MAX ARIE WOTULO

OSNOVI I PRIMENA NEREGULARNIH SPEKTARA NOVE VRSTE

DOKTORSKA TEZA

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

1973

S A D R Ž A J

TREĆA GLAVA.

Primena neregularnih spektara u aritmetici i algebri.

ČETVRTA GLAVA.

Primena neregularnih spektara u empiričkim formulama.

--0--

P R E D G O V O R

Teoriju matematičkih spektara osnovao je 1917 godine veliki srpski matematičar Mihajlo Petrović (1868 - 1943). Prema tome, danas imamo dve grane teorije matematičkih spektara, i to :

- teorijsku granu, čiji je cilj produbljivanje veze izmedju teorije funkcije i transendente aritmetike, i
- primenjenu granu, čiji je cilj u prvom redu smanjivanje broja operacija prilikom izračunavanja, i uopšte rečeno - usavršavanje računske tehnike.

Praktičnu primenu ove teorije našao je 1953 godine Konstantin Orlov, profesor matematike na univerzitetu u Beogradu.

Danas, pojavom kompjutera, koji imaju kapacitete do milion operacija u sekundi, savladani su problemi koji zahtevaju mnogo operacija. Medjutim, i dalje je ostalo pitanje da se problem što ekonomičnije reši, jer uštede u vremenu, naročito kod problema sa bilionima operacija, igra veliku ulogu.

U ovoj tezi se iznosi nekoliko novih priloga matematičkim spektrima, kako teorijskog tako i praktičnog karaktera. Ova teza sastoji se od četiri glave koje su podeljene na nekoliko paragrafa svaka.

Prva glava: obradjuje osnove regularnih spekatara. Osnovni problemi ovde su :
I. Formiranje spektra kad je dat niz (osnovne funkcije).
II. Odredjivanje niza kad je dat spektar.
Iz ova dva osnovna problema proizilazi celokupno izračunavanje pomoću regularnih spektara.

Druga glava : obradjuje osnove neregularnih spektara. Posebno, jednu novu vrstu neregularnih spektara, či-ja je osnovna osobina da su to uvek pozitivni broje-vi za razliku od svih dosadašnjih spektara i pseudo-spektara koji mogu biti pozitivni i negativni broje-vi.

Treća glava : ovde se iznosi osnovna primena neregu-larnih spektara u aritmetici i algebri s ciljem da se pokaže ne samo njihova primenljivost, već i nji-hova koristnost u poredjenju s dosadašnjim spek-tralnim izračunavanjima.

Cetvrta glava : sadrži primenu ovih neregularnih spektara u empiričnim formulama. Ova primena znatno smanjuje broj operacija, lakša je, i značajna za praksu.

P R V A   G L A V A

I. OSNOVI REGULARNIH SPEKTARA

U V O D

Matematički spektar je broj koji se obrazuje pomoću više datih brojeva. Ima mnogo tipova spektara i mnogo načina za njihovo formiranje.

Ova glava prvo iznosi pravilo koje povezuje brojeve i njihove spektralne oblike, koje je nazvano " p r a v i l o n u l a d e v e t". Bazirajući se na ovom pravilu dobijamo dve metode za formiranje spektra; počev sa desne strane pomoću brojeva "nula i devet", i sa leve strane pomoću znakova "plus i minus".
Ove metode su vrlo jednostavne i mogu biti direktno primenjene, čak i kada treba da formiramo spektar niza celih različito označenih brojeva; dok sa ranijim metodama [3] je vršeno : prvo formiranje spektra S_I od pozitivnih brojeva, dok su negativni brojevi morali biti zamenjeni sa nulama zatim formiranje spektra S_{II} od apsolutnih vrednosti negativnih brojeva, dok su pozitivni brojevi morali da budu zamenjeni nulama i da najzad traženi spektar niza celih različito označenih brojeva dobije po formuli $S = S_I - S_{II}$.

Dalje, inverzijom "pravila nula devet" dobija se metoda za odredjivanje niza kad je dat spektar. Takodje, ovaj niz može biti direktno dobijen, dok ranijom metodom [7] dobijen je pomoću sukcesivnog iznalaženja n o m i n a l n i h, p o p r a v l j e n i h i e f e k t i v n i h vrednosti pruga.

Ovde je takodje data metoda cepanja spektara i njihovo sastavljanje u novi spektar, koja je izneta na kraći način u poredjenju sa predhodnim. Primenu ove metode i njenu korist, videćemo u trećoj glavi.

1. PRAVILO NULA-DEVET

Posmatrajmo niz brojeva sa različitim znacima na primer,

$$(1) \qquad N_0,\ N_1,\ -N_2,\ \ldots\ \ldots,\ -N_{k-1},\ N_k$$

koji respektivno imaju različiti broj cifara,

$$(2) \qquad p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ p_k$$

Spektar gornjeg niza brojeva može biti formiran samo ako je ritam,

$$(3) \qquad h_i > p_i$$

Formirajmo sada grupe brojeva,

$$(4) \qquad \mathcal{L}_0\mathcal{N}_0,\ \mathcal{L}_1\mathcal{N}_1,\ \mathcal{L}_2\mathcal{N}_2,\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ \mathcal{L}_k\mathcal{N}_k$$

gde $\mathcal{L}_i$ predstavlja niz od ℓ_i (t.z. ritam obaveznih praznina - rythme lacunaire) [3], nula ili devetki. ℓ_i sastojaće se iz nula ako je N_i pozitivan broj a devetki ako je N_i negativan broj. Dalje $\mathcal{L}_i$, pored toga što zadovoljava ritam, takodje označava (pokazuje) znak odgovarajućeg broja N_i.

Broj cifara iz ove grupe $\mathcal{L}_i\mathcal{N}_i$ jednak je broju jedinica h_i koji se naziva ritam h_i.
Prema tome, možemo tvrditi da grupa $\mathcal{L}_i\mathcal{N}_i$ ima jedan od četiri sledeća oblika:

$0..0N_i$, ako iz (1), broj N_i je pozitivan i N_{i+1} je takodje pozitivan;

$0..0(N_i-1)$, ako je broj N_i pozitivan a N_{i+1} negativan;

$10^{h_i} + N_i$, ako je broj N_i negativan a N_{i+1} pozitivan;

$10^{h_i} + (N_i-1)$, ako su N_i i N_{i+1} negativni.

Gore navedeno pravilo zoveno : <u>p r a v i l o n u l a - d e v e t.</u>

Prvi i drugi izraz odgovara brojevima, koji počinju sa nulom (nulama), a treci i četvrti izraz odgovara brojevima, koji počinju sa devetkom (devetkama). Ako pretpostavimo da svaka grupa ima isti broj cifara tada smatramo ovaj broj kao ritam, tj. onda je

$$h_o = h_1 = h_2 = .. \quad .. \quad .. = h_k = h$$

koje zoveno uniformni ritam. Takav uniformni ritam h zadovoljava uslov,

(5) $$h = h_i > p_i$$

i brišući zareze u(4) dobijamo spektar iz (1)

(6) $$S = \mathcal{L}_o \mathcal{N}_o \mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{N}_2 \, .. \quad .. \, \mathcal{L}_k \mathcal{N}_k$$

To je opšta formula matematičkog spektra ovog oblika. Zamenjujući $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ sa G_i mi uprošćavamo ovu formulu i dobijamo,

(7) $$S = G_o \; G_1 \; G_2 \; .. \; .. \; .. \; G_k$$

sa uniformnim ritmom,

$$h = h_i > p_i$$

Dakle, što se tiče koncepta pravila nula devet, vidimo ovde da se niz sastoji od članova, koji su pozitivni ili negativni celi brojevi, ili samo pozitivni celi brojevi, ali pored toga da jedan ili više od tih brojeva mogu biti nula (e).
Na primer posmatrajmo niz oblika,

$$(8) \quad N_0, \; -N_1, \; 0, \; N_3, \; 0, \; 0, \; -N_6, \; N_7$$

Sada možemo navesti prvo važno pravilo o "znaku nule": [4]

ako je $N_i = 0$ a N_{i+1} negativan, što se ove nule tiče smatramo je kao pozitivan broj;

ako je $N_i = 0$ a N_{i+1} negativan, što se ove nule tiče smatramo je kao negativan broj;

Iz čega imamo dodatnu tvrdnju u vezi pravila nula-devet kao što sledi:

Ako jedan ili više članova niza su nule, tada $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ biće:

0..00 , ako je N_i nula a N_{i+1} pozitivan broj ili pozitivna nula;

9..99 , ako je N_i nula a N_{i+1} negativan broj ili negativna nula;

Ovde je jasno, ukoliko imamo nekoliko nula jednu do druge, tada znak svake nule je isti sa znakom poslednje nule na desnoj strani.

Tada uzimajući uniformni ritam h možemo napisati spektar (8) u sledećem obliku,

$$S = N_0 - 1 \,|\, 10^h - N_1 \,|\, 0..00 \,|\, 0..0N_3 - 1 \,|\, 9..99 \,|\, 9..99 \,|\, 10^h - N_6 \,|\, 0..0N_7$$

Da bi smo imali bolji pregled i razumevanje posmatrajmo sledeći niz uzet kao primer,

$$+7,-4,0,-1,+3,0,0,-8,0,+2,0,+9$$

Svaki član ima isti broj cifara, tako

$$p = 1$$

odakle možemo uzeti uniformni ritam

$$h = 2$$

Tada ćemo dobiti

$$S = 6|95|99|99|02|99|99|92|00|02|00|09$$

ili

6959999029999200020009

Ovaj broj predstavlja spektar uočenog niza sa datim uniformnim ritmom

$$h = 2$$

koji se slaže sa tim nizom.

Navešćemo ovde jedan specijalan slučaj koji treba da bude istaknut. Pretpostavimo da su brojevi u datom nizu svi pozitivni, tada ćemo dobiti

$$(9) \qquad \mathcal{L}_i \mathcal{N}_i = 0..0N_i$$

za svako i. Pošto su svi brojevi pozitivni, $\mathcal{L}_i$ se sastoji samo od nule (a). Oznaka za znak nije potrebna. Odatle dobijamo

$$\ell_i \geqq 0 \qquad (10)$$

Koristeći ovaj uslov i izraz

$$h_i = p_i + \ell_i$$

dokazujeno da u ovom slučaju, spektar se može obrazovati ako je

$$h_i \geqq p_i \qquad (11)$$

Tako spektar niza pozitivnih celih brojeva napisan u opstem obliku sa uniformnim ritmom

$$h = h_i \geqq p_i$$

$$S = G_0 G_1 G_2 \;..\;..\;..\; G_k \qquad (12)$$

2. FORMIRANJE SPEKTRA KOJI POČINJE SA DESNE STRANE

Formirajmo spektar niza brojeva sa različitim znacima i sa uniformnim ritmom koji zadovoljava uslov

$$h = h_i > p_i$$

Počnimo sa prugom na desnom kraju, koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k$.

<u>Ako je N_k pozitivan :</u>

$$\left|\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k \quad \text{je} \right| 0..0N_k$$

Ovde, $\mathcal{L}_k$ označava nulu (e); a ritam obaveznih praznina:

$$\mathcal{L}_k = h - p_k$$

gde je p_k broj cifara N_k :

<u>Ako je N_k negativan :</u>

$$\left|\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k \quad \text{je} \right| 10^h + N_k$$

Ovde, $\mathcal{L}_k$ označava devetku (e).

Ovo su dve mogućnosti sa prugom na desnom kraju, jer smatramo, da broj sledeći na desno od N_k je pozitivna nula.

Predjimo sada na sledeću prugu koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_{k-1} \mathcal{N}_{k-1}$.

Pomoću ranije pokazanog, dobićemo sledeće:

<u>U slučaju da broj u formiranoj pruzi počinje sa 0, tada za N_{k-1} pozitivan :</u>

$$\left|\mathcal{L}_{k-1}\mathcal{N}_{k-1}\right|\mathcal{L}_k\mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad \left|\,0..0N_{k-1}\right|0..0N_k$$

Ovde, $\mathcal{L}_{k-1}$ i $\mathcal{L}_k$ označava nulu (e).

<u>za N_{k-1} negativan :</u>

$$\left|\mathcal{L}_{k-1}\mathcal{N}_{k-1}\right|\mathcal{L}_k\mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad \left|\,(10^h+N_{k-1})\right|0..0N_k$$

a ovde, $\mathcal{L}_{k-1}$ označava devetku (e), dok $\mathcal{L}_k$ nulu (e).

<u>U slučaju da broj u formiranoj pruzi počinje sa 9, tada:</u>

<u>za pozitivan N_{k-1} :</u>

$$\left|\mathcal{L}_{k-1}\mathcal{N}_{k-1}\right|\mathcal{L}_k\mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad \left|\,0..0(N_{k-1}-1)\,\right|\,(10^h+N_k)$$

$\mathcal{L}_{k-1}$ označava nulu (e), dok $\mathcal{L}_k$ devetku (e).

<u>za negativan N_k :</u>

$$\mathcal{L}_{k-1}\mathcal{N}_{k-1}\mathcal{L}_k\mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad 10^h+(N_{k-1}-1)\ (10^h+N_k)$$

$\mathcal{L}_{k-1}$ i $\mathcal{L}_k$ označava devetku (e).

Nastavljajući na takav način dobićemo druge preostale pruge. Pruga na levom kraju ima jedan od četiri sledeća oblika brojeva :

$$\begin{array}{r|}
N_o \\
(N_o-1) \\
(10^h+N_o) \\
10^h+(N_o-1)
\end{array}$$

Treći i četvrti izraz su brojevi koji počinju sa devetkom(a).

Dalje, u slučaju da formiramo prugu koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ gde je $N_i = 0$, tada

<u>ako izraz $\mathcal{L}_{i+1} \mathcal{N}_{i+1}$ iz formirane pruge počinje sa 0,</u>

$$\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i \text{ je } 0..00$$

a ukupan iznos nula je jednak ritmu h.

<u>ako izraz $\mathcal{L}_{i+1} \mathcal{N}_{i+1}$ iz formirane pruge počinje sa 9,</u>

$$\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i \quad \text{je} \quad 9..99$$

a ukupan iznos devetki je jednak ritmu h.

Imajmo na umu da svaka ovako iskazana pruga, ako broj počinje sa 0, ne vrši nikakav uticaj na formiranje sledeće pruge; ali ako pruga počinje sa 9, broj iz sledeće pruge mora biti umanjen za 1.

Najzad, jer tu je uvek najmanje jedna nula ili devetka napisana na levoj strani svakog broja pruge, odatle je jasno da

$$h = h_i > p_i$$

Dakle, ova metoda za formiranje matematičkih spektara je bazirana na <u>pravilu nula devet</u>, a da je ostvareno pomoću nula i devetki.

3. FORMIRANJE SPEKTRA KOJI POČINJE SA LEVE STRANE

Koristeći podatke iz 2., formirajmo spektar koji sada počinje sa leve strane, to je pruga koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_o\mathcal{N}_o$.

Prvo, posmatrajmo znak broja N_1 :

Ako je N_1 pozitivan, tada

za pozitivan N_o:

$$\mathcal{L}_o\mathcal{N}_o \Big| \text{je} \quad N_o \Big|$$

jer ovde, prva(e) nula(e) se ne piše.

za negativan N_o :

$$\mathcal{L}_o\mathcal{N}_o \Big| \text{je} \quad (10^h+N_o) \Big|$$

Ako je N_1 negativan, tada

za pozitivan N_o :

$$\mathcal{L}_o\mathcal{N}_o \Big| \text{je} \quad (N_o-1) \Big|$$

za negativan N_o :

$$\mathcal{L}_o\mathcal{N}_o \Big| \text{je} \quad 10^h+(N_o-1) \Big|$$

Ovo su četiri mogućnosti za levu, recimo prvu prugu. Da bi formirali sledeću prugu, koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_1\mathcal{N}_1$:

Posmatrajmo znak broja N_2 :

Ako je N_2 pozitivan, tada

za pozitivan N_1 :

$$\left|\mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1\right| \quad \text{je} \quad \left|0..0N_1\right|$$

za negativan N_1 :

$$\left|\mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1\right| \quad \text{je} \quad \left|(10^h+N_1)\right|$$

Ako je N_2 negativan, tada

za pozitivan N_1 :

$$\left|\mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1\right| \quad \text{je} \quad \left|0..0(N_1-1)\right|$$

za negativan N_1 :

$$\left|\mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1\right| \quad \text{je} \quad \left|10^h+(N_1-1)\right|$$

Preostale pruge su dobijene na isti način.
Jer sledeći broj od N_k smatra se da je pozitivna nula, tako da zadnja desna pruga ima samo jedan od dva sledeća oblika brojeva:

za pozitivan N_k :

$$\left|\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad \right|0..0N_k$$

za negativan N_k :

$$\left|\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k \quad \text{je} \quad \right|(10^h+N_k)$$

Tako, formirajući prugu koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ mi imamo posla samo sa znakom broja N_{i+1}.

