Неклановъ

ОПШТА
RICCATI-ЕВА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГА РЕДА

ТЕЗА

СИМЕ М. МАРКОВИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА

ДОКТОРСКИ ИСПИТ

НА СЕДНИЦИ

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ОД 5. ЈУНА 1913. ГОД. ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА

Г. Г. Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕРЗ.
Д-РА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА ВАНР. ПРОФ. УНИВЕРЗ.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1914.

САДРЖАЈ

УВОД

Италијански математичар *Jacopo Riccati* (1676—1754) испитивао је први, почетком XVIII века, једначину облика

$$\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^n \quad \cdot \cdot \cdot \; 1)$$

која је од тога доба позната под именом Riccati-еве једначине.

И Riccati и многи велики геометри његовога доба, међу којима ваља нарочито истаћи *Daniel Bernoulli*-а, уложили су били врло много труда да пронађу све оне вредности параметра n које ће допустити да се промењљиве у једначини 1) раздвоје. И, независно један од другога, сви су нашли исте вредности n које омогућавају раздвајање промењљивих. Све те вредности n дате су општим обрасцем

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

где је λ ма какав цео и позитиван број, рачунајући ту и нулу.

Ако у једначини 1) извршимо просту смену независно промењљиве

$$x = \frac{t}{b} \quad \cdot \cdot \cdot \; 2)$$

она добија облик

$$\frac{du}{dt} + u^2 = at^n \quad \cdot \cdot \cdot 3)$$

и ова једначина 3) обично се данас зове *специјална Riccati-ева једначина.* Услов да се једначина 3) може у коначном облику интегралити, и то само помоћу алгебарских и логаритамских функција, дат је опет истим обрасцем

$$n = -\frac{4\lambda}{2\lambda \pm 1}$$

пошто у смени 2) не фигурише параметар n.

Предмет овога рада неће бити испитивање специјалне него опште Riccati-еве једначине, а *општом Riccati-евом једначином* назваћемо сваку једначину облика

$$u' + u^2 = \omega(x)$$

где је ω произвољна функција од x.

Општа Riccati-ева једначина, доклегод је $\omega(x)$ произвољна функција од x, не може се интегралити, средствима данашње Анализе, у коначном облику, него помоћу редова и одређених интеграла. Али, захваљујући једној интересантној особини, коју, од свих диференцијалних једначина првога реда, има само Riccati-ева једначина — као што је то *Kronecker* показао — и општа Riccati-ева једначина може се интегралити, т. ј. њен интеграл свести на квадратуре, само ако је познат један њен партикуларни интеграл.

Кад је познат један партикуларни интеграл Riccati-еве једначине, општи интеграл добија се помоћу две квадратуре. А кад су позната два партикуларна интеграла, *Minding* је показао да се општи интеграл добија само помоћу једне квадратуре. Међутим, ако су позната три партикуларна интеграла, онда, према једној значајној особини Riccati-еве једначине: да је анхармонијски однос четири ма која, међу собом независна, партикуларна интеграла константан, општи интеграл добија се без иједне квадратуре.

Општи интеграл Riccati-еве једначине има облик

$$u = \frac{C\,f(x) + g(x)}{C\varphi(x) + \psi(x)}$$

Интеграциона константа C фигурише, дакле, линеарно и у бројиоцу и у имениоцу општега интеграла. Општи интеграл Riccati-еве једначине је, дакле, рационална и линеарна функција интеграционе константе.

Да поменемо још једну важну особину Riccati-еве једначине.

Ако, са *Picard*-ом, под есенцијелним сингуларитетима једнога интеграла разумемо све његове сингуларитете осим полова и алгебарских критичких тачака, онда је познато из Аналитичне Теорије Диференцијалних Једначина да су за интеграле једначине

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \quad \dots \quad 4)$$

где је f рационална функција по u, сви есенцијелни сингуларитети стални, док полови и алгебарске критичке тачке уопште варирају са интеграционом константом.

Painlevé је, међутим, доказао да је Riccati-ева једначина једина од свих бескрајно многих једначина облика 4), чије алгебарске критичке тачке не зависе од интеграционе константе. Интеграли Riccati-еве једначине имају, дакле, сталне алгебарске критичке тачке.

На Riccati-еву једначину наилази се често, и то не само у области Теоријске него и у области Примењене Математике.

У *Аналитичној Теорији Диференцијалних Једначина* Riccati-ева једначина игра врло значајну улогу, као што то показују многобројни радови Poincaré-a, Painlevé-a, Picard-a, Goursat-a, Appel-a, М. Петровића и т. д. Осим тога, на њу се често наилази и у разноврсним проблемима у Геометрији, Механици, Физици и Хемији.

У *Геометрији* се, н. пр., наилази на Riccati-еву једначину: приликом одредбе једнога система асимтотних линија праволинијских површина; у проблему изогоналних трајекторија једне фамилије кругова што зависе од једног променљивог параметра; у модерној теорији природних једначина кривих у простору; у теорији површина; затим у многим задатцима овакве врсте: да се нађе крива линија код које између сектора S, рачунатог од $\theta = o$, и поларних координата ϱ и θ постоји, н. пр., однос

$$S = a\theta \mp b\varrho$$

У *Механици* се, н. пр., своде на Riccati-еву једначину: проблем падања материјалне тачке кроз средину која даје отпор пропорционалан квадрату брзине; проблем вертикалног хитца кад се узме да је отпор ваздуха пропорционалан квадрату брзине. *Darboux* је показао да се и проблем обртања једног чврстог тела око једне сталне тачке, проблем који се обично своди на систем од три симултане диференцијалне једначине, може свести на интеграцију једне једине Riccati-еве једначине и т. д.

У *Физици* се на Riccati-еву једначину наилази н. пр. у примени модерне теорије јонова на провођење електрицитета кроз гасове и т. д.

У *Хемијској Кинетици* се, н. пр., све хомогене реакције другога реда (бимолекуларне реакције) своде на Riccati-еву једначину и т. д.

Језиком *Математичке Феноменологије* можемо уопште рећи да се на Riccati-еву једначину своде све просте појаве што резултују из симултане акције два узрока: једнога, депресивног или импулсивног, са независним варијацијама, који може бити у специјалном случају и константне јачине, и другога, такође депресивног или импулсивног, али пропорционалног квадрату величине непосредног објекта. Јер је тада

$$X_1 = f(t) \; X_2 = \mp \lambda v^2$$

тако да је диференцијална једначина појаве

$$k \frac{dv}{dt} \pm \lambda v^2 = f(t)$$

Као што се види, област примена Riccati-еве једначине одиста је веома househould пространа и то је, поред њених интересантних интимних особина, био поглавити разлог што јој је од увек указивана велика пажња. Riccati-ева једначина била је предмет многих испитивања у прошлости, она и данас у највећој мери занима математички свет, а нема сумње да ће и убудуће привлачити на себе особиту пажњу.

Наш рад садржи неколико нових прилога теорији Riccati-еве једначине и има за циљ да допринесе што бољем и потпунијем познавању ове значајне једначине. Тежиште рада биће у квалитативним испитивањима.

Ваља још да нагласимо да се све наше испитивање односи на реалне, одређене, коначне и непрекидне интеграле, на оне, дакле, интеграле који су од највећега значаја за примену.

I ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Трансформација Riccati-еве једначине проширена облика

$$y' + \varphi_1(x) y^2 + \varphi_2(x) y + \varphi_3(x) = o \qquad \cdots 5)$$

на општи облик

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \cdots 6)$$

Треба само у једначини 5) извршити смену

$$y = \frac{1}{\varphi_1} u - \frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi'_1}{2\varphi_1^{\,2}} \qquad \cdots 7)$$

па ће се она свести на општи облик 6), где је

$$\omega(x) = \varphi_1 \varphi_2 \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1^{\,2}}\right) + \varphi_1 \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1^{\,2}}\right)' -$$

$$- \varphi_1^{\,2} \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1'}{2\varphi_1^{\,2}}\right)^2 - \varphi_1 \varphi_3$$

Исто тако, ако бисмо у једначини 5) извршили смену

$$y = -\frac{1}{\dfrac{u}{\varphi_3} + \dfrac{\varphi_2 \varphi_3 + \varphi_3'}{2\varphi_3^{\,2}}} \qquad \cdots 8)$$

добили бисмо општи облик

$$u' + u^2 = \omega(x)$$

где је

$$\omega(x) = \varphi_2 \varphi_3 \left(\frac{\varphi_2 \varphi_3 - \varphi_3'}{2\varphi_3^2}\right) - \varphi_3 \left(\frac{\varphi_2 \varphi_3 - \varphi_3'}{2\varphi_3^2}\right)' -$$

$$- \varphi_3^2 \left(\frac{\varphi_2 \varphi_3 - \varphi_3'}{2\varphi_3^2}\right)^2 - \varphi_1 \varphi_3$$

Трансформација линеарне једначине другога реда на општи облик Riccati-еве једначине и обратно.

Ако у линеарној једначини

$$y'' + f(x) y' + \varphi(x) y = o \quad \cdots \quad 9)$$

извршимо смену

$$y = e^{\int \left(u - \frac{f}{2}\right) dx} \quad \cdots \quad 10)$$

добијамо Riccati-еву једначину

$$u' + u^2 = \omega(x) \quad \cdots \quad 11)$$

где је

$$\omega(x) = \frac{f^2}{4} + \frac{f'}{2} - \varphi$$

Лако се увиђа, из смене 10), да је интеграл u Riccati-еве једначине 11) везан са интегралом y линеарне једначине 9) релацијом

$$u = \frac{y'}{y} + \frac{f}{2}$$

У специјалном случају, кад је линеарна једначина дата у скраћеном облику

$$y'' = \omega(x)\, y \qquad \dots 12)$$

она простом сменом

$$y = e^{\int u dx} \qquad \dots 13)$$

прелази у Riccati-еву једначину

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \dots 14)$$

Лако се увиђа, из смене 13), да између интеграла u Riccati-еве једначине 14) и интеграла y линеарне једначине 12) постоји прост однос

$$u = \frac{y'}{y}$$

II КВАЛИТАТИВНА ИНТЕГРАЦИЈА

Поменули смо већ да није могуће Riccati-еву једначину, у општем случају, интегралити. Али је, поред свега тога, ипак могуће доћи до приличног броја података о њеним интегралима и то баш оних који су понајчешће од интереса за примену. Другим речима: и ако није могућна *квантитативна*, увек је могућна *квалитативна* интеграција. А задатак је квалитативне интеграције да се на самој датој диференцијалној једначини проучи што више појединости о њеним интегралима, као н. пр.:

1° да се испита ток интегралне криве у датом размаку;

2° да се нађу границе броја нула и бесконачница интеграла у датом размаку и да се проучи њихов распоред;

3° да се испита ритам и честина, затим појачавање или амортизирање осцилација у случају кад интеграли имају осцилаторан карактер;

4° да се испита егзистенција максимума и минимума, сингуларних тачака;

5° да се проуче асимтотне вредности и т. д.

Скуп свих таквих појединости сачињава квалитативну слику проучаваних интеграла и та ће слика бити, очевидно, у толико потпунија у колико све квалитативне појединости, које улазе као елементи у састав те слике, буду потпуније и прецизније.

Сам облик Riccati-еве једначине и њена интимна веза са *линеарним* једначинама другога реда допуштају да се на самој једначини, као што ћемо видети, испитају многе интересантне појединости о њеним интегралима.

§ 1.

Интимна веза између Riccati-еве једначине

$$u' + u^2 = \omega(x) \quad \cdots 1)$$

и линеарне једначине

$$y'' = \omega(x)\, y \quad \cdots 2)$$

оличена у обрасцу

$$u = \frac{y'}{y} \quad \cdots 3)$$

показује: *да је сваки интеграл* **u** *једначине 1) логаритамски извод одговарајућег интеграла* **y** *једначине 2).*

Ако сад претпоставимо да је функција $\omega(x)$ холоморфна у посматраном размаку, образац 3) нам одмах истиче на видик овај резултат:

a) бесконачнице интеграла **u** *једначине 1) поклапају се са нулама интеграла* **y** *једначине 2)*, пошто, према једној познатој особини једначине 2), не може бити, док је функција $\omega(x)$ холоморфна, у исто време и $y = 0$ и $y' = 0$;

б) нуле интеграла **u** *поклапају се са нулама првог извода интеграла* **y**, *т. ј. са нулама од* $\mathbf{y}'$.

§ 2.

Што се тиче *тока интегралне криве и узајамног распореда бесконачница и нула у једном размаку* $(\alpha\, \beta)$, изведемо, на један врло прост начин, ове већ познате резултате.*)

1° Претпоставимо да је функција $\omega(x)$ непрестано негативна у размаку (α, β) и напишимо једначину 1), с обзиром на релацију 3), у облику

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \omega(x) \quad . \; . \; . \; 4)$$

Пошто је функција $\omega(x)$ непрестано негативна у размаку (α, β), логаритамски извод $\frac{y'}{y}$, т. j. интеграл u, једначине 1), непрестано ће опадати у том размаку, као што то очигледно показује једначина 4). Међутим, за сваку вредност x за коју је y равно нули, т. ј. за сваку бесконачницу интеграла u, логаритамски извод $\frac{y'}{y}$, т. ј. интеграл u, прелази из негативног у позитивно стање. С друге стране, за сваку вредност x за коју је y' равно нули, т. ј. за сваку нулу интеграла u, израз $\frac{y'}{y}$, т. ј. u, пошто према једначини 4) непрестано опада, мора прећи из позитивног у негативно стање; затим, док x непрестано расте, $\frac{y'}{y}$, т. ј. u, бескрајно опада узимајући све мање негативне вредности док не постане y равно нули, т. ј. док се не наиђе на једну бесконачницу интеграла u. Тада $\frac{y'}{y}$, т. ј. интеграл u, постаје бескрајан и мења знак прелазећи из $-\infty$ у $+\infty$. После тога, док x опет расте,

*) Види *M. Petrovitch*, Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations differentielles du premier ordre (Bulletin de la Société Mathematique de France. 1896. стр. 58).

