S. PREŠIĆ

PRILOG TEORIJI ALGEBARSKIH STRUKTURA

I. UVOD

Uporedo sa razvitkom starih grana algebre /teorija grupa, prstena, polja, linearne algebre i drugih/ u novije vreme naglo se razvijaju i novije algebarske teorije / teorija neasocijativnih prstena, teorija struktura, kategorija, semigrupa, kvazigrupa, topološka algebra, diferencijalna algebra/.

Mnoge od tih teorija prema svome razvitku izašle su iz okvira algebre i postale teorije koje povezuju algebru, topologiju, funkcionalnu analizu, geometriju.

Na razvitak algebarskih teorija jednu od najznačajnijih uloga odigrala je dvotomna knjiga Moderne Algebra od B. L. van der Waerden-a /1930, 1931 god./.

Jedna od novijih oblasti algebre koja se počela snažno razvijati radovima G. Birkhoff-a ([1], [3]), K. Shoda [2], Maljceva [4] i drugih jeste teorija univerzalnih algebri [7].

Ova teorija je primila u svoj domen proučavanja mnoge zajedničke nerešene probleme raznih drugih algebarskih teorija. U takve probleme dolaze, na primer, konstrukcija odredjenih algebarskih struktura, ispitivanje broja neizomorfnih algebarskih struktura, ispitivanje veze izmedju algebarske strukture i njene grupe automorfizama.

Ovaj rad je prilog proučavanju baš tih pitanja. Rad je podeljen na uvod i tri glave.

Neki od rezultata u ovom radu su već štampani i referisani u stranim referativnim časopisima ([17], [18]).

II. JEDAN NAČIN KONSTRUKCIJE RELACIJA I OPERACIJA

2.1. U ovoj glavi razmatraćemo jedan način konstrukcije relacija i operacija nepraznog skupa E koje zadovoljavaju odredjene zakone. S tim u vezi navodimo i jedan način konstrukcije multigrupoida [5], [14], [15] koji zadovoljavaju unapred date zakone.

Prethodno uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.1.1 Za ternarnu relaciju r skupa E kažemo da je asocijativna relacija skupa E ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &1^\circ \ \big((x,y,a)r,\ \ (y,z,b)r,\ \ (a,z,c)r\big) \Rightarrow (x,b,c)r \\ &2^\circ \ \big((x,y,a)r,\ \ (y,z,b)r,\ \ (x,b,c)r\big) \Rightarrow (a,z,c)r. \end{aligned}$$

Ako je u skupu E definisana operacija $\cdot$ tako da je $(E,\cdot)$ semigrupa onda je ternarna relacija r definisana na sledeći način:

$$(2)\qquad (x,y,z)r \Leftrightarrow x.y = z$$

jedna asocijativna relacija skupa E.

Zaista:

$$\big((x,y,a)r,\ (y,z,b)r,\ (a,z,c)r\big) \Rightarrow \big(x.y = a,\ y.z = b,\ a.z = c\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(y.z = b,\ (x.y).z = c\big) \Rightarrow \big(y.z = b,\ x.(y.z) = c\big) \Rightarrow (x.b) = c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x,b,c)r,$$

a na sličan način

$$\big((x,y,a)r,\ (y,z,b)r,\ (x,b,c)r\big) \Rightarrow (a,z,c)r,$$

pa je r asocijativna relacija skupa E.

Ako asocijativna relacija r skupa E ispunjava i uslov

(3) za svako $(x,y)\in E$ postoji jedinstveno $z\in E$, tako da je $(x,y,z)r$,

onda pomoću (2) definisana operacija $\cdot$ je asocijativna operacija i $(E, \cdot)$ je semigrupa.

U slučaju kad relacija r ne ispunjava uslov (3), operacija uvedena pomoću (1) ne mora biti jednoznačna i ne mora biti definisana na čitavom skupu E.

Radi konstruisanja svih asocijativnih relacija skupa E^3 sledeću operaciju ω dužine 3:

$$(4)\quad \big((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)\big)\omega = \begin{cases} (x_1,y_1,z_1) & \text{ako } x_1=x_2=x_3,\ y_1=y_2=y_3,\ z_1=z_2=z_3 \\ (x_1,z_2,z_3) & \text{ako } y_1=x_2,\ z_1=x_3,\ y_2=y_3 \\ (z_1,y_2,z_3) & \text{ako } x_1=x_3,\ y_1=x_2,\ z_2=y_3 \end{cases}$$

Ova ternarna operacija nije definisana na čitavom E^3. Prema navedenoj definiciji je

$$\big((x,y,z),\ (x,y,z),\ (x,y,z)\big)\omega = (x,y,z)$$

$$(5)\quad \big((x,y,a),\ (y,z,b),\ (a,z,c)\big)\omega = (x,b,c)$$

$$\big((x,y,a),\ (y,z,b),\ (x,b,c)\big)\omega = (a,z,c)\ .$$

Za operaciju ω predpostavljamo da je proširena i na $P(E^3)$, na sledeći način:

Ako su $L, M, N \subset E^3$ onda je

$$(6)\quad (L,M,N)\omega = \{\ (l,m,n)\omega \mid l\in L,\ m\in M,\ n\in N\ \}.$$

Ova operacija je unutrašnja operacija skupa $P(E^3)$.

Neka je r bilo koja ternarna relacija skupa E /odnosno podskup skupa E^3/. Sledeći stav daje potreban i dovoljan uslov da relacija r bude asocijativna relacija.

Stav 2.1.2 Ternarna relacija r skupa E je asocijativna relacija ako i samo ako je ispunjen uslov

(7) $$(r,r,r)\omega = r$$

Dokaz. Pretpostavimo da je r asocijativna relacija skupa E. Prema (4) je $(r,r,r)\omega \supset r$. Medjutim, prema (5) i prema definiciji 2.1.1 zaključujemo da je $(r,r,r)\omega = r$, pa je uslov (7) ispunjen.

Obrnuto, ako je ispunjen uslov (7) onda

$$\big((x,y,a)r,\ (y,z,b)r,\ (a,z,c)r\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big[\big((x,y,a),\ (y,z,b),\ (a,z,c)\big)\omega\Big] r \text{ , odnosno prema (5)}$$
$$(x,b,c)r.$$

Na sličan način je

$$\big((x,y,a)r,\ (y,z,b)r,\ (x,b,c)r\big) \Rightarrow (a,z,c)r,$$

pa je ispunjen uslov (1), odnosno relacija r jeste asocijativna relacija.

Na taj način je stav dokazan.

Označimo sa $R(E)$ $(\equiv P(E^3))$ skup svih ternarnih relacija skupa E, a sa $A(E)$ skup svih asocijativnih relacija toga skupa. Neka je $r \in R(E)$ bilo koja ternarna relacija skupa E. Niz $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uvodimo na sledeći način

(8) $$r_1 = r,\quad r_2 = (r_1,r_1,r_1)\omega\ ,\ \ldots,\ r_n = (r_{n-1},r_{n-1},r_{n-1})\omega, \ldots$$

Očigledno važi uslov

$$r_1 \subset r_2 \subset r_3 \subset \ldots \subset r_{n-1} \subset r_n \subset \ldots$$

Prema stavu 2.1.2, ako je $r \in A(E)$ onda je $r_n = r$ $(\forall\ n \in N)$.

Važi sledeći stav.

Stav 2.1.3 Ako je $r \in R(E)$ proizvoljna relacija onda je

(9) $$r_a = \bigcup_{n\in N} r_n$$

asocijativna relacija skupa E. Obrnuto, ako je $r_a \in A(E)$ onda postoji $r \in R(E)$ tako da važi (9).

Relacija r_a, dobijena prema (9) je najfinija relacija skupa E koja sadrži relaciju r.

Dokaz. Neka je $r \in R(E)$ i neka je r_a relacija uvedena pomoću (9). Ako $(x,y,a)r_a$, $(y,z,b)r_a$, $(a,z,c)r_a$ onda prema (9) za izvestan prirodan broj n je

$$(x,y,a)\, r_n, \quad (y,z,b)r_n, \quad (a,z,c)r_n .$$

Pošto je $r_{n+1} = (r_n, r_n, r_n)\omega$ i pošto je

$$\big((x,y,a),\ (y,z,b)\ ,\ (a,z,c)\big)\omega = (x,b,c)$$

prema (5), to je $(x,b,c)r_{n+1}$, odnosno $(x,b,c)r_a$. Na taj način r_a ispunjava uslov (1) 1^o. Slično, ispunjen je i uslov (1) 2^o. Stoga je r_a asocijativna relacija.

Obrnuto, neka je $r_a \in A(E)$. Uzimanjem $r = r_a$, na osnovu stava 2.1.2 i matematičke indukcije ($n \to n+1$) zaključujemo da je $\bigcup_{n\in N} r_n = \bigcup_{n\in N} r_a = r_a$, pa važi (9).

Da bismo dokazali da je relacija r_a najfinija relacija iz skupa A(E) koja sadrži relaciju $r \in R(E)$ predpostavimo da je $r' \in A(E)$ bilo koja relacija koja sadrži relaciju r i dokažimo da je $r' \supset r_a$.

