U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Ćirić M. Dušan

DIREKTNE GRANICE FUNKTORA U NEKIM KATEGORIJAMA

(Doktorska teza)

BEOGRAD 1980.

P R E D G O V O R

Cilj ovog rada je da ispita egzistenciju direktne granice funktora u nekim kategorijama, pa da ta ispitivanja primeni na karakterizaciju pramenova, sa vrednostima u tim kategorijama.

U radu se posmatraju kategorije topoloških grupa, topološki uredjenih prostora, uredjenih grupa i bitopoloških prostora, kao i neke njihove podkategorije.

Rad se sastoji od šest delova, koji su označeni rimskim ciframa. Svaki deo ili glava, kako te delove nazivamo, sastoji se od paragrafa, a svaki paragraf od odeljaka. Paragrafi i odeljci su označeni arapskim ciframa. Pri pozivanju, na primer, na odeljak I.3.2., reč je o odeljku 2., paragrafa 3., u glavi I. Numeracija definicija, teorema i primera teče neprekidno u svakom odeljku posebno. Pri pozivanju,ako se radi o teoremi I.1.3.1., reč je o teoremi 1., odeljka 3., paragrafa 1., u glavi I.

U glavi I., izložene su osnovne činjenice teorija topoloških grupa, topološki uredjenih prostora, uredjenih grupa i bitopoloških prostora. Materijal izložen u ovom delu neophodan je za dalja ispitivanja, a koncipiran je tako da svaki paragraf, koliko je to moguće, predstavlja izvesnu celinu.

U glavi II., uvodi se pojam direktnih sistema i granice direktnih sistema skupova i preslikavanja (paragraf II.1.), jer taj pojam je neophodan za definiciju direktne granice funktora u proizvoljnoj kategoriji (paragraf II.3.). U ovom delu ističe se značaj koji konstrukcija granice direktnih sistema skupova i preslikavanja ima u definiciji pramenova skupova, a takodje se daju, koliko je to moguće,i neki elementi teorije pramenova (paragraf II.2.).

Glava III., posvećena je proučavanju direktnih sistema topoloških grupa i otvorenih homomorfizama. Prvo se u paragrafu III.1., posmatraju direktni sistemi abelovih grupa, a zatim se, u paragrafu III.2., uvode direktni sistemi topoloških prostora i otvorenih preslikavanja. Dokazuje se egzistencija direktne granice funktora u kategoriji topoloških prostora i otvorenih preslikavanja (teorema III.2.2.1.), a takodje i egzistencija direktne granice funktora u kategoriji topoloških grupa i otvorenih homomorfizama (teorema III.3.2.1.).Pored toga definišu se i pramenovi sa vrednostima u kategoriji topoloških prostora i otvorenih preslikavanja i navode neki primeri (primeri III.5.3.1., i III.5.3.2.) U paragrafu III.4., govori se predpramenovima i pramenovima abelovih grupa, a u paragrafu III.5., o predpramenovima i pramenovima topoloških prostora.

Koliko je meni poznato, dokaz teoreme III.1.2.2., paragraf III.2., paragraf III.3., kao i paragraf III.5.,predstavljaju originalan doprinos.

U glavi IV., posmatraju se, pre svega, direktni sistemi uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, konstruiše se granica tih sistema i uvode se pojmovi predpramenova, pramenova uredjenih skupova. Konstruiše se pramen prostor uredjenih skupova i daje se odgovarajuća karakterizacija pramenova uredjenih skupova. Posmatraju se i direktni sistemi uredjenih grupa, konstruiše se granica tih sistema i definišu se predpramenovi i pramenovi uredjenih grupa. Daje se karakterizacija pramenova uredjenih grupa.(paragraf IV.1.) U paragrafu IV.2., posmatraju se direktni sistemi raznih klasa uredjenih topoloških prostora. Tu se konstruišu granice direktnih sistema A-uredjenih, S-uredjenih, strogo S-uredjenih i O_i, A-uredjenih topoloških prostora (i = 0,1,2).

Koliko je meni poznato, razmatranja u glavi IV., predstavljaju originalan doprinos.

Glava V., posvećena je ispitivanju klase uzajamno T_i-bitopoloških prostora (i = 0,1,2) tako što se konstruiše granica direktnih sistema tih prostora(paragraf V.1.). U toj glavi se uvodi i proučava pojam bitopoloških pramenova, koji je uopštenje pojma pramenova.(paragraf V.2.).

Razmatranja u ovoj glavi su, koliko je meni poznato, originalan doprinos.

U glavi VI., uvodi se i proučava pojam kretanja topoloških prostora u sebi. Materijal u ovoj glavi predstavlja sintezu materijala izloženog ranije, a predstavlja osnovu za dalja istraživanja u oblasti ovog rada.

Razmatranja u ovoj glavi su originalna, koliko je meni poznato.

Značajnu ulogu za pisanje ovog rada ima moje učestvovanje na seminaru za topologiju PMF-a u Beogradu,pa koristim ove redove da se rukovodiocu seminara prof.D.Adnadjeviću i svojim kolegama zahvalim na korisnim sugestijama.

S A D R Ž A J

I. U V O D

1. TOPOLOŠKE GRUPE

1. Osnovni pojmovi .

Teorija topoloških grupa, u obliku koji mi danas srećemo, pojavila se 1926 godine i njen kreator je O. Šrajer. (vid.[9]). Detaljni ekspoze teorije topoloških grupa javlja se nešto kasnije, tačno 1939 godine u monografiji L. Pontrijagina koji toj teoriji daje strukturu koju ona danas praktično ima.(vid.[40]). Interesantno je napomenuti da je još u toku druge polovine XIX veka Sofus Li uveo pojam "neprekidnih grupa" koje su danas poznate pod nazivom "grupe Li", a da je proučavanje grupe neprekidnih transformacija neposredno predhodilo pojavi teorije topoloških grupa.

Neka je G skup na kome su definisane topološka struktura i struktura grupe označena multiplikativno. Ako su zadovoljeni uslovi:

a) Preslikavanje $(x,y) \longmapsto xy$, skupa $G\times G$ u G je neprekidno;

b) Preslikavanje $x \longmapsto x^{-1}$, skupa G u G je neprekidno,

tada je G topološka grupa. Dakle, topološka i algebarska struktura u topološkoj grupi G povezane su uslovima a) i b), pa je skup G u tom smislu, snabdeven, da tako kažemo saglasnim strukturama.

Neposredno iz definicije topoloških grupa proizilaze mnoga svojstva i mi ih ovde navodimo bez dokaza.

Pre svega, napred navedeni uslovi a) i b), saglasnosti topološke i algebarske strukture u topološkoj grupi, mogu se zameniti samo jednim uslovom:

a′) Preslikavanje $(x,y) \longmapsto xy^{-1}$ skupa $G \times G$ u skup G je neprekidno.

Osim toga, svaka leva (desna) translacija γ_a (δ_a) ma kojim elementom $a \in G$, kao i svaki unutrašnji automorfizam Θ_a su homeomorfizmi. Neposredno zato sledi da ako je A otvoren (zatvoren) podskup od G i $x \in G$, skupovi xA, Ax i A^{-1} su otvoreni (zatvoreni) podskupovi od G kao transformacije skupa A odgovarajućim homeomorfizmima.

Neka je E topološki prostor a f i g preslikavanja prostora E u topološku grupu G. Označimo sa f^{-1} preslikavanje $f^{-1}: E \longrightarrow G$ definisano sa $f^{-1}(x) = [f(x)]^{-1}$, a sa fg preslikavanje $fg: E \longrightarrow G$ definisano sa $(fg)(x) = f(x)g(x)$ za svaki element $x \in E$. Ako predpostavimo da su f i g neprekidne funkcije u tački $x_0 \in E$, tada su i funkcije f^{-1} i fg takodje neprekidne u tački $x_0 \in E$. Očigledno, skup neprekidnih preslikavanja E u G je podgrupa grupe G^E svih preslikavanja E u G.

Takodje, ako je $\mathcal{F}$ filter na skupu E i ako su f i g preslikavanja skupa E u topološku grupu G, koja je Hausdorfov topološki prostor, tada ako postoje $\lim_{\mathcal{F}} f$ i $\lim_{\mathcal{F}} g$, onda postoje i $\lim_{\mathcal{F}} f^{-1}$ i $\lim_{\mathcal{F}} fg$ i važi $\lim_{\mathcal{F}} f^{-1} = (\lim_{\mathcal{F}} f)^{-1}$ odnosno $\lim_{\mathcal{F}} fg = (\lim_{\mathcal{F}} f)(\lim_{\mathcal{F}} g)$. (vid. [9]).

2. Okoline tačke u topološkoj grupi.

U odeljku 1.1., videli smo da je leva odnosno desna translacija grupe G, ma kojim elementom $a \in G$ homeomorfizam topološke grupe G u samu sebe. Ako sa $\mathcal{U}$ označimo filter okolina neutralnog elementa $e \in G$, biće familija $a\mathcal{U}$ skupova oblika aU, gde U prolazi familijom $\mathcal{U}$, filter okolina elementa a, $a \in G$. Slično, familija $\mathcal{U}a$, skupova oblika Ua, gde U prolazi familijom $\mathcal{U}$ biće filter okolina elementa $a \in G$.

Kako su funkcije $(x,y) \longmapsto xy$ i $x \longmapsto x^{-1}$ neprekidne, svaki filter okolina $\mathcal{U}$, neutralnog elementa $e \in G$ ima sledeća svojstva:

a) Za svaki element $U \in \mathcal{U}$, postoji element $V \in \mathcal{U}$, tako da je $VV \subset U$.

b) Za svaki element $U \in \mathcal{U}$, važi $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

Uslove a) i b) možemo zameniti jednim njima ekvivalentnim uslovom:

a') Za svaki element $U \in \mathcal{U}$, postoji element $V \in \mathcal{U}$, tako da je $VV^{-1} \subset U$.

Kako je svaki unutrašnji automorfizam $\theta_a : G \longrightarrow G$, definisan sa $\theta_a(x) = axa^{-1}$ za svaki element $x \in G$ i $a \in G$, homeomorfizam, to važi i uslov:

c) Za ma koji element $a \in G$ i $V \in \mathcal{U}$ važi $aVa^{-1} \in \mathcal{U}$.

Svojstva a), b) i c) filtra $\mathcal{U}$ su karakteristična, zapravo važi sledeća teorema.

TEOREMA 1. Neka je G grupa i $\mathcal{U}$ filter na skupu G koji zadovoljava uslove a), b) i c). Postoji tada jedna jedina topologija na skupu G saglasna sa strukturom grupe na G za koju je $\mathcal{U}$ filter okolina elementa $e \in G$. U toj topologiji filter okolina ma koje tačke $a \in G$ su filtri $a\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}a$.

Ukoliko je grupa G komutativna, uslov c) je ispunjen očigledno i prelazeći na aditivnu notaciju dobijamo sledeću karakterizaciju filtra okolina elementa $0 \in G$:

a_1) Za svaki element $U \in \mathcal{U}$, postoji $V \in \mathcal{U}$, tako da je $V + V \subset U$.

b_1) Za svaki element $U \in \mathcal{U}$, biće $-U \in \mathcal{U}$.

3. Preslikavanja topoloških grupa.

Iz definicije topoloških grupa ne može se zaključiti da su homomorfizmi odgovarajućih grupa, neprekidna preslikavanja. Da homomorfizam topološke grupe G u topološku grupu G' bude neprekidan, potrebno je i dovoljno da je neprekidan u bar jednoj tački iz G, što neposredno sledi iz svojstva homogenosti topoloških grupa.

Preslikavanje f topološke grupe G u topološku grupu G' nazivamo izomorfizmom topoloških grupa ukoliko je f izomorfizam grupe G u grupu G' i homeomorfizam topološkog prostora G u topološki prostor G'.

Svaki unutrašnji automorfizam θ_a grupe G je, naprimer izomorfizam topološke grupe G u samu sebe i on se naziva unutrašnjim automorfizmom topološke grupe G.

Lokalnim izomorfizmom topoloških grupa G i G' nazivamo svaki homeomorfizam f okoline V neutralnog elementa e, $e \in G$ na okolinu V' neutralnog elementa $e' \in G'$, pri čemu su zadovoljeni uslovi:

a) Za svaki par tačaka $x, y \in V$, za koje je $xy \in V$, važi $f(xy) = f(x)f(y)$.

b) Ako je g inverzno preslikavanje preslikavanju f i $x', y' \in V'$ tada važi $g(x'y') = g(x')g(y')$.

Preslikavanje $g: G' \longrightarrow G$ je očigledno lokalni izomorfizam. Topološke grupe G i G' su lokalno izomorfne, ako postoji lokalni izomorfizam koji jednu preslikava u drugu.

Predpostavimo da je $f: G \longrightarrow G'$ neprekidni homomorfizam topoloških grupa. Jezgro $\ker(f) \subset G$ je normalna podgrupa grupe G, a $f(G) \subset G'$ je podgrupa grupe G'. Preslikavanje f možemo prirodno razložiti na kompoziciju $f = \psi \cdot \bar{f} \cdot \varphi$, gde je φ kanonična projekcija $G \longrightarrow G/\ker(f)$, ψ kanonična injekcija $f(G) \longrightarrow G'$ i $\bar{f}$ bijektivni, neprekidni homomorfizam $G/\ker(f) \longrightarrow f(G)$, pridružen funkciji f. Ukoliko je $\bar{f}$ bineprekidno preslikavanje, t.j izomorfizam topoloških grupa, preslikavanje f se naziva strogim morfizmom. Karakterizaciju strogih morfizama daje sledeća teorema.(vid.[9])

TEOREMA 1. Neprekidni homomorfizam f topoloških grupa G u G′ je strogi morfizam ako i samo ako su zadovoljeni sledeći ekvivalentni uslovi:

a) Slika sa f, otvorenog podskupa u G je otvoren podskup skupa f(G).

b) Slika sa f, okoline neutrala $e \in G$ je okolina neutrala $e' \in f(G)$.

Neprekidni homomorfizam topološke grupe G u topološku grupu G′ je strogi morfizam ako je G′ diskretna topološka grupa ili ako je G kompaktna a G′ hausdorfova topološka grupa što se neposredno zaključuje iz teoreme 1.

2. TOPOLOŠKI UREDJENI PROSTORI

1. Osnovni pojmovi i definicije.

Opšti koncept uredjenja, preciznije delimičnog uredjenja prvi put je izolovano posmatran u devetnestom veku. Naj značajnija istraživanja na tu temu datiraju od 1847 godine i potiču od Dž. Bula. Aksiomatiku delimično uredjenih skupova zasniva K. Pirs 1880 godine i sve do pojave Dedekinda teorija delimično uredjenih skupova služi potrebama logike. Dedekind je zapravo prvi koji posmatra delimično uredjenje kao predmet autonomnog istraživanja. On zajedno sa Hausdorfom i Kantorom 1897 godine izlaže osnovne ideje teorije delimično uredjenih skupova, a godine 1900 uvodi pojam modularnih mreža.

Pojavom aksiomatski zasnovane teorije topoloških prostora pojavljuju se radovi Dj. Kurepe u kojima on posmatra delimično uredjene skupove zajedno sa topologijama koje su na njima definisane. U svojim radovima (vid.n.p.r. [31]) Dj. Kurepa proučava probleme teorije uredjenih skupova kao što su problem uredivosti i dobre uredivosti skupova, kontinuum hipotezu, Suslinov problem, nalazi ekvivalente Suslinovom problemu, definiše pojam Kurepinog drveta i ukazuje na mogućnost da se pozitivan ili negativan odgovor na Suslinov problem može uzeti kao aksioma.

Mnogo kasnije u nešto opštijem vidu, pojavljuje se sistematsko proučavanje topološki uredjenih prostora u radovima L. Nahbina(vid.[37]), E. Volka (vid.[58] ,[59]), Mc. Cartana, A. i M. Sekanine (vid. [34] ,[45]) i D. Adnadjevića(vid.[1] ,[2] ,[3] i[4]) pa je teorija topološki uredjenih prostora dobila današnji oblik.

U daljem izlaganju koristićemo pojmove kvazi-uredjenja, delimičnog i linearnog uredjenja onako kako se oni obično definišu. (vid.[46])

Pojam topološki uredjenog prostora uvedimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 1. Neka je X skup. Topološki uredjenim prostorom nazivamo skup X, ako je on snabdeven topološkom i uredjajnom strukturom tako da je grafik uredjenja zatvoren podskup topološkog prostora $X\times X$ Uredjajna struktura na skupu X u opštem slučaju je kvazi-uredjenje.

Ova definicija pokazuje da topološki uredjen prostor nije ništa drugo do skup na kome su definisane dve strukture, uredjajna i topološka, a koje su u izvesnoj vezi, saglasnosti. Ta saglasnost izražena je uslovom da grafik uredjenja bude zatvoren u topološkom proizvodu $X\times X$. Da se radi o prirodnoj povezanosti topologije i uredjenja pokazuju mnogi primeri. Ako je topologija na skupu X diskretna svako uredjenje na skupu X saglasno je sa tom topologijom. Topologija racionalne prave Q ili realne prave R saglasna je sa uredjenjem koje je definiše. (vid.[37]).

Predpostavimo da je skup X uredjen relacijom $\leq$. Za podskup $A\subset X$ kazaćemo da je opadajući ako za elemente $a,b\in X$ uslov $a \leq b$ i $b\in A$ implicira $a\in A$. Najmanji opadajući skup koji sadrži dati skup B označavamo sa d(B). Dualno se može definisati rastući skup, a takodje i najmanji rastući skup koji sadrži neki skup C, u oznaci i(C). Za element $x \in X$ su d(x) i i(x) oznake za d({x}) i i({x}).

Jednu karakterizaciju napred definisanih topološki uredjenih prostora daje sledeća teorema.

TEOREMA 1. Neka je X skup sa topološkom i uredjajnom strukturom. Grafik kvazi-uredjenja $\leq$ je zatvoren podskup proizvoda $X \times X$ ako i samo ako za ma koje dve tačke $x,y \in X$ za koje $x \leq y$ ne važi, možemo odrediti rastuću okolinu V tačke x i opadajuću okolinu W tačke y, tako da je $V \cap W = \emptyset$. Pri tome su za svaku tačku $a \in X$, skupovi d(a) i i(a) zatvoreni.