$\frac{y'}{y}$, т. ј. интеграл u, опет опада узимајући све мање и мање позитивне вредности све док не постане y' равно нули, т. ј. док се не наиђе на једну нулу интеграла u и т. д.

Из свега овога закључујемо: *кад је у размаку* (α, β) *функција* $\omega(x)$ *непрестано негативна, интеграл* **u** *једначине 1) у томе размаку непрестано опада; нуле и бесконачнице интеграла једначине 1), што се налазе у размаку* (α, β), *раздвајају се међу собом, тако да интеграл* **u** *постаје наизменце раван нули и бескрајан док* **x** *варира растући у размаку* (α, β).

2° Претпоставимо да функција $\omega(x)$ није непрестано негативна у размаку (α, β). Тада израз $\frac{y'}{y}$, т. ј. интеграл u, може час расти час опадати. Али, пошто се бесконачнице интеграла u поклапају са нулама од y, а нуле од u са нулама од y', то применом Rolle-ове теореме изводимо непосредно ове закључке:

а) *између две узастопне бесконачнице интеграла* **u**, *што се налазе у размаку* (α, β), *мора се налазити бар једна нула, или, ако их има више, њихов је број увек непаран;*

б) *између две узастопне нуле интеграла* **u**, *што се налазе у размаку* (α, β), *не може се налазити више од једне бесконачнице.*

§ 3.

Одредимо сад *број бесконачница и нула што се налазе у размаку* (α, β). Најпре ћемо се бавити само о бесконачницама и потражићемо податке о њиховом броју у датом размаку.

У том циљу извешћемо прво извесне теореме што се односе на бесконачнице интеграла Riccati-еве једначине, аналоге Штурмовим теоремама што важе за нуле интеграла линеарне једначине другога реда. Наведимо, тога ради, Штурмове теореме у оном облику у коме ће нам требати.

1° Кад су дате линеарне једначине

$$z'' = \omega_1 (x) z \quad \ldots 5)$$
$$t'' = \omega_2 (x) t \quad \ldots 6)$$

где су ω_1 и ω_2 холоморфне функције у размаку (α, β), онда, кадгод је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов

$$\omega_1 (x) \leqslant \omega_2 (x)$$

а) две узастопне нуле од t што леже у том размаку увек обухватају бар једну нулу од z;

б) ако z и t имају једну заједничку нулу, н. пр. x = a, онда, кад x расте, почевши од a, прво ће наићи на једну нулу интеграла z, па тек онда на нулу интеграла t.

2° Кад су дате линеарне једначине 5) и 6), онда, кадгод је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов

$$\omega_1 (x) \geqslant \omega_2 (x)$$

а) две узастопне нуле од t што леже у том размаку могу обухватати највише једну нулу од z;

б) ако z и t имају једну заједничку нулу, н. пр. x = a, онда, кад x расте, почевши од a, прво ће наићи на једну нулу од t, па тек онда на нулу од z.

Комбинујући теореме под *1°* и *2°* добија се ова *основна Штурмова теорема*:

3° кад су дате три линеарне једначине

$$z'' = \omega_1(x)\, z$$
$$y'' = \omega(x)\, y$$
$$t'' = \omega_2(x)\, t$$

где су функције ω_1, ω_2 и ω холоморфне у размаку (α, β), онда, кад год је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов

$$\omega_1(x) \leqslant \omega(x) \leqslant \omega_2(x)$$

а) две узастопне нуле од t што леже у том размаку увек обухватају бар једну нулу од у, а две узастопне нуле од z обухватају највише једну нулу од у;

б) ако интеграли z и t имају са интегралом y једну заједничку нулу, н. пр. $x = a$, онда, кад х расте, почевши од а, прво ће наићи на једну нулу од z, затим на једну нулу од у, па најпосле на једну нулу од t.

Водећи рачуна о једном мало пре поменутом резултату, по коме се нуле интеграла линеарних једначина поклапају са бесконачницама интеграла одговарајућих Riccati-евих једначина, као непосредне последице Штурмових теорема изводимо ове теореме:

1° *Кад су дате Riccati-еве једначине*

$$v' + v^2 = \omega_1(x) \quad \cdot \cdot \cdot \; 7)$$
$$w' + w^2 = \omega_2(x) \quad \cdot \cdot \cdot \; 8)$$

где су ω_1 и ω_2 холоморфне функције у размаку (α, β), онда, кадгод је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов

$$\omega_1(x) \leqslant \omega_2(x)$$

а) *две узастопне бесконачнице од w што леже у том размаку увек обухватају бар једну бесконачницу од v;*

б) *ако v и w имају једну заједничку бесконачницу, н. пр. $x = a$, онда, кад x расте, почевши од a, прво ће наићи на једну бесконачницу интеграла v, па тек онда на једну бесконачницу интеграла w.*

2° *Кад су дате исте Riccati-eве једначине 7) и 8), онда, кадгод је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов*

$$\omega_1 (x) \geqslant \omega_2 (x)$$

а) *две узастопне бесконачнице од w што леже у том размаку могу обухватати највише једну бесконачницу од v;*

б) *ако v и w имају једну заједничку бесконачницу, н. пр. $x = a$, онда, кад x расте, почевши од a, прво ће наићи на једну бесконачницу од w, па тек онда на бесконачницу од v.*

Комбинујући теореме под 1° и 2° изводимо ову основну теорему, аналогу основној Штурмовој теореми:

3° *кад су дате три Riccati-eве једначине*

$$v' + v^2 = \omega_1 (x) \quad \cdots \quad 9)$$
$$u' + u^2 = \omega (x) \quad \cdots \quad 10)$$
$$w' + w^2 = \omega_2 (x) \quad \cdots \quad 11)$$

где су ω_1, ω и ω_2 холоморфне функције у размаку (α, β), онда, кадгод је у размаку (α, β) непрестано задовољен услов

$$\omega_1 (x) \leqslant \omega (x) \leqslant \omega_2 (x) \quad \cdots \quad 12)$$

а) *две узастопне бесконачнице од w што леже у том размаку увек обухватају бар једну бесконачницу од u, а две узастопне бесконачнице од v обухватају највише једну бесконачницу од u;*

б) *ако интеграли v и w имају са интегралом u једну заједничку бесконачницу, н. пр. $x = a$, онда, кад x*

расте почевши од a, прво ће наићи на једну бесконачницу од v, затим на једну бесконачницу од u, па најпосле на једну бесконачницу од w.

Први део ове теореме можемо исказати и у овом облику који ћемо чешће употребљавати:

интеграл **u** *у размаку* (α, β) *имаће најмање онолико бесконачница колико их има у том размаку интеграл w или само једну мање, а највише онолико колико их буде имао у том размаку интеграл v или само једну више.*

Последња теорема, под 3°, може да послужи као основа за проучавање бесконачница интеграла једне дате Riccati-еве једначине, ако ову будемо упоређивали са другим Riccati-евим једначинама чије су бесконачнице боље познате.

Нека је дата, н. пр., једначина 10) коју треба проучити; узимајући за компаративне једначине 9) и 11) такве једначине које се могу интегралити и које уз то задовољавају услов 12), имаћемо, према последњој теореми 3°, податке о броју и распореду бесконачница у датом размаку и самога проучаванога интеграла.

За компаративне једначине могу се узимати разноврсне једначине према природи случаја с којим се има посла; од њих се захтева само то: да се могу интегралити или бар да се има колико толико потребних података о њиховим интегралима.

§ 4.

Употребимо сад неколико згодно изабраних једначина за компарацију.

Најпре ћемо узети за компарацију једначину у којој се функција ω своди на константу, као што је поступио Штурм при проучавању линеарних једначина другога реда.

1° Нека је

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \cdots 1)$$

дата једначина која има да се проучи у размаку (α, β).

Претпоставимо да функција $\omega(x)$ у размаку (α, β) задржава стално један исти знак и разликујмо тада ова два случаја:

a) претпоставимо, најпре, да је функција $\omega(x)$ непрестано позитивна у размаку (α, β) и означимо са N њену најмању вредност у томе размаку.

Узмимо сад за компарацију једначину

$$v' + v^2 = N \qquad \cdots 2)$$

чији је један партикуларан интеграл, као што знамо,

$$v = \sqrt{N} \qquad \cdots 3)$$

Према једној ранијој теореми, пошто је у размаку (α, β) непрестано

$$N \leqslant \omega(x)$$

две узастопне бесконачнице од u што се налазе у том размаку морале би обухватати бар једну бесконачницу од v, а пошто v, као што се види из обрасца 3), уопште нема бесконачница, значи да интеграл u у размаку (α, β) не може ни у ком случају имати две бесконачнице већ једну или ниједну.

Из тога се изводи ова теорема; *кадгод је функција $\omega(x)$ у датом размаку (α, β) непрестано позитивна, ниједан интеграл u дате једначине 1) не може имати у том размаку више од једне бесконачнице;*

б) претпоставимо сад да је функција $\omega(x)$ непрестано негативна у размаку (α, β). Означимо са $-N$ и $-M$ најмању и највећу вредност коју има функција $\omega(x)$ у размаку (α, β), па узмимо за компаративне једначине ове две

$$v' + v^2 = -N \quad \ldots 4)$$
$$w' + w^2 = -M \quad \ldots 5)$$

чији су партикуларни интеграли

$$v = \sqrt{N}\; cotg\, x \sqrt{N} \quad \ldots 6)$$
$$w = \sqrt{M}\; cotg\, x \sqrt{M} \quad \ldots 7)$$

Према једној ранијој теореми, пошто је у размаку (α, β) непрестано

$$-N \leqslant \omega(x) \leqslant -M,$$

интеграл u имаће у размаку (α, β) најмање онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл w или само једну мање, а највише онолико колико их буде имао у томе размаку интеграл v или само једну више, па пошто интеграл w, дефинисан обрасцем 7), има у размаку (α, β) онолико бесконачница колико вредност

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M} + 1$$

садржи целих јединица, то се добија ова теорема

сваки интеграл u *дате једначине 1) имаће у размаку (α, β) најмање онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M}$$

Исто тако, према истој теореми, интеграл u имаће у размаку (α, β) највише онолико бесконачница колико их буде имао у томе размаку интеграл v или само једну више, па пошто интеграл v, дефинисан обрасцем 6), има у размаку (α, β) онолико бесконачница колико вредност

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{N} + 1$$

садржи целих јединица, то се добија ова теорема: *сваки интеграл* u *дате једначине 1) има у размаку (α, β) највише онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{N} + 2$$

Границе које смо на овај начин добили за број бесконачница у једном датом размаку зваћемо Штурмовим границама.

Што се тиче распореда бесконачница интеграла u у размаку (α, β), о њему се можемо обавестити, у овом случају; на овај начин.

Уочимо једну бесконачницу $x = a$ интеграла u. Ако за компаративне интеграле v и w узмемо оне партикуларне интеграле које добијамо из општих интеграла једначина 4) и 5)

$$v = \sqrt{N} \operatorname{cotg} \left[(x - c_1) \sqrt{N} \right]$$
$$w = \sqrt{M} \operatorname{cotg} \left[(x - c_2) \sqrt{M} \right]$$

кад интеграционим константама c_1 и c_2 дамо такве вредности да и интеграли v и w имају вредност $x = a$ као бесконачницу, онда, према једној ранијој теореми, кад x буде расло, почевши од a, прво ће наићи на једну бесконачницу $x = \lambda$ интеграла v, затим на једну бесконачницу $x = a'$ интеграла u, па најпосле на једну бесконачницу $x = \mu$ интеграла w, што значи да ће постојати релација

$$\lambda < a' < \mu \quad \cdots \quad 8)$$

Али, пошто је $x = a$ бесконачница и од v и од w, то је, очевидно, бесконачница од v што долази непосредно после a дата вредношћу

$$\lambda = a + \frac{\pi}{\sqrt{N}}; \quad \cdots \quad 9)$$

а бесконачница од w што долази непосредно после a вредношћу

$$\mu = a + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \cdots \quad 10)$$

Заменом вредности 9) и 10) у неједначинама 8), добија се

$$a + \frac{\pi}{\sqrt{N}} < a' < a + \frac{\pi}{\sqrt{M}},$$

или

$$\frac{\pi}{\sqrt{N}} < a' - a < \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad \cdots \quad 11)$$

Неједначине 11) дају могућност да се проучи варијација раздаљина узастопних бесконачница интеграла **u**, кад x буде расло у једном датом правцу. У том циљу, разликујмо ова два случаја:

1) претпоставимо да функција ω (x) непрестано расте, по апсолутној вредности, у размаку (α, β).

Неједначине 11) можемо написати и у облику једначине

$$a' - a = \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta')}} \quad \cdot \cdot \cdot (2)$$

где θ' означава извесну вредност што се налази између a и a'.

