SLOBODAN DAJOVIĆ

PRINCIP MAKSIMUMA

U LINEARNOM PROBLEMU OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Doktorska disertacija

Beograd
1973

U V O D

1. Mnogi procesi - u prirodi, fizički, biološki, procesi u čovekovom organizmu, razni tehnološki i ekonomski procesi, itd., jesu procesi kojima se može upravljati; zato je razumljivo što se postavlja problem kako upravljati takvim procesima na najbolji mogući način, odnosno kako odabrati optimalni parametar upravljanja,

Matematički formulisani, takvi problemi spadaju u oblast varijacionog računa; medjutim, kako se pokazalo, mnogi problemi važni za savremenu tehniku nisu se mogli rešavati klasičnim metodama varijacionog računa. Proučavanje jedne klase takvih probèema bilo je cilj našeg istraživanja, čije rezultate iznosimo u ovom radu.

2. Najpre ćemo navesti osnovne pojmove i činjenice koji sa odnose na jednu klasu takozvanih neklasičnih varijacionih problema, a koji su inače tokom poslednje decenije bili predmet mnogih monografija (na primer [1], [2], [4], [11])

Na kraju ovog uvodnog dela biće formulisane teorema 1 (v. [18]) i teorema 2 (v. [22]), koje daju neophodne uslove optimalnosti za razmatrane probleme.

U nizu problema pomenutog tipa ispituju se procesi kretanja objekata koja se mogu matematički izraziti sistemom diferencijalnih jednačina u vektorskom obliku

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad (1)$$

gde je $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ vektor faznog prostora X koji u svakom momentu odredjuje stanje objekta upravljanja, a $u = (u^1, u^2, \ldots, u^r)$, $r \leq n$, parametar upravljanja koji odredjuje tok procesa, dok je t vreme; $f(x,u) = (f^1(x,u), f^2(x,u), \ldots, f^n(x,u))$ predtsavlja vektorsku funkciju koja karakteriše proces upravljanja.

Da bi se rešio sisetm diferencijalnih jednačina (1), neophodno je znati na koji se način menjaju u toku vremena parametri upravljanja u^j, $j = 1, 2, \ldots, r$. Ako je poznato ponašanje funkcije upravljanja $u^j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $t > t_o$, može se iz sistema od n diferencijalnih jednačina

$$x^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1(t), u^2(t), \ldots, u^r(t)) \qquad (2)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

jednoznačno odrediti kretanje objekta upravljanja za $t > t_o$ ukoliko je poznato njegovo početno fazno stanje za $t = t_o$, što sledi iz teoreme o egzistenciji i jedinosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina (videti, na primer, [9],[10]).

3. Varijacioni problem koji se odnosi na objekt upravljanja (2) sastoji se u sledećem: razmatra se funkcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^o(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1, u^2, \ldots, u^r)dt \qquad (3)$$

sa zadatom funkcijom $f^o(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1, u^2, \ldots, u^r)$;

svakom upravljanju $u^j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, zadatom u nekom intervalu $t_o \leq t \leq t_1$, odgovara odredjeno značenje funkcionala (3).

Napomenimo da je u ovom radu reč o takozvanim autonomnim procesima izraženim sistemima diferencijalnih jednačina oblika (2). Naime, iz autonomnosti sistema (2) (to jest, zbog činjenice da leva strana jednačinâ sistema (2) ne zavisi eksplicitno od vremena t) sledi da se svojstva parametara upravljanja $u(t)$ koja utiču na ponašanje razmatranog objekta upravljanja ne menjaju ako se parametar upravljanja $u(t)$ translatorno pomera duž ose t. Drugim rečima, ako je $u(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, parametar upravljanja pod čijim se dejstvom objekt upravljanja (2) prevodi iz faznog stanja x_o u fazno stanje x_1, a funkcional (3) dobija odredjenu vrednost J, tada za praizvoljnu realnu vrednost h, parametar upravljanja $u(t+h)$, $t_o-h \leq t \leq t_1-h$, daje potpuno isti efekat.

Pretpostavimo da postoji parametar upravljanja $u(t)$ pod čijim dejstvom objekt upravljanja (1) dospeva iz početnog faznog stanja $x_o = (x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^n)$ u zadato konačno fazno stanje $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$ za vreme $t_1 - t_o$ koje nije fiksirano.

Traži se parametar upravljanja $u^j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, koji objekt upravljanja (1) pravodi iz početnog faznog stanja x_o u konačno fazno stanje x_1 tako da pri tome funkcional (3) dostiže minimalnu vrednost.

U slučaju kada je funkcija $f^o(x^1, x^2, \ldots, x^n; u^1,$

$u^2, \ldots, u^n) = 1$, funkcional (3) svodi se na $J = t_1 - t_0$, i varijacioni problem koji smo formulisali svodi se na problem nalaženja upravljanja $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, pod čijim će dejstvom objekt upravljanja (2) za najkraće vreme dospeti iz za8 datog početnog faznog stanja $x_0 = x(t_0)$ u zadato konačno fazno stanje $x_1 = x(t_1)$, to jest na takozvani optimalni problem u smislu brzine dejstva.

4. U problemima savremene tehnike parametri upravljanja su ograničeni strukturom samog objekta upravljanja, i ma da se u matematičkoj formulaciji problema optimalnog upravljanja množtvo parametara upravljanja U može smatrati proizvoljnim, najviše su se izučavali problemi sa ograničenjima u odnosu na množtvo U, a koji su od velikog značaja za primenu u tehnici.

Posebno je značajan slučaj zatvorenog množtva U, $|u^j| \leq M$, $M > 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, koji dopušta mogućnost optimalnosti graničnih vrednosti parametara upravljanja, a upravo to ne dozvoljava primenu klasičnih varijacionih metoda pri rešavanju takvih problema.

Na primer, u problemu optimizacije u smislu brzine dejstva linearnog objekta upravljanja

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

u kojem su funkcije f^i linearne po promenljivim x^i i u^j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $r \leq n$, a množtvo dopustivih upravljanja U je konveksan zatvoren poliedar, optimalno upravljanje $u^j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, realizuje deo po deo konstantna funkcija sa vrednostima u temenima poliedara U; prema tome, optimalno upravljanje u ovom slučaju daje pravilo po kojem parametar upravljanja skokovito prelazi iz jednog temena u drugo teme poliedra U.

Zato se najčešće pretpostavlja da dopustiva upravljanja pripadaju mnoštvu deo po deo neprekidnih funkcija, a to znači da su odgovarajuće trajektorije kretanja objekta upravljanja (1) deo po deo diferencijabilne funkcije, što, razume se, isključuje mogućnost primene klašičnih varijacionih metoeds pri rešavanju razmatranih problema.

Rešavanje takvih varijacionih problema je i dovelo do razvijanja novih pravaca u teoriji optimalnih procesa*).

Sredinom šezdesetih godina je L. S. Pontrjagin sa svojim saradnicima formulisao i razvio jednu novu metodu, - takozvani princip maksimuma**), - pomoću koje se veoma uspešno rešavaju varijacioni problemi navedenog tipa.

---

*) Par $(u^*(t), x^*(t))$ nazivamo optimalnim procesom ako je $u^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, optimalno upravljanje, a $x^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, odgovarajuća optimalna trajektorija.

**) Princip maksimuma je prvi put formulisan u radu [18] L. S. Pontrjagina, V. G. Boltjanskog i R. V. Gamkrelidzea 1956. godine; u to vreme, ta metoda je davala rešenje u nekoliko specijalnih slučajeva razmatrane klase problema. Kasnije je primena principa maksimuma, kao moćnog aparata, proširena na rešavanje i raznih klasa neklasičnih varijacionih problema.

5. Predjimo sada na formulaciju teoreme po kojoj i sama metoda nosi naziv princip maksimuma. Pretpostavimo da se razmatrani objekt upravljanja kreće po zakonu

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u). \tag{4}$$

Vektorske funkcije $f^i(x,u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neprekidne su po promenljivim $x^1, x^2, \ldots, x^n, u$ i neprekidno diferencijabilne po promenljivim $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Dopustivo upravljanje $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $u(t) \in U$ (gde je U kompaktno množtvo deo po deo neprekidnih funkcija), prevodi objekt upravljanja iz faznog stanja x_0 u fazno stanje x_1 ako odgovarajuće rešenje jednačine (4) zadovoljava granične uslove

$$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1.$$

Neka je, osim toga, data još i funkcija $f^0(x,u)$ koja je u celom prostoru $X \times U$ definisana i neprekidna zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Optimalnim upravljanjem $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, naziva se ono dopustivo upravljanje koje objekt upravljanje (4) prevodi iz faznog stanja x_0 u fazno stanje x_1 tako da pri tom funkcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt \tag{5}$$

dostiže minimalnu vrednost; odgovarajuća trajektorija $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koja zadovoljava granične uslove $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, naziva se optimalnom trajektorijom. Ako faznim koordinatama $x^1, x^2, \ldots, x^n$, koje se menjaju po zakonu (4), odnosno (2), pridodamo još i koordinatu x^0 koja se menja po zakonu

$$\frac{dx^0}{dt} = f^0(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

dobijamo sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,u), \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{6}$$

ili, u vektorskom obliku,

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}(\overline{x},u), \tag{6'}$$

gde su $\overline{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^n) = (x^0, x)$ i $\overline{f}(\overline{x},u) = (f^0(x,u), \ldots, f^n(x,u))$ vektori u $n + 1$ - dimenzionom faznom prostoru $\overline{X}$.

Neka je $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dopustivi proces[x)] s početnim uslovom $x(t_0) = x_0$; sa $\overline{x}_0 = (0, x_0)$ (to jest $\overline{x}_0 = (0, x , \ldots, x))$ označićemo tačku prostora $\overline{X}$. Tada rešenje sistema (6') koje odgovara dopustivom upravljanju $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, s početnim uslovom $\overline{x}(t_0)$ $\overline{x}_0$, ima oblik

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt, \qquad x = x(t),$$

a za $t = t_1$ je

$$x^0 = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt = J, \qquad x = x_1,$$

---

x) Dopustivim procesom naziva se par $(u(t), x(t))$ koji se sastoji iz upravljanja $u(t)$ i odgovarajuće trajektorije $x(t)$.

što znači da za $t = t_1$ trajektorija $\overline{x}(t)$ sistema (6'), koja polazi iz tačke $\overline{x}(t_o) = \overline{x}_o$, prolazi kroz tačku $\overline{x} = (J, x_1)$.

Ako označimo sa P pravu u $n + 1$ - dimenzionom vektorskom prostoru $\overline{X}$ koja prolazi kroz tačku $\overline{x} = (0, x_1)$ i paralelna je osi x^o, tada se dobija da trajektorija $\overline{x}(t)$, odnosno rešenje sistema (6') u momentu $t = t_1$, prolazi kroz tačku sa koordinatom $x^o = J$ koja leži na pravoj P.

U tom slučaju, formulisani varijacioni problem se može iskazati u sledećem obliku:

U $n + 1$ - dimenzionom faznom prostoru $\overline{X}$ date su tačka $x_o = (0, x_o)$ i prava P koja je paralelna osi x^o i prolazi kroz tačku $(0, x_1)$. Treba odrediti dopustivo upravljanje $u(t)$ za koje odgovarajuća trajektorija $\overline{x}(t)$ sistema (6') s početnim uslovom $\overline{x}(t_o) = x_o$ preseca pravu P tako da presečna tačka ima najmanju koordinatu x^o.

Da bismo formulisali teoremu - princip maksimuma - koja daje rešenje postavljenog problema, mi ćemo pored osnovnog sistema (6) razmatrati i sistem jednačina sa pomoćnim promenljivim $\Psi_o, \Psi_1, \dots, \Psi_n$:

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = - \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f^k(x,u)}{x^i} \Psi_k, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (7)$$

koji, za dati dopustivi proces $(u(t), x(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$, s početnim uslovom $\overline{x}(t_o) = x_o$, možemo napisati u obliku

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x(t), u(t))}{x^i} \psi_k, \qquad (7')$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n);$$

a to je linearan homogen sistem koji za proizvoljne početne vrednosti ψ_i ima jedinstveno rešenje $\overline{\psi} = (\psi_o, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ definisano u celom intervalu $t_o \leq t \leq t_1$ definisanosti dopustivog procesa $(u(t), x(t))$ i, kao i trajektorija $x(t)$, neprekidno i deo po deo diferencijabilno.

Ako se uvede takozvana Hamiltonova funkcija

$$\mathcal{H}(\overline{\psi}, x, u) = \langle \overline{\psi}, \overline{f}(x,u) \rangle = \sum_{k=0}^{n} \psi_k f^k(x,u),$$

tada se sistemi (6) i (7) mogu pomoću te funkcije napisati u obliku Hamiltonovog sistema

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (8)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (9)$$

Dakle, za proizvoljno dopustivo upravljanje $u(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, i za dat početni uslov $\overline{x}(t_o) = x_o$, dobija se iz sistema (8) odgovarajuća trajektorija

$$\overline{x}(t) = (x^o(t), x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

a zatim i rešenje sistema (9)

$$\overline{\psi}(t) = (\psi_o(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$$

koje odgovara funkcijama $u(t)$ i $\overline{x}(t)$.

