UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Miodrag Kapetanović

METOD SEMANTIČKIH TABLOA

doktorska disertacija

BEOGRAD

1996

Zahvaljujem se profesoru dr Slaviši B. Prešiću za svu pomoć i podršku pri izradi ovog rada. Na njegovim predavanjima i iz njegove knjige *Elementi matematičke logike* naučio sam osnove matematičke logike i još mnogo toga, a najpre to da matematička logika prožima čitavu matematiku. Profesor Prešić je osnivač i dugogodišnji rukovodilac Seminara za matematičku logiku u Matematičkom institutu. Imao sam i imam zadovoljstvo i privilegiju da se družim s koleginicama i kolegama sa seminara i od njih čujem mnogo toga lepog iz logike. Posebno je svojim gledanjima na logiku i svojom erudicijom uticao na mene profesor dr Aleksandar Kron na čemu sam mu zahvalan.

Reference

[1] Richard A. Shore Anil Nerode. *Logic for applications.* Springer-Verlag, 1993.

[2] E. W. Beth. Semantic entailment and formal derivability. *Mededelingen van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Afdeling Letterkunde, N. R.*, 18:309–42, 1955.

[3] G. Boolos. Trees and finite satisfiability: proof of a conjecture of burgess. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25:193–197, 1984.

[4] George Boolos. *The unprovability of consistency.* Cambridge University Press, 1979.

[5] M. A. Dickmann. *Large Infinitary Languages.* North-Holland Publishing Company, 1975.

[6] Melvin Fitting. *Intuitionistic Logic Model Theory and Forcing.* North-holland Publishing Company, 1969.

[7] Melvin Fitting. *Proof methods for modal and intuitionistic logics.* D. Reidel Publishing Company, 1983.

[8] J. L. Krivine G. Kreisel. *Elements of Mathematical Logic.* North-Holland Publishing Company, 1971.

[9] Jaakko Hintikka. Form and content in quantification theory. *Acta Philosophica Fennica*, 8:7–55, 1955.

[10] Moshé I. Machover John L. Bell. *A course in mathematical logic.* North-Holland Publishing Company, 1977.

[11] H. J. Keisler. *Model Theory for Infinitary Logic.* North-Holland Publishing Company, 1971.

[12] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical Logic.* Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

[13] Raymond M. Smullyan. *First-Order Logic.* Springer-Verlag New York Inc., 1968.

Glava 1

Uvod

U matematici se redovno primenjuje način rasuđivanja, koji se može posmatrati i kao oblik principa *reductio ad absurdum.* U njegovoj osnovi je prirodna i u matematici često korišćena ideja traženja kontraprimera. Ako želimo da dokažemo neko univerzalno tvrđenje mi probamo da nađemo primer u kome ono ne važi. Otsustvo kontraprimera služi kao dokaz našeg tvrđenja. Jedno ovaploćenje te ideje u logici je **metod semantičkih tabloa** koji potiče od Betha [1]. U svom osnovnom radu [2] on je na primeru predikatskog računa prvog reda realizovao originalnu ideju o korišćenju *semantike* za formulisanje *sintaksnih* pravila dedukcije u ovom računu sa ciljem da nađe metod za proveru valjanosti predikatskih formula. Beth je razmotrio nešto opštiju situaciju: ako neko tvrđenje ne sledi iz datih hipoteza onda svakako postoji situacija u kojoj su sve te hipoteze tačne dok je samo to tvrđenje netačno. Drugim rečima postoji *kontraprimer.* Ako kontraprimera nema onda je tvrđenje (semantička) *posledica* pomenutih hipoteza. Beth je pokazao da je moguća *sistematska* potraga za kontraprimerom i celu proceduru predstavio u obliku tablice (otud naziv metoda): u jednu njenu kolonu smeštaju se formule tačne u našem potencijalnom kontramodelu (na početku se tu nalaze zadate hipoteze), a u drugu one koje u njemu ne bi smele da važe (između ostalog i tu je i tvrđenje za koje proveravamo da li je posledica). Jasno je da kontraprimera nema ako se ista formula pojavi u obe kolone, jer bi to značilo da je istovremeno tačna i netačna u modelu. Beth ističe svoj postupak kao značajan

[1] Evert W. Beth (1908–64), holandski logičar i filozof nauke

primer primene *analitičkog* metoda, jer se sama procedura sastoji u analizi i razlaganju formula u skladu s isitnitosnim tablicama i semantičkom definicijom kvantora. Tako na primer ako se među tačnim formulama nalazi $\phi \wedge \psi$ onda će se u istoj koloni sa njom naći i ϕ i ψ. Drugim rečima u izvođenju učestvuju samo potformule polaznih formula. Budući da prilikom pretrage dolazi do razmatranja slučajeva, to dovodi do razdvajanja postojeće tablice u podtablice koje se eventualno dalje granaju itd. Znači da se ceo postupak opovrgavanja prirodno reprezentuje u obliku *drveta*. Obe upravo pomenute karakteristike ukazivale su, što i sam Beth naglašava, na bliskost semantičkih tabloa sa, tada već dobro poznatim, Gentzenovim sistemima. Naime u specijalnom slučaju kada je polazna formula valjana njen zatvoreni tablo (takav čije sve grane vode u kontradikciju) i dokaz u odgovarajućem Gentzenovom sistemu dosta jednostavno se prevode jedan u drugi. Moglo bi se reći da su Gentzenovi rezultati bili važan oslonac, a delom i inspiracija Bethu u formulisanju njegovog metoda. Razlike ova dva pristupa međutim nikako nisu manje značajne. Gentzen se gotovo isključivo bavi analizom i transformacijom dokaza i svojom, sada već klasičnom, teoremom o eliminaciji sečenja definitivno utemeljuje teoriju dokaza. Bethovi tabloi ne koriste sečenje ali idu korak dalje u drugom smeru. Ako naime polazna formula nije valjana onda ne samo sto se njen tablo ne zatvara nego bilo koja njegova otvorena grana (takva na kojoj nema kontradikcije) sadrži dovoljno informacija da se sa nje može očitati *kontramodel* date formule. Takva grana je ustvari tipičan primer *Hintikkinog skupa*[2]. Sam Hintikka je u svom radu [9] ovakve skupove nazvao *modelski* (model sets) i do njih došao razmatrajući problem kako dati neprotivrečan skup predikatskih formula proširiti do takvog čiji se model može neposredno definisati. Jedno rešenje nudi naravno poznata Lindenbaum–Henkinova konstrukcija maksimalnog neprotivrečnog skupa koji proširuje dati skup, ali je Hintikka kao i Beth preferirao analitički pristup. To znači da je hteo da taj skup dobije semantičkom analizom tj. razlaganjem formula datog skupa tako da se u konstrukciji pojavljuju samo potformule datih formula. Pri tome je i on koristio neku vrstu drveta.

[2]K. Jaakko J. Hintikka, finski logičar

Odlučujući korak u realizaciji svih ovih ideja i konačnom sređivanju čitave oblasti načinio je Raymond Smullyan. Njegovi tabloi koje on naziva *analitički* detaljno su izloženi u knjizi *First-order Logic*. Za razliku od Bethovih tablica analitički tablo sastoji se samo iz jednog drveta. U čvorovima tog drveta nalaze se formule i to *sa prefiksom* T ili F čija je uloga sledeća: ako pronađemo granu na kojoj nema kontradikcije (nisu i $T\psi$ i $F\psi$ na grani) onda možemo zadati model takav da za svaku formulu sa grane važi: ako je na grani $T\psi$ onda ψ važi u tom modelu a ako je na grani $F\psi$ onda ne važi. Uspemo li u tome našli smo kontramodel za polaznu formulu jer njoj na početku pridružujemo prefiks F. Pored toga Smullyan je uveo i uniformnu notaciju podelivši (u slučaju predikatskog računa prvog reda) sve formule u četiri vrste. Formule tipa α su $T\phi \wedge \psi, F\phi \vee \psi, F\phi \rightarrow \psi$, kao i $T\neg\phi$ i $F\neg\phi$. Možemo ih zvati *konjunktivnim* jer su ekvivalentne nekoj konjunkciji. Formule tipa β su *disjunktivne*: $T\phi \vee \psi, F\phi \wedge \psi, T\phi \rightarrow \psi$. Tip γ čine *univerzalne* formule $T\forall x\phi, F\exists x\phi$, a tip δ *egzistencijalne* formule $T\exists x\phi, F\forall x\phi$. Smullyan je uočio da je u raznim standardnim dokazima i konstrukcijama dovoljno razmotriti četiri slučaja koji su u vezi s ova četiri tipa formula kao i to da u osnovi tih dokaza stoji nekoliko jednostavnih baznih principa. Time je ujedno otvorio put novim uopštenjima. U sledećem poglavlju realizovana je jedna ideja do koje je autor ovog teksta došao neposredno se inspirišući Smullyanovim pristupom. Na razradi Smullyanovih ideja i njihovoj primeni na razne logičke sisteme najviše je uradio Fitting. Primena tabloa na neklasične logičke sisteme sumirana je u njegovoj knjizi [7]. Fitting je razvio tabloe za intuicionistički račun i proširio Smullyanovu uniformnu notaciju na modalne sisteme. Po analogiji s kvantorima formule tipa *nužno*, a to su $\Box\phi$ i $\neg\Diamond\phi$ označio je sa ν, dok je formule oblika $\Diamond\phi$ i $\neg\Box\phi$ označio sa π. U jednoj varijanti modalnih tabloa uveo je i prefikse za moguće svetove, razradiši jednu Fitchovu ideju. Isto to učinio je i sam Smullyan objedinivši na originalan način tabloe za S4 i intuicionistički račun. Drugo poglavlje ovog rada predstavlja razradu i primenu ove tehnike. Razne varijante tabloa uvek su bile popularne kao praktičan metod za testiranje formula, a u najnovije vreme redovno se koriste u izgradnji automatskih dokazivača teorema.

Recimo na kraju nešto i o ovom radu čiji je predmet upravo metod tabloa onakav kako ga je formulisao Smullyan.

Ovo poglavlje kao što se vidi ima uvodni karakter. Pogled na istoriju samog predmeta praćen je spiskom osnovnih definicija i oznaka.z

U narednom poglavlju najpre je data definicija *fundiranog sistema*. Ideja je da se ode korak dalje u duhu Smullyanovog uniformnog prilaza i *svi* neatomski elementi nekog logičkog sistema podele na *konjunktivne* i *disjunktivne*. Ovo odgovara pomenutoj podeli na α i β formule. Novo je to što se elementi tipa γ prirodno smeštaju u konjunktivne a δ elementi u jednu ili drugu vrstu zavisno od prirode fundiranog sistema. Njihovi skupovi komponenata međutim u opštem slučaju zavise od konteksta i zato se uvodi funkcija *sub* koja svakom elementu fundiranog sistema dodeljuje skup njegovih komponenata u odnosu na svaki skup elemenata tog sistema. Za ovako zadat apstraktni sistem dokazuje se uopštenje Hintikkine leme: nadole zatvoren skup može se dopuniti do "potpunog" skupa tj. takvog koji, ako ga, recimo, tumačimo kao skup rečenica prvog reda, predstavlja kompletnu teoriju. Zanimljivo je da se u dokazu koristi jedino *fundiranost*: svaki lanac koji od nekog elementa preko njegove neposredne komponente vodi do atoma je konačan. Zatim se za definiše opšti pojam tabloa. Ovde treba reći da u literaturi dosad nije bilo dovoljno opšte i stroge definicije ovog pojma. Uz ovo prirodno ide i pojam dokaza, da bi se zatim na primerima pokazalo kako su ovi pojmovi dovoljno opšti da obuhvate sve najvažnije logičke sisteme.

U trećem poglavlju razmatraju se proširenja intuicionističkog iskaznog računa i modalnog računa S4 s namerom da se tablo pravila za njih dobiju s jedne strane pomoću za njih karakteristične Kripkeove semantike, a sa druge strane kao neke vrste proširenja tablo sistema za intuicionističku logiku odnosno S4. Između ostalog ideja je da se kao prefiksi i dalje koriste konačni nizovi prirodnih brojeva uređeni pomoću $\subseteq$ uz eventualne dodatke. Tako se pokazuje da je za račune KC i S4.2 neophodno uvesti i *uniju* prefiksa, dok u slučaju LC i S4.3 biramo prefikse tako da dobijemo *gusto leksikografsko* uređenje među prefiksima.

Četvrto poglavlje posvećeno je *konačnim* modelima. Pokazuje se naime da su tabloi direktno primenljivi i na tu vrstu problema. Boolos je pokazao da se u slučaju predikatskih formula, uz izmenu pravila za $\exists$ dobija sistem potpun u odnosu na konačne modele. Pokazuje se da je to moguće uraditi u modalnim tabloima menjajući pravila za $\Diamond$, a u intuicionističkim menjajući pravila za $\rightarrow$ i $\neg$.

Najzad peto poglavlje posvećeno je reprezentaciji pojma dokazivosti u tablo sistemu. Taj se predikat može opisati u nekoj vrsti slabe aritmetike pomoću hornovskih rečenica. Time se ujedno daje teorijska osnova za izgradnju dokazivača teorema u Prologu zasnovanom na metodu tabloa.

1.1 Osnovne oznake i definicije

Koristićemo uobičajene oznake i definicije, tako da ih ovde samo ukratko nabrajamo.

Sa $A \subset B$ označavamo $A \subseteq B$ ako $A \neq B$. *Ordinale* shvatamo kao skupove svih ordinala koji im prethode i označavamo ih malim grčkim slovima. Sa ω označavamo prvi beskonačan ordinal tako da prirodne brojeve smatramo konačnim ordinalima. Sa ${}^{B}A$ označavaćemo skup svih preslikavanja $f : B \to A$. Ako je B neki ordinal α onda je to skup svih nizova elemenata iz A dužine α. Mi ćemo po pravilu posmatrati *drveta* kao podstrukture strukture $Seq(\kappa) = ({}^{<\kappa}\kappa, \subseteq)$ gde je κ regularan kardinal, a ${}^{<\kappa}\kappa = \{{}^{\delta}\kappa \mid \delta < \kappa\}$. $Seq = {}^{<\omega}\omega$ je dakle skup svih *konačnih* nizova prirodnih brojeva. Ukoliko je jasno o kom κ je reč pisaćemo kratko Seq. $Seq(\kappa)$ može se na poznati način *leksikografski* urediti: $s <_l t$ akko $s \subset t$ ili $s(m) < t(m)$ gde je m najmanji x takav da $s(x) \neq t(x)$.

$L(\mathcal{A})$ je jezik strukture $\mathcal{A}$. Skup nosač strukture $\mathcal{A}$ označavaćemo sa A ili $|\mathcal{A}|$. Sa $\mathcal{A}_B$ označavamo *ekspanziju* strukture $\mathcal{A}$: njen jezik obogaćuje se imenima $\bar{b}$ elemenata $b \in B \subseteq A$ i označava sa $L_B(\mathcal{A})$.

Binarna relacija R na skupu A je *fundirana* (dobro zasnovana, dobro utemeljena) ako ne postoji beskonačan R–opadajući niz elemenata iz A, preciznije ako ne postoji funkcija $f : \omega \to A$ takva da za svaki $n \in \omega$ $f(n+1)Rf(n)$. Navodimo osnovna svojstva fundiranih relacija.

(i) Svaki neprazan podskup od A sadrži R–minimalan element.

(ii) Ne postoje R–ciklusi, tj. ne postoji konačan niz $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 1)$ elemenata iz A takav da $a_1 R a_2 R \ldots R a_n R a_1$. Sledi da je fundirana relacija irefleksivna.

(iii) Tranzitivno zatvorenje R^* fundirane relacije R je fundirano.