Primetimo, da ako je N_{i+1} pozitivan broj ili nula koja ima karakteristiku pozitivnog broja, onda on ne vrši nikakav uticaj; ali ako je on negativan, tada broju N_i mora da se oduzme 1.

U slučaju da formiramo prugu koja sadrži broj oblika $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ gde je $N_i = 0$, tada :

Ako je N_{i+1} pozitivan ili nula koja ima karakteristiku pozitivnog broja,

$$\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i \quad \text{je} \quad 0..00$$

Ako je N_{i+1} negativan ili nula koja ima karakteristiku negativnog broja,

$$\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i \quad \text{je} \quad 9..99$$

Dakle, ova metoda za formiranje matematičkih spektara je bazirana na pravilu nula devet, a da je ostvarena pomoću z n a k o v a (plus i minus).

4. ODREDJIVANJE NIZA KAD JE DAT SPEKTAR

Posle podele spektra S na pruge počev sa desne strane u saglasnosti sa ritmom

$$h = h_i \geq p_i$$

dobijamo pruge u sledećim oblicima,

$$S = \mathcal{L}_0 \mathcal{N}_0 \,\Big|\, \mathcal{L}_1 \mathcal{N}_1 \,\Big|\, \mathcal{L}_2 \mathcal{N}_2 \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \mathcal{L}_k \mathcal{N}_k$$

Svaka od njih mora da počinje sa 0 ili 9 da bi se zadovoljio uslov datog ritma. U ovom obliku su 0 ili 9 zamenjeni sa $\mathcal{L}_i$, $i = 0,1,2,\ldots k$.

Prva metoda :

Svaka pruga ima tri vrste vrednosti : n o m i n a l n u, p o p r a v l j e n u i e f e k t i v n u. [7]

Nominalna vrednost pruge je broj koji je napisan u toj pruzi.

Popravljena vrednost pruge :

- jednaka je nominalnoj, ako je prva cifra s desne strane dotične pruge nula;
- za jedinicu je veća od nominalne, ako je prva cifra s desne strane dotične pruge devetka.

Efektivna vrednost pruge ;

- jednaka je popravljenoj, ako počinje sa nulom. Prve nule se ne pišu.
- dobija se kad se od popravljene vrednosti oduzme 10^h, ako počinje sa devetkom.

Druga metoda :

Ako obratimo pažnju na veze izmedju $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$ i N_i u pravilu nula devet, dobićemo odmah da je efektivna vrednost N_i jednaka :

$\mathcal{N}_i$	ako $\mathcal{L}_i = 0..0$	a $\mathcal{L}_{i+1} = 0..0$
$\mathcal{N}_{i+1}$	ako $\mathcal{L}_i = 0..0$	a $\mathcal{L}_{i+1} = 9..9$
$\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i - 10^h$	ako $\mathcal{L}_i = 9..9$	a $\mathcal{L}_{i+1} = 0..0$
$(\mathcal{L}_i \mathcal{N}_i + 1) - 10^h$	ako $\mathcal{L}_i = 9..9$	a $\mathcal{L}_{i+1} = 9..9$

sa napomenom da broj na kraju desne strane N_k je:

$\mathcal{N}_k$	ako $\mathcal{L}_k = 0..0$
$\mathcal{L}_k \mathcal{N}_k - 10^h$	ako $\mathcal{L}_k = 9..9$

Najzad treba da kažemo da ova nova metoda brzo se savladjuje i lako izvodi, a pogotovo ako je već savladano pravilo nula-devet.

5. CEPANJE SPEKTRA I NJEGOVO SASTAVLJANJE U NOVI SPEKTAR

Posmatrajmo spektar,

$$(13) \qquad S = G_0 G_1 G_2 G_3 \; \dots \; G_{k-1} G_k$$

sa uniformnim ritmom,

$$h = h_i > p_i$$

U ovom slučaju spektar se sastoji od niza brojeva sa različitim znacima, tako G_i daje efektivnu vrednost N_i gde je $i = 0,1,2,\dots k$, a gde N_i može biti pozitivan ili negativan broj.
Sada ćemo formirati spektar niza brojeva, ali na primer sa sledećim poretkom,

$$(14) \qquad N_6,\ N_3,\ N_1,\ N_4,\ N_7,\ N_5$$

Da smo primenili ranije metode, tada bi smo prvo, našli efektivnu vrednost broja datog spektra (13), i zatim bi smo formirali spektar datim novim poretkom u nizu (14).
Želimo ovde da pokažemo da spektar (14) može biti sačinjen direktno iz datih spektralnih brojeva (13), Ova radnja sačinjena je od cepanja spektra (13), iz čega za $G_i = \mathcal{L}_i \mathcal{N}_i$. dobijamo popravljenu vrednost pruge, [7]

$$G_{i_c} \text{ je jednak}$$

$$G_i \;, \text{ ako } \mathcal{L}_{i+1} = 0..0$$

$$G_i + 1, \text{ ako } \mathcal{L}_{i+1} = 9..9$$

Zatim sastavljanje u novi spektar i napišemo spektar (14) kao što sledi,

(15) $S = (G_6)(G_3)(G_1)(G_4)(G_7)(G_5)$

gde je

(G_i) jednak,

G_{i_c} , ako broj u novo forniranoj pruzi s desne strane pocinje s nulom;

$G_{i_c}-1$, ako broj u novo forniranoj pruzi s desne strane počinje s devetkom,

a u slučaju da

$$G_{i_c} = 0..0$$

tada, dobijamo

$$G_{i_c} - 1 = 9..9$$

gde ukupan iznos nula (devetki) je jednak ritmu h.

Jasno je, da forniranje ovakvog spektra mora da počne s desne strane, gde je nominalna vrednost zadnje desne pruge jednaka njihovoj popravljenoj vrednosti, jer smatramo da je prva cifra s desne strane od dotične pruge nula.

Tako iz (15),

$$(G_5) = G_{5_c}$$

Dalje, forni rajmo spektar od niza brojeva na primer s sledećim poredkom,

(16) $N_6, N_1, N_2, N_3, N_7, N_4$

Ideja je da cepanje spektra i njihovo sastavljanje u novi spektar, može se izvesti u delovima spektra.

Ovde na primer spektralni brojevi $N_1N_2N_3$ su kao jedan deo spektra (13).
Dakle, direktno iz podataka (13), možemo formirati spektar (16), kao što sledi,

$$(17) \qquad S = (G_6)\ (G_1G_2G_3)\ (G_7)\ (G_4)$$

gde je $(G_1G_2G_3)$ jednak,

$G_1G_2G_{3_c}$, ako broj u novo formiranoj pruzi s desne strane počinje s nulom; dakle, u (17), ako (G_7) počinje s nulom;

$G_1G_2G_{3_c}-1$, ako broj (G_7) počinje s devetkom

Dalje, ako

$$G_{3_c} \neq 0..0$$

tada, (17) možemo pisati :

$$(18) \qquad S = (G_6)\ G_1G_2\ (G_3)\ (G_7)\ (G_4)$$

Prema tome spektralni brojevi iz (18) pokazuju da G_1G_2 ostaju nepromenjeni a da se samo G_3 promenio u obliku (G_3), to označava da se samo desna strana delovima spektra promenila.

Neka su data, sa dopuštenim ritmom h,

(19) $$S_N = G_{N_o} G_{N_1} G_{N_2} \ldots\ldots\ldots\ldots G_{N_k}$$

$$S_M = G_{M_o} G_{M_1} G_{M_2} \ldots\ldots\ldots\ldots G_{M_k}$$

Dakle, S_N je spektar niza brojeva sa različitim znacina,

$$N_o, N_1, N_2, \ldots\ldots\ldots N_k$$

a S_M je spektar niza brojeva sa različitim znacima,

$$M_o, M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots M_k$$

Sada ćemo formirati spektar niza brojeva, ali na primer sa sledećim poretkom,

(20) $$N_o, N_1, N_2, M_2, M_3, M_4, N_6, M_5, M_6$$

Sa istim ritmom h, direktno iz podataka (19), formirajmo spektar od (20) te možemo pisati sledeće,

(21) $$S_{NM} = G_{N_o} G_{N_1} (G_{N_2}) G_{M_2} G_{M_3} (G_{M_4})(G_{N_6}) G_{M_5} (G_{M_6})$$

Ova radnja može da se primeni na više spektara, ali ovde smo pokazali samo na dva spektra.

D R U G A   G L A V A

II. OSNOVI NEREGULARNIH SPEKTARA

U V O D

Matematički spektri mogu se obrazovati od različitih oblika, tako imamo spektre niza brojeva, polinoma, vektora, funkcija itd., a kao polazna osnova u ovom slučaju uzećemo spektar polinoma $P(x)$.
Tada regularni spektar polinoma ima opšti oblik [9] :

$$S = 10^{h_1} P(\pm 10^h) + A \tag{22}$$

gde A, h i h_i su celi brojevi.
Svi drugi oblici su nazvani neregularni spektri ; na primer spektar,

$$S = 1987992017$$

(sa ritmom $h=3$), od polinoma

$$2\,x^3 - 12\,x^2 - 8\,x + 17$$

s totalnim popravljenim brojem

$$C_t = 1001000000$$

daje totalno popravljeni spektar S_t ,

$$S_t = 2988992017$$

S_t je neregularan spektar, jer nema oblik (22).

Ipak ovi neregularni spektri imaju iste pruge kao i odgovarajući regularni spektri.

Ova glava upoznaje nas s novom vrstom neregularnih spektara, koji imaju svojstvo da budu uvek pozitivni brojevi. Takvi spektri mogu imati isti broj pruga u tom slučaju se nazivaju normalizovani ili jednu prugu više u tom slučaju se nazivaju denormalizovani spektri. Kako je očigledno normalizovani neregularni spektar jednostavniji od denormalizovanog, to ostavimo za sledeći paragraf Na osnovu baziranje ovih spektara kao primer upostavimo naj jednostavniji odnos izmedju normalizovanog neregularnog spektra i regularnog spektra.

Taj odnos daje

$$S^* = S + 10^{(n+1)h} \tag{23}$$

gde je n stepen polinoma.

U daljim paragrafima nalazi se metoda formiranja zasebnih spektara gde primena neregularnih spektara pokazuje značajnu prednost.

1. JEDNAKOST NEREGULARNIH SPEKTARA

Defininicija ovih neregularnih spektara uvezeno pomoću pojma jednakosti.

Posmatrajmo niz brojeva sa različitim znacima

$$(24) \qquad N_o, N_1, -N_2, \ldots \ldots, -N_{k-1}, N_k$$

Ako je S regularni spektar od (24), tada S ima k + 1 pruga.

Dva regularna spektra sa istim ritmom su jednaka ako :

(a) oba imaju isti broj pruga,

(b) svi brojevi u prugama prvog spektra su isti sa brojevima u odgovarajućim prugama drugog spektra,

(c) oba imaju isti znak.

Sada, ako za S^* označimo neregularni spektar niza brojeva (24), tada ova nova vrsta neregularnog spektra (23) ima jednu prugu više nego regularni spektar S. Ova pruga se nalazi u prvom delu s leve strane, i nazivamo je neutralna pruga, zašto što ona ne zavisi od niza (24) od koga se neregularni spektar formira. Stoga neregularni spektar označavamo

$$\mathscr{P} \,|\, S_T^*$$

gde je $\mathscr{P}$ neutralna pruga, a S_T^* normalizovani oblik neregularnog spektra. Za $\mathscr{P} = 0$, pišemo

$$S_T^* = S^*$$

Dalje, ako je S^* normalizovani neregularni spektar niza brojeva sa različitim znacima, $S^*_{N,j}$ je oblik koji pokazuje normalizovani neregularni spektar N-tog niza, a koji se sastoji od j pruga.

Dakle, ako je $N = N_o, N_1, N_2, \ldots\ldots, N_k$

onda je $S^*_{N,j} = G_{N_o}\ G_{N_1}\ G_{N_2} \ldots\ldots\ G_{N_k}$

koji ima $j = k + 1$ pruga.

(G_{N_i} zamenjuje izraz $\mathscr{L}_i\ \mathscr{N}_i$, $i=0,1,2,\ldots k$)

Na primer, oblik $S^*_{N,3}$ daje

	$G_{N_o}\ G_{N_1}\ G_{N_2}$		
ili	002 997 012	sa	h=3
	9927 0137 9854		h=4
	....		

oblik $S^*_{M,4}$ daje

	$G_{M_o}\ G_{M_1}\ G_{M_2}\ G_{M_3}$	
ili	927 082 011 993	h=3
	0124 9988 0046 9765	h=4
	....	

Dva neregularna spektra sa istim ritmom su jednaka ako :

(a) oba imaju isti broj pruga,

(b) svi brojevi u prugama prvog spektra su isti sa brojevima u odgovarajućim prugama drugog spektra,

(c) neutralna pruga može biti proizvodno, što jeste glavna teoritska razlika izmedju regularnog i neregularnog spektra. Potreba za postojanja neutralne pruge postaće očigledna prilikom primene ovih spektara u izračunavanju (u trećoj glavi).

Dakle, oblici $S^*_{M,5}$ i $S^*_{N,5}$ imaju iste pruge, oni su jednaki, onda i samo onda

$$G_{M_i} = G_{N_i}$$

za $i = 0,1,2,3,4.$

Dalje, ako $S^*_{M,j}$ i $S^*_{N,j}$ su jednaki, tada je njihova razlika

$$S^*_{M,j} - S^*_{N,j} = S^*_{O,j}$$

ili pišemo O,j ili samo O.

Najzad, možemo da kažemo :

- Jednakost normalizovanih oblika dva neregularna spektara sa istim ritmom je onda i samo onda kada se oni poklapaju.
- Njihova razlika, jednaka je O.

2. NORMALIZACIJA NEREGULARNIH SPEKTARA

Ako je S* normalizovani oblik neregularnih spektara, nesto na levoj strani od S*

$$\ldots . \mid S^*$$

nazivamo neutralnu prugu.

U ovoj neutralnoj pruzi može se napisati bilo koji broj, ili se sam pojavi prilikom računanja

$$\mathcal{P} \mid S^*$$

$\mathcal{P}$ označamo neutralna pruga.

Taj broj $\mathcal{P}$ nema nikakvog uticaja na S*, a $\mathcal{P} \mid S^*$ je denormalizovani oblik neregularnog spektra.

U nekim slučajima je potrebno da pre početka računanja stavimo neutralnu prugu u neregularni spektar, time mi menjamo oblik normalizovanog u denormalizovani oblik neregularnog spektra. Koliko će biti ta neutralna pruga zavisi od samog računa. U stvari račun uslovljava minimum te pruge. U koliko uzmemo većom tu ništa neće nazgoditi izračunavanju. Slično tome kako uzimanja veći ritma kod regularnih spektara ne zgodi ništa izračunavanja. Na suprot tome, nakon izračunavanja u nekom slučaju dobijamo broj $\mathcal{P} \mid S^*$, a.uzimamo samo S* t.j. normalizovan oblik neregularnog spektara.
Normalizovani oblik neregularnog spektra je oblik, gde je neutralni deo O.

Prema tome, u opštem slučaju neregularni spektri imaju prvi (neutralni) deo koji ne utice na vrednost niza.

3. UPOREDJIVANJE NORMALIZACIJE NEREGULARNIH SPEKTARA SA NORMALIZACIJOM BROJEVA SA POKRETNIM ZAREZOM NA ELEKTRONSKIM RAČUNARIMA

Svaki broj A pretstavljen u mašini u binarnim obliku je

$$A = \pm 10^{p} \sum_{k=1}^{n} a_k \, 10^{-k} \tag{25}$$

gde je a_k cifra 0 ili 1.

Normalni oblik broja je

$$p_o p_1 p_2 \ldots p_r a_o a_1 a_2 \ldots a_n \tag{26}$$

gde $p_o, p_1, p_2 \ldots p_r$ obrazuju rank broja (p_o je znak ranka), $a_o, a_1, a_2 \ldots a_n$ obrazuju cifarski deo broja A (a_o je znak broja A).

