PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U BEOGRADU

SAVIĆ N. VLADIMIR

O NAJBOLJOJ APROKSIMACIJI NEKIH KLASA FUNKCIJA DATIM LINEARNIM POSTUPCIMA APROKSIMACIJE

- DOKTORSKA TEZA -

BEOGRAD, OKTOBRA 1978. GODINE

S A D R Ž A J

U V O D

§ 1. OSNOVNI POJMOVI, DEFINICIJE I STAVOVI

1° - Neka je C prostor neprekidnih na skupu R, 2π-periodičkih funkcija $f(x)$ sa normom

$$\|f\|_C = \max_{0\leq x\leq 2\pi} |f(x)|.$$

2° - Neka je $L_p = L_p(0,2\pi), (1\leq p<+\infty)$ prostor merljivih, 2π-periodičkih funkcija $f(x)$ čiji je p-ti stepen apsolutne vrednosti $|f|^p$ integrabilna funkcija u Lebegovom smislu na intervalu dužine periode, sa normom

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

3° - Neka je M prostor merljivih, 2π-periodičkih, bitno ograničenih funkcija $f(x)$ sa normom

$$\|f\|_M = \operatorname{supess}_{0\leq x\leq 2\pi} |f(x)|.$$

Često, umesto M i $\|f\|_M$ pišemo L_∞ i $\|f\|_\infty$. Imajući u vidu ovu konvenciju stavićemo

$$L_p(1\leq p\leq +\infty) = \begin{cases} L_p & (1\leq p<+\infty) \\ M & (p=+\infty) \end{cases}$$

i

$$\|f\|_p(1\leq p\leq +\infty) = \begin{cases} \|f\|_p & (1\leq p<+\infty) \\ \|f\|_M & (p=+\infty) \end{cases}.$$

Ubuduće, ako ništa posebno ne kažemo, smatraćemo da L_p znači isto što i $L_p(1\leq p<+\infty)$

4° - Neka je $L_{p,0}$ skup funkcija $f\in L_p$ za koje je

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$$

5° - Modul neprekidnosti funkcije $f\in X$ $(X\in\{C, M, L_p\})$ u prostoru X je funkcija

$$\omega(f,t)_X = \sup_{|u|\leq t} \|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_X \quad (0\leq t<+\infty) \tag{1}$$

Ubuduće ćemo umesto $\omega(f,t)_{L_p}(1\leq p\leq +\infty)$ pisati $\omega(f,t)_p(1\leq p\leq +\infty)$, a umesto $\omega(f,t)_C$ - prosto $\omega(f,t)$.

Ako je $f\in C$ onda je

(1') $$\omega(f,t)=\sup_{|u|\le t}\ \max_x |f(x+u)-f(x)|= \sup_{|x'-x''|\le t}|f(x')-f(x'')| \quad (0\le t<+\infty) .$$

Modul neprekidnosti (1) funkcije $f\in X$ ima sledeća svojstva

I. $\omega(f,0)_X=0$;

II. $\omega(f,t)_X$ ne opada na polusegmentu $0\le t<+\infty$;

III. modul neprekidnosti (1) je poluaditivna funkcija t.j.

$\omega(f,t_1+t_2)_X\le\omega(f,t_1)_X+\omega(f,t_2)_X \quad (t_1>0,\ t_2>0)$;

IV. $\omega(f,t)_X$ je neprekidna funkcija za $t\in[0,+\infty)$.

Iz poluaditivnosti modula neprekidnosti $\omega(f,t)_X$ sleduje da je za svako $n\in N$

(2) $$\omega(f,nt)_X\le n\cdot\omega(f,t)_X \qquad (n\in N).$$

Zaista, za $n=1$ tvrdjenje važi, a iz pretpostavke da je tvrdjenje tačno za $n=K$ sleduje

$$\omega(f,(K+1)t)_X\le\omega(f,Kt)_X+\omega(f,t)_X\le$$
$$\le K\omega(f,t)_X+\omega(f,t)_X=(K+1)\omega(f,t)_X$$

Ako je $\lambda>0$ onda umesto (2) važi

(3) $$\omega(f,\lambda t)_X\le(\lambda+1)\,\omega(f,t)_X$$

Ako označimo sa $[\lambda]$ najveći celi deo od $\lambda\,([\lambda]\le\lambda<[\lambda]+1)$ i koristimo monotoniju funkcije $\omega(f,t)_X$ i nejednakost (2) dobijemo

$$\omega(f,\lambda t)_X\le\omega(f,([\lambda]+1)t)_X\le([\lambda]+1)\omega(f,t)_X\le(\lambda+1)\,\omega(f,t)_X .$$

6° - U slučaju $X=C$ svojstva I. - IV. modula neprekidnosti $\omega(f,t)_X$ karakteristična su u tom smislu što se može dokazati da svaka funkcija $\omega(t)$, koja ima ta svojstva, i takva da je $\omega(t)=\omega(\pi)$ $(t\ge\pi)$, predstavlja modul neprekidnosti neke funkcije $f\in C$. Zato e celishodno uvesti pojam modula neprekidnosti uopšte, ne vezući taj pojam sa bilo kakvom konkretnom funkcijom f.

Funkcija $\omega(t)$ jeste, po definiciji, modul neprekidnosti uopšte) ako i samo ako je

I. funkcija $\omega(t)$ definisana za svako $t\in[0,+\infty)$ i $\omega(0)=0$;

II. $\omega(t)$ ne opada za $t\in[0;+\infty)$;

III. funkcija $\omega(t)$ je poluaditivna, t.j.

$$\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2) \quad (t_1>0,\ t_2>0);$$

IV. $\omega(t)$ je neprekidna funkcija na polusegmentu $[0,+\infty)$.

Mi ćemo pretpostavljati da je modul neprekidnosti $\omega(t)$ još i konveksna funkcija, t.j. da je za svako $t_1 \geqslant 0$, svako $t_2 \geqslant 0$ i svako $\alpha \in [0,1]$

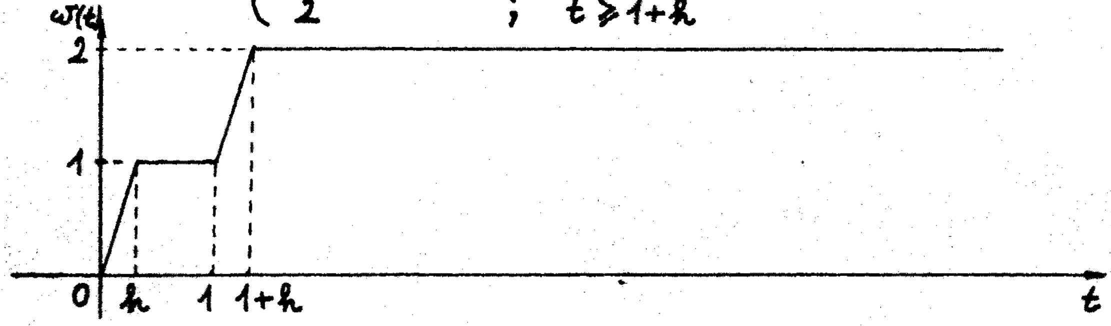
$$(4) \qquad \alpha\omega(t_1) + (1-\alpha)\omega(t_2) \leqslant \omega(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2).$$

(Nejednakost (4) često upotrebljavamo za $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}[\omega(t_1) + \omega(t_2)] \leqslant \omega\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \quad (t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0).)$$

Jasno je da postoji konveksna funkcija koja nije modul neprekidnosti. Da postoji modul neprekidnosti koji nije konveksna funkcija dokazuje sledeći primer. Neka je $0<h<1$ i

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}t & ; \quad 0 \leqslant t \leqslant h \\ 1 & ; \quad h \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{1}{h}(t-1+h) & ; \quad 1 \leqslant t \leqslant 1+h \\ 2 & ; \quad t \geqslant 1+h \end{cases}$$



Sl.1.

Dovoljne uslove da neka konveksna funkcija jeste moduo neprekidnosti daje sledeći

<u>Stav 1</u>. Svaka konveksna funkcija $\omega(t)$ koja zadovoljava uslove

I. funkcija $\omega(t)$ definisana je za $t \in [0,+\infty)$ i $\omega(0)=0$;

II. $\omega(t)$ ne opada za $t \in [0,+\infty)$;

III. $\omega(t)$ je neprekidna funkcija na polusegmentu $[0,+\infty)$, jeste moduo neprekidnosti.

Moduli neprekidnosti $\omega(t)$ koji su konveksni imaju dopunska svojstva koja potiču baš iz konveksnosti. Sledeći stav navodi neka od tih svojstava.

<u>Stav 2</u>. Ako je $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti, onda

a/ na intervalu $0<t<+\infty$ postoje konačni, nerastući, nenegativni, jednostrani izvodi $\omega_-'(t)$ i $\omega_+'(t)$, pri čemu je

$$\omega_+'(t) \leqslant \omega_-'(t)$$

b/ $\omega(t)$ je apsolutno neprekidna funkcija.

<u>Dokaz stava 2.</u> Neka je $t \in (0,+\infty)$ i $h>0$, takvo da $t \pm h \in (0,+\infty)$. Kako je funkcija $\omega(t)$ $(0 \leq t < +\infty)$ konveksna to je

$$\frac{1}{2}[\omega(t+h)+\omega(t-h)] \leq \omega(t)$$

t.j.

$$\frac{1}{h}[\omega(t+h)-\omega(t)] \leq \frac{1}{h}[\omega(t)-\omega(t-h)] .$$

Kad $h \to 0$ količnik na levoj strani je ograničen odozgo i ne opada, a količnik na desnoj strani je ograničen odozdo i ne raste. Dakle, kad $h \to 0$ postoje konačne granične vrednosti pomenutih količnika i jednake su, tim redom, $\omega_+'(t)$ i $\omega_-'(t)$ i pri tome je

$$(5) \qquad \omega_+'(t) \leq \omega_-'(t) .$$

Ako je $0<t_1<t_2<+\infty$ i $0<h<t_2-t_1$, onda je , zbog konveksnosti funkcije ω

$$\omega(t_1+h)+\omega(t_2-h) \geq \omega(t_1)+\omega(t_2)$$

t.j.

$$\frac{1}{h}[\omega(t_1+h)-\omega(t_1)] \geq \frac{1}{h}[\omega(t_2)-\omega(t_2-h)]$$

odakle, kad $h \to 0$ sleduje $\omega_+'(t_1) \geq \omega_-'(t_2)$ što, zajedno sa (5) daje

$$\omega_-'(t_1) \geq \omega_+'(t_1) \geq \omega_-'(t_2)$$

t.j.

$$\omega_-'(t_1) \geq \omega_-'(t_2)$$

i

$$\omega_+'(t_1) \geq \omega_-'(t_2) \geq \omega_+'(t_2)$$

t.j.

$$\omega_+'(t_1) \geq \omega_+'(t_2)$$

što znači da su $\omega_-'(t)$ $(0<t<+\infty)$ i $\omega_+'(t)$ $(0<t<+\infty)$ nerastuće funkcije.

Kako je $\omega(t)$ $(0<t<+\infty)$ neopadajuća funkcija to je

$$\omega_-'(t) \geq 0 \qquad (0<t<+\infty)$$

i

$$\omega_+'(t) \geq 0 \qquad (0<t<+\infty) .$$

b/ Neka je $\varepsilon>0$,po volji malo i $\delta=\delta(\varepsilon)$ odredjeno tako da je $\omega(\delta)=\varepsilon$. Neka je $(\alpha_k,\beta_k)\ (k=1,2,\dots,n)$ sistem disjunktnih intervala takvih da je

$$\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\delta$$

Iz konveksnosti funkcije $\omega(t)$ sleduje da je za svako $0\leq t_1<t_2$ i svako $h>0$

$$\omega(t_2+h)-\omega(t_2)\leq\omega(t_1+h)-\omega(t_1). \tag{6}$$

Stavljajući u relaciju (6)

$$t_1^{(k)}=\begin{cases}0 & , \quad k=1\\ \sum_{\nu=1}^{k-1}(\beta_\nu-\alpha_\nu) & , \quad k=2,3,4,\dots,n\end{cases}$$

$$t_2^{(k)}=\alpha_k \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

$$h^{(k)}=\beta_k-\alpha_k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

dobijamo redom

$$\omega(\beta_1)-\omega(\alpha_1)\leq\omega(\beta_1-\alpha_1) \qquad .$$

$$\omega(\beta_2)-\omega(\alpha_2)\leq\omega[(\beta_1-\alpha_1)+(\beta_2-\alpha_2)]-\omega(\beta_1-\alpha_1)$$

$$\vdots$$

$$\omega(\beta_n)-\omega(\alpha_n)\leq\omega\left[\sum_{\nu=1}^{n}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\right]-\omega\left[\sum_{\nu=1}^{n-1}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\right]$$

odakle, sabirajući imamo

$$\sum_{\nu=1}^{n}[\omega(\beta_\nu)-\omega(\alpha_\nu)]\leq\omega\left[\sum_{\nu=1}^{n}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\right]\leq\omega(\delta)=\varepsilon .$$

što znači da je $\omega(t)$ apsolutno neprekidna funkcija.

Iz apsolutne neprekidnosti konveksnog modula neprekidnosti $\omega(t)$ sleduje

$$\omega(t)=\int_0^t\omega'(u)\,du ,$$

pri čemu $\omega'(u)$ postoji skoro svuda na $(0,+\infty)$ i integrabilna je funkcija. Ako stavimo

$$\omega'(u)=\frac{1}{2}[\omega'_+(u)+\omega'_-(u)]$$

ada je $\omega'(u)$ definisano za svako $u\in(0,+\infty)$ i predstavlja nerastuću unkciju.

7°- Sada ćemo uvesti pojmove koji će nam u daljem radu iti veoma korisni.

Ako je $\omega(t)$ fiksirani modul neprekidnosti, $\omega(t)\not\equiv 0$, onda ćemo sa H_ω označiti skup funkcija $f\in C$ za koje je

$$\omega(f,t)\leq\omega(t) \qquad (t\geq 0).$$

Klasu H_ω možemo definisati još kao skup svih funkcija $f\in C$ za koje je

$$|f(x')-f(x'')|\leq\omega(|x'-x''|) \qquad \forall\, x', x''$$

pri čemu je $\omega(t)$ dati modul neprekidnosti.

Sa $H_\omega[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ označićemo skup funkcija f, datih na segmentu $[a,b]$ koje zadovoljavaju uslov

$$|f(x')-f(x'')|\leq\omega(|x'-x''|) \qquad \forall\, x', x''\in[a,b]$$

pri čemu je $\omega(t)$ dati modul neprekidnosti.

8^0 - Neka je W^rH_ω $(r=0,1,2,\dots)$ skup 2π- periodičnih, r- puta diferencijabilnih funkcija $f(x)$ za koje moduo neprekidnosti r- toga izvoda $\omega(f^{(r)},t)$ $(f^{(0)}=f)$ ne prevazilazi zadani moduo neprekidnosti $\omega(t)$.

9^0 - Neka je $W_0^rH_\omega(r=0,1,2,\dots)$ skup funkcija $f\in W^rH_\omega(r=0,1,\dots)$ za koje je

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0 .$$

Neka je $W^rH_\omega^*$ $(r=0,1,2,\dots)$ skup funkcija $f\in W^rH_\omega(r=0,1,\dots)$ za koje je

$$f(0)=0 .$$

10^0 - Funkcija $f\in L_1$ ima izvod, reda $r(r>0)$, u smislu Vejla, jednak $f^{(r)}(x)=\varphi(x)$ ako i samo ako je

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_0^r(t)\,\varphi(x-t)\,dt$$

pri čemu je

$$D_0^r(t)=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\cos(Kt-\frac{r\pi}{2})}{K^r} \qquad (r>0)$$

i $\varphi\in L_{1,0}$, t.j.

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0$$

Ako je $f\in L_{1,0}$ onda je, po definiciji $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Iz same definicije izvoda funkcije u Vejlovom smislu sleduje da je za svaku funkciju koja ima izvod reda $r\geq 0$ u Vejlovom smislu

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0.$$

U daljem ćemo diferencijabilnost u Vejlovom smislu prosto zvati diferencijabilnost.

11° - Neka je $W_0^r H_\omega (r \geq 0)$ skup 2π- periodičnih r-puta diferencijabilnih (u Vejlovom smislu) funkcija f za koje moduo neprekidnosti $\omega(f^{(r)}, t)$ r- toga izvoda (u Vejlovom smislu) ne prevazilazi zadani moduo neprekidnosti $\omega(t)$.

(Kako je za $r = 0, 1, 2, \ldots$ diferencijabilnost r- toga funkcije f u Vejlovom smislu isto što i diferencijabilnost r- toga reda funkcije f u običnom smislu zajedno sa uslovom

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$$

to je jasno zašto je u 11° upotrebljena ista oznaka $(W_0^r H_\omega)$ kao i u 9°).

12° - Neka je $H_\omega^p (1 \leq p \leq +\infty)$ skup funkcija iz $L_p (1 \leq p \leq +\infty)$ za koje je

$$\omega_p(f, t) \leq \omega(t) \qquad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Neka je $W_0^r H_\omega^p (r \geq 0, 1 \leq p \leq +\infty)$ skup 2π- periodičnih, r- puta diferencijabilnih (u Vejlovom smislu) funkcija f za koje integralni moduo neprekidnosti $\omega_p(f^{(r)}, t)$ r-toga izvoda (u Vejlovom smislu) ne prevazilazi zadani moduo neprekidnosti $\omega(t)$.

13° - Jedan od rezultata koji se ovde verovatno najviše koristi je lema Kornejčuka (tako nazivana po N.P.Kornejčuku, koji ju je prvi objavio i dokazao, mada je S.B.Stečkin do istog tvrdjenja došao ranije ali ga nije publikovao). Pre nego što iskažemo i dokažemo lemu Kornejčuka definisaćemo neke pojmove i dokazati nekoliko stavova koji će nam pomoći da pomenutu lemu jednostavnije dokažemo.

Neka je $\varphi(x)$ nenegativna i sumabilna funkcija na intervalu (a,b) (konačnom ili beskonačnom) i prema tome skoro svuda konačna na (a,b) funkcija. Za svako $y \geq 0$ definišemo $m(y)$ kao meru skupa E_y tačaka $x \in (a, b)$, za koje je $\varphi(x) \geq y$:

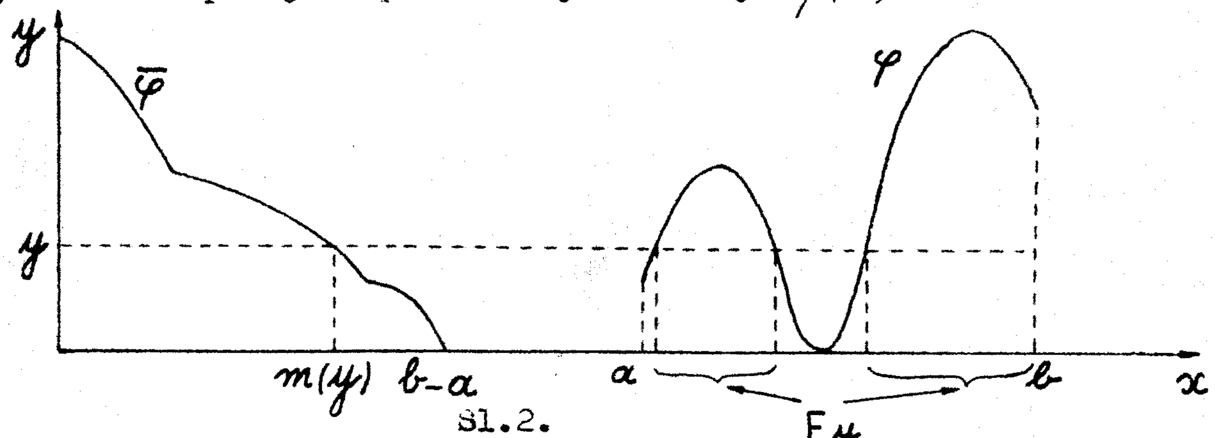
$$m(y) = mE_y, \quad E_y = \{x \mid x \in (a, b), \varphi(x) \geq y\}.$$

Funkcija $x = m(y)$, koju ponekad zovu funkcija raspodele za funkciju $\varphi(x)$, definisana za svako $y \in [0, +\infty]$, ne raste i pri tome je

$$m(0) = b - a, \quad m(+\infty) = \lim_{y \to +\infty} m(y) = 0$$

Ako je funkcija $m(y)$ neprekidna i strogo opada, tada postoji njoj inverzna, strogo opadajuća na $(0, b-a)$ funkcija $y = \bar{\varphi}(x)$

koju zovemo opadajuća permutacija funkcije $\varphi(x)$.



Sl.2.

U opštem slučaju $m(y)$ može imati intervale konstantnosti, a takodje i najviše prebrojivo mnogo prekida prve vrste i, da bi jednoznačno definisali inverznu funkciju, ispravićemo grafik $m(y)$ na sledeći način. U svakoj tački prekida y_0 funkcije $m(y)$ dopunimo njen grafik otsečkom $y=y_0, m(y_0+0)\leq x\leq m(y_0-0)$, a zatim na svakom segmentu $[\alpha,\beta]$, gde je funkcija $m(y)$ konstantna, ostavimo na njenom grafiku jednu tačku sa koordinatama, naprimer $y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\ x=m\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)$. Sada svakom x, $0\leq x\leq b-a$, odgovara jedinstvena tačka sa koordinatama $(x,m^{-1}(x))$, i time je definisana na $(0,b-a)$ funkcija $y=m^{-1}(x)=\overline{\varphi}(x)$ koju i zovemo opadajuća permutacija (ili samo permutacija) funkcije $\varphi(x)$.

Za svako $y\geq 0$ mera skupa tačaka $x\in(0,b-a)$ u kojima je $\overline{\varphi}(x)\geq y$, jednaka je $m(y)$, što sleduje sa slike 2. Zato je

$$m\{x\,|\,x\in(0,b-a),\overline{\varphi}(x)\geq y\}=m\{x\,|\,x\in(a,b),\varphi(x)\geq y\}=mE_y$$

a odatle sleduje, prema definiciji Lebegovog integrala

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\int_0^{b-a}\overline{\varphi}(x)dx.$$

U rasudjivanjima povezanim sa korišćenjem permutacija biće korisna

<u>Lema 1.</u> Ako je E merljiv skup iz (a,b), onda je

(7) $$\int_{b-a-mE}^{b-a}\overline{\varphi}(x)dx\leq\int_E\varphi(x)dx\leq\int_0^{mE}\overline{\varphi}(x)dx.$$

<u>D o k a z.</u> Neka je

$$\varphi_1(x)\leq\varphi(x)\qquad(a<x<b)$$

i neka su $m_1(y)$ i $m(y)$ odgovarajuće funkcije raspodele za φ_1 i φ.

Tada je za svako $y \geq 0$

$$m_1(y) \leq m(y)$$

i zato je

$$\overline{\varphi}_1(x) \leq \overline{\varphi}(x) \qquad (0 < x < b-a)$$

Specijalno, ako stavimo

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \ x \in E \\ 0 & , \ x \in (a,b) \setminus E \end{cases}$$

imamo

$$\overline{\varphi}_1(x) \leq \overline{\varphi}(x) \qquad (0 < x < b-a)$$

i

$$\int_E \varphi(x)dx = \int_E \varphi_1(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx = \int_0^{b-a} \overline{\varphi}_1(x)dx = \int_0^{mE} \overline{\varphi}_1(x)dx \leq \int_0^{mE} \overline{\varphi}(x)dx$$

i druga nejednakost je dokazana.

Da bismo dobili prvu nejednakost stavimo $E_1 = (a,b) \setminus E$ i

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , \quad x \in E_1 \\ 0 & , \quad x \in (a,b) \setminus E_1 = E \end{cases}$$

Onda je

$$\overline{\varphi}_2(x) \leq \overline{\varphi}(x) \qquad (0 < x < b-a)$$

i važi

$$\int_{E_1} \varphi(x)dx = \int_{E_1} \varphi_2(x)dx = \int_a^b \varphi_2(x)dx = \int_0^{b-a} \overline{\varphi}_2(x)dx = \int_0^{mE_1} \overline{\varphi}_2(x)dx \leq$$

$$\leq \int_0^{mE_1} \overline{\varphi}(x)dx = \int_0^{b-a-mE} \overline{\varphi}(x)dx$$

t.j.

$$\int_{E_1} \varphi(x)dx \leq \int_0^{b-a-mE} \overline{\varphi}(x)dx .$$

Oduzimajući poslednju nejednakost od

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_0^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx$$

dobijamo

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_{E_1} \varphi(x)dx \geq \int_0^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx - \int_0^{b-a-mE} \overline{\varphi}(x)dx = \int_{b-a-mE}^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx$$

i

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_{E_1}\varphi(x)dx = \int_{(a,b)\setminus E_1}\varphi(x)dx = \int_E \varphi(x)dx$$

t.j.

$$\int_E \varphi(x)dx \geqslant \int_{b-a-mE}^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx \, .$$

Time je dokazana nejednakost (7).

Iz leme 1. neposredno dobijamo sledeće posledice.

<u>P o s l e d i c a</u> 1. Ako je

$$\int_E \varphi(x)dx > \int_0^{\delta} \overline{\varphi}(x)dx \tag{8}$$

onda je $mE>\delta$.

<u>D o k a z</u>. Iz druge nejednakosti u (7) i (8) imamo

$$\int_0^{\delta} \overline{\varphi}(x)dx < \int_E \varphi(x)dx < \int_0^{mE} \overline{\varphi}(x)dx$$

odakle je $mE>\delta$.

<u>P o s l e d i c a</u> 2. Ako je

$$\int_E \varphi(x)dx < \int_{b-a-\delta}^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx \tag{9}$$

onda je $mE<\delta$.

<u>D o k a z</u>. Iz prve nejednakosti (7) i (9) sleduje

$$\int_{b-a-mE}^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx \leq \int_E \varphi(x)dx < \int_{b-a-\delta}^{b-a} \overline{\varphi}(x)dx$$

te je

$$b-a-mE > b-a-\delta$$

t.j.

$$mE<\delta \, .$$

I sledeće leme su veoma važne za naše rasudjivanje.

<u>L e m a 2</u>. Ako apsolutno neprekidna na $[a,b]$ funkcija $y=f(t)$ strogo monotono preslikava segment $a\leq t\leq b$ na segment $c\leq y\leq d$, onda je za svaki merljiv skup $E\subset[a,b]$

$$mf(E) = \int_E f'(t)dt \, .$$

Pri dopunskoj pretpostavci da je $f'(t)=0$ najviše na [skupu] mere nula, važe sledeća tvrdjenja :

i) ako je $mf(E)=0$, onda je $mE=0$;

ii) za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon)$ takvo, da iz $mf(E)<\delta$ [sl]eduje $mE<\varepsilon$;

iii) inverzna funkcija f^{-1} je apsolutno neprekidna na $[c,d]$.