(iv) Rekurzijom se svakom $x \in A$ dodeljuje ordinal ρ_R, njegov R–rang:
$\rho_R(x) = \bigcup\{\rho(y) + 1 \mid yRx\}$.

(v) Ako postoji $x \in A$ takav da $\phi(x)$ onda postoji R–minimalan $a \in A$ takav da $\phi(a)$.

(vi) Indukcija. Pretpostavimo da za sve $x \in A$ važi: ako za svaki $y \in A$ takav da yRx važi $\phi(y)$ onda $\phi(x)$. Zaključujemo da $\phi(x)$ za sve $x \in A$.

Glava 2

Fundirani sistemi

Neka je $\prec$ fundirana relacija na datom beskonačnom skupu E za koji pretpostavljamo da je disjunktna unija skupova B, C i D. Skup $\mathsf{B} = \{b \in \mathsf{E} \mid \neg\exists x \; x \prec b\}$ je skup *baznih* elemenata ili *atoma*. Neka je pored toga zadata funkcija $sub\colon \mathsf{E} \times \mathcal{P}\mathsf{E} \to \mathcal{P}\mathsf{E}$ takva da $sub(e, S) \subseteq \{x \mid x \prec e\}$ [1].

Šestorku $\mathcal{F} = (\mathsf{E}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \prec, sub)$ zvaćemo *fundiran sistem*, C je skup *konjunktivnih*, a D skup *disjunktivnih* elemenata. U osnovi dokaza potpunosti za razne sisteme bez pravila sečenja stoji jednostavan rezultat zasnovan na povezivanju ideja Hintike i Lindenbauma. Da bismo ga dokazali na način na koji je to učinio Smullyan treba nam sledeća

Definicija 2.0.1 *Za dati fundiran sistem $\mathcal{F}$ skup $H \subseteq \mathsf{E}$ zvaćemo* zatvoren nadole *ako za svaki $c \in H \cap \mathsf{C}$ važi $sub(c, H) \subseteq H$ i za svaki $d \in H \cap \mathsf{D}$ $sub(d, H) \cap H \neq \emptyset$.*

Lema 1 (Osnovna lema) *Neka je H nadole zatvoren podskup od E i skup $B \subset \mathsf{B}$ takav da:*

- $H \cap \mathsf{B} \subseteq B$;
- *za svaki $e \in H$ $sub(e, H) = sub(e, B)$*
- *za svaki $e \in \mathsf{E}$ i svaki $S \supseteq B$ $sub(e, S) = sub(e, B)$.*

Tada postoji $L \subseteq \mathsf{E}$ sa svojstvima:

[1] Dakle $sub(b, S) = \emptyset$ za svaki $b \in \mathsf{B}$ i svaki $S \subseteq \mathsf{E}$.

a) $H \subseteq L$;

b) $L \cap \mathsf{B} = B$;

c) *za svaki* $c \in \mathsf{C}$ $\;c \in L$ *akko* $sub(c, L) \subseteq L$;

d) *za svaki* $d \in \mathsf{D}$ $\;d \in L$ *akko* $sub(d, L) \cap L \neq \emptyset$.

DOKAZ Uvedimo oznaku $L(< \alpha) = \bigcup\{L(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ a zatim definišimo familiju $\{L(\alpha) \mid \alpha \in Ord\}$ na sledeći način: $L(0) = B$, a za $\alpha > 0$ $L(\alpha) = L(< \alpha) \cup \{c \in \mathsf{C} \mid sub(c) \subseteq L(< \alpha)\} \cup \{d \in \mathsf{D} \mid sub(d) \cap L(< \alpha) \neq \emptyset\}$. Za svaki $e \in \mathsf{E}$ koji pripada gornjoj familiji označimo sa ρ_e ordinal takav da $e \in L(\rho_e) \setminus L(< \rho_e)$, stavimo $\Theta = \bigcup\{\rho_e + 1 \mid e \in \mathsf{E}\}$ i $L = L(\Theta)$ i dokažimo da ima tražena svojstva. Napominjemo da ćemo pisati kratko $sub(e)$ kao oznaku za $sub(e, B)$ i $x \prec y$ umesto $x \in sub(y, B)$.

Svojstvo b) je očigledno ispunjeno. Da dokažemo c) pretpostavimo najpre da $c \in L \cap \mathsf{C}$, tj. da $c \in L(\rho_c)$. Tada po konstrukciji mora biti $sub(c) \subset L(< \rho_c) \subset L$, jer je c jedino tako mogao ući u L [2]. Obratno, neka je $sub(c) \subset L$. Za proizvoljan $e \prec c$ tada važi $L(\rho_e) = L(< \rho_e + 1) \subset L(< \bigcup\{\rho_e + 1 \mid e \prec c\})$ (jer $\alpha < \beta \Rightarrow L(< \alpha) \subset L(< \beta)$). Otud $sub(c) \subset \bigcup\{L(\rho_e) \mid e \prec c\} \subset L(< \bigcup\{\rho_e + 1 \mid e \prec c\})$. Međutim $\bigcup\{\rho_e + 1 \mid e \prec c\}$ je upravo ρ_c pa dakle $sub(c) \subset L(< \rho_c)$. Po gornjoj definiciji mora onda i c ući u $L(\rho_c)$ tj. u L.

Dokažimo još d). Ako $d \in L \cap \mathsf{D}$ onda $d \in L(\rho_d)$ pa sledi da $e \in L(< \rho_d)$ za neki $e \prec d$ po konstrukciji skupa L. Ako je pak neki $e \prec d$ u L, onda $e \in L(\rho_e)$ pa $d \in L(\rho_e + 1) \subset L$.

Sada je lako dokazati a) indukcijom po $\prec$ −složenosti. Za bazične elemente iz H tvrđenje važi po definiciji skupa L: $H \cap \mathsf{B} \subset B = L \cap \mathsf{B}$. Ako $c \in H \cap \mathsf{C}$ onda $sub(c, H) \subset H$ pa po indukcijskoj pretpostavci $sub(c, H) \subset L$. Pošto je $sub(c, H) = sub(c, B) = sub(c, L)$, onda prema upravo dokazanom c) mora biti $c \in L$. Slično ako $d \in H \cap \mathsf{D}$ onda postoji $e \prec d$ takav da $e \in H$. Po indukcijskoj pretpostavci taj $e \in L$. Sa druge strane $sub(d, H) = sub(d, B) = sub(d, L)$ tj. $e \in sub(d, L)$ pa prema d) važi $d \in L$.

Kao "predprimer" odnosno "nulti" primer razmotrimo fundirani sistem čiji je skup nosač E skup svih rečenica proizvoljnog jezika logike $L_{\omega_1\omega}$, koji sadrži bar jednu

[2] pošto su C i D disjunktni, nikakav c iz C ne može ući u L "po osnovu" uslova za D.

konstantu. Skup B čine sve atomske rečenice tog jezika a za $\prec$ uzimamo uobičajenu relaciju "biti neposredna potformula" s tom razlikom što za rečenice oblika $\mathsf{Q}x\varphi$ (Q je $\forall$ ili $\exists$) uzimamo njihove "neposredne podrečenice" $\varphi_x(t)$ gde je t proizvoljan konstantni term našeg jezika. Na taj način ne izlazimo iz skupa rečenica. Tako na primer $\varphi \prec \neg\varphi$ i za svaki prebrojiv skup rečenica Γ i $\varphi \in \Gamma$ je $\varphi \prec \bigvee\Gamma$, $\varphi \prec \bigwedge\Gamma$ itd. Relacija $\prec$ je očigledno fundirana. Definišimo $sub(\varphi, E) = \{\psi \mid \psi \prec \varphi\}$ za svaki $E \subset \mathsf{E}$. Uzmimo zatim da je $\mathsf{C} = \emptyset$ tj. da sve složene rečenice spadaju u D. Najprostiji primer nadole zatvorenog skupa je proizvoljan skup B atomskih rečenica. Tada skup L iz *Osnovne leme* sačinjavaju tačno one rečenice koje su u B ili imaju bar jednu podrečenicu iz B.

Naš osnovni primer fundiranog sistema zasniva se na podeli rečenica prema važenju u modelu. Obogatimo zato jezik date strukture $\mathcal{A}$ imenima elemenata skupa $|\mathcal{A}|$ koje ćemo označavati sa $\bar{a}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots$. Skup svih rečenica proizvoljnog $L_{\infty\omega}$ fragmenta ovog jezika biće nosač našeg fundiranog sistema. Relaciju $\prec$ definišemo po izgrađenosti rečenica, ali ovaj put je motivacija semantička.

$$\varphi \prec \neg\neg\varphi$$

$$\begin{array}{ll}
P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \prec Pt_0 \ldots t_{n-1} & \neg P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \prec \neg Pt_0 \ldots t_{n-1} \\
\varphi \prec \bigvee\Gamma & \neg\varphi \prec \neg\bigvee\Gamma \\
\varphi \prec \bigwedge\Gamma & \neg\varphi \prec \neg\bigwedge\Gamma \\
\varphi_x(t) \prec \mathsf{Q}x\varphi & \neg\varphi_x(t) \prec \neg\mathsf{Q}x\varphi
\end{array}$$

Ovo važi za svaki $\varphi \in \Gamma$, svaki konstantni (zatvoreni) term iz $L_A(\mathcal{A})$ i svaki $a_i \in |\mathcal{A}|$, uz uslov da nisu svi $t_i (i < n)$ imena, $\mathcal{A}_A(t_i) = a_i$, a Q je $\forall$ ili $\exists$. Konstante iz L i terme oblika $f\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}$ zvaćemo *bazični*. Isto tako ćemo i rečenice oblika $P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}$ i $\neg P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}$ zvati *bazične*. Skup B sačinjavaju upravo sve bazične rečenice.

Skup C čine atomske rečenice koje nisu bazične i negacije takvih rečenica kao i rečenice oblika $\neg\neg\varphi$. Dalje, u C spadaju sve rečenice oblika $\bigwedge\Gamma$, $\neg\bigvee\Gamma$, $\forall x\varphi$ i $\neg\exists x\varphi$ *tačne* u $\mathcal{A}_A$, kao i sve rečenice oblika $\neg\bigwedge\Gamma$, $\bigvee\Gamma$, $\neg\forall x\varphi$ i $\exists x\varphi$ koje *ne važe* u $\mathcal{A}_A$. Sve ostale rečenice iz fragmenta (tj. one koje nisu u B ili C) smeštamo u D. Tako na primer ako $\mathcal{A}_A \models \bigvee\Gamma$ onda $\bigvee\Gamma \in \mathsf{D}$, a inače $\bigvee\Gamma \in \mathsf{C}$ i sl.

Sa $\theta(t_1,\ldots,t_m)$ označavamo proizvoljnu atomsku rečenicu ili negaciju atomske rečenice čiji su *svi* bazični termi upravo $t_1,\ldots,t_m$, a njihove vrednosti u $\mathcal{A}_A$ su $a_1,\ldots,a_m$ respektivno. Sada možemo definisati *sub* (E je proizvoljan skup rečenica):

$$\begin{aligned}
sub(\theta(t_1,\ldots,t_m),E) &= \{\theta(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m)\} \quad \text{(terme } t_i \text{ zovemo } \textit{redukovani}\text{)}\\
sub(\neg\neg\phi,E) &= \{\phi\}\\
sub(\neg(\phi\wedge\psi),E) &= sub(\neg(\phi\vee\psi),E)=\{\neg\phi,\neg\psi\}\\
sub(\neg(\phi\rightarrow\psi),E) &= \{\phi,\neg\psi\}\\
sub(\phi\rightarrow\psi,E) &= \{\neg\phi,\psi\}\\
sub(\phi\wedge\psi,E) &= sub(\phi\vee\psi,E)=\{\phi,\psi\}\\
sub(\bigwedge\Gamma,E)=sub(\bigvee\Gamma,E) &= \Gamma\\
sub(\neg\bigwedge\Gamma,E)=sub(\neg\bigvee\Gamma,E) &= \{\neg\psi \mid \psi\in\Gamma\}\\
sub(\mathsf{Q}x\phi,E) &= \{\phi_x(\bar{a}) \mid a\in|\mathcal{A}|\}\\
sub(\neg\mathsf{Q}x\phi,E) &= \{\neg\phi_x(\bar{a}) \mid a\in|\mathcal{A}|\}
\end{aligned}$$

Vidimo da u ovom primeru vrednost *sub* ne zavisi od E pa ćemo taj argument izostavljati. Takođe se lako proverava da za svaki $c\in\mathsf{C}$ i svaki $d\in\mathsf{D}$ važe sledeće veze:

$$\mathcal{A}_A\models c \quad akko \quad \mathcal{A}_A\models sub(c) \tag{2.1}$$

$$\mathcal{A}_A\models d \quad akko \quad \exists e\in sub(d)\ \mathcal{A}_A\models e \tag{2.2}$$

$$\mathcal{A}_A\not\models c \quad akko \quad \forall e\in sub(c)\ \mathcal{A}_A\not\models e \tag{2.3}$$

$$\mathcal{A}_A\not\models d \quad akko \quad \exists e\in sub(d)\ \mathcal{A}_A\not\models e \tag{2.4}$$

Neka je sada H proizvoljan neprazan nadole zatvoren skup rečenica koji važi u $\mathcal{A}_A$. Za skup B koji se pominje u Osnovnoj lemi uzmimo skup svih bazičnih rečenica koje važe u $\mathcal{A}_A$. Dokazaćemo da je skup L koji se pominje u Osnovnoj lemi upravo $Th(\mathcal{A}_A)$.

$L\subseteq Th(\mathcal{A}_A)$ dokazujemo indukcijom po ρ_e definisanom u Osnovnoj lemi. Ako $\rho_e=0$ onda $e\in L(0)=B$ pa $\mathcal{A}_A\models B$ po definiciji skupa B. Ako $c\in L$ onda $sub(c)\subseteq L$. Pošto za svaki $e\in sub(c)$ $\rho_e<\rho_c$, po indukcijskoj pretpostavci $\mathcal{A}_A\models sub(c)$. Prema prethodnom to znači da $\mathcal{A}_A\models c$. Slično ako $d\in L$ onda $e\in L$ za neki $e\in sub(d)$ i za taj e važi $\rho_e<\rho_d$. Po indukcijskoj pretpostavci to opet znači da $\mathcal{A}_A\models e$ i prema gornjim relacijama $\mathcal{A}_A\models d$.

$L \supseteq Th(\mathcal{A}_A)$ se dokazuje indukcijom po složenosti rečenice φ iz $Th(\mathcal{A}_A)$. Ako je φ bazična ona je onda po definiciji u $L(0)$ pa dakle i u L. Ako $\mathcal{A}_A \models \theta(t_1, \ldots, t_m)$ i $\mathcal{A}_A(t_i) = a_i$, onda $\mathcal{A}_A \models \theta(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$. Po indukcijskoj pretpostavci $\theta(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in L$, pa i $\theta(t_1, \ldots, t_m) \in L$. Ako je φ oblika $\bigwedge \Gamma$ onda $\mathcal{A}_A \models \Gamma$ i po indukcijskoj pretpostavci $\Gamma \subset L$. Sa druge strane $\bigwedge \Gamma \in \mathsf{C}$ i $sub(\bigwedge \Gamma) = \Gamma$ pa po definiciji skupa L mora biti $\bigwedge \Gamma \in L$. Ako je φ oblika $\bigvee \Gamma$ onda postoji $\psi \in \Gamma$ takva da $\mathcal{A}_A \models \psi$. Po indukcijskoj pretpostavci $\psi \in L$. Osim toga $\psi \in sub(\bigvee \Gamma)$ tako da, opet po definiciji skupa L, $\bigvee \Gamma \in L$. Slično za ostale vrste rečenica.