Operacija ω uvedena pomoću (5) i (6) ima ovu osobinu

$$(L \supset L',\ M \supset M',\ N \supset N') \Rightarrow (L,M,N)\omega \supset (L',M',N')\omega$$

$$(L,M,N,L',M',N') \in R(E)$$

Koristeći ovu osobinu zaključujemo da $r' \supset r = (r',r',r')\omega \supset (r,r,r)\omega$ odnosno $r' \supset r_2$. Slično iz $r' \supset r_2$ dobijamo

$(r',r',r')\omega \supset (r_2,r_2,r_2)$ odnosno $r' \supset r_3$, x na osnovu definicije niza $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$. Indukcijom ($n \to n+1$) neposredno sleduje $r' \supset r_n$ ($\forall\, n \in N$), a odavde $r' \supset \bigcup_{n\in N} r_n$, tj. $r' \supset r_a$.

Tako je stav u potpunosti dokazan.

Dokazani stav s jedne strane daje vezu skupova $A(E)$i $R(E)$, a s druge strane daje mogućnost formiranja svih asocijativnih relacija skupa E, uključujući i one asocijativne relacije kojima preko (2) odgovarajuća operacija . ispunjava uslov (3). Na taj način obrazac (9) obuhvata i sve asocijativne operacije skupa E, odnosno sve semigrupe (E, .) .

Primer 2.1.4 Neka je $E=\{a,b,c\}$ i neka je r sledeća ternarna relacija $r=\{(b,b,c), (c,b,a), (a,b,b)\}$. Tada je $r_2=(r,r,r)\omega=\{(b,b,c),(c,b,a),(a,b,b),(b,c,a),(c,c,b),(a,c,c)\}$, $r_3=(r_2,r_2,r_2)\omega=\{(b,b,c),(c,b,a),(a,b,b),(b,c,a),(c,c,b),(a,c,c),$ $(b,a,b),(c,a,c),(a,a,a)\}$. Dalje je $r_4=r_3$, i uopšte $r_n=r_3$ za $n \geqslant 3$. Prema tome je $\bigcup_{n\in N} r_n = r_3$. Znači, najfinija asocijativna relacija koja sadrži relaciju r je relacija r_3.

Odgovarajuća binarna operacija (uvedena pomoću (2)) ima sledeću Cayley-evu tablicu

.	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Dobijena operacija je očigledno asocijativna, jer je (E,.) ciklična grupa.

Postupkom, upotrebljenim za dokaz stava 2.1.3, može se dati rešenje funkcionalne jednačine

$$(10) \qquad f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z)) \qquad (x,y,f(x,y) \in E)$$

u skupu mnogoznačnih funkcija $f(x,y)$.

Zaista, neka je r proizvoljna ternarna relacija skupa E sledećeg oblika

(11) $$r = \{ (x,y,F(x,y)) \mid x,y \in E \}$$

gde je $F(x,y)$ proizvoljna funkcija koja preslikava E^2 u E. Pomoću obrasca (9) dolazimo do relacije

(12) $$r_a = \{ (x,y,f(x,y)) \mid x,y \in E \} ,$$

gde je $f(x,y)$ izvesna mnogoznačna ili jednoznačna funkcija koja preslikava E^2 u E.

Dokazaćemo da je $f(x,y)$ rešenje jednačine (10).

Neka su x, y, z bilo koji elementi skupa E i neka je $c \in f(f(x,y),z)$. Tada za neko $a \in E$ je $(x,y,a)r_a$, $(a,z,c)r_a$. Slično za neko $b \in E$ je $(y,z,b)r_a$. Iz $(x,y,a)r_a$, $(a,z,c)r_a$, $(y,z,b)r_a$ prema definiciji 2.1.1 dobijamo $(x,b,c)r_a$, tj. $c \in f(x,b)$ Pošto je $b \in f(y,z)$ to iz $c \in f(x,b)$, $b \in f(y,z)$ dobijamo $c \in f(x,f(y,z))$. Prema tome je

$$f(f(x,y),z) \subset f(x, f(y,z)) \qquad (\forall x,y,z \in E).$$

Na sličan način korišćenjem uslova 2° iz definicije 2.1.1 dolazimo do nejednakosti

$$f(f(x,y),z) \supset f(x, f(y,z)) \qquad (\forall x,y,z \in E).$$

Na osnovu dobijenih nejednakosti zaključujemo da je $f(x,y)$ rešenje jednačine (10) za svako x, y, z iz E.

Primećujemo da svakom rešenju $f(x,y)$ jednačine (10) odgovara jedna biharna /mnogoznačna ili jednoznačna/ operacija $\cdot$ $(x \cdot y = f(x,y))$ skupa E, takva da je $(E, \cdot)$ asocijativan multigrupoid.

Prikazanim postupkom ne dobija se opšte rešenje jednačine (10), odnosno ne iscrpljuju se svi asocijativni multigrupoidi.

Dobijaju se samo oni kojima je korespodentna relacija r $((x,y,z)r \Leftrightarrow z \in x \cdot y)$ asocijativna relacija.

Tako, multigrupoid

	1	2	3
1	1	{1,2}	{1,3}
2	{1,2}	2	{2,3}
3	{1,3}	{2,3}	3

pripada klasi asocijativnih multigrupoida, dok njegova korespodentna relacija nije asocijativna kao što vidimo iz toga što je (1,2,1)r, (2,3,2)r, (1,3,3)r, a nije (1,2,3)r, što bi trebalo da bude u slučaju da je r asocijativna relacija.

2.2. Prikazan metod konstruisanja multigrupoida koji zadovoljavaju zakon $(xy)z = x(yz)$ može se proširiti na konstrukciju multigrupoida koji zadovoljavaju umesto asocijativnog zakona razne druge zakone.

Pokazaćemo prethodno konstrukciju multigrupoida koji zadovoljavaju jedan od sledećih zakona

(13)

1. Zakon Stein-a [9] , $a(ab) = ba$.
2. Zakon Schröder-a [10] , $a(ab) = (ab)b$.
3. Zakon ciklične asocijativnosti [11] , $a(bc) = c(ab)$.
4. Zakon Abel-Grassmann-a [12] , $a(bc) = c(ba)$.
5. Zakon desne tranzitivnosti , $(ba)(ca) = (bc)a$.
6. Zakon bisimetrije /entropije/ [13] , $(ab)(cd) = (ac)(bd)$.

U ovom slučaju, analogno asocijativnoj relaciji za slučaj zakona $a(bc) = (ab)c$, uvodimo redom jednu od sledećih relacija r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 skupa E koje treba da ispune u saglasnosti sa korespodentnim zakonom /od 1 do 6/ sledeće uslove

(14)

1. $[(a,b,c)r_1,\ (a,c,d)r_1] \Rightarrow (b,a,d)r_1$ i
$[(a,b,c)r_1,\ (b,a,d)r_1] \Rightarrow (a,c,d)r_1$.

2. $[(a,b,c)r_2,\ (a,c,d)r_2] \Rightarrow (c,b,d)r_2$ i
$[(a,b,c)r_2,\ (c,b,d)r_2] \Rightarrow (a,c,d)r_2$.

3. $[(b,c,d)r_3,\ (a,d,e)r_3,\ (a,b,f)r_3] \Rightarrow (c,f,e)r_3$ i
$[(b,c,d)r_3,\ (a,b,f)r_3,\ (c,f,e)r_3] \Rightarrow (a,d,e)r_3$.

4. $[(b,c,d)r_4,\ (a,d,e)r_4,\ (b,a,f)r_4] \Rightarrow (c,f,e)r_4$ i
$[(b,c,d)r_4,\ (b,a,f)r_4,\ (c,f,e)r_4] \Rightarrow (a,d,e)r_4$.

5. $[(b,a,d)r_5,\ (c,a,f)r_5,\ (b,c,e)r_5,\ (d,f,g)r_5] \Rightarrow (e,a,g)r_5$
$[(b,a,d)r_5,\ (c,a,f)r_5,\ (b,c,e)r_5,\ (e,a,g)r_5] \Rightarrow (d,f,g)r_5$

6. $[(a,b,e)r_6,\ (c,d,f)r_6,\ (a,c,g)r_6,\ (b,d,h)r_6,\ (e,f,i)r_6]$
$\Rightarrow (g,h,i)r_6$ i
$[(a,b,e)r_6,\ (c,d,f)r_6,\ (a,c,g)r_6,\ (b,d,h)r_6,\ (g,h,i)r_6]$
$\Rightarrow (e,f,i)r_6$.

Način dobijanja ovih uslova objasnićemo na primeru relacije r_4 koja odgovara zakonu 4 /Zakon Abel-Grassmann-a/.

Ako grupoid $(E, .)$ ispunjava zakon 4 onda njegova operacija ispunjava sledeće uslove

$$(b.c = d,\ \ a.d = e,\ \ b.a = f) \Rightarrow c.f = e$$

$$(b.c = d,\ \ b.a = f,\ \ c.f = e) \Rightarrow a.d = e\ ,$$

što je evidentno.

Korespodentna relacija $r_4\big(\,(x,y,z)r_4 \Leftrightarrow z = x.y\,\big)$,

onda zadovoljava uslove

$$\big((b,c,d)r_4,\ (a,d,e)r_4,\ (b,a,f)r_4\big) \Rightarrow \ (c,f,e)r_4$$

$$\big((b,c,d)r_4,\ (b,a,f)r_4,\ (c,b,e)r_4\big) \Rightarrow \ (a,d,e)r_4$$

odnosno uslove (14) 4. Primećujemo da ako multigrupoid zadovoljava zakon $a(bc) = c(ba)$, onda njegova korespodentna relacija r_4($(x,y,z)r_4 \Leftrightarrow z \in x.y$) ne mora da zadovolji navedene uslove (14) 4.