DEFINICIJA 2. Neka je X skup na kome su definisane topološka i uredjajna struktura. Ukoliko za svaka dva disjunktna zatvorena podskupa F_0 i F_1 od X , pri čemu je F_0 opadajući a F_1 rastući, postoje disjunktni otvoreni, redom opadajući i rastući podskupovi A_0 i A_1 pri čemu je $A_0 \supset F_0$ i $A_1 \supset F_1$ kazaćemo da je X, normalno uredjen topološki prostor. Specijalno je X normalno kvazi-uredjen, ako je uredjenje na X kvazi-uredjenje.

Neposredno primećujemo da je u slučaju diskretnog uredjenja svaki skup i opadajući i rastući, pa je u tom slučaju svaki normalno uredjen topološki prostor zapravo normalan topološki prostor. U tom smislu stavovi teorije normalno uredjenih topoloških prostora predstavljaju uopštenja odgovarajućih stavova koji važe u normalnim topološkim prostorima, kao što su Urisonova lema, Ticeova teorema ekstenzije i slično. (vid.[19] i [20]).

Osim gore navedenih veza izmedju topološke i uredjajne strukture na datom skupu X navešćemo i druge veze ovih struktura pod nazivima W-saglasnost, S-saglasnost, A-saglasnost i njima posvećujemo naredne odeljke ovog paragrafa.

2. W-saglasnost topološke i uredjajne strukture.

Za podskup S delimično uredjenog skupa X kažemo da je D-zatvoren(Dedekind zatvoren), ako za svaki njegov desno(levo) usmeren podskup $A \subset S$ i $y = \sup A$ ($y = \inf A$) element $y \in S$. Primetimo da u opštem slučaju supA (infA) ne mora da postoji kao najmanja gornja (najveća donja) granica podskupa A u X. Označimo sa J intervalnu topologiju delimično uredjenog skupa X.

DEFINICIJA.1. Neka je X skup na kome su definisane topološka i uredjajna struktura. Topološka struktura je W-saglasna sa uredjajnom ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) Svaki zatvoren podskup u X je D-zatvoren.

b) Svaki skup $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ je zatvoren podskup u X.

Ako sa $\mathfrak{D}$ označimo topologiju na skupu X čiji su zatvoreni skupovi baš D-zatvoreni podskupovi od X, možemo primetiti da je ma koja topologija σ na skupu X, W-saglasna sa uredjenjem na X ukoliko je $J \leq \sigma \leq \mathfrak{D}$, t.j., ako je ona jača od intervalne topologije J, a slabija od Dedekindove topologije $\mathfrak{D}$ (vid. [58] i [59]).

Od interesa je svakako slučaj kada se intervalna topologija J i Dedekindova topologija $\mathfrak{D}$ poklapaju, odnosno slučaj kada na delimično uredjenom skupu postoji jedinstvena W--saglasna topologija sa uredjenjem. Sledeća teorema nam daje jedan odgovor na to pitanje.

TEOREMA 1. Ako je delimično uredjen skup X konačne širine, tada na njemu postoji jedinstvena W--saglasna topologija sa uredjenjem. U odnosu na tu topologiju prostor X je hausdorfov topološki prostor.

U iskazu predhodne teoreme pod širinom delimično uredjenog skupa X podrazumevamo supremum skupa kardinalnih brojeva potpuno neuredjenih podskupova od X.

3. S-saglasnost topološke i uredjajne strukture.

DEFINICIJA 1. Neka je X skup na kome su date topološka struktura i struktura delimičnog uredjenja Topološka struktura je S-saglasna sa delimičnim uredjenjem ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) Topološki prostor X je T_1-prostor.

b) Za svake dve tačke a i b iz X, pri čemu je $a<b$ postoje okoline $O(a)$ i $O(b)$ tako da je

S_1) za svaki element $x \in O(a)$ važi $x<b$ ili $x \| b$, gde $x \| b$ znači x je neuporedivo sa b.

S_2) za svaki element $y \in O(b)$ je $b<y$ ili $b \| y$.(vid.[45])

Uži pojam saglasnosti od S-saglasnosti je takozvana stroga S-saglasnost topologije i delimičnog uredjenja i nju uvodimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 2. Neka je X skup na kome su date topološka struktura i struktura delimičnog uredjenja. Topološka struktura je strogo S-saglasna sa delimičnim uredjenjem ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) Topološki prostor X je T_1-prostor.

b) Ako su a i b elementi skupa X za koje važi da je $a<b$, postoje tada okoline $O(a)$ i $O(b)$ tako da za elemente $x \in O(a)$ i $y \in O(b)$ važi $x<y$ ili $x \| y$.

Ovako definisana saglasnost topološke strukture i strukture delimičnog uredjenja omogućuje iskaz mnogih tvrdjenja od kojih navodimo jedno karakteristično.(vid.[45])

TEOREMA 1. Intervalna topologija na delimično uredjenom skupu X je S-saglasna sa uredjenjem na tom skupu.

Intervalna topologija je strogo S-saglasna sa delimičnim uredjenjem koje definiše, ako je hausdorfova.(vid.[45] i [44]).

4. A-saglasnost topološke i uredjajne strukture.

Koncept A-saglasnosti topološke i uredjajne strukture uveo je prvi put D. Adnadjević u svojim radovima [1], [2], [3] i [4]. Uredjenje o kome je reč je u opštem slučaju kvazi-uredjenje. Pre nego što uvedemo pojam A-saglasnosti uvešćemo pojam kvazi-uredjajne udaljenosti.

DEFINICIJA 1. Neka je X kvazi-uredjen skup relacijom ρ. Podskupovi A i B skupa X su kvazi-uredjajno udaljeni ako važe uslovi:

a) $A \cap B = \emptyset$.

b) za svaki element $x \in A$ i $y \in B$ je ili $x \bar{\rho} y$ ili $y \rho x$. Pri tome $x \bar{\rho} y$ znači $x \rho y$ ili $x \parallel y$.

Ako je na skupu X pored uredjenja ρ definisana i topološka struktura rećićemo da su disjunktni podskupovi A i B skupa X uredjajno razdvojeni ukoliko postoje uredjajno udaljene okoline U i V tako da je $A \subset U$ i $B \subset V$.

Pojam A-saglasnosti topološke i uredjajne strukture daje sledeća definicija.

DEFINICIJA 2. Neka je X skup na kome su zadate topološka i uredjajna struktura ρ. Topološka struktura je A-saglasna sa uredjajnom ako za svaki par elemenata a i b iz skupa X, za koje postoji okolina U(a) tačke a, tako da $b \notin U(a)$, postoji okolina V(a) tačke a uredjajno udaljena od jednočlanog skupa $\{b\}$. Pri tome je $V(a) \subset U(a)$ i ako je $a \bar{\rho} b$, tada je $V(a) \bar{\rho} b$.

Na osnovu definicije A-saglasnosti topološke i uredjajne strukture na skupu, u mogućnosti smo da govorimo o raznim topološki uredjenim prostorima.

U klasi topološki uredjenih prostora, kod kojih su topologija i uredjenje A-saglasni mogu se istaknuti podklase O_i-prostora za i = 0,1,2, koje se uvode na sledeći način.

Topološki uredjen prostor je O_0-prostor ako za svake dve njegove tačke postoji okolina bar jedne tačke uredjajno udaljena od druge.

Topološki uredjen prostor je O_1-prostor ako za svake dve njegove razne tačke postoji okolina jedne tačke ,uredjajno udaljena od druge.

Topološki uredjen prostor je O_2-prostor, ako se svake dve razne tačke mogu uredjajno udaljiti.

Navedimo nekoliko teorema koje karakterišu topološki uredjene prostore kod kojih su topologija i uredjenje Λ-saglasni.

TEOREMA 1. Proizvod familije topološki uredjenih O_2-prostora je topološki uredjen O_2-prostor.

TEOREMA 2. Ako je X topološki uredjen O_2-prostor tada je graf uredjenja zatvoren podskup prostora $X \times X$.

TEOREMA 3. Ako je X topološki uredjen kompaktan O_2-prostor, onda je on normalno uredjen. (vid.[1])

3. UREDJENE GRUPE

1. Osnovni pojmovi i definicije.

Krajem devetnestog veka, u vezi sa aksiomatskim zasnivanjem realnih brojeva, uveden je pojam uredjenih grupa. Jedna od prvih teorema teorije uredjenih grupa je teorema Heldera o izomorfizmu arhimedove linearno uredjene grupe sa podgrupom aditivne grupe realnih brojeva. Helder zapravo definiše aditivnu grupu realnih brojeva kao maksimalnu arhimedovu grupu. Pri tome se delimično uredjena grupa naziva arhimedovom ako iz nejednakosti $a^n < b$ za svaki $n \in N$ sledi $a = e$.

Sistematsko izučavanje uredjenih grupa javlja se u dvadesetom veku i pojavljuje se u radovima Dedekinda, Heldera, Hilberta, Nojmana, Birkofa, Maljceva i drugih. Već 1905 godine pojavio se jedan od fundamentalnih rezultata u teoriji uredjenih grupa kojim je data uredjajno-algebarska karakterizacija realnih brojeva, a to je teorema Hantingtona. Prema ovoj teoremi, da neki skup E bude izomorfan skupu realnih brojeva potrebno je i dovoljno da budu zadovoljeni uslovi:

a) Postoji relacija linearnog uredjenja u odnosu na koju je skup E uredjen povezan i neograničen.

b) Postoji zakon kompozicije + na skupu E, u odnosu na koji je skup E abelova grupa.

c) Ako sa O označimo neutralni element grupe E tada za ma koje elemente a i b iz skupa E za koje je $a \gtrless 0$ i $b \gtrless 0$ sledi $a + b \gtrless 0$.

Bliža obaveštenja o ovoj teoremi mogu se naći u radu [31].

Pojam uredjene grupe, za koju je zakon kompozicije označen multiplikativno uvodimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 1. Neka je X skup na kome su zadate uredjajna struktura i struktura grupe. Skup X nazivamo uredjenom grupom ukoliko za svaka tri elementa x,y i z iz skupa X, pri čemu je $x \leq y$, važi $xz \leq yz$ i $zx \leq zy$.

U slučaju da iz $x \leq y$ sledi $zx \leq zy$($xz \leq yz$) rećićemo da je grupna struktura levo(desno) saglasna sa uredjajnom. Ako su grupna i uredjajna struktura levo i desno saglasne kao što je to slučaj u definiciji 1., kazaćemo jednostavno da su grupna i uredjajna struktura saglasne.(vid.n.p.r. [21])

Polazeći od definicije uredjenih grupa neposredno se mogu dokazati sledeća tvrdjenja.

TEOREMA 1. Neka je G uredjena grupa i P podskup skupa G definisan sa $P = \{x \mid x \in G, e \leq x\}$. Skup P je podmonoid grupe G i tvrdjenje $x \leq y$ ekvivalentno je tvrdjenju $x^{-1}y \in P$ za svaka dva elementa x i y iz skupa G.

TEOREMA 2. Neka je G grupa i P podskup skupa G tako da je $e \in P$ i $PP \subset P$, tada je relacija $x^{-1}y \in P$ uredjenje na skupu G saglasno sa strukturom grupe G. Da to uredjenje bude delimično potrebno je i dovoljno da bude $P \cap P^{-1} = \{e\}$

Iz gore navedenih teorema neposredno se vidi koliko je važna uloga podmonoida u grupi i da definisanje uredjenja saglasnog sa strukturom grupe predstavlja zapravo izbor nekog podmonoida date grupe.(vid. [50], [51] i [52])

2. Neki rezultati teorije uredjenih grupa.

Problemi teorije uredjenih grupa mogu se razvrstati u nekoliko važnijih pravaca. Tu su pre svega problemi uredivosti grupa i sledeće teoreme navodimo kao karakteristične rezultate koji se dobijaju rešavanjem tih problema.(vid.[56])

TEOREMA 1. Neka je G delimično uredjena grupa i P podmonoid pozitivnih elemenata u grupi G. Delimično uredjenje može se produžiti do linearnog ako i samo ako važi uslov:

- Za ma koji konačan skup elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u skupu G mogu se tako izabrati vrednosti $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ jednake +1 ili -1, tako da bude

$$P \cap S(a_1^{e_1}, a_2^{e_2}, \ldots, a_n^{e_n}) = \emptyset$$

gde je $S(a_1^{e_1}, a_2^{e_2}, \ldots, a_n^{e_n})$ semigrupa generisana elementima $a_1^{e_1}, a_2^{e_2}, \ldots, a_n^{e_n}$. Pri tome ako P zadovoljava gornji uslov i $a \in G$, tada $PS(e,a)$ ili $PS(e,a^{-1})$ definišu delimično uredjenje sa skupom pozitivnih elemenata P' koji takodje zadovoljava gornji uslov.(vid.[30] ili [12])

TEOREMA 2. Grupa G može se urediti, tako da bude uredjena grupa ako i samo ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

a) Za svaki elemenat $g \in G$ sa $g \neq e$ postoji podskup $\hat{S}(g) \subset G$ tako da je $g \in \hat{S}(g)$ i $e \notin \hat{S}(g)$, pri čemu za svaka dva elementa $x, y \in G$ važi $x\hat{S}(g)y \subset \hat{S}(g)$ ili $x\hat{S}(g)y \supset \hat{S}(g)$.

b) Postoji sistem W podskupova S skupa G tako da je $\bigcap_{S \in W} S = \{e\}$ i za svako $S \in W$ važi $xSy \subset S$ ili $xSy \supset S$, kad god su elementi $x, y \in G$. (vid. [30])

Osim ovakvih rezultata koji rešavaju problem uredivosti grupa izučavaju se takodje topološka i uredjajna svojstva linearno uredivih grupa, koja ovde ne možemo izložiti zbog velikog broja pojmova koje predhodno treba definisati. (vid. [30]).

4. BITOPOLOŠKI PROSTORI

1. Pojava bitopoloških prostora.

Pojam bitopoloških prostora uveo je 1963 godine Dž. Keli, proučavajući takozvane kvazi-metričke funkcije, odnosno nesimetrične metričke funkcije. On je primetio da svaka kvazi-metrička funkcija indukuje na datom skupu, na prirodan način, sebi konjugovanu kvazi-metriku. Konjugovane kvazi-metrike na datom skupu generalizuju pojam simetrije.(vid. [27])

Interesantno je napomenuti da su Vilson 1931, a takodje i Ribeiro 1943 godine proučavali kvazi-metričke funkcije.(vid. [57] i [43])

Sistematsko proučavanje bitopoloških prostora izvršeno je u zadnjih petnajest godina o čemu se možemo obavestiti u mom magistarskom radu.(vid. [16])

Ima više klasa bitopoloških prostora, a zajedničko za sve klase je to da je svaki bitopološki prostor skup X, zajedno sa dve topologije P i Q, u oznaci (X,P,Q), koje uvek stoje u izvesnoj vezi ili da tako kažemo, koje su saglasne na odredjen način.

Ta saglasnost, naprimer, u klasi kvazi-metričkih (kvazi-pseudo-metričkih) bitopoloških prostora znači kvazi-metrizabilnost (kvazi-pseudo-metrizabilnost) svake od topologija indukovanim kvazi-metrikama (kvazi-pseudo-metrikama).

U bitopološkom prostoru (X,P,D) topologija P je regularna u odnosu na topologiju D, ako za svaki element $x \in X$ i P-zatvoren skup A, tako da $x \notin A$, postoje P-otvoren skup U i Q-otvoren skup V, da važi:

$x \in U$, $A \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.

Ukoliko je topologija P regularna u odnosu na topologiju Q i topologija Q regularna u odnosu na topologiju P, kažemo da je bitopološki prostor (X,P,D) uzajamno regularan.

Bitopološki prostor (X,P,D) pripada klasi uzajamno hausdorfovih bitopoloških prostora ako je veza, saglasnost njegovih topologija definisana tako što za svake dve razne tačke x i y skupa X, postoje P-okolina U tačke x i Q-okolina V tačke y tako da je $U \cap V = \emptyset$.

Klasu uzajamno normalnih bitopoloških prostora čine oni bitopološki prostori (X,P,D) kod kojih je veza, saglasnost topoloških struktura P i Q definisana tako da za svaki P-zatvoren skup F_0 i Q-zatvoren skup F_1 pri čemu je $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, postoje Q-otvoren skup $G_0 \supset F_0$ i P-otvoren skup G_1, $G_1 \supset F_1$, tako da važi $G_0 \cap G_1 = \emptyset$.

Pored ovih klasa bitopoloških prostora uvedene su i klase uzajamno potpuno regularnih i uzajamno savršeno normalnih bitopoloških prostora.

Preslikavanje $f:(X,P,D) \longrightarrow (Y,P_1,D_1)$ bitopoloških prostora je bineprekidno (biotvoreno) ako je neprekidno (otvoreno) preslikavanje topoloških prostora $(X,P) \to (Y,P_1)$ i $(X,Q) \to (Y,Q_1)$.

Osim ispitivanja pojedinih klasa bitopoloških prostora i iskazivanja stavova koji su ili uopštenja stavova iz opšte topologije ili se odnose na konkretnu klasu bitopoloških prostora, u teoriji bitopoloških prostora može se govoriti o direktnom proizvodu familije bitopoloških prostora, o inverznim sistemima i granicama inverznih sistema bitopoloških prostora(vid.[16]), o kvazi-metrizabilnosti (kvazi-pseudo-metrizabilnosti) bitopoloških prostora(vid.[27]). Može se govoriti o povezanosti bitopoloških prostora(vid.[39] i [38]) kao i dimenziji bitopoloških prostora(vid.[14],[42]).

Problem kompaktnosti u teoriji bitopoloških prostora predmet je proučavanja mnogih autora i postoji veći broj definicija uzajamne kompaktnosti(vid.[28]). Postoje takodje i tendencije da se teorija bitopoloških prostora poveže sa teorijom uredjenih topoloških prostora.(vid.[15] i [5])

2. Neke teoreme u teoriji bitopoloških prostora.

U klasi uzajamno normalnih bitopoloških prostora može se dokazati sledeća teorema.

