{\frac{2}{2^{n_2}}}\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{\lambda_1}dt_1dt_2=\frac{\mu(n_1,n_2)}{2^{n_1\lambda_1}2^{n_2\lambda_2}}.$$

2.3. Dokazi osnovnih teorema

Dokaz teoreme 1 a). Ako je $f(x,y)=c$, očigledno je da $f\in SB^{0}(p,\theta,\vec{k},\alpha)$.

Neka $f(x,y)\in SB^{0}(p,\theta,\vec{k},\alpha)$, tj. $J=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1dt_2<\infty$.

Razmotrimo integral $J_1=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1dt_2$.

Iz osobina modula glatkosti /9/ slijede nejednakosti:

$$\frac{\omega_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p}{t_1^{k_1}\ t_2^{k_2}}<<2^{k_1}2^{k_2}\frac{\omega_{k_1k_2}(f,t_1',t_2')_p}{t_1'^{k_1}\ t_2'^{k_2}},\ \text{za}\ t_1'\le t_1\ \text{i}\ t_2'\le t_2\ \text{i}$$

$\omega_{k_1k_2}(f,\frac{\pi}{n_1},\frac{\pi}{n_2})_p\ge|C_{n_1n_2}|$, gdje su $C_{n_1n_2}$ Fourierovi koeficijenti funkcije f. Primjenjujući ove nejednakosti, dobijamo:

$$J_1\gg\left(\frac{n_1}{\pi}\right)^{k_1\theta}\left(\frac{n_2}{\pi}\right)^{k_2\theta}|C_{n_1n_2}|^{\theta}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2.$$

Kako je, za $k_1\theta<\sigma_1$ i $k_2\theta<\sigma_2$, $\int_0^{\frac{\pi}{n_1}}\int_0^{\frac{\pi}{n_2}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta}t_2^{k_2\theta}dt_1dt_2=\infty$ /2 a) σ- uslov/, i $J_1<J<\infty$, to je $C_{n_1n_2}=0$ za $n_1\ge 1$ i $n_2\ge 1$. Uzimajući u obzir σ-2^0 b) uslov i nejednakosti $C_{n_10}\le\omega_{k_1}(f,\frac{\pi}{n_1})$ i

$\frac{\omega_k(t_1)}{t_1^k}\lesssim 2^k\frac{\omega_k(t_1')}{t_1'^k}$, $t_1'\le t_1$, zaključujemo da je $C_{n_10}=0$ za $n_1\ge 1$.

Analogno se dokazuje da je i $C_{0n_2}=0$ za $n_2\ge 1$.

Iz navedenoga slijedi da samo koeficijenat C_{00} može da bude različit od nula, i, znači, funkcija f je ekvivalentna konstanti.

Tvrdjenja b) i c) su, sada, očigledna.

Dokaz teoreme 2. Prema definiciji funkcija $f\in SB^{0}(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ ako je $J=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1dt_2<\infty$.

Sa $SY^{0}(p,\theta,\alpha)$ označimo klasu funcija $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, takvih da je

$$Y^{\theta}_{00}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}(f)_p+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^{\theta}_{02^{\nu_2}}(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p<\infty.$$

Iz lema 8 i 9 slijedi da se, pri uslovima teoreme 2, klase $SY^o(p,\theta,\alpha)$ i $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$, odnosno klase $SY^o(p,\theta,\alpha)$, i $SB^o(p,\theta,\vec{k}^*,\alpha)$ poklapaju, a odatle zaključujemo da se i klase $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ i $SB^o(p,\theta,\vec{k}^*,\alpha)$ poklapaju.

Time je teorema 2 dokazana.

Dokaz teoreme 3. Navešćemo primjer iz koga slijedi tvrdjenje teoreme 3:

Funkcija $f(x,y)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cos\frac{1}{a_1^{n_1}}x\cos\frac{1}{a_2^{n_2}}y$, $0<a_i<1$, $i=1,2$ ima module neprekidnosti /10/:

$\omega_{11}(f,t_1,t_2)_c \geq c t_1 t_2 \ln\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{t_2}$ /za neku konstantu c/ i

$\omega_{22}(f,t_1,t_2)_c = O(t_1 t_2)$.

Ako je $\alpha(t_1,t_2)=\dfrac{1}{t_1^{\sigma_1+1}t_2^{\sigma_2+1}(\ln\frac{1}{t_1}\ln\frac{1}{t_2})^{\gamma}}$, $\gamma>1$, $\sigma_1=\sigma_2=\theta$, onda je,

za $\gamma-\theta\leq 1$, $\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\alpha(t_1,t_2)\omega_{11}^{\theta}(f,t_1,t_2)_c dt_1dt_2=\infty$ i

$\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\alpha(t_1,t_2)\omega_{22}^{\theta}(f,t_1,t_2)_c dt_1dt_2<\infty$, tj.

$f\in SB^o(p,\theta,(2,2),\alpha)$, ali $f\notin SB^o(p,\theta,(1,1),\alpha)$.

Dokaz teoreme 4. Iz ekvivalencije

$$J=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_1(t_1,t_2)\omega_{k_1^*k_2^*}^{\theta}(f,t_1,t_2)_q dt_1dt_2 \asymp$$

$$\asymp\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu_1(\nu_1,\nu_2)\omega_{k_1^*k_2^*}^{\theta}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_q,$$ primjenjujući lemu 7

za $q<\infty$, dobijamo:

$$J\ll\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu_1(\nu_1,\nu_2)\{\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty}2^{(n_1+n_2)(1/p-1/q)q}\omega_{k_1^*k_2^*}^{q}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p\}^{\theta/q}$$

Izražavajući μ_1 preko μ i primjenjujući lemu 2, imaćemo, za $\theta\leq q$:

$$J\ll\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}2^{-\theta(\nu_1+\nu_2)(1/p-1/q)}\mu(\nu_1,\nu_2)\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty}\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty}2^{\theta(n_1+n_2)(1/p-1/q)}\omega_{k_1^*k_2^*}^{\theta}=$$

$$=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}2^{\theta(n_1+n_2)(1/p-1/q)}\omega_{k_1^*k_2^*}^{\theta}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\frac{\mu(\nu_1,\nu_2)}{2^{\theta(\nu_1+\nu_2)(1/p-1/q)}}.$$

Uzimajući u obzir da je $\lambda_i \geq \theta(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ i primjenjujući lemu, 10 lako se dobija da je

$$J \ll \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\mu(n_1,n_2)\omega^{\theta}_{k_1^* k_2^*}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p \ll \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\mu(n_1,n_2)\omega^{\theta}_{k_1^* k_2^*}(f,\frac{1}{2^{n_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p = J_1$$

Na osnovu teoreme 2 biće $J_1 \asymp \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1\,k_2}(f,t_1,t_2)_p dt_1 dt_2 = J_2$,

pa, iz $f \in SB^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$, slijedi $J_2<\infty$, odnosno $J_1<\infty$.

Time je dokazano da je i $J<\infty$.

Još treba dokazati da $f \in L_q$.

Iz $J<\infty$, slijedi da je $\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1\,k_2}(f,t_1,t_2)_q dt_1 dt_2<\infty$, a iz nejednakosti $\omega^{\theta}_{k_1\,k_2}(f,1,1)_q \leq c\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\omega^{\theta}_{k_1\,k_2}(f,t_1,t_2)_q dt_1 dt_2 \leq$

$\leq c\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1\,k_2}(f,t_1,t_2)_q dt_1 dt_2<\infty$, slijedi da je $\omega_{k_1 k_2}(f,1,1)_q<\infty$.

Kako je $f(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x+t_1,y+t_2)-f(x,y+t_2)-f(x+t_1,y)+$ $+f(x,y)\}dt_1,dt_2$, to je

$$\|f\|_q \leq \frac{1}{(2\pi)^2}\left\|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta^{1\,1}_{t_1 t_2}f dt_1 dt_2\right\|_q \leq \sup_{|t_1|\leq 2\pi,|t_2|\leq 2\pi}\|\Delta^{1\,1}_{t_1 t_2}f\|_q \leq \omega_{11}(f,2\pi,2\pi)_q \leq$$

$\leq c\omega_{11}(f,1,1)_q$. Analogno se dokazuje da je $\|f\|_q \leq \omega_{k_1 k_2}(f,1,1)_q$, tj. $f \in L_q$.

Iz $f \in L_q$ i $J<\infty$, slijedi da $f \in SB^0(q,\theta,\vec{k}^*,\alpha_1)$ što je i trebalo dokazati.

Ako je $\theta>q$, pri dokazivanju da je $J<\infty$ primjenjujemo lemu 3.

Teorema 5 se dokazuje analogno odgovarajućoj teoremi za slučaj funkcije jedne promjenljive /12/.

Teorema 6 slijedi poslije nekoliko prostih majoracija.

Teorema 7 se dokazuje direktnom primjenom Hölderove nejednakosti.

