

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
UNIVERZITET U BEOGRADU

METODA ZA REŠAVANJE TEMPERATURSKOG  
GRANIČNOG SLOJA PRI NESTACIONARNOM  
LAMINARNOM RAVANSKOM STRUJANJU  
NEISTIŠLJIVE TEČNOSTI

DOKTORSKA DISERTACIJA

Boris J. Cijan  
diplomirani mašinski inženjer  
profesor Više tehničke škole  
u Beogradu

## SADRŽAJ

1. Pregled važnijih oznaka i simbola
2. Uvod u brzinsko polje
  - 2.1. Stacionarni granični slojevi
  - 2.2. Nestacionarni granični slojevi
3. Brzinsko polje
  - 3.1. Jednačine graničnog sloja
  - 3.2. Transformacije i rešenje osnovne jednačine
  - 3.3. Primeri
4. Temperatursko polje
  - 4.1. Uvod u temperatursko polje
  - 4.2. Osnovne jednačine
  - 4.3. Termometarski problem
  - 4.4. Problem zagrevanja odnosno hladjenja
  - 4.5. Primer
  - 4.6. Zadat temperaturski fluks
  - 4.7. Primer
  - 4.8. Problem zadate temperature na zidu tela
  - 4.9. Primer
  - 4.10. Temperaturski profili
5. Tablice I  
Univerzalne funkcije za brzinsko polje
6. Diagrami univerzalnih funkcija brzinskog polja
7. Tablice II
8. Diagrami univerzalnih funkcija temperaturskog polja
9. Diagrami rezultata primera
10. Temperaturski profili za zadati toplotni fluks
11. Temperaturski profili za zadatu temperaturu na zidu tela
12. Sadržaj teze
13. Literatura
  - Dodatak I
  - Dodatak II

## 1. PREGLED VAŽNIJIH OZNAKA I SIMBOLA

### a) Opšte fizičke veličine i koordinate

- $p$  - pritisak  
 $\rho = \gamma/g$  - gustina tečnosti  
 $\gamma$  - specifična težina tečnosti  
 $g$  - ubrzanje Zemljine teže  
 $x$  - koordinata u pravcu konture tela  
 $y$  - koordinata normalna na pravac konture tela  
 $u, v$  - projekcije brzina u pravcima  $x$  i  $y$   
 $U_\infty$  - brzina jednolikog strujanja u beskonačnosti  
 $U(x, t)$  - brzina potencijalnog strujanja na spoljašnjoj granici graničnog sloja  
 $\mu$  - dinamički koeficijent viskoznosti  
 $\nu$  - kinematički koeficijent viskoznosti  
 $\tau$  - tangencijalni napon na površini tela

### b) Brzinsko polje

- $\eta$  - bezdimenziona koordinata odstojanja od konture tela  
 $\delta_p^*$  - debljina istiskivanja  
 $\psi$  - strujna funkcija  
 $\mathcal{F}$  - bezdimenziona strujna funkcija  
 $V = V(x)$  - funkcija spoljašnje brzine strujanja  
 $\Omega = \Omega(t)$  - funkcija koja pokazuje promenu brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja sa vremenom  
 $\{f_k\}$  - skup parametara definisan jednačinom (1,15)  
 $\{g_k\}$  - skup parametara definisan jednačinom (1,15)  
 $\{h_k\}$  - skup parametara definisan jednačinom (1,15)  
 $\{d_k\}$  - opšti skup parametara definisan jednačinom (1,16)  
 $A$  - konstanta za normiranje  
 $F$  - funkcija definisana jednačinom (1,30)  
 $\xi(t)$  - funkcija definisana jednačinom (1,43)



- $\mu_k, \lambda_k, \nu_k$  - funkcije definisane jednačinom (1,17)
- $L_k$  - linearni diferencijalni operator
- $t_s$  - vreme prvog odvajanja graničnog sloja
- $\bar{t}$  - bezdimenziono vreme
- $F_i^*(\eta)$  - koeficijenti univerzalnih funkcija
- Re - Reynoldsov broj

c) Temperatursko polje

- $\alpha = \nu / Pr$  - koeficijent temperaturske provodljivosti
- $T(x, y, t)$  - temperatursko polje
- $T_\infty$  - konstantna temperatura na spoljašnjoj ivici graničnog sloja
- $T_w$  - temperatura površine tela
- $\Delta T$  - temperaturska razlika
- $c_p$  - specifična toplota kod konstantnog pritiska
- $Pr = \nu / \alpha$  - Prandtlov broj
- $Ec = U^2 / c_p \Delta T$  - Eckertov broj
- $Nu = \frac{l}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial y}$  - Nusseltov broj
- $D_1, D_2$  - bezdimenzioni brojevi shodno jednačinama (2,44), (2,58)
- $Sh(t)$  - tekući Strouhalov broj
- $\check{x}, \check{x}', \check{h}, \check{h}'$  - bezdimenzione funkcije temperaturskog polja
- $a_k, b_k, m_k, n_k$  - skupovi parametara koji karakterišu temperatursko polje
- $P(x)$  - funkcija definisana jednačinom (2,28)
- $R(t)$  - " " " (2,28)
- $\alpha_k, \beta_k$  - " " " (2,29)
- $M_k, N_k$  - " " " (2,53)

Objašnjenje ostalih oznaka i simbola dato je u tekstu.

## 2. UVOD U BRZINSKO POLJE

### 2.1. Stacionarni granični slojevi u nestišljivoj tečnosti

U okviru klasične hidromehanike je pokušavano da se teoriski obuhvati uticaj viskoznosti na kretanje strujanja tečnosti. NAVIER (1827) i STOKES (1848) uspeli su matematički formulirati uslove za ravnotežu sila viskoznosti, sila inercije, sila pritiska i mase. Kao rezultat ovih radova je proizašao sistem parcijalnih nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Nepremostive matematičke poteškoće sprečavale su više od pola veka da se te jednačine korisno primene.

Velika oprečnost između rezultata klasične hidrodinamike i stvarnosti ukazuje na to da odlučujući uticaj na proces kretanja tečnosti ima trenje u tečnosti. U 1904 godini je L. PRANDTL [4] dao aproksimaciju za opštu jednačinu kretanja viskozne nestišljive tečnosti ravanskog strujanja, koja se zasniva na činjenici: ako je viskoznost mala, odnosno Reynolds-ov broj veliki, onda dejstvo viskoznosti dolazi do izražaja samo u srazmerno tankom "graničnom sloju" u neposrednoj blizini tela. U samom graničnom sloju nastupaju nagle promene brzina tako da ista raste od nule na samoj površini tela do konačne vrednosti brzine neporemećenog spoljašnjeg strujanja. Zbog male debljine ovog graničnog sloja proizilazi da izvesni članovi Navier-Stokes-ove jednačine, kojom se strujanje upravlja, postaju zanemarjuće mali. Tako je nastala Prandtl-ova jednačina graničnih slojeva, koja se razlikuje od Euler-ove jednačine kretanja idealne tečnosti samo jednim dodatnim članom, koji obuhvata uticaj viskoznosti. Prandtl je teoriski i opitima pokazao da se strujanje u blizini tela može podeliti u dve oblasti: jedan tanak sloj u blizini površine tela u kojem igra odlučujuću ulogu trenje i u oblast izvan tog sloja, gde se trenje može zanemariti. Uticajem velikog zamaha vazduhoplovne tehnike, nova teorija je počela vrlo brzo da se razvija i danas je postala osnova moderne mehanike strujanja.

Prandtl-ov saradnik H. BLASIUS ( 1908 ) [2] je prvi dao tačno rešenje Prandtl-ove jednačine za ravansko opstrujavanje tanke ravne ploče i izračunao trenje na ploči. To je najprostiji slučaj tačnog rešenja graničnog sloja, pri čemu je gradijent pritiska jednak nuli a pritisak duž ploče je konstantan. Kasnije NIKURADSE [3] je eksperimentalno dokazao na ravnoj ploči slaganje Blasius-ovih jednačina napona smicanja. Blasius je dobio rešenje poznate diferencijalne jednačine u obliku stepenih redova. Njegovu diferencijalnu jednačinu je docnije rešio C. TÖPFER [4] koristeći metodu integracije Runge-Kutta. Docnije je istu jednačinu ponovo izračunao sa velikom tačnošću L. HOWARTH [5] .

Kao dalji prilog teoriji graničnih slojeva dato je razjašnjenje uslova spoljašnjeg strujanja, pri čemu su brzinski profili laminarnog graničnog sloja na svakom mestu međusobno slični. Ukoliko postoje slična rešenja može se sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina svesti na jednu običnu diferencijalnu jednačinu. Najvažnije doprinose za rešavanje ovog problema dali su V. M. FALKNER i S. W. SKAN [6] , D. R. HARTREE [7] , S. GOLDSTEIN [8] i W. MANGLER [9] . Pokazalo se da takva "slična - rešenja" jednačine graničnog sloja moguća su u celoj oblasti ubrzanog i usporenog strujanja, ako se spoljašnja brzina menja sa potencom dužine. Blasius-ovo rešenje za laminarno strujanje duž ravne ploče je pri tome samo specijalan slučaj ove klase opštih rešenja.

Strujanje oko kružnog valjka normalno na uzdužnu osu istog je prvi obradio Blasius a kasnije su dobili poboljšana numerička rešenja K. HIEMENZ [10] , L. HOWARTH [11] , N. FRÖSLING [12] , A. ULRICH [13] , A. N. TIFFORD [14] , I. TANI [15] i drugi.

H. GÖRTLER [16] je dao metodu redova koja se može primeniti na slučajeve tela sa oštrom napadnom ivicom. Za slučajeve strujanja oko

kružnog valjka Görtler-ovi redovi ne konvergiraju tako brzo. Görtler je tabulisao univerzalne funkcije. Metoda predstavlja formalno tačno rešenje opšteg problema graničnog sloja stacionarnog laminarnog strujanja.

Analitička rešenja putem neposrednog integralenja Prandtl-ove jednačine pri proizvoljnom rasporedu brzine spoljašnjeg strujanja predstavljaju za praktične slučajeve velike poteškoće. Da bi se izbegle ove poteškoće, Prandtl-ova jednačina je integralena po debljini graničnog sloja i dobijene su impulsne jednačine kao približne metode. Njihova osnovna ideja se može prema WALZ-u [23] objasniti na sledeći način: Sastavimo katalog brzinskih profila koje dobijemo kod različitih uslova spoljašnjeg strujanja i pokušamo ove profile urediti pomoću jednog parametra oblika. Ovaj parametar oblika brzinskog profila može da se uvede kao nepoznata približne metode. Kao drugu nepoznatu izaberemo debljinu graničnog sloja. Postavimo rešenje za brzinski profil, koje ima osobine specijalnih sličnih rešenja ili obuhvata eksperimentalne brzinske profile i sadržava još barem dva slobodna koeficijenta, koji omogućuju prilagodjavanje rešenja na opšte granične uslove. Približne metode imaju za cilj da se ovi nepoznati koeficijenti odrede za zadato proizvoljno spoljašnje strujanje duž konture tela.

Metod za nestišljive tečnosti prema ovoj ideji su prvi predložili TH. von KÁRMÁN [18] i K. POHLHAUSEN [17] (1921). Sistem jednačina za obe nepoznate iz približne metode sastoji se iz uslova ravnoteže sila, uslova impulsa i graničnog uslova za ravnotežu sila koje dejstvuju na čelić neposredno na konturi tela, gde brzina i sile inercije iščezavaju. Pohlhausen-ova metoda primenjuje izražavanje brzinskih profila pomoću polinoma nižeg stepena. Polinomi trećeg i četvrtog stepena dali su zadovoljavajuće aproksimativne rešenjima. Pohlhausen-ova metoda rešenja graničnih slojeva je u osnovi jednostavnija od Blasius-Hiemenz-ova, međjutim ne zadovoljava u blizini tačke stagnacije, kao ni u oblastima kada brzina opada a pritisak raste.

Na jednačini impulsa zasniva se niz različitih metoda sličnih Pohlhausen-ovoj ( Timman, Howarth, Walz, Thwaites ) a na integralnoj jednačini kinetičke energije poznate su metode Tani, Truckenbrodt, Head i dr.

CURLE ( 1958 ) [21] je predložio, u cilju dobijanja boljih rezultata u blizini odvajanja strujanja, metodu koja predstavlja generalizaciju metode STRATFORD-a. Za strujanja sa pogodnim gradijentom pritiska Curle daje raspored trenja nizvodno od minimalnog pritiska i dobija posebno tačno položaj odvajanja graničnog sloja. TIMMAN ( 1949 ) [22] je pokušavao dobiti poboljšani postupak za proračun razvoja laminarnog graničnog sloja uvođenjem brzinskog profila čiji je oblik usavršeniji od polinoma ranijih istraživača. WALZ ( 1941 ) [23] je predložio metodu u kojoj je primenio brzinske profile sličnih rešenja Falkner - Skan-a.

Od tačnih metoda, pored Görtler-ove ( 1957 ) novu metodu je dao L.G. LOJCJANSKII (1963) [27] , kod koje se rešenja daju u obliku redova po izvesnim parametrima. Dok kod Görtlera parametri karakterišu samo spoljni raspored kod Lojcjanskog dolazi do izražaja sam razvoj graničnog sloja. Javljaju se i parametri višeg reda koji na izvestan način odražavaju uticaj krivine funkcije spoljnog rasporeda, prema tome i same konture tela, čega kod Görtler-a nema. To znači da metoda Görtler-a može dati dobre rezultate samo kod konture sa oštrom napadnom ivicom, naime konture tankih ploča, dok metoda Lojcjanskog, kod proizvoljnih kontura, sa veoma malim brojem članova u redu, daje rezultate sasvim bliske tačnim. Praktično je pokazano da je sasvim dovoljno zadržati se na drugom parametru u datom skupu parametra.



## 2.2. Nestacionarni granični slojevi kod nestišljive tečnosti

Za rešavanje nestacionarnih graničnih slojeva viskozne nestišljive tečnosti ne postoji toliko metoda kao za stacionarne granične slojeve. Prva istraživanja u teoriji vremenski zavisnih graničnih slojeva odnose se na probleme pokretanja tela iz stanja mirovanja. H. BLASIUS [2] je pretpostavio pokretanje tela u tečnosti koja je u mirovanju, impulsivno tj. trzajem, do pune vremenski konstantne brzine. S. GOLDSTEIN i L. ROSENHEAD [29] usavršili su Blasius-ovo rešenje uvođenjem dodatnog člana vremenskog razvoja strujne funkcije. GÖRTLER [30] i WATSON [31] proširili su proračun procesa formiranja graničnog sloja koristeći eksponencijalni zakon porasta brzine sa vremenom. MOORE [32] je razmotrio slučaj graničnog sloja na ploči pri proizvoljnoj promeni brzine sa vremenom. C.C. LIN [33] je dao metodu za proračun nestacionarnih periodičkih graničnih slojeva, koja se može primeniti na probleme strujanja kod kojih spoljašnje strujanje periodički osciluje. Specijalan slučaj periodičkog kretanja spoljašnjeg strujanja kada isto fluktuiru po veličini a ne po pravcu je dao M.J. LIGHTHILL [34]. Periodičke granične slojeve je takodje proučavao H. SCHLICHTING [35].

K.T. YANG [39] je analizirao nestacionarne granične slojeve kod stagnacije strujanja nestišljive tečnosti. Isti problem su proučavali M.B. GLAUERT [40] i N. ROTT [41]. Strujanje duž tanke ploče kod njenog nultog napadnog ugla proučavali su A. GOSH [42] i S. GIBBELATO [43]. H.A. HASSAN [44] je za polu-slične granične slojeve dao transformacije koje svode postojeće jednačine na jednačine gde se vreme ne javlja eksplicitno. W. TOLLMIEHN [45] (1924) je dao u svojoj disertaciji u Göttingen-u, vremensko formiranje graničnog sloja na rotirujućem valjku koji startuje



impulsivno. L. HOWARTH [46] je proučavao nesimetrično strujanje koje nastaje u slučaju impulsivnog ubrzanja eliptičnog valjka, čija glavna osa ima nagib. E.M. SPARROW i J.L. GREGG [47] rešili su problem rotirajućeg diska sa nejednolikom ugaonom brzinom. C.R. ILLINGWORTH [48] i Y.D. WADHWA [49] su obravnjavali problem raščćenja graničnog sloja na obrtnom telu, koje se obrće oko svoje ose, koja je paralelna osi strujanja.

Neke aproksimativne teorije ističu nestacionarne granične slojeve na osnovu jednačina impulsa shodno von Kármán - Polhausen-ovoj integralnoj jednačini. Aproksimativna rešenja za nestacionarne granične slojeve razvili su u detaljima L.A. ROZIN [36], H. SCHUH [37], M. DJURIĆ [60] i drugi.

V.V. STRUMINSKI i L.A. ROZIN [36] pokazali su mogućnost primene ideje jedno-parametarskih metoda stacionarnih graničnih slojeva na nestacionarne. Iako su problem rešili, ipak su ostale aritmetičke poteškoće. M.DJ.DJURIĆ [50] je razmatrao jedno-parametarsku metodu za proračun nestacionarnih graničnih slojeva. Poteškoće koje su prisutne u radovima Struminskog i Rozina je Djurić izbegao. Djurić polazi iz jednačine impulsa da bi došao do uprošćenog rešenja pojedinih aproksimacija predstavljenih običnim integralima. Ova metoda daje nešto lošije rezultate od metode Struminskog - Rozina ali je za praktične proračune jednostavnija, kraća i vodi brže do rezultata. M.DJ.DJURIĆ [38] je takodje dao i metodu tipa Görtler-a za rešenje nestacionarnih graničnih slojeva s pretpostavkom da je funkcija rasporeda brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja data u obliku dveju promenljivih koje se razdvajaju. Metoda se zasniva na uvodjenju specijalnog oblika promenljivih, pri čemu se problem svodi na rešavanje jedne parcijalne diferencijalne jednačine, u koju podaci pojedinog problema u pogledu nestacionarnosti ulaze preko dve funkcije. U radu M.DJ.DJURIĆ [60] je preneo ideju Lojčanskog na nestacionarne granične slojeve i poboljšao nedostatke ranijih metoda.

Cilj ove metode je bio da se postigne univerzalizacija osnovnih jednačina uvodjenjem tri skupa parametara, tako da jednačine koje u sebi kao ni u svojim graničnim uslovima ne sadrže podatke nekog specijalnog problema. Rešenje dobijene univerzalne diferencijalne jednačine je dato u obliku reda po naznačenim parametrima.

DJ.S. DJUKIĆ [91] razmatra metodu za rešavanje ravanskih nestacionarnih laminarnih graničnih slojeva, koja predstavlja sintezu metode sukcesivnih aproksimacija za rešavanje nestacionarnih graničnih slojeva i Görtler-ove metode. Uvodjenjem nekih novih promenljivih u diferencijalnu jednačinu postiže se da u transformisanoj jednačini podaci u pogledu nestacionarnosti figurišu samo preko jedne funkcije a podaci u pogledu oblika tela isto preko jedne funkcije. DJ.S. DJUKIĆ [92] takodje razmatra pitanje univerzalnosti jednačina nestacionarnih graničnih slojeva s tim da se ta univerzalnost postiže pretpostavkom da je brzina spoljašnjeg strujanja proizvoljna funkcija, tj. da promenljive  $x$  i  $t$  ne moraju biti razdvojene. U univerzalnoj jednačini je uticaj spoljašnjih uslova karakterističan za pojedine probleme postignut pomoću dva skupa parametara, koji su u jednačinu graničnih slojeva uvedeni kao nove nezavisne promenljive. Rešenje dvo-parametarske univerzalne jednačine je dato u obliku redova pomenutih parametara. Problem se svodi na sistem običnih diferencijalnih jednačina za određivanje koeficijenata redova. U pomenutom radu, pored poznatih primera izračunati su novi primeri na cilindričnom telu, čiji se poluprečnik tokom vremena menja po određenom zakonu.

V. SALJNIKOV [89] je dao doprinos univerzalizaciji ravanskog problema laminarnih nestacionarnih graničnih slojeva primenom generalisanih promenljivih Görtler-a uvodeći dva skupa parametara oblika. R. AŠKOVIĆ [93] je proučavao tridimenzijski periodički granični sloj na telu koje se harmonijski kreće u spoljašnjoj struji. U radu se daje detaljna analiza i

numeričke vrednosti dopunskih komponenta gradijenta pritiska. V. SALJNJKOV i DUKIĆ [90] uopštili su univerzalizaciju jednačine ravanskih graničnih slojeva nestacionarnog režima. Predložena metoda uvodi dva skupa parametara oblika i postiže se univerzalizacija transformisane jednačine. Sa praktičnog gledišta ova metoda predstavlja racionalan prilaz u pogledu njezine primene i istom je moguće rešavati probleme nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti.

### 3. BRZINSKO POLJE

#### 3.1. Jednačina ravanskih laminarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti.

U radu o temperaturnim graničnim slojevima koristićemo brzinsko polje određeno metodom M. D. DJURIĆ-a [60], koju dajemo u kratkom izvodu. U tom radu dati su rezultati prostih rešenja analitički, dok je u ovom radu izvršena tabulacija koeficijenata univerzalnih funkcija za dvoparametarsku aproksimaciju sa izračunatim primerima.

Osnovne jednačine ravanskih laminarnih nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti su Prandtl-ova jednačina kretanja i jednačina kontinuiteta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} u &= U(x,t), \quad v = 0, \quad y = 0, \quad t = 0 \\ u &= v = 0, \quad y = 0, \quad t > 0 \\ u &= U(x,t), \quad y \rightarrow \infty, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja izvan graničnog sloja predpostavlja se u obliku da razdvaja promenljive tako da

$$U(x,t) = V(x)\Omega(t)$$

gde funkcija  $V(x)$  i  $\Omega(t)$  su klase  $C^k$ ,  $0 \leq k < \infty$



$V(x)$  je funkcija koja pokazuje promenu brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja a  $\Omega = \Omega(t)$  je funkcija koja pokazuje promenu brzine spoljašnjeg potencijalnog strujanja sa vremenom tj. karakter nestacionarnosti.

Posle uvođenja strujne funkcije osnovne jednačine svode se na jednačinu:

$$\psi_{y_t} + \psi_y \psi_{x_y} - \psi_x \psi_{y_y} = U_t + U U_x + \nu \psi_{y_y y} \quad (1.4)$$

a granični i početni uslovi su:

$$\begin{aligned} \psi_y = U(x,t) \quad , \quad \psi_x = 0 \quad , \quad y=0, t=0 \\ \psi_x = \psi_y = 0 \quad , \quad y=0, t>0 \\ \psi_y \rightarrow U(x,t) \quad , \quad y \rightarrow \infty, t>0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Prema poznatim rezultatima koji se odnose na pitanje opstrujavanja ravne ploče brzinom  $\Omega(t)$ , jednačina impulsa kao što je poznato ima oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega \delta_p^* = \frac{1}{\rho} \tau_p \quad (1.6)$$

gde

$$\delta_p^*(t) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u_p}{U}\right) dy \quad (1.7)$$

je debljina istiskivanja, koja je funkcija samo od vremena a

$$\tau_p = \mu \left( \frac{\partial u_p}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{\Omega}{\delta_p^*} \xi \quad (1.8)$$

je tangencijalni napon. Uvodjenjem lokalnog parametra oblika

$$g_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} z^* \quad (1.9)$$

gde

$$z^* = \frac{\delta p^{x2}}{\nu} \quad (1.10)$$

jednačina (1.6) se svodi na

$$g_1' + g_1 \left( 3 \frac{\Omega'}{\Omega} - \frac{\Omega''}{\Omega'} \right) = 2 \frac{\Omega'}{\Omega} \xi \quad (1.11)$$

Iz (1.9) imamo

$$z^* = g_1 \frac{\Omega}{\Omega'} \quad (1.12)$$

Zadnje dve jednačine daju

$$z^{*'} = 2F, \quad \text{gde} \quad F = \xi - g_1 \quad (1.13)$$

Za rešenje jednačine (1.4) DJURIĆ uvodi tri skupa parametara  $\{f_k\}$ ,  $\{g_k\}$  i  $\{h_k\}$  za svako  $k \in (1, 2, \dots)$  i to:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= V^{k-1}(x) \frac{d^k V(x)}{dx^k} \\ g_k(t) &= \frac{1}{\Omega(t)} \frac{d^k \Omega(t)}{dt^k} z^{*k}(t) \\ h_k(t) &= \Omega^k(t) z^{*k}(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Parametrima  $f_k$  je dat uticaj konture tela a  $g_k$  označava lokalni

parametar oblika.  $f_k$  i  $h_k$  generišu konvektivni parametar. Ovi parametri mogu biti dobiveni iz jednog opšteg skupa parametara  $d_k$  datih u obliku:

$$d_k = \left( \frac{1}{U} \frac{\partial^k U}{\partial t^k} + U^{k-1} \frac{\partial^k U}{\partial x^k} \right) z^{*k} \quad (1.15)$$

Uzimajući unapred da je  $U(x, t) = V(x) \Omega(t)$   $z = z(t)$  dobijemo

$$d_k = \left( \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} + V^{k-1} \frac{d^k V}{dx^k} \Omega^k \right) z^{*k} \quad (1.16)$$

odnosno

$$d_k = g_k + f_k h_k \quad (1.17)$$

Posle diferenciranja parametara (1.14) po odgovarajućim koordinatama i uzevši u obzir (1.13) zadovoljene su sledeće rekurentne formule:

$$\begin{aligned} V f_k' &= (k-1) f_1 f_k + f_{k+1} \equiv \mu_k \\ \frac{\Omega}{\Omega'} g_1 g_k' &= (-g_1 + 2kF) g_k + g_{k+1} \equiv \lambda_k \\ \frac{\Omega}{\Omega'} g_1 h_k' &= k(g_1 + 2F) h_k \equiv \nu_k \end{aligned} \quad (1.18)$$

Uvodjenjem pomenuta tri parametra datih sa (1.14) kao nezavisno promenljivih, mogu se osnovne jednačine graničnih slojeva (1.4) svesti na univerzalni oblik.



### 3.2. Transformacija i rešenje osnovne jednačine.

Parametri (1.14) uvode se kao nezavisne promenljive, a strujna funkcija  $\psi(x, y, t)$  pretpostavlja se u obliku:

$$\psi(x, y, t) = A^{-1} U(x, t) \delta_p^*(t) \mathcal{F}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}), \quad (1.19)$$

gde je

$$\mathcal{F}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}) = \mathcal{F}(\eta; f_1, f_2, f_3, \dots, f_k; g_1, g_2, g_3, \dots, g_k; h_1, h_2, h_3, \dots, h_k) \quad (1.20)$$

$\eta = A \frac{y}{\delta_p^*}$  a  $A$  je konstanta za normiranje,  $\mathcal{F}$  je bezdimenziona strujna funkcija.

Stavljanjem (1.19) u (1.4) i uzimajući u obzir (1.18) dobijemo transformisani oblik jednačine (1.4):

$$\begin{aligned} A^2 \mathcal{F}_{\eta\eta\eta} + \eta \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta} + g_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}) - \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta} g_k \lambda_k + \mathcal{F}_{\eta} h_k \nu_k) = \\ = -f_1 h_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2 + \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (\mathcal{F}_{f_k} \mathcal{F}_{\eta\eta} - \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{F}_{\eta f_k}) \quad (1.21) \end{aligned}$$

sa graničnim uslovima:

$$\mathcal{F}_{\eta} = 1, \quad \eta = 0, \quad t = 0$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad t > 0$$

$$\mathcal{F} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Ako se uvede linearni operator sa promenljivim koeficijentima

$$L = A^2 \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + F\eta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + g_1 \left(1 - \frac{\partial}{\partial \eta}\right) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \lambda_{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial g_{\kappa}} + \nu_{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial h_{\kappa}} \right) \quad (1.22)$$

gde su izrazi

$$\mu = \mu_{\kappa}(\{f_{\kappa}\}), \quad \lambda_{\kappa} = \lambda_{\kappa}(\{g_{\kappa}\}) \quad \text{i} \quad \nu_{\kappa} = \nu_{\kappa}(\{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}),$$

jednačina (1.21) može da se napiše u obliku:

$$L(\mathcal{F}) = -h_1 \left[ f_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2 + \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta}) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa} (\mathcal{F}_{f_{\kappa}} \mathcal{F}_{\eta\eta} - \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{F}_{\eta f_{\kappa}}) \right]. \quad (1.23)$$

Jednačina (1.23) predstavlja univerzalnu jednačinu ravanskih laminarnih nestacionarnih graničnih slojeva koja u sebi ne sadrži veličine nekog posebnog problema. Rešenje ove jednačine traži se u obliku reda, koji odgovara redu Loicjanskog [55] :

$$\mathcal{F}(\eta; \{f_{\kappa}\}, \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) = \mathcal{F}_0(\eta; \{g_{\kappa}\}) + f_1 \mathcal{F}_1(\eta; \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + f_1^2 \mathcal{F}_{11}(\eta; \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + f_2 \mathcal{F}_2(\eta; \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + \dots \quad (1.24)$$

pri tome se javljaju sledeće kombinacije:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}_0 \ll 1 \gg & \mathcal{F}_0 \ll 1 \gg \\ \mathcal{F}_1 \ll f_1 \gg & \mathcal{F}_1 \ll f_1 \gg \\ \mathcal{F}_2 \ll f_1^2, f_2 \gg & \mathcal{F}_{11}, \mathcal{F}_2 \ll f_1^2, f_2 \gg \end{array} \quad (1.25)$$

Smenom izraza (1.24) u jednačinu (1.23) dobija se sistem

parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje koeficijenata gornjih redova (Dodatak 1):

$$\begin{aligned}
 L(\mathcal{F}_0) &= 0, \\
 L(\mathcal{F}_1) &= -h_1(1 - \mathcal{F}_0^2 + \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_{0\eta\eta}), \\
 L(\mathcal{F}_{11}) &= -h_1(-2 \mathcal{F}_{0\eta} \mathcal{F}_{1\eta} + \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_{1\eta\eta} + \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_{0\eta\eta}), \\
 L(\mathcal{F}_2) &= -h_1(\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_{0\eta\eta} - \mathcal{F}_{0\eta} \mathcal{F}_{1\eta}),
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{0\eta} &= 0, \quad \mathcal{F}_{1\eta} = \mathcal{F}_{11\eta} = \dots = 0, \quad \eta = 0, \quad t = 0 \\
 \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0\eta} &= 0, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_{1\eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad t > 0 \\
 \mathcal{F}_{0\eta} &\rightarrow 1, \quad \mathcal{F}_{1\eta} \rightarrow 0 \quad \eta \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Rešavanje ovih parcijalnih jednačina dato je u radu [60] pri čemu su uvedene sledeće kombinacije:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_0^0 \ll 1 \gg & \quad {}^1\mathcal{F}_1 \ll h_1 \gg \\
 \mathcal{F}_0^1 \ll g_1 \gg & \quad {}^1\mathcal{F}_1^1, {}^2\mathcal{F}_1 \ll g_1, h_1, h_2 \gg \\
 \mathcal{F}_0^{11}, \mathcal{F}_0^2 \ll g_1^2, g_2 \gg & \quad {}^{11}\mathcal{F}_{11}, {}^{11}\mathcal{F}_2 \ll h_1^2 \gg \\
 \dots & \quad \dots
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Rešenje se traži u obliku:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_0(\eta; \{g_\kappa\}, \{h_\kappa\}) &= \mathcal{F}_0^0(\eta) + g_1 \mathcal{F}_0^1(\eta) + g_1^2 \mathcal{F}_0^{11}(\eta) + g_2 \mathcal{F}_0^2(\eta) + \dots, \\
 \mathcal{F}_1(\eta; \{g_\kappa\}, \{h_\kappa\}) &= h_1 {}^1\mathcal{F}_1(\eta) + h_1 g_1 {}^1\mathcal{F}_1^1(\eta) + h_2 {}^2\mathcal{F}_1(\eta) + \dots, \\
 \mathcal{F}_{11}(\eta; \{g_\kappa\}, \{h_\kappa\}) &= h_1^2 {}^{11}\mathcal{F}_{11}(\eta) + \dots, \\
 \mathcal{F}_2(\eta; \{g_\kappa\}, \{h_\kappa\}) &= h_1^2 {}^{11}\mathcal{F}_2(\eta) + \dots
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Eksplisitni oblik funkcije  $F \{g_k\}$  je isti kao kod funkcije  $\mathcal{F}_0 \{g_k\}$  naime

$$F(\{g_k\}) = F_0 + g_1 F_1 + g_1^2 F_{11} + g_2 F_2 + \dots \quad (1.30)$$

Smenom ovako pretpostavljenih rešenja u sistem (1.26) dobijen je sistem običnih diferencijalnih jednačina. Zadržavajući se na drugim parametrima dobijeni su sledeći sistemi jednačina:

$$\begin{aligned} \mu=0 & \quad L_0^*(\mathcal{F}_0^0) = 0, \\ \mu=1 & \quad L_1^*(\mathcal{F}_0^1) = -\frac{1}{A^2}(1 - \mathcal{F}_0^{01} + \eta F_1 \mathcal{F}_0^{00}), \\ \mu=2 & \quad L_2^*(\mathcal{F}_0^2) = \frac{1}{A^2} [2 F_1 \mathcal{F}_0^{11} - \eta (F_{11} \mathcal{F}_0^{00} + F_1 \mathcal{F}_0^{11})], \\ \mu=0 & \quad L_0^*(\mathcal{F}_0^2) = \frac{1}{A^2} (\mathcal{F}_0^{11} - \eta F_2 \mathcal{F}_0^{00}), \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \mu=1 & \quad L_1^*({}^1\mathcal{F}_1) = -\frac{1}{A^2}(1 - \mathcal{F}_0^{012} + \mathcal{F}_0^0 \mathcal{F}_0^{00}), \\ \mu=2 & \quad L_2^*({}^1\mathcal{F}_1) = \frac{1}{A^2} [2({}^1\mathcal{F}_1' + F_1 {}^1\mathcal{F}_1') - \\ & \quad - (-2 \mathcal{F}_0^{01} \mathcal{F}_0^{11} + \mathcal{F}_0^0 \mathcal{F}_0^{111} + \mathcal{F}_0^{00} \mathcal{F}_0^1) - \eta F_1 {}^1\mathcal{F}_1''], \\ \mu=2 & \quad L_2^*({}^2\mathcal{F}_1) = 0, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \mu=2 & \quad L_2^*({}^{11}\mathcal{F}_{11}) = -\frac{1}{A^2} (-2 \mathcal{F}_0^{01} {}^1\mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_0^0 {}^1\mathcal{F}_1'' + \mathcal{F}_0^{00} {}^1\mathcal{F}_1') \\ & \quad \dots \dots \dots \\ \mu=2 & \quad L_2^*({}^{11}\mathcal{F}_2) = -\frac{1}{A^2} [\mathcal{F}_0^{00} {}^1\mathcal{F}_1' - \mathcal{F}_0^{01} {}^1\mathcal{F}_1'']. \end{aligned} \quad (1.31)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^0 = \mathcal{F}_0^{0'} = 0, \quad \mathcal{F}_0^1 = \mathcal{F}_0^{1'} = 0, \quad \eta = 0 \\ \mathcal{F}_0^{0'} \rightarrow 1, \quad \mathcal{F}_0^{1'} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.32)$$

U sistemu jednačina (1.31)  $L_k$  je linearni diferencijalni operator sledećeg vida:

$$L_k = \frac{d^3}{d\eta^3} + \eta\sigma \frac{d^2}{d\eta^2} - 2K\sigma \frac{d}{d\eta}, \quad \sigma = \frac{F_0}{A^2}. \quad (1.33)$$

Linearne diferencijalne jednačine za određivanje koeficijenata univerzalnih funkcija mogu se svesti na opšti oblik, imajući za  $\sigma = F_0/A^2 = 2$  i za  $A^2 = \pi^{-1}$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad D_0''' + 2\eta D_0'' = 0, \\ 2. \quad D_1''' + 2\eta D_1'' - 4D_1' = -\frac{1}{A}(1 - D_0' - \frac{2}{3}\eta D_0''), \end{aligned} \quad (1.34)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} D_1 = D_1' = 0, \quad \eta = 0; \quad D_1 = D_0' = 0, \quad \eta = \infty \\ D_1' = 0, \quad \eta = \infty, \quad D_0' = 1, \quad \eta = \infty \end{aligned} \quad (1.35)$$

Homogeni deo jednačina predstavlja linearne diferencijalne jednačine drugog reda, koje se mogu svesti na Weber-ovu diferencijalnu jednačinu.

Analitičko rešenje je dosta složeno. U radu [60] data su analitička rešenja za prvu aproksimaciju. Naš cilj u ovom radu je bio da dobijemo numerička rešenja i za slučaj dve aproksimacije i da izvršimo uporedjenje

sa analitičkim.

Konstante  $F_{i_1, \dots, i_k}$  koje se javljaju u gornjim jednačinama DJURIĆ je odredio na sledeći način:

Na osnovu (1.13) imamo  $F = \xi - g_1$  gde je  $\xi = \xi(\{g_k\})$ .  
Predpostavljajući

$$\xi = \xi_0 + g_1 \xi_1 + g_1^2 \xi_{11} + g_2 \xi_2 + \dots \quad (1.36)$$

i vodeći računa da je

$$\xi = A \left( \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{F}}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0},$$

dobije se

$$\xi_{i_1, \dots, i_k} = A (\tilde{\mathcal{F}}_0^{i_1, \dots, i_k}(0))'' \quad (1.37)$$

Iz (1.13), (1.30) i (1.36) imamo:

$$F_0 = \xi_0, \quad F_1 = \xi_1 - 1, \quad F_{11} = \xi_{11}, \quad F_2 = \xi_2, \quad (1.38)$$

Za prosta rešenja prema [60] dobivene su sledeće vrednosti konstanti  $F_0$  i  $F_1$ :

$$F_0 = \frac{2}{\pi}, \quad F_1 = -\frac{2}{3}. \quad (1.39)$$

U ovom radu, koeficijente univerzalnih funkcija, koji su tabulisani, koristimo za izračunavanje konstanti  $F_{i_k}$ :

$$F_0 = \xi_0 = A \tilde{F}_0''(0) = 0,5642 \cdot 1,1284 = 0,6366 \approx \frac{2}{\pi},$$

$$F_1 = \xi_1 - 1 = -1 + \tilde{F}_0'''(0) \cdot 0,5642 = -1 + 0,5908 \cdot 0,5642 = -0,666 \approx -\frac{2}{3},$$

$$F_{11} = \xi_{11} = 0,5642 \tilde{F}_0^{(4)}(0) = 0,5642 \cdot 0,0552 = 0,03114,$$

$$F_2 = \xi_2 = 0,5642 \tilde{F}_0^{(2)}(0) = 0,5642 (-0,0744) = -0,04197. \quad (1.40)$$

Konstanta za normiranje A nadjena je shodno:

$$F_0 = A \tilde{F}_0''(0), \quad G = \frac{F_0}{A^2} = 2 \quad \therefore A = \frac{1}{2} \tilde{F}_0''(0) = 0,5642 \quad (1.41)$$

Za rešavanje konkretnog problema potrebno je naći funkciju

$$\ddot{z} = \ddot{z}(t)$$

$$\frac{dz^*}{dt} = 2F(\{g_k\}) = 2F\left(\frac{\Omega'}{\Omega} z^*, \frac{\Omega''}{\Omega} z^{*2}, \dots\right) \quad (1.42)$$

Za jedno-parametarsku aproksimaciju, smatrajući parametar  $g_1$  dovoljno malim shodno [60] imamo:

$$\frac{dz^*}{dt} = 2 \left[ F_0 + F_1 \frac{\Omega'}{\Omega} z^* \right], \quad z^* = \frac{4}{\pi} \Omega^{-4/3} \int_0^t \Omega^{4/3} dt \quad (1.43)$$

Za dvoparametarsku aproksimaciju rešena je obična nelinearna jednačina, koja ima eksplicitni oblik:

$$\frac{dz^*}{dt} = 2 \left\{ F_0 + F_1 \frac{\Omega'}{\Omega} z^* + \left[ F_{11} \left( \frac{\Omega'}{\Omega} \right)^2 + F_2 \left( \frac{\Omega''}{\Omega} \right) \right] z^{*2} \right\} \quad (1.44)$$

numeričkom integracijom a njeno rešenje prikazano je u dijagramu (sl.1 ). Za mala vremena  $t$  , koja u problemima dolaze u obzir doprinosi nelinearnih članova su praktično zanemarujuće mali.

### 3.3. Primeri

Na elementarnim primerima uporedićemo rezultate analitičkih rešenja dobijenih jedno-parametarskom aproksimacijom [60] sa rezultatima prostih rešenja koji su dobiveni numeričkom integracijom, koristeći tabulisane vrednosti koeficijenata univerzalnih funkcija.

Posmatraćemo kružni valjak u slučaju kada se isti dovodi u kretanje iz mirovanja trzajem, konstantnom brzinom  $\Omega(t) = \Omega_{\infty} t^m$  , ( $m=0$ ) i u slučaju kada se dovodi u kretanja sa konstantnim ubrzanjem  $\Omega(t) = \dot{\Omega}_{\infty} t^m$  , ( $m=1$ ).

Za razliku u radu [60] takodje su izračunati elementarni primeri sa dvo-parametarskom aproksimacijom koristeći rezultate numeričke integracije i upoređujući iste sa rezultatima drugih istraživača.

#### 3.3.1 .Impulsni pokret kružnog valjka sa konstantnom brzinom.

a) Analitički postupak prema [60]:

Brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja je

$$U(x,t) = V(x) \Omega(t) = 2 \Omega_{\infty} \sin \frac{x}{R}$$

gde  $x$  označava luk meren od prednje zaustavne tačke na valjku, a  $R$  poluprečnik kružnog valjka ( $R = \text{const.}$ ) . Za prosta rešenja vrednost za  $z^*$



$$z^* = \frac{4}{\pi} t$$

a pojedini parametri su:

$$f_1 = V' = \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R}, \quad g_1 = 0, \quad h_1 = \Omega_\infty z^* = \Omega_\infty \frac{4}{\pi} t.$$

Brzinski profil ima oblik:

$$\frac{u}{U} = \mathcal{F}_0'(\eta) + f_1 h_1 {}^1\mathcal{F}_1'(\eta).$$

Prva pojava odvajanja graničnog sloja u zadnjoj kritičnoj tački sledi iz uslova

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

$$\mathcal{F}_0''(0) + f_1 h_1 {}^1\mathcal{F}_1''(0) = 0.$$

Vrednosti koeficijenata univerzalnih funkcija za jedno-parametarsku aproksimaciju izračunate analitički su:

$$\mathcal{F}_0''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,12838$$

$${}^1\mathcal{F}_1''(0) = \frac{2}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 1,26238$$

Za  $x/R = \pi$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \Omega_\infty \frac{2}{R} \frac{4}{\pi} t \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) \cos \frac{x}{R} = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{R} \Omega_\infty \frac{4}{\pi} t \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 0$$

$$\frac{\Omega_\infty}{R} t \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$t_s = \frac{1}{2\left(1 + \frac{4}{3}\pi\right)} \frac{R}{\Omega_\infty} = 0,35102 \frac{R}{\Omega_\infty}$$

b) Korišćenjem tabulisanih funkcija dobijemo:

$$G_0''(0) = 1,1284$$

$$F_1''(0) = 1,2623$$

$$1,1284 + \frac{2}{R} \cos \frac{\pi}{R} \Omega_\infty \frac{4}{\pi} t - 1,2623 = 0$$

$$t_s = \frac{1,1284}{3,2144} \frac{R}{\Omega_\infty} = 0,35104 \frac{R}{\Omega_\infty}$$

Rezultati su očigledno identični i odgovaraju rezultatima koje su dobili SCHLICHTING [59], LOJCJANSKII [55], GOLDSTEIN i ROSENHEAD [28], MOORE [58] i drugi.