Primetimo da H i $\mathcal{A}$ određuju familiju struktura koje bismo mogli nazvati *minimalnim $H-$podmodelima* od $\mathcal{A}$. Svaki takav model $\mathcal{B}$ zadovoljava sledeće uslove:

1. $|\mathcal{B}| = \{a \in |\mathcal{A}| \mid \bar{a}$ se pojavljuje u $At(H)\}$, gde $At(H)$ označava skup svih atomskih rečenica i negacija atomskih rečenica koje su elementi od H.

2. $\bar{a}^{\mathcal{B}} = a$ ako $a \in |\mathcal{B}|$, a inače je to proizvoljno izabran element iz $|\mathcal{B}|$. Slično $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}}$ ako se c pojavljuje u $At(H)$, a inače se interpretira kao proizvoljan element iz $|\mathcal{B}|$.

3. za svaki operacijski simbol f (arnosti n) i svaku $n-$torku $a_0, \ldots, a_{n-1}$ iz $|\mathcal{A}|$ ako se $f\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1}$ pojavljuje u $At(H)$ onda definišemo $f^{\mathcal{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$. Za sve ostale $n-$torke elemenata iz $|\mathcal{B}|$ vrednost $f^{\mathcal{B}}$ je proizvoljna. Proizvoljno zadajemo i vrednosti svih ostalih operacijskih simbola iz H, tj. onih koji se ne javljaju u $At(H)$.

4. za svaki $n-$arni relacijski simbol P i $n-$torku $a_0, \ldots, a_{n-1}$ iz $|\mathcal{B}|$ definišemo:
   $P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \in H \Rightarrow (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^{\mathcal{B}}$,
   $\neg P\bar{a}_0 \ldots \bar{a}_{n-1} \in H \Rightarrow (a_0, \ldots, a_{n-1}) \notin P^{\mathcal{B}}$.
   Za sve ostale $n-$torke iz $|\mathcal{B}|$ vrednost $P^{\mathcal{B}}$ je proizvoljna. Proizvoljno interpretiramo i relacijske simbole iz H koji se ne pojavljuju u $At(H)$.

Lako se proverava da $\mathcal{B} \models H$. Za bazične rečenice to važi po definiciji $\mathcal{B}$. Dalje dokaz ide indukcijom po izgrađenosti rečenice ϕ. Ako na primer $\theta(t) \in H$ onda i $\theta(\bar{a}) \in H$ gde je $t^{\mathcal{A}} = a$. Po indukcijskoj pretpostavci $\mathcal{B} \models \theta(\bar{a})$. S druge strane po definiciji modela $\mathcal{B}$ imamo $t^{\mathcal{B}} = t^{\mathcal{A}} = a$ pa sledi $\mathcal{B} \models \theta(t)$. Za ostale vrste rečenica dokaz teče kao u gornjem tvrđenju.

2.1 Pojam tabloa u fundiranom sistemu

Namera nam je da tablo definišemo kao drvo u čijim su čvorovima podskupovi skupa E. Ideja da se dokaz predstavi u vidu drveta danas je standardna stvar u teoriji dokaza, najviše zahvaljujući Gentzenu. Beth je pokazao kako se semantika logičkih sistema može pretočiti u sintaksna pravila redukcije za veznike i kvantore i uveo tzv. *semantičke tabloe.* Svoj konačni oblik ovaj pristup dobija u radovima Smullyana. On je ukazao na suštinsku vezu sa Hintikkinim rezultatima i uveo pojednostavljenu i elegantnu notaciju čime je opštost i prirodnost metoda postala očigledna.

Neka je $\mathcal{F} = (\mathsf{E}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \prec, sub)$ fundiran sistem i $\kappa > card(\mathsf{E})$ regularan kardinal. Tablo će za nas biti parcijalna funkcija iz ${}^{<\kappa}\kappa$ u $\mathcal{P}\mathsf{E}$, koja se dodefiniše pri svakom koraku izvođenja. Za proizvoljan $\boldsymbol{T} \subseteq^{<k} k \times \mathcal{P}\mathsf{E}$ neka je $dom(\boldsymbol{T}) = \{\sigma \in^{<k} k \mid \sigma \text{ se pojavljuje u } \boldsymbol{T}\}$ i neka je Γ grana drveta $dom(\boldsymbol{T})$. Tada je pripadni skup $G = \bigcup\{(\boldsymbol{T}\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ *grana za* $\boldsymbol{T}$ *čiji je nosač* Γ. Kazaćemo da je element $c \in \mathsf{C} \cap G$ *aktivan* na grani G ako $sub(c, G) \setminus G \neq \emptyset$. Za $d \in \mathsf{D} \cap G$ ćemo takođe reći da je aktivan na grani G ako $sub(d, G) \cap G = \emptyset$. Zadajemo *skup tabloa* $\mathcal{T}$ *nad* $\mathcal{F}$ definišući pojam *izvođenja* u $\mathcal{F}$. *Tablo* će za nas biti svaki član nekog izvođenja.

1. Za svaki $S \subseteq \mathsf{E}$ $T_0 = \{(\emptyset, S)\} \in \mathcal{T}$ i $\{T_0\}$ je izvođenje dužine 0 u $\mathcal{F}$.
2. Neka je $\{\{T_\alpha \mid \alpha \leq \beta\} \mid \beta < \gamma\}$ niz izvođenja (dužine β) u $\mathcal{F}$. Razlikujemo dva slučaja.
   (a) $\gamma = \beta + 1$ za neki ordinal β. Neka je G grana tabloa T_β i njen nosač Γ.
      i. Neki $c \in \mathsf{C} \cap G$ je aktivan na grani G i $\emptyset \neq E \subseteq sub(c, G) \setminus G$. Definišemo

$$T_\gamma(\sigma) = \begin{cases} T_\beta(\sigma) \cup E, & \text{ako } \sigma = \cup\Gamma \in dom(T_\beta) \\ E, & \text{ako } \sigma = \cup\Gamma \notin dom(T_\beta) \\ T_\beta(\sigma), & \text{inače (tj. ako } \sigma \neq \cup\Gamma.) \end{cases}$$

ii. Neka je $d \in \mathsf{D}$ aktivan na grani G i $sub(d,G) = \{e_i \mid i < \delta\}$ [3]. Definišemo
$T_\gamma = T_\beta \cup \{(\cup\Gamma^\frown i, \{e_i\}) \mid i < \delta\}$.

(b) γ je granični ordinal. Definišemo
$T_\gamma = \{(\sigma, S) \mid \sigma \in \bigcup_{\beta<\gamma} dom(T_\beta) \text{ i } S = \bigcup\{S' \mid (\sigma, S') \in \bigcup_{\beta<\gamma} T_\beta\}$.

Tada je niz $\{T_\beta \mid \beta \leq \gamma\}$ takođe izvođenje (dužine γ) i $T_\gamma \in \mathcal{T}$.

Drugi pristup pojmu izvođenja i tabloa je preko induktivne definicije. Neka je operator $\Delta : \mathcal{P}\mathcal{P}({}^{<k}k \times \mathcal{P}\mathsf{E}) \to \mathcal{P}\mathcal{P}({}^{<k}k \times \mathcal{P}\mathsf{E})$ zadat na sledeći način.

$$\begin{aligned}\Delta(\mathcal{S}) \;=\; & \{\{(\emptyset, E)\} \mid E \subseteq \mathsf{E}\} \cup \{T_\gamma \mid \text{za neku familiju } \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ i bijekciju } T{:}\,\gamma \to \mathcal{S}' \\ & \{\{T_\alpha \mid \alpha \leq \beta\} \mid \beta < \gamma\} \text{ je niz izvođenja i } T_\gamma \text{ se dobija po pravilu 2a ili 2b}\}\end{aligned}$$

Pošto je operator Δ očigledno monoton, tj. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \Rightarrow \Delta(\mathcal{S}) \subseteq \Delta(\mathcal{S}')$, onda on ima najmanju fiksnu tačku I_Δ. Znači da $\Delta(I_\Delta) = I_\Delta$ i postoji ordinal δ kardinalnosti $\leq card\mathcal{P}({}^{<\kappa}\kappa \times \mathcal{P}\mathsf{E})$ takav da $I_\Delta = \bigcup_{\beta<\delta} I_\Delta^\beta$ gde $I_\Delta^\beta \stackrel{def}{=} \Delta(\bigcup_{\alpha<\beta} I_\Delta^\alpha)$. Ako sa $\mathcal{T}^\beta$ označimo skup svih tabloa čije je izvođenje dužine $\leq \beta$ onda $\mathcal{T}^\beta \subset I_\Delta^\beta$. Dokaz teče indukcijom po β koristeći činjenicu da ako je niz $\{T_\alpha \mid \alpha \leq \beta\}$ izvođenje onda po definiciji Δ $T_\beta \in \Delta(\{T_\alpha \mid \alpha < \beta\})$ Pošto $\mathcal{T} = \bigcup_\beta \mathcal{T}^\beta$ sledi da $\mathcal{T} \subseteq I_\Delta$. Sa druge strane ako $T \in I_\Delta$ onda $T \in \Delta(I_\Delta)$ pa po definiciji Δ postoji izvođenje za T tj. $T \in \mathcal{T}$, dakle $\mathcal{T} = I_\Delta$.

Uvešćemo još neke pojmove koje ćemo stalno koristiti. Grana tabloa je *završena* ako na njoj nema aktivnih elemenata ili, što je isto, ako je nadole zasićena, a tablo je završen ako su mu sve grane završene. Fiksirajmo familiju $Cl \subset \mathcal{P}\mathsf{E}$. Kazaćemo da je skup $S \subset \mathsf{E}$ *zatvoren* ako $F \subset S$ za neki $F \in Cl$. Za tablo ćemo reći da je zatvoren ako su sve njegove grane zatvorene. *Dokaz* će za nas biti izvođenje čiji je krajnji član zatvoren. Ako je njegov prvi član $\{(\emptyset, S)\}$ možemo ga zvati dokazom za S. Završenu granu koja nije zatvorena zvaćemo *otvorena*. Nazovimo tablo $\boldsymbol{T}$*fundiranim* ako su sve grane drveta $dom(\boldsymbol{T})$ konačne. Za dokaze važi

[3] $i \mapsto e_i$ je bijekcija $\delta = card(sub(d,G))$ i $sub(d,G)$.

Lema 2 *Ako postoji zatvoren tablo* $\boldsymbol{T}$*za* S *onda postoji tablo za* S *(takođe zatvoren) čija svaka grana ima sledeće svojstvo: ako je* $F \in Cl$ *podskup te grane onda na njoj nema čvora* τ *takvog da* $\tau \supset \sigma$ *za svaki* (σ, S) *sa grane takav da* $F \cap S \neq \emptyset$.

Dokaz. Ako je sam skup S zatvoren onda je $\{(\emptyset, S)\}$ traženi tablo. Ako ne, uočimo proizvoljan $e \in F \setminus S$ koji leži u čvoru $\sigma \neq \emptyset$. Po definiciji tabloa to znači da postoji e' u nekom čvoru $\sigma' \subseteq \sigma$ takav da $e \in sub(e', G')$ gde $G' \subseteq \bigcup\{S \subseteq G \mid (\sigma', S) \in \boldsymbol{T}$ i $\sigma' \subseteq \sigma\}$. Drugim rečima pri ubacivanju e u G koristi se samo informacija o čvorovima $\subseteq \sigma$. Ovo nas upućuje da dato izvođenje preinačimo u novo na sledeći način. Ponovimo sve korake izostavljajući pritom one korake koji se odnose na čvorove koji produžuju sve čvorove u kojima se javljaju elementi iz F. Lako se proverava da je ovo i dalje izvođenje i da ćemo dobiti $F \subseteq G$ kao i da tako dobijen tablo ima traženo svojstvo. U specijalnom slučaju kada se na svakoj grani polaznog tabloa svi elementi njoj pripadnog F nalaze u čvorovima $\subseteq \sigma$ za neki čvor σ *konačne* dužine onda na ovaj način dobijamo fundiran tablo $\boldsymbol{T}$' tj. takav da je $dom(\boldsymbol{T}')$ fudirano drvo.

2.1.1 Primeri

Pojam tabloa i dokaza detaljnije ćemo razjasniti na primeru logike $L_{\omega_1\omega}$. Da bismo zadali fundiran sistem proširimo dati jezik L skupom C od ω_1 novih konstanti. Par oblika $T\phi$ i $F\phi$ gde je ϕ rečenica logike $L_{\omega_1\omega}$ na proširenom jeziku L_C zvaćemo *označena rečenica* a simboli T i F su *prefiksi*. Nosač E našeg fundiranog sistema sačinjavaju upravo sve označene rečenice. Ovo je prilika da istaknemo da upotreba prefiksa i "mešanje" semantike i sintakse koje je inaugurisao Smullyan predstavlja prirodan i elegantan *opšti* način da se *semantička* svojstva logičkih veznika, kvantora i modalnosti pretoče u *sintaksna* pravila redukcije za izgradnju tabloa. Zato ćemo prefikse stalno koristiti premda u klasičnoj logici nisu neophodni: ako umesto $T\phi$ stavimo ϕ a umesto $F\phi$ stavimo $\neg\phi$ dobićemo praktično istu teoriju kao onu koju ćemo sada izložiti. Skup B bazičnih elemenata sastoji se od rečenica oblika $T\theta, F\theta$ gde je θ atomska rečenica. Skup C čine označene rečenice oblika $T\neg\phi, F\neg\phi, F\phi \to \psi, T\bigwedge\Phi, F\bigvee\Phi, T\mathsf{Q}x\phi$ i $F\mathsf{Q}x\phi$ (Q je $\forall$ ili $\exists$), a skup D rečenice oblika $T\bigvee\Phi, F\bigwedge\Phi$ i $T\phi \to \psi$. Pošto ćemo u izvođenjima imati posla isključivo s prebrojivim skupovima, u definiciji funkcije sub koja sledi E je proizvoljan prebrojiv skup označenih rečenica dok je za ostale podskupove od E vrednost sub proizvoljna. Osim toga neka je $Term(E) = \{t \mid t$ je zatvoreni term jezika L_C i pojavljuje se u (nekoj rečenici iz) $\mathsf{E}\}$, a $C(E) = Term(E) \cap C$.

$$\begin{aligned}
sub(T\neg\phi, E) &= \{F\phi\} \\
sub(F\neg\phi, E) &= \{T\phi\} \\
sub(T\phi \to \psi, E) &= \{F\phi, T\psi\} \\
sub(F\phi \to \psi, E) &= \{T\phi, F\psi\} \\
sub(T\bigwedge\Phi, E) &= \{T\phi \mid \phi \in \Phi\} \\
sub(F\bigwedge\Phi, E) &= \{F\phi \mid \phi \in \Phi\} \\
sub(T\bigvee\Phi, E) &= \{T\phi \mid \phi \in \Phi\} \\
sub(F\bigvee\Phi, E) &= \{F\phi \mid \phi \in \Phi\} \\
sub(T\exists x\phi, E) &= \{T\phi_x(c)\} \\
sub(F\forall x\phi, E) &= \{F\phi_x(c)\} \\
sub(T\forall x\phi, E) &= \begin{cases} \{T\phi_x(t) \mid t \in Term(E \cap \mathsf{B})\}, \text{ ako } Term(E) \neq \emptyset \\ \{T\phi_x(c)\}, \text{ za proizvoljan } c \in C \text{ ako } Term(E) = \emptyset \end{cases} \\
sub(F\exists x\phi, E) &= \begin{cases} \{F\phi_x(t) \mid t \in Term(E \cap \mathsf{B})\}, \text{ ako } Term(E) \neq \emptyset \\ \{F\phi_x(c)\}, \text{ za proizvoljan } c \in C \text{ ako } Term(E) = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

U slučaju $sub(T\exists\ldots)$ $(F\forall\ldots)$ c je proizvoljan term takav da $T\phi_x(c) \in E$ $(F\phi_x(c) \in E)$. Ako takvog terma nema onda $c \in C \setminus C(E \cup \{T\exists x\phi\}$ $(c \in C \setminus C(E \cup \{F\forall x\phi\})$. U primerima koji slede P je binarni predikatski simbol jezika L, ϕ i ψ su proizvoljne rečenice tog jezika.

