UNIVERZITET CRNE GORE
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr DUŠAN S. JOKANOVIĆ

KLASE BEROVIH I INVOLUTIVNIH BEROVIH PRSTENA

— DOKTORSKA DISERTACIJA —

PODGORICA, 2009. GODINE

PODACI I INFORMACIJE O DOKTORANTU

Ime i prezime: **Dušan Jokanović**

Datum i mjesto rođenja: 20.12 1970 godine, Trebinje

Postdiplomske studije: Matematički fakultet Beograd, 1999

INFORMACIJE O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naslov teze: **Klase Berovih i involutivnih Berovih prstena**

Fakultet: Prirodno-matematički fakultet Pogorica

UDK, OCJENA I ODBRANA DISERTACIJE

Datum prijave doktorske teze:	28.03 2007
Datum sjednice Senata Univerziteta na kojoj je prihvaćena teza:	25.05 2007

Komisija za ocjenu podobnosti teze i kandidata:

Prof. Dr Žarko Mijajlović, redovni profesor
(Matematički fakultet Beograd)

Prof. Dr Vučić Dašić, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Prof. Dr Biljana Zeković, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Mentor Prof. Dr Žarko Mijajlović

Komisija za ocjenu doktorske disertacije:

Prof. Dr Žarko Mijajlović, redovni profesor
(Matematički fakultet Beograd)

Prof. Dr Vučić Dašić, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Prof. Dr Biljana Zeković, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Komisija za odbranu doktorske disertacije:

Prof. Dr Žarko Mijajlović, redovni profesor
(Matematički fakultet Beograd)

Prof. Dr Vučić Dašić, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Prof. Dr Biljana Zeković, redovni profesor
(Prirodno-matematički fakultet Podgorica)

Datum odbrane:

Datum promocije:

Mojoj Nadi

Predgovor

Teorija Berovih prstena a posebno teorija Berovih prstena sa involucijom ima svoje duboke korjene u funkcionalnoj analizi, zapravo u von-Nojmanovoj teoriji operatora definisanih na Hilbertovom prostoru, kao i u teoriji AW^* algebri mada je jako povezana i sa teorijom mreža imajući u vidu da neke apstraktne mreže projekcija AW^* algebri imaju strukturu neprekidne geometrije.

Disertacija je strukturno koncipirana u tri dijela.

1. Involutivni prsteni.

2. Kvazi-Berovi prsteni.

3. Armendarisovi prsteni i rigidni prsteni.

Prvi dio je vezan za involutivne prstene. Najprije je dat pregled osnovnih pojmova vezanih za ekvivalentne projekcije u involutivnom prstenu. U ovom dijelu je dokazano da ekvivalentnost projekcija u prstenu sa involucijom indukuje izomorfizam odgovarajućih uglova u prstenu (Teorema 1.1). Potom je uvedena klasa Rikartovih prstena sa involucijom i dokazano da ako u Rikartovom prstenu sa involucijom postoji projekcija e takva da je $e \sim 1 - e$ tada je u prstenu element $2 = 1 + 1$ invertibilan (Lema 1.1).

Poglavlje 1.3 je vezano za uvod u Berove prstene sa involucijom gdje na veoma koncizan način dolazi do izražaja teorija mreža jer u Berovom prstenu sa involucijom skup projekcija ima strukturu mreže. Poglavlje 1.5 je vezano za veoma važan pojam centralnog pokrivača proizvoljnog elementa u prstenu. Poglavlje 1.6 ima interesantan aspekt vezan za teoriju proširenja u involutivnom prstenu gdje je dokazano da u Rikartovom prstenu sa involucijom koji sadrži projekciju e takvu da je $e \sim 1 - e$ za svako $*$-uređenje postoji prošireno uređenje. Isto tvrđenje važi i u Rikartovom prstenu sa involucijom koji zadovoljava WSR aksiom i sadrži projekcije e, f takve da je $ef - fe$ invertibilno. Potom je u poglavlju 1.5.1 uvedena relacija uopštene uporedivosti projekcija (GC), kao i svojstva (PC) i zakon paralelograma koji ima veoma veliku primjenu u Von Nojmanovim algebrama operatora (vidjeti [2]). U odjeljku 1.5.3 razmatraju se pitanja reprezentacije involutivnog prstena pomoću prstena matrica gdje je dokazano da ako u prstenu postoji ortogonalna dekompozicija jedinice međusobno ekvivalentnim projekcijama tada prsten ima matričnu reprezentaciju. Takođe je razmatrana matrična reprezentacija PI-Berovih, homogenih, ograničenih i neprekidnih Berovih prstena. Dat je potreban i dovoljan uslov za ekvivalentnost ortogonalnih projekcija u slabom Rikartovom prstenu sa involucijom.

Glava 2 vezana je za kvazi-Berove prstene i PQ-Berove prstene koje je uveo W. E. Clark. Uglavnom su izloženi rezultati koji se odnose na prim-prstene, semicentralno redukovane prstene kao i na karakterizaciju PQ-Berovih prstena (propozicije 2.0.8, 2.0.9). Poglavlje 2.1 govori o odnosu između PQ-Berovih i kvazi Berovih prstena. Izloženi su rezultati vezani za reference [17] i [20] gdje vidimo da osobina kvazi berovosti PQ-Berovog prstena leži u kompletnosti mreže ideala generisanih lijevo semicentralnim idempotentima. Poglavlje 2.1.1 je vezano za karakterizaciju PQ-Berovih prstena koji sadrže kompletan skup trougaonih idempotenata ([15],[16]), a poglavlje 2.1.2 je vezano za karakterizaciju PQ-berovosti prstena $R[[x]]$ gdje se vidi da se osobina PQ-berovosti prenosi sa prstena R uz dodatni uslov da svaka prebrojiva familija idempotenata ima uopšteni supremum. Poglavlje 2.3 vezano je za generalizovane Berove prstene.

Glava 3 je strukturno vezana za Armendarisove i rigidne prstene. Klasa Armendarisovih prstena ima korjene u klasi redukovanih prstena. Teoretski njen najveći značaj je u činjenici da u ovoj klasi postoji bijekcija između skupa anihilatora prstena R i odgovarajućeg polinomijalnog prstena $R[x]$(Hirano). Dokazane su osobine zatvorenosti klase rigidnih i slabo rigidnih prstena za direktne proizvode kao i tvrđenje da se osobina rigidnosti prenosi sa prstena na odgovarajući polinomijalni prsten. Takođe je naveden rezultat vezan za referencu [28] koji govori da se osobina slabe rigidnosti prenosi sa prstena R na neke potprstene prstena $M_n(R)$. Poglavlje 3.1 vezano je za Armendarisove prstene Loranovih redova gdje su date dvije važne karakterizacije σ-kosih Armendarisovih prstena (Teoreme 3.8, 3.9) a takođe dokazana i teorema koja daje dovoljan uslov za prenošenje osobine redukovanosti sa prstena R na prsten $R[[x;\sigma]]$. U poglavlju 3.1 dokazano je da izomorfizam prstena čuva slabu kosu Armendarisovu strukturu (Lema 3.1) a primjenjujući ovo tvrđenje dat interesantan primjer slabog kosog Armendarisovog prstena koso simetričnih matrica. U sljedećem dijelu je dokazana osobina zatvorenosti klase slabih Armendarisovih prstena za direktne proizvode (Teorema 3.1.2), kao i činjenica koja govori da se osobina slabe armendarisovosti prenosi sa faktor prstena R/I na prsten R pod pretpostavkom da je I nilpotentan ideal. U poglavlju 3.2 se razmatraju Berovi i rigidni prsteni, poglavlju 3.3 kosi polinomijalni prsteni nad kvazi Berovim prstenima, a poglavlje 3.4 vezano je za semikomutativne prstene. Disertaciju završavamo odjeljkom vezanim za sps-Armendarisove prstene vezane za referencu [34] gdje vidimo da se u ovoj klasi osobina berovosti i kvazi berovosti prenosi sa prstena R na odgovarajući kosi polinomijalni prsten.

Na kraju rezimiramo autorov originalni doprinos disertaciji odnosno originalne rezultate disertacije.
Teorema 1.1 pokazuje da ekvivalentnost projekcija u prstenu indukuje izomorfizam odgovarajućih uglova u prstenu. Lema 1.1 dokazuje egzistenciju inversa elementa $2 = 1 + 1$ pod pretpostavkom egzistencije projekcije e koja je ekvivalentna sa $1 - e$. Teoreme 1.8 ,1.9 dokazuju egzistenciju proširenog uređenja u prstenima sa involucijom. Teorema 1.11 dokazuje matričnu reprezentaciju involutivnog prstena u kome

postoji ortogonalna dekompozicija jedinice međusobno ekvivalentnim projekcijama. Teorema 1.12 daje karakterizaciju ekvivalentnosti ortogonalnih projekcija. Teoreme 3.1 i 3.3 dokazuju da je klasa rigidnih odnosno slabo rigidnih prstena zatvorena za direktni proizvod. Teorema 3.5 dokazuje da se osobina rigidnosti prenosi sa prstena R na prsten $R[x]$. Teoreme 3.8 i 3.9 daju karakterizaciju σ-kosih Armendarisovih prstena $R[x, x^{-1}; \sigma]$ i $R[[x, x^{-1}; \sigma]]$. Teorema 3.10 daje potreban uslov da prsten $R[[x; \sigma]]$ bude redukovan u slučaju redukovanosti prstena R. Lema 3.11 dokazuje da izomorfizam prstena čuva, na izvjestan način, Armendarisovu strukturu. Teorema 3.11 daje interesantan primjer kosog Armendarisovog prstena matrica. Teorema 3.12 dokazuje zatvorenost klase slabih Armendarisovih prstena za direktni proizvod. I konačno teorema 3.13 pokazuje da se svojstvo armendarisovosti može prenijeti sa faktor prstena R/I na prsten R u slučaju nilpotentnosti ideala I.

Tokom svakog ozbiljnog poduhvata, kakav je i izrada disertacije, prirodno je da se stvaraju određene prepreke. Svima onima koji su doprinijeli da moje prepreke postanu premostive dugujem veliku zahvalnost. Za početna istraživanja disertacije veliku zahvalnost dugujem Prof. Dr Biljani Zeković. Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru Prof. Dr Žarku Mijajloviću koji je pratio moj naučni razvoj još od postdiplomskih studija i koji za mene, na izvjestan način, predstavlja uzor i u ljudskom i naučnom pogledu. Najveću zahvalnost dugujem Prof. Dr Slobodanu Vujoševiću koji je istinski zaslužan za oblikovanje završnih rezultata disertacije u što bolju formu i koji me je tokom izrade disertacije, zajedno sa mentorom, istinski potsticao.

Mr Dušan Jokanović

Izvod teze

Doktorska disertacija *Klase Berovih i involutivnih Berovih prstena* sastoji se iz tri dijela. U prvom dijelu su dati osnovni pojmovi vezani za teoriju prstena sa involucijom koji se odnose na Rikartove prstene i Berove prstene. Dokazano je da ekvivalentnost projekcija u prstenu sa involucijom indukuje izomorfizam odgovarajućih uglova u prstenu, kao i tvrđenje da ako u Rikartovom prstenu sa involucijom postoji projekcija e takva da je $e \sim 1-e$ tada je u prstenu element $2 = 1+1$ invertibilan. Takođe se uvodi pojam centralnog pokrivanja gdje vidimo da klasa Berovih prstena sa involucijom ima osobinu da je desni anihilator svakog desnog ideala generisan centralnom projekcijom. U ovom poglavlju je takođe razmatrana teorija proširenja u prstenima sa involucijom.

Najvažniji rezultat u Berovoj teoriji prstena sa involucijom u kojima postoji ortogonalna dekompozicija jedinice, jeste mogućnost matrične reprezentacije tj. izomorfizma involutivnog prstena sa prstenom matrica. U ovom dijelu je takođe dat potreban i dovoljan uslov za ekvivalentnost ortogonalnih projekcija u slabom Rikartovom prstenu sa involucijom.

Poglavlje 2 je vezano za teoriju kvazi-Berovih prstena i PQ-Berovih prstena. Uglavnom je dat pregled rezultata vezanih za klasu prim-prstena i semicentralno redukovanih prstena. Ovdje na veoma jasan način do izražaja dolazi teorija mreža gdje vidimo da je klasa PQ-Berovih prstena okarakterisana osobinom kompletnosti mreže ideala generisanih lijevo semicentralnim idempotentima, odnosno osobinom egzistencije kompletnog skupa trougaonih idempotenata. Jedno od osnovnih pitanja u teoriji prstena sa involucijom jeste pitanje prenošenja osobine berovosti sa prstena na neku

njegovu ekstenziju (matričnu, polinomijalnu, prsten redova...), gdje vidimo da se osobina berovosti prenosi sa prstena R na prsten redova $R[[x]]$ uz dodatni uslov da svaka prebrojiva familija idempotenata ima uopšteni supremum. Uopštenje klase Berovih prstena jeste klasa generalizovanih Berovih prstena. U ovoj klasi posebno je razmatrana mogućnost prenošenja osobine generalizovane berovosti sa prstena R na prsten gornjih trougaonih kvadratnih matrica nad R sa jednakim elementima na glavnoj dijagonali.
Poglavlje 3 je vezano za Armendarisove i rigidne prstene. Klase Armendarisovih i rigidnih prstena veoma dobro korespondiraju sa klasom Berovih prstena u smislu prenošenja osobine berovosti sa prstena na neku njegovu ekstenziju. Najprije su dokazane osobine zatvorenosti klase rigidnih i slabo rigidnih prstena za direktne proizvode kao i tvrđenje da se osobina rigidnosti prenosi sa prstena na odgovarajući polinomijalni prsten. Takođe su date dvije karakterizacije kosih Armendarisovih prstena Loranovog tipa i dokazana teorema koja daje dovoljan uslov za prenošenje osobine redukovanosti sa prstena R na prsten $R[x;\sigma]$. U ovom poglavlju dokazano je da izomorfizam prstena čuva slabu Armendarisovu strukturu a kao posljedica ovog tvrđenja konstruisan interesantan primjer slabog kosog Armendarisovog prstena koso simetričnih matrica. Dokazano je tvrđenje da je klasa slabih Armendarisovih prstena zatvorena za direktne proizvode kao i mogućnost prenošenja slabe armendarisovosti sa faktor prstena R/I na prsten R pod pretpostavkom da je ideal I nilpotentan. Posljednji dio disertacije vezan je za sps-Armendarisove prstene u kojima se osobina berovosti odnosno PQ-berovosti prenosi sa prstena na odgovarajući kosi polinomijalni prsten.

Abstract

The subject of Baer $*$-rings has its roots in von Neumann's theory of rings of operators, that is $*$-algebras of operators on Hilbert space, containing the identity operator, that are closed in a weak operator topology. The von Neumann algebras are blessed with excess of theory of algebraic structures.

Thesis consists of three sections. In first section we introduce the theory of rings with involution which is related to Rickart rings and Baer rings with involution. We also introduce the concept of central cover and we give the key of central cover in Baer $*$ rings which lies in fact that an annihilator of every right ideal is generated by central projection. After that we consider the theory of extensions of orderings in rings with involution. The most important results in theory of rings with involution is possibility of representing those rings in terms of matrix rings especially in Baer rings which allows orthogonal decomposition of unity.

The second section is related to quasi Baer rings and PQ-Baer rings. The main notion of these section is relation of theory of rings and lattice theory were we see that the quasi Baer property lies in completeness of lattice of principal right ideals generated by right semicentral idempotents of ring. Rings which have a complete set of triangular idempotents are also considered were we see that in those rings the terms of PQ-Baer and quasi Baer ring coincides.

The third section is related to Armendariz and rigid rings were we show that the class of rigid (weak rigid) weak Armendariz rings is closed for direct products and that the notion of rigidity naturally transfers from the ring R to the corresponding polynomial ring. On assumption that factor ring R/I is weak Armendariz and I is

nilpotent ideal, we prove that R is weak Armendariz ring. We also prove that ring isomorphism preserves the weak skew-Armenadariz structure. Armendariz rings of Laurent power series rings are also considered. At the end we introduce the class of semicommutative rings and sps-Armendariz rings, and see that the number of interesting properties of a ring R transfers to its skew power series rings.

Sadržaj

Glava 1

Involutivni prsteni

1.1 Mreža projekcija

Involutivni prsten (prsten sa involucijom, * - prsten) je prsten $(R, +, \cdot)$ na kome je osim operacija sabiranja i množenja definisana unarna operacija $* : R \to R$ koja je involutivni automorfizam tj. prsten u kome važe identiteti

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \ (xy)^* = y^*x^*, (x^*)^* = x, \ \forall x, y \in R.$$

Ako je A algebra nad poljem F na kome je definisana involucija $\lambda \to \lambda^*$ tada za algebru A kažemo da je *-algebra ako važi

$$(\lambda x)^* = \lambda^* x^*, \ \forall x \in A, \ \forall \lambda \in F.$$

[1] Osnovna motivacija za uvođenje prstena sa involucijom jeste u von-Nojmanovoj teoriji prstena operatora tj. involutivnim algebrama operatora definisanih na Hilbertovom prostoru (W^*-algebre) kao i u teoriji AW^*-algebri Kaplanskog gdje operacija involucije jeste uopštenje operacije konjugovanja u algebri operatora. Naime Kaplanski je dokazao da mreža projekcija svake konačne AW^* algebre jeste neprekidna geometrija. Takođe je pokazao da neke apstraktne klase mreža imaju strukturu

[1] Za teoriju involutivnih algebri vidjeti referencu [11].

neprekidne geometrije a kao osnovno sredstvo koristio je teoriju regularnih involutivnih prstena. Teorija Berovih prstena sa involucijom koju je takodje uveo Irving Kaplanski jeste prirodna generalizacija AW^* algebri kao i teorije C^*- algebri tj. Banahovih algebri sa involucijom koje zadovoljavaju uslov $||x^*x|| = ||x||^2$.

Centralni pojam u teoriji involutivnih prstena jeste pojam projekcije.

Definicija 1.1. *Za element e involutivnog prstena R kažemo da je projekcija ako je e idempotent fiksiran involucijom tj važi* $e = e^2 = e^*$.

Sa $\widetilde{R}$ označavamo skup svih projekcija involutivnog prstena R.
Za $S \subset R$, $\widetilde{S} = S \bigcap \widetilde{R}$. Na skupu $\widetilde{R}$ uvodimo relaciju poretka na sljedeći način

$$e \leq f \Leftrightarrow e = ef \Leftrightarrow e = fe.$$

Lako se vidi da relacija poretka $\leq$ zadovoljava sljedeće identitete:

1. $e \leq f \Leftrightarrow eR \subset fR \Leftrightarrow Re \subset Rf$.

2. $e = f \Leftrightarrow eR = fR \Leftrightarrow Re = Rf, \;\; \forall e, f \in \widetilde{R}$.

Zaista iz $e \leq f$ imamo $e = ef \in Rf$ pa je $Re \subset Rf$. Obratno iz $Re \subset Rf$ $e = ee \in Re \subset Rf$. Neka je $e = xf$. Sada imamo $ef = xff = xf = e$ pa je dakle iz definicije uredjenja $e \leq f$.

U teoriji involutivnih prstena pojam ortogonalnosti projekcija uvodimo na sljedeći način:

Za projekcije e, f prstena R kažemo da su ortogonalne ako je $ef = 0$. Lako se pokazuje da ako su e, f ortogonalne projekcije tada je $e + f$ projekcija. Takodje ako je $e \leq f$ tada je $f - e$ projekcija ortogonalna sa e i $f - e \leq f$.

Generalno u u involutivnom prstenu R sa relacijom poretka $\leq$ skup $\widetilde{R}$ nema obavezno strukturu mreže. Međutim ako projekcije e, f komutiraju tada postoji $e \vee f, e \wedge f$ i dati su sa

$$e \wedge f = ef, \quad e \vee f = e + f - ef.$$

Za projekcije e, f involutivnog prstena R kažemo da su *ekvivalentne* ako postoji $w \in R$ takav da važi $w^*w = e, ww^* = f$. Koristimo oznaku $e \sim f$. [2] Element $w \in R$ naziva se *parcijalna izometrija* ako važi $ww^*w = w$ akko $e = w^*w$ je projekcija takva da je $we = w$. Element $w \in R$ je *parcijalna izometrija* akko je elememt $e = ww^*$ projekcija $(e \sim f)$ i važi $ew = w$. Projekcija e je najmanja projekcija za koju je $we = w$ odnosno projekcija f je najmanja projekcija za koju je $fw = w$.