Na sličan način se dobijaju i uslovi za ostale relacije r_1, r_2, r_3, r_5 i r_6.

Svakoj od navedenih relacija dodelićemo po jednu operaciju ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 skupa E^3 čije su dužine redom 2, 2, 3, 3, 4, 5. Ove operacije su definisane u skladu sa uslovima koje treba da zadovolje relacije r_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$).

Tako, na primer, operacija ω_1 je definisana na sledeći način

$$\big((a,b,c),\ (a,c,d)\big)\omega_1 = (b,a,d)$$

$$\big((a,b,c),\ (b,a,d)\big)\omega_1 = (a,c,d)$$

$$\big((a,b,c),\ (a,b,c)\big)\omega_1 = (a,b,c),$$

a na sličan način su definisane i ostale operacije ω_i $(i=1,2,\ldots$

Sve su definisane tako da kad se izvode nad jednakim uredjenim trojkama kao rezultat daju tu uredjenu trojku.

Operacije ω_i proširujemo i na sve neprazne podskupove skupa E^3.

Ako je r bilo koji podskup skupa E^3 onda $(r_1, r_2, \ldots r_{k_i})\omega_i$ gde je k_i dužina operacije ω_i i gde je $r_1 = r_2 = \ldots = r_{k_i} = r$ označavamo ovako $r\,\omega_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$).

Važi sledeći stav.

<u>Stav 2.2.1</u> Neka je i jedan od brojeva skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 6\}$.

Ako je $r \in R(E)$ proizvoljna ternarna relacija skupa E, onda relacija

(15) $$\bar{r}_i = \bigcup_{n\in N} r_n ,$$

gde je $r_1 = r$, $r_2 = r\omega_i$, ..., $r_n = r_{n-1}{}^{\omega_i}$, ... , zadovoljava zakon (14)(i).

Obrnuto, ako je $\bar{r}_i$ bilo koja relacija skupa E koja zadovoljava zakon (14) i onda postoji takva relacija r skupa E da važi (15).

Relacija $\bar{r}_i$ dobijema obrascem (15) je najfinija /najmanja/ relacija skupa E koja sadrži relaciju r.

Dokaz ovog stava je sličan dokazu stava 2.1.3 pa ga ne navodimo. Stav važi za sve brojeve skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ovaj stav otkriva mogućnost formiranja svih relacija $r_1, r_2, \ldots, r_6$ skupa E koje zadovoljavaju uslove (14)(1), (14)(2), ..., (14)(6).

U slučaju kada $\bar{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ ispunjava uslov

$$\forall x,y \in E, \quad \exists z \in E, \quad (x,y,z)\bar{r}_i$$

korespodentna operacija $x.y = z \Leftrightarrow (x,y,z)\ \bar{r}_i$ skupa E ispunjava uslov (13)(i) $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Ovo je svakako, u slučaju kada r u obrascu (15) ispunjava navedeni uslov.

Na taj način obrazac (15) daje i mogućnost formiranja multigrupoida koji zadovoljavaju zakone (13)(i) $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

2.3. Navedeni način konstruisanja relacija koje odgovaraju operacijama koje zadovoljavaju odredjene algebarske zakone može se proširiti i na konstrukciju relacija koje odgovaraju sistemu koji se sastoji iz jednog skupa i više operacija.

Pre formulisanja opšteg rezultata /stav 2.4.2/ prikazaćemo konstrukciju relacija s i m koje redom odgovaraju operacijama + i . skupa E koje su vezane zakonom

(16) $$(a+b).\,c = a\,.\,c + b\,.\,c \qquad (\forall a,b,c \in E).$$

Zakon (16) može se i na ovaj način karakterisati.

(17)
a/ Ako je $a+b=d$, $a.c=e$, $b.c=f$, $e+f=g$ onda je $d.c=g$

b/ Ako je $a+b=d$, $a.c=e$, $b.c=f$, $d.c=g$ onda je $e+f=g$.

U skladu sa ovim uslovima relacije s i m treba da zadovolje sledeće uslove

(18)
a/ $\big((a,b,d)s,\ (e,f,g)s,\ (a,c,e)m,\ (b,c,f)m\big) \Rightarrow (d,c,g)m$,

b/ $\big((a,b,d)s,\ (a,c,e)m,\ (b,c,f)m,\ (d,c,g)m\big) \Rightarrow (e,f,g)s$.

Radi konstruisanja svih ternarnih relacija s i m skupa E koje zadovoljavaju zakone (18) u skupu E^3 definišemo dve operacije ω_1 i ω_2 dužina 4 na sledeći način

1° $\big((a,b,d),\ (e,f,g),\ (a,c,e),\ (b,c,f)\big)\omega_1 = (d,c,g)$

2° $\big((p,q,r),\ (p,q,r),\ (a,b,c),\ (a,b,c)\big)\omega_1 = (a,b,c)$

3° $\big((a,b,d),\ (a,c,e),\ (b,c,f),\ (d,c,g)\big)\omega_2 = (e,f,g)$

4° $\big((a,b,c),\ (p,q,r),\ (p,q,r),\ (p,q,r)\big)\omega_2 = (a,b,c)$

$(\forall a,b,c,d,e,f,g,p,q,r \in E)$.

Za operacije ω_1 i ω_2 predpostavljamo da su proširene i na sve neprazne podskupove skupa E^3, odnosno na ternarne relacije skupa E.

Neka su s i m dve proizvoljne ternarne relacije skupa E. Nizove $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$; $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$, uvodimo na sledeći način

$$s_1 = s,\ s_2 = (s_1, m_1, m_1, m_1)\omega_2, \ldots, s_n = (s_{n-1}, m_{n-1}, m_{n-1}, m_{n-1})\omega_2, \ldots$$

$$m_1 = m,\ m_2 = (s_1, s_1, m_1, m_1)\omega_1, \ldots, m_n = (s_{n-1}, s_{n-1}, m_{n-1}, m_{n-1})\omega_1, \ldots$$

Tada relacija

(20) $\bar{s} = \bigcup_{i\in N} s_i$, $\bar{m} = \bigcup_{i\in N} m_i$

su najfinije ternarne relacije skupa E koje obuhvataju relacije s i m respektivno, i koje zadovoljavaju zakone (18).

Obrnuto, formulama (20) su obuhvaćene sve ternarne relacije s i m skupa E koje zadovoljavaju zakone (18).

Ovaj stav je specijalan slučaj opšteg rezultata /stav 2.4.2/ koji ćemo u nastavku dokazati.

Zbog toga dokaz ovog specijalnog stava ne navodimo.

2.4. U ovom delu daćemo generalizaciju rezultata dobijenih u 2.1, 2.2 i 2.3, odnosno pokazaćemo jedan način konstrukcije relacija /dužina > 1/ jednog skupa E koje zadovoljavaju odredjene zakone. Ti zakoni obuhvataju posmatrane zakone relacija u prethodnim odeljcima kao specijalne slučajeve. Uvedene korespodentne operacije w_i uopštavaju operacije w_i posmatrane u 2.1, 2.2 i 2.3. Operacije w_i su, u stvari, generalizacija poznate operacije množenja uredjenih parova $\big((a,b)\cdot(b,c)=(a,c)\big)$, koja se prirodno javlja kod gradjenja tranzitivnih relacija 16 .

Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ relacije skupa E, dužina redom $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ većih od 1.

Pretpostavimo da svaka od relacija r_i /$1 \leq i \leq \ell$/ zadovoljava izvestan broj /r_i'/ zakona oblika

$$\text{(21)}\quad \begin{gathered}\Big((x^{(1)}_{\nu,1}, x^{(1)}_{\nu,2}, \ldots, x^{(1)}_{\nu,d_{i_1}}) r_{i_1}, (x^{(2)}_{\nu,1}, x^{(2)}_{\nu,1}, \ldots, x^{(2)}_{\nu,d_{i_2}}) r_{i_2}, \ldots \\ (x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu,1}, x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu,2}, \ldots, x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu,d_{i_{k(\nu)}}}) r_{i_{k(\nu)}}\Big) \Rightarrow (y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \ldots, y_{\nu,d_i}) r_i \\ (\nu = 1,2,\ldots,r_i';\ k(\nu)\in N; \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \{1,2,\ldots,\ell\}),\end{gathered}$$

gde simbole $x^{n}_{i,j}$, $y_{\nu,j}$, koji ne moraju biti svi medjusobno različiti, treba na sve moguće načine zameniti elementima iz E.

Za skup $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ pretpostavljamo da je dobro uredjen relacimom $\leq$ tako da je $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \ldots \leq r_\ell$ i da u (21)

relacije $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_{k(\nu)}}$ zadovoljavaju uslov
$r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \ldots \leq r_{i_{k(\nu)}}$.

Uvedena je ta pretpostavka radi jasnijeg formulisanja osnovnih rezultata. Ona ne utiče na generalnost dobijenih rezultata.

Svaki od zakona medju relacijama koje smo posmatrali u ranijim odeljcima je izvestan zakon oblika (21).

Radi formiranja svih relacija $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ skupa E koje zadovoljavaju zakone (21), svakoj od tih relacija dodeljujemo redom po jednu operaciju $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\ell$ skupa $E^2 \cup E^3 \cup \ldots \bigcup\limits_{n \geq 2} E^n \equiv F$, u stvari preslikavanje dela skupa $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} F^{(\nu)}$ u skup F.