Primer 1 Izvođenje dužine ω :

$$\begin{aligned}
T_0 &= \{(\emptyset, \{T\forall x\exists yPxy\})\} \\
T_1 &= \{(\emptyset, \{T\forall x\exists yPxy, T\exists yPc_0y\})\} \\
T_2 &= \{(\emptyset, \{T\forall x\exists yPxy, T\exists yPc_0y, TPc_0c_1\})\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
T_{2k+1} &= \{(\emptyset, \{T\forall x \exists y Pxy, T\exists y Pc_0y, TPc_0c_1, \ldots, T\exists y Pc_ky\})\} \\
T_{2k+2} &= \{(\emptyset, \{T\forall x \exists y Pxy, T\exists y Pc_0y, TPc_0c_1, \ldots, T\exists y Pc_ky, TPc_kc_{k+1}\})\} \\
&\vdots \\
T_\omega &= \{(\emptyset, \{T\forall x \exists y Pxy, T\exists y Pc_0y, TPc_0c_1, \ldots, T\exists y Pc_ky, TPc_kc_{k+1}, \ldots\})\}
\end{aligned}$$

T_{2k+1} dobija se iz T_{2k} prema $sub(T\forall\ldots)$, a T_{2k+2} iz T_{2k+1} prema $sub(T\exists\ldots)$. Vidimo da svi tabloi imaju samo jedan čvor i da je T_ω *završen.*

Pogledajmo još kako u ovom kontekstu izgleda zatvoren tablo, tj. navedimo primer dokaza u $L_{\omega_1\omega}$. Zadajmo $Cl = \{\{T\varphi, F\varphi\} \mid \varphi$ je rečenica jezika $L_C\}$.

Primer 2

$$\begin{aligned}
T_0 &= \{(\emptyset, \{F \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i\})\} \\
T_1 &= \{(\emptyset, \{F \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i), \;\; T \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i), \;\; F\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i\})\} \\
T_2 &= \{(\emptyset, \{F \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i), \;\; T \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i), \;\; F\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
&\quad T\phi, \;\; F \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i\})\} \\
T_3 &= \{(\emptyset, \{F \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i), \;\; T \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i), \;\; F\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
&\quad T\phi, \;\; F \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \;\; T\phi \to \psi_0, \; T\phi \to \psi_1, \ldots, T\phi \to \psi_i, \ldots\})\} \\
T_4 &= \{(\emptyset, \{F \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i), \;\; T \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i), \;\; F\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
&\quad T\phi, \;\; F \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \;\; T\phi \to \psi_0, \; T\phi \to \psi_1, \ldots, T\phi \to \psi_i, \ldots\}), \\
&\quad (0, \{F\psi_0\}), (1, \{F\psi_1\}), \ldots, (i, \{F\psi_i\}), \ldots\} \\
T_5 &= \{(\emptyset, \{F \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i), \;\; T \textstyle\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i), \;\; F\phi \to \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
&\quad T\phi, \;\; F \textstyle\bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \;\; T\phi \to \psi_0, \; T\phi \to \psi_1, \ldots, T\phi \to \psi_i, \ldots\}), \\
&\quad (0, \{F\psi_0\}), (1, \{F\psi_1\}), \ldots, (i, \{F\psi_i\}), \ldots, \\
&\quad (00, \{F\phi\}), (01, \{T\psi_0\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{i+5} \;=\;& \{(\emptyset, \{F \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i),\;\; T \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i),\;\; F\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
& T\phi,\;\; F \bigwedge_{i<\omega} \psi_i,\;\; T\phi \to \psi_0,\; T\phi \to \psi_1, \ldots, T\phi \to \psi_i, \ldots\}), \\
& (0, \{F\psi_0\}), (1, \{F\psi_1\}), \ldots, (i, \{F\psi_i\}), \ldots, \\
& (00, \{F\phi\}), (01, \{T\psi_0\}), (10, \{F\phi\}), (11, \{T\psi_1\}), \ldots, (i0, \{F\phi\}), (i1, \{T\psi_i\}) \\
\vdots \\
T_\omega \;=\;& \{(\emptyset, \{F \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i),\;\; T \bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i),\;\; F\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i, \\
& T\phi,\;\; F \bigwedge_{i<\omega} \psi_i,\;\; T\phi \to \psi_0,\; T\phi \to \psi_1, \ldots, T\phi \to \psi_i, \ldots\}), \\
& (0, \{F\psi_0\}), (1, \{F\psi_1\}), \ldots, (i, \{F\psi_i\}), \ldots, \\
& (00, \{F\phi\}), (01, \{T\psi_0\}), (10, \{F\phi\}), (11, \{T\psi_1\}), \ldots, (i0, \{F\phi\}), (i1, \{T\psi_i\},
\end{aligned}
$$

Kao što se vidi T_1, T_2 i T_3 dobijaju se prema $sub(F\phi \to \psi, E)$, a T_4 po $sub(F \bigwedge \ldots)$, dok se T_{i+5} dobija račvanjem grane (čiji je krajnji čvor) i i to primenom $sub(T\phi \to \psi_i, \ldots)$. Tada $T\phi$ (iz $\emptyset$) i $F\phi$ (iz $i0$) zatvaraju granu čiji je krajnji čvor $i0$, a $F\psi_i$ iz i zajedno sa $T\psi_i$ iz $i1$ zatvara granu čiji je kraj $i1$. Sledi da su sve grane tabloa T_ω zatvorene, tj. dobili smo *dokaz* rečenice $\bigwedge_{i<\omega}(\phi \to \psi_i) \to (\phi \to \bigwedge_{i<\omega} \psi_i)$.

U narednim poglavljima nikad nećemo izlagati tabloe držeći se striktno definicije. Posebno nećemo nikad eksplicitno navoditi drvo koje je nosač tj. domen tabloa, ali će, kada tablo prikažemo u vidu drveta ipak biti jasno kako bismo ako nam je neophodno, strogo zadali taj tablo. Tako na primer pravila izvođenja $L_{\omega_1\omega}$ logike prikazaćemo na sledeći način.

$$
(T\neg) \quad \begin{array}{c} \pi T\neg\phi \\ | \\ \pi F\phi \end{array} \qquad\qquad (F\neg) \quad \begin{array}{c} \pi F\neg\phi \\ | \\ \pi T\phi \end{array}
$$

$$
(T\bigwedge) \quad \begin{array}{c} T\bigwedge_{i<\omega}\phi_i \\ | \\ T\phi_0 \\ T\phi_1 \\ \vdots \end{array} \qquad\qquad (F\bigwedge) \quad \begin{array}{c} F\bigwedge_{i<\omega}\phi_i \\ | \\ F\phi_0 \quad F\phi_1 \quad \ldots \end{array}
$$

$$(T\bigvee)\qquad \begin{array}{c} T\bigvee_{i<\omega}\phi_i \\ | \\ T\phi_0 \quad T\phi_1 \quad \ldots \end{array} \qquad\qquad (F\bigvee)\qquad \begin{array}{c} F\bigvee_{i<\omega}\phi_i \\ | \\ F\phi_0 \\ F\phi_1 \\ \vdots \end{array}$$

$$(T\rightarrow)\qquad \begin{array}{c} T\phi\rightarrow\psi \\ \\ F\phi \qquad T\psi \end{array} \qquad\qquad (F\rightarrow)\qquad \begin{array}{c} F\phi\rightarrow\psi \\ | \\ T\phi \\ F\psi \end{array}$$

$$(T\exists)\qquad \begin{array}{c} T\exists x\phi \\ | \\ T\phi_x(c) \end{array} \qquad\qquad (F\exists)\qquad \begin{array}{c} F\exists x\phi \\ | \\ F\phi_x(t) \end{array}$$

$$(T\forall)\qquad \begin{array}{c} T\forall x\phi \\ | \\ T\phi_x(t) \end{array} \qquad\qquad (F\forall)\qquad \begin{array}{c} F\forall x\phi \\ | \\ F\phi_x(c) \end{array}$$

Konstanta c i term t biraju se kao što je opisano u definiciji funkcije sub za $T\exists, F\exists, T\forall$ i $F\forall$.

Sledeći primer je iz modalne logike. Kao što je poznato tabloi za njih zasnivaju se na Kripkeovoj semantici mogućih svetova. Zato se za prefikse uzimaju uređene dvojke oblika πT ili πF gde je π konačan niz prirodnih brojeva ([7], glava 8). Intuitivno $\pi T\phi$ znači da formula ϕ važi u svetu π, a $\pi F\phi$ da ne važi. Skup svih modalnih formula s ovakvim prefiksima je nosač fundiranog sistema. Podela na konjunktivne i disjunktivne elemente je uobičajena kad je reč o $\neg, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$, jer se oni u svakom svetu ponašaju klasično. Tako na primer u skup C spadaju $\pi T\phi\wedge\psi$, $\pi F\phi\rightarrow\psi$ itd., a u D $\pi T\phi\vee\psi$, $\pi T\phi\rightarrow\psi$ itd. Formule koje počinju modalnim operatorom po analogiji s kvantorima sve su konjunktivne bez obzira na prefiks. Za klasične veznike imamo i očekivanu definiciju: $sub(\pi T\phi\wedge\psi, E) = sub(\pi T\phi\vee\psi, E) = \{\pi T\phi, \pi T\psi\}$, $sub(\pi T\phi\rightarrow$

$\psi, E) = \{\pi F\phi, \pi T\psi\}$, $sub(\pi F\phi \rightarrow \psi, E) = \{\pi T\phi, \pi F\psi\}$ i sl. Uporedo sa izgradnjom tabloa na svakoj grani G izrasta i Kripkeova struktura u vidu drveta: $K = (\Pi(G), \subseteq)$. To je potencijalni kontramodel za polaznu formulu ϕ (ukoliko smo počeli da gradimo tablo za $\{(\emptyset, \{\emptyset F\phi\})\}$).

Primer 3 je modalni račun S4. On je okarakterisan Kripkeovom semantikom kod koje je relacija refleksivno i tranzitivno drvo i zato se među nizovima posmatra relacija $\subseteq$. Da bismo definisali funkciju sub za modalne operatore, označićemo s $\Pi(E)$ skup svih prefiksa π za koje postoji prefiks $\rho \supseteq \pi$ koji se pojavljuje u formulama iz datog skupa E.

$$\begin{aligned}
sub(\pi T\Box\phi, E) &= \{\pi T\phi\} \cup \{\rho T\phi \mid \pi \subseteq \rho \subseteq \sigma \text{ za neki } \sigma \in \Pi(E \cap \mathsf{B})\} \\
sub(\pi F\Diamond\phi, E) &= \{\pi F\phi\} \cup \{\rho F\phi \mid \pi \subseteq \rho \subseteq \sigma \text{ za neki } \sigma \in \Pi(E \cap \mathsf{B})\} \\
sub(\pi T\Diamond\phi, E) &= \{\pi' T\phi\} \\
sub(\pi F\Box\phi, E) &= \{\pi' F\phi\}
\end{aligned}$$

Ovde je $\pi' \supseteq \pi$ proizvoljan prefiks iz $\Pi(E)$ takav da $\pi' T\phi \in E$ ako posmatramo $sub(\pi T\Diamond\phi, E)$, odnosno $\pi' F\phi$ u slučaju $sub(F\Box\phi, E)$. Ako takvog prefiksa nema onda π' označava prvi prefiks (u leksikografskom poretku) takav da $\{\rho \in Seq \mid \rho \supseteq \pi'\} \cap \Pi(E) = \emptyset$. Ukoliko ni takvog prefiksa nema, vrednost sub je proizvoljna. Ideja je naravno da se (analogno slučaju egzistencijalnog kvantora) po potrebi izabere prefiks koji je nov u odnosu na E.

Primer 4 Intuicionistički iskazni račun ima istu Kripkeovu semantiku kao S4, ali zaslužuje posebno razmatranje jer se veznici $\neg$ i $\rightarrow$ drukčije interpretiraju ($\vee$ i $\wedge$ su isti kao u S4). Tako za negaciju imamo

$$\begin{aligned}
sub(\pi T\neg\phi, E) &= \{\pi F\phi\} \cup \{\rho F\phi \mid \rho \in \Pi(E)\} \\
sub(\pi F\neg\phi, E) &= \{\pi' T\phi\} \\
sub(\pi F\phi \rightarrow \psi, E) &= \{\pi' T\phi, \pi' F\psi\}
\end{aligned}$$

Po analogiji za $F\Diamond$ ovde je $\pi' \supseteq \pi$ proizvoljan prefiks takav da $\pi' T\phi \in E$ (i $\pi' T\phi$ i $\pi' F\psi$ su u E u slučaju $\pi F \rightarrow$) ili je nov za E u istom smislu kao u prethodnom primeru. Tačnu implikaciju ćemo "razložiti" (koristeći u suštini opet ideju Smullyana) pomoću lokalno važeće klasične implikacije $\xrightarrow{c}$ koju definišemo sa $sub(\pi T\phi \xrightarrow{c} \psi, E) = \{F\phi, T\psi\}$ i smatramo disjunktivnom (primetimo da se $\xrightarrow{c}$ javlja samo s prefiksom T). Zadajemo $sub(\pi T\phi \rightarrow \psi, E) = \{\pi T\phi \xrightarrow{c} \psi\} \cup \{\rho T\phi \xrightarrow{c} \psi \mid \rho \in \Pi(E)\}$. Zaključak je da i implikaciju i negaciju smatramo konjunktivnim bez obzira na prefiks. *Važno je pomenuti da je uslov zatvaranja za ove tablo~~a~~e da se na grani nađe iskazno slovo p takvo da su $\pi_0 Tp$ i $\pi_1 Fp$ na grani s tim da $\pi_0 \subseteq \pi_1$. Ovo nam služi da uz pomenuta tablo pravila dodamo i sledeći* princip permanencije*: ako je πTp na grani i $\pi_1 \supseteq \pi$ se takodje javlja na toj grani onda je možemo produžiti formulom $\pi_1 Tp$.*

Glava 3

Tabloi za neklasične logike

U ovom poglavlju razmotrićemo razne poznate neklasične logičke sisteme u svetlu metoda tabloa. U skladu s opštom idejom prevođenja semantike u sintaksu osnovni objekti koje razmatramo biće tzv. *označene formule* ili *formule s prefiksima,* a to su trojke oblika $\pi T\phi$ ($\pi F\phi$), gde je ϕ formula odgovarajućeg iskaznog računa. Prefikse označavamo sa $\pi, \pi_0, \pi_1, \ldots$ i intuitivno tumačimo kao moguće svetove u odgovarajućem Kripkeovom modelu. Namera nam je da to budu prirodni brojevi, odnosno njihovi (konačni) skupovi i nizovi i da zadajući pravila za iskazne veznike i/ili modalne operatore definišemo relaciju među prefiksima određujući na taj način izvestan Kripkeov model s tim da je $p \Vdash \phi$ ($p \nVdash \phi$) indukovano postojanjem $pT\phi$ ($pF\phi$) u tablou.