Dokaz da je uslov potreban je trivijalan. Obratno ako je $ww^*w = w$, tada stavljajući $e = w^*w$ dobijamo da je $we = w$ i $e^2 = (w^*w)(w^*w) = w^*w = e = e^*$. Odavde odmah slijedi da je w^* parcijalna izometrija i za $f = (w^*)^*w^* = ww^*$ imamo da je $w^*f = w^*, fw = w$. Za projekciju g za koju je $wg = w$ slijedi da je $w^*wg = w^*w, eg = e$. Dakle $e \leq g$. Zaista projekcija e je najmanja sa svojstvom $we = w$, a potpuno analogno dokazujemo tvrđenje za projekciju f.

Saglasno prethodnoj definiciji projekciju e nazivamo *početnom* a projekciju f *krajnjom* projekcijom parcijalne izometrije w.

Propozicija 1.1.1. *[1] Neka su e, f projekcije involutivnog prstena R. Tada je $e \sim f$ akko postoji parcijalna izometrija sa početnom projekcijom e i krajnjom projekcijom f.*

DOKAZ. Dokaz da je uslov potreban, slijedi trivijalno iz prethodnog rasuđivanja. Obratno iz $e \sim f$ imamo da postoji $w \in fRe$ pri čemu je $ww^* = f$. Kako je $w = we = ww^*w$, w je parcijalna izometrija.

[2] U teoriji C^* algebri koristi se termin ekvivalentnost u smislu Murray-von Neumanna, mada postoje i unitarna i homotopska ekvivalentnost.

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije i vrijedi:

1. $e \sim 0 \Leftrightarrow e = 0$.

2. $e \sim f \Rightarrow he \sim hf$ za svaku centralnu projekciju h.

Iz $e \sim 0$ imamo da postoji $w \in 0R0 = \{0\}$ za koju važi $w^*w = e$. Dakle $e = 0$. Nadalje neka je w element za koji je $w^*w = e$, $ww^* = f$. Tada za svaku centralnu projekciju h imamo

$$(wh)^*(wh) = hw^*w = he$$

i

$$(wh)(wh)^* = hf.$$

Sljedeća propozicija pokazuje da je relacija ekvivalencije na skupu $\widetilde{R}$ konačno aditivna tj. da vrijedi:

Propozicija 1.1.2. *[1] Ako su $e_1, ..., e_n$ i $f_1, ..., f_n$ familije ortogonalnih projekcija takvih da je $e_i \sim f_i$ za $i = 1, ..., n$ tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \sim \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

DOKAZ. Neka su w_i parcijalne izometrije za koje je

$${w_i}^* w_i = e_i, w_i {w_i}^* = f_i.$$

Neka je je $w = w_1 + ... + w_n$. Kako je $w_i e_i = w_i$, $w_i {w_i}^* = f_i$, to se za projekciju w postiže tražena ekvivalencija. □

Neka je R prsten sa involucijom i $e \in R$ idempotent. Tada je skup eRe potprsten od R koji nazivamo *ugao* prstena R generisan idempotentom e. Termin *ugao* prstena motivisan je činjenicom da u slučaju da je $R = M_n(R_1)$, dakle prsten matrica za neki prsten R_1, i $e = diag(1, 0, ..., 0)$ tada je $eRe \cong R_1$.

Sljedeća teorema pokazuje da ekvivalentnost projekcija u prstenu sa involucijom inddukuje izomorfizam odgovarajućih uglova u prstenu R.

Teorema 1.1. *Neka je R prsten sa involucijom i e, f projekcije takve da je $e \sim f$ pomoću izometrije w. Tada preslikavanje $\varphi : eRe \to fRf$ definisano sa $\varphi(x) = wxw^*$, predstavlja involutivni izomorfizam, φ čuva uredjenje i za svaku projekciju $g \leq e$ vrijedi $g \sim \varphi(g)$.*

DOKAZ. Jasno je da za $x \in eAe$ imamo da $\varphi(x) \in fAf$. Dokažimo da je φ izomorfizam. Lako se provjerava da za $x, y \in eRe$ imamo

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \ \forall x, y \in eRe.$$

Takodje je

$$\varphi(xy) = wxyw^* = wxeyw^* = wxw^*wyw^* = \varphi(x)\varphi(y).$$

Neka je $x \in eRe$ i $wxw^* = 0$. Tada je

$$0 = w^*(wxw^*)w = exe = x$$

tj. φ je 1-1. Dokažimo da je preslikavanje φ sirjektivno. Neka je $y \in fRf$. Tada je $w^*yw \in eRe$ i $\varphi(w^*yw) = y$ tj. preslikavanje φ je na. Takodje za proizvoljno $x \in eRe$

$$\varphi(x^*) = wx^*w^* = (wxw^*)^* = (\varphi(x))^*.$$

Primjetimo da je $\widetilde{R} \bigcap eRe = \{g \in \widetilde{R}, \ g \leq e\}$, odakle odmah dobijamo da je $g \sim \varphi(g)$ pomoću parcijalne izometrije wg. □

Sada na skupu projekcija involutivnog prstena uvodimo relaciju dominiranosti.

Definicija 1.2. *Za projekcije $e, f \in R$ kažemo da je e dominirano sa f i pišemo $e \preceq f$ ako postoji projekcija g, takva da je $g \leq f$ i $e \sim g$ tj. ako je projekcija e ekvivalentna sa podprojekcijom od f.*

Relacija dominiranosti ima sljedeća svojstva:

(1) $e \leq f \Rightarrow e \preceq f$.

(2) $e \sim f \Rightarrow e \preceq f$.

(3) $e \preceq f, f \preceq g \Rightarrow e \preceq g$.

DOKAZ. Dokaz za (1) i (2) je veoma direktan. Dokažimo dio tvrdjenja (3). Neka su w, v parcijalne izometrije takve da je $w^*w = e$, $ww^* = f' \leq f$ i $vv^* = g' \leq g$. Neka je nadalje $u = vw$. Tada je $u^*u = e$ i $ue = u$. Prema propoziciji 1.1 u je parcijalna izometrija sa početnom projekcijom e i $gu = u$, pa je dakle $uu^* \leq g$. □

Postoji izvjesna analogija relacije dominiranosti na skupu idempotenata involutivnog prstena i relacije poretka na skupu kardinala. Za skup projekcija $\widetilde{R}$ kažemo da ima *Šreder-Bernštajnovo* [3]svojstvo ako za svake dvije projekcije e, f važi

$$e \preceq f \wedge f \preceq e \Rightarrow e \sim f.$$

U slučaju da je R involutivni prsten u kome je mreža projekcija uslovno kompletna (za svaku projekciju e skup $[0, e] = \{x \in \widetilde{R},\ x \leq e\}$ je kompletna mreža) tada važi osobina *Šreder-Bernštajna.*

Teorema 1.2. *[1] Neka je R involutivni prsten u kome je mreža projekcija uslovno kompletna u odnosu na relaciju $\leq$. Tada važi svojstvo Šreder-Bernštajna.*

DOKAZ. Najprije uočimo da je za svaku projekciju e prstena R $[0, e] = \widetilde{eRe}$ Pretpostavimo da je $e \preceq f$, $f \preceq e$. Neka su w, v parcijalne izometrije za koje je $w^*w = e$, $ww^* = f' \leq f$ i $v^*v = f$, $vv^* = e' \leq e$ Definišimo niz preslikavanja $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ na sljedeći način:

$$\varphi_1 : [0, f] \to [0, e] \quad \text{sa} \quad \varphi_1(g) = vgv^*,$$

[3]Teorema na izvjestan način predstavlja
analogon Kantor Bernštajnove teoreme o kardinalima.

$$\varphi_2 : [0,e] \to [0,e] \quad \text{sa} \quad \varphi_2(g) = e - g,$$

$$\varphi_3 : [0,e] \to [0,f] \quad \text{sa} \quad \varphi_3(g) = wgw^*,$$

$$\varphi_4 : [0,f] \to [0,f] \quad \text{sa} \quad \varphi_4(g) = f - g.$$

Neka je

$$\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1.$$

Eksplicitno $\varphi(g) = f - w(e - vgv^*)w^*$, za svako $g \leq f$. Zbog kompletnosti mreže $[0, f]$ i izotonosti preslikavanja φ postoji fiksna tačka za preslikavanje φ [4] tj. postoji projekcija $g_0 \leq f$ takva da je $\varphi(g_0) = g_0$. Nadalje je $w(e - vg_0v^*)w^* = f - g_0$. Za $x = w(e - vg_0v^*)$ dobijamo $xx^* = f - g_0$ pa kako je $w^*w = e$ imamo da je $x^*x = e - vg_0v^*$, $f - g_0 \sim e - vg_0v^*$. Definišemo li $y = vg_0$ lako se dobija da je $y^*y = g_0, yy^* = vg_0v^*$. Dakle $g_0 \sim vg_0v^*$, odakle slijedi $f - g_0 \sim e - g_0$, a ovo povlači $e \sim f$. □

[4] Ovo je poznato tvrđenje iz elementarne teorije mreža.

1.2 Rikartovi involutivni prsteni

Neka je R involutivni prsten i S neprazan podskup od R. Tada se skup

$$r(S) = \{x \in R \,|\, sx = 0 \ \forall s \in S\}$$

naziva desni anihilator skupa S. Potpuno analogno skup

$$l(S) = \{x \in R \,|\, xs = 0 \ \forall s \in S\}$$

nazivamo lijevi anihilator skupa S. Kažemo da je R *Rikartov prsten* (PP-prsten) sa involucijom ako je desni anihilator svakog jednočlanog skupa generisan projekcijom tj. za svako $x \in R$, $r(\{x\}) = gR$, gdje je g projekcija u prstenu tj. $g^2 = g^* = g$. Iz elementarne teorije prstena poznato je da anihilator skupa ima sljedeće ososbine:

Neka su S, T i $S_i, (i \in I)$ neprazni podskupovi prstena R. Tada važi:

(a) $S \subset l(r(S))$, $S \subset r(l(S))$.

(b) $S \subset T \Rightarrow r(S) \supset r(T)$.

(c) $r(S) = r(l(r(S)))$, $l(S) = l(r(l(S)))$.

(d) $r(\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcap_{i \in I} r(S_i)$.

(d) $r(S)$ je desni ideal a $l(S)$ je lijevi ideal prstena R.

(e) Ako je R algebra tada su $r(S)$, $l(S)$ linearni potprostori pa dakle i podalgebre od R.

(f) Ako je R involutivni prsten tada je $l(S) = (r(S^*))^*$ gdje je $S^* = \{s^*, s \in S\}$.

Primjer 1.2.1. *Svaki Bulov prsten sa jedinicom u kome je involucija identično preslikavanje predstavlja Rikartov prsten.*

Definicija 1.3. *C^* algebra koja je Rikartov prsten sa involucijom naziva se Rikartova C^* algebra.*

Primjer 1.2.2. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ograničenih operatora definisanih na prostoru $\mathcal{H}$ Rikartova C^* algebra.*

Sljedeća propozicija daje veoma važnu osobinu Rikartovog prstena sa involucijom u smislu pravilne involucije.

Propozicija 1.2.1. *[1] Neka je R Rikartov prsten sa involucijom. Tada prsten R ima jedinicu i involucija u prstenu je pravilna tj. važi $xx^* = 0 \Rightarrow x = 0$.*

DOKAZ. Iz pretpostavke da je prsten R Rikartov imamo da je $r(0) = gR$ za odgovarajuću projekciju g ali zbog $r(0) = R$ dobijamo $R = gR$. Dakle g je lijevi jedinični element u prstenu. Kako je R prsten sa involucijom g je obostrana jedinica. Dokažimo da je involucija u prstenu pravilna. Neka je $xx^* = 0$. Tada je $r(x) = hR,\ h = h^2 = h^*$. Zbog $x^* \in r(x)$ slijedi da je $hx^* = x^*,\ xh = x$ odakle dobijamo da vrijedi $h \in r(x)$ pa je konačno $0 = xh = x$. □

Neka je R Rikartov prsten sa involucijom i $x \in R$. Tada postoje jedinstvene projekcije e, f takve da važi

(1) $xe = x$ i $xy = 0 \Leftrightarrow ey = 0$.

(2) $fx = x$ i $yx = 0 \Leftrightarrow yf = 0$.

Eksplicitno $r(x) = (1-e)R, l(x) = R(1-f)$. Projekcije e, f su minimalne koje zadovoljavaju svojstva (1) i (2). Projekcije e i f iz prethodnog tvrđenja nazivaju se *desna* odnosno *lijeva* projekcija projekcije x i označavaju sa $LP(x)$ i $RP(x)$.

Propozicija 1.2.2. *[1] Neka je R Rikartov prsten sa involucijom. Tada vrijedi*

1. $LP(x) = RP(x^*)$.
2. $xy = 0 \Leftrightarrow RP(x)LP(y) = 0$.

3. Ako je w parcijalna izometrija tada $w^*w = RP(w), ww^* = LP(w)$.

Sljedeći primjer Rikartove algebre ima veoma veliki operativni značaj.

Primjer 1.2.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Tada je algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ograničenih operatora definisanih na prostoru $\mathcal{H}$ C^* algebra. Eksplicitno za $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $LP(T)$ je projekcija na zatvorenje prostora slika operatora T a $I - RP(T)$ je projekcija na jezgro operatora T.*

Propozicija 1.2.3. *[1] Neka je R Rikartov prsten sa involucijom a e_i, $i \in I$ familija projekcija, za koju postoji $\sup e_i = e$. Tada za $x \in R$ $xe = 0$ akko $xe_i = 0$ za svako $i \in I$.*

Dokaz. Neka je $xe = 0$. Odavde slijedi da je $RP(x)e = 0$, odnosno $e \leq 1 - RP(x)$, odakle dobijamo $e_i \leq RP(x)$, za svako $i \in I$, odnosno $RP(x)e_i = 0$ za svako $i \in I$ i konačno $xe_i = 0$ za svako $i \in I$.□

U teoriji prstena sa involucijom jako je važna osobina invertibilnosti elementa $2 = 1 + 1$. Sljedeća lema je jako korisna u teoriji proširenja uređenja u involutivnim prstenima.

Lema 1.1. *Neka je R Rikartov prsten sa involucijom u kome postoji projekcija e takva da je $e \sim 1 - e$. Tada je element $2 = 1 + 1$ invertibilan u prstenu R.*

Dokaz. Iz $e \sim 1 - e$ imamo da postoji odgovarajuća parcijalna izometrija w tako da vrijedi $w^*w = e$, $ww^* = 1 - e$. Kako je R je Rikartov prsten imamo da je $r(e - w^*) = fR$, pri čemu je projekcija f jedinstvena. Iz činjenice da je $f \in r(e - w^*)$ imamo da je $(e - w^*)f = 0$. Primjenjujući involuciju dobijamo $fw = fe$. Kako je $w \in (1 - e)Re$ postoji $x \in R$ tako da vrijedi $w = (1 - e)xe$. Sada je

$$(e - w^*)(e + w) = ew - w^*e = e(1 - e)xe - ex^*(1 - e) - ex^*(1 - e)e = 0,$$

odakle dobijamo $f(e + w) = e + w$. Odavde dobijamo

$$e = 2fe - w, \tag{1}$$

$$ew^* = 2few^* - ww^*,$$

$$(1-2f)w^*(1-e) = -(1-e).$$

Na kraju je konačno

$$w^* = 2fw^* - (1-e),$$

$$1 - e = 2wf - w. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobijamo

$$2(fe + wf - w) = 1,$$

odnosno $2^{-1} = fe + wf - w$. □

Da li u Rikartovom prstenu sa involucijom R skup $\widetilde{R}$ ima strukturu mreže i da li je ta mreža obavezno kompletna? Skup $\widetilde{R}$ Rikartovog prstena sa involucijom R ima strukturu mreže pri čemu su operacije supremuma i infimuma date sa:

$$e \vee f = f + RP(e(1-f)), \; e \wedge f = e - LP(e(1-f)),$$

za svake dvije projekcije e, f.

Postoji primjer Rikartove C^* algebre u kojoj je mreža projekcija nekompletna. Riječ je o C^* algebri ograničenih operatora u inseparabilnom Hilbertovom prostoru([2]). Ako je R prsten sa involucijom i e projekcija, eRe ugao prstena R, tada vrijednosti $LP(e), RP(e)$ u prstenu R koincidiraju sa odgovarajućim vrijednostima u prstenu eRe(Vidjeti[1]).

Lema 1.2. *Neka je R Rikartov involutivni prsten i e projekcija. Tada za svako $x \in R$ $RP_R(x) = RP_{eRe}(x)$, $LP_R(x) = LP_{eRe}(x)$.*

Klasa Rikartovih prstena je zatvorena za uglove i centar u prstenu, drugim riječima važe sljedeće leme:

Lema 1.3. *Neka je R Rikartov prsten sa involucijom i e projekcija. Tada je ugao prstena eRe takođe Rikartov prsten.*

Lema 1.4. *Centar Rikartovog prstena je Rikartov prsten.*

1.3 Berovi involutivni prsteni

Definicija 1.4. *Za prsten sa involucijim R kažemo da je Berov ako je je desni anihilator svakog nepraznog podskupa generisan projekcijom tj. za svaki $S \subset R$ $r(S) = gR$, $g \in R$.*

Postoje brojni primjeri Berovih involutivnih prstena.

Primjer 1.3.1. *Svaka komutativna Bulova algebra je Berov prsten sa involucijom.*

Primjer 1.3.2. *Svaki prsten sa involucijom bez djelitelja nule je trivijalno Berov prsten.*

Primjer 1.3.3. *Neka je F polje i $|F| = 3$. Tada je prsten matrica $M_2(F)$ Berov prsten sa involucijom (involucija u prstenu matrica jeste operacija transponovanja).*

Vidjeli smo da mreža projekcija u Rikartovom prstenu nije obaveno kompletna. Veza između Berovih i Rikartovih prstena sa involucijom leži upravo u kompletnosti mreže projekcija u prstenu. Zapravo vrijedi sljedeća:

Lema 1.5. *[1] Sljedeći uslovi u involutivnom prstenu R su ekvivalentni*

(1) R je Berov prsten sa involucijom.

(2) R je Rikartov prsten sa involucijom u kome je mreža projekcija kompletna.

(3) R je Rikartov prsten sa involucijom u kome svaka ortogonalna familija projekcija ima supremum.

DOKAZ. Dio dokaza (1) $\Rightarrow$ (2) je naravno trivijalan. Neka je R Berov prsten sa involucijom i S neprazan podskup u R. Tada zbog osobine berovosti u prstenu R postoji projekcija e takva da vrijedi $r(S) = (1-e)R$. Dokažimo da je e supremum skupa S. Zbog $1-e \in r(S)$ imamo $f(1-e) = 0$ za svako $f \in S$. Sa druge strane ako je g projekcija takva da je $f \leq g$ za svako $f \in S$ tada $1-g \in r(S) = (1-e)R$, pa je prema tome $1-e \leq 1-g$ tj. $e \leq g$. Takodje trivijalno slijedi da postoji $\inf S$ i da vrijedi $\inf S = 1 - \sup\{1-f,\ f \in S\}$. (2) $\Rightarrow$ (3) trivijalno.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Neka je S neprazan podskup od R. Jasno je $x \in r(S)$ akko $LP(x) \in r(S)$. Dakle ako je jedina projekcija u $r(S)$ 0 tada je $r(S) = 0 = 0R$. Neka je (e_i) maksimalna ortogonalna familija ortogonalnih projekcija različitih od 0. Mreža projekcija je kompletna pa postoji $\sup e_i = e$. Dokažimo da je $r(S) = eR$, odakle slijedi berovost prstena. Zbog $e \in r(S)$ imamo $eR \subset r(S)$. Obratno neka je $x \in r(S)$. Tada za $y = x - ex$ imamo da $y \in r(S)$ pa je zbog toga $LP(y) \in r(S)$. Tada za svako i imamo

$$e_i y = e_i x - e_i e x = e_i x - e_i x = 0.$$

Odavde imamo da je $e_i LP(y) = 0$. Zbog maksimalnosti familije e_i dobijamo $LP(y) = 0$ odnosno $y = 0$ tj. $x \in eR$. $\square$

Kompletnost mreže projekcija u Berovom prstenu sa involucijom dozvoljava veoma korisnu karakterizaciju anihilatora u prstenu. Naime važi:

Propozicija 1.3.1. *Neka je R Berov prsten sa involucijom i S neprazan podskup od R. Tada je $r(S) = (1-g)R$ gdje je $g = \sup\{R(s), s \in S\}$.*

DOKAZ. Kako je $x \in r(S)$ akko $gx = 0$ dokaz neposredno slijedi iz propozicije 1.2.3.