Tako, preslikavanje ω_i koje odgovara relaciji r_{i_2} definišemo na sledeći način

$$(22) \quad 1^\circ \ \left((x^{(1)}_{\nu,1}, x^{(1)}_{\nu 2}, \ldots, x^{(1)}_{\nu, d_i}), \ldots, x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu 1}, x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu, 2}, \ldots, x^{(i_{k(\nu)})}_{\nu d_{i_{k(\nu)}}} \right)\right) = (y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \ldots, y_{\nu, d_i}) \quad /\nu = 1, 2, \ldots, r_i'/$$

gde simbole $x^{(\kappa)}_{i,j}$, $y_{\nu,j}$ treba na sve moguće načine zameniti elementima iz E.

2° Ako su u formuli 1° sve n-torke koje prema (21) odgovaraju istoj relaciji jednake izmedju sebe onda je rezultat operacije ω_i u tom slučaju jednak onoj d_i-torki koja odgovara relaciji r_i.

Navodimo, radi ilustracije, sledeći primer.

<u>Primer 2.4.1</u> Neka su r_1 i r_2 relacije skupa E redom dužina 2 i 3 koje zadovoljavaju sledeće zakone

$$\big((a,b)r_1, (b,c)r_1, (a,c,d)r_2\big) \Rightarrow (a,d)r_1$$

$$\big((a,b)r_1, (b,c,a)r_2\big) \Rightarrow (c,a)r_1$$

$$\big((a,b)r_1, (b,a,c)r_2, (a,c,d)r_2\big) \Rightarrow (a,b,d)r_2$$

Preslikavanja ω_1 i ω_2 su u ovom slučaju definisana na sledeći način

$$1^\circ \quad ((a,b),\ (b,c),\ (a,c,d))\,\omega_1 = (a,d)$$
$$((a,b),\ (b,c,a))\,\omega_1 = (c,a)$$
$$((a,b),\ (b,a,c),\ (a,c,d))\,\omega_2 = (a,b,d) \quad (\forall a,b,c,d \in E)$$

$$2^\circ \quad ((a,b),\ (a,b),\ (p,q,r))\,\omega_1 = (a,b)$$
$$((a,b),\ (p,q,r))\,\omega_1 = (a,b)$$
$$((a,b),\ (p,q,r),\ (p,q,r))\,\omega_2 = (p,q,r) \quad (\forall a,b,p,q,r \in E).$$

Za svako od preslikavanja ω predpostavljamo da je, kao za slučaj običnih algebarskih operacija, prošireno i na sve neprazne podskupove skupa F. Tako za slučaj prethodnog primera je, na primer,

$$(D_1,\ D_2,\ T_1)\,\omega = \{(u_1,u_2,u_3)\omega \ /\ u_1 \in D_1,\ u_2 \in D_2,\ u_3 \in T_1\}$$

gde su D_1 i D_2 izvesni skupovi uredjenih parova skupa E, a T_1 je izvestan skup uredjenih trojki istog skupa.

Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ proizvoljne relacije skupa E redom dužina $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$. Nizove $r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_\ell^{(n)}$ uvodimo na sledeći način

$$r_i^{(1)} = r_i$$
$$(23) \qquad r_i^{(n+1)} = \bigcup_{\nu=1} \left(r_{i_1}^{(n)},\ r_{i_2}^{(n)},\ \ldots,\ r_{i_{k(\nu)}}^{(n)} \right)$$

$/\ i = 1, 2, \ldots,\ ;\ n \in N/.$

Sada važi sledeći stav.

<u>Stav 2.4.2</u> Ako su $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ proizvoljne relacije skupa E redom dužina $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ onda relacije $\bar r_1, \bar r_2, \ldots, \bar r_\ell$ definisane na sledeći način

$$(24) \qquad \bar r_i = \bigcup_{n \in N} r_i^{(n)} \qquad /\ i = 1, 2, \ldots, \ell\ /$$

su najfinije relacije skupa E koje obuhvataju relacije $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ /tj $\bar r_i \supset r_i$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ / i koje zadovoljavaju sve zakone (21).

Obrnuto, sve relacije $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ skupa E koje zadovoljavaju sve zakone (21) mogu se dobiti obrascem (24).

Dokaz. Ako su $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ izvesne relacije skupa E redom dužina $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ onda na osnovu (22) 2° je

$$(25) \qquad r_i = r_i^{(1)} \subset r_i^{(2)} \subset \ldots \subset r_i^{(n)} \subset r_i^{(n+1)} \subset \ldots$$

$$/i = 1, 2, \ldots, \ell /.$$

Neka su, prvo $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ bilo koje relacije skupa E odgovarajućih dužina. Tada relacije $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_\ell$ dobijene pomoću (24) su, takodje, redom dužina $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$.

Ako je za neke elemente $x_{\nu,j}^{(p)}$ skupa E

$$\left(x_{\nu,1}^{(1)}, \ldots, x_{\nu,d_{i_1}}^{(1)}\right) \bar{r}_{i_1}, \ldots, \left(x_{\nu,1}^{(i_{k(\nu)})}, \ldots, x_{i,d_{i_{k(\nu)}}}^{(i_{k(\nu)})}\right) \bar{r}_{i_{k(\nu)}},$$

onda bar za jedan prirodan broj n važi

$$\left(x_{\nu,1}^{(1)}, \ldots, x_{\nu,d_{i_1}}^{(1)}\right) r_{i_1}, \ldots, \left(x_{\nu,1}^{(i_{k(\nu)})}, \ldots, x_{i,d_{i_{k(\nu)}}}^{(i_{k(\nu)})}\right) r_{i_{k(\nu)}},$$

pa je, na osnovu definicije preslikavanja ω_i i na osnovu činjenice da je $r_i^{(n+1)} \subset \bar{r}_i$,

$$(y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \ldots, y_{\nu,d_i}) \bar{r}_i .$$

Navedeno rasudjivanje važi za bilo koji $i \in \{1,2,\ldots,\ell\}$ i bilo koji $\nu \in \{1, 2, \ldots, r_i'\}$.

Stoga relacije $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_\ell$ zadovoljavaju svaki od zakona (21) i $\bar{r}_1 \supset r_1$, $\bar{r}_2 \supset r_2, \ldots, \bar{r} \supset r$.

Ako su $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\ell$ bilo koje relacije skupa E koje zadovoljavaju zakone (21) i sadrže redom relacije $r_1, r_2, \ldots, r_\ell$ onda one sadrže i relacije $r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, \ldots, r_\ell^{(n)}$ $/n \in N/$.

Stoga $\rho_i \supset \bar{r}_i$ $/i = 1, 2, \ldots, \ell /$, pa su $\bar{r}_i$ najfinije /najmanje/ relacije skupa E koje sadrže relacije r_i i zadovoljavaju zakone (21).

Obrnuto, ako su $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\ell$ bilo koje relacije skupa E redom dužina $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ koje zadovoljavaju sve date zakone (21) onda obrazac (24) za $r_1 = \rho_1, r_2 = \rho_2, \ldots, r_\ell = \rho_\ell$ daje

$\bar{r}_1 = \rho_1$, $\bar{r}_2 = \rho_2$, ..., $\bar{r}_\ell = \rho_\ell$, jer ρ_1, ρ_2, ..., ρ_ℓ zadovoljavaju zakone (21) pa (25) postaje

$$\rho_i = \rho_i^{(1)} = \ldots = \rho_i^{(n)} = \rho_i^{(n+1)} = \ldots$$

$$/ \; i = 1, 2, \ldots, \ell \; /.$$

Na taj način je stav u potpunosti dokazan.

III. NEKE NEJEDNAKOSTI

3.1. U ovoj glavi izvešćemo neke nejednakosti izmedju brojeva izvesnih specijalnih univerzalnih algebri.

Ovi rezultati uopštavaju rezultate koje sam ranije objavio [6].

Neka je E neprazan skup i neka je F izvesno mnoštvo operacija /dužina > 1/ definisanih u tom skupu. Neka je Z izvestan sistem zakona oblika

$$(1) \qquad w_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = w_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E)$$

gde su reči w_1 i w_2 sastavljene od istih slova /odnosno, ako jedno slovo učestvuje u izgradnji jedne od tih reči onda učestvuje i u izgradnji i druge reči/. Zakone oblika (1) zvaćemo jednakoslovni zakoni. U takve zakone spadaju, na primer, zakoni

$$x.(y.z) = (x.y).z; \quad (x.x).y = y.x; \quad x.(y+z) = x.y + x.z;$$

$$\big((x,y,z)f_1, u\big)f_2 = \big((x,u)f_2, y, z\big)f_1 \quad /f_1 \text{ i } f_2 \text{ ozn. operac.}/$$

dok, recimo, zakon

$$(x.y).(z.u) = z.(y.u)$$

nije zakon oblika (1), jer je reč $(x.y).(z.u)$ sastavljena od slova x, y, z i u, a reč $z.(y.u)$ od slova y, z, u i u drugoj reči ne učestvuje x koje učestvuje u prvoj reči.

Univerzalnu algebru (E, F, Z) za koju je Z sastavljeno od jednakoslovnih zakona oblika (1), u daljem ćemo zvati algebra (1).

U algebre (1) dolaze semigrupe i polulatise, ali ne i grupe.

Ako je Z bilo kakav sistem zakona oblika (1), onda se u svakom nepraznom skupu E može uvek definisati sistem operacija F tako da je (E, F, Z) algebra (1).