Razmotrimo za početak logiku KC koja se iz intuicionističke dobija dodavanjem aksiome $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$. Poznato je da je njena karakteristična semantika opisana svojstvom $\forall xy \exists z(xRz \wedge yRz)$. Da bismo to izrazili pomoću tablo pravila treba nam širi pojam prefiksa. Zato dodefinišemo: ako su π_0 i π_1 prefiksi, onda je i $\pi_0 \cup \pi_1$ prefiks [1]. Pravila redukcije su potpuno ista kao za intuicionističku logiku uz prirodan uslov da skup prefiksa koji se pojavljuju na grani bude zatvoren za uniju. Isti ostaje i iskaz Hintikkine leme.

Lema 3.0.1 *Ako je* Γ završena otvorena *grana, onda se ona realizuje u nekom Kripkeovom modelu* (W, R), *u kome relacija* R *ima svojstvo* $\forall xy \exists z(xRz \wedge yRz)$.

[1] Prefiksi su ovde shvaćeni kao skupovi uređenih parova

Dokaz teče isto kao u slučaju intuicionističke logike. Kripkeova struktura se očitava sa grane: $W = \{\pi \mid \pi$ se pojavljuje na grani$\}$, R je relacija $\subseteq$ među prefiksima, a zatvorenost za uniju obezbeđuje važenje karakterističnog svojstva.

Pogleđajmo primer dokaza formule $(p \to \neg q) \to (\neg p \vee \neg q)$ u logici S4.2.

$$
\begin{array}{rl}
\emptyset\ F & (p \to \neg q) \to (\neg p \vee \neg q) \\
0\ T & p \to \neg q \\
0\ F & \neg p \vee \neg q \\
0\ F & \neg p \\
0\ F & \neg q \\
00\ T & p \\
01\ T & q \\
00 \cup 01\ T & p \\
01 \cup 01\ T & q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
00 \cup 01 F p & \qquad & 00 \cup 01 T \neg q \\
\times & & 00 \cup 01 F q \\
 & & \times
\end{array}
$$

Postoji međutim mogućnost izmene i u samom pojmu modela. Lako je naime videti da važi: ako $w \Vdash \neg\phi$ za neki w onda za *svaki* w, $w \Vdash \neg\phi$. Uzmimo ovo svojstvo u definiciju modela. Kombinujući ga sa uslovom za važenje negacije, dobijamo uslov kojim se definiše klasa modela koju ćemo posmatrati: $\exists w_0 \forall w_1 (w_0 R w_1 \Rightarrow w_1 \not\Vdash p) \Rightarrow (\forall w\, w \not\Vdash p)$, odnosno u "pozitivnom" vidu,

$$(\mathrm{KC}') \quad ako \ \ \exists w_0\, w_0 \Vdash p \ \ onda \ \ \forall w \exists w' (wRw' \ \&\ w' \Vdash p). \tag{3.1}$$

Indukcijom po složenosti formule dokazuje se da ako ovo svojstvo imaju iskazna slova onda imaju i *sve* formule. Ovaj uslov reflektuje se u sledećem pravilu izvođenja:

$$(\mathsf{kc}') \quad \frac{\pi_i T \phi}{\pi_j^i T \phi} \tag{3.2}$$

Ovde su π_i i π_j proizvoljni prefiksi, a prilikom prve primene pravila na par (π_i, π_j) definiše se $\pi_j^i = \pi_j'$ [2] i pri ponovljenoj primeni pravila na ovaj par prefiksa koristimo

[2]Podsetimo se da smo sa π' označavali prvi *novi* naslednik niza π u leksikografskom poretku, tj. biramo najmanji k takav da se prefiks $\pi^\frown k$ *ne pojavljuje na posmatranoj grani.*

taj π_j^i. Preduslov za primenu pravila je da se na grani ne nalazi $\pi_k T\phi$ ni za jedan $\pi_k \supseteq \pi_j$.

Dopunimo intuicionistička tablo pravila sa (kc') i dokažimo potpunost ali u odnosu na klasu modela $(K, R, \Vdash')$, gde je R refleksivna i tranzitivna relacija, a $\Vdash'$ ista kao $\Vdash$ osim što je klauzula za negaciju smenjena sa (1.1). Drugim rečima dodatni uslov za R zamenjen je novim uslovom za $\Vdash$. Primetimo da je zadovoljen uslov: ako je $\Vdash'$ zadat za iskazna slova on je onda jedinstveno određen za sve formule.

Pošto je korektnost pravila očigledna pokažimo da važi Hintikkina lema.

Lema 3.0.2 *Za svaku završenu otvorenu granu postoji model* $(W, R, \Vdash')$ *koji realizuje svaku formulu sa grane.*

Dokaz. Kripkeovu strukturu definišemo kao i dosad: $K = (\{\pi \mid \pi \text{ se pojavljuje na grani}\}, \subseteq)$ i $\pi \Vdash' p$ akko se $\pi T p$ pojavljuje na grani. Najpre primetimo da model spada u željenu klasu. Ako $\pi_0 \Vdash p$ onda je po definiciji $\pi_0 Tp$ na grani. Tada međutim, pošto je grana *završena, za svaki* π_1 sa grane postoji na toj grani formula $\pi_2 Tp$ za neki $\pi_2 \supseteq \pi_1$: to je svakako istina ako nije ispunjen preduslov za primenu pravila (kc'), a u suprotnom važi jer je primenjeno to pravilo. U oba slučaja dobijamo da za svaki π_1 postoji $\pi_2 \supseteq \pi_1$ takav da $\pi_2 \Vdash p$. Sam dokaz da je grana realizovana u ovom modelu teče kao i obično indukcijom po složenosti formula sa grane, ali pošto je jedina razlika u odnosu na intuicionističku logiku vezana za negaciju, razmotrićemo samo taj slučaj. Pretpostavimo da je na grani formula oblika $\pi_0 T\neg\phi$. Pošto je grana završena, za svaki $\pi \supseteq \pi_0$ sa grane je $\pi F\phi$ takođe na grani. Po indukcijskoj pretpostavci to znači da $\pi \not\Vdash \phi$ za svaki takav $\pi \supseteq \pi_0$ što (po definiciji modela) implicira $\pi_1 \not\Vdash \phi$ *za svaki* π_1 sa grane. Po definiciji važenja negacije to znači da $\pi_0 \Vdash \neg\phi$.

Ostaje još da nađemo vezu između KC i KC' tabloa. Pri transformaciji KC' tabloa delove u kojima se primenjuje pravilo (kc') smenjujemo sličnim, ali sagrađenim u skladu sa KC pravilima, definišući pritom i korespondenciju prefiksa u ova dva tabloa. Tako u slučaju primene (1.1) izmena izgleda ovako: neka su prefiksima π_i i π_j dodeljeni π_i° odnosno π_j°. Tada pravimo sledeći korak u izgradnji KC tabloa: iz $\pi_i^\circ T\phi$ izvodimo $\pi_i^\circ \cup \pi_j^\circ T\phi$. Ako je u pitanju prva primena (kc') na par π_i, π_j onda stavljamo $(\pi_i^j)^\circ = \pi_i^\circ \cup \pi_j^\circ$, a inače nema izmena. Ako je π' uveden pomoću (F$\rightarrow$) ili (F$\neg$) onda definišemo $(\pi')^\circ_? = (\pi^\circ)'$ i ako je, na primer, posmatrani čvor u KC' tablou $\pi F\phi \to \theta$ (a grana produžena sa $\pi' T\phi, \pi' F\theta$) onda odgovarajuću granu KC tabloa produžujemo sa $\pi^{\circ\prime} T\phi$, $\pi^{\circ\prime} F\theta$. Prilikom primene ostalih pravila nema dodefinisanja. Na početku zadajemo $\emptyset^\circ = \emptyset$. Vidimo da važi: ako $\pi_i \subseteq \pi_j$ onda $\pi_i^\circ \subseteq \pi_j^\circ$ i ako je u čvoru KC' tabloa $\pi T\phi$ $(\pi F\phi)$, onda je u odgovarajućem čvoru KC tabloa formula $\pi^\circ T\phi$ $(\pi^\circ F\phi)$. Ovo kao neposrednu posledicu ima to da se svaki KC' dokaz prevodi u KC dokaz.

Važi i obrat s tim što se veza među prefiksima uspostavlja prevodom * na sledeći način. Ako smo (po pravilu permanencije) granu na kojoj je $\pi_i T\phi$ produžili sa $\pi_i \cup \pi_j T\phi$ i ako je to prva primena ovog pravila na par (π_i, π_j), onda po pravilu (kc') produžavamo odgovarajuću granu KC' tabloa sa $\pi_j^{*\prime} T\phi$, jer se po pretpostavci na grani nalazi $\pi_i^* T\phi$. U tom slučaju definišemo $(\pi_i \cup \pi_j)^* = \pi_j^{*\prime}$. Formule tipa $\pi F\phi \to \theta$ i $\pi F\neg\phi$ prevode se kao u prethodnom slučaju. Slično kao za $^\circ$, za * važi: ako je u nekom čvoru KC tabloa formula $\pi T\phi$ $(\pi F\phi)$ onda je u odgovarajućem čvoru KC' tabloa formula $\pi^* T\phi$ $(\pi^* F\phi)$. To znači da se KC dokaz prevodi u KC' dokaz. Sve ovo zajedno ima kao posledicu potunost opisane semantike. Važi dakle

Teorema 1 (teorema potpunosti) $\vdash_{\mathsf{KC}} \varphi$ *akko je* φ *tautologija* KC' *semantike.*

Navedeni pojam modela u nešto izmenjenom obliku teoreme potpunosti nalazi se kod Esakije Srodan modalni sistem koji ćemo takođe razmatrati je S4.2. Njegova karakteristična semantika zadata je relacijom R koja je refleksivna, tranzitivna i *konvergentna* tj. zadovoljava uslov $\forall xyz(xRy \wedge xRz \Rightarrow \exists u(yRu \wedge zRu))$. Kao što je poznato, međutim, za svaki takav model $(W, R, \Vdash)$ i svet $w_0 \in W$ u kome važi zadata formula ϕ, može se konstruisati podmodel u kome takođe važi ta ista formula, ali koji zadovoljava jače svojstvo konvergencije, isto ono koje karakteriše KC. Dosta je uzeti model $(W'R', \Vdash')$ gde $W' = \{w \in W \mid w_0 R w\}$, a R' i $\Vdash'$ su odgovarajuće restrikcije R i $\Vdash$ na W'. Ovo nas navodi da u definisanju tabloa za ovaj sistem prihvatimo potpuno isti pojam prefiksa kao za KC i ista pravila kao za S4. Sve ostaje isto i kad je reč o Hintikkinoj lemi. Možemo stoga pokušati da iskoristimo istu ideju kao prethodno kombinujući je sa uobičajenim modalnim tumačenjem intuicionističkih veznika. Posmatramo dakle familiju (refleksivnih i tranzitivnih) modela koja zadovoljava

$$\exists w_0 \forall w_1 (w_0 R w_1 \to w_1 \Vdash p) \to \forall w \exists w' (w R w' \wedge \forall w'' (w' R w'' \to w'' \Vdash p)).$$

Definicija važenja se ne menja, a ispunjeno je svojstvo:
ako za neki w_0 $w_0 \Vdash \Box\neg\Box\phi$ *onda za svaki* w $w \Vdash \Box\neg\Box\phi$.

Razmotrimo još jedno raširenje intuicionističke logike. To je račun LC koji se dobija dodavanjem aksiome $\varphi \to \psi \vee \psi \to \varphi$.

Dummet je pokazao da struktura $G = ((\omega+1)^*, \{0\}, max, min, \to, 0, \omega)$, gde je $(\omega+1)^*$ poznati tip linearnog uređenja zadat sa $x <_G y$ akko $y \in x$ (i u kome je onda 0 najveći a ω najmanji element), 0 je jedini istaknuti element,

$$x \to y = \begin{cases} 0, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$$

predstavlja *karakterističnu matricu* za LC ako se iskazne operacije tumače na uobičajen način: $\vee^G = max$, $\wedge^G = min$, $\to^G = \to$, $\top^G = 0$, $\bot^G = \omega$. Pravi prosti filtri ove algebre su upravo $\{\ldots, n+1, n, \ldots, 1, 0\} (= \omega)$ i za svaki $n \in \omega$ $\{n, \ldots, 1, 0\}$. Očigledno je da su to pravi prosti filtri, a da su i jedini vidi se razmatranjem dva slučaja. Ako je filter F konačan on ima najmanji element n (u smislu $<_G$). No tada su svi $m \geq_G n$ takođe u F tj. $F = \{n, n-1, \ldots, 1, 0\}$. Ako je F pravi prost beskonačan filter, on onda ne sadrži ω pa je $F \subseteq \omega$. Pošto je F beskonačan, za svaki $n \in \omega$ postoji $k \in F$ takav da $k <_G n$. Sledi da je onda $n \in F$, tj. $F = \omega$. Označimo ovaj skup filtara sa $\mathcal{F}$. Kao što je poznato (vidi Fitting ...) $\mathcal{F}$ uređen inkluzijom čini Kripkeov model u kome je važenje indukovano (determinisano) $G-$valuacijom $v : F \Vdash p$ akko $v(p) \in F$. Tada važi: $v(\varphi) = 0$ akko za svaki $F \in \mathcal{F}$ $F \Vdash \varphi$. Koristeći ovo odmah vidimo da je $(\omega+1, \leq)$ *karakteristična Kripkeova struktura* za LC. Ako naime $\vdash_{LC} \varphi$ onda ona važi u svim Kripkeovim strukturama u kojima je relacija refleksivna, tranzitivna i povezana, pa dakle i u $(\omega+1, \leq)$. Ako ta formula nije LC-teorema onda postoji G-valuacija v takva da $v(\varphi) \neq 0$. Sledi da postoji $w \in \omega+1$ takav da $w \not\Vdash \varphi$.

Mi ćemo međutim na jedinstven način tretirati sistem LC i modalni sistem S4.3 zato što ih karakteriše ista Kripkeova semantika: relacija među svetovima je refleksivna, tranzitivna i *povezana*, tj. važi $\forall xy(Rxy \vee Ryx)$. Za prefikse ćemo i dalje uzimati konačne nizove prirodnih brojeva, ali ovaj put uređene *leksikografski,* dakle linearno. Osim toga neophodno je da pri uvođenju novih svetova imamo mogućnosti da sistematski reprezentujemo sve moguće pozicije novouvedenog sveta u odnosu na već uvedene. Tehnički to je moguće postići tako što ćemo uzimati samo prefikse koji se *ne završvaju nulom.* Lako se uviđa da je leksikografsko uređenje na skup svih ovih nizova gusto. Tako će se u vrhovnom čvoru tabloa uvek nalaziti prefiks 1. Tako će pravilo $(F \rightarrow)$ da glasi:

$$(F \rightarrow) \quad \frac{\pi_0 F\phi \rightarrow \psi}{\begin{array}{ccccc} \pi'_0 T\phi & \pi'_1 T\phi & \dots & \pi'_{n-1} T\phi & \pi_n + 1 T\phi \\ \pi'_0 F\psi & \pi'_1 F\psi & \dots & \pi'_{n-1} F\psi & \pi_n + 1 F\psi \end{array}}$$

Pravilo (T$\diamond$) (slično $F\Box$) glasi:

$$(\mathrm{T}\diamond) \quad \frac{\pi_0 T\diamond\phi}{\pi'_0 T\phi \mid \pi'_1 T\phi \mid \dots \mid \pi'_{n-1} T\phi \mid \pi_n + 1 T\phi}$$

Tumačimo ga na sledeći način: ako se na grani pojavljuje formula oblika $\pi_0 T\diamond\phi$ i ako su $\pi_1 <_l \dots <_l \pi_n$ $(\in \omega)$ svi prefiksi $>_l \pi_0$ koji se pojavljuju na grani onda krajnji čvor dobija $n+1$ naslednika: $\pi'_0 T\phi$, $\pi'_1 T\phi, \dots, \pi'_{n-1} T\phi$, $\pi_n + 1\, T\phi$. Sa π'_i $(0 \leq i < n)$ označen je proizvoljan prefiks takav da $\pi_i <_l \pi'_i <_l \pi_{i+1}$. [3] Isto to za formulu $\pi_0 F\phi \rightarrow \psi$.