Definicija 1.5. *AW^* algebra je C^* algebra koja je Berov prsten sa involucijom. Takodje se koristi termin Berova C^* algebra.*

Termin AW^* algebre je prvi uveo Irving Kaplanski u algebarskoj teoriji Von Nojmanovih algebri. Postoje brojni primjeri AW^* algebri ali se u literaturi involutivnih algebri najčešće susreću algebra $L(H)$ Hilbertovog prostora H i algebra $C(T)$ neprekidnih funkcija definisanih na Stounovom prostoru T. Naime u Hilbertovom prostoru T algebra $C(T)$ je C^* algebra. Ostaje da se dokaže da je mreža projekcija kompletna. Naime mreža projekcija u $L(H)$ izomorfna sa mrežom zatvorenih potprostora od H koja je kompletna. Eksplicitno ako je S neprazan podskup od $L(H)$ i F projekcija na zatvoreni linearni omotač od $Im(s), s \in S$, tada je $L(S) = L(H)(1-F)$. U daljem prsten sa involucijom radi lakše notacije označamo sa $*$-prsten.

Definicija 1.6. *Neka je R Berov-* prsten i B *- potprsten od R. Kažemo da je B Berov *- potprsten od R ako vrijedi:*

1. $x \in B \Rightarrow LP(x) \in B$.
2. *Za svaki* $S \subset \widetilde{R} \Rightarrow \sup S \in B$.

Neka je R Berov *- prsten i B Berov *- potprsten od R. Tada je B takodje Berov *-prsten i za svako $x \in B$ $RP_B(x) = LP_R(x)$, $LP_B(x) = LP_R(x)$. Takođe za svaki skup $S \subset R, \sup_B S = \sup_R S$, $\inf_B S = \inf_R S$.

Neka je R Berov -* prsten i B Berov-* potprsten od R, e jedinični element u B i T neprazan podskup u B. Ako je $r(T) = (1-g)R$ za odgovarajuću projekciju g tada je $r_B(T) = (e-g)B$. Sada imamo da je $g = \sup\{RP(x), x \in T\}$. Kako supremumi u R i B koincidiraju to odmah dobijamo da je $r(T) = (e-g)B$.

Neka je R Berov -* prsten i (B_i) familija Berovih -* potprstena od R. Tada je $\bigcap B_i$ takodje Berov *- potprsten od R. Ova činjenica se direktno provjerava.

Sljedeća propozicija nam govori kako se pomoću projekcija konstruišu novi Berovi-* potprsteni. Naime pokazuje se da je klasa Berovih prstena zatvorena za uglove u prstenu.

Propozicija 1.3.2. *Neka je R Berov -* prsten i e projekcija. Tada je eRe Berov-* potprsten od R.*

Dokaz. Skup projekcija u prstenu eRe upravo čine projekcije u R koje su manje ili jednake od e pa se svi uslovi iz prethodne definicije jednostavno provjeravaju.

1.4 Centralni pokrivač

Pojam centralnog pokrivača se definiše u proizvoljnom *- prstenu ali se najviše operativno koristi u Berovim -* prstenima.

Definicija 1.7. *Neka je R *-prsten i $x \in R$. Kažemo da element x ima centralni pokrivač(pokrivanje) ako postoji najmanja centralna projekcija h takva da je $hx = x$. Koristimo oznaku $h = C(x)$.*

Veoma važne osobine centralnog pokrivača su date sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.4.1. *[1] Neka je R *-prsten u kome svaka projekcija e ima centralni pokrivač $C(e)$. Tada važi:*

1. *Ako je e projekcija u R tada je $h = C(e)$ najmanja centralna projekcija u R takva da je $e \leq h$.*
2. $e, h \in \widetilde{R},\ e \leq h \Rightarrow C(e) \leq C(h)$.
3. *Ako je h centralna projekcija tada je $C(he) = hC(e)$.*
4. $e = \sup e_i \Rightarrow C(e) = \sup C(e_i)$.
5. *Ako je involucija u R pravilna tada važi $e \sim f \Rightarrow C(e) \leq C(f), e \preceq f \Rightarrow C(e) \leq C(f)$.*
   *U slučaju da je R Rikartov *- prsten sa centrom Z tada važi:*

6. *Svaki element x ima centralni pokrivač $C(x)$ i vrijedi $C(x) = C(RP(x)) = C(LP(x))$.*
7. $C(xx^*) = C(x^*x)$.
8. $C(hx) = hC(x)$, *za svaku centralnu projekciju h.*
9. *Za $x \in R$, $z \in Z$ tada $zx = 0$ akko $zC(x) = 0$.*

Ključni rezultat koncepta centralnog pokrivača vezan za Berove *- prstene jeste činjenica da je desni anihilator svakog desnog ideala obavezno generisan centralnom projekcijom. Naime važi:

Lema 1.6. *[1] Ako je R Berov*-prsten i J desni ideal u R tada je $r(J) = hR$ za neku centralnu projekciju h.*

DOKAZ. Neka je J proizvoljan ideal u prstenu R. Tada je zbog berovosti prstena R $r(J) = hR$, za odgovarajuću projekciju h. Ostaje da se dokaže da $h \in Z(R)$. Iz činjenice je J ideal to je $r(J)$ obostrani ideal. Specijalno $R(hR) \subset hR$. Zbog toga je $Rh \subset hR$. Nadalje je $h(xh) = xh$ za svako $x \in R$. Takođe je $hx^*h = x^*h$. Konačno je $hx = hxh = xh$ za svako $x \in R$, tj. $h \in Z(R)$. □

U Berovom prstenu sa involucijom svaki element ima centralni pokrivač (vidjeti [1])

Teorema 1.3. *Neka je R Berov *-prsten. Tada za svako $x \in R$ postoji $C(x)$. Eksplicitno ako je $e = RP(x)$, $f = LP(x)$ tada je $C(x) = C(e) = C(f)$, i takođe je*

$$(1 - C(x))R = l(Rx) = l(Re) = l(Rf),$$
$$(1 - C(x))R = r(xR) = r(eR) = r(fR).$$

DOKAZ. Najprije je $R(xR) = (1 - h)R$, gdje je h centralna projekcija. Takođe $x(1-h) = 0$ tj $xh = x$. Sa druge strane ako je k proizvoljna centralna projekcija takva da je $kx = x$ tada $x(1-k) = 0$, $xR(1-k) = x(1-R)k = 0$, $1-k \in (1-h)R$, $1-k \leq 1-h$, $tj. h \leq k$. Dakle zaista $C(x)$ postoji i $C(x) = h$. Naznačene jednakosti se lako provjeravaju. □

Lema 1.7. *Ako je R Berov *-prsten i $x, y \in R$ tada vrijedi*

$$xRy = 0 \Leftrightarrow C(x)C(y) = 0.$$

DOKAZ. Neka je $h = C(x), k = C(y)$. Ako je $hx = 0$ tada $xRy = (xh)R(ky) = xR(hk) = 0$. Obratno ako je $xRy = 0$ tada $x \in l(Ry) = (1-k)R$ pa je zbog toga $(1-k)x = x, h = C(x) \leq 1-k$ odakle imamo $hk = 0$.□

Lema 1.8. *Neka je R Berov *- prsten u kome su jedine centralne projekcije 0 i 1 i $x, y \in R$. Tada važi*

$$xRy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0.$$

DOKAZ. Ako je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ tada $C(x) = C(y) = 1$ pa je dakle $C(x)C(y) \neq 0$ no tada prema dokazanom $xRy \neq 0$. □

Propozicija 1.4.2. *Neka je R Berov *- prsten, $e \in \widetilde{R}$ i $f \in \widetilde{eRe}$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) f je centralna projekcija u eRe.

(2) $f = eC(f)$.

(3) $f = eh$ za neku centralnu projekciju h.

(4) 0 i 1 su jedine centralne projekcije u R.

DOKAZ. Dajemo dio dokaza (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (2) je trivijalan.

Neka je $a \in R$ proizvoljno. Iz jednakosti $f(eae) = (eae)f$ tj. $fae = eaf$, dobijamo $fae(1-f) = 0$ za svako $a \in R$. Dakle $fRe(1-f) = 0$. Prema propoziciji 4.2 imamo $e(1-f) \in r(fR) = (1 - C(f))R$, pa je zbog toga

$$e(1-f)C(f) = 0, eC(f) = efC(f) = fC(f) = f.$$

Dakle 0 i 1 su jedine centralne projekcije u R odnosno 0 i e su jedine centralne projekcije u eRe. □

Posljedica 1.4. *[1]*
Neka je R Berov $*$-prsten i Z centar prstena i neka je e projekcija u R. Tada važi

(a) Centar prstena eRe sadrži eZe tj. $eZ \subset (eRe) \bigcap (eRe)'$.

(b) Skupovi eZ i $eRe \bigcap (eRe)'$ sadrže iste projekcije.

(c) Ako $x \in eRe$ tada je $eC(x)$ centralno pokrivanje za x u prstenu eRe.

DOKAZ. (a) Ovaj dio dokaza je očigledan.

(b) Ako je f projekcija u $(eRe) \bigcap (eRe)'$ prema propoziciji 1.4.2 postoji $h \in Z$ takva da je $f = eh$.

(c) Neka je $f = C_{eRe}(x), h = C(x)$. Dokažimo da je $f = eh$. Kako je eh centralna projekcija u eRe i $(eh)x = e(hx) = ex = x$ imamo da je $f \leq eh$. Sa druge strane, kako je f centralna projekcija u eRe imamo da je $f = eC(f)$ pa je ponovo prema propoziciji 4.2 $xC(f) = xeC(f) = xf = x$ pa je konačno $h \leq C(f), he \leq eC(f) = f$.

□

Sljedeća posljedica pokazuje kako se konstruiše centar prstena eRe u slučaju da je R AW^* algebra.

Posljedica 1.5. *Ako je R AW^* algebra sa centrom Z i ako je e projekcija u R tada je eZ centar u eRe tj. $eZ = (eRe) \bigcap (eRe)'$.*

1.5 Proširenja u Rikartovim prstenima sa involucijom

Istorijski ovi pojmovi potiču od Kaplanskog.

Definicija 1.8. *Kažemo da u $*$-prstenu R važi slabi zakon kvadratnog korjena (WSR)[5] aksiom, ako za svako $x \in R$ postoji $r \in \{x^*x\}''$, (bikomutant elementa x^*x) tako da vrijedi $x^*x = r^*r$.*

---

[5] *Weak square root axiom.*

Definicija 1.9. *Kažemo da u *-prstenu R važi (EP)*[6] *aksiom ako za svako* $x \in R$, $x \neq 0$ *postoji* $y \in \{x^*x\}''$ *tako da je* $y^* = y$ *i* $(x^*x)y^2 = e$, *za neku nenultu projekciju* e.

Definicija 1.10. *Kažemo da u *- prstenu R važi (UPSR)aksiom* [7], *ako za svako* $x \geq 0$ *postoji jedinstven element* $y \in \{x\}''$ *takav da je* $y \geq 0$ *i* $x = y^2$.

Primjer prstena koji zadovljava (UPSR) akiom je proizvoljna C^* algebra. Za teoriju C^*- algebri vidjeti referencu [2]. U *-prstenu definišemo simetrični element r kao element za koji važi $r^* = r$. Sa $S(R)$ označamo skup svih simetričnih elemenata *-prstena R.

Sljedeći dio vezan je za teoriju proširenja u Rikartovom prstenima sa involucijom u kojima je element 2=1+1 invertibilan. Sljedeća definicija potiče od M.Marshall([13]).

Definicija 1.11. *Neka je* R **-prsten sa jedinicom. *- uređenje* P *je podskup* $P \subseteq S(R)$ *koji zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $1 \in P$, $-1 \notin P$.

(2) $P + P \subseteq P$.

(3) $rPr^* \subseteq P$ *za svako* $r \in R$.

(4) $P \cup -P = S(R)$.

(5) Za svako $a, b \in S(R)$ *ako* $aba \in P \cap -P$ *tada* $a \in P \cap -P$ *ili* $b \in P \cap -P$.

(6) $a, b \in P$ *tada* $ab + ba \in P$.

Definicija 1.12. *Prošireno *-uređenje *-prstena* R *je podskup* Q *od* R *koji zadovoljava:*

(1) $Q + Q \subseteq Q$.

(2) $QQ \subseteq Q$.

(3) $Q^* = Q$.

(4) $rQr^* \subseteq Q$ *za svako* $r \in R$.

---

[6] *Existence of projections axiom.*

[7] *Unique positive square root axiom.*

(5) $Q \cap S(R)$ *je *- uredjenje* P *u* R.

(6) $rxr^* \in Q \Rightarrow x \in Q$ *za svako* x *koje ne pripada idealu generisanom sa* $Q \cap -Q$.
Skup $P \cap -P$ *naziva se nosač uređenja* P.

U [13] je dokazano da za svako $*-$ uređenje postoji prošireno $*$ uređenje.

Definicija 1.13. *Kažemo da su elementi* $a, b \in S(R)$ *ekvivalentni i pišemo* $a \sim b$ *ako postoji prirodan broj* $n > 1$ *takav da je* $n|a| \geq |b|$, $n|b| \geq |a|$ *gdje* $\geq$ *je uređenje na* $S(R)$ *indukovano sa* P *tj.* $a \geq b \Leftrightarrow a - b \in P$.

Proširujući ovu relaciju sa $S(R)$ na $R^{\times}$ sa $a \sim b \Leftrightarrow aa^* \sim bb^*$ dolazimo do relacije ekvivalencije na $R^{\times}$. Koristimo oznaku $v(a)$ za relaciju ekvivalencije elementa a u odnosu na relaciju $\sim$ kao i Γ_v za količnik skup. Takodje neka je $v(0) = \infty$. Kažemo da je v prirodna * - valuacija indukovana uređenjem P. Skup Γ_v možemo snabdjeti sa strukturom polugrupe definišići $v(a) + v(b) = v(ab)$. O egzistenciji proširenog $*$-uređenja u Rikartovom prstenu sa involucijom govori sljedeća:

Teorema 1.6. *Neka je* R *Rikartov *-prsten sa jedinicom koji sadrži projekciju* e *tako da je* $e \sim 1 - e$ *i* P *proizvoljno *-uređenje* R. *Tada postoji prošireno *-uređenje* Q *za koje je* $Q \cap S(R) = P$.

DOKAZ. Prema lemi 1.1 postoji 2^{-1} u prstenu R. Sada prema [13] možemo pretpostaviti da je R domen kao i da je nosač od P $\{0\}$. Mashall u [13] dokazuje da je

$$Q = \{p + k : p \in P, k^* = -k, v(k) > v(p)\}$$

slabo proširenje * - uređenja (zadovoljava 1-5 iz definicije), sa $Q \cap S(R) = P$. Ostaje nam da jedino dokažemo da Q zadovoljava uslov (6) iz iste definicije . Ako je $rxr^* \in Q$, $r \neq 0$ tada imamo razlaganje $x = s + j, s \in S(R), j^* = -j$. Nadalje dobijamo $rxr^* = p+k$ gdje je $p = rsr^*, k = rjr^*$. Iz $rxr^* \in Q$ dobijamo $p \in P$ kao i $v(k) > v(p)$ odakle imamo $s \in P$, kao i $v(j) = v(k) - 2v(r) > v(p) - 2v(r) = v(s)$, odakle konačno dobijamo $x = s + j \in Q$. $\square$

Definicija 1.14. *Za *-prsten R kažemo da je beskonačan u pravom smislu ako je jedina konačna centralna projekcija 0. Drugačije rečeno R nema konačan direktni sumand osim* 0.

Posljedica 1.7. *Neka je R Rikartov *-prsten i P proizvoljno *-uređenje na R. Tada postoji prošireno *-uređenje Q za koje važi $Q \cap S(R) = P$.*

Teorema 1.8. *Neka je R Rikartov *- prsten sa jedinicom koji zadovoljava (WSR) aksiom i neka su e, f projekcije R za koje je $ef - fe$ invertibilno. Tada za svako *-uređenje P postoji prošireno *- uređenje Q tako da je $Q \cap S(R) = P$.*

DOKAZ. Iz [1] propozicija [7] imao da je $e \sim f \sim 1 - e \sim 1 - f$. Sada je dakle specijalno $e \sim 1 - e$ pa dokaz slijedi iz činjenice da je 2 invertibilno u prstenu i predhodne teoreme.

Teorema 1.9. *Neka je R Rikartov *- prsten koji zadovoljava (EP)i (UPSR) aksiome. Ako su e,f projekcije za koje je $RP(ef - fe) = 1$, tada za svako *- uređenje P u R postoji *- uređenje Q od R za koje je $Q \cap S(R) = P$.*

DOKAZ. Iz [1] znamo da su e i f razmijenjive pomoću simetrije (specijalno je $e \sim 1 - e$). Sada iz leme 1.1 imamo da je 2 invertibilno u prstenu i dokaz direktno slijedi iz prethodne teoreme. □

1.5.1 Uopštena uporedivost projekcija

Definicija 1.15. *Za projekcije e, f *-prstena R kažemo da su uporedive ako je $e \preceq f$ ili $f \preceq e$.*

Definicija 1.16. *Za projekcije e, f kažemo da su uopšteno uporedive ako postoji centralna projekcija h takva da je*

$$he \preceq hf, \ (1 - h)f \preceq (1 - h)e.$$

Kažemo da prsten R ima svojstvo uopštene uporedivosti(svojstvo (GC))[8] *ako su svake dvije projekcije uopšteno upredive.*

---

[8] *Generalized comparability.*

Definicija 1.17. *Za projekcije e, f kažemo da su veoma ortogonalne ako postoji centralna projekcija h takva da je $he = e$, $hf = 0$, tj. $e \leq h, f \leq (1-h)$.*

Ako je R Berov *-prsten tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:

a) e, f su veoma ortogonalne projekcije.

b) $C(e)C(f) = 0$.

c) $eRf = 0$.

Veza između uopštene uporedivosti i veoma ortogonalnosti je sadržaj sljedeće leme:

Lema 1.9. *[1] Neka su e, fprojekcije u *-prstenu R. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni :*

1) e, f su uopšteno uporedive.

2) Postoji ortogonalna dekompozicija $e = e_1 + e_2, f = f_1 + f_2$ gdje je $e_1 \sim f_1$ i f_2, e_2 su veoma ortogonalne.

DOKAZ. 1) $\Rightarrow$ 2) Neka je $h \in R$ tako da vrijedi $he \sim f_1' \leq hf, (1-h)f \sim e_1''$. Definišemo li $e_1' = he$, $f_1'' = (1-h)f$ imamo da je $e_1'e_1'' = 0, f_1'f_1'' = 0$. Stavljajući $e_1 = e_1' + e_1''$, $f_1 = f_1' + f_1''$ odmah dobijamo da je $e_1 \sim f_1$. Kako je $e_1 \leq e$, $f_1 \leq f$ definišimo li $e_2 = e - e_1$, $f_2 = f - f_1$ odmah dobijamo da je $he_2 = 0$, kao i $hf_2 = f_2$.

2) $\Rightarrow$ 1) Pretpostavimo da takva dekompozicija postoji. Neka je h centralna projekcija takva da je $hf_2 = f_2$, $he_2 = 0$. Tada je $he = he_1 \sim hf_1 \leq hf$ pa je dakle $he \preceq hf$. Potpuno analogno je $(1-h)f \preceq (1-h)e$. □

Definicija 1.18. *Za projekcije e, f u *-prstenu kažemo da su parcijalno uporedive(svojstvo PC)[9]ako postoje nenulte potprojekcije $e_0 \leq e$, $f_0 \leq f$ tako da je $e_0 \sim f_0$. Kažemo da *- prsten R ima svojstvo (PC) ako iz $eRf \neq 0$ slijedi da su projekcije e i f parcijalno uporedive.*

---

[9] *Partial comparability.*

Propozicija 1.5.1. *[1] Neka je R *-prsten koji ima svojstvo (GC). Tada prsten R ima svojstvo (PC).*

DOKAZ.