§ 3. ODNOS KLASA $SB^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ i $S\,\Delta^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$

Klasu $S\,\Delta^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ odredjujemo kao klasu funkcija $f(x,y) \in L^0_p$, takvih da je:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\,\|\Delta_{t_1 t_2}^{k_1 k_2}f\|_p^\theta dt_1dt_2<\infty$$

/Veličina $\Delta_{t_1t_2}^{k_1k_2}f$ i funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ uvedeni su u § 1.1./.

Kažemo da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava γ-uslov ako je

$$\int_{\delta_1}^{2\pi}\int_{\delta_2}^{2\pi}\frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2\le c\alpha(\delta_1,\delta_2),\quad \text{za svako } \delta_1,\delta_2\in(0,2\pi).$$

Osnovni rezultat ovog paragrafa je

Teorema 1: Ako brojevi p i θ i vektori $\vec{\sigma}^*$, $\vec{k}$, $\vec{k}^*$ ispunjavaju uslove: $1\le p\le\infty$, $1\le\theta<\infty$, $\vec{k}\theta\ge\vec{\sigma}^*$, $\vec{k}^*\theta\ge\vec{\sigma}^*$, a funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}^*$ i γ uslovima, onda se klase $S\Lambda^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ i $SB^o(p,\theta,\vec{k}^*,\alpha)$ poklapaju.

Primjedba: Analogna teorema za funkciju jedne promjenljive data je u /14/.

Dokazaćemo sledeću lemu:

Lema 1. Neka $f\in L_p([0,2\pi]^2)$, $1\le p\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $\alpha(t_1,t_2)$ ispunjava $\vec{\sigma}^*$ i γ uslove. Tada je $S\Lambda^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)\subset SY^o(p,\theta,\alpha)$.

Dokaz: Obzirom na definicije klasa $S\Lambda^o$ i SY^o, treba dokazati da iz

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\|\Delta_{t_1t_2}^{k_1k_2}\|_p^\theta dt_1dt_2<\infty\quad,\ \text{slijedi}$$

$$Y_{00}^\theta(f)_p+\sum_{\nu_1=0}^\infty\mu(\nu_1,0)Y_{2^{\nu_1}0}^\theta(f)_p+\sum_{\nu_2=0}^\infty\mu(0,\nu_2)Y_{02^{\nu_2}}^\theta(f)_p+$$

$$+\sum_{\nu_1=0}^\infty\sum_{\nu_2=0}^\infty\mu(\nu_1,\nu_2)Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}^\theta(f)_p<\infty\ .$$

Neka su prirodni brojevi $\bar{k}_r$ i m_r, $r=1,2$ izabrani tako da je $\bar{k}_r\ge\max\{\frac{k_r}{2}+1,\ \frac{k_r\theta+1}{2}\}$, $\frac{n_r}{2\bar{k}_r}<m_r\le\frac{n_r}{2\bar{k}_r}+1$, $n=1,2,\dots$, $r=1,2$.

Označimo sa $K_{n_r}(t)$ jezgro Jacksona:

$$K_{n_r}(t)=b_{m_r}\left(\sin\frac{m_rt}{2}\right)^{2\bar{k}_r}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\bar{k}_r},\ \text{gdje je } b_{m_r} \text{ izabrano}$$

tako da je $\int_{\pi}^{\pi}K_{n_r}(t)dt=1$.

Kako je $\int\limits_{\pi}^{\pi}(\sin\frac{m_r t}{2})^{2\overline{k}_r}(\sin\frac{t}{2})^{2\overline{k}_r}dt=2\int\limits_0^{\pi}(\sin\frac{m_r t}{2})^{2\overline{k}_r}(\sin\frac{t}{2})^{2\overline{k}_r}\approx$
$\approx\frac{1}{m_r}\int\limits_o^{\frac{m\pi}{2}}(\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{m_r}})^{2\overline{k}_r}dt\geq\frac{1}{m_r}\int\limits_0^{\pi}(\frac{\sin t}{\sin\frac{t}{m_r}})^{2\overline{k}_r}dt$, to, koristeći dobijenu nejednakost kao i činjenicu da, za $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\frac{2t}{\pi}\leq\sin t$ i uslova $m_r>>n_r$ i $\int\limits_{\pi}^{\pi}k_{n_r}(t)dt=1$, slijedi da je $b_{m_r}<<n_r^{-2\overline{k}_r+1}$, odnosno, ako je $n_r=2^{\nu_r}$, $b_{m_r}<<2^{-\nu_r(2\overline{k}_r-1)}$.

Iz nejednakosti /11/: $Y_{\nu_1\nu_2}(f)_p\leq\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{\nu_1}(t_1)K_{\nu_2}(t_2)\;\|\Delta_{t_1t_2}^{k_1k_2}f\|_p dt_1dt_2$ primjenom Hölderove nejednakosti, dobijamo:

$$Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p\leq\int_{-\pi}^{\pi}\{[\int_{-\pi}^{\pi}K_{2^{\nu_1}}(t_1)K_{2^{\nu_2}}(t_2)\;\|\Delta_{t_1t_2}^{k_1k_2}f\|_p^{\theta}dt_1]^{1/\theta}\cdot$$
$$\cdot[\int_{-\pi}^{\pi}K_{2^{\nu_1}}(t_1)K_{2^{\nu_2}}(t_2)dt_1]^{(\theta-1)/\theta}\}dt_2\approx$$
$$\approx\int_{-\pi}^{\pi}\{\int_{-\pi}^{\pi}K_{2^{\nu_1}}(t_1)K_{2^{\nu_2}}(t_2)\;\|\Delta_{t_1t_2}^{k_1k_2}f\|_p^{\theta}dt_1\}^{1/\theta}\{K_{2^{\nu_2}}(t_2)\}^{(\theta-1)/\theta}dt_2.$$

Primjenjujući još jedanput Hölderovu nejednakost, dobijamo

$$Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p\leq\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{2^{\nu_1}}(t_1)K_{2^{\nu_2}}(t_2)\|\Delta_{tt}^{kk}f\|_p^{\theta}dt_1dt_2\}^{1/\theta}\{\int_{-\pi}^{\pi}K_{2^{\nu_2}}(t_2)dt_2\}^{(\theta-1)/\theta},$$

tj. $Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p<<\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}K_{2^{\nu_1}}(2t_1)K_{2^{\nu_2}}(2t_2)\|\Delta_{2t_12t_2}^{k_1k_2}f\|_p^{\theta}dt_1dt_2$ i, znači,

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_p\leq$$
$$\leq\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\|\Delta_{2t_1,2t_2}^{k_1,k_2}f\|_p^{\theta}\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}K_{2^{\nu_1}}(2t_1)K_{2^{\nu_2}}(2t_2)\mu(\nu_1,\nu_2)dt_1dt_2.$$

Uzimajući u obzir da je $b_{m_r}\leq 2^{-\nu_r(2\overline{k}_r-1)}$, $m_r>2^{\nu_r}$, dobijamo da je

$$S=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)K_{2^{\nu_1}}(2t_1)K_{2^{\nu_2}}(2t_2)\leq S'=$$
$$=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)(2^{\nu_1}t_1)^{-2\overline{k}_1}2^{\nu_1}(\sin m_1t_1)^{2\overline{k}_1}(2^{\nu_2}t_2)^{-2\overline{k}_2}2^{\nu_2}(\sin m_2t_2)^{2\overline{k}_2}.$$

Uzmimo prirodan broj i_1 tako da za fiksirano $t_1\in(0,\pi/2]$ bude $2^{\nu_1}t_1\leq 1$ za $\nu_1\leq i_1$ i $2^{\nu_1}t_1>1$, za $\nu_1\geq i_1+1$. Na isti način uzmimo i i_2.