TEOREMA 1.(Uopštenje Urisonove leme) Neka je (X,P,Q) uzajamno normalan bitopološki prostor. Ako je F, Q-zatvoren skup i H, P-zatvoren skup tako da je $F \cap H = \emptyset$, tada postoji bineprekidna funkcija $g\colon X \longrightarrow R$, tako da je $g(x) = 0$, za svaki elemenat $x \in F$ i $g(x) = 1$, za svaki elemenat $x \in H$ i za svaki elemenat $x \in X$ važi $0 \leq g(x) \leq 1$.

Za dokaz ove teoreme, kao i dokaz uopštenja Titceove teoreme ekstenzije videti [33].

Mnoge se teoreme iz opšte topologije mogu uopštiti na bitopološke prostore, kao što su teorema Vedenisova (vid.[13]), Urisonova metrizaciona teorema (vid.[16]) ili metrizaciona teorema Nagate-Smirnova (vid.[47] ili [33]), koju ovde navodimo ilustracije radi.

TEOREMA 2. Neka je bitopološki prostor (X,P,D) uzajamno regularan. Ako postoji niz $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$, $(n = 1,2,3,\ldots)$, P i Q-lokalno konačnih, Q-otvorenih familija, tako da je $\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ baza topologije Q i niz $\mathcal{T}_n = \{T_{n\beta}\}$, $(n = 1,2,\ldots)$ P i Q-lokalno konačnih P-otvorenih familija, tako da je $\mathcal{T}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}_n$ baza topologije P, onda je prostor (X,P,D) kvazi-pseudo-metrizabilan.

Napomenimo, na kraju ovog odeljka o bitopološ - kim prostorima da osim teorema koje predstavljaju uopštenja odgovarajućih teorema iz topologije ima teorema koje se odnose samo na bitopološke prostore.(vid.[16])

Istaknimo takodje da je u teoriji bitopoloških prostora pojam dimenzije, relativizacija odgovarajućeg pojma u opštoj topologiji i u vezi stim je veći broj autora dao više interesantnih teorema.(vid.[14])

Na kraju ove glave napomenimo da je veliki broj primera saglasnih struktura. Pomenimo pre svega primer realnih brojeva onako kako su oni uvedeni u [9] i [10] .

U vezi sa saglasnim strukturama od velikog interesa za nas je problem kako algebarska struktura, na prirodan način indukuje uredjajnu i topološku strukturu na datom skupu. Delimičan odgovor na to pitanje može se naći u radu[17] u kome se koriste neki pojmovi teorije grupa (vid.[32]) i teorije semigrupa (vid.[12]), kao i dekompozicije semigrupa u radovima [53] , [54] i [29] . Za rešavanje ovakvog problema od interesa su i radovi [24] , [25] i [26] .

II. O P Š T I P O J A M G R A N I C E D I R E K T N I H S I S T E M A.

1. DIREKTNI SISTEMI SKUPOVA I PRESLIKAVANJA.

1. Osnovni pojmovi i definicije.

Matematičke teorije obiluju konstrukcijama. Vrlo se često iz date kolekcije objekata $\mathcal{A}$, nekom konstrukci - jom K, konstruiše objekt B. Postavlja se pitanje u kakvom je odnosu objekat B prema članovima kolekcije objekata $\mathcal{A}$, odnosno, koje informacije prenosi konstrukcija K.

Primera takvih konstrukcija, kako u algebri, topologiji tako i u drugim oblastima matematike ima mnogo. Karakterističan je primer konstrukcije granica direktnih sistema koje imaju važnu ulogu u algebri, teoriji modela(vid.[36]) a posebno u teoriji pramenova. (vid.[23])

Pre nego što definišemo pojam granice direktnog sistema skupova i preslikavanja uvešćemo neke pojmove.

Usmerenim skupom nazovimo skup Λ zajedno sa kvazi-uredjenjem $\leq$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

a) Za svaka dva elementa α i β iz skupa Λ, postoji element $\gamma\in\Lambda$ tako da je $\alpha\leq\gamma$ i $\beta\leq\gamma$.

Pri tome graf uredjenja $\leq$ na skupu Λ označimo sa Λ_1, dakle $\Lambda_1 = \{(\alpha,\beta)\,|\,(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda$ sa $\alpha\leq\beta\}$.

Napomenimo da se gore definisani usmereni skup Λ često zove desno usmerenim skupom.

DEFINICIJA 1. Neka je $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija skupova indeksirana usmerenim skupom Λ i neka je za svaki par $(\alpha,\beta)\in\Lambda_1$ dato preslikavanje $\rho_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}: U_\alpha \longrightarrow U_\beta$. Familiju skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, zajedno sa preslikavanjima $\rho_{\alpha\beta}$, pri $(\alpha,\beta)\in\Lambda_1$ nazivamo direktnim sistemom skupova i presli - kavanja, u oznaci $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$, ako važe sledeći uslovi:

b) Za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ je $\rho_{\alpha\alpha} = id_{U_\alpha}$.

c) Za svaka tri indeksa α, β i γ iz skupa Λ, za koje je $\alpha\leq\beta\leq\gamma$, važi $\rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\beta\gamma}\cdot\rho_{\alpha\beta}$, odnosno sledeći dijagram je komutativan:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\rho_{\alpha\gamma}"] \arrow[dr, "\rho_{\alpha\beta}"'] & & U_\gamma \\ & U_\beta \arrow[ur, "\rho_{\beta\gamma}"'] & \end{tikzcd}$$

Predpostavimo da je u oznakama definicije 1., dat direktan sistem skupova i preslikavanja. Ograda direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$, je skup V zajedno sa familijom preslikavanja $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, je $\sigma_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V$, ukoliko je zadovoljen sledeći uslov:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta\circ\rho_{\alpha\beta}\quad, \text{ za } \alpha\leq\beta,$$

odnosno ako je komutativan sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\sigma_\alpha"] \arrow[dr, "\rho_{\alpha\beta}"'] & & V \\ & U_\beta \arrow[ur, "\sigma_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

U oznakama definicije 1., a s obzirom na uvedeni pojam ograde direktnog sistema skupova i preslikavanja može se uvesti pojam granice direktnog sistema skupova i preslikavanja.

DEFINICIJA 2. Granica datog direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$, skupova i preslikavanja je ograda U, $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\mathcal{T}_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$, ako je zadovoljen sledeći uslov:
d) Za svaku ogradu V, $\{\sigma_\alpha\}$, gde $\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V$, za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, postoji jedinstveno preslikavanje $f: U \longrightarrow V$, tako da je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ sledeći dijagram

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[rr, "\sigma_\alpha"] \arrow[dr, "\mathcal{T}_\alpha"'] & & V \\ & U \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

komutativan.

Neposredno iz definicije 2., vidimo da je granica direktnog sistema, da tako kažemo, najbolja ograda sistema. Granica direktnog sistema skupova i preslikavanja iz definicija 1. i 2., označava se često i sa $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$.

Koristeći definiciju 2., može se pokazati da su sve granice datog direktnog sistema skupova i preslikavanja jednake do na izomorfizam, što ovde znači egzistenciju bijekcije saglasne sa preslikavanjima $\mathcal{T}_\alpha$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$.

Prirodno se može postaviti pitanje, kada je neka ograda datog direktnog sistema skupova i preslikavanja i granica datog direktnog sistema. Sledeća teorema daje odgovor na to pitanje.

TEOREMA 1. Neka je U, $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde $\mathcal{T}_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, ograda direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$. Ako su zadovoljeni uslovi:
a) Za svaki element $u\in U$, postoji indeks $\alpha\in\Lambda$, tako da je $u\in \mathrm{Im}(\mathcal{T}_\alpha)$.
b) Za indekse $\alpha,\beta\in\Lambda$ i elemente $u_\alpha\in U_\alpha$ i $u_\beta\in U_\beta$ je $\mathcal{T}_\alpha(u_\alpha) = \mathcal{T}_\beta(u_\beta)$ ako i samo ako postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ sa $\alpha\leq\gamma$ i $\beta\leq\gamma$ i važi $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) = \rho_{\beta\gamma}(u_\beta)$ tada je U, $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granica direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$.

Ostaje da se još pokaže da za svaki dati direktan sistem skupova i preslikavanja postoji granica. Na taj način pokazujemo da postoji objekt definicije 2., i dobijamo potpunu predstavu o granicama datog direktnog sistema skupova i preslikavanja.

Uočimo zato jedan direktan sistem skupova i preslikavanja u oznaci $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$. Sa W označimo sumu familije skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Dakle $W = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \times \{\alpha\}$. Očigledno možemo posredstvom identifikacije $u \longmapsto (u,\alpha)$, za svaki element u, $u \in U_\alpha$ identifikovati skup U_α sa podskupom $U_\alpha \times \{\alpha\}$ skupa W, a samu sumu shvatiti kao disjunktnu uniju familije $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Na skupu W definišimo relaciju $\sim$ na sledeći način:

Neka su $u \in U_\alpha \subset W$ i $v \in U_\beta \subset W$ proizvoljni elementi u skupu W. Stavimo $u \sim v$ onda i samo onda ako postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ sa $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$ da važi $\rho_{\alpha\gamma}(u) = \rho_{\beta\gamma}(v)$.

Relacija $\sim$ na skupu W je relacija ekvivalencije, što se vidi neposredno i ona razbija skup W na klase medjusobno ekvivalentnih elemenata. Uočimo faktor skup $U = W/\sim$, zajedno sa preslikavanjima $\tau_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$ koja su kompozicija preslikavanja u dijagramu:

$$U_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} U_\alpha \times \{\alpha\} \overset{k_\alpha}{\subset} W \xrightarrow{p} W/\sim \; = U,$$

pri čemu je $j_\alpha(u) = (u,\alpha)$ za svaki element $u \in U_\alpha$, k_α inkluzivno preslikavanje, a p prirodna projekcija.

Skup U, zajedno sa preslikavanjima $\tau_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$, za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$ je granica direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ skupova i preslikavanja jer zadovoljava uslove teoreme 1.

2. Direktni sistem preslikavanja.

Neka su $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ i $(V_\alpha, \varkappa_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ dva direktna sistema skupova i preslikavanja u odnosu na isti skup indeksa Λ i neka su U, $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i V, $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granice tih sistema. Predpostavimo da je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ definisano preslikavanje $u_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ tako da je za $\alpha \leq \beta$ dijagram:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{u_\alpha} & V_\alpha \\ {\scriptstyle \rho_{\alpha\beta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varkappa_{\alpha\beta}} \\ U_\beta & \xrightarrow[u_\beta]{} & V_\beta \end{array}$$

komutativan. Može se dokazati da postoji jedno jedino preslikavanje $u: U \to V$ tako da je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ dijagram:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{u_\alpha} & V_\alpha \\ {\scriptstyle \pi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_\alpha} \\ U & \xrightarrow[u]{} & V \end{array}$$

komutativan.

Kolekciju preslikavanja $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde $u_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ nazivamo direktnim sistemom preslikavanja, odgovarajućih direktnih sistema. Preslikavanje $u:U \to V$ čiju smo egzistenciju gore istakli nazivamo granicom direktnog sistema preslikavanja $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i često ga označavamo sa $u = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha$.

Mogu se dokazati sledeće teoreme.(vid. [8])

TEOREMA 1. Neka su $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$, $(V_\alpha, \varkappa_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ i $(W_\alpha, \gamma_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistemi skupova i preslikavanja i U, $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, V, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i W, $\{t_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granice tih direktnih sistema redom. Ako su $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ direktni sistemi preslikavanja, gde $u_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ i $v_\alpha : V_\alpha \to W_\alpha$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\{v_\alpha \circ u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ je direktni sistem preslikavanja i važi:

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda}(v_\alpha \circ u_\alpha) = (\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} v_\alpha)\circ(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha)$$

Dokaz ove teoreme je neposredan. Konstrukcija granice direktnog sistema preslikavanja prenosi svojstva injektivnosti i surjektivnosti preslikavanja, kao što pokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 2. Neka su $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ i $(V_\alpha, \varkappa_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistemi skupova i preslikavanja i $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ direktni sistem preslikavanja, gde $u_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$. Neka je $u = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha$. Ako su za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ preslikavanja u_α injektivna (surjektivna) tada je preslikavanje u injektivno (surjektivno).

Konstrukcija granice direktnog sistema skupova i preslikavanja u saglasnosti je sa traženjem direktne i inverzne slike podskupova. Karakterizaciju tog odnosa daje sledeća teorema.

TEOREMA 3. Neka su $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ i $(V_\alpha, \rho'_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistemi skupova i preslikavanja i $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ direktni sistem preslikavanja $u_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$. Neka je $u = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha$. Tada važi:

a) Za direktni sistem $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ sa restrikcijama odgovarajućih preslikavanja $\rho_{\alpha\beta} : U_\alpha \longrightarrow U_\beta$, podskupova skupova U_α, je $\{u_\alpha(M_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, sa odgovarajućim preslikavanjima, direktan sistem podskupova skupova U_α i važi:

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha(M_\alpha) = u(\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha).$$

b) Neka je $\{a'_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ kolekcija elemenata tako da je $a'_\alpha \in V_\alpha$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ sa $\rho'_{\alpha\beta}(a'_\alpha) = a'_\beta$ za $\alpha \leq \beta$. Kolekcija skupova $u_\alpha^{-1}(a'_\alpha)$ je direktan sistem skupova, podskupova skupova U_α i važi:

$$\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} u_\alpha^{-1}(a'_\alpha) = u^{-1}(a'),$$

gde a' označava jednočlani skup, podskup skupa $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ koji je kanonička slika jednočlanih skupova $\{a'_\alpha\}$ za sve indekse $\alpha\in\Lambda$.

Predpostavimo da je Λ' usmeren podskup skupa Λ u odnosu na indukovano uredjenje. Podfamilija $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$ zajedno sa familijom preslikavanja $\{\rho_{\alpha\beta}\}$, pri $\alpha\in\Lambda'$, $\beta\in\Lambda'$ i $\alpha \leq \beta$ je direktni sistem skupova i preslikavanja u odnosu na usmeren skup Λ'. Označimo sa U i U' redom granice direktnih sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ i $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda'_1}$. Kolekcija $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$

kanoničkih preslikavanja $\pi_\alpha : U_\alpha \to U$ je direktan sistem preslikavanja te možemo govoriti o preslikavanju $g = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda'} \pi_\alpha, g: U' \to U$, koje nazivamo kanoničkim. Ako je Λ'' usmeren podskup od Λ' u odnosu na indukovano uredjenje i $U'' = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda''} U_\alpha$, a $g' : U'' \to U'$ i $g'' : U'' \to U$ kanonička preslikavanja tada važi $g'' = g \circ g'$.

Može se dokazati sledeća teorema.

TEOREMA 4. Neka je Λ usmeren skup i $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistem skupova i preslikavanja u odnosu na skup Λ. Neka je U, $\{\pi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granica tog direktnog sistema. Ako je Λ' kofinalni usmeren pod - skup skupa Λ i $U' = \varinjlim_{\alpha\in\Lambda'} U_\alpha$ tada je kanoničko preslikavanje $g: U' \to U$ bijektivno.

Pojmovi i teoreme navedene u ovom odeljku imaju značajnu ulogu u teoriji pramenova.

2. ELEMENTI TEORIJE PRAMENOVA.

1. Neki pojmovi u teoriji kategorija i funktora.

Teorija kategorija i funktora pojavila se 1944 godine u vezi sa aksiomatizacijom teorije grupa homologije i kohomologije topoloških prostora i njeni kreatori su S. Ajenberg i S. Mc Lejn. Danas, ova teorija nalazi primenu u raznim oblastima matematike.

Kažemo da je zadana kategorija K, ako je data klasa objekata u oznaci obK, čije elemente nazivamo objektima kategorije K i za svaka dva objekta $A,B\in obK$ skup $Hom_K(A,B)$, koji nazivamo skupom morfizama. Pri tome je $u:A \to B$ ili $A \xrightarrow{u} B$ oznaka za $u\in Hom_K(A,B)$. Za svaka tri objekta A,B i C definisano je preslikavanje:

$$\mu : Hom_K(A,B) \times Hom_K(B,C) \longrightarrow Hom_K(A,C)$$

pri čemu $\mu(u,v)$ označavamo sa vu i nazivamo kompozicijom morfizama $u\in Hom_K(A,B)$ i $v\in Hom_K(B,C)$. Skupovi $Hom_K(A,B)$ i kompozicija morfizama zadovoljavaju uslove:

a) Kompozicija morfizama je asocijativna.

b) Za svaki objekt $A\in obK$ postoji jedinični morfizam $1_A\in Hom_K(A,A)$ takav da za svaka dva morfizma $u: B \longrightarrow A$ i $v: A \longrightarrow C$ važi $1_A u = u$ i $v 1_A = v$.

c) Za različite parove objekata (A,B) i (A', B') skupovi $\mathrm{Hom}_K(A,B)$ i $\mathrm{Hom}_K(A', B')$ su disjunktni.

Matematika obiluje raznim primerima kategorija od kojih navodimo neke sa kojima radimo kasnije.

Kategorija skupova i preslikavanja, u oznaci ENS ima za objekte klasu svih skupova, a za svaka dva objekta A i B je skup Hom(A,B) ukupnost svih preslikavanja skupa A u skup B.

Kategorija topoloških prostora i neprekidnih (otvorenih) preslikavanja, u oznaci TOP (TOPO) ima za objekte topološke prostore, a za svaka dva topološka prostora X i Y , skup Hom(X,Y) predstavlja ukupnost svih neprekidnih (otvorenih) preslikavanja prostora X u prostor Y. O topološkim kategorijama videti naprimer [60].

Kategorija abelovih grupa i homomorfizama, u oznaci AB, ima za objekte abelove grupe, a za svaki par abelovih grupa A i B, skup Hom(A,B) predstavlja skup svih homomorfizama grupe A u grupu B.

Kategorija uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, u oznaci OENS ima za objekte uredjene skupove, a za svaki par uredjenih skupova A i B je Hom(A,B) skup svih izotonih preslikavanja skupa A u skup B.