Ovaj elementarni primer pokazuje da jedno-parametarska aproksimacija sa usvojenom linearizacijom daje zadovoljavajuće rezultate za praktična razmatranja.

GOLDSTEIN i ROSENHEAD [28] našli su vreme odvajanja graničnog sloja na kružnom valjku u drugoj aproksimaciji  $t_s = 0,32 R/V$  a SCHUH (1953)  $t_s = 0,30 R/V$ . [37]

Uzimajući dvo-parametarsku aproksimaciju sa istim pretpostavkama na istom primeru, proverićemo rezultat koji su dobili GOLDSTEIN i ROSENHEAD [28] tj.  $t_s = 0,32 R/V$ , za  $z'' = \frac{4}{\pi} t$  :

$$f_1 = V' = \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R} \quad , \quad f_2 = VV'' = 2 \sin \frac{x}{R} \left( -\frac{2}{R^2} \sin \frac{x}{R} \right) = -\frac{4}{R^2} \sin^2 \frac{x}{R}$$

$$g_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} z^* = 0 \quad , \quad g_2 = \frac{\Omega''}{\Omega} z^{*2} = 0 \quad ,$$

$$h_1 = \Omega z^* = \Omega \frac{4}{\pi} t \quad , \quad h_2 = \Omega^2 z^{*2} = \Omega^2 \frac{16}{\pi^2} t^2$$

Brzinski profil ima sledeći oblik :

$$\frac{u}{U} = \mathcal{F}' = \mathcal{F}_0' + f_1 \mathcal{F}_1' + f_1^2 \mathcal{F}_{11}' + f_2 \mathcal{F}_2' + \dots$$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}_0' + g_1 \mathcal{F}_0'' + g_1^2 \mathcal{F}_0''' + g_2 \mathcal{F}_0^{2'} + f_1 h_1 \mathcal{F}_1' +$$

$$+ f_1 h_1 g_1 \mathcal{F}_1' + f_1 h_2 \mathcal{F}_1'' + f_1^2 h_1^2 \mathcal{F}_{11}' + f_2 h_1^2 \mathcal{F}_2' + \dots$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial U} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \therefore \mathcal{F}'' = 0$$

$$\mathcal{F}_0'' + g_1 \mathcal{F}_0''' + g_1^2 \mathcal{F}_0^{(4)} + g_2 \mathcal{F}_0^{2''} + f_1 h_1 \mathcal{F}_1'' +$$

$$+ f_1 h_1 g_1 \mathcal{F}_1'' + f_1 h_2 \mathcal{F}_1''' + f_1^2 h_1^2 \mathcal{F}_{11}'' + f_2 h_1^2 \mathcal{F}_2'' + \dots = 0$$

Koeficijenti univerzalnih funkcija, koji dolaze u obzir su :

$$\mathcal{F}_0''(0) = 1,1284$$

$$\mathcal{F}_1''(0) = 1,2623$$

$$\mathcal{F}_{11}''(0) = -0,1530$$

$$1,1284 + \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R} \Omega \frac{4}{\pi} t + 1,2623 - \frac{4}{R^2} \cos^2 \frac{x}{R} \Omega^2 \frac{16}{\pi^2} t^2 - 0,1530 = 0$$

i vreme odvajanja graničnog sloja

$$t_s = 0,3195 \frac{R}{\Omega} \approx 0,32 \frac{R}{\Omega},$$

što je isto kao što su to dobili GOLDSTEIN i ROSENHEAD [28]

### 3.3.2. Jednoliko ubrzanje kružnog valjka

Razmotrićemo proces formiranja graničnog sloja ravanskog laminarnog strujanja u slučaju jednolikog ubrzanja valjka u jedno-parametarskoj aproksimaciji koristeći tabulisane univerzalne funkcije i uporediti tako dobivene rezultate sa analitičkim, koje su dobili drugi autori.

Brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja

$$U(x, t) = V(x) \Omega(t)$$

gde je  $V(x)$  funkcija konture  $V(x) = 2 \sin x/R$  a  $\Omega(t)$  je promena brzine sa vremenom  $\Omega(t) = t^m$ , gde je u datom primeru  $m = 1$ . Onda sledi:

$$U(x, t) = 2 \sin x/R \Omega_0 t$$

Istim postupkom kao kod slučaja pokreta valjka trzajem, uslov za određivanje odvajanja graničnog sloja je:

$$\mathcal{F}_0''(0) + g_1 \mathcal{F}_0'''(0) + f_1 h_1 \mathcal{F}_1''(0) = 0.$$

Funkcija  $\mathcal{Z}$  za jedno-parametarsku aproksimaciju

$$z^* = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\Omega^{4/3}} \int_0^t \Omega^{4/3} dt = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\Omega_\infty^{4/3} t^{4/3}} \int_0^t \Omega_\infty^{4/3} t^{4/3} dt = \frac{12}{7\pi} t \approx 0,5457 t.$$

Parametri su:

$$f_1 = V' = \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R}$$

$$g_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} z^* = \frac{1}{\Omega_\infty t} \Omega_\infty \frac{12}{7\pi} t = \frac{12}{7\pi}$$

$$h_1 = \Omega z^* = \Omega_\infty t \frac{12}{7\pi} t = \Omega_\infty \frac{12}{7\pi} t^2$$

Analitički dobiveni koeficijenti univerzalnih funkcija shodno [60] su:

$$\mathcal{F}_0''(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad \mathcal{F}_0'''(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{\pi}} \quad , \quad {}^1\mathcal{F}_1''(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)$$

a prvi trenutak odvajanja graničnog sloja je izračunat

$$t_s^2 = \frac{3}{2 \left(1 + \frac{4}{3\pi}\right)} \frac{R}{\Omega_\infty} = 1,0531$$

Uzimajući u račun vrednosti tabulisanih koeficijenata univerzalnih funkcija:

$$\mathcal{F}_0''(0) = 1,1284$$

$$\mathcal{F}_0'''(0) = 0,5908$$

$${}^1\mathcal{F}_1''(0) = 1,2623$$

dobijemo:

Uzevši  $x/R = \pi$  sledi  $\cos(x/R) = -1$

$$1,1284 + 0,3224 - \frac{\Omega_\infty}{R} 1,3776 t^2 = 0$$

$$t_s^2 = 1,05312 \frac{R}{\Omega_\infty}$$

$$t_s = \underline{1,0262} \sqrt{\frac{R}{\Omega_\infty}}$$

BLASIUS [2]	je dobio u drugoj aproksimaciji	$t_s^2 = 1,04 \div 1,17 R/\Omega$
SCHLICHTING [59]		$t_s^2 = 1,04 R/\Omega$
DJURIĆ [60]		$t_s^2 = 1,053 R/\Omega$
SALJNIKOV i DJUKIĆ [90]		$t_s^2 = 1,05 R/\Omega$

Rešenjem nelinearne diferencijalne jednačine

$$\frac{dz_p^*}{dt} = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{3} \frac{\Omega'}{\Omega} z_p^* + \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{6} \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} - \frac{1}{10} \frac{\Omega''}{\Omega} \right) z_p^{*2}$$

SALJNIKOV i DJUKIĆ [90] dobili su za  $z_p^* = \frac{7}{4\pi} t \approx 0,557$  vreme odvajanja graničnog sloja

$$t_s^2 = 1,06 \frac{R}{\Omega_\infty}$$

Isti primer izračunamo za dvo-parametarsku aproksimaciju

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^{(0)} + g_1 \mathcal{F}_0^{(1)} + g_1^2 \mathcal{F}_0^{(2)} + g_2 \mathcal{F}_0^{(2)} + f_1 h_1 \mathcal{F}_1^{(1)} + f_1 h_1 g_1 \mathcal{F}_1^{(1)} + \\ + f_1 h_2 \mathcal{F}_1^{(2)} + f_1^2 h_1 \mathcal{F}_1^{(2)} + f_2 h_1 \mathcal{F}_2^{(1)} \end{aligned}$$

Uzimajući funkciju  $z^*$  kao u jedno-parametarskoj aproksimaciji ( $z^* = \frac{12}{7\pi} t$ ) dobija se :

$$f_1 = \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R} \quad , \quad f_2 = -\frac{4}{R^2} \sin^2 \frac{x}{R}$$

$$g_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} z^* = \frac{12}{7\pi} \quad , \quad g_2 = \frac{1}{\Omega} \Omega'' z^{*2} = 0$$

$$h_1 = \Omega_\infty \frac{12}{7\pi} t^2 \quad , \quad h_2 = \Omega^2 z^{*2} = \Omega_\infty^2 t^2 \left( \frac{12}{7\pi} t \right)^2$$

Koeficijenti univerzalnih funkcija koje dolaze u obzir su:

$$F_0^{(0)}(0) = 1,1284$$

$$F_0^{(1)}(0) = 0,5908$$

$$F_0^{(2)}(0) = 0,0552$$

$$F_1^{(0)}(0) = 1,2623$$

$$F_1^{(1)}(0) = -0,1694$$

$$F_1^{(2)}(0) = -0,1530$$

$$1,1284 + \frac{12}{7\pi} 0,5908 + \left(\frac{12}{7\pi}\right)^2 0,0552 - \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R} \Omega \frac{12}{7\pi} t^2 1,2623 -$$

$$- \frac{2}{R} \cos \frac{x}{R} \Omega \frac{12}{7\pi} t^2 \frac{12}{7\pi} 0,1694 - \frac{4}{R^2} \cos \frac{x}{R} \Omega^2 \left(\frac{12}{7\pi}\right)^2 t^4 0,1530 = 0$$

$$t_s^2 = 1,00504 \frac{R}{\Omega}$$

$$t_s = 1,0025 \left(\frac{R}{\Omega}\right)^{1/2}$$

Isti primer izračunat sa funkcijom  $z^* = 0,5533 t$

$$t_s^2 = 0,995 \frac{R}{\Omega}$$

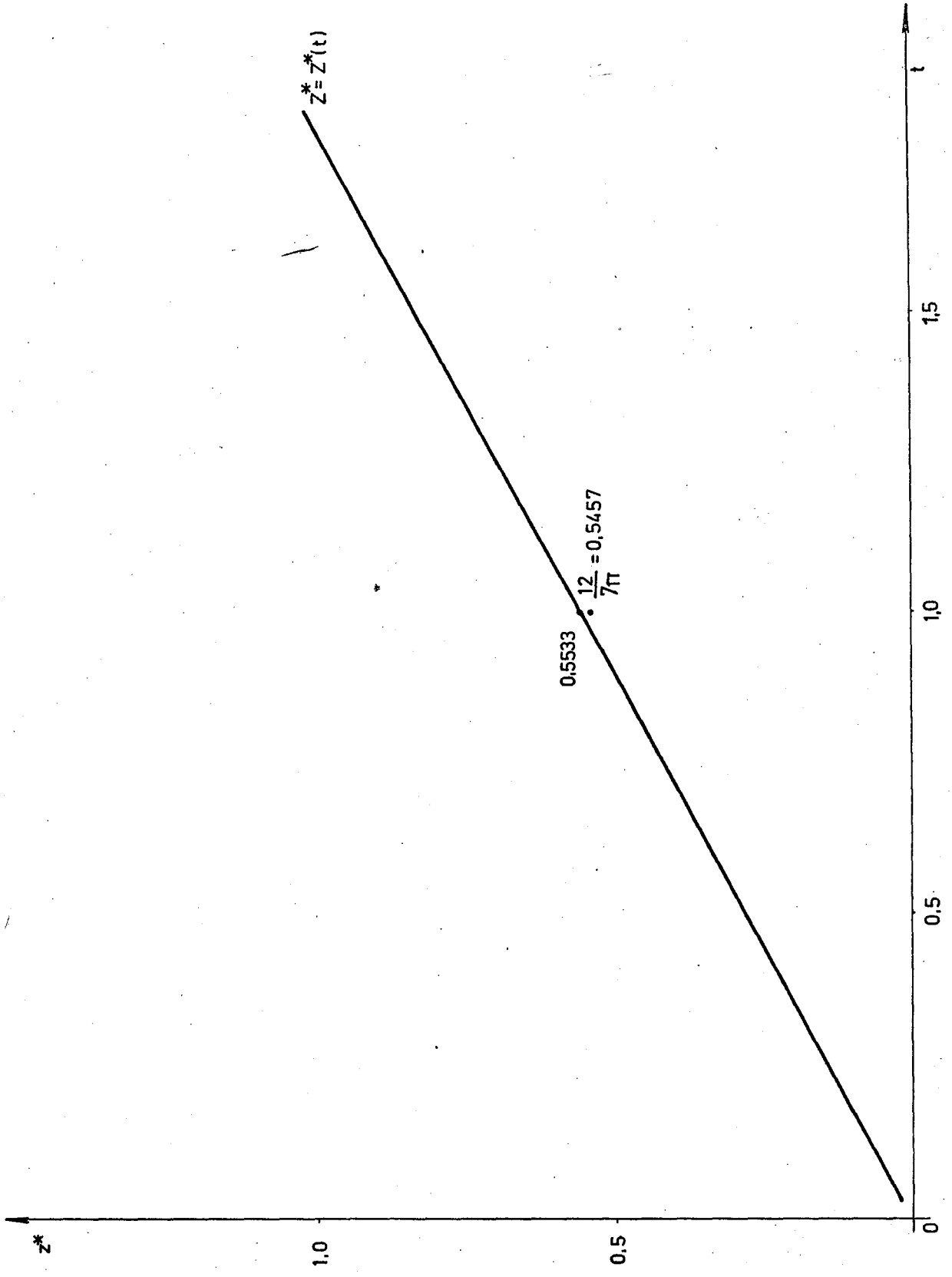
## 4. TEMPERATURSKO POLJE

### 4.1. Uvod

E. POHLHAUSEN (1921) [78] je rešio jednačinu temperaturskog graničnog sloja zanemarujući toplotu, koja se razvija usled trenja, i to za jednoliko strujanje paralelno zagrevanoj ploči pri gradijentu pritiska jednakom nuli. Isti autor je proučavao problem određivanja temperature koju treba da postigne ravni termometar kada nema prelaza toplote između tela i tečnosti. Toplotu koja se razvija u graničnom sloju usled trenja, nije zanemario. Rešenje prenosa toplote u blizini zaustavne tačke dao je SQUIRE [79]: Opštiju klasu rešenja razmatrali su FAGE i FALKNER [67]. Oni su rešili jednačinu temperaturskog graničnog sloja za slučaj da temperatura na površini tela nije konstantna a zadata je kao funkcija uzdužne koordinate  $x$ . Kod metode Fage-Falkner-a koristi se brzinski profil koji je ispravan samo u blizini zida, što znači da je temperaturski granični sloj mnogo tanji od brzinskog. Ova metoda je teorijski asimptotska i važi za velike Prandtl-ove brojeve ali daje veliku numeričku tačnost takodje kod  $Pr = 1,0$ .

LIGHTHILL M.J. [34] je razvio metodu za aproksimativno izračunavanje prenosa toplote kroz laminarni granični sloj sa proizvoljnim rasporedom temperature zida i brzine spoljašnjeg strujanja, uzevši uprošćenu pretpostavku da se brzinski profil može aproksimirati njegovom tangentom na zidu. On je istraživao uticaj malih harmoniskih poremećaja u spoljašnjem strujanju na trenje i prenos toplote u laminarnom graničnom sloju. U toj analizi pretpostavljeni su mali poremećaji koji dozvoljavaju linearizaciju jednačine. Slučaj vrlo visokih frekvencija je proučavao C.C. LIN [33]. Posle ovih fundamentalnih radova Lighthill-a i C.C. Lin-a proizašao je niz teorijskih istraživanja koja raspravljaju opšte spoljašnje strujanje, strujanje u





S/1.

zaustavnoj tački i duž ravne ploče.

LIGHTHILL je koristio rezultate brzinskog polja u kome se brzina spoljašnjeg strujanja menja po veličini. Zanemarujući toplotu koja se razvija u graničnom sloju usled trenja on je integroval energijsku jednačinu von Mises-a koristeći Heaviside-ovu operacionu metodu i dobio količinu toplote koja prelazi sa teča na tečnost.

LIEPMANN [66] je izveo formulu za lokalni prenos toplote nezavisnim postupkom, koji koristi integralnu jednačinu toplotne energije. Liepmann-ova formula razlikuje se od Lighthill-ove za tri od sto. CURLE [21] je pokazao metodu sličnu Liepmann-ovoj koja ima veću tačnost od Lighthill-ove formule. Dve njegove metode primenjene su za slučaj strujanja oko zagrejanog valjka a rezultati upoređeni su sa eksperimentima koje su radili SCHMIDT i WENNER [75]. SARMA [76] je koristio rezultate svoje analize nestacionarnog brzinskog graničnog sloja za temperaturske granične slojeve.

Teorijska istraživanja iz oblasti temperaturskih graničnih slojeva vršili su KESTIN [82], SPARROW [83], IMAI [62] i dr. GERSTEN [61] je istraživao rešenje jednačina kako za brzinski tako i temperaturski granični sloj za slučaj kada su periodični poremećaji superponirani na spoljašnje stacionarno strujanje. Spoljašnje strujanje je pretpostavljeno klinastog tipa sa rasporedom u obliku  $U(x) = c \cdot x^m$ , gde  $m$  predstavlja gradijent pritiska u strujanju. Spoljašnje strujanje je zamišljeno da je poremećeno prostom harmoničkom oscilacijom. GERSTEN je koristio metodu malih poremećaja koja dovodi do rešenja razvoja u redove.

M. DJURIĆ [70] i [71] je radio na pitanju rešenja nestacionarnih

temperaturskih graničnih slojeva kod ravanskog strujanja pod pretpostavkom da razlike temperature između spoljašnjeg strujanja i zida tela nije velika i da se promena u temperaturi zida  $T_w(x, t)$  dešava u istom momentu kad se telo pokrene iz mirovanja. Koristeći svoj rad brzinskog polja, DJURIĆ prenosi svoju metodu i na temperaturske granične slojeve. Razlika između temperature zida  $T_w(x, t)$  i spoljašnjeg strujanja  $T_\infty$  pretpostavlja se u obliku  $T_w(x, t) - T_\infty = S(x) \Theta(t)$ .

V. DJORDJEVIĆ [84] u svom radu razmatra problem određivanja temperaturskog polja pri nestacionarnom ravanskom strujanju nestišljive tečnosti u graničnom sloju. Za rešenje problema bilansa energije korišćen je aproksimativni postupak zasnovan na poznatom postupku određivanja brzinskog polja kod odgovarajućeg strujanja. Dobiveni rezultati rešenja primenjeni su na izračunavanje toplotnog toka na beskonačnoj ploči i u oblasti prednje kritične tačke cilindričkog tela.

#### 4.2. IZVODJENJE OSNOVNIH JEDNAČINA

U ovom radu razmatra se nestacionarni problem ravanskih laminarnih termičkih graničnih slojeva i data je metoda koja se može primeniti na slučajeve kada se brzina strujanja na spoljašnjoj granici graničnog sloja može predstaviti kao proizvod dveju funkcija, od kojih jedna zavisi samo od koordinate  $x$ , a druga od vremena  $t$ . Za određivanje temperaturskog polja iz energijske jednačine bilo je potrebno prethodno rešiti brzinsko polje u cilju dobijanja koeficijenata univerzalnih funkcija brzinskog polja koji ulaze u temperatursko polje. Ovo je učinjeno u prvom delu ovog rada.

Obzirom što prosta rešenja daju zadovoljavajuće rezultate

za praktična razmatranja, to se za proračun temperaturnog polja koriste prosta rešenja. Za slučaj prenosa toplote moramo odrediti temperaturno polje u strujanju i u skup jednačina brzinskog polja dodati jednačine za raspored temperature.

Pri nestacionarnom ravanskom strujanju nestišljive tečnosti temperaturno polje određeno je energijskom jednačinom datom u obliku:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{g c_p} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) (U - u) + \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2.1.)$$

sa graničnim uslovima na spoljašnjoj granici graničnog sloja

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad (2.2.)$$

gde je  $T$  realna funkcija klase  $C^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ).

Treba napomenuti da neki autori [77] pri proračunu stacionarnih graničnih slojeva čak za nestišljivu tečnost za rešenje energijske jednačine koriste odgovarajuće rešenje brzinskog nestišljivog graničnog sloja i zadržavaju u energijskoj jednačini član  $u \partial p / \partial x$ , koji predstavlja u stvari toplotu usled širenja odnosno skupljanja. Oni zadržavaju ovaj član zbog toga što na spoljašnjoj granici graničnog sloja važi Bernulijeva jednačina u obliku

$$\frac{U^2(x)}{2g c_p} + T_1(x) = T_t = const.$$

gde je  $T_1(x)$  promenljiva temperatura na spoljašnjoj granici graničnog sloja a  $T_t$  totalna temperatura, koja je ista u svim tačkama. Zbog toga, za rešenje problema zagrevanja odnosno hladjenja može se koristiti metod superpozicije.

U ovom radu odustalo se od rešavanja problema zagrevanja

odnosno hladjenja metodom superpozicije rešenja i rešenje je dobijeno nezavisno od rešenja termometarskog problema.

M. DJURIĆ je u svom radu [70] pokušao da rešenje problema zagrevanja odnosno hladjenja dobije putem superpozicije rešenja, koristeći već poznato rešenje termometarskog problema, pomoću sledećeg izraza:

$$T(x, y, t) - T_{\infty} = [(T_w(x, t) - T_{\infty}) - (\bar{T}_w(x, t) - T_{\infty})] \mathcal{H}(x, \eta, \tau) + \frac{1}{g c_p} S(x) \Omega^2(t) \mathcal{H}(x, \eta, \tau) \quad (a)$$

gde je za  $T_w(x, t)$  obeležena sopstvena temperatura tela određena sa:

$$\bar{T}_w(x, t) - T_{\infty} = \frac{1}{g c_p} S(x) \Omega^2(t) \mathcal{H}(x, 0, \tau) \quad (b)$$

Izraz (a) zaista zadovoljava granične uslove problema zagrevanja, odnosno hladjenja, ali funkcija  $\mathcal{H}(x, \eta, \tau)$  ne zadovoljava jednačinu:

$$P(\mathcal{H}) = \beta(\tau) \left[ V(\mathcal{F}_{\eta} \mathcal{H}_x - \mathcal{F}_x \mathcal{H}_{\eta}) + V \frac{S'}{S} \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{H} - V' \mathcal{F} \mathcal{H}_{\eta} \right], \quad (c)$$

Jednačina (c) bi mogla da se dobije iz (a) samo ako bi se pretpostavilo da je sopstvena temperatura tela konstantna, što međutim nije slučaj i zato se rezultati u radu [70] dobijeni u slučaju problema zagrevanja odnosno hladjenja moraju smatrati netačnim. Interesantno je da čak, ako bi se pomoću (a) izvela ispravna jednačina za  $\mathcal{H}(x, \eta, \tau)$  ona ne bi mogla biti svedena na univerzalan oblik na način kao što se to čini u radu [70]. Da bi se postigla univerzalizacija jednačine za  $\mathcal{H}(x, \eta, \tau)$  bilo bi neophodno potrebno da pored  $T_w(x, t) - T_{\infty}$  i  $\bar{T}_w(x, t) - T_{\infty}$  odnosno (b) može da se pretpostavi u vidu proizvoda dveju funkcija od kojih jedna zavisi samo od  $x$  a druga samo od  $t$ , što u opštem slučaju nije moguće. Zato se u ovom radu, kao što je ranije već napomenuto, odustalo od rešavanja problema zagrevanja odnosno hladjenja metodom superpozicije rešenja.

U energijskoj jednačini smo izostavili član  $u(\partial p/\partial x)$  i granični uslov na spoljašnjoj ivici graničnog sloja se ima u obliku

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_{\infty},$$

gde je  $T_{\infty}$  konstantna temperatura na spoljašnjoj granici graničnog sloja. Zbog toga se termometarski kao i problem zagrevanja odnosno hladjenja razmatraju nezavisno jedan od drugoga. Sa fizičke tačke gledišta bilo bi neopravdano zadržati u energijskoj jednačini izraz  $u(\partial p/\partial x)$  a da se istovremeno koristi i granični uslov  $y \rightarrow \infty, T \rightarrow T_{\infty}$ . Ova nedoslednost desila se je u radu [70].

Osnovna jednačina za dalje razmatranje je energijska jednačina sledećeg oblika:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2.3)$$

Ova jednačina se rešava kod unutrašnjih graničnih uslova koji odgovaraju:

1. termometarskom problemu:  $y=0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$
  2. problemu zagrevanja odnosno hladjenja:  $y=0, T = T_w = const,$
  3. zadatom toplotnom toku:  $y=0, \frac{\partial T}{\partial y} = q_0(x,t) \neq 0,$
  4. promenljivoj temperaturi zida:  $y=0, T = T_w(x,t).$
- (2.4)

Kod termometarskog problema kao i problema zagrevanja odnosno hladjenja, izabrali smo proste granične uslove s ciljem što isti ne uvode neke nove funkcije u proračun i stoga se ne javlja potreba za uvođenjem novih skupa parametara za rešenje jednačine temperaturskih graničnih slojeva.

Energijska jednačina je linearna i zbog toga se može primeniti princip superpozicije.

Na spoljašnjoj granici graničnog sloja granični uslovi su isti za sve navedene probleme koji se tretiraju u ovoj tezi.

$$y \rightarrow \infty, T \rightarrow T_{\infty}.$$

#### 4.3 PROBLEM ADIABATSKOG ZIDA (TERMOMETARSKI PROBLEM).

Rešićemo prvo termometarski problem. Potrebno je odrediti temperaturno polje u strujanju i u skup jednačina za brzinsko polje moramo dodati jednačine za temperaturni raspored za slučaj ravanskog strujanja prinudne konvekcije.

Nestacionarna energijska jednačina za ravanske granične slojeve nestišljive tečnosti je data sa (2.3):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

sa graničnim uslovima unutar graničnih slojeva:  $y=0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$

i graničnim uslovom na granici graničnog sloja:  $y \rightarrow \infty, T \rightarrow T_{\infty}$ .

Komponentne brzine u pravcima  $x$  i  $y$  su:  $u(x, y, t)$  i  $v(x, y, t)$ .  $T(x, y, t)$  je temperaturno polje,  $t$  je vreme, a ostale oznake su poznate fizičke karakteristike tečnosti.

Uvodimo bezdimenzionu funkciju  $\mathcal{K}^*$  i rešenje osnovne jednačine (2.3) tražimo u sledećem obliku:

$$T = T_{\infty} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}^*(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}; Pr),$$

(2.5)

i dobijemo diferencijalnu jednačinu (Dodatak):

$$L^*[\mathcal{K}] = -F_{\eta\eta}^2 \quad (2.6)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad \mathcal{K}_{\eta}^* &= 0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad \mathcal{K} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Funkcija  $\mathcal{K}^*$  predstavlja rešenje termometarskog problema.

Operator  $L^*$  ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} L^*[\mathcal{K}^*] &= \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_{\eta\eta}^* + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 F + h_1 \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mu_{\kappa} F_{f_{\kappa}})) \mathcal{K}_{\eta}^* - \\ &- \frac{1}{A^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (h_1 F_{\eta} \mu_{\kappa} \mathcal{K}_{f_{\kappa}}^* + \lambda_{\kappa} \mathcal{K}_{g_{\kappa}}^* + \psi_{\kappa} \mathcal{K}_{h_{\kappa}}^*) - \\ &- \frac{2}{A^2} (f_1 h_1 F_{\eta} + g_1) \mathcal{K}^* \end{aligned} \quad (2.8)$$

Diferencijalna jednačina za  $\mathcal{K}^*$  izvedena je u dodatku.

Rešenje jednačine (2.8) je izvedeno na način koji je usvojen za rešenje jednačina brzinskog polja:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^* &= \mathcal{K}_0^*(\eta; \{g_{\kappa}\}) + f_1 \mathcal{K}_1^*(\eta; \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + \dots \\ \mathcal{K}_0^* &= \mathcal{K}_0^0(\eta) + g_1 \mathcal{K}_0^1(\eta) + \dots \\ \mathcal{K}_1^* &= h_1 \mathcal{K}_1^*(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

pri tome su zanemareni svi nelinearni članovi tj. izvršena je linearizacija po parametrima.



Jednačine za koeficijente koji zavise samo od  $\eta$  su:

$$\begin{aligned}
 L_0[\mathcal{K}_0^*] &= -\mathcal{F}_0^{0''2}, \\
 L_1[\mathcal{K}_0^*] &= \frac{1}{A^2} (2\mathcal{K}_0^* - \eta F_1 \mathcal{K}_0^{0'}) - 2\mathcal{F}_0^{0''} \mathcal{F}_0^{1''}, \\
 L_1[\mathcal{K}_1^*] &= \frac{1}{A^2} (2\mathcal{F}_0^{0'} \mathcal{K}_0^* - \mathcal{F}_0^0 \mathcal{K}_0^{0'}) - 2\mathcal{F}_0^{0''} \mathcal{F}_1^{1''}, \\
 L_\kappa[\mathcal{K}^*] &= \frac{1}{Pr} \mathcal{K}^{*''} + \frac{\eta F_0}{A^2} \mathcal{K}^{*'} - \frac{2\kappa F_0}{A^2} \mathcal{K}^*
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Analitičko rešenje ovih jednačina je komplikovano i stoga koristimo numeričku integraciju univerzalnih funkcija. Pri integraciji je korišćena metoda RUNGE-KUTTA-MERSON. Za primenu ove metode potrebno je da budu svi granični uslovi dati u istoj tački (Cauchy-ev problem), međutim isti su dati u dve tačke. Za redukciju graničnih uslova u jednu tačku korišćena je metoda V. SIMONOVIĆ-a [86]. Rezultati numeričke integracije dobiveni su na elektronskoj digitalnoj mašini NATIONAL ELLIOT 803 B, pri zahtevanoj tačnosti od tri tačne decimale. Rezultati integracije dati su u vidu tabela i takodje u vidu grafika. (Dodatak). Kada su oni poznati, mogu se formirati svi izrazi potrebni za izračunavanje karakterističnih veličina graničnog sloja.

Sopstvena temperatura  $T_p$  za prosta rešenja je data sa:

$$\begin{aligned}
 T_p = T|_{\eta=0} &= T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}^*(0; \{f_\kappa\}, \{g_\kappa\}, \{h_\kappa\}; Pr), \\
 \frac{T_p - T_\infty}{U^2/g c_p} &= \mathcal{K}_0^*(0) + g_1 \mathcal{K}_0^{0'}(0) + f_1 h_1 \mathcal{K}_1^*(0) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

#### 4.4. PROBLEM ZAGREVANJA ODNOSNO HLADJENJA

Energijsku jednačinu (2.3) rešavamo u ovom slučaju sa sledećim graničnim uslovima :

$$\begin{aligned} y=0 & \quad T = T_w = \text{const.} , \\ y \rightarrow \infty & \quad , T \rightarrow T_\infty = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Uvodjenjem novih bezdimenzionih funkcija  $\mathcal{H}^*$  i  $\mathcal{H}^{**}$  rešenje tražimo u obliku :

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \mathcal{H}^{**} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{H}^* \quad (2.13)$$

Za njeno odredjivanje imaćemo diferencijalne jednačine :

$$\begin{aligned} L^* [\mathcal{H}^*] &= - F_{\eta\eta}^2 \\ L^{**} [\mathcal{H}^{**}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

sa graničnim uslovima :

$$\begin{aligned} \eta=0 & : \mathcal{H}^* = 0 , \quad \mathcal{H}^{**} = 1 , \\ \eta \rightarrow \infty & : \mathcal{H}^* \rightarrow 0 , \quad \mathcal{H}^{**} \rightarrow 0 , \end{aligned} \quad (2.15)$$

Diferencijalni operator  $\tilde{L}^*$  je dat sa :

$$\begin{aligned} \tilde{L}^* [\mathcal{H}^*] &= \frac{1}{Pr} \mathcal{H}^*_{\eta\eta} + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 F + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k F_{f_k}) \mathcal{H}^*_{\eta} - \\ &- \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (h_1 F_{\eta} \mu_k \mathcal{H}^*_{f_k} + \lambda_k \mathcal{H}^*_{g_k} + \nu_k \mathcal{H}^*_{h_k}) - \frac{2}{A^2} (f_1 h_1 F_{\eta} + g_1) \mathcal{H}^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

a operator  $\tilde{L}^{**}$  sa :

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{**} [\mathcal{H}^{**}] &= \frac{1}{Pr} \mathcal{H}^{**}_{\eta\eta} + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 F + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k F_{f_k}) \mathcal{H}^{**}_{\eta} - \\ &- \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (h_1 F_{\eta} \mu_k \mathcal{H}^{**}_{f_k} + \lambda_k \mathcal{H}^{**}_{g_k} + \nu_k \mathcal{H}^{**}_{h_k}) . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Funkcija  $\check{\mathcal{H}}^*$  sama za sebe predstavlja očigledno rešenje problema zagrevanja odnosno hladjenja u posebnom slučaju, kada toplota koja se razvija u graničnim slojevima zbog trenja, biva zanemarena tj. ako poslednji član u jednačini (2.13) zanemarimo.

Funkcije  $\check{\mathcal{H}}^*$  i  $\check{\mathcal{H}}^*$  su razvijene na sličan način kao i funkcija i jednačine za prošta rešenja su:

$$\begin{aligned} L_0^* [\check{\mathcal{H}}_0^*] &= -F_0^{*2} , \\ L_1^* [\check{\mathcal{H}}_0^*] &= \frac{1}{A^2} (2 \check{\mathcal{H}}_0^* - \eta F_1 \check{\mathcal{H}}_0^{*'}) - 2 F_0^* F_0^{*'} , \\ L_1^* [\check{\mathcal{H}}_1^*] &= \frac{1}{A^2} (2 F_0^{*'} \check{\mathcal{H}}_0^* - F_0^* \check{\mathcal{H}}_0^{*'}) - 2 F_0^{*'} F_1^{*'} , \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} L_0^* [\check{\mathcal{H}}_0^*] &= 0 , \\ L_1^* [\check{\mathcal{H}}_0^*] &= -\eta \frac{F_1}{A^2} \check{\mathcal{H}}_0^{*'} , \\ L_1^* [\check{\mathcal{H}}_1^*] &= -\frac{1}{A^2} F_0^* \check{\mathcal{H}}_0^{*'} \end{aligned}$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : \check{\mathcal{H}}_0^* = \check{\mathcal{H}}_0^* = \check{\mathcal{H}}_1^* = 0 , \check{\mathcal{H}}_0^{*'} = 1 , \check{\mathcal{H}}_0^{*'} = 0 , \check{\mathcal{H}}_1^* = 0 , \\ \eta \rightarrow \infty & : \check{\mathcal{H}}_0^* \rightarrow 0 , \check{\mathcal{H}}_0^* \rightarrow 0 , \check{\mathcal{H}}_1^* \rightarrow 0 , \check{\mathcal{H}}_0^{*'} = 0 , \check{\mathcal{H}}_0^{*'} = 0 , \check{\mathcal{H}}_1^* = 0 . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Gornje jednačine rešene su numeričkom integracijom univerzalnih funkcija. Rezultati su tabulisani u dodatku za dva Prandtl-ova broja  $Pr = 0,72$  i  $Pr = 1.0$ .

#### 4.5. PRIMER

Primenićemo izloženu metodu na slučaj cilindričnog tela koje startuje impulsivno iz mirovanja. Brzina potencijalnog strujanja može se predstaviti u obliku:

$$U(x, t) = V(x) = c \frac{x}{R} = c \bar{x} \quad (\bar{x} = \frac{x}{R}), \quad (2.20)$$

gde je  $R$  - poluprečnik krivine konture a  $c$  - konstanta koja u slučaju opstrujavanja kružnog valjka ima vrednost dvostruke brzine u beskonačnosti.

Izraz za gradijent temperature na konturi tela je:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -(T_w - T_\infty) \frac{A}{\delta_p^*} \left. \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \frac{U^2}{g c_p} \left. \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{A}{\delta_p^*}, \quad (2.21)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \mathcal{H}_0^{* \prime}(0) + g_1 \mathcal{H}_0^{* \prime \prime}(0) + f_1 h_1 \mathcal{H}_1^{* \prime}(0) + \dots,$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \mathcal{H}_0^{* \prime}(0) + g_1 \mathcal{H}_0^{* \prime \prime}(0) + f_1 h_1 \mathcal{H}_1^{* \prime}(0) + \dots,$$

Stavljanjem koeficijenata univerzalnih funkcija za  $Pr = 1,0$  iz tablica dobijemo:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -(T_w - T_\infty) \frac{A}{\delta_p^*} [-1,1284 + g_1 0,2955 - f_1 h_1 0,1340] - \frac{U^2}{g c_p} \frac{A}{\delta_p^*} [0,5642 - g_1 0,1477 + f_1 h_1 0,3091].$$

Uzimajući u obzir odgovarajuće vrednosti za  $f_1$ ,  $g_1$  i  $h_1$  iz

ranijeg primera, koji smo izračunali u poglavlju brzinskog polja pišemo:

$$f_1 = V' = \frac{c}{R} \quad , \quad g_1 = \frac{\Omega'}{\Omega} Z^* = 0 \quad , \quad h_1 = \Omega \cdot Z^* = \frac{4}{\pi} t \quad ,$$

Izraz (2.21) postaje, obzirom što je  $\frac{A}{S_p} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$ :

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} &= \frac{(\Delta T)_0}{2\sqrt{\nu t}} \left[ 1,1284 + \frac{c}{R} \frac{4}{\pi} t \cdot 0,1340 \right] - \\ &- \frac{c^2 x^2}{R^2} \frac{1}{g_{cp}} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \left[ 0,5642 + \frac{c}{R} \frac{4}{\pi} t \cdot 0,3091 \right] = \\ &= \frac{(\Delta T)_0}{\sqrt{\nu t}} \left\{ \left[ 0,5642 - 0,2821 \frac{U^2(x)}{g_{cp}(\Delta T)_0} \right] + \right. \\ &\left. + V' \left[ 0,0853 - \frac{U^2(x)}{g_{cp}(\Delta T)_0} \cdot 0,1968 \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Uvodjenjem ECKERT-ovog broja (temperaturski kriterijum)

$$Ec = \frac{c^2}{g_{cp}(\Delta T)_0}$$

dobijemo posle izvesnog sredjivanja:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{0,2821}{g_{cp}\sqrt{\nu t}} c^2 \left[ \frac{2,000}{Ec} - x^2 + \frac{0,6979}{R} c \left( \frac{0,4334}{Ec} - x^2 \right) t \right] \quad (2.23)$$

U slučaju kada je  $Ec > 0$  izjednačimo gradijent temperature sa nulom i dobićemo trenutak vremena  $\bar{t}$  u kome na određenom mestu u okolini zaustavne tačke smer prelaza toplote menja znak:

$$\bar{t} = \frac{R}{0,6979 \kappa} \frac{\frac{2.000}{Ec} - \dot{x}^2}{\dot{x}^2 - \frac{0,4334}{Ec}} \quad (2.24)$$

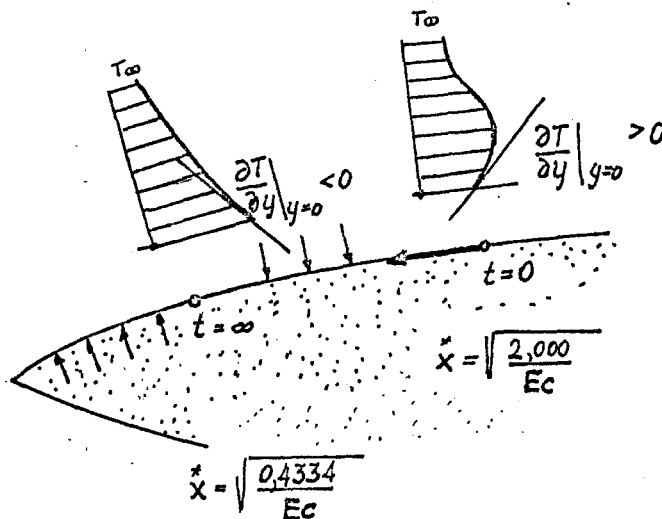
Iz izraza (2.24) vidi se da u slučaju da je  $Ec > 0$ , odnosno  $(\Delta T)_o \equiv T_w - T_\infty > 0$ , gradijent temperature u tački  $\dot{x}^* = \sqrt{2,000/Ec}$  postaje jednak nuli u samom početku kretanja ( $\bar{t} = 0$ ). U tački  $\dot{x}^* = \sqrt{0,4334/Ec}$  gradijent temperature će biti jednak nuli tek po isteku vremena  $\bar{t} = \infty$ , odnosno neće nikada biti jednak nuli, kao ni u tačkama  $\dot{x}^* > \sqrt{2,000/Ec}$ ;  $\dot{x}^* < \sqrt{0,4334/Ec}$  jer za te tačke izraz (2.24) daje negativno vreme. Prema tome toplotni tok će menjati znak u toku vremena samo u intervalu

$$\sqrt{\frac{0,4334}{Ec}} < \dot{x}^* \leq \sqrt{\frac{2,000}{Ec}} \quad (2.25)$$

Iz izraza (2.25) može se uočiti da je za  $\dot{x}^* \leq \sqrt{0,4334/Ec}$  gradijent temperature na telu uvek negativan tj. u neposrednoj blizini zaustavne tačke telo se uvek hladi. Ako je  $\dot{x}^* > \sqrt{2,000/Ec}$ , gradijent temperature je uvek pozitivan a to znači da se u ovoj oblasti telo zagreva i pored toga što je  $T_w > T_\infty$  a zona  $\dot{x}^* < \dot{x}_o^*$  se hladi. Za vreme kretanja tačka  $x$  se približava prema zaustavnoj tački, tako da se zona zagrevanja tokom vremena širi, a zona hladjenja smanjuje. Po isteku vrlo velikog intervala vremena, hladjenju je izložena jedino zona  $\dot{x}^* \leq \sqrt{0,4334/Ec}$ . Ako je  $T_w = T_\infty$  u izrazu (2.23) članovi koji sadrže  $Ec$  u imeniocu biće jednaki nuli, pa će u svima tačkama uvek gradijent temperature na telu biti pozitivan tj. celokupna okolina zaustavne tačke će se zagrevati. Isti slučaj imaćemo i kada je  $T_w < T_\infty$ , odnosno  $Ec < 0$ .

Ovi rezultati su u punoj saglasnosti sa istraživanjima koje je vršio

V. DJORDJEVIĆ [74] , [85] .



#### 4.6. ZADATI TOPLOTNI TOK

Energijska jednačina (2.3) rešava se sa sledećim graničnim uslovima:

$$y = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q_0(x, t) = P_0(x) R_0(t) \quad (2.26)$$

$$y \rightarrow \infty \quad , \quad T \rightarrow T_\infty = const.$$

Toplotni tok  $q_0(x, t)$  se za ovaj problem predpostavlja u obliku:

$$q_0(x, t) = P_0(x) R_0(t) \quad (2.27)$$

Funkcije  $P_0(x)$  i  $R_0(t)$  mogu biti proizvoljne, klase  $C^k$ .