Sumu S' predstavimo u obliku:

$$S'=\sum_{\nu_1=0}^{i_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{i_2-1}+\sum_{\nu_1=i_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{i_2-1}+\sum_{\nu_1=0}^{i_1-1}\sum_{\nu_2=i_2}^{\infty}+\sum_{\nu_1=i_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=i_2}^{\infty}=S_1+S_2+S_3+S_4.$$

Uzimajući u obzir da je $\sin m_i t_i \le m_i t_i$ i da funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava γ uslov, za S_1 dobijamo ocjenu:

$$S_1 \ll \sum_{\nu_1=0}^{i_1-1} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} \mu(\nu_1,\nu_2) 2^{\nu_1} 2^{\nu_2} \simeq \sum_{\nu_1=0}^{i_1-1} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} \int_{2^{-\nu_1}}^{2\cdot 2^{-\nu_1}} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1 t_2} =$$

$$= \int_{2^{-(i_1-1)}}^{2} \int_{2^{-(i_2-1)}}^{2} \frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1 t_2}\, dt_1 dt_2 \le \int_{2t_1}^{2\pi} \int_{2t_2}^{2\pi} \frac{\alpha(u_1,u_2)}{u_1 u_2} du_1 du_2 \ll \alpha(2t_1,2t_2).$$

Za dobijanje ocjene za sumu S_2 zamijenimo $\sin m_1 t_1$ sa 1 i $\sin m_2 t_2$ sa $m_2 t_2$:

$$S_2 \le \sum_{\nu_1=i_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} \mu(\nu_1,\nu_2) t_1^{-2\bar{k}_1} 2^{-\nu_1(2\bar{k}_1-1)} 2^{\nu_2} \le$$

$$\le 2^{(i_1+1)2\bar{k}_1} 2^{-i_1(2\bar{k}_1-k_1\theta-1)} \sum_{\nu_1=i_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} 2^{-\nu_1 k_1\theta} 2^{\nu_2} \mu(\nu_1,\nu_2) \simeq$$

$$\simeq 2^{i_1 k_1\theta} 2^{i_1} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} 2^{\nu_2} \int_0^{2\cdot 2^{-i_1}} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \alpha(t_1,t_2) t_1^{k_1\theta} dt_1 dt_2.$$

Primjenjujući prvo $\vec{\sigma}^*$ uslov, a zatim γ uslov, dobijamo:

$$S_2 \le 2^{i_1 k_1\theta} 2^{i_1} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} 2^{\nu_2} 2^{-i_1 k_1\theta} \int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{4\cdot 2^{-i_1}} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \alpha(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \simeq$$

$$\simeq \int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{4\cdot 2^{-i_1}} \sum_{\nu_2=0}^{i_2-1} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1 t_2}\, dt_1 dt_2 \le \int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{2\pi} \int_{2\cdot 2^{-i_2}}^{2\pi} \frac{\alpha(u_1,u_2)}{u_1 u_2}\, du_1 du_2 \le \alpha(2t_1,2t_2).$$

Analogno se dokazuje da je $S_3 \ll \alpha(2t_1,2t_2)$.

Za dobijanje ocjene sume S_4 zamijenimo $\sin m_r t_r$ sa 1 i koristimo pretpostavku da je $2\bar{k}_r - k_r\theta - 1 > 0$ i $2^{-(i_r+1)} \le t_r \le 2^{-i_r}$, $r=1,2$:

$$S_4 \le t_1^{-2\bar{k}_1} t_2^{-2\bar{k}_2} \sum_{\nu_1=i_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=i_2}^{\infty} \mu(\nu_1,\nu_2) 2^{-\nu_1 k_1\theta} 2^{-\nu_2 k_2\theta} 2^{-\nu_1(2\bar{k}_1-k_1\theta-1)} 2^{-\nu_2(2\bar{k}_2-k_2\theta-1)} \ll$$

$$\ll 2^{i_1 k_1\theta} 2^{i_2 k_2\theta} 2^{i_1} 2^{i_2} \sum_{\nu_1=i_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=i_2}^{\infty} \mu(\nu_1,\nu_2) 2^{-\nu_1 k_1\theta} 2^{-\nu_2 k_2\theta}.$$

Kako funkcija $\alpha(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}^*$ i γ uslove, biće:

$$S_4 \le 2^{i_1 k_1\theta} 2^{i_2 k_2\theta} 2^{i_1} 2^{i_2} \int_0^{2\cdot 2^{-i_1}} \int_0^{2\cdot 2^{-i_2}} \alpha(t_1,t_2) t_1^{k_1\theta} t_2^{k_2\theta} dt_1 dt_2 \ll$$

$$<<2^{i_1}2^{i_2}\int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{4\cdot 2^{-i_1}}\int_{2\cdot 2^{-i_2}}^{4\cdot 2^{-i_2}}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\le\int_{2t_1}^{4\cdot 2^{-i_1}}\int_{2t_2}^{4\cdot 2^{-i_2}}\frac{\alpha(u_1,u_2)}{u_1u_2}du_1du_2\le\alpha(2t_1 2t_2).$$

Sabirajući S_1, S_2, S_3 i S_4, dobijamo da je $S<<(2t_1,2t_2)$ i, znači,

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\nu_2)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\alpha(2t_1,2t_2)\,\|\Lambda^{k_1k_2}_{t_1t_2}f\|^{\theta}_p dt_1dt_2 =$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(t_1,t_2)\,\|\Lambda^{k_1k_2}_{t_1t_2}\|^{0}_p dt_1dt_2 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Ocijenimo, sada, sumu S_5, $S_5=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)K_{2^{\nu_1}}(2t_1)$.

Očigledno je da je $S_5\le\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)(2^{\nu_1}t_1)^{-2k_1}2^{\nu_1}(\sin m_1t_1)^{2k_1}=S_6+S_7$,

gdje je $S_6=\sum_{\nu_1=0}^{i_1-1}\mu(\nu_1,0)(2^{\nu_1}t_1)^{-2\bar{k}_1}2^{\nu_1}(\sin m_1t_1)^{2k_1}\le\sum_{\nu_1=0}^{i_1-1}2^{\nu_1}\mu(\nu_1,0)=$

$$=\sum_{\nu_1=0}^{i_1-1}2^{\nu_1}\int_{2^{-\nu_1}}^{2\cdot 2^{-\nu_1}}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\approx\int_{2\cdot 2^{i_1}}^{2}\int_1^{\pi}\frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1t_2}t_2dt_1dt_2<<$$

$$<<\int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{2\pi}\int_{2\cdot 2^{-i_2}}^{2\pi}\frac{\alpha(t_1t_2)}{t_1t2}dt_1dt_2<\alpha(2t_1,2t_2) \quad \text{i}$$

$$S_7<<t_1^{-2\bar{k}_1}2^{-i_1(2\bar{k}_1-k_1\theta-1)}\sum_{\nu_1=i}^{\infty}\mu(\nu_1,0)2^{-k_1\nu_1\theta}\le 2^{i_1}\int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{4\cdot 2^{-i_1}}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1dt_2\approx$$

$$\approx\int_{2\cdot 2^{-i_1}}^{4\cdot 2^{-i_1}}\int_1^{2\pi}\frac{\alpha(t_1,t_2)}{t_1t_2}t_2dt_1dt_2<<\alpha(2t_1,2t_2),\ \text{tj.}\ S_5<<\alpha(2t_1,2t_2).$$

Iz nejednakosti $\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\|\Delta^{k_1k_2}_{2t_12t_2}f\|^{\theta}_p\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)K_{2^{\nu_1}}(2t_1)$,

tada, slijedi da je

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,0)Y^{\theta}_{2^{\nu_1}0}\le\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(t_1,t_2)\,\|\Delta^{k_1k_2}_{t_1t_2}f\|^{0}_p dt_1dt_2 \quad \ldots\ldots \qquad (2)$$

Analogno se dokazuje da je

$$\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\mu(0,\nu_2)Y^{0}_{0 2^{\nu_2}}\le\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(t_1,t_2)\,\|\Lambda^{k_1k_2}_{t_1t_2}f\|^{0}_p dt_1dt_2 \quad \ldots\ldots \qquad (3)$$

Konačno, iz $Y_{00}(f)_p\le\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\Delta^{k_1k_2}_{t_1t_2}f\|_p dt_1dt_2$, primjenjujući Hölderovu nejednakost i uzimajući u obzir da je $\alpha(t_1,t_2)\ge c>0$, dobijamo:

$$Y^{\theta}_{oo}(f)_p << \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\Delta^{k_1k_2}_{t_1t_2} f\|^{\theta}_p dt_1 dt_2 << \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2) \|\Delta^{k_1k_2}_{t_1t_2} f\|^{\theta}_p dt_1 dt_2 \quad \ldots (4)$$

Iz (1), (2), (3) i (4) slijedi tvrdjenje teoreme.

Dokaz teoreme. Iz leme 9, 2.2, činjenice da je $\|\Delta^{k_1k_2}_{t_1t_2} f\|_p \leq \omega_{k_1k_2}(f,t_1,t_2)_p$ i leme 1. slijedi da se, pod pretpostavkama naše teoreme, klase $S\Lambda^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ i $SY^o(p,\theta,\alpha)$ poklapaju. Iz leme 2.2.8 i 2.2.9 slijedi da se, pod istim pretpostavkama, i klase $SB^o(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ i $SY^o(p,\theta,\alpha)$ poklapaju.

Time je teorema dokazana.

G L A V A III

§ 1. MEDJUSOBNA VEZA KLASA $SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ I $SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$

1.1. Oznake, definicije i osnovni rezultati

Sa $L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $1\le p_i<\infty$, $i=1,2$ ćemo označavati prostor mjerljivih funkcija $f(x,y)$, 2π - periodičkih po promjenljivima x i y i takvih da je

$$\|f\|_{\vec{p},([0,2\pi]^2)}=\|f\|_{\vec{p}}=\big\|\|f\|_{p_1,x}\big\|_{p_2,y}<\infty .$$

Veličine $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_{\vec{p}}$ i $Y_{\nu_1\nu_2}(f)_{\vec{p}}$ se definišu analogno veličinama $\omega_{k_1k_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ i $Y_{\nu_1\nu_2}(f)_p$ /I.1.1./.