Za konstantne vrednosti $\overline{\Psi}$ i x, funkcija $\mathcal{H}$ zavisi samo od parametra upravljanja $u \in U$. Neka je

$$\mathcal{M}(\overline{\Psi}, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\overline{\Psi}, x, u).$$

Ako se supremum neprekidne funkcije $\mathcal{H}$ dostiže u nekoj tački $u \in U$, tada je $\mathcal{M}(\overline{\Psi}, x)$ maksimum funkcije $\mathcal{H}$ za fiksirane vrednosti $\overline{\Psi}$ i x. Zbog toga se sledeća teorema, koja predstavlja neophodan uslov optimalnosti, a čiju suštinu izražava relacija (10), i naziva principom maksimuma

T e o r e m a 1. Neka je $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dopustivo upravljanje kojem odgovara trajektorija $\overline{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, takva da je $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, $\overline{x}(t_1) \in P$, Za optimalnost procesa upravljanja $(u(t), \overline{x}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, neophodna je egzistencija takve vektorske funkcije $\overline{\Psi}(t) = (\Psi_0(t), \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))$, $\overline{\Psi}(t) \neq 0$, koja odgovara procesu $(u(t), \overline{x}(t))$ s obzirom na relacije (8) i (9) i za koju su ispunjeni sledeći uslovi:

1° $$\max_{u \in U} \mathcal{H}(\overline{\Psi}(t), x(t), u) = \mathcal{H}(\Psi(t), x(t), u(t)) = \\ = \mathcal{M}(\overline{\Psi}(t), x(t)), \qquad t \in [t_0, t_1] \qquad (10)$$

2° za $t = t_1$: $\quad \Psi_0(t_1) \leq 0, \mathcal{M}(\overline{\Psi}(t_1), x(t_1)) = 0.$ (11)

6. Za problem optimalnosti u smislu brzine dejstva, teorema 1 će imati nešto izmenjen oblik. Naime, u tom slučaju je $f^0(x, u) = 1$, te je

$$\mathcal{H} = \Psi_0 + \sum_{\ell=1}^{n} \Psi_\ell f^\ell(x,u).$$

Ako uvedemo funkciju $H(\Psi, x, u) = \sum_{\ell=1}^{n} \Psi_\ell f^\ell(x,u)$, gde je sa Ψ označen n-dimenzioni vektor $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$, tada dobijamo sistem Hamiltonovih jednačina

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{12}$$

$$\frac{d\Psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{13}$$

Za fiksirane vrednosti Ψ i x, H predstavlja funkciju parametra u čiji ćemo supremum označiti sa

$$\sup_{u \in U} H(\Psi, x, u) = M(\Psi, x).$$

Kako je $\mathcal{H}(\bar{\Psi}, x, u) = H(\Psi, x, u) + \Psi_0$, imamo da je

$$M(\Psi, x) = \mathcal{M}(\bar{\Psi}, x) - \Psi_0,$$

što znači da se uslovi (10) i (11) teoreme 1 svode na

$$H(\Psi(t), x(t), u(t)) = M(\Psi(t), x(t)) = -\Psi_0 \geqslant 0.$$

Prema tome, može se formulisati sledeća teorema*):

T e o r e m a 2. Neka je $(u(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, dopustivi proces koji prevodi objekt upravljanja iz faznog stanja $x_0 = x(t_0)$ u fazno stanje $x_1 = x(t_1)$. Za optimalnost u smislu brzine dejstva procesa $(u(t), x(t))$ neophodna je egzistancija takve odgovarajuće**) vektorske funkcije $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_n(t))$,

---

*) V. [19] i [22]

**) Odgovarajuća u smislu sistema (13).

$\psi(t) \neq 0$, za koju važe uslovi:

1^0 $$\max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)), \ \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{14}$$

2^0 za $t = t_1$: $$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) = M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0. \tag{15}$$

7. Sada ćemo ukratko izložiti sadržaj ovog rada.

U prvom poglavlju se formuliše princip maksimuma za linearni problem optimizacije u smislu brzine dejstva za slučaj sa pokretnim krajevima. Prethodno se polazni sistem difeS rencijalnih linearnih diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

koji karakteriše ponašanje razmatranog objekta upravljanja, linearnom transformacijom zamenjuje jednostavnijim linearnim sistemom

$$\dot{x} = Ax + v,$$

a zatim se uvode definicija 1 i definicija 2, koje je V. G. Boltjanski koristio u svom radu [17] prilikom formulisanja teoreme koja za razmatrani problem daje neophodan i dovoljan uslov optimalnosti u smislu brzine dejstva, uz pretpostavku da je množtvo M_1 na kojem se proces završava (takozvano terminalno množtvo) jako stabilno.

Osim toga, s obzirom na to da je reč o problemu sa pokretnim krajevima, uvode se uslovi transverzalnosti za linearni objekt upravljanja.

Na početku drugog poglavlja izneti su rezultati V. G. Boltjanskog koji važe i za slučaj kada je terminalno mnoštvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno (lema 1, lema 2 i posledica te leme). Lema 3, koja se koristi u daljem izlaganju, utvrdjuje važno svojstvo konveksnih mnoštava n-dimenzionog euklidskog faznog prostora X. Pored ostalog, u tom poglavlju pojavljuju se definicija 5 i definicija 6, koje sam uveo u svom radu [30] i koristio u formulisanju rezultata ovog istraživanja.

Princip maksimuma, u obliku teoreme 4 i teoreme 5, koje daju neophodne i dovoljne uslove optimalnosti za razmatrani problem s pokretnim krajevima, predstavlja glavni deo tog poglavlja. Pomenute teoreme sam formulisao i dokazao u radu [20]; one se odnose na slučaj kada je terminalno mnoštvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno.

U tim teoremama koristio sam lemu 4 i lemu 5, koje sam takodje formulisao i dokazao u radu [20].

U trećem i ujedno poslednjem poglavlju ovog rada dati su kroz teoreme 6, 7 i 8 dovoljni uslovi optimalnosti koji se odnose na neke specijalne slučajeve razmatranog problema. Neki od tih razultata su već objavljeni u radovima [20] i [21]. U teoremi 7 koristi se i takozvani pojačani uslov transverzalnosti u desnom kraju, koji sam uveo u radu [21].

U ovom poglavlju navedena su i dva primera; dok primer 1 služi za ilustraciju teoreme 7, preko primera 2 je dokazano da uslov naveden u teoremi 7 ne predstavlja neophodan uslov optimalnosti (videti [21]).

Teorema 8, koja proizlazi iz teoreme 6, i lema 6 su neophodne u realizaciji postupka kojim se, na kraju ovog poglavlja, dokazuje teorema 9.

Rezultati koje sam formulisao i dokazao u drugom i trećem poglavlju ovog rada zaokružuju problematiku koja se odnosi na one slučajeve razmatranog linearnog problema optimalnog upravljanja s pokretnim krajevima u kojima je terminalno množtvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno.

I

LINEARNI PROBLEM OPTIMIZACIJE U SMISLU BRZINE DEJSTVA

1. Kao što je rečeno, princip maksimuma uveden je kao neophodan uslov optimalnosti. Medjutim, kada je reč o linearnom problemu upravljanja u smislu brzine dejstva, princip maksimuma predstavlja ne samo neophodan već i dovoljan uslov optimalnosti, što su dokazali R. V. Gamkrelidze [23],[25], za problem sa fiksiranim krajevima, i V. G. Boltjanski [17], za problem s pokretnim krajevima.

Primetimo da u linearnom problemu Hamiltonova funkcija H dobija sledeći oblik:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^k x^j + \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell^k u^\ell \Big) =$$

$$= \psi\,(Ax + Bu) = \psi Ax + \psi Bu,$$

gde je A kvadratna matrica reda n, a B matrica dimenzija $n \times r$.

Što se tiče sistema za pomoćne promenljive $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, s obzirom na to da je

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big[\sum_{k=1}^{n} \psi_k \Big(\sum_{k=1}^{n} a_j^k x^j + \sum_{\ell=1}^{r} b_\ell^k u^\ell \Big) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k x^k,$$

imamo da je

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} a_i^k \psi_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (*)$$

to je takozvani konjugovani sistem homogenog sistema

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k = 0,$$

korespondentnog nehomogenom sistemu diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + \sum_{j=1}^{r} b_j^i u^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ (**)$$
$$r \leq n.$$

Sistem (*) može se napisati u vektorskom obliku

$$\dot{\psi} = -A'\psi,$$

gde je $A' = (a_i^k), i, k = 1, 2, \ldots, n$, transponovana matrica matrice $A = (a_k^i), i, k = 1, 2, \ldots, n$, koja se javlja u sistemu (**).

Napomenimo još i to da se, u linearnom problemu, uslov 1^o teoreme 2 svodi na uslov

$$\max_{u \in U} \psi(t) Bu = \psi(t) Bu(t), \qquad \forall\, t \in [t_o, t_1].$$

Uslov 2^o iste teoreme postaje, medjutim, suvišan. Naime, opštost linearnog problema sa fiksiranim krajevima neće se bitno narušiti ako se uvedu sledeći zahtevi:

1) zadato konačno stanje x_1 podudara se sa koordinatnim početkom n-dimenzionog faznog prstora X, $x_1 = (0, 0, \ldots, 0)$;

2) oblast upravljanja U je r-dimenzioni konveksan zatvoren poliedar koji sadrži koordinatni početak r-dimenzionog

prostora promenljivih $u^1, u^2, \ldots, u^r$, s tim što se koordinatni početak ne podudara ni sa jednim temenom poliedra U.

Pod uslovima 1) i 2), u izrazu

$$H(\Psi(t_1), u(t_1), x(t_1)) =$$

$$= \Psi(t_1) Ax(t_1) + \Psi(t_1) Bu(t_1)$$

prvi sabirak je jednak nuli jer je $x(t_1) = 0$, a drugi sabirak je uvek nenegativan jer za $u^1 = u^2 = \ldots = u^r = 0$ imamo da je $\Psi(t_1)Bu = 0$, što znači da je

$$\Psi(t_1) Bu(t_1) = \max_{u \in U} \Psi(t_1) Bu \quad 0.$$

Dakle, u linearnom problemu jé uvek ispunjen uslov

$$H(\Psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geqslant 0.$$

2. S obzirom na to da jepredmet ovog rada linearni problem optimizacije u smislu brzine dejstva s pokretnim krajevima, neophodno je osvrnuti se na teoremu V. G. Boltjanskog koja daje neophodne i dovoljne uslove optimalnosti.

Reč je o objektu upravljanja čije je kretanje u faznom prostoru X (n-dimenzioni euklidski prostor) dato sistemom diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + \sum_{j=1}^{r} b_j^i u^j, \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad r \leqslant n,$$

gde su a_k^i i b_j^i zadati konstantni koeficijenti, ili u obliku vektorske jednačine

$$\overset{\circ}{x} = Ax + Bu \tag{1.1"}$$

gde su kvadratna matrica A reda n i matrica B dimenzija $n \times r$ matrice s konstantnim komponentama, dopustivi parametar upravljanja u je deo po deo neprekidna funkcija (sa konačno mnogo prekida prve vrste) koja pripada zatvorenom, ograničenom i konveksnom množtvu U.

Vektorska jednačina (1.1′) može se uprostiti na sledeći način. Ako napišemo

$$v^i = \sum_{j=1}^{r} b_j^i u^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

tada smo umesto r parametara upravljanja $u^1, u^2, \ldots, u^r$ uveli n parametara upravljanja $v^1, v^2, \ldots, v^n$, što znači da smo sistem (1.1) zamenili linearnim sistemom

$$\dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + v^i, \tag{1.3}$$

odnosno vektorsku jednačinu (1.1′) vektorskom jednačinom

$$\dot{x} = Ax + v. \tag{1.3′}$$

S obzirom na linearnost preslikavanja (1.2), ograničeno zatvoreno konveksno množtvo dopustivih upravljanja U preslikaće se u ograničeno zatvoreno konveksno množtvo V n-dimenzionog faznog prostora X; razume se da su novouvedeni dopustivi parametri upravljanja $v \in V$ takodje deo po deo neprekidne funkcije.

Svakom dopustivom upravljanju $v(t) \in V$ zadatom u nekom intervalu $t_0 \leq t \leq t_1$ odgovara trajektorija $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koja za sve $t \in [t_0, t_1]$, uzuzev u tačkama prekida upravljanja $v(t)$, zadovoljava jednačinu kretanja (1.3′)

datog objekta upravljanja. Kao što je već rečeno, ova trajektorija se jednoznačno odredjuje iz sistema (1.3), odnosno iz jednačine (1.3′), ako su dati dopustivo upravljanje $v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, i početno fazno stanje $x_0 = x(t_0)$.

Pretpostavimo da su u faznom prostoru X data množtva M_0 i M_1, i da je $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, zadati dopustivi proces; kaže se da taj proces prevodi objekt upravljanja (1.3) iz množtva M_0 na množtvo M_1 ako su zadovoljeni uslovi

$$x(t_0) \in M_0, \qquad x(t_1) \in M_1;$$

pri tome se $t_1 - t_0$ naziva vremenom prelaska iz množtva M_0 na množtvo M_1.

Proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, naziva se optimalnim ako je nemogućno dati objekt upravljanja prevesti iz množtva M_0 na množtvo M_1 za vreme manje od $t_1 - t_0$.

S obzirom na to da je linearni objekt upravljanja (1.3) u potpunosti definisan matricom A i množtvom V, celishodno je ubuduće označavati taj objekt sa (A, V).

3. Za dalje izlaganje neophodna je sledeća definicija:

D e f i n i c i j a. Zatvoreno množtvo $M_1 \in X$ naziva se stabilnim u odnosu na linearni objekt (A, V) ako za $x_0 \in M_1$ i proizvoljan interval $t_0 \leq t \leq t_1$ postoji takvo dopustivo upravljanje $v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, da odgovarajuća trajektorija $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koja polazi iz tačke $x_0 = x(t_0)$, u potpunosti pripada množtvu M_1, to jest $x(t) \in M_1$, $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Formulišimo sada linearni problem optimalnog upravljanja u smislu brzine dejstva:

U n-dimenzionom faznom prostoru X linearnog objekta (A, V) data su dva zatvorena konveksna množtva M_0, M_1, pri čemu je množtvo M_1 stabilno u odnosu na (A, V). Traži se optimalni proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji će za najkraće vreme prevesti dati linearni objekt iz množtva M_0 na množtvo M_1.