Neka su K_1 i K_2 date kategorije. Kovarijantni (kontravarijantni) funktor $F: K_1 \longrightarrow K_2$ kategorije K_1 u kategoriju K_2 je definisan ako su zadata dva preslikavanja:

d) Preslikavanje $A \longmapsto F(A)$, koje svakom objektu $A \in \mathrm{ob}K_1$ pridružuje objekat $F(A) \in \mathrm{ob}K_2$, i

e) preslikavanje $u \longmapsto F(u)$ koje svakom morfizmu $u: A \longrightarrow B$ pridružuje morfizam $F(u):F(A) \to F(B)$ $(F(u):F(B) \to F(A))$ i pritom važi $F(1_A) = 1_{F(A)}$ i $F(vu) = F(v)F(u)$ $(F(vu) = F(u)F(v))$.

Funktori su dakle prirodne veze izmedju kategorija i njima obiluje matematika.

Ako su F i G, kovarijantni funktori kategorije K_1 u kategoriju K_2, tada je morfizam funktora u oznaci f, kolekcija morfizama $f(A): F(A) \to G(A)$ u kategoriji K_2, za svaki objekt $A \in obK_1$ ako je za svaki morfizam $u: A \to B$ u kategoriji K_1 sledeći dijagram:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array}$$

komutativan.

Ako su funktori F i G kontravarijantni, tada u definiciji morfizama tih funktora, zahtevamo, umesto komutativnosti gornjeg dijagrama, komutativnost dijagrama:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f(A)} & G(A) \\ F(u) \uparrow & & \uparrow G(u) \\ F(B) & \xrightarrow[f(B)]{} & G(B) \end{array} .$$

Ako su F, G i H funktori i $f: F \to G$ i $g: G \to H$ morfizmi funktora stavimo li $h(A) = g(A) \circ f(A)$ za svaki objekt $A \in obK_1$, definisali smo morfizam $h: F \to H$ funktora. Morfizam funktora h nazivamo kompozicijom morfizama funktora f i g i označavamo ga sa $g \circ f$. Kompozicija funktornih morfizama je asocijativna i ako je K_1 mala kategorija, dakle kategorija čija je klasa objekata skup, na prirodan način možemo govoriti o novoj kategoriji, u oznaci $Funct(K_1, K_2)$ čiji su objekti svi mogući kontravarijantni funktori kategorije K_1 u kategoriju K_2, a za svaka dva funktora F i G je skup $Hom(F,G)$, skup svih funktornih morfizama funktora F u funktor G.

O ostalim pojmovima koje ovde nismo naveli, kao i opširnije o navedenim pojmovima možemo se obavestiti u [7].

Za nas je od interesa što se u teoriji kategorija i funktora definišu za proizvoljnu kategoriju pojmovi kao što je proizvod, suma, granica direktnog ili inverznog sistema objekata.

2. Predpramenovi baze X sa vrednostima u kategoriji K.

Neka je X topološki prostor. Označimo sa $\mathcal{O}$ kategoriju čiji su objekti otvoreni podskupovi prostora X, a za za svaka dva objekta $U,V\in \mathrm{ob}\mathcal{O}$ neka se skup $\mathrm{Hom}(U,V)$ svodi na jedan element, ako je $U\subset V$ i neka bude prazan skup u ostalim slučajevima.

Neposredno možemo proveriti da je $\mathcal{O}$ kategorija koju nazivamo kategorijom otvorenih skupova.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor, $\mathcal{O}$ kategorija otvorenih skupova i K proizvoljna kategorija. Predpramen baze X, sa vrednostima u kategoriji K je svaki kontravarijantan funktor definisan na kategoriji $\mathcal{O}$ otvorenih skupova sa vrednostima u kategoriji K.

Na osnovu definicije 1., svaki predpramen F je definisan ako znamo kako svakom otvorenom skupu $U\subset X$ pridružujemo objekt $F(U)\in \mathrm{ob}K$ i ako je zadat morfizam $\rho_U^V\colon F(V)\to F(U)$ kad god je $U\subset V$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

a) Za svaki objekt $U\in \mathrm{ob}\mathcal{O}$ je $\rho_U^U = 1_{F(U)}$.

b) Kad god je $U\subset V\subset W$ za objekte U,V i W u kategoriji $\mathcal{O}$, važi:

$$\rho_U^W = \rho_U^V\circ\rho_V^W,$$

odnosno, sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} F(W) \arrow[rr, "\rho_U^W"] \arrow[dr, "\rho_V^W"'] & & F(U) \\ & F(V) \arrow[ur, "\rho_U^V"'] & \end{tikzcd}$$

je komutativan.

Za svaki par otvorenih podskupova U i V skupa X, pri $V\subset U$, morfizam $\rho_V^U\colon F(U)\to F(V)$ nazivamo morfizmom restrikcije ili ograničenja.

Kako je kategorija otvorenih skupova $\mathcal{O}$, mala kategorija, može se kao u predhodnom odeljku govoriti o kategoriji Funct($\mathcal{O}$,K). Dakle predpramenovi baze X sa vrednostima u kategoriji K čine novu kategoriju, sa morfizmima koji su zapravo morfizmi predpramenova.

Ako je kategorija K abelova (vid. [23]), može se pokazati da je i kategorija predpramenova abelova, te se u njoj može definisati pojam tačnog niza i može se pokazati da je potreban i dovoljan uslov da niz predpramenova:

$$\cdots \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

bude tačan, to da odgovarajući nizovi:

$$\cdots \longrightarrow F_{n-1}(U) \longrightarrow F_n(U) \longrightarrow F_{n+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

budu tačni u kategoriji K, za svaki objekt $U \in ob\mathcal{O}$. Ovo znači, zapravo da je funktor $F \longmapsto F(U)$ tačan.

Veliki je broj primera predpramenova, koje smo napred definisali i mi navodimo neke.

PRIMER 1. Neka je A skup i X topološki prostor. Funktor A_X je konstantni predpramen, ako je zadat sa sledeće dve informacije:

1) $A_X(U) = A$, za svaki otvoren podskup U skupa X, koji je snabdeven topološkom strukturom.

2) $\rho^U_V = 1_A\colon A_X(U) \longrightarrow A_X(V)$, gde je $V \subset U$, za otvorene podskupove U i V skupa X.

PRIMER 2. Neka su X i Y topološki prostori. Funktor C^Y neprekidnih funkcija sa vrednostima u prostoru Y je predpramen, ako je zadat sledećim informacijama:

1) $C^Y(U)$ je skup neprekidnih funkcija $U \longrightarrow Y$ za svaki otvoren podskup U skupa X.

2) $\rho^U_V\colon C^Y(U) \longrightarrow C^Y(V)$ sa $f \longmapsto f|V$, za $V \subset U$ i $U,V \in ob\mathcal{O}$ za svaku neprekidnu funkciju $f \in C^Y(U)$, gde je $f|V$ ograničenje funkcije f na podskup V.

Iz primera 2., vidimo odakle potiče naziv morfizam restrikcije ili ograničenja za morfizme ρ_V^U u definiciji 1., predpramenova.

Umesto neprekidnih funkcija u primeru 2., mogu se posmatrati i druge klase funkcija; recimo k-puta diferencijabilne funkcije sa vrednostima u skupu R realnih brojeva ili analitičke funkcije sa vrednostima u skupu C kompleksnih brojeva i slično, ako za skup X uzmemo da bude, redom, otvoren podskup skupa R^n ili C^n.

PRIMER 3. Neka je X topološki prostor koji ima više od jedne tačke, recimo $X = \{0,1\}$ ili $X = [0,1] \subset R$ gde su u oba slučaja topologije indukovane iz R. Definišimo predpramen P_1 sa:
1) $P_1(X) = Z$, gde je Z skup celih brojeva.
2) svi morfizmi restrikcija, osim ρ_X^X su konstantna preslikavanja.
3) $P_1(U) = \{0\}$ za otvorene podskupove $U \neq X$.

Izaberimo element $x_0 \in X$. Definišimo predpramen P_2 sledećim informacijama:

1′) $P_2(U) = Z$, ako otvoren skup $U \ni x_0$.

2′) $P_2(U) = \{0\}$, ako otvoren skup $U \not\ni x_0$.

3′) Morfizmi restrikcije ρ_V^U su indentična preslikavanja na skupu Z, ako je $x_0 \in V \subset U$, a trivijalna ako taj uslov nije ispunjen.

Primeri 1. i 2., su tipični primeri predpramenova, dok su predpramenovi P_1 i P_2 karakteristični kao kontraprimeri u teoriji pramenova.(vid.[55])

3. Sloj predpramena u tački.

Neka je X topološki prostor i F predpramen baze X sa vrednostima u kategoriji ENS, skupova i preslikavanja. Uočimo neki element $x \in X$. Kolekcija skupova F(U), kad skup U prolazi familijom otvorenih podskupova prostora X, koji sadrže tačku $x \in X$, zajedno sa preslikavanjima ρ^U_V: $F(U) \rightarrow F(V)$ za $x \in V \subset U$, gde su U i V otvoreni podskupovi prostora X, čini direktan sistem skupova i preslikavanja.

DEFINICIJA 1. Sloj $F(x)$ predpramena F u tački $x \in X$ je granica direktnog sistema $(F(U), \rho^U_V)$ za otvorene podskupove U i V prostora X, za koje važi $x \in V \subset U$, zajedno sa preslikavanjima u oznaci t_U, gde t_U: $F(U) \rightarrow F(x)$, za svaki otvoren skup U koji sadrži tačku $x \in X$.

Neposredno iz definicije 1., vidimo da svaki element sloja $F(x)$, nad tačkom $x \in X$ možemo predstaviti nekim elementom iz skupa $F(U)$, za neki otvoren skup $U \subset X$. Takodje može se zaključiti da su dva elementa s_x i t_x, sloja $F(x)$ u tački $x \in X$, predstavljena elementima $s \in F(U)$ i $t \in F(V)$ redom , jednaka ako i samo ako postoji otvoren skup $W \subset U \cap V$ tako da važi $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$.

U odeljku 2., ovog paragrafa, definisali smo u primeru 1., pojam konstantnog predpramena A_X. Sloj predpramena A_X nad svakom tačkom $x \in X$ je očigledno skup A, odnosno $A_X(x) = A$, za svaki element $x \in X$.

U primeru 2., predhodnog odeljka definisan je predpramen C^Y. Elemente sloja predpramena C^Y u svakoj tački $x \in X$, odnosno elemente skupa $C^Y(x)$ na osnovu gornjih razmatranja možemo predstaviti neprekidnim funkcijama definisanim u otvorenim okolinama tačke $x \in X$.

Sloj predpramena P_1 u primeru 3., predhodnog paragrafa tojest skup $P_1(x)$ za svaki element $x \in X$ je jedno - član skup $\{0\}$, za svaki element $x \in X$ je dakle, $P_1(x) = \{0\}$.

Prema tome su svi slojevi predpramena P_1 jednaki kao i u slučaju konstantnog predpramena A_X za $A = \{0\}$, ali predpramen P_1 nije konstantan.

Neka je X topološki prostor i $f: F \longrightarrow G$ morfizam predpramenova baze X sa vrednostima u kategoriji ENS, skupova i preslikavanja. Postavlja se pitanje kako taj morfizam f, za neki element $x \in X$ indukuje preslikavanje skupova $F(x) \longrightarrow G(x)$. Očigledno kolekcija morfizama $f(U): F(U) \rightarrow G(U)$ za otvorene skupove U, koji sadrže tačku $x \in X$, obrazuje direktni sistem preslikavanja, pa je traženo preslikavanje f_x, $f_x: F(x) \longrightarrow G(x)$ zapravo granica tog direktnog sistema preslikavanja. Dakle $f_x = \varinjlim_{U \ni x} f(U)$.

Preslikavanje $f_x: F(x) \longrightarrow G(x)$, preciznije svakom elementu $e \in F(x)$ koji je predstavljen elementom $s \in F(U)$ za otvoren podskup $U \ni x$, pridružuje element $f_x(e) = (f(U)(s))_x$. Da tako definisano preslikavanje jeste dobro definisano, vidi se neposredno, jer ako je element $e \in F(x)$ predstavljen nekim drugim predstavnikom $t \in F(V)$ za elemente s i t postoji otvoren skup $W \subset U \cap V$ tako da je $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$, pa je:

$$\rho^U_W(f(U)(s)) = f(W) \circ \rho^U_W(s) = f(W) \circ \rho^V_W(t) =$$
$$= \rho^V_W(f(V)(t)),$$

dakle:

$$f_x(e) = (f(U)(s))_x = (f(V)(t))_x .$$

Neposredno se vidi da je $(g \circ f)_x = g_x \circ f_x$ i $(1_F)_x = 1_{F(x)}$, što je uostalom preformulacija teoreme 2.1.

4. Pramenovi skupova.

Pojam pramenova skupova, koji ovde uvodimo ima veliku primenu u raznim oblastima matematike, a posebno u kompleksnoj analizi i algebarskoj geometriji.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor i F predpramen baze X, sa vrednostima u kategoriji ENS, skupova i preslikavanja. Predpramen F je pramen skupova baze X, ako on zadovoljava sledeće uslove:

G1) Neka je otvoren podskup U prostora X, unija familije otvorenih skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i neka su s i s′ elementi skupa F(U), tako da za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ važi:

$$\rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho^U_{U_\alpha}(s'),$$

tada je s = s′.

G2) Neka je otvoren podskup U prostora X, unija familije otvorenih skupova $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i neka je $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija elemenata, pri čemu za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $s_\alpha\in F(U_\alpha)$. Ako za svaka dva indeksa α i β iz skupa Λ važi:

$$\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta),$$

tada postoji element $s\in F(U)$, tako da za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\rho^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha$.

Možemo se dogovoriti, da elemente skupova F(U) gde je U otvoren podskup prostora X, nazivamo sečenjima pramena F po otvorenom skupu U ili prosto sečenjima.

Predpramenove baze X, sa vrednostima u kategoriji ENS skupova i preslikavanja, koji zadovoljavaju aksiomu G1) u definiciji 1., nazivamo monopredpramenovima. Tako su predpramenovi u primerima 1. i 2., odeljka 2., ovog paragrafa, monopredpramenovi, kao i predpramen P_1 u primeru 3., istog odeljka.

Primetimo da je elemenat $s\in F(U)$, u definiciji 1., čiju egzistenciju tvrdi uslov G2), jedinstven na osnovu uslova G1). Takodje ako uslov G2) primenimo na slučaj kada je skup indeksa Λ prazan, možemo zaključiti da je $F(\emptyset)$ jednočlan skup, izuzimajući slučaj kada su svi skupovi F(U) prazni, od čega se po dogovoru ogradjujemo.

Kao i u slučaju predpramenova, može se govoriti o morfizmima pramenova ili opštije o morfizmima monopredpramenova skupova date baze X. U tom smislu navodimo sledeću teoremu.

TEOREMA 1. Neka je F predpramen i G monopredpramen baze X sa vrednostima u kategoriji ENS, skupova i preslikavanja i f i g morfizmi funktora F u funktor G, tako da za svaki element $x \in X$ važi $f_x = g_x$. Tada je $f = g$.

Dokaz ove teoreme je neposredan. (vid.[55])

Predpramenovi C^Y, u primeru 3.2., i P_2 u primeru 3.3., su pramenovi skupova baze X. Takodje je konstantni predpramen A_X u primeru 3.1., pramen skupova baze X.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor. Par(E,p) gde je E topološki prostor a p: $E \longrightarrow X$ neprekidno preslikavanje, nazivamo presečnim prostorom baze X. Za svaki otvoren podskup $U \subset X$ sa F(U) označimo skup svih neprekidnih preslikavanja s, $s: X \longrightarrow E$, tako da je $p(s(x)) = x$, za svaki element $x \in U$. Na očigledan način možemo definisati morfizme restrikcija ρ_V^U: $F(U) \longrightarrow F(V)$ kad god je otvoren skup $V \subset U$ i reći da je korespondencija $U \longmapsto F(U)$ tipa pramena, što je lako proveriti. Tako definisan pramen F nazivamo pramenom sečenja presečnog prostora (E,p).

Primer 1., možemo modifikovati na više načina , tako ćemo umesto neprekidnih sečenja posmatrati recimo diferencijabilna, analitička i slično. Takodje, izbor sečenja u primeru 1., je takav da za svaki element $x \in X$ možemo, da tako kažemo, neprekidno birati elemente s(x), skupa $p^{-1}(x)$, koji nazivamo vlaknom preslikavanja p nad tačkom $x \in X$.

Napomenimo na kraju ovog odeljka da je primer 1., posebno važan jer se koristi za konstrukciju pramen prostora u narednom odeljku.

5. Pramen prostor.

Pre nego što uvedemo pojam pramen prostora ili nadkrivajućeg prostora pridruženog pramenu, izkazaćemo i dokazati sledeći stav.

TEOREMA 1. Neka je X topološki prostor i F pramen skupova baze X. Za svaki otvoren podskup U prostora X i sečenja $s,s' \in F(U)$ važi:
$s = s'$ako i samo ako je za svaki element $x \in X$, $s_x = s'_x$.

DOKAZ. Ako je $s = s'$, tada je očigledno $s_x = s'_x$ za svaki element $x \in X$. Predpostavimo da važi $s_x = s'_x$ za svaki element $x \in X$. Elementi s_x i s'_x mogu se predstaviti sečenjima s i s'definisanim u nekim okolinama tačke $x \in X$. Kako je po predpostavci $s_x = s'_x$ to postoji okolina U_x gde se ta sečenja poklapaju. Uočimo kolekciju otvorenih podskupova $\{U_x\}_{x \in U}$. Ova kolekcija pokriva otvoren skup U i restrikcije sečenja s i s'su jednake na svakom članu U_x te kolekcije. Kako važi uslov Gl) u definiciji pramenova, biće $s = s'$na skupu U, što je i trebalo dokazati. Q.E.D

Teoremu 1. navodimo jer je koristimo kasnije , a njen dokaz radi ilustracije jer je jednostavan.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor. Pramen prostorom nad X, nazivamo par (E,p), gde je E topološki prostor, a p neprekidno preslikavanje i lokalni homeomorfizam E u X, što znači da za svaki element y E postoji otvoren skup N tako da $y \in N$ i otvoren skup $U \ni p(x)$ tako da je restrikcija preslikavanja p na skup N, t.j., $p|N: N \longrightarrow U$, homeomorfizam.