Zaista, dovoljno je u E izabrati jedan odredjen element a i za svaku operaciju $f \in F$ dužine k /$k > 1$/ definisati

(2) $(x_1, x_2, \ldots, x_k) f = a \qquad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in E).$

3.2. Neka su F i Z redom dati sistemi operacija i jednakoslovnih zakona. Ako je E skup sa n elemenata /n prirodan broj/ sa B n ćemo označiti broj svih neizomorfnih algebri (1), odnosno algebri (E, F, Z).

Važi sledeći stav.

<u>Stav 3.2.1</u> Ako su $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ različiti prirodni brojevi onda je

(3) $$B\left(\sum_{i=1}^{\ell} p_i + 1\right) > \prod_{i=1}^{\ell} B(p_i)$$

<u>Dokaz.</u> Neka su $G_1 = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{p_1}^1\}$, $G_2 = \{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{p_2}^2\}$, $\ldots$, $G_\ell = \{a_1^\ell, a_2^\ell, \ldots, a_{p_\ell}^\ell\}$ $(G_i \cap G_j = \emptyset$ ako $i \neq j)$ proizvoljne algebre (1) redom sa $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ elemenata. Neka je L sledeći skup

$$L = \{a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1, a_1^2, \ldots, a_{p_2}^2, \ldots, a_1^\ell, \ldots, a_{p_\ell}^\ell, 0\}$$

gde je $0 \notin \bigcup_{i=1}^{\ell} G_i$ proizvoljan simbol.

Ako je $f \in F$ bilo koja operacija dužine k onda u skupu L definišemo operaciju f dužine k na sledeći način

(4) $$(x_1, x_2, \ldots, x_k) f = \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_k) f & \text{ako se } x_1, x_2, \ldots, x_k \text{ nalaze u istoj algebri } G_i, \\ 0 & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

Na taj način u L su definisane sve operacije iz sistema F.

Neposredno se zaključuje da je dobijena algebra iz iste klase algebri kao i algebre $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$, odnosno ako je Z mnoštvo jednakoslovnih zakona koje zadovoljavaju algebre

$G_1, G_2, \ldots, G_\ell$, onda i algebra L zadovoljava iste zakone Z. Dobijenu algebru L označićemo simbolom $(G_1, G_2, \ldots, G_\ell)$. U celoj ovoj glavi $(G_1, G_2, \ldots, G_\ell)$označava algebru formiranu na navedeni način.

Neka su G_i i G_i' dve algebre (1) reda p_i $(i = 1,2,\ldots,\ell)$. Pretpostavimo da su algebre $L = (G_1, G_2, \ldots, G_\ell)$ i $L' = (G_1', G_2', \ldots, G_\ell')$ izomorfne i neka je φ izomorfizam prve na drugu.

Tada je

$$(5) \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_k)f = (x_1\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_k\varphi)f \qquad (\forall f \in F, \ \forall x_1, \ldots, x_k \in L).$$

Ako u 5 stavimo $x_1 = 0$, a $x_2, x_3, \ldots, x_k$ izaberemo tako da $0\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_k\varphi$ ne budu u istoj algebri G_i', onda iz (5) dobijamo $0\varphi = 0'$ gde je $0' \in L'$ i $0' \notin \bigcup_{i=1} G_i'$.

Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ elementi algebre G_i, onda na osnovu (5) i na osnovu $0\varphi = 0'$, element $(x_1\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_k\varphi)f$ mora biti različit od 0'. Na osnovu definicije (4), elementi $x_1\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_k\varphi$ moraju biti elementi iste algebre G_j'. Medjutim, pošto su brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ svi različiti, to G_j' mora biti baš G_i'.

Na taj način, φ mora biti izomorfizam algebre G_i na algebru G_i' $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$, pa prema tome

$$(7) \qquad \big((G_1, G_2, \ldots, G_\ell) \cong (G_1', G_2', \ldots, G\ ')\big) \Rightarrow G_i \cong G_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, \ell).$$

Koristeći se ovom činjenicom i uzimajući za $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ sve moguće neizomorfne algebre (1) odgovarajućeg reda $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ u skupu algebri $(G_1, G_2, \ldots, G_\ell)$, dobijamo $B(p_1), B(p_2), \ldots, B(p_\ell)$ neizomorfnih algebri. Broj $B\left(\sum_{i=1}^{\ell} p_i + 1\right)$ je veći od tog proizvoda jer se u skupu algebri $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ ne nalazi algebra kod koje su operacije definisane pomoću obrasca (2).

Na taj način stav 3.2.1 je u potpunosti dokazan.

Pretpostavimo, sada, da svi brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ nisu različiti izmedju sebe već da $p_1 = p_2$ i da su svi $p_3, p_4, \ldots, p_\ell$ različiti izmedju sebe kao i od p_1.

Neka su

$$G_{p_1}^1, G_{p_1}^2, \ldots, G_{p_1}^{B(p_1)};\ G_{p_2}^1 = G_{p_1}^1, G_{p_2}^2 = G_{p_1}^2, \ldots, G_{p_2}^{B(p_1)} = G_{p_1}^{B(p_1)};$$

$$G_{p_3}^1, G_{p_3}^2, \ldots, G_{p_3}^{B(p_3)};\ G_{p_\ell}^1, G_{p_\ell}^2, \ldots, G_{p_\ell}^{B(p_\ell)}$$

sve algebre (1) respektivno reda $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$.

Algebre $(G_{p_2}^{i_2}, G_{p_1}^{i_1}, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_\ell}^{i_\ell})$ i $(G_{p_2}^{i_1}, G_{p_1}^{i_2}, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_\ell}^{i_\ell})$ su izomorfne jer je $p_1 = p_2$. Neka $(G_{p_1}^{i}, G_{p_2}^{j})$ označava skup svih algebri (1) oblika $(G_{p_1}^{i}, G_{p_2}^{j}, G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_\ell}^{i_\ell})$ gde $(G_{p_3}^{i_3}, \ldots, G_{p_\ell}^{i_\ell})$ prolazi kroz sve algebre (1) respektivno reda $p_3, \ldots, p_\ell$.

Tada se skup A:

$$(G_{p_1}^1, G_{p_1}^1),\ (G_{p_1}^2, G_{p_1}^1),\ \ldots,\ (G_{p_1}^{B(p_1)}, G_{p_1}^{B(p_1)})$$

$$(G_{p_1}^1, G_{p_1}^2),\ (G_{p_1}^2, G_{p_1}^3),\ \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(G_{p_1}^i, G_{p_1}^{B(p_1)}),\ (G_{p_1}^2, G_{p_1}^{B(p_1)})$$

$$(G_{p_1}^1, G_{p_1}^{B(p_1)}),$$

sastoji iz medjusobno neizomorfnih algebri (1). Broj tih algebri u tom skupu je

$$\binom{B_1(p_1)+1}{2} B(p_3) \ldots B(p_\ell).$$

U slučaju da u skupu $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ imamo λ_1 jednakih brojeva p_1, λ_2 jednakih brojeva p_2, i najzad λ_t jednakih elemenata p_t onda bi odgovarajući skup A imao

$$\prod_{i=1}^{t} \binom{B(p_i)+\lambda_i - 1}{\lambda_i} \quad \text{elemenata.}$$

Na osnovu navedenog rasudjivanja zaključujemo da važi sledeći stav.

Stav 3.2.2 Ako su $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ medjusobno različiti prirodni brojevi i ako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ proizvoljni prirodni brojevi, onda važi nejednakost

$$B\left(1+\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i\right) > \prod_{i=1}^{\ell} \binom{B(p_i)+\lambda_i - 1}{\lambda_i} \tag{8}$$

U slučaju $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\ell = 1$, stav 3.2.2 se svodi na stav 3.2.1, pa je prema tome stav 3.2.2 uopštenje stava 3.2.1.

Tvrdjenje dokazano pomoću (7), koje smo koristili pri dokazu stava 3.2.1, može se proširiti u sledeću lemu, na osnovu koje ćemo dokazati krajnju nejednakost (10).

Lema 3.2.3 Neka su $G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_\ell}$; $G'_{p'_1}, G'_{p'_2}, \dots, G'_{p'_m}$ izvesne algebre (1) respektivno reda $p_1, p_2, \dots, p_\ell$; $p_1', p_2', \dots, p_m'$. Ako je

$$(G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_\ell}) \cong (G'_{p'_1}, G'_{p'_2}, \dots, G'_{p'_m}),$$

onda je svaka od G_{p_i} /i = 1,2,... / izomorfna sa izvesnom G_{p_j}', /j = 1,2,...,m/.

Dokaz. Stavimo $L = (G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_\ell})$, $L' = (G'_{p'_1}, G'_{p'_2}, \dots, G'_{p'_m})$. Neka je φ izomorfizam prve na drugu algebru. Tada važi (5) pa kao i u dokazu stava 3.2.1 dobijamo $0\varphi = 0'$ $(0' \in L')$. Slično, iz (5) dobijamo

$$(x_1, x_2, \dots, x_k \in G_{p_i}) \Rightarrow (\exists p_j' \,;\, x_1\varphi, x_2\varphi, \dots, x_k\varphi \in G'_{p_j'})$$

pa je $G_{p_i} \subset G'_{p'_j}$, odnosno slika svake od algebri G_{p_i} $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ je podskup izvesne od algebri $G'_{p'_j}$ $(j = 1,2,\ldots,m)$

Pretpostavimo da $G_{p_i}\varphi \neq G'_{p'_j}$. U tom slučaju u $G'_{p'_j}$ postoji jedan element a, takav da $a\varphi \notin G_{p_i}$.