Cilj ovog problema je, da dobijemo rešenje važeće za proizvoljne  $P_0(x)$  i  $R_0(t)$  tj. da izvršimo univerzalizaciju jednačine. Da bi to postigli, potrebno

je uvesti dva nova skupa parametara  $a_k$  i  $b_k$ .

$$\begin{aligned} a_k &= V^k \frac{P^{(k)}}{P}, \text{ gde } P^{(k)} = P_0(x), \\ b_k &= z^k \frac{R^{(k)}}{R}, \text{ gde } R(t) = R_0(t) \frac{\delta p^*(t)}{A}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ovi parametri zadovoljavaju rekurentne formule:

$$\begin{aligned} V a_k' &= (k f_1 - a_1) a_k + a_{k+1} \equiv \alpha_k \\ z^* b_k' &= (2k F_1 - b_1) b_k + b_{k+1} \equiv \beta_k. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Rešenje jednačina tražimo u obliku:

$$\begin{aligned} T &= T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}^*(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}; Pr) + \\ &+ q_0(x, t) \frac{\delta p^*(t)}{A} \mathcal{K}^{**}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}, \{a_k\}, \{b_k\}; Pr). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Diferencijalne jednačine za funkcije  $\mathcal{K}^*$  i  $\mathcal{K}^{**}$  su:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*[\mathcal{K}^*] &= -F_{\eta\eta}^2 \\ \mathcal{L}^{**}[\mathcal{K}^{**}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &: \mathcal{K}_\eta^* = 0, \quad \mathcal{K}_\eta^{**} = 1 \\ \eta \rightarrow \infty &: \mathcal{K}^* \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}^{**} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Za funkciju  $\mathcal{K}^{**}$  dobijemo istu jednačinu kao kod termometarskog problema, koji smo već rešili, međutim jednačina za  $\mathcal{K}^*$  je data sa:



$$\begin{aligned}
 \ddot{L}[\ddot{\mathcal{K}}] &= \frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta\eta} + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 \tilde{F} + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \tilde{F}_{f_k}) \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} - \\
 &- \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (h_1 \tilde{F}_{\eta} \mu_k \ddot{\mathcal{K}}_{f_k} + \lambda_k \ddot{\mathcal{K}}_{g_k} + \nu_k \ddot{\mathcal{K}}_{h_k} + \\
 &+ h_1 \tilde{F}_{\eta} \alpha_k \ddot{\mathcal{K}}_{a_k} + \beta_k \ddot{\mathcal{K}}_{b_k}) - \frac{1}{A^2} (h_1 a_1 \tilde{F}_{\eta} + b_1) \ddot{\mathcal{K}} = 0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned}
 \eta=0 & : \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} = 1, \\
 \eta \rightarrow \infty & : \ddot{\mathcal{K}} \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Funkcija  $\ddot{\mathcal{K}}$  može se razviti u red po parametrima  $f_k$  i  $a_k$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathcal{K}} &= \ddot{\mathcal{K}}_0(\eta; \{g_k\}, \{b_k\}) + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_1(\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{b_k\}) + \\
 &+ a_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1a}(\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{b_k\}) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Funkcije  $\ddot{\mathcal{K}}_0, \ddot{\mathcal{K}}_1, \ddot{\mathcal{K}}_{1a}$  se dalje razvijaju u redove po parametrima  $g_k, h_k$  i  $b_k$  kako sledi:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathcal{K}}_0 &= \ddot{\mathcal{K}}_0^0(\eta) + g_1 \ddot{\mathcal{K}}_0^1(\eta) + b_1 \ddot{\mathcal{K}}_0^b(\eta) + \dots, \\
 \ddot{\mathcal{K}}_1 &= h_1 \ddot{\mathcal{K}}_1(\eta) + \dots, \\
 \ddot{\mathcal{K}}_{1a} &= h_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1a}(\eta) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Koeficijenti funkcija dati u (2.36) predstavljaju u stvari prosta rešenja pošto su svi ostali nelinearni članovi zanemareni. Vršimo linearizaciju po parametrima.

Jednačine za ove funkcije su:

$$\begin{aligned}
 L_0[\tilde{\mathcal{K}}_0^*] &= 0, \\
 L_1[\tilde{\mathcal{K}}_0^{*1}] &= -\eta \frac{F_1}{A^2} \tilde{\mathcal{K}}_0^{*01}, \\
 L_1[\tilde{\mathcal{K}}_{ob}^{**}] &= \frac{1}{A^2} \tilde{\mathcal{K}}_0^{**}, \\
 L_1[\tilde{\mathcal{K}}_1^{**}] &= -\frac{1}{A^2} \mathcal{F}_0^0 \tilde{\mathcal{K}}_0^{*01}, \\
 L_1[\tilde{\mathcal{K}}_{1a}^{**}] &= \frac{1}{A^2} \mathcal{F}_0^{01} \tilde{\mathcal{K}}_0^{**},
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

gde je  $L_k$  linearni operator paraboličnog tipa

$$L_k[z] = \frac{1}{Pr} z'' + \eta \frac{F}{A^2} z' - \frac{2kF_0}{A^2} z ; \tag{2.38}$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned}
 \eta = 0 : \tilde{\mathcal{K}}_0^{*01} = 1, \tilde{\mathcal{K}}_0^{*11} = 0, \tilde{\mathcal{K}}_{ob}^{*1} = 0, \tilde{\mathcal{K}}_1^{*1} = 0, \tilde{\mathcal{K}}_{1a}^{*1} = 0, \\
 \eta \rightarrow \infty : \tilde{\mathcal{K}}_0^{**} \rightarrow 0, \tilde{\mathcal{K}}_0^{*1} \rightarrow 0, \tilde{\mathcal{K}}_{ob}^{**} \rightarrow 0, \tilde{\mathcal{K}}_1^{**} \rightarrow 0, \tilde{\mathcal{K}}_{1a}^{**} \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Sistem jednačina (2.37) izračunat je numeričkom integracijom a koeficijenti univerzalnih funkcija tabulisani su u dodatku.

#### 4.7. PRIMER

Posmatraćemo kružni valjak poluprečnika  $R$  koji se pokreće impulsivno sa mirovanja konstantnom brzinom. Dalje je zadat toplotni tok kroz zid

tela, koji je jednak u svim tačkama konture kružnog valjka a menja se vremenom.

$$q_0(t) = c_1 t. \quad (2.40)$$

Temperatura zida kružnog valjka tj. sopstvena temperatura je data:

$$\begin{aligned} T_p &= T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}|_{\eta=0} + q_0 \frac{\delta_p^*}{A} \mathcal{K}|_{\eta=0} , \\ T_p &= T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} [\mathcal{K}_0^*(0) + g_1 \mathcal{K}_0^*(0) + f_1 h_1 \mathcal{K}_1^*(0)] + \\ &+ \frac{c_1 t \delta_p^*}{A} [\mathcal{K}_0^*(0) + g_1 \mathcal{K}_0^*(0) + b_1 \mathcal{K}_{ob}^*(0) + \\ &+ f_1 h_1 \mathcal{K}_1^*(0) + a_1 h_1 \mathcal{K}_{1a}^*(0)] \end{aligned} \quad (2.41)$$

onda sledi :

$$\frac{T_p - T_\infty}{U^2/gc_p} = \mathcal{K}|_{\eta=0} + \frac{q_0 \delta_p^* g c_p}{A U^2} \mathcal{K}|_{\eta=0} \quad (2.41a)$$

Za valjak poluprečnika R imaćemo kod brzine strujanja V

$$\Omega(t) = 1$$

$$V(x) = 2 \Omega_\infty \sin \tilde{x}$$

$$V' = f_1 = 2 \frac{\Omega_\infty}{R} \cos \tilde{x}$$

gde x označava luk meren od prednje zaustavne tačke.

Dalje,

$$g_1 = 0, \quad a_1 = 0$$

$$h_1 = \Omega z^* = \frac{\delta_p^{*2}}{y} = \frac{4}{\pi} t \Omega_\infty ; \quad \frac{\delta_p^{*2}}{y} = z^* = \frac{4}{\pi} t, \quad \delta_p^* = 2\sqrt{\frac{y t}{\pi}},$$

Toplotni tok predpostavimo kao  $q_0(x, t) = P_0(x) R_0(t)$

$$P_0(x) = 1, \quad R_0(t) = c_1 t$$

$$R = c_1 t \frac{\delta_p^*}{A} = c_1 t \frac{2}{A} \sqrt{\frac{y t}{\pi}}$$

$$R' = \frac{2c_1}{A} \sqrt{\frac{y}{\pi}} (t^{3/2})' = \frac{3}{2} \frac{2c_1}{A} \sqrt{\frac{y}{\pi}} t^{1/2} = \frac{3c_1}{A} \sqrt{\frac{y t}{\pi}}$$

$$b_1 = \frac{4t}{\pi} \left( \frac{3c_1}{A} \sqrt{\frac{y t}{\pi}} - \frac{2c_1 t}{A} \sqrt{\frac{y t}{\pi}} \right) = \frac{6}{\pi}$$

Stavljajući izračunate vrednosti u jednačinu (2.41) imaćemo:

$$\begin{aligned} T_p = T_\infty + \frac{4 \cdot \Omega_\infty^2 \sin^2 \dot{x}}{g_{cp}} \left\{ \mathcal{K}_0^*(0) + \frac{2 \Omega_\infty}{R} \cos \dot{x} \frac{4 t \Omega_\infty}{\pi} \mathcal{K}_1^*(0) \right\} + \\ + \frac{c_1 t 2 \sqrt{\frac{y t}{\pi}}}{A} \left[ \mathcal{K}_0^{**}(0) + \frac{6}{\pi} \mathcal{K}_{ob}^*(0) + \frac{2 \Omega_\infty}{R} \cos \dot{x} \frac{4 t}{\pi} \mathcal{K}_1^*(0) \right] \quad (2.42) \end{aligned}$$

Obzirom što je bezdimenziono vreme  $\bar{t} = \frac{\Omega_\infty t}{R}$  pišemo (2.42) u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{T_p - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g_{cp}} = 4 \sin^2 \dot{x} \left[ \mathcal{K}_0^*(0) + \frac{8 \bar{t}}{\pi} \mathcal{K}_1^*(0) \cos \dot{x} \right] + \\ + \frac{2 c_1 t \sqrt{y t} g_{cp}}{A \sqrt{\pi} \Omega_\infty^2} \left[ \mathcal{K}_0^{**}(0) + \frac{6}{\pi} \mathcal{K}_{ob}^*(0) + \frac{8 \bar{t}}{\pi} \mathcal{K}_1^*(0) \cos \dot{x} \right] \quad (2.43) \end{aligned}$$

Proverimo dimenzije:

$$\frac{\Omega_{\infty}^2}{g c_p} \left[ \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{m}} \right], \quad c_1 = \left[ \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{m s}} \right]$$

$$c_1 t = q \left[ \frac{^{\circ}\text{K}}{\text{m}} \right], \quad \bar{t}^{3/2} = \frac{\Omega_{\infty}^{3/2} \cdot t^{3/2}}{R^{3/2}}$$

U jednačini (2.43) prvi član u drugom delu desne strane je

$$\begin{aligned} \frac{2 c_1 t \sqrt{\nu t} g c_p}{A \sqrt{\pi} \Omega_{\infty}^2} &= \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \frac{g c_p}{\Omega_{\infty}^2} c_1 \sqrt{\nu} \frac{R^{3/2} \bar{t}^{3/2}}{\Omega_{\infty}^{3/2}} = \\ &= \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \frac{g c_p}{\Omega_{\infty}^2} c_1 \bar{t}^{3/2} \frac{R^2}{\Omega_{\infty}} \sqrt{\frac{\nu}{\Omega_{\infty} R}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_{\infty} R}{\nu} = Re \quad (\text{Reynolds-ov broj})$$

$$= \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \frac{\bar{t}^{3/2}}{\sqrt{Re}} \frac{g \cdot c_p}{\Omega_{\infty}^2} \frac{c_1 R^2}{\Omega_{\infty}}$$

Proverom dimenzija izraza

$$\frac{c_1 R^2 g c_p}{\Omega_{\infty} \Omega_{\infty}^2} \left[ \frac{\frac{^{\circ}\text{K}}{\text{m t}} \text{m}^2 \cdot 1}{\frac{\text{m}}{\text{t}} \text{K}} \right] \equiv [0],$$

sledi

$$\frac{2 c_1 t \sqrt{\nu t} g c_p}{A \sqrt{\pi} \Omega_{\infty}^2} = \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \frac{\bar{t}^{3/2}}{\sqrt{Re}} \underbrace{\frac{c_1 R^2 g c_p}{\Omega_{\infty}^3}}_{D_1}$$

gde je poslednji član označen sa  $D_1$  i predstavlja novi bezdimenzioni broj

$$D_1 = \frac{c_1 R^2 g c_p}{\Omega_{\infty}^3} \quad (2.44)$$

Za slučaj ovog primera konstante su  $g$ ,  $c_p$ ,  $\nu$ ,  $c_1$  i  $R$ , pa pišemo:

$$\frac{c_1 R^2 g c_p}{\Omega_\infty^3 \sqrt{Re}} = \frac{c_1 g c_p \sqrt{\nu} R^{3/2}}{\Omega_\infty^{7/8}} = \frac{D_1}{\sqrt{Re}}$$

Jednačinu (2.43) možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{T_p - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g c_p} &= 4 \sin^2 \bar{x} \left[ \bar{\mathcal{K}}_0^*(0) + \frac{8 \bar{t}}{\pi} \bar{\mathcal{K}}_1^*(0) \cos \bar{x} \right] + \\ &+ \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \bar{t}^{-3/2} \frac{D_1}{\sqrt{Re}} \left[ \bar{\mathcal{K}}_0^*(0) + \frac{6}{\pi} \bar{\mathcal{K}}_{ob}^*(0) + \frac{8}{\pi} \bar{t} \bar{\mathcal{K}}_1^*(0) \cos \bar{x} \right]. \end{aligned}$$

Za kružni valjak i spoljašnje strujanje izaberemo proizvoljne vrednosti:

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$\Omega_\infty = 150 \text{ cm/s}$$

$$c_p = 10246 \text{ m kp/kp } ^\circ\text{K}$$

$$c_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \frac{\text{K}}{\text{m s}} \quad (\text{toplotni tok sa tela na tečnost})$$

$$Re = \frac{1500}{0,15} = 10.000$$

Bezdimenzioni broj  $D_1$  za ovaj primer imaće vrednost:

$$D_1 = \frac{-\sqrt{3} \cdot 102,5 \cdot 981 \cdot 100}{3 \cdot 100 \cdot 225,15 \cdot 1000} = -0,01723.$$

Koeficijenti univerzalnih funkcija za  $Pr = 1,0$  prema tablicama

su :

$$\mathcal{X}_0^*(0) = 0,4428$$

$${}^1\mathcal{X}_1(0) = -0,0186$$

$$\mathcal{X}_0^{**}(0) = -1,0444$$

$$\mathcal{X}_{ob}^{**}(0) = 0,4101$$

$${}^1\mathcal{X}_1^{**}(0) = 0,0705$$

Ove vrednosti stavimo u jednačinu za sopstvenu temperaturu :

$$\begin{aligned} \frac{T_p - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g c_p} = & 4 \sin^2 \bar{x} \left[ 0,4428 - \frac{8\bar{t}}{\pi} 0,0186 \cos \bar{x} \right] + \\ & + 2\bar{t}^{3/2} \frac{D_1}{\sqrt{Re}} \left[ -1,0444 + 0,7832 + 0,01795 \bar{t} \cos \bar{x} \right] . \end{aligned}$$

Sopstvena temperatura za različita vremena je shodno ovoj jednačini prikazana grafički na sl. 1. Vidimo da se ista menja vrlo malo u vremenskom intervalu od  $t = 0$  do  $t = 1,0$ . Maksimalna vrednost sopstvene temperature za istraživani slučaj je postignuta kod  $x/R = 90^\circ$ .

#### 4.8. PROBLEM SA ZADATOM TEMPERATUROM TELA

Energijsku jednačinu (2.3) rešimo sa sledećim graničnim uslovima :

$$\begin{aligned} y = 0, \quad T = T_w(x, t) \\ y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty \end{aligned} \quad (2.45)$$

pri čemu je usvojeno, da se temperaturna razlika između konture tela i beskonačnosti predpostavlja u obliku proizvoda dveju funkcija  $S(x)$  i  $\Theta(t)$ , kao što je to bio slučaj kod zadanog toplotnog toka:

$$T_w - T_\infty = S(x) \Theta(t) \quad (2.46)$$

Rešenje jednačine tražimo u obliku:

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \overset{*}{\mathcal{H}} + \frac{U^2}{gc_p} \overset{*}{\mathcal{H}} \quad (2.47)$$

Diferencijalne jednačine za funkcije  $\overset{*}{\mathcal{H}}$  i  $\overset{*}{\mathcal{H}}$  možemo napisati:

$$\begin{aligned} L^* [\overset{*}{\mathcal{H}}] &= - \frac{F_0^2}{\eta \eta} \\ L^{**} [\overset{*}{\mathcal{H}}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \overset{*}{\mathcal{H}} = 0, \quad \overset{*}{\mathcal{H}} = 1, \\ \eta \rightarrow \infty : \overset{*}{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad \overset{*}{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

Funkcija  $\overset{*}{\mathcal{H}}$  sama za sebe predstavlja rešenje ovog problema ako bi se zanemarila toplota usled trenja.

Za određivanje funkcije  $\overset{*}{\mathcal{H}}$  treba rešiti sistem sledećih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} L_0 [\overset{*}{\mathcal{H}}_0] &= - F_0^{o''2} \\ L_1 [\overset{*}{\mathcal{H}}_0^1] &= \frac{1}{A^2} (2 \overset{*}{\mathcal{H}}_0^o - \eta F_1 \overset{*}{\mathcal{H}}_0^{o'}) - 2 F_0^{o''} F_0^{1''}, \\ L_1 [\overset{*}{\mathcal{H}}_1] &= \frac{1}{A^2} (2 F_0^{o'} \overset{*}{\mathcal{H}}_0^o - F_0^o \overset{*}{\mathcal{H}}_0^{o'}) - 2 F_0^{o''} F_1'', \end{aligned} \quad (2.50)$$



sa graničnim uslovima :

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : \mathcal{H}_0^* = 0, \quad \mathcal{H}_0^{*1} = 0, \quad \mathcal{H}_1^* = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & : \mathcal{H}_0^* = 0, \quad \mathcal{H}_0^{*1} = 0, \quad \mathcal{H}_1^* = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da bi u ovom slučaju , kao što je to bio slučaj kod predhodnog problema, dobili univerzalne jednačine, a pošto smo uveli nove proizvodljne funkcije  $S(x)$  i  $\Theta(t)$  neophodno je potrebno uvesti nove skupove parametara koje ćemo označiti sa  $\{m_k\}$  i  $\{n_k\}$ .

Skupovi ovih parametara su :

$$m_k = V^{(k)} \frac{S^{(k)}}{S}, \quad n_k = Z^{*(k)} \frac{\Theta^{(k)}}{\Theta} \quad (2.52)$$

Oni moraju zadovoljiti i rekurentne formule:

$$\begin{aligned} V m_k' &= (k f_1 - m_1) m_k + m_{k+1} \equiv M_k \\ Z^* n_k' &= (2k F - n_1) n_k + n_{k+1} \equiv N_k \end{aligned} \quad (2.53)$$

Funkcija  $\mathcal{H}^{**}$  je data u obliku redova po parametrima  $f_k, g_k, h_k, m_k$  i  $n_k$  na isti način kao što je to učinjeno sa funkcijom  $\mathcal{H}^*$ , pri čemu ulogu parametara  $a_k$  i  $b_k$  preuzimaju novi parametri  $m_k$  i  $n_k$  (dodatak).

Sistem diferencijalnih jednačina za koeficijente funkcija  $\mathcal{H}_0^{**}, \mathcal{H}_0^{**1}, \dots$

je:

$$\begin{aligned} L_0 [\mathcal{H}_0^{**}] &= 0 \\ L_1 [\mathcal{H}_0^{**1}] &= -\eta \frac{F_1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**} \\ L_1 [\mathcal{H}_{0n}^{**}] &= \frac{1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**} \\ L_1 [\mathcal{H}_1^{**}] &= -\frac{1}{A^2} F_0^{**} \mathcal{H}_0^{**1} \\ L_1 [\mathcal{H}_{1m}^{**}] &= \frac{1}{A^2} F_0^{**1} \mathcal{H}_0^{**} \end{aligned} \quad (2.54)$$

svi rešenja moraju zadovoljiti sledeće granične uslove:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : \mathcal{H}_0^{**} = 1, \quad \mathcal{H}_0^{\prime} = 0, \quad \mathcal{H}_{0n}^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_{1m}^{**} = 0, \\ \eta \rightarrow \infty & : \mathcal{H}_0^{**} = 0, \quad \mathcal{H}_0^{\prime} = 0, \quad \mathcal{H}_{0n}^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_{1m}^{**} = 0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ako je  $T_w = \text{const.}$ , obzirom što su  $m_k = 0$  i  $n_k = 0$  sistem jednačina postaje:

$$\begin{aligned} L_0[\mathcal{H}_0^{**}] &= 0, \\ L_1[\mathcal{H}_0^{\prime}] &= -\eta \frac{F_1}{A^2} \mathcal{H}_0^{\prime}, \\ L_1[{}^1\mathcal{H}_1^{**}] &= -\frac{1}{A^2} F_0 \mathcal{H}_0^{\prime} \end{aligned} \quad (2.56)$$

pošto funkcije  $\mathcal{H}_{0n}^{**}$  i  ${}^1\mathcal{H}_{1m}^{**}$  otpadaju. Ovaj slučaj je razmotren u poglavlju 4.4. (problem zagrevanja odnosno hladjenja).

#### 4.9. PRIMER

Kao u predhodnom primeru razmatraćemo kružni valjak poluprečnika  $R$  koji startuje impulsivno sa mirovanja sa konstantnom brzinom. Data je temperatura na površini tela.

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \mathcal{H}^{**} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{H}^* \quad (2.47)$$

gde  $U = 2 \Omega_\infty \sin x$

$$T_w - T_\infty = c_2 t, \quad c_2 \left[ \frac{^\circ\text{K}}{\text{s}} \right]$$

$$S(x) = 1$$

$$\Theta(t) = c_2 t$$

onda sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\eta=0} &= (T_w - T_\infty) \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{U^2}{g c_p} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ &= (T_w - T_\infty) \frac{A}{\delta_p^*} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \frac{A}{\delta_p^*} \frac{U^2}{g c_p} \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \mathcal{H}_0^{*0'}(0) + g_1 \mathcal{H}_0^{*1'}(0) + f_1 h_1 \mathcal{H}_1^{*1'}(0) ; \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \mathcal{H}_0^{*0'}(0) + g_1 \mathcal{H}_0^{*1'}(0) + n_1 \mathcal{H}_{on}^{*1'}(0) + f_1 h_1 \mathcal{H}_1^{*1'}(0)$$

$$n_1 = \frac{\theta'}{\theta} z^* = \frac{c_2}{c_2 t} \frac{4t}{\pi} = \frac{4}{\pi} , \quad m_1 = 0 ,$$

$$g_1 = 0 , \quad h_1 = \frac{4}{\pi} t \Omega_\infty , \quad f_1 = \frac{2}{R} \cos x^* , \quad \frac{A}{\delta_p^*} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\nu t}} = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$$

Jednačina (2.57) postaje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{c_2 \sqrt{t}}{2\sqrt{\nu}} \left\{ \mathcal{H}_0^{*0'}(0) + \frac{4}{\pi} \mathcal{H}_{on}^{*1'}(0) + \frac{8\Omega_\infty}{\pi R} t \cos x^* \mathcal{H}_1^{*1'}(0) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{4\Omega_\infty^2 \sin^2 x^*}{g c_p} \left\{ \mathcal{H}_0^{*0'}(0) + \frac{8\Omega_\infty}{\pi R} t \cos x^* \mathcal{H}_1^{*1'}(0) \right\} . \end{aligned}$$

Kao kod ranijeg primera bezdimenziono vreme pišemo:

$$\tilde{t} = \frac{\Omega_\infty t}{R} \quad \left[ \frac{m}{s} \frac{s}{m} \right] , \quad Re = \frac{\Omega_\infty R}{\nu}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{4\Omega_\infty^2}{g c_p} = \frac{2 \cdot \Omega_\infty^2}{g c_p \sqrt{\frac{\nu \tilde{t} R}{\Omega_\infty}}} = \frac{2 \Omega_\infty^2}{g c_p} \frac{1}{R \sqrt{\tilde{t}} \sqrt{\frac{\nu}{\Omega_\infty R}}} = \frac{2}{R} \frac{\Omega_\infty^2}{g c_p} \frac{\sqrt{Re}}{\sqrt{\tilde{t}}}$$

$$\frac{R}{\frac{\Omega_\infty^2}{g c_p} \sqrt{Re}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{R}{\frac{\Omega_\infty^2}{g c_p} \sqrt{Re}} \cdot \frac{c_2 \sqrt{\bar{t}}}{2 \sqrt{\nu}} \left\{ \mathcal{H}_0^{**\prime}(0) + \frac{4}{\pi} \mathcal{H}_{on}^{**\prime}(0) + \right.$$

$$\left. + \frac{8 \Omega_\infty t}{\pi R} \cos^* \mathcal{H}_1^{**\prime}(0) \right\} + \frac{2 \sin^{2*} x}{\sqrt{\bar{t}}} \left\{ \mathcal{H}_0^{*\prime}(0) + \frac{8 \Omega_\infty t}{\pi R} \cos^* \mathcal{H}_1^{*\prime}(0) \right\}.$$

Izraz  $\frac{c_2 R \sqrt{t}}{2 \frac{\Omega_\infty^2}{g c_p} \sqrt{\Omega_\infty R}} = \frac{c_2}{2 \frac{\Omega_\infty^2}{g c_p}} \sqrt{\frac{R t}{\Omega_\infty}} = \frac{c_2}{2 \frac{\Omega_\infty^2}{g c_p}} \sqrt{\frac{R}{\Omega_\infty} \frac{R}{\Omega_\infty} \bar{t}} =$

$$= \frac{c_2}{2 \frac{\Omega_\infty^2}{g c_p}} \frac{R}{\Omega_\infty} \sqrt{\bar{t}}$$

Uvedemo novi bezdimenzioni broj  $D_2$

$$D_2 = \frac{c_2 R g c_p}{\Omega_\infty^3} \quad \left[ \frac{^\circ K}{s} \frac{m s}{m} \frac{1}{^\circ K} \right] \quad (2.58)$$

koji se razlikuje od bezdimenzionog broja  $D_1$  samo u linearnoj zavisnosti od  $R$  umesto  $R^2$ .

Konačan izraz postaje:

$$\frac{R g c_p}{\Omega_\infty^2 \sqrt{Re}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{D_2 \sqrt{\bar{t}}}{2} \left\{ \mathcal{H}_0^{**\prime}(0) + \frac{4}{\pi} \mathcal{H}_{on}^{**\prime}(0) + \frac{8 \Omega_\infty t}{\pi R} \cos^* \mathcal{H}_1^{**\prime}(0) \right\} \quad (2.59)$$

$$+ \frac{2 \sin^{2*} x}{\sqrt{\bar{t}}} \left\{ \mathcal{H}_0^{*\prime}(0) + \frac{8 \Omega_\infty t}{\pi R} \cos^* \mathcal{H}_1^{*\prime}(0) \right\}.$$

gde su:  $\mathcal{H}_0^{*'}(0) = -0,9575$

$$\mathcal{H}_{02}^{*'}(0) = -0,7520$$

$$\mathcal{H}_1^{*'}(0) = -0,1293$$

$$\mathcal{H}_0^{*'}(0) = 0,4293$$

$$\mathcal{H}_1^{*'}(0) = 0,2295$$

i pišemo

$$\frac{Rg c_p}{\Omega_\infty^2 \sqrt{Re}} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{D_2}{2} \sqrt{\bar{t}} \left\{ -0,9575 + \frac{4}{\pi} (-0,7520) + \frac{8}{\pi} \bar{t} (0,1293) \cdot \cos x^* \right\} +$$

$$+ \frac{2 \cdot \sin^2 x^*}{\sqrt{\bar{t}}} \left\{ 0,4293 + \frac{8}{\pi} \bar{t} 0,2295 \cos x^* \right\}.$$

Imajući u ovom primeru iste vrednosti kao u primeru 4.7. bezdimenzioni broj  $D_2$  imaće vrednost

$$D_2 = \frac{10.981.10246}{\sqrt{3} 225.12.10^3} = 17,195$$

Na sl. 2 prikazane su krive za različite vrednosti  $t$  uzimajući u obzir vreme odvajanja graničnog sloja. Početak odvajanja graničnog sloja prikazan je isprekidanom linijom shodno jednačini:

$$\mathcal{F}_0^{*''}(0) + f_1 h_1 \mathcal{F}_1^{*''}(0) = 0,$$

$$1,12838 + \frac{2}{R} \cos x^* \Omega_\infty \frac{4}{\pi} t 1,262385 = 0$$

Vrednost gradijenta temperature važe sve dok ne počinje odvajanje graničnog sloja:

Leva strana izraza (2.54) može se izraziti bezdimenzionim brojevima Nusselt-a, Eckert-a i Reynolds-a kao što sledi:

$$Nu = - \frac{l}{(\Delta T)_0} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$\frac{R g c_p}{\Omega_\infty^2 \sqrt{Re}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{g c_p (\Delta T)_0}{\Omega_\infty^2 \sqrt{Re}} \underbrace{\frac{R}{(\Delta T)_0} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}_{Nu} \quad (2.60)$$

onda sledi  $\frac{\Omega_\infty^2}{g c_p (\Delta T)_0} = Ec$

$$\frac{R g c_p}{\Omega_\infty^2 \sqrt{Re}} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{Nu}{Ec \sqrt{Re}} \quad (2.61)$$

onda sledi

$$\left. \frac{\partial [(T - T_\infty) / \Omega_\infty^2 / g c_p]}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{2}{A \sqrt{\pi}} \bar{t}^{3/2} \frac{D_1}{\sqrt{Re}} \frac{A \sqrt{\pi}}{2 \sqrt{r t}} =$$

$$= \frac{\Omega_\infty \sqrt{\Omega_\infty}}{R \sqrt{R}} t \frac{c_1 R^2 g c_p}{\Omega_\infty^3} = \frac{c_1 t}{\Omega_\infty^2 / g c_p}$$

$(\partial T / \partial y)_{y=0} = c_1 t$  je konstanta i za isti  $t$  gradijent temperature ne zavisi od  $x/R$ . Sada moramo odrediti  $\partial T / \partial \eta|_{\eta=0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} &= \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{\partial y}{\partial \eta} ; \quad \eta = \frac{A \cdot y}{\delta_p^*} , \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\delta_p^*}{A} \\ &= \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \cdot \frac{\delta_p^*}{A} = c_1 t \frac{2\sqrt{\nu t}}{A/\pi} = 2c_1 t \sqrt{\nu t} , \quad A/\pi = 1 , \\ &= 2c_1 \frac{\Omega_\infty t}{R} \frac{R^2}{\Omega_\infty} \sqrt{\frac{\nu}{\Omega_\infty R}} \sqrt{\frac{\Omega_\infty t}{R}} = \\ &= 2c_1 \frac{R^2}{\Omega_\infty} \bar{t} \sqrt{\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{Re}} \end{aligned}$$

Bezdimenziono vreme  $\bar{t} = \frac{\Omega_\infty t}{R}$  možemo smatrati kao tekući STROUHAL-ov broj ( $Sh_t$ ) koji ima značaj kriterijuma homohronosti (vremenski sličnih pojava kretanja) [86].

$$D_1 = \frac{c_1 R^2 g_{cp}}{\Omega_\infty^3} = \frac{c_1 R^2}{\Omega_\infty} \cdot \frac{g_{cp}}{\Omega_\infty^2} ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 2 \frac{D_1}{\sqrt{Re}} \frac{\Omega_\infty^2}{g_{cp}} \bar{t} \sqrt{\bar{t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{T - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g_{cp}} \right) \Big|_{\eta=0} = \frac{g_{cp}}{\Omega_\infty^2} \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{2D_1}{\sqrt{Re}} \bar{t} \sqrt{\bar{t}} .$$

Temperaturski profili za  $Pr = 0,72$  nacrtani su na dijagramima u dodatku. Bezdimenzioni toplotni tok zavisi od bezdimenzionog vremena  $\bar{t}$  vrlo malo shodno izabranim parametrima ovog primera.

Prema rezultatima prikazanim na sl. 2 sledi, da će za vrlo kratke vremenske intervale gradijent temperature  $(\partial T / \partial y)_{y=0} > 0$ , u okolini tačke  $x/R = 90^\circ$  biti veći od nule i toplota će prelaziti sa tečnosti na telo. Ova činjenica može se objasniti pojavom vrlo intenzivnog trenja u okolini pomenute tačke, pošto je ovde brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja maksimalna ( $2 \Omega_\infty$ ). U graničnom sloju se zbog toga stvara temperatura koja je viša od temperature tela i telo se zagreva. Docnije, sa povećanjem vremena, temperatura tela će se povećati, shodno izabranim graničnim uslovima i toplota brzo prelazi sa tela na tečnost u svim tačkama kružnog valjka.

#### 4.10. TEMPERATURSKI PROFILI

Za izračunate primere 4.7. i 4.9. odredićemo temperaturske profile u različitim tačkama kružnog valjka i za različita vremena.

Izračunata su dva primera: temperaturski profili za zadati toplotni tok i profili za zadatu temperaturu na konturi tela. U oba slučaja  $D/\sqrt{Re}$  je uzet pozitivan, tako da postoji toplotni tok sa tečnosti na telo ( $c > 0$ ).

##### 1. Zadati toplotni tok:

Za dati toplotni tok  $q_0 = c_1 t$  imaćemo:

$$T = T_\infty + \frac{U^2}{9c_p} \mathcal{K}^* + q_0 \frac{\delta_p^*}{A} \mathcal{K}^{**} \quad \text{i temperaturski profili slede shodno (2.43)}$$



Provera graničnih uslova

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{A}{\delta_p^*} \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{vt}} \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\eta=0} = \frac{ct}{F(t)}$$

2. Zadana temperatura na konturi tela:

$$T = T_\infty + (T_w - T_\infty) \mathcal{H}^* + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{H}^*$$

$$\frac{T - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g c_p} = \frac{c_2 t}{\Omega_\infty^2 / g c_p} \mathcal{H}^* + 4 \sin^2 x^* \mathcal{H}^*$$

$$D_2 = \frac{c_2 R g c_p}{\Omega_\infty^3}; \quad \frac{c_2 t g c_p}{\Omega_\infty^2} = \frac{c_2 R g c_p}{\Omega_\infty^3} \frac{\Omega_\infty t}{R} = D_2 \bar{t}$$

slede temperaturski profili:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g c_p} = D_2 \bar{t} \left[ \mathcal{H}_0^{**}(\eta) + \frac{4}{\pi} \mathcal{H}_{0n}^{**}(\eta) + \frac{8}{\pi} \bar{t} \mathcal{H}_1^{**}(\eta) \cos x^* \right] + \\ + 4 \sin^2 x^* \left[ \mathcal{H}_0^*(\eta) + \frac{8}{\pi} \bar{t} \mathcal{H}_1^*(\eta) \cos x^* \right]. \end{aligned}$$

za  $D_2 = 10$  i  $Pr = 0,72$  imaćemo

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{\Omega_\infty^2 / g c_p} = 10 \bar{t} \left[ \mathcal{H}_0^{**}(\eta) + 1,2733 \mathcal{H}_{0n}^{**}(\eta) + 2,5465 \bar{t} \mathcal{H}_1^{**}(\eta) \cos x^* \right] + \\ + 4 \sin^2 x^* \left[ \mathcal{H}_0^*(\eta) + 2,5465 \bar{t} \mathcal{H}_1^*(\eta) \cos x^* \right]. \end{aligned}$$

Temperaturski profili za različite vrednosti  $x/R$  (od  $0^\circ - 180^\circ$ )

i  $\bar{t}$  dati su za  $Pr = 0,72$

#### 4.11. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE TEMPERATURSKOG POLJA

##### 1. Termometarski problem ( $\mathcal{K}^*$ )

Koeficijenti univerzalnih funkcija

$$1. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{*0''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{K}_0^{*0'} = - F_0^{*0''2} \quad \mathcal{K}_0^*$$

$$2. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{*1''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{K}_0^{*1'} - \frac{2}{A^2} F_0 \mathcal{K}_0^{*1} = \\ = \frac{1}{A^2} [2 \mathcal{K}_0^* - F_1 \eta \mathcal{K}_0^{*0'}] - 2 F_0^{*0''} F_0^{*1''} \quad \mathcal{K}_0^*$$

$$3. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_1^{*1''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{K}_1^{*1'} - \frac{2}{A^2} F_0 \mathcal{K}_1^{*1} = \\ = \frac{1}{A^2} [2 F_0^{*0'} \mathcal{K}_0^* - F_0^* \mathcal{K}_0^{*0'}] - 2 F_0^{*0''} F_1^{*1''} \quad \mathcal{K}_1^*$$

granični uslovi:

$$\eta = 0 : \mathcal{K}_0^{*0'} = 0, \quad \mathcal{K}_0^{*1''} = 0, \quad \mathcal{K}_1^{*1'} = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \mathcal{K}_0^* \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_0^{*1} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_1^{*1} \rightarrow 0$$

##### 2. Dopuna termometarskom problemu usled promenljivog toplotnog toka ( $\mathcal{K}^{**}$ )

$$4. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{**0''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{K}_0^{**0'} = 0 \quad \mathcal{K}_0^{**}$$

$$5. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{**1''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{K}_0^{**1'} - \frac{2}{A^2} F_0 \mathcal{K}_0^{**1} = - \frac{1}{A^2} F_1 \eta \mathcal{K}_0^{**0} \quad \mathcal{K}_0^{**}$$

$$6. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob} = \frac{1}{A^2} \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}$$

$$7. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_1'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_1' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_1 = -\frac{1}{A^2} F_0^o \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_1$$

$$8. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a} = \frac{1}{A^2} F_0^o \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}$$

Sa graničnim uslovima :

$$\eta=0 : \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o = 1, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' = 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}' = 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_1' = 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}' = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty : \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o \rightarrow 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' \rightarrow 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob} \rightarrow 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_1 \rightarrow 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a} \rightarrow 0.$$

3. Problem zagrevanja odnosno hladjenja bez toplote usled trenja ( $\overset{**}{\mathcal{H}}$  ).

$$9. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' = 0 \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o$$

$$10. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_0^{1''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_0^{1'} - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' = -\frac{1}{A^2} F_1 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_0^1$$

$$11. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob} = \frac{1}{A^2} \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{ob}$$

$$12. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_1'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_1' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_1 = -\frac{1}{A^2} F_0^o \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_1$$

$$13. \quad \frac{1}{Pr} \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}'' + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}' - \frac{2}{A^2} F_0 \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a} = \frac{1}{A^2} F_0^o \overset{**}{\mathcal{H}}_0^o{}' \quad \overset{**}{\mathcal{H}}_{1a}$$

Sa graničnim uslovima :

$$\eta = 0 ; \quad \mathcal{H}_0^{**} = 1, \quad \mathcal{H}_0^{*1} = 0, \quad \mathcal{H}_{ob}^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_{1a}^{**} = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad \mathcal{H}_0^{**} = 0, \quad \mathcal{H}_0^{*1} = 0, \quad \mathcal{H}_{ob}^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{**} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_{1a}^{**} = 0$$

4. Dopuna problemu zagrevanja odnosno hladjenja usled trenja ( $\mathcal{H}$ ).

$$14. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{H}_0^{*''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{H}_0^{*0'} = - F_0^{*0''2} \quad \mathcal{H}_0^{*}$$

$$15. \quad \frac{1}{Pr} \mathcal{H}_0^{*1''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta \mathcal{H}_0^{*1'} - \frac{2}{A^2} F_0 \mathcal{H}_0^{*1} = \\ = \frac{1}{A^2} [2 \mathcal{H}_0^{*0} - F_1 \eta \mathcal{H}_0^{*0'}] - 2 F_0^{*0''} F_0^{*1''} \quad \mathcal{H}_0^{*1}$$

$$16. \quad \frac{1}{Pr} {}^1\mathcal{H}_1^{*''} + \frac{1}{A^2} F_0 \eta {}^1\mathcal{H}_1^{*1'} - \frac{2}{A^2} F_0 {}^1\mathcal{H}_1^{*1} = \\ = \frac{1}{A^2} (2 F_0^{*0'} {}^1\mathcal{H}_1^{*1} - F_0^{*0} {}^1\mathcal{H}_1^{*1'}) - 2 F_0^{*0''} {}^1\mathcal{H}_1^{*1''} \quad {}^1\mathcal{H}_1^{*1}$$

Sa graničnim uslovima :

$$\eta = 0 ; \quad \mathcal{H}_0^{*0} = 0, \quad \mathcal{H}_0^{*1} = 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{*1} = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \quad \mathcal{H}_0^{*0} \rightarrow 0, \quad \mathcal{H}_0^{*1} \rightarrow 0, \quad {}^1\mathcal{H}_1^{*1} \rightarrow 0.$$

U radu se pojavljuju diferencijalne jednačine za funkcije

$$\dot{F}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\})$$

$$\dot{F}^*(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}, \{a_k\}, \{b_k\})$$

gde  $\{f_k\}$ ,  $\{g_k\}$ ,  $\{h_k\}$ ,  $\{a_k\}$  i  $\{b_k\}$  predstavljaju skupove parametara od kojih  $\{f_k\}$  i  $\{a_k\}$  zavise samo od  $x$ , a  $\{g_k\}$ ,  $\{h_k\}$  i  $\{b_k\}$  samo od  $t$ .

Uz energijsku jednačinu dobivene su sledeće diferencijalne jednačine

$$\dot{L}^*[\dot{F}] = -F_{\eta\eta}^2$$

$$\dot{L}^{**}[\dot{F}^*] = 0$$

uz različite granične uslove, gde operatori  $\dot{L}^*$  i  $\dot{L}^{**}$  imaju oblik

$$\begin{aligned} \dot{L}^*[\dot{F}] = & \frac{1}{Pr} \dot{F}_{\eta\eta}^* + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 \mathcal{F} + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \mathcal{F}_{f_k}) \dot{F}_{\eta}^* - \\ & - \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (h_1 \mathcal{F}_{\eta} \mu_k \dot{F}_{f_k}^* + \lambda_k \dot{F}_{g_k} + \mathcal{J}_k \dot{F}_{b_k}) - \\ & - \frac{2}{A^2} (f_1 h_1 \mathcal{F}_{\eta} + g_1) \dot{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{L}^{**}[\dot{F}^*] = & \frac{1}{Pr} \dot{F}_{\eta\eta}^{**} + \frac{1}{A^2} (\eta F + f_1 h_1 \mathcal{F} + h_1 \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k \mathcal{F}_{f_k}) \dot{F}_{\eta}^{**} - \\ & - \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (h_1 \mathcal{F}_{\eta} \mu_k \dot{F}_{f_k}^{**} + \lambda_k \dot{F}_{g_k}^{**} + \mathcal{J}_k \dot{F}_{h_k}^{**} + \\ & + h_1 \mathcal{F}_{\eta} \alpha_k \dot{F}_{a_k}^{**} + \beta_k \dot{F}_{b_k}^{**}) - \frac{1}{A^2} (h_1 a_1 \mathcal{F}_{\eta} + b_1) \dot{F}^{**} \end{aligned}$$

Rešavanje ovih diferencijalnih jednačina se vrši na ovaj način:

$$\dot{F}^* = \dot{F}_0^* (\eta; \{g_k\}) + f_1 \dot{F}_1^* (\eta; \{g_k\}, \{h_k\}) + \dots$$

$$\dot{F}_0^* = \dot{F}_0^{*0} (\eta) + g_1 \dot{F}_0^{*1} (\eta) + \dots$$

$$\dot{F}_1^* = h_1 \dot{F}_1^{*1} (\eta) + \dots$$

.....

$$\ddot{F}^* = \ddot{F}_0^{**} (\eta; \{g_k\}, \{b_k\}) + f_1 \ddot{F}_1^{**} (\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{b_k\}) +$$

$$+ a_1 \ddot{F}_{1a}^{**} (\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{b_k\}) + \dots$$

$$\ddot{F}_0^{**} = \ddot{F}_0^{**0} (\eta) + g_1 \ddot{F}_0^{**1} (\eta) + b_1 \ddot{F}_{0b}^{**} (\eta) + \dots$$

$$\ddot{F}_1^{**} = h_1 \ddot{F}_1^{**1} (\eta) + \dots$$

$$\ddot{F}_{1a}^{**} = h_1 \ddot{F}_{1a}^{**1} (\eta) + \dots$$

pri čemu se zanemaruju svi nelinearni članovi tj. vrši se linearizacija po parametrima.