Nakon računanja, rezultat brojeva treba da se normalizuju. Normalizovani brojevi imaju sledeći oblik

$$10^{p} q \tag{27}$$

gde je $q = a_o, a_1 a_2 \ldots a_n$ sa $a_1 = 1$, tako

$$\frac{1}{10} \leqslant q < 1$$

Dakle, ako na primer dobijamo rezultat u denormalizovanom obliku

$$10^{p'} q'$$

U tom slučaju, ovaj broj treba da se normalizuje kao što sledi :

ako $|q'| > 1$, moramo pomaknuti zarez za t cifara ulevo tako da dobijamo q, koji odgovara $\frac{1}{10} \leq |q| < 1$.

Prema tome rank će biti

$$p = p' + t$$

ako $|q'| < \frac{1}{10}$, moramo pomaknuti zarez za t cifara udesnu, tako da dobijamo q, koji odgovara $\frac{1}{10} \leq q < 1$, a

$$p = p' - t .$$

Kod spektralne metode normalizacije se vrši na sasvim drugački način. Ako dobijamo nakon računanja kao rezultat denormalizovani oblik neregularnog spektra ,

$$\mathcal{P} \mid S_T^*$$

onda normalizujemo ovaj broj, jednostavno odbacujući $\mathcal{P}$ (t.j. neutralna pruga), t.j. zamenjujući $\mathcal{P}$ nulom.

Dakle, normalizovani oblik neregularnog spektra je ako je broj $\mathcal{P}$ jednak 0

(28) $\qquad$ $0..0\ S_T^*$

ili pišemo samo S_T^* t.j. normalizovani oblik neregularnog spektra.

4. VEZA IZMEDJU REGULARNIH SPEKTARA I NEREGULARNIH SPEKTARA NOVE VRSTE POSMATRANA U OPŠTEM OBLIKU

Posmatrajmo opštu formulu matematičkog spektra (6),

$$S = \mathcal{h}_0 \mathcal{N}_0 \mathcal{h}_1 \mathcal{N}_1 \mathcal{h}_2 \mathcal{N}_2 \;\;\vdots\vdots\vdots\;\; \mathcal{h}_k \mathcal{N}_k$$

s uniformnim ritmom

$$h = h_i > p_i$$

Dakle, spektar se sastoji od niza brojeva s različitim znacima.

Ako je prvi broj niza pozitivan, na primer pišemo,

$$+ N_0, \ldots\ldots$$

tada, prema pravilu nula devet dobićemo da je $\mathcal{h}_0 \mathcal{N}_0$ jednak :

$$0..0N_0$$

ili $$0..0(N_0-1)$$

iz čega spektar (6) može da se napise,

(29) $$S = 0..0 \mathcal{N}_0 \mathcal{h}_1 \mathcal{N}_1 \mathcal{h}_2 \mathcal{N}_2 \;\ldots\; \mathcal{h}_k \mathcal{N}_k$$

ove prve nule mogu da se ne pišu.

Sada ćemo primetiti da ako je prvi broj niza negativan, t.j.

$$- N_0 , \ldots\ldots$$

tada, prema pravilu nula devet $\mathcal{h}_0 \mathcal{N}_0$ biće :

$$10^h + (-N_o)$$

ili $$10^h + (-N_o - 1)$$

Ova dva izraza su brojevi, koji počinju s devetkom, prema tome spektar (6) postaje,

$$(30) \qquad S^* = 9\ldots9\, \mathcal{N}_o\, \ell_1\, \mathcal{N}_1\, \ell_2\, \mathcal{N}_2\, \ldots\ldots\, \ell_k\, \mathcal{N}_k$$

Ovaj oblik je jedan nova vrsta neregularnog spektra i to je u normalizovanom obliku. Ova vrsta spektra ima svojstvo da bude pozitivan broj. Prve devetke treba uvek da se pišu za razlika od 0..0 koji mogu da se ne pišu.

Posmatrajmo kao primer niz :

$$-7,\ 5,\ -12,\ 3,\ -8,\ 16$$

Najveći broj cifara je $p=2$, odakle možemo uzeti uniformni ritam,

$$h = 3$$

Zato regularni spektar S, kao što se zna je

$$S = -\ 6\ 995\ 011\ 997\ 007\ 984$$

to je kao što se vidi n e g a t i v a n broj.

Neregularni spektar S^*, prema (30) biće :

$$S^* = 993\ 004\ 988\ 002\ 992\ 016$$

t.j. p o z i t i v a n broj.

Prema tome, ako su brojevi datog niza smatrani kao koeficijenti polinoma, tada će se zvati [9] :

<u>S, regularnim spektrom</u>
<u>S*, neregularnim spektrom</u>

gde je odnos koji povezuje neregularne spektre i regularne spektre (23),

$$S^* = S + 10^{(n+1)h}$$

gde je n stepen polinoma, a h je uniformni ritam.

Tako, gore dati niz, predstavlja koeficijente polinoma 5^{-tog} stepena, tako da je n=5 i h=3, tada prema (23) dobijamo,

$$S^* = S + 10^{18}$$

ili $$S = S^* - 10^{18}$$

Ako je prvi broj niza pozitivan, na primer

7, 5, -12, 3, -8, 16

tada s ritmom h=3 , dobijamo regularni spektar

$$S = 7\ 004\ 988\ 002\ 992\ 016$$

Prema formuli (23) dobija se

$$S^* = 1\ 007\ 004\ 988\ 002\ 992\ 016$$

Kao što se vidi ovde imamo jednu prugu više umesto 6 imamo 7 pruga, od koji prva neutralna pruga iznosi $\mathscr{P} = 1$, što ne utice na vrednost niza.

Normalizacija ovog neregularnog spektra dobija se

007 004 988 002 992 006

što predstavljaju isti niz brojeva. Ovo može napisati i spojeno sa izostavljenjem početnih nula t.j.

7004988002992006

ali u tom slučaju moramo obavezna navesti da je ritam 3.

Prema tome, ovde tvrdimo da su ovi novi neregularni uvek pozitivni brojevi, za razliku od regularnih spektara koji mogu biti pozitivni i negativni brojevi. Tako, bez obzira što se problemi sastoje od pozitivnih i negativnih brojeva, primenom neregularnih spektara radićemo samo sa spektrima koji su pozitivnih brojeva. Drugim rečima, za vreme izračunanja uopšte ne moramo da vodimo računa o znacima.

Dakle, prednost ovih neregularnih spektara je dosta velika a ostaje samo da je dokaženo, što ćemo uraditi u daljem radu.

5. FORMIRANJE NEGATIVNOG REGULARNOG SPEKTRA POMOĆU NEREGULARNOG SPEKTRA

Formirajmo spektar niza brojeva sa različitim znacima gde je prvi broj niza negativan i s uniformnim ritmom koji zadovoljava uslov,

$$h = h_i > p_i$$

Jasno je da formiranje neregularnog spektra kao i formiranje pozitivnog regularnog spektra može biti izvedeni direktno pomoću pravila nula devet, dok formiranje negativnog regularnog spektra u ovom slučaju može da se radi na dva načina.
Neka je dat, kao primer niz,

$$- N_0,\ N_1,\ -N_2,\ -N_3,\ \ldots\ldots,\ N_k \tag{31}$$

<u>prvi način</u>: promenimo znakove svih brojeva iz formule (31), zatim od tako dobijenih brojeva formiramo spektar i najzad stavimo negativan znak ispred dobijenog spektra ;

<u>drugi način</u>: formiramo neregularni spektar S* datog niza (31), a nalazimo regularni spektar S iz odnosa koji povezuje S* i S,

$$S = S^* - 10^{(n+1)h}$$

gde je n stepen polinoma. U ovom slučaju, brojevi datog niza su posmatrani kao koeficijenti polinoma, gde je $n = k$.

Na drugi način jasno se vidi da je to uradjeno pomoću neregularnog spektra i da je taj način prihvatljiv.

6. FORMIRANJE SPEKTRA ČIJI SU CLANOVI SPEKTRI

U prethodnom delu govorili smo o formiranju spektra iz niza brojeva, a u nekim problemima videćemo da je korisno ako možemo da formiramo spektar od spektara.

Neka su dati spektri

$$S_o,\ S_1,\ S_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ S_k \tag{32}$$

gde S_o ima n_o prugu s uniformnim ritmom h_o ;
S_1 " n_1 " " " h_1 ;
. . .
. . .
S_k " n_k " " " h_k ,

gde su n_i i h_i celi brojevi za $i=0,1,2,\ldots,k$.

Dakle, iz (32) možemo da pišemo u normalizovanom obliku,

$$\begin{array}{lllllll} S_o^* = & G_{oo} & G_{o1} & G_{o2} & \cdots\cdots & G_{o(n_o-1)} \\ S_1^* = & G_{1o} & G_{11} & G_{12} & \cdots\cdots & G_{1(n_1-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ S_k^* = & G_{ko} & G_{k1} & G_{k2} & \cdots\cdots & G_{k(n_k-1)} \end{array} \tag{33}$$

gde su prve nule ili devetke od G_{io}, za $i=0,1,2,..k$ treba da se napišu.

Da bismo obrazovali spektar (32), u ovom slučaju učinimo sledeće :

$$(34) \qquad S_s = (S_o)(S_1)(S_2) \ldots\ldots (S_k)$$

Ovaj spektar ima dve razlike ritmova, prvi, to su veliki ritmovi, koji dele spektar na pruge, koji su svake sa sebe spektar. Ovi ritmovi sabeležu se sa velikim H. Zatim postoji malih ritmova, koji ove pruge posmatrane kao spektri dele ponovo na pruge, koji se mogu nazivati podprugama kao što sve pruge mogu nazivati podspektrima. Ovi mali ritmovi sabiležani sa malim h.

Tako sa spektar velikih ritmova

$$S_H = G_{H_o} G_{H_1} G_{H_2} \ldots\ldots G_{H_k}$$

s ritmom jednako broju cifara najvećeg H_i , za $i=0,1,2,..,k$.

dok je spektar malih ritmova

$$S_h = G_{h_o} G_{h_1} G_{h_2} \ldots\ldots G_{h_k}$$

s ritmom jednako broju cifara najvećeg h_i , za $i=0,1,2,..,k$.

Iz (34) imamo da je (S_i) jednak :

S_i^* , ako je broj (S_{i+1}) počinje sa 0 ;

S_i^*-1 , ako je broj (S_{i+1}) počinje sa 9 ,

a jasno je

$$(S_k) = S_k^*$$

Primer, neka su dati spektri

$S_o = 970559201$, s ritmom $h_o = 2$

$S_1 = 8984023$, $h_1 = 3$

$S_2 = 991701239704$, $h_2 = 4$

$S_3 = 2398754$, $h_3 = 5$

stoga daje,

$S_o^* = 97|05|92|01$, tada $n_o=4$, a $H_o=8$;

$S_1^* = 008|984|023$, $n_1=3$, $H_1=9$;

$S_2^* = 9917|0123|9704$, $n_2=3$, $H_2=12$;

$S_3^* = 00023|98754$, $n_3=2$, $H_3=10$.

Prema tome dobiće se

$$S_s = 97059201008984022991701239704000239875 4$$

gde je spektar velikih ritmova

$$S_H = 8091210$$

s ritmom 2,

a spektar malih ritmova

$$S_h = 4332$$

s ritmom 1.

Dalje iz (32) može se formirati

(35) $S_s = (S_o')(S_1')(S_2') \ldots\ldots (S_k')$

s uniformnim ritmom

$$h > h_i$$

za $i = 0,1,2,\ldots,k$.

Dakle $(S_i^!)$ je jednak :

$$(S_i^!) = \begin{cases} S_i^! & \text{, ako je } (S_{i+1}^!) \text{ počinje sa } 0 \text{ ;} \\ S_i^!+1 & \text{, ako je } (S_{i+1}^!) \text{ počinje sa } 9 \text{ ;} \end{cases}$$

a

$$(S_k^!) = S_k^! \text{ .}$$

$S_i^!$ je spektar S_i^* s povečanim ritmom

$$h = h_i + \ell_i$$

Primer, iz primera (34), ako uzmemo sada $h=5$, tada dobijamo

$$\begin{aligned} S_o^! &= 9999700005999920001 \\ S_1^! &= 000089998400023 \\ S_2^! &= 9991700123997 04 \\ S_3^! &= 0002398754 \end{aligned}$$

Prema tome

$$S_s = \begin{array}{l} 999970000599992000010000899984 \\ 0002299917001239970400023 98754 \end{array}$$

sa $S_H = 20151510$, s ritmom 2 ;
$S_h = 5555$, s ritmom 1 .

Primetimo da je ova metoda, pomoću neregularnih spektara uradjena na kraći i jednostavniji način, upoređujući ga s onim koji se upotrebljavaju regularne spektre, jer tada moramo prvo da nadjemo efektivne vrednosti svih datih spektara; posebno pažnja treba da se obrati na znake, pa se tek onda mogu formirati novi spektri niza brojeva sa različitim znacima. Dakle, drugim rečima ova metoda pomoću neregularnih spektara, ima znatniju prednost nad onom sa regularnih spektrima.

7. FORMIRANJE SPEKTRA ČIJI SU CLANOVI PODSPEKTRI RAZLIČITIH SPEKTARA

Sada, posnatrajmo spektre naprimer,

$$
(36)\qquad
\begin{aligned}
S_0^* &= G_{00}\ G_{01}\ G_{02}\ \cdots\ G_{05}\\
S_1^* &= G_{10}\ G_{11}\ G_{12}\ \cdots\ G_{15}\\
S_2^* &= G_{20}\ G_{21}\ G_{22}\ \cdots\ G_{25}
\end{aligned}
$$

sa uniformnim ritmom h.

Postupak se bazira na "cepanju" i "sastavljanju" brojeva (15), tom priliku se koristi pravila nula devet, tako možemo formirati spektar gde su clanovi podspektri gornjih datih spektara. Za primer uzmimo ono što sledi :

$$(37)\quad S^* = G_{00}\ G_{01}\ (G_{02})\ (G_{21})\ (G_{12})\ G_{03}\ (G_{04})\ (G_{11})$$

Broj u zagradama znači da je :

(G_{ij}) jednak :

G_{ij_c} , ako je iz (37) broj s desne strane u formiranoj pruzi počinje sa 0 ;

$G_{ij_c}{}^{-1}$, ako je broj s desne strane u formiranoj pruzi počinje sa 9,

gde je G_{ij_c} popravljena vrednosti j^{-te} pruge spektra S_i^*.

Dakle u ovom primeru (37),

$$(G_{11}) = G_{11_c}$$

Zatim, formiranje daljih spektara radi se na isti način t.j. s desne strane.

Dalje, posmatrajmo spektre (36), ali sada s ritmovima

$$h_o, \; h_1 \text{ i } h_2$$

stoga je (37) biće,

(38) $S^* = G_{oo}\; G_{o1}\; (G_{o2})\; (G_{21})\; (G_{12})\; G_{o3}\; (G_{o4})\; (G_{11})$

sa $\quad S_h = G_{h_o} G_{h_o} G_{h_o} G_{h_2} G_{h_1} G_{h_o} G_{h_o} G_{h_1}$

s ritmom jednakom broju cifara najvećeg h_i, $i = 0,1,2$.

Osim toga, iz spektra (38), može se formirati spektar s uniformnim ritmom,

$$h \geqslant h_i$$

za $i=0,1,2$.

Dakle dobićemo,

(39) $S^* = G'_{oo}\; G'_{o1}\; (G'_{o2})\; (G'_{21})\; (G'_{12})\; G'_{o3}\; (G'_{o4})\; (G'_{11})$

gde je $\quad (G'_{ij})$ jednak :

(G_{ij}) s povećanim ritmom

$$h = h_i + \ell_i$$

Na primer spektri su :

$S_o^* =$ 04 03 92 97 01 sa $h_o = 2$,

$S_1^* =$ 99972 01234 98833 00456 $h_1 = 5$,

$S_2^* =$ 0000345 9654902 9932143 0223344 $h_2 = 7$.

Prema (38) dobićemo sledeći broj

$$S^* = 040392965490298832970101235$$

sa $S_h =$ 22275225
s ritmom 1.