Pretpostavimo suprotno da postoje projekcije e, f koje nisu parcijalno uporedive. Dokažimo da je tada $eRf = 0$. Neka je $e = e_1 + e_2, f = f_1 + f_2$. Sada imamo $e_1 = f_1 = 0$. Ako je h centralna projekcija takva da je $hf = f$, $he = 0$ tada je $eRf = eRhf = ehRf = 0$ što je i trebalo dokazati. □

Propozicija 1.5.2. *Neka je R *-prsten koji zadovoljava (VWEP) aksiom. Tada prsten R ima svojstvo (PC).*

DOKAZ. Neka su e, f projekcije takve da je $eRf \neq 0 \Leftrightarrow fRe \neq 0$. i neka je $x \in fRe, x \neq 0$. Tada postoji $y \in \{x^*x\}'$ takav da je $(y^*y)(x^*x) = e_0$, gdje je e_0 nenulta projekcija. Sada je $e_0 = y^*(x^*x)y = (xy)^*(xy)$. Stavljajući $w = xy$ imamo da je $w^*w = e_0$. Kako je involucija u R pravilna imamo da je w parcijalna izometrija. Neka je sada $f_0 = ww^*$. Zbog $x \in fRe$ i $e_0 = (y^*y)(x^*x)$ dobijamo da je $e_0 \leq e$ i $f_0 = ww^* = (xy)w^*$ odakle je konačno $f_0 \leq f$. □

U Berovim *- prstenima uopštena uporedivost projekcija je povezana sa aditivnošću relacije $\sim$. Zapravo važi:

Propozicija 1.5.3. *Neka je R Berov*-prsten sa svojstvom (PC) i pri tom je relacija $\sim$ aditivna. Tada R ima svojstvo (GC).*

DOKAZ. Neka su e, f proizvoljne projekcije u R. Ako je $eRf = 0$ tada su projekcije e, f veoma ortogonalne pa tada uporedivost projekcija e i f slijedi trivijalno. Neka su $(e_i), (f_i)$ maksimalan par ortogonalnih familija nenultih projekcija takvih da je $e_i \leq e, f_i \leq f, e_i \sim f_i, i \in I$ (Primjetimo da koristimo Zornovu lemu). Neka je $e' = \sup e_i, f' = \sup f_i, e'' = e - e', f'' = f - f'$. Sada je jasno $e' \sim f'$ zbog aditivnosti realacije $\sim$. Sa druge strane je $e'Rf' = 0$. U suprotnom zbog svojstva

(PC) imamo kontradikciju sa maksimalnošću familija (e_i), (f_i). Sada su e', f' veoma ortogonalne pa odmah imamo dekompoziciju $e = e' + e'', f = f' + f''$ tj važi (GC) svojstvo. □

Specijalno ako je R AW^* algebra tada zbog osobine aditivnosti projekcija i svojstva (EP) odmah imamo svojstvo (PC) pa dakle važi svojstvo (GC).

Definicija 1.19. *Kažemo da projekcije e, f u *-prstenu R imaju svojstvo ortogonalne uopštene uporedivosti (ortogonalna GC) ako su svake dvije ortogonalne projekcije uopšteno uporedive.*

Propozicija 1.5.4. *Neka je R Berov*- prsten sa svojstvom (PC). Tada R ima svojstvo ortogonalnog (GC).*

DOKAZ. Neka su e, f projekcije sa $ef = 0$. Sada dokaz direktno slijedi iz prethodne propozicije i činjenice da je u razlaganju $e' \sim f'$ kao i iz [1] teoreme 11.1. □

1.5.2 Zakon paralelograma u involutivnim prstenima

Definicija 1.20. *Neka je R *- prsten u kome skup projekcija ima strukturu mreže. Kažemo da u prstenu R važi zakon paralelograma (P) ako za svake dvije projekcije e, f važi $e - e \wedge f \sim e \vee f - f$. Ovaj uslov je ekvivalentan sa $e - e \wedge (1 - f) \sim f - (1 - e) \wedge f$.*

Propozicija 1.5.5. *[1] Neka je R slabi Rikartov *- prsten u kome $\forall x \in R$ važi $LP(x) \sim RP(x)$. Tada u prstenu R važi zakon paralelograma.*

Propozicija 1.5.6. *[2] Neka je R Von Nojmanova algebra. Tada u R važi zakon paralelograma.*

Propozicija 1.5.7. *Neka je R Rikart *- prsten koji zadovoljava zakon ortogonalnog (GC) i zakon paralelograma. Tada u R važi zakon (GC).*

DOKAZ. Neka su e, f proizvoljne projekcije u R. Iz zakona paralelograma imamo ortogonalnu dekompoziciju $e = e' + e'', f = f' + f''$ i važi $e' \sim f', e''f = ef'' = 0$.

Takodje projekcije $e^{''}, f^{''}$ imaju svojstvo (GC). Sada imamo dekompoziciju

$$e^{''} = e_1 + e_2, f^{''} = f_1 + f_2, e_1 \sim f_1,$$

gdje su e_2, f_2 veoma ortogonalne. Sada je

$$e = (e^{'} + e_1) + e_2, f = (f^{'} + f_1) + f_2,$$

gdje je $e_1 \sim f_1$, i e_2, f_2 veoma ortogonalne projekcije pa prema tome projekcije e i f imaju svojstvo (GC). □

U Berovom prstenu sa involucijom pojmovi (PC),(GC) i ortogonalnog (GC) koincidiraju. Svaka AW^* algebra ima svojstvo (GC). AW^* algebra zadovoljava zakon (P) (EP) aksiom pa dakle i zakon (PC).

Posljedica 1.10. *Neka je R Berov *-prsten takav da je $LP(x) \sim RP(x)$ za svako $x \in R$. Tada R ima svojstvo (GC) i zadovoljava zakon (P).*

DOKAZ. Prsten R zadovoljava svojstvo (P) ostaje da dokažemo da važi zakon (PC). Zaista neka su e, f projekcije takve da je $eRf \neq 0$. Neka je $x = eaf \neq 0, a \in R$. Tada su $e_0 = LP(x), f_0 = LP(y)$ nenulte potprojekcije od e i f redom sa $e_0 \sim f_0$. □

1.5.3 Teoreme o reprezentaciji

U teoriji prstena veoma je važna matrična reprezentacija. Generalno nemamo odgovor na pitanje da li je prsten matrica nad Berovim *-prstenom Berov*-prsten. Motivisani ovim možemo postaviti sljedeće pitanje. Kada je i pod kojim uslovima Berov-* prsten izomorfan prstenu matrica? U sljedećem dijelu pokazujemo da neke klase

(i) PI Berovih-* prstena,

(ii) Homogenih Berovih* prstena,

(iii) Ograničenih Berovih-* prstena tipa I,

(iv) Neprekidnih Berovih-* prstena

imaju matričnu reprezentaciju. Najprije dokažimo jedno veoma važno tvrđenje.

Teorema 1.11. *Neka je R*- prsten i n prirodan broj. Ako prsten R sadrži n međusobno ortogonalnih, ekvivalentnih projekcija $e_1, e_2, .., e_n$ čija je suma jednaka 1 tada je $R \cong (e_1Re_1)_n$.*

DOKAZ. Definišimo preslikavanje $\varphi : R \to (R)_n$ sa $\varphi(a) = (w_i^*aw_j), a \in R$ pri čemu su $w_1, .., w_n$ parcijalne izometrije takve da je ${w_i}^*w_1 = e_1, w_1{w_i}^* = e_i$. Dokažimo da je ovo preslikavanje traženi izomorfizam tj. da vrijedi

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi(a^*) = (\varphi(a))^* \quad \forall a, b \in R.$$

Neka je $a \in R$. Tada $w_i^*aw_j \in e_1Re_1$, za svako i, j pa je i $\varphi(a) \in (e_1Re_1)_n$. Lako se provjerava da važi

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(a^*) = (\varphi(a))^*, \forall a, b \in R.$$

Ako je $w_i^*aw_j = 0$ za svako i, j tada imamo :

$$e_iae_j = w_i(w_i^*aw_j)w_j^* = 0 \ \forall i, j$$

odakle slijedi,

$$a = (\sum_i e_i)a(\sum_j e_j) = \sum_{i,j} e_iae_j = 0.$$

Dakle φ je $1-1$ preslikavanje. Za $(a_{ij}) \in (e_1Re_1)_n$ i $a = \sum_{i,j} w_ia_{ij}w_j^*$, dobijamo

$$w_i^*aw_j = \sum_{k,l} w_i^*w_ka_{k,l}w_l^*w_j = w_i^*w_ia_{ij}w_j^*w_j = e_1a_{ij}e_1 = a_{ij},$$

tj. preslikavanje φ je na. Konačno je

$$\sum_k (w_i^*aw_kw_k^*bw_j) = (w_i^*a)(\sum w_kw_k^*)(bw_j)$$

$$= (w_i^* a)(\sum_k e_k)(bw_j) = w_i(ab)w_j$$

tj za $a, b \in R$ imamo $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. □

Sljedeća teorema karakteriše ortogonalne ekvivalentne projekcije u slabim Rikartovim prstenima sa involucijom.

Teorema 1.12. *Neka je R slabi Rikartov prsten sa involucijom i e, f ortogonalne projekcije. Tada je $e \sim f$ akko postoji projekcija g takva da važi*

$$2ege = e, \quad 2fgf = f, \quad 2geg = 2gfg = g.$$

DOKAZ. Ako takva projekcija postoji definišimo $w = 2fge$. Odmah imamo sljedeće

$$w^*w = 4egfge = 2e(2gfg)e = 2ege = e$$

kao i

$$ww^* = f,$$

tj. zaista $e \sim f$. Obratno predpostavimo da je $e \sim f$. Ne gubeći opštost posmatrajmo prsten $(e+f)R(e+f)$ i dakle smatrajmo da je R Rikartov-* prsten sa $e + f = 1$. Neka je w parcijalna izometrija za koju je $w^*w = e, \quad ww^* = f$. Prema predhodnoj propoziciji postoji izomorfizam $\varphi : A \to (eRe)_2$ definisano sa

$$\varphi(a) = ({w_i}^* a w_j)_2.$$

Označimo sa $a_{ij} = {w_i}^* a w_j, i, j = 1, 2$. Kako je

$$a_{11} = ewe = 0, a_{12} = eww^* = 0, a_{21} = w^*we = e, a_{22} = 0$$

imamo

$$\varphi(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Ako sa 1 označimo jedinicu u prstenu (eRe) to zbog izomorfizma možemo pisati

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada konačno zbog invertibilnosti 2 u prstenu $(e \sim 1 - e)$([3]) možemo definisati

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dokazuje se da ovako definisano g zadovoljava tražene identitete. □

Za projekcije e, f u prstenu sa involucijom kažemo da su *uporedive* ako je $e \prec f$ ili $f \prec e$. Za prsten sa involucijom R kažemo da ima svojstvo (PI) ako je jedina centralna projekcija 0. Prije što damo još jednu matričnu reprezentaciju vidjeti [2].

Teorema 1.13. *Neka je R Berov-* prsten sa svojstvom (PI) i svake dvije ortogonalne projekcije imaju svojsvo (GC) tada vrijedi*

a) Postoji niz ortogonalnih projekcija (f_n) takav da je

$$supf_i = 1, f_i \sim 1, i \in I.$$

b) Za svako $m \in N$ postoje ortogonalne projekcije $g_1.g_2, .., g_n$ sa $g_1 + .. + g_n = 1, g_i \sim 1, 1 \leq i \leq n$.

Teorema 1.14. *Neka je R Berov-* prsten sa svojstvima (PI),(GC).Tada za svaki prirodan broj $n \in N$ prsten R je izomorfan prstenu $(R)_n$, prstenu matrica nad R.*

Dokaz. Prema predhodnoj teoremi postoji particija jedinice $e_1, .., e_n$. Dakle $R \sim (e_1Re_1)_n$. Nadalje ekvivalentnost $e_i \sim 1$ indukuje izomorfizam prstena e_1Re_1 i prstena R. Konačno $(e_1Re_1)_n \sim R_n$ tj. $R \sim R_n$ što je i trebalo dokazati. □

Za Berov-* prsten sa involucijom kažemo da je *homogen* ako u prstenu postoji homogena particija jedinice čiji su članovi Abelove projekcije tj. postoji niz (e_i) Abelovih projekcija sa

$$supe_i = 1, e_i \sim e_j \quad i, j \in I.$$

Kardinal skupa I naziva se stepen homogeniteta. Sljedeća teorema daje matričnu reprezentaciju ograničenih homogenih Berovih prstena sa involucijom (vidjeti [1]).

Teorema 1.15. *[1] Neka je R ograničen Berov -* prsten sa (GC) stepena homogeniteta n. Tada je $R \cong B_n$, gdje je B Abelov Berov-* prsten . Uslovi teoreme jednoznačno odredjuju n i prsten B do na izomorfizam.*

Za Berov-* prsten R kažemo da je neprekidan ako u prstenu R ne postoji Abelova projekcija različita od 0. Poznato je da u neprekidnom Berovom-* prstenu sa (PC) za svaku projekciju e i za svaki prirodan broj n postoji homogena particija od e.

Teorema 1.16. *Neka je R neprekidan Berov-* prsten sa (PC) i n prirodan broj. Tada postoji projekcija g takva da je $R \cong (gRg)_n$.*

DOKAZ. Specijalno na osnovu gore navedenog ako se uzme $(e = 1)$. □

1.5.4 Uslovi Kaplanskog

Neka je sada R Berov-* prsten i R_n prsten matrica nad R. Generalno R_n nije Berov-* prsten. Za klasu ograničenih Berovih-* prstena pokazuje se da prsten R mora da zadovoljava sljedećih šest uslova (vidjeti[2]).

(a) R je ograničen Baer-* prsten koji zadovoljava aksime Kaplanskog (EP) i (UPSR).

(b) $1 + aa^*$ je invertibilno $\forall a \in R$.

(c) Parcijalne izometrije su aditivne.

(d) R sadrži centralni element i takav da je $i^2 = -1, i^* = -i$.

(e) Ako je $u \in R$ unitaran element i $RP(1-u) = 1$ tada postoji projekcija $e_k \in u''$ tako da $e_k \uparrow 1, (1-u)e_k$ je invertibilno u $e_k R e_k$ za svako k.

(f) Ako je f_k niz ortogonalnih projekcija i $\sup f_i = 1$ i za svako k i svaki niz elemenata $a_k, 0 \leq a_k \leq 1$ postoji $a \in R$ takav da $af_k = a \quad \forall k \in N$.

U klasi regularnih ograničenih Berovih-* prstena posljednja dva uslova su suvišna . U AW^* (C^* algebra koja je Berov-* prsten) ograničenim algebrama svih šest uslova su zadovoljeni. U daljem imamo da pored uslova (a)-(f) prsten R_n zadovoljava sljedeća dva svojstva:

(g) Za svake dvije projekcije e, f

$$e - e \wedge f \sim e \vee f - f.$$

(h) Svaki niz ortogonalnih projekcija u R_n ima supremum.

Sljedeće dvije teoreme razmatraju dovoljne uslove pod kojim je prsten matrica nad ograničenim odnosno regularnim Berovim-* prstenom takodje Berov -* prsten sa GC odnosno regularan Berov-* prsten.

Teorema 1.17. *[1] Neka je R ograničen Berov-* prsten koji zadovoljava uslove (a)-(f). Neka je n prirodan broj takav da prsten R_n zadovoljava uslove (g),(h). Tada je R_n takođe Berov-* prsten sa (GC).*

DOKAZ. Neka je h centralna projekcija takva da je hR tipa I i $(1-h)R$ tipa II. Tada su $h(R)_n = (hR)_n$ i $(1-h)R_n = ((1-h)R)_n$ Berovi-* prsteni pa je i $R_n = hR_n + (1-h)R_n$ takodje Berov-* prsten. Jasno je da vrijedi i svojstvo generalne uporedivosti. □

Direktna posljedica ovog tvrđenja je da je za svaki prirodan broj n prsten matrica R_n nad AW^* algebrom takodje AW^* algebra.

Glava 2

Kvazi-Berovi prsteni

U okviru ovog poglavlja sa R označavamo prsten sa jedinicom. U daljem dijelu teksta, ako nije posebno apostrofirano, R označava prsten bez involucije.

Definicija 2.1. *Za prsten R kažemo da je Berov ako je desni anihilator svakog $S \subset R$ generisan idempotentom tj za svaki $S \subset R$ postoji idempotent $e \in R$ takav da je $r_R(S) = eR$.*

Definicija 2.2. *Za prsten R kažemo da je kvazi-Berov prsten ako je desni anihilator svakog desnog ideala prstena R generisan idempotentom. Ova definicija dualno važi i za lijevi ideal.*

Definicija 2.3. *Za prsten R kažemo da je PQ-Berov prsten ako je desni anihilator svakog glavnog ideala generisan idempotentom.*[1]

Obje definicije potiču od Clark. W. E i motivisane su mogućnosti karakterizacije konačno dimenzionalnih algebri nad algebarski zatvorenim poljem.

Definicija 2.4. *Za idempotent e prstena R kažemo da je lijevo (desno)semicentralan ako je $xe = exe(ex = exe)$, za svako $x \in R$.*

Skup svih lijevo (desno) semicentralnih elemenata označavamo sa $S_l(R)(S_r(R))$. Skup svih centralnih elemenata u prstenu R označavamo sa $B(R)$. Jasno je da vrijedi

[1] *Ako umjesto generisanosti svakog glavnog ideala imamo generisanost glavnog desnog(lijevog)ideala dolazimo do pojma desnog(lijevog)PQ-Berovog prstena.*

$B(R) = S_l(R) \bigcap S_r(R)$.

U slučaju da je R poluprim prsten tada je $S_l(R) = S_r(R) = B(R)$. Za idempotent prstena R kažemo da je semicentralno redukovan ako važi $S_l(eRe) = \{0, e\}$. Važi

$$S_r(eRe) = \{0, e\} \Leftrightarrow S_l(eRe) = \{0, e\}.$$

U slučaju da je 1 semicentralno redukovan element kažemo da je R semicentralno redukovan prsten.

Sljedeća lema je veoma operativna u ovom poglavlju.

Lema 2.1. *[20] Za idempotent e prstena R sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $e \in S_l(R)$.

(ii) $1 - e \in S_r(R)$.

(iii) $(1 - e)Re = 0$.

(iv) eR *je ideal prstena* R.

(v) $R(1 - e)$ *je ideal prstena* R.

(vi) $eR(1 - e)$ *je ideal od* R *i* $eR = eR(1 - e) \oplus Re$.

Za prsten R kažemo da je prim prsten ako važi $xRy = 0 \Rightarrow x = 0$ ili $y = 0$. Sljedeća lema daje veoma jasnu karakterizaciju prim-prstena.

Lema 2.2. *[17] Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) R je prim prsten.

(ii) R je semicentralno redukovan kvazi-Berov prsten.

(iii) R je semicentralno redukovan PQ-Berov prsten.

(iv) R je semicentralno redukovan desni PQ-Berov prsten.

Dokaz. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ prema [20] Lema 4.2. Takođe je jasno da $(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Dokažimo da $(iv) \Rightarrow (i)$. Neka je $xRy = 0$, $x, y \in R$. Tada postoji idempotent $e \in R$ takav da je $r(RxR) = eR$, i pri tom je eR ideal. Odavde slijedi da $e \in S_l(R)$. Iz činjenice da je R semicentralno redukovan dobijamo da je $e = 0$ ili $e = 1$. Ako je $e = 0$ tada $RyR = 0$. U slučaju da je $e = 1$ imamo da je $RxR = 0$. Dakle konačno slijedi $y = 0$ ili $x = 0$ tj prsten R je prim-prsten. □

Sljedeći prsteni su kvazi-Berovi ali nisu Rikartovi prsteni.

Primjer 2.0.1. *Neka je R prim prsten sa osobinom da je $Z_r(R) \neq 0$. Laverence je konstruisao desno primitivni prsten R sa $Z_l(R) \neq 0$. Takodje je u u [30] dat primjer grupovne algebre $R = KG$ nad poljem K koji je uniformno desno primitivan sa $Z_r(R) \neq 0$.*

Primjer 2.0.2. *Prsten $\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$, gdje je D domen koji nije divizioni prsten, je kvazi-Berov ali nije ni desni ni lijevi Rikartov prsten (Vidjeti [17]).*

Lema 2.3. *[17] Neka je T prsten sa jedinicom takav da je $|T| > 1$, i neka je $S = \prod_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$, gdje je $T_\lambda = T$, a Λ beskonačan skup indeksa. Ako je R beskonačan potprsten od S generisan sa $\oplus_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ i pri tom je ili $1 \in S$ ili $1 \in \{f : \Lambda \to T, f = const\}$. Tada prsten R nije kvazi-Berov prsten. Ako je T desni PQ-Berov prsten tada to svojstvo ima i prsten R.*

Primjenjujući predhodnu lemu dobijamo sljedeće primjere PQ-Berovih prstena.