Da bi dokazao da je princip maksimuma i dovoljan uslov optimalnosti za formulisani linearni problem, V. G. Boltjanski je za terminalno množtvo M_1 (to jest množtvo na kojem se proces završava) uveo još jedno ograničenje izraženo sledećom definicijom:

D e f i n i c i j a. 2. Stabilno množtvo M_1 naziva se jako stabilnim ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji otvoreno množtvo U, $M_1 \subset U$, takvo da za $\forall x_0 \in U$ postoji dopustivi proces $(v(t), x(t))$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, koji zadovoljava uslove

$$x(0) = x_0, \qquad x(\varepsilon) \in M_1.$$

Pored jednačine (1.3') razmatraćemo i jednačinu

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \tag{1.4}$$

u kojoj je $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ pomoćna vektorska promenljiva, dok je A' transponovana matrica matrice A.

U teoremi koja daje neophodan i dovoljan uslov optimalnosti u smislu brzine dejstva za linearni objekt (A, V) javljaju se i sledeći uslovi:

1^{o} U s l o v m a k s i m u m a. Neka je $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ proizvoljno rešenje jednačine (1.4), a $v(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, proizvoljno dopustivo upravljanje. Funkcije $\psi(t)$, $v(t)$ zadovoljavaju u intervalu $t_o \leq t \leq t_1$ uslov maksimuma ako je u svakoj tački $t \in [t_o, t_1]$ u kojoj je upravljanje neprekidno

$$\max_{v \in V} \psi(t)\, v = \psi(t)\, v(t). \qquad (1.5)$$

2^{o} U s l o v t r a n s v e r z a l n o s t i u l e v o m k r a j u je ispunjen za proizvoljno rešenje $\psi(t)$ jednačine (1.4) i proizvoljnu dopustivu trajektoriju $x(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, linearnog objekta (A, V) koja polazi iz mnoštva M_o, $x(t_o) \in M_o$, ako važi jednakost

$$\max_{x \in M_o} \psi(t_o)\, x = \psi(t_o)\, x(t_o). \qquad (1.6)$$

3^{o} U s l o v t r a n s v e r z a l n o s t i u d e s n o m k r a j u važi za proizvoljno rešenje $\psi(t)$ jednačine (1.4) i proizvoljnu dopustivu trajektoriju $x(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, objekta (A, V) koja se završava na mnoštvu M_1, $x(t_1) \in M_1$, ako je

$$\min_{x \in M_1} \psi(t_1)\, x = \psi(t_1)\, x(t_1). \qquad (1.7)$$

N a p o m e n a. Za linearni sistem

$$\dot{x}^{i}(t) = \sum_{k=1}^{n} a^{i}_{k}(t)\, x(t) + \sum_{j=1}^{r} b^{i}_{j}(t)\, u^{j}(t),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

koji se, uvodjenjem pomoćne funkcije

$$b(t) = (b^1(t), b^2(t), \dots, b^n(t)),$$

$$b^i(t) = \sum_{j=1}^{r} B_j^i(t)\, u^j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

može napisati u obliku normalnog sistema linearnih diferencijalnih jednačina

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k^i(t)\, x^k + b^i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

važi sledeća teorema egzistencije i jedinosti rešenja posmatranog sistema diferencijalnih jednačina[x]:

T e o r e m a. Ako su funkcije $a_k^i(t)$ i $b^i(t)$, $i,k = 1, 2, \dots, n$, definisane i neprekidne u intervalu $\alpha < t < \beta$, tada za $\forall t, \alpha < t < \beta$ i proizvoljne brojeve $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ postoje funkcije $x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)$ definisane u intervalu $\alpha < t < \beta$ koje su rešenja prethodnog sistema diferencijalnih jednačina i jednoznačno su odredjene početnim uslovima

$$x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. U radu [17] V. G. Boltjanski je formulisao i dokazao sledeću teoremu koja je od izuzetnog značaja za teoriju linearnih optimalnih upravljanja u smislu brzine dejstva.

T e o r e m a 3. Razmatra se linearni problem optimalnog upravljanja (1.3′) i pretpostavlja se da je množtvo M_1 na kojem se završava proces jako stabilno.

---

[x] Dokaz ove teoreme videti, na primer, u [10].

Neka je $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, trajektorija objekta (A, V) koja osgovara dopustivom upravljanju $v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, in prevodi dati objekt iz množtva M_0 na množtvo M_1. Za optimalnost procesa $(x(t), x(t))$ neophodno je i dovoljno da postoji takvo ne trivijalno rešenje $\psi(t)$ jednačine (1.4) da funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslove transvertalnosti u oba kraja.

Kao što se vidi, u teoremi 3 se zahteva da množtvo M_1 bude jako stabilno u odnosu na linearni objekt (A, V); medjutim, u većini slučajeva nije moguóno proveriti da li je neko množtvo jako stabilno ili je samo stabilno. Zbog toga je bilo potrebno da se uvedu još neki uslovi koji obezbedjuju jaku stabilnost terminalnog množtva M_1.

Ovde ćemo pomenuti samo jedan od tih uslova, - takozvani uslov nedegenerisanoszi, koji, doduše, sam za sebe ne obezbedjuje jaku stabilnost množtva M_1, ali se često javlja u teoriji linearnih optimalnih procesa.

D e f i n i c i j a 3. Kaže se da je za linearni objekt (A, V) zadovoljen uslov nedegenerisanosti ako u n-dimenzionom faznom prostoru X ne postoji sopstveni potprostor L $(X \supset L \neq \emptyset$, $\dim L \leq n-1)$ invarijantan u odnosu na transformaciju A, i pri tom je zadovoljen uslov $v - v' \in L$, $\forall\, v, v' \in V$, to jest oblast upravljanja V sadrži se u nekoj hiper-ravni paralelnoj potprostoru L.

Za dalje izlaganje biće nam potrebna i sledeća definicija:

D e f i n i c i j a 4. Pretpostavimo da stabilno mnoštvo M_1 nije i jako stabilno u odnosu na linearni objekt (A, V), i neka je $T > 0$. Tada mnoštvo svih tačaka x faznog prostora X iz kojih pod dejstvom nekog dopustivog upravljanja $v \in V$ objekt upravljanja dospeva na mnoštvo M_1 krećući se po zakonu (1.3′) za vreme manje od T ili jednako T, naziva se sferom dostiživosti mnoštva M_1 koja odgovara vremenu $T > 0$.

Mnoštvo Y svih tačaka iz kojih pod dejstvom nekog dopustivog upravljanja linearni objekt (A, V) može dospeti na terminalno mnoštvo M_1 zove se oblast dostiživosti mnoštva M_1: $Y = \bigcup\limits_{T>0} Y_T$.

Svakako da su za teoriju linearnih optimalnih procesa od interesa rezultati koji se odnose na slučaj kada je terminalno mnoštvo M_1 stabilno ali nije i jako stabilno i kada, razume se, nisu ispunjeni uslovi dovoljni za jaku stabilnost mnoštva M_1 u odnosu na linearni objekt (A, V).

Upravo na taj slučaj odnose se razultati koje sam dobio ispitujući postavljeni problem i koje sam izložio u narednim poglavljima II i III.

II

PRINCIP MAKSIMUMA

KAO NEOPHODAN I DOVOLJAN USLOV OPTIMALNOSTI

1. U daljem izlaganju koristićemo se i sledećim rezultatima koje je V. G. Boltjanski objavio u radu [ ] i koji važe za slučaj kada je terminalno mnoštvo M_1 stabilno, ali ne i jako stabilno.

L e m a 1. Ako je x_o unutrašnja tačka sfere dostiživosti Y_T, tada postoji dopustivi proces $(v(t), x(t))$ koji prevodi linearni objekt upravljanja (A, V) iz tačke x_o na mnoštvo M_1 za vreme manje od T.

L e m a 2. Neka je $v(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, proizvoljno deo po deo neprekidno upravljanje a $x(t)$ odgovarajuća trajektorija sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + v(t) \tag{2.1}$$

sa polaznom tačkom $x_o = x(t_o)$. Neka je $\psi(t)$ proizvoljno rešenje sistema

$$\dot{\psi} = - A'\psi. \tag{2.2}$$

U tom slučaju za sve tačke u kojima je upravljanje $v(t)$ neprekidno važi relacija

$$\frac{d}{dt}(\psi(t), x(t)) = \psi(t)\, v(t), \tag{2.3}$$

to jest

$$\psi(t_1)\,x(t_1) - \psi(t_0)\,x(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau)\,v(\tau)\,d\tau. \qquad (2.3')$$

P o s l e d i c a. Iz leme 2 proizlazi da, ako je $v(t) = 0$, to jest ako je $x(t)$ proizvoljno rešenje homogene jednačine $\dot{x} = Ax$, a $\psi(t)$ proizvoljno rešenje odgovarajuće konjugovane jednačine $\dot{\psi} = -A'\psi$, tada proizvod $\psi(t)\,x(t)$ ima konstantnu vrednost.

Celishodno je uvesti sledeću definiciju[x]:

D e f i n i c i j a 5. Neka je $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dopustivi proces koji realizuje prelazak objekta upravljanja iz množtva M_0 na množtvo M_1. Ako postoji netrivijalno rešenje $\psi(t)$ sistema (2.2) za koje funkcija $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslove transverzalnosti na levom i desnom kraju, tada ćemo proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, nazivati ekstremalnim procesom.

N a p o m e n a. V. G. Boltjanski je uz pretpostavku da ga linearni objekt (A, V) važi uslov nedegenerisanosti dokazao (v. lemu 5 u radu [17]) da je svaka sfera dostiživosti Y_T, $T > 0$, stabilnog množtva M_1 konveksno telo, to jest da sadrži unutrašnje tačke u odnosu na n-dimenzioni fazni prostor X.

---

x) Ovu definiciju uveo sam u radu [30], str. 265.

Pošto će nam ta činjenica biti potrebna u daljem izlaganju, a s obzirom na to da ne pretpostavljamo da je uslov nedegenerisanosti ispunjen, koristićemo sledeću lemu (v. T 25.4 [3])

L e m a 3. Svako konveksno mnoštvo euklidskog n-dimwnzionog faznog prostora X ili je konveksno telo ili potpuno leži u nekoj hiper-ravni čija je dimenzija manja od n.

Neka je $M \subset X$ proizvoljno konveksno mnoštvo a $\xi_o \in M$ proizvoljno odabrana tačka. Posmatrajmo sve moguće vektore oblika $\xi_o\xi$, gde $\xi \in M$. Iz mnoštva vektora $\{\xi_o\xi, \xi \in M\}$ odaberimo maksimalno mogući broj linearno nezavisnih vektora i pretpostavimo da su to vektori $\xi_o\xi_1, \ldots, \xi_o\xi_k$, gde je $k \leq n$.

Razmotrimo slučaj kada je $k = n$; tada se, zbog linearne nezavisnosti vektora $\xi_o\xi_1, \ldots, \xi_o\xi_n$, tačke $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$ ne sadrže ni u jednoj hiper-ravni n-dimenzionog faznog prostora X, to jest predstavljaju temena n-dimenzionog simpleksa $[\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Kako mnoštvo M sadrži sve tačke $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$, to ono sadrži i konveksan omotač tih tačaka pa, prema tome, sadrži n-dimenzioni simpleks $[\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, koji predstavlja konveksno telo, to jest sadrži unutrašnje tačke, a to znači da i mnoštvo M sadrži unutrašnje tačke, - dakle, da je M konveksno telo.

Pretpostavimo sada da je $k < n$, i neka je x proizvoljna tačka množtva M. Vektori $\xi_0\xi_1, \ldots, \xi_0\xi_k, \xi_0x$ su linearno zavisni jer ih ima $k+1$, te se vektor ξ_0x može predstaviti kao linearna kombinacija preostalih k vektora:

$$\xi_0x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \xi_0\xi_i,$$

što znači da tačka x leži u k-dimanzionoj hiper-ravni P koja prolazi kroz tačku ξ_0 i čiju bazu čine vektori $\xi_0\xi_1, \ldots, \xi_0\xi_k$. Kako je tačka $x \in M$ proizvoljno izabrana, to isti zaključak važi i za bilo koju drugu tačku množtva M, to jest $M \subset P$.

Ova lema ima i značajne posledice, koje se odnose na k-dimenzionu hiper-ravan P.

P o s l e d i c a 1. Od svih hiper-ravni koje sadrže množtvo M, k-dimenziona hiper-ravan P ima najmanju dimenziju.

Zaista, pretpostavili smo da množtvo M sadrži tačke $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$, pri čemu su vektori $\xi_0\xi_1, \ldots, \xi_0\xi_k$ linearno nezavisni, što znači da ove tačke, - a samim tim i množtvo M koje ih sadrži, - ne mogu pripadati hiper-ravni čija je dimanzija manja od k.

P o s l e d i c a 2. Hiper-ravan P je jednoznačno odredjena konveksnim množtvom M kao hiper-ravan minimalne dimenzije koja sadrži M.

Ako bi postojale dve različite k-dimanzione hiper-ravni P_1 i P_2, $P_1 \supset M$, $P_2 \supset M$, tada bi njihov presek

$P_1 \cap P_2 \supset M$ bio hiper-ravan dimenzije manje od k, što protivreči posčedici 1.