Medjutim isti spektar s uniformnim ritmom, prema (39) daće

$$h = h_2 = 7$$

prema tome

$S^* =$ 0000004 0000003 9999992 9654902 9998832 9999997
0000001 0001235

ili,

$S =$ 40000003999999296549029998832999999 7
00000010001235

s ritmom 7.

8. ODREDJIVANJE NIZA NIZOVA KAD JE DAT SPEKTAR SPEKTARA

Neka je dat spektar spektara

(40) $S = 127952389709910899080380972800 11$

sa $S_H = 100816$, s ritmom 2 ; i

$S_h = 524$, s ritmom 1.

Prema (34), iz S_H dobijamo : $H_o=10$, $H_1=8$, $H_2=16$; a iz S_h dobijamo : $h_o=5$, $h_1=2$, $h_2=4$.

Prvo delimo spektar S na pruge počev s desne strane pomoću velikih ritmova, što daje

$$S^* = 0012795238 \,|\, 97099108 \,|\, 9908038097280011$$

Popravljene vrednosti pruga odgovaraju neregularnim spektrima S_o^*, S_1^* i S_2^*, dakle spektri će biti

$$S_o^* = 0012795239$$
$$S_1^* = 97099109$$
$$S_2^* = 9908038097280011$$

Sada delimo spektre na pruge pomoću malih ritmova dobiće se

$$S_0^* = 00127|95239$$
$$S_1^* = 97|09|91|09$$
$$S_2^* = 9908|0380|9728|0011$$

Tako da efektivne vrednosti pruga odgovaraju nizu brojeva

128, -4761, -3, 10, -9, 1, -92, 381,-272, 11

U ovom slucaju jasno je da veliki H_i i mali h_i su uvek pozitivni brojevi. Stoga S_H i S_h su spektri niza pozitivnih celih brojeva, iz cega njihovi ritmovi su zadovoljuci

$$h \geq p_i$$

t.j. uniformni ritam.

TREĆA GLAVA

III. PRIMENA NEREGULARNIH SPEKTARA U ARITMETICI I ALGEBRI

U V O D

U ovoj glavi su date neke osnovne primene neregularnih spektara sa namerom da se dokaže njihova primenljivost a u isto vreme i da se pokaže njihova prednost.

Iste primene mogu se dobiti i upotrebom regularnih spektara ali primena neregularnih spektara je u nekim slučajima kraća i jednostavnija, naročito sa problemima koji sadrže brojeve različitih znakova. Dakle u primeni iako se problemi sastoje od pozitivnih i negativnih brojeva, neregularni spektri ce uvek biti pozitivni brojevi, stoga za vreme računanja uopšte ne moramo da vodimo računa o znacima.

Treba da iztaknemo naročito prednost neregularnih spektara nad regularnim spektrima u slučaju kada dolazi do cepanje ili slepljivanje njihovih delova.

1. SABIRANJE

1.1 SABIRANJE DVA NIZA BROJEVA

Posmatrajmo na primer dva niza brojeva M_i i N_i (i=0,1,2,...k), s različitim znacima.

Pomoću spektralne metode, dodajmo ove broje kao u sledećem primeru ; s dopustenim ritmom

$$
(41)\quad \begin{array}{lllllll}
S_M^* & = & G_{M_0} & G_{M_1} & G_{M_2} & \cdots & G_{M_k} \\
S_N^* & = & G_{N_0} & G_{N_1} & G_{N_2} & \cdots & G_{N_k} \\
\hline
S_T & = & G_{T_0} & G_{T_1} & G_{T_2} & \cdots & G_{T_k}
\end{array}
$$

Posle podele dobijenog spektra S_T na pruge počev s desne strane, dobijamo

$$S_T = \mathcal{P}\, S_T^*$$

gde je $\mathcal{P}$ neutralna pruga,
S_T^* normalizovani neregularni spektar.

$$S_T^* = G_{T_0} \; G_{T_1} \; G_{T_2} \; \cdots \; G_{T_k}$$

Iz čega :

(a) ako je M_0 negativan, a N_0 pozitivan, tada G_{M_0} počinje sa 9..9, a G_{N_0} sa 0..0.

U ovom slučaju dobijamo :
ako G_{T_0} počinje sa 9..9, tada

$$S_T = 0..0 \mid S_T^*$$

Ovde je rezultat već u normalizovanom obliku neregularnog spektra.

Ako G_{T_o} počinje sa 0..0, tada

$$S_T = 1 | S_T^*$$

Rezultat je denormalizovan oblik neregularnog spektra, a normalizovani neregularnog spektra je S_T^*.

(b) Ako su M_o i N_o pozitivni, tada G_{M_o}, G_{N_o} i G_{T_o} počinju sa 0..0. Ovde dobijamo,

$$S_T = 0..0 | S_T^*$$

(c) Ako su M_o i N_o negativni, tada G_{M_o}, G_{N_o} i G_{T_o} počinju sa 9..9.

Ovde dobijamo

$$S_T = 1 | S_T^*$$

Konačno dobijamo efektivnu vrednost pruge,

$$T_i = M_i + N_i$$

za $i = 0,1,2,\ldots,k$.

1.2 SABIRANJE NEKOLIKO NIZA BROJEVA

Posmatrajmo sabiranje nekoliko niza brojeva, na primer :

$$(42)\qquad \begin{array}{lllll} A_{oo}, & A_{o1}, & A_{o2}, & \cdots\cdots & A_{on} \\ A_{1o}, & A_{11}, & A_{12}, & \cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{2o}, & A_{21}, & A_{22}, & \cdots\cdots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ A_{no}, & A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots\cdots & A_{nn} \end{array}$$

Prvo treba odrediti ritam. Za ovakav zadatak ritam se:
na grublji način odredjuje ovako : s obzirom na elemente kolona, ako je tu deset ili manje sabiraka u stupcu dobićemo ritam, koji jednak broju cifara najvećeg broja (po apsolutnoj vrednosti) u zadatku, dodati 2 ; ako ima više od 10 sabiraka a manje od 100 ili 100, onda treba umesto 2 dodai 3; na precizniji način, ako ima n sabiraka i najveći sabirak je α, tada indikatorski broj $i = n\alpha$. Tako dobićemo ritam, koji je jednak broju cifara indikatorskog broja više 1.

Napisaćemo sada gore date brojeve u spektralnim oblicima, sabirati ih, dobićemo sledeće

$$(43)\qquad \begin{array}{lcl} S^*_o & = & G_{A_{oo}} G_{A_{o1}} G_{A_{o2}} \cdots\cdots G_{A_{on}} \\ S^*_1 & = & G_{A_{1o}} G_{A_{11}} G_{A_{12}} \cdots\cdots G_{A_{1n}} \\ S^*_2 & = & G_{A_{2o}} G_{A_{21}} G_{A_{22}} \cdots\cdots G_{A_{2n}} \\ \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdots \quad \cdot \\ \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots\cdots \quad \cdot \\ S^*_n & = & G_{A_{no}} G_{A_{n1}} G_{A_{n2}} \cdots\cdots G_{A_{nn}} \\ \hline S_T & = & \mathcal{P}\; G_{T_o}\; G_{T_1}\; G_{T_2} \cdots\cdots G_{T_n} \end{array}$$

Dobijani spektar S_T daje

$$S_T = \mathcal{P} | S^*_T$$

gde $\mathcal{P}$ neutralni broj, a S_T^* normalizovani neregularnog spektra.

Efektivna vrednost svaka pruga od S_T^* biće :

$$
\begin{array}{lll}
 & T_o = & (A_{oo}+ A_{1o}+ A_{2o}+ \cdots \cdots + A_{no}) \\
 & T_1 = & (A_{o1}+ A_{11}+ A_{21}+ \cdots \cdots + A_{n1}) \\
(44) & T_2 = & (A_{o2}+ A_{12}+ A_{22}+ \cdots \cdots + A_{n2}) \\
 & \vdots & \vdots \\
 & T_n = & (A_{on}+ A_{1n}+ A_{2n}+ \cdots \cdots + A_{nn})
\end{array}
$$

Tako da je T_j zbir brojeva s različitim znacima u j^{-toj} koloni. Treba spomenuti da je za gore navedeni problem potrebna samo n operacija sabiranja.

Da bi smo lakše razumeli demonstriraćeno jedan primer ; naći zbir u svakoj koloni sledećih brojeva :

42	-51	23	-38	27
-15	12	-16	17	-33
17	26	-34	-11	24
-10	-28	14	8	-62
-8	-32	12	56	-7

Za gornji primer ritam odredjen na grublji način je 4 ; indikatorski broj je 5 x 62 = 310, tada ritam odredjen na precizan način je takodje 4. Dakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 419949002299620027 \\
S_2^* &= 99850011998400169967 \\
S_3 &= 170025996599890024 \\
S_4^* &= 99899972001400089938 \\
S_5^* &= 99919968001200569993
\end{aligned}
$$

$$S_T = 300259926999900339949$$

Prvo delimo S_T na pruge počev s desne strane pomoću ritma koji već znamo,

$$S_T = 3|0025|9926|9999|0033|9949$$

iz čega dobijamo $\mathcal{P} = 3$, a normalizovani neregularnog spektra

$$S_T^* = 0025\ 9926\ 9999\ 0033\ 9949$$

dok svaka pruga od S_T^* odredjuje vrednost odgovarajuće kolone, a njihove efektivne vrednosti su :

$$26, \quad -73, \quad -1, \quad 34, \quad -51$$

U ovom slučaju broj $\mathcal{P}$ (uzimajući njegovu efektivnu vrednost P) može biti upotrebljen kao kontrola. Ovde, pokazuje da je jednak zbiru brojevih nizova gde su prvi brojevi negativni (t.j. A_{io} negativan, ili S_i^* počinje sa 9..9).

Iz $$S_T = \mathcal{P}|S_T^*$$

ako S_T^* počinje sa 0..0, tada $P = \mathcal{P}$;
S_T^* počinje sa 9..9, tada $P = \mathcal{P} + 1$.

Samo u ovom slučaju, imamo da je

$\mathcal{P}$ n o m i n a l n a vrednost, a
P e f e k t i v n a vrednost [7].

U gornjem primeru $P = \mathcal{P} = 3$ je stvaran jer u zadatku postoji 3 spektra, koji počinje sa devetkom (devetkama).

2. ODUZIMANJE

Posmatrajmo dva niza brojeva s različitim znacima M_i i N_i, ($i = 0,1,2,\ldots k$).
Oduzmemo N_i od M_i, dobijamo

$$T_i = M_i - N_i = M_i + (-N_i)$$

Pomoću spektralne metode to možemo da uradimo na dva načina :

Prvi način :
S dopustenim ritmom, dobićemo

$$S_T = \mathscr{P}^* S_T^* = \mathscr{P} S_M^* - S_N^* \tag{45}$$

gde $\mathscr{P} S_M^*$ denormalizovani neregularni spektar niza brojeva M_i,
S_N^* normalizovani neregularni spektar niza brojeva N_i.

U ovom slučaju pre računanja moramo da izvršimo denormalizaciju prvog spektra t.j. $\mathscr{P} S_M^*$.
Dakle dobijamo kako sledi,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P} S_M^* & = & \mathscr{P}\, G_{M_0}\; G_{M_1}\; G_{M_2}\; \ldots\; G_{M_k} \\ - \quad S_N^* & = & \quad G_{N_0}\; G_{N_1}\; G_{N_2}\; \ldots\; G_{N_k} \\ \hline S_T & = & \mathscr{P}^*\, G_{T_0}\; G_{T_1}\; G_{T_2}\; \ldots\; G_{T_k} \end{array}$$

Posle podele dobijenog spektra S_T na pruge počev s desne strane, imamo

$$S_T = \mathscr{P}^* | \, S_T^*$$

Iz čega normalizovani neregularni spektar je

$$S_T^* = G_{T_o} G_{T_1} G_{T_2} \dots G_{T_k}$$

a konačno daje efektivnu vrednost pruge,

$$T_i = M_i - N_i \qquad (i=0,1,2,\dots k)$$

Ovde, ako je :

$$S_M^* > S_N^* , \quad \text{tada} \quad \mathscr{P}^* = \mathscr{P}$$
$$S_M^* < S_N^* , \quad \text{tada} \quad \mathscr{P}^* = \mathscr{P} - 1$$

i ovo $\mathscr{P}^*$ nema uticaja na traženi spektar S_T^*

Drugi način :
S dopustenim ritmom, dobićemo

$$(46) \qquad S_{T'} = \mathscr{P}\, S_{T'}^* = S_M^* + S_{N'}^*$$

gde S_M^* normalizovani neregularni spektar niza brojeva M_i,
$S_{N'}^*$ normalizovani neregularni spektar niza brojeva $-N_i$,
$\mathscr{P}$ neutralna pruga,

i to smo dobili kako sledi :

$$
\begin{array}{rl}
 & S_M^* = G_{M_o} G_{M_1} G_{M_2} \dots G_{M_k} \\
+ & S_N^* = G_{N_o} G_{N_1} G_{N_2} \dots G_{N_k} \\
\hline
 & S_{T'} = \mathscr{P}\, G_{T'_o} G_{T'_1} G_{T'_2} \dots G_{T'_k}
\end{array}
$$

Posle podele dobijenog spektar $S_{T'}$ na pruge počev s desne strane,

$$S_{T'} = \mathcal{P} | S^*_{T'}$$

iz čega dobijamo normalizovani neregularni spektar

$$S^*_{T'} = G_{T_0} \; G_{T_1} \; G_{T_2} \; \ldots \; G_{T_k}$$

a konačno dobijamo efektivnu vrednost pruge,

$$T_i = M_i + (-N_i) \qquad (i=0,1,2,..k)$$

Dakle u ovom slučaju prilikom računanja pojavljuje se jedna pruga više t.j. neutralna pruga.

Za oba načina ritam je isti, i to :
na grublji način :
ritam je jednak broju cifara najvećeg broja (po apsolutnoj vrednosti) u zadatku, više 2.
na precizniji način :
ako je u zadatku najveći broj (po apsolutnoj vrednosti) α , tada je indikatorski broj $i = 2\alpha$.
Tako dobijamo ritam koji je jednak broju cifara indikatorskog broja, više 1.

Napomena :
Iz prvog i drugog načina imamo da je,

$$S_T = \mathcal{P}^* \cdot S^*_T$$
$$S_{T'} = \cdot \mathcal{P} \; S^*_{T'}$$

od kojih moramo da dobijamo

$$S^*_T = S^*_{T'}$$

i videćemo to u sledećem primeru.

Na primer, nizovi brojeva s različitim znacima M_i i N_i su ovako,

$$\begin{array}{ccccc} 24, & -35, & 17, & 13, & -5 \\ 12, & 16, & -14, & 4, & 7 \end{array}$$

Ako oduzmemo N_i od M_i u svakoj koloni, prvo treba odrediti ritam,
na grublji način je 4; na precizniji način : indikatorski broj je $2 \times 35 = 70$, tada ritam je 3.

Zatim prema prvom načinu, nakon denormalizacije prvog spektra i ako stavimo $\mathcal{P} = 1$, dobijamo

$$\begin{array}{rll} & S_M^* = & 1\ 023\ 965\ 017\ 012\ 995 \\ - & S_N^* = & 012\ 015\ 986\ 004\ 007 \\ \hline & S_T = & 1\ 011\ 949\ 031\ 008\ 988 \end{array}$$

Delimo S_T na pruge počev s desne strane, daje

$$S_T^* = \quad 011\ 949\ 031\ 008\ 988$$

iz čega svaka pruga odredjuje vrednost odgovarajuće kolone, dok su njihove efektivne vrednosti :

$$12, \quad -51, \quad 31, \quad 9, \quad -12$$

Primetimo da je

$$S_T = 1 \mid S_T^* .$$

Prema tome u ovom slučaju gde $S_M^* > S_N^*$, pre računanja nemoramo vršiti denormalizacija.

Prema drugom načinu, takodje s ritmom 3, dobijamo

$$\begin{array}{lcr} S^*_M & = & 023\ 965\ 017\ 012\ 995 \\ S^*_{N'} & = & 987\ 984\ 013\ 995\ 993 \\ \hline S_{T'} & = & 1\ 011\ 949\ 031\ 008\ 988 \end{array}$$

Delimo $S_{T'}$ na pruge počev s desne strane, daje

$$S^*_{T'} = 011\ 949\ 031\ 008\ 988$$

iz čega svaka pruga odredjuje vrednost odgovaraju-će kolone, dok su njihove efektivne vrednosti :

$$12, \quad -51, \quad 31, \quad 9, \quad -12$$

Dalje, iz prvog i drugog načina jasno da je,

$$S^*_T = S^*_{T'}$$

Najzad ako M_i i N_i, $i = 0,1,2,..\ k$, tada traženi normalizovani neregularni spektar $S^*_T = S^*_{T'}$ ($k + 1$)h brojevi s desne strane S_T ili $S_{T'}$ t.j. $k + 1$ pruga.