За бесконачницу a'' што долази одмах после a биће

$$a'' - a' = \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta'')}}$$

где θ'' означава извесну вредност што се налази између a' и a'' и т. д., тако да ћемо имати низ једначина

$$a' - a = \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta')}}$$

$$a'' - a' = \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta'')}} \quad \cdot \cdot \cdot 13)$$

$$a''' - a'' = \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta''')}}$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Међутим, пошто апсолутна вредност функције $\omega(x)$, по претпоставци, расте у размаку (α, β), биће, очевидно, у томе размаку

$$\omega(\theta') < \omega(\theta'') < \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot < N$$

па према томе и

$$\frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta')}} > \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta'')}} > \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta''')}} > \cdots > \frac{\pi}{\sqrt{N}}$$

или, с обзиром на једначине 13),

$$a' - a > a'' - a' > a''' - a'' > \cdots > \frac{\pi}{\sqrt{N}} \quad \cdot \cdot \; 14)$$

Неједначине 14) исказују овај резултат:

разлика између двеју узастопних бесконачница интеграла u *постаје све мања и мања кад* x *расте, у размаку* (α, β), *т. ј. бесконачнице су све ближе једне другима, али при том приближавању разлика између двеју узастопних бесконачница не може бити мања од* $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$;

2) претпоставимо да функција $\omega(x)$ непрестано опада, по апсолутној вредности, у размаку (α, β). Тада, употребивши исте ознаке и исто резоновање као и мало пре, долазимо до низа неједначина

$$\omega(\theta') > \omega(\theta'') > \omega(\theta''') > \cdots > M$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta')}} < \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta'')}} < \frac{\pi}{\sqrt{\omega(\theta''')}} < \cdots < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

$$a' - a < a'' - a' < a''' - a'' < \cdots < \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

одакле читамо овај резултат:

разлика између двеју узастопних бесконачница интеграла u *постаје све већа и већа, кад* x *расте у размаку* (α, β); *бесконачнице се, дакле, размичу, по-*

стају све разређеније, али разлика између двеју узастопних бесконачница не може бити никако већа од $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

2° Узмимо сад за компарацију једначину об....ка

$$w' + w^2 = \frac{A - B x^{2m}}{4 x^2} \quad \cdots 15)$$

где је

$$A = m^2 - 1$$

Њен партикуларни интеграл дат је обрасцем

$$W = \frac{1 - m}{2 x} + a m x^{m-1} \cot g\, a x^m \quad \cdots 16)$$

где се а одређује из једначине

$$B = 4 a^2 m^2$$

Бесконачнице партикуларног интеграла w, као што се види из обрасца 16), дате су општим условом

$$x = \sqrt[m]{\frac{k\pi}{a}}$$

одакле се лако налази да интеграл w има у размаку (α, β) онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 1$$

Нека је

$$u' + u^2 = \omega(x) \quad \cdots 17)$$

дата једначина која треба да се проучи.

Ако изаберемо коефициенте A и B, па према томе и m и a, у једначини 15) тако, да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x) \leqslant \frac{A - Bx^{2m}}{4x^2} \qquad \ldots 18)$$

онда ће, према пређашњем, интеграл u, у размаку (α, β), имати бар онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл w или само једну мање, па како интеграл w, дефинисан обрасцем 16), има, као што смо видели, у размаку (α, β) онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 1,$$

то се добија ова теорема: *сваки интеграл* **u** *дате једначине 17) имаће у размаку* (α, β) *најмање онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a \qquad \ldots 19)$$

Да би доња граница, дата обрасцем 19), за број бесконачница интеграла u у размаку (α, β), била повољнија од раније Штурмове, дате обрасцем

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M}$$

лако се увиђа да треба да буде

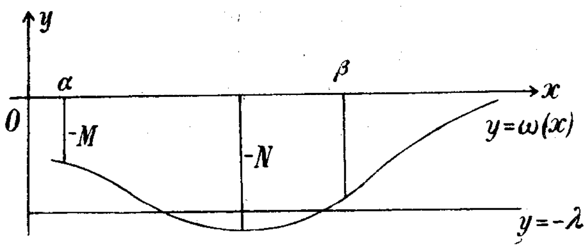
$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha} a > \sqrt{M} \text{ или } M < \lambda$$

$$\text{где је } \lambda = \left(\frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha} a\right)^2,$$

или, најзад,

$$-M > -\lambda \quad \cdots 20)$$

одакле добијамо правило: *ако крива линија $y = \omega(x)$ у размаку (α, β) није сва испод праве $y = -\lambda$, онда је граница 19) повољнија од Штурмове границе.* (Сл. 1).



Сл. 1.

Потврдимо ове последње резултате на једноме примеру.

Нека је дата једначина

$$u' + u^2 = \frac{3}{4x^2} - 4x^2 \quad \cdots 21)$$

па се тражи да се одреде доња и горња граница броја бесконачница интеграла u у размаку (1, 4).

Штурмова доња граница за број бесконачница интеграла u једначине 21) у размаку (1, 4) била би равна ономе целом броју јединица који је садржан у вредности

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M} = \frac{3}{3,14} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = 1, \quad \cdot \cdot 22)$$

Пошто вредност 22) садржи свега једну целу јединицу, значи да је Штурмова доња граница у овом случају равна *јединици*.

Међутим, ако за компаративну једначину узмемо, н.пр., једначину

$$w' + w^2 = \frac{3 - 4x^4}{4x^2} \quad . \; . \; . \; 23)$$

коју добијамо из опште једначине 15) кад изберемо коефициенте $A = 3$, $B = 4$, па дакле $m = 2$, $a = \frac{1}{2}$, онда, пошто је у размаку (1, 4) непрестано

$$\frac{3}{4x^2} - 4x^2 < \frac{3 - 4x^4}{4x^2}$$

проучавани интеграл u једначине 21) имаће у размаку (1, 4) бар онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл w компаративне једначине 23) или само једну мање. Другим речима: пошто интеграл w у једном датом размаку (α, β) има уопште онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 1,$$

проучавани интеграл u имаће у размаку (1, 4) бар онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a = \frac{4^2 - 1}{3,14} \cdot \frac{1}{2} = 2, \quad . \; . \; . \; 24)$$

Пошто вредност 24) садржи две целе јединице, као доњу границу за број бесконачница интеграла u у размаку (1, 4) добијамо *број 2*. Ова је граница, дакле, повољнија од Штурмове.

Ако сад коефициенте A и B, па дакле и m и a, у једначини 15) изаберемо тако да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x) \geqslant \frac{A - Bx^{2m}}{4x^2} \quad \ldots . \quad 25)$$

онда ће проучавани интеграл u једначине 17) имати у размаку (α, β) највише онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл w нове компаративне једначине или само једну више, па како интеграл w у размаку (α, β) има онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 1,$$

то се добија ова теорема: *сваки интеграл* u *дате једначине 17) имаће у размаку* (α, β) *највише онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 2 \quad \ldots . \quad 26)$$

Да би горња граница за број бесконачница интеграла u у размаку (α, β), дата обрасцем 26), била повољнија од Штурмове горње границе дате обрасцем

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{N},$$

треба да је

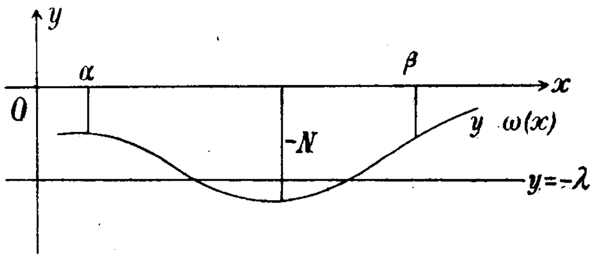
$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha} a < \sqrt{N} \quad \text{или} \quad N > \lambda$$

$$\text{где је } \lambda = \left[\frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta - \alpha} a\right]^2,$$

или, најзад,

$$-N < -\lambda, \quad \ldots \quad 27)$$

одакле добијамо ово правило: *кадгод крива линија* $y = \omega(x)$ *у размаку* (α, β) *није сва изнад праве* $y = -\lambda$, *граница 26) повољнија је од Штурмове* (Сл. 2).



Сл. 2.

Тако н.пр., ако уочимо малопређашњу једначину 21)

$$u' + u^2 = \frac{3}{4x^2} - 4x^2$$

па потражимо горњу границу за број бесконачница у размаку (1, 4), налазимо да је Штурмова горња граница равна броју целих јединица садржаних у вредности

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{N} + 2 = \frac{3}{3,14} \sqrt{63,9.....} + 2 = 9, \quad . \qquad 28)$$

Пошто вредност 28) има 9 целих јединица, значи да је Штурмова горња граница за број бесконачница у овом случају *број 9*.

Међутим, ако за компаративну једначину узмемо

$$w' + w^2 = \frac{3}{4x^2} - \frac{25}{4} x^2, \quad . \quad . \quad . \qquad 29)$$

коју добијамо из опште једначине 15) кад изберемо коефициенте $A = 3$, $B = 25$, па дакле $m = 2$, $a = \frac{5}{4}$, тако да је у размаку (1, 4) непрестано

$$\frac{3}{4x^2} - 4x^2 > \frac{3}{4x^2} - \frac{25}{4}x^2$$

онда ће проучавани интеграл u у размаку (1, 4) имати највише онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл w компаративне једначине 29) или само једну више, т. ј. највише онолико колико има целих јединица у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a + 2 = \frac{15}{3,14} \cdot \frac{5}{4} + 2 = 7, \quad \cdot \; 30)$$

Пошто вредност 30) има 7 целих јединица, значи да интеграл u има у размаку (1, 4) највише 7 бесконачница.

Штурмове границе дате су бројевима 1 и 9; наше границе 26) и 30) бројевима 2 и 7.

Лако се, међутим, уверавамо да проучавана једначина

$$u' + u^2 = \frac{3}{4x^2} - 4x^2$$

има као партикуларан интеграл израз

$$u = 2x \operatorname{cotg} x^2 - \frac{1}{2x} \quad \cdot \cdot \cdot \; 31)$$

Бесконачнице овога партикуларнога интеграла дате су општим условом

$$x^2 = k\pi,$$

одакле се лако налази да проучавани интеграл u у размаку (1, 4) има 5 бесконачница.

Као што се види, наше границе 26) и 30) у посматраном случају уже су и, према томе, повољније од Штурмових.

Што се тиче распореда бесконачница проучаванога интеграла *u* у размаку (α, β), о њему нас већ обавештава распоред бесконачница компаративних интеграла *w*. Распоред бесконачница интеграла *w*, дефинисаног обрасцем 16), управо је распоред нула функције $\sin ax^m$, а тај је, као што знамо, *збијен* кад је $m > 1$, а *разређен* кад је $m < 1$. Из тога закључујемо да ће и распоред бесконачница проучаванога интеграла *u*, *у главном*, бити збијен кад је $m > 1$, а разређен кад је $m < 1$, т. ј. у једном довољно великом размаку проучавани интеграл показиваће тежњу да има, у првом случају, бесконачнице све гушће, а у другом све разређеније.

3° Узмимо за компарацију једначину облика

$$v' + v^2 = A - B e^{2px} \quad \cdot \cdot \cdot \quad 32)$$

где је $$A = \frac{p}{4}$$

Њен партикуларни интеграл дат је обрасцем

$$v = ape^{px} \operatorname{cotg} ae^{px} - \frac{p}{2}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad 33)$$

где се *a* одређује из једначине

$$B = a^2 p^2$$

Бесконачнице партикуларнога интеграла v, као што се види из обрасца 33), дате су општим условом

$$x = \frac{1}{p} \log \frac{k\pi}{}$$

одакле се лако налази да интеграл v има у размаку (α, β) онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a + 1$$

Нека је

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \cdot \cdot \cdot \quad 34)$$

дата једначина која треба да се проучи у размаку (α, β).

Ако изберемо коефициенте A и B, па дакле и p и a, у једначини 32) тако да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x) \leqslant A - B e^{2px} \qquad \cdot \cdot \cdot \quad 35)$$

онда ће интеграл u једначине 34) у размаку (α, β) имати бар онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл v изабране компаративне једначине или само једну мање, па како интеграл v, дефинисан обрасцем 33), има, као што смо већ поменули, у размаку (α, β) онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a + 1,$$

то се добија теорема: *сваки интеграл* **u** *дате једначине 34) има у размаку (α, β) најмање онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a \qquad \cdot \cdot \cdot \quad 36)$$

Да би доња граница за број бесконачница интеграла u у размаку (α, β), дата обрасцем 36) била повољнија од Штурмове, дате обрасцем

$$\frac{\beta-\alpha}{\pi}\sqrt{M},$$

треба да је

$$\frac{e^{\beta p}-e^{\alpha p}}{\beta-\alpha}\,\mathrm{a}>\sqrt{M} \quad \text{или} \quad M<\mu$$

$$\text{где је } \mu=\left[\frac{e^{\beta p}-e^{\alpha p}}{\beta-\alpha}\,\mathrm{a}\right]^2$$

или, најзад,

$$-M>-\mu \qquad \ldots \quad 37)$$

одакле добијамо слично правило као и раније: *кадгод крива линија* $\mathbf{y}=\omega(x)$ *у размаку* (α, β) *није сва испод праве* $\mathbf{y}=-\mu$, *граница 36) повољнија је од Штурмове.*

Ако изберемо, у једначини 32), коефиценте A и B, па дакле и p и a тако да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x)\geqslant A-Be^{2px},$$

онда ће интеграл u у размаку (α, β) имати највише онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл v нове компаративне једначине или само једну више, па како интеграл v има у размаку (α, β) онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{e^{\beta p}-e^{\alpha p}}{\pi}\,\mathrm{a}+1$$

то се добија ова теорема: *сваки интеграл* **u** *дате једначине 34) имаће у размаку* (α, β) *највише онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a + 2 \qquad \ldots \quad 38)$$

Да би горња граница за број бесконачница интеграла *u* у размаку (α β), дата обрасцем 38), била повољнија од Штурмове, треба да је

$$\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\beta - \alpha} a < \sqrt{N} \quad \text{или} \quad N > \mu$$

$$\text{где је} \quad \mu = \left[\frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\beta - \alpha} a\right]^2,$$

или, најзад,

$$-N < -\mu \qquad \ldots \quad 39)$$

одакле добијамо правило: *кадгод крива линија* **y** $= \omega(x)$ *у размаку* (α, β) *није сва изнад праве* **y** $= -\mu$, *граница 38) повољнија је од Штурмове.*

Потврдимо ове резултате на једноме примеру. Нека је дата једначина

$$u' + u^2 = 1 - 4e^{4x} \qquad \ldots \quad 40)$$

па се тражи да се одреде доња и горња граница бесконачница интеграла *u* у размаку (0, 3).