Potpunost se dokazuje jednostavno, jer je u ovom važnom slučaju važenje egzistencijalne formule obezbeđeno mogućnošću izbora prefiksa koji je ili između prvog i drugog prefiksa ili ... ili između predzadnjeg i zadnjeg ili se smešta posle zadnjeg prfiksa koji se na grani pojavljuje. S obzirom da je reč linearnom uređenju (s početnim elementom) drugih mogućnosti i nema.

[3] Izbor π'_i može se učiniti efektivnim zahtevajući na primer da to bude najkraći prefiks sa tim svojstvom i prvi među takvima (u smislu $<_l$).

Glava 4

Tabloi i konačni modeli

Već je u početku naglašeno da otvorena završena grana tabloa definiše *kontraprimer* tj.*model* u kome ne važi formula koju pokušavamo da dokažemo. To znači da ako nas zanima *zadovoljivost* formule ϕ tablo započinjemo formulom oblika $\pi T\phi$ sa ciljem da pronađemo otvorenu završenu granu i da sa nje očitamo model u kome ϕ važi. U tu svrhu možemo naš sistem pravila obogatiti novim egzistencijalnim pravilom. U slučaju predikatskog računa prvog reda ono glasi:

$$(\mathrm{T}\exists^{fin}) \qquad \begin{array}{c} \exists x\varphi(x) \\ | \\ \varphi(t) \end{array} \qquad \text{gde je } t \text{ proizvoljan zatvoren term koji se pojavljuje na grani,}$$

s tim da se u te terme ubrajaju i sve konstante iz jezika, ili je t nova konstanta. Pravilo treba tumačiti disjunktivno: prilikom prve primene pravila (na dato pojavljivanje formule na izabranoj grani) krajnji čvor grane dobija naslednika $\varphi(t_0)$, gde je t_0 nova konstanta, kao i naslednike $\varphi(t_1)$, $\varphi(t_2), \ldots$ gde su t_i termi sa grane. Tada važi

Teorema 2 (**[3]** po ideji Burgessa) *Neka je φ rečenica čistog predikatskog računa prvog reda koja ima konačan model. Tada postoji tablo za φ čija je bar jedna grana* završena, otvorena *i* konačna.

Naš cilj je da pokažemo kako se ova ideja može iskoristiti u neklasičnim iskaznim računima za nalaženje konačnih modela. Ilustrujmo to na primeru osnovnog normalnog modalnog iskaznog računa K. Za prefikse možemo uzeti elemente proizvoljnog prebrojivog skupa, pa je najjednostavnije da koristimo prirodne brojeve. Izmena je u tome što ćemo umesto algebre prefiksa koristiti relaciju , označimo je sa ρ, tako da ćemo na grani tabloa imati novu vrstu iskaza oblika $m\rho n$, gde su m i n prefiksi [1]. Pravila za modalne operatore analogna su onima za kvantore. Za $T\Box$ i $F\Diamond$ pravila ostaju ista, jedino što se veza među prefiksima ne očitava iz njihove strukture nego se opisuje pomoću ρ. Tako će pravilo $(T\Box)$ sada glasiti (slično za $(F\Diamond)$): *ako se $mT\Box\phi$ i $m\rho n$ nalaze na grani onda se ona može produžiti formulom $nT\phi$.* Shematski to možemo ovako predstaviti:

$$(T\Box)\quad \begin{array}{c} mT\Box\phi \\ m\rho n \\ | \\ nT\phi \end{array} \qquad\qquad (F\Diamond)\quad \begin{array}{c} mF\Diamond\phi \\ m\rho n \\ | \\ nF\phi \end{array}$$

Za formule oblika $T\Diamond\ldots$ i $F\Box\ldots$ pravila zadajemo po analogiji sa $(T\exists^{fin})$ i $(F\forall^{fin})$:

$$(T\Diamond^{fin})\quad \begin{array}{ccccc} & & mT\Diamond\phi & & \\ & \swarrow & \searrow & \searrow & \\ m\rho n_1 & \ldots & m\rho n_k & & m\rho n \\ n_1 T\phi & \ldots & n_k T\phi & & nT\phi \end{array} \qquad (F\Box^{fin})\quad \begin{array}{ccccc} & & F\Box\phi & & \\ & \swarrow & \searrow & \searrow & \\ m\rho n_1 & \ldots & m\rho n_k & & m\rho n \\ n_1 F\phi & \ldots & n_k F\phi & & nF\phi \end{array}$$

gde je $n_1, \ldots, n_k$ spisak *svih prefiksa na grani* (uključujući m), a $n = max\{n_1, \ldots, n_k\} + 1$ je *nov*. Uslovi zatvaranja grane ostaju isti. Ako želimo da metod primenimo na proširenja računa K4 onda prirodno dodajemo pravilo

$$(Tr)\quad \begin{array}{c} k\rho l \\ l\rho m \\ | \\ k\rho m \end{array}$$

Mi ćemo kao tipičan primer razmotriti račun GL, jer se tu dobro vide mogućnosti i specifičnosti ovog metoda. Podsetimo na standardna tablo pravila ovog računa (detaljnije u [6], glava 8):

[1]Ovaj način prezentacije tabloa može se naći u [1], ali nije korišćen za sistematsko traženje konačnih modela. Sličnu ideju, ali u nešto izmenjenom kontekstu (reč je o izračunavanju terma) autoru je svojevremeno predlagao A. Krapež i tu ideju on je u određenom obliku realizovao u izgradnji dokazivača u okviru programskog paketa PROVER.

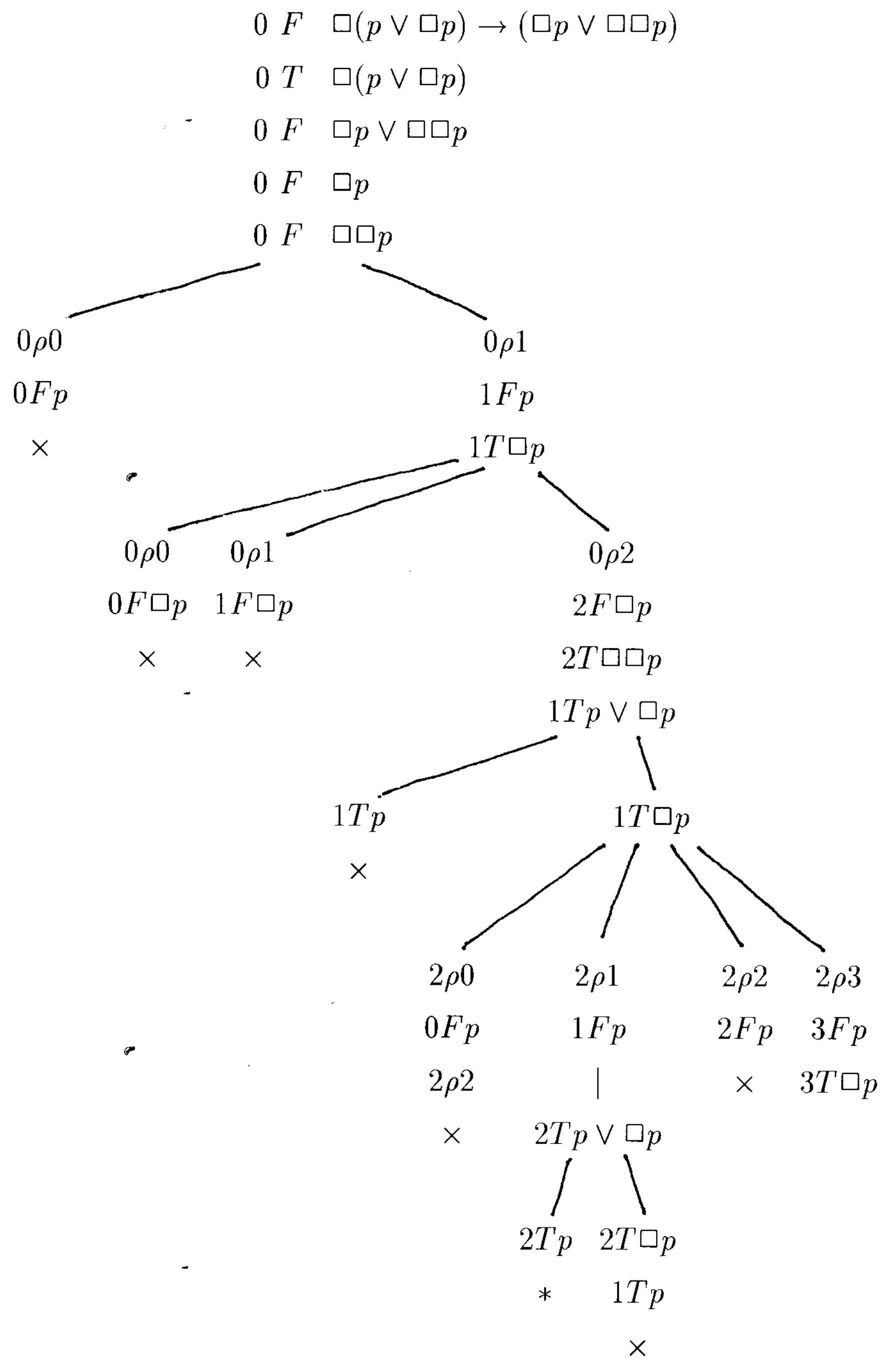
$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \pi T\Diamond\phi & & \pi F\Box\phi & & \pi T\Box\phi & & \pi F\Diamond\phi \\
(T\Diamond) & | & (F\Box) & | & (T\Box) & | & (F\Diamond) & | \\
 & \pi' T\phi & & \pi' F\phi & & \pi_1 T\phi & & \pi_1 F\phi \\
 & \pi' F\Diamond\phi & & \pi' T\Box\phi & & & &
\end{array}
$$

Ovde je $\pi'(\supset \pi)$ kao i občno *nov* na grani, dok je $\pi_1 \supset \pi$ proizvoljan prefiks *sa grane.*

$$
\begin{array}{ll}
 & F\ \Box(p \vee \Box p) \rightarrow (\Box p \vee \Box\Box p) \\
 & T\ \Box(p \vee \Box p) \\
 & F\ \Box p \vee \Box\Box p \\
 & F\ \Box p \\
 & F\ \Box\Box p \\
0 & F\ p \\
0 & T\ \Box p \\
1 & F\ \Box p \\
1 & T\ \Box\Box p \\
10 & F\ p \\
10 & T\Box p \\
0 & T\ p \vee \Box p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & / \qquad \backslash & \\
0\ T\ p & & 0\ T\Box p \\
\times & & 1\ Tp \vee \Box p \\
 & & / \qquad \backslash \\
 & 1\ T\ p & \qquad 1\ T\Box p \\
 & 10\ Tp \vee \Box p & \qquad \times \\
 & / \qquad \backslash & \\
 & 10Tp \quad 10T\Box p & \\
 & \times \qquad * &
\end{array}
$$

Dobili smo otvorenu granu $*$ koja nam daje model $K = (\{\emptyset, 0, 1, 10\}, \subset, \Vdash)$, gde $0 \nVdash p$, $10 \nVdash p$ i $1 \Vdash p$. To je dakle četvoročlani model u kome polazna formula ne važi. Uporedimo ovaj tablo sa sličnim koji sistematski daje konačne modele. Koristeći jednostavnu činjenicu da je konačna tranzitivna relacija fundirana akko je irefleksivna, dolazimo do *novog uslova zatvaranja* a to je pojava na grani iskaza oblika $n\rho n$, jer je to znak da model koji očitavamo sa grane nije fundiran što onda prirodno tumačimo kao protivrečnost.



Zapažamo odmah da je ovaj tablo veći, ali je zato model $K = (\{0,1,2\}, \{(0,1),(0,2),(2,1)\}, \{1 \not\Vdash p, 2 \Vdash p\})$ koji očitavamo sa *konačne, otvorene, završene* grane $*$ *tročlan,* dok smo standardnim metodom dobili četvoročlan model i nismo mogli dobiti manji. Vidimo takođe da na najdešnjoj grani uvek primenjujemo zapravo standardna pravila za $\Box$ i $\Diamond$.

Drugi primer je formula $\neg\neg p \rightarrow p$ u intuicionističkom računu. Lako se proverava da standardna pravila koja smo naveli proizvode samo *beskonačan* kontraprimer za ovu formulu. Boolos-Burgessov metod međutim prirodno dovodi do malog konačnog modela:

$0F\neg\neg p \rightarrow p$

$0T\neg\neg p$

$0Fp$

$0\rho 0$

$0F\neg p$

$0\rho 0$	$0\rho 1$
$0Tp$	$1Tp$
$\times$	$1\rho 1$
	$1F\neg p$

$1\rho 0$	$1\rho 1$	$1\rho 2$
$0Tp$	$1Tp$	$2Tp$
$\times$	$*$	

Vidimo da je grana $*$ otvorena i završena i sa nje čitamo sledeći model: $W = \{0,1\}$, $R = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $0 \not\Vdash p$, $1 \Vdash p$.

Tablo metod Burgessa i Boolosa (koristićemo naziv *BB - tablo*) je očigledno potpun, jer u slučaju pravila za veznike odnosno operatora koji imaju egzistencijalni karakter obavezno se pojavljuje i produžetak grane koji daju i standardna tablo pravila. Uobičajeni argument pokazuje: ako se zatvara grana na kojoj je uvedena nova konstanta (novi prefiks) onda se zatvara i ta ista grana na kojoj je ta konstanta (taj prefiks) zamenjen(a) nekom već uvedenom konstantom (nekim već uvedenim prefiksom). Na taj način težište dokaza prenosi se na *korektnost* metoda. Za to nam služi sledeća lema koju ćemo iskazati za račun K, ali se uz manje izmene prenosi na druge standardne sisteme. Podsetimo najpre da je za dati skup prefiksa Π i dati Kripkeov model $(W, R, \Vdash)$ preslikavanje $I : \Pi \to W$ *interpretacija* ako $m\rho n \Rightarrow I(m)RI(n)$ ([6], glava 8). Kažemo da I *realizuje* formulu $mT\phi$ ($mF\phi$) ako $I(m) \Vdash \phi$ ($I(m) \nVdash \phi$).