Morfizmom pramen prostora, $f:(E,p) \longrightarrow (E',p')$ nad prostorom X nazivamo neprekidno preslikavanje $f: E \longrightarrow E'$, tako da je $p = p'\circ f$, odnosno tako da je dijagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

komutativan.

Neposredno iz definicije 1., vidimo da je pramen prostor (E,p) pre svega presečni prostor baze X, kao u primeru 4.1., te se može govoriti o pramenu sečenja prostora (E,p) po X, koji označavamo sa GE. Slično za pramen prostor (E',p') označimo odgovarajući pramen sečenja sa GE'.

Predpostavimo da je $f:(E,p) \longrightarrow (E',p')$ morfizam pramen prostora, tada za svaki otvoren podskup U prostora X možemo uočiti dijagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & E' \arrow[d, "p'"] \\ U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "p", "\subset"'] & X. \end{tikzcd}$$

Posmatrajući taj dijagram prirodno se uočava korespodencija $s \longmapsto f\circ s$, koja je zapravo preslikavanje skupova $GE(U) \longrightarrow GE'(U)$. Ukupnost tih preslikavanja čini morfizam Gf, $Gf: GE \longrightarrow GE'$ pramenova. Drugim rečima, svaki morfizam nadkrivajućih prostora nad prostorom X indukuje morfizam odgovarajućih pramenova sečenja.

Iz definicije 1., može se dokazati sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 2. Neka je (E,p) pramen prostor nad X, tada važe sledeći uslovi:

a) p je otvoreno preslikavanje.

b) Ako je U otvoren podskup prostora X i sečenje $s \in GE(U)$ tada je $s(U)$ otvoren podskup prostora E, a skupovi tog oblika čine bazu topologije na skupu E.

c) U komutativnom dijagramu:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \; X \; \swarrow{\scriptstyle p'} & \end{array}$$

ekvivalentni su iskazi: ϕ je neprekidno preslikavanje, ϕ je otvoreno preslikavanje, ϕ je lokalni homeomorfizam i svi važe istovremeno.

TEOREMA 3. Neka je (E,p) pramen prostor nad X i GE pramen sečenja (E,p) po X, tada je sloj $GE(x)$ u svakoj tački $x\in X$, do na prirodnu bijekciju, jednak vlaknu $p^{-1}(x)$ preslikavanja p nad $x\in X$. Podprostor $p^{-1}(x)$ je diskretan podprostor prostora E.

TEOREMA 4. Za svaki predpramen F baze X, sa vrednostima u kategoriji ENS, skupova i preslikavanja, može se konstruisati pramen prostor LF, tako da za svaki morfizam $f\colon F \longrightarrow F'$, predpramenova je indukovan morfizam $LF \rightarrow LF'$, u oznaci Lf, odgovarajućih pramen prostora.

DOKAZ. Neka je $LF = \bigsqcup_{x\in X} F(x)$, dakle disjunktna unija slojeva predpramena F i neka je $p\colon LF \longrightarrow X$ prirodna projekcija, pri čemu je $p^{-1}(x) = F(x)$ za svaki element $x\in X$. Skup LF možemo topologizirati na sledeći način.

Predpostavimo da je $U\subset X$ otvoren podskup prostora X i $s\in F(U)$. Može se definisati preslikavanje $\hat{s}\colon U \longrightarrow LF$ sa $\hat{s}(x) = s_x \in F(x) \subset LF$, za svaki element $x\in U$. Skupovi $\hat{s}(U)$, pri $\hat{s}(U) = \{s_x \mid s_x \in LF,\ x\in U\}$ za $s\in F(U)$, gde je U otvoren podskup prostora X čine bazu topologije na skupu LF, tako da taj skup postaje pramen prostor. Zaista, predpostavimo da je za sečenja $s\in F(U)$ i $t\in F(V)$, $\hat{s}(U)\cap\hat{t}(V) \neq \emptyset$, gde su U i V otvoreni podskupovi prostora X, tada postoji element e, pri $e\in\hat{s}(U)\cap\hat{t}(V)$. Dakle, sečenja s i t se poklapaju u tački x, $x\in U\cap V$, pa se dakle poklapaju i u otvorenoj okolini $W\subset U\cap V$, tačke x. Okolina W i predstavnik elementa e, definisan na W odredjuju bazni otvoren skup $\hat{s}(W) = \hat{t}(W) \subset \hat{s}(U)\cap\hat{t}(V)$, gde je skup $\hat{s}(W)$ ustvari $\hat{\rho}^U_W(s)(W)$. U odnosu na tako uvedenu topologiju skupa LF, preslikavanje p je neprekidno preslikavanje topološkog prostora LF u topološki prostor X. Zaista, neka je $U \subset X$ otvoren skup. $p^{-1}(U) = \cup \{\hat{s}(V) \mid s \in F(V)$ za otvor. $V \subset U\}$ je unija baznih otvorenih podskupova, pa je kao takav otvoren. Preslikavanje p je još i lokalni homeomorfizam, jer je restrikcija preslikavanja p na svakom skupu s(U) homeomorfizam. Tako smo, dakle, konstruisali pramen prostor pridružen datom predpramenu. Q.E.D

Neka je $f: F \longrightarrow F'$ morfizam predpramenova skupova baze X. Na kraju odeljka 4., videli smo da morfizam f, za svaki element $x \in X$ indukuje preslikavanje $f_x : F(x) \longrightarrow F'(x)$, a samim tim i preslikavanje $Lf: LF \longrightarrow LF'$ tako da je sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} LF \arrow[rr, "Lf"] \arrow[dr, "p"'] & & LF' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

komutativan. Preslikavanje Lf je neprekidno prema teoremi 2.d), jer je $Lf(\hat{s}(U)) = \widehat{f(U)(s)}(U)$.

Na osnovu gornjih razmatranja možemo dokazati sledeću teoremu.

TEOREMA 5. Ako je E pramen prostor nad X, tada je LGE kao pramen prostor nad X, izomorfan sa E u smislu da postoji homeomorfizam tih prostora saglasan sa projekcijama.

Teoreme 4. i 5., pokazuju nam kako se od predpramena F skupova baze X može dobiti pramen prostor LF a zatim i pramen GLF. Time je da tako kažemo izvršena pramenizacija predpramena F. Dakle svakom predpramenu skupova baze X možemo pridružiti njegovu pramenizaciju, odnosno pramen skupova baze X i to na jednoznačan način, kako to pokazuje teorema 5. Radi se tu o morfizmu $n_F : F \longrightarrow GLF$ funktora koji se definiše na sledeći način:

Pre svega za otvoren skup $U \subset X$ i sečenje $s \in F(U)$, definišemo preslikavanje $\hat{s}:U \longrightarrow LF$ sa $\hat{s}(x) = s_x \in F(x)$, kao u dokazu teoreme 4., odatle $n_F(U):F(U) \longrightarrow GLF(U)$ definišemo sa $n_F(U)(s) = \hat{s}$.

Ovakva razmatranja omogućuju nam da izkažemo sledeću faktorizacionu teoremu, koja nam kaže da je pramen GLF najbolji pramen koji se može dobiti iz predpramena F.

TEOREMA 6. Neka je X topološki prostor, F predpramen i G pramen skupova baze X. Svaki morfizam $f:F \longrightarrow G$, predpramenova razlaže se jednoznačno na kompoziciju morfizama $g \circ n_F$, gde je $n_F:F \longrightarrow GLF$ gore definisan morfizam i $g:GLF \to G$ jedinstven morfizam pramenova.

Iskaz teoreme 6., možemo preformulisati tako , što ćemo reći da za dijagram:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "n_F"'] & G \\ & GLF \end{tikzcd}$$

postoji jedinstven morfizam pramenova $g:GLF \longrightarrow G$, tako da je komutativan dijagram:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "n_F"'] & & G \\ & GLF \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} .$$

Za dokaz teoreme 6. koriste se sledeće leme.

LEMA 1. G je pramen onda i samo onda ako je $n_G:G \longrightarrow GLG$ izomorfizam pramenova.

LEMA 2. Ako je F predpramen skupova baze X , sva preslikavanja $F(x) \longrightarrow GLF(x)$ su izomorfizmi, ako su indukovana morfizmom $n_F:F \longrightarrow GLF$.

Napred navedene teoreme, kao i dokaz teoreme 4., naveli smo jer u potpunosti karakterišu pramen prostore i daju vezu pramenova i odgovarajućih pramen prostora.(vid. [23],[11])

Napomenimo na kraju ovog paragrafa da se teorija pramenova pojavila pedesetih godina ovog veka i to je jedna od malog broja teorija izgradjenih za desetak godina.

3. DIREKTNE GRANICE FUNKTORA.

1. Osnovni pojmovi i definicije.

Neka je K proizvoljna kategorija i $\{A_i\}_{i\in I}$ kolekcija njenih objekata. Objekt A, zajedno sa familijom morfizama $\{u_i\}_{i\in I}$, gde za svaki indeks $i\in I$, $u_i:A_i \to A$, je suma kolekcije objekata $\{A_i\}_{i\in I}$, ako je za svaki objekt X u kategoriji K, preslikavanje:

$$\mathrm{Hom}_K(A,X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(A_i,X)$$

definisano sa $u \longmapsto (uu_i)_{i\in I}$, bijektivno.

Morfizme u_i za $i\in I$, nazivamo kanoničkim injekcijama iako u opštem slučaju, ako su preslikavanja, morfizmi u_i ne moraju biti injektivna.

Sumu kolekcije objekata $\{A_i\}_{i\in I}$ označavamo sa $\coprod_{i\in I} A_i$ ili $\bigoplus_{i\in I} A_i$.

Kategorija K, u kojoj svaka kolekcija objekata ima sumu, naziva se kategorija sa sumama. Kategorije sa sumama su svakako kategorije ENS, AB, TOP u paragrafu 2.1.

Neka su A i B objekti kategorije K, a morfizmi u_1

i u_2 elementi skupa $Hom_K(A,B)$. Kojezgro para morfizama u_1 i u_2 je objekt M kategorije K, zajedno sa morfizmom $m:B \longrightarrow M$, ako su pri tome ispunjeni uslovi:

a) Ako je morfizam $u:B \longrightarrow X$ takav da je $uu_1 = uu_2$, tada postoji jedinstven morfizam $v:M \rightarrow X$ tako da je $u = vm$.

b) Ako za morfizam $u:B \longrightarrow X$, postoji morfizam $v:M \longrightarrow X$ tako da je $u = vm$, tada je $uu_1 = uu_2$.

Može se pokazati da su svaka dva kojezgra datog para morfizama izomorfna. Takodje, ako je (M,m) kojezgro para morfizama $u_1,u_2:A \longrightarrow B$, tada je m epimorfizam.

U kategorijama ENS, TOP, AB naprimer, svaki par morfizama ima kojezgro.(vid.[7])

2. Direktna granica funktora u datoj kategoriji.

U paragrafu 2.1., uveli smo pojam kategorije $Funct(K_1,K_2)$ svih kontravarijantnih funktora kategorije K_1 u kategoriju K_2. Umesto kontravarijantnih, možemo posmatrati kovarijantne funktore, pa za date kategorije D i K, kada je D mala kategorija, možemo definisati kategoriju u oznaci Funct(D,K) na sledeći način:

Za objekte kategorije Funct(D,K) uzmimo sve kovarijantne funktore kategorije D u kategoriju K, a za morfizme kategorije Funct(D,K), sve moguće funktorne morfizme.

Često se tako definisana kategorija naziva kategorijom dijagrama, kategorija D šemom, a svaki funktor kategorije D u kategoriju K, dijagramom u K, sa šemom D.

PRIMER 1. Neka je I delimično uredjen skup, koji ne mora biti desno usmeren. Sa OrdI označimo kategoriju čiji su objekti elementi skupa I, a za svaki par objekata $x,y\in I$, skup $\mathrm{Hom}_{\mathrm{OrdI}}(x,y)$ jednočlan, ako je $x \leq y$, a prazan u ostalim slučajevima. Neposredno proveravamo da je OrdI kategorija.

DEFINICIJA 1. Direktna granica funktora F, gde $F:D \longrightarrow K$ je objekt A, kategorije K, zajedno sa morfizmima $u_X:F(X) \longrightarrow A$, definisanim za sve objekte $X\in \mathrm{ob}D$, tako da važi:

a) Za svaki morfizam $a:X \longrightarrow Y$ u kategoriji D je $u_X = u_Y F(a)$.

b) Ako je $B\in \mathrm{ob}K$ i $v_X:F(X) \longrightarrow B$ morfizam u K, definisan za sve objekte $X\in \mathrm{ob}D$ i važi $v_X = v_Y F(a)$ za svaki morfizam $a:X \longrightarrow Y$ u D, tada postoji jedinstven morfizam v, $v:A \longrightarrow B$ tako da važi $v_X = vu_X$ za sve objekte $X\in \mathrm{ob}D$.

PRIMER 2. Neka je K kategorija ENS ili AB, a I proizvoljni desno usmeren skup. Za svaki funktor $F:\mathrm{OrdI} \longrightarrow K$ se pojam direktne granice funktora F, poklapa sa pojmom granice direktnog sistema familije $\{F(i)\}_{i\in I}$, kao u paragrafu 1.1., ove glave ili u paragrafu III.1.1.

Može se pokazati (vid.[7]) da su svake dve direktne granice datog funktora izomorfne.

Direktna granica datog funktora F obično se označava sa $\varinjlim F$, a ako je $D = \mathrm{OrdI}$, ona se označava često sa $\varinjlim_{i\in I} F(i)$.

Očigledno, osnovni problem je egzistencija direktne granice funktora, objekata kategorije Funct(D,K), a potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju direktne granice funktora daje sledeća teorema.

TEOREMA 1. Potreban i dovoljan uslov da ma koji funktor iz male kategorije D u kategoriju K ima direktnu granicu je da kategorija K bude kategorija sa sumama i da svaki par morfizama u kategoriji K ima kojezgro.

Uslovi teoreme 1., obezbedjuju jedan način da se konstruiše direktna granica datog funktora.(vid.[7])

Dakle, osnovni problem je egzistencija direktne granice datog funktora i mi taj problem nadalje rešavamo za kategorije topoloških prostora i otvorenih preslikavanja, topoloških grupa i otvorenih homomorfizama, uredjenih topoloških prostora i bitopoloških prostora i odgovarajućih preslikavanja.

III. O DIREKTNIM SISTEMIMA TOPOLOŠKIH GRUPA.

1. GRANICE DIREKTNIH SISTEMA ABELOVIH GRUPA.

1. Opšta razmatranja.

U ovoj glavi proučavaju se direktni sistemi topoloških grupa i pramenovi sa vrednostima u kategoriji topoloških grupa. Zato, u ovom paragrafu definišemo direktne sisteme grupa i granice tih direktnih sistema. U drugom paragrafu uvodimo pojam direktnih sistema topləških prostora i otvorenih preslikavanja i konstruišemo granicu takvih sistema.

U proučavanju inverznih sistema topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja (vid.[35]) istaknutu ulogu imaju neprekidna preslikavanja i upravo priroda definicije neprekidnosti, ukazuje na potrebu, da kada se radi o topološkim prostorima, govorimo o inverznim sistemima, pogotovu što su granice takvih sistema podprostori odgovarajućih proizvoda topoloških prostora.

U slučaju direktnih sistema, dakle, prirodno je posmatrati direktne sisteme topoloških prostora i otvorenih preslikavanja i mi u drugom paragrafu takve sisteme posmatramo.

Problem saglasnosti topološke i grupne strukture rešen je u trećem paragrafu, a primena dobijenih rezultata u prva tri paragrafa predmet je ispitivanja u ostalim paragrafima ove glave.

2. Egzistencija granice direktnih sistema abelovih grupa.

O direktnim sistemima abelovih grupa može se govoriti kao o posebnom slučaju definicije II.1.1.1., dakle definicije direktnog sistema skupova i preslikavanja ili opštije definicije II.3.2.1.

DEFINICIJA 1. Direktni sistem abelovih grupa je direktni sistem skupova $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ tako da je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, skup G_α snabdeven strukturom abelove grupe i za svaki par indeksa (α,β), $(\alpha,\beta)\in\Lambda_1$ je preslikavanje $\rho_{\alpha\beta}: G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ homomorfizam abelovih grupa.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor i Λ familija svih njegovih otvorenih podskupova, usmerena relacijom $\leq$ koju definišemo na sledeći način:

$$U \leq V \text{ ako i samo ako je } U \supset V.$$

Ako je F predpramen abelovih grupa baze X i $\rho^U_V = \rho_{UV}$ za $U \leq V$, tada je $(F(U), \rho_{UV})$ za $U \leq V$ direktan sistem abelovih grupa.

I za slučaj direktnog sistema abelovih grupa može se definisati pojam ograde. Ograda datog sistema abelovih grupa, datog u oznakama definicije 1., je ograda V, zajedno sa preslikavanjima $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\sigma_\alpha: G_\alpha \to V$, odgovarajućeg direktnog sistema skupova, pri čemu je na skupu V zadata struktura abelove grupe tako da su sva preslikavanja

σ_α, homomorfizmi abelovih grupa.

Granica direktnog sistema abelovih grupa je granica odgovarajućeg sistema skupova, snabdevena strukturom abelove grupe u odnosu na koju su sva preslikavanja homomorfizmi.

Neposredno vidimo da možemo definisati direktne sisteme, ograde i granice direktnih sistema drugih algebarskih struktura, kao što su grupe, prsteni, moduli i.t.d., analogno kao u napred izloženom slučaju skupova i abelovih grupa.

Kao i u slučaju skupova, može se na potpuno analogan način pokazati da su sve granice datog direktnog sistema abelovih grupa jednake do na izomorfizam (koji ovde znači egzistenciju izomorfizma grupa saglasnog sa projekcijama, odnosno kanoničkim preslikavanjima).

Preformulacija teoreme II.1.1.1., za slučaj direktnih sistema abelovih grupa i homomorfizama može se dati u obliku sledeće teoreme.