Medjutim, u tom slučaju prema (5) imamo

$$(9) \qquad (a,x_2,\ldots,x_k)f\varphi = (a\varphi, x_2\varphi, \ldots, x_k\varphi)\, f \qquad (f \in F)$$

za sve $x_2,\ldots,x_k$ iz G_{p_i}. Pošto $a, x_2, x_3, \ldots, x_k$ nisu svi u G_{p_i} to leva strana u (9) iznosi $0\varphi = 0'$, a desna je $\neq 0'$ jer su $a, x_2, \ldots, x_k$ u istoj algebri G_{p_j}. Znači (9) ne važi, odnosno (5) ne važi što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je φ izomorfizam algebre L na algebru L'.

Znači, $G'_{p'_i}\varphi = G'_{p'_j}$, pa je svaka od algebri G_{p_i} izomorfna sa nekom od algebri $G'_{p'_j}$, jer (5) važi za sve $x_1,x_2,\ldots,x_k$ iz G_{p_i} $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$.

Na taj način je lema 3.2.3 u potpunosti dokazana.

Neka je najzad $n\,(>1)$ bilo koji prirodan broj. Ovaj se broj može na više načina prikazati kao zbir prirodnih brojeva - svojih sabiraka.

Neka je

$$\sigma_i : \underbrace{(p_1^i + p_1^i + \ldots + p_1^i)}_{\lambda_1^i \text{ sabiraka}} + \underbrace{(p_2^i + p_2^i + \ldots + p_2^i)}_{\lambda_2^i \text{ sabiraka}} + \ldots + \underbrace{(p_{\ell\sigma_i}^i + p_{\ell\sigma_i}^i + \ldots + p_{\ell\sigma_i}^i)}_{\lambda_{\ell\sigma_i}^i \text{ sabiraka}}$$

jedno takvo razlaganje. Skup svih takvih razlaganja označimo sa σ.

Ako su $G_{p_1^i}, G_{p_2^i}, \ldots, G_{p_{\ell\sigma_i}^i}$ izvesne algebre (1) reda $p_1^i, p_2^i, \ldots, p_{\ell\sigma_i}^i$ onda razlaganju σ_i odgovara izvesna algebra $(G_{p_1^i}, G_{p_1^i}, \ldots, G_{p_1^i}, \ldots, G_{p_{\ell\sigma_i}^i}, G_{p_{\ell\sigma_i}^i}, \ldots, G_{p_{\ell\sigma_i}^i})$.

Razlaganju σ_i prema stavu 3.2.2 odgovara $\prod_{\nu=1}^{\ell_{\sigma_i}} \binom{B(p_\nu^i)+\lambda_\nu^i-1}{\lambda_\nu^i}$ neizomorfnih algebri (1) reda n+1 .

Različitim razlaganjima σ_i i σ_j , prema lemi 3.2.3, odgovaraju različite neizomorfne algebre (1) reda n+1 .

Prema tome broj B(n+1) zadovoljava sledeći uslov

Stav 3.2.4

(10) $$B(n+1) > \sum_{\sigma_i \in \sigma} \prod_{\nu=1}^{\ell_{\sigma_i}} \binom{B(p_\nu^i)+\lambda_\nu^i \quad -1}{\lambda_\nu^i}$$

IV. AUTOMORFIZMI UNIVERZALNIH ALGEBRI

4.1. U ovom delu tretiraćemo problem veze algebarske strukture i njene grupe automorfizama. Rasmatraćemo konstrukciju univerzalnih algebri sa unapred datom grupom automorfizama.

4.2. Neka je Z jedna primitivna klasa univerzalnih algebri. Z može biti klasa semigrupa, grupa, prstena ili klasa grupoida kod kojih važi zakon $x.y = y.(x.x)$ i slično. Klasa Z je karakterisana mnoštvom zakona koje treba da ispune njene operacije /čije dužine mogu biti 0, 1, 2, .../. Tako, klasa semigrupa je karakterisana zakonom $x.(y.z)=(x.y).z$. Sa Z ćemo ujedno označiti i mnoštvo zakona klase Z.

Ako je G data grupa i Z klasa Abelovih grupa onda u Z postoji bar jedna Abelova grupa A takva da se G može izomorfno potopiti u grupu automorfizama grupe A [7]. Ovu poznatu teoremu iz teorije Abelovih grupa proširićemo utoliko što ćemo dokazati da važi i pod pretpostavkom da je Z bilo koja primitivna klasa univerzalnih algebri, odnosno dokazaćemo sledeći stav.

Stav 4.2.1 Neka je G data grupa i neka je Z data primitivna klasa algebri. Tada u Z postoji bar jedna algebra A takva da se G može izomorfno potopiti u grupu automorfizama algebre A.

Dokaz. Neka je $G=\{i, f, g, \dots\}$ data grupa, gde je i jedinični element. Neka je x proizvoljan simbol. Formiraćemo skup reči u čijoj izgradnji učestvuju x, i, f, g, ... i simboli O_j $j \in J$ koji odgovaraju operacijama dužina nula date klase Z. Neka je F sistem svih operacija klase Z.

Reči uvodimo na sledeći način:

1^o x, O_j $(j \in J)$ su reči.

2^o Ako su $w_1, w_2, \dots, w_n$ reči i $\omega \in F$ bilo koja operacija dužine $n\ (\geqslant 1)$ onda je i $(w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega$ reč.

3^o Ako je w reč onda je i $(w)f$ reč za svako $f \in G$.

Skup svih reči definisanih ovom definicijom označićemo simbolom W.

U skupu W uočavamo sledeći sistem zakona Z':

1^o U Z' uvršćujemo svaki zakon $w_1 = w_2$ iz Z.

2^o $((w)f)g = (w)(f.g)$ $\quad (w \in W;\ f, g,\ f.g \in G)$

3^o $((w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega)f = ((w_1)f, (w_2)f, \ldots, (w_n)f)\omega$

$(\omega \in F,\ w_i \in W,\ f \in G)$

4^o $(w)i = w$ $\quad (w \in W;\ i \in G)$

5^o $(O_j)f = O_j$ $\quad (f \in G,\ j \in J)$.

U skupu W uvodimo sledeću binarnu relaciju ρ :

$w_1 = w_2 \Longleftrightarrow$ od w_1 se može doći do w_2 posle konačne primene izvesnih zakona iz Z'.

Ovu relaciju ćemo zvati $\equiv$ mod Z' i umesto $w_1 \rho\, w_2$ pisaćemo $w_1 \equiv w_2$ (mod Z').

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije.

U količnik-skupu $K = W/_{\equiv}$ mod Z' uvodimo operacije koje odgovaraju operacijama iz F na sledeći način.

Simboli O_j $(j \in J)$ su samo-ekvivalentni pa njima dodeljujemo ulogu operacija dužina nula u K.

Ako je $\omega \in F$ bilo koja operacija dužine $n\ (\geqslant 1)$ njoj dodeljujemo sledeću operaciju u K

$$(C_{w_1}, C_{w_2}, \ldots, C_{w_n})\omega = C_{(w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega}$$

gde C_w označava klasu ekvivalencije reči w, odnosno element skupa K.

Uvedena operacija je jednoznačna jer ako je $w_1 = w_1'$ (mod Z'),

$w_2 \equiv w_2'$ (mod Z'), ..., $w_n \equiv w_n'$ mod Z', onda se od reči w_i i 1, 2, ..., n posle konačne primene zakona iz Z' može doći do reči w_i' ($i = 1, 2, \ldots, n$), pa je

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega \equiv (w_1', w_2', \ldots, w_n') \text{ (mod Z')}.$$

Na taj način u K se prenosi sistem operacija F. Ovako dobijena algebra (K, F) pripada klasi Z jer su u Z' uvršćeni i zakoni iz Z.

Dokazaćemo da algebra (K, F) ispunjava zahteve stava, odnosno da algebra A iz iskaza stava može biti (K, F).

Svakom elementu $f \in G$ pridružujemo sledeće preslikavanje f' skupa K. Ako je C_w original onda je slika $C_{(w)f}$, odnosno $(C_w)f' = C_{(w)f}$ $(C_w \in K)$.

Uvedeno preslikavanje f' je jednoznačno jer ako $C_w = C_{w'}$, onda je $w \equiv w'$ (mod Z') pa je i $(w)f \equiv (w')f$ (mod Z') odnosno $C_{(w)f} = C_{(w')f}$.

Preslikavanje f' je preslikavanje skupa K na skup K jer ako je $C_w \in K$ bilo koji element onda $(C_{(w)f^{-1}})f' = C_{((w)f^{-1})f} = C_{(w)(f^{-1}f)} = C_{(w)(i)} = C_w$.

Preslikavanje f' je 1-1 preslikavanje, jer ako je $(C_{w_1})f' = (C_{w_2})f'$ onda je $C_{(w_1)f} = C_{(w_2)f}$, odakle

$$C_{((w_1)f)f^{-1}} = C_{((w_2)f)f^{-1}} \text{ tj. } C_{w_1} = C_{w_2}.$$

Na taj način f' je permutacija skupa K. Ako je $\omega \in F$ bilo koja operacija onda je

$$\left((C_{w_1}, C_{w_2}, \ldots, C_{w_n})\omega\right)f' = \left(C_{(w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega}\right)f' =$$
$$= C_{((w_1, w_2, \ldots, w_n)\omega)f} = C_{((w_1)f, (w_2)f, \ldots, (w_n)f)\omega}$$
$$((C_{w_1})f', (C_{w_2})f', \ldots, (C_{w_n})f')\omega$$

za sve C_{w_1}, C_{w_2}, ..., $C_{w_n} \in K$, pa je f' automorfizam algebre (K, F).