Klasu funkcija $SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$, $\vec{p}=(p_1,p_2)$ $1\le p_i\le\infty$, $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$, $0<\theta_i<\infty$, $i=1,2$ definišemo kao klasu funkcija $f\in L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, takvih da je

$$I_1^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(f,t_1,t_2)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

$$I_2^{\theta_2}=\int_1^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1}^{\theta_1}(f,t_1)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

$$I_3^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\{\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)\omega_{k}^{\theta_1}(f,t_2)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

Za $\nu_1\ge1$ i $\nu_2\ge1$ uvedimo sledeće oznake:

$$\beta_0^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)=\int_{\frac{1}{\nu_2}}^{2\pi}\{\int_{\frac{1}{\nu_1}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$$

$$\beta_1^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)=\nu_1^{k_1\theta_2}\int_{\frac{1}{\nu_2}}^{2\pi}\{\int_0^{\frac{1}{\nu_1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta_1}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$$

$$\beta_2^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)=\nu_2^{k_2\theta_2}\int_0^{\frac{1}{\nu_2}}\{\int_{\frac{1}{\nu_1}}^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)t_2^{k_2\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$$

$$\beta_3^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)=\nu_1^{k_1\theta_2}\nu_2^{k_2\theta_2}\int_0^{\frac{1}{\nu_2}}\{\int_0^{\frac{1}{\nu_1}}\alpha(t_1,t_2)t_1^{k_1\theta_1}t_2^{k_2\theta_1}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$$

Klasu funkcija $SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$, $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $1\le p_i\le\infty$, $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$ $0<\theta_i<\infty$, $i=1,2$ definišemo kao klasu funkcija $f\in L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ koje zadovoljavaju uslov: Ako je

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} A_{\nu_1\nu_2}(x,y)$$

Fourierov red funkcije $f(x,y)$, onda postoji funkcija $g(x,y)\in L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ čiji je Fourierov red

$$g\sim\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\beta(\nu_1,\nu_2)\,A_{\nu_1\nu_2}(x,y),$$

gdje je $\beta(0,0)=\beta_0(1,1)$, $\beta^{\theta_2}(\nu_1,0)=\beta_1^{\theta_2}(\nu_1,1)+\beta_0^{\theta_2}(\nu_1,1)$, $\beta^{\theta_2}(0,\nu_2)=$ $=\beta_2^{\theta_2}(1,\nu_2)+\beta_0^{\theta_2}(1,\nu_2)$, $\beta^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)=\beta_0^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)+\beta_1^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)+\beta_2^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)+\beta_3^{\theta_2}(\nu_1,\nu_2)$.

U ovom paragrafu dokazuju se sledeće teoreme:

Teorema 1. Neka je $1<p_i<\infty$, $0<\theta_i<\infty$, $i=1,2$. *Tada*

a) *ako je* $\max(2,p_1,p_2)\le\min(\theta_1,\theta_2)$, *onda je* $SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)\subset SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$

b) *ako je* $\max(\theta_1,\theta_2)\le\min(2,p_1,p_2)$, *onda je* $SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)\subset SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$

Teorema 2. a) *Ako je* $p_1=p_2=p$ *i* $\theta_1=\theta_2=p$, *onda je* $M\cap SW(\vec{p},\vec{p},\alpha)=M\cap SB(\vec{p},\vec{p},\alpha)$

b) *Ako je* $p_1=p_2=p$ *i* $\theta_1=\theta_2=2$, *onda je* $L\cap SB(\vec{p},\vec{2},\alpha)=L\cap SW(\vec{p},\vec{2},\alpha)$

1.2. Pomoćni stavovi

Lako se provjerava da modul glatkosti u prostoru $L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ ima sve osobine koje i u prostoru $L_p([0,2\pi]^2)$.

Nejednakosti Minkowskoga i Höldera u metrici $L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ dokazane su u /16/.

Leme analogne lemama iz II1.2. važe takodje i u metrici $L_p([0,2\pi]^2)$.

Zaista,

Iz uslova $f \in L^{o}_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ slijedi da je $f(x,y)=$
$= \frac{(-1)^{k_2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^{k_2}_{t_2} f dt_2$ i, znači:

$$\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\vec{p}} = \sup_{|t_1| \le \delta_1} \|\Delta^{k_1}_{t_1}\|_{\vec{p}} = \sup_{|t_1| \le \delta_1} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \Delta^{k_1 k_2}_{t_1 t_2} f dt_2 \right|^{p_1} dx \right\}^{p_2/p_1} dy \right)^{1/p_2}.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga, dobijamo

$$\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\vec{p}} \le \sup_{|t_1| \le \delta_1} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left|\Delta^{k_1 k_2}_{t_1 t_2} f\right|^{p_1} dx \right]^{1/p_1} dt_2 \right\}^{p_2} dy\right)^{1/p_2},$$

odakle, primjenom Hölderove nejednakosti, dobijamo

$$\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\vec{p}} \le \sup_{|t_1| \le \delta_1} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left|\Delta^{k_1 k_2}_{t_1 t_2} f\right|^{p_1} dx \right\}^{p_2/p_1} dt_2 dy\right)^{1/p_2} =$$

$$= \sup_{|t_1| \le \delta_1} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \|\Delta^{kk}_{tt} f\|^{p_2}_{\vec{p}} dt_2\right)^{1/p_2} \le c \sup_{|t_1| \le \delta, |t_2| \le 2\pi} \|\Delta^{k_1 k_2}_{t_1 t_2} f\|_{\vec{p}}.$$

Iz poslednje nejednakosti, koristeći definiciju i osobine modula glatkosti dobijamo da je

$\omega_{k_1}(f,\delta_1)_{\vec{p}} \le c\,\omega_{k_1 k_2}(f,\delta_1,1)_{\vec{p}}$, čime je dokazana lema II.1.2. u metrici $L_{\vec{p}}$.

Leme analogne lemama 2 i 4 dokazane su u /2/.

Leme analogne lemama 6 i 7 dokazane su u /16/.

Leme 5 i 8 u metrici $L_{\vec{p}}$ dokazuju se kao i u metrici L_p.

Lema 11 u metrici $L_{\vec{p}}$ glasi:

Ako $f \in L^{o}_{p}([0,2\pi]^2)$, $1 \le p_i < \infty$, $i=1,2$ i ako je

$\int_0^{2\pi} \{\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1 k_2}(f,t_1,t_2)_{\vec{p}} dt_1\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 < \infty$, onda je

$\int_1^{2\pi} \{ \int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1}(f,t_1)_{\vec{p}} dt_1\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 < \infty$ i

$\int_0^{2\pi} \{ \int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1}(f,t_2)_{\vec{p}} dt_1\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 < \infty$

i dokazuje se analogno odgovarajućoj lemi u metrici L_p.

Sa $\Sigma SB^{o}(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ označavamo klasu funkcija $f(x,y)\varepsilon$ $\varepsilon L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, takvih da je:

$$I_4^{\theta_2} = \int_0^{2\pi} \{\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F,t_1,t_2)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

$$I_5^{\theta_2} = \int_1^{2\pi} \{\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1}^{\theta_1}(F_1,t_1)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

$$I_6^{\theta_2} = \int_0^{2\pi} \{\int_1^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_2}^{\theta_1}(F_2,t_2)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty \quad ,$$

gdje su F, F_1, F_2 funkcije iz leme 3 II.1.2.

Dokaz tvrdjenja da se klase $\Sigma SB^{o}(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ i $SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ poklapaju je analogan dokazu odgovarajućeg tvrdjenja u metrici L_p, /lema 12/.

1.3. Dokazi teorema 1 i 2

Obzirom da se klase $SB(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ i $\Sigma SB^{o}(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$ poklapaju za dokaz teoreme 1 treba dokazati da

$$f\varepsilon\ SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)\Longleftrightarrow(I_4^{\theta_2}<\infty, I_5^{\theta_2}<\infty,\ I_6^{\theta_2}<\infty).$$

a) Neka $f\varepsilon SW(\vec{p},\vec{\theta},\alpha)$

Označimo: $\mu(0,t_2)=\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,t_2)dt_1$, $\mu(\nu,t_2)=\int_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{2}{2^\nu}}\alpha(t_1,t_2)dt_1$, za $\nu\geq1$.