Ако за компаративне једначине узмемо ове две

$$v' + v^2 = 1 - 9e^{4x} \qquad \ldots \quad 41)$$

$$w' + w^2 = 1 - e^{4x} \qquad \ldots \quad 42)$$

чији су партикуларни интеграли

$$p = 2 \quad a = \frac{3}{2} \quad \Big| \quad v = 3e^{2x} \cot g \frac{3}{2} e^{2x} - 1 \quad \ldots \quad 43)$$

$$p = 2 \quad a = \frac{1}{2} \quad \Big| \quad w = e^{2x} \cot g \frac{1}{2} e^{2x} - 1 \quad \ldots \quad 44)$$

онда, пошто је у размаку (0, 3) непрестано задовољен услов

$$1 - 9e^{4x} < 1 - 4e^{4x} < 1 - e^{4x},$$

проучавани интеграл *u* мора, према пређашњем, имати у размаку (0, 3) бар онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл *w* или само једну мање, а највише онолико колико их има у томе размаку интеграл *v* или само једну више; другим речима: интеграл *u* имаће у размаку (0, 3) бар онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\begin{array}{l} p = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array} \quad \Big| \quad \frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a = \frac{e^6 - 1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \quad \ldots \quad 45)$$

а највише онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\begin{array}{l} p = 2 \\ a = \frac{3}{2} \end{array} \quad \Big| \quad \frac{e^{\beta p} - e^{\alpha p}}{\pi} a + 2 = \frac{e^6 - 1}{3,14} \cdot \frac{3}{2} + 2 \quad \ldots \quad 46)$$

Пошто израз 45) садржи 64 целе јединице, а израз 46) садржи 190 целих јединица, то закључујемо да проучавани интеграл *u* у размаку (0,3) има најмање 64 бесконачнице, а највише 190 бесконачница.

Ако бисмо потражили Штурмове границе, добили бисмо за доњу границу *1*, а за горњу 768.

Међутим, лако се уверавамо да интеграл проучаване једначине 40)

$$u = 2\, e^{2x}\ cotg\, e^{2x} - 1,$$

чије су све бесконачнице дате општим условом

$$e^{2x} = k\pi,$$

има у размаку (0,3) свега 120 бесконачница.

Наше границе 45) и 46) знатно су, дакле, уже и повољније од Штурмових.

Што се тиче распореда бесконачница проучаванога интеграла u, о њему нас обавештавају распореди бесконачница компаративних интеграла w и v. Лако се увиђа, нпр., да је у нашем случају распоред бесконачница изабраних компаративних интеграла врло збијен, па ће зато и распоред бесконачница проучаваног интеграла u у посматраном размаку бити *врло збијен*.

4° Узмимо, напослетку, за компарацију и једначину

$$v' + v^2 = \frac{A}{4\,x^2} \quad \cdot \cdot \cdot \; 47)$$

која има, као што већ знамо, за партикуларан интеграл израз

$$v = \frac{a}{x} cotg \left[a \log x \right] + \frac{1}{2x} \quad \cdot \cdot \; 48)$$

где се **a** одређује из једначине

$$A = -1 - 4\,a^2$$

Бесконачнице партикуларнога интеграла v, као што се види из обрасца 48), дате су општим условом

$$x = e^{\frac{k\pi}{a}}$$

одакле се лако налази да интеграл v у размаку (α, β) има онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} + 1$$

Нека је

$$u' + u^2 = \omega(x) \quad \cdot \cdot \cdot 49)$$

дата једначина која треба да се проучи у размаку (α, β).

Ако изберемо сад коефициенат A, па дакле и a, у једначини 47) тако, да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x) \leqslant \frac{A}{4x^2} \quad \cdot \cdot \cdot 50)$$

онда ће интеграл u у размаку (α, β) имати бар онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл v или само једну мање, па како интеграл v, дефинисан обрасцем 48), има, као што смо већ поменули, онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} + 1$$

то се добија ова теорема. *сваки интеграл* **u** *дате једначине 49) имаће у размаку (α, β) најмање онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} \quad \cdot \cdot \cdot 51)$$

Да би доња граница броја бесконачница интеграла *u* у размаку (α, β), дата обрасцем 51), била повољнија од Штурмове, треба да је

$$\frac{a \log \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha} > \sqrt{M}$$

или

$$M < \varsigma,$$

$$\text{где је } \varsigma = \left[\frac{\log \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha} \, a\right]^2,$$

или, најзад,

$$-M > -\varsigma \qquad \cdots 52)$$

одакле опет добијамо слично правило као и пре: *кадгод крива линија* $y = \omega(x)$ *у размаку* (α, β) *није сва испод праве* $y = -\varsigma$, *граница* 51) *повољнија је од Штурмове.*

Ако изберемо сад коефициенат A, па дакле и a, у једначини 47) тако да у размаку (α, β) буде непрестано задовољен услов

$$\omega(x) \geqslant \frac{A}{4x^2} \qquad \cdots 53)$$

онда ће интеграл *u* имати у размаку (α, β) највише онолико бесконачница колико их има у томе размаку интеграл *v* нове компаративне једначине или само једну више, па како интеграл *v* у размаку (α, β) има онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$\frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} + 1,$$

то се добија ова теорема: *сваки интеграл* u *дате једначине 49) имаће у размаку* (α, β) *највише онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности*

$$\frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} + 2 \qquad \cdot \cdot \cdot 54)$$

Да би горња граница броја бесконачница интеграла u у размаку (α, β), дата обрасцем 54), била повољнија од Штурмове, треба да је

$$\frac{a \log \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha} < \sqrt{N}$$

или

$$-N < -\varsigma,$$

$$\text{где је } \varsigma = \left[\frac{\log \frac{\beta}{\alpha}}{\beta - \alpha} a\right]^2,$$

одакле добијамо правило: *кадгод крива линија* $y = \omega(x)$ *у размаку* (α, β) *није сва изнад праве* $y = -\varsigma$, *граница 54) повољнија је од Штурмове.*

Што се тиче распореда бесконачница проучаванога интеграла, о њему нас може обавестити распоред бесконачница компаративних интеграла. Бесконачнице компаративних интеграла v дате су, као што смо већ раније видели, општим условом

$$x = e^{\frac{k\pi}{a}}$$

одакле се види да је њихов распоред *разређен*, па је, према томе, у једном довољно великом размаку и распоред бесконачница проучаванога интеграла u такође *разређен*.

Потврдимо и ове резултате на једноме примеру. Нека је дата једначина

$$u' + u^2 = -\frac{65}{4x^2} \quad \cdot \cdot \cdot 55)$$

па се траже доња и горња граница бесконачница интеграла u у размаку (1,100).

Ако за компаративне једначине узмемо ове две

$$v' + v^2 = -\frac{41}{2x^2} \quad \cdot \cdot \cdot 56)$$

$$w' + w^2 = -\frac{25}{2x^2} \quad \cdot \cdot \cdot 57)$$

чији су партикуларни интеграли

$$a = \frac{9}{2} \quad \Big| \quad v = \frac{9}{2x} \operatorname{cotg} \left[\frac{9}{2} \log x\right] + \frac{1}{2x} \quad \cdot \cdot \cdot 58)$$

$$a = \frac{7}{2} \quad \Big| \quad w = \frac{7}{2x} \operatorname{cotg} \left[\frac{7}{2} \log x\right] + \frac{1}{2x} \quad \cdot \cdot \cdot 59)$$

онда, пошто је у размаку (1,100) непрестано задовољен услов

$$-\frac{41}{2x^2} < -\frac{65}{4x^2} < -\frac{25}{2x^2},$$

проучавани интеграл u мора имати у размаку (1,100) бар онолико бесконачница колико их има у том размаку интеграл w или само једну мање, а највише онолико колико их има у томе размаку интеграл v или само једну више; другим речима: интеграл u

имаће у размаку, (1,100) бар онолико бесконачница колико има целих јединица у вредности

$$a = \frac{7}{2} \left| \frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{2.3{,}14} \cdot 2 = 2, \ldots \right. \qquad \ldots 60)$$

а највише онолико колико има целих јединица у вредности

$$a = \frac{9}{2} \left| \frac{a}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} + 2 = \frac{9}{2.3{,}14} \cdot 2 + 2 = 4, \right. \qquad \ldots 61)$$

Пошто израз 60) има *две* целе јединице, а израз 61) *четири* целе јединице, то закључујемо да проучавани интеграл u једначине 55) има у размаку (1,100) најмање *две*, а највише *четири* бесконачнице, не рачунајући ту евентуалну бесконачницу $x = 1$.

Ако потражимо Штурмове границе, нашли бисмо да је доња граница равна броју целих јединица садржаних у изразу

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{M} = \frac{99}{3{,}14} \cdot \frac{\sqrt{65}}{2.100}, \text{ тј. броју } 1.$$

За горњу границу налазимо број целих јединица садржаних у изразу

$$\frac{\beta - \alpha}{\pi} \sqrt{N} + 2 = \frac{99}{3{,}14} \cdot \frac{\sqrt{65}}{2} + 2, \text{ тј. број } 129.$$

Међутим, лако се уверавамо да интеграл проучаване једначине 55)

$$u = \frac{4}{x} \operatorname{cotg} \left[4 \log x \right] + \frac{1}{2x} \qquad \ldots 62)$$

чије су све бесконачнице дате општим условом

$$x = e^{\frac{k\pi}{4}},$$

има у размаку (1,100) свега 3 бесконачнице, не рачунајући ту бесконачницу $x = 1$.

Као што се види, и у овом случају наше границе 60) и 61) знатно су уже и повољније од Штурмових.

Што се тиче распореда бесконачница интеграла *u* једначине 55), о њему нас обавештавају распореди бесконачница компаративних интеграла *v* и *w*. Ти су распореди, као што смо већ видели, разређени, па ће зато у једном довољно великом размаку и распоред бесконачница проучаванога интеграла *u* бити такође *разређен*.

§ 5.

Можемо се сад запитати како стоје по целисходности међу собом разне границе које смо навели у прошлом §. Можемо се, нпр. питати кад ће доња граница облика

$$a_1 \frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} \quad \ldots 63)$$

бити повољнија од доње границе облика

$$\frac{a_2}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} \quad \ldots 64)$$

Очевидно је да ће то бити случај онда кад је

$$a_1\beta^m - a_1\alpha^m > a_2 \log \beta - a_2 \log \alpha \quad \ldots 65)$$

одакле добијамо правило: *кадгод је прираштај функције* $y = a_1 x^m$ *у размаку* (α, β) *већи од прираштаја* *функције* $y = a_2 \log x$ *у истом размаку, граница 63) повољнија је од границе 64).* Или другим речима: *кад крива линија* $y = a_1 x^m$ *у размаку* (α, β) *брже расте од криве линије* $y = a_2 \log x$, *граница 63) повољнија је од границе 64).*

Тако, нпр. нека је дата једначина

$$u' + u^2 = \frac{3}{4x^2} - 4x^2 \qquad \ldots 66)$$

па се тражи доња граница броји бесконачница интеграла u у размаку (3, 5).

Компарацијом са једначином

$$v' + v^2 = \frac{3}{4x^2} - x^2$$

чији је партикуларни интеграл

$$\left.\begin{aligned} m &= 2 \\ a_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right| \quad v = x \operatorname{cotg} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x}$$

и која задовољава у размаку (3,5) услов

$$\frac{3}{4x^2} - 4x^2 < \frac{3}{4x^2} - x^2,$$

налазимо као доњу границу броја бесконачница интеграла u у размаку (3,5) број целих јединица садржаних у вредности

$$\frac{\beta^m - \alpha^m}{\pi} a_1 = \frac{5^2 - 3^2}{3{,}14} \cdot \frac{1}{2}, \text{ тј. број } \textit{два}. \qquad \cdot \cdot 67)$$

Компарацијом, пак, са једначином

$$w' + w^2 = -\frac{1157}{4x^2}$$

чији је партикуларни интеграл

$$a_2 = 17 \quad \Big| \quad w = \frac{17}{x} \operatorname{cotg} \left[17 \log x \right] + \frac{1}{2x}$$

и која такође, у размаку (3, 5), задовољава услов

$$\frac{3}{4x^2} - 4x^2 < -\frac{1157}{4x^2},$$

налазимо као доњу границу броја бесконачница интéграла u у размаку (3, 5), број целих јединица садржаних у изразу

$$\frac{a_2}{\pi} \log \frac{\beta}{\alpha} = \frac{17}{3{,}14} \log \frac{5}{3}, \text{ т. ј. број један} \quad \cdots \quad 68)$$

Међутим, лако се уверавамо да интеграл u једначине 66)

$$u = 2x \operatorname{cotg} x^2 - \frac{1}{2x}$$

има у размаку (3, 5) *шест* бесконачница.