Jednačine za koeficijente koji zavise samo od  $\eta$  u jednom i drugom slučaju glase:

$$(\ddot{S}) \begin{cases} L_0 [\dot{F}_0^*] = -\mathcal{F}_0^{*0''2} \\ L_1 [\dot{F}_0^{*1}] = \frac{1}{A^2} (2 \mathcal{F}_0^{*0'} - \eta F \mathcal{F}_0^{*0'}) - 2 \mathcal{F}_0^{*0''} \mathcal{F}_0^{*1''} \\ L_1 [\dot{F}_1^{*1}] = \frac{1}{A^2} (2 \mathcal{F}_0^{*0'} \mathcal{F}_0^{*1'} - \mathcal{F}_0^{*0} \mathcal{F}_0^{*1'}) - 2 \mathcal{F}_0^{*0''} \mathcal{F}_1^{*1''} \end{cases}$$

$$i \quad \left\{ \begin{array}{l} L_0[\overset{**}{F}_0] = 0 \\ L_1[\overset{**}{F}_0'] = -\frac{\eta F_1}{A^2} \overset{**}{F}_0' \\ (\overset{**}{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1[\overset{**}{F}_{0b}] = \frac{1}{A^2} \overset{**}{F}_0 \\ L_1[\overset{**}{F}_1] = -\frac{1}{A^2} \overset{**}{F}_0 \overset{**}{F}_0' \\ L_1[\overset{**}{F}_{1a}] = \frac{1}{A^2} \overset{**}{F}_0' \overset{**}{F}_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

gde je  $L_k[z] = \frac{1}{Pr} z'' + \frac{\eta F_0}{A^2} z' - \frac{2kF_0}{A^2} z$

U ovom radu data su rešenja problema pri zadanom toplotnom toku na konturi tela i pri zadatoj temperaturi konture uz uzimanje u obzir toplote koja se u graničnom sloju oslobadja usled trenja, pri čemu se termome-tarski problem i problem zagrevanja odnosno hladjenja pri konstantnoj temperaturi tela dobijaju kao specijalni slučajeви.

Oba problema, koja su u ovom radu rešena, data su u izvodu :

1. Problem pri zadanom toplotnom toku :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{gc_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

uz granične uslove  $y=0$  ,  $\frac{\partial T}{\partial y} = q_0(x,t) = P_0(x) R_0(t)$

$y \rightarrow \infty$  ,  $T \rightarrow T_\infty = const.$

Rešenje se traži u obliku:

$$T = T_{\infty} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}^* + q_0 \frac{\delta_p}{A} \mathcal{K}^{**}$$

pri čemu se dobijaju diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*[\mathcal{K}^*] &= -F_{\eta\eta}^2 \\ \mathcal{L}^{**}[\mathcal{K}^{**}] &= 0 \end{aligned}$$

sa graničnim uslovima:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &: \mathcal{K}_{\eta}^* = 0, \quad \mathcal{K}_{\eta}^{**} = 1, \\ \eta \rightarrow \infty &: \mathcal{K}^* \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}^{**} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Funkcija  $\mathcal{K}^*$  sama za sebe predstavlja rešenje termometarskog problema. Za njeno određivanje treba rešiti sistem ( $\mathcal{S}^*$ ) uz granične uslove

$$\begin{aligned} \eta = 0 &: \mathcal{K}_0^{*0'} = 0, \quad \mathcal{K}_0^{*1'} = 0, \quad \mathcal{K}_1^{*1'} = 0, \\ \eta \rightarrow \infty &: \mathcal{K}_0^{*0} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_0^{*1} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_1^{*1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Za određivanje funkcije  $\mathcal{K}^{**}$  služi sistem ( $\mathcal{S}^{**}$ ) uz granične uslove

$$\begin{aligned} \eta = 0 &: \mathcal{K}_0^{**0'} = 1, \quad \mathcal{K}_0^{**1'} = 0, \quad \mathcal{K}_{0b}^{**1} = 0, \quad \mathcal{K}_1^{**1'} = 0, \quad \mathcal{K}_{1a}^{**1} = 0, \\ \eta \rightarrow \infty &: \mathcal{K}_0^{**0} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_0^{**1} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_{0b}^{**1} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_1^{**1} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}_{1a}^{**1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Parametri  $\{a_k\}$  i  $\{b_k\}$  su kod ovog problema određeni izrazima:

$$\begin{aligned} a_k &= V^k \frac{p^{(k)}}{p}, & b_k &= z^{*k} \frac{R^{(k)}}{R} \\ P(x) &= P_0(x), & R(t) &= R_0(t) \frac{\delta_p^*(t)}{A} \end{aligned}$$



Rekurentne formule glase:

$$V a_k' = (k f_1 - a_1) a_k + a_{k+1} \equiv \alpha_k$$

$$z^* b_k' = (2k F - b_1) b_k + b_{k+1} \equiv \beta_k$$

2. Problem pri zadatoj temperaturi tela.

Energijska jednačina se rešava uz granične uslove:

$$y=0, \quad T = T_W(x, t)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty, \quad i \quad T_W - T_\infty = S(x) \Theta(t)$$

Rešenje se traži u obliku:

$$T = T_\infty + (T_W - T_\infty) \overset{**}{\mathcal{H}} + \frac{U^2}{g c_p} \overset{*}{\mathcal{H}}$$

Diferencijalne jednačine su

$$L^*[\overset{*}{\mathcal{H}}] = -F_{\eta\eta}^2$$

$$L^{**}[\overset{**}{\mathcal{H}}] = 0$$

sa graničnim uslovima

$$\eta=0 : \overset{*}{\mathcal{H}} = 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}} = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty : \overset{*}{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad \overset{**}{\mathcal{H}} \rightarrow 0$$

Funkcija  $\overset{**}{\mathcal{H}}$  sama za sebe predstavlja rešenje ovog problema, ako bi se zanemarila toplota usled trenja.

Za odredjivanje  $\overset{*}{\mathcal{H}}$  treba rešiti sistem (Š) uz granične uslove:

$$\eta = 0 : \mathcal{H}_0^* = 0, \mathcal{H}_0^1 = 0, {}^1\mathcal{H}_1 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \mathcal{H}_0^* \rightarrow 0, \mathcal{H}_0^1 \rightarrow 0, {}^1\mathcal{H}_1 \rightarrow 0$$

a za  $\mathcal{H}^{**}$  sistem ( $\bar{S}^{**}$ ) uz granične uslove

$$\eta = 0 : \mathcal{H}_0^{**} = 1, \mathcal{H}_0^{1**} = 0, \mathcal{H}_{ob}^{**} = 0, {}^1\mathcal{H}_1 = 0, {}^1\mathcal{H}_{1a} = 0,$$

$$\eta \rightarrow \infty : \mathcal{H}_0^{**} = 0, \mathcal{H}_0^{1**} = 0, \mathcal{H}_{ob}^{**} = 0, {}^1\mathcal{H}_1 = 0, {}^1\mathcal{H}_{1a} = 0$$

Parametri  $a_k$  i  $b_k$  u ovom slučaju glase

$$a_k = V^k \frac{S^{(k)}}{S}, \quad b_k = Z^{*k} \frac{\theta^{(k)}}{\theta}$$

Rekurentne formule ostaju iste. Ako je  $T_w = \text{const.}$ , zbog  $a_k = 0$  i  $b_k = 0$  iz računa otpadaju funkcije  $\mathcal{H}_{ob}^{**}$  i  ${}^1\mathcal{H}_{1a}^{**}$ .

5. TABLICE I

UNIVERZALNE FUNKCIJE BRZINSKOG POLJA

$\eta$	$F_0^0$	$F_0^{0'}$	$F_0^{0''}$	$F_0^1$	$F_0^{1''}$	$F_0^{1''}$
0.0	0.0000	0.0000	1.1284	0.0000	0.0000	0.5908
0.2	0.0224	0.2227	1.0842	0.0081	0.0647	0.1019
0.4	0.0879	0.4284	0.9616	0.0211	0.0577	-0.1343
0.6	0.1917	0.6039	0.7673	0.0294	0.0233	-0.1861
0.8	0.3270	0.7421	0.5950	0.0305	-0.0101	-0.1373
1.0	0.4861	0.8427	0.4151	0.0263	-0.0298	-0.0595
1.2	0.6619	0.9103	0.2673	0.0196	-0.0349	-0.0034
1.4	0.8485	0.9523	0.1589	0.0130	-0.0304	0.0365
1.6	1.0416	0.9763	0.0872	0.0077	-0.0221	0.0437
1.8	1.2383	0.9891	0.0442	0.0041	-0.0139	0.0364
2.0	1.4368	0.9953	0.0207	0.0020	-0.0078	0.0247
2.2	1.6362	0.9981	0.0089	0.0009	-0.0039	0.0144
2.4	1.8359	0.9993	0.0036	0.0003	-0.0018	0.0074
2.6	2.0358	0.9998	0.0013	0.0001	-0.0008	0.0034
2.8	2.2358	0.9999	0.0004	-0.0000	-0.0003	0.0014
3.0	2.4358	1.0000	0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0005
3.2	2.6358	1.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0002
3.4	2.8358	1.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0000
3.6	3.0358	1.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0000
3.8	3.2358	1.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0000
4.0	3.4358	1.0000	0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0000

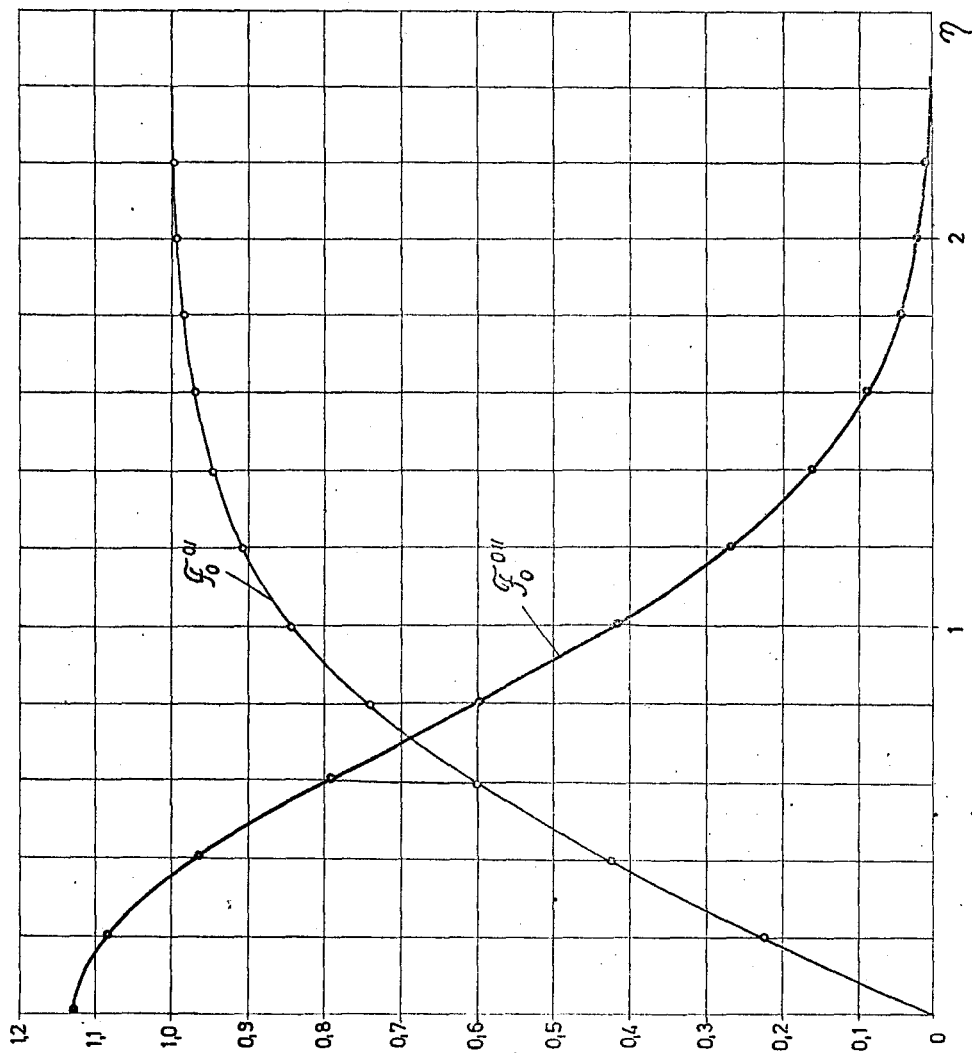
$\eta$	$\mathcal{F}_0''$	$\mathcal{F}_0'''$	$\mathcal{F}_0^{(4)}$	$\mathcal{F}_0^2$	$\mathcal{F}_0^{2'}$	$\mathcal{F}_0^{2''}$
0.0	0.0000	0.0000	0.0552	0.0000	0.0000	-0.0744
0.2	0.0011	0.0100	0.0402	-0.0014	-0.0126	-0.0438
0.4	0.0036	0.0146	0.0038	-0.0014	-0.0162	0.0071
0.6	0.0064	0.0115	-0.0335	-0.0073	-0.0111	0.0392
0.8	0.0078	0.0024	-0.0530	-0.0086	-0.0024	0.0434
1.0	0.0072	-0.0081	-0.0488	-0.0083	0.0050	0.0287
1.2	0.0048	-0.0160	-0.0278	-0.0069	0.0087	0.0093
1.4	0.0012	-0.0190	-0.0031	-0.0051	0.0090	-0.0050
1.6	-0.0025	-0.0176	0.0149	-0.0034	0.0073	-0.0114
1.8	-0.0057	-0.0138	0.0223	-0.0022	0.0049	-0.0116
2.0	-0.0080	-0.0093	0.0213	-0.0015	0.0028	-0.0088
2.2	-0.0095	-0.0055	0.0160	-0.0011	0.0014	-0.0055
2.4	-0.0103	-0.0029	0.0102	-0.0009	0.0005	-0.0030
2.6	-0.0107	-0.0014	0.0056	-0.0008	0.0001	-0.0014
2.8	-0.0109	-0.0005	0.0028	-0.0008	-0.0001	-0.0005
3.0	-0.0109	-0.0001	0.0013	-0.0008	-0.0001	-0.0001
3.2	-0.0109	0.0000	0.0006	-0.0009	-0.0001	0.0000
3.4	-0.0109	0.0001	0.0003	-0.0009	-0.0001	0.0001
3.6	-0.0109	0.0002	0.0002	-0.0009	-0.0001	0.0001
3.8	-0.0109	0.0002	0.0002	-0.0009	-0.0001	0.0001
4.0	-0.0108	0.0003	0.0002	-0.0009	0.0000	0.0002

$\eta$	${}^1\mathcal{F}_1$	${}^1\mathcal{F}_1'$	${}^1\mathcal{F}_1''$	${}^1\mathcal{F}_1'$	${}^1\mathcal{F}_1''$	${}^1\mathcal{F}_1'''$
0.0	0.0000	0.0000	1.2623	0.0000	0.0000	-0.1694
0.2	0.0212	0.1932	0.6894	-0.0031	-0.0292	-0.1041
0.4	0.0705	0.2842	0.2431	-0.0103	-0.0378	0.0196
0.6	0.1299	0.2998	-0.0646	-0.0167	-0.0231	0.1187
0.8	0.1872	0.2673	-0.2391	-0.0186	0.0052	0.1526
1.0	0.2353	0.2115	-0.3026	-0.0146	0.0336	0.1227
1.2	0.2715	0.1514	-0.2885	-0.0058	0.0519	0.0575
1.4	0.2964	0.0989	-0.2325	0.0052	0.0566	-0.0082
1.6	0.3120	0.0592	-0.1647	0.0161	0.0502	-0.0512
1.8	0.3209	0.0325	-0.1043	0.0249	0.0381	-0.0659
2.0	0.3257	0.0164	-0.0596	0.0312	0.0253	-0.0595
2.2	0.3280	0.0076	-0.0309	0.0352	0.0149	-0.0436
2.4	0.3290	0.0032	-0.0146	0.0373	0.0078	-0.0272
2.6	0.3295	0.0013	-0.0063	0.0384	0.0037	-0.0148
2.8	0.3296	0.0004	-0.0024	0.0389	0.0016	-0.0071
3.0	0.3297	0.0002	-0.0009	0.0390	0.0007	-0.0030
3.2	0.3297	0.0000	-0.0003	0.0390	0.0003	-0.0010
3.4	0.3297	0.0000	-0.0001	0.0389	0.0002	-0.0002
3.6	0.3297	0.0000	-0.0000	0.0388	0.0002	-0.0001
3.8	0.3297	0.0000	0.0000	0.0387	0.0002	-0.0003
4.0	0.3297	0.0000	0.0000	0.0385	0.0003	-0.0004

$\eta$	" $F_{11}$ "	" $F_{11}'$ "	" $F_{11}''$ "	" $F_2$ "	" $F_2'$ "	" $F_2''$ "
0.0	0.0000	0.0000	-0.1530	0.0000	0.0000	-0.0416
0.2	-0.0031	-0.0313	-0.1611	-0.0008	-0.0084	-0.0420
0.4	-0.0126	-0.0635	-0.1560	-0.0033	-0.0162	-0.0340
0.6	-0.0282	-0.0915	-0.1187	-0.0071	-0.0214	-0.0169
0.8	-0.0485	-0.1091	-0.0548	-0.0116	-0.0228	0.0021
1.0	-0.0709	-0.1129	0.0166	-0.0160	-0.0209	0.0164
1.2	-0.0928	-0.1034	0.0747	-0.0198	-0.0168	0.0232
1.4	-0.1117	-0.0848	0.1066	-0.0227	-0.0121	0.0231
1.6	-0.1264	-0.0626	0.1107	-0.0247	-0.0078	0.0189
1.8	-0.1368	-0.0418	0.0947	-0.0259	-0.0046	0.0133
2.0	-0.1435	-0.0254	0.0696	-0.0266	-0.0025	0.0082
2.2	-0.1473	-0.0140	0.0449	-0.0269	-0.0012	0.0045
2.4	-0.1494	-0.0070	0.0257	-0.0271	-0.0006	0.0022
2.6	-0.1503	-0.0032	0.0132	-0.0272	-0.0002	0.0010
2.8	-0.1508	-0.0014	0.0061	-0.0272	-0.0001	0.0004
3.0	-0.1510	-0.0006	0.0025	-0.0272	-0.0001	-0.0001
3.2	-0.1510	-0.0003	0.0009	-0.0273	-0.0001	-0.0000
3.4	-0.1511	-0.0001	0.0002	-0.0273	-0.0000	-0.0000
3.6	-0.1511	-0.0001	-0.0006	-0.0273	-0.0000	-0.0000
3.8	-0.1511	-0.0001	-0.0001	-0.0273	-0.0000	-0.0000
4.0	-0.1512	-0.0002	-0.0001	-0.0273	-0.0000	-0.0000

6. DIJAGRAM UNIVERZALNIH FUNKCIJA  
BRZINSKOG POLJA





7. TABLICE II

UNIVERZALNE FUNKCIJE TEMPERATURSKOG POLJA

$\eta$	$\check{K}_0'$	$\check{K}_0''$	$\check{K}_1$	$\check{K}_1'$	$\check{K}_0^o$	$\check{K}_0^{o'}$
0.0	-0.3411	0.0000	-0.0186	0.0000	0.4428	0.0000
0.2	-0.3343	0.0905	-0.0511	-0.2774	0.4248	-0.1752
0.4	-0.3009	0.2419	-0.1131	-0.3089	0.3757	-0.3058
0.6	-0.2410	0.3425	-0.1648	-0.1929	0.3072	-0.3674
0.8	-0.1701	0.3523	-0.1875	-0.0347	0.2333	-0.3621
1.0	-0.1049	0.2918	-0.1808	0.0930	0.1654	-0.3112
1.2	-0.0552	0.2033	-0.1543	0.1624	0.1101	-0.2407
1.4	-0.0231	0.1205	-0.1195	0.1782	0.0691	-0.1707
1.6	-0.0055	0.0594	-0.0853	0.1595	0.0410	-0.1125
1.8	0.0022	0.0218	-0.0567	0.1253	0.0230	-0.0694
2.0	0.0044	0.0027	-0.0353	0.0893	0.0123	-0.0403
2.2	0.0041	-0.0048	-0.0206	0.0586	0.0062	-0.0220
2.4	0.0029	-0.0061	-0.0113	0.0356	0.0030	-0.0114
2.6	0.0018	-0.0049	-0.0059	0.0202	0.0014	-0.0055
2.8	0.0010	-0.0032	-0.0029	0.0107	0.0006	-0.0025
3.0	0.0005	-0.0019	-0.0013	0.0053	0.0002	-0.0011
3.2	0.0002	-0.0010	-0.0006	0.0025	0.0001	-0.0005
3.4	0.0001	-0.0004	-0.0002	0.0011	0.0000	-0.0002
3.6	0.0000	-0.0002	-0.0001	0.0005	0.0000	-0.0001
3.8	0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0002	0.0000	-0.0000
4.0	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000

$\eta$	$\mathcal{K}_0^{(n)}$	$\mathcal{K}_0^{(n)}$	$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{K}_1'$	$\mathcal{K}_0^o$	$\mathcal{K}_0^{o'}$
0.0	-0.3927	0.0000	-0.0000	0.0000	0.5000	0.0000
0.2	-0.3804	0.1514	-0.0431	-0.3631	0.4752	-0.2414
0.4	-0.3284	0.3612	-0.1218	-0.3775	0.4083	-0.4119
0.6	-0.2431	0.4674	-0.1811	-0.1970	0.3177	-0.4754
0.8	-0.1511	0.4320	-0.1984	0.0185	0.2246	-0.4416
1.0	-0.0762	0.3096	-0.1783	0.1673	0.1449	-0.3498
1.2	-0.0280	0.1753	-0.1379	0.2222	0.0857	-0.2434
1.4	-0.0037	0.0750	-0.0942	0.2057	0.0466	-0.1514
1.6	0.0050	0.0187	-0.0578	0.1557	0.0234	-0.0852
1.8	0.0060	-0.0046	-0.0322	0.1018	0.0108	-0.0437
2.0	0.0044	-0.0097	-0.0163	0.0590	0.0047	-0.0206
2.2	0.0025	-0.0079	-0.0076	0.0308	0.0019	-0.0089
2.4	0.0013	-0.0048	-0.0032	0.0146	0.0007	-0.0036
2.6	0.0006	-0.0024	-0.0012	0.0063	0.0002	-0.0013
2.8	0.0002	-0.0011	-0.0004	0.0025	0.0001	-0.0004
3.0	0.0001	-0.0004	-0.0001	0.0009	0.0000	-0.0001
3.2	0.0001	-0.0001	0.0000	0.0003	-0.0000	-0.0000
3.4	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	-0.0000	0.0000
3.6	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	-0.0000	0.0000
3.8	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	-0.0000	0.0000
4.0	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	-0.0000	0.0000

$\eta$	$\mathcal{K}_0^{xx}$	$\mathcal{K}_0^{x'}$	$\mathcal{K}_0^{x''}$	$\mathcal{K}_{ob}^{xx}$	$\mathcal{K}_{ob}^{x'}$
0.0	-1.0444	1.0000	-0.1368	0.0000	0.4101
0.2	-0.8463	0.9716	-0.1426	-0.0492	0.3895
0.4	-0.6593	0.8912	-0.1529	-0.0457	0.3392
0.6	-0.4925	0.7717	-0.1585	-0.0067	0.2749
0.8	-0.3520	0.6308	-0.1546	0.0461	0.2090
1.0	-0.2404	0.4867	-0.1405	0.0929	0.1496
1.2	-0.1565	0.3546	-0.1187	0.1217	0.1011
1.4	-0.0971	0.2438	-0.0933	0.1290	0.0646
1.6	-0.0573	0.1583	-0.0683	0.1183	0.0390
1.8	-0.0321	0.0970	-0.0467	0.0968	0.0223
2.0	-0.0171	0.0581	-0.0298	0.0718	0.0121
2.2	-0.0087	0.0307	-0.0178	0.0488	0.0062
2.4	-0.0042	0.0158	-0.0100	0.0306	0.0030
2.6	-0.0019	0.0077	-0.0052	0.0178	0.0014
2.8	-0.0008	0.0035	-0.0026	0.0096	0.0006
3.0	-0.0003	0.0015	-0.0012	0.0049	0.0003
3.2	-0.0001	0.0006	-0.0005	0.0023	0.0001
3.4	-0.0001	0.0002	-0.0001	0.0010	0.0000
3.6	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0005	0.0000
3.8	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0000
4.0	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000

$\eta$	$\mathcal{K}_0^{xx}$	$\mathcal{K}_0^{oi}$	$\mathcal{K}_0^i$	$\mathcal{K}_0^{ii}$	$\mathcal{K}_{ob}^{xx}$	$\mathcal{K}_{ob}^i$
0.0	-0.8862	1.0000	-0.1160	0.0000	0.3480	0.0000
0.2	-0.6888	0.9608	-0.1226	-0.0520	0.3243	-0.2164
0.4	-0.5065	0.8521	-0.1322	-0.0347	0.2691	-0.3183
0.6	-0.3510	0.6977	-0.1339	0.0212	0.2030	-0.3309
0.8	-0.2285	0.5273	-0.1235	0.0810	0.1405	-0.2872
1.0	-0.1394	0.3679	-0.1029	0.1197	0.0897	-0.2190
1.2	-0.0795	0.2369	-0.0776	0.1287	0.0529	-0.1498
1.4	-0.0423	0.1409	-0.0531	0.1136	0.0289	-0.0930
1.6	-0.0209	0.0773	-0.0330	0.0861	0.0146	-0.0527
1.8	-0.0096	0.0392	-0.0187	0.0573	0.0069	-0.0273
2.0	-0.0041	0.0183	-0.0097	0.0340	0.0030	-0.0130
2.2	-0.0016	0.0079	-0.0046	0.0181	0.0012	-0.0057
2.4	-0.0006	0.0031	-0.0020	0.0087	0.0004	-0.0023
2.6	0.0002	0.0012	-0.0008	0.0038	0.0001	0.0009
2.8	-0.0000	0.0004	-0.0003	0.0015	0.0000	-0.0003
3.0	0.0000	0.0001	-0.0002	0.0005	-0.0000	-0.0001
3.2	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0001	-0.0000	-0.0000
3.4	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000
3.6	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
3.8	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0000	0.0000

$\eta$	${}^{xx}\mathcal{K}_1$	${}^{xx}\mathcal{K}_1'$	${}^{xx}\mathcal{K}_{1a}$	${}^{xx}\mathcal{K}_{1a}'$		
0.0	0.0705	0.0000	0.1280	0.0000		
0.2	0.0744	0.0373	0.1322	0.0277		
0.4	0.0842	0.0560	0.1350	-0.0060		
0.6	0.0953	0.0495	0.1286	-0.0584		
0.8	0.1024	0.0187	0.1124	-0.0998		
1.0	0.1021	-0.0227	0.0902	-0.1178		
1.2	0.0936	-0.0601	0.0668	-0.1133		
1.4	0.0790	-0.0834	0.0458	-0.0946		
1.6	0.0615	-0.0893	0.0293	-0.0706		
1.8	0.0442	-0.0812	0.0175	-0.0480		
2.0	0.0295	-0.0651	0.0098	-0.0300		
2.2	0.0183	-0.0469	0.0051	-0.0174		
2.4	0.0106	-0.0308	0.0025	-0.0094		
2.6	0.0057	-0.0186	0.0011	-0.0048		
2.8	0.0029	-0.0104	0.0005	-0.0023		
3.0	0.0014	-0.0054	0.0001	-0.0010		
3.2	0.0006	-0.0026	0.0000	-0.0005		
3.4	0.0002	-0.0012	-0.0001	-0.0002		
3.6	0.0001	-0.0005	-0.0001	-0.0001		
3.8	0.0000	-0.0002	-0.0001	-0.0001		
4.0	-0.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0001		

$\eta$	${}^{xx}K_1$	${}^{xx}K_1'$	${}^{xx}K_{1a}$	${}^{xx}K_{1a}'$		
0.0	0.0526	0.0000	0.0951	0.0000		
0.2	0.0566	0.0375	0.0990	0.0233		
0.4	0.0660	0.0514	0.1001	-0.0176		
0.6	0.0750	0.0332	0.0913	-0.0688		
0.8	0.0778	-0.0067	0.0741	-0.0989		
1.0	0.0722	-0.0478	0.0537	-0.1011		
1.2	0.0597	-0.0737	0.0350	-0.0838		
1.4	0.0442	-0.0788	0.0206	-0.0594		
1.6	0.0293	-0.0677	0.0110	-0.0370		
1.8	0.0176	-0.0494	0.0054	-0.0206		
2.0	0.0095	-0.0314	0.0024	-0.0104		
2.2	0.0047	-0.0177	0.0009	-0.0048		
2.4	0.0021	-0.0089	0.0003	-0.0020		
2.6	0.0009	-0.0040	0.0000	-0.0008		
2.8	-0.0004	-0.0016	-0.0001	-0.0003		
3.0	0.0001	-0.0006	-0.0002	-0.0002		
3.2	0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0001		
3.4	0.0001	-0.0000	-0.0002	-0.0001		
3.6	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0001		
3.8	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0001		
4.0	0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0001		



$\eta$	$\theta_0^{**}$	$\theta_0^{*}$	$\theta_0^{**}$	$\theta_0^{**}$	$\theta_{0n}^{**}$	$\theta_{0n}^{**}$
0.0	1.0000	-0.9575	0.0000	0.2507	0.0000	-0.7520
0.2	0.8103	-0.9303	0.0457	0.2296	-0.1095	-0.3640
0.4	0.6312	-0.8533	0.0894	0.1720	-0.1538	-0.0990
0.6	0.4715	-0.7388	0.1161	0.0932	-0.1562	0.0597
0.8	0.3371	-0.6039	0.1265	0.0124	-0.1355	0.1356
1.0	0.2301	-0.4660	0.1221	-0.0537	-0.1057	0.1545
1.2	0.1499	-0.3395	0.1067	-0.0954	-0.0759	0.1402
1.4	0.0930	-0.2335	0.0856	-0.1114	-0.0506	0.1110
1.6	0.0549	-0.1516	0.0635	-0.1066	-0.0316	0.0795
1.8	0.0308	-0.0929	0.0438	-0.0892	-0.0185	0.0523
2.0	0.0164	-0.0537	0.0282	-0.0670	-0.0102	0.0320
2.2	0.0083	-0.0294	0.0169	-0.0459	-0.0053	0.0182
2.4	0.0040	-0.0151	0.0095	-0.0289	-0.0026	0.0097
2.6	0.0018	-0.0074	0.0050	-0.0168	-0.0012	0.0049
2.8	0.0008	-0.0034	0.0025	-0.0091	-0.0005	0.0023
3.0	0.0003	-0.0015	0.0012	-0.0046	-0.0002	0.0010
3.2	0.0001	-0.0006	0.0005	-0.0022	-0.0000	0.0004
3.4	0.0000	-0.0002	0.0002	-0.0009	0.0000	0.0002
3.6	0.0000	-0.0001	0.0001	-0.0004	0.0000	0.0001
3.8	0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0001	0.0000	0.0000
4.0	0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0000	0.0000

$\eta$	$\mathcal{H}_0^0$	$\mathcal{H}_0^{0'}$	$\mathcal{H}_0^{1'}$	$\mathcal{H}_0^{1''}$	$\mathcal{H}_{0n}^{2'}$	$\mathcal{H}_{0n}^{2''}$
0.0	1.0000	-1.1284	0.0000	0.2955	0.0000	-0.8862
0.2	0.7773	-1.0841	0.0566	0.2612	-0.1215	-0.3631
0.4	0.5716	-0.9615	0.1007	0.1712	-0.1584	-0.0369
0.6	0.3962	-0.7872	0.1237	0.0577	-0.1470	0.1284
0.8	0.2579	-0.5950	0.1247	-0.0436	-0.1146	0.1809
1.0	0.1573	-0.4151	0.1087	-0.1087	-0.0739	0.1682
1.2	0.0897	-0.2673	0.0840	-0.1316	-0.0491	0.1282
1.4	0.0477	-0.1589	0.0583	-0.1215	-0.0278	0.0850
1.6	0.0237	-0.0872	0.0386	-0.0941	-0.0145	0.0504
1.8	0.0109	-0.0442	0.0209	-0.0634	-0.0069	0.0270
2.0	0.0047	-0.0207	0.0109	-0.0379	-0.0030	0.0132
2.2	0.0019	-0.0089	0.0052	-0.0203	-0.0012	0.0059
2.4	0.0007	-0.0036	0.0023	-0.0098	-0.0004	0.0024
2.6	0.0002	-0.0013	0.0009	-0.0043	-0.0001	0.0009
2.8	0.0001	-0.0004	0.0004	-0.0017	-0.0000	0.0003
3.0	0.0000	-0.0001	0.0002	-0.0006	0.0000	0.0001
3.2	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0002	0.0001	0.0001
3.4	0.0000	0.0000	0.0001	-0.0000	0.0001	0.0000
3.6	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000
3.8	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000
4.0	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000

$\eta$	${}^{xx} \mathcal{L}_1$	${}^{xx} \mathcal{L}_1'$	${}^{xx} \mathcal{L}_{1,3}$	${}^{xx} \mathcal{L}_{1,3}'$		
0.0	0.0000	-0.1293	0.0000	-0.2347		
0.2	-0.0260	-0.1299	-0.0443	-0.1973		
0.4	-0.0513	-0.1205	-0.0759	-0.1142		
0.6	+0.0729	-0.0921	-0.0397	-0.0253		
0.8	-0.0870	-0.0471	-0.0374	0.0427		
1.0	-0.0913	0.0035	-0.0747	0.0798		
1.2	-0.0861	0.0467	-0.0574	0.0888		
1.4	-0.0737	0.0736	-0.0404	0.0793		
1.6	-0.0579	0.0821	-0.0263	0.0614		
1.8	-0.0419	0.0760	-0.0159	0.0427		
2.0	-0.0281	0.0614	-0.0090	0.0271		
2.2	-0.0175	0.0445	-0.0047	0.0159		
2.4	-0.0101	0.0293	-0.0023	0.0087		
2.6	-0.0055	0.0177	-0.0010	0.0044		
2.8	-0.0028	0.0099	-0.0004	0.0021		
3.0	-0.0013	0.0051	-0.0001	0.0010		
3.2	-0.0006	0.0025	0.0000	0.0004		
3.4	-0.0003	0.0011	0.0001	0.0002		
3.6	-0.0001	0.0005	0.0001	0.0001		
3.8	-0.0001	0.0002	0.0001	0.0001		
4.0	-0.0000	0.0001	0.0001	0.0001		

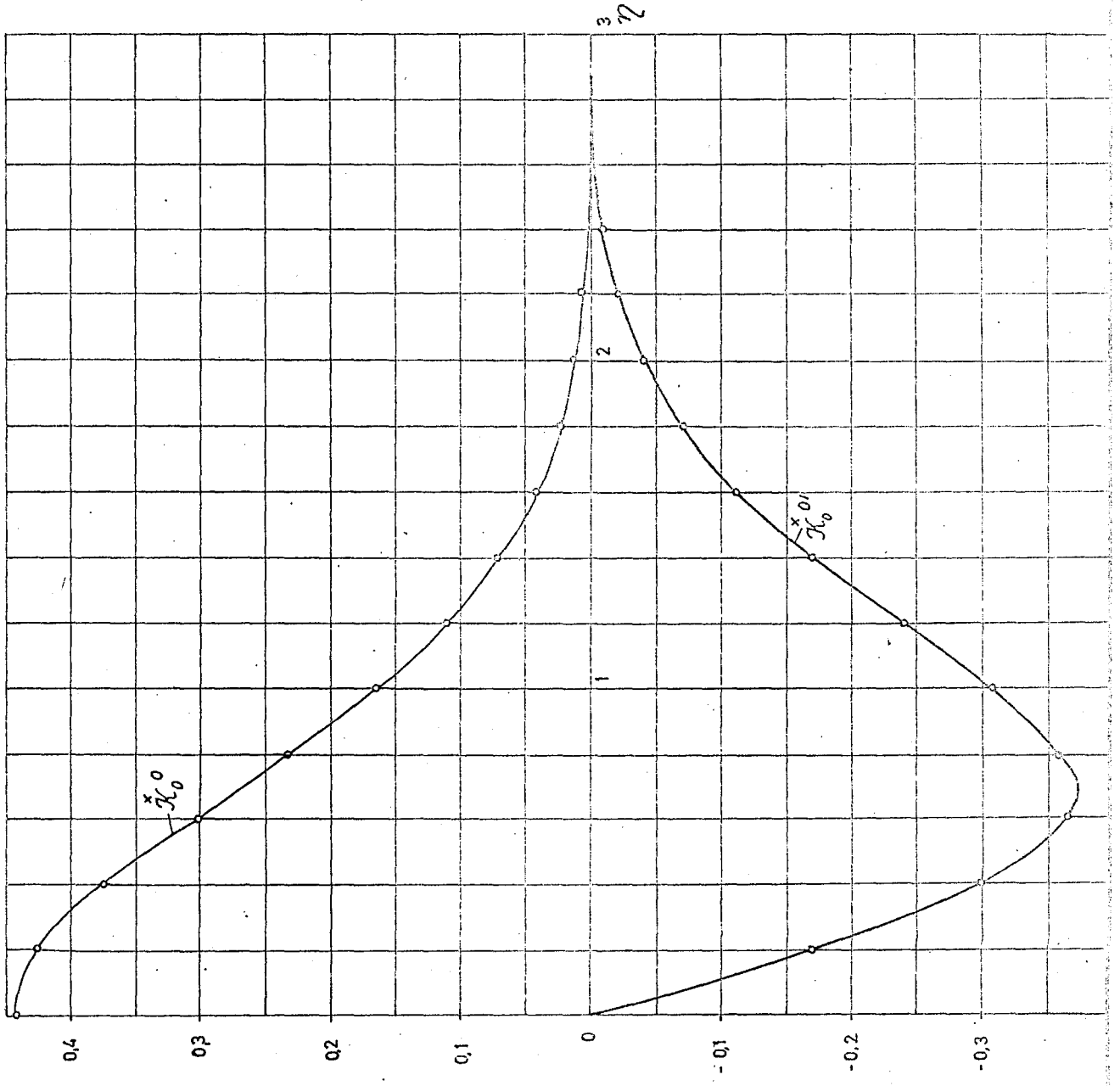
$\eta$	$\frac{\delta^{**}}{\delta^*}$	$\frac{\delta^{**}}{\delta^*}$	$\frac{\delta^{**}}{\delta^*}$	$\frac{\delta^{**}}{\delta^*}$		
0.0	0.0000	-0.1340	0.0000	-0.2422		
0.2	-0.0269	-0.1342	-0.0448	-0.1922		
0.4	-0.0525	-0.1179	-0.0733	-0.0883		
0.6	-0.0722	-0.0744	-0.0806	0.0107		
0.8	-0.0811	-0.0141	-0.0716	0.0724		
1.0	-0.0781	0.0420	-0.0545	0.0925		
1.2	-0.0658	0.0770	-0.0365	0.0834		
1.4	-0.0491	0.0859	-0.0219	0.0616		
1.6	-0.0328	0.0750	-0.0119	0.0393		
1.8	-0.0197	0.0552	-0.0059	0.0222		
2.0	-0.0107	0.0352	-0.0026	0.0113		
2.2	-0.0053	0.0198	-0.0010	0.0052		
2.4	-0.0024	0.0100	-0.0003	0.0022		
2.6	-0.0010	0.0045	-0.0000	0.0009		
2.8	-0.0004	0.0018	0.0001	0.0004		
3.0	-0.0002	0.0007	0.0002	0.0002		
3.2	-0.0001	0.0002	0.0002	0.0001		
3.4	-0.0001	0.0000	0.0002	0.0001		
3.6	-0.0001	0.0000	0.0002	0.0001		
3.8	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0001		
4.0	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0001		

$\eta$	$\mathcal{H}_0^x$	$\mathcal{H}_0^{x'}$	$\mathcal{H}_1^x$	$\mathcal{H}_1^{x'}$	$\mathcal{H}_0^0$	$\mathcal{H}_0^{0'}$
0.0	0.0000	-0.0931	0.0000	0.2295	0.0000	0.4239
0.2	-0.0300	-0.1640	0.0122	-0.0711	-0.0561	0.2367
0.4	-0.0557	-0.0805	-0.0150	-0.1725	0.0962	0.0720
0.6	-0.0611	0.0224	-0.0480	-0.1419	0.0984	-0.0403
0.8	-0.0499	0.0797	-0.0684	-0.0597	0.0840	-0.0947
1.0	-0.0326	0.0869	-0.0724	0.0159	0.0635	-0.1049
1.2	-0.0170	0.0665	-0.0642	0.0601	0.0437	-0.0904
1.4	-0.0063	0.0401	-0.0504	0.0737	0.0279	-0.0674
1.6	-0.0006	0.0191	-0.0360	0.0678	0.0167	-0.0454
1.8	0.0018	0.0060	-0.0238	0.0534	0.0094	-0.0283
2.0	0.0023	-0.0005	-0.0147	0.0378	0.0050	-0.0165
2.2	0.0019	-0.0027	-0.0085	0.0246	0.0025	-0.0090
2.4	0.0013	-0.0028	-0.0047	0.0149	0.0012	-0.0046
2.6	0.0008	-0.0022	-0.0024	0.0084	0.0005	-0.0023
2.8	0.0005	-0.0014	-0.0011	0.0044	0.0002	-0.0010
3.0	0.0003	-0.0008	-0.0005	0.0022	0.0001	-0.0005
3.2	0.0001	-0.0004	-0.0002	0.0010	0.0000	-0.0002
3.4	0.0001	-0.0002	-0.0000	0.0004	-0.0000	-0.0001
3.6	0.0001	-0.0001	0.0000	0.0002	-0.0000	-0.0001
3.8	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0001	-0.0000	-0.0000
4.0	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	-0.0000