Kako je $F=F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}+T_{2^{\nu_1}}+Q_{2^{\nu_2}}+S_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}$ /I 1.2/, to je

$$I_4^{\theta_2}= \int_0^{2\pi} \{\int_0^{2\pi} \alpha(t_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F,t_1,t_2)_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2 \asymp$$

$$\asymp\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F,\frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2 =$$

$$\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}+T_{2^{\nu_1}}+Q_{2^{\nu_2}}+S_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<<$$

$$<<J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Veličine J_1, J_2, J_3 i J_4 ocijenićemo pojedinačno.

$$J_1=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2.$$

Iz osobina modula glatkosti slijedi da je $\omega_{k_1k_2}(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\le$ $\le\|F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\|_{\vec{p}}$, i, tada je

$$J_1\le\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)(\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2}\right]^{p_1/2}dx\}^{p_2/p_1}dy)^{\theta_1/p_2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga za θ_1/p_2, θ_1/p_1, θ_2/p_2, θ_2/p_1, redom, dobićemo:

$$J_1\le(\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)\left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\right]^{\theta_1/2})^{\theta_2/\theta_1}dt_2\ ^{p_1/\theta_2}dx\}^{p_2/p_1}dy)^{\theta_2/p_2}.$$

Sumu $S_{\nu_1\nu_2}(x,y)=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)\left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\right]^{\theta_1/2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$ ocijenimo primjenjujući nejednakost Minkowskoga za $\theta_1/2$ i $\theta_2/2$. Dobijamo da je:

$$S_{\nu_1\nu_2}(x,y)\le(\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\{\sum_{\nu_2=0}^{m_2}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\left[\sum_{\nu_1=0}^{m_1}\int_{2^{-\nu_1}}^{2\cdot 2^{-\nu_1}}\alpha(t_1,t_2)dt_1\right]^{\theta_2/\theta_1}dt_2\}^{2/\theta_2})^{\theta_2/2}=$$

$$=(\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\beta_0^2(2^{m_1},2^{m_2}))^{\theta_2/2}.$$

Tada je $J_1\le(\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta_0^2(2^{m_1},2^{m_2})\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\right]^{p_1/2}dx\}^{p_2/p_1}dy)^{\theta_2/p_2}=$

$$=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\beta_0^2(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{1/2}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_2}.$$

Primjenjujući lemu 5 i lemu 8 dobićemo da je

$$J_2=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(T_{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\asymp$$

$$\asymp\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}\left\|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}T_{2^{\nu_1}}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\asymp$$

$$\asymp\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta^2_{m_1,m_2}\right]^{1/2}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2,$$

odakle, primjenjujući nejednakost Minkowskoga, slijedi da je

$$J_2\le(\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\beta_1^2(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{p_1/2}dx\}^{p_2/p_1}dy)^{\theta_2/p_2}=$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_1^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2} .$$

Analogno se dokazuje da je

$$J_3 = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2) \omega^{\theta_1}_{k_1 k_2} (Q_{2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}} \}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \leq$$

$$\leq \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_2^{\theta_2} (2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}}^{\theta} .$$

Ocijenimo, još, integral J_4,

$$J_4 = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2) \omega^{\theta_1}_{k_1 k_2} (s_{2^{\nu_2} 2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}} \}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 ,$$

Primjenjujući lemu 5 i 8, a zatim nejednakost Minkowskoga:

$$J_4 \leq \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} s_{2^{\nu_2} 2^{\nu_2}} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_1} \}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \leq$$

$$\leq \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left[\int_0^{2\pi} \{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} 2^{2m_1 k_1} 2^{2m_2 k_2} \Delta^2_{m_1 m_2} \right]^{p_1/2} dx \}^{p_2/p_1} dy \right]^{\theta_1/p_2} \}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) \right]^{p_1/2} dx \}^{p_2/p_1} dy \right)^{\theta_2/p_2} =$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_3^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2} .$$

Sabirajući ocjene za J_1, J_2, J_3, J_4, dobijamo:

$$I_4^{\theta_2} << \left(\int_0^{2\pi} \{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) \beta^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{p_1/2} dx \}^{p_2/p_1} dy \right)^{\theta_2/p_2} =$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2} .$$

Primjenjujući lemu 6, utvrdjujemo da je

$I_4^{\theta} << \|\Psi\|_{\vec{p}}^{\theta_2}$, gdje je $\Psi(x,y) \sim \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \beta(2^{m_1}, 2^{m_2}) A_{\nu_1 \nu_2}(x,y)$.

Brojni niz $\lambda_{\nu_1 \nu_2} = \beta(2^{m_1}, 2^{m_2}) \left[\beta(\nu_1, \nu_2) \right]^{-1}$ zadovoljava uslove leme 7

što znači da, ako je

$G \sim \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \beta(\nu_1, \nu_2) A_{\nu_1 \nu_2}(x,y)$, onda je $\|\Psi\|_{\vec{p}} << \|G\|_{\vec{p}}$ i, znači,

$I_4 << \|G\|_{\vec{p}} < \infty$, tj. $I_4 < \infty$.

Na isti način se dokazuje da je $I_5 << \|G_1\|_{\vec{p}} < \infty$ i $I_6 << \|G_2\|_{\vec{p}} < \infty$.

Time je tvrdjenje a) teoreme 1 dokazano.

b) Neka je $I_4 \leq \infty$, $I_5 \leq \infty$ i $I_6 \leq \infty$. Dokazaćemo postojanje funkcija G, G_1, G_2 iz leme 3, čiji su Fourierovi redovi, redom:

$G \sim \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \beta(\nu_1,\nu_2) A_{\nu_1\nu_2}(x,y)$, $G_1 \sim \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \beta(\nu_1,0) A_{\nu_1 0}(x,y)$ i

$G_2 \sim \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \beta(0,\nu_2) A_{0\nu_2}(x,y)$.

Prvo ćemo dokazati postojanje funkcije $\Psi(x,y) \in L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$,

$\Psi \sim \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \beta(2^{m_1},2^{m_2}) A_{\nu_1\nu_2}(x,y)$.

Ocijenimo integral J:

$$J = \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta^2(2^{m_1},2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2} \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} = \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \{\beta^{\theta_2}(2^{m_1},2^{m_2})\}^{2/\theta_2} \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} =$$

$$= \left\| \left| \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} (\beta_0^{\theta}+\beta_1^{\theta}+\beta_2^{\theta}+\beta_3^{\theta})^{2/\theta} \right|^{1/2} \right\|_{\vec{p}} \asymp \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} (\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2) \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} \leq$$

$$\leq \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_0^2 \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} + \left\| \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^2_{m\,m} \beta_1^2 \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} +$$

$$+ \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_2^2 \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} + \left\| \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^2_{m\,m} \beta_3^2 \right]^{1/2} \right\|_{p} = J_7+J_8+J_9+J_{10}.$$

Ocijenimo integral J_{10},

$$J_{10} = \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2(2^{m_1},2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2} \right]^{1/2} \right\|_{\vec{p}} = \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} S^{1/2}_{m_1 m_2}(x,y)\,dx \right\}^{p_2/p_1} dy \right)^{1/p_2},$$

gdje je $S_{m_1 m_2}(x,y) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2(2^{m_1},2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) =$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) \left[\int_0^{2^{-m_2}} \left\{ \int_0^{2^{-m_1}} \alpha(t_1,t_2) t_1^{k_1\theta_1} t_2^{k_2\theta_1} dt_1 \right\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \right]^{2/\theta_2} =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) \left\{ \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \left[\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1} 2^{\nu_2k_2\theta_1}} \right]^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \right\}^{2/\theta_2}.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga za $2/\theta_2$ i $2/\theta_1$, dobićemo:

$$S_{m_1 m_2} \leq \left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1} 2^{\nu_2k_2\theta_1}} \left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1} \sum_{m_2=0}^{\nu_2} 2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1 m_2}(x,y) \right]^{\theta_1/2} \right\}^{\theta_2/\theta_1} dt_2 \right)^{2/\theta_2}.$$

Zamjenjujući dobijenu ocjenu i primjenjujući nejednakost Minkowskoga za p_1/θ_2, p_1/θ_1, p_2/θ_2, p_1/θ_1, redom, imaćemo

$$J_{10}\leq\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}\|P_{\nu_1\nu_2}(x,y)\|_{\vec p}^{\theta_1}\right\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\right)^{1/\theta_2},$$ gdje je

$$\|P_{\nu_1\nu_2}(x,y)\|=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=0}^{\nu_2}2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1,m_2}(x,y)\right]^{\frac12}\right\|_{\vec p}$$

Primjenjujući lemu 8, a zatim lemu 5 dobićemo:

$$J_{10}\leq\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,t_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\right\|_{\vec p}^{\theta_1}\right\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\right)^{1/\theta_2}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,t_2)\omega^{\theta_1}_{k_1k_2}\left(s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}\right\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\right)^{1/\theta_2}.$$

Kako je $\omega_{k_1k_2}\left(s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}\leq\omega_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}+\omega_{k_1k_2}\left(F-s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}\leq$

$\leq\omega_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}+Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_{\vec p}<<\omega_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}$, to je

$$J_{10}<<\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\int_{2^{-\nu_1}}^{2\cdot 2^{-\nu_1}}\alpha(t_1,t_2)\omega^{\theta}_{k_1k_2}\left(F,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec p}\right\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\right)^{1/\theta_2}\simeq I_4<\infty.$$

Pozivajući se na leme 2 i 4, slično se dokazuje da je $J_7<<I_4<\infty$, $J_8<<I_4<\infty$ i $J_9<<I_4<\infty$.