<u>D o k a z</u>. Kako apsolutno neprekidna funkcija preslikava merljiv skup u merljiv skup to je skup $f(E)$ merljiv.

Kada je $E=[\alpha,\beta]$ formula (10) važi očigledno jer je $f(E)=[f(\alpha),f(\beta)]$ (pri dokazu pretpostavljamo, bez smanjenja opštosti, da $f(t)$ strogo raste na $[a,b]$) i

$$mf(E)=f(\beta)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)dt.$$

Slično se postupa kada je $E=(\alpha,\beta)$. No, tada je jasno da (10) važi uvek kada je E otvoren skup (u tom slučaju je i $f(E)$ otvoren skup).

Prelazeći na komplement ubedjujemo se da (10) važi i za slučaj kada je E zatvoren skup.

Razmotrimo najzad opšti slučaj kada je E proizvoljan merljiv skup. Tada za svako $\varepsilon>0$ postoje skupovi F_ε i G_ε takvi da je

$$F_\varepsilon\subset f(E)\subset G_\varepsilon\subset(a,b)\ ,\quad mG_\varepsilon-\varepsilon<mf(E)<mF_\varepsilon+\varepsilon\ .$$

Neka su F i G originali skupova F_ε i G_ε. Na osnovu dokazanog je (jasno je da je F zatvoren, a G otvoren skup)

$$\int_F f'(t)dt=mf(F)=mF_\varepsilon\ ,\qquad \int_G f'(t)dt=mf(G)=mG_\varepsilon$$

Tada je, zbog $f'(t)\geq 0$

$$mf(E)-\varepsilon<mF_\varepsilon=\int_F f'(t)dt\leq\int_E f'(t)dt\leq\int_G f'(t)dt=mG_\varepsilon<mf(E)+\varepsilon$$

i zbog proizvoljnosti ε prvo tvrdjenje leme 2 je dokazano.

i) Neka je $f'(t)>0$ skoro svuda na $[a,b]$ i neka je za proizvoljni skup $E\subset[a,b]$ $mf(E)=0$. Dokazaćemo da je $mE=0$. Pretpostavimo da je $mE>0$. Iz te pretpostavke i činjenice da je $f'(t)>0$ skoro svuda na $[a,b]$ sleduje

$$\int_E f'(t)dt>0$$

što zbog

$$\int_E f'(t)dt=mf(E)$$

povlači $mf(E)>0$, a to je nemoguće. Dakle je $mE=0$.

ii) Neka je, odredjenosti radi, što ne umanjuje opštost,

$$\varphi(t)\overset{def}{=}f'(t)>0$$

skoro svuda na $[a,b]$. Onda je, označavajući sa $\bar\varphi(t)$ opadajuću permutaciju za $\varphi(t)$, $\bar\varphi(t)>0$ skoro svuda na $0\leq t\leq b-a$. Za dato $\varepsilon>0$ neka je

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \int_{b-a-\varepsilon}^{b-a} \overline{\varphi}(t)\,dt$$

i

$$m f(E) = \int_E f'(t)\,dt = \int_E \varphi(t)\,dt < \delta = \int_{b-a-\varepsilon}^{b-a} \overline{\varphi}(t)\,dt.$$

Iz posledice 2 sleduje $mE < \varepsilon$, što je i trebalo dokazati.

iii) f^{-1} kao inverzna funkcija neprekidne i strogo monotone funkcije f na $[a,b]$, jeste i sama strogo monotona i neprekidna na $[c,d]$. Neka je (c_k, d_k) $(k=1,2,\dots,n)$ sistem disjunktnih intervala iz $[c,d]$ i

$$a_k = f^{-1}(c_k)\ ,\quad b_k = f^{-1}(d_k) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

Ako pretpostavimo da f strogo raste na $a \leq t \leq b$ tada i f^{-1} strogo raste na $[c,d]$ i intervali (a_k, b_k) $(k=1,2,\dots,n)$ su disjunktni. Neka je $E = \bigcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$. Jasno je da je $E \subset (a,b)$. Neka je $\varphi(t) = f'(t) > 0$, $\varepsilon > 0$ i proizvoljno malo,

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \int_{b-a-\varepsilon}^{b-a} \overline{\varphi}(t)\,dt$$

i

$$m f(E) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} (c_k, d_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} m(c_k, d_k) = \sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) < \delta,$$

t.j.

$$\int_E \varphi(t)\,dt < \int_{b-a-\varepsilon}^{b-a} \overline{\varphi}(t)\,dt$$

onda je $mE < \varepsilon$, t.j.

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k)\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(f^{-1}(c_k), f^{-1}(d_k)\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \left| f^{-1}(c_k) - f^{-1}(d_k) \right| < \varepsilon$$

što je i trebalo dokazati.

L e m a 3. Neka je apsolutno neprekidna funkcija $f(x)$, data na $[a,b]$, strogo monotona. Ako je $F(y)$ apsolutno neprekidna na $[f(a), f(b)]$, tada je funkcija $F(f(x))$ apsolutno neprekidna na $[a,b]$.

D o k a z. Mi ćemo pretpostaviti, ne smanjujući opštost, da f strogo raste.

Uzmimo $\varepsilon > 0$ i nadjimo $\delta > 0$ tako da za svaki konačni sistem disjunktnih intervala (A_k, B_k) iz

$$\sum_{k=1}^{n} (B_k - A_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |F(B_k) - F(A_k)| < \varepsilon$$

Zatim za takvo δ nadjimo takvo $\eta>0$ tako da za svaki konačni sistem disjunktnih intervala (a_K, b_K) za koji je

$$\sum_{K=1}^{m}(b_K-a_K)<\eta \quad \text{bude} \quad \sum_{K=1}^{m}|f(b_K)-f(a_K)|<\delta .$$

Pošto je prethodno učinjeno, izaberimo ma koji konačan sistem disjunktnih intervala (a_K, b_K) suma dužina kojih je manja od η . Intervali $(f(a_K), f(b_K))$ takodje su disjunktni (zbog monotonije funkcije f) i njihova suma ima dužinu manju od δ i zato je

$$\sum_{K=1}^{m}|F(f(b_K))-F(f(a_K))|<\varepsilon$$

što i dokazuje lemu 3 .

Sada ćemo navesti iskaz i dokaz leme Kornejčuka.

<u>Lema Kornejčuka</u>. Neka je $\psi(t)$ sumabilna funkcija na $[a,b]$, a funkcija

$$\Psi(x)=\int_a^x \psi(t)dt \tag{11}$$

strogo raste (opada) na (a,a') ,strogo opada (raste) na (b',b) $(a<a'\leq b'<b)$ i konstanta na $[a',b']$ (ako je $a'<b'$), pri čemu je $\Psi(b)=0$.

Tada je

$$M_\omega(\psi)=\sup_{f\in H_\omega[a,b]}\left|\int_a^b \psi(t)f(t)dt\right|\leq \tag{12}$$

$$\leq\int_a^{a'}|\psi(t)|\omega(\rho(t)-t)dt=\int_{b'}^{b}|\psi(t)|\omega(t-\rho^{-1}(t))dt$$

pri čemu je funkcija $\rho(x)$ definisana za $a\leq x\leq\frac{a'+b'}{2}=c$ relacijama

$$\begin{aligned} &\Psi(x)=\Psi(\rho(x)) && (a\leq x\leq a';\ b'\leq\rho(x)\leq b)\\ &\rho(x)=a'+b'-x && (a'\leq x\leq c)\end{aligned} \tag{13}$$

a $\rho^{-1}(x)$ funkcija inverzna funkcija $\rho(x)$.

Ako je $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti, tada u (12) stoji znak jednakosti, pri čemu supremum realizuju funkcije oblika $K\pm f_0$; K je proizvoljna konstanta i

$$(14)\qquad g_0(x) = \begin{cases} \int_x^c \omega'(\varphi(t)-t)\,dt, & (a \le x \le c) \\ \int_c^x \omega'(t-\varphi'(t))\,dt, & (c \le x \le b). \end{cases}$$

Relacijom (13) funkcija $\varphi(x)$ $(a \le x \le a')$ je dobro definisana. Da je to zaista tako dokazaće sledeće razmatranje.

Neka $x_0 \in [a,b]$, onda, zbog neprekidnosti funkcije (11) za $x \in [a,a']$, postoji jedno jedino $y_0 \in [0, \psi(a')]$ tako da je

$$(15)\qquad y_0 = \psi(x_0) = \int_a^{x_0} \varphi(t)\,dt .$$

Zbog neprekidnosti funkcije (11) za $x \in [b',b]$ postoji bar jedno $y \in [0, \psi(b')]$ $(\subset [0, \psi(a')])$ tako da je

$$(16)\qquad y_0 = y ,$$

a kako je funkcija (11) strogo monotona za $x \in [b',b]$, to postoji jedno jedino $y \in [0, \psi(b')]$ koje zadovoljava uslov (16).

No, kako je funkcija

$$y = \psi(x) \qquad (b' \le x \le b)$$

neprekidna i strogo monotona to ona ima inverznu funkciju

$$x = \psi^{-1}(y) \qquad (0 \le y \le \psi(b')),$$

sa skupom vrednosti $b' \le x \le b$, koja je takođe neprekidna i strogo monotona.

Iz prethodnog sleduje da za uočeno $\bar{y}$ $(= y_0 = \psi(x_0))$ postoji jedno jedino $x \in [b', b]$ takvo da je

$$x = \psi^{-1}(\bar{y})$$

t.j.

$$(17)\qquad \bar{y} = \psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt .$$

Iz (15), (16) i (17) sleduje

$$(18)\qquad \int_a^{x_0} \varphi(t)\,dt = \int_a^{x} \varphi(t)\,dt$$

pri čemu je za proizvoljno odabrano pa fiksirano $x_0 \in [a, a']$

jednoznačno odredjeno $\bar{x}\in[b',b]$ tako da važi (18), što znači da je

$$\bar{x}=\bar{x}(x) \qquad (a\leq x\leq a',\ b'\leq \bar{x}(x)\leq b)$$

U daljem tekstu ćemo umesto $\bar{x}=\bar{x}(x)$ pisati $\bar{x}=\rho(x)$ i jednakost (18) kojom je definisana funkcija $\rho(x)$ sada dobija oblik

$$(18') \qquad \int_a^x \psi(t)dt=\int_a^{\rho(x)}\psi(t)dt \qquad (a\leq x\leq a',\ b'\leq\rho(x)\leq b).$$

Ovim je dokazano da je funkcija $\rho(x)$ dobro definisana.

Ako obeležimo sa Ψ_1^{-1} funkciju inverznu funkciji $\Psi(x)$ na segmentu $[b',b]$ onda iz (13) sleduje

$$(19) \qquad \rho(x)=\Psi_1^{-1}(\Psi(x)) \qquad (a\leq x\leq a')$$

što znači da je $\rho(x)$ $(a\leq x\leq a')$ strogo monotona i neprekidna funkcija.

Funkcija $\rho^{-1}(x)(b'\leq x\leq b)$ kao inverzna funkcija funkcije $\rho(x)$ $(a\leq x\leq a')$ neprekidna je i strogo monotona.

Funkcije $\rho(x)$ $(a\leq x\leq a')$ i $\rho^{-1}(x)$ $(b'\leq x\leq b)$ su i apsolutno neprekidne. Dokažimo to tvrdjenje za funkciju $\rho(x)$.

Funkcija Ψ_1^{-1} (prema lemi 2) kao inverzna funkcija apsolutno neprekidne i strogo monotone funkcije $\Psi(x)(b'\leq x\leq b)$ za koju je $\Psi'(x)=0$ najviše na skupu mere nula, jeste apsolutno neprekidna na $[0,\Psi(b')]$.

Iz definicije funkcije $\rho(x)$ ((13)) sleduje

$$\rho(x)=\Psi_1^{-1}(\Psi(x)) \qquad (a\leq x\leq a'),$$

i kako je $\Psi(x)$ $(a\leq x\leq a')$ apsolutno neprekidna strogo monotona funkcija, a $\Psi_1^{-1}(y)$ $(0\leq y\leq\Psi(a')(=\Psi(b')))$ apsolutno neprekidna, to je (prema lemi 3) i $\rho(x)$ $(a\leq x\leq a')$ apsolutno neprekidna funkcija.

Na sličan način dokazujemo da je i $\rho^{-1}(x)$ $(b'\leq x\leq b)$ apsolutno neprekidna funkcija.

Jednakosti

$$\Psi(x)=\Psi(\rho(x)) \qquad (a\leq x\leq a'),$$

$$\Psi(\rho^{-1}(x))=\Psi(x) \qquad (b'\leq x\leq b)$$

možemo diferencirati skoro svuda na naznačenim intervalima (to se jednostavno dokazuje) i dobijamo da važi skoro svuda na naznačenim intervalima

(20) $$\varphi(x) = \varphi(\rho(x))\rho'(x) \qquad (a \leq x \leq a')$$

(21) $$\varphi(\rho^{-1}(x))(\rho^{-1}(x))' = \varphi(x) \qquad (b' \leq x \leq b)$$

Predjimo sada na dokaz leme Kornejčuka. Kako je već dokazano funkcija $\rho(x)$ neprekidno i strogo monotono preslikava segment $[a,c]$ na segment $[c,b]$ i pri tome važi $\rho(a)=b$, $\rho(c)=c$ .Stavljajući $t=\rho(z)$ na $[b',b]$ (zamena promenljivih je moguća zbog apsolutne neprekidnosti funkcije $\rho(x)$) dobijamo za svako $f\in H_\omega[a,b]$

(22) $$\int_{b'}^{b}\varphi(t)f(t)dt = -\int_{a}^{a'}\varphi(\rho(z))f(\rho(z))\rho'(z)dt .$$

Kako je $\varphi(t)=0$ skoro svuda na (a',b'), za svaku funkciju $f\in H_\omega[a,b]$, koristeći (2o) i (22) imamo

(23) $$\left|\int_{a}^{b}\varphi(t)f(t)dt\right| = \left|\int_{a}^{a'}\varphi(t)f(t)dt + \int_{b'}^{b}\varphi(t)f(t)dt\right| =$$
$$= \left|\int_{a}^{a'}\varphi(t)[f(t)-f(\rho(t))]dt\right| \leq \int_{a}^{a'}|\varphi(t)|\omega(\rho(t)-t)dt .$$

Slično, stavljajući $t=\rho^{-1}(z)$ na $[a;a']$ i koristeći (21) imamo

(24) $$\left|\int_{a}^{b}\varphi(t)f(t)dt\right| = \left|\int_{b'}^{b}\varphi(t)[f(\rho^{-1}(t))-f(t)]dt\right| \leq$$
$$\leq \int_{b'}^{b}|\varphi(t)|\omega(t-\rho^{-1}(t))dt .$$

Jednakost

(25) $$\int_{a}^{a'}|\varphi(t)|\omega(\rho(t)-t)dt = \int_{b'}^{b}|\varphi(t)|\omega(t-\rho^{-1}(t))dt$$

proverava se elementarno pomoću iste zamene promenljivih $t=\rho^{-1}(z)$. Prvi deo leme je dokazan.

Neka je $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti. Tada je $\omega(t)$ apsolutno neprekidna funkcija i

$$\omega(t) = \int_{0}^{t}\omega'(u)du$$

pri čemu $\omega'(u)$ ne raste. Dokažimo da funkcija $f_0(x)$,definisana jednakostima (14), zadovoljava relaciju

$$(26) \qquad f_0(\rho(x)) - f(x) = \omega(\rho(x) - x) \qquad (a \leq x \leq c).$$

Ako je $a \leq x \leq c$, onda je $c \leq \rho(x) \leq b$ i smena $t = \rho(z)$ daje

$$f_0(\rho(x)) = \int_c^{\rho(x)} \omega'(t - \rho^{-1}(t))\,dt = \int_c^{x} \omega'(\rho(z) - z)\rho'(z)\,dz$$

i važi

$$f_0(\rho(x)) - f_0(x) = -\int_x^c \omega'(\rho(t) - t)[\rho'(t) - 1]\,dt =$$

$$= -\int_x^c \omega'(\rho(t) - t)\,d(\rho(t) - t) = \omega(\rho(x) - x).$$

Sada iz (26) sleduje da u (23), a na osnovu (25) i u (26), za funkciju $f = f_0$ znak nejednakosti možemo zameniti znakom jednakosti. Pošto je

$$\Psi(b) = \int_a^b \psi(t)\,dt = 0$$

to supremum u (12) zajedno sa f_0 realizuje i ma koja funkcija oblika $K \pm f_0$ (K je proizvoljna konstanta).

Sada ćemo dokazati da $f_0 \in H_\omega[a,b]$. Neka je $a \leq x' < x'' \leq b$ i na početku pretpostavimo da je $x' \leq c \leq x''$. Funkcija $\rho(x) - x$ neprekidno i strogo monotono preslikava segment $[a,c]$ na segmentu $[0, b-a]$ i zato postoji tačka x_0, $a \leq x_0 < c$ takva da je

$$\rho(x_0) - x_0 = x'' - x'$$

Neka je, odredjenosti radi, $x' \leq x_0$, tada je $x'' \leq \rho(x_0)$ i važi $x_0 - x' = \rho(x_0) - x''$. Kako funkcija f_0 raste, imamo

$$|f_0(x'') - f_0(x')| = f_0(x'') - f_0(x') = [f_0(\rho(x_0)) - f_0(x_0)] +$$

$$+ [f_0(x_0) - f_0(x')] + [f_0(x'') - f_0(\rho(x_0))]$$

i kako je

$$f_0(\rho(x_0)) - f_0(x_0) = \omega(\rho(x_0) - x_0) = \omega(|x' - x''|)$$

treba dokazati da je suma poslednje dvekvadratne zagrade nepozitivna. Iz (14) sleduje da izvod $f_0'(x)$ funkcije $f_0(x)$ ne opada na (a,c) i ne raste na (c,b) i važi $f_0'(x) = f_0'(\rho(x))$; zato je

$$[f_0(x_0)-f_0(x')]+[f_0(x'')-f_0(\rho(x_0))]=$$

$$=\int_{x'}^{x_0} f'(t)\,dt-\int_{x''}^{\rho(x_0)} f'(t)\,dt\leq f_0'(x_0)(x_0-x')-$$

$$-f_0'(\rho(x_0))(\rho(x_0)-x'')=0$$

Ako su x' i x'' sa iste strane tačke c npr. $a\leq x'<x''\leq c$, tada izabravši tačku x_1 tako da je $c-x_1=x''-x'$ imamo s obzirom na već razmotreni slučaj

$$|f_0(x')-f_0(x'')|=\int_{x'}^{x''} f_0'(t)\,dt\leq\int_{x_1}^{c} f_0'(t)\,dt=$$

$$=f_0(c)-f_0(x_1)\leq\omega(c-x_1)=\omega(|x'-x''|).$$

Čvim je dokazano da $f_0\in H_\omega[a,b]$.

14° - <u>Uopštena nejednakost Minkovskog</u>. Neka je funkcija $f(x,y)$ definisana za

$$a\leq x\leq b,\quad c\leq y\leq d,$$

onda je

$$\left\{\int_a^b\left|\int_c^d f(x,y)\,dy\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leq\int_c^d\left\{\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dy\quad(1\leq p\leq+\infty)$$

(ili pisano drugačije

$$\left\|\int_c^d f(\cdot,y)\,dy\right\|_p\leq\int_c^d\|f(\cdot,y)\|_p\,dy\quad(1\leq p\leq+\infty)\;).$$

(za dokaz videti   str. 296).

15° - <u>Neke oznake i rezultati</u>.

15° 1.- Neka je W_M^r $(r=1,2,\ldots)$ skup 2π- periodičnih funkcija čiji je izvod reda $(r-1)$ apsolutno neprekidna funkcija i $\|f^{(r)}\|_M\leq 1$.

15° 2.- Neka je $W_{M,0}^r$ skup funkcija $f\in W_M^r$ za koje je

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0$$

Svaka funkcija $f\in W_{M,0}^r$ $(r=1,2\ldots)$ može se predstaviti u obliku

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_r(t)\,dt$$

pri čemu je

$$D_0^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r}\qquad(r=1,2,\dots)$$

i

$$\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)dt=0$$

jer je funkcija $f^{(r)}$ izvod periodične funkcije f.

15° 3.- Za dati niz $(\alpha_k)(k\in N)$ i $f\in W^r_{M,0}$ ili $f\in W^r_{0,H_\omega}$ stavimo

$$F^r(f,x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^r}\cos(kt-\frac{r\pi}{2})dt$$

Očigledno je da je za $\alpha_k=1\ (k=1,2,\dots)$

$$F^r(f,x,\alpha)=f(x).$$

15° 4.-

$$\tilde{D}_k(x)=\sum_{\nu=1}^{k}\sin\nu x\qquad(k=1,2,\dots)$$

15° 5. -

$$\tilde{D}_k^*(x)=\sum_{\nu=1}^{k-1}\sin\nu x+\frac{1}{2}\sin kx=\frac{1-\cos kx}{2\,tg\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{kx}{2}}{tg\frac{x}{2}}\qquad(k=1,2,\dots)$$

15° 6.-

$$S_k(x)=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\sin\nu x}{\nu}\qquad(k=1,2,\dots)$$

i važi

$$\operatorname{sgn} S_k(x)=\operatorname{sgn}\sin x\qquad(k=1,2,\dots),$$

$$S_k(x)=O(1)\qquad(k=1,2,\dots,\ x\in R)$$

15° 7.-

$$\operatorname{sgn}\sin x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\qquad(x\in R)$$

$$\operatorname{sgn}\cos x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(2k+1)x}{2k+1}\qquad(x\in R).$$

G L A V A 1.

§ 1.1. IZRACUNAVANJE SUPREMUMA NORMI FUNKCIJA KOJE PRIPADAJU ODREDJENIM KLASAMA

Neka je skup S podskup metričkog prostora X. Problemom odredjivanja

$$\sup_{x\in S}\|x\|_X$$

za razne prostore X i razne skupove S bavili su se mnogi uatori. Za nas su od interesa radovi N.P.Kornejčuka i V.F.Storčaja. U tim stavovima koriste se skupovi čije definicije upravo navodimo.

1° - $H_\omega[0,\pi]$ je skup funkcija f zadanih na segmentu $[0,\pi]$ koje zadovoljavaju uslov

$$\sup_{\substack{|x'-x''|\le t\\ x',x''\in[0,\pi]}}|f(x')-f(x'')|\le\omega(t)$$

pri čemu je $\omega(t)$ dati moduo neprekidnosti ;

2° - $W^rH_\omega[0,\pi]$ $(r=0,1,2,\dots)$ je skup 2π- periodičnih funkcija f čiji r -ti izvod zadovoljava uslov $f^{(r)}\in H_\omega[0,\pi]$

3° - $W_0^rH_\omega[0,\pi]$ $(r=0,1,2,\dots)$ je skup funkcija $f\in W^rH_\omega[0,\pi]$ za koje je

$$\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=0;$$

4° - $W^rH^*_\omega[0,\pi]$ $(r=0,1,2,\dots)$ je skup funkcija $f\in W^rH_\omega[0,\pi]$ za koje je

$$f(0)=0\ .$$

<u>Napomena</u>. Iz definicije navedenih skupova sleduje da su Kornejčuk i Storčaj koristili restrikciju konveksnog na gore (ili samo konveksnog) modula neprekidnosti $\omega(t)$ na segment $[0,\pi]$.

N.P.Kornejčuk je dokazao sledeće stavove:

<u>S t a v A</u>. (rad[2], 1962) Neka je t_0 nula funkcije

$$D_0^{2\ell}(t)=(-1)^\ell\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{2\ell}}\qquad(\ell=1,2,\dots)$$

na segmentu $[0,\pi]$, funkcija $\rho(x)$ definisana relacijom

$$\int_0^x D_0^{2\ell}(t)\,dt=\int_0^{\rho(x)}D_0^{2\ell}(t)\,dt\qquad(0\le x\le t_0\le\rho(x)\le\pi),$$

i $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti.

Onda je

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,\pi]}\|f\|_C=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^r}\,; & r=2\ell+1\,,\ \ell=0,1,2,\ldots\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\int_0^{t_0}\omega(\varphi(t)-t)\cos kt\,dt}{k^r}\,; & r=2\ell\,,\ \ell=1,2,\ldots\end{cases}$$

Za $r=0$ je

$$\sup_{f\in W_0^0 H_\omega[0,\pi]}\|f\|_C=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\,dt\,.$$

<u>S t a v B.</u> (rad [3], 1967) Neka je $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti. Onda je

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,\pi]}\|f\|_L=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^{r+1}}\,,\quad r=0,1,2,\ldots$$

V.F.Storčaj je dokazao zatim stavove

<u>S t a v C.</u> (rad [6], 1972) Neka je $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti. Onda je

$$\sup_{f\in W^r H_\omega^*[0,\pi]}\|f\|_C=\omega(\pi)$$

$$\sup_{f\in W^r H_\omega^*[0,\pi]}\|f\|_C=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^r}\,,\quad r=1,2,3,\ldots$$

<u>S t a v D.</u> (rad [6], 1972) Neka je $\omega(t)$ dati konveksan na gore, moduo neprekidnosti. Onda je

$$\sup_{f\in W^r H_\omega^*[0,\pi]}\|f\|_L=\begin{cases}4\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^r}\,; & r=2\ell+1\,,\ \ell=0,1,2,\ldots\\[2ex] 4\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\int_0^{t_0}\omega(\varphi(t)-t)\cos kt\,dt}{k^r}\,; & r=2\ell\,,\ \ell=1,2,\ldots\end{cases}$$

pri čemu t_0 i $\varphi(x)$ imaju isto značenje kao i u stavu A.

<u>S t a v E.</u> (rad [4], 1975) Neka je $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti.