$\eta$	$\mathcal{H}_0^1$	$\mathcal{H}_0^{II}$	$\mathcal{H}_1^I$	$\mathcal{H}_1^I$	$\mathcal{H}_0^0$	$\mathcal{H}_0^{0I}$
0.0	0.0000	-0.1477	0.0000	0.3091	0.0000	0.5642
0.2	-0.0428	-0.2234	0.0153	-0.1038	0.0866	0.3006
0.4	-0.0751	-0.0836	-0.0222	-0.2302	0.1224	0.0688
0.6	-0.0759	0.0652	-0.0343	-0.1704	0.1196	-0.0818
0.8	-0.0549	0.1297	-0.0362	-0.0469	0.0957	-0.1441
1.0	-0.0293	0.1168	-0.0347	0.0538	0.0663	-0.1423
1.2	-0.0102	0.0720	-0.0334	0.1003	0.0408	-0.1097
1.4	-0.0002	0.0309	-0.0477	0.1012	0.0227	-0.0719
1.6	0.0033	0.0063	-0.0295	0.0789	0.0115	-0.0416
1.8	0.0033	-0.0037	-0.0164	0.0520	0.0054	-0.0216
2.0	0.0023	-0.0055	-0.0063	0.0302	0.0023	-0.0102
2.2	0.0023	-0.0042	-0.0038	0.0157	0.0009	-0.0044
2.4	0.0007	-0.0025	-0.0016	0.0074	0.0003	-0.0018
2.6	0.0003	-0.0012	-0.0006	0.0032	0.0001	-0.0007
2.8	0.0001	-0.0005	-0.0002	0.0013	0.0000	-0.0002
3.0	0.0001	-0.0002	0.0000	0.0005	0.0000	-0.0001
3.2	0.0000	-0.0001	0.0000	0.0002	-0.0000	-0.0000
3.4	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0001	-0.0000	-0.0000
3.6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	-0.0000
3.8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000
4.0	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000

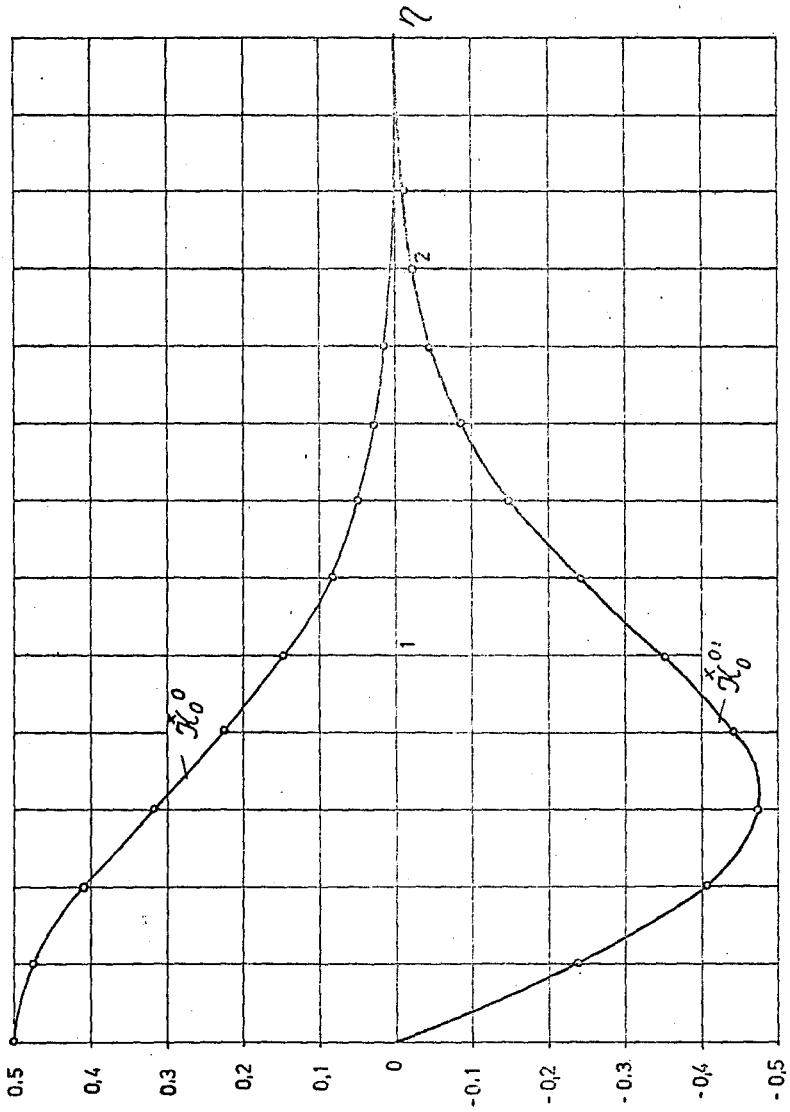
8. DIJAGRAMI UNIVERZALNIH FUNKCIJA  
TEMPERATURSKOG POLJA

$P_r = 0,72$

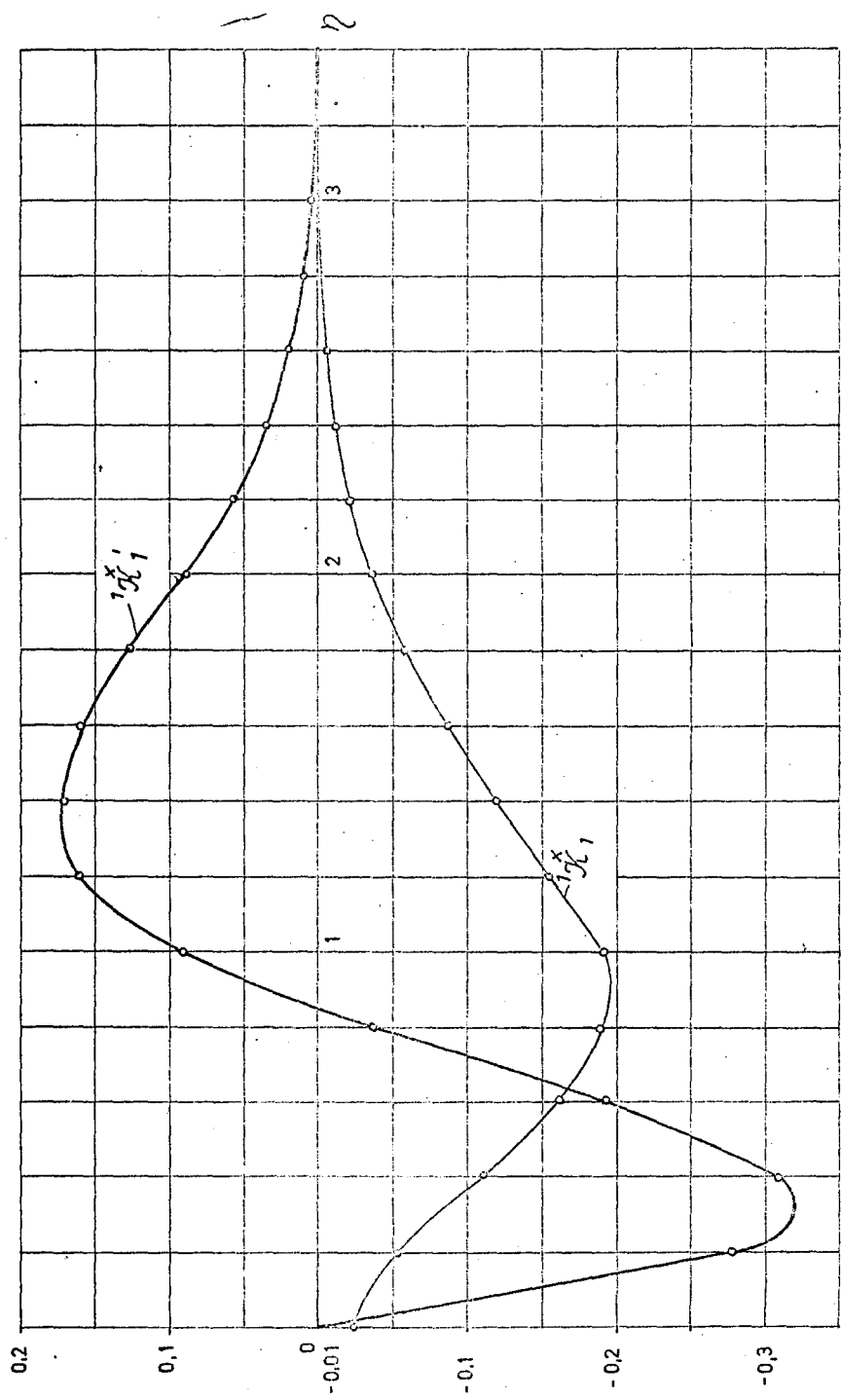




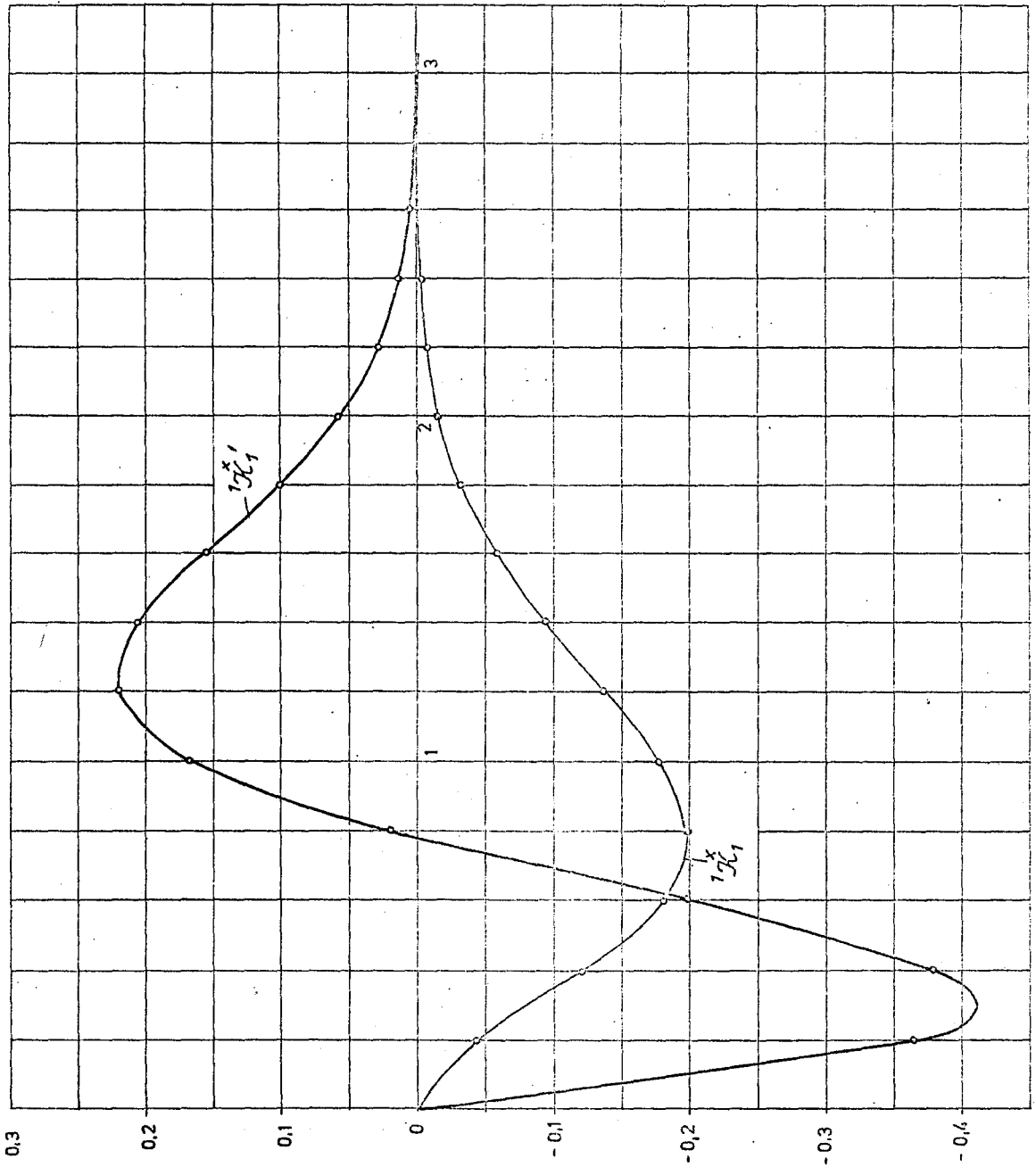
$R_r = 1.0$



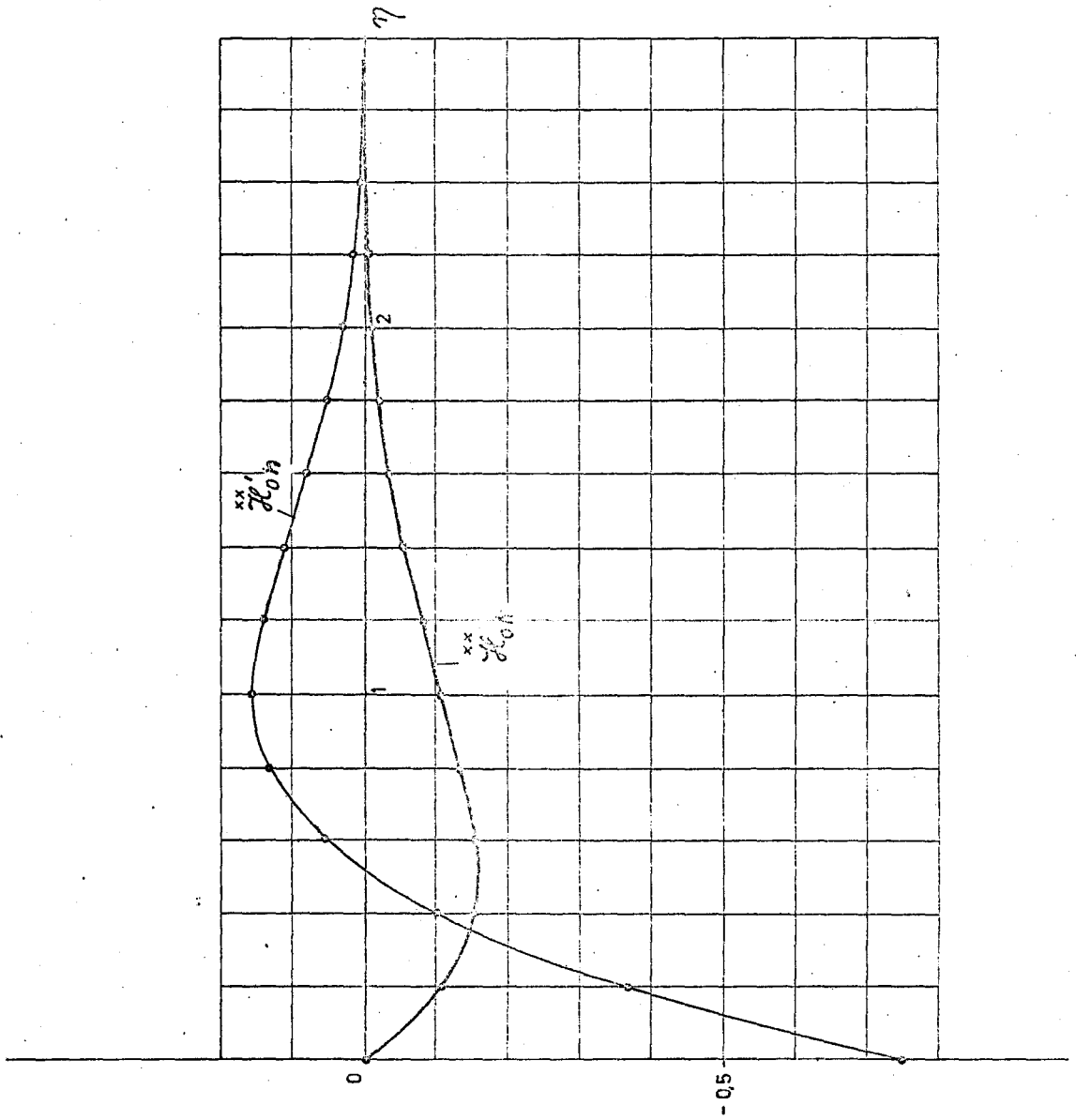
$P_T = 0.72$



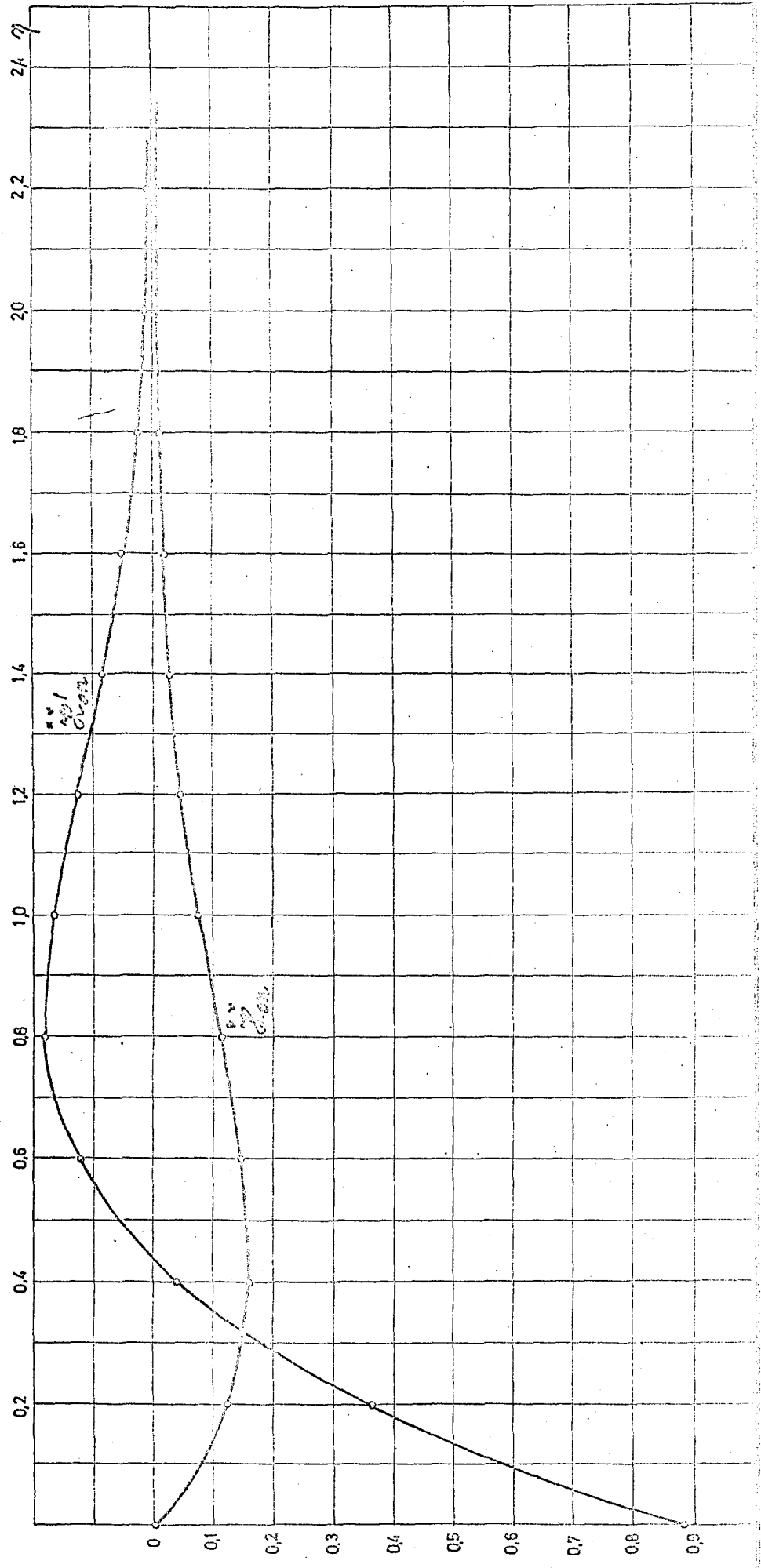
$P_T = 1.0$



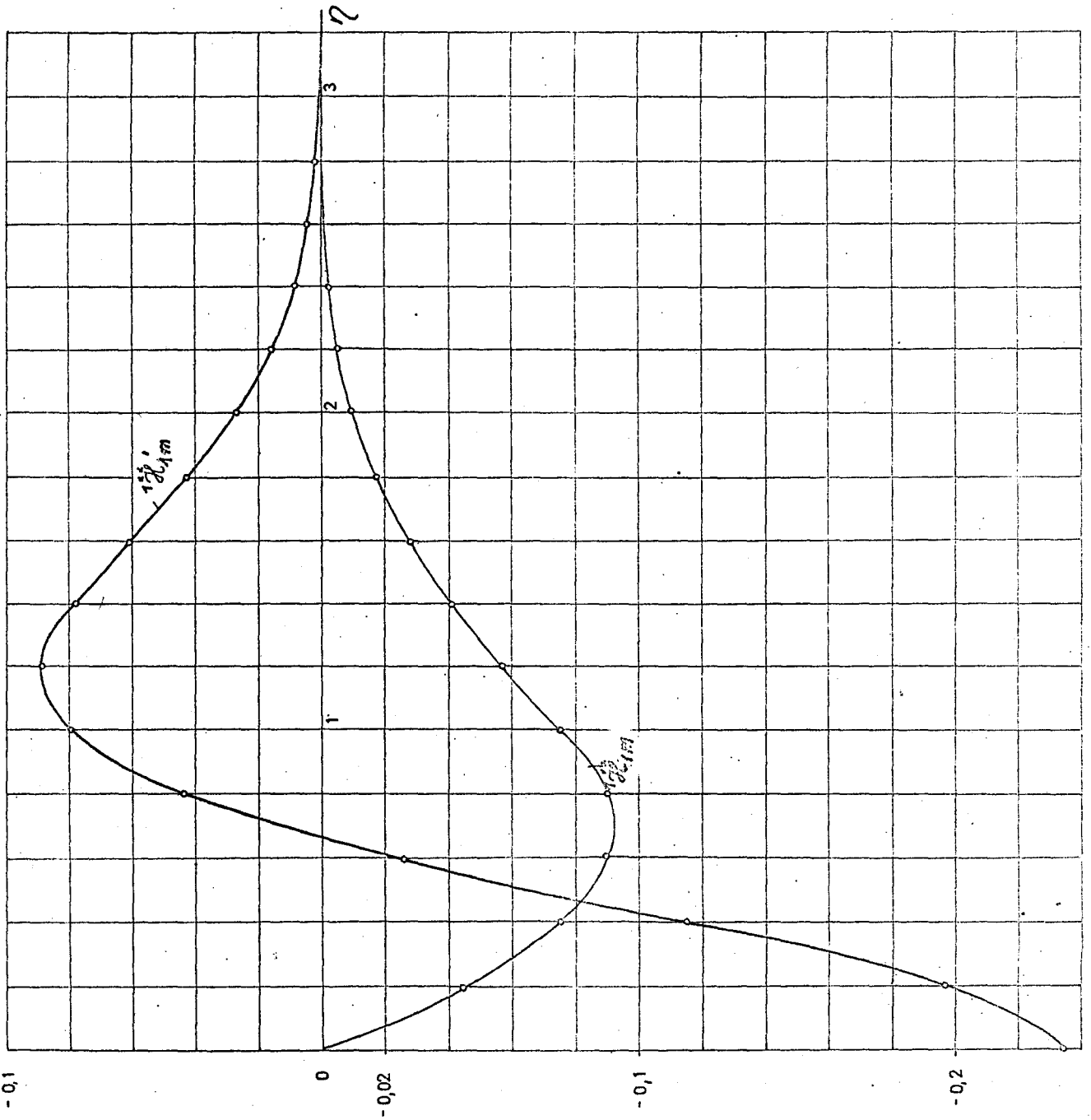
$P_r = 0.72$



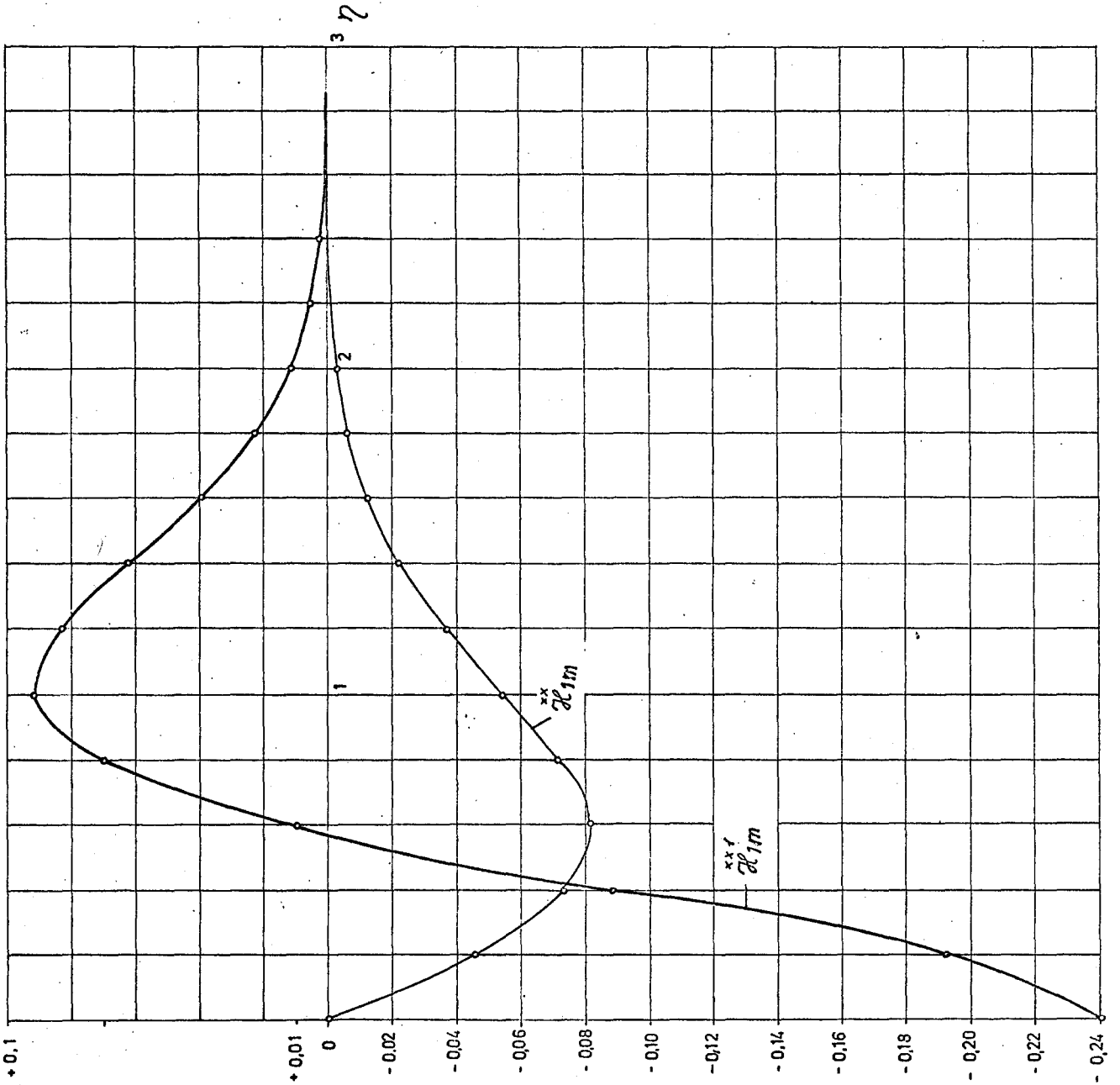
$P_0 = 1,0$



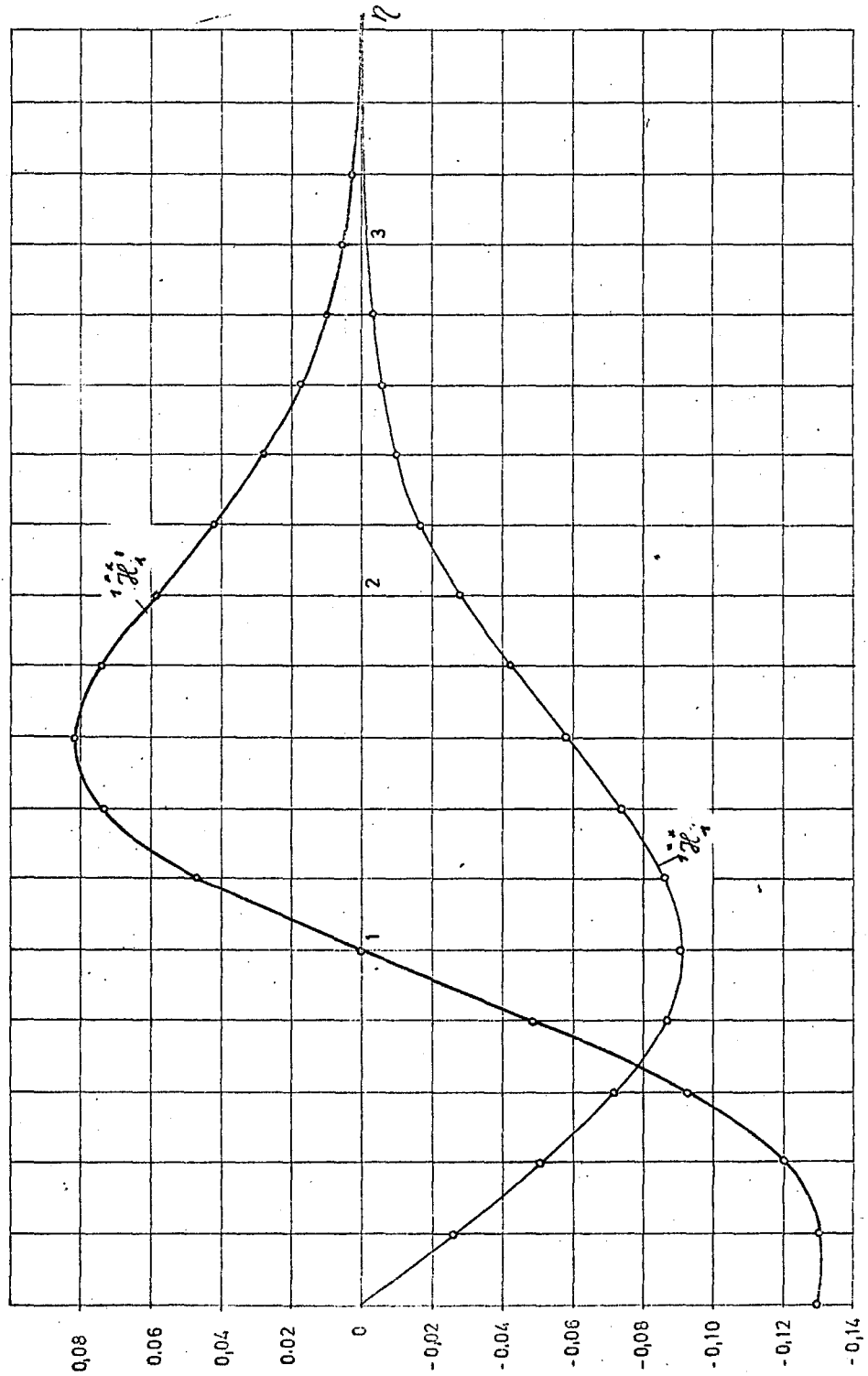
$P_r = 0.72$



$P_r = 10$

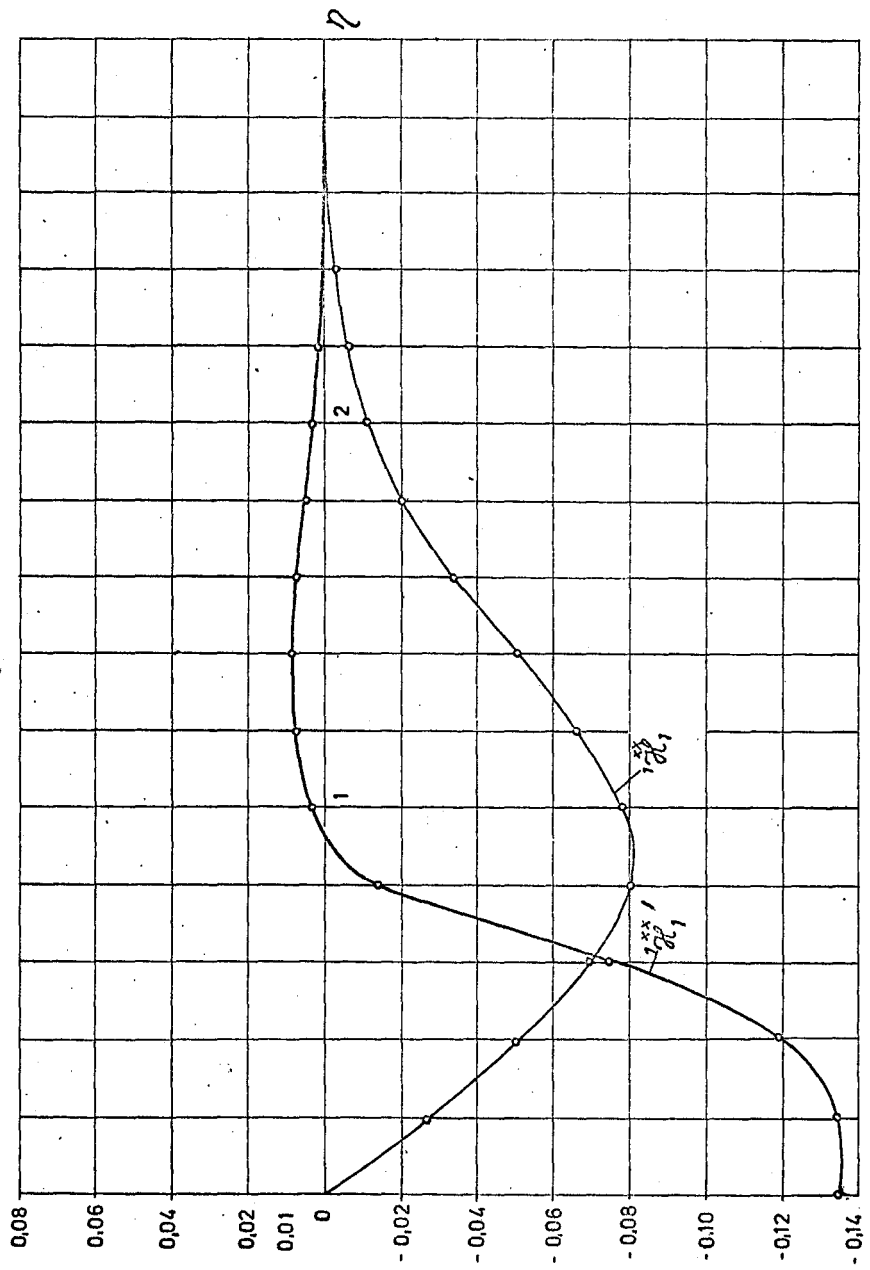


$P_r = 0.72$

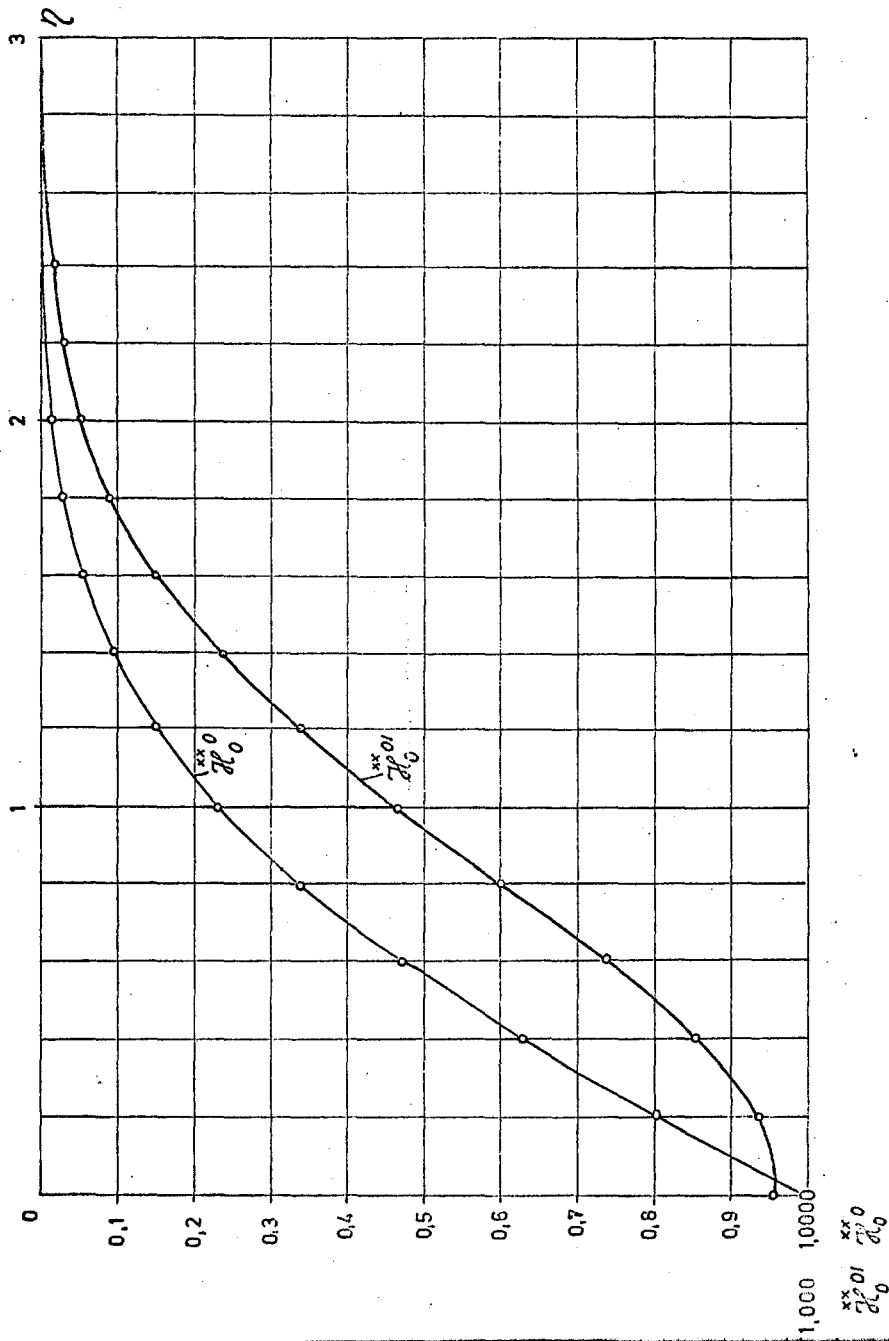




$Pr = 1.0$

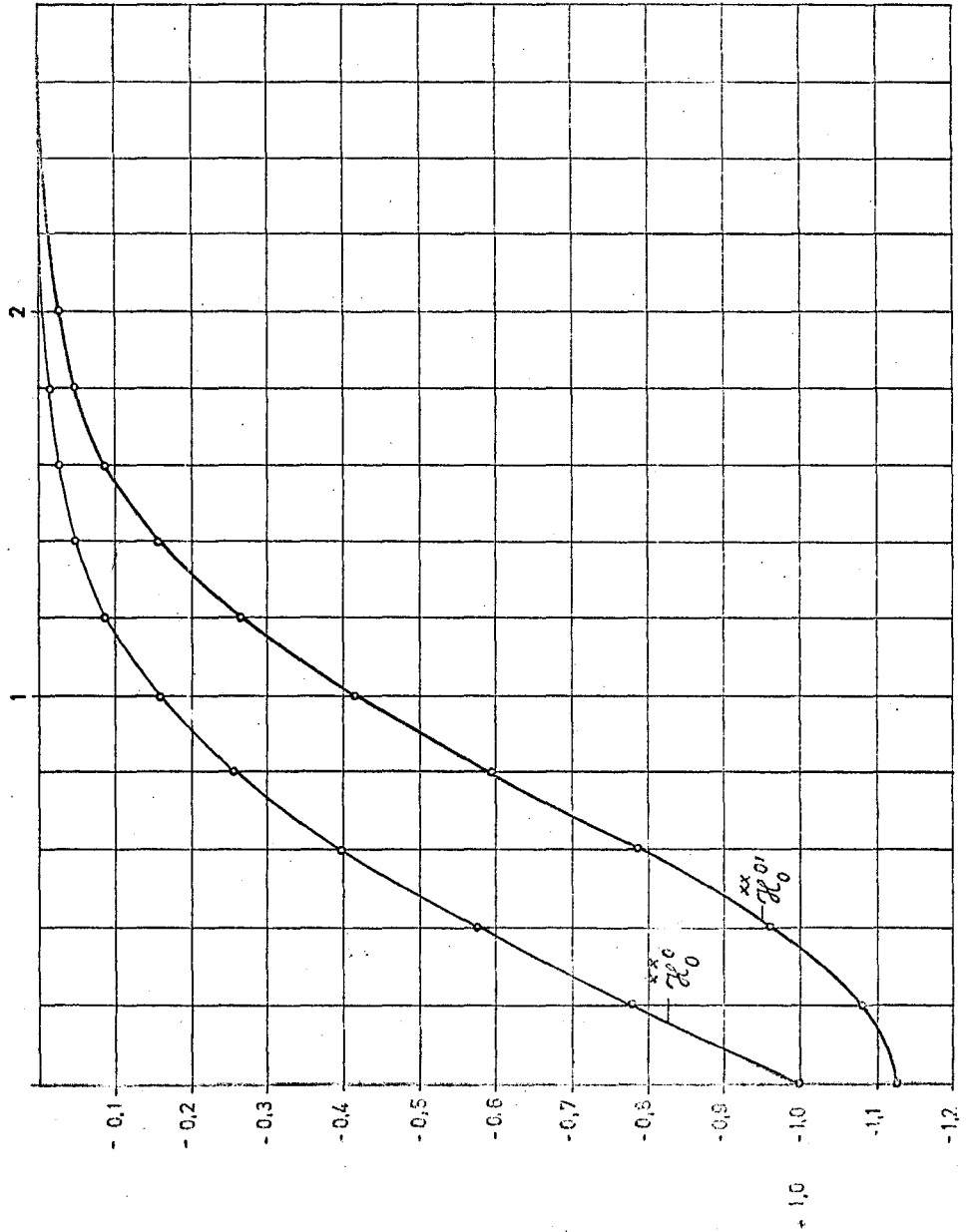


$Pr = 0.72$



$Pr = 10$

2



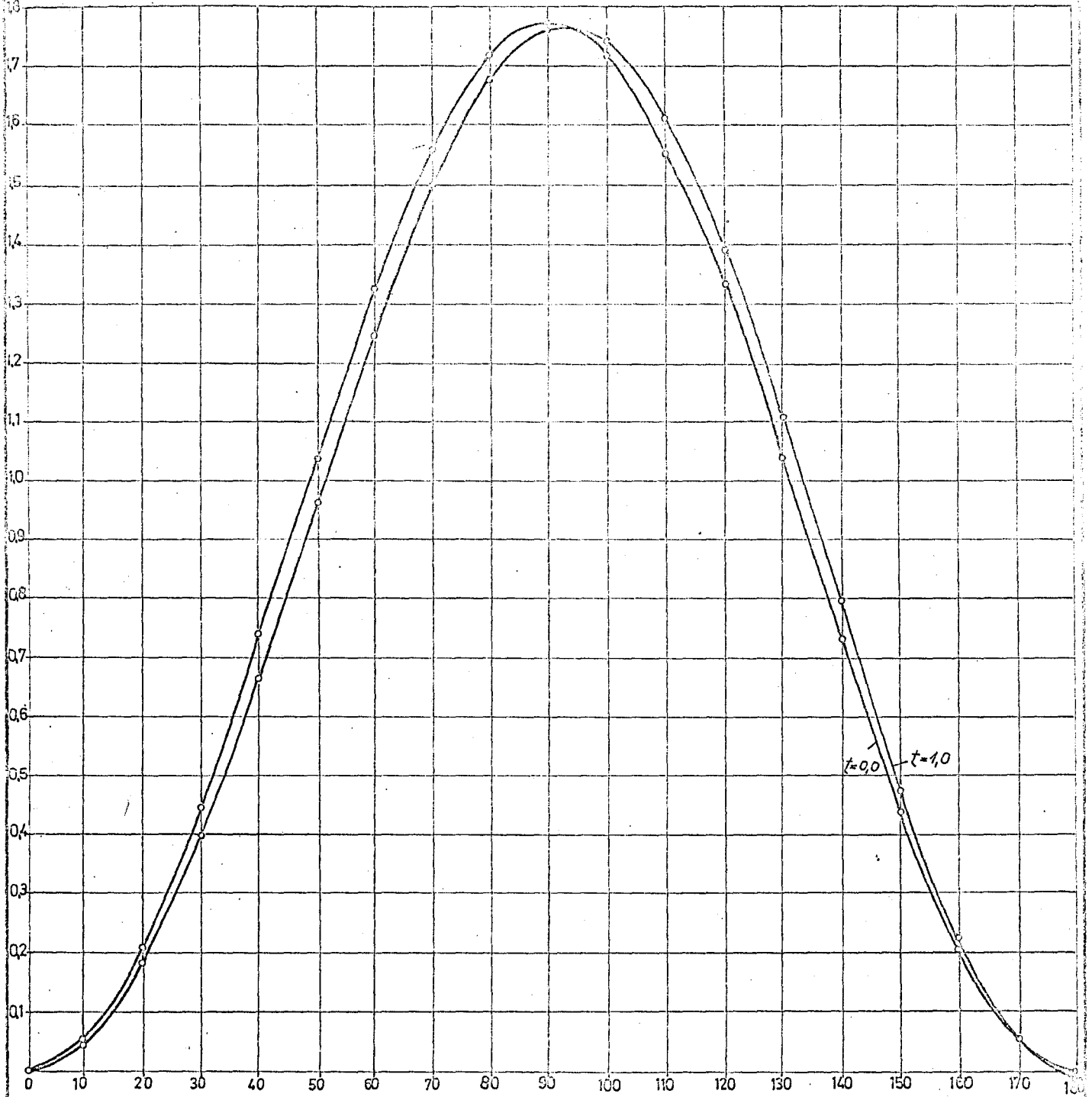
## 9. DIJAGRAMI REZULTATA PRIMERA

SI.1. ZADAT TOPLOTNI TOK

SI.2. ZADATA TEMPERATURA NA ZIDU

$$\frac{T_p - T_\infty}{\Omega_\infty / g c_p} = 4 \sin^2 \bar{x}^* (0,4428 - 0,0474 \bar{t} \cos \bar{x}^*) - 0,02 \bar{t} \sqrt{\bar{t}} (0,2611 - 0,0180 \bar{t} \cos \bar{x}^*)$$