Iz dobijenih ocjena slijedi da je $J<\infty$, a odatle, primjenjujući lemu 6, dobijamo da je $\|\Psi\|_{\vec p}<\infty$ i $\Psi\in L_{\vec p}([0,2\pi]^2)$.

Brojni niz $\lambda_{\nu_1\nu_2}=\beta(\nu_1,\nu_2)\left[\beta(2^{m_1},2^{m_2})\right]^{-1}$, $2^{m_i}\leq\nu_i<2^{m_i+1}$, $i=1,2$ ispunjava uslove leme 7 i, znači, postoji funkcija $G\in L_{\vec p}([0,2\pi]^2)$, $\|G\|_{\vec p}<<\|\Psi\|_{\vec p}$, $G\sim\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\beta(\nu_1,\nu_2)A_{\nu_1\nu_2}(x,y)$.

Na isti način može se dokazati postojanje funkcija G_1 i G_2.

Tvrdjenje b) teoreme 1 time je dokazano.

Dokaz teoreme 2. Iz pretpostavke teoreme, definicije veličine $\|f\|_{\vec{p}}$ i definicije klasa SB i SW, slijedi da je $SB(\vec{p},\vec{p},\alpha)=SB(p,p,\alpha)$ i $SW(\vec{p},\vec{2},\alpha)=SW(p,2,\alpha)$, pa je teorema 2 direktna posledica teoreme 2 II 1.1.

§ 2. ODNOS KLASA $SB^{o}(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ PO PARAMETRIMA $\vec{p}$, $\vec{k}$.

2.1. Oznake, definicije i osnovni rezultati

Neka vektori $\vec{p},\vec{\theta}$, $\vec{k}$ ispunjavaju uslove: $\vec{p}=(p_1,p_2)$, $1\le p_i<\infty$, $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2)$ $0<\theta_i<\infty$, $\vec{k}=(k_1,k_2)$, $k_i\varepsilon N$, $i=1,2$ i neka je $\vec{\alpha}(t_1,t_2)=(\alpha_1(t_1),\alpha_2(t_2))$ gdje su $\alpha_1(t_1)$ i $\alpha_2(t_2)$ funkcije mjerljive na $[0,2\pi]$, integrabilne na $[\delta_i,2\pi]$ za svako $\delta_i\varepsilon(0,2\pi)$, i $\alpha_i(t_i)\ge c_i>0$, $i=1,2$.

Klasu funkcija $SB^{o}(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ odredjujemo kao klasu funkcija $f(x,y)\varepsilon L_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$ i takvih da je

$$J^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2)\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(f,t_1,t_2)\vec{p}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty .$$

Kažemo da funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2)$ uslov, ako postoje realni brojevi σ_1 i σ_2 takvi da je za svako $\delta_i\varepsilon(0,2\pi)$ i svako $\varepsilon_i>0$:

$$\int_0^{\delta_1}\alpha_1(t_1)t_1^{\sigma_1}\,dt_1<\infty \qquad \int_0^{\delta_2}[\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2}]^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

i

$$\int_0^{\delta_1}\alpha_1(t_1)t_1^{\sigma_1-\varepsilon_1}dt_1=\infty \qquad \int_0^{\delta_2}[\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2-\varepsilon_2}]^{\theta_2/\theta_1}dt_2=\infty$$

Kažemo da funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}^*=(\sigma_1^*,\sigma_2^*)$ uslov, ako

1) $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\sigma}$ uslov

2) $\int_0^{\delta}\alpha_1(t_1)t_1^{\sigma_1^*}dt_1<<\int_{\delta}^{2\delta}\alpha_1(t_1)t_1^{\sigma_1^*}dt_1$,

$$3)\ \int_0^{\delta}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2^*}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2 \ll \int_{\delta}^{2\delta}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2^*}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2.$$

Kažemo da funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)$ uslov, ako postoje realni brojevi λ_1 i λ_2, takvi da je za svako $\delta\varepsilon(0,2\pi)$:

$$\int_{2\delta}^{2\pi}\alpha_1(t_1)t_1^{\lambda_1}dt_1 \ll \int_{\delta}^{2\delta}\alpha_1(t_1)t_1^{\lambda_1}dt_1 \quad \text{i}$$

$$\int_{2\delta}^{2\pi}\{\alpha_2(t_2)\ t_2^{\lambda_2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2 \ll \int_{\delta}^{2\delta}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\lambda_2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2.$$

Teoreme analogne teoremama 1, 2, 3, 4 datim u I.2. /sa zamjenom klase $SB^0(p,\theta,\vec{k},\alpha)$ klasom $SB^0(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$/ važe i u metrici $L_{\vec{p}}$, pa njihove formulacije ne navodimo. Formulisaćemo i dokazati leme iz kojih će uslijediti tvrdjenja tih teorema.

Označimo: $\mu_1(0)=\int_1^{2\pi}\alpha_1(t_1)dt_1$, $\mu_2(0)=\int_1^{2\pi}\{\alpha_2(t_2)\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2$

$\mu_1(n)=\int_{2^{-n}}^{2\cdot 2^{-n}}\alpha_1(t_1)dt_1$, $\mu_2(n)=\left(\int_{2^{-n}}^{2\cdot 2^{-n}}\{\alpha_2(t_2)\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\right)^{\theta_1/\theta_2}$, za $n\geq 1$

Lema 1. Neka funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava σ^* uslov i neka je $k_i\theta_1\geq\sigma_i$, $i=1,2$. Tada je za $\nu_i\geq 0$:

$$a)\ \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty}\frac{\mu_1(n_1)}{2^{n_1k_1\theta_1}} \ll \frac{\mu_1(\nu_1)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}} \qquad b)\ \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty}\frac{\{\mu_2(n_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{n_2k_2\theta_2}} \ll \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}}$$

Dokaz b) Zamjenjujući $\mu_2(n)$, dobijamo:

$$S = \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty}\frac{\{\mu_2(n_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{n_2k_2\theta_2}} = \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}} +$$

$$= \sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_2k_2\theta_2}}\int_{2^{-n_2}}^{2\cdot 2^{-n_2}}\{\alpha_2(t_2)\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2 = \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}} +$$

$$+\int_0^{2^{-\nu_2}}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2^*}t_2^{k_2\theta_1-\sigma_2^*}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\ .$$

Uzimajući u obzir σ^* uslov, biće:

$$S<<\frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2\theta_2}}+\frac{1}{2^{\nu_2 k_2\theta_2-\nu_2\sigma_2^*\frac{\theta_2}{\theta_1}}}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\sigma_2^*}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2\asymp\frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2\theta_2}}\ .$$

Tvrdjenje a) se dokazuje prosto.

Sa $SY^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{\alpha})$ označimo klasu funkcija $f\varepsilon L^o_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, takvih da je:

$$Y_{oo}^{\theta_2}+\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)Y^{\theta_1}_{2^{n_1}0}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}+\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\mu_2(n_2)Y^{\theta_1}_{02^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}+$$

$$+\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)\mu_2(n_2)Y^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}<\infty\ .$$

Lema 2. Ako je $1\le p_i\le\infty$, $0<\theta_i<\infty$, onda je

$$SB^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})\subset SY^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{\alpha})$$

Dokaz: Tvrdjenje odmah slijedi iz definicije klasa SB^o i SY^o i leme 2, II.1.2.

Lema 3. Ako funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava σ^* uslov, onda je, za $k_i\theta_1\ge\sigma_i^*$, $i=1,2$,

$$SY^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{\alpha})\subset SB^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$$

Dokaz: Neka $f\varepsilon SY^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{\alpha})$. Ocijenimo integral

$$J^{\theta_2}=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)\omega^{\theta_1}_{k_1 k_2}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Obzirom na lemu 6, II2.2. biće

$$J^{\theta_2}<<\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}Y^{\theta_1}_{oo}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}+$$

$$+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}(\sum_{n_1=0}^{\nu_1}2^{n_1 k_1}Y_{2^{n_1}0}(f)_{\vec{p}})^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}+$$

$$+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}(\sum_{n_2=0}^{\nu_2}2^{n_2 k_2}Y_{02^{n_2}}(f)_{\vec{p}})^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}+$$

$$+\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1\theta_1}2^{\nu_2 k_2\theta_1}}(\sum_{n_1=0}^{\nu_1}\sum_{n_2=0}^{\nu_2}2^{n_1 k_1}2^{n_2 k_2}Y_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}})^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}=J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Na osnovu leme 1, biće:

$$J_1 \ll (\mu_1(0)\mu_2(0))^{\theta_2/\theta_1} Y_{00}^{\theta_2}(f)_{\vec{p}} \simeq (Y_{00}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}})^{\theta_2/\theta_1} .$$

Za dobijanje ocjene veličina J_2, J_3 i J_4 razlikovaćemo slučajeve $\theta_1 \le 1$ i $\theta_1 > 1$.