[illegible]

funkcija čiji je izvod reda 2ℓ neparna, 2π- periodična funkcija

$$f_{(2\ell)}^{(2\ell)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\omega(2x) & , 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\omega(2\pi-2x) & , \frac{\pi}{2}\le x\le\pi .\end{cases}$$

Onda je

$$\sup_{f\in W_0^{2\ell}H_\omega[0,\pi]}\|f\|_{L_2}^2=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt\right]^2}{(2k+1)^{4\ell}}=\|f_{(2\ell)}\|_{L_2}^2$$

S t a v F. (rad [5] ,1974) Neka je $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti,

$$f_{(2\ell+1)}\left(\in W^{2\ell+1}H_\omega^*[0,\pi]\right)\quad(\ell=0,1,2,\dots)$$

funkcija čiji je izvod reda $2\ell+1$ neparna, 2π - periodična funkcija

$$f_{(2\ell+1)}^{(2\ell+1)}(x)=\begin{cases}(-1)^\ell\frac{1}{2}\omega(2x) & , 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ (-1)^\ell\frac{1}{2}\omega(2\pi-2x) & , \frac{\pi}{2}\le x\le\pi .\end{cases}$$

Onda je

$$\sup_{f\in W^{2\ell+1}H_\omega^*[0,\pi]}\|f\|_{L_p}^p=\int_0^{2\pi}f_{(2\ell+1)}^p(t)\,dt\quad(\ell=0,1,2,\dots;\ 1\le p<+\infty)$$

Mi ćemo u našim razmatranjima raditi sa sledećim skupovima

5° - $H_\omega[0,2\pi]$ je skup funkcija f zadanih na segmentu $[0,2\pi]$ koje zadovoljavaju uslov

$$\sup_{\substack{|x'-x''|\le t\\ x',x''\in[0,2\pi]}}|f(x')-f(x'')|\le\omega(t)$$

pri čemu je $\omega(t)$ dati moduo neprekidnosti;

6° - $W_0^rH_\omega[0,2\pi]$ $(r\in R^+)$ je skup 2π - periodičnih funkcija f čiji r -ti izvod (u Vejlovom smislu) zadovoljava uslov $f^{(r)}\in H_\omega[0,2\pi]$;

7° - $H_\omega^p[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$ je skup funkcija zadanih na segmentu $[0,2\pi]$ koje, za neko $p\in[1,+\infty)$, zadovoljavaju uslov

$$\sup_{\substack{|u|\le t\\ x,\,x+u\in[0,2\pi]}}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+u)-f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le\omega(t)$$

ili (ako je $p=+\infty$)

$$\sup_{|u|\leq t}\ \operatorname*{supess}_{\substack{0\leq x\leq 2\pi \\ x,\, x+u\in[0,2\pi]}} |f(x+u)-f(x)|\leq \omega(t)$$

pri čemu je $\omega(t)$ dati moduo neprekidnosti ;

8° - $W_0^r H_{\omega}^p[0,2\pi]$ $(r\in R^+, 1\leq p\leq +\infty)$ je skup 2π -periodičnih funkcija f čiji r -ti izvod (u Vejlovom smislu) zadovoljava uslov $f^{(r)}\in H_{\omega}^p[0,2\pi]$; i izračunaćemo

$$\sup_{f\in W_0^r H_{\omega}[0,2\pi]} \|f\|_C \qquad (r\in R^+)$$

i

$$\sup_{f\in W_0^r H_{\omega}^p[0,2\pi]} \|f\|_p \qquad (r\in R^+, 1\leq p\leq +\infty)$$

Napomena. U stavovima 1 i 2 koristimo restrikciju, konveksnog na gore, modula neprekidnosti $\omega(t)$ na segment $[0,2\pi]$, dok su Kornejčuk i Storčaj (kako je rečeno) koristili restrikciju, konveksnog na gore, modula neprekidnosti $\omega(t)$ na segment $[0,\pi]$. Otuda i različitost rezultata Kornejčuka i Storčaja, sa jedne , i stavova 1 i 2 (za $r\in N$), sa druge strane.

§ 1.2. KLASA FUNKCIJA $W_0^r H_{\omega}[0,2\pi]$ $(r>0)$

Stav 1. Neka je

$$D_0^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r} \qquad (r\in R^+,\ t\in(0,2\pi))$$

(za $r>1$ funkcija D_0^r (t) definisana je i za $t=0$ i $t=2\pi$) i $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti.

a/ Neka je $0<r<1$ i neka je $t_0(r)$ jedina nula od $D_0^r(t)$ iz $(0,2\pi)$. Ako je funkcija $\rho_r(x)$ definisana relacijom

$$\int_0^x D_0^r(t)dt=\int_0^{\rho_r(x)} D_0^r(t)dt \qquad (0\leq x\leq t_0(r)\leq \rho_r(x)\leq 2\pi)$$

tada je

$$(1)\qquad \sup_{f\in W_0^r H_{\omega}[0,2\pi]}\|f\|_C=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_0^{t_0(r)}\omega(\rho_r(t)-t)\cos(kt-\frac{r\pi}{2})dt}{k^r}$$

b/ Neka je $r \geq 1$ i neka su $t_0(r)$ i $t_1(r)$ $(0 \leq t_0(r) < t_1(r))$ jedine dve nule od $D_0^r(t)$ iz $[0,2\pi]$. Ako je funkcija $\rho_r(x)$ definisana relacijom

$$\int_{t_0(r)}^{x} D_0^r(t)dt = \int_{t_0(r)}^{\rho_r(x)} D_0^r(t)dt \quad (t_0(r) \leq x \leq t_1(r) \leq \rho_r(x) \leq t_0(r)+2\pi)$$

tada je

$$(2) \quad \sup_{f \in W_0^r H_\omega[0,2\pi]} \|f\|_C = \frac{(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}}{\pi} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\int_{t_0(r)}^{t_1(r)} \omega(\rho_r(t)-t)\cos(Kt-\frac{r\pi}{2})dt}{K^r}$$

<u>D o k a z</u>. a/ Kako $f \in W_0^r H_\omega[0,2\pi]$ $(0<r<1)$ to je

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt \quad (0<r<1)$$

pri čemu je

$$\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)dt = 0$$

i $f^{(r)} \in H_\omega[0,2\pi]$.

Imajući u vidu da zajedno sa funkcijom $f^{(r)}(t)$ klasi $H_\omega[0,2\pi]$ pripada i funkcija $\pm f^{(r)}(\alpha \pm t)$ za svako α, to je (stavljajući $\varphi(t) = f^{(r)}(t)$)

$$(3) \quad \sup_{f \in W_0^r H_\omega[0,2\pi]} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W_0^r H_\omega[0,2\pi]} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W_0^r H_\omega[0,2\pi]} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t)D_0^r(t)dt \right| = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in H_\omega[0,2\pi]} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(t)D_0^r(t)dt \right|.$$

Funkciju

$$D_0^r(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\cos(Kt-\frac{r\pi}{2})}{K^r} \quad (0<r<1,\ 0<t<2\pi)$$

možemo predstaviti u obliku

$$D_0^r(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(r)} \lim_{n\to+\infty} \left\{ \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{(t+2K\pi)^{1-r}} - \frac{n^r}{r(2\pi)^{1-r}} \right\} \quad (0<r<1,\ 0<t<2\pi)$$

([8], gl.II, § 13., teorema (13.7), str.118), odakle sleduje

$$(4) \quad (D_0^r(t))' = -(1-r)\frac{2\pi}{\Gamma(r)} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{(t+2K\pi)^{2-r}} < 0 \quad (0<r<1,\ 0<t<2\pi)$$

Prema tome, funkcija $D_0^r(t)\ (0<r<1)$ neprekidna je i strogo monotono opada na intervalu $(0,2\pi)$. Osim toga je i

$$\int_0^{2\pi} D_0^r(t)\,dt = D_0^{r+1}(2\pi)-D_0^{r+1}(0)=0$$

Dakle, postoji jedinstvena vrednost $t_0(r)\in(0,2\pi)$ (u daljem tekstu samo t_0) takva da je

$$(5)\qquad D_0^r(t)\begin{cases} >0 , & t\in(0,t_0)\\ =0 , & t=t_0\\ <0 , & t\in(t_0,2\pi)\end{cases}\qquad (0<r<1)$$

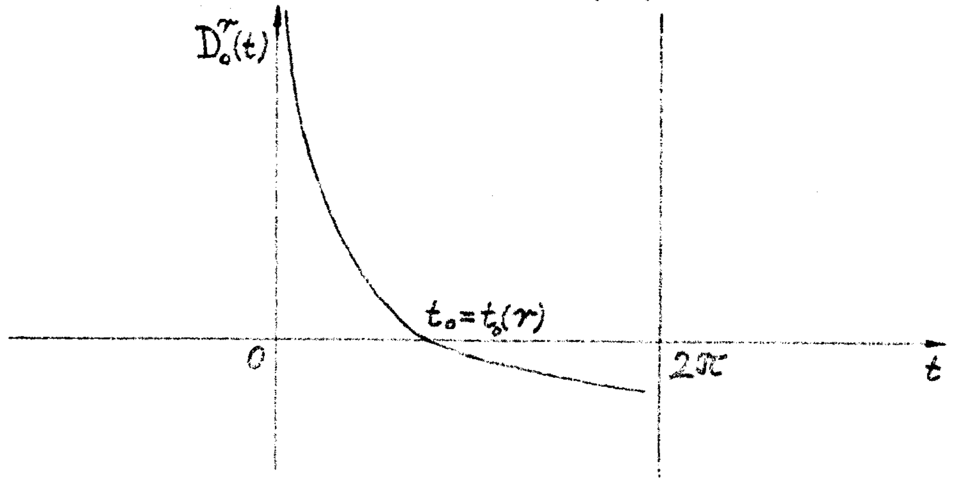
Imajući u vidu činjenicu da je funkcija $D_0^r(t)\ (0<r<1, t\in(0,2\pi))$ sa greškom čiji je red veličine ravnomerno jednak $O(1)$, jednaka

$$\frac{2\pi x^{1-r}}{\Gamma(r)} \quad \text{za} \quad 0<t\le\pi$$

i

$$0 \quad \text{za} \quad \pi<t<2\pi$$

([8], gl.II, § 13., str.118) to je, prema svemu rečenom grafik funkcije $D_0^r(t)\ (0<r<1, t\in(0,2\pi))$ sledeći



Sl.3. $D_0^r(t)\ (0<r<1, t\in(0,2\pi))$.

Funkcija

$$\Psi(x)\overset{\text{def}}{=}\int_0^x D_0^r(t)\,dt \quad (0\le x\le 2\pi)$$

neprekidna je i, zbog (5), strogo monotono raste za $x\in(0,t_0)$, strogo monotono opada za $x\in(t_0,2\pi)$ i $\Psi(2\pi)=0$.

Imajući u vidu pomenute zaključke i primenjujući lemu Kornejčuka na izraz u relaciji (3) $(\alpha=0, \beta=2\pi, \gamma=t_0)$ dobijamo

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,2\pi]}\|f\|_C=\frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}|D_0^r(t)|\,\omega(\varphi_-(t)-t)\,dt \quad (0<r<1)$$

odnosno zbog (5)

$$(6)\quad \sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,2\pi]} \|f\|_C = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_0^{t_0}\omega(\rho_r(t)-t)\cos(kt-\frac{r\pi}{2})dt}{k^r}\qquad (0<r<1)$$

pri čemu je funkcija $\rho_r(x)$ definisana relacijom

$$(7)\qquad \int_0^x D_0^r(t)dt = \int_0^{\rho_r(x)} D_0^r(t)dt \quad (0\le x\le t_0\le \rho_r(x)\le 2\pi).$$

Pomenuti supremum postiže se pomoću funkcije $C\pm\varphi^*(x)$, pri čemu je C proizvoljna konstanta,

$$(8)\quad \varphi^*(x)=\begin{cases}-\int_x^{t_0}\omega'(\rho_r(t)-t)dt, & 0\le x\le t_0\\ \int_{t_0}^{x}\omega'(t-\rho_r^{-1}(t))dt, & t_0\le x\le 2\pi\end{cases}$$

i funkcija $\rho_r^{-1}(x)$ inverzna funkciji $\rho_r(x)$ iz (7).

b/ Sada $f\in W_0^r H_\omega[0,2\pi]\,(r\geq 1)$ te je

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt \qquad (r\ge 1)$$

pri čemu je

$$\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)D_0^r(t)dt = 0$$

i $f^{(r)}\in H_\omega[0,2\pi]$.

Postupajući kao pri dokazu odgovarajućeg dela teoreme pod a/ dobijamo

$$(9)\qquad \sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,2\pi]}\|f\|_C = \frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in H_\omega[0,2\pi]}\left|\int_0^{2\pi}\varphi(t)D_0^r(t)dt\right|$$

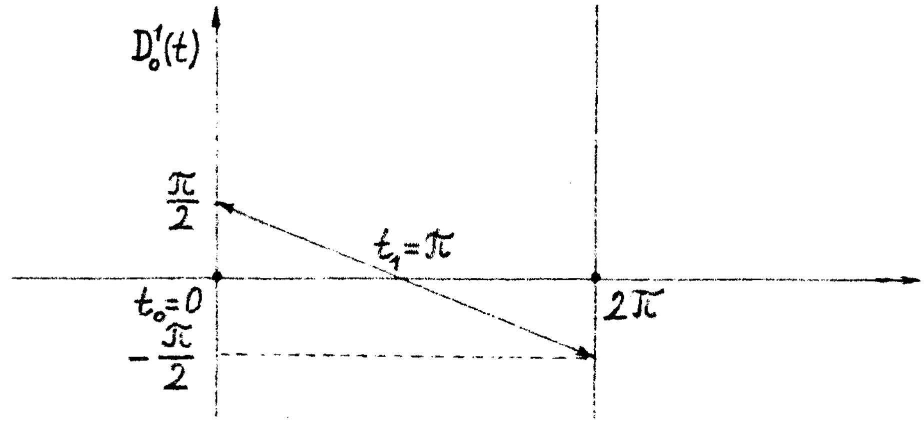
Funkcija $D_0^r(t)$ $(r\geq 1,\ t\in[0,2\pi])$ za $r=1$ ima oblik

$$D_0^1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}\qquad (0\le t\le 2\pi).$$

Kako je za $0<t<2\pi$, $D_0^1(t)=(\pi-t)/2$, to je

$$D_0^1(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi-t}{2} & ; \quad 0<t<2\pi\\ 0 & ; \quad t=0,\ t=2\pi\end{cases}$$

što znači da funkcija $D_0^1(t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ ima jedino dve nule $t_0=t_0(1)=0$ i $t_1=t_1(1)=\pi$ iz $[0,2\pi)$ (u daljem tekstu pisaćemo samo t_0 i t_1). Grafik funkcije $D_0^1(t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ je



Sl.4. $D_0^1(t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$.

Kako je

$$\left|\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r}\right|\leq\frac{1}{k^r}\qquad (r>1,\ k\in N,\ t\in R)$$

ravnomerno u odnosu na $t\in R$ i

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}<+\infty\qquad (r>1)$$

to je 2π- periodična funkcija

$$D_0^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r}\qquad (r>1,\ t\in R)$$

neprekidna. Medjutim, za $r\in\{2,3,4,\dots\}$ funkcija $D_0^r(t)$ se svodi na poznatu Bernulijevu funkciju koja ima tačno dve nule na intervalu $[0,2\pi)$. (Videti [1], strana 59.)

Neka je sada $r>1$ i $r\notin\{2,3,4,\dots\}$. Kako je

$$\int_0^{2\pi}D_0^r(t)\,dt=D_0^{r+1}(2\pi)-D_0^{r+1}(0)=0$$

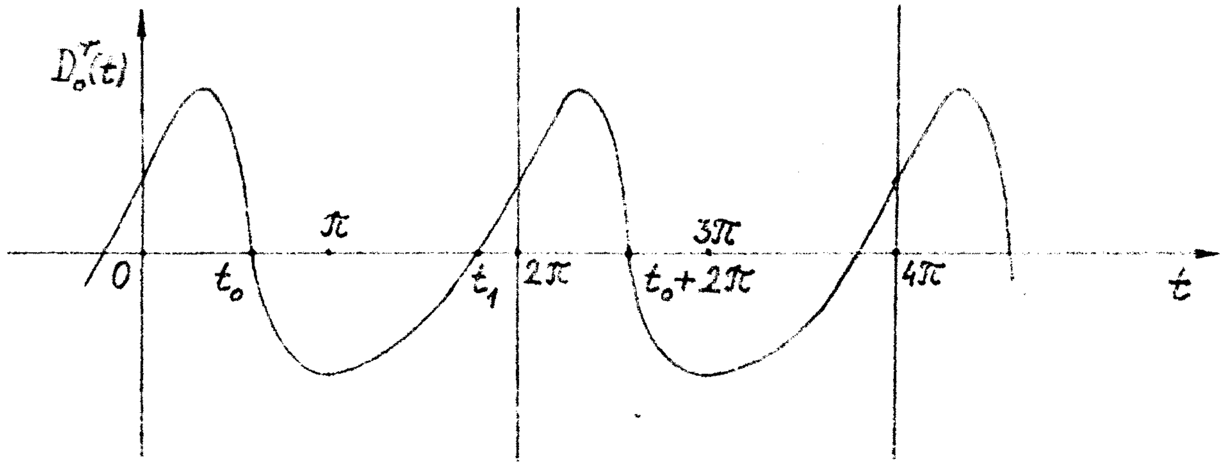
to funkcija $D_0^r(t)$ mora imati bar dve nule na intervalu $[0,2\pi)$

Prema teoremama 2.4' i 2.5 rada[7], ma koji trigonometrijski polinom reda $n-1$ $(n=1,2,3,\dots)$ $T_{n-1}(t)$ može interpolirati funkciju $D_0^r(t)$ u najviše $2n$ tačaka na intervalu $[0,2\pi)$. To važi i za polinom

$$T_{1-1}(t)=T_0(t)\equiv 0$$

koji prema rečenom, interpolira $D_0^r(t)$ u najviše dve tačke na intervalu $[0,2\pi)$.

Dakle, funkcija $D_0^r(t)$ $(r>1)$ ima na $[0,2\pi)$ tačno dve nule koje ćemo označiti sa $t_0=t_0(r)$ i $t_1=t_1(r)$ (uz pretpostavku $0\leq t_0(r)<t_1(r)$). (U daljem tekstu, umesto $t_0(r)$ i $t_1(r)$ $(r>1)$ pisaćemo samo t_0 i t_1). Grafik funkcije $D_0^r(t)$ $(r>1, t\in R)$ je



Sl.5. $D_0^r(t)$ $(r>1, t\in R)$.

Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je

$$(10)\qquad D_0^r(t)\begin{cases} >0 \ ; & t\in(t_0,t_1) \\ <0 \ ; & t\in(t_1,t_0+2\pi) \end{cases}$$

(Inače bismo umesto funkcije $D_0^r(t)$ posmatrali funkciju $-D_0^r(t)$.)

Funkcija

$$\psi(x)\overset{def}{=}\int_{t_0}^{x} D_0^r(t)\,dt \qquad (t_0\leq x\leq t_0+2\pi)$$

neprekidna je i, zbog (1o), strogo monotono raste za $x\in(t_0,t_1)$, strogo monotono opada za $x\in(t_1,t_0+2\pi)$ i $\psi(t_0+2\pi)=0$.

Imajući u vidu poslednji zaključaki primenjujući lemu Kornejčuka na izraz u relaciji (9) $(a=t_0,\ b=t_0+2\pi,\ c=t_1)$, dobijamo

$$(9')\quad \sup_{f\in W^r H_\omega [illegible]} [illegible] = \frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in H_\omega [illegible]}\left|\int_{t_0}^{t_0+2\pi}\varphi(t)D_0^r(t)\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} [illegible]\,dx$$

pri čemu je funkcija [illegible] definisana relacijom

$$(11)\qquad \int_{t_0}^{x} D_0^r(t)\,dt = \int_{t_0}^{\rho_r(x)} D_0^r(t)\,dt \qquad (t_0 \le x \le t_1 \le \rho_r(x) \le t_0 + 2\pi).$$

Pomenuti supremum postiže se pomoću funkcije $C \pm \varphi^*(x)$ pri čemu je C proizvoljna konstanta,

$$(12)\ \varphi^*(x) = \begin{cases} -\int_x^{t_1} \omega'(\rho_r(t)-t)\,dt &, \ t_0 \le x \le t_1 \\ \int_t^{x} \omega'(t-\rho_r^{-1}(t))\,dt &, \ t_1 \le x \le t_0 + 2\pi \end{cases}$$

a $\rho_r^{-1}(x)$ je funkcija inverzna funkciji $\rho_r(x)$ iz (11).

Da bismo dobijeni rezultat u (9')napisali onako kako je to u iskazu stava 1 navedeno odredimo $sgn\, D_0^r(t)\ (r \ge 1, t \in (t_0, t_1))$.

Neka je prvo $r \ne 2\nu+1\ (\nu = 0,1,2,\dots)$ t.j.

$$2\nu+1 < r < 2\nu+3 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Jasno je da je

$$sgn\, D_0^r(t) = -sgn\, D_0^r(0) = -sgn\left[\left(\cos\frac{r\pi}{2}\right)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^r}\right] = -sgn\cos\frac{r\pi}{2}$$

$$(2\nu+1 < r < 2\nu+3,\ \nu = 0,1,2,\dots;\ t_0 < t < t_1).$$

No, kako je

$$\cos\frac{r\pi}{2} \begin{cases} < 0\ ;\ 4\nu+1 < r < 4\nu+3,\ \nu = 0,1,2,\dots \\ > 0\ ;\ 4\nu+3 < r < 4\nu+5,\ \nu = 0,1,2,\dots \end{cases},$$

to je (za $t \in (t_0, t_1)$)

$$sgn\, D_0^r(t) = \begin{cases} 1\ ;\ 4\nu+1 < r < 4\nu+3,\ \nu = 0,1,2,\dots \\ -1\ ;\ 4\nu+3 < r < 4\nu+5,\ \nu = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

No, dalje, za svako r koje zadovoljava uslov

$$4\nu+1 < r < 4\nu+3 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

je

$$2\nu < \frac{r-1}{2} < 2\nu+1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

t.j.

$$\left[\frac{r-1}{2}\right] = 2\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

najzad

$$(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} = 1\ ,$$

za svako r koje zadovoljava uslov

$$4\nu+3<r<4\nu+5 \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

je

$$2\nu+1<\frac{r-1}{2}<2\nu+2 \quad (\nu=0,1,2,\dots)$$

t.j.

$$\left[\frac{r-1}{2}\right]=2\nu+1 \qquad (\nu=0,1,2,\dots)$$

i najzad

$$(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}=-1$$

Dakle je

$$\operatorname{sgn} D_0^r(t)=(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \quad (2\nu+1<r<2\nu+3,\ \nu=0,1,2,\dots;\ t_0<t<t_1)$$

Neka je sada $r=2\nu+1\ (\nu=0,1,2,\dots)$ i
$t\in(t_0(2\nu+1)=0,\ t_1(2\nu+1)=\pi)\equiv(0,\pi)$ Zbog

$$\operatorname{sgn}\sum_{k=1}^{q}\frac{\sin kt}{k}=\begin{cases}1, & 0<t<\pi\\ -1, & \pi<t<2\pi\end{cases} \qquad (q\in N)$$

imamo (za $t\in(0,\pi)$)

$$\operatorname{sgn} D_0^{2\nu+1}(t)=\operatorname{sgn}\left[(-1)^\nu\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^{2\nu+1}}\right]=\operatorname{sgn}\left\{(-1)^\nu\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k^{2\nu}}-\frac{1}{(k+1)^{2\nu}}\right]\sum_{\mu=1}^{k}\frac{\sin\mu t}{\mu}\right\}$$
$$=(-1)^\nu=(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \qquad (\nu=0,1,2,\dots).$$

Dakle, prema svemu prethodnom je

$$\operatorname{sgn} D_0^r(t)=(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \quad (r\geq 1,\ t\in(t_0(r),\ t_1(r))).$$

te, iz (9') sleduje (za $r\geq 1$)

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega[0,2\pi]}\|f\|_C=\frac{(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_{t_0}^{t_1}\omega'(\varphi_r(t_0,t))\cos(kt-\frac{r\pi}{2})\,dt}{k^r}$$

što je i trebalo dokazati.

<u>P r i m e d b a</u>. Kornejčuk, prilikom izvodjenja stava A, koristi sledeće osobine simetrije funkcije $D_0^r(t)\ (r\in N)$ (dakle u slučaju kada je r prirodan broj):

I.- ako je $r=2\nu+1\ (\nu=0,1,2,\dots)$ onda je

$$D_0^{2\nu+1}(t)=-D_0^{2\nu+1}(-t)$$
$$D_0^{2\nu+1}(\pi-t)=D_0^{2\nu+1}(\pi+t)\ ;$$

II.- ako je $r=2\nu\ (\nu=1,2,\dots)$ onda je

$$D_0^{2\nu}(t) = D_0^{2\nu}(2\pi - t),$$

i razmatranje svodi na interval dužine π (t.j. posmatra skup $H_\omega[0,\pi]$).

Medjutim, kada r nije prirodan broj (već samo $r>0$) sličnih osobina simetrije (u opštem slučaju) nema i zato smo mi ostali na segmentu dužine 2π (t.j. posmatrali smo skup $H_\omega[0,2\pi]$).