Граница 67) боља је од границе 68), јер је задовољен услов 65), пошто је у овом случају очевидно

$$5^2 - 3^2 > 17 \log 5 - 17 \log 3$$

На сличан начин могли бисмо поредити међу собом и остале границе.

§ 6.

Ми смо до сад, у § 3, § 4 и § 5, проучавали само бесконачнице интеграла u. Али се све то досадашње испитивање може применити и на *проучавање нула* интеграла u, јер се једначина

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \ldots 69)$$

може сменом

$$u = \frac{1}{\dfrac{v}{\omega(x)} + \dfrac{\omega'(x)}{2\,\omega^2(x)}} \qquad \ldots 70)$$

трансформисати у једначину

$$v' + v^2 = G(x) \qquad \ldots 71)$$

где је

$$G(x) = \omega(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2$$

тако да, кадгод је функција ω(x) холоморфна у посматраном размаку, што уосталом увек претпостављамо, бесконачнице интеграла v поклапају се са нулама интеграла u. На тај начин, посматрајући једначину 71), ми смо у стању да нађемо доњу и горњу границу броја нула интеграла u једначине 69) што леже у једном датом размаку (α, β); моћи ћемо, затим, обележити размаке у којима уопште нема нула; можемо проучити распоред нула у датом размаку и т. д..

§ 7.

Уочимо једначину

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \ldots 1)$$

Лако се увиђа да двоструке нуле интеграла u могу бити само нуле функције ω(x), пошто у том случају мора у исто време бити

$$u = o \qquad\qquad u' = o$$

Према томе, *двоструке нуле интеграла* **u** *сталне су.*

Диференцирајући једначину 1) добијамо

$$u'' + 2uu' = \omega' (x)$$

одакле видимо да троструке нуле интеграла u могу бити само нуле функције ω' (x), јер за троструке нуле интеграла u мора бити у исто време

$$u = o \qquad u' = o \qquad u'' = o$$

И троструке нуле су, дакле, сталне.

На сличан начин налазимо да четворостру̂ке нуле интеграла u могу бити само нуле функције ω'' (x) и уопште: да n — струке нуле интеграла u могу бити само нуле функције

$$\overset{(n-2)}{\omega}(x)$$

где (n—2) означава ред извода.

Према томе, *све вишеструке нуле интеграла* ***Riccati****-еве једначине 1) сталне су.*

Узмимо, као пример, једначину

$$u' + u^2 = x^2 - 1 \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ 2)$$

Интеграл u једначине 2) може, према малопређашњем, имати као двоструке нуле само вредности x = + 1 и x = — 1. Лако се, међутим, уверавамо да једначина 2) има као један интеграл израз

$$u = x^2 - 2x + 1$$

и он одиста има као двоструку нулу вредност x = + 1.

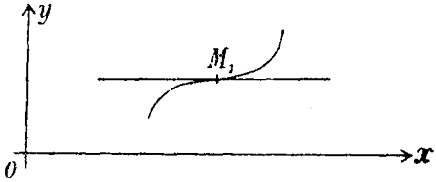
§ 8.

Хоризонталне превојне тачке. — То су, н. пр., тачке M_1 и M_2 у сликама 3 и 4.

Испитајмо сад, може ли се на датој Riccati-евој једначини

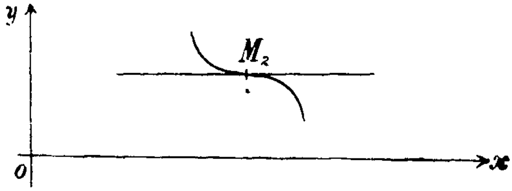
$$u' + u^2 = \omega(x) \quad \cdot \quad \cdot \; 1)$$

распознати да ли њени интеграли имају тих хоризонталних превојних тачака.



Сл. 3.

Да би, уопште, једна функција u имала коју превојну тачку као у сл. 1, треба, као што је лако увидети, да за извесну вредност независно промењиве буде у исто време



Сл. 4.

$$u' = o \qquad u'' = o \qquad u''' > o,$$

а да би имала коју превојну тачку као у сл. 2, треба да за извесну вредност независно промењиве буде у исто време

$$u' = o \qquad u'' = o \qquad u''' < o$$

Ако ово резоновање применимо на један интеграл u Riccati-еве једначине 1), добићемо ове резултате.

Крива линија

$$y^2 = \omega(x)$$

представљаће нам геометријско место евентуалних хоризонталних превојних тачака.

Интеграл u имаће хоризонталних превојних тачака, као у сл. 1, за оне вредности x за које је у исто време

$$\omega'(x) = o$$
$$\omega''(x) > o,$$

а превојних тачака као у сл. 2. за оне вредности x за које је у исто време

$$\omega'(x) = o$$
$$\omega''(x) < o$$

Тако, н. пр., за једначину

$$u' + u^2 = x^6 + 2x^3 + 3x^2 + 1 \quad \cdot \cdot \cdot 2)$$

имамо да је

$$\omega(x) = x^6 + 2x^3 + 3x^2 + 1$$
$$\omega'(x) = 6x^5 + 6x^2 + 6x$$
$$\omega''(x) = 30x^4 + 12x + 6$$

Из последња два израза видимо да је за вредност x = o

$$\omega'(o) = o$$
$$\omega''(o) > o$$

Према томе, тачка чија је апсциса x = o биће за интегралну криву u једна хоризонтална превојна тачка као у сл. 1.

На сличан начин налазимо да интеграл u једначине

$$u' + u^2 = x^6 - 2x^3 - 3x^2 + 1 \quad \cdot \cdot \cdot 3)$$

има за хоризонталну превојну тачку као у сл. 2 ону тачку која одговара опет вредности x = o.

Ове резултате можемо врло лако верификовати, јер једначина 2) има као један интеграл израз

$$u = 1 + x^3, \qquad \ldots 4)$$

а једначина 3) израз

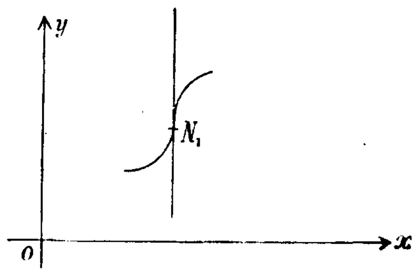
$$u = 1 - x^3 \qquad \ldots 5)$$

Крива линија, међутим, чија је једначина 4), има одиста једну превојну тачку као у сл. 1. и она одговара баш апсциси x = o. Исто тако, лако се увиђа да крива линија, чија је једначина 5), има једну превојну тачку као у сл. 2 и она такође одговара апсциси x = o.

Вертикалне превојне тачке. — То су, н.пр., тачке N_1 и N_2 у сликама 5 и 6.

Очевидно је да је у вертикалним превојним тачкама

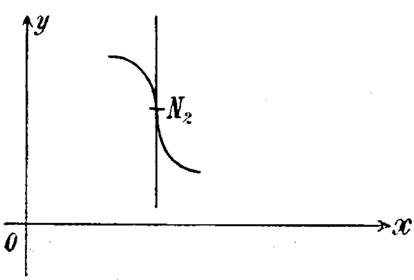
$$u = \infty$$



Сл. 5.

Према томе, интеграл *u* може имати вертикалних превојних тачака на коначној раздаљини само за оне коначне вредности x за које је

$$\omega(x) = \infty$$



Сл. 6.

Ако је, н. пр., $\omega(\mathbf{x})$ ма какав полином по x, ниједан интеграл одговарајуће Riccati-еве једначине неће имати на коначној раздаљини вертикалних превојних тачака; а ако је на пр.

$$\omega(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

где су P и Q полиноми по x, који немају заједничких нула, онда интеграл *u* одговарајуће Riccati-еве једначине може имати вертикалних превојних тачака само за нуле полинома Q.

§ 9.

Посматрајмо једначину

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \cdots \quad 1)$$

и покушајмо да нађемо и раздвојимо области у којима интеграли *u* могу имати *максимуме* и *минимуме*.

Интеграл *u* може имати максимуме и минимуме само за оне вредности x за које је

$$u' = o$$

Ако у једначини 1) ставимо u' = o, добијамо једначину

$$u^2 = \omega(x) \qquad \cdots \quad 2)$$

која нам представља геометријско место евентуалних максимума и минимума.

Диференцирајући једначину 1), добијамо

$$u'' + 2uu' = \omega'(x),$$

па како је, за све вредности x за које *u* може достићи који максимум или минимум, u' = o, имаћемо

$$u'' = \omega'(x) \qquad \cdots \quad 3)$$

одакле закључујемо: један интеграл *u* може имати максимуме само за оне вредности x које задовољавају неједначину

$$\omega'(x) < o,$$

а може имати минимуме само за оне вредности x које задовољавају неједначину

$$\omega'(x) > o$$

С обзиром на једначине 2) и 3), последње резултате можемо исказати и у овом облику:

један интеграл **u** *Riccati-еве једначине 1) може имати максимуме само за оне вредности x што се налазе у размацима у којима крива линија 2) опада, а може имати минимуме само за оне вредности x што се налазе у размацима у којима крива линија 2) расте.*

§ 10

Предмет овога § биће испитивање *асимтотних вредности* интеграла Riccati-еве једначине

$$u' + u^2 = \omega(x)$$

Задатак је, дакле: да се испита како се понашају интеграли u кад x бескрајно расте.

Напишимо Riccati-еву једначину у облику

$$u' = \omega(x) - u^2 \qquad \dots \quad 1)$$

Пустимо сад да x бескрајно расте, и нека функција $\omega(x)$, кад x бескрајно расте, тежи једној коначној и одређеној граници ω_0., т.ј. нека буде

$$\lim \omega(x) = \omega_0$$
$$\text{за } x = \infty$$

Према томе: да ли је та граница ω_0 позитивна, равна нули или негативна, разликоваћемо ова три случаја.

1°. Нека буде, најпре,

$$\omega_0 > o$$

Онда ће једначина

$$\omega_0 - u^2 = o$$

очевидно имати реалне корене, и нека ти корени буду $+a$ и $-a$.

Корени једначине

$$\omega - u^2 = o$$

нека буду $+\alpha$ и $-\alpha$.

Очевидно је де ће корени $+\alpha$ и $-\alpha$ бити извесне функције од x, које ће тежити граничним вредностима $+a$ и $-a$, кад x буде бескрајно расло.

Према томе: да ли корени α теже својим границама a опадајући или растући, разликоваћемо ова два случаја.

А). Нека корени α теже својим границама a опадајући, т.ј. нека је

$$\alpha > a$$

Посматрајмо сад један интеграл једначине 1), који је, за иницијалну вредност x_0, већи од α. Нека то буде, нпр., интеграл u. Пустимо сад да x расте од x_0 до $+\infty$ и испитајмо шта ће за то време бити са интегралом u. Очевидно је, пошто је $u' < o$, да ће он одмах почети да опада и опадаће све дотле док буде већи од α. Међутим, он не може никад бити мањи од α, јер чим би постао мањи од α морао би почети да расте, пошто би тада, као што се види из једначине *1*), било $u' > o$.

Отуда закључујемо: да ће интеграл u стално опадати, али ће при том остати увек већи од a. Постојаће, дакле, једна граница, којој ће интеграл u тежити кад x буде бескрајно расло. И та граница мора бити баш вредност a, јер ако би интеграл u

тежио некој другој граници a_1, која би била већа од a, једначина

$$x - x_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\omega - u^2} \quad . \quad . \quad . \qquad 2)$$

коју лако изводимо из једначине *1*), довела би до једне контрадикције, пошто би десна страна остала коначна кад би u тежило вредности a_1.

Посматрани интеграл **u** *има, дакле, за границу вредност* **a**.

B). Нека корени α теже својим границама a растући, т.ј. нека је

$$\alpha < a$$

Посматрајмо опет један интеграл једначине *1*), који ће, за иницијалну вредност $x = x_0$, бити већи од α. Нека тај интеграл буде u. Очевидно је, да ће интеграл u одмах почети да опада и опадаће све дотле док не постане раван α. Кад постане раван α, онда ће почети да расте, али неће моћи сад никако да достигне α, јер ако би интеграл u превазишао вредност α, морао би у исто време и расти и опадати. У сваком случају, интеграл u тежиће једној граници и, као и мало пре, налазимо да је та граница баш вредност а.

Уочимо, н.пр., једначину

$$u' + u^2 = \frac{1 + x^2}{(1 + x)^2} \quad . \quad . \quad . \qquad 3)$$

и потражимо асимтотну вредност једнога њенога интеграл u.

У овом случају је

$$\omega(x) = \frac{1 + x^2}{(1 + x)^2}$$

$$\lim \omega(x) = \omega_0 = 1,$$

$$\text{за } x = \infty$$

па ће, дакле, бити и

$$a = 1$$

Отуда закључујемо: да ће се интеграл u једначине 3), кад x бескрајно расте, бескрајно приближавати вредности 1.

Да бисмо се уверили о тачности овога закључка, довољно је само да напоменемо да је један интеграл посматране једначине 3)

$$u = \frac{x}{1 + x};$$

Из досадашњега извођења види се да сви интеграли, који у једном моменту постају већи од α, имају за границу a. Исти закључак важи и за интеграле који у једном моменту постају једнаки каквој вредности што се налази између $+\alpha$ и $-\alpha$, јер они тада расту и бескрајно се приближују граници a.