Označimo sa G' skup svih f' ($f \in G$).

Neka je φ sledeće preslikavanje skupa G na skup G': $f\varphi = f'$ ($f \in G$, $f' \in G'$). Ako je $f_1\varphi = f_2\varphi$ onda je $(C_w)f_1' = (C_w)f_2'$ za sve $C_w \in K$, pa je $C_{(w)f_1} = C_{(w)f_2}$, odakle je $C_{w(f_1f_2^{-1})} = C_w$. Odavde je $f_1f_2^{-1} = i$, tj. $f_1 = f_2$. Znači, φ je 1-1 preslikavanje skupa G na skup G'.

Ako su f_1', $f_2' \in G'$ onda sa $f_1'.f_2'$ označavamo proizvod preslikavanja f_1' i f_2'.

Pošto je

$$(C_w)f_1'.f_2' = ((C_w)f_1')f_2' = (C_{(w)f_1})f_2' = C_{(w)(f_1.f_2)} =$$

$$= (C_w)(f_1.f_2)' \quad \text{za sve } C_w \in K \text{ i sve } f_1', f_2' \in G' \text{ to je}$$

$$(f_1'.f_2') = (f_1.f_2)' \qquad (\forall f_1', f_2' \in G').$$

Na taj način je G' grupa i preslikavanje φ : $f\varphi = f'$ je izomorfizam grupe G na grupu G'.

Prema dokazanom (K, F) pripada klasi Z, u grupi automorfizama algebre (K, F) postoji podgrupa G' izomorfna sa datom grupom G.

Stav 4.2.1 je na taj način u potpunosti dokazan, jer kao algebru k klase Z možemo uzeti baš formiranu algebru K.

Navodimo sledeći primer.

Primer 4.2.2.

Neka je $G = \{ i, f, f^2 / f^3 = i \}$ i neka je Z skup sledećih zakona

$$a^2 = a, \quad ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c .$$

Tada se K sastoji iz klasa ekvivalencija sledećih elemenata

$$x,\ xf,\ xf^2,\ x.xf,\ x.xf^2,\ xf.xf^2,\ x.xf.xf^2\ .$$

Istim simbolima ćemo označiti i njihove klase ekvivalencija. Tada grupoid K ima sledeću Cayley-evu tablicu

	x	xf	xf^2	$x.xf$	$x.xf^2$	$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
x	x	$x.xf$	$x.xf^2$	$x.xf$	$x.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
xf	$x.xf$	xf	$xf.xf^2$	$x.xf$	$x.xf.xf^2$	$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
xf^2	$x.xf^2$	$xf.xf^2$	xf^2	$x.xf.xf^2$	$x.xf^2$	$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
$x.xf$	$x.xf$	$x.xf$	$x.xf.xf^2$	$x.xf$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
$x.xf^2$	$x.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$xf.xf^2$	$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$
$xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$	$x.xf.xf^2$

Dobijeni grupoid je izomorfan sa grupoidom $(P'(S), U)$ gde $S = \{ x, xf, xf^2 \}$ i gde $P'(S)$ označava skup svih nepraznih podskupova skupa S.

4.3. Svaka algebarska struktura ima svoju grupu automorfizama. Ovo je jedan od najvažnijih stavova u teoriji algebarskih struktura. G. Birkhoff [8] je dokazao jedan stav koji se može shvatiti kao inverzan tome stavu.

On je dokazao da ako je G grupa sa α elemenata onda postoje

1^o algebra G sa α elemenata i α operacija dužine 1,

2^o izvestan parcijalno uredjen sistem sa $\alpha^2+\alpha$ elemenata,

3^o izvesna distributivna latisa, čije su grupe automorfizama izomorfne sa grupom G.

Na osnovu ovog stava ne može se zaključiti da li postoji grupoid sa unapred zadatom grupom automorfizama G.

Mi ćemo dokazati stav 4.3.4 koji izmedju ostalog to potvrdjuje i predstavlja dopunu navedenog stava G. Birkhoff-a.

Neka je $G=\{1, a, \ldots\}$ (1 jedinični element) data grupa i neka je $G'=\{1', a', \ldots\}$ regularna reprezentacija grupe G, gde je $a'=\binom{x}{xa}_{x\in G}$ $(\forall a\in G)$.

Za skup G pretpostavljamo da je dobro uredjen i da mu je 1 prvi element.

Neka je $n(>1)$ odredjen prirodan broj. U skupu G^n uvodimo relaciju $\equiv$ mod G' na sledeći način:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n) \pmod{G'}$$

ako i samo ako u G' postoji bar jedan element f takav da je $y_1 = x_1 f,\ y_2 = x_2 f, \ldots, y_n = x_n f$.

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije skupa G^n.

Važi sledeća lema.

<u>Lema 4.3.1</u> U svakoj klasi ekvivalencije nalazi se jedan i samo jedan element oblika $(1, x_2, \ldots, x_n)$.

<u>Dokaz</u> Neka je C bilo koja klasa ekvivalencije i neka je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bilo koji element te klase. Neka je $f\in G'$ takvo preslikavanje da je $1f = y_1$. Tada

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv (y_1 f^{-1}, y_2 f^{-1}, \ldots, y_n f^{-1}) \pmod{G'}$$

odnosno

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv (1 \quad, y_2 f^{-1}, \ldots, y_n f^{-1}) \pmod{G'},$$

pa C sadrži bar jedan element navedenog oblika.

Pretpostavimo da se u C nalaze $(1, x_2, \dots, x_n)$ i $(1, x_2', \dots, x_n')$. Tada je

$$(1, x_2, \dots, x_n) \equiv (1, x_2', \dots, x_n') \pmod{G'}$$

pa za neko $f \in G'$ imamo

$$1f = 1,\ x_2 f = x_2',\ \dots,\ x_n f = x_n'.$$

Medjutim, prema definiciji regularne reprezentacije, iz $1f = 1$, dobijamo da je f identičko preslikavanje, pa je $(1, x_2, \dots, x_n) = (1, x_2', \dots, x_n')$, što dokazuje lemu.

Prema dokazanoj lemi svaka klasa ekvivalencije ima oblik

$$C_{(1,x_2,\dots,x_n)} = \{ (1f, x_2 f, \dots, x_n f) \,/\, f \in G' \}$$

i ima isti kardinalni broj jednak kardinalnom broju skupa G.

Na osnovu dokazane leme dokazujemo sledeću lemu.

Lema 4.3.2 Svako preslikavanje φ

(1) $$(1,x_2,\dots,x_n) \overset{\varphi}{\longmapsto} y_{(2,3,\dots,n)} = (x_2, x_3, \dots, x_n;\ y_{(2,3,\dots,n)} \in G)$$

može se produžiti u operaciju ω_φ /dužine n/ skupa G tako da svaki element iz G' bude automorfizam za (G, ω_φ).

Dokaz. Svaki element iz G^n se može jedinstveno prikazati u obliku $(1f, x_2 f, \dots, x_n f)$ gde je f izvestan element iz G'.

Operaciju ω_φ /dužine n/ uvodimo na sledeći način

(2) $$(1f, x_2 f, \dots, x_n f)\omega_\varphi = y_{(2,3,\dots,n)} f$$

$$(x_2, \dots, x_n \in G,\ f \in G'),$$

gde pretpostavljamo da je $y_{(2,3,\dots,n)}$ odredjen pomoću (1), odnosno da je φ proizvoljno odredjeno preslikavanje.

Tada, ako je $g \in G'$ bilo koji element, onda je sa jedne strane

$$(1f, x_2 f, \dots, x_n f)\omega_\varphi g = y_{(2,3,\dots,n)} fg,$$

a sa druge strane je

$$(1\, fg, x_2 fg, \dots, x_n fg)\omega_\varphi = y_{(2,3,\dots,n)} fg,$$

pa je

$$(1f,\ x_2f,\ \ldots,\ x_nf)\omega_\varphi g = (1fg,\ x_2fg,\ \ldots,\ x_nfg)$$

$$(\forall x_2, \ldots, x_n \in G;\ \forall f,\ g \in G'),$$

odnosno svaki element iz G' jeste automorfizam za (G, ω_φ). Na taj način je lema 4.3.2 u potpunosti dokazana.

Na osnovu ove leme ne može se zaključiti da (G, ω_φ) ima grupu automorfizama G' bez obzira kakvo bilo preslikavanje definisano pomoću (1). Tek na osnovu sledeće leme može se dokazati egzistencija bar jednog preslikavanja φ za koje će to biti ispunjeno.

Lema 4.3.3 Neka je Ψ preslikavanje definisano na sledeći način

(3) $\quad (1,1,\ldots,1,a)\Psi = \bar{a} \quad (\forall a, \bar{a} \in G;\ (1,1,\ldots,1,a) \in G^n)$,

gde je $\bar{a}$ naslednik elementa a pri pretpostavljenom dobrom uredjenju beskonačnog skupa G.

Ako je φ /definisano pomoću (1) / proizvoljno produženje preslikavanja Ψ , onda je operacija ω_φ definisana pomoću (2) takva da je G' grupa automorfizama za (G, ω_φ) .