Sada, koristeći iste podatke, ali oduzmeno M_i od N_i, dakle dobijamo da je

$$T_i = N_i - M_i = N_i + (-M_i)$$

Prema prvom načinu, pre računanja moramo da izvršimo denormalizaciju prvog spektra t.j. $\mathcal{P}\, S^*_N$ a stavimo $\mathcal{P} = 1$, dobija se

$$\begin{array}{lcr} & S^*_N = & 1\ 012\ 015\ 986\ 004\ 007 \\ - & S^*_M = & 023\ 965\ 017\ 012\ 995 \\ \hline & S_T = & 988\ 050\ 968\ 991\ 012 \end{array}$$

Posle podele S_T na pruge počev s desne strane dobijamo

$$S_T^* = 988\ 050\ 968\ 991\ 012$$

Prema tome svaka pruga odredjuje vrednost odgovarajuće kolone $N_i - M_i$, dok su njihove efektivne vrednosti :

$$-12, \quad 51, \quad -31, \quad -9, \quad 12$$

Ovde $\mathscr{P}^* = \mathscr{P} - 1 = 0$, jer $S_N^* < S_M^*$, stoga u ovom slučaju moramo da izvršimo denormalizaciju pre računanja.

Prema drugom načinu, dobijamo

$$\begin{array}{rrl} & S_N^* = & 012\ 015\ 986\ 004\ 007 \\ + & S_{M'}^* = & 976\ 034\ 982\ 987\ 005 \\ \hline & S_{T'} = & 988\ 050\ 968\ 991\ 012 \end{array}$$

što daje

$$S_{T'}^* = S_T^*$$

zatim dobijamo takodje

$$-12, \quad 51, \quad -31, \quad -9, \quad 12$$

3. MNOŽENJE ISTIM BROJEM

Na primer množino brojeve sledećin oblicima

$$A_o \times B \quad A_1 \times B \quad A_2 \times B$$

U ovom zadatku ritam se odredjuje ovako,
na grublji način : broj cifara najvećeg (po apsolutnoj vrednosti) množenika sabere se sa brojem cifara množioca, dodati 1 ;
na precizniji način : broju cifara proizvoda najvećeg (po apsolutnoj vrednosti) množenika i množioca (t.j. indikatorskog broja), dodati 1.

Za dati zadatak račun se odbija ovako :

(47) $$S_T = S_A^* \times B$$

$$\begin{array}{lcl} S_A^* & = & G_{A_o}\ G_{A_1}\ G_{A_2} \\ S_B & = & \qquad\qquad B \\ \hline S_T & = & \mathcal{P}\ G_{T_o}\ G_{T_1}\ G_{T_2} \end{array}$$

Ako je A_o negativan broj (B je pozitivan broj) tada

$$S_T = \mathcal{P} | S_T^*$$

Ako je A_o pozitivan broj, tada

$$S_T = 0..0 | S_T^*$$

gde je normalizovani neregularni spektra

$$S_T^* = G_{T_o}\ G_{T_1}\ G_{T_2}$$

4. MNOŽENJE RAZLIČITIM MNOŽIOCIMA

Množimo brojeve sledećim oblicima

$$A_1 \times A_2 \qquad B_1 \times B_2$$

Ovde, ritam se odredjuje ovako :
na grublji način,

$$h = p_1 + p_2 + 2$$

gde je p_1 broj cifara najvećeg množenika, a p_2 je broj cifara najvećeg množioca ;
na precizniji način,

$$h = p + 1$$

gde je p broj cifara indikatorskog broja,

$$i = 2 \max|A_1, B_1| \quad \max|A_2, B_2|$$

Vršimo množenje kao što sledi,

(48) $$S_T = S_1^* \times S_2^*$$

(a) ako je A_1 negativni, a A_2 pozitivni,

$$S_1^* = G_{A_1} \; G_{B_1}$$

$$S_2^* = G_{A_2} \; G_{B_2}$$

$$S_T = \mathcal{P}' \; G'_{T_0} \; G_{T_1} \; G_{T_2}$$

Posle podele dobijenog spektra počev s desne strane, dobijamo efektivne vrednosti pruga su,

$$T_2 = B_1 \times B_2$$
$$T_1 = -A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1$$
$$T_o - B_2 = -A_1 \times A_2$$

U odredjenom redu pruge, T_1 pretstavlja zbir dva proizvoda.
$\mathcal{P}'$ je neutralna pruga.

Šta ovde zapažamo da dve pruge s desne strane daju prave oblike rezultujućih spektara brojeva, dok broj u prvoj pruzi ima pseudo oblik, i to pišemo $\mathcal{P}'\ G'_{T_o}$.

(b) ako su A_1 i A_2 pozitivni, tada

$$S_T = S_1^* \times S_2^* = G_{T_o}\ G_{T_1} \cdot G_{T_2}$$

što daje

$$T_2 = B_1 \times B_2$$
$$T_1 = A_1 \times B_2 + A_2 \times B_1$$
$$T_o = A_1 \times A_2$$

Na primer, množimo brojeve

(a) -12×5 , 8×17

Najvećeg množenika po apsolutnoj vrednosti je 12 a od množioca je 17, tada na grublji način ritam je 6. Indikatorski broj $i = 2 \times 12 \times 17 = 408$ tada na precizniji način, ritam je 4.

Dakle dobijamo,

$$S_1^* = 99880008$$
$$S_2 = 50017$$

Njihov proizvod je

$$S_T = 4995698360136$$

Iz čega dobijamo

$$S_T^* = 9956\ 9836\ 0136$$

što daje,

$$T_2 = 136 = 8 \times 17$$
$$T_1 = -164 = -12 \times 17 + 5 \times 8$$
$$T_o - 17 = -43 - 17 = -60 = -12 \times 5$$

(b) Množimo brojeve,

$$12 \times 5 \quad , \quad 8 \times 17$$

sa ritmom h=4, dobijamo

$$S_1 = 120008$$
$$S_2 = 50017$$

Njihov proizvod je

$$S_T = S_T^* = 60\ 0244\ 0136$$

što daje,

$$T_2 = 136 = 8 \times 17$$
$$T_1 = 244 = 12 \times 17 + 5 \times 8$$
$$T_o = 60 = 12 \times 5$$

Iz rezulttata primera (a), imamo $\mathcal{P} = 4$, a iz (b) , $\mathcal{P} = 0$.

5. DELENJE ISTIM BROJEM

Treba na primer izračunati

$$A_1 ; B \qquad A_2 : B$$

sa n decimale tačno.
Prvo tražimo,

$$1 : B = (B)$$

Ovo se radi na običan način, a broj (B) je tačno sa n^* decimale tačno, gde je n^* zbir broja traženih tačnih decimala i broja cifara najvećeg deljenika ; ili se broj (B) uzima iz tablice recipročnih vrednosti.
Obelezimo sa (B^*) broj od (B) gde se nule s leve strane ne pišu, ova deljenja možemo uraditi odjednom,

$$A_1 \text{ x } (B^*) \qquad A_2 \text{ x } (B^*)$$

a to je metodom množenjem s istim brojem.
Dakle prema (47), dobijamo $S_T = S_A^* \text{ x } (B^*)$, a normalizovani neregularni spektar biće :

$$S_T^* = G_{T_1} \quad G_{T_2}$$

što daje

$$T_1 = A_1 \text{ x } (B^*), \qquad T_2 = A_2 \text{ x } (B^*)$$

iz čega uzimamo sada brojeve samo do n decimale tačno, tako da bi ostale decimale trebalo odbaciti 7 , prema tome ti brojevi odgovaraju,

$$(T_1) = A_1 : B \,, \qquad (T_2) = A_2 : B$$

sa n decimale tačno.

6. NEUTRALNI DEO U IZRAČUNAVANJIMA

Odnos koji povezuje regularni spektar i neregularni spektar (23) pokazuje da ova nova vrsta regularnog spektra ima jednu prugu više nego odgovarajući regularni spektar. Ta pruga se nalazi u prvom delu s leve strane i nazivamo je "neutralna pruga".

Iz prethodne paragrafe u ovoj poglavi, imamo da kod izračunavanja (sabiranje i množenje), rezultujući neregularni spektar označen formulom

$$\mathcal{P} \mid S_T^*$$

gde je $\mathcal{P}$ neutralna pruga ; a S_T^* je normalizovani oblik neregularnog spektra.
Prema tome u izračunavanju u kojemu su upotrebljeni neregularni spektri, imamo 2 dela : s leve strane je neutralni deo , a s desne strane je normalizovani deo.

Ako je S rezultujući regularni spektar od nekog problema, s uniformnim ritmom h, koji se sastoji od n pruga, onda kad bi taj isti problem rešio primenjujući neregularne spektre, dobijamo:

nh cifre s desne strane se nalaze u normalizovanom delu ; označeni S_T^* t.j. normalizovani neregularni spektar ; a

(nh + i) cifre, i=1,2,..., s desne strane se nalaze u neutralnom delu ; označeni $\mathcal{P}$, t.j. neutralna pruga.

7. SKALARNI PROIZVOD DVA VEKTORA

Posmatrajmo vektore

$$\overline{A} = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$$
$$\overline{B} = [B_1, B_2, \ldots, B_n]$$

Skalarni proizvod ovih dvaju vektora označen formulom

(49) $$\overline{A} \cdot \overline{B} = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i$$

Pomoću spektralnog računa možemo odjednom izračunati. Prvo treba odrediti ritam :
na grublji način :

$$h = p_1 + p_2 + \ell$$

gde : p_1 broj cifara $\max|A_i|$,
p_2 broj cifara $\max|B_i|$, a
ℓ ako je ukupan proizvoda n , tada za

$$n \leqslant 10 , \qquad \ell = 2 ;$$
$$10 < n \leqslant 100 , \qquad \ell = 3 ; \text{ itd.}$$

na precizniji način :

$$h = p + 1$$

gde je p broj cifara indikatorskog broja

$$i = n \max|A_i| \max|B_i|$$

Sada možemo formirati normalizovani neregularni spektar,

$$S^*_A = G_{A_1} G_{A_2} \cdots G_{A_n}$$

i obrnuti normalizovani neregularni spektar

$$\Sigma^*_B = G_{B_n} G_{B_{n-1}} \cdots G_{B_1}$$

(a) ako je A_1 negativni, a B_n pozitivni, tada

(50) $$S_T = S^*_A \times \Sigma_B =$$

$$G'_{T_1} \ldots G'_{T_{n-1}} G_{T_n} G_{T_{n+1}} \ldots G_{T_{2n-1}}$$

Rezultat je efektivna vrednost od G_{T_n}, t.j. efektivna vrednost broja u n^{-toj} pruzi s desna. To napisino kao što sledi :

(51) $$T = T_n = M_n, (S^*_A \times \Sigma_B)$$

(b) ako su A_1 i B_n pozitivni, tada

(52) $$S_T = S_A \times \Sigma_B =$$

$$G_{T_1} \ldots G_{T_{n-1}} G_{T_n} G_{T_{n+1}} \ldots G_{T_{2n-1}}$$

a rezultat ovde napisino kao što sledi :

(53) $$T = T_n = M_n, (S_A \times \Sigma_B)$$

t.j. efektivne vrednosti n^{-te} pruge s desna rezultujućeg spektra S_T .

Na primer treba izračunati,

$$\overline{A} \cdot \overline{B}$$

za $\overline{A} = [-3,\ 4,\ 6]$ i $\overline{B} = [2,\ -3,\ 5]$

Ritam se na grublji način, $\max|A| = 6$, $\max|B| = 5$, imaju po jednu cifru ; a ima 3 proizvoda, pa je zato $h=4$;
na precizniji način :

$$i = 3 \times 6 \times 5 = 90$$

pa zato ritam možemo uzeti $h=3$.

Prema (50), dobijamo

$$S^*_A = 997004006$$
$$\Sigma_B = 4997002$$

dakle $S_T = S^*_A x\, \Sigma_B = 4\ 982\ 031\ 011\ 990\ 012$

što daje

$$M_3,\ (\ S^*_A \times \Sigma_B\ ) = 12$$

to je

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = 12$$

8. IZRAČUNAVANJE DETERMINANATA

8.1 IZRAČUNANJE DETERMINANTA DRUGOG REDA

Determinanta drugog reda je označena formulom

$$(54) \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Uopšte, kada gore data determinanta zadrži brojeva s različitim znacima, tada koristeći spektralnu metodu činimo sledeće :

(a) ako je a_{21} pozitivan broj,

$$(55) \qquad S_T = (S_1) \times S_2$$

gde
$$(S_1) = G_{11} \quad (G_{12})$$
$$S_2 = G_{21} \quad G_{22}$$

(G_{12}) predstavlja spektar a_{12}, gde je znak bio izmenjen.

Dakle rezultat je

$$D = M_2, \; ((S_1) \times S_2 \;)$$

(b) ako je a_{21} negativan broj,

$$(56) \qquad S_T = S_1 \times (S_2)$$

gde
$$S_1 = G_{11} \quad G_{12}$$
$$(S_2) = (G_{21}) \; G_{22}$$

(G_{21}) predstavlja spektar a_{21}, gde je znak bio izmenjen.
Dakle rezultat je

$$D = M_2, (S_1 \times (S_2))$$

Ritam mora da zadovoljava nejednačinu

$$2p_1p_2 < 10^{h-1}$$

za $p_1 = \max |a_{1i}|$; $p_2 = \max |a_{2i}|$, $i=1,2.$

Na primer,

(a) $$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Ritam je 3, tada

$$(S_1) = 4\ 997$$
$$S_2 = 2\ 004$$

Njihov proizvod je

$$S_T = 10\ \underline{013}\ 988$$

Dakle, efektivni vrednost druge pruge s desna je

$$D = 14$$

(b) $$D = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Ritam je 3 , tada

$$S_1 = 995\ 003$$
$$(S_2) = 2\ 004$$

Njihov proizvod je

$$S_T = 1\ 993\ \underline{986}\ 012$$

što daje

$$D = T_2 = -14$$

8.2 IZRAČUNAVANJE DETERMINANTE N^{-TOG} REDA

Neka je data,

$$(57) \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

U metodi poznatoj pod imenom metoda čvora, red determinanta se sistematično spušta za po jednu jedinicu. Ako je čvor recimo a_{11}, tada rad se odvija ovako :
s dopustenim ritmom,

$$(58) \quad D = 1/a_{11}^{n-2} \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} & T_{24} & \cdots\cdots & T_{2n} \\ T_{32} & T_{33} & T_{34} & \cdots\cdots & T_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n2} & T_{n3} & T_{n4} & \cdots\cdots & T_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = 1/a_{11}^{n-2} \; D'$$

gde je prema (54) i (55), T_{ij} je efektivna vrednost druge pruge s desne strane spektra $S_{T_{ij}}$, koji je jednak :

$$(59) \quad \begin{array}{ll} (a) & G_{11}(G_{1j}) \;\; x \;\; G_{i1}G_{ij} \\ (b) & G_{11}G_{1j} \;\; x \;\; (G_{i1})G_{ij} \end{array}$$

za $i=2,3,\ldots,n$; $j=2,3,\ldots,n$.

Ova determinanta D' je $(n-1)^{-tog}$ reda. Radeći na isti način dobiće se determinanta D'', koja je $(n-2)^{-tog}$ reda, i dalje, dok ne ostane samo determinanta drugog reda.

Dakle, posle prvog stepena radnje rezultat će biti napisan u spektralnim brojevima. Tako u sledećoj etapi treba da shvatimo da je upotrebom regularnih spektara u ovom slučaju moramo prvo naći efektivnu vrednost svakog broja dobijenog rezultata, takodje moramo da vodimo računa na znakove a zatim bismo formirali nove spektre.
Dok s neregularnim spektrima za vreme radnje ne moramo da vodimo računa o znacima. Dakle u drugoj etapi, i sledećim etapama formiranje novih spektara može biti direktno, t.j. cepanje spektara i njihovo sastavljanje u novi spektar (14),(15).

Najzad, drugim rečima, i ovde utvrdjeno da je u ovom slučaju upotrebom neregularni spektara dobijena značajna prednost nad regularnim spektrima.