Остаје још само да се испита случај кад је непрекидно.

$$u < -\alpha$$

Кад је $-\alpha$ веће од $-$a, може се десити, ако се иницијална вредност од u налази између $-$a и $-\alpha$, да интеграл u има за границу вредност $-$a. Ако гранична вредност интеграла u није $-$a, као што по правилу неће ни бити, интеграл u продужиће да бескрајно опада све до $-\infty$; једначина 2) показује да ће интеграл u постати $-\infty$ за једну коначну вредност x. Затим ће наступити за интеграл u скок од $-\infty$ на $+\infty$, и тада већ имамо посла са мало пре испитаним случајем, т. ј. да интеграл u тежи опет граничној вредности a.

Тако, н.пр, интеграл u једначине

$$u' + u^2 = \frac{x^2 - 1}{(1 + x)^2}$$

има за асимтотну вредност -1, као што се лако увиђа из обрасца, којим је представљен интеграл u,

$$u = -\frac{x}{1 + x}$$

Интеграл **u** *имаће, дакле, као асимтотну вредност, по правилу,* $+$ **a**, а *само по изузетку* $-$ **a**.

Све досадашње извођење претпоставља, као што смо већ раније поменули, да функција $\omega(x)$, кад x бескрајно расте, тежи једној коначној, одређеној и позитивној граници ω_0; другим речима: да корени једначине

$$\omega_0 - u^2 = 0$$

буду реални.

2°. Нека буде сад

$$\omega_0 = 0,$$

т.ј. нека функција $\omega(x)$, кад x бескрајно расте, тежи нули. Онда ће, очевидно, бити и

$$a = 0$$

Интеграл u *имаће, у овом случају, као граничну вредност нулу*; другим речима: *интегрална крива приближаваће се асимтотно апсцисној осовини.*

Уочимо, н. пр., једначину

$$u' + u^2 = \frac{1 - 2x}{x^4} \quad . \; . \; . \; . \quad 4)$$

и потражимо асимтотну вредност једнога њенога интеграла u.

У овом случају је

$$\omega(x) = \frac{1 - 2x}{x^4}$$

$$\lim \omega(x) = \omega_0 = o\,,$$

$$\text{за } x = \infty$$

па ће, дакле, бити и

$$a = o$$

Интегрална крива, у овом случају, асимтотно ће се приближавати апсцисној осовини. Да бисмо се уверили о тачности овога закључка, довољно је само да напоменемо да је један интеграл посматране једначине 4)

$$u = \frac{1}{x^2}$$

3° Нека буде, најзад,

$$\omega_0 < o\,,$$

т. ј. нека функција $\omega(x)$, кад x бескрајно расте, тежи једној коначној, одређеној и негативној граници ω_0; другим речима: нека корени једначине

$$\omega_0 - u^2 = o$$

буду имагинарни.

Закључци, су, тада, сасвим друкчији.

У овом последњем случају биће, очевидно, u' увек негативно, па ће зато интеграл u стално опадати почевши од једне довољно велике вредности x.

Међутим, за једну коначну вредност x интеграл u мораће постати $-\infty$. Јер, пре свега, није могуће, према пређашњем, да за $x = +\infty$ интеграл u има какву коначну и одређену границу. Осим тога, исто тако није могуће да интеграл u достигне само вредност $-\infty$ за $x = +\infty$, као што то показује једначина 2), чија би лева страна бескрајно расла, док би десна страна остала коначна.

Сваки интеграл **u**, *у овом случају, осциловаће бескрајно много пута између* $+\infty$ *и* $-\infty$, *са наглим прелазом од* $-\infty$ *на* $+\infty$.

Такав је случај, н. пр., са интегралима једначине

$$u' + u^2 = -1,$$

који су, као што је лако уверити се, сви дати општим обрасцем

$$u = \tan g\,(c - x)$$

где је c интеграциона константа.

Напомена. Poincaré, Picard и М. Петровић испитали су асимтотне вредности интеграла Riccati-еве једначине у проширеном облику. Резултати, које смо ми, по Picard-у, извели непосредним посматрањем Riccati-еве једначине у општем облику, у потпуној су хармонији са тим резултатима што се односе на интеграле Riccati-еве једначине у проширеном облику.

III ПРИБЛИЖНА ИНТЕГРАЦИЈА

Познато је да се проблем приближне интеграције какве диференцијалне једначине

$$f(x, u, u' \ldots) = o \qquad \cdots \quad 1)$$

може схватити на два разна начина:

1° може се тражити место тачног интеграла u таква једна вредност v да резултат, који се добија кад се v смени на левој страни једначине 1), буде у датом размаку (α, β) један врло мали број. Тада се тај врло мали број може, у првој апроксимацији, занемарити, т. ј. права вредност интеграла u идентификује се са приближном вредности v.

Тако, н. пр., ако је дата једначина

$$u' + u^2 = \omega(x) \qquad \cdots \quad 2)$$

која се не може интегралити или се уопште тешко интеграли, па се нађе друга једначина

$$v' + v^2 = \theta(x) \qquad \cdots \quad 3)$$

која се може интегралити и чија се функција $\theta(x)$ разликује од функције $\omega(x)$ за функцију $\varepsilon(x)$, тако да је

$$\omega(x) = \theta(x) + \varepsilon(x), \qquad \cdots \quad 4)$$

онда, ако у једначини 2), сведеној на нулу, сменимо u са v, водећи рачуна о релацији 4), добија се као резултат на левој страни

$$v' + v^2 - \theta(x) - \varepsilon(x)$$

Међутим, пошто је идентички

$$v' + v^2 - \theta(x) = o,$$

то се горњи резултат своди на функцију $-\varepsilon(x)$.

Ако сад функција $\varepsilon(x)$, у посматраном размаку (α, β), остаје, по апсолутној вредности, мања од известног броја којим се можемо задовољити, онда се у приближности сматра као да је $\varepsilon(x) = o$. Сматра се, дакле, као да интеграл v задовољава једначину 2), па нам зато v представља приближну вредност непознатога интеграла u.

Овај начин приближне интеграције има ту незгодну страну што се не зна у којој се мери приближна вредност v разликује од праве вредности u; 2° могу се тражити такве две познате и одређене функције v и w, за које смо у стању тврдити да се у посматраном размаку (α, β) права вредност интеграла u непрестано налази између њих.

Ако је, н. пр.,

$$v \leqslant u \leqslant w$$

очевидно је да ће бити

$$u = \frac{v + w}{2} + \varepsilon$$

где је ε, по апсолутној вредности, увек

$$\varepsilon < \frac{w - v}{2}$$

На тај начин, знајући функције v и w, знаћемо одмах и једну приближну вредност интеграла u, која је дата обрасцем

$$u = \frac{v + w}{2},$$

а, осим тога, познаваћемо и границу за највећу могућну грешку коју чинимо замењујући, у посматраном размаку, праву вредност интеграла приближном. Та је граница, очевидно, дата обрасцем

$$\frac{w - v}{2}$$

Овај други начин приближне интеграције има, као што се види, ту добру страну што увек знамо и степен приближности до које смо у датом случају дошли.

Израз за највећу могућну грешку

$$\frac{w - v}{2}$$

показује да ће грешка у толико бити мања, у колико су функције v и w, у посматраном размаку, ближе једна другој.

Приближна интеграција, на овај други начин схваћена, има, дакле, за циљ да одреди доњу и горњу границу проучаванога интеграла у посматраном размаку.

§ 1.

Напишимо дату Riccati-еву једначину

$$u' + u^2 = \omega(x)$$

у облику

$$u' = (\sqrt{\omega} + u)(\sqrt{\omega} - u) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 1)$$

Претпоставимо да је функција $\omega(x)$ у размаку (o, α) позитивна и да не опада и посматрајмо интеграл u једначине 1) који постаје раван нули за $x = o$.

За њега можемо доказати ове резултате.

За све вредности $\mathbf{x}$ *у размаку* (o, α) *интеграл* $\mathbf{u}$ *је позитиван и непрестано расте, али не достиже никад вредност* $\sqrt{\omega}$.

Пре свега, интеграл u не може ни почети да опада, јер би тада био негативан, а његов први извод u', према једначини 1), позитиван.

Ако функција ω не постаје равна нули за $x = o$, за ту вредност x, пошто је $u = o$, биће, ако са u'_0 означимо вредност првога извода интеграла u у тачки чија је апсциса $x = o$,

$$u'_0 = \omega(o),$$

па како је, према претпоставци,

$$\omega(o) > o,$$

интеграл u, пошто постаје раван нули за $x = o$, расте почевши од $x = o$ и остаје, према томе, позитиван. И доклегод је

$$u < \sqrt{\omega}$$

интеграл u стално ће расти, јер је извод u', према једначини 1), за све то време позитиван. Али, растући, интеграл u не може никако превазићи па ни достићи одговарајућу вредност функције $\sqrt{\omega}$, јер, чим би је прешао, морао би почети да опада, пошто би извод u' постао негативан, јер би тада било

$$\sqrt{\omega} + u > o$$

$$\sqrt{\omega} - u < o$$

С друге стране, међутим, чим би интеграл u почео да опада, постао би мањи од $\sqrt{\omega}$, извод u' био би позитиван, те би тако интеграл u морао у исто време и опадати и расти, што је очевидно немогућно. Тиме је доказан горњи резултат.

Ако функција ω постаје равна нули за $x = o$, а крива линија

$$y = \sqrt{\omega (x)}$$

не тангира у координатном почетку осу x, интегрална крива имаће у координатном почетку, према ономе што смо раније рекли о максимумима и минимумима, један *минимум*, јер, диференцирајући једначину 1), добијамо да је тада за $x = o$

$$u = o \qquad u' = o \qquad u'' = \omega' (o) > o$$

А ако крива линија

$$y = \sqrt{\omega (x)}$$

тангира осу x у координатном почетку и ако је додир прост, координатни почетак биће, према ономе што смо раније рекли о превојним тачкама, једна *хоризонтална превојна тачка* интегралне криве, јер бисмо тада имали да је за $x = o$

$$u = o \qquad u' = o \qquad u'' = o \qquad u''' = \omega'' (o) > o$$

Ако за размак (o, α) узмемо размак (o, ∞) и ако функција $\sqrt{\omega}$ у том размаку асимтотно тежи једној коначној и одређеној граници a, интеграл u такође ће асимтотно тежити тој истој граници.

Јер, како u непрестано расте, а не може, према пређашњем, никако да превазиђе вредност a, извод

u' тежиће нули кад x бескрајно расте, што значи, према једначини 1), да интеграл u асимтотно тежи граници а; резултат који, уосталом, излази и непосредно из онога што смо рекли у одељку о асимтотним вредностима уопште.

§ 2.

Нека су дате две Riccati-еве једначине

$$u' + u^2 = \omega_1 (x) \qquad \ldots 1)$$

$$v' + v^2 = \omega_2 (x) \qquad \ldots 2)$$

где су ω_1 и ω_2 коначне и непрекидне функције од x у посматраном размаку.

Претпоставимо да је у датом размаку (o, α) непрестано

$$\omega_1 > \omega_2$$

и нека интеграл u постаје бескрајан за $x = o$, а да то није случај са интегралом v

Онда ће, под претпоставкама које су садржане још и у доказу, у посматраном размаку, *бити у исто време* и

$$u > v$$

Да бисмо горње тврђење доказали, трансформишимо најпре дате Riccati-еве једначине 1) и 2) простим сменама

$$u = \frac{y'}{y} \qquad \ldots 3)$$

$$v = \frac{z'}{z} \qquad \ldots 4)$$

у одговарајуће линеарне једначине другога реда

$$y'' = \omega_1 (x) y \qquad \cdot \cdot \cdot 5)$$

$$z'' = \omega_2 (x) z \qquad \cdot \cdot \cdot 6)$$

и посматрајмо оне интеграле y и z који у проучаваном размаку задржавају исти знак; нека, поред тога, интеграл y постаје раван нули за $x = o$, а то нека ће не буде случај са интегралом z.

Помножимо једначину 5) са z, једначину 6) са y и одузмимо другу тако добијену једначину од прве, па ћемо добити

$$zy'' - yz'' = yz (\omega_1 - \omega_2) \qquad \cdot \cdot \cdot 7)$$

Помноживши, затим, једначину 7) са dx и интегралећи је у границама од h до x, где је h један ма какав број, добија се

$$zy' - yz' = C + \int_h^x yz (\omega_1 - \omega_2) \, dx \qquad \cdot \cdot \cdot 8)$$

где је

$$C = \Big[zy' - yz' \Big]_{\text{за } x = h}$$

Вредност константе C зависи од посматраних интеграла y и z једначина 5) и 6). Кад је један утврђен, вредност константе C зависиће једино од оног другог посматраног интеграла.

Поделимо једначину 8) количином $y z$, која је, по претпоставци, позитивна, па ћемо добити

$$\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} = \frac{C}{yz} + \frac{1}{yz} \int_h^x yz (\omega_1 - \omega_2) \, dx \qquad \cdot \cdot \cdot 9)$$

Ако узмемо $h = + \varepsilon$, где је ε врло мала количина, биће

$$C = yz \left[\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} \right]_{\text{за } x = + \varepsilon} \qquad \cdot \cdot \cdot 10)$$

Пошто за $x = +\varepsilon$, логаритамски извод $\frac{y'}{y}$ има врло велику позитивну вредност, а производ yz по претпоставци је стално позитиван, то ће и константа C бити очевидно позитивна.