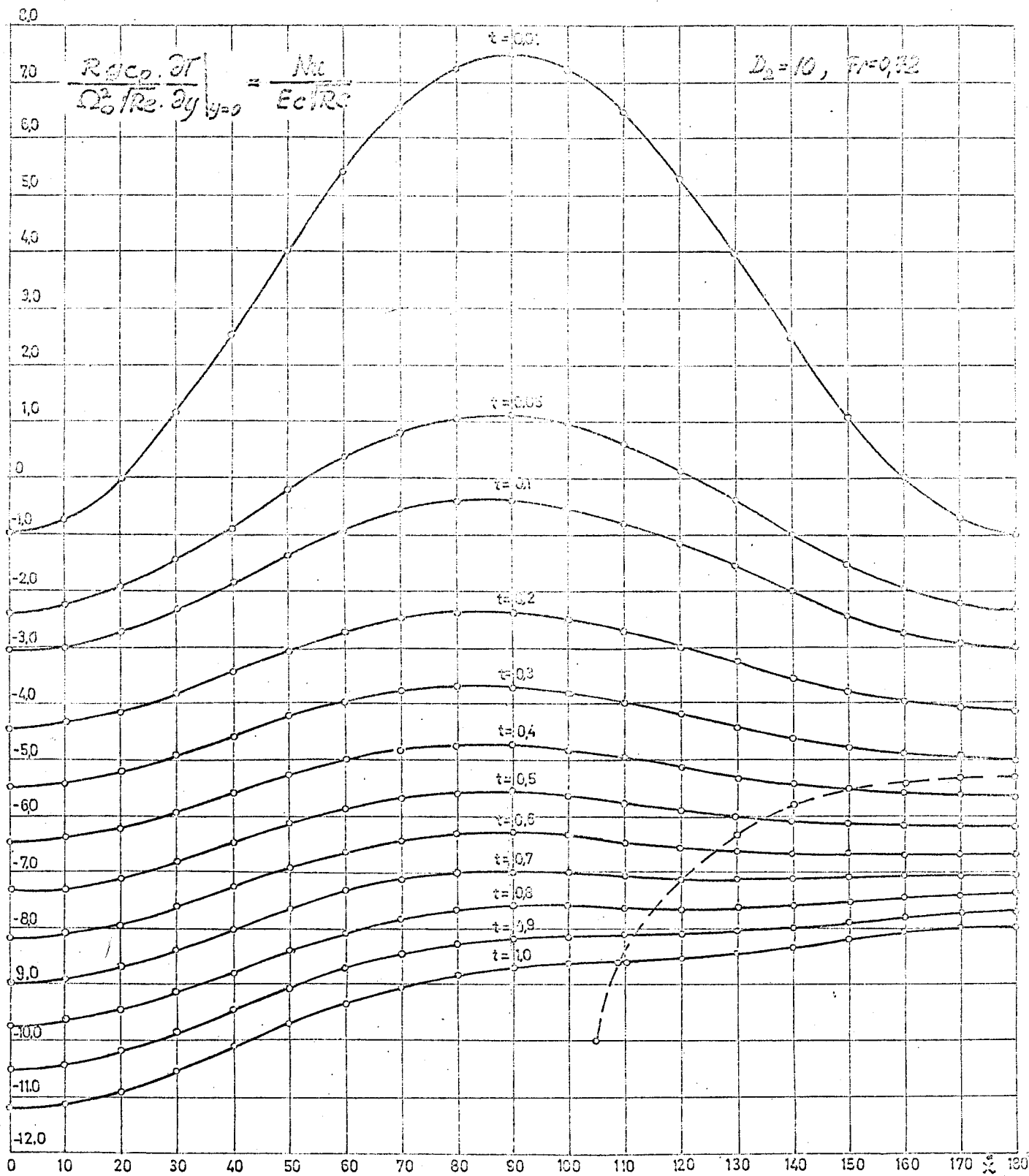
$$\frac{D}{\sqrt{Re}} = -0,01, \quad Pr = 0,72$$



Given heat flux trough the wall.

$$X^* = \frac{X}{R}$$

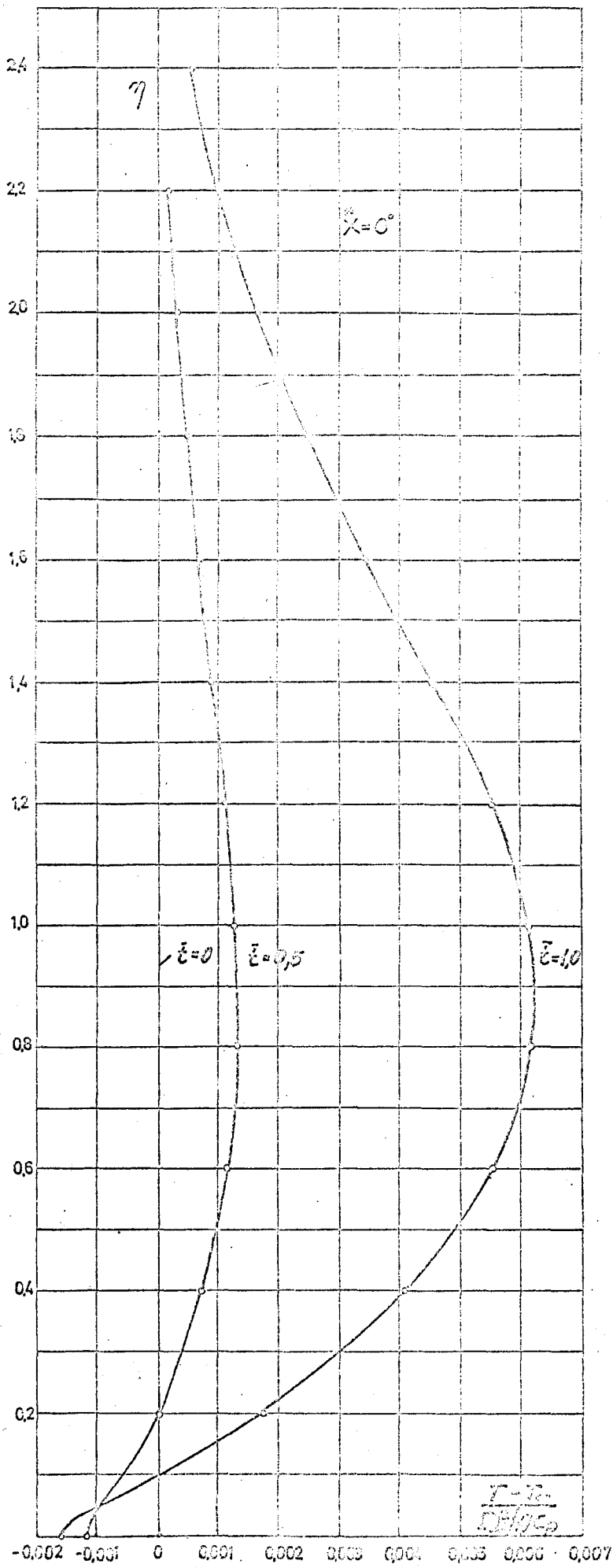
Fig. 1.



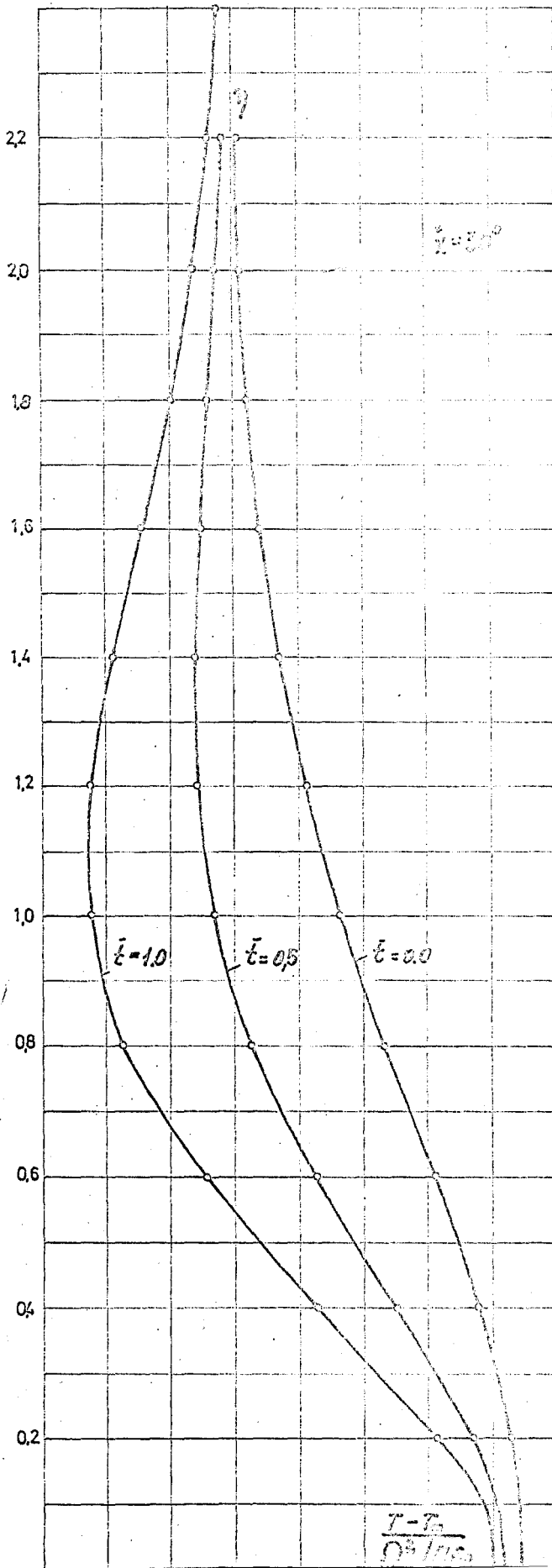
Given temperature on the wall

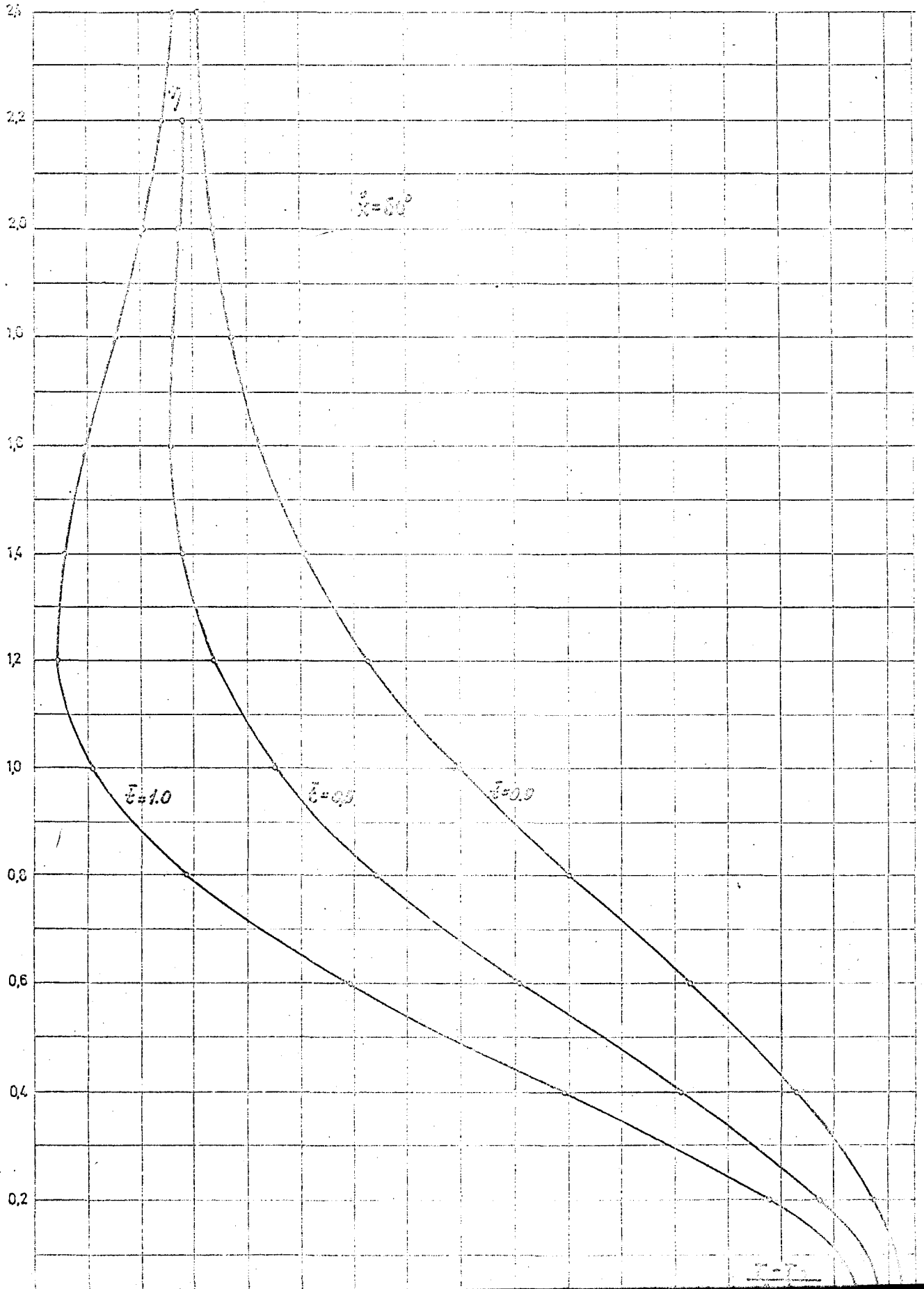
Fig. 2.

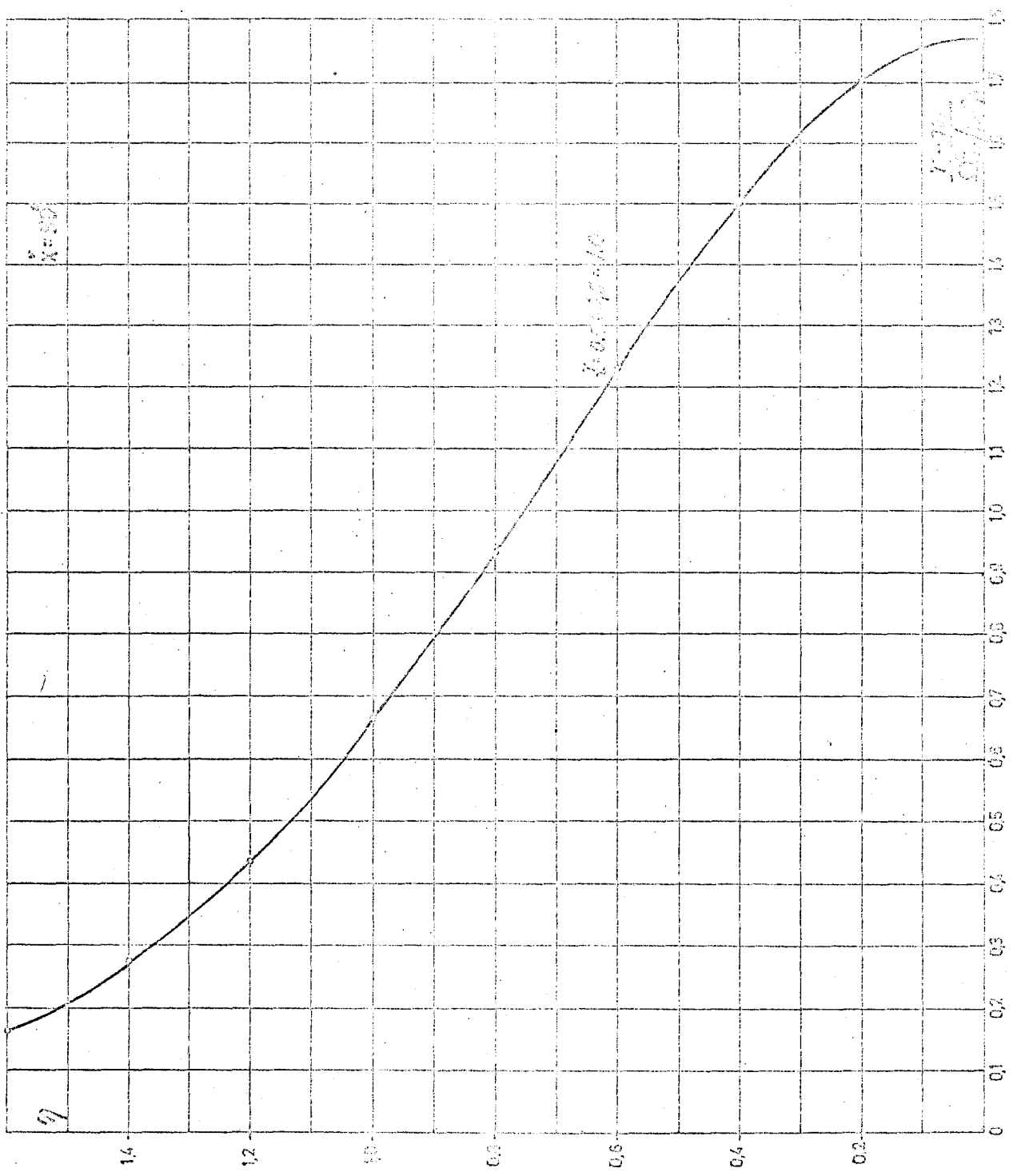
10. TEMPERATURNI PROFIL ZA  
ZADATI TOPLOTNI TOK ( $P_r = 0,72$ )

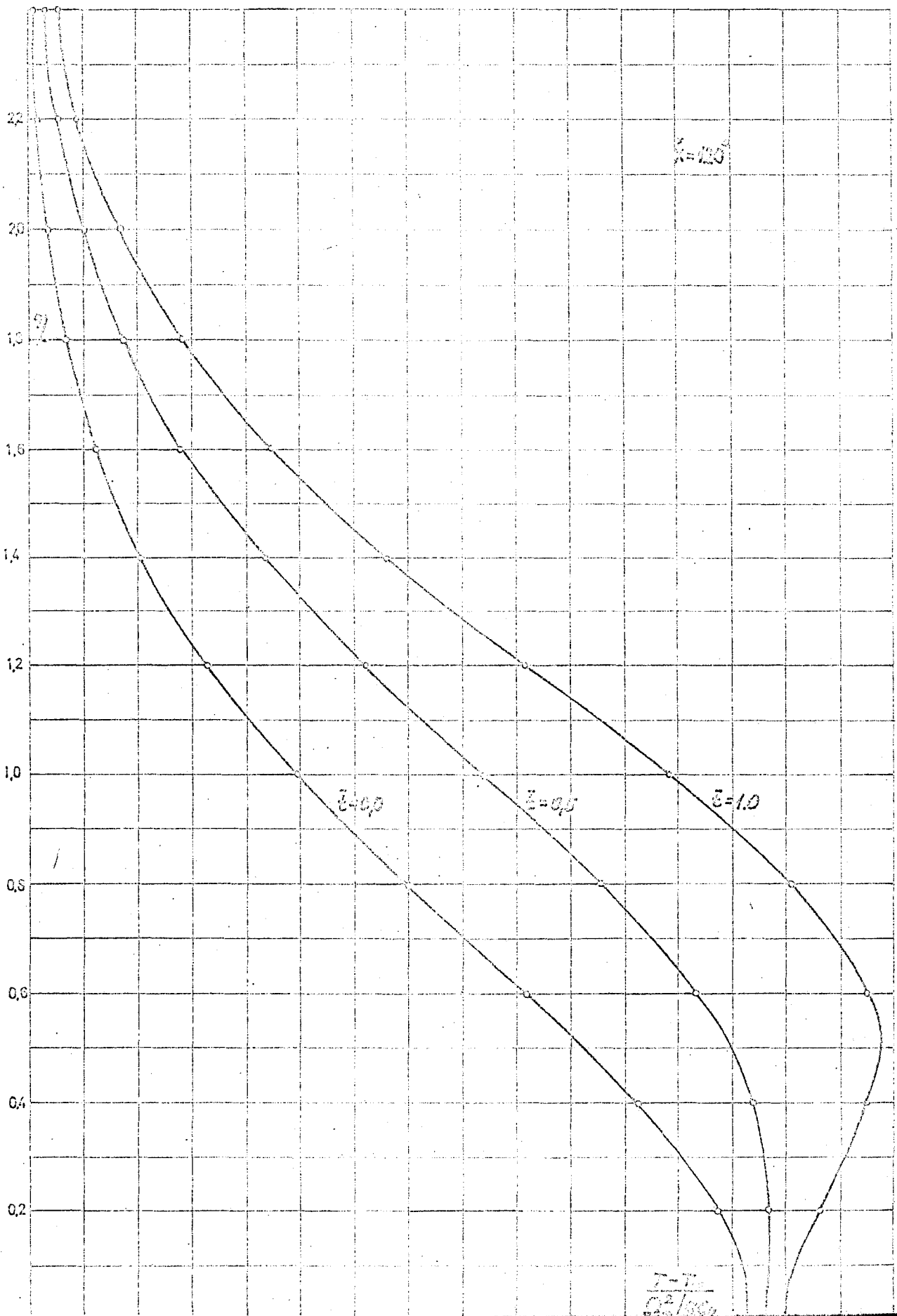


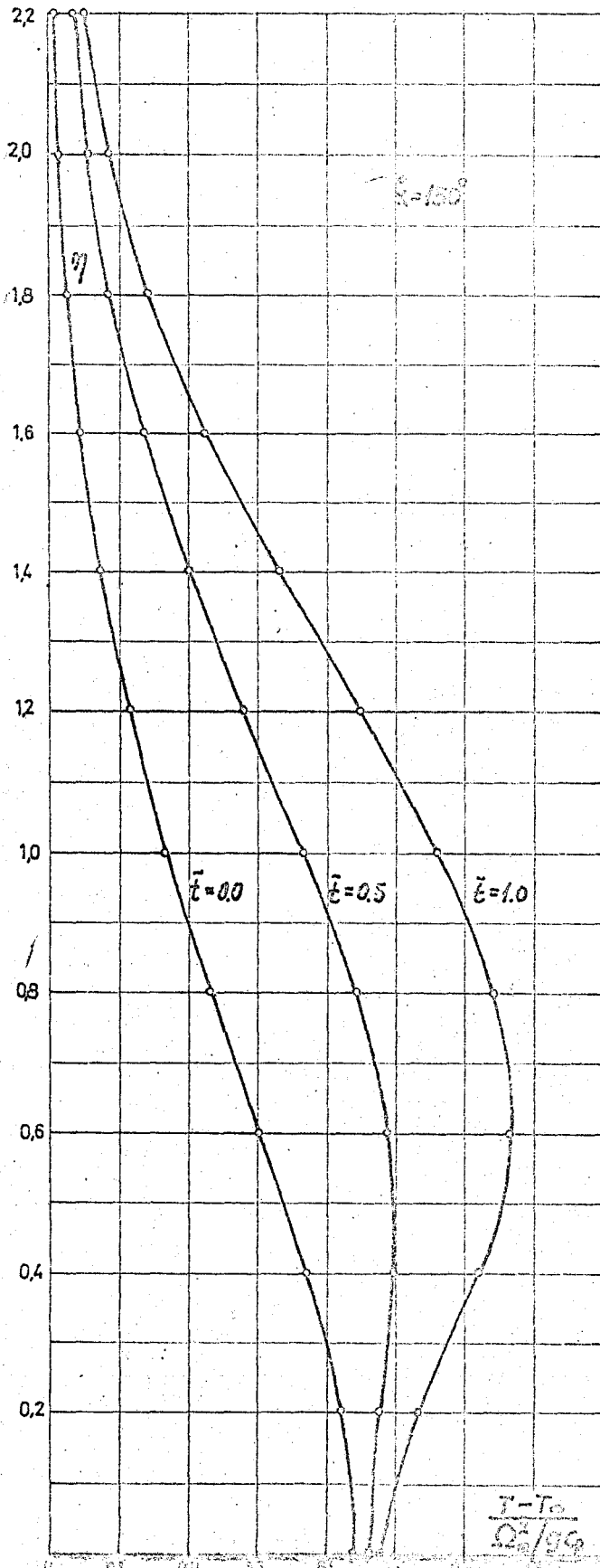


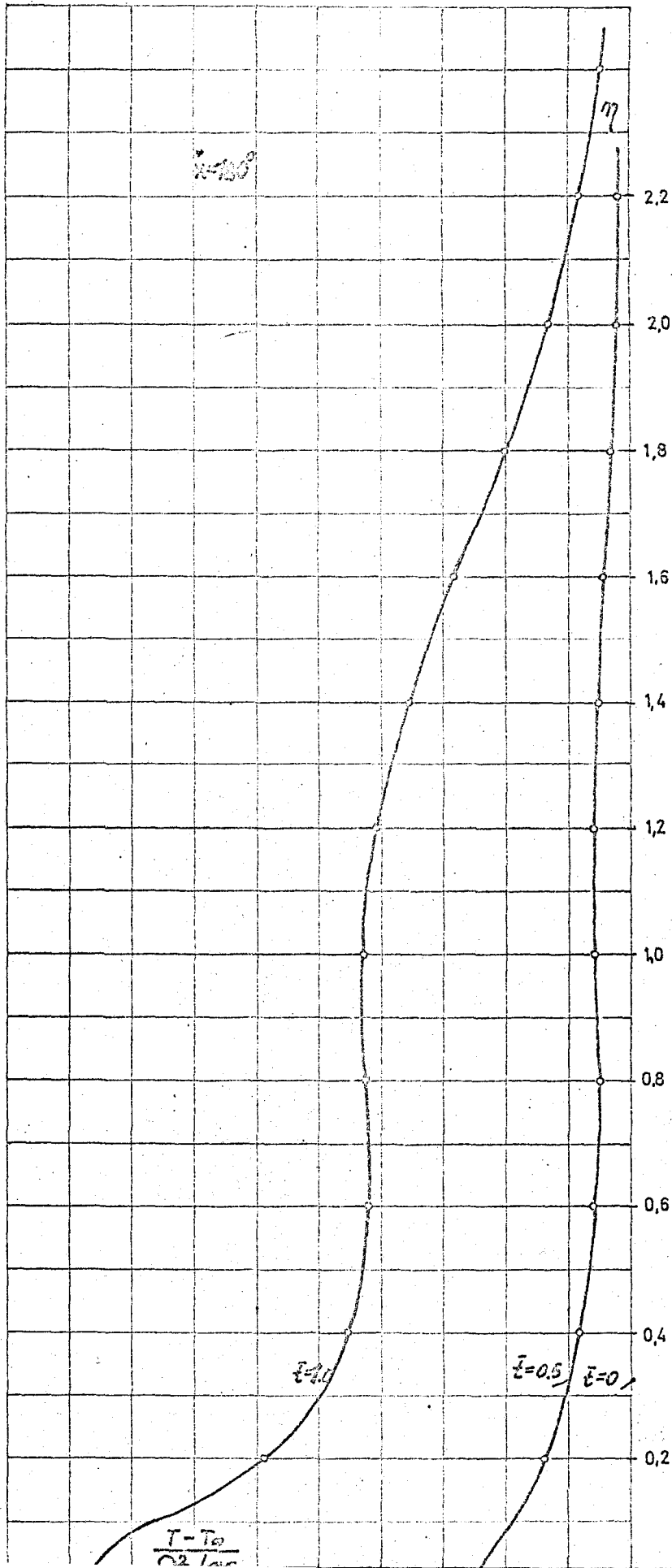




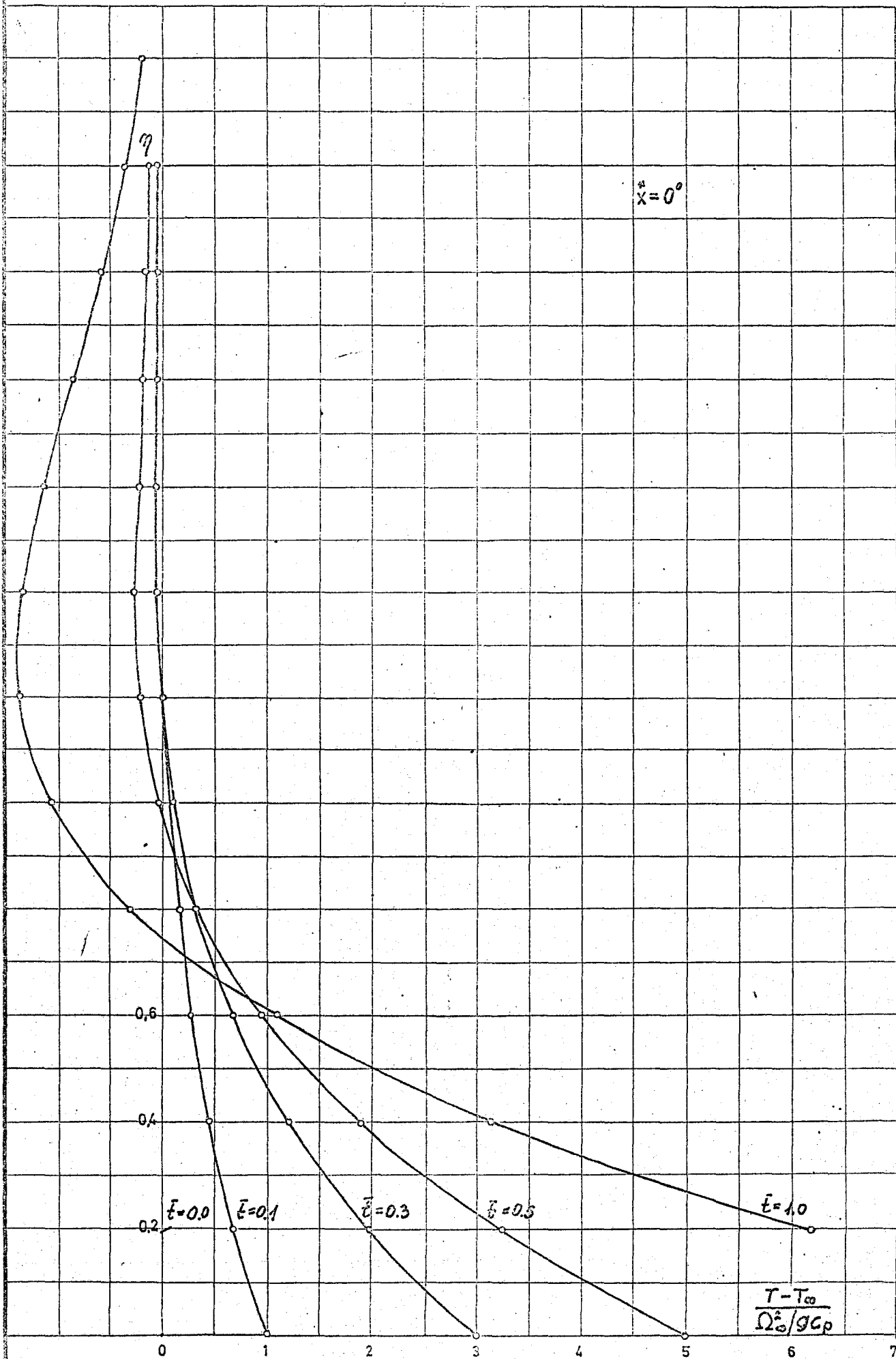




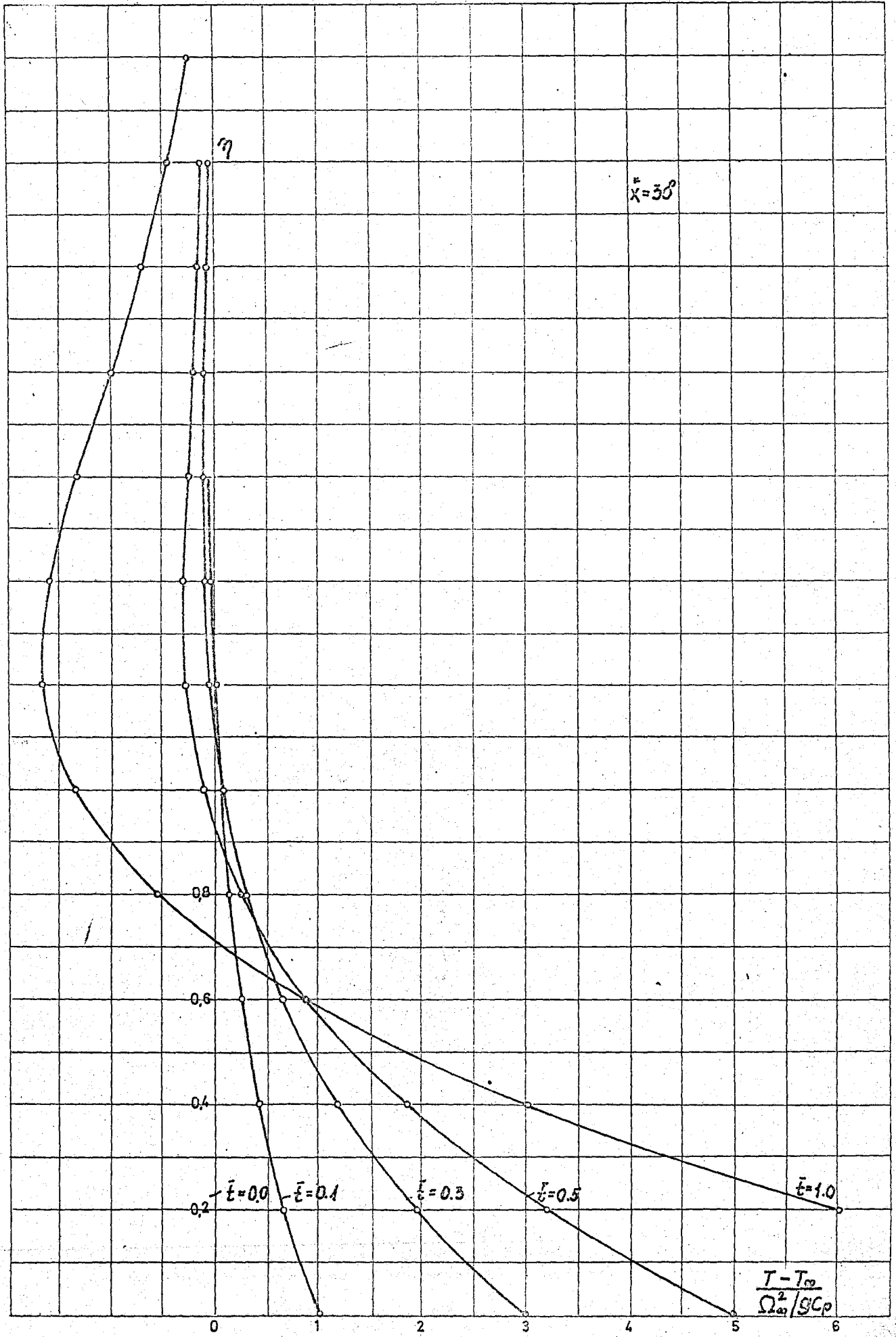


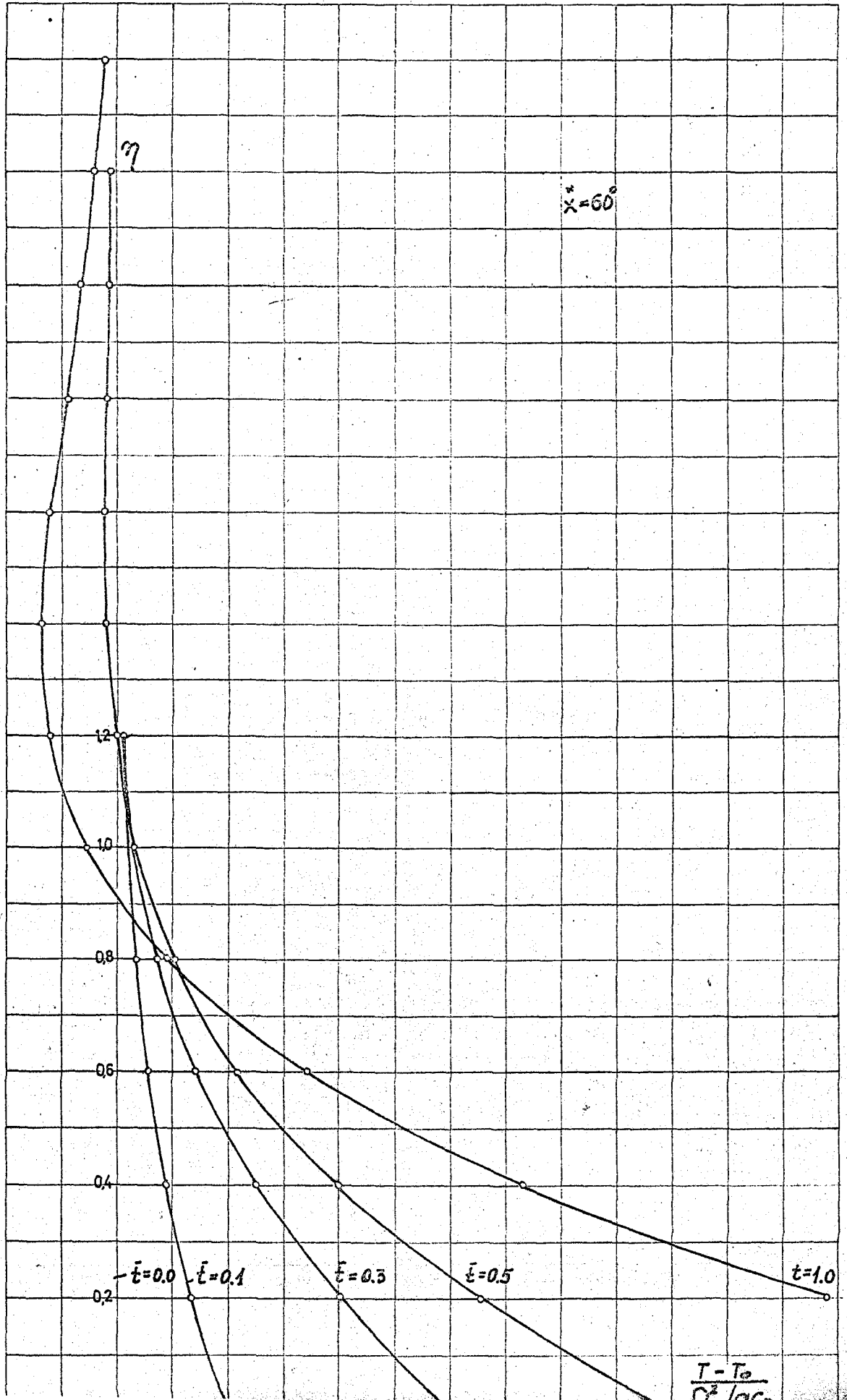


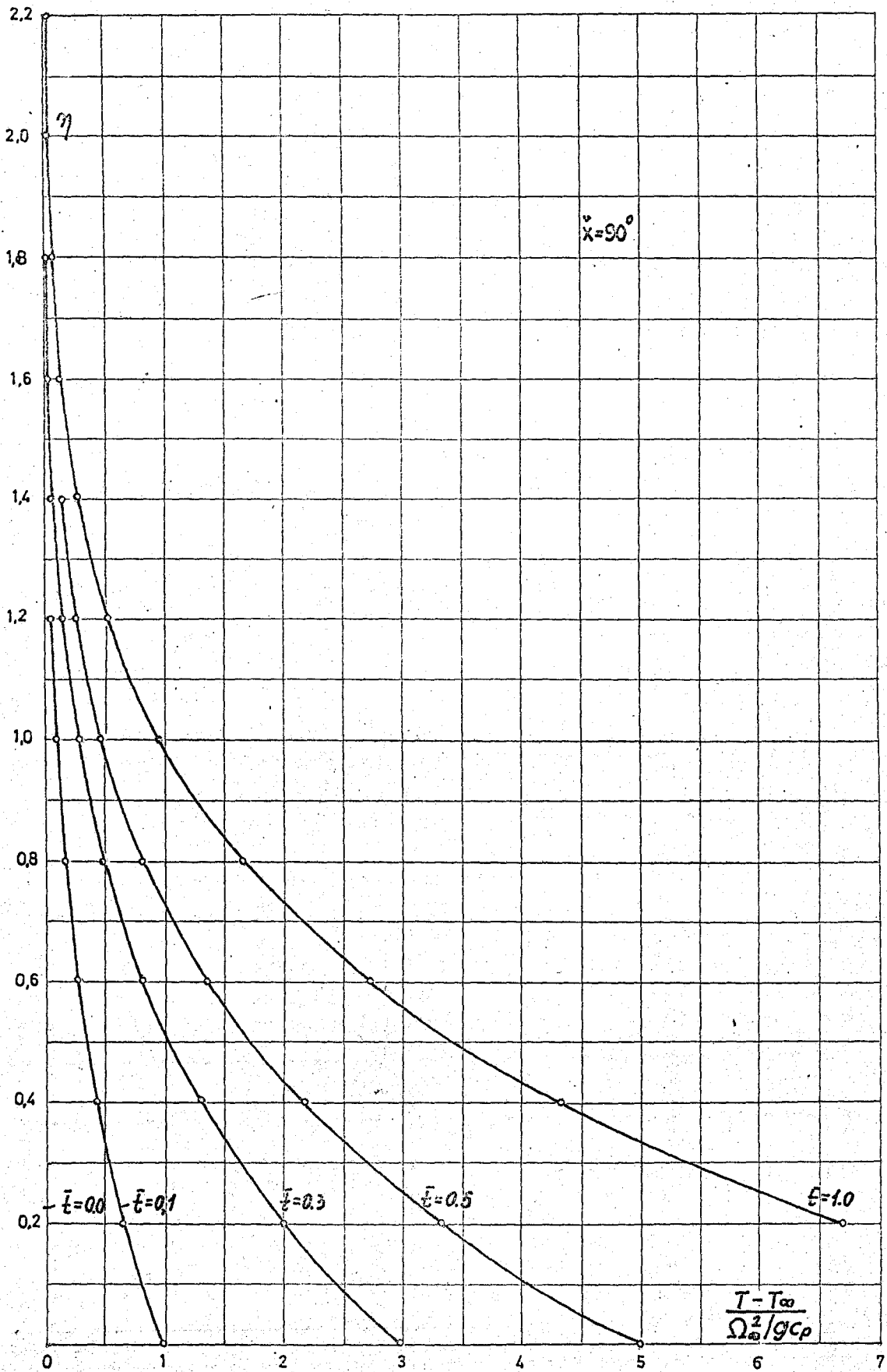
11. TEMPERATURSKI PROFILI ZA ZADATU  
TEMPERATURU NA ZIDU TELA (  $Pr = 0,72$  )