TEOREMA 1. Neka je $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistem abelovih grupa i G, zajedno sa homomorfizmima $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ograda koja zadovoljava uslove:

i) za svaki element $g\in G$, postoji indeks $\alpha\in\Lambda$ tako da je $g\in \mathrm{Im}\,\sigma_\alpha$.

ii) za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ i $g_\alpha\in G_\alpha$ važi $\sigma_\alpha(g_\alpha) = 0$ ako i samo ako postoji indeks $\beta\in\Lambda$ sa $\alpha\leq\beta$ tako da je $\rho_{\alpha\beta}(g_\alpha) = 0$,

tada je G granica direktnog sistema.

Ostaje da se pokaže da za dati direktni sistem abelovih grupa i homomorfizama postoji granica snabdevena strukturom abelove grupe.

TEOREMA 2. Za dati direktni sistem $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ abelovih grupa i homomorfizama postoji granica G, zajedno sa familijom $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ pri čemu je skup G snabdeven strukturom abelove grupe, a pri tome je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ preslikavanje $\sigma_\alpha : G_\alpha \to G$, homomorfizam abelovih grupa.

DOKAZ. Neka je W suma familije skupova $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Na skupu W, kao po dokazu teoreme II.1.1.1., definišimo relaciju ekvivalencije $\sim$ i sa G označimo skup $W/\sim$. Skup G, sa preslikavanjima $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ je zapravo granica odgovarajućeg sistema skupova. Na skupu G može se uvesti struktura abelove grupe, tako da za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ preslikavanja $\mathcal{T}_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$, budu homomorfizmi abelovih grupa, na sledeći način:

Za elemente $u_\alpha \in U_\alpha$, $v_\beta \in U_\beta$ i $w_\gamma \in U_\gamma$, $[u_\alpha] + [v_\beta] = [w_\gamma]$ ako i samo ako postoji indeks $\lambda\in\Lambda$ tako da je $\alpha \leq \lambda$ i $\beta \leq \lambda$ i $\gamma \leq \lambda$ i da pri tome važi $\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda}(v_\beta) = \rho_{\gamma\lambda}(w_\gamma)$.

Dokažimo najpre da je sabiranje elemenata na skupu G svuda i dobro definisano. Neka su $u_\alpha \in U_\alpha \subset W$ i $v_\beta \in U_\beta \subset W$ proizvoljni elementi iz skupa W. Kako je skup indeksa Λ usmeren to za indekse α i β postoji indeks $\gamma\in\Lambda$, tako da je $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Stavimo da je $w_\gamma = \rho_{\gamma\gamma}(w_\gamma) = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) + \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$, što znači da je $[u_\alpha] + [v_\beta] = [w_\gamma]$. Dakle, sabiranje je svuda definisano, ali i dobro definisano. Zaista, predpostavimo da je $[u_\alpha] + [v_\beta] = [w_\delta]$, to postoji indeks $\lambda_1\in\Lambda$ da je $\alpha \leq \lambda_1$, $\beta \leq \lambda_1$ i $\delta \leq \lambda_1$ i da važi $\rho_{\alpha\lambda_1}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda_1}(v_\beta) = \rho_{\delta\lambda_1}(w_\delta)$. No, kako je skup indeksa Λ usmeren, to za indekse λ i λ_1 postoji indeks $\lambda_2\in\Lambda$, tako da je $\lambda \leq \lambda_2$ i $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Tada je:

$$\begin{aligned}
&\rho_{\alpha\lambda_2}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda_2}(v_\beta) = \\
&= \rho_{\lambda\lambda_2}(\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha)) + \rho_{\lambda\lambda_2}(\rho_{\beta\lambda}(v_\beta)) = \\
&= \rho_{\lambda\lambda_2}[\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda}(v_\beta)] = \\
&= \rho_{\lambda\lambda_2}(\rho_{\gamma\lambda}(w_\gamma)) = \rho_{\gamma\lambda_2}(w_\gamma).
\end{aligned}$$

S druge strane,

$$\begin{aligned}
&\rho_{\alpha\lambda_2}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda_2}(v_\beta) = \\
&= \rho_{\lambda_1\lambda_2}(\rho_{\alpha\lambda_1}(u_\alpha)) + \rho_{\lambda_1\lambda_2}(\rho_{\beta\lambda_1}(v_\beta)) = \\
&= \rho_{\lambda_1\lambda_2}[\rho_{\alpha\lambda_1}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda_1}(v_\beta)] = \\
&= \rho_{\lambda_1\lambda_2}(\rho_{\delta\lambda_1}(w_\delta)) = \rho_{\delta\lambda_2}(w_\delta).
\end{aligned}$$

Prema tome, $\rho_{\gamma\lambda_2}(w_\gamma) = \rho_{\delta\lambda_2}(w_\delta)$ pa je $w_\gamma \sim w_\delta$, odnosno $[w_\gamma] = [w_\delta]$ te je sabiranje na skupu G dobro definisano.

Kako se radi o direktnom sistemu abelovih grupa, sabiranje je asocijativno i komutativno.

Primetimo da su svi neutrali u jednoj klasi. Zaista, neka su 0_α i 0_β neutrali. Za indekse α i β postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ tako da je $\alpha\leq\gamma$ i $\beta\leq\gamma$. Tada je $\rho_{\alpha\gamma}(0_\alpha) = 0_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(0_\beta)$, pa je $0_\alpha\sim 0_\beta$, odnosno $[0_\alpha] = [0_\beta]$. Potreban i dovoljan uslov da element $[u_\alpha]$, pri $u_\alpha\in U_\alpha$ bude neutral u skupu G je da postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ tako da je $\alpha\leq\gamma$, $u_\alpha\in\ker\rho_{\alpha\gamma}$. No važi $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) + \rho_{\beta\gamma}(v_\beta) = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$, a to je onda i samo onda ako je $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) = 0_\gamma$, odnosno ako je $u_\alpha\in\ker\rho_{\alpha\gamma}$. Ako je klasa elementa $u_\alpha\in U_\alpha\subset W$, neutral u skupu G, možemo staviti $[u_\alpha] = [0_\alpha]$.

Za svaki element $u_\alpha\in U_\alpha\subset W$ je $[-u_\alpha] = -[u_\alpha]$. Zaista, $[u_\alpha] + [v_\beta] = [0_\gamma]$, ako i samo ako postoji indeks $\lambda\in\Lambda$ tako da je $\alpha\leq\lambda$, $\beta\leq\lambda$ i $\gamma\leq\lambda$ i $\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) + \rho_{\beta\lambda}(v_\beta) = \rho_{\gamma\lambda}(0_\gamma) = 0_\lambda$; dakle, ako i samo ako $\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) = -\rho_{\beta\lambda}(v_\beta) = \rho_{\beta\lambda}(-v_\beta)$ ili $u_\alpha\sim(-v_\beta)$ ili $(-u_\alpha)\sim v_\beta$, odnosno $[-u_\alpha] = [v_\beta]$. Dakle, dobijamo da je $-[u_\alpha] = [-u_\alpha]$.

Konačno, ako su elementi u_α, v_α i w_α u $U_\alpha\subset W$ takvi da je $u_\alpha + v_\alpha = w_\alpha$, biće i $\rho_{\alpha\alpha}(u_\alpha) + \rho_{\alpha\alpha}(v_\alpha) = \rho_{\alpha\alpha}(w_\alpha)$, odnosno, $[u_\alpha] + [v_\alpha] = [w_\alpha]$, t.j., $[u_\alpha] + [v_\alpha] = [u_\alpha+v_\alpha]$, pa su znači za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, preslikavanja $\mathcal{T}_\alpha : G_\alpha\longrightarrow G$ homomorfizmi abelovih grupa. $\mathcal{Q.E.D}$

Gornja teorema može se izkazati za ma koje, a ne samo za abelove grupe. Dokaz gornje teoreme može da posluži kao dokaz teoreme egzistencije granice direktnog sistema grupa (ne obavezno abelovih) i homomorfizama. Takodje, konstrukcija granice u dokazu predhodne teoreme omogućuje nam da dokažemo teoreme egzistencije granice direktnih sistema topoloških i uredjenih grupa u paragrafima koji slede.

2. GRANICE DIREKTNIH SISTEMA TOPOLOŠKIH PROSTORA.

1 Opšta razmatranja.

Pojam slepljivanja topoloških prostora (vid.[9]) kao i intenzivno proučavanje raznih klasa otvorenih preslikavanja (vid.[22]), ukazuju na potrebu i opravdanost posmatranja direktnih sistema topoloških prostora i otvorenih preslikavanja.

Razmatranja u odeljku III.1.1., kao i uloga striktnih morfizama u teoriji topoloških grupa u paragrafu I.1., pogotovu ukazuje na neophodnost proučavanja direktnih sistema topoloških prostora i otvorenih preslikavanja.

Zato, u ovom paragrafu proučavamo direktne sisteme topoloških prostora i otvorenih preslikavanja i konstruišemo granicu takvih direktnih sistema.

Razmatranja vršena u ovom paragrafu, kao i u paragrafima ove glave koji slede, koliko je meni poznato, nisu bila predmet proučavanja drugih autora.

2. Egzistencija granice direktnih sistema topoloških prostora.

U odeljku II.1.1., definisali smo kategorije u oznaci TOP i TOPO, topoloških prostora i neprekidnih, odnosno otvorenih preslikavanja. Ako je X topološki prostor, označimo sa $\mathcal{O}$ kategoriju otvorenih skupova na X, kao u odeljku I.2.2. Ima u tom slučaju smisla govoriti o predpramenovima topoloških prostora.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor i $\mathcal{O}$ kategorija otvorenih podskupova u X. Predpramenom topoloških prostora baze X, nazovimo svaki kontravarijantan funktor $F:\mathcal{O} \longrightarrow \underset{\sim}{K}$, gde je K jedna od kategorija TOP ili TOPO.

Za definiciju sloja predpramena F u nekoj tački $x \in X$ i topološke strukture na sloju svake tačke, potrebno je uvesti pojam direktnog sistema, ograde i granice direktnog sistema topoloških prostora. Mi se nadalje ograničavamo, samo na kategoriju TOPO, dakle kategoriju topoloških prostora i otvorenih preslikavanja.

DEFINICIJA 2. Neka je $(X_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktan sistem skupova i preslikavanja. Ukoliko je na skupovima X_α uvedena topološka struktura $\mathcal{T}_\alpha$ tako da je za svaki par $(\alpha,\beta)\in\Lambda_1$ preslikavanje $\rho_{\alpha\beta}$ otvoreno preslikavanje topoloških prostora, rećićemo da je zadan direktni sistem topoloških prostora i otvorenih preslikavanja.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor i Λ familija svih njegovih otvorenih podskupova, usmerena relacijom $\leq$ koju definišemo sa:
$U \leq V$ ako i samo ako je $U \supset V$.
Predpostavimo da je F predpramen topoloških prostora, baze X. Ako stavimo $\rho_V^U = \rho_{UV}$, za otvo-

rene podskupove U i V od X, tako da je $V \subset U$, tada je $(F(U), \rho_{UV})_{(U,V)\in\Lambda_1}$ direktan sistem topoloških prostora i otvorenih preslikavanja. Skupovi F(U) mogu se topologizirati kao u radovima [6] ili [48].

Kao u slučaju skupova može se i ovde govoriti o pojmu ograde i granice datog direktnog sistema topoloških prostora i otvorenih preslikavanja. Mora se u tom slučaju dokazati teorema egzistencije i mi je ovde dokazujemo.

TEOREMA 1. Za direktni sistem $(X_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ topoloških prostora i otvorenih preslikavanja postoji granica X, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je X topološki prostor, a $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ otvoreno preslikavanje topoloških prostora.

DOKAZ. Neka je W suma familije skupova $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ i $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow U_\alpha \subset W$ identifikacija skupa X_α sa podskupom $U_\alpha \subset W$. Svaki podskup $U_\alpha \subset W$ možemo posredstvom indentifikacije j_α, $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ smatrati topološkim prostorom, čiju ćemo topologiju označavati sa $\mathcal{T}_\alpha$.

Neka je $u \in U_\alpha \subset W$ proizvoljni elemenat skupa W. Skup $M \subset W$ je $\mathcal{T}_\alpha$-okolina elementa $u \in U_\alpha \subset W$, ako postoji $\mathcal{T}_\alpha$-otvoren skup $M_\alpha \subset U_\alpha$, tako da je $u \in M_\alpha \subset M$.

Kvazi-okolina $U \subset W$, elementa $u \in U_\alpha \subset W$ je takav skup U, za koji postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_\gamma$-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\nu \in \Lambda$, sa $\gamma \leq \nu$, važi:

$$\rho_{\alpha\nu}(u) \in \rho_{\gamma\nu}(M_\gamma) \subset U, \text{ za } \alpha \leq \gamma \leq \nu .$$

Za svaki elemenat $u \in U_\alpha \subset W$ označimo sa $B_k(u)$ skup svih kvazi-okolina tačke u. Skup $B_k(u)$ za svaki element $u \in U_\alpha \subset W$ ima sledeća svojstva.

KO1) Ako je $U \in B_k(u)$ i $U \subset V$, tada je $V \in B_k(u)$.

Zaista, neka je U kvazi-okolina elementa $u \in U_\alpha$ i $U \subset V$. Postoji tada indeks $\gamma \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_\gamma$-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\nu \in \Lambda$ sa $\gamma \leq \nu$ važi $\rho_{\alpha\nu}(u) \in \rho_{\gamma\nu}(M_\gamma) \subset U \subset V$, za $\alpha \leq \gamma \leq \mu$, pa skup V ispunjava sve uslove da bude kvazi-okolina elementa $u \in U_\alpha \subset W$, te je $V \in B_k(u)$.

KO2) Ako su podskupovi $U_1, U_2, \ldots, U_n$ skupa W tako da za svaki indeks $i = 1,2,\ldots,n$ pripadaju familiji $B_k(u)$, tada i skup $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ pripada familiji $B_k(u)$, gde je $u \in U_\alpha \subset W$.

Zaista, dovoljno je dokazati gornje tvrdjenje samo za dva elementa, recimo U_1 i U_2 iz familije $B_k(u)$. Kako $U_1 \in B_k(u)$ to postoji indeks $\gamma_1 \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_{\gamma_1}$-otvoren skup M_{γ_1}, tako da za svaki indeks $\mu_1 \in \Lambda$ sa $\gamma_1 \leq \mu_1$ važi:

$$\rho_{\alpha\mu_1}(u) \in \rho_{\gamma_1\mu_1}(M_{\gamma_1}) \subset U_1, \text{ pri } \alpha \leq \gamma_1 \leq \mu_1.$$

Slično, kako je $U_2 \in B_k(u)$ postoji indeks $\gamma_2 \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_{\gamma_2}$-otvoren skup M_{γ_2}, tako da za svaki indeks $\mu_2 \in \Lambda$, sa $\gamma_2 \leq \mu_2$ važi:

$$\rho_{\alpha\mu_2}(u) \in \rho_{\gamma_2\mu_2}(M_{\gamma_2}) \subset U_2, \text{ za } \alpha \leq \gamma_2 \leq \mu_2.$$

Neka je sada $\gamma \in \Lambda$ takav da je $\gamma_1 \leq \gamma$ i $\gamma_2 \leq \gamma$ a takav indeks postoji zbog usmerenosti skupa Λ. Za svaki indeks $\mu \in \Lambda$, sa $\gamma \leq \mu$ biće:

$$\rho_{\alpha\mu}(u) \in \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset U_1,$$

a takodje i

$$\rho_{\alpha\mu}(u) \in \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset U_2, \text{ za } \alpha \leq \gamma \leq \mu, \text{ pri čemu je } M_\gamma = \rho_{\gamma_1\gamma}(M_{\gamma_1}) \cap \rho_{\gamma_2\gamma}(M_{\gamma_2}),$$

pa je prema tome i:

$$\rho_{\alpha\mu}(u) \in \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset U_1 \cap U_2.$$

Važi dakle $U_1 \cap U_2 \in B_k(u)$.

KO3) Za svaki element $V \in B_k(u)$, postoji elemenat $V' \in B_k(u)$, tako da je za svaki element v, $v \in V'$, $V \in B_k(v)$.

Zaista, kako je $V \in B_k(u)$ to postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_\gamma$-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\mu \in \Lambda$, sa $\gamma \leq \mu$ važi:

$$\rho_{\alpha\mu}(u) \in \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset V, \text{ pri } \alpha \leq \gamma \leq \mu.$$

Uočimo skup $V' = \bigcup_{\mu} \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma)$, za svaki indeks $\mu \in \Lambda$ za koji je $\gamma \leq \mu$. Prema definiciji skup $V' \in B_k(u)$ i $V' \subset V$.

Neka je $v \in V'$. To znači da postoji indeks $\nu \in \Lambda$, sa $\gamma \leq \nu$ tako da je $v \in \rho_{\gamma\nu}(M_\gamma)$. Kako je skup M_γ, $\mathcal{T}_\gamma$-otvoren biće i $\rho_{\gamma\nu}(M_\gamma)$, $\mathcal{T}_\nu$-otvoren skup, jer je $\rho_{\gamma\nu}$ po predpostavci otvoreno preslikavanje. Takodje za svaki indeks $\eta \in \Lambda$, sa $\nu \leq \eta$ važi:

$$\rho_{\nu\eta}(v) \in \rho_{\nu\eta}(\rho_{\gamma\nu}(M_\gamma)) = \rho_{\gamma\eta}(M_\gamma) \subset V' \subset V, \text{ sa } \gamma \leq \nu \leq \eta$$

a to znači da je $V \in B_k(v)$.

KO4) Ako je $U \in B_k(u)$ i $u \sim v$, tada je $U \in B_k(v)$, pri $u \in U_\alpha \subset W$ i $v \in U_\beta \subset W$.

Zaista, kako je $U \in B_k(u)$ to postoji indeks $\gamma_1 \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_{\gamma_1}$-otvoren skup M_{γ_1} tako da za svaki indeks $\mu_1 \in \Lambda$, pri čemu je $\gamma_1 \leq \mu_1$ važi:

$$\rho_{\alpha\mu_1}(u) \in \rho_{\gamma_1\mu_1}(M_{\gamma_1}) \subset U, \text{ pri } \alpha \leq \gamma_1 \leq \mu_1.$$

Kako je $v \sim u$, to postoji indeks $\lambda \in \Lambda$, sa $\alpha \leq \lambda$ i $\beta \leq \lambda$, da važi $\rho_{\alpha\lambda}(u) = \rho_{\beta\lambda}(v)$.