9. RAČUN MATRICA

9.1 SABIRANJE I ODUZIMANJE MATRICA

Dve matrice istih redova i stubaca mogu biti dodati ili oduzeti, dodavajući ili oduzimajući njihove odgovarajuće elemente.
Tada, A+B bi označili da bude matrica C, čiji elementi su

(60) $$[c]_{ij} = [a]_{ij} + [b]_{ij}$$

na primer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

tada

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

Dakle zbir dve matrice pišemo

(61) $$A + B = C$$

Razlika dve matrice je nadjena na isti način i stoga pišemo

(62) $$A - B = C'$$

gde elementi od C' su oni kod C, čiji znaci od b su se promenili.

Pomoću spektara, prema (41) zbir dve matrice označavamo

(63) $$S_{C_i} = S^*_{A_i} + S^*_{B_i}$$

gde $S^*_{A_i}$ normalizovani neregularni spektar i-tom reda matrica A.

$S^*_{B_i}$ normalizovani neregularni spektar i-tom reda matrica B.

Razlika dve matrice, prema (45) označavamo

(64) $$S_{C'_i} = \mathscr{P} S^*_{A_i} - S^*_{B_i}$$

gde je $\mathscr{P}$ neutralna pruga.

Za (63) i (64), ritam se odredjuje ovako : na grublji način, broju cifara najvećeg broja po apsolutnoj vrednosti u zadatku dodati 2 ; a na precizniji način, broj cifara indikatorskog broja više 1, gde je indikatorski broj se odredjuje kad se najveći broj po apsolutnoj vrednosti u zadatku pomnoži 2.

Na primer, neka je

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 3 & -14 \\ 15 & -8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 23 & 17 & -16 \\ -28 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

Ritam je h=3, tada dobićemo spektre,

od A, $S^*_{A_1} = 988002986$

$S^*_{A_2} = 014992017$

Od B, $S^*_{B_1} = 23016984$

$S^*_{B_2} = 971995011$

Dalje, prema (41) i (61) dobijamo,

$$S^*_{A_1} + S^*_{B_1} = S_{C_1} = 1\ 011\ 019\ 970$$

$$S^*_{A_2} + S^*_{B_2} = S_{C_2} = 986\ 987\ 028$$

Prema tome

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 11 & 20 & -30 \\ -13 & -13 & 28 \end{bmatrix}$$

Sada, prema (45) i (62) dobijamo

$$S^*_{A_1} - S^*_{B_1} = S_{C'_1} = 964\ 986\ 002 \quad , \mathcal{P} = 0,$$

$$S^*_{A_2} - S^*_{B_2} = S_{C'_2} = 042\ 997\ 006 \quad , \mathcal{P} = 1$$

Prema tome

$$C' = A - B = \begin{bmatrix} -35 & -14 & 2 \\ 43 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

9.2 MNOŽENJE MATRICE SKALAROM

Ako je A matrica, a k je celi broj, tada je matrica kA označena formulom

(65) $$[ka]_{ij} = k[a]_{ij}$$

dakle,

$$kA =$$

$$k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Ako ove matrice napišemo pomoću spektara dobiće se sistem spektara koji treba pomnožiti s istim brojem. Na primer, imamo

$$k = 4 \;, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 7 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

Prema (47) , s ritmom 3 , dobiće se spektri,

$$S_{T1} = 4\,S_{A1} = 4 \times 997001996 = 3\,988\,007\,984$$
$$S_{T2} = 4\,S_{A2} = 4 \times 6991005 = 27\,964\,020$$

Iz čega dobijamo

$$kA = \begin{bmatrix} -12 & 8 & -16 \\ 28 & -36 & 20 \end{bmatrix}$$

9.3 MNOŽENJE MATRICA A S DRUGOM MATRICOM B

Posmatrajmo proizvod matrice

$$A.B = C \tag{66}$$

To znači, da A.B je matrica C, čiji element u i-tom redu i j-om stupcu je

$$[c]_{ij} = [a]_{i1}[b]_{1j} + [a]_{i2}[b]_{2j} + \ldots . + [a]_{in}[b]_{nj} \tag{67}$$

Dakle, da nadjemo elemenat u i-tom redu i j-om stupcu od C : pomnožimo elemente u i-tom redu od A sa odgovarajućim elementima u j-om stupcu od B, i saberite proizvoda koje smo dobili.

Napomenimo :
- redovi matrica A su uvek pomnoženi sa stupcima matrica B,
- broj redova od C je isti kao i broj redova u A, a broj stubaca od C je isti kao broj stubaca u B,
- broj redova u B mora biti isti kao broj stubaca od A.

Koristeći spektre dobiće se

$$c_{ij} = M_{n'} \left(S^*_{A_i} \times \Sigma_{B_j}\right) \tag{68}$$

gde : $S^*_{A_i}$ spektar i^{-te} vrste matrice A, koji ima n pruga,

B_j obrnuti spektar j^{-e} kolone matrice B koji ima takodje n pruga,

M_n n^{-te} pruge s desne strane dobijenog spektra, a

h zadovoljava nejednačinu,

$$2\ p_1\ p_2 < 10^{h-1}$$

za $p_1 = \max|a_{in}|$, $p_2 = \max|b_{nj}|$, $n=1,2,..$

Primer, neka su date matrice,

$$A.B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Prema (68), s ritmom h=3, dobićemo spektre i obrnute spektre,

$$S^*_{A_1} = 998004001 \qquad B_1 = 1002003$$
$$S^*_{B_i} = 2995003 \qquad B_2 = 994002999$$
$$B_3 = 6995004$$

tada,

$$c_{11} = M_3,(S^*_{A_1} \times {}^{\leq}B_1) = 1\ 000\ 003\ \underline{003}\ 014\ 003$$
$$c_{12} = M_3,(S^*_{A_1} \times {}^{\leq}B_2) = 992\ 018\ 970\ \underline{007}\ 998\ 999$$
$$c_{13} = M_3,(S^*_{A_1} \times {}^{\leq}B_3) = 6\ 981\ 041\ \underline{979}\ 011\ 004$$
$$c_{21} = M_3,(S^*_{A_2} \times {}^{\leq}B_1) = 3\ 001\ \underline{001}\ 991\ 009$$
$$c_{22} = M_3,(S^*_{A_2} \times {}^{\leq}B_2) = 2\ 997\ 041\ \underline{964}\ 013\ 997$$
$$c_{23} = M_3,(S^*_{A_2} \times {}^{\leq}B_3) = 20\ 950\ \underline{057}\ 965\ 012$$

Dakle,

$$c_{11} = 3, \quad c_{12} = 8, \quad c_{13} = -21$$
$$c_{21} = 2, \quad c_{22} = -36, \quad c_{23} = 58$$

Prema tome,

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -21 \\ 2 & -36 & 58 \end{bmatrix}$$

Č E T V R T A   G L A V A

IV. PRIMENA NEREGULARNIH SPEKTARA U EMPIRIČKIM FORMULAMA

UVOD

Matematički spektri su grana matematike, čije je najvažniji cilj da smanji broj operacija. U ovoj glavi predstavljamo primenu spektralne metode u metodi rešavanja problema empiričkih formula.
Iako znamo da su regularni spektri takodje primenljivi u ovim problemima, ali ovde treba da pokažemo da je upotreba neregularnih spektara jednostavnija i kraća nego upotreba regularnih spektara.
Vidimo ovde da kod empiričkih problema, izračunavanje ide korak po korak gde će posle prvog koraka izračunavanja, rezultat biti napisan u spektralnim brojevima. Tako prednost se postize cepanjem spektara i njihovim sastavljanjem u nove spektre onako kako je izloženo iz predhodne glave daje veća prednost pritom je ako upotrebimo neregularne spektre nego ako upotrebimo regularne spektre.

Dalje, cilj matematičkih spektara je smanjenje broja operacija. U nekim problemima možemo da upotrebimo izvesne vrste ritmova tako da spektralni brojevi mogu biti napisani za manje cifre, tako dopunski cilj je ovde, da se cela radnja učini ekonomičnijom.

U prvom paragrafu dajemo nove priloge o ritmovima koji su ovde primenljivi, kao što ćemo da vidimo u drugom paragrafu.
Treći paragraf prikazuje metodu harmoniške analize sa ciljem da pokaže da pomoću spektralne metode može da se pojednostavni šema.

Prema tome, u ovoj glavi predstavljamo primenu n e r e g u l a r n e spektralne metode u metodi rešavanja problema empiričkih formula s namerom da pokazemo da ovi, novi nadjeni neregularni spektri su primenljivi, i iz toga izvućimo zaključak da se prednost od spektralnih metoda sastoji u sledećem:

-- smanjivanje broja operacije ;
-- skraćivanje vremena računanja ;
-- pojednostavljenje seme ;
-- pojednostavljenje kontrole ;
-- uprkos što se problemi sastoje od pozitivnih i negativnih brojeva ovde u svim primenama samo radimo sa pozitivnim brojevima.

1. RITAM

U predhodnim metodama imali smo posla, samo sa uniformnim ritmom :

za niz svih pozitivnih celih brojeva,

$$h = h_i \geqslant p_i$$

a za niz brojeva sa različitim znacima,

$$h = h_i > p_i$$

Ovde ćemo naći da izvesnim problemima nizovi mogu biti sastavljeni od brojeva koji se uvećavaju na takav način, tako da upotreba uniformnog ritma u tom slučaju nije tako korisno zbog dužine spektralnog broja koji bismo dobili :

Posmatrajmo niz brojeva,

(69) $$N^0, N^1, N^2, \ldots \ldots, N^k$$

Ovde su brojevi povećavaju s leva na desno, stoga u pogledu ekonomičnosti možemo upotrebiti odgovarajuće ritmove,

(70) $$h_0 < h_1 < h_2 \quad \ldots \ldots < h_k$$

Ako je N pozitivan broj, tada

na grublji način,

(71) $$h_i \geqslant ip$$

ili možemo da pišemo,

(72) $$h_i = ip + \ell_i$$

gde je $h_o=1$, p je broj cifara od N, i je izložilac , a $\ell_i=0,1,2,..$ (ritam obaveznih praznina).

Uzimajući sada da je vrednost i=0,1,2,....k, za ove ritmove napravićemo niz od k+1 pozitivnih celih brojeva, iz koga možemo da izvedemo spektar S_h, a za $\ell_i=0$, pišemo u opštem obliku,

(73) $$S_h = G_oG_1G_2 \dots G_k$$

s uniformnim ritmom

$$h = p$$

gde je p broj cifara od kp.
Dakle, S_h je spektar ritmova.

Na precizniji način,

(74) $$h_i = p_i$$

gde je p_i broj cifara od N^i.

Iz (74) pišemo,

(75) $$h_i = p_i + \ell_i$$

za $\ell_i=0,1,2,...$

Ovde, spektar ritmovi biće,

(76) $$S_h = G_oG_1G_2 \dots G_k$$

s uniformnim ritmom h=p, gde je p broj cifara p_k.

Ako je N negativan broj, tada na grublji način,

(77) $$h_i > p_i$$

ili možemo da pišemo,

(78) $$h_i = ip + \ell_i^!$$

gde je $h_o=1$, p je broj cifara od N, a $\ell_i^! = 1,2,..,$ jer za niz brojeva različitim znacima, broj iz svake grupe mora da počne sa $!_i$ nula(e) ili devet(ke). Tada, za $\ell_i^! = 1$ dobijamo,

(79) $$S_h = G_oG_1G_2 \dots\dots G_k$$

s uniformnim ritmom $h=p$, gde je p broj cifara $kp+1$.

Na precizniji način,

(80) $$h_i > p_i$$

gde je p_i broj cifara N^i.

Ili pišemo,

(81) $$h_i = p_i + \ell_i^!$$

za $\ell_i^! = 1,2,...$

Prema tome, spektar ritmovi biće,

(82) $$S_h = G_oG_1G_2 \dots\dots G_k$$

s uniformnim ritmom $h=p$, gde je p broj cifara p_k+1.

2. EMPIRIČKA FORMULA

Poznato je da empirička formula je ona čija je oblik izveden iz rezultata eksperimenta ili zapažanja. Jasno je da bi se dobio zadovoljavajući rezultat, moramo imati dosta podataka.
Primena spektralne metode u opšte može se podeliti u dva važna dela :

- dobijanje normalnih jednačina iz rezidualnih jednačina ;
- rešavanje normalnih jednačina koje ustvari imaju oblik simultanih linearnih jednačina.

Na primer, nadjimo formulu oblika :

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_kx^k \tag{83}$$

koja će zadovoljiti sledeća podataka,

(84)

x	x_o	x_1	x_2	...	x_n
y	y_o	y_1	y_2	...	y_n

zamenjujući u (83) parove odgovarajućih vrednosti x i y, dobijamo rezidualne jednačine,

$$\begin{array}{lllllll} v_o = a_o & + x_oa_1 & + x_o^2a_2 & + \ldots & + x_o^ka_k & - y_o \\ v_1 = a_o & + x_1a_1 & + x_1^2a_2 & + \ldots & + x_1^ka_k & - y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ v_n = a_o & + x_na_1 & + x_n^2a_2 & + \ldots & x_n^ka_k & - y_n \end{array} \tag{85}$$

2a. METODA SREDINA

Iz rezidualnih jednačina (85), nakon grupisanja dobijamo da će broj grupa biti

$$k + 1$$

a ako :

$$\frac{n+1}{k+1} = r \tag{86}$$

tada dobijamo, $k+1$ grupe, gde se svaka od njih sastoji od r rezidualnih jednačina ;

ako :

$$\frac{n+1}{k+1} = r + \frac{d}{k+1} \tag{87}$$

gde je $d=1,2,\ldots,k$,

tada dobijamo : $(k+1)-d$ grupe, gde se svaka od njih sastoji od r rezidualnih jednačina; i d grupe, gde svaka od njih sastoji od $r+1$ rezidualnih jednačina.

Dalje, ako su niza sadrzi svih pozitivnih celih brojeva, tada ritam se odredjuje ovako,

na grublji način :

$$\begin{aligned} h_i &= ip_j + \ell \\ h_{k+1} &= p_y + \ell \end{aligned} \tag{88}$$

gde je $h_0=1$, $i=0,1,2,..,k$, p_j je broj cifara od $\max x_j$, p_y broj cifara $\max y_j$, $j=0,1,2,\ldots n$, a biće :

$$\text{ako} \quad (r) \leqslant 10, \text{ tada } \ell = 1$$
$$\text{ako} \quad 10 < (r) \leqslant 100, \text{ tada } \ell = 2$$

ovde (r) jednak r iz (86) ili r+1 iz (84)

Dakle, iz (88) dobijamo spektar ritmova,

$$(89) \qquad S_h = G_o G_1 G_2 \ldots\ldots G_k G_{k+1}$$

s uniformnim ritmom h' jednak broju cifara broja $kp_j + \ell$.

Na precizniji način :

$$(90) \qquad \begin{aligned} h_i &= p_i + \ell \\ h_{k+1} &= p_y + \ell \end{aligned}$$

gde je p_i broj cifara indikatorskog broja

$i_x = (r) \max x_j^i$,

p_y broj cifara indikatorskog broja

$i_y = (r) \max y_j$,

za $i=0,1,2,\ldots k$; $j=0,1,2,\ldots n$.

Dakle, dobijamo (90)

(91) Spektar, s ritmom jednak broju cifara p_k.

Ako niz sadrži brojeva sa različitim znacima, ritam se odredjuje ovako,

na grublji način :

$$(92) \qquad \begin{aligned} h_i &= ip_j + \ell' \\ h_{k+1} &= p_y + \ell' \end{aligned}$$

gde je $h_o=1$, $i=0,1,2,\ldots k$, p_j je broj cifara max x_j , p_y broj cifara max y_j , $j=0,1,2,\ldots n$, a ℓ' biće:

ako $(r) \leqslant 10$, tada $\ell' = 2$
ako $10 < (r) \leqslant 100$, tada $\ell' = 3$

Dakle dobijamo spektar ritmova,

$$(93) \qquad S_h = G_oG_1G_2 \ldots\ldots G_kG_{k+1}$$

s ritmom h' jednak broju cifara od

$$kp_j + \ell'$$

Na precizniji način :

$$(94) \qquad \begin{aligned} h_i &= p_i + 1 \\ h_{k+1} &= p_y + 1 \end{aligned}$$

gde je p_i broj cifara indikatorskog broja i_x;
p_y broj cifara indikatorskog broja i_y,
kao u (90) ali ovde uzeto ponodulu.