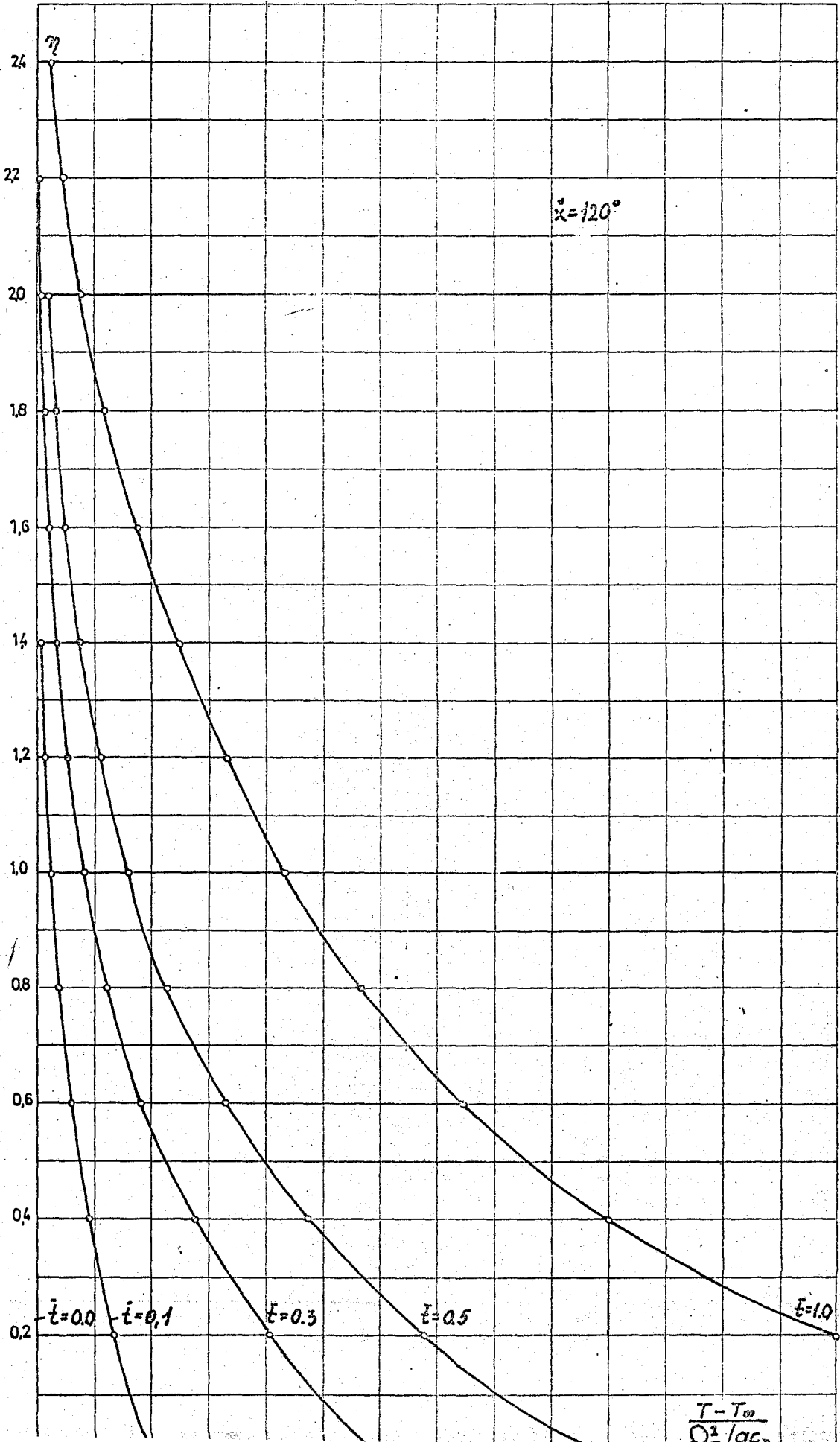


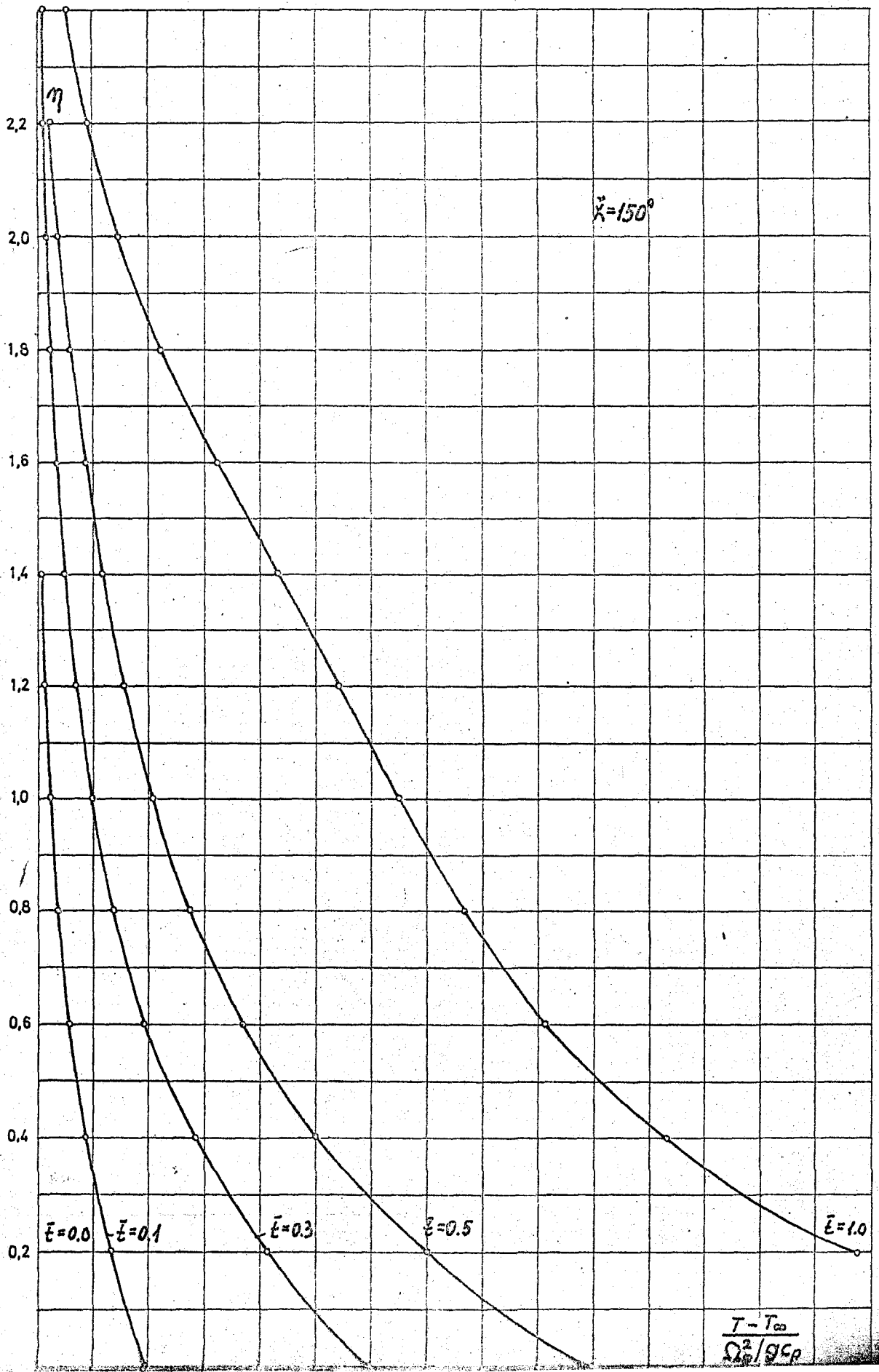


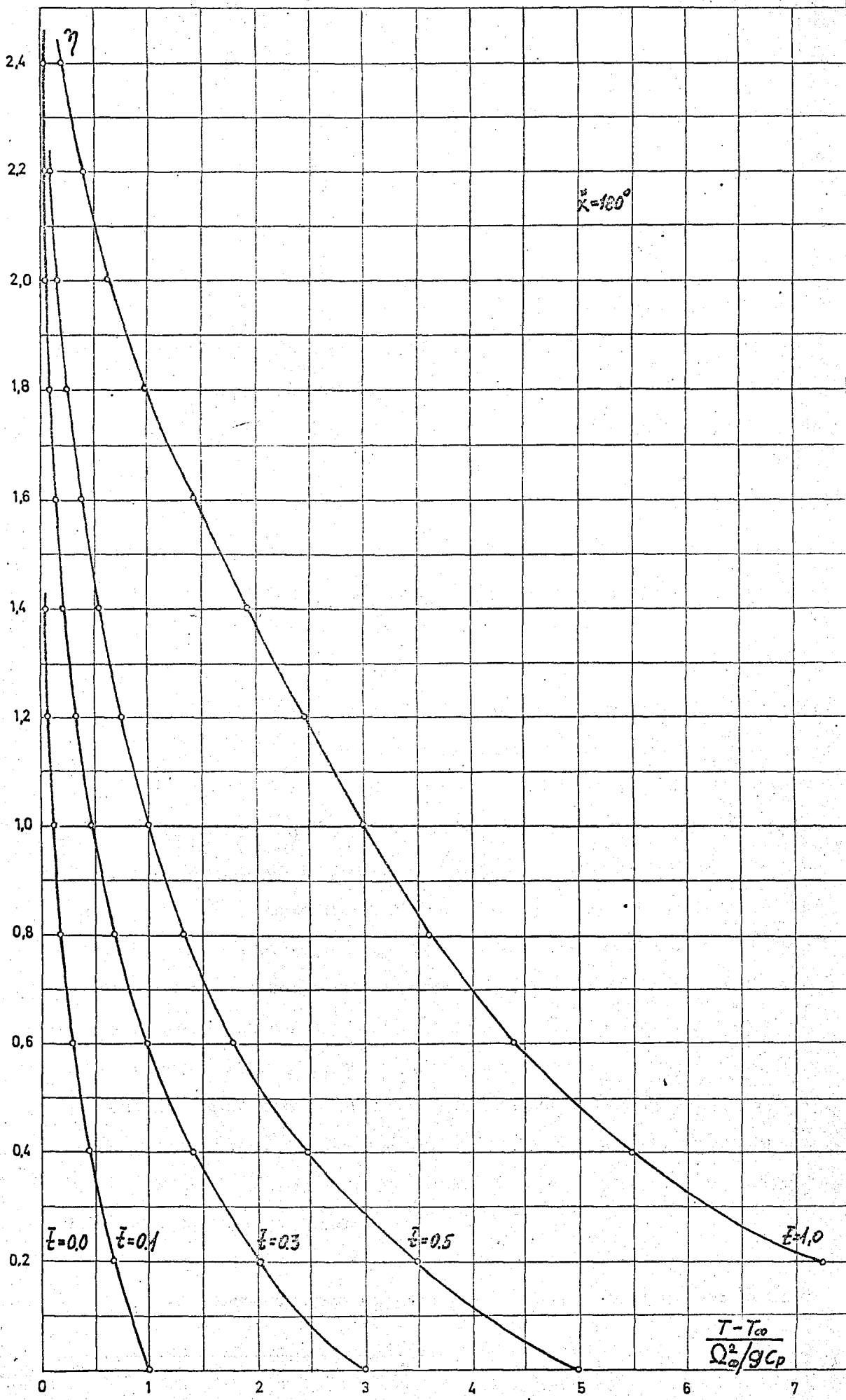












## 12. REZIME TEZE

U ovome radu je data metoda proračuna nestacionarnog temperaturskog graničnog sloja pri laminarnom strujanju nestišljivog fluida. Poznato je da se uopšte pri strujanju nestišljivog fluida i pri relativno malim temperaturskim razlikama pri kojima se gustina fluida i viskoznost mogu smatrati konstantama, brzinski granični sloj može izračunati iz jednačine kretanja i jednačine kontinuiteta nezavisno od temperaturskog, a temperaturski se zatim uz različite granične uslove izračunava korišćenjem već dobijenog brzinskog polja. Smatra se da je ovakav način proračuna temperaturskog graničnog sloja prihvatljiv, ako temperaturske razlike ne prevazilaze  $\sim 50^{\circ} \text{C}$ .

Za proračun temperaturskog graničnog sloja se u ovome radu koristi brzinsko polje dobijeno višeparametarskom metodom M. DJURIĆ-a. Kod te metode se uvođenjem tri skupa parametara, od kojih jedan zavisi samo od podužne koordinate graničnog sloja, a druga dva od vremena, jednačine nestacionarnog laminarnog brzinskog graničnog sloja nestišljivog fluida svode na univerzalan oblik, ako se brzina na spoljašnjoj granici graničnog sloja može predstaviti u vidu proizvoda dveju funkcija, od kojih jedna zavisi samo od podužne koordinate, a druga samo od vremena, što je praktično najčešći slučaj i zato ne predstavlja bitno ograničenje opštosti. Time je stvorena mogućnost da se univerzalna jednačina graničnog sloja reši jedanput za uvek. DJURIĆ je njeno rešenje predstavio u vidu reda po parametrima i pokazao da već takozvana prosta rešenja, koja se dobijaju ako se izvrši linearizacija po parametrima, kod klasičnih primera kretanja cilindra trzajem ili konstantnim ubrzanjem, daju zadovoljavajuće rezultate.

Osnovna teškoća pri proračunu temperaturskog graničnog sloja

leži u raznolikosti graničnih uslova na konturi tela. Kontura tela može biti toplotno izolovana (takozvani temperaturski problem) ili na njoj može biti zadat toplotni fluks, koji se u opštem slučaju menja duž konture, a takođe i sa vremenom. U ovom slučaju je osnovni rezultat proračuna temperaturskog graničnog sloja temperatura na samoj konturi, takozvana sopstvena temperatura tela. Zatim može biti zadata konstantna ili promenljiva temperatura na konturi, pri čemu se traži upravo toplotni fluks između tela i fluida (problem zagrevanja odnosno hladjenja) i eventualno ona tačka na konturi tela u kojoj u nekom određenom trenutku vremena toplotni fluks menja znak i koja prema tome deli konturu u dve oblasti: oblast zagrevanja u kojoj toplota prelazi sa fluida na telo i oblast hladjenja sa obrnutim smerom prelaza toplote. Najzad, praktični značaj ima i takozvani mešoviti problem, kod koga toplotni fluks zavisi od temperature konture. U literaturi se najčešće mogu naći rešenja termometarskog problema i problema zagrevanja, odnosno hladjenja pri konstantnoj temperaturi tela i to pri zanemarenoj toploti koja se u graničnom sloju razvija usled trenja. Olakšavajuću okolnost pri proračunu temperaturskog graničnog sloja predstavlja činjenica da je energijska jednačina, iz koje se on proračunava, linearna i da se prema tome može koristiti metoda superpozicije rešenja, pomoću koje se mogu kombinovati neka prostija rešenja ove jednačine da bi se dobila druga rešenja koja odgovaraju složenijim graničnim uslovima.

U ovome radu su data rešenja problema pri zadatom toplotnom fluksu na konturi i pri zadatoj temperaturi konture uz uzimanje u obzir toplotu koja se u graničnom sloju oslobadja usled trenja, pri čemu se termometarski problem i problem zagrevanja odnosno hladjenja pri konstantnoj temperaturi tela dobijaju kao specijalni slučajevi. Oni ne sadrže nikakve nove funkcije, pa se zbog toga njihovo rešenje dobija pomoću istih skupova parametara kao pri proračunu brzinskog graničnog sloja. Kod zadatog toplotnog fluksa



ili promenljive temperature tela, međutim, bilo je potrebno uvesti nove skupove parametara u cilju da se dobiju potpuno univerzalne jednačine graničnog sloja. Tom prilikom je pretpostavljeno da se zadati toplotni fluks s jedne strane, odnosno razlika promenljive temperature tela i konstantne temperature na spoljašnjoj granici graničnog sloja s druge strane, mogu, slično kao što je to bio slučaj sa brzinom na spoljašnjoj granici graničnog sloja, predstaviti u vidu proizvoda dveju funkcija, od kojih jedna zavisi samo od podužne koordinate graničnog sloja, a druga samo od vremena. Po našem mišljenju, ova pretpostavka praktično ne predstavlja ograničenje opštosti posmatranja. U oba slučaja uvode se po dva nova skupa parametara, jedan koji zavisi samo od podužne koordinate i drugi, koji zavisi samo od vremena, pomoću kojih se jednačina temperaturskog graničnog sloja dovodi do potpuno univerzalnog oblika, čime je stvorena mogućnost njene numeričke integracije, jedan put za uvek.

Izračunato je nekoliko karakterističnih primera. Pri numeričkoj integraciji dobijenih univerzalnih jednačina temperaturskog graničnog sloja, izračunata su samo tzv. prosta rešenja, pošto ista daju sasvim zadovoljavajuće rezultate.

### 13. LITERATURA

1. PRANDTL, L., Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Proceedings 3 rd. Inter.Math.Congr., Heidelberg 1904.
2. BLASIUS, H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, . Z.Math.u.Phys. 56, 1908.
3. NIKURADSE, J., Laminare Reibungsschichten an der längsangeströmten Platte. Monograph, Berlin 1942.
4. TÖPFER, C., Bemerkungen zu dem Aufsatz von H. Blasius "Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung". Z.Math.u.Phys. 60, 1912.
5. HOWARTH, L., On the solution of the laminar boundary layer equation. Proc. Roy. Soc. London, A 164, 1938.
6. FALKNER, V. M. and SKAN, S. W., Some approximate solutions of the boundary-layer equations. ARC RM 1314. 1930.
7. HARTREE, D. R., On a equation occuring in Falkner and Skan 's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc. Camb. Phil. Soc. 33 Part II 1937.
8. GOLDSTEIN, S., A note on the boundary layer equation , Proc. Camb. Phil. Soc. 35, 1939.
9. MANGLER, W., Die "ähnlichen" Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen. ZAMM 23 1943.

10. HIEMENZ, K., Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. Thesis Göttingen 1911.
11. HOWARTH, L., On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of cylinder in a stream. ARC RM 1632, 1935.
12. FRÖSSLING, N., Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotations-symmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds. Univ. Arsskr. N.F. Avd. 2, 36, No. 4, 1940.
13. ULRICH, A., Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder, Arch. d. Math. 2, 1949.
14. TIFFORD, A. N., Heat transfer and frictional effects in laminar boundary layers, WADC Tech. Rep. 1954.
15. TANI, I., On the solution of the laminar boundary layer equations. Jour. Phys. Soc. Japan 4, 1949.
16. GÖRTLER, H., A new series for the calculation of steady laminar boundary layer flow. ZAMM 32, 1952.
17. POHLHAUSEN, K., Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichungen der Grenzschicht. ZAMM 1, 1921.
18. KÁRMÁN von Th., Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM 1, 1921.
19. MANGLER, W., Das Impulsverfahren zur Berechnung der laminaren Reibungsschicht. ZAMM 24, 1944.

20. SCHUBAUER, G.B., Airflow in a separating laminar boundary layer. NACA Rep. No. 527, 1935.
21. CURLE, N., Accurate solutions of the laminar boundary layer equation for flows having stagnation point and separation. Rep. Mem. Aer. Res. Coun. Lond. No. 3164, 1958.
22. TIMMAN, R., A one-parameter method for the calculation of laminar boundary layers. Rep. Trans. nat. Luchtvl. Lab. Amsterdam, 1949.
23. WALZ, A, Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht. Ber. Lilienthal Ges. Luft., 1941.
24. THWAITES, B., Approximate calculation of the laminar boundary layer. Aeronaut. Quart. 1., 1949.
25. STRATFORD, B. S., Flow in the laminar boundary layer near separation. Rep. Mem. Aero. Res. Coun. Lond. No. 3002, 1954.
26. CURLE, N., The laminar boundary layer equations. Oxford, 1962.
27. LOICJANSKII, L.G., (Translated as "Approximate method of integration of laminar boundary layers in incompressible fluid". Prikl. Mat. Meh. XIII, 1949.
28. ROSENHEAD L., Laminar Boundary Layers, Oxford, 1963.
29. GOLDSTEIN, S. and ROSENHEAD L., Boundary layer growth. Proc. Camb. Phil. Soc. 32, 1936.
30. GÖRTLER, H., Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Arch. d. Math. 4, 1948.

31. WATSON, E. J., Boundary layer growth.  
Proc. Roy. Soc. A 231 1955.
32. MOORE, F. K. Unsteady, laminar boundary layer flow.  
NACA TN 2471 (1951).
33. LIN, C. C., Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow. Proc. 9th Inter. Congress Appl. Mech. Brussels, 1957.
34. LIGHTHILL, M. J., The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity.  
Proc. Roy. Soc. A 224, 1954.
35. SCHLICHTING, H., Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. Phys. Z. 33, 1932.
36. ROZIN, L. A , An approximation method for the integration of the equations of a nonstationary laminar boundary layer in an incompressible fluid. NASL Techn. Transl. 22, 1960. (original paper appeared in P.M.M.I. 21, V. 5, 1957).
37. SCHUH, H., Calculation of unsteady boundary layers in two-dimensional laminar flow. ZFW 1, 1953.
38. DJURIĆ, M. DJ., A method for solution of unsteady incompressible laminar boundary layers. Publ. Inst. Math. T 6 (20), 1966, Beograd.
39. YANG, K. T., Unsteady laminar boundary layers in an incompressible stagnation flow. J. Appl. Mech. 25, 1958.

40. GLAUERT, M. B., The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders. JFM 1, 1956.
41. ROTT, N., Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point. Quart. Appl. Math. 13, 1956.
42. GOSH, A., Contribution a l'étude de la couche limite laminaire instationnaire. Publ. Sc. et Tech. d. Min. l'Air No. 381, 1961.
43. GIBELLATO, S., Strato limite attorno ad una lastra piana investita da fluido incompressibile dotato di una velocita che e somma di una parte costante e di una parte alternata. Atti d. Accademia d. Scienze di Torino 89, (1954 - 1955) and 90 (1955 - 1956).
44. HASSAN, H. A., On unsteady laminar boundary layers, JFM 9, 1960.
45. TOLLMIEH, W., Die zeitliche Entwicklung der laminaren Grenzschicht am rotierenden Zylinder. Diss. Göttingen 1924.
46. HOWARTH, L., Note on the development of circulation round a thin elliptic cylinder. Proc. Camb. Phil. Soc. 31, 1935.
47. SPARROW, E. M., and GREGG, J. L., Flow about an unsteady rotating disc. JAS 27 1960.
48. ILLINGWORTH, C. R., Boundary layer growth on a spinning body. Phil. Mag. 45, 1954.
49. WADHWA, Y. D., Boundary layer growth on a spinning body, accelerated motion. Phil. Mag., 3, 1958.

50. DJURIĆ, M. DJ., One-parameter method for calculation of non-steady laminar boundary-layers. Publ. Inst. Math. T. 5 (19), 1965, Beograd.
51. LOJČJANSKII, L. G., Univerzalne uravnenija i parametri-  
českie približenija v teoriji laminarnogo pograničnogo sloja.  
PMM T. 29 (1), 1965.
52. ANDJELIĆ, T., Osnovi mehanike neprekidnih sredina.  
Naučna knjiga, Beograd 1950.
53. HORI EI - ICHI, Unsteady boundary layers, Bulletin of  
JSME, Vol. 4. and 5. No. 16, 17, 19, 1961 and 1962.
54. VORONJEC, K., Mehanika fluida, Naučna knjiga, Beograd.
55. LOJČJANSKII, L. G., Laminarni pogranični sloi. Moskva 1962.
56. MOORE, F. K., Theory of Laminar Flows, Princenton, 1964.
57. TRUCKENBRODT, E., Strömungsmechanik, Springer, 1968.
58. WALZ, A., Strömungs-und Temperaturgrenzschichten.  
G. Braun, Karlsruhe, 1966.
59. SCHLICHTING, H., Boundary-layer theory.  
MC Graw-Hill, New-York, 1968.
60. DJURIĆ, M. DJ., On the universal form of unsteady incompressible boundary-layer equation and its solving.  
Publ. Inst. Math. T. 9. (23), 1969.
61. GERSTEN, K., Unsteady laminar velocity and thermal boundary layers for wedge type flows with oscillatory disturbances, Brown University, Providence, 1969.

62. IMAI ISAO, On the heat transfer to constant-property laminar boundary layer with power function freestream velocity and wall-temperature distributions, *Quart. Appl. Mech.* 16, 1958.
63. DAVIES, D. R. and BOURNE, D. E., On the calculation of heat and mass transfer in laminar and turbulent boundary layers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Dec., 1956.
64. CURLE, N., Heat transfer and laminar boundary-layer separation in steady compressible flow past a wall with non-uniform temperature. *R.M. No. 3179*, Dec. 1958.
65. CURLE, N., Heat transfer through a constant property laminar boundary layer. *R & M. 3300*, Feb., 1961.
66. LIEPMANN, H. W., A simple derivation of Lighthill's heat transfer formula, *J. Fluid Mech.* Vol. 3, 1958.
67. FAGE, A. and FALKNER V.M., On the relation between heat transfer and surface friction for laminar flow. *R. & M. 1408*, 1931.
68. SALJNIKOV, V. and DJORDJEVIĆ, VI., Universalisierung der Gleichung von Temperaturgrenzschichtproblem, *ZAMM*, Bd. 48, No. 8, 1968.
69. DJURIĆ, M.DJ., One-parameter solution of thermal boundary-layer past a flat plate. *Publ. Inst. Math. T. 7 (21)*, 1967, Beograd.
70. DJURIĆ, M.DJ., On the method for solution of unsteady thermal boundary-layers in case of two-dimensional low-speed flows.



Proc. Camb. Phil. Soc. (1968), 64.

71. DJURIĆ, M.DJ., On the transformation of thermal boundary-layer equations, Publ. Inst. Math. T. 9 (23), 1969, Beograd.
72. DJORDJEVIĆ, V.D., Laminar boundary layer on slender bodies of revolution, Publ. Inst. Math. T. (22), 1968, Beograd.
73. DJORDJEVIĆ, V.D., Übertragung der Görtlerschen Reihe auf die Berechnung von Temperaturgrenzschichten an Rotationskörpern. Publ. Inst. Math. T. 5 (19), 1965, Beograd.
74. DJORDJEVIĆ, V.D., Opredelenie nestacionarnogo temperaturnogo polja ploskom obtekanii kontura proizvolnoj formi. Publ. Inst. Math. T. 5 (19), 1965, Beograd.
75. SCHMIDT, E. and WENNER, K., Wärmeabgabe über den Umfang eines angeblasenen geheizten Zylindres.
76. SARMA, G.N., Unified theory for the solutions of the unsteady thermal boundary-layer equation. Proc. Camb. Phil. Soc. (1965), 61.
77. WRAGE, E., Übertragung der Görtler'schen Reihe auf die Berechnung von Temperaturgrenzschichten (Teil I). DVL, Rep. No. 81, 1958.
78. POHLHAUSEN, E., Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. ZAMM 1, 115, (1921).
79. SQUIRE, H.B., Note on the effect of variable temperature on heat transfer, ARC RM 2753 (1953).

80. Lighthill, M. J., Contributions to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. London, A 202, (1950).
81. Gibellato, S., Strato limite termico attorno a una lastra piana investita da una corrente lievemente pulsante di fluido incompressibile. Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 91 (1956 - 57).
82. Kestin, J. et al., On boundary layers associated with oscillating streams. Appl. sci. Res. A. Vol. 10, 1960.
83. Sparrow, E.M., The thermal boundary layer on a non-isothermal surface with non-uniform free stream velocity. JMF 4, 1958.
84. Djordjević, V.D., Nestacionarni temperaturski granični sloj. "Tehnika" god. XXII, 1967, No. 2, Beograd.
85. Simonović, V., Reduction of boundary problems of ordinary differential equations to the Cauchy-problem.
86. Hošek, J., Strouhalovo číslo, jeho fyzikální smysl a význam. Strojnicky časopis XIX, č.5, 1968. Bratislava.
87. Saljnikov, V.N - Oka, S.N., Sur une forme possible des equations universelles de la couche limite laminaire. IZV. AN SSSR, Meh. Žid. i gaza, No. 1, 1969.
88. Saljnikov, V.N., Generalisation de l'équation universelle de la couche limite de Lojčanskii.
89. Saljnikov, V.N., Sur une forme possible d'équations

universelle de la couche limite instationnaire.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272 (1971).

90. SALJNIKOV, V.N. - DJUKIĆ, DJ., L'universalisation des equations de la couche limite laminaire instationnaire. Symposium de l'UTAM sur les couches limites instationnaires, Université Laval, Quebec, 1971.
91. DJUKIĆ, DJ.S., Metoda za rešavanje ravanskih nestacionarnih laminarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti. Mat.Ves. 7 (22), 1970, str. 349 - 369.
92. DJUKIĆ, DJ.S., Univerzalne jednačine nestacionarnih graničnih slojeva nestišljive tečnosti pri proizvoljnoj brzini spoljašnjeg strujanja. Mat.Ves. 8 (23), 1971, str. 61 - 71.
93. AŠKOVIĆ, R., Tridimenzijski periodični granični sloj na telu koje se harmonijski kreće u spoljašnjoj struji. Mat.Ves. 6 (21) Sv.2, 1969, str. 175 - 182.

I BRZINSKO POLJE

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U \partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

sa graničnim uslovima

$$y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow U(x, t)$$

- Brzina spoljašnjeg potencijalnog strujanja

$$U(x, t) = V(x) \Omega(t)$$

$$t = t, \quad \xi = x, \quad \eta = A \frac{y}{\delta_p^*(t)}, \quad \psi = \frac{U(x, t) \delta_p^*(t)}{A} \mathcal{F}(\xi, \eta)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{U \delta_p^*}{A} \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = \psi_y, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta_y = \frac{A}{\delta_p^*}$$

$$u = U(x, t) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} = V \Omega \mathcal{F}_\eta$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{V' \Omega \delta_p^*}{A} \mathcal{F} - \frac{V \Omega \delta_p^*(t)}{A} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} + U \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} - \frac{\eta}{\delta_p^*} U \delta_p^{*'} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} + U \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} \cdot \frac{A}{\delta_p^*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{A^2 U}{\delta_p^{*3}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^3}$$

$$V \Omega' \mathcal{F}_\eta - \frac{\eta \cdot \delta_p^{*'}}{\delta_p^*} V \Omega \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \eta^2} + V V' \Omega^2 \mathcal{F}_\eta^2 + V^2 \Omega^2 \mathcal{F}_\eta (\mathcal{F}_{\xi \eta} + \mathcal{F}_{\eta \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) -$$

$$- V V' \Omega^2 \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta \eta} - V^2 \Omega^2 \mathcal{F}_{\eta \eta} (\mathcal{F}_\xi + \mathcal{F}_{\eta \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}) = V \Omega' + V V' \Omega^2 + \frac{\nu A^2 V \Omega}{\delta_p^{*2}} \mathcal{F}_{\eta \eta \eta}$$

$$\times \frac{\delta_p^{*2}}{\nu A^2 V \Omega}$$

$$\mathcal{F}_{\eta\eta\eta} + \frac{V'\Omega\delta_p^2}{\nu A^2} \mathcal{F}\mathcal{F}_{\eta\eta} + \frac{\eta\delta_p^x\delta_p^{\prime 1}}{\nu A^2} \mathcal{F}_{\eta\eta} + \frac{V'\Omega\delta_p^2}{\nu A^2} (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2) + \frac{\Omega'\delta_p^2}{\nu A^2\Omega} (1 - \mathcal{F}_{\eta}) = \frac{V\Omega\delta_p^2}{\nu A^2} (\mathcal{F}_{\eta}\mathcal{F}_{\xi\eta} - \mathcal{F}_{\xi}\mathcal{F}_{\eta\eta})$$

$$\psi = \frac{U(x,t)\delta_p(t)}{A} \mathcal{F} = \frac{V(x)\Omega(t)\delta_p(t)}{A} \mathcal{F}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}),$$

$$f_k = V^{k-1} \frac{d^k V}{dx^k} = V^{k-1} V^{(k)}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x} = (f_k)_x = (k-1)V^{k-2} \frac{dV}{dx} \frac{d^k V}{dx^k} + V^{k-1} \frac{d^{(k+1)} V}{dx^{(k+1)}}$$

$$= (k-1)V^{k-2} \frac{dV}{dx} \frac{d^k V}{dx^k} + \frac{1}{V} V^k \frac{d^{(k+1)}}{dx^{(k+1)}}$$

$$f_k = (k-1) \frac{1}{V} f_1 f_k + \frac{1}{V} f_{k+1}$$

$$V f_k' = (k-1) f_1 f_k + f_{k+1} = f_{\mu k}$$

$$g_k = \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} z^{*k} \equiv \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k)} z^{*k}$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\Omega} \frac{d^k \Omega}{dt^k} z^{*k} \right] = -\frac{\Omega'}{\Omega^2} \Omega^{(k)} z^{*(k)} + \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k+1)} z^{*(k)} + \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k)} z^{*(k-1)} \cdot k \cdot z^{*1} =$$

$$= -\frac{\Omega'}{\Omega} \left( \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k)} z^{*k} \right) + \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k+1)} z^{*k} + \frac{1}{\Omega} \Omega^{(k)} \cdot k z^{*(k-1)} \cdot z^{*1} =$$

$$= -\frac{\Omega'}{\Omega} g_k + \frac{1}{z^*} g_{k+1} + k \frac{z^{*1}}{z^*} g_k \quad ; \quad z^* = g_1 \frac{\Omega}{\Omega'}$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = -g_1 \frac{1}{z^*} g_k + \frac{1}{z^*} g_{k+1} + k \frac{2F}{z^*} g_k$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} \cdot \frac{g_{k+1} + 2kFg_k - g_1 g_k}{z^*} = g_k'$$

$$z^* g_k' = g_{k+1} + (2kF - g_1) g_k = \lambda_k$$

$$\lambda_k = (-g_1 + 2kF) g_k + g_{k+1} = z^* g_k' \quad ; \quad g_k' = \frac{\lambda_k}{z^*}$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\Omega^k z^{*k}] = k \Omega^{k-1} \Omega' z^{*k} + \Omega^k k z^{*(k-1)} z^{*'} =$$

$$= k \frac{\Omega'}{\Omega} (\Omega^k z^{*k}) + k \frac{z^{*'}}{z^*} (\Omega^k z^{*k}) = k \frac{\Omega'}{\Omega} h_k + k \frac{z^{*'}}{z^*} h_k = k h_k \left( \frac{\Omega'}{\Omega} + \frac{z^{*'}}{z^*} \right)$$

$$h_1 = \Omega \cdot z^* \quad , \quad z^* = g_1 \frac{\Omega}{\Omega'} \quad \therefore \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{g_1'}{z^*}$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t} = k h_k \left( \frac{g_1'}{z^*} + \frac{z^{*'}}{z^*} \right) = \frac{g_1' + z^{*'}}{z^*} k h_k = k \frac{g_1' + 2F}{z^*} h_k$$

$$h_k' z^* = k (g_1' + 2F) h_k = \psi_k \quad ; \quad h_k' = \frac{\psi_k}{z^*}$$

$$f_k = V^{k-1} V^{(k)} \quad ; \quad f_1 = V' \quad , \quad f_2 = V V'' \quad , \quad f_3 = V^2 V''' \quad , \quad \dots$$

$$g_k = \frac{\Omega^{(k)}}{\Omega} z^{*(k)} \quad , \quad g_1 = \frac{\Omega' \delta_p^2}{\Omega \nu} \quad , \quad g_2 = \frac{\Omega'' \delta_p^4}{\Omega \nu^2} \quad , \quad \dots$$

$$z^* = \frac{\delta_p^2}{\nu} \quad , \quad f_k = f(x) \quad , \quad g_k = f(t) \quad , \quad h_k = f(t)$$

$$h_k = \Omega^k z^{*k} \quad , \quad h_1 = \Omega \frac{\delta_p^2}{\nu} \quad , \quad h_2 = \Omega^2 \frac{\delta_p^4}{\nu^2} \quad , \quad \dots$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{V \Omega \delta_p^2}{A} \mathcal{F}_\eta \frac{A}{\delta_p^2} = V \Omega \mathcal{F}_\eta \quad ,$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{V' \Omega \delta_p^2}{A} \mathcal{F} - \frac{V \Omega \delta_p^2}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} f_k' \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V' \Omega \mathcal{F}_\eta + V \Omega \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\eta f_k} \cdot f_k' \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = V \Omega \mathcal{F}_{\eta \eta} \frac{A}{\delta_p^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = V \Omega \mathcal{F}_{\eta \eta \eta} \frac{A^2}{\delta_p^4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V \Omega' \mathcal{F}_\eta + V \Omega \mathcal{F}_{\eta \eta} - \frac{A \cdot y}{\delta_p^2} \delta_p'' = V \Omega' \mathcal{F}_\eta - V \Omega \eta \frac{\delta_p'}{\delta_p^2} \mathcal{F}_{\eta \eta} +$$

$$+ V \Omega \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta g_k} \cdot g_k' + \mathcal{F}_{\eta h_k} \cdot h_k') \right\}$$

$$V \Omega' \mathcal{F}_\eta + V \Omega \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta g_k} \cdot g_k' + \mathcal{F}_{\eta h_k} \cdot h_k') - \eta \frac{\delta_p'}{\delta_p^2} \mathcal{F}_{\eta \eta} \right\} +$$

$$+ V V' \Omega^2 \mathcal{F}_\eta^2 + V^2 \Omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\eta f_k} \cdot f_k' - V V' \Omega^2 \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta \eta} - V^2 \Omega^2 \mathcal{F}_{\eta \eta} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \cdot f_k' =$$

$$\begin{aligned}
 & V\Omega' + VV'\Omega^2 + \frac{\nu V\Omega A^2}{\delta_p^{*2}} \mathcal{F}_{\eta\eta\eta} \quad \times \quad \left| \frac{\delta_p^{*2}}{\nu V\Omega} \right. \\
 & A^2 \mathcal{F}_{\eta\eta\eta} + \eta \frac{\delta_p' \delta_p^{*1}}{\nu} \mathcal{F}_{\eta\eta} + \frac{\Omega'}{\Omega} \frac{\delta_p^{*2}}{\nu} (1 - \mathcal{F}_{\eta}) - \frac{\delta_p^{*2}}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta g_{\kappa}} g_{\kappa}' + \mathcal{F}_{\eta h_{\kappa}} h_{\kappa}') = \\
 & = -\frac{\Omega V' \delta_p^{*2}}{\nu} (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2 + \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta}) - \frac{V\Omega \delta_p^{*2}}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta\eta} \mathcal{F}_{f_{\kappa}} f_{\kappa}' - \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{F}_{\eta f_{\kappa}} f_{\kappa}') \\
 & A^2 \mathcal{F}_{\eta\eta\eta} + \eta F \mathcal{F}_{\eta\eta} + g_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta g_{\kappa}} \lambda_{\kappa} + \mathcal{F}_{\eta h_{\kappa}} \nu_{\kappa}) = \\
 & = -f_1 h_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2 + \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta}) - h_1 \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{\eta\eta} \cdot \mathcal{F}_{f_{\kappa}} - \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{F}_{\eta f_{\kappa}}) \mu_{\kappa} \\
 & \qquad \qquad \qquad z^* = \frac{\delta_p^{*2}}{\nu}, \quad z^{*1} = \frac{2 \delta_p' \delta_p^{*1}}{\nu} = 2F
 \end{aligned}$$

Jedno parametarsko rešenje

$$\mu_1 = 0, \quad \lambda_1 = (2F - g_1) g_1, \quad \nu_1 = (2F + g_1) h_1$$

$$\begin{aligned}
 & A^2 \mathcal{F}_{\eta\eta\eta} + \eta F \mathcal{F}_{\eta\eta} + g_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}) - (2F - g_1) g_1 \mathcal{F}_{\eta g_1} - (2F + g_1) h_1 \mathcal{F}_{\eta h_1} = \\
 & = -f_1 h_1 (1 - \mathcal{F}_{\eta}^2 + \mathcal{F} \mathcal{F}_{\eta\eta})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F}(\eta_i \{f_{\kappa}\}, \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) = \mathcal{F}_0(\eta_i \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + f_1 \mathcal{F}_1(\eta_i \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + \\
 & + f_1^2 \mathcal{F}_{11}(\eta_i \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + f_2 \mathcal{F}_2(\eta_i \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}) + \dots
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f_1} = \mathcal{F}_1 + 2f_1 \mathcal{F}_{11} + \dots$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f_2} = \mathcal{F}_2 + \dots$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial g_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial g_1} + f_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial g_1} + f_1^2 \frac{\partial \mathcal{F}_{11}}{\partial g_1} + f_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial g_1} + \dots$$

.....