Za indekse γ_1 i λ, zbog usmerenosti skupa Λ postoji indeks $\eta \in \Lambda$, tako da je $\gamma_1 \leq \eta$ i $\lambda \leq \eta$. Biće tada:

$$\rho_{\alpha\eta}(u) = \rho_{\lambda\eta}(\rho_{\alpha\lambda}(u)) = \rho_{\lambda\eta}(\rho_{\beta\lambda}(v)) =$$
$$= \rho_{\beta\eta}(v) \in \rho_{\gamma_1\eta}(M_{\gamma_1}),$$

a za svaki indeks $\nu \in \Lambda$, sa $\eta \leq \nu$ biće:

$$\rho_{\beta\nu}(v) = \rho_{\eta\nu}(\rho_{\gamma_1\eta}(M_{\gamma_1})) = \rho_{\gamma_1\eta}(M_{\gamma_1}) \subset U,$$

što znači da je $U \in B_k(v)$.

Na osnovu osobina KO1) do KO4) zaključujemo da je na skupu $W/\sim$ odredjena topologija čiji sistem okolina predstavljaju kanonične slike kvazi-okolina. Samim tim neposredno zaključujemo da je skup X topološki prostor, a za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$, preslikavanje $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ otvoreno kao kompozicija otvorenih preslikavanja u dijagramu:

$$X_\alpha \xrightarrow[j_\alpha]{} U_\alpha \overset{k_\alpha}{\hookrightarrow} W \xrightarrow{p} W/\sim = X.$$

Zaista, za otvoren $N_\alpha \subset X_\alpha$, $M_\alpha = j_\alpha(N_\alpha)$ je kanonični otvoren u prostoru U_α. Uočimo kvazi-otvoren skup U, $U \subset W$, definisan sa $U = \bigcup_\beta \rho_{\alpha\beta}(M_\alpha)$, za $\alpha \leq \beta$. Za skup p(U) i $[v] \in p(U)$, sa $v \in U_\beta$, postoji kvazi okolina $R = \bigcup_\gamma \rho_{\gamma\delta}(R_\gamma)$, za $\gamma \leq \delta$, $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$, da $[v] \in p(R) \subset p(U)$, te je P(U) otvoren u X.

Primetimo na kraju da se univerzalnost granice napred definisane dokazuje neposredno. Q. 6. D

Napred navedenu teoremu egzistencije možemo dokazati jednostavnije, ako uočimo topološku sumu familije prostora $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, u oznaci W, pa na faktor skupu $W/\sim$ izaberemo najslabiju topologiju pri kojoj su sva preslikavanja $\mathfrak{S}_\alpha$ otvorena. Može se pokazati da je ta topologija ekvivalentna sa topologijom konstruisanom u dokazu predhodne teoreme. No, mi smo želeli efektivnu konstrukciju granice direktnog sistema topoloških prostora i otvorenih preslikavanja sa operativnom definicijom topologije na granici jer naprimer u glavi V., nama upravo takva konstrukcija granice omogućava da dokažemo neke teoreme egzistencije granice direktnih sistema nekih klasa uredjenih topoloških prostora.

3. GRANICE DIREKTNIH SISTEMA TOPOLOŠKIH GRUPA.

1. Osnovni pojmovi.

U glavi I., govori se o uzajamnoj povezanosti algebarskih, topoloških i uredjajnih struktura i tu se ukratko izlažu teorije topoloških grupa, uredjenih grupa, uredjenih topoloških prostora i bitopoloških prostora. U glavama II., i III., govori se o predpramenovima i pramenovima skupova, abelovih grupa i topoloških prostora.

Postavlja se pitanje, dali možemo govoriti o pramenovima topoloških grupa, uredjenih grupa, uredjenih topoloških prostora ili bitopoloških prostora.

Odgovor na ovo pitanje, svakako, treba tražiti u egzistenciji granica direktnih sistema topoloških grupa, uredjenih grupa, uredjenih topoloških prostora ili bitopolš - kih prostora.

Drugo pitanje koje se prirodno postavlja je okarakterisati te pramenove ukoliko granice odgovarajućih direktnih sistema postoje.

Razmotrimo, zato slučaj topoloških grupa.

2. Konstrukcija granice direktnih sistema topoloških grupa.

Pre svega, na prirodan način, definiše se pojam direktnog sistema topoloških grupa i otvorenih homomorfizama.

Direktan sistem $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ skupova i preslikavanja je direktni sistem topoloških grupa i otvorenih homomorfizama, ako je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, skup G_α topološka grupa, a preslikavanje $\rho_{\alpha\beta}$, kad god je $\alpha \leq \beta$, otvoreni homomorfizam topoloških grupa.

Na prirodan način se i u slučaju topoloških grupa uvodi pojam ograde kao i pojam granice datog direktnog sistema. Može se dokazati da su svake dve granice datog direktnog sistema topoloških grupa i otvorenih homomorfizama jednake do na izomorfizam, odnosno, da za svake dve granice postoji homeomorfizam koji je istovremeno i izomorfizam grupa.

Problem je da se za dati direktni sistem konstruiše granica i da se na taj način dokaže njena egzistencija.

TEOREMA 1. Za svaki direktan sistem topoloških grupa i otvorenih homomorfizama koji možemo označiti sa $(X_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$, postoji granica X, $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je X topološka grupa, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\delta_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ otvoreni homomorfizam topoloških grupa.

DOKAZ. Neka je W skupovna suma familije skupova $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, i $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow U_\alpha \subset W$, definisano sa $j_\alpha(x) = (x,\alpha)$ bijekcija kojom na skupu U_α uvodimo strukturu topološke grupe, pri čemu možemo smatrati da su preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}$ otvoreni homomorfizmi topološke grupe U_α u topološku grupu U_β. Označimo sa X, $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granicu odgovarajućeg direktnog sistema skupova i preslikavanja. Kako na skupovima X_α postoje saglasne grupna i topološka struktura, u odnosu na koje su preslikavanja σ_α, $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ otvoreni homomorfizmi, može se na skupu X uvesti topološka struktura i struktura grupe, tako da preslikavanja $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ budu otvoreni homomorfizmi za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$, na osnovu predhodnih razmatranja. Dokažimo da je skup X sa topološkom i grupnom strukturom, topološka grupa.

Zaista, neka je $[O_\alpha] \in X = W/\sim$, neutralni element u grupi X. Označimo sa B skup svih okolina neutralnog elementa $[O_\alpha] \in X$. Skup B okolina neutralnog elementa zadovoljava uslove:

TG1) Za svaki element $U \in B$, postoji element $V \in B$, tako da je $V + V \subset U$.

Zaista, za element $U \in B$, postoji kvazi-okolina U^* $U^* \subset W$, tako da je $p(U^*) = U$. Kako je $[O_\alpha] \in U$, skup U^* je kvazi-okolina elementa $O_\alpha \in U_\alpha \subset W$, pa postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ i $\mathcal{T}_\gamma$-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\mu \in \Lambda$, sa $\gamma \leq \mu$ važi,

$$\rho_{\alpha\mu}(o_\alpha) = O_\mu \in \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset U^*.$$

Kako je U_γ topološka grupa, a $M_\gamma \subset U_\gamma$ otvoren skup koji sadrži neutral O_γ to postoji u U_γ, otvoren skup V_γ tako da je $O_\gamma \in V_\gamma$ i $V_\gamma + V_\gamma \subset M_\gamma$. Neka je μ indeks tako da je $\gamma \leq \mu$. Biće tada,

$$O_\mu \in \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma + V_\gamma) = \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma) + \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma) \subset \rho_{\gamma\mu}(M_\gamma) \subset U^*.$$

Za svaki indeks $\mu \in \Lambda$ gde je $\gamma \leq \mu$ su skupovi označeni sa $\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma) + \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)$ i $\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)$ otvoreni u prostorima U_μ. Skup $\bigcup_\mu [\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma) + \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)]$ za $\gamma \leq \mu$ je kvazi-okolina elementa $O_\alpha \in U_\alpha \subset W$. Tada je,

$$p(\bigcup_\mu [\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma) + \rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)]) =$$
$$= \bigcup_\mu p(\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)) + p(\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)) \subset U^*.$$

Ako stavimo,

$$V = p(\rho_{\gamma\mu}(V_\gamma)), \text{ za neki indeks } \mu \in \Lambda \text{ i } \gamma \leq \mu,$$

dobijamo uslov TG1).

TG2) Za svaki element $U \in B$ je $-U \in B$.

Zaista, neka je $U \in B$. Uočimo skup $U^* \subset W$, tako da je $p(U^*) = U$. Zatim uočimo, za svaki indeks $\lambda\in\Lambda$ podskupove $U^*\cap U_\lambda \subset W$. Kako je $[O_\alpha]\in U$ i kako je U^* kvazi-okolina elementa $O_\alpha\in U_\alpha\subset W$, to postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ i τ_γ-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\mu\in\Lambda$, sa $\gamma\leq\mu$ važi $O_\mu\in\rho_{\gamma\mu}(M_\gamma)\subset U^*$.

Kako je za svaki indeks $\mu\in\Lambda$ sa $\gamma\leq\mu$ skup označen sa $\rho_{\gamma\mu}(M_\gamma)\subset U^*\cap U_\mu$ biće skup $U^*\cap U_\mu$ okolina elementa O_μ u U_μ. Kako je po predpostavci za svaki indeks $\mu\in\Lambda$ skup U_μ topološka grupa biće skup $-[U^*\cap U_\mu]$ okolina elementa O_μ u U_μ. Preslikavanje $\sigma_\alpha : X_\alpha \longrightarrow X$ je otvoreni homomorfizam za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, a takvo je i preslikavanje $\sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}: U_\mu \longrightarrow X$. Skup označen sa $\sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}(U^*\cap U_\mu)\in B$ pa i $\sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}[-(U^*\cap U_\mu)] = -[\sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}(U^*\cap U_\mu)]\in B$. Stavimo, $-U = p(\bigcup_\mu [-(U^*\cap U_\mu)])$ za $\gamma\leq\mu$. Tada važi:

$$-U = p\{\bigcup_\mu [-(U^*\cap U_\mu)]\} = \bigcup_\mu p[-(U^*\cap U_\mu)] =$$
$$= \bigcup_\mu \sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}[-(U^*\cap U_\mu)] = \bigcup_\mu [-\sigma_\mu\circ j_\mu^{-1}(+(U^*\cap U_\mu))]\in B.$$

TG3) Za svaki element $[u_\alpha]$ i $V\in B$ važi da je $[u_\alpha] + V - [u_\alpha]\in B$.

Kako je $V\in B$, V je okolina elementa $[O_\beta]$, odnosno $V = p(V^*)$, gde je V^* kvazi-okolina elementa $O_\beta\in U_\beta\subset W$. To znači da postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ i τ_γ-otvoren skup M_γ, tako da za svaki indeks $\mu\in\Lambda$, sa $\gamma\leq\mu$ važi:

$$O_\mu\in\rho_{\gamma\mu}(M_\gamma)\subset V^*, \text{ sa } \beta\leq\gamma\leq\mu.$$

Takodje, kako je $u_\alpha\in U_\alpha\subset W$, to za indekse α i γ postoji indeks η tako da je $\alpha\leq\eta$ i $\beta\leq\eta$. Uočimo element $\rho_{\alpha\eta}(u_\alpha)$ i skup $\rho_{\gamma\eta}(M_\gamma)\subset V^*$. Skup $V^*\cap U_\eta$ je okolina neutrala O_η a $\rho_{\alpha\eta}(u_\alpha)\in U_\eta$, pa kako je U_η topološka grupa, biće okolina neutrala O_η skup $\rho_{\alpha\eta}(u_\alpha) + [V^*\cap U_\eta] - \rho_{\alpha\eta}(u_\alpha)$, Uočimo skup $\bigcup_\nu\{\rho_{\alpha\nu}(u_\alpha) + [V^*\cap U_\nu] - \rho_{\alpha\nu}(u_\alpha)\}$, gde je $\eta\leq\nu$, tada je:

$$p[\bigcup_\nu (\rho_{\alpha\nu}(u_\alpha) + [V^*\cap U_\nu] - \rho_{\alpha\nu}(u_\alpha))] =$$
$$= \bigcup_\nu p[\rho_{\alpha\nu}(u_\alpha) + [V^*\cap U_\mu] - \rho_{\alpha\nu}(u_\alpha)]\in B,$$

jer za svaki indeks $\nu\in\Lambda$ sa $\eta\leq\nu$ je $\rho_{\alpha\nu}(u_\alpha) + [V^*\cap U_\mu] - \rho_{\alpha\nu}(u_\alpha)$ okolina neutrala O_ν, pa je $[u_\alpha] + V - [u_\alpha]$ okolina neutrala te pripada kolekciji B.

Na osnovu osobina TG1), TG2) i TG3) zaključujemo da su na granici direktnog sistema topoloških grupa i otvorenih homomorfizama topološka i algebarska struktura saglasne te je granica direktnog sistema topološka grupa. Q.E.D

U dokazu predhodne teoreme, koristili smo aditivni zapis zakona kompozicije na svim topološkim grupama, radi preglednosti, iako se govori o grupama koje u opštem slučaju nisu abelove.

Ako se radi o direktnim sistemima abelovih topoloških grupa, uslov TG3) je automatski ispunjen, pa predhodna teorema važi i za abelove topološke grupe.

Primetimo, na kraju, da se predhodna teorema može i na drugi način dokazati, ako na skupu X, koji je granica odgovarajućeg direktnog sistema skupova i preslikavanja uvedemo najslabiju topologiju pri kojoj su sva preslikavanja 6_α otvorena. Ta topologija se poklapa sa topologijom koju smo u gornjem dokazu konstruisali. Saglasnost grupne strukture sa tako uvedenom topologijom može se takodje lako pokazati. Prednost gore navedenog dokaza je čini se u tome što se koristi pojam kvazi-okolina čije proučavanje može biti od posebnog interesa.

4. PRAMENOVI ABELOVIH GRUPA.

1. Predpramenovi abelovih grupa.

Neka je X topološki prostor i F predpramen baze X sa vrednostima u kategoriji K. Ako za kategoriju K uzmemo kategoriju AB, abelovih grupa i homomorfizama, tada je F predpramen abelovih grupa baze X. Dakle, za svaki otvoren skup $U \subset X$, skup $F(U)$ ima strukturu abelove grupe, a svaki morfizam restrikcije $\rho_V^U : F(U) \longrightarrow F(V)$, gde je $V \subset U$, je homomorfizam abelovih grupa.

Sve što važi za predpramenove skupova baze X, očigledno važi i za klasu predpramenova abelovih grupa baze X. Analogno se mogu uvesti predpramenovi prstena, modula i drugih algebarskih struktura samo bi umesto kategorije AB, trebalo da se posmatra odgovarajuća kategorija.

Analizom primera I.1.1., I.1.2., i I.1.3., možemo zaključiti da predpramenove skupova, o kojima je tamo reč možemo smatrati predpramenovima abelovih grupa.

Zaista, u primeru I.1.1., predpostavimo da dati skup A ima strukturu abelove grupe. Kako je za svaki otvoren skup $U \subset X$, $A_X(U) = A$, a morfizmi $\rho_V^U = ind_A$, za svaki par otvorenih skupova U i V sa $V \subset U$, neposredno vidimo da je konstantni predpramen A_X ustvari predpramen abelovih grupa.

U primeru I.1.2., možemo predpostaviti da je skup Y snabdeven strukturom abelove grupe. U tom slučaju, skup $C^Y(U)$ možemo smatrati abelovom grupom, gde smo sabiranje funkcija definisali tačka po tačka, a svaki morfizam restrikcije homomorfizmom odgovarajućih abelovih grupa. Naprimer, stavimo $Y = Z$, gde je Z aditivna grupa celih sa trivijalnom topologijom; tada je $C^Y = C^Z$ predpramen abelovih grupa, pa čak i predpramen prstena. Ako stavimo $Y = R$, gde je R realna prava, tada je C^R predpramen, recimo, abelovih grupa.

U primeru I.1.3., predpramenovi P_1 i P_2 su očigledno predpramenovi abelovih grupa jer je skup Z aditivna grupa celih brojeva a jednočlani skup $\{0\}$ možemo smatrati trivijalnom grupom. Svi morfizmi restrikcija koji se tamo javljaju su očigledno homomorfizmi abelovih grupa.

2. Pramenovi abelovih grupa.

Pojam pramena abelovih grupa baze X uvodimo sledećom definicijom, koja je analogna definiciji I.2.4.1.,a koja se odnosi na pramenove skupova.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor i F predpramen abelovih grupa baze X. Predpramen F je pramen abelovih grupa baze X, ako zadovoljava sledeće uslove:

AG1) Neka je otvoren podskup $U \subset X$, unija familije otvorenih skupova $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ t.j., $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Ako je sečenje $s \in F(U)$ takvo da je za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$, $\rho_{U_\lambda}^U(s) = 0$, tada je $s = 0$.

AG2) Neka je otvoren podskup $U \subset X$, unija familije otvorenih skupova $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ t.j., $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$. Ako je $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, familija sečenja $s_\lambda \in F(U_\lambda)$, takva da za svaka dva indeksa $\lambda, \mu \in \Lambda$ važi:

$$\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda \cap U_\mu}(s_\mu),$$

tada postoji sečenje $s \in F(U)$ tako da je za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$, $\rho^{U}_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$.

Neposredno iz definicije 1., zaključujemo da važe, u slučaju predpramenova i pramenova abelovih grupa teoreme I.2.5.2., I.2.5.3., I.2.5.4., I.2.5.5., i leme I.2.5.1., i I.2.5.2.

Neka je X topološki prostor i F predpramen abelovih grupa. Kao granicu direktnog sistema abelovih grupa svaki sloj $F(x)$ u tački $x \in X$ možemo snabdeti strukturom abelove grupe, pa na osnovu toga odgovarajući pramen prostor (LF,p) ima sledeće svojstvo:

a) Za svaki element $x \in X$, vlakno $p^{-1}(x)$ je abelova grupa.