Primjer 2.0.3. *Neka je T komutativni regularan prsten. Tada je T Rikartov prsten pa dakle i PQ-Berov koji nije kvazi-Berov prsten.*

Primjer 2.0.4. *Neka je $R = A \oplus B$ direktna suma kvazi-Berovog prstena A koji nije Rikartov prsten ([14]) i komutativnog Rikartovog prstena koji nije Berov([20]). Tada je R PQ-Berov prsten koji nije ni kvazi-Berov ni desni Rikartov prsten.*

Sljedeća lema uslov iz definicije PQ-Berovog prstena o generisanosti desnog anihilatora proizvoljnog glavnog ideala prstena pooštrava na uslov o generisanosti anihilatora svakog konačno generisanog desnog ideala.

Propozicija 2.0.8. *[20] Sljedeći uslovi su ekvivalentni*

(a) R je desni PQ-Berov prsten.

(b) Desni anihilator svakog konačno generisanog desnog ideala je generisan (kao desni ideal) sa idempotentom.

(c) Desni anihilator svakog glavnog ideala je generisan(kao desni ideal) idempotentom.

(d) Desni anihilator svakog konačno generisanog ideala je generisan idempotentom.

Dokaz. Jasno $(b) \Rightarrow (a)$. Neka je R desni PQ-Berov prsten i $X = \sum_{i=1}^{n} x_i R$, konačno generisan desni ideal. Tada je $r(X) = \bigcap_{i=1}^{n} e_i R$, gdje je $r(x_i R) = e_i R, e_i^2 = e_i$. Kako je svaki e_i lijevi semicentralan idempotent, odmah dolazimo do idempotenta e takvog da je $\bigcap_{i=1}^{n} e_i R = eR$. Zbog toga je $r(X) = eR$. Ekvivalentnost $(a) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$ proizilazi iz $(a) \Leftrightarrow (b)$ i činjenice da je $r(I) = r(RI)$ za svaki desni ideal I prstena R. $\square$

Iz prethodne propozicije moglo bi se na prirodan način pokušati generalizovati da je u desnom PQ-Berovom prstenu desni anihilator svakog prebrojivo generisanog desnog ideala generisan idempotentom. Sljedeći primjer pokazuje da to nije slučaj.

Primjer 2.0.5. *Neka je T konačno polje i R prsten iz predhodne leme. Tada je R desni PQ-Berov prsten. Kako je R prebrojiv i nije kvazi-Berov tada postoji prebrojivo generisan desni ideal čiji desni anihilator nije generisan idempotentom.*

Propozicija 2.0.9. *[20] Prsten R je desno PQ-Berov akko za svaki glavni ideal prstena R postoji $e \in S_r(R)$ tako da*

$$I \subset Re, r(I) \bigcap Re = (1-e)Re.$$

Dokaz. Neka je I glavni ideal prstena R. Tada iz činjenice da je R desni PQ-Berov prsten postoji $c \in S_l(R)$ tako da je $r(I) = cR$. Tada je $I \subset l(r(I)) = r(1-e)$, kao i $e \in S_r(R)$. Takođe je $r(I) \bigcap Re = (1-e)R \bigcap Re = (1-e)Re$. Dokažimo i obrat tvrdjenja. Neka postoji $e \in S_r(R)$ takav da je $I \subset Re, r(I) \bigcap Re = (1-e)Re$. Tada jasno $(1-e)R \subset r(I)$. Neka je sada $a \in R$ proizvoljno. Tada vrijedi $ae = eae + (1-e)ae \in r(I) \bigcap Re = (1-e)Re$, odakle dobijamo $ea = eae = 0, a = (1-e)a \in (1-e)R$. Konačno dobijamo $r(I) = (1-e)R$, tj. R je desno PQ-Berov prsten. □

Posljedica 2.1. *Neka je R desni PQ-Berov prsten i , I glavni ideal u R. Tada postoji $e \in S_l(R)$ takav da vrijedi $I \subset Re$, i skup $(1-e)Re$ je ideal prstena R.*

Propozicija 2.0.10. *[23] Neka je R desni PQ-Berov prsten. Tada je centar prstena R Rikartov prsten (PP prsten).*

DOKAZ. Neka je C centar prstena R, i $a \in C$ proizvoljno. Tada vrijedi $l_R(a) = l_R(Ra) = r_R(aR) = eR$, gdje $e \in S_l(R)$. Primjetimo da je $l_R(Ra) = l_R r_R l_R(Ra) = l_R r_R(eR)$. Neka je $r_R(eR) = fR$, $f \in S_l(R)$. Zbog toga imamo da $1-f \in S_r(R)$. Sada je $eR = l_R(Ra) = l_R(fR) = R(1-f)$. Nadalje postoji $x \in R$ tako da važi $e = x(1-f)$, odakle slijedi $ef = x(1-f)f = 0$. Imamo $fe = efe = 0$ pa dakle $e \in S_l(R)$. Takođe je $ef = fe = 0$. Iz $eR = R(1-f)$ slijedi da postoji $y \in R$ tako da važi $1-f = ey$ pa imamo $e = e(1-f) = ey = 1-f$. Dakle $e \in S_l(R) \bigcap S_r(R) = B(R)$. Konačno dolazimo do $r_C(a) = r_R(a) \bigcap C = eR \bigcap C = eC$. □

Propozicija 2.0.11. *[17]*

(i) Ako je prsten R Abelov tada je R desno Rikartov (PQ-Berov) prsten akko je R Rikartov (PQ-Berov).

(ii) Ako je prsten R Abelov i desno Rikartov tada je R PQ-Berov prsten i zadovoljava IFP-uslov.[2]

(iii) Ako R zadovoljava IFP-uslov tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:

(a) R je desno Rikartov prsten.

(b) R je Rikartov prsten.

(c) R je PQ-Berov prsten.

[2] *Za prsten R kažemo da ima svojstvo IFP (insertion of factor property) akko iz $ab = 0$ slijedi $aRb = 0$, $a, b \in R$.*

(iv) Ako je R desni PQ-Berov prsten tada R zadovoljava IFP uslov akko je prsten R redukovan.

DOKAZ. (i) Neka je R desno Rikartov prsten i $x \in R$. Tada postoji centralni idempotent $e \in R$ takav da vrijedi $r(x) = eR$. Kako je idempotent e u centru prstena dobijamo $r(x) \subset l(x)$. Neka je $a \in l(x)$. Tada $x \in r(a) \subset l(a)$ pa zbog toga $a \in r(x)$. Dakle $r(x) = l(x) = Re$, tj. R je Rikartov prsten. Obratno tvrđenje je očigledno. Slučaj PQ-Berovog prstena dokazujemo analogno.

(ii) Neka je $x \in R$. Iz činjenice da je R desno Rikartov i Abelov slijedi da je $r(x) = eR$ za neki centralni idempotent e. Iz činjenice da prsten R zadovoljava uslov IFP slijedi $r(x) = r(xR) = eR$ pa je dakle R PQ-Berov prsten.

Dokaz za (iii) slijedi iz činjenice da je R Abelov (Shin). Dalje dokaz slijedi iz (i),(ii).

(iv) Neka je R desni PQ-Berov prsten koji zadovoljava uslov IFP. Neka je $x^2 = 0$. Dokažimo da je $x = 0$. Najprije je $r(x) = r(xR) = eR$, gdje je e centralni idempotent (Shin). Odavde dobijamo da je $x = ex = xe = 0$. Dakle R je redukovan. Obratno tvrđenje slijedi iz činjenice da svaki redukovan prsten zadovoljava uslov IFP. □

Primjer 2.0.6. *Postoji poluprim prsten A sa centrom koji je Rikartov prsten ali pri tom A nije ni desni PQ Berov prsten niti je A ni desno ni lijevo Rikartov prsten. Riječ je o prstenu $A = R \oplus Mat_2(Z[x])$. Ovo je primjer P.M.Cohn.*

Propozicija 2.0.12. *[20] Sljedeći uslovi su ekvivalentni*

(i) R je desni Rikartov prsten koji je Abelov.

(ii) R je Rikartov prsten koji je Abelov.

(iii) R je desni PQ-Berov prsten koji zadovoljava uslov IFP.

(iv) R je redukovan PQ-Berov prsten.

Propozicija 2.0.13. *[14] Neka je R desni PQ-Berov prsten. Tada važi*

(i) R je poluprim akko je $S_l(R) = B(R)$.

(ii) Ako je svaki esencijalni desni ideal od R esencijalna ekstenzija nekog ideala u R tada je prsten R desno nesingularan.

2.1 PQ-Berovi prsteni naspram kvazi Berovih prstena

U ovom poglavlju dolazi do izražaja teorija mreža. Sljedeća lema je uopštenje rezultata koji važe za Artinove PQ-Berove prstene.

Lema 2.4. *[20] Skup svih glavnih ideala generisanih lijevim semicentralnim idempotentima prstena R je distributivna podmreža mreže svih ideala prstena R. Takodje važi*

$$(\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R)\bigcap cR = \sum_{\lambda\in\Lambda}(e_\lambda R\bigcap cR).$$

DOKAZ. Neka su $c, e_1, e_2 \in S_l(R)$. Najprije je jasno da su e_1R, e_2R ideali u R. Neka je $e = e_1 + e_2 - e_1e_2$. Direktnim izračunavanjem dobijamo da $e \in S_l(R)$, kao i $e_1R + e_2R = eR, e_1R\bigcap e_2R = e_1e_2R$ odakle slijedi da $e_1e_2 \in S_l(R)$. Takodje imamo $(e_1R + e_2R)\bigcap cR = eR\bigcap cR = ecR$,

$$(e_1R\bigcap cR) + (e_2R\bigcap cR) = e_1cR + e_2cR = (e_1c + e_2c - e_1ce_2c)R = ecR.$$

Sada upošteni distributivni zakon lako slijedi iz slučaja za $\Lambda = \{1, 2\}$. $\square$

U daljem sa $\Im S_l(R)(\Im B(R))$ koristimo oznaku za mrežu glavnih ideala generisanim sa lijevo semicentralnim(centralnim elementima) prstena R.

Lema 2.5. *[17] Neka je R kvazi Berov prsten. Tada je $\Im S_l(R)$ kompletna podmreža mreže svih ideala prstena R.*

DOKAZ. Neka je $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq S_l(R)$. Primjetimo da je $R(1 - e_\lambda)$ ideal u R za svako $\lambda \in \Lambda$. Tada postoji idempotent e takav da je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} r(R(1 - e_\lambda)) = r(\sum_{\lambda\in\Lambda} R(1 - e_\lambda)) = eR$. Dakle svaki podskup u $\Im S_l(R)$ ima najveću donju granicu.
$\square$

Teorema 2.2. *[17] Prsten R je kvazi-Berov akko je R desni PQ-Berov prsten i $\Im S_l(R)$ je kompletna podmreža mreže svih ideala prstena R.*

DOKAZ. Dokaz da je uslov dovoljan direktno slijedi iz predhodne leme.

Dokažimo da je uslov potreban. Neka je I ideal u R i $I = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rx_\lambda R$. Iz činjenice da je R desni PQ-Berov prsten imamo da postoji $e_\lambda \in S_l(R)$ tako da vrijedi $r(I) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} r(Rx_\lambda R) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R$. Zbog kompletnosti mreže postoji $c \in S_l(R)$ tako da vrijedi $cR \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R$ i pri tom je cR najveća donja granica za $\{e_\lambda R \mid \lambda \in \Lambda\}$ u $\Im S_l(R)$. Dokažimo da je $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R \subset cR$. Pretpostavimo suprotno da postoji $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R \backslash cR$. Iz činjenice da je R kvazi Berov prsten postoji $b \in S_l(R)$ tako da vrijedi $RaR \subset r(l(RaR)) = bR$. Zbog $RaR \subset e_\lambda R$ za svako $\lambda \in \Lambda$, imamo da je $R(1 - e_\lambda) \subset l(RaR)$. Nadalje je $bR = rl(RaR) \subset r(R(1 - e_\lambda)) = e_\lambda R$. Zbog toga je $bR \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R$. Nadalje imamo $a \in bR$ i $a \notin cR, cR \subseteq cR + bR = (c + b - cb)R \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R$ gde $c + b - cb \in S_l(R)$.

Ovo je u suprotnosti sa činjenicom da je cR najveća donja granica za skup $\{e_\lambda R \mid \lambda \in \Lambda\}$. Prema tome $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R = cR$. Dakle $r(I) = cR$ tj. R je kvazi-Berov prsten.

□

2.1.1 Trougaoni idempotenti

Definicija 2.5. *[16] Uredjeni skup $\{b_1, ..., b_n\}$ nenultih idempotenata prstena R naziva se skup lijevo trougaonih idempotenata ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $1 = b_1 + ... + b_n$.
2. $b_1 \in S_l(R)$.
3. $b_{k+1} \in S_l(c_k R c_k)$, *gdje je* $c_k = 1 - (b_1 + .. + b_k), 1 \leq k \leq n$.

Definicija 2.6. *Za skup trougaonih idempotenata $\{b_1, ..., b_n\}$ kažemo da je kompletan ako je $S_l(c_k R c_k) = \{0, b_k\}, 1 \leq k \leq n$.*

Potpuno analogno definišemo skup desnih trougaonih idempotenata prstena R mijenjajući uslov (2) sa $b_1 \in S_r(R)$ odnosno uslov (3) sa $b_{k+1} \in S_r(c_k R c_k)$. U [16] je dokazano da je skup $\{b_1, ..., b_n\}$ skup lijevih trougaonih idempotenata akko je skup $\{b_n, ..., b_1\}$ skup desno trougaonih idempotenata tako da prethodna definicija može biti preformulisana.

Lema 2.6. *[16] Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) R ima kompletan skup trougaonih idempotenata.

(ii) $\{bR | \, b \in S_r(R)\}$ je konačan skup.

Čak šta više ako su $\{b_1, ..., b_n\}$ i $\{c_1, ..., c_k\}$ kompletni skupovi trougaonih idempotenata tada je $n = k$. Takodje za $b \in S_l(R), bR = \sum_{i\in\Lambda} b_i R$ za $\Lambda \subseteq \{1, ..., n\}$.

Gordon i Small su uveli pojam *dio po dio domena* da bi poopštili poznate rezultate u Neterinim prstenima i semiprim prstenima.

Definicija 2.7. *Prsten R naziva se dio po dio domen(dio po dio prim prsten) kratko PWD (PWP) prsten ako u prstenu postoji kompletan skup primitivnih idempotenata (trougaonih idempotenata) $\{e_1, ..., e_n\}$ tako da iz $xy = 0$ ($xRy = 0$) slijedi $x = 0$ ili $y = 0$ za svako $x \in e_i R e_j$, $y \in e_j R e_k, 1 \leq i, j, k \leq n$.*

Jasno je iz definicije da je svaki PWD prsten i PWP prsten. U [16] je dokazana teorema koja dokazuje da osobine lijeve, desne PQ-berovosti, kvazi-berovosti i ososbine PWP koincidiraju.

Teorema 2.3. *[16] Neka je R prsten u kome postoji kompletan skup trogaonih idempotenata. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) R je desni PQ-Berov prsten.

(ii) R je lijevi PQ-Berov prsten.

(iii) R je kvazi-Berov prsten.

(iv) R je PWP prsten.

Lema 2.7. *[16] Za prsten R sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) R je desno perfektan PQ-Berov prsten.

(ii) R je semiprimaran kvazi-Berov prsten.

(iii) R je desno perfektan i lijevi PQ-Berov prsten.

Propozicija 2.1.1. *Neka su dati sljedeći uslovi:*

(i) R je kvazi-Berov prsten.

(ii) R je PQ-Berov prsten i centar od R je Berov prsten.

(iii) R je PQ-Berov prsten i Bulov prsten centralnih idempotenata je samo-injektivan.

Tada (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)
U slučaju da je R poluprim prsten tada (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Posljedica 2.4. *Neka je R biregularan prsten. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(i) R je kvazi-Berov prsten.

(ii) Mreža glavnih ideala prstena R je kompletna.

(iii) Centar prstena R je Berov prsten.

(iv) Bulov prsten centralnih idempotenata je samo-injektivan.

Propozicija 2.1.2. *[19] Neka je R desni PQ-Berov prsten koji posjeduje kompletan skup trougaonih idempotenata. Ako je prsten R poluprim tada je R konačna direktna suma prim prstena. Ako je prsten R biregularan tada je prsten R konačna direktna suma prostih prstena.*

2.1.2 Jedna karakterizacija PQ-Berovih prstena

Ova karakterizacija potiče od Z. Liu ([22]).

Lema 2.8. *Neka je $e(x) = e_0 + e_1x + ... = e_nx^n + ... \in R[[x]]$ lijevi semicentralan idempotent. Tada važi:*

(1) e_0 je lijevi semicentralan element u prstenu R.

(2) $e_0e_i = e_i, e_ie_0 = 0$,$i = 1, 2, ...$

(3) $e(x)R[[x]] = e_0R[[x]]$.

Sa $I(R)$ označavamo skup svih idempotenata prstena R.

Definicija 2.8. *Neka je $\{e_0, e_1, ...\}$ prebrojiva familija idempotenata prstena R. Kažemo da familija $\{e_0, e_1, ...\}$ ima uopšteni supremum u $I(R)$ ako postoji idempotent $e \in I(R)$ takav da je*

(1) $e_i R(1-e) = 0, i = 0, 1, ...$

(2) Ako je $f \in I(R)$ takav da je $e_i R(1-f) = 0$ tada je $eR(1-f) = 0$.

Teorema 2.5. *[22] Neka je R prsten takav da je $S_l(R) \subset C(R)$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $R[[x]]$ je desni PQ-Berov prsten.

(2) R je desni PQ-Berov prsten i svaka prebrojiva familija idempotenata u R ima uopšteni supremum u $I(R)$.

Ako je prsten R Abelov (svaki idempotent je centralan) tada skup $I(R)$ ima strukturu Bulove algebre gdje je

$$e \vee f = e + f - ef, e \wedge f = ef, e' = 1 - e.$$

Dakle u slučaju da je prsten R Abelov imamo sljedeću posljedicu:

Posljedica 2.6.

(1) $R[[x]]$ je desni PQ-Berov prsten.

(2) R je desni PQ-Berov prsten i svaka prebrojiva familija idempotenata u R ima uopšteni supremum u $I(R)$.

2.2 Samokonjugovani ideali u Berovim *-prstenima

U ovom poglavlju pokazuje se da je svaki ideal u kvazi -Berovom *-prstenu esencijalno proširenje samokonjugovanog ideala a takodje i esencijalan u samokonjugovanom idealu (dakle u sendviču izmedju dva samokonjugovana ideala).

Propozicija 2.2.1. *[14] Neka je R *-prsten. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

*(i) R je kvazi-Berov *-prsten.*

(ii) R je kvazi Berov prsten u kome je svaki semicentralan idempotent projekcija.

(iii) R je poluprim kvazi-Berov prsten u kome je svaki semicentralan idempotent projekcija.

(iv) Lijevi anihilator proizvoljnog lijevog ideala je generisan, kao lijevi ideal, projekcijom u prstenu.

DOKAZ. $(i) \Rightarrow (ii)$ pa je dakle R kvazi -Berov prsten. Neka je e lijevi semicentralan idempotent. Tada je $r((1-e)R) = eR$. Postoji projekcija f takva da je $eR = fR$. Nadalje je $Re^* = eR$, pa je $e = ee^* = e^*$ tj. e je projekcija.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Kako je svaki centralni idempotent lijevo semicentralan idempotent jedino treba da dokažemo da je R poluprim prsten. Neka je $x \in R$ takav da je $xRx = 0$. Imamo da $x \in r(xR) = eR$, gdje je e lijevo semicentralan idempotent. Takođe je eR samokonjugovan ideal. Sada je $ex^* = x^*$ i $xe = x$. Ali je takođe $xe = 0$ tj. R je poluprim prsten.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Neka je Y lijevi ideal u R. Kako je R kvazi-Berov to postoji desno semicentralan idempotent e takav da je $l(Y) = Re$. Iz činjenice da je Re ideal prstena R dobijamo $er = ere$ za svako $r \in R$ i $(1-e)Re$ je ideal prstena R Iz činjenice da je R poluprim prsten imamo $(1-e)Re = 0$. Dakle imamo da vrijedi $er = ere$ za svako $r \in R$. Sada imamo $er = ere = re$ za svako $r \in R$. Dakle e je u centru pa je dakle projekcija.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Neka je R desni ideal prstena R. Zbog $l(X^*) = (r(X))^*$ postoji projekcija e tako da je $l(X^*) = Re$. Odavde slijedi $r(X) = Re$, pa je prsten R zaista kvazi-Berov *-prsten. □

Posljedica 2.7. *[14] Neka je R prim prsten sa involucijom $*$. Tada je R kvazi -Berov * - prsten.*

DOKAZ. Iz činjenice da je prsten R prim imamo da je R kvazi-Berov. Dalje dokaz direktno slijedi iz predhodne propozicije. □

Primjer 2.2.1. *Postoji poluprim Berov prsten sa involucijom koji nije kvazi-Berov *- prsten. Neka je* $R = F + F$ *gdje je* F *polje u kome je involucija* $*$ *definisana sa* $(a,b)^* = (b,a),\ a,b \in F$ *(tzv. razmjenjujuća involucija).*

Primjer 2.2.2. *Postoji komutativan Berov *- prsten* R *koji sadrži ideal* I *koji nije samokonjugovan. Neka je* $*$ *involucija na* $C[x]$ *(involucija indukovana involucijom na* C*). Uzmimo* α *koji nije realan. Sada je* $(x-\alpha)-(x-\alpha)^* \neq 0$. *Zbog toga* $I = (x-\alpha)C[x]$ *nije samokonjugovan ideal.*

Nameće se prirodno pitanje karakterizacije prstena u kome je svaki ideal samokonjugovan.