§ 1.3. KLASA FUNKCIJA $W_0^r H_\omega^p\ (r>0, 1\leq p\leq+\infty)$

S t a v 2. Neka je

$$D_0^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt-\frac{r\pi}{2})}{k^r}\quad (r\in R^+,\ t\in(0,2\pi))$$

(za $r\geq 1$ funkcija $D_0^r(t)$ definisana je i za $t=0$ i $t=2\pi$), i $\omega(t)$ dati, konveksan na gore, moduo neprekidnosti.

a/ Neka je $0<r<1$ i neka je $t_0(r)$ jedina nula od $D_0^r(t)$ iz $(0,2\pi)$. Ako je funkcija $\rho_r(x)$ definisana relacijom

$$\int_0^x D_0^r(t)\,dt = \int_0^{\rho_r(x)} D_0^r(t)\,dt \qquad (0\leq x\leq t_0(r)\leq \rho_r(x)\leq 2\pi)$$

tada je

$$(13)\quad \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]}\|f\|_p = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_0^{t_0(r)}\omega(\rho_r(t)-t)\cos(kt-\frac{r\pi}{2})\,dt}{k^r}\qquad (1\leq p\leq+\infty)$$

b/ Neka je $r\geq 1$ i neka su $t_0(r)$ i $t_1(r)\ (0\leq t_0(r)<t_1(r))$ jedine dve nule od $D_0^r(t)$ iz $[0,2\pi)$. Ako je funkcija $\rho_r(x)$ definisana relacijom

$$\int_{t_0(r)}^{x} D_0^r(t)\,dt = \int_{t_0(r)}^{\rho_r(x)} D_0^r(t)\,dt \qquad (t_0(r)\leq x\leq t_1(r)\leq \rho_r(x)\leq t_0(r)+2\pi)$$

tada je

$$(14)\quad \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]}\|f\|_p = \frac{(-1)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_{t_0(r)}^{t_1(r)}\omega(\rho_r(t)-t)\cos(kt-\frac{r\pi}{2})\,dt}{k^r}$$

$$(1\leq p\leq+\infty).$$

Dokaz. a/ Neka je $0<r<1$. Kako $f^{(r)}\in H^p_{\omega}[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$ to je

$$\omega_p(f^{(r)},t)\le\omega(t) \qquad (1\le p\le+\infty,\ t\in[0;2\pi]).$$

No, kad $f^{(r)}(x)\in H^p_{\omega}[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$, onda i $\pm f^{(r)}(\alpha\pm x)\in H^p_{\omega}[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$ za svako α. Zato je $(f^{(r)}=\varphi)$

$$(15) \qquad \sup_{f\in W_0^r H^p_{\omega}[0,2\pi]}\|f\|_p=\sup_{f\in W_0^r H^p_{\omega}[0,2\pi]}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sup_{f\in W_0^r H^p_{\omega}[0,2\pi]}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\sup_{f\in W_0^r H^p_{\omega}[0,2\pi]}2^{\frac{1}{p}}\pi^{\frac{1}{p}-1}\left|\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)D_0^r(t)dt\right|=$$

$$=\sup_{\varphi\in H^p_{\omega}[0,2\pi]}2^{\frac{1}{p}}\pi^{\frac{1}{p}-1}\left|\int_0^{2\pi}\varphi(t)D_0^r(t)dt\right| \quad (1\le p\le+\infty).$$

Skup $H_{\frac{\omega}{(2\pi)^{1/p}}}[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$ funkcija $\varphi\in C$ za koje je

$$\omega(\varphi,t)\le\frac{\omega(t)}{(2\pi)^{1/p}} \qquad (1\le p\le+\infty,\ t\in[0,2\pi])$$

podskup je skupa $H^p_{\omega}[0,2\pi]$ $(1\le p\le+\infty)$, jer je za svaku funkciju $\varphi\in H_{\frac{\omega}{(2\pi)^{1/p}}}[0,2\pi]$, ako je $1\le p<+\infty$

$$\omega_p(\varphi,t)=\sup_{|h|\le t}\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\sup_{|h|\le t}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sup_{|h|\le t}\|\varphi(\cdot+h)-\varphi(\cdot)\|_C\right]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=\sup_{|h|\le t}\left\{\int_0^{2\pi}[\omega(\varphi,t)]^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=(2\pi)^{\frac{1}{p}}\cdot\omega(\varphi,t)\le(2\pi)^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\omega(t)}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}}=\omega(t),$$

a ako je $p=+\infty$

$$\omega_\infty(\varphi,t)=\sup_{|h|\le t}\ \operatorname*{supess}_{0\le x\le 2\pi}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|=$$

$$=\sup_{|h|\le t}\ \max_{0\le x\le 2\pi}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|=\omega(\varphi,t)\le\omega(t).$$

Iz (15) i dokazane inkluzije

$$H_{\frac{\omega}{(2\pi)^{1/p}}}[0,2\pi]\subset H^p_{\omega}[0,2\pi] \qquad (1\le p\le+\infty)$$

sleduje

$$\sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\|f\|_p=\sup_{\varphi\in H^p_\omega[0,2\pi]} 2^{\frac{1}{p}}\pi^{\frac{1}{p}-1}\left|\int_0^{2\pi}\varphi(t)D_0^r(t)dt\right|\geq \sup_{\varphi\in H_{\frac{\omega}{(2\pi)^{1/p}}}[0,2\pi]} 2^{\frac{1}{p}}\pi^{\frac{1}{p}-1}\left|\int_0^{2\pi}\varphi(t)D_0^r(t)dt\right| \quad (1\leq p\leq+\infty)$$

a odavde primenjujući lemu Kornejčuka ($a=0$, $b=2\pi, c=t_0$) i znajući da je $0<r<1$ dobijamo

$$(16)\quad \sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\|f\|_p \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}|D_0^r(t)|\,\omega(\rho_r(t)-t)dt \quad (1\leq p\leq+\infty)$$

pri čemu se (videti dokaz leme Kornejčuka) supremum postiže pomoću funkcije $K\pm\varphi_0(x)$, gde je K = const i

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{(2\pi)^{1/p}}\displaystyle\int_x^{t_0}\omega'(\rho_r(t)-t)dt\,, & 0\leq x\leq t_0\\[2ex] \dfrac{1}{(2\pi)^{1/p}}\displaystyle\int_{t_0}^{x}\omega'(t-\rho_r^{-1}(t))dt\,, & t_0\leq x\leq 2\pi\end{cases}$$

a $\rho_r(x)$ je funkcija definisana relacijom

$$(17)\quad \int_0^x D_0^r(t)dt=\int_0^{\rho_r(x)}D_0^r(t)dt \qquad (0\leq x\leq t_0\leq\rho_r(x)\leq 2\pi)$$

i funkcija $\rho_r^{-1}(x)$ je inverzna funkciji $\rho_r(x)$.

Nejednakost suprotnog smera dokazaćemo na sledeći način. Najpre, izvod jednakosti (17) po x daje

$$(18)\qquad D_0^r(x)=D_0^r(\rho_r(x))\rho_r'(x)$$

skoro svuda na $[0,t_0]$. Kako je $0<r<1$ imamo

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{t_0}+\int_{t_0}^{2\pi}\right)f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt\,.$$

Kada u drugom integralu izvršimo smenu

$$t=\rho_r(y)\qquad (0\leq y\leq t_0\leq\rho_r(y)\leq 2\pi)$$

a uzmemo u obzir relaciju (18) dobijemo

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{0}f^{(r)}(x-\rho_r(y))D_0^r(\rho_r(y))\rho_r'(y)dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}D_0^r(t)\left[f^{(r)}(x-t)-f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right]dt$$

Koristeći dobijeni izraz za funkciju $f(x)$ i uopštenu nejednakost Minkovskog, kao i činjenicu da $f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]$, imamo

$$(19)\qquad \sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\|f\|_p=\sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{t_0}D_0^r(t)\left[f^{(r)}(x-t)-f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right]dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leq \sup_{f\in W_0^r H^p_\omega[0,2\pi]}\frac{1}{\pi}\int_0^{t_0}\left\{\int_0^{2\pi}|D_0^r(t)|^p\left|f^{(r)}(x-t)-f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}dt=$$

$$= \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} |D_0^r(t)| \left\{ \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x-\rho_r(t))|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} dt \le \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} |D_0^r(t)|\,\omega_p(f^{(r)}, \rho_r(t)-t)\,dt$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} |D_0^r(t)|\,\omega(\rho_r(t)-t)\,dt \quad (1\le p\le +\infty)$$

Iz (16) i (19) i (5) sleduje

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \|f\|_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{t_0} |D_0^r(t)|\,\omega(\rho_r(t)-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty} \frac{\int_0^{t_0} \omega(\rho_r(t)-t)\cos(Kt-\frac{r\pi}{2})\,dt}{K^r}$$

$$(0< r< 1,\ 1\le p\le +\infty).$$

Ovim je dokazana jednakost (13).

b/ Kako je sada $r\ge 1$ to redom imamo $(f^{(r)}=\varphi)$

$$(20)\qquad \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \|f\|_p = \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) D_0^r(t)\,dt \right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \sup_{f\in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} 2^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}-1} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) D_0^r(t)\,dt \right| =$$

$$= \sup_{\varphi\in H_\omega^p[0,2\pi]} 2^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}-1} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) D_0^r(t)\,dt \right| \ge \sup_{\varphi\in H_{\frac{\omega}{(2\pi)^{1/p}}}[0,2\pi]} 2^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}-1} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) D_0^r(t)\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} |D_0^r(t)|\,\omega(\rho_r(t)-t)\,dt \quad (1\le p\le +\infty)$$

pri čemu se supremum postiže pomoću funkcije $K\pm\varphi_0(x)$, gde je K = const,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \int_x^{t_1} \omega'(\rho_r(t)-t)\,dt, & t_0\le x\le t_1 \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/p}} \int_{t_1}^{x} \omega'(t-\rho_r(t))\,dt, & t_1\le x\le t_0+2\pi \end{cases}$$

funkcija $\rho_r(x)$ definisana je relacijom

(21)

a funkcija $\varphi_r(x)$ inverzna je funkciji $\rho_r(x)$.

Da bismo dokazali nejednakost suprotnog smera primetimo da je izvod relacije (21)

$$(22) \qquad D_0^r(x) = D_0^r(\rho_r(x))\,\rho_r'(x)$$

skoro svuda na $[t_0, t_1]$ i da je, zbog $r \geq 1$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\,D_0^r(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_0+2\pi}\right) f^{(r)}(x-t)\,D_0^r(t)\,dt .$$

Kada u drugom integralu izvršimo smenu

$$t = \rho_r(y) \qquad (t_0 \leq x \leq t_1 \leq \rho_r(x) \leq t_0 + 2\pi)$$

i uzmemo u obzir relaciju (22) dobijemo

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} D_0^r(t)\left[f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right] dt .$$

Koristeći dobijeni izraz za funkciju $f(x)$, uopštenu nejednakost Minskovskog, kao i činjenicu da $f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]$ imamo

$$(23) \qquad \sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \|f\|_p = \sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \left\{\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_{t_0}^{t_1} D_0^r(t)\left[f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right]dt\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\pi}\sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|D_0^r(t)\left[f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right]\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt =$$

$$= \sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1}|D_0^r(t)|\left\{\int_0^{2\pi}\left|f^{(r)}(x-t) - f^{(r)}(x-\rho_r(t))\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} dt \leq \sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1}|D_0^r(t)|\,\omega_p(f^{(r)}, \rho_r(t) - t)\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1}|D_0^r(t)|\,\omega(\rho_r(t) - t)\,dt \qquad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Iz (20) i (23) i relacije za $\operatorname{sgn} D_0^r(t)$ $(r \geq 1, t_0 < t < t_1)$ imamo

$$\sup_{f \in W_0^r H_\omega^p[0,2\pi]} \|f\| = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_1} D_0^r(t)\,\omega(\rho_r(t) - t)\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\int_{t_0}^{t_1}\omega(\rho_r(t) - t)\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)dt}{k^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ovim je dokazana i jednakost (19).

§ 1.4. IZRAČUNAVANJE SUPREMUMA NORMI TRANSFORMACIJA $F^r(f,x,\alpha)(r\in N)$ FUNKCIJA KOJE PRIPADAJU ODREDJENIM KLASAMA

Iz radova Favara, Ahiezera i Krejna sleduje rezultat

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}} \|f\|_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \qquad (r=1,2,\dots).$$

(Veličine

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \qquad (r=0,1,2,\dots)$$

su takozvane konstante Favara) .

U Uvodu, u tački $15^0.3.$, definisali smo $F^r(f,x,\alpha)$ ($f\in W^r_{M,0}$ ili $f\in W^r_0H_\omega$), pri čemu je $(\alpha_k)(k\in N)$ dati niz, na sledeći način

$$F^r(f,x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^r}\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt\,.$$

Problemi koje sada sebi postavljamo su

- Izračunati

$$\sup_{f\in S}\|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C \qquad (S=W^r_{M,0} \text{ ili } S=W^r_0H_\omega)$$

pod nekim uslovima koje niz $(\alpha_k)(k\in N)$ zadovoljava. Rešenju tih problema posvećeni su stavovi 3., 4., 5. i 6. .

§ 1. 5. KLASA FUNKCIJA $W^r_{M,0}$ $(r\in N)$

1.5. 1. <u>S t a v 3.</u> Neka je dat nenegativan, nerastući niz $(\alpha_k)(k\in N)$. Onda je za svako $r\in N$

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}} \overset{\text{def}}{=} K_{r,\alpha} \tag{24}$$

<u>D o k a z.</u> Dokaz stava 3 izvešćemo u četiri dela.

1^0. Za $r=1$ imamo

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{f\in W^r_{M,0}}|F^1(f,0,\alpha)|$$

pri čemu je

$$F^1(f,0,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}\sin kt\,.$$

Neka je

$$\lambda_{k,r} = \frac{\alpha_k}{k^r} - \frac{\alpha_{k+1}}{(k+1)^r} \qquad (k \in N).$$

Za svako $m \in N$ onda možemo pisati

$$(25) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k} \sin kt = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_{k,o} \cdot S_k(t) + \alpha_m \cdot S_m(t)$$

gde je

$$S_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu t}{\nu} \qquad (n \in N, t \in R)$$

Kako niz $(\alpha_k)(k \in N)$ ne raste i ograničen je, postoji

$$\lim_{m \to +\infty} \alpha_m = \alpha (\geq 0)$$

i kako postoji

$$\lim_{m \to +\infty} S_m(t) = S(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu} \qquad (t \in R)$$

to je

$$\lim_{m \to +\infty} \alpha_m S_m(t) = \alpha S(t) \qquad (t \in R)$$

i zato, iz (25), kad $m \to +\infty$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,o} S_k(t) + \alpha S(t)$$

Iz prethodnog sleduje

$$|F^1(f,o,\alpha)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(1)}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} \sin kt\, dt \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(1)}(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,o} S_k(t) + \alpha S(t) \right] dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,o} |S_k(t)| + \alpha |S(t)| \right] dt.$$

Kako je

$$\operatorname{sgn} S_k(t) = \operatorname{sgn} \sin t \qquad (k \in N, t \in R)$$

(videti [8], tom I, str. 106.) to je i

$$\operatorname{sgn} S(t) = \operatorname{sgn} \sin t \qquad (t \in R)$$

i zato je

$$(26) \qquad \begin{aligned} |S_k(t)| &= S_k(t) \operatorname{sgn} S_k(t) = S_k(t) \operatorname{sgn} \sin t \qquad (k \in N, t \in R) \\ |S(t)| &= S(t) \operatorname{sgn} S(t) = S(t) \operatorname{sgn} \sin t \qquad (t \in R) \end{aligned}$$

te možemo pisati

$|F^1(f,o,\alpha)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi}$ [illegible]

$= \int_0^{2\pi}$ [illegible]

Kako je niz $\left(\frac{\alpha_K}{K}\right)$ $(K\in N)$ nerastući,

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{\alpha_K}{K}=0$$

i

$$K\cdot\frac{\alpha_K}{K}=\alpha_K=O(1)\qquad (K\in N)$$

to su parcijalne sume reda

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K}\sin Kt$$

ravnomerno ograničene (videti [8], tom I, str.292-298).Imajući u vidu mali Lebegov stav možemo dalje pisati

$$|F^1(f,0,\alpha)|\le\frac{1}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\sum_{K=1}^{m}\frac{\alpha_K}{K}\sin Kt\,dt .$$

Koristeći činjenicu da je

$$\operatorname{sgn}\sin t=\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\sin(2K+1)t}{2K+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu t}{\nu}$$

gde je

$$\varepsilon_\nu\overset{def}{=}\begin{cases}1\,;\ \nu=2K+1\,,\ K=0,1,2,\dots\\ 0\,;\ \nu=2K\quad,\ K=1,2,\dots\end{cases}$$

imamo

$$|F^1(f,0,\alpha)|\le\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu t}{\nu}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\,dt$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\right)d\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu y}{\nu}dy\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu y}{\nu}dy\Bigg|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu\cos\nu t\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu t}{\nu}dt\right)$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\sin\nu t}{\nu}\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu\cos\nu t\,dt=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\frac{\varepsilon_\nu\alpha_{\nu+1-\lambda}\cos\lambda t\cos(\nu+1-\lambda)t}{\nu^2}dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\sum_{\nu=1}^{2\left[\frac{m-1}{2}\right]+1}\frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\nu^2}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu\alpha_\nu}{\nu^2}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)^{2}}\alpha_{2k+1}=K_{1,\alpha},$$

t.j.

(27) $$\sup_{f\in W^1_{M,}}\|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_c\le K_{1,\alpha}.$$

Medjutim, za funkciju $f \in W^1_{M,0}$ za koju je $f^{(1)}(-t) = \operatorname{sgn}\sin t$ imamo

$$|F^1(f,0,\alpha)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(1)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K}\sin Kt\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K}\sin Kt\,dt\right| = K_{1,\alpha},$$

t.j.

$$\sup_{f\in W^1_{M,0}}\|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C \geq K_{1,\alpha}$$

što zajedno sa (27) daje

$$(28)\qquad \sup_{f\in W^1_{M,0}}\|F^1(f,\cdot\alpha)\|_C = K_{1,\alpha}$$

2^o. Neka je sada $r = 2a+1\,(a\in N)$ (t.j. $r\in\{3,5,7,\dots\}$).

Stavimo
$$\alpha_K' = \frac{\alpha_K}{K^{2a}} \quad (K\in N).$$

Niz $(\alpha_K')\,(K\in N)$ je negativan, nerastući i

$$\lim_{K\to+\infty}\alpha_K' = \alpha' = 0.$$

Imajući u vidu osobine niza $(\alpha_K')(K\in N)$ i tačku 1^o. dokaza ovog stava možemo pisati

$$\sup_{f\in W^{2a+1}_{M,0}}\|F^{2a+1}(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f\in W^{2a+1}_{M,0}}|F^{2a+1}(f,0,\alpha)| = \sup_{f\in W^{2a+1}_{M,0}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(2a+1)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^{2a+1}}\sin Kt\,dt\right|$$

Neka je sada, za svako $f\in W^{2a+1}_{M,0}$

$$\varphi = f^{(2a)}.$$

Onda je skup funkcija φ ustvari skup $W^1_{M,0}$ i možemo dalje pisati

$$(29)\quad \sup_{f\in W^{2a+1}_{M,0}}\|F^{2a+1}(f,\cdot,\alpha)\|_C = \frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in W^1_{M,0}}\left|\int_0^{2\pi}\varphi^{(1)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K'}{K}\sin Kt\,dt\right| = K_{1,\alpha'} = K_{2a+1,\alpha}$$

(a = 1,2,3, ...).

3^o. Stavimo sada r =2. Onda je

$$\sup_{f\in W^2_{M,0}}\|F^2(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f\in W^2_{M,0}}|F^2(f,0,\alpha)|$$

$$F^2(f,0,\alpha)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(2)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^2}\cos Kt\,dt\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(2)}(-t)\left[\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sin Ky\,dy\right)\right]dt\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2)}(-t)\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}\sin ky\,dy\right]dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2)}(-t)\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,0}S_k(y)+\alpha S(y)\right]dy\right\}dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}S_k(y)\,dy+\alpha\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}S(y)\,dy\right]dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,0}\phi_k(t)+\alpha\phi(t)\right]dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,0}|\phi_k(t)|+\alpha|\phi(t)|\right]dt,$$

pri čemu je stavljeno

$$\phi_k(t)\overset{\text{def}}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}S_k(y)\,dy \qquad (k\in N)$$

$$\phi(t)\overset{\text{def}}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}S(y)\,dy$$

Kako je

$$\operatorname{sgn}\phi_k(t)=-\operatorname{sgn}\cos t \qquad (k\in N)$$

$$\operatorname{sgn}\phi(t)=-\operatorname{sgn}\cos t$$

to je

$$(30)\qquad \begin{aligned}|\phi_k(t)|&=\phi_k(t)\operatorname{sgn}\phi_k(t)=-\phi_k(t)\operatorname{sgn}\cos t \qquad (k\in N)\\ |\phi(t)|&=\phi(t)\operatorname{sgn}\phi(t)=-\phi(t)\operatorname{sgn}\cos t\end{aligned}$$

i zato možemo pisati

$$|F^2(f,0,\alpha)|\leq-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\left[\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k,0}\phi_k(t)+\alpha\phi(t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\,dt.$$

Kako je svako $m\in N$ (niz $(\alpha_k)(k\in N)$ je ograničen)

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\right|\leq\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^2}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}<+\infty$$

to je niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt$$

ravnomerno ograničen i na osnovu malog Lebegovog stava je

$$|F^2(f,0,\alpha)|\leq\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\,dt.$$

Koristeći činjenicu da je

$$\operatorname{sgn}\cos t=\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K}\cos(2K+1)t}{2K+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu t}{\nu}$$

gde je

$$\bar{\varepsilon}_\nu=\begin{cases}(-1)^K & ;\ \nu=2K+1\ ,\ K=0,1,2,\dots\\ 0 & ;\ \nu=2K\ ,\ K=1,2,\dots\end{cases}$$

imamo

$$|F^2(f,0,\alpha)|\le\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu t}{\nu}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu^2}\cos\nu t\,dt=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu^2}\cos\nu t\cdot d\left(\int_0^{t}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu y}{\nu}dy\right)=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\left\{\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu^2}\cos\nu t\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\sin\nu t}{\nu^2}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\sin\nu t}{\nu^2}dt\right\}=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\cdot d\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\sin\nu y}{\nu^2}dy\right)=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi^2}\left\{-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\alpha_\nu}{\nu}\sin\nu t\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu t}{\nu^3}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu t}{\nu^3}\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu\cos\nu t\,dt\right\}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\cos\nu t}{\nu^3}\sum_{\nu=1}^{m}\alpha_\nu\cos\nu t\,dt$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\bar{\varepsilon}_\mu\alpha_{\nu+1-\mu}\cos\mu t\cos(\nu+1-\mu)t}{\mu^3}dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\sum_{\nu=1}^{2\left[\frac{m-1}{2}\right]+1}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\alpha_\nu}{\nu^3}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu\alpha_\nu}{\nu^3}=\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(2+1)}\alpha_{2K+1}}{(2K+1)^3}=K_{2,\alpha}\ ,$$

t.j.

$$\sup_{f\in W^2_{M,0}}\|F^2(f,\cdot,\alpha)\|_C\le K_{2,0}\ . \tag{31}$$

Medjutim, za funkciju $f\in W^2_{M,0}$ za koju je $f^{(2)}(-t)=\operatorname{sgn}\cos t$ imamo

$$|F^2(f,0,\alpha)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^2}\cos Kt\,dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^2}\cos Kt\,dt\right|=K_{2,\alpha}$$

t.j.

$$\sup_{f\in W^2_{M,0}}\|F^2(f,\cdot,\alpha)\|_C\geq K_{2,\alpha}$$

što zajedno sa (31) daje

$$(32)\qquad \sup_{f\in W^2_{M,0}}\|F^2(f,\cdot,\alpha)\|_C=K_{2,\alpha}\,.$$

4°. Uzmimo da je sada $r=2a+2\ (a\in N)$ (t.j. $r\in\{4,6,8,\dots\}$

Niz

$$\alpha'_K=\frac{\alpha_K}{K^{2a}}\qquad (K\in N)$$

nenegativan je i nerastući i važi

$$\lim_{K\to+\infty}\alpha'_K=\alpha'=0$$

Imajući u vidu osobine niza $(\alpha'_K)(K\in N)$ i tačku 3°. ovog dokaza možemo pisati

$$\sup_{f\in W^{2a+2}_{M,0}}\|F^{2a+2}(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{f\in W^{2a+2}_{M,0}}|F^{2a+2}(f,0,\alpha)|=\sup_{f\in W^{2a+2}_{M,0}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}f^{(2a+2)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^{2a+2}}\cos Kt\,dt\right|$$

Stavimo sada, za svako $f\in W^{2a+2}_{M,0}$

$$\varphi=f^{(2a)}$$

Onda je skup funkcija φ ustvari skup $W^2_{M,0}$ i možemo dalje pisati

$$(33)\ \sup_{f\in W^{2a+2}_{M,0}}\|F^{(2a+2)}(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{\varphi\in W^2_{M,0}}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi^{(2)}(-t)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha'_K}{K^2}\cos Kt\,dt\right|=K_{2,\alpha'}=K_{2a+2,\alpha}$$

(a = 1,2,3,...).

Iz (28),(29),(32) i (33) sleduje jednakost (24).Ovim je stav 3 dokazan.

<u>P o s l e d i c a</u>. Ako je $\alpha_K=1\ (K\in N)$,onda relacija (24) postaje

$$(24')\qquad \sup_{f\in W^r_{M,0}}\|F^{r}(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|f\|_C=K_r\qquad (r=1,2,\dots)$$

što je ranije poznati rezultat Favara,Ahiezera i Krejna.

Ponekad negativan niz $(\alpha_k)(k\in N)$ ne mora da opada, ali postoji $p\in N$ takvo da niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^p}\right) \quad (k\in N)$$

opada. U takvim slučajevima važi sledeće tvrdjenje.

1.5.2. S t a v 4. a/ Neka je dat negativan niz $(\alpha_k)(k\in N)$ i neka je $s\in N$ i niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\right) \qquad (k\in N)$$

nerastući. Onda je za svako $r>2s\,(r\in N)$

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}} \|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C = K_{r,\alpha} \tag{34}$$

b/ Neka je dat negativan niz $(\alpha_k)(k\in N)$ i neka je $s\in N$ i niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\right) \qquad (k\in N)$$

nerastući sa osobinom $\alpha_k = O(k^{-(2s-2)})(k\in N)$. Onda je

$$K_{r,\alpha} \le \sup_{f\in W^r_{M,0}} \|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C \le K_{r,\alpha} + \begin{cases} 2\alpha_1 & ; \; r=2s-1 \\ 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\Delta\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\right); & r=2s \end{cases} \tag{35}$$

i

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}} \|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C = K_{r,\alpha} \qquad (r=2s+1, 2s+2, \dots) \tag{36}$$

a/ Neka je $s\in N$ i

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\alpha_k}{k^{2s}} \qquad (k\in N).$$

Onda je $\bar{\alpha}_k \geqslant 0\,(k\in N)$ niz $(\bar{\alpha}_k)(k\in N)$ ne raste i

$$\lim_{k\to+\infty} \bar{\alpha}_k = \bar{\alpha} \geqslant 0.$$

Za svako $f\in W^r_{M,0}$ $(r\geqslant 2s, r\in N)$ stavimo

$$\varphi = f^{(2s)}$$

Skup funkcija φ je ustvari skup funkcija $W^{r-2s}_{M,0}$.