Lema 4.0.3 *Ako formula ϕ računa* K *ima konačan model onda BB-tablo za $0T\phi$ ima bar jednu* završenu, otvorenu konačnu *granu.*

Dokaz Neka je $K = (W, R, \Vdash)$ konačan Kripkeov model za ϕ i $card(W) = k \in \omega$. Pokazaćemo da K realizuje bar jednu konačnu završenu granu tabloa za $0T\phi$. U tom smislu za datu otvorenu granu definisaćemo interpretaciju $I : \Pi(G) \xrightarrow{1-1} W$, gde je $\Pi(G)$ skup svih prefiksa sa grane G. Za početak definišemo $I(0) = w_0$ gde je w_0 proizvoljan svet iz W takav da $w_0 \Vdash \phi$. Pretpostavimo da K realizuje granu G i da primenom nekog pravila grana G dobija jedan ili više nastavaka. Ukoliko je primenjeno neko od iskaznih pravila ili $(T\Box)$ (ili $F\Diamond$) onda se skup prefiksa na grani ne menja pa samim tim ni I. Osim toga K realizuje bar jedan od nastavaka grane G. Tako na primer ako je G produžena redukcijom formule $mT\psi \vee \theta$ onda po pretpostavci K realizuje tu formulu pomoću I tj. $I(m) \Vdash \psi \vee \theta$ pa dakle $I(m) \Vdash \psi$ ili $I(m) \Vdash \theta$, drugim rečima K realizuje jedan od nastavaka $mT\psi$, $mT\theta$. Pretpostavimo zatim da su $m\rho n$ i $mT\Box\psi$ na grani G i da smo je produžili dodajući $nT\psi$. To znači da $I(m)RI(n)$ i $I(m) \Vdash \Box\psi$. Sledi da $I(n) \Vdash \psi$ tj. K realizuje $nT\psi$. Najzad ako se na grani nalazi $mT\Diamond\psi$ na koju je primenjeno $(T\Diamond^{fin})$ onda K realizuje $mT\Diamond\psi$ tj. $I(m) \Vdash \Diamond\psi$. Znači da za neki $w \in W$ takav da $I(m)Rw$ $w \Vdash \psi$. Razlikujemo dva slučaja. Ako za neki prefiks p sa grane važi $I(p) = w$ onda biramo produžetak grane G na kome je $m\rho p$, $pT\psi$, jer prema opisanom K realizuje taj nastavak. Ako takvog prefiksa nema biramo nastavak na kome je prefiks n nov za granu G i definišemo $I(n) = w$. Očigledno je da preko ovako dodefinisane interpretacije I K realizuje nastavak $m\rho n$, $n \Vdash \psi$, kao i da I $1-1$ preslikava skup svih prefiksa ovako produžene grane u W. Pretpostavimo sada da je na grani G već uvedeno k ($= card(W)$) prefiksa i da K realizuje tu granu pomoću I. Jasno je da sva pravila osim $(T\Diamond^{fin})$ i $(F\Box^{fin})$

možemo primeniti samo konačno mnogo puta posle čega će grana biti otvorena i završena. Pretpostavimo zato da je (s oznakama kao gore) primenjeno pravilo $(T\Diamond^{fin})$ ali da K realizuje samo nastavak u kome se uvodi novi prefiks n. Znači da za svaki već uvedeni prefiks $n_1, \ldots, n_k$ $I(n_i) \not\Vdash \psi$. No kako je I $1-1$, to je svaki $w \in W$ oblika $I(n_i)$ za neki i $1 \leq i \leq k$, sledi da $I(m) \not\Vdash \Diamond\psi$, kontradikcija.

Jasno je da se ovaj metod može proširiti na primer na račun S4 dodavanjem pravila koja će obezbediti da relacija ρ bude refleksivna i tranzitivna, ali i šire na srodne sisteme, no time se ovde nećemo baviti.

Glava 5

Hornovska reprezentacija tablo pravila

Pozabavićemo se sada reprezentacijom tablo pravila pomoću hornovskih formula predikatskog računa, čime ustvari zalazimo u oblast teorije logičkog programiranja. Ono što nas zanima jeste kako da okarakterišemo svojstvo dokazivosti u predikatskom računu prvog reda pomoću ovih formula i to u nekoj vrsti slabe formalne aritmetike (teorije diskretnog uređenja sa početnim elementom). To znači da jezik na kome će opis biti zadat, od logičkih simbola sadrži samo implikaciju, konjunkciju i univerzalni kvantor. Individualne promenljive označavaćemo sa $x, y, z, x_0, y_0, \ldots$ uvek pretpostavljajući da različiti simboli označavaju različite promenljive. Nabrojaćemo predikatske simbole zajedno sa njihovim nameravanim značenjem. Pri tome se koristimo oznakom '...' koju možemo objasniti na primeru promenljivih: 'promenljiva' označava sve one terme koji se u našem opisu ponašaju kao promenljive tj. služe kao kodovi promenljivih iz objekt jezika. U našem hornovskom jeziku svojstvo 'promenljiva' je definisano predikatom *var*.

$fla(x)$: x je 'formula'

$var(x)$: x je 'promenljiva'

$d(x)$: 'formula' x je 'dokaziva'

$zg(x,y)$: 'zatvara se grana' x čije su konstante kodirane numeralom y

$član(x,y)$: x je član liste y

$ob(x,y,z)$: brisanjem svih pojavljivanja terma x u y dobija se z

$zam(x,y,z,u)$: 'zamenom' svakog pojavljivanja terma y u x termom z dobija se term u

$x \leq y$: relacija $\leq$ među numeralima x i y.

$x \not\equiv y$: term x nije identičan sa y

Operacijske simbole našeg jezika sačinjavaju svi predikatski i operacijski simboli objekt jezika (sa pripadajućom arnošću), kao i iskazni veznici i kvantori. Dodatni simboli su konstanta $\emptyset$ i binarni operacijski simbol $^\frown$ koji služe za pravljenje lista, kao i konstante v i c koje služe za predstavljanje promenljivih i konstanti. Budući da se prilikom dokazivanja u objekt jeziku pojavljuje najviše prebrojivo mnogo novih konstanti, njihove "kodove" unosimo u jezik. Tako konstantu c_i prevodimo u $c^\frown i$, gde je i lista $\emptyset^\frown(\emptyset^\frown \ldots ^\frown(\emptyset^\frown\emptyset)\ldots)$. dužine i. Drugim rečima i formule i termi objekt jezika postaju *termi* našeg jezika.

U skladu s notacijom iz PROLOGA izraz $B \Leftarrow A_1, \cdots, A_n$ znači da konjunkcija elementarnih formula $A_1, ..., A_n$ implicira elementarnu formulu B. Budući da su sve individualne promenljive univerzalno kvantifikovane, kvantore ne pišemo. Listu $a_1{}^\frown(a_2{}^\frown \ldots ^\frown(a_{n-1}{}^\frown a_n)\ldots)$ pišemo bez zagrada tj. kao $a_1{}^\frown a_2{}^\frown \ldots ^\frown a_{n-1}{}^\frown a_n$.

Definicija 1 *Neka je A formula i Γ konačan niz atomskih formula. Tada je i $A \Leftarrow \Gamma$ formula. Umesto $A \Leftarrow$ pišemo kratko A.*

Pogledajmo sada detaljnije konstrukciju naših predikata. Najpre zadajemo predikat 'dokaziv' :

$$d(x) \Leftarrow fla(x),\ zg(\neg x^\frown\emptyset, \emptyset). \tag{5.1}$$

Zatim definišemo svojstvo 'biti formula'. Jednostavnosti radi pretpostavimo da objekt jezik sadrži konačno mnogo relacijskih simbola. Za svaki takav simbol p dužine (arnosti) n definišemo

$$fla(p(x_1,\dots,x_n)) \Leftarrow var(x_1),\dots,var(x_n). \tag{5.2}$$

Složenije 'formule' se definišu kao i obično:

$$\begin{aligned} fla(\neg x) &\Leftarrow fla(x) \\ fla(x \circ y) &\Leftarrow fla(x),\ fla(y) \quad (\circ \text{ je } \wedge, \vee \text{ ili } \rightarrow) \\ fla(\mathsf{Q}xy) &\Leftarrow var(x),\ fla(y) \quad (\mathsf{Q} \text{ je } \exists \text{ ili } \forall) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Predikat *var* uvodimo na sledeći način:

$$var(v^\frown\emptyset) \tag{5.4}$$

$$var(v^\frown(\emptyset^\frown x)) \Leftarrow var(v^\frown x) \tag{5.5}$$

Osnovni uslov za zatvaranje grane je:

$$zg(x,y) \Leftarrow \check{c}lan(z,x),\ \check{c}lan(\neg z,x) \tag{5.6}$$

Predikat *član* definiše se na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &\check{c}lan(x, x^\frown y) \\ &\check{c}lan(x, y^\frown z) \Leftarrow \check{c}lan(x,z). \end{aligned}$$

Iskazna pravila prikazuju se hornovski na prirodan način:

$$\begin{aligned} zg(x,y) &\Leftarrow \check{c}lan(\neg\neg z,x), ob(\neg\neg z,x,x_0),\ zg(z^\frown x_0,y) \\ zg(x,y) &\Leftarrow \check{c}lan(z\wedge u,x), ob(z\wedge u,x,x_0),\ zg(z^\frown u^\frown x_0,y) \\ zg(x,y) &\Leftarrow \check{c}lan(z\vee u,x),\ ob(z\vee u,x,x_0),\ zg(z^\frown x_0,y),\ zg(u^\frown x_0,y). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Na isti način prevode se i ostala iskazna tablo pravila. Prevod pravila za kvantore je složeniji. Najpre evo pravilo kojim se uvodi *prva* nova konstanta:

$$\begin{aligned} zg(x,\emptyset) &\Leftarrow \check{c}lan(\exists zu,x), zam(u,z,c^\frown\emptyset,u_0), ob(\exists zu,x,x_0), zg(u_0{}^\frown x_0, c^\frown\emptyset) \\ zg(x,\emptyset) &\Leftarrow \check{c}lan(\neg\forall zu,x), zam(u,z,c^\frown\emptyset,u_0), ob(\neg\forall zu,x,x_0), \\ &\qquad zg(\neg u_0{}^\frown x, c^\frown\emptyset) \\ zg(x,\emptyset) &\Leftarrow \check{c}lan(\forall zu,x), zam(u,z,c^\frown\emptyset,u_0),\ zg(u_0{}^\frown x, c^\frown\emptyset) \\ zg(x,\emptyset) &\Leftarrow \check{c}lan(\neg\exists zu,x),\ zam(u,z,c^\frown\emptyset,u_0),\ zg(\neg u_0{}^\frown x, c^\frown\emptyset). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Redukcija univerzalnog kvantora:

$$zg(x, c^\frown y) \Leftarrow \check{c}lan(\forall zu, x),\ w \leq y,\ zam(u, z, c^\frown w, u_1),\ zg(u_1{}^\frown x, c^\frown y) \quad (5.9)$$

$$zg(x, c^\frown y) \Leftarrow \check{c}lan(\neg\exists zu, x),\ w \leq y,\ zam(u, z, c^\frown w, u_1),\ zg(\neg u_1{}^\frown x, c^\frown y) \quad (5.10)$$

Najsloženiji je opis redukcije egzistencijalnog kvantora:

$$zg(x, c^\frown y) \Leftarrow \check{c}lan(\exists uw, x),\ zam(w, u, c^\frown \emptyset^\frown y, w_1),\ ob(\exists uw, x, x_0),\ zg(w_1{}^\frown x_0, c^\frown \emptyset^\frown y) \quad (5.11)$$

$$zg(x, c^\frown y) \Leftarrow \check{c}lan(\neg\forall uw, x),\ zam(w, u, c^\frown \emptyset^\frown y, w_1),\ ob(\neg\forall uw, x, x_0),\ zg(\neg w_1{}^\frown x_0, c^\frown \emptyset^\frown y). \quad (5.12)$$

Ovim je logički deo potpuno opisan, ostaju još pomoćni predikati.

$$\begin{aligned}
ob(x, \emptyset, \emptyset) & \\
ob(x, x^\frown y, y_0) &\Leftarrow ob(x, y, y_0) \\
ob(x, y^\frown z, y^\frown z_0) &\Leftarrow x \not\equiv y,\ ob(x, z, z_0) \\
zam(x, x, y, y) & \\
zam(\mathsf{Q}xy, x, z, \mathsf{Q}xy) & \qquad (\mathsf{Q} \text{ je } \forall \text{ ili } \exists) \qquad (5.13) \\
zam(c, x, y, c) &\Leftarrow x \not\equiv c \\
zam(v, x, y, v) &\Leftarrow x \not\equiv v \\
zam(\emptyset, x, y, \emptyset) &\Leftarrow x \not\equiv \emptyset.
\end{aligned}$$

U ostalim slučajevima za operacijske simbole definišemo [1]

$$\begin{aligned}
zam(f(x_1, \ldots, x_n), x, y, f(y_1, \ldots, y_n)) \Leftarrow\ & x \not\equiv f(x_1, \ldots, x_n), \\
& zam(x_1, x, y, y_1), \qquad (5.14) \\
& \vdots \\
& zam(x_n, x, y, y_n)
\end{aligned}$$

Predikat $\leq$ definišemo među numeralima:

$$\emptyset \leq \emptyset$$

[1]infiksne operatore takođe tretiramo kao prefiksne: $x \vee y$ je $\vee(x, y)$ itd.

$$\begin{aligned} \emptyset \le \emptyset^\frown x &\Leftarrow \emptyset \le x \\ \emptyset^\frown x \le \emptyset^\frown y &\Leftarrow x \le y \end{aligned} \tag{5.15}$$

Bitno je da i različitost $\not\equiv$ možemo definisati "pozitivno" tj. bez negacije. Najpre za svaki (uređeni) par (f, g) različitih operacijskih simbola f i g (čitajući opet sve prefiksno) definišemo

$$f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv g(y_1, \ldots, y_m). \tag{5.16}$$

Tako na primer imamo $\neg(x) \not\equiv^\frown (y, z)$, ali i $^\frown(x, y) \not\equiv \neg(z)$. Specijalno važi $v \not\equiv c$, $v \not\equiv \emptyset$, $c \not\equiv \emptyset$ (i simetrično). Zatim za svaki operacijski simbol f arnosti $n \ge 1$ i svaki $i = 1, \ldots, n$ zadajemo

$$f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv f(y_1, \ldots, y_n) \Leftarrow x_i \not\equiv y_i. \tag{5.17}$$

Naglasimo još da će za nas *zamena* (promenljivih termima) u datom skupu S atomskih formula biti proizvoljno preslikavanje σ iz skupa $I(S)$ svih terma i formula koje se javljaju u S, u skup svih atomskih rečenica i konstantnih terma za koje važi $\sigma(ft_1 \ldots t_n) = f\sigma(t_1) \ldots \sigma(t_n)$, gde je f proizvoljan relacijski ili operacijski simbol arnosti $n > 0$. Konstante se slikaju u same sebe, a samim tim i svi konstantni termi. Znači da je σ potpuno određena svojom restrikcijom na skup individualnih promenljivih (kojima se dodeljuju konstantni termi), pa se može tako i zadati.

Naš sistem sadrži samo jedno pravilo izvođenja, koje predstavlja specijalan slučaj *SLD-rezolucije*:

$$(\mathsf{R}) \qquad \frac{d(r) \Leftarrow A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n \qquad C \Leftarrow B_1, \ldots, B_m}{d(r) \Leftarrow A_1, \ldots, A_{i-1}, \sigma(B_1), \ldots, \sigma(B_m), A_{i+1}, \ldots, A_n}$$

gde je σ zamena takva da $\sigma(C) = A_i$ [2]. Sada možemo definisati i pojam *izvođenja* u $\mathcal{R}$. To će za nas biti niz čiji se prvi član dobija zamenom u (1.1) nekog konstantnog terma umesto x, a svaki sledeći član dobija se (po pravilu (R)) iz prethodnog člana i neke od aksioma (uz pogodnu supstituciju).

Pre nego što formulišemo osnovni rezultat evo još nekih oznaka. Sa $\vdash_{\mathcal{AT}} \varphi$ označićemo da je φ teorema čistog predikatskog računa prvog reda zadatog pomoću

[2] U posebnom slučaju kada je premisa C, dobijamo zaključak $d(r) \Leftarrow A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$

analitičkih tabloa, a sa $\vdash_{\mathcal{R}} A$ činjenicu da je A teorema u $\mathcal{R}$. Neka je $v_0, \ldots, v_i, \ldots$ spisak svih individualnih promenljivih našeg objekt jezika i $c_0, \ldots, c_i, \ldots$ spisak svih henkinovskih konstanti koje u dokazima koristimo kao svedoke. Tada se prevod φ^* rečenice φ dobija tako što se svako pojavljivanje promenljive v_i smeni sa $v^\frown i$ i svako pojavljivanje konstante c_i smeni sa $c^\frown i$, gde smo kao i pre sa i označili listu $\emptyset^\frown \ldots ^\frown \emptyset$ dužine i. Sve ovo nam služi da dokažemo osnovnu teoremu.