$$A^2(F_{0\eta\eta\eta} + f_1 F_{1\eta\eta\eta} + f_1^2 F_{11\eta\eta\eta} + \dots) + \eta F(F_{0\eta\eta} + f_1 F_{1\eta\eta} + f_1^2 F_{11\eta\eta} + \dots) +$$

$$+ g_1(1 - F_{0\eta} - F_{1\eta} - f_1^2 F_{11\eta} - \dots) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{\kappa} [F_{0\eta g_{\kappa}} + f_1 F_{1\eta g_{\kappa}} + f_1^2 F_{11\eta g_{\kappa}} + \dots] + \right.$$

$$\left. + \nu_{\kappa} [F_{0\eta h_{\kappa}} + f_1 F_{1\eta h_{\kappa}} + f_1^2 F_{11\eta h_{\kappa}} + \dots] \right\} =$$

$$-f_1 h_1 \{1 - (F_{0\eta} + f_1 F_{1\eta} + f_1^2 F_{11\eta} + \dots)\}^2 + (F_0 + f_1 F_1 + f_1^2 F_{11} + \dots)(F_{0\eta\eta} + f_1 F_{1\eta\eta} + f_1^2 F_{11\eta\eta})$$

$$A^2 F_{0\eta\eta\eta} + \eta F F_{0\eta\eta} + g_1(1 - F_{0\eta}) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\lambda_{\kappa} F_{0\eta g_{\kappa}} + \nu_{\kappa} F_{0\eta h_{\kappa}}) = 0$$

$$A^2 F_{1\eta\eta\eta} + \eta F F_{1\eta\eta} - g_1 F_{1\eta} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\lambda_{\kappa} F_{1\eta g_{\kappa}} + \nu_{\kappa} F_{1\eta h_{\kappa}}) =$$

$$= -h_1(1 - F_0^2 - F_{0\eta\eta})$$

$$A^2 F_{11\eta\eta\eta} + \eta F F_{11\eta\eta} - g_1 F_{11\eta} - \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\lambda_{\kappa} F_{11\eta g_{\kappa}} + \nu_{\kappa} F_{11\eta h_{\kappa}}) =$$

$$= -h_1(-2 F_{0\eta} F_{1\eta} + F_0 F_{1\eta\eta} + F_{0\eta\eta} F_1)$$

$$F_0(\eta; \{g_{\kappa}\}) = F_0^0(\eta) + g_1 F_0^1(\eta) + g_1^2 F_0^{11}(\eta) + g_2 F_0^2(\eta) + \dots$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial g_1} = F_0^1 + 2g_1 F_0^{11} + \dots$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial g_2} = F_0^2(\eta) + \dots$$

$$A^2 \{ F_0^{0''''} + g_1 F_0^{1''''} + g_1^2 F_0^{11''''} + g_2 F_0^{2''''} + \dots \} +$$

$$+ \eta (F_0 + F_1 g_1 + F_{11} g_1^2 + F_2 g_2 + \dots) \{ F_0^{0''} + g_1 F_0^{1''} + g_1^2 F_0^{11''} + g_2 F_0^{2''} + \dots \} +$$

$$+ g_1 \{ 1 - F_0^{0'} - g_1 F_0^{1'} - g_1^2 F_0^{11'} - g_2 F_0^{2'} - \dots \} -$$

$$- \{ (2F_0 + 2g_1 F_1 + 2g_1^2 F_{11} + 2g_2 F_2 - g_1) g_1 + g_2 \} (F_0^{1'} + 2g_1 F_0^{11'} + \dots) -$$

$$- \{ (2F_0 + 2g_1 F_1 + 2g_1^2 F_{11} + 2g_2 F_2 - g_1) g_2 + g_3 \} (F_0^{2'} + \dots) = 0$$



$$A^2 \mathcal{F}_0^{(3)} + \eta F_0 \mathcal{F}_0^{(2)} = 0$$

$$A^2 \mathcal{F}_0^{(4)} + \eta F_0 \mathcal{F}_0^{(3)} - 2F_0 \mathcal{F}_0^{(2)} = -\eta F_1 \mathcal{F}_0^{(2)} - (1 - \mathcal{F}_0^{(1)})$$

$$\mathcal{F}_1(\eta; \{g_k\}, \{h_k\}) = h_1 {}^1\mathcal{F}_1(\eta) + h_1 g_1 {}^1\mathcal{F}_1^1(\eta) + h_2 {}^2\mathcal{F}_1(\eta) + \dots$$

$$A^2 {}^1\mathcal{F}_1^{(3)} + \eta F_0 {}^1\mathcal{F}_1^{(2)} - 2F_0 {}^1\mathcal{F}_1^{(1)} = -(1 - \mathcal{F}_0^{(1)2} + \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_0^{(2)}) \quad \text{ii}$$

$$\mathcal{F}_0^{(3)} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{F}_0^{(2)} = 0$$

$$\mathcal{F}_0^{(4)} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{F}_0^{(3)} - 2 \frac{F_0}{A^2} \mathcal{F}_0^{(2)} = -\frac{1}{A^2} (\eta F_1 \mathcal{F}_0^{(2)}) - \frac{1}{A^2} (1 - \mathcal{F}_0^{(1)})$$

$${}^1\mathcal{F}_1^{(3)} + \eta \frac{F_0}{A^2} {}^1\mathcal{F}_1^{(2)} - 2 \frac{F_0}{A^2} {}^1\mathcal{F}_1^{(1)} = -\frac{1}{A^2} (1 - \mathcal{F}_0^{(1)2} + \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_0^{(2)})$$

$$L_k[z] = z'' + \eta \frac{F_0}{A^2} z' - 2k \frac{F_0}{A^2} z$$

$$\left\| \begin{array}{l} L_0[\mathcal{F}_0^{(1)}] = 0, \\ L_1[\mathcal{F}_0^{(2)}] = -\frac{1}{A^2} \eta F_1 \mathcal{F}_0^{(2)} - \frac{1}{A^2} (1 - \mathcal{F}_0^{(1)}) \\ L_1[{}^1\mathcal{F}_1^{(1)}] = -\frac{1}{A^2} (1 - \mathcal{F}_0^{(1)2} + \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_0^{(2)}) \end{array} \right.$$

2. TEMPERATURSKO POLJE

2.1. Termometarski problem

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$y=0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty = \text{const.}$$

$$u = U(x,t) \mathcal{F}_\eta = V(x) \Omega(t) \mathcal{F}_\eta \quad ; \quad \eta = A \frac{y}{\delta_p(t)}$$

$$v = -\frac{V' \Omega \delta_p^*}{A} \mathcal{F} - \frac{V \Omega \delta_p^*}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \cdot f_k'$$

$$T = T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}) = T_\infty + \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}_\eta \cdot \frac{A}{\delta_p^*} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V \Omega \mathcal{F}_{\eta\eta} \frac{A}{\delta_p^*}$$

$$\eta=0 : \mathcal{K}_\eta = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \mathcal{K} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2V^2 \Omega \Omega'}{g c_p} \mathcal{K} + \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{g_k} \cdot g_k' + \mathcal{K}_{h_k} \cdot h_k') -$$

$$- \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}_\eta \frac{\eta}{\delta_p^*} \cdot \delta_p'^*$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2V V' \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K} + \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_{f_k} \cdot f_k'$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{A}{\delta_p^*} \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}_\eta \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{A^2}{\delta_p^{*2}} \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}_{\eta\eta}$$

$$\frac{2V^2 \Omega \Omega'}{g c_p} \mathcal{K} + \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{g_k} \cdot g_k' + \mathcal{K}_{h_k} \cdot h_k') - \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \eta \frac{\delta_p'^*}{\delta_p^*} \mathcal{K}_\eta +$$

$$+ \frac{2V^2 V' \Omega^3}{g c_p} \mathcal{K} \mathcal{F}_\eta + \frac{V^3 \Omega^3}{g c_p} \mathcal{F}_\eta \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_{f_k} \cdot f_k' - \frac{V^2 V' \Omega^3}{g c_p} \mathcal{F} \mathcal{K}_\eta -$$

$$- \frac{V^3 \Omega^3}{g c_p} \mathcal{K}_\eta \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \cdot f_k' = \frac{\nu}{Pr} \frac{A^2}{\delta_p^{*2}} \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}_{\eta\eta} + \frac{\nu}{g c_p} V^2 \Omega^2 \frac{A^2}{\delta_p'^*} \mathcal{F}_{\eta\eta} \cdot \left| \frac{\delta_p'^*}{A^2} \frac{g c_p}{\nu V^2 \Omega^2} \right|$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta\eta} + \frac{\delta_p^2}{A^2} \frac{V'\Omega}{\nu} \mathcal{F} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} + \frac{1}{\nu A^2} \eta \delta_p^2 \delta_p' \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} + \frac{\delta_p^2}{A^2} \frac{V\Omega}{\nu} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f\kappa} \cdot f_{\kappa}' - \\ & - \frac{2V'\Omega \delta_p^2}{A^2 \nu} \ddot{\mathcal{K}}_{\mathcal{F}\eta} - \frac{\delta_p^2}{\nu A^2} \frac{2\Omega'}{\Omega} \ddot{\mathcal{K}} - \frac{\delta_p^2}{\nu A^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\ddot{\mathcal{K}}_{g\kappa} \cdot g_{\kappa}' + \ddot{\mathcal{K}}_{h\kappa} \cdot h_{\kappa}') - \\ & - \frac{\delta_p^2}{\nu A^2} V\Omega \mathcal{F}_{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \ddot{\mathcal{K}}_{f\kappa} \cdot f_{\kappa}' = -\mathcal{F}_{\eta\eta}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta\eta} + \eta \frac{F}{A^2} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} + \frac{f_1 h_1}{A^2} \mathcal{F} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} + \frac{h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{K}}_{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f\kappa} \mu_{\kappa} - \frac{2f_1 h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{K}}_{\mathcal{F}\eta} - \\ & - \frac{2}{A^2} g_1 \ddot{\mathcal{K}} - \frac{1}{A^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\ddot{\mathcal{K}}_{g\kappa} \lambda_{\kappa} + \ddot{\mathcal{K}}_{h\kappa} \vartheta_{\kappa}) - \frac{h_1}{A^2} \mathcal{F}_{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \ddot{\mathcal{K}}_{f\kappa} \cdot \mu_{\kappa} = -\mathcal{F}_{\eta\eta}^2 \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathcal{K}} = \ddot{\mathcal{K}}_0 + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_1 + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11} + f_2 \ddot{\mathcal{K}}_2 + \dots$$

$$\mu_1 = f_2, \quad \lambda_1 = (2F - g_1)g_1 + g_2, \quad \vartheta_1 = (2F + g_1)h_1$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \{ \ddot{\mathcal{K}}_{0\eta\eta} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1\eta\eta} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11\eta\eta} + \dots \} + \eta \frac{F}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{K}}_{0\eta} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1\eta} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11\eta} + \dots \} + \\ & + \frac{f_1 h_1}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{K}}_{0\eta} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1\eta} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11\eta} + \dots \} \{ \mathcal{F}_0 + f_1 \mathcal{F}_1 + f_1^2 \mathcal{F}_{11} + \dots \} + \\ & + \frac{h_1}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{K}}_{0\eta} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1\eta} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11\eta} + \dots \} \{ (\ddot{\mathcal{K}}_1 + 2f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{11} + \dots) \mu_1 + \dots \} - \\ & - \frac{2f_1 h_1}{A^2} \{ \mathcal{F}_{0\eta} + f_1 \mathcal{F}_{1\eta} + f_1^2 \mathcal{F}_{11\eta} + \dots \} \{ \ddot{\mathcal{K}}_0 + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_1 + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11} + \dots \} - \\ & - \frac{2g_1}{A^2} (\ddot{\mathcal{K}}_0 + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_1 + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11} + \dots) - \frac{1}{A^2} \{ (\ddot{\mathcal{K}}_{0g_1} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1g_1} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11g_1} + \dots) \lambda_1 + \\ & + (\ddot{\mathcal{K}}_{0h_1} + f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{1h_1} + f_1^2 \ddot{\mathcal{K}}_{11h_1} + \dots) \vartheta_1 + \dots \} - \\ & - \frac{h_1}{A^2} (\mathcal{F}_{0\eta} + f_1 \mathcal{F}_{1\eta} + f_1^2 \mathcal{F}_{11\eta} + \dots) \mu_1 (\ddot{\mathcal{K}}_1 + 2f_1 \ddot{\mathcal{K}}_{11} + \dots) + \dots = \\ & = -(\mathcal{F}_{0\eta\eta} + f_1 \mathcal{F}_{1\eta\eta} + f_1^2 \mathcal{F}_{11\eta\eta} + \dots)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_{0\eta\eta}^* + \eta \frac{F}{A^2} \mathcal{K}_{0\eta}^* - \frac{2g_1}{A^2} \mathcal{K}_0^* - \frac{(2F-g_1)g_1+g_2}{A^2} \mathcal{K}_{0g_1}^* + \dots$$

$$- \frac{(2F+g_1)h_1}{A^2} \mathcal{K}_{0h_1}^* + \dots = -F_{0\eta\eta}^2, \quad \mathcal{K}_0^* = \mathcal{K}_0(\eta_i \{g_k\}),$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_{1\eta\eta}^* + \eta \frac{F}{A^2} \mathcal{K}_{1\eta}^* + \frac{h_1}{A^2} \mathcal{K}_{0\eta}^* F_0 - \frac{2h_1}{A^2} F_{0\eta} \mathcal{K}_0^* - \frac{2g_1}{A^2} \mathcal{K}_1^* -$$

$$- \frac{(2F-g_1)g_1+g_2}{A^2} \mathcal{K}_{1g_1}^* + \dots - \frac{(2F+g_1)h_1}{A^2} \mathcal{K}_{1h_1}^* = -2F_{0\eta\eta} F_{1\eta\eta}$$

$$\mathcal{K}_0(\eta_i \{g_k\}) = \mathcal{K}_0^0(\eta) + g_1 \mathcal{K}_0^1(\eta) + \dots$$

$$\frac{1}{Pr} (\mathcal{K}_0^{0''} + g_1 \mathcal{K}_0^{1''} + \dots) + \frac{\eta}{A^2} (F_0 + g_1 F_1 + \dots) (\mathcal{K}_0^{0'} + g_1 \mathcal{K}_0^{1'} + \dots) -$$

$$- \frac{2g_1}{A^2} (\mathcal{K}_0^0 + g_1 \mathcal{K}_0^1 + \dots) - \frac{(2F_0 + 2g_1 F_1 + \dots g_1)g_1 + g_2}{A^2} (\mathcal{K}_0^1 + \dots) =$$

$$= - (F_0^{0''} + g_1 F_0^{1''} + \dots)^2 \quad ; \quad \frac{F_0}{A^2} = 2, \quad \frac{F_1}{A^2} = -\frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{0''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{K}_0^{0'} = -F_0^{0''2}$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_0^{1''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{K}_0^{1'} - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{K}_0^1 = -\eta \frac{F_1}{A^2} \mathcal{K}_0^{0'} + \frac{2}{A^2} \mathcal{K}_0^0 - 2F_0^{0''} F_0^{1''}$$

.....

$$\mathcal{K}_1(\eta_i \{g_k\} \{h_k\}) = h_1 \mathcal{K}_1^1(\eta) + h_1 g_1 \mathcal{K}_1^1(\eta) + \dots$$

$$\frac{1}{Pr} (\mathcal{K}_1^{1''} h_1 + \dots) + \frac{\eta (F_0 + g_1 F_1 + \dots)}{A^2} (h_1 \mathcal{K}_1^1 + \dots) +$$

$$+ \frac{h_1}{A^2} (F_0^0 + g_1 F_0^1 + \dots) (\mathcal{K}_0^{0'} + g_1 \mathcal{K}_0^{1'} + \dots) -$$

$$- \frac{2h_1}{A^2} (F_0^{0'} + g_1 F_0^{1'} + \dots) (\mathcal{K}_0^0 + g_1 \mathcal{K}_0^1 + \dots) -$$

$$- \frac{2g_1}{A^2} (h_1 \mathcal{K}_1^1 + \dots) - \frac{(2F_0 + 2F_1 g_1 + \dots g_1)g_1 + g_2}{A^2} (h_1 \mathcal{K}_1^1 + \dots) +$$

$$+ \dots \frac{(2F_0 + 2F_1 g_1 + \dots + g_1) h_1}{A^2} (\mathcal{K}_1^* + \dots) =$$

$$= -2(F_0'' + g_1 F_0'' + \dots)(h_1 \mathcal{F}_1'' + \dots)$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_1'' + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{K}_1' - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{K}_1 = -\frac{1}{A^2} F_0'' \mathcal{K}_0' + \frac{2}{A^2} F_0' \mathcal{K}_0'' - 2 F_0'' \mathcal{F}_1''$$

$$T = T_\infty + [(T_W - T_\infty) - (T_s - T_\infty)] \mathcal{H} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}$$

$$y=0, \quad T = T_W(x, t) \quad T_W - T_\infty = S(x) \Theta(t)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty$$

$$T_s = T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}(0, \dots)$$

$$T_W - T_\infty = (T_W - T_\infty) \mathcal{H} - \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}(0) \mathcal{H} + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \quad \mathcal{H} = 1 \\ y \rightarrow \infty \quad \mathcal{H} \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$T = T_\infty + [S(x) \Theta(t) - \frac{V^2(x) \Omega^2(t)}{g c_p} \mathcal{K}(0; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\})]$$

$$\cdot \mathcal{H}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}, \{a_k\}, \{b_k\}) + \dots$$

$$a_k = \frac{\theta^{(k)}}{\theta} x^{*k} = \frac{\theta^{(k)}}{\theta} \left(\frac{\delta p}{\nu}\right)^k; \quad a_1 = \frac{\theta'}{\theta} \frac{\delta p^2}{\nu}, \quad a_2 = \frac{\theta''}{\theta} \frac{\delta p^4}{\nu^2}, \dots$$

$$b_k = \frac{S^{(k)}}{S} V^k, \quad b_1 = \frac{S'}{S} V, \quad b_2 = \frac{S''}{S} V^2, \dots \quad \eta = \frac{A y}{\delta p^*(t)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left\{ S \theta' - \frac{2V^2 \Omega \Omega'}{g c_p} \mathcal{K} - \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{g_k} \cdot g_k' + \mathcal{K}_{h_k} \cdot h_k') \right\} \mathcal{H} +$$

$$+ \left[ S \theta - \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K} \right] \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{H}_{g_k} \cdot g_k' + \mathcal{H}_{h_k} \cdot h_k' + \mathcal{H}_{a_k} \cdot a_k') - (S \theta - \frac{V^2 \Omega^2}{g c_p} \mathcal{K}) \mathcal{H} \eta \cdot \frac{\eta \delta p'}{\delta p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left\{ s\theta - \frac{2VV'\Omega^2}{gC_p} \mathcal{K} - \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{K}_{f\kappa}^{\circ} \cdot f_{\kappa}' \right\} \mathcal{H} +$$

$$+ \left( s\theta - \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \mathcal{K} \right) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \mathcal{H}_{f\kappa}^{\circ} \cdot f_{\kappa}' + \mathcal{H}_{b\kappa}^{\circ} \cdot b_{\kappa}' \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \left( s\theta - \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \mathcal{K} \right) \mathcal{H}_{\eta} \frac{A}{\delta_p^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{A^2}{\delta_p^4} \left( s\theta - \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \mathcal{K} \right) \mathcal{H}_{\eta\eta}$$

$$u = V\Omega \mathcal{F}_{\eta}, \quad v = -\frac{V'\Omega \delta_p^2}{A} \mathcal{F} - \frac{V\Omega \delta_p^2}{A} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f\kappa} \cdot f_{\kappa}'$$

2.2. Problem zadate temperature

$$T = T_{\infty} + (T_w - T_{\infty}) \mathcal{H}^{**} + \frac{U^2}{gC_p} \mathcal{H}^*$$

$$y=0, \quad \mathcal{H}^{**} = 1, \quad \mathcal{H}^* = 0,$$

$$y \rightarrow \infty, \quad \mathcal{H}^{**} \rightarrow 0, \quad \mathcal{H}^* \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = (T_w - T_{\infty}) \mathcal{H}_{\eta}^{**} \Big|_{\eta=0} + \frac{U^2}{gC_p} \mathcal{H}_{\eta}^* \Big|_{\eta=0}$$

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\eta; \{f_{\kappa}\}, \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}; Pr)$$

$$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}^{**}(\eta; \{f_{\kappa}\}, \{g_{\kappa}\}, \{h_{\kappa}\}, \{m_{\kappa}\}, \{n_{\kappa}\}; Pr)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_w}{\partial t} \mathcal{H}^{**} - (T_w - T_{\infty}) \mathcal{H}_{\eta}^{**} \eta \frac{\delta_p'}{\delta_p^2} + (T_w - T_{\infty}) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}_{g_{\kappa}}^{**} \cdot g_{\kappa}' + \mathcal{H}_{h_{\kappa}}^{**} \cdot h_{\kappa}' + \right.$$

$$\left. + \mathcal{H}_{m_{\kappa}}^{**} \cdot m_{\kappa}'(t) + \mathcal{H}_{n_{\kappa}}^{**} \cdot n_{\kappa}'(t) \right\} + \frac{2V^2\Omega\Omega'}{gC_p} \mathcal{H}^* - \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \mathcal{H}_{\eta}^* \eta \frac{\delta_p'}{\delta_p^2} +$$

$$+ \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \mathcal{H}_{g_{\kappa}}^* \cdot g_{\kappa}' + \mathcal{H}_{h_{\kappa}}^* \cdot h_{\kappa}' \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_w}{\partial x} \mathcal{H}^{**} + (T_w - T_{\infty}) \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}_{f_{\kappa}}^{**} \cdot f_{\kappa}' + \mathcal{H}_{m_{\kappa}}^{**} \cdot m_{\kappa}'(\omega) + \mathcal{H}_{n_{\kappa}}^{**} \cdot n_{\kappa}'(\omega) \right\} +$$

$$+ \frac{2VV'\Omega^2}{gC_p} \mathcal{H}^* + \frac{V^2\Omega^2}{gC_p} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathcal{H}_{f_{\kappa}}^* \cdot f_{\kappa}'$$

Jednačina za  $\mathcal{H}^{\times}$

$$\left| \frac{1}{A^2} \frac{\delta p^2}{\nu} \frac{1}{T_w - T_\infty} \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \mathcal{H}^{\times} \eta \eta + \eta \frac{F}{A^2} \mathcal{H}^{\times} \eta + \frac{f_1 h_1}{A^2} \mathcal{F} \mathcal{H}^{\times} \eta + \frac{h_1}{A^2} \mathcal{H}^{\times} \eta \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \cdot \mu_k - \\ & - \frac{h_1}{A^2} \nu \frac{\partial T_w / \partial x}{T_w - T_\infty} \mathcal{F}_\eta \mathcal{H}^{\times} - \frac{1}{A^2} \frac{\delta p^2}{\nu} \frac{\partial T_w / \partial t}{T_w - T_\infty} \mathcal{H}^{\times} - \\ & - \frac{1}{A^2} \frac{\delta p^2}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}^{\times}_{g_k} \cdot g_k' + \mathcal{H}^{\times}_{h_k} \cdot h_k' + \mathcal{H}^{\times}_{m_k} \cdot m_k'(t) + \mathcal{H}^{\times}_{n_k} \cdot n_k'(t) \right\} - \\ & - \frac{h_1}{A^2} \nu \mathcal{F}_\eta \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \mathcal{H}^{\times}_{f_k} \cdot f_k' + \mathcal{H}^{\times}_{m_k} \cdot m_k'(x) + \mathcal{H}^{\times}_{n_k} \cdot n_k'(x) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$m_k = V^k \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} = V^k \frac{S^{(k)}}{S}$$

$$V \cdot m_k' = V \left( V^k \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} \right)' = \left( -V \frac{1}{S} S' + k \right) V^k \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} + V^{k+1} \frac{1}{S} \frac{d^{k+1} S}{dx^{k+1}}$$

$$V^k V^{k-1} V' \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} + V V^k (-1) \frac{S'}{S^2} \frac{d^k S}{dx^k} + V \cdot V^k \frac{1}{S} \frac{d^{k+1} S}{dx^{k+1}} =$$

$$= -V \frac{1}{S} S' V^k \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} + k V^k \frac{1}{S} \frac{d^k S}{dx^k} + V^{k+1} \frac{1}{S} \frac{d^{k+1} S}{dx^{k+1}} =$$

$$V m_k' = (k f_1 - m_1) m_k + m_{k+1} = M_k$$

$$n_k = \frac{1}{\theta} \frac{d^k \theta}{dt^k} Z^{x(k)} = \frac{1}{\theta} \theta^{(k)} Z^{x(k)}$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\theta} \frac{d^k \theta}{dt^k} Z^{x(k)} \right] = -\frac{\theta'}{\theta} \theta^{(k)} Z^{x(k)} + \frac{1}{\theta} \theta^{(k+1)} Z^{x(k)} + \frac{1}{\theta} \theta^{(k)} \cdot k \cdot Z^{x(k+1)} \cdot Z^{x'}$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = -\frac{\theta'}{\theta} n_k + \frac{n_{k+1}}{Z^x} + k \frac{Z^{x'}}{Z^x} n_k = -\frac{n_1 n_k}{Z^x} + \frac{1}{Z^x} n_{k+1} + k \frac{2F_1}{Z^x} n_k$$

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = n_k' = \frac{n_{k+1} + (2kF_1 - n_1) n_k}{Z^x}$$

$$Z^x \cdot n_k' = n_{k+1} + (2kF_1 - n_1) n_k$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial t} n_1 n_k' = (-n_1 + 2kF_1) n_k + n_{k+1}$$

$$\frac{V \partial T_w / \partial x}{T_w - T_\infty} = \frac{V S'(x)}{S(x)} = m_1$$

$$\frac{\delta_p^2}{\nu} \frac{\partial T_w / \partial t}{T_w - T_\infty} = h_1 \frac{1}{\Omega} \frac{\delta \theta'}{\delta \theta} = n_1$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{H}_{\eta\eta}^{**} + \eta \frac{F}{A^2} \mathcal{H}_{\eta}^{**} + \frac{f_1 h_1}{A^2} \mathcal{F} \mathcal{H}_{\eta}^{**} + \frac{h_1}{A^2} \mathcal{H}_{\eta}^{**} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \mu_k - \frac{h_1}{A^2} m_1 \mathcal{F}_{\eta} \mathcal{H}^{**} -$$

$$- \frac{n_1}{A^2} \mathcal{H}^{**} - \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \mathcal{H}_{g_k}^{**} + \nu_k \mathcal{H}_{h_k}^{**} + N_k \mathcal{H}_{m_k}^{**}) -$$

$$- \frac{h_1}{A^2} \mathcal{F}_{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \{ \mu_k \mathcal{H}_{f_k}^{**} + M_k \mathcal{H}_{m_k}^{**} \} = 0$$

$$\eta = 0, \quad \mathcal{H}^{**} = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \mathcal{H}^{**} \rightarrow 0$$

$$\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}_0^{**} + f_1 \mathcal{H}_1^{**} + m_1 \mathcal{H}_{1m}^{**} + f_1^2 \mathcal{H}_{11}^{**} + m_1^2 \mathcal{H}_{11m}^{**} +$$

$$+ f_2 \mathcal{H}_2^{**} + m_2 \mathcal{H}_{2m}^{**} + \dots + m_1 f_1 \mathcal{H}^{**} (\dots) \text{ itd.}$$

$$\mu_1 = f_2, \quad M_1 = (f_1 - m_1)m_1 + m_2$$

$$\lambda_1 = (2F - g_1)g_1 + g_2$$

$$\theta_1 = (2F + g_1)h_1$$

$$N_1 = (2F - n_1)n_1 + n_2$$

$$\frac{1}{Pr} \{ \mathcal{H}_{0\eta\eta}^{**} + f_1 \mathcal{H}_{1\eta\eta}^{**} + m_1 \mathcal{H}_{1m\eta\eta}^{**} + f_1^2 \mathcal{H}_{11\eta\eta}^{**} + m_1^2 \mathcal{H}_{11m\eta\eta}^{**} + \dots \} +$$

$$+ \frac{\eta F}{A^2} \{ \mathcal{H}_{0\eta}^{**} + f_1 \mathcal{H}_{1\eta}^{**} + m_1 \mathcal{H}_{1m\eta}^{**} + f_1^2 \mathcal{H}_{11\eta}^{**} + m_1^2 \mathcal{H}_{11m\eta}^{**} + \dots \} +$$

$$+ \frac{f_1 h_1}{A^2} \{ \mathcal{F}_0 + f_1 \mathcal{F}_1 + f_1^2 \mathcal{F}_{11} + \dots \} \{ \mathcal{H}_{0\eta}^{**} + f_1 \mathcal{H}_{1\eta}^{**} + m_1 \mathcal{H}_{1m\eta}^{**} +$$

$$+ f_1^2 \mathcal{H}_{11\eta}^{**} + m_1^2 \mathcal{H}_{11m\eta}^{**} + \dots \} - \frac{h_1 m_1}{A^2} (\mathcal{F}_{0\eta} + f_1 \mathcal{F}_{1\eta} + f_1^2 \mathcal{F}_{11\eta} + \dots)$$

$$\cdot \{ \mathcal{H}_0^{**} + f_1 \mathcal{H}_1^{**} + f_1^2 \mathcal{H}_{11}^{**} + m_1 \mathcal{H}_{1m}^{**} + m_1^2 \mathcal{H}_{11m}^{**} + \dots \} -$$

$$- \frac{(2F - g_1)g_1 + g_2}{A^2} \mathcal{H}_{g_1}^{**} + \dots - \frac{(2F + g_1)h_1}{A^2} \mathcal{H}_{h_1}^{**} - \frac{(2F - n_1)n_1 + n_2}{A^2} \mathcal{H}_{m_1}^{**} +$$



$$-\frac{h_1}{A^2} \{ (f_1 - m_1) m_1 + m_2 \} \cdot \{ F_{0\eta} + f_1 F_{1\eta} + f_1^2 F_{11\eta} + \dots \} \cdot \{ \ddot{\mathcal{H}}_{1m}^{xx} + 2m_1 \ddot{\mathcal{H}}_{11m}^{xx} + \dots \} = 0$$

Za  $T_w = \text{const.}$ :

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{\eta\eta}^{xx} + \frac{\eta F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{\eta}^{xx} + \frac{f_1 h_1}{A^2} F \ddot{\mathcal{H}}_{\eta}^{xx} + \frac{h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{\eta}^{xx} \sum_{\kappa=1}^{\infty} F_{f\kappa} \mu_{\kappa} - \frac{1}{A^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\lambda_{\kappa} \ddot{\mathcal{H}}_{g\kappa}^{xx} + g_{\kappa} \ddot{\mathcal{H}}_{h\kappa}^{xx}) - \frac{h_1}{A^2} F_{\eta} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mu_{\kappa} \ddot{\mathcal{H}}_{f\kappa}^{xx} = 0$$

Razvijanjem u red po parametrima sledi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \{ \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta\eta}^{xx} + f_1 \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta\eta}^{xx} + f_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_{11\eta\eta}^{xx} + \dots \} + \\ & + \frac{\eta F}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta}^{xx} + f_1 \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta}^{xx} + f_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_{11\eta}^{xx} + \dots \} + \\ & + \frac{f_1 h_1}{A^2} \{ F_0 + f_1 F_1 + f_1^2 F_{11} + \dots \} \{ \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta}^{xx} + f_1 \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta}^{xx} + f_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_{11\eta}^{xx} + \dots \} - \\ & - \frac{(2F - g_1) g_1 + g_2}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{H}}_{0g_1}^{xx} + f_1 \ddot{\mathcal{H}}_{1g_1}^{xx} + f_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_{11g_1}^{xx} + \dots \} + \dots \\ & - \frac{(2F + g_1) h_1}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{H}}_{0h_1}^{xx} + f_1 \ddot{\mathcal{H}}_{1h_1}^{xx} + f_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_{11h_1}^{xx} + \dots \} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta\eta}^{xx} + \frac{\eta F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta}^{xx} - \frac{(2F - g_1) g_1 + g_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0g_1}^{xx} - \frac{(2F + g_1) h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0h_1}^{xx} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta\eta}^{xx} + \frac{\eta F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta}^{xx} + \frac{h_1}{A^2} F_0 \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta}^{xx} - \frac{(2F - g_1) g_1 + g_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1g_1}^{xx} - \\ & - \frac{(2F + g_1) h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1h_1}^{xx} = 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathcal{H}}_0^{xx} = \ddot{\mathcal{H}}_0^{xx} + g_1 \ddot{\mathcal{H}}_0^{xx} + g_1^2 \ddot{\mathcal{H}}_0^{xx} + \dots$$

$$\ddot{\mathcal{H}}_1^{xx} = h_1 \ddot{\mathcal{H}}_1^{xx} + h_1 g_1 \ddot{\mathcal{H}}_1^{xx} + \dots$$

$$\frac{1}{Pr} \{ \ddot{\mathcal{H}}_0^{0''} + g_1 \ddot{\mathcal{H}}_0^{1''} + \dots \} + \frac{\eta}{A^2} (F_0 + g_1 F_1 + \dots) \{ \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} + g_1 \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} + \dots \} - \frac{(2F_0 g_1 + \dots)}{A^2} \{ \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} + \dots \} = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_0^{0''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_0^{1''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} - \frac{2F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} = -\eta \frac{F_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{1}{Pr} \{ h_1 \ddot{\mathcal{H}}_1^{0''} + \dots \} + \frac{\eta F_0 + \dots}{A^2} \{ h_1 \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} + \dots \} - \frac{2F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} h_1 = -\frac{h_1}{A^2} \{ F_0 + \dots \} \{ \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} + \dots \}$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_1^{0''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} - \frac{2F_0}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} = -\frac{1}{A^2} F_0 \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\eta = 0 : \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} = 1, \quad \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} = 0, \quad \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty : \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} = 0, \quad \ddot{\mathcal{H}}_0^{1'} = 0, \quad \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} = 0$$

Nastavak za  $T_w = T_w(x, t)$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta\eta} + \eta \frac{F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta} - \frac{n_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} - \frac{(2F - g_1)g_1 + g_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0g_1} + \dots - \frac{(2F + g_1)h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0h_1}^{0'} + \dots - \frac{(2F - n_1)n_1 + n_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{0n_1} + \dots = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta\eta} + \eta \frac{F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1\eta} + \frac{h_1}{A^2} F_0 \ddot{\mathcal{H}}_{0\eta} - \frac{n_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_1^{0'} - \frac{(2F - g_1)g_1 + g_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1g_1} + \dots - \frac{(2F + g_1)h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1h_1}^{0'} - \frac{(2F - n_1)n_1 + n_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1n_1} + \dots = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \ddot{\mathcal{H}}_{1m\eta\eta} + \eta \frac{F}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1m\eta} - \frac{h_1}{A^2} F_0 \eta \ddot{\mathcal{H}}_0^{0'} - \frac{n_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1m}^{0'} - \frac{(2F - g_1)g_1 + g_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1mg_1} + \dots - \frac{(2F + g_1)h_1}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1mh_1}^{0'} + \dots$$

$$- \frac{(2F - n_1)n_1 + n_2}{A^2} \ddot{\mathcal{H}}_{1mn_1} = 0$$

$$\mathcal{H}_0^{**} = \mathcal{H}_0^{**}(\eta; \{g_k\}, \{n_k\}; Pr)$$

$$\mathcal{H}_1^{**} = \mathcal{H}_1^{**}(\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{n_k\}; Pr)$$

$$\mathcal{H}_{1m}^{**} = \mathcal{H}_{1m}^{**}(\eta; \{g_k\}, \{h_k\}, \{n_k\}; Pr)$$

$$\mathcal{H}_0^{**} = \mathcal{H}_0^{**0} + \mathcal{H}_0^{**1} g_1 + \mathcal{H}_0^{**2} n_1 + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} (\mathcal{H}_0^{**0''} + \mathcal{H}_0^{**1''} g_1 + \mathcal{H}_0^{**2''} n_1 + \dots) + \frac{\eta(F_0 + g_1 F_1 + \dots)}{A^2} (\mathcal{H}_0^{**0'} + \mathcal{H}_0^{**1'} g_1 + \mathcal{H}_0^{**2'} n_1 + \dots) - \\ & - \frac{n_1}{A^2} (\mathcal{H}_0^{**0} + \mathcal{H}_0^{**1} g_1 + \dots) - \frac{2F_0 g_1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**1} + \dots - \frac{2F_0 n_1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**1} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \mathcal{H}_0^{**0''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{H}_0^{**0'} = 0 \dots \dots \dots (1) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{H}_0^{**1''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{H}_0^{**1'} - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{H}_0^{**1} = -\eta \frac{F_1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**0'} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{H}_{0n}^{**} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{H}_{0n}^{**1} - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{H}_{0n}^{**} = \frac{1}{A^2} \mathcal{H}_0^{**0} \dots \dots \dots (3)$$

$$\mathcal{H}_1^{**} = h_1 \mathcal{H}_1^{**1} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} h_1 \mathcal{H}_1^{**1} + \dots + \frac{\eta(F_0 + g_1 F_1 + \dots)}{A^2} h_1 \mathcal{H}_1^{**1} - \frac{n_1}{A^2} h_1 \mathcal{H}_1^{**1} - \\ & - \frac{2F_0 h_1}{A^2} \mathcal{H}_1^{**1} + \dots = -\frac{h_1}{A^2} (F_0 + F_0 g_1 + \dots) (\mathcal{H}_0^{**0'} + \mathcal{H}_0^{**1'} g_1 + \dots) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \mathcal{H}_1^{**1''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{H}_1^{**1'} - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{H}_1^{**1} = -\frac{1}{A^2} F_0 \mathcal{H}_0^{**0'} \dots \dots \dots (4) \end{aligned} \right\}$$

$$\mathcal{H}_{1m}^{**} = \mathcal{H}_{1m}^{**1} \cdot h_1 + \dots$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{H}_{1m}^{**1''} + \eta \frac{F_0}{A^2} \mathcal{H}_{1m}^{**1'} - \frac{2F_0}{A^2} \mathcal{H}_{1m}^{**1} = \frac{1}{A^2} F_0 \mathcal{H}_0^{**0'} \dots \dots \dots (5)$$

2.3. Zadati toplotni tok

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{g c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$y=0, \quad \partial T / \partial y = q_0(x, t)$$

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty$$

$$T = T_\infty + \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}; Pr) +$$

$$+ q_0(x, t) \frac{\delta_p(t)}{A} \mathcal{K}(\eta; \{f_k\}, \{g_k\}, \{h_k\}, \{a_k\}, \{b_k\}; Pr)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{U^2}{g c_p} \mathcal{K}'_\eta \cdot \frac{A}{\delta_p} + q_0(x, t) \mathcal{K}'_\eta$$

$$\eta=0 : \mathcal{K}'_\eta = 0, \quad \mathcal{K}''_\eta = 1,$$

$$\eta \rightarrow \infty : \mathcal{K} \rightarrow 0, \quad \mathcal{K}' \rightarrow 0,$$

$$q_0(x, t) = P_0(x) R_0(t), \quad P(x) = P^0(x)$$

$$q_0(x, t) \frac{\delta_p(t)}{A} = P(x) \cdot R(t), \quad R(t) = R_0(t) \frac{\delta_p(t)}{A}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = P'R \mathcal{K}'' + PR \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}''_{f_k} \cdot f'_k + \mathcal{K}''_{a_k} \cdot a'_k)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = PR \mathcal{K}'_\eta \frac{A}{\delta_p} \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = PR \frac{A^2}{\delta_p^2} \mathcal{K}''_{\eta\eta}$$

$$u = V \Omega \mathcal{F}_\eta$$

$$v = - \frac{V' \Omega \delta_p g}{A} - \frac{V \Omega \delta_p}{A} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} \cdot f'_k$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = P'R \mathcal{K}'' - PR \mathcal{K}'_\eta \eta \frac{\delta_p}{\delta_p} + PR \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}''_{g_k} \cdot g'_k + \mathcal{K}''_{h_k} \cdot h'_k + \mathcal{K}''_{b_k} \cdot b'_k) +$$

$$+ V \Omega P'R \mathcal{F}_\eta \mathcal{K}'' + V \Omega PR \mathcal{F}_\eta \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}''_{f_k} \cdot f'_k + \mathcal{K}''_{a_k} \cdot a'_k) -$$

$$- V \Omega PR \mathcal{F} \mathcal{K}'_\eta - V \Omega PR \mathcal{K}''_\eta \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_{f_k} f'_k = \frac{\nu}{Pr} PR \frac{A^2}{\delta_p^2} \mathcal{K}''_{\eta\eta}$$

$$\left| \frac{\delta_p^2}{A^2 \nu PR} \right.$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_{\eta\eta}^{xx} + \frac{\eta \delta_p \delta_p'}{\nu A^2} \mathcal{K}_{\eta}^{xx} + \frac{1}{A^2} \frac{\delta_p'^2}{\nu} \Omega V' F \mathcal{K}_{\eta}^{xx} + \frac{1}{A^2} \frac{\delta_p'^2}{\nu} V \Omega \mathcal{K}_{\eta}^{xx} \sum_{k=1}^{\infty} F_{fk} \cdot f_k' -$$

$$- \frac{\delta_p'^2}{\nu A^2} \Omega V F_{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{fk}^{xx} \cdot f_k' + \mathcal{K}_{a_k}^{xx} \cdot a_k') - \frac{\delta_p'^2}{\nu A^2} (\mathcal{K}_{g_k}^{xx} \cdot g_k' + \mathcal{K}_{h_k}^{xx} \cdot h_k' + \mathcal{K}_{b_k}^{xx} \cdot b_k') -$$

$$- \frac{1}{A^2} \frac{\delta_p'^2}{\nu} \frac{R'}{R} \mathcal{K}^{xx} - \frac{1}{A^2} \frac{\delta_p'^2}{\nu} \Omega V \frac{P'}{P} F_{\eta} \mathcal{K}^{xx} = 0$$

$$a_1 = V \frac{P'}{P}, \quad b_1 = \frac{\delta_p'^2}{\nu} \frac{R'}{R}, \quad \frac{\delta_p \delta_p'}{\nu} = F$$

$$a_k = V^k \frac{P^{(k)}}{P}, \quad b_k = \left(\frac{\delta_p'^2}{\nu}\right)^k \frac{R^{(k)}}{R}$$

$$V \cdot a_k' = (k f_1 - a_1) a_k + a_{k+1} \equiv \alpha_k$$

$$\frac{\delta_p'^2}{\nu} b_k' = \frac{R}{R'} b_1 b_k' = (2 F k - b_1) b_k + b_{k+1} \equiv \beta_k$$

$$\frac{1}{Pr} \mathcal{K}_{\eta\eta}^{xx} + \frac{\eta F}{A^2} \mathcal{K}_{\eta}^{xx} + \frac{h_1 f_1}{A^2} F \mathcal{K}_{\eta}^{xx} + \frac{h_1}{A^2} \mathcal{K}_{\eta}^{xx} \sum_{k=1}^{\infty} F_{fk} \cdot \mu_k -$$

$$- \frac{h_1}{A^2} F_{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{fk}^{xx} \cdot \mu_k + \mathcal{K}_{a_k}^{xx} \cdot a_k) - \frac{1}{A^2} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{g_k}^{xx} \cdot \lambda_k + \mathcal{K}_{h_k}^{xx} \cdot \rho_k + \mathcal{K}_{b_k}^{xx} \cdot \beta_k) -$$

$$- \frac{b_1}{A^2} \mathcal{K}^{xx} - \frac{h_1 a_1}{A^2} F_{\eta} \mathcal{K}^{xx} = 0$$

$$\eta = 0, \quad \mathcal{K}_{\eta}^{xx} = 1$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \mathcal{K}^{xx} \rightarrow 0$$

to je isti rezultat kao za  $\mathcal{K}^{xx}$  ali sa različitim graničnim uslovima.



## ZAHVALNOST

Autor izražava punu zahvalnost za savete prilikom pripremanja prvog dela ovog rada Dr. M. J. Djuriću iz Matematičkog Instituta u Beogradu i docentu Dr. V. Djordjeviću sa Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu za pomoć u pripremanju teze i za programiranje jednačina za numeričku integraciju. Takodje zahvaljujem docentu Dr. V. Simonoviću sa Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu za programiranje nekih diferencijalnih jednačina.

Institutu "Kirilo Savić" u Beogradu zahvaljujem za korišćenje elektronskog digitalnog računara NATIONAL ELLIOTT 803 kao i dipl. mat. R. Gavriću za izvodjenje mašinskog rada.