Primjer 2.2.3. *U prstenu* $R = \begin{pmatrix} C[[x]] & xC[[x]] \\ xC[[x]] & C[[x]] \end{pmatrix}$, *koji je kvazi Berov *-prsten i nije Berov prsten, postoji ideal* $I = \begin{pmatrix} xC[[x]] & xC[[x]] \\ x^2C[[x]] & xC[[x]] \end{pmatrix}$ *koji nije samokonjugovan.*

Neka su X, Y ideali u prstenu R takvi da je $X \subseteq Y$. Kažemo da je ideal X esencijalan u Y ako svaki nenulti ideal koji ima neprazan presjek sa Y ima neprazan presjek sa X.

Lema 2.9. *[14] Neka su* X, Y *ideali u poluprim prstenu* R. *Ako je ideal* X *esencijalan u* Y *tada je* $r(X) = r(Y) = l(X) = l(Y)$.

DOKAZ. Jasno je $r(Y) \subset r(X)$. Pretpostavimo da je $Y \bigcap r(X) \neq 0$. Tada je $X \bigcap r(X) \neq 0$ što je kontradikcija. Dakle $Y \bigcap r(X) = 0$. Prema tome imamo da je $r(X) \subseteq r(Y)$. Konačno je $r(X) = r(Y)$. Kako je R poluprim prsten imamo da je $l(X) = r(X) = l(Y)$. □

Lema 2.10. *Neka je* R *poluprim prsten sa involucijom* $*$ *i* I *nenulti ideal prstena* R. *Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

(i) $r(I)$ *je samokonjugovan ideal u* R.

(ii) $II^* \neq 0$.

(iii) $II^* \subseteq_r^{ess} I$.

(iv) $II^* \subseteq_l^{ess} I$.

Teorema 2.8. *[14] Neka je R kvazi Berov*-prsten.*

(i) Ako je I ideal u R tada je $r(I+I^*) = r(II^*) = eR$, gdje je e centralna projekcija u R.

(ii) Ako je I nenulti ideal u R, tada postoji centralna projekcija $f \in R$ takva da je

$$II^* \subseteq_r^{ess} I \subseteq_r^{ess} I + I^* \subseteq_r^{ess} fR,$$

$$II^* \subseteq_r^{ess} I \subseteq_l^{ess} I + I^* \subseteq_l^{ess} fR.$$

(iii) Ako je X nenulti desni ideal tada je $XX^* \neq 0$.

(iv) Ako je Y nenulti lijevi ideal tada je $Y^*Y \neq 0$.

2.2.1 Jedna karakterizacija Berovih *-prstena

Potsjetimo se da je u Berovom $*$-prstenu involucija pravilna. Medjutim generalno prsten sa pravilnom involucijom nije Berov. Sljedeća propozicija daje dovoljan uslov da prsten sa pravilnom involucijom bude Berov.

Propozicija 2.2.2. *[14] Neka je R *-prsten. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

*(i) R je Berov *- prsten.*

*(ii) * je pravilna involucija i lijevi anihilator proizvoljnog nepraznog samokonjugovanog podskupa je generisan kao desni ideal sa projekcijom.*

*(iii) * je pravilna involucija i lijevi anihilator svakog nepraznog samokonjugovanog podskupa je generisan kao lijevi ideal sa projekcijom.*

DOKAZ. $(i) \Rightarrow (ii)$ Prema [1] * je pravilna involucija. Dalje dokaz slijedi iz definicije Berovog *-prstena.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Neka je Y neprazan podskup od R. Koristimo oznaku $Y^*Y = \{y^*y, y \in Y\}$.

Imamo da je Y^*Y samokonjugovan neprazan podskup od R. Sada postoji projekcija e takva da je $r(Y^*Y) = eR$. Neka je $y \in Y$. Tada je $y^*ye = 0$, odakle slijedi da je $ye = 0$. Zbog toga je $r(Y^*Y) \subseteq r(Y)$. Dakle $r(Y^*Y) = r(Y) = eR$. Odakle je zaista R Berov *- prsten.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Dokaz je analogan dokazu $(i) \Leftrightarrow (ii)$. □

Postoji Berov prsten R koji je kvazi-Berov *- prsten sa pravilnom involucijom ali nije Berov *- prsten.

Primjer 2.2.4. *Neka je $R = M_2(Z)$ prsten sa involucijom koja je transponovanje matrica. Prsten R nije Berov $*$ - prsten ali je ipak $M_2(Q)$ Berov *- prsten.*

Propozicija 2.2.3. *[14] Neka je R *-prsten. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

*(1) R je kvazi-Berov *-prsten.*

(ii) $aRa^* \neq 0$ za svako $0 \neq a \in R$, i desni anihilator svakog samokonjugovanog ideala je generisan kao desni ideal sa projekcijom.

(iii) $aRa^* \neq 0$ za svako $0 \neq a \in R$, i lijevi anihilator svakog samokonjugovanog ideala je generisan kao lijevi ideal sa projekcijom.

2.3 Generalizovani Berovi prsteni

Poznato je iz [17] da je centar Berovog prstena Berov prsten. Takodje je centar kvazi-Berovog prstena kvazi-Berov prsten, centar desnog PQ-Berovog prstena je PQ-Berov prsten. Postavlja se pitanje kada je prsten R sa PQ-Berovim centrom PQ-Berov prsten tj kada se osobina PQ-berovosti može sa centra prstena proširiti na cijeli prsten.

Teorema 2.9. *[23] Neka je R prsten sa PQ-Berovim centrom $C(R)$. Ako prsten R zadovoljava bilo koji od sljedećih uslova za bilo koji ideal I tada je R kvazi Berov, pa prema tome i desni PQ-Berov.*

1. *$I \cap C(R)$ je nenulti konačno generisan desni ideal od $C(R)$.*

2. *$I \cap C(R) \neq 0$ i svaki centralni idempotent u $\acute{R}$ je ortogonalan.*

3. $I \cap C(R) \neq 0$ i svaki desni ideal u R generisan sa centralnim idempotentom sadrži $C(R)$.

Posljedica 2.10. *Neka je R poluprim PI-prsten sa PQ-Berovim centrom $C(R)$. Ako je ili svaki idempotent u R ortogonalan ili svaki desni ideal koji je generisan sa centralnim elememtom sadrži $C(R)$, tada je R kvazi-Berov prsten.*

Primjer 2.3.1. *Neka je K polje i $R = K[X.Y, Z]$ sa $XY = XZ = ZX = YX = 0, YZ \neq ZY$. Tada je prsten R redukovan, $C(R) = K[X]$ je Berov prsten pa prema tome i PQ-Berov.*

Primjetimo da $r_R(Y)$ nema idempotenata. Prema tome R nije desni PQ-Berov prsten. Takodje primjetimo da je $I = \{f(Y, Z) \in K(Y, Z) \mid f(0, 0) = 0\}$ obostrani ideal prstena R kao i da važi $I \cap C(R) = 0$.

Definicija 2.9. *Za prsten R kažemo da je generalizovan desni PP-prsten ako za svako $x \in R$ postoji $n \in N$ tako da je $r_R(x^n) = eR$, za neki idempotent prstena R.*

Potpuno analogno se definiše generalizovani lijevi PP-prsten. Za prsten kažemo da je generalizovan PP-prsten ako je generalizovan lijevi i desni PP prsten. Klasu generalizovanih PQ-Berovih prstena uveo je T.K.Kwak u [24].

Definicija 2.10. *Za prsten R kažemo da je generalizovan PQ-Berov ako za svako $x \in R$ postoji prirodan broj n tako da je desni anihilator od $x^n R$ generisan sa idempotentom prstena.*

Slučaj lijevog generalizovanog PQ-Berovog prstena definiše se analogno. Prsten R je generalizovan PQ-Berov ako je lijevo i desno PQ-generalizovan.

U slučaju redukovanosti prstena vrijedi sljedeća lema:

Lema 2.11. *[24] Neka je R redukovan prsten. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1. *R je desni PP prsten.*
2. *R je PP prsten.*
3. *R je generalizovan desni PP prsten.*
4. *R je generalizovan PP-prsten.*

5. *R je desni PQ-Berov prsten.*
6. *R je PQ-Berov prsten.*
7. *R je generalizovan desni PQ-Berov prsten.*
8. *R je generalizovan PQ-Berov prsten.*

Propozicija 2.3.1. *[23] Neka je R prsten sa koji zadovoljava svojstvo IFP. Tada je R generalizovani desni PP prsten akko je R generalizovani desni PQ-Berov prsten.*

Propozicija 2.3.2. *[23] Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *R je generalizovan PQ-Berov prsten.*
2. *Za svaki glavni ideal I oblika* Ra^nR *prstena R* $n \in N$ *postoji* $e \in S_r(R)$ *takav da je* $I \subseteq Re$ *i* $r_R(I) \cap Re = (1-e)Re$.

Sljedeća lema predstavlja uopštenje za klasu Berovih prstena.

Propozicija 2.3.3. *[23] Ako je R generalizovan desni PQ-Berov prsten, tada je* $C(R)$ *generalizovan PP prsten.*

Potsjetimo se da za prsten R kažemo da ima svojstvo IFP (insertion of factor property) akko iz $ab = 0$ slijedi $aRb = 0$ za svako $a, b \in R$. Pojam IFP se pominje u teoriji skoro prstena (K.Bell).

Propozicija 2.3.4. *Neka je R prsten koji zadovoljava svojstvo IFP. Tada je R generalizovan desni PP akko je R redukovani PQ-Berov prsten.*

Sljedeće tvrđenje daje interesantnu karakterizaciju generalizovanih PQ-Berovih prstena i na određen način predstavlja analogon za propoziciju 1.9 u [20].

Propozicija 2.3.5. *Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) R je generalizovan desni PQ-Berov prsten.

(2) Za svaki glavni ideal I oblika Ra^nR *prstena R ,* $n \in N$,
postoji $e \in S_l(R)$ *takav da je* $I \subset Re$ *i* $r_R(I) \cap Re = (1-e)Re$.

T.Kwak u [23] takođe daje analogon za tvrđenje o centru prstena za klasu kvazi-Berovih prstena.

Propozicija 2.3.6. *Neka je R generalizovan desni PQ-Berov prsten. Tada je centar $C(R)$ prstena R generalizovani PP prsten.*

Sljedeći primjer pokazuje da postoji poluprim prsten R sa centrom koji je generalizovan PP prsten ali R nije generalizovan PQ-Berov prsten.

Primjer 2.3.2. *Neka je* $\mathfrak{R} = R + Mat_2(Z[x])$ *gdje je* $R = \begin{pmatrix} \prod_{n=1}^{\infty} F_n & \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n \\ \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n & \langle \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, 1 \rangle \end{pmatrix}$.

Tada je centar od Re generalizovani PP prsten. Kako R nije generalizovan desni PQ-Berov prsten to $\mathfrak{R}$ takođe nema to svojstvo. Takođe $Mat_2(Z[]x])$ nije generalizovan PP prsten. Sada je jasno da prsten $\mathfrak{R}$ nije generalizovan desni PP prsten.

Sljedeća lema pokazuje da se svojstvo IFP prenosi sa prstena R na prsten gornjih trougaonih matrica nad R sa jednakim elementima na glavnoj dijagonali.

Lema 2.12. *[23] Neka je S prsten i za $n > 2$*

$$R_n = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in S \right\}.$$

Ako prsten S ima svojstvo IFP tada za svako $A \in R_n$ i svaku $E^2 = E \in R_n$ $AE = 0$ implicira $AR_nE = O$ tj. i prsten R_n ima svojstvi IFP.

DOKAZ. Najprije primjetimo da je proizvoljan idempotent $E \in R_n$ oblika

$$\begin{bmatrix} e & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e \end{bmatrix}, e^2 = e \in S.$$

Neka je $AE = 0$, $A = \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix} \in R_n$.

Iz predhodne jednakosti slijedi $ae = 0$, $a_{ij} = 0$, $i < j, i \geq 1, j \geq 2$. Kako prsten S ima svojstvo IFP to je $aSe = 0$ i $a_{ij}Se = 0$ za $i < j, i \geq 1, j \geq 2$. Odavde dobijamo da je $AR_nE = 0$, tj. i prsten R_n ima IFP svojstvo. □

U klasi prstena koji imaju svojstvo IFP osobina generalizovanosti se prirodno prenosi sa prstena R na prsten matrica nad R i svojstva iz klase generalizovanih desnih PQ-Berovih prstena i generalizovanih desnih PQ-Berovih prstena koincidiraju.

Propozicija 2.3.7. *Neka je R prsten sa svojstvom IFP i R_n prsten iz predhodne leme. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) R je generalizovani desni PQ-Berov prsten.

(2) R_n je generalizovani desni PP-prsten.

(3) R_n je generalizovani desni PQ-Berov prsten.

Glava 3

Armendarisovi prsteni i rigidni prsteni

Klasu Armendarisovih prstena uveli su Rege i Chhawchharia u [31].

Definicija 3.1. *Za prsten R kažemo da je Armmendarisov ako za svaka dva polinoma $f(x) = a_0 + a_1x + ...a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$ polinomijalnog prstena $R[x]$, vrijedi*

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_ib_j = 0, \ \forall i, j.$$

Motivacija za uvođenje ove klase jeste u činjenici da klasa redukovanih prstena[1] zadovoljava svojstvo iz prethodne definicije. Ova klasa prstena ima jako važnu karakterizaciju izmedju anihilatora u prstenu R i polinomijalnom prstenu $R[x]$. Naime Hirano je u [35] pokazao da postoji bijekcija izmedju skupa anihilatora Armendarisovog prstena R i skupa anihilatora odgovarajućeg prstena $R[x]$.

Definicija 3.2. *([32]) Za endomorfizam α prstena R kažemo da je rigidan ako vrijedi*

$$a\alpha(a) = 0 \Rightarrow a = 0, \ a \in R.$$

[2] *Prsten R na kome je definisan rigidan endomorfizam α naziva se α-rigidan prsten.*

Definicija 3.3. *[28] Za prsten R sa endomorfizmom α kažemo da je slabo α-rigidan ako vrijedi*

$$a\alpha(a) \in nil(R) \Leftrightarrow a \in nil(R),$$

gdje je $nil(R)$ skup svih nilpotentnih elemenata prstena R.

---

[1] Prsten u kome je jedini nilpotent 0.

[2] *Uslov je ekvivalentan sa $\alpha(a)a = 0 \Rightarrow a = 0 \ \forall a \in R$.*

U sljedećem dijelu dajemo direktne dokaze da su klase rigidnih prstena kao i slabo rigidnih prstena zatvorene za direktne proizvode.

Teorema 3.1. *Ako je A σ_1-rigidan prsten i B σ_2-rigidan prsten tada je $A \times B$ γ-rigidan prsten, gdje je $\gamma(a,b) = (\sigma_1(a), \sigma_2(b))$.*

DOKAZ. Neka je $(a,b)\gamma(a,b) = (0,0)$. Iz definicije γ slijedi $(a,b)(\sigma_1(a), \sigma_2(b)) = (0,0)$, odakle dobijamo $(a\sigma_1(a), b\sigma_2(b)) = (0,0)$ odnosno $a\sigma_1(a) = 0$, $b\sigma_2(b) = 0$. Iz činjenice da su A, B rigidni prsteni imamo $(a,b) = (0,0)$, a ovo upravo znači da je prsten $A \times B$ γ-rigidan. □

Posljedica 3.2. *Neka je (A_i) familija σ_i-rigidnih prstena $1 \leq i \leq n$. Tada je $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ γ-rigidan prsten gdje je*

$$\gamma(a_1, a_2, ...a_n) = (\sigma_1(a_1), \sigma_2(a_2), ...\sigma_n(a_n)).$$

Teorema 3.3. *Ako je A slabi σ_1-rigidan prsten i B slabi σ_2-rigidan prsten tada je $A \times B$ slabi γ-rigidan prsten, gdje je $\gamma(a,b) = (\sigma_1(a), \sigma_2(b))$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $(a,b)\gamma(a,b) \in nil(A \times B)$. Iz definicije preslikavanja γ imamo $(a,b)(\sigma_1(a), \sigma_2(b)) \in nil(A \times B)$, odakle dobijamo $(a\sigma_1(a), b\sigma_2(b)) \in nil(A \times B)$. Odavde imamo da postoji $n \in N$ tako da vrijedi $(a\sigma_1(a), b\sigma_2(b))^n = (0,0)$. Sada je $(a\sigma_1(a))^n = 0, (b\sigma_2(b))^n = 0$, odnosno $a\sigma_1(a) \in nil(A), b\sigma_2(b) \in nil(B)$. Iz činjenice da je A slabi σ_1-rigidan i B slabi σ_2-rigidan dobijamo $a \in nil(A)$, $b \in nil(B)$. Odavde imamo da postoje n_1, n_2 takvi da je $a^{n_1} = 0$, $b^{n_2} = 0.$. Konačno je $(a,b)^{\max(n_1 n_2)} = (0,0)$, a ovo upravo znači $(a,b) \in nil(A \times B)$. Obratna implikacija se dokazuje potpuno analogno. □

Posljedica 3.4. *Neka je $(A_i)_{i=1}^{n}$ familija slabih σ_i- rigidnih prstena. Tada je $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ slabi γ-rigidan prsten gdje je endomorfizam γ definisan sa*

$$\gamma(a_1, a_2, ..., a_n) = (\sigma_1(a_1), \sigma_2(a_2), ..., \sigma_n(a_n)).$$

Ako je σ endomorfizam prstena R tada se σ može produžiti do endomorfizma σ' polinomijalnog prstena $R[x]$ na sljedeći način

$$\sigma'(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) x^i.$$

U sljedećem tvrđenju pokazujemo kako se osobina rigidnosti prenosi sa prstena R na odgovarajući polinomijalni prsten $R[x]$.

Teorema 3.5. *Ako je R σ-rigidan prsten tada je $R[x]$ σ'-rigidan prsten.*

DOKAZ. Neka je $f(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n$, proizvoljan element iz $R[x]$. Dokažimo da iz $f(x)\sigma'(f(x)) = 0$ slijedi $f(x) = 0$. Zaista iz

$$(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)(\sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + ... + \sigma(a_n)x^n) = 0,$$

najprije dobijamo $a_0\sigma(a_0) = 0$ pa zbog rigidnosti prstena R imamo $a_0 = 0$. Iz činjenice da je koeficijent uz x^2 jednak nuli dobijamo

$$a_0\sigma(a_2) + a_1\sigma(a_1) + a_2\sigma(a_0) = 0,$$

odakle odmah dobijamo $a_1\sigma(a_1) = 0$, odakle slijedi $a_1 = 0$. Kako je koeficijent uz x^{2n-2} jednak nuli imamo

$$a_{n-2}\sigma(a_n) + a_{n-1}\sigma(a_{n-1}) + a_n\sigma(a_{n-2}) = 0,$$

odakle dobijamo $a_{n-1}\sigma(a_{n-1}) = 0$, odakle koristeći rigidnost prstena imamo da je $a_{n-1} = 0$. Koristeći analognu argumentaciju za koeficijent uz x^{2n} na kraju dobijamo $a_n\sigma(a_n) = 0$ odakle imamo $a_n = 0$ tj. $f(x) = 0$. □

Sljedeći primjer pokazuje da je klasa slabo rigidnih prstena pravo proširenje klase rigidnih prstena.

Primjer 3.0.3. *Neka je α endomorfizam prstena R i R α-rigidan prsten. Neka je*

$$R_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a, b, c, d \in R \right\}$$

potprsten prstena $T_3(R)$. Tada se endomorfizam α može produžiti do endomorfizma $\overline{\alpha} : R \to R$ i definisan je sa

$$\overline{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij})).$$

Tada vrijedi:

(1) R_3 je slabi $\overline{\alpha}$-rigidan prsten.