Dakle dobijamo,

(95) Spektar, s ritmom jednak broju cifara $p_k + 1$.

Sada, ako u (85) pišemo y_j $(j=0,1,2,..n)$ kao pozitivan broj, dakle imamo niz svih pozitivnih celih brojeva, tada od datih rezidualnih jednačina, obrazovaćemo spektre,

$$(96) \qquad \begin{array}{c} S_o \\ S_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_n \end{array}$$

a ritmovi su : na grublji način, prema (88) i (89),
na precizniji način, prema (90),(91).

S_j je spektar odgovara rezidualna jednačina v_j, $j = 0,1,2,...n$.

Nakon grupisanja i sabiranja, dobiće spektre

$$(97) \qquad \begin{array}{c} S'_o \\ S'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S'_k \end{array}$$

gde je S'_i spektar nominalnih jednačina v'_i, $i = 0,1,2,... k$.

Prema tome, dobijeni spektri S'_i odgovaraju sistemu linearnih jednačina za $k+1$ nepoznatih.

2b. METODA NAJMANJIH KVADRATA

Ovde, normalne jednačine mogu biti direktno nadjene od rezidualnih jednačina (85) u sledećem pravilu :

Da bi dobili prvu normalnu jednačinu, pomnožićemo svaku rezidualnu jednačinu sa koeficijentom prve nepoznate, sabrati dobijene proizvode, a zbir izjednaciti nulom ;
da bi dobili drugu normalnu jednacinu, pomnozicemo svaku rezidualnu jednacinu sa koeficijentom druge nepoznate, sabrati dobijene proizvode, a zbir izjednačiti nulom ;
istim načinom dobićemo ostale normalne jednačine.

Tada, ako niz sadrži sve pozitivne brojeve, ritam se odredjuje ovako :

na grublji način,

$$h_i = (i+k)p_j + \ell \qquad (98)$$
$$h_{k+1} = p_y + \ell$$

gde je $i=0,1,2,\ldots k$, k je najveći stepen ;
p_j je broj cifara $\max x_j$, p_y je broj cifara $\max y_j$, $j=0,1,2,\ldots n$,
a ℓ biće :

za $n+1 \leq 10$, tada $\ell = 1$
$10 < n+1 \leq 100$, $\ell = 2$

tako, dobijamo

$$S_h = G_0 G_1 G_2 \ldots\ldots G_k G_{k+1} \qquad (99)$$

s ritmom $h=p$, gde je p broj cifara $2kp_j + \ell$

Na precizniji način :

(100) $$h_i = p_i \quad , \quad h_{k+1} = p_y$$

gde je p_i broj cifara indikatorskog broja

$$i_x = (n+1) \max x_j^i \max x_j^k$$

p_y broj cifara indikatorskog broja

$$i_y = (n+1) \max y_j \max x_j^k$$

za $i=0,1,2,..k$, $j=0,1,2,..n$.

Tada, dobijamo

(101) S_h , s ritmom jednak broju cifara p_k .

Sada ako niz sadrži brojeve s različitim znacima, ritam se odredjuje ovako :
na grublji način,

(102) $$h_i = (i+k)p_j + \ell'$$
$$h_{k+1} = p_y + \ell'$$

$i=0,1,2,..k$, k je najveći stepen, p_j je broj cifara max x_j , p_y je broj cifara max y_j ,
a ℓ' biće :

za $n+1 \leqslant 10$, $\ell'=2$

$10 < n+1 \leqslant 100$, $\ell'=3$

Tada, dobijamo

(103) S_h , s ritmom jednak broju cifara $2kp_j + \ell'$.

Na precizniji način,

(104) $$h_i = p_i+1 \ , \quad h_{k+1} = p_y+1$$

gde je p_i broj cifara indikatorskog broja

$$i_x = (n+1) \max|x_j^i| \max|x_j^k|$$

p_y broj cifara indikatorskog broja

$$i_y = (n+1) \max|y_j| \max|x_j^k|$$

$i=0,1,2,\ldots k$, $j=0,1,2,\ldots n$.

Tada, dobijamo

(105) S_h , s ritmom jednak broju cifara p_k+1.

Dalje, iz (85) obrazovaćemo spektre kao u (96)

(106) $$S_i \ , \quad \text{za } i=0,1,2,\ldots,n$$

Tada, s dopustenim ritmom, dobićemo spektar nominalnih jednačina

(107) $$S_i'' = \sum_{j=0}^{n} x_j^i \, S_j$$

to je spektar nominalnih jednačina v_i'', $i=0,1,2,\ldots k$

Prema tome iz (107) dobijamo,

(108) $$\begin{array}{c} S_0'' \\ S_1'' \\ \vdots \\ S_k'' \end{array}$$

s ritmovima : na grublji način, prema (98) i (99),
na precizniji način, prema (100) i (101).

Najzad, ovi spektri odgovaraju sistemu linearnih jednačina za k+1 nepoznatih.

Da bi rešili ovaj sistem linearnih jednačina, primenićemo Gaussovu šemu s glavnim elementom. Napišimo taj sistem linearnih jednačina u ovom obliku :

$$
(109)\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{oo}a_o & + & x_{o1}a_1 & + & x_{o2}a_2 & + & \cdots\cdots & + & x_{ok}a_k & = & y_o \\
x_{1o}a_o & + & x_{11}a_1 & + & x_{12}a_2 & + & \cdots\cdots & + & x_{1k}a_k & = & y_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{ko}a_o & + & x_{k1}a_1 & + & x_{k2}a_2 & + & \cdots\cdots & + & x_{kk}a_k & = & y_k
\end{array}
$$

Tada, kao čvornu jednačinu uzećemo $(k+1)^{-te}$ vrstu, tako smatramo da je x_{ko} najveći koeficient a_o, po modulu.
Pomnožimo jednačine izvesnim brojevima a zatim ih saberemo ili ih oduzmemo, tako da u novo dobijenim jednačinama nećemo imati više nepoznatu a_o ; i produzavamo na isti način dok nam ne ostane samo a_k , čiju vrednost možemo da izračunamo ; iz čega možemo dobiti sve druge nepoznate.

Dakle, dobijenim spektrima (97) i (108), koje pretstavljaju nominalne jednačine odgovara sistem linearnih jednačina (109). Ovi spektri mogu se da se napišu,

$$
(110)\qquad
\begin{array}{lcl}
S_o^* & = & G_{oo}\ G_{o1}\ G_{o2}\ \cdots\ G_{ok}\ G_{o(k+1)} \\
S_1^* & = & G_{1o}\ G_{11}\ G_{12}\ \cdots\ G_{1k}\ G_{1(k+1)} \\
\vdots & & \vdots \\
S_k^* & = & G_{ko}\ G_{k1}\ G_{k2}\ \cdots\ G_{kk}\ G_{k(k+1)}
\end{array}
$$

s $\qquad S_{h^*} = G_{h_o^*}G_{h_1^*}G_{h_2^*}\ \ldots\ G_{h_k^*}G_{h_{k+1}^*}$

s ritmom jednak broju cifara najvećeg h_j^*, $j=0,1,2,\ldots k,k+1$.

Kod prve primene ritam će biti povećan a on se odredjuje ovako :
na grublji način,

$$h_j^{**} = h_j^* + h_o^* - 1 \tag{111}$$

za $j = 0,1,2,..,k,k+1$, a (h_o^*-1) je jednak broju cifara najvećeg broja (po apsolutnoj vrednosti) u prvom stupcu.

na precizniji način,

$$h_j^{**} = p_j^{**} + 1 \tag{112}$$

gde je p_j^{**} broj cifara $i = \max(T_{ko} \cdot T_{ij}, T_{io} \cdot T_{kj})$ za $i=0,1,2,...,k-1$, $j=0,1,2,...k,k+1$, a T_{ij} je efektivna vrednost od G_{ij}.

U ovom slučaju ritmovi se bolje odredjuje na grublji način, jer je to mnogo jednostavnije; tada ako dobijeni spektri imaju u izvesnim kolonama više od jedne cifre bez značenja, t.j. samih nula ili pak samih devetki, prema tome možemo izvršiti kondenzovanje spektra što će se najveći broj po apsolutnoj vrednosti u toj koloni napisan u spektralnom obliku početi samo sa jednom nulom ili devetkom. Nekad ni ne treba da smanjimo ritmove, ali moramo da ih uzmemo u obzir za sledeću primenu, jer nam je jasno da se u svakom daljem stepenu radnje ritam povećava.

Dakle, čvorni spektar je S_k, tako da će broj T_{ko} (t.j. efektivna vrednost od G_{ko}) biti čvorni broj. Množenjem T_{ko} sa $S_o^*, S_1^*, ...,S_{k-1}$; i takodje množenjem S_k^* sa $T_{oo}, T_{1o}, ..., T_{(k-1)o}$, i zatim oduzimanjem drugog dobijenog rezultata od prvog respektivno, prema (45) dobićemo

$$(113)\qquad \begin{matrix} S_o^{**} \\ S_1^{**} \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{k-1}^{**} \end{matrix}$$

s $\qquad S_h = G_{h_o^{**}} G_{h_1^{**}} \cdots\cdot G_{h_k^{**}}$

gde $\qquad h_{j-1}^{**} = h_j^* + h_o^* - 1$

za $\quad j=1,2,\ldots,k,k+1.$

Tim mi završavamo prvi korak, prema tome imamo sada jedan spektar manje nego ranije, kao i jednu prugu i ritam manje.
Sada, čvorni broj je najveća efektivna vrednost po apsolutnoj vrednosti prvog stupca dobijenih spektara a samim tim i spektar u kome se nalazi čvorni spektar. Produzimo da radimo na isti način kao i dosad, dobićemo spektre gde je ukupan broj spektara opet umanjen za jedan. Ponavljamo ovaj postupak rada sve dok ne ostanemo samo na jednom spektru $S^{(k+1)*}$, iz koga ćemo najzad dobiti rezultat traženog a_k.

Dakle imamo i pišemo,

$$(114)\qquad S^{(k+1)*} = G_{o_{(k+1)*}} G_{1_{(k+1)*}}$$

iz čega dobijamo,

$$(115)\qquad a_k = \frac{T_{1_{(k+1)*}}}{T_{o_{(k+1)*}}}$$

Dalje, čvorni spektar je S^{k*}, pišemo

$$S^{k^*} = G_{o_{k^*}} \, G_{1_{k^*}} \, G_{2_{k^*}} \tag{116}$$

iz čega dobijamo,

$$a_{k-1} = \frac{M,2 \; (G_{1_{k^*}})(G_{2_{k^*}}) \;\; x \;\; G_1 G_{-a_k}}{T_{o_k}} \tag{117}$$

gde je brojilac u pitanju zbir dva proizvoda (48), a

$(G_{i_{k^*}})$ je jednak $G_{i_{k^*}}$ s povećanom ritmom.

Dalje, i tako radimo, dobijamo

$$a_{k-n+1} = \tag{118}$$

$$\frac{M_n, \; (G_{1_{(k-n)^*}}) \ldots\ldots (G_{n_{(k-n)^*}}) \;\; x \;\; G_1 \ldots\ldots G_{-a_{k-n+2}}}{T_{o_{k-n+2}}}$$

za $\quad n = 2,3,\ldots,k+1.$

Napomena :

Ako imamo tako dugačke spektre (velike broje) da ne mogu da stanu u mašinu, to nije problem, jer možemo da primenimo metodu cepanja brojeva [7] i [11] .

Primer. Tražimo formulu obliku

$$y = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

koja će zadovoljiti sledeće podatke,

x	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0
y	14	18	26	42	69	112	174	259	370	512

Primenimo ovde metodu sredina.

Za ovaj zadatak ritam se odredjuje ovako :
na grublji način, prema (88) i (89) dobijamo

$$\begin{aligned} \max x_j &= 150, & \text{tada} \quad p_j &= 3 \\ \max y_j &= 512, & \text{tada} \quad p_y &= 3 \\ (r) &= 3\ , & \text{tada} \quad \ell &= 1 \end{aligned}$$

što daje $\quad S_h = 104071004$

s ritmom 2.

na precizniji način, prema (90) i (91) dobijamo

$$\begin{aligned} i_xo &= 3 \times 1 = 3 \\ i_x1 &= 3 \times 150 = 450 \\ i_x2 &= 3 \times 22500 = 67500 \\ i_x3 &= 3 \times 3375000 = 10125000 \\ i_y &= 3 \times 512 = 1536 \end{aligned}$$

što daje $\quad S_h = 13584$

s ritmom 1

Dakle, prema (96), obrazovaćemo spektre, S_o, S_1,.. S_n a nakon grupisanja to bi se napisalo ovako,

$$S_o = 1015002250000337500014$$
$$S_1 = 103000900000270000018$$

$$S_2 = 104502025000911250026$$
$$S_3 = 106003600002160000042$$

$$S_4 = 107505625004218650069$$
$$S_5 = 109008100007290000112$$
$$S_6 = 110511025011576250174$$

$$S_7 = 112014400017280000259$$
$$S_8 = 113518225024603750370$$
$$S_9 = 115022500033750000512$$

Posle sabiranja, dobiće se (97),

$$S'_o = 204501125000303750032$$
$$S'_1 = 210505625003071250068$$
$$S'_2 = 327024750023084900355$$
$$S'_3 = 340555125075633751141$$

s $\quad S_h = 13584$

s ritmom 1

Prema tome ovim spektrima, koje pretstavljaju nominalne jednačine, odgovara sistem linearnih jednačina (109).

Pisući sada prema (110), t.j.

s $\quad S_h = 24685$

s ritmom 1

dobijamo

$S_o^* =$ 02 0045 001125 00030375 00032

$S_1^* =$ 02 0105 005625 00307125 00068

$S_2^* =$ 03 0270 024750 02308490 00355

$S_3^* =$ 03 0405 055125 07563375 01141

Ovde je čvorni spektar S_3^*, a čvorni broj je 3, tako, prema (111)

s $S_h = 5796$

s ritmom 1

dobijamo (113)

$(3S_o^*) =$ 1 00135 0003375 000091125 000096
$(2S_3^*) =$ 00810 0110250 015126750 002282

$S_o^{**} = (3S_o^*) - (2S_3^*) =$ 99324 9893124 984964374 997814

$(3S_1^*) =$ 1 00315 0016875 000921375 000204
$(2S_3^*) =$ 00810 0110250 015126750 002282

$S_1^{**} = (3S_1^*) - (2S_3^*) =$ 99504 9906624 985794624 997922

$(S_2^*) =$ 1 00270 0024750 002308490 000355
$(S_3^*) =$ 00405 0055125 007563375 001141

$S_2^{**} = (S_2^*) - (S_3^*) =$ 99864 9969624 994745114 999214

Dakle, posle drugog koraka dobiće se spektri S_o^{***} i S_1^{***}, koji se mogu kondensovati i napisati ovako,

$S_o^{***} =$ 010125000 02145993750 0320580

$S_1^{***} =$ 006074990 01517238000 0235440 s smanjenim $S_h = 91107$

s ritmom 2

Tada, čvorni spektar je S_o^{***}, a jasno je da je čvorni broj 10125000, prema tome dobićemo,

$(10125000.S_1^{***})=$ 001536203475000000 002383830000000
$(6074990.S_o^{***})$ = 0013036889571312500 001947520294200

Oduzimanjem drugog spektra od prvog spektra dobiće se

$$S^{4*} = 0002325145178687500\ 000436309705800$$

iz čega, prema (115) dobijamo,

$$a_k = \frac{436309705800}{2325145178687500}$$

Prema tome rezultat je, i posle uzimanja zareza u račun, možemo uzeti

$$a_3 = 0{,}1876$$

Sada, iz čvornog spektra S_o^{***}, i prema (117) dobijamo, s ritmom 15,

$$101250000\ a_{k-1} =$$

M_2, 214599375000000320580000 x 999999999998124

iz čega broj u drugoj pruzi s desna biće,

.. .. 999179913714999 999939869292000

tada,

$$a_2 = \frac{-82008628,5000}{101250000} = -0,8100$$

Dajle, iz čvorni spektar S_o^{**}, i prema (118), dobijamo, s ritmom 13,

M_3, 99999989312499999984964374999999997814000 x 9999999998124000000000008100

a broj u trećoj pruzi s desna, biće

.. .. 9997689957499 9.... .....

dakle,

$$a_1 = \frac{-231004,2500}{-67500} = 3,4207$$

Najzad, iz čvornog S_3^{*}, dobijamo, s ritmom 13,

$$3000\ a_{k-3} =$$

M_4, 40500000000551250000007563375000000114 1000 x 999999999812400000000080999999999965793

tako,broj u četvrttoj pruzi s desna biće

.. .. 0003008500000 0.... ....

dakle,

$$a_o = \frac{300850}{30000} = 10,0283$$

Prema tome zaključujemo da je traženi polinom

$$y = 10,0283 + 3,4207\ x - 0,8100\ x^2 + 0,1876\ x^3$$

3. HARMONISKA ANALIZA

Ovde primenimo neregularne spektre na empiričku formulu koja ima oblik trigonometrijskog polinoma koji sledi :

$$(119)\quad y = a_o + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \dots + a_n\cos nx + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \dots + b_{n-1}\sin(n-1)x$$

gde $a_o, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ su nepoznate konstante.