С друге стране, пошто је у размаку (o, α) непрестано, по претпоставци,

$$yz > o$$

$$\omega_1 - \omega_2 > o$$

то ће и интеграл

$$\int_{+\varepsilon}^{x} yz\,(\omega_1 - \omega_2)\,dx$$

бити позитиван у посматраном размаку.

Једначина 9) тада показује да ће у размаку (o, α) непрестано бити

$$\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} > o$$

или

$$\frac{y'}{y} > \frac{z'}{z}$$

или, према једначинама 3) и 4),

$$u > v,$$

што је и требало доказати.

§ 3.

Посматрајмо две Riccati-еве једначине

$$v' + v^2 = \omega_1(x) \qquad \cdots 1)$$

$$w' + w^2 = \omega_2(x) \qquad \cdots 2)$$

За функције ω_1 и ω_2 претпостављамо да су у посматраном размаку (o, α) позитивне и да не опадају. Ако је, осим тога, у размаку (o, α) непрестано

$$\omega_1 > \omega_2, \qquad \ldots 3)$$

биће такође у томе размаку **и**

$$v > w$$

где су v и w интеграли једначина 1) и 2) који постају равни нули за $x = o$.

Пре свега, из једначина 1) и 2), према услову 3), добијамо неједначину

$$v' + v^2 > w' + w^2 \qquad \ldots 4)$$

Неједначину 4) можемо написати и у облику

$$v' - w' > w^2 - v^2 \qquad \ldots 5)$$

Ако би сад за једну вредност x, блиску вредности $x = o$, било

$$w > v,$$

морало би у исто време бити, према неједначини 5), и

$$v' > w'$$

или

$$\frac{d}{dx}(v - w) > o$$

То значи да диференција $v - w$ расте почевши од те вредности x. Па како је она за $x = o$ равна нули, морало би, почевши од $x = o$, бити

$$v > w$$

С друге стране, међутим, да би диференција $v - w$ могла постати негативна почевши од једне вредности

$x = b$ што се налази у размаку (o, α), треба да се сведе на нулу за $x = b$, па пошто би, према малопређашњем, почевши од $x = b$ диференција $v - w$ морала расти, наилазимо опет на контрадикцију, чиме је горњи резултат доказан.

§ 4.

Нека су дате три Riccati-еве једначине

$$v' + v^2 = \omega_1 (x) \qquad \cdots 1)$$

$$u' + u^2 = \omega (x) \qquad \cdots 2)$$

$$w' + w = \omega_2 (x) \qquad \cdots 3)$$

где за функције ω_1, ω и ω_2 опет претпостављамо да су у посматраном размаку (o, α) позитивне и да не опадају.

Ако је, поред тога, у томе размаку непрестано

$$\omega_1 > \omega > \omega_2$$

биће у исто време у томе размаку и

$$v > u > w$$

где су v, u и w интеграли једначина 1), 2) и 3) који постају равни нули за $x = o$

Овај резултат је, очевидно, непосредна последица резултата доказаног у § 3.

Последњи резултат може имати врло корисну примену у приближној интеграцији Riccati-еве једначине.

Ако, нпр., треба да проучимо једначину 2) која се не може интегралити, онда ћемо за компаративне једначине 1) и 3) изабрати такве једначине које можемо интегралити или бар такве о чијим интегралима можемо имати довољно потребних података. На тај начин добићемо и податке о границама између којих се непрестано, у посматраном размаку (o, α), налази проучавани интеграл u. Тако бисмо са извесном приближношћу могли створити и слику о току проучаване интегралне криве линије.

Очевидно је да ћемо интеграл u у толико боље познавати у колико компаративне функције ω_1 и ω_2 буду тешње обухватале функцију ω.

§ 5.

Наведимо у овом § једну познату методу која се може корисно употребити за приближну интеграцију диференцијалних једначина првога реда уопште. Та метода заснива се на генералисаној познатој теореми средњих вредности*).

Нека је дата једначина

$$\frac{du}{dx} = F(x, u) \qquad \ldots 1)$$

где је F ма каква, алгебарска или трансцендентна, функција од x и u и нека је дата почетна тачка (x_0, u_0) траженог реалног интерала u. Тада ћемо бити увек у стању да изберемо, и то на бескрајно много начина, друге две једначине

$$\frac{dv}{dx} = F_1(x, v) \qquad \ldots 2)$$

$$\frac{dw}{dx} = F_2(x, w) \qquad \ldots 3)$$

и један размак, с једне и друге стране вредности $x = x_0$, тако да се за сваку вредност x, обухваћену

*) M. Petrovitch, Sur une manière d'étendre le thèoréme de la moyenne aux équations differentielles du premier ordre. Math. Annalen LIV Bd. 3. Hft.

тим размаком, вредност интеграла u налази између одговарајућих вредности интеграла v и w једначина 2) и 3) који за $x = x_0$ имају вредности $v_0 = w_0 = u_0$. И ова одредба доње и горње границе интеграла u биће могућна па ма каква била почетна тачка (x_0, u_0), само ако се не налази на извесним утврђеним кривим линијама у равни (x, u) које се, уосталом, могу унапред знати за дату једначину 1).

Дату једначину *1*) можемо на бескрајно много начина написати у облику

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, f) \qquad \cdots \quad 1^*)$$

где је f један коефициент који зависи од x, који фигурише у функцији F и на који обраћамо нарочиту пажњу.

Претпоставимо да су за иницијалну вредност (x_0, u_0) и функција F и њен парцијални извод

$$\frac{dF}{df} = H(x, u, f)$$

одређени, коначни и непрекидни, да осим тога не мењају детерминацију и да парцијални извод за ту тачку не постаје раван нули. Тачке које не испуњавају ове услове припадају извесним утврђеним кривим линијама у равни (x, u) које можемо унапред знати за дату једначину *1*) или су, пак, изоловане и сталне.

Ставивши $f(x_0) = \varrho$ можемо увек одредити две константне вредности λ и μ тако да буде

$$\lambda < \varrho < \mu$$

и да функција $H(x, u, t)$, сматрана као функција од t, остаје коначна, одређена, непрекидна и различита од нуле, док t варира од λ до μ. Можемо затим увек, и то на бескрајно много начина, одредити две функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ које ће задовољавати ове услове:

1^0 да буде $\varphi(x_0) = \lambda$ $\qquad \psi(x_0) = \mu$;

2_0 да буду коначне, одређене и непрекидне у једном размаку $(x_0 - a_1, x_0 + a_2)$;

3^0 да интеграли v и w једначина

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \varphi) \qquad \dots 4)$$

$$\frac{dw}{dx} = F(x, w, \psi), \qquad \dots 5)$$

који за $x = x_0$ имају заједничку вредност $v_0 = w_0 = u_0$, буду коначни, одређени и непрекидни у једном размаку $(x_0 - b_1, x_0 + b_2)$.

Изабравши на тај начин функције φ и ψ, ставимо

$$R_1(x, \theta_1) = \varphi + (f - \varphi)\theta_1$$

$$R_2(x, \theta_2) = \psi + (\psi - f)\theta_2$$

где су θ_1 и θ_2 два броја што се налазе између o и 1, и уочимо функције

$$G_1(x, \theta_1) = H(x, v, R_1)$$

$$G_2(x, \theta_2) = H(x, w, R_2)$$

сматране као функције од x, θ_1 и θ_2, пошто се v, w, R_1 и R_2 смене њиховим вредностима изражении помоћу x, θ_1 и θ_2.

Лако се доказује да функције G_1 и G_2 не постају равне нули за $x = x_0$ и да за ту вредност x

имају заједнички знак, па ма какве биле вредности θ_1 и θ_2 у размаку од 0 до *1*. Другим речима: увек ће постојати један такав размак $(x_0 - c_1,\ x_0 + c_2)$ да за сваку вредност x обухваћену тим размаком и за

$$o < \theta_1 < 1 \qquad o < \theta_2 < 1,$$

функције G_1 и G_2 буду одређене, коначне, непрекидне, да не мењају детерминацију и не постају равне нули. Доњу границу овога размака имаћемо н.пр. ако потражимо такав размак $(x_0 - g_1,\ x_0 + g_2)$ да, означивши са (M_1, M_2) и (N_1, N_2) одговарајуће границе између којих варирају функције (φ, ψ) и (v, w), за вредности x у томе размаку, функција $H\ (x, u, t)$ остаје одређена, коначна, непрекидна и различита од нуле, док x варира од $x_0 - g_1$ до $x_0 + g_2$ и од N_1 до N_2 и t од M_1 до M_2.

Најзад, како је функција $F(x, u, f)$, где је и f функција од x, одређена, коначна и непрекидна за $x = x_0$, $u = u_0$, постојаће увек један размак, н.пр. од $x_0 - d_1$ до $x^0 + d_2$, такав да, означивши са (N_1', N_2') доњу и горњу границу између којих варирају v и w, са (M_1', M_2') доњу и горњу границу између којих варирају φ и ψ, функција $F\ (x, u, f)$ остаје непрестано одређена, коначна и непрекидна, док x варира у размаку $(x_0 - d_1,\ x_0 + d_2)$, u између N_1' и N_2', а f између M_1' и M_2'.

Уочимо сад један размак $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$ који се садржи у сва четири раније поменута размака $(x_0 - a_1,\ x_0 + a_2)$, $(x_0 - b_1, (x_0 + b_2)$, $(x_0 - c_1,\ x_0 + c_2)$, $(x_0 - d_1,\ x_0 + d_2)$. Тада се лако доказује ова теорема која управо представља генералисану теорему средњих вредности: *за сваку вредност x, обухваћену размаком $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$ интеграл* **u** *једначине 1), који за $x = x_0$ има унапред дату вредност $u = u_0$ одређен је, коначан и непрекидан и непрестано се налази* *између одговарајућих вредности интеграла* **v** *и* **w** *једначина 4) и 5) који за* $x = x_0$ *имају исту вредност* $v_0 = w_0 = u_0$.

Очевидно је, према напред изложеном, да ће свакој диференцијалној једначини *1*) и сваком скупу иницијалних вредности (x_0, u_0) — осим ако се тачка (x_0, u_0) не налази на раније поменутим утврђеним кривим линијама — одговарати један размак $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ чија ће величина бити различита, према случају с којим се има посла, али који никад није раван нули.

Употреба ове теореме сасвим је слична употреби теореме средњих вредности. За дату једначину, написану у облику *1**), треба одредити две функције φ и ψ које у близини вредности $x = x_0$ обухватају што је могућно тешње функцију f и које би биле такве да једначине 4) и 5), које њима одговарају, или можемо потпуно интегралити или их бар можемо лакше проучити него дату једначину. Размак $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ мора, да укратко поновимо, задовољавати ове услове:

1° у њему су функције φ и ψ холоморфне и непрекидно задовољавају услов

$$\varphi < f < \psi;$$

2° интеграли v и w једначина

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \varphi)$$

$$\frac{dw}{dx} = F(x, w, \psi)$$

који за $x = x_0$ имају заједничку вредност u_0, холоморфни су;

3^0 функције $G_1(x, \theta_1)$ и $G_2(x, \theta_2)$ холоморфне су и не постају равне нули па ма какве вредности, између 0 и 1, имале променљиве θ_1 и θ_2;

4^0 функција $F(x, u, t,)$ холоморфна је док u варира између N_1' и N_2', t између M_1' и M'_2, где (M_1', M'_2) означавају доњу и горњу границу између којих варирају φ и ψ, а (N_1', N_2') доњу и горњу границу између којих варирају v и w, док x варира између $x_0 - h_1$ и $x_0 + h_2$.

Применимо последње резултате на Riccati-еву једначину

$$\frac{du}{dx} + u^2 = \omega(x)$$

написану у облику

$$\frac{du}{dx} = \omega(x) - u^2$$

Нека иницијална вредност $x = x_0$ не буде никакав сингуларитет функције $\omega(x)$, која ће тада бити непрекидна у извесном размаку (a_1, a_2) који обухвата вредност $x = x_0$.

Функција $H(x, u, t)$ овде се своди на 1, па је

$$G_1(x, \theta_1) = 1 \qquad G_2(x, \theta_2) = 1$$

Остаје нам још само да одредимо размак (b_1, b_2) тако да буде

$$a_1 \leqslant b_1 < x_0 < b_2 \leqslant a_2$$

у коме ће компаративни интеграли v и w бити холоморфни.

Да бисмо имали што простије интеграле v и w, претпоставимо да у размаку (a_1, a_2) функција $\omega(x)$

задржава стално један исти знак. Разликујмо, према томе, ова два случаја:

1° Нека буде $\omega(x) > o$.

Ако означимо са M_1 и M_2 (где је $M_1 < M_2$) два позитивна броја између којих се налази функција ω док x варира у размаку (a_1, a_2), ставивши

$$\varphi(x) = M_1 \qquad \psi(x) = M_2$$

имаћемо

$$v = \frac{C\sqrt{M_1}\, e^{2\sqrt{M_1}x} + \frac{1}{2}}{Ce^{2\sqrt{M_1}x} - \frac{1}{2\sqrt{M_1}}} \quad \ldots \quad 6)$$

$$w = \frac{C\sqrt{M_2}\, e^{2x\sqrt{M_2}} + \frac{1}{2}}{Ce^{2x\sqrt{M_2}} - \frac{1}{2\sqrt{M_2}}} \quad \ldots \quad 7)$$

одакле се лако налазе границе траженога размака (b_1, b_2).