P o s l e d i c a 3. Ako se hiper-ravan P posmatra kao k-dimanzioni euklidski prostor, tada je množtvo M konveksno telo u odnosu na taj prostor.

Pošto konveksni omotač tačaka $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ predstavlja k-dimanzioni simpleks $[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k]$ u k-dimanzionom euklidskom prostoru P koji sadrži unutrašnje tačke, to znači da i množtvo M u kojem ovčj simpleks leži, sadrži u prostoru P unitrašnje tačke.

D e f i n i c i j a 6. Hiper-ravan P zove se nosač konveksnog množtva M ako to množtvo nije konveksno telo u n-dimanzionom euklidskom prostoru X. Ako je, medjutim, M konveksno telo u n-dimenzionom prostoru X, tada je njegov nosač prostor X.

2. Predjimo sada na predmet našeg istraživanja. Istaknimo odmah da ćemo često koristiti sledeću lemu (v. [30] str. 266).

L e m a 4. Neka je $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dopustivi proces koji prevodi objekt upravljanja iz množtva M_0 na množtvo M_1 [xx]. Ako postoji takvo netrivijalno rešenje $\psi(t)$ sistema (2.2) za koje je proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, tada za $\forall\, \theta$, $t_0 < \theta < t_1$, hiper-ravan Γ_θ koja prolazi kroz tačku $x(\theta)$ i ortogonalna je na vektor $\psi(\theta)$ predstavlja hiper-ravan oslonca

[xx] U lemi 4, kao i u celokupnom daljem izlaganju, pretpostavlja se da su množtva M_0 i M_1 kompaktna i konveksna.

za konveksno množtvo $Y_{t_1 - \theta}$, što znači da je

$$\Psi(\theta)(x^* - x(\theta)) \geqslant 0, \quad \forall x^* \in Y_{t_1 - \theta}. \tag{2.47}$$

N a p o m e n a. Hiper-ravan Γ_θ deli fazni prostor X na dva poluprostora X_+ i X_-; neka je X_+ poluprostor koji sadrži množtvo M_1. Ako sa n_0 označimo vektpr ortogonalan na hiper-ravan Γ_θ u tački $x_0 \in \Gamma_\theta$ i orijentisan je u unutrašnjost poluprostora X_+ koji sadrži terminalno množtvo M_1, tada možemo napisati da je

$$X_+ = \{x \in X;\ n_0(x - x_0) \geqslant 0\},$$

$$X_- = \{x \in X;\ n_0(x - x_0) \leqslant 0\}.$$

D o k a z. S obzirom na to da proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, prevodi objekt upravljanja iz množtva M_0 na množtvo M_1, imamo da je $x(t_0) = x_0 \in M_0$, $x(t_1) = x_1 \in M_1$. Napišimo da je $t_1 - t_0 = T$; tada tačka x_0 pripada sferi dostiživosti Y_T, jer objekt upravljanja može iz tačke x_0 za vreme $T = t_1 - t_0$ dospeti na množtvo M_1. Dakle, tačka x_0 pripada preseku konveksnih množtava M_0 i Y_T. Kako množtvo M_0 nema zajedničkih tačaka sa unutrašnjom oblašću sfere dostiživosti Y_T, jer bi inače, s obzirom na lemu 1, objekt upravljanja mogao dospeti iz množtva M_0 na množtvo M_1 za vreme manje od $T = t_1 - t_0$, što predstavlja optimalno vreme prelaska, to postoji hiper-ravan Γ_0 koja razdvaja množtva M_0 i Y_T i prolazi kroz tačku $x_0 \in M_0 \cap Y_T$, to jest predstavlja hiper-ravan oslonca za sferu dostiživosti Y_T.

Neka je $t_0 < \theta < t_1$ i neka je $\psi(t)$ takvo netrivijalno rešenje sistema (2.2) da je proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq \leq t \leq t_1$, ekstremalan. Označimo sa Γ_θ hiper-ravan koja prolazi kroz tačku $x(\theta)$ i ortogonalna je na vektor $\psi(\theta)$ (vektor $\psi(\theta)$ je orijentisan u unutrašnjost poluprostora X_+ koji sadrži mnoštvo M_1). Dokažimo da je hiper-ravan Γ_θ hiper-ravan oslonca za sferu dostiživosti $Y_{t_1 - \theta}$, to jest da za $\forall x^* \in Y_{t_1-\theta}$ važi nejednakost

$$\psi(\theta)(x^* - x(\theta)) \geq 0.$$

Pošto tačka $x^* \in Y_{t_1-\theta}$, postoji dopustivi proces $(v^*(t), x^*(t))$, $\theta \leq t \leq t_1$, za koji su zadovoljeni granični uslovi $x^*(\theta) = x^*$, $x^*(t_1) \in M_1$. Na osnovu leme 2 dobijamo

$$\begin{aligned}
\psi(\theta)(x^* - x(\theta)) &= \\
&= (\psi(t_1)\, x(t_1) - \psi(\theta)\, x(\theta)) - \\
&\quad - (\psi(t_1)\, x^*(t_1) - \psi(\theta)\, x^*(\theta)) + \\
&\quad + (\psi(t_1)\, x^*(t_1) - \psi(t_1)\, x(t_1)) = \\
&= \int_\theta^{t_1} (\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^*(t))dt + \\
&\quad + (\psi(t_1)\, x^*(t_1) - \psi(t_1)\, x(t_1)).
\end{aligned}$$

Kako je, po pretpostavci, proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, to jest važi uslov maksimuma, imamo da je

$$\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^*(t) \geq 0, \quad \theta \leq t \leq t_1, \tag{2.5}$$

a s obzirom na uslov transverzalnosti u desnom kraju,

$$\psi(t_1)\, x^*(t_1) - \psi(t_1)\, x(t_1) \geq 0. \tag{2.6}$$

Iz relacija (2.5) i (2.6) sledi da je $\Psi(\Theta)(x - x(\Theta)) \geqslant$ $\geqslant 0$, što znači da je, zaista, Γ_Θ hiper-ravan oslonca za sferu dostiživosti $Y_{t_1-\Theta}$.

L e m a 5. Neka je $(v(t), x(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$, dopustivi proces koji realizuje prelazak objekta upravljanja iz množtva M_o na množtvo M_1. Ako postoji netrivijalno rešenje $\Psi(t)$ sistema (2.2) za koje je proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, tada funkcija

$$H(t) = \Psi(t)\dot{x}(t) =$$

$$= \Psi(t)(Ax(t) + v(t))$$

zadovoljava uslov

$$H(t) = \text{const.} \geqslant 0.$$

Konstantnost funkcije $H(t)$ je poznata činjenica[x]. Dokažimo da je $H \geqslant 0$.

Za $t = t_o$ je $H(t_o) = \Psi(t_o)\dot{x}(t_o)$. Tačka $x(t_o) = = x_o \in M_o \cap Y_{t_1-\Theta}$, a za $t_o \leq t \leq t_1$, $x(t_o) \in Y_{t_1-t_o}$. Iskoristimo sada lemu 4. Hiper-ravan Γ_o koja prolazi kroz tačku x_o ortogonalna je na vektor $\Psi(t_o)$ i predstavlja hiper-ravan oslonca za konveksno množtvo $Y_{t_1-t_o}$, to jest

$$\Psi(t_o)(x(t) - x_o) \geqslant 0 \quad \text{za} \quad \forall\, x(t) \in Y_{t_1-t_o},$$

gde je $\Psi(t_o)$ vektor orijentisan u unutrašnjost poluprostora X_+ koji sadrži sferu dostiživosti $Y_{t_1-t_o}$. Ali, tada je

$$H(t_o) = \Psi(t_o)\dot{x}(t_o) =$$

$$= \Psi_o \lim_{t\to t_o} \frac{x(t) - x(t_o)}{t - t_o} \geqslant 0,$$

---

[x] V. [28], str 10.

što je i trebalo dokazati.

Uvešćemo još jednu definiciju[x].

D e f i n i c i j a 7. Ako postoji takvo netrivijalno rešenje $\psi(t)$ sistema (2.2) da je proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, ekstremalan i da je, osim toga, zadovoljen i dopunski uslov

$$H(t) = \psi(t)\,\dot{x}(t) \equiv 0,$$

tada ćemo ekstremalni proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, nazivati isključivim procesom.

Pre nego što formulišemo teoremu koja se odnosi na isključive procese, primetimo da korišćenjem definicije 5 teorema 3 može biti formulisana na sledeći način:

T e o r e m a 3'. U razmatranom linearnom problemu optimalnog upravljanja u kojem je terminalno mnoštvo M_1 jako stabilno, za optimalnost procesa $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, neophodno je i dovoljno da taj proces bude ekstremalan.

Kao što se vidi iz teoreme 3, odnosno iz teoreme 3', bez pretpostavke o jakoj stabilnosti mnoštva M_1 ekstremalnost ne predstavlja i neophodan i dovoljan uslov optimalnosti, što se lako može videti i u primerima navedenim u radu [17]; primer 4 u istom radu pokazuje da ekstremalni proces $(v(t), x(t))$ za koji je zadovoljen uslov $H > 0$, - dakle, nije isključiv, - ne mora biti i optimalan, što znači da ekstremalnost uz

---

[x] Ovu definiciju uveo sam u radu [30], str. 265.

dopunski uslov $H > 0$ ne obezbedjuje optimalnost procesa $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji prevodi objekt upravljanja iz datog množtva M_0 na zadato stabilno množtvo M_1. Medjutim, za isti primer vezana je jedna interesantna činjenica: iako u tom primeru navedeni ekstremalni proces ne zadovoljava uslov $H \equiv 0$, to jest nije i isključivi proces, konstruisan je proces koji prevodi objekt upravljanja na množtvo M_1 brže od navedenog ekstremalnog procesa, i na taj način dokazuje se neoptimalnost tog procesa.

Sledeća teorema[x)] utvrdjuje da ova činjenica ima opšti karakter.

T e o r e m a 4. Ako, uz pretpostavku da je množtvo M_1 stabilno, ekstremalni proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji realizuje prevodjenje objekta upravljanja iz datog množtva M_0 na zadato množtvo M_1 nije optimalan, tada postoji isključivi ekstremalni proces koji realizuje to prevodjenje za kraće vreme.

D o k a z. Pretpostavimo da ekstremalni proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, nije optimalan. Tada postoji takvo dopustivo upravljanje $\tilde{v}(t)$ pod čijim dejstvom fazni objekt koji u momentu t_0 polazi iz nekog faznog stanja $\tilde{x}_0 \in \in M_0$ dospeva na terminalno množtvo M_1 u momentu $\tau < t_1$ (to jest kasnije negoli pri kretanju po trajektoriji $x(t)$). Označimo sa $\tilde{x}(t)$ faznu trajektoriju koja polazi iz tačke

---

x) Ovu teoremu formulisao sam i dokazao najpre u radu [30], str. 266.

$\tilde{x}_0$ i odgovara dopustivom upravljanju $\tilde{v}(t)$. Po pretpostavci, ova trajektorija zadovoljava sledeće granične uslove:

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \in M_0, \qquad \tilde{x}(\tau) \in M_1.$$

Neka je θ proizvoljna tačka vremenskog intervala $[t_0, \tau]$. Pošto je, po pretpostavci, proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslov transverzalnosti u levom kraju, što znače da važe relacije:

$$\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, \tilde{v}(t) \geqslant 0, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \theta,$$

$$\psi(t_0)\, x(t_0) - \psi(t_0)\, \tilde{x}(t_0) \geqslant 0.$$

Ako sada iskoristimo lemu 2 vodeći računa o prethodnim dvema relacijama, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, \tilde{x}(\theta) &= \\ &= (\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(t_0)\, x(t_0)) - \\ &- (\psi(\theta)\, \tilde{x}(\theta) - \psi(t_0)\, \tilde{x}(t_0)) + \\ &+ (\psi(t_0)\, x(t_0) - \psi(t_0)\, \tilde{x}(t_0)),\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, \tilde{x}(\theta) &\geqslant \\ &\int_{t_0}^{\theta} \psi(t)\, v(t)dt - \int_{t_0}^{\tau} \psi(t)\, \tilde{v}(t)dt = \\ &= \int_{t_0}^{\theta} (\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, \tilde{v}(t))dt.\end{aligned}$$

Dakle, važi nejednakost

$$\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, \tilde{x}(\theta) \geqslant 0, \qquad t_0 \leqslant \theta \leqslant \tau \qquad (2.7)$$

Pošto iz tačke $\tilde{x}(\theta)$ fazni objekt može biti preveden na množtvo M_1 za vreme $\tau - \theta$ (kretanjem po trajektoriji $\tilde{x}(t)$, $\theta \leq t \leq \tau$), možemo napisati da je $\tilde{x}(\theta) \in Y_{\tau - \theta} \subset Y_{t_1 - \theta}$ (po pretpostavci je $\tau < t_1$, pa je $t_1 - \theta > \tau - \theta$). Iz tačke $x(\theta)$ fazni objekt dospeva na množtvo M_1 za vreme $t_1 - \theta$ (krećući se po trajektoriji $x(t)$, $\theta \leq t \leq t_1$, što znači da je $x(\theta)$ granična tačka sfere dostiživosti $Y_{t_1 - \theta}$. Po pretpostavci, proces $(v(t), x(t))$ je ekstremalan te, prema ~~xxxx~~ lemi 4, u tački $x(\theta)$ se može postaviti hiper-ravan oslonca Γ_θ za konveksno telo $Y_{t_1 - \theta}$, to jest

$$\psi(\theta)(x^* - x(\theta)) \geqslant 0, \qquad \forall\, x^* \in Y_{t_1 - \theta},$$

a kako $\tilde{x}(\theta) \in Y_{\tau - \theta} \subset Y_{t_1 - \theta}$, dobija se nejednakost

$$\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta) - x(\theta)) \geqslant 0. \qquad (2.8)$$