1^0 $\theta_1 \le 1$. Primjenjujući lemu 2 II2.2. imaćemo:

$$J_2 \le \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu_1(\nu_1)\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \sum_{n_1=0}^{\nu_1} 2^{n_1 k_1 \theta_1} Y_{2^{n_1}0}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1} =$$

$$= \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{(\mu_2(\nu_2))^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}} \{\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 k_1 \theta_1} Y_{2^{n_1}0}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}} \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \frac{\mu_1(\nu_1)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1}}\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Primjenjujući lemu 1, dobićemo $J_2 \ll \{\sum_{n_1=0}^{\infty} \mu_1(n_1) Y_{2^{n_1}0}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}$.

Iz leme 2 II.2.2. i leme 1, slijedi da je

$$J_3 \le \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}} \{\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu_1(\nu_1)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1}} \sum_{n_2=0}^{\nu_2} 2^{n_2 k_2 \theta_1} Y_{02^{n_2}}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1} \le$$

$$\le \mu_1(0) \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}} \{\sum_{n_2=0}^{\nu_2} 2^{n_2 k_2 \theta_1} Y_{02^{n_2}}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1} .$$

Ako je $\theta_2 \le \theta_1$, onda, primjenjujući još jedanput lemu 2. II.2.2, dobijamo:

$$J_3 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}} \sum_{n_2=0}^{\nu_2} 2^{n_2 k_2 \theta_2} Y_{02^{n_2}}^{\theta_2}(f)_{\vec{p}} = \sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{n_2 k_2 \theta_2} Y_{02^{n_2}}^{\theta_2} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\mu_2 k_2 \theta_2}} \ll$$

$$\ll \sum_{n_2=0}^{\infty} \{\mu_2(n_2)\}^{\theta_2/\theta_1} Y_{02^{n_2}}^{\theta_2}(f)_{\vec{p}} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \{\mu_2(n_2) Y_{02^{n_2}}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Ako je $\theta_2 > \theta_1$, onda, primjenjujući lemu 3, II2.2, dobijamo:

$$J_3 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}} 2^{\nu_2 k_2 \theta_2} Y_{02^{\nu_2}}^{\theta_2}(f)_{\vec{p}} \beta_{\nu_2}^{\theta_2/\theta_1} ,$$ gdje je

$$\beta_{\nu_2} = \frac{2^{\nu_2 k_2 \theta_2}}{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}} \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \frac{\{\mu_2(n_2)\}^{\theta/\theta}}{2^{n_2 k_2 \theta_2}} \ll 1,$$ odnosno

$$J_3 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \{\mu_2(n_2) Y_{02^{n_2}}^{\theta_1}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1} .$$

Primjenjujući lemu 2, II2.2., a zatim lemu 1, dobijamo da je

$$J_4 \leq \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_2=0}^{\nu_2}\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1k_1\theta_1 2^{n_2k_2\theta_1}}\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\frac{\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_2k_2\theta_1}}\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}\}^{\theta_2/\theta_1}\leq$$

$$\leq \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_2=0}^{\nu_2}\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_2k_2\theta_1}\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\frac{\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_2k_2\theta_1}}\mu_1(n_1)\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Ako je $\theta_2<\theta_1$, ponovo na osnovu leme 2, II 2.2. dobijamo:

$$J_4 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\nu_2}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_2k_2\theta_1}\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\frac{\mu_2(\nu_2)}{2^{\nu_2k_2\theta_1}}\mu_1(n_1)\}^{\theta_2/\theta_1}=$$

$$=\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2}^{\infty}\frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_2k_2\theta_1}\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\mu_1(n_1)\}^{\theta_2/\theta_1}\ll$$

$$\ll\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)\mu_2(n_2)\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Istu nejednakost za $\theta_2\geq\theta_1$, dobijamo primjenom leme 3, II.2.2.

2^0 $\theta_1>1$. Primjenjujući lemu 3 II2.2. dobijamo:

$$J_4 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}}\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu_1(\nu_1)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}(\sum_{n_2=0}^{\nu_2}2^{\nu_1k_1}2^{n_2k_2}\gamma_{2^{\nu_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}})^{\theta_1}\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga ($\theta_1>1$), dobijamo

$$J_4 \ll \sum_{\nu_2=0}^{\infty}\frac{\{\mu_2(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{\nu_2k_2\theta_2}}\{\sum_{n_2=0}^{\nu_2}(\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu_1(\nu_1)2^{n_2k_2\theta_1}\gamma^{\theta_1}_{2^{\nu_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}})^{1/\theta_1}\}^{\theta_2}.$$

Iz ove nejednakosti, primjenjujući lemu 3, II2.2. za $\theta_2\geq 1$, odnosno lemu 2, II2.2. za $\theta_2<1$, dobijamo:

$$J_4 \ll \sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)\mu_2(n_2)\gamma^{\theta_1}_{2^{n_1}2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\}^{\theta_2/\theta_1}.$$

Odgovarajuće nejednakosti za J_2, i J_3 i slučaj $\theta_1>1$ dokazuju se analogno.

Sabirajući J_1, J_2, J_3 i J_4 slijedi tvrdjenje leme 3.

Lema 4. Neka je $\vec{q}=(q_1,q_2)$, $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\vec{r}=(r_1,r_2)$, $\vec{\alpha}^*=(\alpha_1^*(t_1),\alpha_2^*(t_2))$, $\vec{p}\leq\vec{q}$, $r_i=1/p_i-1/q_i$, $\vec{\lambda}\geq\theta_1 r$, $\alpha_i^*(t_i)=\alpha_i(t_i)t_i^{\theta_1 r_i}$, $i=1,2$ i neka $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ zadovoljava $\vec{\lambda}$ uslov. Tada je:

b) $\sum_{\nu_1=0}^{n_1-1} \mu_1^*(\nu_1) << \frac{\mu_1(n_1)}{2^{n_1\theta_1 r_1}}$ b) $\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1} \{\mu_2^*(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1} << \frac{\{\mu_2(n_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{n_2\theta_2 r_2}}$

Dokaz. Zamjenjujući $\mu_2^*(n)$ i primjenjujući $\vec{\lambda}$ uslov, dobijamo:

$$S=\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\{\mu_2^*(\nu_2)\}^{\theta_2/\theta_1}=\sum_{\nu_2=0}^{n_2-1}\int_{2^{-\nu_2}}^{2\cdot 2^{-\nu_2}}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\theta_1 r_2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2=$$

$$=\int_{2^{-(n_2-1)}}^{2}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\lambda_2}\}^{\theta_2/\theta}\ t_2^{(\theta_1 r_2-\lambda_2)\theta_2/\theta_1}dt_2.$$

Iz uslova $\vec{\lambda}\geq\theta_1\vec{r}$, slijedi:

$$S<<2^{-n_2\theta_2 r_2+n_2\lambda_2\theta_2/\theta_1}\int_{2^{-n_2}}^{2\cdot 2^{-n_2}}\{\alpha_2(t_2)t_2^{\lambda_2}\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<<\frac{\{\mu_2(n_2)\}^{\theta_2/\theta_1}}{2^{n_2\theta_2 r_2}}.$$

Tvrdjenje a) se dokazuje analogno.

Iz lema 1,2 i 3 slijede teoreme analogne teoremama 1, 2 i 3 II.2, a iz leme 4 slijedi teorema analogna teoremi 4 II.2.

§ 3. ODNOS KLASA $SB^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ i $S\Delta^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$

Klasu funkcija $S\Delta^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ definišemo kao klasu funkcija $f(x,y)\in L_{\vec{p}}^o$, takvih da je

$$\int_0^{2\pi}\{\int_0^{2\pi}\alpha_1(t_1,t_2)\left\|\Delta_{t}^{k}\Delta_{t}^{k} f\right\|_{\vec{p}}^{\theta_1}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty$$

/Parametri $\vec{p},\vec{\theta}$, $\vec{k},\vec{\alpha}$ odredjeni su u § 2.1/.

Kažemo da funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)=(\alpha_1(t_1),\alpha_2(t_2))$ zadovoljava γ uslov ako je za svako $\delta_i\in(0,2\pi)$, $i=1,2$

$$\int_{\delta_1}^{2\pi}\frac{\alpha_1(t_1)}{t_1}dt_1\leq c\alpha_1(\delta_1)\quad\text{i}\quad\{\int_{\delta_2}^{2\pi}\left[\frac{\alpha_2(t_2)}{t_2}\right]^{\theta_2/\theta_1}dt_2\}^{\theta_1/\theta_2}\leq c\alpha_2(\delta_2)$$

Teorema 1. Ako je $1\leq p_i\leq\infty$, $i=1,2$, $1\leq\theta_1\leq\theta_2<\infty$, $\vec{k}\theta_1\geq\vec{\sigma}^*$, a funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ ispunjava $\vec{\sigma}^*$ i γ uslove, onda se klase $S\Delta^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ i $SB^o(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})$ poklapaju.