И у тако одређеном размаку, интеграл u биће холоморфан и стално обухваћен одговарајућим вредностима интеграла v и w дефинисаних обрасцима **6**) и 7);

2° Нека буде $\omega(x) < o$

Ако тада $-M_1$ и $-M_2$ имају малопређашње значење, ставивши

$$\varphi(x) = -M_1 \qquad \psi(x) = -M_2,$$

имаћемо

$$v = \sqrt{M_1}\, cotg \sqrt{M_1}\,(x - c) \quad \ldots \quad 8)$$

$$w = \sqrt{M_2}\, cotg \sqrt{M_2}\,(x - c) \quad \ldots \quad 9)$$

И у сваком размаку, који обухвата иницијалну вредност $x = x_0$, у коме су интеграли v и w, дефинисани обрасцима 8) и 9), холоморфни, биће и проучавани интеграл *u* холоморфан и обухваћен одговарајућим вредностима интеграла v и w.

Напомена. Постоји још једна метода која се додуше не заснива на досадашњем нашем схватању приближне интеграције, али која се ипак корисно може употребити за приближну нумеричку интеграцију свих обичних диференцијалних једначина, па, дакле, и за Riccati-еву једначину. Метода се заснива на генерализацији познатог *Simpson*-овог правила, а развио ју је професор *Runge*, 1894 године.*

Runge-овој методи могли бисмо учинити ове две замерке: прво, рачунање које је скопчано са њеном применом заметно је, често врло заметно; и друго, она није у стању да нам да никаква обавештења о степену приближности са којом радимо. Но и поред тих двеју слабих страна, *Runge*-ова метода чини често велике услуге, јер је од свих метода за приближна нумеричка израчунавања интеграла ипак она понајбоља.

* **Види Mathematische Annalen, Band 46, S. 167—178.**

IV МЕХАНИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА

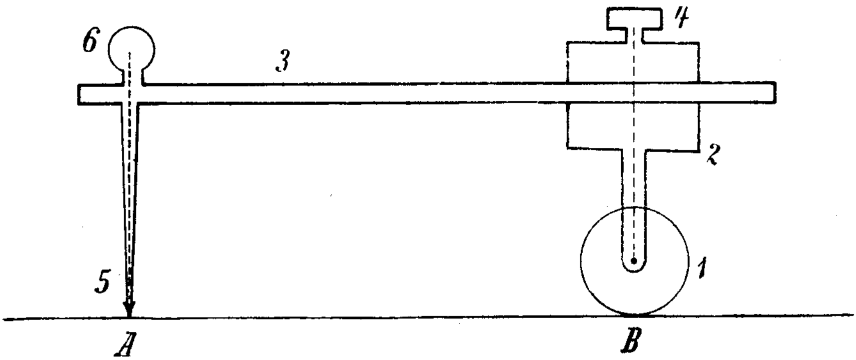
Апарати који служе за механичку интеграцију извесних типова диференцијалних једначина зову се општим именом *интегратори*. Њих има од две врсте: једни апарати дају нам могућности да за произвољну дату вредност независно промењиве одмах нађемо одговарајућу нумеричку вредност тражене функције — то су *интегрометри*; други апарати, међутим, директно цртају интегралне криве које представљају тражене функције — то су *интеграфи*.

Француски инжињер *Јасов* конструисао је 1907. год. један интегрометар који се може корисно употребити за механичку интеграцију Riccati-еве једначине. *Јасов* тај свој апарат зове *интегратор са оштрицом* (intégrateur à lame coupante). Принцип му је овај:

Једну оштрицу у облику котура (1) носи део (2), који се налази на шипци (3), по којој може клизити, а може бити и утврђен за њу у једној тачки помоћу завртња (4).

На крају (3) налази се једна писаљка (5) коју можемо помоћу дугмета (6) вући по каквој одређеној кривој у равни цртежа. Кад буде сад писаљка (5) ишла по једној кривој коју смо претходно нацртали и коју ћемо звати *директрисом*, пресек *AB* равни котура са равни цртежа обавијаће једну криву коју ће додиривати тачно у тачки *B*.

Нека је директриса нацртана у координатном систему чије су осовине ox и oy. Нека је A тачка директрисина која се поклапа са врхом писаљке, x и y нека буду њене координате; X и $У$ нека буду



Сл. 7.

координате тачке B; ϱ нека је дужина базе AB која не мора бити константна, а ω угао ове базе са осовином ox.

Пошто права AB тангира своју анвелопу у B, имаћемо

$$\frac{dX}{\cos\omega} = \frac{dУ}{\sin\omega} \qquad \ldots 1)$$

или, ако X и $У$ изразимо помоћу x, y, ϱ и ω,

$$\varrho\, d\omega + \cos\omega\, dy - \sin\omega\, dx = o \qquad \ldots 2)$$

Ако је једначина директрисе дата у параметарском облику, нпр.

$$x = f_1(t) \qquad y = f_1(t)$$

једначина 2) постаје

$$\varrho \frac{d\omega}{dt} + f'_2 \cos\omega - f'_1 \sin\omega = o \qquad \ldots 3)$$

и та једначина управо дефинише угловно кретање базе AB.

Ако ставимо сад

$$tang \frac{\omega}{2} = u$$

једначина 3) постаје

$$2\rho \frac{du}{dt} + (l - u^2) f'_2 - 2u f'_1 = o \quad \cdot \cdot \cdot 4)$$

Ако је ρ, дужина базе, константна количина и једнака, рецимо, l, једначина 4) биће управо једна Riccati-ева једначина. И ако сад при померању базе будемо увек мерили угао ω који она склапа са једним утврђеним правцем ox, одмах ћемо знати и нумеричку вредност интеграла

$$u = tang \frac{\omega}{2}$$

једначине 4), која ће на тај начин бити механички интеграљена.*)

Да би се Јасов-ов интегратор могао применити на Riccati-еву једначину, ова се мора најпре идентификовати са једначином која регулише кретање базе апарата

$$\frac{du}{dt} = u^2 \frac{f'_2}{2l} + u \frac{f'_1}{l} - \frac{f'_2}{2l} \quad \cdot \cdot \cdot 5)$$

где је l константна дужина базе.

Да би се на Riccati-еву једначину облика

$$\frac{du}{dt} = A u^2 + Bu + C \quad \cdot \cdot \cdot 6)$$

*) Детаљније о самом апарату и његовој употреби види у *Le calcul mecanique* par L. Jacob; стр. 363—370. (Encyclopedie scientifique, Paris, 1911).

где су A, B и C функције од t, могао применити Јасоb-ов интегратор, потребно је и довољно да буде

$$A + C = o \qquad \dots 7)$$

што се налази простим идентификовањем једначине 6) са 5).

Међутим, кад је дата једначина 6), она уопште неће a priori задовољавати услов 7). Али је Јасов показао да је лако трансформисати сваку једначину облика 6) тако да се интегратор увек може применити.

Ако су функције A и C у интервалу интеграције супротнога знака, онда једначина 6) простом сменом

$$y = \lambda\, u, \text{ где је } \lambda = \pm \sqrt{-\frac{C}{A}}$$

добија облик на који се интегратор непосредно може употребити. Лако се налази да ће у овом случају директриса бити дата једначинама

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 + 2\, l \int A\, dt \\ y &= c_2 + l \int B\, dt \end{aligned}\right\} \qquad \dots 8)$$

где се константе c_1 и c_2 одређују према иницијалним условима задатка.

Знајући, н. пр., иницијалне вредности независно променљиве t_0 и одговарајуће функције u_0, знаћемо и тачку x_0, y_0 од које полази писаљка која иде по директриси. Из релације, затим,

$$u_0 = tang\, \frac{\omega_0}{2}$$

одређује се и иницијални правац ω_0 базе апарата.

Ако се сад тражи вредност интеграла за $t = t_1$, писаљка се повлачи по директриси док се не дође до тачке x_1, y_1 која одговара вредности t_1; тада се измери угао ω_1, па ће вредност траженог интеграла бити

$$u_1 = tang \frac{\omega_1}{2}$$

Ако су функције А и С у интервалу интеграције истога знака, горња смена издаје и онда се овако ради.

Нека је ω угао базе са осовином о х, β угао тангенте директрисине са истом осовином, а $\theta = \beta - \omega$ угао између базе и тангенте. Пошто знамо аналитичну вредност за угао β, знаћемо у свакој тачки и нумеричку вредност његову; с друге стране, апарат нам даје угао ω, тако да ћемо у сваком моменту бити у стању да одредимо и угао θ.

Пођимо од познате једначине 2)

$$l\, d\omega + dy \cos\omega - ax \sin\omega = o$$

Ако у њој извршимо најпре смену

$$\omega = \beta - \theta$$

водећи рачуна о томе да је

$$tang\, \beta = \frac{dy}{dx},$$

па затим опет смену

$$tang \frac{\theta}{2} = u$$

добићемо једначину

$$2\, l \frac{du}{dt} = l \frac{d\beta}{dt} (1 + u^2) + 2\, u \left[\frac{dy}{dt} \sin\beta + \frac{dx}{dt} \cos\beta\right] \quad . \quad . \; 9)$$

а то је Riccati-ева једначина у којој је

$$A = C$$

Лако се уверавамо да сваку Riccati-еву једначину облика 6), у којој су функције A и C у интервалу интеграције истога знака, простом сменом

$$y = \lambda\, u, \text{ где је } \lambda = \sqrt{\frac{C}{A}}$$

доводимо на облик 9), где је, дакле, задовољен услов A = C.

Кад смо једначину 6) довели на облик који задовољава услов A = C, онда простим идентификовањем те једначине са једначином 9) налазимо једначине директрисине

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 + l \int B \cos \beta t\, dt \\ y &= c_2 + l \int B \sin \beta t\, dt \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 10)$$

где је $\beta = 2 \int A\, dt + const$

и где се интеграционе константе одређују према иницијалним условима.

Знајући, н.пр., иницијалну вредност t_0 и u_0, знаћемо одмах и x_0, y_0 и β_0.

Релација

$$u_0 = tang \frac{\theta_0}{2}$$

даће нам θ_0, па ће, према томе правац базе апарата у почетку бити одређен углом

$$\omega_0 = \beta_0 - \theta_0$$

Ако се тражи интеграл за $t = t_1$, писаљка се повлачи по директриси док се не дође до тачке x_1,

y_1 која одговара вредности t_1; тада се измери угао ω_1, па пошто у тој тачки знамо и вредност β_1, тражени интеграл за $t = t_1$ биће

$$u_1 = tg\frac{1}{2}(\beta_1 - \omega_1)$$

Сад ћемо показати како се општа Riccati-ева једначина облика

$$y' + y^2 = \omega(x) \qquad \dots 11)$$

може довести на облик на који се непосредно примењује механичка интеграција. Претпоставимо најпре да је функција $\omega(x)$ у интервалу интеграције позитивна.

Ако извршимо смену

$$y = \pm u\sqrt{\omega(x)}$$

једначина 11) постаје

$$\frac{du}{dx} = \mp\sqrt{\omega}\,u^2 \mp \frac{\omega'}{2\omega}u \pm \sqrt{\omega}$$

а ова последња једначина задовољава потребан и довољан услов да се на њу може применити Jacob-ов интегратор.

Ако је пак функција $\omega(x)$ у интервалу интеграције негативна, једначина 11), помоћу смене

$$y = u\sqrt{-\omega(x)}$$

доводи се на облик 9), на који се, као што смо видели, такође непосредно примењује механичка интеграција.

Jacob-ов интегратор је доста прост апарат и згодан је за практичну употребу. Он се може употребити за интеграцију сваке Riccati-еве једначине за коју смо у стању да нацртамо одговарајућу директрису. Како се директриса одређује помоћу квадратура 8) и 10), то можемо казати: *да помоћу Jacob-овог апарата можемо интегралити сваку Riccati-еву једначину за коју смо у стању извести одговарајуће квадратуре 8) и 10).*

Одредба директрисе истиче на видик и сингуларитете интеграла Riccati-еве једначине који су стални. Овим вредностима независно променљиве одговарају на директриси или бескрајне или имагинарне гране.

Jacob-ов интегратор има у главном исту конструкцију као *тракториограф*, који је *Клерић** конструисао 1897 год., дакле читавих 10 година пре Jacob-а. Клерићев апарат, поред тога што може корисно да се употреби за тачну конструкцију трансцендентних бројева e и π, за поделу кружне периферије на n једнаких делова ит.д., имао је главни свој задатак да на један врло лак начин конструише трактрисе за једну дату функцију $f(x)$, па му је и име дошло од те његове поглавите намене.

Г. Петровић је показао** како се Клерићев тракториограф може употребити и као интеграф за извесне типове диференцијалних једначина првога реда. Лако је, међутим, показати како се Клерићев апарат може употребити и као интегрометар за Riccati-еву једначину. Јер ако писаљку (stylet) на Клерићевом апарату будемо вукли не по датој ли-

* Dingler's polytech. Journal, 1897; Bd. 305.

** *M. Petrovits*, Integration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre (Bulletin de la Societé mathématique de France; 1899, стр. 200).

нији чије се трактрисе траже, него по директриси какве Riccati-еве једначине, онда Клерићев апарат управо постаје Jacob-ов интегратор и може се употребити, на исти начин као и овај, за механичку интеграцију Riccati-еве једначине.

Напомена. — И Jacob-ов интегратор и Клерићев тракториограф по својој суштини нису ништа друго него познати *планиметар* који је *Prytz*, капетан у данској војсци, конструисао још 1887 године. Апарати, Jacob-ов и Клерићев, разликују се од Prytz-овог управо само по својим специјалним наменама.