Iz nejednakosti (2.7) i (2.8) sledi da je

$$\psi(\theta)(\tilde{x}(\theta) - x(\theta)) \equiv 0, \qquad t_0 \leq t \leq \tau\,, \qquad (2.97$$

Pretpostavimo sada da je θ_0 proizvoljna tačka vremenskog intervala $t_0 < t < \tau$, u kojoj su funkcije upravljanja $v(t)$ i $\tilde{v}(t)$ neprekidne, odnosno tačka u kojoj funkcije $x(t)$ i $\tilde{x}(t)$ imaju nerprekidne izvode:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\theta_0) &= Ax(\theta_0) + v(\theta_0), \\ \dot{\tilde{x}}(\theta_0) &= A\tilde{x}(\theta_0) + \tilde{v}(\theta_0). \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Označimo $t_1 - \tau$ sa h; ako je $\theta \in [t_o, \tau] \cap [t_o, \theta_o + h]$, imamo da je $\theta \leq \theta_o + h$, te je, prema tome,

$$\tilde{x}(\theta_o) \in Y_{\tau - \theta_o} = Y_{t_1 - h - \theta_o} \subset Y_{t_1 - \theta}.$$

Primenom leme 4 ~~dm~~ sada dobijamo:

$$\Psi(\theta)(\tilde{x}(\theta_o) - x(\theta)) \geq 0, \quad \theta \in [t_o, \tau] \cap [t_o, \theta_o + h]. \quad (2.11)$$

Osim toga, s obzirom na identičnost (2.9) je

$$\Psi(\theta_0)(x(\theta_o) - x(\theta_o)) = 0, \qquad (2.12)$$

što znači da je neprekidna funkcija $\Psi(\theta)(\tilde{x}(\theta_o) - x(\theta))$ promenljive θ nenegativna u intervalu $[t_o, \tau] \cap [t_o, \theta_o + h]$, a da je u unutrašnjoj tački θ_o tog intervala jednaka nuli, to jest dostiže minimalnu vrednost u tački $\theta = \theta_o$. Odatle sledi da je izvod te funkcije u tački $\theta = \theta_o$ jednak nuli, to jest

$$\frac{d}{dt} \Psi(\theta)(\tilde{x}(\theta_o) - x(\theta))\Big|_{\theta = \theta_o} =$$

$$= \dot{\Psi}(\theta_o)(\tilde{x}(\theta_o) - x(\theta_o)) - \Psi(\theta_o)\,\dot{x}(\theta_o) = 0.$$

Imajući u vidu sistem (2.2) i jednačine (2.10), možemo napisati da je

$$(-A'\Psi(\theta_o))(\tilde{x}(\theta_o) - x(\theta_o)) - \Psi(\theta_o)(Ax(\theta_o) + v(\theta_o)) = 0$$

ili

$$-\Psi(\theta_o)(A\tilde{x}(\theta_o) - Ax(\theta_o)) - \Psi(\theta_o)(Ax(\theta_o) + v(\theta_o)) = 0,$$

odakle sledi

$$\psi(\theta_o)(A\tilde{x}(\theta_o) + v(\theta_o)) = 0. \qquad (2.13)$$

Ako, dalje, diferenciramo identičnost (2.9), za $\theta = \theta_o$ dobijamo, s obzirom na sistem (2.2) i jednačine (2.10),

$$\psi(\theta_o)(\tilde{v}(\theta_o) - v(\theta_o)) = 0 \qquad (2.14)$$

a odatle, imajući u vidu relaciju (2.13),

$$\psi(\theta_o)(A\tilde{x}(\theta_o) + \tilde{v}(\theta_o)) = 0,$$

to jest

$$\psi(\theta_o)\dot{\tilde{x}}(\theta_o) = 0. \qquad (2.15)$$

Primetimo da jednakosti (2.14) i (2.15) važe u svim tačkama u kojima su funkcije upravljanja $v(t)$ i $\tilde{v}(t)$ neprekidne, to jest u svim tačkama intervala $[t_o, \tau]$ sa izuzetkom konačno mnogo tačaka.

Dokažimo sada da funkcije $\psi(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{x}(t)$ zadovoljavaju u intervalu $t_o \leq t \leq \tau$ uslov maksimuma, uslove transverzalnosti na oba kraja, kao i dopunski uslov $H \equiv 0$, ili, drukčije rečeno, dokažimo da je $(\tilde{v}(t), \tilde{x}(t))$, $t_o \leq t \leq \tau$, isključivi ekstremalni proces.

Kako je, po pretpostavci, za funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ ispunjen uslov maksimuma, to je $\psi(t)\, v(t) \geqslant \psi(t)\, v$ za svako $v \in V$ izuzev u konačno mnogo momenata t. Medjutim, imajući u vidu da relacija (2.14) važi za proizvoljan moment θ_o, $t_o < \theta_o < \tau$, u kojem su funkcije $v(t)$ i $\tilde{v}(t)$ neprekidne, sledi da je

$$\psi(t)\, \tilde{v}(t) \geqslant \psi(t)\, v$$

za proizvoljno dopustivo upravljanje $v \in V$ i za svako $t \in [t_o, \tau]$ izuzev za konačno mnogo momenata t. - Dakle, funkcije $\psi(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{x}(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma.

Pošto za funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ važi uslov transverzalnosti na levom kraju, to je

$$\psi(t_0)x(t_0) \geqslant \psi(t_0)\, x$$

za svako $x \in M_0$. Ali tada, s obzirom na relaciju (2.9), sledi

$$\psi(t_0)\tilde{x}(t_0) = \psi(t_0)x(t_0) \geqslant \psi(t_0)\, x, \quad \forall\, x \in M_0,$$

to jest za funkcije $\psi(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{x}(t)$ je ispunjen uslov transverzalnosti na levom kraju.

Naposletku, razmotrimo konveksno množtvo $Y_{t_1-\tau}$, koje, po lemi 3, predstavlja konveksno telo. Prema lemi 4, postoji hiper-ravan oslonca Γ_τ sfere dostiživosti $Y_{t_1-\tau}$ koja prolazi kroz naku graničnu tačku $x_\tau \in Y_{t_1-\tau}$ i ortogonalna je na vektor $\psi(\tau)$. To znači da za svaku tačku $x^* \in Y_{t_1-\tau}$ važi nejednakost

$$\psi(\tau)(x^* - x(\tau)) \geqslant 0.$$

Kako $M_1 \subset Y_{t_1-\tau}$, to se, u slučaju da $x^* \in M_1$, iz relacije (2.9) dobija

$$\psi(\tau)(x^* - x(\tau)) \geqslant 0, \quad x^* \in M_1,$$

to jest funkcije $\psi(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{x}(t)$ zadovoljavaju i uslov transverzalnosti na desnom kraju.

Dakle, dokazali smo da je proces $(\tilde{v}(t), \tilde{x}(t))$, $t_0 \leq t \leq \tau$, ekstremalan, a dobijena relacija (2.15), to jest

$$\psi(\theta_0)\dot{\tilde{x}}(\theta_0) = H(\theta_0) = 0,$$

pokazuje da je taj proces i isključiv, jer je θ_0 proizvoljna tačka intervala $[t_0, \tau]$ u kojoj je funkcija $\tilde{v}(t)$ neprekidna, te se može napisati da je

$$H(t) = \psi(t)\check{\tilde{x}}(t) \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq \tau.$$

Time je teorema 4 u potpunosti dokazana.

Objasnimo ukratko smisao te teoreme. U većini slučajeva za data množtva M_0 i M_1 ne postoje u problemima ovakve vrste isključivi ekstremalni procesi koji prevode fazni objekt iz množtva M_0 na množtvo M_1; ako, medjutim, takvi procesi postoje, tada ih je lako odrediti s obzirom na dipunski uslov $H \equiv 0$, i izmedju njih izdvojiti optimalni proces. Prema tome, teorema 4 praktično rešava pitanje optimalnosti u slučaju kad je množtvo M_1 na kojem se proces završava stabilno, ali ne i jako stabilno.

Medjutim, značaj ove teoreme je još uočljiviji ako se ona formuliše u nešto izmenjenom obliku.

T e o r e m a 5. Ako ne postoji isključivi ekstremalni proces koji prevodi fazni objekt iz datog množtva M_0 na dato stabilno množtvo M_1, tada je za optimalnost procesa $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji realizuje prelazak iz M_0 na M_1, neophodno i dovoljno da taj proces bude ekstremalan.

Iz teoreme 4, koji smo upravo dokazali, sledi da je formulisani uslov dovoljan. Ostaje nam, dakle, da pokažemo da je taj uslov i neophodan.

Pretpostavimo da je proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, optimalan i da je

$$x(t_o) = x_o \in M_o \quad \text{a} \quad x(t_1) = x_1 \in M_1,$$

i obeležimo $t_1 - t_o$ sa T. Saglasno lemi 1, tačka $x_o \in \in M_o \cap Y_T$ je granična tačka sfere dostiživosti Y_T, a na osnovu leme 4, u tački x_o se može postaviti hiper-ravan oslonca Γ_o za konveksno telo Y_T, to jest za svaku tačku $x \in Y_T$ važi nejednakost

$$n_o(x - x_o) \geqslant 0$$

(gde je n_o vektor ($\neq 0$) ortogonalan na hiper-ravan Γ_o u tački x_o i orijentisan u unutrašnjost poluprostora X_+ koji sadrži sferu dostiživosti Y_T).

Neka je $\psi(t)$ proizvoljno rešenje homogenog sistema (2.2), s početnim uslovom $\psi(t_o) = n_o$; s obzirom na to da je $n_o \neq 0$, rešenje $\psi(t)$ je netrivijalno.

Dakle, važe sledeće relacije:

$$\psi(t_o)(x - x_o) \geqslant 0, \qquad \forall\, x \in Y_T, \tag{2.16}$$

$$\psi(t_o)(x - x_o) \leqslant 0, \qquad \forall\, x \in M_o, \tag{2.17}$$

jer hiper-ravan Γ_o razdvaja množtva M_o i Y_T.

Pretpostavimo da je u nekoj tački τ vremenskog intervala $t_o \leq \tau \leq t_1$ funkcija upravljanja $v(t)$ neprekidna, a uslov maksimuma nije ispunjen, to jest da postoji takav dopustivi parametar upravljanja $v \in V$ za koji važi nejednakost

$$\psi(\tau)\, v(\tau) < \psi(\tau)\, v. \tag{2.18}$$

Kako je, po pretpostavci, funkcija upravljanja $v(t)$ neprekidna u tački τ, to postoji vremenski interval

$[\tau_0, \tau_1]$ kojem pripada tačka τ i koji je sadržan u intervalu $[t_0, t_1]$ takav da u njemu važi prethodna nejednakost (2.18), to jest

$$\psi(t)\, v(t) < \psi(t)\, v, \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_1. \tag{2.18'}$$

Definišimo sada dopustivo upravljanje $v^*(t) \in V$, $t_0 \leq t \leq t_1$, na sledeći način:

$$v^*(t) = \begin{cases} v, & \tau_0 \leq t \leq \tau_1, \\ v(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus [\tau_0, \tau_1], \end{cases} \tag{2.19}$$

a sa $x^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, označimo trajektoriju koja odgovara upravljanju $v^*(t)$ (u smislu jednačine (2.1)) i zadovoljava isti konačni uslov $x^*(t_1) = x_1 \in M_1$, kao i trajektorija $x(t)$, dok ćemo njenu polaznu tačku označiti sa $x_0^* = x^*(t)$ M_0. Tačka x_0^*, očigledno, pripada sferi dostiživosti Y_T jer iz tačke $x_0^* \in M_0$ dopustivi proces $(v^*(t), x^*(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, prevodi razmatrani objekt upravljanja u tačku $x_1 \in M_1$ za vreme $T = t_1 - t_0$. Ako na konveksno mnoštvo Y_T primenimo lemu 4, dobijamo nejednakost

$$\psi(t_0)(x_0^* - x_0) \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Ako sada na funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, primenimo lemu 2, dobijamo jednakosti

$$\psi(t_1)\, x(t_1) - \psi(t_0)\, x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\, v(t)dt$$

i

$$\psi(t_1)\, x^*(t_1) - \psi(t_0)\, x^*(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\, v^*(t)dt.$$

Vodeći računa o tome da trajektorije $x(t)$ i $x^{*}(t)$ zadovoljavaju isti konačni uslov $x(t_1) = x^{*}(t_1) = x_1$, iz ovih jednačina se izvodi relacija

$$\psi(t_0)(x^{*}(t_0) - x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^{*}(t))dt.$$

Kako je, prema relaciji (2.19), u intervalima $[t_0, \tau_0]$ i $[\tau_1, t_1]$ $v^{*}(t) = v(t)$, a u intervalu $[\tau_0, \tau_1]$ je $v^{*}(t) = v$, to, s obzirom na nejednakost (2.18′), iz prethodne jednakosti sledi da je

$$\psi(t_0)(x_0^{*} - x_0) < 0,$$

što je, medjutim, u suprotnosti sa relacijom (2.20). Ova protivrečnost i dokazuje da za funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ mora važiti uslov maksimuma ako je proces $(v(t), x(t))$ optimalan.