Imajući u vidu prethodne napomene i stav 3 možemo pisati

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}} \|F^r(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f\in W^r_{M,0}} |F^r(f,0,\alpha)| = \sup_{f\in W^r_{M,0}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^r}\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt\right| =$$

$$= \sup_{\varphi\in W^{r-2s}_{M,0}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi^{(r-2s)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_k}{k^{r-2s}}\cos\left[kt-\frac{(r-2s)\pi}{2}\right]dt\right| = K_{r-2s,\bar{\alpha}} = K_{r,\alpha}$$

pri čemu je $r-2s = 1,2,3,\dots$, t.j. $r=2s+1, 2s+2,\dots$ a ovim je dokazana jednakost (34).

b/ U dokazu ćemo razlikovati dva slučaja

$$r=2s-1 \quad \text{ili} \quad r=2s$$

Neka je prvo $s\in N$ i $r=2s-1$. Onda je redom

$$\sup_{f\in W^{2s-1}_{M,0}} \|F^{2s-1}(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f\in W^{2s-1}_{M,0}} |F^{2s-1}(f,0,\alpha)| \tag{37}$$

$$F^{2s-1}(f,0,\alpha) = \frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(2s-1)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin kt\,dt.$$

Kako je

$$k\cdot\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}} = \frac{\alpha_k}{k^{2s-2}} = O(1) \qquad (k\in N)$$

i

$$\lim_{K\to+\infty}\frac{\alpha_K}{K^{2s-1}}=0$$

to je niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\alpha_K}{K^{2s-1}}\sin Kt$$

ravnomerno ograničen i zato je moguće pisati

$$(38)\qquad F^{2s-1}(f,0,\alpha)=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to+\infty}\left\{\sum_{K=1}^{m}\frac{\alpha_K}{K^{2s-1}}f^{(2s-1)}(-t)\sin Kt\right\}dt=$$

$$=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\sum_{K=1}^{m}\frac{\alpha_K}{K^{2s-1}}\sin Kt\,dt=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\widetilde{D}_K(t)+$$

$$+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\widetilde{D}_m(t)\Big]dt=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\widetilde{D}^*_K(t)+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\widetilde{D}^*_m(t)\Big]dt+$$

$$+\frac{(-1)^{s+1}}{2\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\sin Kt+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\sin mt\Big]dt=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}F_{1,m}^{2s-1}+\lim F_{2,m}^{2s-1}=F_1^{2s-1}+F_2^{2s-1}$$

Kako je

$$|F_{2,m}^{2s-1}|=\left|\frac{(-1)^{s+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\sin Kt+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\sin mt\Big]dt\right|\le\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}=\mathcal{L}_1$$

ravnomerno u odnosu na $m\in N$ i $f\in W_{M,0}^{2s-1}$ to je, kad $m\to+\infty$

$$(39)\qquad |F_2^{2s-1}|\le\mathcal{L}_1$$

ravnomerno u odnosu na $f\in W_{M,0}^{2s-1}$

Kako je

$$\operatorname{sgn}\widetilde{D}^*_K(t)=\operatorname{sgn}\sin t\qquad(K\in N)$$

i

$$(40)\qquad |\widetilde{D}^*_K(t)|=\widetilde{D}^*_K(t)\operatorname{sgn}\widetilde{D}^*_K(t)=\widetilde{D}^*_K(t)\operatorname{sgn}\sin t\qquad(K\in N)$$

to je, imajući u vidu (39), za svako $m\in N$ i svako $f\in W_{M,0}^{2s-1}$

$$|F_{1,m}^{2s-1}|=\left|\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(2s-1)}(-t)\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\widetilde{D}^*_K(t)+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\widetilde{D}^*_m(t)\Big]dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}|\widetilde{D}^*_K(t)|+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}|\widetilde{D}^*_m(t)|\Big]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\Big[\sum_{K=1}^{m-1}\lambda_{K,2s-1}\widetilde{D}^*_K(t)+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\widetilde{D}^*_m(t)\Big]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\left\{\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}\left[\tilde{D}_k(t)-\frac{\sin kt}{2}\right]+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\left[\tilde{D}_m(t)-\frac{\sin mt}{2}\right]\right\}dt\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\left[\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}\tilde{D}_k(t)+\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\tilde{D}_m(t)\right]dt+|F_{2,m}^{2s-1}|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin kt\,dt+\alpha_1$$

Posle parcijalne integracije ponovljene $2s-1$ puta dobijamo (koristeći tačku $15^o.7.$ iz Uvoda) da je za svako $m\in N$ i svako $f\in W_{M,0}^{2s-1}$

$$(41)\quad |F_{1,m}^{2s-1}|\le\frac{4}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^{2s-1+1}}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cos kt\,dt+\alpha_1=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{k(2s-1+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s-1+1}}+\alpha_1 .$$

Kada je (41) $m\to+\infty$ dobijamo

$$(42)\qquad |F_1^{2s-1}|\le K_{2s-1,\alpha}+\alpha_1$$

ravnomerno u odnosu na $f\in W_{M,0}^{2s-1}$

Iz (37), (38), (39) i (42) sleduje

$$(43)\qquad \sup_{f\in W_{M,0}^{2s-1}}\|F^{2s-1}(f,\cdot,\alpha)\|_C\le K_{2s-1,\alpha}+2\alpha_1 .$$

Za funkciju $f\in W_{M,0}^{2s-1}$ za koju je $f^{(2s-1)}(-t)=\operatorname{sgn}\sin t$ je

$$|F^{2s-1}(f,0,\alpha)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin kt\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin kt\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\sin t\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin kt\,dt\right|.$$

Posle $2s-1$ puta ponovljene parcijalne integracije imamo

$$|F^{2s-1}(f,0,\alpha)|=\left|\frac{4}{\pi^2}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^{2s-1+1}}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cos kt\,dt\right|=$$

$$=\left|\lim_{m\to+\infty}\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{k(2s-1+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s-1+1}}\right|=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(2s-1+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s-1+1}}=K_{2s-1,\alpha}$$

odakle dobijamo

$$\sup_{f\in W^{2s-1}_{M,0}}\|F^{2s-1}(f,\cdot,\alpha)\|_C\geq K_{2s-1,\alpha}$$

što zajedno sa (43) daje prvu nejednakost u (35).

Neka je sada $r=2s$. Onda je

$$(44)\qquad \sup_{f\in W^{2s}_{M,0}}\|F^{2s}(f,\cdot,\alpha)\|=\sup_{f\in W^{2s}_{M,0}}|F^{2s}(f,0,\alpha)|$$

i

$$F^{2s}(f,0,\alpha)=\frac{(-1)^s}{\pi}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\cos kt\,dt$$

Parcijalne sume reda

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\cos kt$$

ravnomerno su ograničene u odnosu na $m\in N$ i $t\in R$ jer je

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\cos kt\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-2}}\cdot\frac{1}{k^2}\cos kt\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

$$(45)\quad F^{2s}(f,0,\alpha)=\frac{(-1)^s}{\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}f^{(2s)}(-t)\cos kt\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^s}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\cos kt\,dt=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sin ky\,dy\right]dt=$$

$$=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\sin ky\,dy\,dt=\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{m-1}\Delta_{k,2s-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\tilde{D}^*_k(y)\,dy+\right.$$

$$\left.\frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\tilde{D}^*_m(y)\,dy\right]dt+\frac{(-1)^{s+1}}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi}f^{(2s)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\Delta_{k,2s-1}}{k}\cos kt+\frac{\alpha_m}{m^{2s}}\cos mt\right]dt=$$

$$= \lim_{m\to+\infty} F_{1,m}^{2s} + \lim_{m\to+\infty} F_{2,m}^{2s} = F_1^{2s} + F_2^{2s}$$

Kako je za svako $m\in N$

$$|F_{2,m}^{2s}| \le \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda_{k,2s-1}}{k} + \frac{\alpha_m}{m^{2s}}$$

ravnomerno u odnosu na $f\in W_{M,0}^{2s}$, to je, kad $m\to+\infty$

$$(46) \qquad |F_2^{2s}| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k,2s-1}}{k}$$

ravnomerno u odnosu na $f\in W_{M,0}^{2s}$.

Kako je za 2π- periodičnu funkciju

$$\phi_k(t) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \tilde{D}_k^*(y)\,dy \qquad (k\in N)$$

$$\operatorname{sgn}\phi_k(t) = -\operatorname{sgn}\cos t \qquad (k\in N)$$

to je

$$(47) \qquad |\phi_k(t)| = \phi_k(t)\operatorname{sgn}\phi_k(t) = \phi_k(t)\operatorname{sgn}\cos t \qquad (k\in N)$$

S obzirom na (47), (46) i tačku 15°.7. iz Uvoda za svako $m\in N$ je

$$(48) \qquad |F_{1,m}^{2s}| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2s)}(-t)\left[\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}\phi_k(t) + \frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\phi_m(t)\right]dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}|\phi_k(t)| + \frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}|\phi_m(t)|\right]dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\left[\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}\phi_k(t) + \frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\phi_m(t)\right]dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\left\{\sum_{k=1}^{m-1}\lambda_{k,2s-1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\left[\tilde{D}_k(y) - \frac{1}{2}\sin ky\right]dy + \frac{\alpha_m}{m^{2s-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\left[\tilde{D}_m(y) - \frac{1}{2}\sin my\right]dy\right\}dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\cos kt\,dt + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\operatorname{sgn}\cos t\left[\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k,2s-1}}{k}\cos kt + \frac{\alpha_m}{m^{2s}}\cos mt\right]dt\right| \le$$

$$\le \frac{4}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(2k+1)t}{(2k+1)^{2s+1}}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\cos kt\,dt + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k,2s-1}}{k} + \frac{\alpha_m}{k^{2s}} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{k(2s+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s+1}} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\lambda_{k,2s-1}}{k} + \frac{\alpha_m}{m^{2s}}$$

ravnomerno u odnosu na $f \in W^{2s}_{M,0}$.

Kad u (48) $m \to +\infty$ dobijamo

$$(49) \qquad |F_1^{2s}| \leq K_{2s,\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k,2s-1}}{k}$$

ravnomerno u odnosu na $f \in W^{2s}_{M,0}$.

Iz (44), (45), (46) i (49) sleduje

$$(50) \qquad \sup_{f \in W^{2s}_{M,0}} \|F^{2s}(f,\cdot,\alpha)\|_C \leq K_{2s,\alpha} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k,2s-1}}{k} .$$

Za funkciju $f \in W^{2s}_{M,0}$ za koju je $f^{(2s)}(t) = \operatorname{sgn} \cos t$ imamo

$$|F^{2s}(f,0,\alpha)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}\cos t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^{2s}} \cos kt\,dt\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}\cos t \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k^{2s}} \cos kt\,dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}\cos t \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k^{2s}} \cos kt\,dt\right|$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left|\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k+1)t}{2k+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{k^{2s}} \cos kt\,dt\right| = \frac{4}{\pi^2}\left|\lim_{m\to+\infty}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(2s+1)}\cos(2k+1)t}{(2k+1)^{2s+1}} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cos kt\,dt\right|$$

$$= \frac{4}{\pi}\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k(2s+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s+1}} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(2s+1)}\alpha_{2k+1}}{(2k+1)^{2s+1}} = K_{2s,\alpha} .$$

Dakle je

$$\sup_{f \in W^{2s}_{M,0}} \|F^{2s}(f,\cdot,\alpha)\|_C \geq K_{2s,\alpha}$$

što zajedno sa (50) daje drugu nejednakost u (35).

Kako niz $\lambda_{k,2s-1}$ $(k \geq 1)$ ne raste, to i niz (α_k/k^{2s}) $(k \geq 1)$ ne raste. Primenjujući sada relaciju (34) na poslednji niz dobijamo relaciju (36).

<u>Napomena</u>. Stav 4 b/, za [illegible] i [illegible] ne daje tačno

[illegible]

ali odredjuje segment koji ga sadrži i ta činjenica nam pomaže, ako je (α_k) $(k \geq 1)$ niz koji zavisi i od parametra [illegible] da odredimo red veličine

[illegible]

kod $n \to +\infty$. Naprimer, ako je

$$\alpha_k = \alpha_k(n) = a_k \cdot b_n \qquad (k \in N,\ n \in N)$$

pri čemu je $0 < b_n \to 0 \ (n \to +\infty)$ onda je

$$\sup_{f \in W^r_{M,0}} \| F^r(f, \cdot, \alpha(n)) \|_C = O(b_n) \qquad (n \to +\infty) .$$

§ 1.6. KLASA FUNKCIJA $W^r_0 H_{\omega[0,\pi]}$ $(r \in N)$

U stavovima 5 i 6 radimo sa sledećim skupovima funkcija

$$H_{\omega[0,\pi]} \qquad \text{i} \qquad W^r_0 H_{\omega[0,\pi]} \quad (r \in N)$$

(videti str. 20. ovog rada), pri čemu je $\omega(t)$ konveksan na gore, moduo neprekidnosti.

Iz prethodnog sleduje da koristimo restrikciju, konveksnih na gore, modula neprekidnosti $\omega(t)$ na segment $[0,\pi]$ i, kako su to isto činili Kornejčuk i Storčaj, treba da se rezultati koje mi dobijamo, u specijalnim slučajevima, svode na njihove rezultate. (To tako i jeste i o tome će biti reči kasnije).

1.6.1. <u>S t a v 5</u>. Neka je dat nenegativan, nerastući niz $(\alpha_k)(k \in N)$ i neka je, redom, t_0 nula funkcije

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^{2a}} \cos kt \quad (a \in N)$$

iz intervala $(0,\pi)$ a funkcija $\rho(x)$ definisana relacijom

$$\int_0^x B(t)\,dt = \int_0^{\rho(x)} B(t)\,dt \qquad (0 \leq x \leq t_0 \leq \rho(x) \leq \pi) .$$

Onda je za svako $r \in N$

$$(51) \qquad \sup_{f \in W^r_0 H_{\omega[0,\pi]}} \| F^r(f, \cdot, \alpha) \|_C =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\alpha_{2k+1} \int_0^{\pi/2} \omega(2t) \sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^r} ; & r = 2a+1,\ a \in N \cup \{0\} \\[2ex] \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k \int_0^{t_0} \omega(\rho(t)-t) \cos kt\,dt}{k^r} ; & r = 2a,\ a \in N . \end{cases}$$

<u>N a p o m e n a</u>. Jasno je da t_0 i $\rho(x)$ zavise i od r $(r \in N)$, t.j. da je

$$t_0 = t_0(r) \quad \text{i} \quad \rho(x) = \rho_r(x) \qquad (r \in N),$$

ali mi ćemo pisati t_0 i $\rho(x)$ umesto $t_0(r)$ i $\rho_r(x)$.

<u>D o k a z.</u> Dokaz stava 5 izvešćemo u četiri dela.
1°. Neka je prvo $r=1$. Onda je

$$\sup_{f \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} \|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} |F^1(f,0,\alpha)|$$

i

$$F^1(f,0,\alpha) = \frac{(-1)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(1)}(-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} \sin kt\, dt .$$

Stavljajući

$$\lambda_{k,r} = \frac{\alpha_k}{k^r} - \frac{\alpha_{k+1}}{(k+1)^r} \qquad (k \in N,\ r \in N)$$

možemo pisati (videti dokaz stava 3)

$$L(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} S_k(t) + \alpha \cdot S(t) ,$$

gde je

$$S_k(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin \nu t}{\nu} \qquad (k \in N)$$

i

$$S(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t}{\nu} ,$$

i

$$F^1(f,0,\alpha) = \frac{(-1)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(1)}(-t) \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k,1} S_k(t) + \alpha S(t) \Big] dt$$

Kako je

$$\operatorname{sgn} S_k(t) = \operatorname{sgn} \sin t \qquad (k \in N,\ t \in R)$$
$$\operatorname{sgn} S(t) = \operatorname{sgn} \sin t \qquad (t \in R)$$

to je (videti [8], tom I, str. 106.)

$$\operatorname{sgn} L(t) = \operatorname{sgn} \sin t \qquad (t \in R)$$

i zato funkcija

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} L(t)\, dt$$

monotono opada na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, monotono raste na $(0, \frac{\pi}{2})$ i

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L(t)\, dt = 0 ,$$

a funkcija

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} L(t)\, dt$$

monotono raste na $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, monotono opada na $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ i

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} L(t)\,dt = 0.$$

Dakle uslovi za primenu leme Kornejčuka na intervalima $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $(c=0)$ i $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ $(c=\pi)$ su ispunjeni i zato je

$$(52)\quad \sup_{f\in W_0^1H_\omega[0,\pi]}\|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{f\in W_0^1H_\omega[0,\pi]}|F^1(f,0,\alpha)|=\sup_{\varphi\in H_\omega[0,\pi]}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\varphi(t)L(t)\,dt\right|\le$$

$$\le\sup_{\varphi\in H_\omega[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(t)L(t)\,dt\right|+\sup_{\varphi\in H_\omega[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]}\frac{1}{\pi}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\varphi(t)L(t)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F_1(t)L(t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}F_2(t)L(t)\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{2k+1}.$$

gde je

$$F_1(x)=\begin{cases}-\int_x^0\omega'(\rho_1(t)-t)\,dt\ ; & -\frac{\pi}{2}\le x\le 0\\ \int_0^x\omega'(t-\rho_1^{-1}(t))\,dt\ ; & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}-\int_x^\pi\omega'(\rho_2(t)-t)\,dt\ ; & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\\ \int_\pi^x\omega'(t-\rho_2^{-1}(t))\,dt\ ; & \pi\le x\le\frac{3\pi}{2},\end{cases}$$

pri čemu su funkcije $\rho_i(x)$ $(i=1,2)$ definisane ovako

$$(53)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}L(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\rho_1(x)}L(t)\,dt\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le 0\le\rho_1(x)\le\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(54)\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}L(t)\,dt=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\rho_2(x)}L(t)\,dt\qquad\left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\le\rho_2(x)\le\frac{3\pi}{2}\right),$$

a funkcije $\rho_i^{-1}(x)$ $(i=1,2)$ inverzne su funkcijama $\rho_i(x)$ $(i=1,2)$.

(Ako je $L(t)$ neparna, [illegible] periodična funkcija $L(t)$ iz definicionih jednakosti (53) i (54) dobijamo

$$f_1(x) = -x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le 0\right)$$

$$f_2(x) = 2\pi - x \qquad \left(\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\right),$$

No kako je za funkciju $\varphi^* \in H_\omega[0,\pi]$ koja je definisana na sledeći način

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} F_1(x), & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -F_2(x), & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases},$$

$$\sup_{f \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} \|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} |F^1(f,0,\alpha)| \ge \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \varphi^*(t) L(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_1(t) L(t)\,dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F_2(t) L(t)\,dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \sin(2k+1)t\,dt}{2k+1},$$

to je, zbog (52)

$$(52') \quad \sup_{f \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} \|F^1(f,\cdot,\alpha)\|_C = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2k+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \sin(2k+1)t\,dt}{2k+1}$$

2°. Neka je sada $r = 2a+1$ $(a \in N)$ (t.j. $r \in \{3,5,7,\ldots\}$).
Niz

$$\alpha'_k = \frac{\alpha_k}{k^{2a}} \qquad (k \in N)$$

je negativan, ne raste i

$$\lim_{k \to \infty} \alpha'_k = \alpha' \ge 0$$

i, prema tački 1°, stavljajući za svako $f \in W_0^{2a+1} H_\omega[0,\pi]$

$$\varphi = f^{(2a)}$$

(onda je skup funkcija φ ustvari skup $W_0^1 H_\omega[0,\pi]$), za svako $a \in N$ imamo

$$(55) \quad \sup_{f \in W_0^{2a+1} H_\omega[0,\pi]} \|F^{2a+1}(f,\cdot,\alpha)\|_C = \sup_{f \in W_0^{2a+1} H_\omega[0,\pi]} |F^{2a+1}(f,0,\alpha)| =$$

$$\sup_{f \in W_0^{2a+1} H_\omega[0,\pi]} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(2a+1)}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^{2a+1}} \sin kt\,dt \right| = \sup_{\varphi \in W_0^1 H_\omega[0,\pi]} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi^{(1)}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha'_k}{k} \sin kt\,dt \right| =$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{2k+1}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+1}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^{2a+1}}.$$

3°. Stavimo sada $r=2$. Onda je

$$\sup_{f\in W_0^2H_\omega[0,\pi]}\|F^2(f,\cdot,\alpha)\|_C=\sup_{f\in W_0^2H_\omega[0,\pi]}|F^2(f,0,\alpha)|$$

i

$$F^2(f,0,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\,dt.$$

Neka je

$$B(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}\cos kt\qquad(t\in(0,2\pi)).$$

Kako je niz funkcija

$$\tilde{D}_k(t)=\sum_{\nu=1}^{k}\sin\nu t\qquad(k=1,2,\ldots;t\in(0,2\pi))$$

ravnomerno ograničen na $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$, a niz (α_k) $(k\in N)$ ne raste (onda niz $\left(\frac{\alpha_k}{k}\right)(k\in N)$ opadajući teži nuli) u red.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}\sin kt$$

ravnomerno konvergira na $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ i važi

$$B'(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k}\sin kt=-\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_{k,0}\tilde{D}_k(t)=-\tilde{D}(t)$$

za svako $t\in(0,2\pi)$ a odatle, zbog

$$\Delta_{k,0}=\alpha_k-\alpha_{k+1}\geq 0\qquad(k\in N)$$

i

$$\operatorname{sgn}\tilde{D}_k(t)=\operatorname{sgn}\sin t\ (k\in N,t\in R);\quad\operatorname{sgn}\tilde{D}(t)=\operatorname{sgn}\sin t\ (t\in R)$$

sleduje

$$\operatorname{sgn}B'(t)=-\operatorname{sgn}\sin t\qquad(t\in(0,2\pi)).$$

Dakle, B (t) opada za $t\in(0,\pi)$ i raste na $t\in(\pi,2\pi)$. Kako je B (t) neprekidna, 2π-periodična funkcija i

$$B(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^2}>0$$

$$B(\pi)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha_k}{k^2}=-\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_{k,2}<0$$

to, imajući u vidu monotoniju funkcije $B(t)$, zaključujemo da postoji jedna jedina vrednost $t_0 \in (0,\pi)$ i jedna jedina vrednost $t_1 \in (\pi, 2\pi)$ tako da je $t_1 = 2\pi - t_0$ i

$$B(t_i) = 0 \qquad (i = 0,1).$$

Prema prethodnim rezultatima je

$$B(t) \begin{cases} > 0, & t \in (0,t_0) \cup (t_1, 2\pi) \\ < 0, & t \in (t_0, t_1) \end{cases}$$

i zato funkcija

$$\int_0^x B(t)\,dt$$

monotono raste na $(0,t_0)$, monotono opada na (t_0,π) i

$$\int_0^\pi B(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k}{k^\sigma} \sin kt \Big|_0^\pi = 0$$

a funkcija

$$\int_\pi^x B(t)\,dt$$

monotono opada na (π, t_1) monotono raste na $(t_1, 2\pi)$ i

$$\int_\pi^{2\pi} B(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k}{k^\sigma} \sin kt \Big|_\pi^{2\pi} = 0$$

Dakle, uslovi za primenu leme Kornejčuka na intervalima $[0,\pi]$ $(C = t_0)$ i $[\pi, 2\pi]$ $(C = t_1)$ su ispunjeni i zato je

$$(56) \quad \sup_{f \in W_0^2 H_\omega[0,\pi]} \| F^2(f,\cdot,\alpha) \|_c = \sup_{f \in W_0^2 H_\omega[0,\pi]} | F^2(f,0,\alpha) | = \sup_{\varphi \in H_\omega[0,\pi]} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(t) B(t)\,dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in H_\omega[0,\pi]} \left| \int_0^\pi \varphi(t) B(t)\,dt \right| + \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in H_\omega[\pi,2\pi]} \left| \int_\pi^{2\pi} \varphi(t) B(t)\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_1(t) B(t)\,dt - \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} F_2(t) B(t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{\alpha_k \int_0^{t_0} \omega(\beta_1(t) - t) \cos kt\,dt}{k^\sigma},$$

gde je

$$F_1(x) = \begin{cases} -\int_x^{t_0} \omega'(\beta_1(t) - t)\,dt; & 0 \le x \le t_0 \\ \int_{t_0}^x \omega'(t - \beta_1^{-1}(t))\,dt; & t_0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} -\int_x^{t_1} \omega'(\beta_2(t) - t)\,dt; & \pi \le x \le t_1 \\ \int_{t_1}^x \omega'(t - \beta_2^{-1}(t))\,dt; & t_1 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

pri čemu su funkcije $\rho_i(x)$ $(i=1,2)$ definisane ovako

(57) $\int_0^{x} B(t)\,dt = \int_0^{\rho_1(x)} B(t)\,dt$ $\qquad (0 \le x \le t_0 \le \rho_1(x) \le \pi)$

(58) $\int_{\pi}^{x} B(t)\,dt = \int_{\pi}^{\rho_2(x)} B(t)\,dt$ $\qquad (\pi \le x \le t_1 \le \rho_2(x) \le 2\pi)$

a funkcije $\rho_i^{-1}(x)$ $(i=1,2)$ inverzne su funkcijama $\rho_i(x)$ $(i=1,2)$. [1]

Za funkciju $\varphi^* \in H_\omega[0,\pi]$ koja je definisana na sledeći način

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} F_1(x) \ ; & 0 \le x \le \pi \\ -F_2(x) \ ; & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

imamo

$$\sup_{f \in W_0^2 H_\omega[0,\pi]} \|F^2(f,x,\alpha)\|_C = \sup_{f \in W_0^2 H_\omega[0,\pi]} \|F^2(f,0,\alpha)\| \ge \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^*(t) B(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_1(t)B(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} F_2(t)B(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \int_0^{t_0} \omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt}{k^2}$$

to je, zbog (56)

(56') $$\sup_{f \in W_0^2 H_\omega[0,\pi]} \|F^2(f,x,\alpha)\|_C = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \int_0^{t_0} \omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt}{k^r} .$$

4°. Neka je najzad $r = 2a+2$ $(a \in N$, t.j. $r \in \{4,6,8,\dots\}$).

Niz

$$\alpha_k' = \frac{\alpha_k}{k^{2a}} \quad (k \in N)$$

je negativan, ne raste i

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k' = 0$$

i zato, prema tački 3°, stavljajući za svako $f \in W_0^{2a+2} H_\omega[0,\pi]$

$$\varphi = f^{(2a)}$$

(onda je skup funkcija φ upravo skup $W_0^2 H_\omega[0,\pi]$), za svako $a \in N$, imamo

(59) $$\sup_{f \in W_0^{2a+2} H_\omega[0,\pi]} \|F^{2a+2}(f,x,\alpha)\|_C = \sup_{f \in W_0^{2a+2} H_\omega[0,\pi]} \|F^{2a+2}(f,0,\alpha)\| =$$

---

[1] Iz jednakosti (57) i (58) i oblika funkcije $B(x)$ sledi da je $\rho_2(x) = 2\pi - \rho_1^{-1}(2\pi - x)$ i $\rho_2^{-1}(x) = 2\pi - \rho_1(2\pi - x)$.

$$=\sup_{f\in W_0^{2s+2}} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(2s+2)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s+2}}\cos kt\,dt\right| = \sup_{\varphi\in [illegible]} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi^{(2)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2}}\cos kt\,dt\right|$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t_0}[illegible](\rho(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2}} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t_0}\omega(\rho(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s+2}}.$$

Iz (52'), (55), (56') i (59) sleduje jednakost (51), a time je i stav 5 dokazan.

<u>Posledica</u>. Ako je $\alpha_k=1$ $(k\in N)$ onda stav 5 postaje ranije poznati stav A (videti § 1.1.) N.P.Kornejčuka.

Ukoliko negativan niz (α_k) $(k\in N)$ ne mora da opada, ali postoji $\rho\in N$ takvo da niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{\rho}}\right) \qquad (k\in N)$$

opada. U takvim slučajevima važi sledeće tvrdjenje.