(2) R_3 nije $\overline{\alpha}$-rigidan.

O vezi između redukovanih, rigidnih i slabo rigidnih prstena govori sadržaj sljedeće propozicije.

Propozicija 3.0.8. *[28] Neka je α endomorfizam prstena R. Tada je prsten R α-rigidan akko je slabo α-rigidan i redukovan.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je prsten R α-rigidan. Tada je R naravno i redukovan. Pokažimo da je R slabo α-rigidan. Iz $a \in nil(R)$ imamo da je $a = 0$, jer je prsten R redukovan, pa je prema tome $a\alpha(a) = 0$, odakle dobijamo $a = 0 \in nil(R)$. Prema tome prsten R je slabo rigidan i redukovan. Obratno pretpostavimo da je prsten R slabo α-rigidan i redukovan. Tada iz $a\alpha(a) = 0$ dobijamo $a \in nil(R)$ jer je prsten R slabo rigidan. Sada je $a = 0$ jer je prsten R redukovan. Dakle R je α-rigidan. □

Iz elementarne teorije prstena je poznato da za prsten R skup $nil(R)$ nije obavezno ideal u prstenu. Sljedeća propozicija pokazuje veoma važno svojstvo ako $nil(R)$ jeste ideal slabo rigidnog prstena.

Propozicija 3.0.9. *[26] Neka je R slabo α-rigidan prsten i $nil(R)$ ideal u prstenu. Tada je $\alpha(e) = e$ za svaki centralni idempotent prstena R.*

Propozicija 3.0.10. *Neka je R Abelov prsten sa $\alpha(e) = e$ za svaki element $e^2 = e \in R$. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) R je slabo α-rigidan prsten.

(2) eR i $(1-e)R$ su slabi α-rigidni ideali.

3.0.1 Proširenja u slabo rigidnim prstenima

Neka je α endomorfizam prstena R. Sa $T_n(R)$ označavamo prsten gornjih trougaonih matrica nad prstenom R. Tada se endomorfizam α može produžiti do endomorfizma $\overline{\alpha} : T_n(R) \to T_n(R)$ i definisan je sa

$$\overline{\alpha}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(a_{12}) & \alpha(a_{13}) & \dots & \alpha(a_{1n}) \\ 0 & \alpha(a_{22}) & \alpha(a_{23}) & \dots & \alpha(a_{2n}) \\ 0 & 0 & \alpha(a_{33}) & \dots & \alpha(a_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha(a_{nn}) \end{bmatrix}.$$

Svojstvo slabe rigidnosti se prenosi sa prstena R na prsten $T_n(R)$ o čemu govori sadržaj sljedeće teoreme.

Teorema 3.6. *[28] Neka je α endomorfizam prstena R. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) R je slabo α-rigidan prsten.

(2) $T_n(R)$ je slabo $\overline{\alpha}$-rigidan za svako n.

Ouyang daje primjer prstena koji je slabo α-rigidan i nije slabi α-kosi Armendarisov.

Primjer 3.0.4. *Neka je R prsten i $M_2(R)$ prsten kvadratnih matrica formata 2×2 nad R. Neka je*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} | A, B, C \in M_2(R) \right\}.$$

Neka je α endomorfizam definisan sa

$$\alpha\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Tada je prsten S slabo α-rigidan ali nije slabi α-kosi Armendarisov prsten.

Posljedica 3.7. *Neka je α endomorfizam prstena R. Tada je R slabi α-kosi Armendarisov prsten akko je prsten $T_n(R)$ slabi $\overline{\alpha}$-kosi Armendarisov prsten.*

3.1 Armendarisovi prsteni Loranovih redova

U ovom dijelu σ je automorfizam prstena R.

Kažemo da je prsten R σ-kosi Armendarisov prsten Loranovog tipa ako za svaka dva polinoma

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{q} a_i x^i, \; g(x) = \sum_{j=-t}^{s} b_j x^j \in R\left[x, x^{-1}; \sigma\right],$$

vrijedi

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_i \sigma^i(b_j) = 0, \; -p \leq i \leq q, \; -t \leq j \leq s.$$

Kažemo da je prsten $R[[x, x^{-1}; \sigma]]$ Loranovih redova σ-kosi Armendarisov ako za svaka dva elementa

$$f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i, \; g(x) = \sum_{j=-t}^{\infty} b_j x^j,$$

prstena $R[[x, x^{-1}; \sigma]]$ vrijedi

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_i \sigma^i(b_j) = 0 \; -p \leq i \leq \infty, \; -t \leq j \leq \infty.$$

Sljedeće dvije teoreme daju korisnu karakterizaciju navedene dvije klase.

Teorema 3.8. *Neka je σ automorfizam prstena R. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1. *R je σ-kosi Armendarisov prsten.*

2. *R je σ-kosi Armendarisov prsten Loranovog tipa.*

DOKAZ. Neka je $f(x) = \sum_{i=-p}^{q} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=-t}^{s} b_j x^j$ za koje je $f(x)g(x) = 0$. Odavde slijedi da $x^p f(x)$, $x^t g(x) \in R[x;\sigma]$. Nadalje kako je $f(x)g(x) = 0$ odmah dobijamo $x^p f(x)g(x)x^t = 0$. Iz predhodne jednakosti dobijamo

$$\sigma^p(a_i)\sigma^{i+p}(b_j) = 0, \ -p \leq i \leq q, \ -t \leq j \leq s.$$

Iz činjenice da je σ automorfizam prstena dobijamo $\sigma^p(a_i\sigma^i(b_j)) = 0$ i konačno $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. Obratna implikacija slijedi iz činjenice da je $R[x;\sigma] \subset R[x,x^{-1};\sigma]$. □

Kažemo da je prsten $R[[x,x^{-1},\sigma]]$ σ-kosi Armendarisov ako za svako $f(x) = \sum_{i=-p}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=-t}^{\infty} b_j x^j$ $f(x)g(x) = 0$ implicira $a_i\sigma^i(b_j) = 0, -p \leq i \leq \infty, -t \leq j \leq \infty$.

Teorema 3.9. *Neka je σ automorfizam prstena R. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1. *R je σ-kosi Armendarisov prsten.*
2. *Prsten $R[[x,x^{-1};\sigma]]$ Loranovih redova je σ-kosi Armendarisov.*

DOKAZ. Dokaz potpuno analogan dokazu prethodnog teorema. □

Dio vezan za Loranove nizove i redove završavamo sa tvrđenjem o potrebnom uslovu da bi prsten formalnih redova nad redukovanim prstenom bio takodje redukovan.

Teorema 3.10. *Neka je σ endomorfizam prstena R. Ako je prsten R redukovan i zadovoljava uslov kompatibilnosti $a\sigma(b) = 0 \Longrightarrow ab = 0$ tada je prsten $R[[x,\sigma]]$ redukovan.*

DOKAZ. Neka je $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ i $(f(x))^2 = 0$. Dokazat ćemo da je $f(x) = 0$. Najprije iz $(f(x))^2 = 0$ dobijamo $a_0^2 = 0$, odakle zbog redukovanosti prstena R slijedi $a_0 = 0$. U sljedećem koraku imamo

$$a_0a_2 + a_1\sigma(a_1) + a_2\sigma^2(a_0) = 0,$$

odnosno $a_1\sigma(a_1) = 0$ odakle koristeći uslov kompatibilnosti dobijamo $a_1^2 = 0$, pa opet koristeći uslov redukovanosti prstena R imamo $a_1 = 0$. Koristeći istu argumentaciju za koeficijent uz x^{2n} dobijamo $a_n\sigma^n(a_n) = 0$, odakle ponovo koristeći uslov kompatibilnosti $a_n\sigma^{n-1}(a_n) = 0$, odakle uzastopno $a_n\sigma(a_n) = 0$. Dalje indukcijom dobijamo $a_i = 0$ za svako i tj. $f(x) = 0$. Dakle $R[[x;\sigma]]$ je zaista redukovan prsten. $\square$

Bez uslova da prsten R zadovoljava $a\sigma(b) = 0 \implies ab = 0$ prethodni teorem ne važi. Neka je $R = Z_2 \bigoplus Z_2$ i $\sigma : R \to R$ definisan $\sigma(a, b) = (b, a)$. Lako se provjerava da prsten $R[[x;\sigma]]$ nije redukovan. Primjetimo da je $(1,0)(0,1) = (0,0)$, ali $(1,0)\sigma(0,1) \neq (0,0)$.

U sljedećem dijelu su generalizovani rezultati iz [27] koji se odnose na σ-kose Armendarisove prstene do klase slabih σ-kosih Armendarisovih prstena.

Potsjetimo se ako je $\sigma : R \to S$ homomorfizam prstena tada se σ može produžiti do homomorfizma $R[x] \to S[x]$ koji je definisan sa $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \to \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(a_i) x^i$ koji ćemo takođe označavati sa σ. [3] Chen i Tong ([27]) su dokazali da ako je $\sigma : R \to S$ izomorfizam prstena i R α-kosi Armendarisov prsten tada je S $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-kosi Armendarisov prsten.

Mi ćemo dokazati varijantu slabog kosog Armendariovog prstena a potom koristeći ovaj rezultat dokazati teoremu koja konstruiše veoma važan primjer slabo kosog Armendarisovog prstena.

Lema 3.1. *Neka je σ izomorfizam prstena R i S. Ako je R slabi α-kosi Armendarisov tada je S slabi $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-kosi Armendarisov prsten.*

DOKAZ. Neka je

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \; g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in S\left[x; \sigma\alpha\sigma^{-1}\right].$$

[3] Često se ektenzija homomorfizma označava isto kao i sam homorfizam.

Dokazat ćemo da iz $f(x)g(x) = 0$ slijedi $a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i b_j \in nil(S)$ za svako i,j. Iz činjenice da se izomorfizam prstena R i S na prirodan način produžava na odgovarajuće polinomijalne prstene dolazimo do izomorfizma $\sigma : R[x] \to S[x]$ gdje je $\sigma(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i)x^i$. Iz činjenice da je σ izomorfizam postoje polinomi

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i' x^i, \; g_1(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j' x^j,$$

takvi da je

$$f(x) = \sigma(f_1(x)) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i')x^i, \; g(x) = \sigma(g_1(x)) = \sum_{j=0}^{m} \sigma(b_j')x^j.$$

Najprije ćemo dokazati da iz $f(x)g(x) = 0$ slijedi $f_1(x)g_1(x) = 0$. Zaista iz

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = 0,$$

dobijamo da za svako

$$0 \le k \le m \text{ važi } a_0 b_k + a_1(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_{k-1}) + ... + a_k(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(b_0) = 0.$$

Sada imamo

$$\sigma(a_0')\sigma(b_k') + \sigma(a_1')(\sigma\alpha\sigma^{-1})\sigma(b_{k-1}') + ... + \sigma(a_k')(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k\sigma(b_0') = 0.$$

Iz $(\sigma\alpha\sigma^{-1})^t = \sigma\alpha^t\sigma^{-1}$ dobijamo da je

$$a_0' b_k' + a_1'\alpha(b_{k-1}') + ... + a_k'\alpha^k(b_0') = 0,$$

a ovo upravo znači $f_1(x)g_1(x) = 0$ u kosom prstenu $R[x;\alpha]$. Iz činjenice da je R slabi α-kosi Armendarisov prsten slijedi $a_i'\alpha^i(b_j') \in nil(R)$. Kako je $a_i' = \sigma^{-1}(a_i), b_j' = \sigma^{-1}(b_j)$ dobijamo

$$\sigma^{-1}(a_i)\alpha^i\sigma^{-1}(b_j) \in nil(R),$$

odnosno

$$\sigma^{-1}(a_i)\sigma^{-1}\sigma\alpha^i\sigma^{-1}(b_j) = \sigma^{-1}(a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(b_j)) \in nil(R),$$

odakle odmah slijedi

$$a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(b_j) \in nil(S),\ 0 \leq k \leq m.$$

Dakle zaista je S slabi $\sigma\alpha\sigma^{-1}$-kosi Armendarisov prsten.□

U daljem pokazujemo koristeći prethodnu lemu da jedna veoma važna klasa potprstena prstena gornjih trougaonih matrica nad prstenom R pod određenim uslovima ima slabo koso Armendarisovo svojstvo. Sledeća notacija se koristi u [33]. Koristimo oznaku $RA = \{rA, r \in R\}$ za svako $A \in M_n(R)$, gdje je $M_n(R)$ prsten matrica formata $n \times n$ nad prstenom R.

Za $n \geq 2$ neka je $V = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$, gdje su $E_{ij} = (e_{st} : 1 \leq s,t \leq n)$ matrične jedinice prstena R, gdje je $e_{ij} = 1$ i $e_{st} = 0$ za $s \neq i$ ili $t \neq j$, $0 \leq i,j \leq n$, i $V_n(R) = RI_n + RV + ... + RV^{n-1}$.

Teorema 3.11. *Neka je α automorfizam prstena R. Ako je faktor prsten $R[x]/(x^n)$ slabi $\widetilde{\alpha}$-kosi Armendarisov tada je $V_n(R)$ slabi $\widetilde{\alpha}$-kosi Armendarisov prsten.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $R[x]/(x^n)$ slabi $\widetilde{\alpha}$-kosi Armendarisov prsten. Neka je

$\theta : V_n(R) \to R[x]/(x^n)$ definisano sa

$$\theta(r_0I_n + r_1V + .. + r_{n-1}V^{n-1}) = r_0 + r_1x + .. + r_{n-1}x^{n-1} + (x^n).$$

Lako se provjerava da je preslikavanje θ izomorfizam pa primjenjujući prethodnu lemu imamo da je $V_n(R)$ $\theta^{-1}\widetilde{\alpha}\theta$-slabi kosi Armendarisov prsten.

Nadalje je

$$\theta^{-1}\widetilde{\alpha}\theta(r_0I_n + r_1V + .. + r_{n-1}V^{n-1}) = \theta^{-1}\widetilde{\alpha}(r_0 + r_1x + ... + r_{n-1}x^{n-1} + (x^n))$$

$$= \theta^{-1}(\alpha(r_0) + \alpha(r_1)x + ...\alpha(r_{n-1})x^{n-1} + (x^n))$$
$$= \alpha(r_0)I_n + \alpha(r_1)V + ... + \alpha(r_{n-1})V^{n-1}$$
$$= \widetilde{\alpha}(r_0 I_n + r_1 V + .. + r_{n-1}V^{n-1}),$$

tj. $V_n(R)$ je slabi $\widetilde{\alpha}$- kosi Armendarisov prsten, što je i trebalo dokazati. □

Z. Liu and R. Zhuo su generalizovali klasu Armendarisovih prstena i uveli pojam slabog Armendarisovog prstena.

Prsten R je je slabi Armendarisov ako za svaka dva polinoma

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m \in R[x],$$

iz $f(x)g(x) = 0$ slijedi $a_ib_j \in nil(R)$ za svako i, j. Ova definicija je ekvivalentna sa tvrđenjem da je ideal 0 slabi Armendarisov ideal. Dokazat ćemo da je klasa slabih Armendarisovih prstena zatvorena za direktne proizvode kao i da ako je faktor prsten R/I slabi Armendarisov prsten za neki nilpotentan ideal I tada je prsten R slabi Armendarisov.

Teorema 3.12. *Direktni proizvod konačno mnogo slabih Armendarisovih prstena je slabi Armendarisov prsten.*

Dokaz. Neka su $R_1, R_2, ..., R_n$ slabi Armendarisovi prsteni, $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ i

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m \in R[x]$$

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), b_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in})$$

takvi da je $f(x)g(x) = 0$. Definišimo sljedeće polinome :

$$f_k(x) = a_{0k} + a_{1k}x + ... + a_{nk}x^n, g_k(x) = b_{0k} + b_{1k}x + ... + b_{mk}x^m,\ 1 \leq k \leq n.$$

Iz $f(x)g(x) = 0$ dobijamo

$$a_0b_0 = 0, a_0b_1 + a_1b_0 = 0, ..., a_nb_m = 0.$$

Odavde slijedi

$$a_{01}b_{01} = a_{02}b_{02} = ... = a_{0n}b_{0n} = 0,$$

$$a_{01}b_{11} + a_{11}b_{01} = ... = a_{0n}b_{1n} + a_{1n}b_{0n} = 0,$$

$$a_{n1}b_{m1} = a_{n2}b_{m2} = ... = a_{nn}b_{mn} = 0.$$

No ovo upravo znači da je $f_k(x)g_k(x) = 0$ u prstenu $R_k[x]$, $1 \leq k \leq n$. Kako su prsteni R_k slabi Armendarisovi dobijamo $a_{ik}b_{jk} \in nil(R_k)$. Sada za svako i, j postoje m_{ijk} takvi da je $(a_{ik}b_{jk})^{m_{ijk}} = 0$ u prstenima R_k, $1 \leq k \leq n$. Neka je sada $m_{ij} = \max m_{ijk}$, $1 \leq k \leq n$. Jasno je $(a_ib_j)^{m_{ij}} = 0$, za svako i, j, tj. R je slabi Armendarisov prsten. □

Teorema 3.13. *Ako je prsten R/I slabi Armendarisov i ideal I nilpotentan u R, tada je R slabi Armendarisov prsten.*

DOKAZ. Neka su

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m \in R[x]$$

takvi da je $f(x)g(x) = 0$. Odavde odmah dobijamo

$$(\overline{a_0} + \overline{a_1}x + ... + \overline{a_n}x^n)(\overline{b_0} + \overline{b_1}x + ... + \overline{b_m}x^m) = 0.$$

Kako je R/I slabi Armendarisov imamo da je $\overline{a_i}\,\overline{b_j} \in nil(R/I)$. Iz pretpostavke da je I nilpotentan ideal dobijamo $a_ib_j \in nil(R)$ čime je dokaz završen. □

3.2 Berovi i rigidni prsteni

Neka je σ endomorfizam prstena R. Podskup S prstena R naziva se σ-skup ako je skup S σ-stabilan tj $\sigma(S) \subseteq S$. Specijalno ako je $S = \{a\}$ jednočlan skup kažemo da je element a σ element. Lijevi (desni, obostrani) ideal I prstena se naziva lijevi (desni,obostrani) σ-ideal ako je ideal I σ skup prstena R. Za prsten R kažemo da je σ -Berov (σ-kvazi Berov) prsten ako je desni anihilator svakog σ skupa (σ-ideala) generisan idempotentom prstena. O odnosu ove dvije klase u slučaju rigidnih prstena govori sljedeća lema:

Lema 3.2. *[26] Neka je R σ-rigidan prsten. Tada je prsten R σ-Berov akko je R σ-kvazi Berov.*

DOKAZ. ($\Rightarrow$) Trivijalno.

($\Leftarrow$)

Neka je prsten R σ-kvazi Berov i neka je S bilo koji σ skup. Posmatrajmo desni ideal $\langle S\rangle$. Kako je S σ skup prstena R to je $\langle S\rangle$ desni σ ideal. Iz činjenice da je prsten R σ-kvazi Berov to je $r_R(S) = eR$ za neki idempotent u prstenu R. Dokažimo da je $r_R(S) = r_R(\langle S\rangle)$. Jasno je $r_R(\langle S\rangle) \subseteq r_R(S)$. Dokažimo i obrnutu inkluziju. Neka je $b = \sum_{i=0}^n s_i x_i \in \langle S\rangle$ proizvoljno. Ako je $a \in r_R(S)$ tada je $s_i a = 0$ za svako $s_i \in S$. Kako je prsten R rigidan pa dakle i redukovan to je $s_i a = 0$ akko $a s_i = 0$ akko $s_i R a = 0$. Sada je $\sum_{i=0}^n (a s_i) x_i = \sum_{i=0}^n (s_i x_i) a = ba$, dakle $a \in r_R(S)$. Konačno dobijamo $r_R(\langle S\rangle) = eR$ tj. R je σ-Berov prsten. $\square$

Posljedica 3.14. *Neka je R redukovan prsten. Tada je prsten R Berov akko je R kvazi Berov.*

DOKAZ. Direktno iz prethodne leme uzmemo li $\sigma = id_R$. $\square$

Lema 3.3. *[26] Neka je R $\sigma-$ rigidan prsten. Tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(1) R je desni σ-PP prsten.

(2) R je σ-PP prsten.

(3) R je desni σ-PQ Berov prsten.

(4) R je σ-PQ Berov prsten.

(5) Za svaki σ-element $a \in R$ i svaki prirodan broj n $r_R(a^n R) = eR$, za neki idempotent $e \in R$.