Isti postupak primenićemo i prilikom dokazivanja uslova transverzalnosti na desnom kraju. Pretpostavimo, dakle, da ovaj uslov nije ispunjen, to jest da postoji tačka $x_1^{*} \in M_1$ za koju bi važila nejednakost

$$\psi(t_1)\, x_1^{*} < \psi(t_1)\, x(t_1). \qquad (2.21)$$

Označimo sa $x^{*}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, trajektoriju koja odgovara dopustivom upravljanju $v(t)$ i zadovoljava granične uslove $x^{*}(t_0) = x_0^{*} \in M_0$, $x^{*}(t_1) = x_1^{*} \in M_1$. Tačka x_0^{*} pripada sferi dostiživosti Y_T, $T = t_1 - t_0$, jer proces upravljanja $(v(t), x^{*}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, prevodi dati fazni objekt iz tačke $x_0^{*} \in M_0$ u tačku $x_1^{*} \in M_1$ za vreme $t_1 - t_0$, to s obzirom na relaciju (2.16) važi nejednakost

$$\psi(t_o)(x_o^* - x_o) > 0. \tag{2.22}$$

Diferenciranjem funkcije $x^*(t) - x(t)$:

$$\frac{d}{dt}(x^*(t) - x(t)) =$$

$$= (Ax^*(t) + v(t)) - (Ax(t) + v(t)) =$$

$$= A(x^*(t) - x(t)),$$

dobijamo da je

$$x^*(t) - x(t), \quad t_o \leq t \leq t_1,$$

rešenje homogenog sistema diferencijalnih jednačina $\dot{x} = Ax$, na koje se može primeniti posledica leme 2; to znači da je

$$\psi(t)(x^*(t) - x(t)) = \text{const.}$$

Prema tome, možemo napisati da je

$$\psi(t_1)(x^*(t_1) - x(t_1)) = \psi(t_o)(x^*(t_o) - x(t_o)) =$$
$$= \psi(t_o)(x_o^* - x_o) \geq 0,$$

to jest

$$\psi(t_1)(x_1^* - x(t_1)) \geq 0,$$

što je u protivrečnosti s polaznom pretpostavkom (2.21). Dakle, zaista, za funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, važi uslov transverzalnosti na desnom kraju.

Dalje, iz relacije (2.17) se vidi da je ispunjen i uslov transverzalnosti na levom kraju.

Prema tome, ako je proces $(v(t), x(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$, optimalan, postoji takvo netrivijalno rešenje $\psi(t)$ konjugovanog sistema (2.2) da je proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, što znači da je teorema 5 u potpunosti dokazana.

III

DOVOLJNI USLOVI OPTIMALNOSTI
ZA SLUČAJ STABILNOG TERMINALNOG MNOŠTVA

1. U ovom poglavlju daćemo nekoliko dovoljnih uslova optimalnosti za razmatrani problem u kojem je terminalno mnoštvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno.

T e o r e m a 6. Neka je $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dopustivi proces kojim se fazni objekt čije je kretanje izraženo vektorskom jednačinom

$$\dot{x} = Ax(t) + v(t) \qquad (3.1)$$

provodi iz datog mnoštva M_0 na zadato stabilno mnoštvo M_1. Pretpostavimo da postoji takvo netrivijalno rešenje $\psi(t)$ konjugovanog sistema

$$\dot{\psi} = -A'\psi \qquad (3.2)$$

da je proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, ekstremalan i da, osim toga, u svakomm momentu θ, $t_0 < \theta < t_1$, hiper-ravan Γ_θ koja prolazi kroz tačku $x(\theta)$ i ortogonalna je na vektor $\psi(\theta)$, nema zajedničkih tačaka sa mnoštvom M_1 $(\Gamma_\theta \cap M_1 = \emptyset)$. U tom slučaju ekstremalni proces $(v(t), x(t))$ je optimalan.

D o k a z. Pretpostavimo da ekstremalni proces $(v(t), x(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$, koji zadovoljava granične uslove $x(t_o) = x_o$, $x(t_1) = x_1$ nije optimalan. U tom slučaju postoji dopustivi proces $(v^*(t), x^*(t))$, $t_o \leq t \leq \theta$, $\theta < t_1$, koji fazni objekt (3.1) koji se u momentu t_o nalazi u faznom stanju $x^*(t_o) = x_o^* \in M_o$ prevodi za vreme $\theta - t_o$ (dakle, brže negoli proces $(v(t), x(t))$, jer je $\theta - t_o < t_1 - t_o$) na množtvo M_1, $x^*(\theta) \in M_1$.

S obzirom na to da je, po pretpostavci, proces $(v(t), x(t))$ ekstremalan, funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslov transverzalnosti na levom kraju:

$$\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^*(t) \geq 0, \quad t_o \leq t \leq \theta,$$

$$\psi(t_o)\, x(t_o) - \psi(t_o)\, x^*(t_o) \geq 0.$$

Ako sada iskoristimo lemu 2, dobijamo:

$$\begin{aligned} \psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, x^*(\theta) &= \\ &= (\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(t_o)\, x(t_o)) - \\ &- (\psi(\theta)\, x^*(\theta) - \psi(t_o)\, x^*(t_o)) + \\ &+ (\psi(t_o)\, x(t_o) - \psi(t_o)\, x^*(t_o)), \end{aligned}$$

te je

$$\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, x^*(\theta) \geq \int_{t_o}^{\theta} \psi(t)\, v(t)dt - \int_{t_o}^{\theta} \psi(t) v^*(t)dt =$$

$$= \int_{t_o}^{\theta} (\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^*(t)dt.$$

S obzirom na uslov maksimuma, odatle sledi da važi nejednakost

$$\psi(\theta)\, x(\theta) - \psi(\theta)\, x^{*}(\theta) \geq 0. \qquad (3.3)$$

Primenimo li sada lemu 4, prema kojoj hiper-ravan Γ_θ koja prolazi kroz tačku $x(\theta)$ i ortogonalna je na vektor $\psi(\theta)$ jeste hiper-ravan oslonca za sferu dostiživosti $Y_{t_1-\theta}$, dobićemo da je za svaku tačku $x^{*} \in Y_{t_1-\theta}$ zadovoljena nejednakost $\psi(\theta)(x^{*} - x(\theta)) \geq 0$. Medjutim, kako, po pretpostavci, u formulaciji ove teoreme, hiper-ravan Γ_θ nema zajedničkih tačaka sa množtvom M_1, a tačka $x^{*}(\theta) \in M_1 \subset Y_{t_1-\theta}$, to važi stroga nejednakost

$$\psi(\theta)(x^{*}(\theta) - x(\theta)) > 0, \qquad (3.4)$$

jer je u tom slučaju $x^{*}(\theta)$ unutrašnja tačka sfere dostiživosti $Y_{t_1-\theta}$.

S obzirom na to da su relacije (3.3) i (3.4) protivrečne jedna drugoj, ekstremalni proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji zadovoljava dopunski uslov naveden u formulaciji ove teoreme mora biti optimalan.

Dovoljan uslov optimalnosti formulisan u teoremi 6 dat je u geometrijskoj formi. Taj uslov, formulisan u izmenjenom obliku, u analitičkoj formi, daje mogućnost da se dokaže da je dovoljan, ali da nije i neophodan uslov optimalnosti.

Za formulaciju pomenutog dovoljnog uslova optimalnosti za proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, čije je kretanje opisano vektorskom jednačinom (3.1) neophodan je sledeći uslov:

Pojačni uslov transverzalnosti na desnom kraju. Neka je $\psi(t)$ proizvoljno netrivijalno rešenje konjugovanog sistema (3.2), a $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, proizvoljna trajektorija faznog objekta (3.1) koja zadovoljava uslov $x(t_1) \in M_1$. Reći ćemo da je za funkcije $\psi(t)$, $x(t)$ ispunjen pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju ako za svaku tačku x stabilnog mnoštva M_1 važi nejednakost

$$\psi(t_1)x \geq \psi(t_1)x(t_1),$$

to jest

$$\min_{x \in M_1} \psi(t_1)x = \psi(t_1)\, x(t_1), \tag{3.5}$$

a da je, osim toga, u svakom momentu $t < t_1$ zadovoljena stroga nejednakost

$$\min_{x \in M_1} \psi(t)x > \psi(t)\, x(t). \tag{3.6}$$

Poslednjoj relaciji (3.6) može se dati sledeći geometrijski smisao. Obeležimo sa Γ_t hiper-ravan faznog prostora X koja prolazi kroz tačku $x(t)$ i ortogonalna je na vektor $\psi(t)$, a sa Π_t ćemo označiti otvoren pozitivni poluprostor koji odredjuje hiper-ravan Γ_t, to jest mnoštvo svih tačaka $x \in X$ za koje važi stroga nejednakost

$$\psi(t)(x - x(t)) > 0.$$

Ako se pretpostavo da je zatvoreno mnoštvo M_1 ograničeno, nejednakost (3.6) označava da je za $t < t_1$ konveksno mnoštvo M_1 u potpunosti smešteno u pozitivan poluprostor Π_t.

Primetimo da, ako je množtvo M_1 jako stabilno (v. [17], str. 793), a funkcije $\psi(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju običan uslov transverzalnosti na desnom kraju (to jest važi relacija (3.5)), tada ove funkcije takodje zadovoljavaju i pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju. Zaista, ako sa Y_{t_1-t}, $t < t_1$, obeležimo sferu dostiživosti množtva M_1 (to jest množtvo svih tačaka faznog prostora X iz kojih objekt upravljanja (3.1) dospeva na množtvo M_1 za vreme koje nije veće od $t_1 - t$), tada, kao što je dokazano u [17], hiper-ravan Γ_t jeste hiper-ravan oslonca za sferu dostiživosti Y_{t_1-t}, pa se, s obzirom na strogu nejednakost, množtvo M_1 nalazi strogo unutar konveksnog množtva Y_{t_1-t}, što znači da množtvo M_1 u potpunosti leži u pozitivnom poluprostoru Π_t. Medjutim, odatle sledi da u svakom momentu t, $t < t_1$, važi relacija (3.6).

Dakle, ako je množtvo M_1 jako stabilno, tada iz pretpostavke da važi uslov transverzalnosti na desnom kraju i sledi da je ispunjen i pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju. Medjutim, funkcije $\psi(t)$, $x(t)$ mogu da zadovoljavaju pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju i u slučaju kada je terminalno množtvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno. Zbog toga je od interesa sledeća teorema:

T e o r e m a 7. Neka je $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, trajektorija objekta upravljanja (3.1) koja odgovara dopustivom upravljanju $v(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, i po kojoj dati objekt upravljanja iz mnoštva M_o dospeva na mnoštvo M_1. Za optimalnost procesa $(v(t), x(t))$ dovoljna je egzistencija takvog netrivijalnog rešenja $\psi(t)$ sistema (3.2), da funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma, uslov transverzalnosti na levom kraju i pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju.

D o k a z. Pretpostavimo da funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ ispunjavaju navedene uslove, a da za datu trajektoriju $x(t)$ važe granični uslovi $x(t_o) = x_o \in M_o$, $x(t_1) = x_1 \in M_1$. Dokažimo da je tada proces $(v(t), x(t))$ optimalan.

Kao i u prethodnim dokazima, poći ćemo od suprotne pretpostavke, to jest dopustićemo mogućnost da proces $(v(t), x(t))$, $t_o \leq t \leq t_1$, ne bude optimalan. U tom slučaju postoji dopustivi proces $(v^*(t), x^*(t))$ koji objekt upravljanja (3.1) iz nekog početnog faznog stanja $x_o^* \in M_o$, $x_o^* = x^*(t_o)$, prevodi na mnoštvo M_1 za vreme $\theta - t_o$, $\theta < t_1$, to jest $x^*(\theta) \in M_1$.

Kako, po pretpostavci, funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslov transverzalnosti na levom kraju, to važe nejednakosti

$$\psi(t)\, v(t) - \psi(t)\, v^*(t) \geqslant 0, \qquad t_o \leq t \leq \theta,$$

$$\psi(t_o)\, x(t_o) - \psi(t_o)\, x^*(t_o) \geqslant 0.$$

Ako sada kao i u dokazu teoreme 6 primenimo isti postupak u korišćenju leme 2, dobijamo nejednakost

$$\Psi(\theta)\, x(\theta) - \Psi(\theta)\, x^*(\theta) \geqslant 0. \qquad (3.7)$$

S druge strane, pošto $x^*(\theta) \in M_1$, $\theta < t_1$, imamo da je

$$\Psi(\theta)\, x^*(\theta) \geqslant \min \Psi(\theta) x > \Psi(\theta)\, x(\theta),$$

odakle sledi da je

$$\Psi(\theta)\, x(\theta) - \Psi(\theta)\, x^*(\theta) < 0,$$

što je u protivrečnosti sa nejednakošću (3.7). Dobijena kontradikcija upravo i dokazuje da je proces $(v(t),\ x(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, optimalan, čime je teorema 7 dokazana.

Navešćemo jedan primer koji će razjasniti smisao teoreme 7.

P r i m e r 1. Dat je objekt upravljanja

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + v^1, & v^1 &\equiv 0, \\ \dot{x}^2 &= v^2, & -1 &\leqslant v^2 \leqslant 1, \end{aligned} \qquad (3.8)$$

a terminalno mnoštvo M_1 definisano je relacijama

$$x^1 \geqslant \tfrac{1}{2}(x^2)^2, \qquad x^2 \leqslant 0, \qquad \text{za} \quad x^1 \leqslant 2,$$
$$(x^1 - 3)^2 + (x^2)^2 \leqslant 5, \qquad x^2 \leqslant 0, \qquad \text{za} \quad x^1 \geqslant 2.$$

Kako se utvrdjuje da je mnoštvo M_1 konveksno, zatvoreno i stabilno u odnosu na linearni objekt definisan relacijama (3.8) i da u tački $x_1 = (2,\ -2)$ mnoštvo M_1 ima jedinstvenu hiper-ravan oslonca Γ (u datom slučaju to je prava koja prolazi kroz tačke $(2,\ -2)$ i $(0,\ -1)$). Kao M_0 uzećemo tačku $x_0 = (8,\ -4)$ i razmatraćemo dopustivo upravljanje $v^1(t) \equiv 0$, $v^2(t) \equiv 1$ i trajektoriju $x(t)$ definisanu relacijama

$$x^1(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad (-4 \leq t \leq -2)$$
$$x^2(t) = t.$$

Ova trajektorija zadovoljava granične uslove

$$x(-4) = x_0, \qquad x(-2) = x_1$$

i odgovara datom dopustivom upravljanju (3.8).