Za dokaz teoreme 1 potrebne su nam sledeće leme:

Lema 1. Neka funkcija $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ ispunjava $\vec{\sigma}^*$ i γ uslove i neka je $K_{2^n}(t)$ jezgro Jacksona /II.3/. Tada je:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_1(n)K_{2^n}(2t) << \alpha(2t)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mu_2(n)K_{2^n}(2t)\right]^{\theta_2/\theta_1} << \left[\alpha_2(2t)\right]^{\theta_2/\theta_1}$

/Veličine $\mu_1(n)$ i $\mu_2(n)$ definisane su u 2.1/.

Dokaz: b) Neka su prirodni brojevi $\bar{k}_2$ i m izabrani kao i u II.3. Tada je:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mu_2(n)K_{2^n}(2t)\right]^{\theta_2/\theta_1} << \sum_{n=0}^{\infty}\left[\mu_2(n)\right]^{\theta_2/\theta_1}\left[(2^n t)^{-2\bar{k}_2}2^n(\sin mt)^{2\bar{k}_2}\right]^{\theta_2/\theta_1}$$

Odredimo prirodan broj n_0 tako da je za svako fiksirano $t\in(0,\pi/2]$ i $n\leq n_0$, $2^n t\leq 1$ i, za $n>n_0$, $2^n t>1$. Sumu S predstavimo u obliku

$$S=\sum_{n=0}^{n_0-1}+\sum_{n=n_0}^{\infty}=S_1+S_2$$

Zamjenjujući $\sin mt$ sa mt, imaćemo:

$$S_1\leq\sum_{n=0}^{n_0-1}\left[\mu_2(n)2^n\right]^{\theta_2/\theta_1}\asymp\sum_{n=0}^{n_0-1}\int_{2^{-n}}^{2.2^{-n}}\left[\frac{\alpha_2(u)}{u}\right]^{\theta_2/\theta_1},$$ odakle, primjenjujući γ uslov i uslov $2^{n_0}t\leq 1$, dobijamo da je $S_1 << \left[\alpha_2(2t)\right]^{\theta_2/\theta_1}$.

Zamjenjujući $\sin mt$ sa 1 i uzimajući u obzir da je $2\bar{k}_2-k_2\theta_1-1>0$, imaćemo:

$$S_2 << \left[t^{-2\bar{k}_2}2^{-n_0(2\bar{k}_2-k_2\theta_1-1)}\right]^{\theta_2/\theta_1}\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[\mu(n)2^{-k_2 n\,\theta_1}\right]^{\theta_2/\theta_1}$$, odnosno, primjenjujući $\vec{\sigma}^*$ /2.1/, a zatim γ uslov,

$$S_2 << \left[2^{n_0}\mu_2(n_0-1)\right]^{\theta_2/\theta_1}\asymp\int_{2\cdot 2^{-n_0}}^{4\cdot 2^{-n_0}}\left[\frac{\alpha_2(u)}{u}\right]^{\theta_2/\theta_1}du << \alpha_2(2t).$$

Iz ocjena za S_1 i S_2 slijedi tvrdjenje b). /Analogno se dokazuje tvrdjenje a)/.

Lema 2. Neka $f\in L^0_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, $1\leq p_i\leq\infty$, $i=1,2$, $1\leq\theta_1\leq\theta_2<\infty$, $\vec{\alpha}(t_1,t_2)$ ispunjava $\vec{\sigma}^*$ i γ sulove. Tada je

$$S\Delta^0(\vec{p},\vec{\theta},\vec{k},\vec{\alpha})\subset SY^0(\vec{p},\vec{\theta},\vec{\alpha}).$$

Dokaz: Neka $f\in S\Delta^{0}$. Ocijenimo veličinu

$J=\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\sum_{n_1=0}^{\infty}\mu_1(n_1)\mu_2(n_2)Y^{\theta_1}_{2^{n_1},2^{n_2}}(f)_{\vec{p}}\}$. Kako je

$Y_{n_1,n_2}(f)_{\vec{p}}\le\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_{n_1}(t_1)K_{n_2}(t_2)\|\Delta^{k_1,k_2}_{t_1,t_2}\|_{\vec{p}}dt_1dt_2$, to, postupajući kao i u dokazu leme II.3.1 i primjenjujući lemu 1 a), dobijamo:

$$J\le\sum_{n_2=0}^{\infty}\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}K_{2^{n_2}}(2t_2)\mu_2(n_2)\int_0^{\pi}\alpha_1(t_1)\|\Delta^{k_1,k_2}_{t_1,2t_2}f\|^{\theta_1}_{\vec{p}}dt_1dt_2\}^{\theta_2/\theta_1}$$

Primjenjujući nejednakost Minkowskoga $(\theta_2\ge\theta_1)$, dobijamo

$$J\ll\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha_1(t_1)\|\Delta^{k_1,k_2}_{t_1,2t_2}f\|^{\theta_1}_{\vec{p}}dt_1\{\sum_{n_2=0}^{\infty}K_{2^{n_2}}(2t_2)\mu_2(n_2)^{\theta_2/\theta_1}\}^{\theta_1/\theta_2}dt_2\right)^{\theta_2/\theta},$$

ili, na osnovu leme 2,

$J\le\left(\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2)\|\Delta^{k_1,k_2}_{t_1,t_2}f\|^{\theta_1}_{\vec{p}}dt_1dt_2\right)^{\theta_2/\theta_1}$, odakle, primjenjujući Hölderovu nejednakost, slijedi da je

$$J\ll\int_0^{\pi}\{\int_0^{\pi}\alpha_1(t_1)\alpha_2(t_2)\|\Delta^{k_1,k_2}_{t_1,t_2}f\|^{\theta_1}_{\vec{p}}dt_1\}^{\theta_2/\theta_1}dt_2<\infty.$$

Analogno se dokazuje konačnost i ostalih suma kojima se definiše klase SY^{0}, a odatle slijedi da $f\in SY^{0}$.

Dokaz teoreme 1. Tvrdjenje teoreme 1 odmah slijedi iz lema 2 i 3, 2.1 i leme 2.

L I T E R A T U R A

/1/ P.L.Uljanov. O nekatorih ekv. usl. rjadov i integralov. Uspjehi matem.Nauk, N^o6, 1953.

/2/ M.K. Potapov. Teoremi Hardi-Litlvuda,Marcinkeviča-Litlvuda-Peli. Mathematika,vol.14(37),2, 1972.

/3/ P.I. Lizorkin, S.M. Nikoljskij.Klasifikacija dif.funkcij na osnove prostranstv zdvominirujušćej smješanoj proizvodnoj. Trudi MIAN SSSR, 1965, 77, 143.

/4/ M.K. Potapov. O približeniji "uglom". Trudi kol. po konstr.teoriji funkcij, Vengrija, Budapešt, 1971.

/5/ S.M. Nikoljskij. Približenije funkcij mnogih pjerem. i teoremi vloženija. Moskva, 1969.

/6/ M. Beriša i M.K. Potapov. Moduli glatkosti i koef. furie perjodičeskih funkcij adnavo pjerem. (u štämpi).

/7/ Zigmund A.V. Trigonometričeskije rjadi, Moskva, 1965.

/8/ M.K. POtapov. Ob adnoj teoreme vloženija. Mathematika, vol.14 (37), 1972.

/9/ A.F. Timan. Teorija pribl. funkcij dejstv. pjerem., M., Fizmatgiz, 1960.

/10/ N.I. Ahiezer. Lekcii po teorii aproks., M., "Nauka",1965.

/11/ M.K.Potapov. Pribl."uglom" i teoremi vloženija. Mathematika balcanica 2 (1972), Beograd.

/12/ B. Laković i M.K.Potapov. K vaprosu o vzajmnosvjazi nekatorih klasov funkcij.(u štampi).

/13/ M.K.Potapov. Matemat. zamjetki, 1967, T.2 N^o,4, O vzaimosvjazi nekatorih klasov funkcij.

/14/ M.K.Potapov. O vloženiji i sovp.nekatorih klasov funkcij. Izvjestija A.N. SSSR, ser.matem., T.33,1969.

/15/ M.K. Potapov. Izučenije nekatorih klasov funkcij pri pomošći pribl. "uglom". Trudi MIAN SSSR im.V.A. Steklova,T.117,1972.

/16/ O.V. Besov, V.P.Iljin, S.M.Nikoljski. Integr.predst.funkcij i teoremi vloženija, Moskva, 1975.

/17/ M.K. Potapov. Vloženije klasov funkcij s domin. smješ. modulem glatkosti. Trudi MIAN SSSR im.V.A. Stjeklova, 1974,t. 131.

/18/ O.V. Besov. O nekatorih uslovjah prinadlježnosti k L_p proizvodnih period. funkcij, naučnie dokladi viššej školi, fiz.-matem. nauki, N^o 1. (1959).

/19/ O.V. Besov. Isljedovanije adnavo semejstva funkc. prostranstv. v svjazi s teoremami vloženija i prodolženija. Trudi matem. inst. im V.A. Steklova AN SSSR, 60, (1961).