Teorema 3 *Neka je φ rečenica našeg objekt jezika. Tada $\vdash_{\mathcal{AT}} \varphi$ akko $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*)$.*

Dokazaćemo ustvari nešto jače tvrđenje o "izomorfizmu" $\mathcal{AT}$-dokaza i transformacije terma $\mathcal{R}$-rezolucijom (u koju je uključena unifikacija). Ako tablo shvatimo kao skup njegovih grana ondā važi sledeća

Lema 5.0.4 *Za svaki tablo $\mathcal{T} = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ koji u vrhovnom čvoru (korenu) ima formulu $\neg\varphi$ važi:*

- $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow G_1, \ldots, G_n$, *gde je svaki G_i $(1 \leq i \leq n)$ oblika $zg(g_i, m_i)$*
- *$član(\psi^*, g_i)$ akko je ψ neiskorišćena na grani Γ_i*
- *ako su na grani Γ_i primenjivana samo iskazna pravila, $m_i = \emptyset$, a ako su primenom pravila za kvantore uvedene konstante $c_0, c_1, \ldots, c_l$ onda $m_i = c^\frown l$.*

Dokaz indukcijom po broju čvorova tabloa. U početnom slučaju tablo ima samo jedan čvor (i jednu granu) u kome se nalazi formula $\neg\varphi$. Budući da je φ^* prevod rečenice φ, predikat $fla(x)$, govoreći u prološkoj terminologiji, *uspeva* zamenom $\sigma x = \varphi^*$ tj. posle izvesnog broja koraka (u kojima se primenjuje (1.2)-(1.5)) polazeći od $d(\varphi^*) \Leftarrow fla(\varphi^*), zg(\neg\varphi^{*\frown}\emptyset)$ dobijamo $d(\varphi^*) \Leftarrow zg(\neg\varphi^{*\frown}\emptyset)$ tako da tvrđenje važi.

Pretpostavimo sada da imamo tablo $\mathcal{T} = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i, \ldots, \Gamma_n\}$ i da, po pretpostavci, važi $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_n$. Neka je formula $\psi \wedge \theta$ na grani Γ_i. Njenom redukcijom na grani se dobijaju rečenice ψ i θ, čime je $\psi \wedge \theta$ iskorišćena na toj grani. Sa druge strane to znači da je G_i oblika $zg(g, m)$, s tim da se $(\psi \wedge \theta)^* (= \psi^* \wedge \theta^*)$ pojavljuje u listi g. Zato u (1.7) pri zameni $\sigma x = g, \sigma y = m, \sigma z = \psi^*, \sigma u = \theta^*$ uspeva predikat *član* kao i predikat *ob* dajući pritom kao treću koordinatu listu g_0 u kojoj nema više $(\psi \wedge \theta)^*$.Kao rezultat se dobije $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow$

$G_1, \ldots, G_{i-1}, zg(\psi^{*\frown}\theta^{*\frown}g_0, m), G_{i+1}, \ldots, G_n$ što se u lemi i traži. Slično ako je na grani Γ_i rečenica $\psi \vee \theta$ onda se ona produžuje u dve grane: $\Gamma_i' = \Gamma, \psi$ i $\Gamma_i'' = \Gamma, \theta$. (čime je $\psi \vee \theta$ iskorišćena). Sa druge strane iz (1.8) dobijamo, uz isto obrazloženje kao prethodno, $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow G_1, \ldots, G_{i-1}, zg(\psi^{*\frown}g_0, m), zg(\theta^{*\frown}g_0, m), G_{i+1}, \ldots, G_n$, s tim da se $(\psi \vee \theta)^*$ ne javlja u g_0.

Razmotrimo još dva tipična slučaja redukcije kvantora. Pretpostavimo da se na grani Γ_i nalazi neiskorišćena rečenica $\exists v_j \psi$ kao i da se na grani pojavljuju konstante $c_0, c_1, \ldots, c_l$. Redukcijom se dobija $\Gamma_i, \psi(c_{l+1})$ i time je $\exists v_j \psi$ iskorišćena. Po pretpostavci važi: $G_i = zg(g_i, c^\frown l)$ i $\check{c}lan(\exists v^\frown j \psi^*, g_i)$. Zato u (1.11) izvršimo zamenu: $x := g_i, y := l, u := v^\frown j, w := \psi^*$. Dobijamo $w_1 = \psi_{v^\frown j}(c^\frown(l+1))$ i (pomoću ob) x_0 u kome se $\exists v^\frown j \psi^*$ ne pojavljuje. Druga tačka iz leme je ispunjena jer važi $\psi_{v_j}(c_{l+1})^* = {\psi^*}_{v^\frown j}(c^\frown(l+1))$, što se dokazuje indukcijom po složenosti izraza ψ. [3] Pošto svi predikati, osim eventualno zg, uspevaju, dobijamo $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow G_1, \ldots, G_{i-1}, zg(w_1{}^\frown x_0, c^\frown(l+1)), G_{i+1}, \ldots, G_n$. Pretpostavimo sada da je u tablou grana Γ_i produžena primenom rečenice $\forall v_k \theta$ na konstantu c_j, (na grani su uvedene konstante $c_0, \ldots, c_m, j \leq \overline{m}$). Ovoj redukciji odgovara sledeća zamena u (1.9): $x := g_i, y := m, z := v^\frown k, u := \theta^*, w := j$. Kao i pre uspevaju predikati $\check{c}lan$, zam (koji nam daje u_1) i ob, kao i predikat $\leq$ tako da imamo $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*) \Leftarrow G_1, \ldots, G_{i-1}, zg(u_1{}^\frown x_0, c^\frown \overline{m}), G_{i+1}$

Vidimo da svakoj promeni na grani Γ_i odgovara promena u G_i. Neposredna posledica ovog je da ako je Γ_i zatvorena onda $zg(g_i, m_i)$ odmah uspeva prema (1.6). Ako naime postoji atomska rečenica ψ takva da su i ψ i $\neg\psi$ na grani Γ_i [4], onda važi $\check{c}lan(\psi^*, g_i)$ i $\check{c}lan(\neg\psi^*, g_i)$. Prema tome svaki dokaz za φ prevodi se u dokaz za $d(\varphi^*)$. Kao što smo rekli važi i obrat.

Lema 5.0.5 *Pretpostavimo da u $\vdash_{\mathcal{R}} d(r) \Leftarrow P$ svi predikati tipa $fla, ob, zam, \leq$ i $\not\equiv$ uspevaju. Tada postoji tablo takav da se svakoj rečenici iz antecedensa oblika $zg(g, m)$ može pridružiti grana tabloa sa svojstvima:*

- *rečenica ψ je neiskorišćena na grani Γ akko uspeva $\check{c}lan(\psi^*, g)$*

[3] ψ je term ili formula objekt jezika proširenog novim konstantama.

[4] atomske rečenice i njihove negacije nikad nisu iskorišćene

- *ako* $m = \emptyset$ *onda na grani nema novih konstanti, a ako* $m = c^\frown l$, *onda su na grani uvedene konstante* $c_0, c_1, \ldots, c_l$.

Dokaz indukcijom po dužini $\mathcal{R}$–dokaza. Na početku primetimo da ako predikat fla uspeva, onda je $r = \varphi^*$ za neku rečenicu φ što se lako dokazuje indukcijom po složenosti r i u tom slučaju za ob i zam važi: ako su sve promenljive osim poslednje zamenjene konstantnim termima onda je vrednost te promenljive *jednoznačno određena*. U prvom koraku izvođenja imamo slučaj (1.1): $d(r) \Leftarrow fla(r), zg(\neg r^\frown \emptyset, \emptyset)$. Ako fla ne uspe Lema važi trivijalno. U suprotnom je $r = \varphi^*$ za neku rečenicu φ objekt jezika. Obrazujmo tablo sa jednim jedinim čvorom u kome je rečenica $\neg\varphi$. Pretpostavimo sada da imamo dokaz dužine ≥ 1. Razmotrimo kao i pre nekoliko slučajeva. Ako se u sledećem koraku vrši redukcija nekog od pomoćnih predikata tj. kao (desna) premisa u ($\mathcal{R}$) koristi se neka od aksioma (1.13)-(1.17), onda u tablou ne vršimo nikakve promene. Uzmimo zato da se u sledećem koraku dokaza koristi neka od formula (1.7), recimo druga. Znači da u antecedensu prve premise uočavamo rečenicu oblika $zg(g, m)$ i stavljamo $x := g$, $y := m$. Pošto *član* i ob po pretpostavci uspevaju, $\sigma(x_0)$ mora biti lista koja se dobija brisanjem svih pojavljivanja $\sigma z \wedge \sigma u$ u g. Sa druge strane zbog osobina operatora * za neke ψ i θ je $\sigma(z \wedge u) = \psi^* \wedge \theta^*$. Pošto, kao što smo rekli uspeva $član(\psi^* \wedge \theta^*, g)$, to po pretpostavci znači da je na odgovarajućoj grani Γ tabloa neiskorišćena rečenica $\psi \wedge \theta$. Primenimo pravilo ($\wedge$) i produžimo Γ u Γ, ψ, θ, čime je $\psi \wedge \theta$ iskorišćena na toj grani. Ova nova grana odgovara rečenici $zg(\psi^{*\frown} \theta^{*\frown} \sigma x_0, m)$.

Kao sledeći primer iskaznog pravila uzmimo da se u dokazu koristi treća po redu aksioma iz (1.7). To znači da se neka rečenica iz antecedensa oblika $zg(g, m)$ stavljajući $\sigma x = g, \sigma y = m$ smenjuje sa $član(\sigma z \vee \sigma u, g)$, $ob(\sigma z \vee \sigma u, g, \sigma x_0)$, $zg(\sigma z^\frown \sigma x_0, m)$, Po pretpostavci opet uspevaju *član* i ob što znači da se u σx_0 više ne pojavljuje $\sigma z \vee \sigma u$. Pošto je kao gore $\sigma z = \psi^*, \sigma u = \theta^*$ za neke ψ, θ, na odgovarajućoj grani Γ se po pretpostavci nalazi neiskorišćena rečenica $\psi \vee \theta$ pa možemo primeniti pravilo grananja ($\vee$). Grane Γ, ψ i Γ, θ korespondiraju rečenicama $zg(\psi^{*\frown} \sigma x_0, m), zg(\theta^{*\frown} \sigma x_0, m)$.

Za sledeći primer uzmimo primenu aksiome (1.11). Za neki g i m imamo $\sigma x = g$, $\sigma y = m$. Pošto *član*, zam i ob uspevaju po pretpostavci, imamo da je

$\exists\sigma u\sigma w$ član liste g, $\sigma(c^\frown\emptyset^\frown y) = c^\frown\emptyset^\frown m = c^\frown(m+1)$, kao i to da se σw_1 dobija smenom svih pojavljivanja σu u w sa $c^\frown(m+1)$, dok za ob i σx_0 važi sve isto kao pre. Osim toga mora biti $\sigma(\exists uw) = \exists v^\frown i\psi^* = (\exists v_i\psi)^*$. To znači da je na odgovarajućoj grani Γ neiskorišćena rečenica $\exists v_i\psi$. Primenom pravila $(\exists)$ grana se produžava u $\Gamma, \psi(c_{m+1})$, jer su na grani, po pretpostavci već korišćene konstante $c_0, c_1, \ldots, c_m$. Zbog već pomenute osobine predikata *zam* mora biti $\sigma w_1 = \psi^*(c^\frown(m+1)) = (\psi(c_{m+1}))^*$.

Kao poslednji tipičan primer razmotrimo redukciju univerzalnog kvantora opisanu u (1.9): zamenom $\sigma x = g$, $\sigma y = \overline{m}$ u Λ se stavlja $\check{c}lan(\forall\sigma z\sigma u, g)$, $\sigma w \leq \overline{m}$, $zam(\sigma u, \sigma z, c^\frown\sigma w, u_1)$, $zg(u_1{}^\frown g, c^\frown\overline{m})$. Za predikate *član* i *zam* važi isto što i prethodno, a lako se proverava da, pošto $\leq$ takođe uspeva, $\sigma w = \overline{k}$ za neki $k \leq m$. Kako je $\sigma(\forall zu) = (\forall v_i\psi)^*$, to je $u_1 = (\psi(c_k))^*$. Na odgovarajućoj grani Γ u tablou postoji po pretpostavci neiskorišćena rečenica $\forall v_i\psi$ i uvedene su konstante $c_0, c_1, \ldots, c_m$. Primenimo li pravilo $(\forall)$ na konstantu c_k, $k \leq m$, grana se produžava u $\Gamma, \psi(c_k)$, a $\forall v_i\psi$ i dalje nije iskorišćena što se slaže sa $zg((\psi(c_k))^{*\frown}g, c^\frown\overline{m})$ koja je sada u Λ.

Dokaz teoreme sledi neposredno iz ove dve leme. Neka je naime $\vdash_{\mathcal{AT}} \varphi$ i neka je Γ proizvoljna *zatvorena* grana koja se javlja u nekom koraku dokaza. To znači da je za neku atomsku rečenicu ψ par $\psi, \neg\psi$ na toj grani. Prema prvoj lemi tablou odgovara neka hornovska teorema u $\mathcal{R}$ i u njenom antecedensu ovoj grani odgovara rečenica $zg(g,m)$. Pošto su ψ i $\neg\psi$ neiskorišćene važi prema lemi $\check{c}lan(\psi^*, g)$ i $\check{c}lan(\neg\psi^*, g)$. Prema (1.6) to znači da $zg(g,m)$ uspeva čime nestaje iz antecedensa. Ovo međutim važi za sve rečenice ovog vida jer se *sve* njima odgovarajuće grane tabloa zatvaraju. To znači da na kraju, prateći izgradnju tabloa i zatvaranje grana, dobijamo $\vdash_{\mathcal{R}} d(\varphi^*)$. Obratno, razmotrimo proizvoljan dokaz za $d(\varphi^*)$. Posle konačno mnogo koraka nastupa situacija u kojoj se neka rečenica oblika $zg(g,m)$ ne može ukloniti primenom pravila (1.7)-(1.12). Da bi ipak uspela jedino preostaje da važi (1.6). Postoji dakle *atomska* rečenica θ takva da $\check{c}lan(\theta^*, g)$ i $\check{c}lan(\neg\theta^*, g)$ [5]. To međutim znači da se na odgovarajućoj grani tabloa nalaze upravo θ i $\neg\theta$, tj. ta grana je zatvorena. Pošto *sve* rečenice oblika $zg(g,m)$ treba da nestanu, a to je moguće

[5] Ako θ ne bi bila atomska onda bi bila moguća primena nekog od pravila (1.7)-(1.12).

jedino primenom (1.6), sledi da će i sve grane tabloa koji se gradi zajedno sa ovim dokazom da se zatvore, dakle $\vdash_{\mathcal{AT}} \varphi$. Zaključak ovog detaljnog izvođenja bio bi da opisna hornovska logika sadrži dovoljno izražajne snage da se pomoću nje opišu tablo pravila za logiku prvog reda. Kao posledicu dobijamo mogućnost izgradnje dokazivača u Prologu što je autor ovog teksta u praksi realizovao.