Konjugovani sistem (3.2) za razmatrani objekt upravljanja je predstavljen jednačinama

$$\dot{\psi}_1 = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = -1.$$

Razmotrimo sledeće netrivijalno rešenje ovog sistema:

$$\psi_1(t) = 1, \quad \psi_2(t) = -t. \tag{3.9}$$

Neposredno se proverava da u intervalu $-4 \leq t \leq -2$ navedene funkcije $\psi(t)$, $v(t)$, $x(t)$ zadovoljavaju uslov maksimuma i uslove transverzalnosti na oba kraja, kao i da je zadovoljen i pojačan uslov tranyverzalnosti na desnom kraju.

Zaista, za vrednosti $t < -2$ izraz

$$-\psi(t)\, x(t) + \min_{x \in M_1} \psi(t)\, x = -\frac{t^2}{2} + \min(tx^2 - x^1)$$

je pozitivan (što se lako može proveriti neposrednim izračunavanjem). Iz dokazane teoreme 7 proizlazi da je razmatrani proces optimalan.

Primerimo da množtvo M_1 nije jako stabilno (jer ni iz jedne tačke poluprave $x^1 = 2$, $x^2 = -2$ dati objekt upravljanja ne može dospeti na množtvo M_1 za vreme koje bi bilo manje od 2), te se rezultati rada [17] ne mogu primeniti na ovaj slučaj. Na navedenu trajektoriju $x(t)$ ne može se primeniti ni teorema 2 mog rada [20], jer trajektorija $x(t)$ dodiruje mnoštvo M_1 u tački x_1, te se odgovarajuća funkcija $\Psi(t)$ (koja zadovoljava uslov maksimuma i uslov transverzalnosti na desnom kraju) podudara s funkcijom (3.9) (s tačnošću do pozitivnog množioca), a za tu funkciju je odgovarajuća Hamiltonova funkcija

$$H = \Psi_1(t)(x^2(t) + v^1(t)) + \Psi_2(t)\, v^2(t) \equiv 0.$$

Nije teško navesti primere koji pokazuju da teorema 7 ne daje neophodan uslov optimalnosti u slučaju kada trajektorija kojom objekt upravljanja (3.1) dospeva na terminalno mnoštvo M_1 leži na ravnom delu granice oblasti dostiživosti. Medjutim, sledećim primerom ćemo dokazati da i za trajektorije koje leže unutar oblasti dostiživosti uslov naveden u teoremi 7 nije i neophodan uslov optimalnosti.

P r i m e r 2. Posmatraćemo objekt upravljanja

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + v^1, & v^1 &\equiv 0, \\ \dot{x}^2 &= v^2, & -1 &\leq v^2 \leq 1, \\ \dot{x}^3 &= v^3, & -1 &\leq v^3 \leq 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

čije je terminalno mnoštvo M_1 definisano nejednakostima

$$x^1 \geq \frac{1}{2}(x^2)^2 + \frac{1}{2}(x^3)^2, \qquad x^2 \leq 0, \qquad x^1 \leq \frac{9}{2},$$

dok će nam polazno množtvo M_o predstavljati tačka $x_o = (8, -4, 2)$ trodimenzionog faznog prostora X. Neposredno se proverava da je množtvo M_1 konveksno, zatvoreno i stabilno u odnosu na linearni objekt (3.10) i da u tački $x_1 = (2, -2, 0)$ ima jedinstvenu hiper-ravan oslonca (odnosno u datom slučaju ravan).

$$x^1 + 2x^2 + 2 = 0.$$

Primetimo i to da oblast upravljanja objekta upravljanja (3.10) predstavlja poluprostor $x^3 \geqslant -3$ faznog prostora X, jer može pod dejstvom dopustivog upravljanja $v^1 \equiv 0$, $v^2 \equiv 0$, $v^3 \equiv -1$, dospeti na ravan $x^3 = -3$, a zatim krećući se u toj ravni (a to znači, za $v^3 \equiv 0$) po zakonu (3.8) (koji u datom slučaju predstavlja dopustivo kretanje) dospeva u tačku $(\frac{9}{2}, 0, -3) \in M_1$; s druge strane, iz tačaka faznog prostora X koje ne pripadaju poluprostoru $X^3 \geqslant -3$ već pripadaju otvorenom popuprostoru $x^3 < -3$, objekt upravljanja (3.10) ne može dospeti na množtvo M_1 pošto je $\dot{x}^3 = v^3 \leq 0$, a za sve tačke množtva M_1 važi uslov $x^3 \geqslant -3$.

Razmotrimo sada dopustivo upravljanje $v(t)$:

$$v^1 \equiv 0, \quad v^2 \equiv 1, \quad v^3 \equiv -1$$

i odgovarajuću trajektoriju $x(t)$ definisanu relacijama

$$\begin{aligned} &x^1(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad x^2(t) = t, \\ &x^3(t) = -t-2, \quad -4 \leq t \leq -2, \end{aligned} \tag{3.11}$$

koja zadovoljava granične uslove

$$x(-4) = x_o, \quad x(-2) = x_1 \in M_1.$$

Odgovarajući konjugovani sistem ima u ovom slučaju oblik

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = 0. \qquad (3.12)$$

Nije teško uveriti se da je razmatrana trajektorija $x(t)$, $-4 \leq t \leq -2$, optimalna i da celom svojom dužinom leži u unutrašnjosti oblasti dostiživosti. Zaista, pošto množtvo M_1 u potpunosti leži u oblasti $x^1 \geq \frac{1}{2}(x^2)^2$, to iz tačke x_0 koja se nalazi na granici oblasti dostiživosti množtva M_1 objekt upravljanja ne može dospeti unutar te oblasti (to jest u množtvo $x^1 > \frac{1}{2}(x^2)^2$) za vreme koje bi bilo manje od 2 (pa čak ni za vreme koje bi bilo manne od 4). Zbog toga za vreme koje je ≤ 2 objekt upravljanja može (krećući se po proizvoljnoj trajektoriji) dospeti samo u takvu tačku množtva M_1 za koju važi jednakost $x^1 = \frac{1}{2}(x^2)^2$ i, s obzirom na oblik množtva M_1, zadovoljava i jednakost $x^3 = 0$. Medjutim, kako iz tačke x_0 objekt upravljanja ne može dospeti na ravan $x^3 = 0$ brže negoli za vremenski interval dužine 2, to je trajektorija (3.11) optimalna.

Neka je $\psi(t)$ proizvoljno netrivijalno rešenje sistema (3.12) za koje važe uslov maksimuma i uslovi transverzalnosti na oba kraja (zasad se ne zahteva da bude ispunjen i pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju). Tada je $\psi(-2) = k\{1, 2, 0\}$, gde je $k > 0$, jer je u tački x_1 hiper-ravan oslonca jedinstvena. S obzirom na relacije (3.10) sledi

$$\psi_1(t) = k, \qquad \psi_2(t) = -kt, \qquad \psi_3(t) \equiv 0.$$

Dakle, vektorska funkcija $\psi(t)$ odredjuje se jednoznačno, s tačnošću do konstantnog množioca. Ali, ova vektorska funkcija ne ispunjava pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju. Naime, za vrednosti t, $-3 \leq t \leq -2$, tačka $y(t) = (-\frac{t^2}{3}, t, 0)$ pripada množtvu M_1; kako je vektor $x(t) - y(t)$ ortogonalan na vektor $\psi(t)$, to jest

$$\psi(t)(x(t) - y(t)) = 0,$$

imamo da je

$$\min_{x \in M_1} \psi(t)\, x \leq \psi(t)\, y(t) = \psi(t)\, x(t),$$

$$-3 \leq t \leq -2.$$

To znači da u datom slučaju stroga nejednakost (3.6) nije zadovoljena za $t \in [-3, -2]$, to jest, za razmatranu optimalnu trajektoriju $x(t)$ pojačani uslov transverzalnosti na desnom kraju nijw zadovoljen.

Dakle, razmotreni primer 2 dokazuje da dovoljan uslov optimalnosti formulisan u teoremi 7 ne predstavlja istovremeno i neophodan uslov optimalnosti za proizvoljnu dopustivu trajektoriju smeštenu u unutrašnjosti oblasti dostiživosti terminalnog množtva M_1.

2. Razmotrićemo još jedan problem u kojem su množtva M_0 i M_1 kao i množtvo dopustivih upravljanja V kompaktna i konveksna, objekt upravljanja je definisan vektorskom jednačinom (3.1), a sistem za pomoćne promenljive ψ_i je odredjen relacijom (3.2).

Iz leme 3, koju smo dokazali, sledi da je svaka sfera dostiživosti Y_T, $T > 0$, terminalnog množtva M_1 konveksno telo (ili u faznom prostoru X, ili u njegovom sopstvenom poluprostoru kojem množtvo M_1 i njegova sfera dostiživosti Y_T u potpunosti pripadaju).

Ako se pretpostavi da je svaka sfera dostiživosti strogo konveksno[x] množtvo ili, drukčije rečeno, da je oblast dostiživosti strogo konveksna, tada će važiti sledeća teorema, koja je posledica već dokazane teoreme 6:

T e o r e m a 8. Razmatra se linearni problem optimalnog upravljanja u smislu brzine dejstva u kojem je terminalno množtvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno, a oblast dostiživosti množtva M_1 je strogo konveksno množtvo. Ako postoji takvo netrivijalno rešenje $\psi(t)$ konjugovanog sistema (3.2) za koje je dopustivi proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, koji prevodi objekt upravljanja (3.1) iz množtva M_0 na množtvo M_1 ekstremalan, tada je taj proces i optimalan.

Razmotrimo sada slučaj kada sfera dostiživosti množtva M_1 nisu strogo konveksna množtva, već granica oblasti dostiživosti sadrži delove koji pripadaju nekim hiper-ravnima faznog prostora X.

Jednostavnosti radi, (koja ne utiče na opštost dokaza), pretpostavićemo da je jedan deo granice oblasti dostiživ-

---

[x] Za neko množtvo reći ćemo da je strogo konveksno ako tangentna hiper-ravan u bilo kojoj graničnoj tački datog množtva ima samo jednu zajedničku tačku sa tim množtvom.

vosti sadržan u nekoj hiper-ravni Γ faznog prostora X, a da su ostali delovi granice oblasti dostiživosti strogo konveksni, kao i da granice svih sfera dostiživosti Y_T, $T > 0$, množtva M_1 imaju ravne delove sadržane u hiper-ravni Γ, dok su im preostali delovi granice strogo konveksni.

Celishodno je uvesti sledeću definiciju:

D e f i n i c i j a 8. Množtvo Γ ćemo nazivati inverijantnim ako svaka trajektorija koja odgovara nekom dopustivom upravljanju i povezuje dve proizvoljne tačke iz Γ leži u množtvu Γ u svakom momentu kretanja objekta upravljanja (3.1).

U razmatranjima koja slede biće korišćena sledeća lema:

L e m a 6. Ako su sve sfere dostiživosti množtva M_1 konveksna množtva čije granice sadrže ravne delove i ako svi ti ravni delovi pripadaju nekoj hiper-ravni Γ faznog prostora X, koja ima zajedničkih tačaka sa množtvom M_1, tada za sve tačke oblasti dostiživosti, izuzev za tačke koje pripadaju hiper-ravni Γ, princip maksimuma predstavlja dovoljan uslov optimalnosti.

D o k a z ove leme se u potpunosti oslanja na prethodno formulisanu teoremu 8.

1^0 Zadržimo se najpre na slučaju kada je X dvodimenzioni fazni prostor.

Pretpostavimo da granica svake sfere dostiživosti

Y_T, $T > 0$, množtva M_1, sadrži neki odsečak I_T, i neka svi ti odsečci I_T leže u hiper-ravni (odnosno, u datom slučaju, na pravoj) Γ_1. Možemo smatrati da granica oblasti dostiživosti sadrži samo jedan ravan deo $I_1 = \bigcup_{T>0} I_T$.

Neka je M_1 konveksno množtvo koje ima bar jednu zajedničku tačku sa množtvom I_1, i neka je tačka $x_0 \in I_1$ i $x_0 \notin M_1$. Označimo sa $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, neku dopustivu trajektoriju koja povezuje tačku $x_0 \in I_1$ sa nekom tačkom $x_1 \in M_1$.

Očigledno je da vektor fazne brzine ne može u nekoj tački $x^* = x(t^*)$ trajektorije $x(t)$, $t_0 \leq t^* < t_1$, biti usmeren van oblasti dostiživosti Y množtva M_1, jer bi u tom slučaju došlo do protivrečnosti da se iz tačaka van oblasti dostiživosti Y može dospeti na množtvo M_1.