1.6.2. <u>Stav 6.</u> a/ Neka je dat negativan niz (α_k) $(k\in N)$ i neka je, redom, $s\in N$ niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\right) \qquad (k\in N)$$

nerastući, t_0 nula funkcije

$$B_{2s}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{k^{2s+2}}\cos kt$$

iz intervala $(0,\pi)$ a funkcija $\rho(x)$ definisana relacijom

$$\int_0^{x}B_{2s}(t)\,dt=\int_0^{\rho(x)}B_{2s}(t)\,dt \qquad (0\le x\le t_0\le\rho(x)\le\pi).$$

Onda, za svako $r>2s$ $(r\in N)$ imamo

(60) $$\sup_{[illegible]} [illegible] =$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} [illegible], & r=2s+1,\,2s+3,\,2s+5,\dots\\[2mm] \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t_0}[illegible]\cos kt\,dt}{k^{r}}, & r=2s+2,\,2s+4,\,2s+6,\dots\end{cases}$$

b/ Neka je dat negativan niz (α_k) $(k\in N)$ i neka je, redom, $s\in N$ niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{[illegible]}\right) \qquad (k\in N)$$

nerastući sa [illegible], t_0 nula funkcije

$$C_{n,s}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,2s-1}\left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\cos \nu t}{\nu} - \frac{\cos kt}{2k}\right)$$

[illegible] (β) a funkcija $\beta(u)$ definisana relacijom

$$\int_0^{u} [illegible] \, dt = \int_0^{\beta(u)} [illegible] \, dt \qquad (0 \le u \le t_0 \le \beta(u) \le \pi).$$

Onda je, za $r = 2s-1$

$$(61) \quad \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k+1,[illegible]}\int_0^{\pi/2}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^{2s-1}} \le$$

$$\le \sup [illegible] \| \tilde{f}^{(2s-1)}(t_0, \cdot, f) \|_{C} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} [illegible] \frac{[illegible]}{(2k+1)^{2s-1}} [illegible] \sum_{k=1}^{\infty} [illegible] \left(\frac{1}{k}\right),$$

za $r = 2s$

$$(62) \quad \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,[illegible]}\int_0^{t_0}\omega(\beta(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s}} \le$$

$$\le \sup_{f \in W_0^{2s}} \| \tilde{f}^{(2s)}(t_0, \cdot, f) \|_{C} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,[illegible]}\int_0^{t_0}\omega(\beta(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s}} + 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,2s+1}}{k}\,\omega\left(\frac{1}{k}\right),$$

a za $r = 2s+1$ ($s = 0, 2, [illegible]$) važi formula (59).

[illegible] je da $t_0 = \beta(u)$ zavisi i od r, t.j. da je $t_0 = t_0(r)$ [illegible] $\beta(u) = \beta_r(u)$

ali mi ćemo pisati t_0 [illegible] umesto t_0, $\beta_r(u)$.

[illegible] Neka je $K \in H$ [illegible]

Onda je [illegible] ($K \in H$) se zove i

[illegible] ≥ 0.

Prema [illegible] na [illegible] funkcija [illegible]

onda je [illegible] funkcija [illegible] skup W_0^{r} [illegible] $[0,\pi]$). [illegible]

[illegible]

$$= \begin{cases} [illegible] ; & r-2s = 1, 3, 5, \ldots \\ [illegible] ; & r-2s = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

[illegible]

a to je jednakost ([illegible]).

b) Neka je [illegible] (r-M) [illegible] je

[illegible]

pri čemu je

$$\int [illegible] = 0 \text{ i } [illegible]$$

Neka je [illegible] . Tada je

(65) [illegible]

pri čemu je [illegible]

ako nije [illegible]

kako se [illegible]

je nije [illegible]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{k^{2s-1}} f(t) \sin kt$$

[illegible]

(61) [illegible]

[illegible]

[illegible]

Kako je za svaki [illegible] modul neprekidnosti $\omega(t)$

[illegible]

(vidoti [9] i [10], str. 515-517.), to je za svaki [illegible]

[illegible] $\leq$

$\leq$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

(65) [illegible]

[illegible]

[illegible]

onda je [illegible]

pri čemu se pomenuti supremum postiže pomoću funkcije $\varphi^* \in H_\omega[0,\pi]$ koja je definisana ovako

$$\varphi^*(x)=\begin{cases} F_1(x)\,; & 0\le x\le \pi \\ -F_2(x)\,; & \pi\le x\le 2\pi\,, \end{cases}$$

$$F_1(x)=\begin{cases} -\int_x^{t_0}\omega'(\rho_1(t)-t)dt\,; & 0\le x\le t_0 \\ \int_{t_0}^{x}\omega'(t-\rho_1^{-1}(t))dt\,; & t_0\le x\le \pi\,, \end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases} -\int_x^{t_1}\omega'(\rho_2(t)-t)dt\,; & \pi\le x\le t_1 \\ \int_{t_1}^{x}\omega'(t-\rho_2^{-1}(t))dt\,; & t_1\le x\le 2\pi\,, \end{cases}$$

$$(76)\quad \int_0^x Q_{2s}(t)dt = \int_0^{\rho_1(x)} Q_{2s}(t)dt \qquad (0\le x\le t_0\le \rho_1(x)\le \pi)$$

$$(77)\quad \int_\pi^x Q_{2s}(t)dt = \int_\pi^{\rho_2(x)} Q_{2s}(t)dt \qquad (\pi\le x\le t_1\le \rho_2(x)\le 2\pi)\,,$$

a funkcije $\rho_i^{-1}(x)\ (i=1,2)$ su inverzne funkcijama $\rho_i(x)\ (i=1,2)$.
Iz jednakosti (76) i (77) i oblika funkcije $Q_{2s}(t)$ sleduje $\rho_2(x)=2\pi-\rho_1^{-1}(2\pi-x)$ i $\rho_2^{-1}(x)=2\pi-\rho_1(2\pi-x)$.

Iz (70), (71), (72) i (75) sleduje

$$(78)\quad \sup_{f\in W_0^{2s}H_\omega[0,\pi]}\|F^{2s}(f,\cdot,\alpha)\|_C \le \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t_0}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s}} + 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k,2s-1}}{k}\,\omega\left(\frac{1}{k}\right)$$

Medjutim, kako je

$$F^{2s}(\varphi^*,0,\alpha)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t_0}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s}}\,,$$

to je

$$\sup_{f\in W_0^{2s}H_\omega[0,\pi]}\|F^{2s}(f,\cdot,\alpha)\|_C \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k\int_0^{t}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt}{k^{2s}}$$

što zajedno sa (78) daje jednakosti (62).

Kako niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s-1}}\right) \qquad (k\in N)$$

ne raste, to i niz

$$\left(\frac{\alpha_k}{k^{2s}}\right) \qquad (k\in N)$$

e raste i zato, za $r=2s+1, 2s+2, 2s+3,\ldots$ važi formula (60).

<u>N a p o m e n a</u>. O stavu 6 b/ može se slično reći kao o stavu 4 b/ u § 1.6. (Videti napomenu).

G L A V A 2.

§ 2.1. APROKSIMACIJA TRIGONOMETRIJSKIM POLINOMIMA

Neka je C prostor neprekidnih 2π- periodičnih funkcija i $\mathcal{U}(\subset C)$ skup neprekidnih, 2π- periodičkih funkcija U oblika

$$U(x)=U_n(x)=\frac{1}{2}a_0(n)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k(n)\cos kx+b_k(n)\sin kx\right] \quad (n\in N\cup\{0\}$$

Rastojanje $\Delta(f,U)_C$ funkcije $f\in C$ od elementa $U\in\mathcal{U}$

$$\Delta(f,U)_C\overset{def}{=}\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)-U(x)|=\|f-U\|_C .$$

Neka je $\mathcal{P}_n(\subset\mathcal{U}\subset C)(n=0,1,2,\dots)$ skup svih trigonometriskih polinoma stepena n .

Najbolja aproksimacija $E(f,\mathcal{P}_n)_C$ funkcije $f\in C$ polinomima $P_n\in\mathcal{P}_n$ je

$$E(f,\mathcal{P}_n)_C=E_n(f)_C\overset{def}{=}\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n}\|f(\cdot)-P_n(\cdot)\|_C .$$

Ako je $\mathfrak{R}\subset C$ neka je

$$E(\mathfrak{R},\mathcal{P}_n)_C=E_n(\mathfrak{R})_C\overset{def}{=}\sup_{f\in\mathfrak{R}}E_n(f)_C=\sup_{f\in\mathfrak{R}}\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n}\|f(\cdot)-P_n(\cdot)\|_C$$

Praktični smisao veličine $E(\mathfrak{R},\mathcal{P}_n)_C$ je u tome što poznavanje te veličine dozvoljava da se da minimalna garantovana ocena greške koja nastaje aproksimacijom bilo kog elementa iz $\mathfrak{R}$ pomoću skupa $\mathcal{P}_n$.

Sledeći rezultat (Džekson 1911.) daje brzinu kojom najbolja aproksimacija (kada je $\mathfrak{R}=W^r_{M,0}$ ili $\mathfrak{R}=W^r_0H_\omega$) teži nuli kad $n\to+\infty$ (t.j.brzinu kojom niz polinoma najbolje aproksimacije za svaku funkciju $f\in\mathfrak{R}$ konvergira ka f).

Ako je $\mathfrak{R}=W^r_{M,0}$ ($r=1,2,3,\dots$) onda je

$$E_n(f)_C\leq\frac{A_r}{(n+1)^r}\quad(n=0,1,2,\dots),$$

a ako je $\mathfrak{R}=W^r_0H_\omega$ ($r=1,2,\dots$, ω- modul neprekidnosti) onda je

$$E_n(f)_C\leq\frac{B_r}{(n+1)^r}\,\omega\left(\frac{1}{n+1}\right)\quad(n=0,1,2,\dots)$$

pri čemu konstante A_r i B_r zavise samo od r .

§ 2.2. APROKSIMACIJA LINEARNIM POSTUPCIMA PRIMENJENIM NA FURIJEOVE REDOVE. PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA U OVOJ OBLASTI

Neka je sada svakoj funkciji $f \in C$, za svako $n = 0, 1, 2, \ldots$ dodeljen element

$$U_n(f, x) = \frac{1}{2} a_0(n) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(n) \cos kx + b_k(n) \sin kx] \in \mathcal{U}.$$

Kažemo da je sa

$$U_n(f) \; (f \in C, \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definisan postupak aproksimacije u skupu C, ako i samo ako, za svako $f \in C$

$$\Delta(f, U_n(f))_C = \| f - U_n(f) \|_C \to 0 \; (n \to +\infty).$$

Ako je $S \subset C$ i $U_n(f)(f \in C, n = 0, 1, 2, \ldots)$ postupak aproksimacije u skupu C, tada skup

$$\left\{ \Delta(f, U_n(f)) \right\}_{\substack{f \in S \\ n = 0, 1, 2, \ldots}} = \left\{ \| f - U_n(f) \|_C \right\}_{\substack{f \in S \\ n = 0, 1, 2, \ldots}}$$

karakteriše pomenuti postupak aproksimacije u odnosu na skup S, t. postupak

$$U_n(f) \; (f \in S, \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Veličina

$$\mathcal{E}(S, U_n)_C = \mathcal{E}_n(S)_C \overset{def}{=} \sup_{f \in S} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot) \|_C$$

čijim ćemo se izračunavanjem dalje baviti, daće nam informacije o pomenutom postupku aproksimacije posmatranom na skupu S, t.j.

$$U_n(f) \; (f \in S, \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Naime, praktični smisao veličine $\mathcal{E}(S, U_n)_C$ je u tome, što poznavanje te veličine dozvoljava da se da najmanja ocena greške koja nastaje kada se bilo koji element iz S aproksimira postupko $U_n(f)$ ($f \in S, n = 0, 1, 2, \ldots$).

Jedan od problema koji se sam po sebi nameće je

- Za datu klasu funkcija S i dati postupak aproksimacije u odnosu na skup S, t.j.

$$U_n(f) \; (f \in S, \; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

izračunati

$$\mathcal{E}_n(S)_C = \sup_{f \in S} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot) \|_C \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

po mogućstvu
- tačno,
- asimptotski tačno, ili
- odrediti red beskonačno male $\mathcal{E}_n(S)_c$ kad $n\to+\infty$.

(Postavljeni problem ima smisla jer od ponašanja niza ($\mathcal{E}_n(S)_c$) ($n=0,1,2,\ldots$), kad $n\to+\infty$, zavisi kojom brzinom odgovarajući niz ($U_n(f)$) ($n=0,1,2\ldots$) za svaku funkciju $f\in S$ konvergira ka f).

Mi ćemo u ovom radu uzeti da je $S=W^r_{M,0}(r\in N)$ ili $S=W^r_0H_\omega(r\in N)$ i pod tom pretpostavkom ćemo rešavati gore postavljeni problem.

Neka je, dakle $f\in S\ (S\in\{W^r_{M,0};W^r_0H_\omega\},r\in N)$, (funkcija $f(x)$ je neprekidna jer je neodredjeni integral), i

$$S(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

Furijeov red od f .

Utvrdimo najpre da li napisani red konvergira i ako konvergira da li mu je suma jednaka funkciji f .

Da bismo to utvrdili postupićemo na sledeći način. Kako je

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos k(x-t)dt$$

to, integrirajući parcijalno r -puta i imajući pri tome u vidu periodičnost funkcije $f(t)$ i njenih izvoda, dobijamo

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k^r}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\cos\left[k(x-t)-\frac{r\pi}{2}\right]dt.$$

Stavljajući to u $S(f,x)$ imamo

$$S(f,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(t)\cos\left[k(x-t)-\frac{r\pi}{2}\right]dt$$

odakle, posle smene $x-t=y$, sleduje

$$S(f,x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\int_0^{2\pi}f^{(r)}(x-t)\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt.$$

eka je,kao i do sada

$$D_0^r(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}\qquad(r\in N).$$

Funkcija $D_0^r(t)\ (r\in N)$ pripada skupu L_2 . I funkcija $f^{(r)}(r\in N)$ ($f\in S$) pripada skupu L_2 . Zaista, ako je $W^r_{M,0}(r\in N)$ onda, zbog

$$\|f^{(r)}\|_M\leq 1\qquad(r\in N)$$

sleduje

$$\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \|f^{(r)}\|_M dt \leq 2\pi \|f^{(r)}\|_M \leq 2\pi \qquad (r \in N)$$

što znači da $f^{(r)} \in L_2$ $(r \in N)$, a ako je $f \in W_0^r H_\omega$ $(r \in N)$ imamo

$$|f^{(r)}(x)| \leq \omega(x) \qquad (r \in N, x \geqslant 0)$$

i

$$\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} \omega^2(t) dt \leq 2\pi \omega^2(2\pi)$$

i opet $f^{(r)} \in L_2 (r \in N)$.

Označimo sa

$$S(f^{(r)}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (m_k \cos kx + n_k \sin kx) \qquad (r \in N)$$

$$S(D_0^r, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (p_k \cos kx + q_k \sin kx) \qquad (r \in N)$$

Furijeove redove funkcija $f^{(r)}$ $(r \in N)$ i D_0^r $(r \in N)$.

Kako funkcije $f^{(r)}$ $(r \in N)$ i D_0^r $(r \in N)$ pripadaju skupu L_2 , to je (videti [8] ,tom I, str.65 i 66.)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) D_0^r(t) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(m_k p_k - n_k q_k) \cos kx + (m_k q_k + n_k p_k) \sin kx]$$

pri čemu napisani red konvergira apsolutno i ravnomerno u odnosu na x.

Da bismo napisani red transformisali u, za naše potrebe , pogodniji oblik napomenimo da je

$$m_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \cos kt dt \qquad (k \in N)$$

$$n_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \sin kt dt \qquad (k \in N)$$

i odredimo p_k i q_k $(k \in N)$. U tom cilju analizirajmo najpre redove

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r} \qquad (r \in N)$$

i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r} \qquad (r \in N).$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{k^r}\right) \qquad (r \in N, k \in N)$$

konveksan, nula niz, to red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^r} \qquad (r \in N)$$

konvergira

a/ za $r=1$ za svako $x \neq 2k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$,

b/ za $r=2,3,\dots$ za svako $x \in R$

ka nenegativnoj, sumabilnoj funkciji i predstavlja Furijeov red te funkcije. (Videti [8], tom.I, str. 294.) Kako niz

$$\left(\frac{1}{k^r}\right) \qquad (r \in N,\ k \in N)$$

monotono opadajući teži nuli i kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{r+1}} < +\infty \qquad (r \in N)$$

to red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^r} \qquad (r \in N)$$

konvergira ka sumabilnoj funkciji i predstavlja Furijeov red te funkcije. (Videti [8], tom.I, str.297-298.)

Iz prethodnog sleduje da i red

$$\cos\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^r} + \sin\frac{r\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k^r} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r} \qquad (r \in N)$$

konvergira ka sumabilnoj funkciji, a to je funkcija

$$D_0^r(t) \qquad (r \in N)$$

i predstavlja njen Furijeov red.

Iz dobijenog zaključka sleduje da je

$$p_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_0^r(t)\cos kt\,dt = \frac{\cos\frac{r\pi}{2}}{k^r} \qquad (r \in N,\ k \in N)$$

$$q_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_0^r(t)\sin kt\,dt = \frac{\sin\frac{r\pi}{2}}{k^r} \qquad (r \in N,\ k \in N).$$

(Da su p_k i q_k dati navedenim formulama moglo se utvrditi i na drugi način. Na prim. neposrednom integracijom.)

Imajući u vidu formule za m_k, n_k, p_k i q_k možemo sada pisati

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[(m_k p_k - n_k q_k)\cos kx + (m_k q_k + n_k p_k)\sin kx\right] =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos\frac{r\pi}{2}}{k^r}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\cos kt\,dt\cos kx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\sin kt\,dt\sin kx\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\frac{r\pi}{2}}{k^r}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\cos kt\,dt\sin kx-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\sin kt\,dt\cos kx\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\frac{r\pi}{2}}{k^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\cos kt\,dt+\frac{\sin\frac{r\pi}{2}}{k^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sin kt\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt$$

pri čemu,kako je rečeno, napisani red konvergira apsolutno i ravnomerno u odnosu na x . Kako je $S(f,x)$ jednak napisanom redu, ovim je utvrdjeno da $S(f,x)$ konvergira apsolutno i ravnomerno u odnosu na x .

No, kako je f neprekidna funkcija i $S(f,x)$ konvergira ravnomerno u odnosu na x to je i (videti [8], tom I, str.28)

$$f(x)=S(f,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

(pri čemu, naglasimo još jednom, $S(f,x)$ konvergira ka f apsolutno i ravnomerno u odnosu na x).

(Iz prethodnih relacija, za svako $f\in S$ $(S\in\{W^r_{M,0};W^r_0H_\omega\}$, $r\in N)$ sleduje i jednakost

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)D_0^r(t)\,dt \qquad (r\in N)$$

koja (uopštena) važi i za bilo koje $r>0$ i mi smo je već koristili.

Neka je dat skup Λ matrica

$$\lambda=\|\lambda_{nk}\|_{n,k=0,1,2,\dots}$$

a koje je

$$(1)\qquad \lim_{n\to+\infty}\lambda_{nk}=1 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

i

$$(2)\qquad |\lambda_{nk}|\leq 1 \quad (n=0,1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots)$$

Svakom elementu $f\in S$ $(S=W^r_{M,0}$ ili $S=W^r_0H_\omega)$, za svako $n=0,1,2,\dots$, dodelimo niz funkcija

$$U_n(f,x,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{nk}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad(\lambda\in\Lambda)$$

koje predstavljaju linearnu transformaciju reda $S(f,x)$.

Redovi kojima su definisane funkcije $U_n(f,x,\lambda)$ $(n=0,1,2,\dots$ zbog (2) i apsolutne konvergencije reda $S(f,x)$, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, konvergiraju apsolutno i ravnomerno u odnosu na x .

Niz funkcija $U_n(f,x,\lambda)$ $(n=0,1,\dots)$ konvergira ka funkciji $f(x)$ za svako x, što sleduje iz sledećeg pomoćnog stava.

L e m a. Neka red

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \qquad (c_0=0)$$

konvergira apsolutno i neka je

$$s=\sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Neka elementi matrice λ imaju osobine

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

$$(2) \qquad |\lambda_{nk}| \leq 1 \qquad (n,k=0,1,2,\dots)$$

Onda je i

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk} c_k = s.$$

D o k a z. Kako red

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

konvergira apsolutno, to za svaki proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ postoji $K(\varepsilon)\in N$ tako da je

$$\sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{\infty} |c_k| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

i postoji pozitivna konstanta M tako da je za svako $k\in N$

$$|c_k| \leq M$$

Dakle, imajući u vidu (2), za svako $n = 0,1,2, \dots$ važi

$$|t_n-s| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk}c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} |\lambda_{nk}-1||c_k| + \sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{\infty} |\lambda_{nk}-1||c_k| \leq M\sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} |\lambda_{nk}-1| + 2\sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{\infty} |c_k| < M\sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} |1-\lambda_{nk}| +$$

$$+ 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = M\sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} |\lambda_{nk}-1| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

No, zbog (1), za svaki proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ postoji $N(\varepsilon)\in N$ tako da je za svaki prirodan broj $n > N(\varepsilon)$ i svako $k=0,1,2,\dots,K(\varepsilon)$

$$|1-\lambda_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2\cdot M\cdot K(\varepsilon)}$$

i zato je, za svako $n > N(\varepsilon)$

$$|t_n-s| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2\cdot M\cdot K(\varepsilon)}\cdot K(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

što znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = s$.

Iz ovoga što je do sada izneto možemo zaključiti da za svako $f \in S$ i $S(f, x)$ i niz $U_n(f,x,\lambda)\ (n=0,1,2,\ldots)$ linearnih transformacija reda $S(f,x)$ konvergiraju ka f ; što znači da faktor $\lambda_{nk}\ (n,k=0,1,2,\ldots)$ mogu uticati samo na brzinu konvergencije reda $S(f,x)$ ka funkciji f .

Izvršimo li r -puta integraciju naznačenu u obrascima za a_k i b_k imaćemo za svako $n=0,1,2,\ldots$

$$U_n(f,x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nk}}{k^r}\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt \quad (\lambda\in\Lambda)$$

Imajući u vidu činjenicu da funkcija $f\in S\ (S=W^r_{M,0}\ (r\in N)$ ili $S=W_0^r H_\omega\ (r\in N))$ ima reprezentaciju

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}dt \quad (r\in N)$$

(ovo smo i mi uzgred dokazali) dobijamo, za $\lambda\in\Lambda$,redom

$$(3)\quad \Delta(f,U_n(f))=\max_{0\le x\le 2\pi}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt\right|$$

$$(4)\quad \mathcal{E}(S,U_n)_C=\sup_{f\in S}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C=\sup_{f\in S}|f(0)-U_n(f,0,\lambda)|=$$

$$=\sup_{f\in S}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\cos\left(kt-\frac{r\pi}{2}\right)dt\right|.$$

Neka je dalje

- $M_{r\square}$ skup matrica $\lambda\in\Lambda$ koje za neko $r\in\{0,1,2,\ldots\}$ zadovoljavajući uslov

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\ge\frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^r}$$

pri čemu je $n=0,1,2,\ldots,\ k=1,2,3,\ldots$

- $M_{r\Delta}$ skup matrica $\lambda\in\Lambda$ za koje je

$$\lambda_{nk}=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots,\ k>n)$$

i koje za neko $r\in\{0,1,2,\ldots\}$ zadovoljavaju uslov

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\ge\frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{r+1}}$$

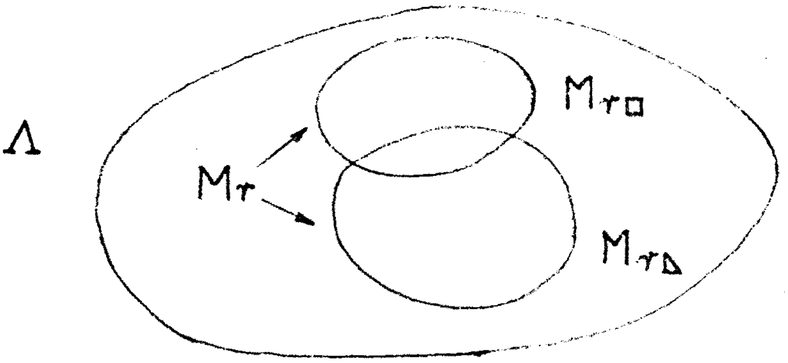
pri čemu je $n=2,3,4,\ldots,\ k=1,2,\ldots,n-1$;

- $M_r = M_{r\square}\cup M_{r\Delta}$

Jasno je da je za bilo koje $r\in\{0,1,2,\ldots\}$

$$M_r\subset\Lambda,$$

ili grafički, imajući u vidu da je $M_{r\square}\cap M_{r\Delta}\neq\emptyset$ (npr. matrica λ iz stava 9 pripada skupu $M_{r\square}\cap M_{r\Delta}$)



Sl. 6.

Iz stavova 7 i 8 sleduje da, za svako $\lambda\in M_r$, $\mathcal{E}(S,U_n)_c \to 0$ $(n\to+\infty)$
Naš je zadatak, u skladu sa već rečenim, da, u slučajevima koje ćemo razmatrati, izračunavamo $\mathcal{E}(S,U_n)_c$ $(n=0,1,2,\dots)$ po mogućstvu

- tačno,
- asimptotski tačno,
- ili da odredimo red veličine $\mathcal{E}(S,U_n)_c$ kad $n\to+\infty$.

Stavovi koji daju rešenje ovog problema u pojedinim slučajevima zovu se direktni stavovi. Na rešavanju ovog problema radio je i radi čitav niz autora kao što su Kolmogorov, Pinkevič, Nikoljski, Nadj, Timan, Efimov, Ganzburg, Gavriljuk, Stepanec, Rižankova... Da bismo izložili njihove rezultateuvedimo oznake za Furijeov red i njegove parcijalne sume za funkcije f (pri čemu, jasno, pretpostavljamo da je f sumabilna funkcija).

Neka je, dakle, f sumabilna funkcija i neka su

$$S(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

i

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad (n=0,1,2,\dots)$$

Furijeov red funkcije f i njegova n-ta $(n=0,1,\dots)$ parcijalna suma.

Kolmogorov A.N. je 1935. god. objavio ([12]) sledeći rezultat

$$\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C=\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad (r=1,2,3,\dots)$$

Ovaj rezultat je moguće uopštiti na tri načina. Naime, moguće je, umesto skupa $W^r_{M,0}$ $(r\in N)$ uzeti druge skupove funkcija; zatim, umesto niza $S_n(f,x)$ $(n=0,1,2,\dots)$ parcijalnih suma Furijeovog reda $S(f,x)$ funkcije f moguće je uzeti razne linearne transformacije Furijeovog reda funkcije f; i najzad, umesto u metričkom prostoru C može se sve to posmatrati u nekom drugom metričkom prostoru, na prim. L.