Posmatrajmo ovde slučaj dvanaest ordinata. Neka je data sledeća tabela :

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	y_o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}

Iz ovih podataka treba da nadjemo formulu koja odgovara (119), a odgovarajuća formula za ovaj slučaj je

$$(120)\quad y = a_o + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + a_4\cos 4x + a_5\cos 5x + a_6\cos 6x + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + b_4\sin 4x + b_5\sin 5x.$$

gde $a_o, a_1, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_5$ su nepoznate konstante.

Kao što je poznato izračunavanje za ovu formulu izvode se u dve etape :

Prva etapa izračunavanja je proračun šeme sabiranja i oduzimanja koja sledi :

(121)

	y_o	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	y_6	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7
Zbir :	u_o	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Razlika :	v_o	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

	u_o	u_1	u_2		v_1	v_2
	u_3	u_5	u_4		v_5	v_4
Zbir :	r_o	r_1	r_2		r_3	r_4
Razlika :	t_o	t_1	t_2		t_3	t_4

	r_1	t_3
	r_2	t_4
Zbir :	f_1	f_2
Razlika :	g_1	g_2

Druga etapa izračunavanja je iznalaženje nepoznatih a i b iz sledećih formula :

$$
\begin{aligned}
a_o &= \frac{1}{12}(r_o + f_1) \\
a_1 &= \frac{1}{6}(v_o + \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2) \\
a_2 &= \frac{1}{6}(t_o + \frac{1}{2}g_1) \\
a_3 &= \frac{1}{6}(v_o - t_2) \\
a_4 &= \frac{1}{6}(r_o - \frac{1}{2}f_1) \\
a_5 &= \frac{1}{6}(v_o - \frac{\sqrt{3}}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2) \\
a_6 &= \frac{1}{12}(t_o - g_1) \\
b_1 &= \frac{1}{6}(v_3 + \frac{1}{2}r_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_4) \\
b_2 &= \frac{\sqrt{3}}{12}f_2
\end{aligned}
\tag{122}
$$

$$b_3 = \frac{1}{6}(r_3 - v_3)$$
$$b_4 = \frac{\sqrt{3}}{12}g_2$$
$$b_5 = \frac{1}{6}(v_3 + \frac{1}{2}r_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}r_4)$$

Spektralna metoda se može primeniti na obe ove etape, a možemo da upotrebimo regularne ili neregularne spektre, dok u ovom slučaju primena neregularnih spektara je jednostavnija i korisnija, jer uprkos postojećeg problema koji sadrži različite znakove (+,-), brojevi koji su u upotrebi u toku izračunavanja su uvek pozitivni.
Prva etapa je izkazano u šemama i izvršimo to na sledeći način :

Prvo, formiramo spektre S_{y1} i S_{y2} gde su clanovi brojevi y_i $(i=0,1,2,\ldots,11)$ i to je uradjeno u saglasnosti sa rasporedom u šemi. Saberimo ih, i oduzmimo S_{y2} od S_{y1}, iz čega dobijamo spektre S_u i S_v, respektivno. Zatim formiramo spektre $S_{(uv)1}$ i $S_{(uv)2}$, ali sada clanovi su spektralni brojevi G_u i G_v. Zbir i razlika ova dva spektra daju spektre S_r i S_t respektivno. Ostale primene su vršene na sličan način, tako će ceo proces izgledati ovako :
Prvi korak primene je : koristeci (41),(45)

$S_{y1} =$	G_{y_0}	G_{y_1}	G_{y_2}	G_{y_3}	G_{y_4}	G_{y_5}
$S_{y2} =$	G_{y_6}	$G_{y_{11}}$	$G_{y_{10}}$	G_{y_9}	G_{y_8}	G_{y_7}
$S_u = S_{y1} + S_{y2} =$	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5
$S_v = S_{y1} - S_{y2} =$	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5

Drugi korak primene je : koristeći (15), (18)

$$\begin{array}{ll}
S_{(uv)1} = & G_{u_0}\ G_{u_1}(G_{u_2})(G_{v_1})(G_{v_2}) \\
S_{(uv)2} = & G_{u_3}\ G_{u_5}(G_{u_4})(G_{v_5})(G_{v_4}) \\
\hline
S_r = S_{(uv)1} + S_{(uv)2} = & G_{r_0}\ G_{r_1}\ G_{r_2}\ G_{r_3}\ G_{r_4} \\
S_t = S_{(uv)1} - S_{(uv)2} = & G_{t_0}\ G_{t_1}\ G_{t_2}\ G_{t_3}\ G_{t_4}
\end{array}$$

(123)

Treći korak primene je :

$$\begin{array}{ll}
S_{(rt)1} = & (G_{r_1})(G_{t_3}) \\
S_{(rt)2} = & (G_{r_2})(G_{t_4}) \\
\hline
S_f = S_{(rt)1} + S_{(rt)2} = & G_{f_1}\ G_{f_2} \\
S_g = S_{(rt)1} - S_{(rt)2} = & G_{g_1}\ G_{g_2}
\end{array}$$

U ovom slučaju, ritam se odredjuje ovako :
na grublji način,

$$h = p + 2$$

gde je p broj cifara $\max|y|$
na precizniji način,

$$h = p' + 1$$

gde je p' broj cifara indikatorskog broja

$$i = 9 \max|y|$$

Napomenimo ovde da smo pomoću spektara izvršili samo 6 računskih operacija, a ako bi smo vršili računanje na dosadasnji način je 26.

Druga etapa je primena spektralne metode u gore navedenim jednačinama (122), i izvršimo to na sledeći način :

Sa istim ritmom h, formirajmo

$$S_I = (G_{v_o})(G_{v_3})(G_{r_o})(G_{r_3})(G_{t_o})(G_{t_2})$$

zatim, pomnožimo sa 2, dobićemo

(124) $S_{I'} = (G_{v'_o})(G_{v'_3})(G_{r'_o})(G_{r'_3})(G_{t'_o})(G_{t'_2})$

Dalje, formirajmo

$$S_{II} = (G_{r_4})(G_{t_1})(G_{f_2})(G_{g_2})$$

Sada, s ritmom $h'' = h + p'' - 1$

gde je p'' broj cifara 1732....(iz $\sqrt{3} = 1,732...$), spektar S_{II} sa povećanim ritmom h'', pomnožiti sa 1732.... dobiće se

$$S_{II''} = (G_{r''_4})(G_{t''_1})(G_{f''_2})(G_{g''_2})$$

a jasno je da h'' zavisi od broja cifara odgovaraju množioca.

Nakon zaokrugljivanja i kondenzovanja $S_{II''}$ biće

(125) $S_{II^*} = (G_{r^*})(G_{t^*})(G_{f^*})(G_{g^*})$

opet s ritmom h.

Iz količina u (123),(124) i (125) formirajmo spektre S_1^*, S_2^* i S_3^* s ritmom h, zatim saberimo ih, dobićemo kao što sledi :

(126)

$$
\begin{array}{l}
S_1^*=(G_{r_0})(G_{v'_0})(G_{t'_0})(G_{v'_0})(G_{r'_0})(G_{v'_0})(G_{t_0})(G_{v'_3})(G_{f_2^*})(G_{r'_3})(G_{g_2^*})(G_{v'_3}) \\
S_2^*=(G_{f_1})(G_{t_1^*})(G_{g_1})(\underline{G}_{t'_2})(\underline{G}_{f_1})(\underline{G}_{t_1^*})(\underline{G}_{g_1})(G_{r_3})(G_0)(\underline{G}_{v'_3})(G_0)(G_{r_3}) \\
S_3^*=(G_0)(G_{t_2})(G_0)(G_0)(G_0)(G_{t_2})(G_0)(G_{r_4^*})(G_0)(G_0)(G_0)(\underline{G}_{r_4^*}) \\
\hline
S^*=\ G_0\quad G_1\quad G_2\quad G_3\quad G_4\quad G_5\quad G_6\quad G_7\quad G_8\quad G_9\quad G_{10}\quad G_{11}
\end{array}
$$

Najzad, s dopustenim ritmom pomnožimo S^* sa 833... (iz 1/12=0,0833...), što daje

$$(127)\qquad S_T^* = G_0^*\ G_1^*\ G_2^*\ G_3^*\ G_4^*\ G_5^*\ G_6^*\ G_7^*\ G_8^*\ G_9^*\ G_{10}^*\ G_{11}^*$$

s ritmom h^*, gde je

$$h^* = h + p^*$$

za p^* je broj cifara odgovarajuće množioca (833...).

Konačno dobijamo efektifnu vrednost pruga rezultujućeg spektra S_T^*, gde se odgovarajuću vrednost nepoznatih a_0, a_1, ...,a_6, b_1, b_2, .., b_5.

Prema tome,

$$T_i = a_i, \quad \text{za} \quad i = 0,1,...6 \ ;$$

$$T_{6+j} = b_j \quad \text{za} \quad j = 1,2,...5.$$

Na primer, nadjimo formula, koja će zadovojjiti sledeće podatke :

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y	42	142	138	-2	-25	-21	-69	-90	-92	-45	68	40

U ovom slučaju ritam se odredjuje ovako :
na grublji način,

$\max|y| = 142$, tada $h=3+2=5$

na precizniji način,

$i = 9 \times 142 = 1278$, tada $h = 4+1=5$

Dakle prema (123) dobijamo sledeće :

	0	1	2	3	4	5	
S_{y1}=	00042	00142	00137	99997	99974	99979	
S_{y2}=	99931	00040	00067	99954	99907	99910	
S_u =	99973	00182	00205	99952	99882	99889	zbir,
S_v =	00111	00102	00070	00043	00067	00069	razlika ;

$S_{(uv)1}$=	99973	00182	00206	00102	00070	
$S_{(uv)2}$=	99952	99888	99883	00069	00067	
S_r=	1 99926	00071	00089	00171	00137	zbir,
S_t=	00020	00293	00323	00033	00003	razlika ;

$S_{(rt)1}$=	00071	00033	
$S_{(rt)2}$=	00089	00003	
S_f=	00160	00036	zbir,
S_g=	99982	00030	razlika.

Zatim, iz ovih količina formirajmo S_I i S_I, (124),

$$S_I = 00111\ 00042\ 99926\ 00171\ 00020\ 00323$$

tada s istim ritmom h=5, dobijamo

$$S_{I'}=S_I x2= \underbrace{00222}_{G_{v'_0}}\ \underbrace{00085}_{G_{v'_3}}\ \underbrace{99852}_{G_{r'_0}}\ \underbrace{00342}_{G_{r'_3}}\ \underbrace{00040}_{G_{t'_0}}\ \underbrace{00645}_{G_{t'_2}}$$

Dalje,

$$S_{II}= \ 00137\ 00293\ 00036\ 00030$$

Sada, pomnožimo S_{II} sa 173 (t.j. prve cifre od $\sqrt{3}$ = 1,732...), a ritam će biti h'=7, dakle dobićemo

$$S_{II}= 0000137\ 0000293\ 0000036\ 0000030$$

a njihov proizvod je

$$S_{II''}=0023701\ 0050689\ 0006228\ 0005190$$

s ritmom 7.

Prema tome, nakon zaokrugljivanja i kondezovanja dobijamo (125)

$$S_{II*} = \underbrace{00237}_{G_{r_4^*}}\ \underbrace{00507}_{G_{t_1^*}}\ \underbrace{00062}_{G_{f_2^*}}\ \underbrace{00052}_{G_{g_2^*}}$$

s ritmom 5.

Iz količina u šeni, $S_{I'}$, S_{II*}, dobićemo (126) kao što sledi:

$$S_1^* = \begin{array}{llllll} 99926 & 00222 & 00040 & 00221 & 99852 & 00222 \\ 00020 & 00086 & 00062 & 00342 & 00052 & 00086 \end{array}$$

$$S_2^*= \begin{array}{llllll} 00160 & 00506 & 99981 & 99353 & 99839 & 99493 \\ 00018 & 00170 & 99999 & 99914 & 00000 & 00171 \end{array}$$

$S_3^* =$ 00000 00323 00000 00000 00000 00323
00000 00236 99999 99999 99999 99763

Njihovim sabiranjem dobija se spektar S* (126)

S* = 00086 01052 00021 99575 99692 00038
00038 00494 00062 00256 00052 00020

Dalje uzmemo za množioca 833 (iz 1/12 = 0,0833..) onda će ritam biti 8.
Tako, spektar S* s ritmom 8, biće

S* = 00000086 00001502 00000021 99999575
99999692 00000038 00000038 00000494
00000062 00000256 00000052 00000020

Njihovim množenjem dobija se rezultujući spektar S_T^* (127)

$S_T^* =$ 00071638 00876316 00018325 99646807
99743436 00031654 00031654 00411502
00051646 00213248 00043316 00016660

s ritmom 8.

Najzad, posle podele na pruge, dobijamo da su njihove efektivne vrednosti :

71638, 876316, 18326, -353192
-256564, 31654, 31654, 411502
51646, 213248, 43316, 16660

Iz 1/12 = 0,08333..., mismo uzeli do četvrte decimale, prema tome dobiće se kao definitivan rezultat,

$$y = 7,1638 + 87,6316 \cos x + 1,8326 \cos 2x$$
$$-35,3192 \cos 3x - 25,6564 \cos 4x + 3,1654 \cos 5x$$
$$+3,1654 \cos 6x + 41,1502 \sin x + 5,1646 \sin 2x$$
$$+21,3248 \sin 3x + 4,3316 \sin 4x + 1,6660 \sin 5x.$$

--o--

Kao konačni zaključak možemo izvesti da spektralne metode primenjene na različit probleme numeričke matematike mogu odigrati važnu ulogu.

-..o..-

BIBLIOGRAFIJA

1. M. PETROVITCH, Les spectres numériques, (Gauthier-Villars, Paris 1919).
2. M. PETROVITCH, Lecons sur les spectres mathématiques, (Gauthier-Villars, Paris 1928).
3. K. ORLOV, Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara,(Doktorska teza, Beograd 1935).
4. K. ORLOV, O znaku nule, (Proceedings of the mathematical society of Yugoslavia, Beograd 1939).
5. K. ORLOV, Praktične spektralne metode za numeričko izračunavanje determinanta i za rešavanje sistema linearnih jednačina,(Vesnik društva matematičara i fizičara N.R. Srbije V_{1-2}, Beograd 1953).
6. C.ORLOFF, Application pratique de la theorie des spectres mathématiques de Michel Petrovitch au calcul numérique,(Extrait du no.3324,Juillet-Decembre 1953 Fascicule 4 de la 91^{e} annee de la Revue Scientifique, pages 243 A 247, Paris).
7. C. ORLOFF, The fundamentals of practical spectral arithmetic and algebra, Vrsac 1955).
8. C. ORLOFF, Application des spectres mathématiques a la resolution equations differentieller ordinaires, (Bulletin de la Societe des mathematiciens et physiciens de la R.P. de Serbie Vol.IX_{3-4},1957,Beograd).
9. C. ORLOFF, Sur la minination du nonbre d'operations dans les methodes spectrales basees sur la methode de la racine carree, (Matematički Vesnik 7(22)1970, str.83-89, Belgrade 1970).
10. K.ORLOV, Nove računske operacije inspirisane teorijom matematičkih spektara,(Matematički Vesnik 5(20)Sv,4, 1968, Beograd).
11. B. MIHAILOVIC, Realizacija proizvoda dva spektra na cifarskim računskim mašinama, (Matematički Vesnik, 5(20)Sv,3,1968, Beograd).