Dokaz. Pre svega, Ψ se može produžiti u φ , a φ u ω_φ , na osnovu leme 4.3.2, tako da svi elementi iz G' budu automorfizmi za (G, ω_φ) .

Sa S(G) označićemo simetričnu grupu skupa G. Dokazaćemo da u $S(G) \setminus G'$ nema automorfizama za (G, ω_φ).

Pretpostavimo da je f bilo koji automorfizam za (G, ω_φ) za koji je $1f = 1$. Tada prema (3)

$$(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ af)\Psi = \bar{a}f,$$

odakle prema (3) zaključujemo da je $\bar{a}f$ naslednik elementa af $\bar{a}f = \overline{af}$, $(\forall a \in G)$. Pošto je $1f = 1$, na osnovu principa transfinitne indukcije zaključujemo da je $af = a$ $(\forall a \in G)$ pa je f identičko preslikavanje.

Ako sa A označimo grupu automorfizama za (G, ω_φ), onda prema dokazanom u A se nalazi jedno i samo jedno preslikavanje f za koje je $1f = 1$.

Neka je a bilo koji element iz G. Tada u A se nalazi bar jedno preslikavanje f, za koje je $1f = a$, jer na primer $1a' = a$ $(a' \in G')$.

Ako je $f_1 \in A$ bilo koje preslikavanje koje prevodi 1 u a, onda $f_1 f^{-1}$ $(\in A)$ mora da prevodi 1 u 1, pa je $f_1 f^{-1} = I$, odnosno $f_1 = f$. Znači u A postoji jedno i samo jedno preslikavanje koje 1 prevodi u a $(a \in G)$. Pošto to važi za svako $a \in G$, to je $A = G'$, pa je lema 4.3.3 dokazana.

U slučaju da je $G = \{1, a_2, \ldots, a_g\}$ konačan dobro uredjen skup $(1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_g)$ preslikavanje ψ može se definisati na sledeći način

$$(1,\ldots,1,1)\psi = a_2,\ (1,\ldots,1,a_2)\psi = a_3,\ \ldots,\ (1,1,\ldots,1,a_g)\psi = 1,$$

pa opet važi tvrdjenje odgovarajuće leme 4.3.3.

Na osnovu lema 4.3.1, 4.3.2 i 4.3.3 neposredno sleduje sledeći stav.

<u>Stav 4.3.4</u> Ako je G data grupa i $n(>1)$ dati prirodan broj tada se u skupu G može definisati jedna operacija ω /dužine n/ takva da je grupa automorfizama za (G, ω) izomorfna sa grupom G.

<u>Primer 4.3.5.</u> Neka je $G = \{1, a, b, ab \,/\, ab = ba,\ a^2 = b^2 = 1\}$ Klein-ova četvorna grupa i neka je $n = 2$.

Skup G dobro uredimo na sledeći način $1 \leq a \leq b \leq ab$. Grupa G' ima sledeće elemente

$$1' = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a & b & ab \end{pmatrix},\quad a' = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ a & 1 & ab & b \end{pmatrix},\quad b' = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ b & ab & 1 & a \end{pmatrix},\quad (ab)' = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ ab & b & a & 1 \end{pmatrix}$$

a skup $G/\equiv \bmod G'$ sastoji se iz sledećih klasa ekvivalencija

$$C_{(1,1)} = \{(1,1),\ (a,a),\ (b,b),\ (ab,ab)\}$$

$C_{(1,a)} = \{(1,a),\ (a,1),\ (b,ab),\ (ab,\ b)\}$
$C_{(1,b)} = \{(1,b),\ (a,ab),\ (b,1),\ (ab,\ a)\}$
$C_{(1,ab)} = \{(1,ab),\ (a,b),\ (b,a),\ (ab,\ 1)\}.$

Preslikavanje ω je u ovom slučaju definisano na sledeći način

$$(1,1)\Psi = a, \quad (1,a)\Psi = b, \quad (1,b)\Psi = ab, \quad (1,ab)\Psi = 1,$$

a operacijå ω definisanoj jednakošću (2) odgovara sledeća Cayley-eva tablica

	1	a	b	ab
1	a	b	ab	1
a	ab	1	a	b
b	a	b	ab	1
ab	ab	1	a	b

Dobijeni grupoid ima grupu automorfizama G'

4.4. Konstrukcija navedena u 4.3 za $n = 1$ ne dovodi do algebre čija je grupa automorfizama G'. Medjutim, tim postupkom, kao što ćemo pokazati, neposredno se dokazuje prvi od navedenih rezultata G. Birkhoff-a.

Neka je $G = \{1, f, g, \ldots\}$ /1 jedinični element/ grupa čija je Cayley-eva reprezentacija grupa $G' = \{1', f', g', \ldots\}$. Radi formiranja operacija dužine 1 /preslikavanja skupa G u skup G/ za koje su elementi iz G' automorfizmi u skupu G definisaćemo sledeću relaciju ekvivalencije ($\equiv$ mod G')

$$x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ G') \Longleftrightarrow \exists f' \in G',\ x_2 = x_1 f'.$$

Pošto je G' regularna grupa to svaka dva elementa iz G se nalaze u toj relaciji pa je $G/_{\equiv \mathrm{mod}\ G'}$ jednočlan skup. Svaki element $f \in G$ se može jedinstveno prikazati u obliku $f = 1f'$ ($f' \in G'$).

Ako je ω operacija dužine 1 skupa G kad koje je $1\omega = a$ /a izvestan element iz G/ i za koju je svaki od elemenata iz G' automorfizam onda iz $1\omega = a$ dobijamo $1f'\omega = af'$, odnosno $f\omega = af'$ $(\forall f \in G)$.. Na osnovu toga operacija ω za koju je svaki od elemenata iz G' automorfizam je odredjena poznavanjem 1ω. Ako je $1\omega = a$, operaciju ω ćemo označiti sa ω_a. Neposredno se zaključuje da svaka od operacija ω_a $(a \in G)$ ima svaki od elemenata iz G' kao automorfizam.

Algebra $A = (G, \omega_1, \omega_f, \omega_g, \ldots)$ ima takodje svaki od elemenata iz G' kao automorfizam. Dokazaćemo da je G' grupa automorfizama algebre A.

Pretpostavimo da je φ bilo koji automorfizam algebre A koji 1 prevodi u 1 $(1\varphi = 1)$. Primenom φ na jednakosti

$$1\omega_1 = 1, \quad 1\omega_f = f, \quad 1\omega_g = g, \ldots$$

dobijamo

$$1\omega_1 = 1, \quad 1\omega_f = f\varphi, \quad 1\omega_g = g\varphi, \ldots ,$$

odakle je $f = f\varphi$, $g = g\varphi$, ... , tj. $x = x\varphi$ $(\forall x \in G)$ pa je identičko preslikavanje skupa G. Znači, u grupi automorfizama algebre A nalazi se samo jedno preslikavanje koje prevodi 1 u 1. Slično kao pri dokazu leme 4.3.3 zaključujemo da se u istoj grupi nalazi samo po jedno preslikavanje koje prevodi 1 u a gde je a bilo koji element skupa G.

Na taj način je G' grupa automorfizama algebre A i navedeni rezultat G. Birkhoff-a je dokazan.

L i t e r a t u r a

[1] G. Birkhoff — Universal algebra, Proc. First Canadian Congress /1945/.

[2] K. Shoda — Über die allgemeinen algebraischen Systeme, Proc. Acad. Tokyo, vols 17-19 /1941-1944/.

[3] G. Birkhoff — On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. 31 /1935/, 433-54.

[4] A. Maljcev — K obšćej teorii algebraičeskih sistem, Mat. sb. T. 35 /1954/, 3-20.

[5] A. Sade — Multigroupoïde sur un système demosien de groupides, Coll. Math. Vol. VII, 1960, 181-185.

[6] S. Prešić — Sur le nombre de certaines algèbres Publik. ETF, Beograd, No 47 /1960/.

[7] A. Kuroš — Lekcii po obšćej algebre, Moskva 1962 /st. 127/

[8] G. Birkhoff — On group of automorphisms, Revista Union Math. Argentina, 11, 155-157 /1946/.

[9] Sh. Stein — On the foundations of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 85, 228-256 /1957/

[10] E. Schröder — Über eine eigenthümliche Bestimmung einer Funktion durch formale Anforderungen, Journ. Reine Ang. Math., 90, 189-220 /1881/

[11] M. Hosszu — Some functional equation related with the associative law, Publ. Math. Debrecen, 3, 205-214 /1954/

[12] N. Abel — Untersuchung der Funktionen zweier unabhaengig veraenderlichen Grössen x und y, wie f/x,y/, welche die Eigenschaft haben dass f[z, f/x,y/] eine symmetrische Funktion von x,y und z ist, Jour. reine argen. Math. 1, 11-15 /1826/.

[13] D. Murdoch — Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws, Amer. J. Math. 61, 509-522 /1939/

[14] K. Drbohlav — Gruppenartige Multigruppen, Czech. Math. Jour., 7 /82/, /1957/, 183-190

[15] M.Dresher, O.Ore — Theory of multigroups, Amer. J. Math. 60 /1938/, 705-733.

[16] P. Dubreil — Algèbre, T. I, Paris, /1954/, p. 56.

[17] L. Karolinskaja — Ref. žurnal, matematika, 7A 183, 1962

[18] A. Sade — Zentralblatt für Mathematik und ihre Grengebiete /Nov. 1962, s. 10/.