DOKAZ. Kako je R σ-rigidan to je $r_R(a) = l_R(a) = r_R(aR) = l_R(Ra) = r_R(a^nR)$ za svaki $\sigma-$ element a i svaki prirodan broj n. □

Armendariz je pokazao da ako je R rigidan prsten tada je je prsten R Berov akko je polinomijalni prsten $R[x]$ Berov. Sljedeći dio predstavlja generealizaciju ovog tvrđenja. Neka je $\sigma-$ endomorfizam prstena R. Tada postoji endomorfizam $\overline{\sigma}$ definisan na $R[x:\sigma]$ koji je ekstenzija od σ. Označimo sa Σ_σ skup svih ekstenzija od σ. Jasno je da je $\Sigma_\sigma \neq \emptyset$ jer endomorfizam θ definisan sa $\theta(\Sigma_{i=0}^n a_i x^i) = \Sigma_{i=0}^n \sigma(a_i)x^i$ pripada Σ_σ.

Lema 3.4. *[26] Neka je R prsten na kome je definisan endomorfizam σ i Σ_σ skup svih ekstenzija od σ definisanih na prstenu $R[x;\sigma]$. Tada važi:*

(1) Ako je I σ-ideal u prstenu R tada je IA θ-ideal ideal prstena $A = R[x;\sigma]$ za svako $\theta \in \Sigma_\sigma$.

(2) Ako je I glavni desni σ-ideal prstena R tada je IA glavni desni θ-ideal prstena A za svako $\theta \in \Sigma_\sigma$.

(3) Ako je I glavni ljevi σ-ideal prstena R tada je AI glavni lijevi θ-ideal prstena A za svako $\theta \in \Sigma_\sigma$.

DOKAZ. Direktno po definiciji.□

Lema 3.5. *[26] Neka je R prsten na kome je definisan endomorfizam σ i neka je Σ_σ skup svih ekstenzija od σ definisanih na prstenu $R[x;\sigma]$. Tada je prsten R σ-rigidan akko je prsten $R[x;\sigma]$ θ-rigidan, za svako $\theta \in \Sigma_\sigma$. Takođe u tom slučaju važi $\sigma(e) = e$ za svaki idempotent e prstena R.*

3.3 Kosi polinomijalni prsteni nad kvazi Berovim i PQ-Berovim prstenima

Kako je desni anihilator desnog σ-ideala ideal zaključujumo da je desni ideal svakog desnog σ-ideala generisan semicentralnim idempotentom u slučaju da je R σ-kvazi Berov prsten. Ako su $e_1, e_2, ..., e_n$ lijevi semicentralni idempotenti prstena R tada je $e = e_1e_2...e_n$ idempotent prstena R.

Lema 3.6. *[26] Neka je R prsten i σ endomorfizam prstena. Tada je R desni(lijevi) σ-PQ Berov prsten akko je desni(lijevi) anihilator svakog konačno generisanog desnog (lijevog) σ-ideala prstena R generisan idempotentom u prstenu.*

DOKAZ. Dovoljno je dokazati varijantu desnog anihilatora. Pretpostavimo da je R desni σ-PQ Berov prsten i $I = \sum_{i=1}^{m} a_iR$ konačno generisan ideal prstena R. Tada je $r(I) = \cap_{i=1}^{m} e_iR$, gdje je $r_R(a_iR) = e_iR$. Prema tome $r_R(I)$ je ideal u prstenu i e_i je semicentralan idempotent prstena za svako $i = 1, ..., m$. Sada je konačno $e = e_1e_2...e_m$ idempotent prstena R i $r_R(I) = eR$. Obratno je trivijalno. □

Lema 3.7. *Neka je R σ-rigidan prsten. Ako je $e \in R$ lijevi semicentralan idempotent tada je e lijevi semicentralni idempotent u prstenu $R[x; \sigma]$.*

DOKAZ. Neka je $f = \sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i \in R[x; \sigma]$. Kako je prsten R σ-rigidan to je $\sigma(e) = e$. Iz činjenice da je e lijevi semicentralan imamo da je $ea_ie = a_ie$ za svako i. Sada je

$$fe = \sum_{i=0}^{m} a_i\sigma^i(e)x^i = \sum_{i=0}^{m} a_iex^i = \sum_{i=0}^{m} ea_iex^i = efe.$$

□

Teorema 3.15. *[26] Neka je R prsten i i σ endomorfizam u prstenu i $\sum_\sigma$ skup svih ekstenzija endomorfizma σ u prstenu $A = R[x; \sigma]$. Ako je prsten R σ-rigidan tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1) R je σ-kvazi Berov prsten.

2) A je kvazi Berov prsten.

3) A je θ-kvazi Berov za svako $\theta \in \sum_\sigma$.

Posljedica 3.16. *Neka je R prsten i σ endomorfizam, $\sum_\sigma$ skup svih ekstenzija od σ u prstenu $R[x;\sigma]$. Ako je prsten R σ-rigidan tada su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

1) R je σ-Berov.

2) $R[x;\sigma]$ je Berov.

3) $R[x;\sigma]$ je θ-kvazi Berov za svako $\theta \in \sum_\sigma$.

Posljedica 3.17. *Neka je R redukovan prsten. Tada je prsten R Berov akko je prsten $R[x]$ Berov.*

Teorema 3.18. *[26] Neka je R prsten, σ endomorfizam u prstenu i $\sum_\sigma$ skup svih ekstenzija endomorfizma σ u prstenu $R[x;\sigma]$. Ako je prsten R σ-rigidan tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

1) R je desni σ-PP prsten.

2) R je σ-PP prsten.

3) $R[x;\sigma]$ je desni PP prsten.

4) $R[x;\sigma]$ je θ-PP prsten za svako $\theta \in \sum_\sigma$.

5) $R[x;\sigma]$ je desni θ-PP prsten za svako $\theta \in \sum_\sigma$.

Posljedica 3.19. *Neka je prsten R redukovan. Tada je prsten R PP prsten akko je polinomijalni prsten $R[x]$ PP-prsten.*

3.4 Semikomutativni endomorfizmi

Teorija semikomutativnih prstena ima svoje korjene u radovima G.Shin iako terminoloki autor govori o u pseudosimetričnim prstenima. Osnovna karakterizacija semikomutativnih prstena jeste u činjenici da je semikomutativnost prstena ekvivalentna sa svojstvom da je desni anihilator svakog elementa ideal u prstenu.

U ovom dijelu R je prsten sa jedinicom.

Definicija 3.4. *Za endomorfizam α prstena R kažemo da je semikomutativan ako vrijedi:*

$$ab = 0 \Rightarrow aR\alpha(b) = 0, \ a, b \in R.$$

Za prsten R kažemo da je α-semikomutativan ako postoji semikomutativan endomorfizam α prstena R.

Primjetimo da iz definicije $ab = 0 \Rightarrow aR\alpha(b) = 0$ slijedi $a\alpha(b) = 0$. Odavde zbog semikomutativnosti prstena slijedi $aR\alpha^2(b) = 0$, odakle indukcijom izvodimo $aR\alpha^k(b) = 0$, odnosno specijalno $a\alpha^k(b) = 0$ za svaki prirodan broj k. Jasno je da je prsten R semikomutativan akko je R I_R semikomutativan, gdje I_R označava identitet prstena R. Takođe neka je $S \subset R$ potprsten α-semikomutativnog prstena R takav da je $\alpha(S) \subset S$. Tada je S takođe α-semikomutativan prsten. Sljedeći primjer pokazuje da obrat iz definicije semikomutativnog endomorfizma generalno ne važi:

Primjer 3.4.1. *Neka je $R = Z_2 \oplus Z_2$. Prsten R je semikomutativan jer je redukovan i komutativan. Neka je $\alpha : R \to R$ definisan sa $\alpha(a, b) = (b, a)$. Tada za $a = b = (1, 0)$, $aR\alpha(b) = 0$ ali je $ab = (1, 0) \neq (0, 0)$. Čak šta više prsten R nije α semikomutativan. Zaista $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$ ali je $(1, 0)(1, 1)\alpha((0, 1)) \neq (0, 0)$.*

Veza između rigidnih i semikomutativnih prstena jeste sadržaj sljedeće teoreme:

Teorema 3.20. *[34] Prsten R je α-rigidan akko je redukovan, α-semikomutativan i α je monomorfizam.*

DOKAZ. Neka je R α-rigidan prsten. Tada je jasno R α-redukovan i naravno R je monomorfizam prema [36]. Neka je $a, b \in R$ i $ab = 0$. Tada za proizvoljno $r \in R$ imamo $ar\alpha(b)\alpha(ar\alpha(b)) = ar\alpha(ba)\alpha(r)\alpha^2(b) = 0$. Iz pretpostavke da je prsten R rigidan imamo $ar\alpha(b) = 0$ pa je $aR\alpha(b) = 0$.

Obratno neka je $a\alpha(a) = 0$. Prsten R je redukovan i α-semikomutativan pa je $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$. Nadalje imamo $\alpha(a^2) = 0$, odakle slijedi $a = 0$ jer je α monomorfizam. Dakle konačno dobijamo da je R α-rigidan. □

Sljedeći primjer pokazuje da se uslovi semikomutativnosti odnosno monomorfnosti u prethodnoj teoremi ne mogu izostaviti.

Primjer 3.4.2. *Neka je*

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, a, b \in Z \right\}$$

i α *endomorfizam definisan sa* $\alpha\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.
R nije redukovan pa prema tome nije ni α*-rigidan. No prsten R jeste semikomutativan.*

Propozicija 3.4.1. *[34] Neka je R semikomutativan prsten. Tada vrijedi*

(1) $\alpha(1) = 1$ *akko je* $\alpha(e) = e$ *za svako idempotent e prstena R.*

(2) Ako je $\alpha(1) = 1$ *tada je R Abelov prsten.*

Posljedica 3.21. *Neka je R semikomutativan prsten. Tada je R Abelov prsten.*

Sljedeći primjer pokazuje kako se svojstvo semikomutativnosti prirodno prenosi sa prstena R na neke potprstene prstena matrica nad R.

Primjer 3.4.3. *Neka je R redukovan prsten. Ako je prsten R semikomutativan tada je i prsten*

$$S_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a, b, c, d \in R \right\}$$

$\overline{\alpha}$*-semikomutativan, gdje je* $\overline{\alpha}$ *ekstenzija endomorfizma* α *na prsten* S_3 *kao i ranije.*

Naravno kao posljedicu ovog tvrđenja imamo da je u slučaju redukovanog prstena prsten $S_3(R)$ semikomutativan, ali se ipak u prstenu $S_n(R)$ svojstvo semikomutativnosti generalno ne nasleđuje sa prstena R (vidjeti primjer 2.15 u [34]).

3.5 Berovost u sps-Armendarisovim prstenima

Definicija 3.5. *Za prsten R sa endomorfizmom α kažemo da je sps-Armendarisov (skew power series) ako za svako*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x;\alpha]],$$

iz $p(x)q(x) = 0$ slijedi $a_i b_j = 0$ za svako i, j.

Lako se provjerava da ako je prsten R na kome je definisan endomorfizam α α-rigidan tada je R sps-Armendarisov kao i da je klasa α-sps Armendarisovih prstena zatvorena za klasu potprstena S prstena R za koje je $\alpha(S) \subset S$.

Lema 3.8. *[34] Neka je R sps-Armendarisov prsten. Tada skupovi idempotenata prstena $R[[x;\alpha]]$ i prstena R koincidiraju. Takođe, prsten $R[[x;\alpha]]$ je Abelov.*

U mnogim tvrđenjima vidjeli smo da se neke osobine prirodno prenose sa prstena R na neku ekstenziju prstena (matričnu, polinomijalnu). Sljedeća teorema pokazuje da se u slučaju sps-Armendarisovog prstena osobina berovosti(kvazi berovosti) prenosi sa prstena R na odgovarajući prsten stepenih redova.

Teorema 3.22. *[34] Neka je R α-sps-Armendarisov prsten. Tada vrijedi*

(1) Prsten R je Berov (kvazi-Berov) akko je prsten $R[[x;\alpha]]$ Berov (kvazi-Berov).

(2) Ako je prsten $R[[x;\alpha]$ desni PP-prsten tada je R desni PP-prsten.

DOKAZ. (1) Neka je R Berov prsten i A neprazan podskup od $R[[x;\alpha]]$. Označimo sa A^* skup svi koeficijenata elemenata skupa A. Kako je A^* neprazan podskup od A to je zbog berovosti prstena R $r_R(A^*) = eR$, za neki idempotent e prstena R. Kako $e \in r_{R[[x;\alpha]]}(A)$ odmah dobijamo da je $eR[[x;\alpha]] \subset r_{R[[x;\alpha]]}(A)$.
Za $0 \neq q = b_0 + b_1 x + ... + b_t x^t + ... \in R_{R[[x;\alpha]]}(A)$ imamo $Aq = 0$ pa je prema tome

i $pq = 0$ za svako $p \in A$. Iz činjenice da je prsten R α-sps Armenadarisov imamo da $b_0, b_1, ..., b_t, ... \in r_R(A^*) = eR$. Sada postoje $c_0, c_1, ..., c_t, .. \in R$ takvi da

$$q = ec_o + ec_1x + ... + ec_tx^t + ... = e(c_0 + c_1x + ... + c_tx^t + ...) \in eR[[x;\alpha]],$$

pa je dakle $eR[[x;\alpha]] = r_{R[[x;\alpha]]}(A)$ tj. $R[[x;\alpha]]$ je Berov prsten.

Obratno pretpostavimo da je $R[[x;\alpha]]$ Berov prsten. Ako je B proizvoljan podskup prstena R imamo da je $r_{R[[x;\alpha]]}(B) = eR[[x;\alpha]]$ za neki idempotent prstena R. Nadalje je

$$r_R(B) = r_{R[[x;\alpha]]}(B) \cap R = eR[[x;\alpha]] \cap R = eR,$$

pa je dakle R Berov prsten.

Dokaz varijante kvazi Berovog prstena se neznatno razlikuje samo se za bilo koji desni ideal A prstena $R[[x;\alpha]]$ skup A^* definiše kao desni ideal generisan koeficijentima elemenata iz A.

(2) Neka je $R[[x;\alpha]]$ desni PP-prsten, i $a \in R$ proizvoljno. Tada postoji idempotent $e \in R$ takav da je $r_{R[[x;\alpha]]}(a) = eR[[x;\alpha]$ prema lemi 3.5. Dakle imamo $r_R(a) = eR$ tj. R je desni PP-prsten. □

Kao posljedicu odmah imamo:

Posljedica 3.23. *Neka je R α-rigidan prsten. Tada je R Berov akko je $R[[x;\alpha]]$ Berov prsten.*

Postoji primjer α-sps Armendarisovog prstena i desnog PQ- Berovog prstena R takvog da prsten $R[[x;\alpha]]$ nije PQ-Berov.

Primjer 3.5.1. *Neka je F polje i*

$$R = \{(a_n) \in \prod_{n=0}^{\infty} F_n |\ a_n = const \ \text{za konačno mnogo indeksa } n\}$$

koji je potprsten od $\prod_{n=0}^{\infty} F_n$ gdje je $F_n = F$.

Tada je R desni PQ-Berov prsten i I_R-rigidan, gdje je I_R identitet na R, (zbog toga i I_R sps-Armendarisov) ali prsten $R[[x; I_R]]$ nije desni PQ-Berov prsten a samim tim ni desni PP-prsten, niti lijevi PP-prsten.

Literatura

[1] S. K. Berberian, *Baer rings and Baer $\cdot$ $*$-rings*, University of Texas, rene.ma.utexas.edu.

[2] Kadison R.V, Ringrose J.R, *Fundamental of theory of operator algebras*, Academic Press, New York, London 1983.

[3] Dušan Jokanović, *Properties of Armrndariz rings and weak Armendariz rings*, Publications de l'Institut Mathématique Nouvelle série, accepted.

[4] Dušan Jokanović, *Equivalency of projections and possibility of extending $*-$ orderings in Rickart-$*$ rings*, Mathematica Montisnigri, Vol XVII (2004), 5-10.

[5] Dušan Jokanović, *Matrična reprezentacija prstena sa involucijom*, Proceedings of the Workshop devoted to Conteporary mathematics, physics and biology, septembar 2005, 59-65.

[6] Dušan Jokanović, *About polar decomposition in rings with involution*, III Congress of Mathematicians of Macedonia, Struga 2005, Book of Abstracts 24.

[7] Dušan Jokanović, *Extensions of orderings in rings with involution*, XI Congress of Mathematicians of Serbia and Montenegro, Book of Abstracts 13.

[8] Dušan Jokanović, *A note to Armendariz rings*, Serbian Mathematical Congress, Novi Sad August 2008, Book of Abstract 14.

[9] Thomas.C.Craven, Tara .I.Smith, *Ordered *-rings*, www.math.hawaii.edu.

[10] Thomas.C.Craven, *Extension of orderings on*-fields*, Procedings of AMS, Volume 123, Number 2, 397-405.

[11] I.N.Herstein, *Rings with involution*, University of Chicago Press, 1976.

[12] S.Holland, *Strong orderings of *- fields*, J.Algebra 101(1986), 16-46.

[13] Murray Marshall, **-orderings in ring with involution*, Comm. in Algebra 28(8)(2000), 1157-1173.

[14] G.F.Birkenmeier, J.K.Park, *Self adjoint ideals in Baer*-rings*, Comm. Algebra 28(9), 4259-4268 (2000).

[15] G.F.Birkenmeier, J.K.Park, J.Y.Kim, *Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings*, Journal of Pure and Applied Algebra 159(2001), 25-42.

[16] G.F.Birkenme,Triangularier, J.K.Park, *Triangular matrix representations of ring extensions*, Journal of Algebra 265(2003), 457-477.

[17] G.F.Birkenmeier, J.K.Park, J.Y.Kim, *Quasi-Baer ring extensions and biregular rings*, Bull.Austral.Math.Soc. 61(2000), 39-52.

[18] G.F.Birkenmeier, J.K.Park, J.Y.Kim, *A sheaf reprezentation of quasi-Baer rings*, Journal of Pure and Applied Algebra 146(2000), 209-223.

[19] G.F.Birkenmeier,J.K.Park,J.Y.Kim, *Triangular matrix reprezentation of semiprimary rings*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol 1, No 2(2002), 123-131.

[20] G.F.Birkenmeier,J.K.Park,J.Y.Kim, *Pricipally quasi-Baer rings*, Comm.Algebra 29(2001), 639-660.

[21] S.H.Sun, *Duality on Compact prime ringed spaces*, J.Algebra 1994, 169, 805-816.

[22] Zhongkoi Liu, *A note to principally quasi-Baer rings*, Communications in Algebra, Vol30, 3885-3890, 2002.

[23] A.Moussavi, Haj.Javadi, E.Hashemi, *Generalized quasi-Baer rings*, Communications in Algebra, Vol 33, 2115-2128, 2005.

[24] T. K. Kwak, *Generalized Baer rings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,1-11, 2006.

[25] A. R. Nasr-Irfani, A. Moussavi, *On classical quotient rings of skew Armendariz rings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Research article, Vol. 2007,Article ID 61549, 7 pages.

[26] Juncheol Han, *Skew Polynomial rings over σ-quasi Baer and σ-principally quasi-Baer rings*,J.Korean Math. Soc 42(2005)No 1, 53-63.

[27] Weixsing Chen, Wenting Tong, *On skew Armendariz rings and rigid rings*, Houston Journal of Mathematics, Vol 33, No 2,2007.

[28] Lenqun Ouyang, *Extensions of generalized $\alpha-$ rigid rings*, International Electronic Journal of Algebra, Vol 3(2008), 103-116.

[29] L'Moufdal Ben Yakoub, Mohamed Louzari, *Ore extensions of principally quasi-Baer rings.*

[30] Brown. K. A, *The singular ideals of group rings*, Quart. J. Math, Oxford 1977, 28 41-60.

[31] M. R. Rege, S. Chhawchharia, *Armendariz rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci 73 (1997), 14-17.

[32] J. Krempa, *Some examples of reduced rings*, Algebra Colloq. 3(4)(1996), 289-330.

[33] T. K. Lee, Q. Zhou, *Armendariz and reduced rings*, Comm Algebra 32(6)(2004), 2287-2290.

[34] Muhitin Baser, Abdullah Harmanci, Tai Teun Kwak, *Generalized Semicommutative rings and their extensions*, Bull. Korean Math. Soc. 45(2008), No 2, pp.2 85-297.

[35] Y. Hirano, *On annihilator ideals of polynomial ring over a noncommutative ring*, J. Pure and Appl. Algebra 151(3)(2000), 105-122.

[36] C. Y. Hong, N. K. Kim, T. K. Kwak, *Ore extensions of Baer and p.p rings*, J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), No 3, 399-412.