Pinkevič V.T., 1940.god. uopštava rezultat Kolmogorova na taj način što umesto skupa $W^{r}_{M,0}(r \in N)$ uzima skup $W^{r}_{M,0}\,(r>0)$ i dobija istu formulu, ([13]).

Nikoljski S.M., 1941.i 1945.god. uzimajući umesto $W^{r}_{M,0}(r \in N)$ skup

$$W^{r}_{0}H^{\alpha} \ (r \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1)$$

dobija da je (videti [14,15])

$$\sup_{f \in W^{r}_{0}H^{\alpha}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\alpha}\sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

$$(r \geq 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1),$$

a 1946.god. uzimajući skup H_{ω} (ω -moduo neprekidnosti) dobija (videti [16])

$$\sup_{f \in H_{\omega}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C = \theta_n \cdot \frac{2\ln n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pri čemu je $1/2 \leq \theta_n \leq 1$, i zaključuje da je $\theta_n = 1$ kada je $\omega(t)$ monotono rastuća konveksna funkcija.

Te iste godine Nikoljski je ustanovio asimptotske jednakosti i za

$$\sup_{f \in W^{r}_{0}H_{\omega}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C \qquad (r \in N)$$

Videti [16]).

Efimov A.V.,1959.god. (videti [17]) ustanovljava da je

$$\sup_{f \in H_{\omega}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pri čemu je

$$C_1^{(n)}(\omega) = \sup_{f \in H_{\omega}}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| = \theta_n \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$$

$$\left(\frac{1}{2} \leq \theta_n \leq 1,\ n=1,2,\ldots\right),$$

a kada je $\omega(t)$ konveksna funkcija, onda je

$$C_1^{(n)}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt$$

odakle sleduju rezultati Nikoljskog.

Efimov.A.V., 1960. god. razmatra skup $W_\beta^r H_\omega\,(r\geq 0,\beta\in R)$ ($W_\beta^r H_\omega\,(r\geq 0,\beta\in R)$ je skup funkcija $f(x)$ koje mogu biti predstavljene u obliku

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^r}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt\quad (r\geq 0,\beta\in R)$$

pri čemu je $\varphi(x)$ neprekidna 2π - periodična funkcija koja zadovoljava uslove

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt=0 \quad \text{i} \quad \varphi\in H_\omega\ )$$

i dobija rezultate (videti [18])

a/

$$\sup_{f\in W_\beta^0 H_\omega}\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\cdot\ln n+\frac{\theta\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\omega(2t)}{t}dt+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\leq\theta\leq 1\right)$$

(pretpostavlja se da nesvojstveni integral

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}dt$$

konvergira).

Kada je $\omega(t)$ konveksna funkcija, onda je $\theta=1$.

b/

$$\sup_{f\in W_\beta^r H_\omega}\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\cdot\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right)\quad (r>0)$$

odakle se za $\beta=r$ dobija $W_r^r H_\omega=W^r H_\omega$ i

$$\sup_{f\in W^r H_\omega}\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_C=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\cdot\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right)\quad (r>0).$$

Nikoljski S.M., 1946.god., (videti [19]), ustanovljava asimptotsku jednakost za

$$\sup_{f\in W^r L}\|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_L\qquad (r\in N)$$

pri čemu je $W^r L$ skup 2π -periodičnih funkcija $f(x)$ za koje je $f^{(r-1)}$

apsolutno neprekidna funkcija i $\|f\|_L \leq 1$.

Berdišev je 1965.god. (videti [20]) ustanovio asimptotsku jednakost za

$$\sup_{f\in H_{\omega_L}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_L$$

pri čemu je H_{ω_L} skup 2π -periodičkih funkcija za koje je

$$\|f(x)-f(x+t)\|_L \leq \omega(t)$$

gde je $\omega(t)$ dati modul neprekidnosti.

Demčenko A.G., 1971. god., (videti [21]) dokazuje da važi asimptotska jednakost

$$\sup_{f\in W^r H_{\omega_L}} \|f(\cdot)-S_n(f,\cdot)\|_L = \frac{2}{\pi^2}\,\theta_n \frac{\ln n}{(n+1)^r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt + C(\omega;n,r)$$
$$(r\in N)$$

pri čemu je $W^r H_{\omega_L}(r\in N)$ klasa 2π - periodičnih funkcija $f(x)$ čiji $r-1$ izvod $- f^{(r-1)}(x) -$ je apsolutno neprekidna funkcija i važi

$$\|f^{(r)}(x+t)-f^{(r)}(x)\|_L \leq \omega(t)$$

gde je $\omega(t)$ dati modul neprekidnosti,

$$C(\omega;n,r) = O\left(\frac{\omega(\frac{1}{n})}{n^r}\right), \quad \frac{1}{2}\leq \theta_n \leq 1$$

i $\theta_n = 1$ ako je $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti na segmentu $[0;\frac{2\pi}{2n+1}]$. Za $C(\omega;n,r)$ važi procena

$$|C(\omega;n,r)| < \begin{cases} 8(r+2)\,n^{-r}\omega\left(\frac{\pi}{2n+1}\right), & r=1,3,5,\dots \\ 6(r+2)\,n^{-r}\omega\left(\frac{\pi}{2n+1}\right), & r=2,4,6,\dots \end{cases}$$

Nadj S.B. (1942. i 1946.) (videti [22]) i Nikoljski S.M. (1945) (videti [45]) našli su tačne ili asimptotski tačne procene veličine

$$\sup_{f\in W^r} \|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,A)\|_C \qquad (r\in N)$$

pri čemu je

$$U_n(f,x,A) = \frac{1}{A_n^r}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{r-1} S_\nu(f,x) \qquad (r\in N)$$

i

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Gavriljuk V.T. i Stepanec A.I. (1973.) (videti [23]) ustanovljavaju asimptotsku jednakost za

$$\sup_{f \in W^r H^\alpha} \| f(\cdot) - R_n(f,\cdot) \|_C \qquad (r \in N,\ 0 < \alpha \leq 1)$$

gde je $W^r H^\alpha$ $(r \in N, 0 < \alpha \leq 1)$ skup 2π - periodičnih funkcija $f(x)$ za koje $f^{(r)} \in H^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, a $R_n(f,x)$ su sredine Rogozinskog Furijeovog reda funkcije f , date formulom

$$R_n(f,x) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(f, x + \frac{\pi}{2n}\right) + S_n\left(f, x - \frac{\pi}{2n}\right) \right].$$

Isti autori, takodje 1973.god. (videti [24]) pronalaze asimptotske jednakosti za

$$\sup_{f \in W^r} \| f(\cdot) - B_n(f,\cdot) \|_C \qquad (r \in N)$$

i

$$\sup_{f \in W^r H^\alpha} \| f(\cdot) - B_n(f,\cdot) \|_C \qquad (r \in N,\ 0 < \alpha \leq 1)$$

pri čemu je

- $W^r (r \in N)$ skup 2π -periodičnih funkcija $f(x)$ takvih da je $f^{(r-1)}(x)$ apsolutno neprekidna funkcija i $\| f^{(r)} \|_M \leq 1$;
- $W^r H^\alpha (r \in N, 0 < \alpha \leq 1)$ skup koji je definisan kao u prethodnom slučaju;
- $B_n(f,x)$ su sredine Bernštajna Furijeovog reda funkcije f date formulom

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2}\left[S_n(f,x) + S_n\left(f, x + \frac{2\pi}{2n+1}\right) \right]$$

Efimov (videti [25,26]), Demčenko (videti [27]) rešavaju isti zadatak radeći sa sredinama Vale-Pusena (prvi u C , drugi u L).

Ližankova G.I. (1976.) (videti [28]) dokazuje asimptotsku jednakost

$$\sup_{f\in W^r}\|f(\cdot)-U_n(f;A)\|_C=\begin{cases}\dfrac{2\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{\ln n}{n}+O\left(\dfrac{1}{n}\right) & ; r=1,\ \alpha>1\\ \dfrac{4\alpha}{\pi n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^r}+O\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\ln n}{n^r}\right); & r=2,3,\ldots,\alpha\end{cases}$$

gde je

$$U_n(f,x,A)=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha-1}S_\nu(f,x)\qquad(\alpha>1)$$

i

$$A_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}\qquad(\alpha>1)$$

i time uopštava već navedeni rezultat Nadja i Nikoljskog.

Da bismo izložili rezultate A.F.Timana definišimo skup K_r $(r\in N\cup\{0\})$ matrica λ kao skup matrica čiji elementi $\lambda_{nk}(n,k=0,1,\ldots)$ zadovoljavaju redom uslove

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_{nk}=1\qquad(k=0,1,2,\ldots)$$

$$|\lambda_{nk}|\le 1\qquad(n=0,1,2,\ldots,k=0,1,2,\ldots)$$

$$\lambda_{n0}=1,\ \lambda_{nk}=0\qquad(n=0,1,2,\ldots,\ k>n)$$

$$\Delta^2\mu_{nk}\le 0\qquad(k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

ili

$$\Delta^2\mu_{nk}\ge 0\qquad(k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

(brojevi μ_{nk} $(n=0,1,2,\ldots,\ k=0,1,2,\ldots,n+1)$ definisani su na sledeći način

$$\mu_{nk}=\begin{cases}0 & ; k=0\\ \dfrac{1-\lambda_{nk}}{k^r} & ; 1\le k\le n\\ \dfrac{1}{(n+1)^r} & ; k=n+1\end{cases}\quad)$$

$$\mu_{n1} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right) ;$$

niz funkcija

$$U_n(f, x, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

i uvedemo oznake

$$\Delta \mu_{nk} = \mu_{nk} - \mu_{n,k+1} , \quad \Delta^2 \mu_{nk} = \Delta \mu_{nk} - \Delta \mu_{n,k+1} = \mu_{nk} - 2\mu_{n,k+1} + \mu_{n,k+2}$$

Rezultat Timanovog reda iz 1953. god. (videti [29]) glasi

i) Za svaku matricu $\lambda \in K_r$, za svako celo $r \geq 0$ i svako α $(0 < \alpha \leq 1)$ tačna je asimptotska jedna kost

$$\sup_{f \in W^r_0 H^\alpha} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{nk}}{n-k+1} \right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$$

u kojoj, za $\alpha = 0$ desnu stranu treba pomnožiti sa 2.

ii) Neka je $r = 0$. Ako matrica $\lambda \in K_0$ za svako n zadovoljava uslov

$$\Delta^2 \lambda_{nk} \leq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ili

$$\Delta^2 \lambda_{nk} \geq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

i

$$1 - \lambda_{n1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

tada je za $0 < \alpha < 1$

$$\sup_{f \in H^\alpha} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{nk}}{n-k+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Genzburg I.M. (1959.) (videti [30]) dokazuje stav Ako je matrica λ takva da je

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (k = 0,1,2,\dots)$$

$$|\lambda_{nk}| \leq 1 \qquad (n = 0,1,2,\dots,\ k = 0,1,2,\dots,n,\dots)$$

$$\lambda_{n0} = 1 \quad \lambda_{nk} = 0 \qquad (n = 0,1,2,\dots,\ k > n)$$

$$\Delta\mu_{nk} \leq 0 \qquad (k = 0,1,2,\dots,n)$$

$$\Delta^2\mu_{nk} \geq 0 \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

i $\omega(t)$ proizvoljni konveksni moduo neprekidnosti, onda je

$$\sup_{f\in H_\omega} \|f(\cdot) - U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{nk}}{n-k+1} + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

§ 2.3. JOŠ O APROKSIMACIJI LINEARNIM POSTUPCIMA PRIMENJENIM NA FURIJEOVE REDOVE

- NOVI REZULTATI -

S t a v 7. a) Neka je matrica $\lambda\in\Lambda, s\in\{0,1,2,\dots\}$, niz

$$\left(\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}}\right)_{k=1,2,\dots} \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

nerastući (t.j. $\lambda \in M_{2s}$ [illegible]), t_0 nula funkcije

$$B_{2s}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}} \cos kt$$

iz intervala $(0,\pi)$, [illegible] funkcija definisana relacijom

$$\int_0^{x} B_{2s} [illegible] = [illegible] \qquad ([illegible])$$

i $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti, onda je [illegible]

$$\mathcal{E}(W^{\dots} H_\omega, [illegible]) = [illegible]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt & ; \; r=2s+1,2s+3,2s+5,\ldots \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\int_0^{t_0}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt & ; \; r=2s+2,2s+4,2s+6,\ldots \end{cases}$$

b) Neka je matrica $\lambda\in\Lambda, s\in N$, niz

$$\left(\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s-1}}\right)_{k=1,2,\ldots} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

nerastući, (t.j. $\lambda\in M_{2s-1}\square$), t_0 nula funkcije

$$Q_{2s}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}}-\frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{2s-1}}\right]\left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\cos\nu t}{\nu}-\frac{\cos kt}{2k}\right)$$

iz intervala $(0,\pi)$, $\rho_1(x)$ funkcija definisana relacijom

$$\int_0^{x}Q_{2s}(t)dt=\int_0^{\rho_1(x)}Q_{2s}(t)dt \qquad (0\le x\le t_0\le\rho_1(x)\le\pi)$$

i $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti. Onda je

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^{2s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt\le$$

$$\le \mathcal{E}(W_0^{2s-1}H_\omega;U_n)_C=\sup_{f\in W_0^{2s-1}H_\omega}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^{2s-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega(2t)\sin(2k+1)t\,dt+2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s-1}}$$

i

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s}}\int_0^{t_0}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt\le$$

$$\le\mathcal{E}(W_0^{2s}H_\omega,U_n)_C=\sup_{f\in W_0^{2s}H_\omega}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s}}\int_0^{t_0}\omega(\rho_1(t)-t)\cos kt\,dt+2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\omega\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s}};$$

c) Neka je $s \in \{0,1,2,\dots\}$, matrica $\lambda \in \Lambda$ sa osobinama

$$\lambda_{nk} = 0 \quad (n=0,1,2,\dots,\ k>n),$$

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}} \geq \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{2s}} \quad (n=2,3,\dots\ k=1,2,\dots,n-1)$$

(t.j. $\lambda \in M_{2s}\Delta$), t_0 nula funkcije

$$B_{2s}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s+2}} \cos kt$$

iz intervala $(0,\pi)$, $\rho(x)$ funkcija definisana relacijom

$$\int_0^x B_{2s}(t)\,dt = \int^{\rho(x)} B_{2s}(t)\,dt \quad (0 \leq x \leq t_0 \leq \rho(x) \leq \pi)$$

i $\omega(t)$ konveksni moduo neprekidnosti. Onda je za svako $r > 2s$ $(r \in N)$

$$\mathcal{E}(W_0^r H_\omega, U_n)_C = \sup_{f \in W_0^r H_\omega} \| f(\cdot) - U_n(f,\cdot,\lambda) \|_C \leq$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \sin(2k+1)t\,dt + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\!\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t\,dt + O\!\left(\frac{\omega(\frac{1}{n})}{n^r}\right); \\ \qquad r = 2s+1,\ 2s+3,\ 2s+5,\dots \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \int_0^{t_0} [\omega(\rho(t)-t)] \cos kt\,dt + \frac{2}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\!\left(\frac{4t}{2n+1}\right) \sin t\,dt + O\!\left(\frac{\omega(\frac{1}{n})}{n^r}\right); \\ \qquad r = 2s+2,\ 2s+4,\ 2s+6,\dots \end{cases}$$

d) Neka je $s \in N$, matrica $\lambda \in \Lambda$ sa osobinama

$$\lambda_{nk} = 0 \quad (n=0,1,2,\dots,\ k>n),$$

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}} \geq \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{2s-1}} \quad (n=2,3,\dots,\ k=1,2,\dots,n-1)$$

(t.j. $\lambda \in M_{2s-1}\Delta$), t_0 nula funkcije

$$B_{2s-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s+1}} \sin kt$$

iz intervala ([illegible]), [illegible] definisana relacijom

$$\int_0^x B_{2s}(t)dt = \int_0^{\rho(x)} B_{2s}(t)dt \qquad (0 \le x \le t_0 \le \rho(x) \le \pi)$$

i $\omega(t)$ konveksni modul neprekidnosti. Onda je

$$\mathcal{E}(W_0^r H_\omega; U_n)_C = \sup_{f \in W_0^r H_\omega} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C \le$$

$$\le \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \dfrac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^{2s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t) \sin(2k+1)t\,dt + \dfrac{2}{\pi^2} \cdot \dfrac{\ln n}{n^{2s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\dfrac{4t}{2n+1}\right) \sin t\,dt + \\ +2\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \omega\left(\dfrac{1}{k}\right) \Delta \dfrac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s-1}} + O\left(\dfrac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2s-1}}\right); \qquad r = 2s-1 \\ \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}} \int_0^{t_0} \omega(\rho(t)-t) \cos kt\,dt + \dfrac{2}{\pi^2} \cdot \dfrac{\ln n}{n^{2s}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\dfrac{4t}{2n+1}\right) \sin t\,dt + \\ +2\left(1+\dfrac{1}{\pi}\right) \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \omega\left(\dfrac{1}{k}\right) \Delta \dfrac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}} + O\left(\dfrac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{2s}}\right); \quad r = 2s. \end{cases}$$

<u>D o k a z.</u> a) Kako je ($\lambda \in M_{2s}$) prema (4)

$$\mathcal{E}(W_0^r H_\omega; U_n)_C = \sup_{f \in W_0^r H_\omega} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) dt \right|$$

to, koristeći stav 5 i stav 6 a) (uslovi za primenu tih stavova su ispunjeni) dobijamo tvrdjenja stava 7 a).

Slično se dokazuje deo stava pod b).

c) Kako je ($\lambda \in M_{2s-1}$) prema (4)

$$\mathcal{E}(W_0^r H_\omega; U_n)_C \le \sup_{f \in W_0^r H_\omega} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) dt \right| +$$

$$+ \sup_{f \in W_0^r H_\omega} \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t) D_n^r(t) dt \right|$$

$$(r \in \{2s-1, 2s\})$$

to, primenjujući rezultat Nikoljskog

$$\sup_{f\in W_0^r H_\omega} \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(-t) D_n^r(t)\,dt\right| = \frac{2}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt + O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right)$$

$$(r = 1, 2, \ldots)$$

i stavove 5 i 6 a) (uslovi za primenu su ispunjeni) dobijamo tvrdjenje stava 7 c).

Slično se dokazuje stav 7 d).

S t a v 8. a) Ako je matrica $\lambda\in\Lambda$, $s\in\{0,1,2,\ldots\}$, niz

$$\left(\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}}\right)_{k=1,2,\ldots} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

nerastući (t.j. $\lambda\in M_{2s}\square$), onda je za svako $r>2s$ $(r\in N)$

$$\mathcal{E}(W_{M,0}^r; U_n)_c = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{r+1}} .$$

b) Neka je matrica $\lambda\in\Lambda$, $s\in N$, niz

$$\left(\frac{1-\lambda_{n,k}}{k^{2s-1}}\right)_{k=1,2,\ldots} \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

nerastući (t.j. $\lambda\in M_{2s-1}\square$), onda je za $r=2s-1$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(2s-1+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{2s-1+1}} \le \mathcal{E}(W_{M,0}^{2s-1}; U_n)_c \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(2s-1+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{2s-1+1}} + 2(1-\lambda_{n1})$$

za $r=2s$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(2s+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{2s+1}} \le \mathcal{E}(W_{M,0}^{2s}; U_n)_c \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(2s+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{2s+1}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}}$$

Ako je $s\in\{0,1,2,\ldots\}$, matrica $\lambda\in\Lambda$ sa osobinama

$$\lambda_{nk} = 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s}} \ge \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{2s}} \quad (n=2,3,\ldots,\ k=1,2,\ldots,n-1)$$

(t.j. $\lambda \in M_{2s}\Delta$), onda je za svako $r > 2s$ ($r \in N$)

$$\mathcal{E}(W^r_{M,0}; U_n)_C \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k(r+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{r+1}} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right);$$

d) Neka je $s \in N$, matrica $\lambda \in \Lambda$ sa osobinama

$$\lambda_{nk} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \ k > n)$$

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}} \geq \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^{2s-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots, \ k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

(t.j. $\lambda \in M_{2s-1}\Delta$),onda je

$$\mathcal{E}(W^r_{M,0}; U_n)_C \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{k(r+1)}(1-\lambda_{n,2k+1})}{(2k+1)^{r+1}} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) + \begin{cases} 2(1-\lambda_{n1}) & ; r = 2s \\ 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Delta \frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}}; & r = 2s \end{cases}$$

<u>D o k a z</u>. a) Najpre je

$$\mathcal{E}(W^r_{M,0}; U_n) = \sup_{f \in W^r_{M,0}} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C =$$

$$= \sup_{f \in W^r_{M,0}} \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) dt \right\|_C ,$$

odatle, koristeći stavove 3 i 4. a) (uslovi za primenu tih tavova su ispunjeni) dobijamo tvrdjenje stava 8 a).

Slično se dokazuje deo stava pod b).

) Prvo je

$$\mathcal{E}(W^r_{M,0}; U_n)_C = \sup_{f \in W^r_{M,0}} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^r_{M,0}} \left\| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right) dt \right\|_C + \frac{1}{\pi} \sup_{f \in W^r_{M,0}} \left\| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) D_n^r(t)\, dt \right\|_C .$$

Imajući u vidu rezultat Kolmogorova

$$\sup_{f \in W^r_{M,0}} \frac{1}{\pi} \left\| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) D_n^r(t)\, dt \right\|_C = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad (r \in N)$$

i stavove 3 i 4 a) dobijamo tvrdjenje stava 8 c).

Slično se dokazuje stav 8 d).

§ 2.4. VEZA IZMEDJU REZULTATA IZLOŽENIH U STAVOVIMA 7 i 8 I TIMANOVIH REZULTATA.

Uočimo skup matrica $\lambda \in \Lambda$ sa osobinom $\lambda_{nk} = 0$ $(n = 0,1,2\ldots,$ $k > n)$ i za svaku od njih definišimo matricu sa elementima

$$(*) \qquad \mu_{nk} = \begin{cases} 0 & ; \quad k = 0 \\ \dfrac{1-\lambda_{nk}}{k^r} & ; \quad 1 \leq k \leq n \\ \dfrac{1}{(n+1)^r} & ; \quad k = n+1 \end{cases}$$

Timan u svom radu uočava skuo K_r $(r = 0,1,2,\ldots)$ matrica $\lambda \in \Lambda$ čiji elementi zadovoljavaju uslove

$$\lambda_{n0} = 1 \quad \lambda_{nk} = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots,\ k > n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_{nk} = 1 \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$|\lambda_{nk}| \leq 1 \qquad (n = 0,1,2,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots)$$

$$\Delta^2 \mu_{nk} \leq 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots, n-1)$$

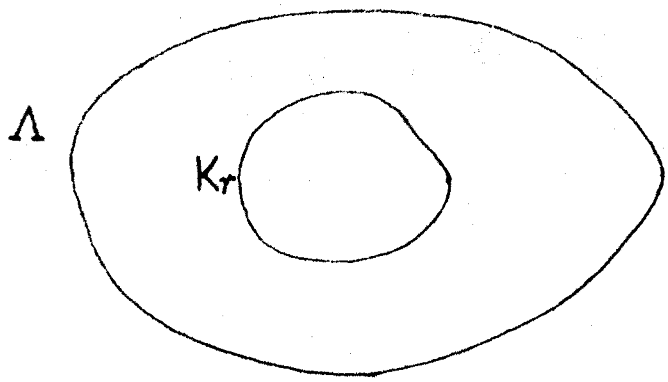
li

$$\Delta^2 \mu_{nk} \geq 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots, n-1)$$

i

$$\mu_{n1} = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$$

(jasno je da je $K_r \subset \Lambda$ $(r=0,1,2,\dots)$ ili grafički



Sl.7.

i tvrdi

- Za svaku matricu $\lambda \in K_r$ $(r=0,1,2,\dots)$ i svako $0<\alpha<1$ važi jednakost

$$\mathcal{E}(W_0^r H^\alpha; U_n)_c = \sup_{f\in W_0^r H^\alpha} \|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_c =$$

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^{r+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{nk}}{n-k+1}\right| + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

itanje je sada

- U kakvoj su vezi rezultati izloženi u stavovima 7 i 8 a Timanovim rezultatima. Da bismo dali odgovor na to pitanje tvrdimo prvo da li postoji neprazan presek skupova M_r(za matrie $\lambda \in M_r$ važe rezultati iz ovog rada) i K_r (za matrice $\lambda \in K_r$ važe Timanovi rezultati).