Ako bi, medjutim, posmatrani vektor bio usmeren unutar oblasti dostiživosti, tada bi, s obzirom na to da je u intervalima neprekidnosti upravljajućeg parametra $v(t)$ odgovarajuća trajektorija $x(t)$ regularna kriva, bilo mogućno da rozmatrani objekt upravljanja kretanjem po istoj trajektoriji dospe u tačku x^* iz neke tačke van oblasti dostiživosti, a zatim, pod dejstvom tog istog ili nekog drugog dopustivog upravljanja iz tačke x^* na množtvo M_1, što takodje dovodi do kontradikcije.

Dakle, ostaje samo mogućnost da iz proizvoljne tačke $x_0 \in I_1$ objekt upravljanja (3.1) može dospeti na množtvo M_1

samo kretanjem duž takve dopustive trajektorije $x(t)$, $t_0 \leq \leq t \leq t_1$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1 \in M_1$, koja ili u potpunosti leži na pravoj $\Gamma_1 \supset I_1$ ili se u nekoj tački $x^* = x(t^*)$, $t_0 \leq t^* < t_1$, odvaja od prave Γ_1 i prodire u unutrašnjost oblasti dostiživosti imajući pri tom u tački x^* tangentni vektor fazne brzine usmeren duž prave Γ_1.

Ako dati objekt upravljanja dospeva na množtvo M_1 kretanjem duž prave $\Gamma_1 \supset I_1$, tada pravu Γ_1 možemo uzeti kao koordinatnu osu (dovoljno je izvršiti linearnu transformaciju faznih promenljivih) i razmatrati je kao jednodimenzioni prostor. U tom slučaju imamo problem prevodjenja objekta upravljanja iz tačke $x_0 \in I_1 \subset \Gamma_1$ na konveksno množtvo $\tilde{M}_1 = M_1 \cap I_1$; odgovarajuće sfere dostiživosti $\tilde{Y}_T$, $T > 0$, množtva M_1, predstavljaju odsečke prave Γ_1, $\tilde{Y}_T = Y_T \cap \Gamma_1$. Nije teško uveriti se da iz ekstremalnosti procesa $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, sledi i optimalnost tog procesa.

Zaista, pošto su prava Γ_1 i njeni odsečci strogo konveksna množtva, to se na proces $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji se odvija u jednodimanzionom prostoru s kojim se podudara prava Γ_1, može primeniti teorema 8.

Ako, medjutim, dati objekt upravljanja dospeva u unutrašnjost oblasti dostiživosti Y množtva M_1, tada se može iskoristiti lema 6.

Imajući u vidu ovu lemu i prethodna razmatranja, možemo izvesti zaključak da u slučaju dvodimenzionog faznog prostora princip maksimuma predstavlja dovoljan uslov optimalnosti za sve tačke oblasti dostiživosti.

2° Predjimo sada na slučaj trodimenzionog faznog prostora. Pretpostavimo da granica konveksne oblasti dostiživosti Y sadrži ravan deo I_2 koji leži u hiper-ravni Γ_2 (u datom slučaju, u ravni) prostora X. Neka je $M_1 \cap I_2 = \widetilde{M}_1 \neq \emptyset$ i, kao u dvodimenzionom slučaju, pretpostavimo da svi ravni delovi sfera dostiživosti Y_T, $T > 0$, terminalnog množtva M_1 pripadaju množtvu I_2, to jest $Y_T \cap I_2 = \widetilde{Y}_T$, $T > 0$.

Na isti način kao i u prethodnom slučaju (koristeći se lemom 6), izvodimo zaključak da iz ekstremalnosti procesa $(v(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koji prevodi objekt upravljanja iz neke tačke $x_0 \in M_0$ na množtvo M_1, sledi i optimalnost tog procesa za sve tačke x_0 koje ne pripadaju množtvu I_2.

Kao i u slučaju dvodimenzionog faznog prostora, dokazuje se da vektor fazne brzine u proizvoljnoj tački $x^* = x(t^*)$, $t_0 \leq t^* < t_1$, $x^* \in I_2$, dopustive trajektorije $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, koja povezuje proizvoljnu tačku $x_0 \in I_2$ s množtvom M_1: $x(t_1) = x_1 \in M_1$, $M_1 \cap I_2 = \widetilde{M}_1 \neq 0$, mora ležati u hiper-ravni $\Gamma_2 \supset I_2$. Takodje se na isti način izvodi zaključak da dopustive krive u datom slučaju ili pripadaju u potpunosti množtvu I_2 ili u nekoj tački $x^* = x(t^*)$, $t_0 \leq t^* < t_1$, napuštaju množtvo I_2 i prodiru u unutrašnjost oblasti dostiživosti Y zadržavajući pri tom tangentni vektor fazne brzine u tački x^* koji leži u hiper-ravni Γ_2.

Za dopustive trajektorije koje pripadaju množtvu I_2

problem se svodi na dvodimenzioni slučaj koji je već razmatran, dok se na one trajektorije koje prodiru u unutrašnjost oblasti dostiživosti primenjuje već korišćena lema 6.

3^{o} Razmotrimo na kraju i opšti slučaj. Neka je Y oblast dostiživosti terminalnog mnoštva M_1 u n-dimenzionom faznom prostoru X. Pretpostavimo da svi ravni delovi I_T sfera dostiživosti Y_T, $T > 0$, mnoštva M_1 pripadaju n-1-dimenzionoj hiper-ravni Γ_{n-1} faznog prostora X, i njihovu uniju označimo sa I_{n-1}:

$$\bigcup_{T>0} I_T = \Gamma_{n-1} \cap Y = I_{n-1}.$$

Primenom istih rasudjivanja kao i u slučaju dvodimenzionog i trodimenzionog faznog prostora, može se dokazati da, ako je $M_1 \cap I_{n-1} = \tilde{M}_1 \neq 0$, tada dati objekt upravljanja iz proizvoljne tačke $x_o \in I_{n-1}$ može dospeti na mnoštvo M_1 krećući se po zakonu (3.1) nekom dopustivom trajektorijom koja ili u potpunosti pripada mnoštvu I_{n-1} ili u nekoj tački $x^{*} = x(t^{*})$, $t_o \leq t^{*} < t_1$ $(x(t_o) = x_o,\ x(t_1) \in M_1)$ napušta mnoštvo I_{n-1} i prodire u unutrašnjost oblasti dostiživosti Y mnoštva M_1, s tim što ~~joj~~ tangentni vektor fazne brzine u tački x^{*} leži u hiper-ravni Γ_{n-1}.

Na trajektorije koje prodiru unutar oblasti dostiživosti Y terminalnog mnoštva M_1 odnosi se lema 6, koja utvrdjuje da za dve tačke oblasti dostiživosti Y izuzev za tačke mnoštva I_{n-1} princip maksimuma predstavlja dovoljan uslov optimalnosti.

Za sve one trajektorije koje u potpunosti leže u množtvu I_{n-1}, hiper-ravan $\Gamma_{n-1} \supset I_{n-1}$ predstavlja invarijantan potprostor faznog prostora X koji se može (posle odgovarajuće linearne transformacije) posmatrati kao koordinatna ravan prostora X. Ako je I_{n-1} strogo konveksno mnoštvo u prostoru Γ_{n-1}, tada se može primeniti teorema 8, a ako konveksno mnoštvo I_{n-1} sadrži ravan deo I_{n-2} koji ima zajedničkih tačaka sa terminalnim mnoštvom M_1, tada se prethodno rasudjivanje može u potpunosti primeniti na mnoštvo I_{n-2}.

N a p o m e n a. Treba primetiti da je u prethodno pomenutoj transformaciji hiper-ravni Γ_{n-1} u jednu od koordinatnih ravni n-dimenzionog prostora X (obeležimo je, recimo, sa Γ'_{n-1}), uvek mogućno odabrati linearnu transformaciju koja n-1-dimanzionu bazu prostora Γ_{n-1} transformiše u n-1-dimanzionu bazu koordinatne ravni Γ'_{n-1}. S obzirom na linearnost navedene transformacije čuva se linearnost datog procesa $\dot{x} = Ax + v$, pri čemu matrica transformacije treba da bude regularna.

U tom slučaju, umesto procesa $\dot{x} = Ax + v$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X$, $v \in V \subset X$, razmatrao bi se proces $\dot{x} = A'x + v$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \Gamma_{n-1}$, $\dot{x}^n = 0$, $v \in V \subset \Gamma_{n-1}$ (A' označava matricu dobijenu posle transformacije hiper-ravni Γ_{n-1} u jednu od koordinatnih ravni Γ'_{n-1} faznog prostora X).

Primetimo još i to da, umesto hiper-ravni Γ_{n-1}, u opštem slučaju može da se u prvom koraku prilikom primenjivanja uvedenog postupka pojavi hiper-ravan Γ_{n-k}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Napomenimo da sfere dostiživosti Y_T, - a samim tim i oblast dostiživosti Y terminalnog mnoštva M_1, - u opštem slučaju mogu imati više ravnih delova I_T^{α} čije unije I_{n-k}^{α} leže u različitim hiper-ravnima Γ_{n-k}^{α} ($k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$) n-dimenzionog faznog prostora X. U tom slučaju bismo razmatrani postupak primenjivali na svaku od hiper-ravni Γ_{n-k}^{α}, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, odnosno na svako od mnoštava I_{n-k}^{α}:

$$I_{n-k}^{\alpha} = \Gamma_{n-k}^{\alpha} \cap Y, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m.$$

Razmatranjima u 1°, 2° i 3° upravo smo dokazali sledeći teoremu:

T e o r e m a 9. Razmatra se linearni problem optimalnog upravljanja u kojem je terminalno mnoštvo M_1 stabilno, ali nije i jako stabilno. Pretpostavimo da granica svake sfere dostiživosti Y_T, $T > 0$, mnoštva M_1 sadrži ravne delove I_T, čije unije I_{n-k}^{α} leže u hoper-ravnima Γ_{n-k}^{α}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$, i neka je

$$M_1 \cap I_{n-k}^{\alpha} = \tilde{M}_1^{\alpha} \neq 0$$

za svako $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Tada za sve tačke oblasti dostiživosti Y mnoštva M_1

princip maksimuma[x)] predstavlja dovoljan uslov optimalnosti.

---

x) Sve teoreme koje daju neophodne i dovoljne uslove optimalnosti (ili samo neophodne ili samo dovoljne uslove) i u kojima se javlja uslov maksimuma date su u formi principa maksimuma.

B I B L I O G R A F I J A

[1] Athans, M., P. Falb, Optimal Control. New York 1967.

[2] Болтянский, В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд. Наука, Москва 1969.

[3] Болтянский, В. Г., Оптимальное управление дискретными системами. Изд. Наука, Москва 1973.

[4] Фельдбаум, А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем. Госиздат, Москва 1963.

[5] Гантмахер, Ф. Р., Теория матриц. Изд. Наука, Москва 1967.

[6] Гельфанд, И. М., С. В. Фомин, Вариационное исчисление. Физматгиз, Москва 1961.

[7] Гирсанов, И. Г., Лекции по математической теории экстремальных задач. Изд. МГУ, Москва 1970.

[8] Gumovski, I., Ch. Mira, L'optimization, la théorie et ses problèmes. Dunod, Paris 1970.

[9] Петровский, И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Наука, Москва 1964.

[10] Понтрягин, Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, Москва 1961.

[11] Понтрягин, Л. С., В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Теория оптимальных процессов. Изд. Наука, Москва 1969.

[12] Valentine, F., Convex Sets. New York 1964.

[13] Zadeh, L., Ch. Desver, Linear System theory. New York 1967.

[14] Болтянский, В. Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов. ДАН СССР, Т. 119, № 6, 1958.

[15] Болтянский, В. Г., Достаточные условия оптимальности. ДАН СССР, Т. 140, № 5, 1961.

[16] Болтянский, В. Г., Метод локальных сечений в теории оптимальных процессов. Диффер. уравнения, Т. IУ, № 12, Дек., 1968.

[17] Болтянский, В. Г., Линейная задача оптимального управления. Диффер. уравнения, Т. IУ, № 5, Май, 1969.

[18] Болтянский, В. Г., Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, К теории оптимальных процессов. ДАН СССР, Т. 110, № 1, 1956.

[19] Болтянский, В. Г., Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, Теория оптимальных процессов. Принцип максимума. Изв. АН СССР, серия математ., Т. 24, № 1, 1969.

[20] Дайович, С., Оптимальные процессы в линейных системах не удовлетворящих условию невырожденности. Диффер. уравнения, Т. УII, № 3, 1971.

[21] Dajović, S., Une contribution à la théorie des processus optimaux pour les systèmes linéaires. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 55-58 (3 janv. 1972).

[22] Гамкрелидзе, Р. В., К теории оптимальных процессов в линейных системах. ДАН СССР, Т. 116, № 1, 1957.

[23] Гамкрелидзе, Р. В., Теория оптимальных процессов в линейных системах. Успехи матем. наук, т. 12, № 5, 1957.

[24] Гамкрелидзе, Р. В., К общей теории оптимальных процессов. ДАН СССР, Т. 123, № 2, 1958.

[25] Гамкрелидзе, Р. В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, серия матем., Т. 22, № 4, 1958.

[26] Гамкрелидзе, Р. В., О скользящих оптимальных решениях. ДАН СССР, Т. 143, № 6, 1962.

[27] Кирин, Н. Е., К решению общей задачи линейного быстродействия. Автоматика и телемеханика, Т. XXV, № 1, 1964.

[28] Понтрягин, Л. С., Оптимальные процессы регулирования. Успехи матем. наук, Т. 14, № 1, 1959.

[29] Розоноер, Л. И., Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Автоматика и телемеханика, Т. 20, №№ 10 - 12, 1959.

[30] Дайович, С., Об оптимальных процессах в линейных системах, не удовлетворяющих условию невырожденности. ДАН СССР, Т. 192, № 2, 1970.