Pretpostavimo da skup $M_r \cap K_r$ nije prazan i da postoji trica $\lambda \in M_r \cap K_r$. Onda, matrica λ za neko $r \in \{0,1,2,\dots\}$ dovoljava uslove

) $\lim_{n\to+\infty} \lambda_{nk} = 1$ $\quad (k=0,1,2,\dots)$

) $|\lambda_{nk}| \leq 1$ $\quad (n=0,1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots)$

7) $\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \geq \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^r}$ $\quad (n=2,3,\dots,\ k=1,2,\dots,n-1)$

(8) $\lambda_{n0}=1\,,\ \lambda_{nk}=0 \qquad (n=0,1,2,\dots,\ k>n)$

(9) $\Delta^2\mu_{nk}\leq 0 \qquad (n=1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots,n-1)$

ili

(9') $\Delta^2\mu_{nk}\geq 0 \qquad (n=1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots,n-1)$

i

(1o) $\mu_{n1}=O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$

Kako je, za matricu $\lambda\in M_r\cap K_r$ zbog (*) i (6)

(11) $\mu_{nk}\geq 0 \qquad (n=0,1,2,\dots,k=0,1,\dots,n+1)$

i zbog (7)

(12) $\Delta\mu_{nk}=\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r}\geq 0 \quad (n=2,3,\dots,\ k=1,2,\dots,n-1)$

to, imajući u vidu definiciju brojeva $\mu_{nk}\,(n=0,1,2,\dots,k=0,1,\dots,n+1)$ može biti, zbog (11) i (12), samo

$$\Delta^2\mu_{n0}=\mu_{n0}-2\mu_{n1}+\mu_{n2}=-\mu_{n1}-\Delta\mu_{n1}\leq 0\ (n=2,3,\dots).$$

Dokažimo da važi jedino $\Delta^2\mu_{n0}=0\ (n=2,3,\dots)$. Pretpostavimo da je

$$\Delta^2\mu_{n0}<0 \qquad (n=2,3,\dots).$$

Onda, pošto matrica λ zadovoljava jedan od uslova (9) ili (9') mora biti

$$\Delta^2\mu_{nk}\leq 0 \quad (n=2,3,\dots,\ k=0,1,2,\dots,n-1)$$

odakle, za $n=2,3,\dots$ i $k=n-1$ imamo redom

$$\Delta^2\mu_{n,n-1}=\Delta\mu_{n,n-1}-\Delta\mu_{n,n}\leq 0 \ (n=2,3,\dots),$$

t.j. (zbog (12))

$$0\leq\Delta\mu_{n,n-1}\leq\Delta\mu_{n,n}=\frac{1-\lambda_{nn}}{n^r}-\frac{1}{(n+1)^r} \quad (n=2,3,\dots)$$

$$\frac{1-\lambda_{nn}}{n^r}\geq\frac{1}{(n+1)^r} \qquad (n=2,3,\dots)$$

što, obzirom na (7) daje

$$1-\lambda_{n1} \geqslant \frac{1}{(n+1)^r} \qquad (n=2,3,\ldots)$$

Kako iz (10) sleduje da postoji $M \in R^+$ takvo da je za dovoljno veliko $n \in N$

$$\mu_{n1} = 1-\lambda_{n1} \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}$$

to je, za dovoljno veliko $n \in N$

$$\frac{1}{(n+1)^r} \leqslant 1-\lambda_{n1} \leqslant \frac{M}{n^{r+1}}$$

t.j.

$$\frac{n^{r+1}}{(n+1)^r} \leqslant M$$

a to je apsurd. Dakle, ne može biti ni

$$\Delta^2 \mu_{n0} < 0 \quad (n=2,3,\ldots).$$

Prema tome, mora biti za $n=2,3,\ldots$

$$\Delta^2 \mu_{n0} = -\mu_{n1} - \Delta \mu_{n1} = 0$$

t.j.

$$\mu_{n1} = 0 \quad \text{i} \quad \Delta \mu_{n1} = 0$$

odakle sleduj

$$\mu_{n1} = 0 \quad \text{i} \quad \mu_{n2} = 0 \quad (n=2,3,\ldots)$$

t.j.

$$\lambda_{n1} = 1 \quad \text{i} \quad \lambda_{n2} = 0 \quad (n=2,3,\ldots).$$

Kako je

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \geqslant \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^r} \geqslant 0 \quad (n=2,3,\ldots,\ k=1,2,\ldots,n-1)$$

to je i

$$\lambda_{nk} = 1 \quad (n=2,3,\ldots,\ k=1,2,\ldots,n)$$

što zajedno sa (8) daje

(13)
$$\begin{cases} \lambda_{n0} = 1 & (n=0,1) \\ \lambda_{nk} = 1 & (n=2,3,\ldots,\ k=0,1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

z (13) sleduje $\mu_{nk}=0$ $(n=2,3,\ldots,k=0,1,\ldots,n)$ $\Delta\mu_{nk}=0$ $(n=2,3,\ldots, = 0,1,2,\ldots,n-1)$ i

(14) $$\Delta^2 \mu_{nk} = 0 \qquad (n = 2,3,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots,n-2),$$

a kako je zbog (13) i $\mu_{n,n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^r}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(15) $$\Delta^2 \mu_{n,n-1} = \mu_{n,n-1} - 2\mu_{n,n} + \mu_{n,n+1} = \frac{1}{(n+1)^r} > 0$$

za (n=2,3,...) to, iz (14) i (15), imamo da za matricu $\lambda \in M_r \cap K_r$ važi

(16) $$\Delta^2 \mu_{nk} \geq 0 \qquad (n = 2,3,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$

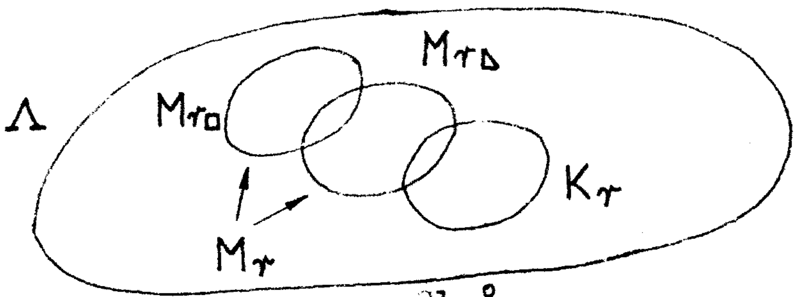
Do sada je samo element λ_{11} matrice $\lambda \in M_r \cap K_r$ ostao bliže neodredjen. No,da bi (16) važilo za celu matricu λ mora biti

$$\Delta^2 \mu_{10} = \mu_{10} - 2\mu_{11} + \mu_{12} = -2(1-\lambda_{11}) + \frac{1}{2^r} \geq 0,$$

t.j. (imajući u vidu (6))

$$1 - \frac{1}{2^{r+1}} \leq \lambda_{11} \leq 1.$$

Dakle je $M_r \cap K_r = M_{r\Delta} \cap K_r = \emptyset$, t.j.



Sl. 8.

i matrica $\lambda \in M_r \cap K_r$ može imati samo oblik

(17) $$\begin{cases} \lambda_{00} = 1, \quad \lambda_{10} = 1, \quad 1 - \frac{1}{2^{r+1}} \leq \lambda_{11} \leq 1, \\ \lambda_{nk} = 1 \qquad (n = 2,3,\ldots,\ k = 0,1,2,\ldots,n), \\ \lambda_{nk} = 0 \qquad (n = 0,1,2,\ldots,\ k > n). \end{cases}$$

Iz oblika matrice $\lambda \in M_r \cap K_r$, t.j. zbog $\frac{1-\lambda_{nn}}{n^r} < \frac{1-\lambda_{n,n+1}}{(n+1)^r}$, odnosno $0 < \frac{1}{(n+1)^r}$, sleduje da je $M_{r\square} \cap K = \emptyset$.

Za takvu matricu $\lambda\,(\in M_r \cap K_r)$ je, kad $n \to +\infty$, po Timanu $(0<\alpha<1)$

(18)
$$\mathcal{E}(W_0^r H^\alpha; U_n)_c = \sup_{f\in W_0^r H^\alpha} \|f(\cdot) - U_n(f,\cdot,\lambda)\|_c =$$
$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Neka je sada celi broj r za koji važi

$$\lambda \in M_r \cap K_r$$

oblika $r = 2s-1\ (s\in N)$ ili $r = 2s\ (s\in\{0,1,2,\dots\})$.

Uzmimo na prim. da je $r = 2s-1\ (s \in N)$. Tada je, zbog (17) $(0<\alpha<1)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\lambda_{n1}}{\frac{\ln n}{n^{2s-1+\alpha}}} = 0$$

No, kako je, zbog

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin(2k+1)t\,dt = O\left(\frac{1}{(2k+1)^{\alpha+1}}\right),$$

$$\left|\frac{2^{\alpha+1}}{\pi} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^{2s-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin(2k+1)t\,dt\right| \le$$
$$\le \frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(1-\lambda_{n1}) \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left|\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin(2k+1)t\,dt\right| = O\left(\frac{1-\lambda_{n1}}{n^\alpha}\right) = O\left((1-\lambda_{n1})\right)$$

i kako je

$$\left|2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{n} \omega\left(\frac{1}{k}\right)\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{2s-1}}\right| \le 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)(1-\lambda_{n1})$$

to je, prema stavu 7. d) (imajući u vidu (17))

$$\mathcal{E}(W_0^{2s-1}H^\alpha; U_n)_C = \sup_{f\in W_0^{2s-1}H^\alpha} \|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{2s-1+\alpha}}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left((1-\lambda_{n1}) + \frac{1}{n^{2s-1+\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{2s-1+\alpha}}\int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{2s-1+\alpha}}\right).$$

Ako je $r = 2s$ $(s\in\{0,1,2,\dots\})$, zaključujući na sličan način, dobijamo formulu (18).

Znači, za matrice $\lambda\in M_r \cap K_r$ $(r\in N)$ važe i rezultati stavova 7. i 8. i Timanovi rezultati.

N a p o m e n a. Neka matrica $\lambda\in M_{r\square}\cap M_{r\triangle}$. Onda možemo primeniti, imajući u vidu da $\lambda\in M_{r\square}$, neki od stavova 7.a), 7.b), 8.a) ili 8.b). Isto tako, polazeći od činjenice da je matrica $\lambda\in M_{r\triangle}$, možemo primeniti neki od stavova 7.c), 7.d), 8.c) ili 8.d).

Kada matrica $\lambda\in M_{r\square}\cap M_{r\triangle}$, koju ćemo pretpostavku ($\lambda\in M_{r\square}$ ili $\lambda\in M_{r\triangle}$) uzeti kao polaznu, i prema tome, koji ćemo od navedenih stavova koristiti, zavisi od preciznosti dobijenog rezultata.

Naprimer, matrica λ iz stava 9 pripada skupu $M_{r\square}\cap M_{r\triangle}$ ($r\in N$), i, u slučajevima r = 2,3,4, ... , koristićemo činjenicu da $\lambda\in M_{r\triangle}$, a, u slučaju r = 1, koristićemo činjenicu da $\lambda\in M_{r\square}$ jer, tako postupajući, dobijamo tačniji rezultat.

G L A V A 3.

§ 3.1. NEKI SPECIJALNI REZULTATI

Ovde ćemo koristeći rezultate iz druge glave dokazati sledeće stavove

S t a v 9. Neka je $f \in W^r_{M,0}$ $(r \in N)$, $\alpha > 1$, $A^\alpha_n = \binom{n+\alpha}{n}$

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n} & ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; k = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; k > n , \end{cases}$$

$$U_n(f, x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t) \sum_{k=1}^{n} \frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n} \frac{\cos(kt - \frac{r\pi}{2})}{k^r} dt .$$

Onda je

$$\mathcal{E}(W^r_{M,0}; U_n)_C = \sup_{f \in W^r_{M,0}} \| f(\cdot) - U_n(f, \cdot, \lambda) \|_C =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\alpha}{\pi n} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^r} + O\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n^r} \right) & ; \quad r = 2, 3, 4, \ldots \\ \dfrac{2\alpha}{\pi} \cdot \dfrac{\ln n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n} \right) & ; \quad r = 1 \end{cases}$$

D o k a z. Kako je

$$A^\alpha_n = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!} = \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right\} \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$(\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots)$$

to su brojevi A^α_n pozitivni za $\alpha > -1$, rastu (kao funkcija od n) za $\alpha > 0$, opadaju za $-1 < \alpha < 0$, $A^0_n = 1$ za svako n, i ako je $\alpha < -1$ onda A^α_n održava isti znak za dovoljno veliko n.

Važi još i relacija

$$A_n^{\alpha}=\sum_{\nu=0}^{n} A_{\nu}^{\alpha-1} .$$

Iz definicije elemenata matrice λ i osobina brojeva A_n^{α} sleduje redom

$$(1)\qquad 0<\lambda_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n-k}A_{\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}=\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}-\sum\limits_{\nu=n-k+1}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}=1-\frac{\sum\limits_{\nu=n-k+1}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}<1$$

$$(n=0,1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots n)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_{nk}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\alpha}=1\qquad(k=0,1,2,\dots)$$

$$(2)\qquad \Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k}=\frac{1-\lambda_{nk}}{k}-\frac{1-\lambda_{n,k+1}}{k+1}=\frac{1-\lambda_{nk}}{k}-\frac{1-\lambda_{n,k}}{k+1}+$$

$$+\frac{1-\lambda_{nk}}{k+1}-\frac{1-\lambda_{n,k+1}}{k+1}=\frac{1-\lambda_{n,k}}{k(k+1)}+\frac{1}{k+1}\left[(1-\lambda_{nk})-(1-\lambda_{n,k+1})\right]=$$

$$=\frac{1}{k(k+1)A_n^{\alpha}}\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}+\frac{1}{(k+1)A_n^{\alpha}}\left(\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}-\sum_{\nu=n-k}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{k(k+1)A_n^{\alpha}}\left(\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_{\nu}^{\alpha-1}-kA_{n-k}^{\alpha-1}\right)=\frac{1}{k(k+1)A_n^{\alpha}}\sum_{\nu=n-k+1}^{n}\left(A_{\nu}^{\alpha-1}-A_{n-k}^{\alpha-1}\right)>0 \quad {}^{1)}$$

Iz navedenih osobina brojeva λ_{nk} sleduje da matrica $\lambda\in M_{1\Delta}$, a onda i $\lambda\in M_{r\Delta}$ (r = 2,3, ...) (jer iz

$$\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k}>0\quad(n=1,2,\dots,\ k=0,1,\dots,n-1)$$

sleduje i

$$\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{\ell}}>0\quad(\ell=2,3,\dots;\ n=1,2,\dots,\ k=0,1,\dots,n-1)).$$

Dakle, za matricu λ važi

$$\lambda\in M_{r\Delta}\ (r\in N).$$

(Ako definiciju skupova $M_{r\square}$ i $M_{r\Delta}$ proširimo tako što ćemo zahtevati da je uslov

$$\Delta\frac{1-\lambda_{nk}}{k^{r}}>0\quad(n=0,1,2,\dots\ k=0,1,2,\dots)$$

i.j.

---

1) $(n=1,2,\dots,\ k=0,1,2,\dots,n-1)$.

$$\Delta \frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ispunjen tek počev od izvesnog $n_0 \in N$ pa dalje stalno (jer to je u stvari važno u procesu odredjivanja ponašanja veličine $\mathcal{E}(S, U_n)_c$, kad $n \to +\infty$), onda matrica λ pripada i skupu $M_{r\square}(r \in N)$. Da bismo to dokazali, dovoljno je da dokažemo da važi

$$\frac{1-\lambda_{nk}}{k^r} \geqslant \frac{1-\lambda_{n,k+1}}{(k+1)^r} \quad (r \in N,\ k = n, n+1, n+2, \ldots)$$

počev od nekog prirodnog broja n_0 pa dalje stalno. Za $r \in N$ i $k = n+1, n+2, \ldots$ (n bilo koje iz N) , gornji uslov važi jer je tačka nejednakost

$$\frac{1}{k^r} > \frac{1}{(k+1)^r} \quad (r \in N, n \in N,\ k = n+1, n+2, \ldots)$$

Dokažimo da, počev od nekog $n_0 \in N$ i dalje stalno, važi i

$$\frac{1-\lambda_{nn}}{n^r} \geqslant \frac{1-\lambda_{n,n+1}}{(n+1)^r} \quad (r \in N, n \in N).$$

Zaista, kako je

$$\frac{1-\lambda_{nn}}{n^r} - \frac{1-\lambda_{n,n+1}}{(n+1)^r} = \frac{1-1/A_n^\alpha}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} =$$

$$= \frac{1}{n^r} - \frac{1}{n^r}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-r} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{r+\alpha}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^r} - \frac{1}{n^r}\left[1 - \frac{r}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{r+\alpha}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}}\left[r - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^{r+1}}\left[r + o(1)\right],$$

to, za svako $r \in N$, postoji $n_0 \in N$ tako da je za svako $n > n_0$

$$\Delta \frac{1-\lambda_{nn}}{n^r} > 0.$$

Ovim je dokazano da za matricu λ važi i

$$\lambda \in M_{r\square} \quad (r \in N)$$

što znači da je

$$\lambda \in M_{r\square} \cap M_{r\triangle} \quad (r \in N) \quad .)$$

Neka je sada $r \in \{3, 4, 5, \ldots\}$. Onda je, prema stavu 8.c) (koristeći činjenicu da je $\lambda \in M_{r\triangle}$(r = 3, 4, ...))

(3)
$$\mathcal{E}(W^r_{M,0};U_n)_c=\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_c\leq$$
$$\leq\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(r+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^{r+1}}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^r}+O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad(r=3,4,\dots).$$

Posle kratke transformacije iz
$$A_n^\alpha=\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$
dobijamo
$$1-\lambda_{n,2K+1}=\frac{A_n^\alpha-A_{n-(2K+1)}^\alpha}{A_n^\alpha}=\frac{\alpha(2K+1)}{n}\cdot\left\{1+O\left(\frac{2K+1}{n}\right)\right\}$$
$$\left(n=0,1,2,\dots,\ K=0,1,2,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right).$$

(4) Kako je (imajući u vidu poslednju relaciju)
$$\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(r+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^{r+1}}=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^r}+O\left[\frac{1}{n^2}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^{r-1}}\right]=$$
$$=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^r}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{\infty}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^r}=$$
$$=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^r}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
to je, u nejednakosti (3), prvi sabirak beskonačno mala nižeg reda (sporije teži nuli kad $n\to+\infty$) od ostalih sabiraka i zato je, zbog relacije (4)

(5)
$$\mathcal{E}(W^r_{M,0};U_n)=\sup_{f\in W^r_{M,0}}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_c=$$
$$=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(r+1)}}{(2K+1)^r}+O\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\ln n}{n^r}\right)\quad(r=3,4,\dots).$$

Neka je sada r = 2. Onda je prema stavu 8 d) (koristeći činjenicu da $\lambda\in M_{2\Delta}$)

(6)
$$\mathcal{E}(W^2_{M,0};U_n)_c=\sup_{f\in W^2_{M,0}}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_c\leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(2+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^{2+1}}+2\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{K}\Delta\frac{1-\lambda_{nK}}{K}+\frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Kako je, prema (2) i (1)

$$\Delta\frac{1-\lambda_{nK}}{K}=\frac{1-\lambda_{nK}}{K}-\frac{1-\lambda_{n,K+1}}{K+1}=\frac{1}{K(K+1)}\left[1-\lambda_{nK}-\frac{A_{n-K}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\right]=O\left(\frac{1}{K^2}\right)$$

i

$$\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{K}\Delta\frac{1-\lambda_{nK}}{K}=\sum_{K=1}^{n-1}\frac{1}{K}\Delta\frac{1-\lambda_{nK}}{K}+\frac{1-\lambda_{nn}}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

to zbog

$$\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(2+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^{2+1}}=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(2+1)}}{(2K+1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

iz (6) sleduje

$$(7)\quad \mathcal{E}(W^2_{M,0};U_n)_C=\sup_{f\in W^2_{M,0}}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^{K(2+1)}}{(2K+1)^2}+O\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Neka je najzad $r = 1$. Do sada smo koristili činjenicu da matrica $\lambda\in M_{r\Delta}$ ($r\in N$). No ta pretpostavka, sada kada je $r = 1$, daće nam samo red veličine $\mathcal{E}(W^r_{M,0};U_n)_C$, kad $n\to+\infty$. Naime, prema stavu 8.d) je

$$\mathcal{E}(W^1_{M,0};U_n)_C=\sup_{f\in W^1_{M,0}}\|f(\cdot)-U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C\leq\frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(1+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^{1+1}}+$$
$$+\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n}+2(1-\lambda_{n1})+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

odakle, zbog

$$(8)\qquad 1-\lambda_{n1}=\frac{\alpha}{n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

i

$$(9)\quad \frac{4}{\pi}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^{K(1+1)}(1-\lambda_{n,2K+1})}{(2K+1)^2}=\frac{4\alpha}{\pi n}\sum_{K=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{2K+1}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2\alpha}{\pi n}\ln n+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

mamo samo

$$\mathcal{E}(W^1_{M,0}, U_n)_C = \sup_{f \in W^1_{M,0}} \| f(\cdot) - U_n(f,\cdot,\lambda) \|_C \leq \frac{2}{\pi}\left(\alpha + \frac{2}{\pi}\right)\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

čime je odredjen samo red veličine $\mathcal{E}(W^1_{M,0}; U_n)_C$ kad $n \to +\infty$

Koristimo sada činjenicu da je $\lambda \in M_{1\square}$. Onda iz stava 8.b. imamo

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq$$

$$\leq \mathcal{E}(W^1_{M,0}; U_n)_C \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1-\lambda_{n,2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + 2(1-\lambda_{n1})$$

a odatle, prema (8) i (9) i imajući u vidu da je

$$\sum_{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sleduje

$$\mathcal{E}(W^1_{M,0}; U_n)_C = \frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Iz (5), (7) i (10) sleduje tvrdjenje stava 9.

S t a v 10. Neka je $f \in W^r_0 H^\beta$ ($r \in N$, $0<\beta<1$), $\alpha > 1$,

$$A^\alpha_n = \binom{n+\alpha}{n},$$

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \dfrac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n} & ; \; n = 0,1,2,\ldots, k=0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ; \; n = 0,1,2,\ldots, \; k > n \end{cases},$$

$$U_n(f,x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x-t)\sum_{k=1}^{n}\frac{A^\alpha_{n-k}}{A^\alpha_n k^r}\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)dt.$$

Onda je

$$\mathcal{E}(W^r_0 H^\beta; U_n)_C = \sup_{f \in W^r_0 H^\beta} \| f(\cdot) - U_n(f,\cdot,\lambda)\|_C =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha 2^{\beta+1}}{\pi n} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{\beta} \sin(2k+1)t\,dt}{(2k+1)^{r-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{r+\beta}} + \dfrac{\ln n}{n^{r+\beta}}\right) & ; \ r = 2\ell - 1, \ \ell \in N \\ \dfrac{2\alpha}{\pi n} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\int_0^{t_0} (\rho(t) - t)^{\beta} \cos kt\,dt}{k^{r}} + O\left(\dfrac{1}{n^{r+\beta}} + \dfrac{\ln n}{n^{r+\beta}}\right) & ; \ r = 2\ell, \ \ell \in N \end{cases}$$

pri čemu je za r = 2, t_0 nula funkcije

$$B_2(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1 - \frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}}{k} - \frac{1 - \frac{A_{n-(k+1)}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}}{k+1} \right] \left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\cos \nu t}{\nu} - \frac{\cos kt}{2k} \right)$$

iz intervala $(0, \pi)$, a funkcija $\rho(t)$ definisana relacijom

$$\int_0^{x} B_2(t)\,dt = \int_0^{\rho(x)} B_2(t)\,dt \qquad (0 \le x \le t_0 \le \rho(x) \le \pi),$$

a za r = 4,6, ... t_0 je nula funkcije

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}\right) \frac{\cos kt}{k^{r}}$$

iz intervala $(0, \pi)$ i $\rho(x)$ je funkcija definisana relacijom

$$\int_0^{x} B_r(t)\,dt = \int_0^{\rho(x)} B_r(t)\,dt \quad (0 \le x \le t_0 \le \rho(x) \le \pi).$$

Dokaz stava 10 izvodi se slično dokazu stava 9.

Napomena. U stavu 9 , izveli smo (metodama koje su posledica rezultata ovoga rada) na jednostavniji način rezultate koje je Rižankova dobila u svom radu [28] .

Stav lo (čiji su rezultati do sada nepoznati) pokazuje efikasnost i laku primenljivost pomenutih metoda i u drugim slučajevima.

- . -

LITERATURA

1. Корнейчук Н.П.: Экстремальные задачи теории приближения, Москва, 1976.
2. Корнійчук М.П.: Про екстремальні властивості періодичних функцій. Доповіді АН УРСР, №8 (1962), 993-998.
3. Корнейчук Н.П.: Точные оценки для норм дифференцируемых функций в метрике L. „Математ. заметки". Т. 2, № 6 (1967), 569-576.
4. Сторчай В.Ф. Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2. „Укр: мат. журнал", 1973, 25, №6, 835-841.
5. Сторчай В. Ф. Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_p. „Теория приближения функций и ее приложения", изд Инст. мат. АН УССР, Киев, 1974.
6. Сторчай В.Ф. Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в равномерной и интегральной метриках. „Испитивања савремних проблема сумирања и апроксимације функција и њихова примена, 1972.
7. Дзядык В.К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций, Известия АН СССР, сер. матем., т. 23, № 6, 1959.

8. Зигмунд А.: Тригонометрические ряды, Москва, 1965.

9. *Lebesgue H.: Sur la représentation trigonometrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. de France, 38(1910), 184-210.*

10. Тиман А.Ф.: Теория приближения функций действительного переменного, Москва, Физматгиз, 1960.

11. Бари Н.К.: Тригонометрические ряды, Москва, 1961.

12. Колмогоров А.Н.: *Zur Grössenordnung des Restgliedes Furiericher Reihen differenzierbarer Funktionen, Annals of Math. 36 (1935), 521-526.*

13. Пинкевич В.Т.: О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я. Изв. АН СССР (серия матем.) 4 (1940), 521-578.

14. Никольский С.М.: Асимптотическая оценка остатка при приближении сумами Фурье, ДАН СССР, т.32, № 6, 1941.

15. -"- : Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклов АН СССР, т. 15, 1945.

16. -"- : Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности, ДАН СССР, т. 52, № 3, 1946.

17. Ефимов А.В.: Приближение функций с заданным модулем непрерывности сумами Фурье, Изв. АН

СССР, сер. матем., т. 23, № 1, 1959.

18. Ефимов А.В.: Приближение непрерывных периодических функций сумами Фурье, Изв АН СССР, сер. матем., т. 24, № 2, 1960.

19. Никольский С.М.: Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв АН СССР, сер. матем., т. 10, № 3, 1946.

20. Бердышев В.И.: Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, № 3, 1965.

21. Демченко А.Г.: Приближение в среднем функций классов $W^r H_{[\omega]_L}$ суммами Фурье, „Укр. мат. журнал", 1973, 25, № 2, 267-277.

22. Nagy Sz. B.: Approximation der funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen. Reihen. Matematikai es Fizikai Lapok, 49 (1942), 123-138; Acta scient. math., 11, № 1-2 (1946), 71-84.

23. Гаврилюк В.Т., Степанец А.И.: Приближение дифференцируемых функций полиномами Рогозинского, „Укр. мат. журнал", 1973, т. 25, № 1, 3-13.

24. Гаврилюк В.Т., Степанец А.И.: О точных верхних гранях отклонений сумм С.Н. Бернштейна от функций классов Гельдера, „Укр. мат. журнал", 1973, т. 25, № 2, 158-169.

25. Ефимов А.В.: О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена, Изв. АН СССР, сер. матем., 23 (1959), 737-770.

26. Ефимов А.В.: О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. II, Изв АН СССР, сер. матем., 24 (1960), 431-468.

27. Демченко А.Г.: О приближении в среднем функций классов $H_{[\omega]_L}$ суммами Валле-Пуссена, „Укр. мат. журнал", 1972, 24, № 1, 95-104.

28. Рыжанкова Г.И.: О приближении дифференцируемых функций срединами Чезаро, Сибирский математический журнал", т. XVII, № 1, 228-232, 1976.

29. Тиман А.Ф.: Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Изв. АН СССР (сер. матем.) 17 (1953), 99-134.

30. Ганзбург И.М.: Распространение одной асимптотической формулы А.Ф. Тимана на классы функций с данным модулем непрерывности, Докл. АН СССР 128, № 3, (1959).