Precizniju strukturu abelove grupe na sloju proizvoljnog elementa $x \in X$, daje sledeća teorema.

TEOREMA 1. U pramen prostoru (E,p), koji zadovoljava uslov a), sledeći uslovi su ekvivalentni:
b) Za svaki otvoren podskup $U \subset X$, skup $GE(U)$ ima strukturu abelove grupe definisanu sabiranjem sečenja tačka po tačka.
b') Označimo sa $E \times_p E$ skup $\{(e,e') \in E \times E;\ p(e) = p(e')\}$ Preslikavanje $\varphi : E \times_p E \to E$, definisano sa $\varphi(e,e') = e - e'$ je neprekidno.

Za dokaz ove teoreme može se videti [55].

Pramen prostor abelovih grupa baze X je pramen prostor (E,p) koji zadovoljava uslove a), b) i b'), koje smo napred naveli.

Morfizam pramen prostora $(E,p) \to (E',p')$ prirodno se definiše i pri tome je za svaki element $x \in X$, indukovano preslikavanje $p^{-1}(x) \to p'^{-1}(x)$, homomorfizam abelovih grupa. Možemo u vezi s tim navesti sledeću teoremu.

TEOREMA 2. Ako su F i G pramenovi abelovih grupa baze X i $f: F \to G$ morfizam odgovarajućih pramenova skupova, tada je f morfizam pramenova abelovih grupa, ako i samo ako je za svaki element $x \in X$ indukovano preslikavanje $f_x: F(x) \to G(x)$ homomorfizam abelovih grupa.

Za dokaz ove teoreme videti [55].

5. PRAMENOVI
TOPOLOŠKIH PROSTORA.

1. Osnovni pojmovi.

U odeljku I.1.5., definiše se pojam pramen prostora (E,p) baze X. U teoremama I.1.5.2., I.1.5.3., i I.1.5.4., opisuje se taj prostor i izmedju ostalog navodi da je podprostor $p^{-1}(x) \subset E$, dakle, vlakno u proizvoljnoj tački $x \in X$, diskretan podprostor prostora E. S druge strane, kada se radi o pramenovima abelovih grupa ili uredjenih skupova, imamo strukturu grupe ili uredjajnu strukturu na svakom vlaknu $p^{-1}(x)$ u svakoj tački $x \in X$, što se može videti iz teoreme III.4.3.1., i iz izlaganja u narednoj glavi.

Dakle u diskretnom podprostoru $p^{-1}(x) \subset E$ može se naknadnim uslovima uvesti algebarska i uredjajna struktura. Neposredno se nameće pitanje uvodjenja topološke strukture nekim dodatnim uslovima. Jedan odgovor na ovo pitanje daje opšta teorija snopova (vid.[49]) gde susrećemo ovakvu definiciju snopa vlakana.

DEFINICIJA 1. Snop vlakana $\mathfrak{B}$ odredjen je ako je zadato:

a) Topološki prostor B, koji nazivamo snop prostorom,

b) topološki prostor X, koji nazivamo baznim prostorom,

c) neprekidno preslikavanje $p:B \to X$, koje nazivamo projekcijom,

d) topološki prostor Y, koji nazivamo vlaknom, tako da pri gornjim uslovima za svaki element $x \in X$, podprostor $Y_x = p^{-1}(x)$ je homeomorfan Y i postoji okolina V tačke x i homeomorfizam ϕ, $\phi: V \times Y \to p^{-1}(V)$, tako da je $p\phi(x',y) = x'$ za $x' \in Y$ i $y \in Y$.

Kosim sečenjem snopa nazivamo neprekidno preslikavanje $f:X \to B$ tako da je $p(f(x)) = x$, za svaki element $x \in X$.

Gornja definicija je dosta uopštena i obično se zahtevaju, naknadni uslovi, pa se sa tako užom definicijom radi.

U slučaju pramen prostora je svaki skup $Y_x = p^{-1}(x)$ diskretan podprostor pramen prostora i postoji homeomorfizam $\phi: V \times Y_x \to p^{-1}(V)$, tako da je $\phi(x,y) = y$. Ako predpostavimo da je topološki prostor X, luk povezan, tada svaku krivu C u X sa početkom x_1 i krajem x_2, možemo nadkriti neprekidnim kretanjem podprostora Y_x od Y_{x_1} do Y_{x_2}. Birajući baznu tačku $x_o \in X$, možemo svaki skup Y_x staviti u 1 - 1 korespodenciju sa $Y_{x_o} = Y$. Dakle možemo skup $Y_{x_o} = p^{-1}(x)$ za vlakno u pramen prostoru koji tako postaje snop prostorom.

Kao što se vidi iz predhodnih razmatranja, klase pramen prostora i snop prostora su neuporedive, no ima pramen prostora koji su istovremeno i snop prostori.

U narednim odeljcima konstruisaćemo nediskretnu topološku strukturu na slojevima $p^{-1}(x)$ u pramen prostoru (E,p) baze X i dobiti opštiju konstrukciju snopa vlakana, odnosno nadkrivajući prostor pramena topoloških prostora.

2. Slojevi u predpramenu topoloških prostora.

Neka je X topološki prostor i F predpramen topoloških prostora i otvorenih preslikavanja, baze X. Uočimo element $x \in X$. Skupovi $F(U)$, kad U prolazi familijom otvorenih podskupova od X, koji sadrže tačku $x \in X$, zajedno sa preslikavanjima $\rho_V^U : F(U) \to F(V)$, kad god je $x \in V \subset U$, za otvorene skupove U i V čine direktan sistem topoloških prostora i otvorenih preslikavanja.

DEFINICIJA 1. Sloj $F(x)$, predpramena F topoloških prostora i otvorenih preslikavanja je granica direktnog sistema $(F(U), \rho_V^U)_{(U,V)}$, gde je $U \supset V \ni x$, t.j., skup $\varinjlim_{U \ni x} F(U)$, zajedno sa preslikavanjima $\sigma_U : F(U) \to \varinjlim_{U \ni x} F(U)$, pri čemu na skupu $\varinjlim_{U \ni x} F(U)$ imamo topološku strukturu za koju su sva preslikavanja σ_U otvorena preslikavanja topoloških prostora.

Neposredno iz definicije 1., vidimo da svaki otvoren skup $M_x \subset F(x)$ možemo nekim kvazi-otvorenim skupom $M^* \subset W$, gde je W skupovna suma familije $\{F(U)\}_{U \ni x}$, predstaviti.

Predpostavimo da su F i G predpramenovi topoloških prostora baze X. Morfizam $f : F \to G$, kao u slučaju skupova definiše se kao kolekcija preslikavanja $f(U) : F(U) \to G(U)$, gde U prolazi kolekcijom svih otvorenih podskupova od X, uz uslov da je svako preslikavanje $f(U)$ otvoreno preslikavanje topoloških prostora. Kao u slučaju skupova definišemo kompoziciju morfizma predpramenova, a takodje se može pokazati da svaki morfizam predpramenova $f : F \to G$ indukuje otvoreno preslikavanje $f_x : F(x) \to G(x)$, odgovarajućih vlakana sa odgovarajućom topološkom strukturom i to za svaki element $x \in X$.

3. Pramenovi topoloških prostora i pramen prostori.

Predpramen F topoloških prostora, nazivamo pramenom topoloških prostora, ako on zadovoljava uslove G1) i G2) odeljka 1.6.; dakle, pramen topoloških prostora je jednostavno pramen skupova koji su snabdeveni topološkom strukturom a pri tome su svi morfizmi ograničenja otvorena preslikavanja.

Kao u slučaju skupova, možemo uvesti pojam presečnog prostora baze X, a takodje i pojam pramen prostora.

Kao u odeljku 2.5., možemo definisati prostor LF i pramen GLF sečenja. Tada, svako vlakno pramen prostora (LF,p) ima svojstvo:

a) Za svaki element $x \in X$, vlakno $p^{-1}(x)$ je topološki prostor.(Nezavisno od činjenice da je vlakno diskretan podprostor prostora LF.)

Može se zaključiti da ako za svaki otvoren podskup $U \subset X$, pri $x \in U$, na skupu GLF(U) imamo topološku strukturu, za koju su svi morfizni ograničenja otvorena preslikavanja, tada je i vlakno $p^{-1}(x)$ topološki prostor za svaki element $x \in X$.

Na osnovu gornjih razmatranja može se formulisati sledeća teorema.

TEOREMA 1. Svaki pramen topoloških prostora jednak je do na izomorfizam pramenu sečenja nekog pramen prostora sa svojstvom a), pri čemu skupovi GE(U) imaju odgovarajuću topološku strukturu. Pri tome smo sa (E,p) označili pramen prostor, koji je i sam jedinstven do na izomorfizam pramen prostora.

Na osnovu predhodnih razmatranja možemo uočiti sledeće vrlo interesantne primere.

PRIMER 1. Neka je $X = \{1,2\}$, diskretan topološki prostor i R skup realnih brojeva sa uobiča-

jenom topologijom. Sa R^X označimo predpramen, definisan sa:
Za otvoren $U \subset X$, neka $R^X(U)$ bude skup svih funkcija koje skup U preslikavaju u skup R, što zbog konstrukcije prostora X znači i skup svih neprekidnih funkcija $U \to R$.
Za otvorene skupove U i V sa $V \subset U$, definišimo morfizam ograničenja ρ^U_V sa $\rho^U_V(f) = f|V$, kad god je $f \in R^X(U)$. Kako skup $R^X(X)$, možemo indentifikovati sa $R \times R$, a skupove $R^X(\{1\})$ i $R^X(\{2\})$, redom sa $R \times \{0\}$ i $\{0\} \times R$, zaključujemo da su posredstvom tih identifikacija skupovi $R^X(U)$, za svaki otvoren podskup U od X, topološki prostori. Morfizmi ograničenja su otvorena preslikavanja, jer ih možemo identifikovati sa projekcijama. Sloj nad svakom tačkom $x \in X$ može se identifikovati sa R. No, predpramen R^X je pramen jer ako stavimo $U = \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}$, tada iz $\rho^U_{\{1\}}(f) = \rho^U_{\{1\}}(g)$ i $\rho^U_{\{2\}}(f) = \rho^U_{\{2\}}(g)$ sledi da je $f = g$, što se neposredno zaključuje iz jednakosti parova.

Gornji primer može se i mnogo opštije posmatrati, ako umesto dvočlanog skupa X, u gornjem primeru, posmatramo proizvoljan topološki prostor I, sa diskretnom topologijom.

PRIMER 2. Neka je $\{X_i\}_{i \in I}$ familija topoloških prostora i $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, suma familije prostora $\{X_i\}_{i \in I}$. U odnosu na diskretnu topologiju je skup svih funkcija $f: I \to X$, sa $f(i) \in X_i$, ustvari skup svih neprekidnih funkcija. Sa p označimo preslikavanje skupa X u skup I tako da je $p^{-1}(i) = X_i$, za svako $i \in I$. Preslikavanje p je neprekidno i otvoreno. Par (X,p) je presečni prostor baze I, pa se može uočiti pramen sečenja presečnog prostora (X,p) po I. Neposredno vidimo da se tu radi o pramenu topoloških prostora i otvorenih preslikavanja, kao u primeru 1.

Gornji primeri pokazuju da postoji veza između pramen prostora, pramenova topoloških prostora i proizvoda topoloških prostora, a ta veza može biti predmet posebnih proučavanja.

IV. D I R E K T N I S I S T E M I U R E DJ E N I H T O P O L O Š K I H P R O S T O R A.

1. UREDJAJNA STRUKTURA NA GRANICAMA DIREKTNIH SISTEMA.

1. Osnovni pojmovi.

Uredjenim skupom, nazovimo skup X zajedno sa relacijom $\leq$ na tom skupu, ukoliko je ta relacija kvazi-uredjenje, delimično uredjenje ili linearno uredjenje. Ukoliko želimo da istaknemo vrstu uredjenja govorićemo o kvazi-uredjenom, delimično uredjenom ili linearno uredjenom skupu X, kao što smo videli u glavi I.

Predpostavimo da su X i Y uredjeni skupovi i $f:X \longrightarrow Y$ preslikavanje skupa X u skup Y. Preslikavanje f je izotono (antitono) ako važi uslov:

Ako je $x \leq y$, onda je $f(x) \leq f(y)$.(iz nejednakosti $f(x) \leq f(y)$, sledi $x \leq y$)

Uredjene skupove i izotona preslikavanja možemo smatrati kategorijom, u oznaci UENS. Dakle klasa obUENS je klasa svih uredjenih skupova i za svaka dva uredjena skupa X i Y, skup Hom(X,Y) predstavlja skup svih izotonih preslikavanja uredjenih skupova X i Y. Neposredno se može govoriti o raznim podkategorijama kategorije UENS, kao što su kategorija kvazi-uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, u oznaci KUENS, kategorija delimično uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, u oznaci PUENS, i kategorija linearno uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, u oznaci sa LUENS.

2. Predpramenovi uredjenih skupova.

Predpramenom uredjenih skupova, nazivamo svaki predpramen skupova date baze X, sa vrednostima u kategoriji UENS. Ako je predpramen skupova F baze X, sa vrednostima u nekoj od kategorija KUENS, PUENS ili LUENS, tada je to predpramen, redom, kvazi-uredjenih, delimično uredjenih ili linearno uredjenih skupova.

Predpramenovi uredjenih skupova, prirodno se javljaju, jer vrlo često, kao što smo videli u glavi 1., uredjajna struktura ide zajedno sa algebarskom i topološkom.

PRIMER 1. Neka je A uredjen skup i A_X konstantni predpramen skupova definisan u primeru III.1.3.1. Za svaki otvoren skup $U \subset X$ je $A_X(U)$ uredjen skup. Morfizmi ograničenja $\rho_V^U = ind_A : A_X(U) \to A_X(V)$ za $U,V \in ob\, \mathcal{O}$ su izotona preslikavanja, pa se može zaključiti da je konstantni predpramen A_X, predpramen uredjenih skupova. U zavisnosti od toga kakvo je uredjenje na skupu A možemo govoriti o konstantnom predpramenu kvazi-uredjenih, delimično uredjenih ili linearno uredjenih skupova.

PRIMER 2. Neka su X i Y topološki prostori i neka je skup Y uredjen relacijom $\leq$. U primeru III.1.3.2., definisali smo predpramen C^Y svih neprekidnih funkcija sa vrednostima u Y. Kako je Y uredjen skup, to za svaki otvoren U, $U \subset X$, možemo skup $C^Y(U)$ urediti ako stavimo da je $f \leq g$, za $f,g \in C^Y(U)$ ako i samo ako je za svaki element $x \in U$, $f(x) \leq g(y)$ u skupu Y. Svaki morfizam ograničenja $\rho^U_V : C^Y(U) \longrightarrow C^Y(V)$ je izotono preslikavanje uredjenih skupova, jer ako su funkcije f i g u relaciji $\leq$ tim pre su u toj relaciji njihove restrikcije.

U gornjem primeru moguće su razne modifikacije. Pre svega, može se izostaviti topološka struktura na skupu Y, i zahtevati da za svaki otvoren skup $U \subset X$, skup $C^Y(U)$ bude skup svih funkcija. Osim toga možemo primetiti da ne mora biti isti tip uredjenja na skupu Y i skupovima $C^Y(U)$. Ako za skup Y uzmemo skup R, realnih ili skup C, kompleksnih brojeva sa uobičajenim ili nekim drugim uredjenjem, možemo posmatrati odgovarajuće predpramenove uredjenih skupova.

Predpramenovi skupova P_1 i P_2 u primeru III.1.3.3 su očigledno predpramenovi uredjenih skupova.

3. Granice direktnih sistema uredjenih skupova.

Za direktan sistem $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ skupova i preslikavanja rećićemo da je da je direktan sistem uredjenih skupova, ako je za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$, skup G_α snabdeven uredjajnom strukturom tako da za svaki par indeksa $(\alpha,\beta)\in\Lambda_1$, su preslikavanja $\rho_{\alpha\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ izotona preslikavanja uredjenih skupova.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor i Λ familija svih njegovih otvorenih podskupova, usmerena relacijom $\leq$ koju definišemo sa: $U \leq V$ ako i samo ako je $U \supset V$.

Predpostavimo da je F predpramen uredjenih skupova baze X. Za par otvorenih skupova U i V tako da je $U \le V$ stavimo $\rho_{UV} = \rho^{U}_{V}$. Očigledno je $(F(U), \rho_{UV})_{U \le V}$ direktan sistem uredjenih skupova.

Pojam ograde,i granice direktnog sistema uredjenih skupova uvodi se na prirodan način. Takodje se neposredno dokazuje i jedinstvenost granice datog direktnog sistema uredjenih skupova i izotonih preslikavanja. Ostaje da se dokaže da za svaki direktan sistem uredjenih skupova postoji granica.

TEOREMA 1. Neka je $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ direktni sistem uredjenih skupova i izotonih preslikavanja. Postoji tada uredjen skup G koji je zajedno sa kolekcijom izotonih preslikavanja $\tau_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$, za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$, granica tog direktnog sistema.

DOKAZ. Neka je W skupovna suma familije skupova $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Kao u slučaju direktnih sistema skupova definišimo relaciju ekvivalencije $\sim$. Svaki uredjen skup možemo identifikovati uredjajno sa podskupom U_α sume W, te na osnovu te identifikacije možemo smatrati da za indekse α i β pri $\alpha \le \beta$ preslikavanje $\rho_{\alpha\beta}$ slika skup U_α u skup U_β.

Definišimo sada na skupu W relaciju $\le$ na sledeći način:

Neka su $u \in U_\alpha \subset W$ i $v \in U_\beta \subset W$ proizvoljni elementi skupa W, tada je $u \le v$ ako i samo ako postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ tako da je $\alpha \le \gamma$ i $\beta \le \gamma$ i da u uredjenom skupu G_γ važi $\rho_{\alpha\gamma}(u) \le \rho_{\beta\gamma}(v)$.

a) Ako je za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$, uredjenje na skupu G_α refleksivna relacija, tada je relacija $\le$ na skupu W refleksivna.

Zaista, za svaki element $u \in U_\alpha \subset W$ je $u \le u$, jer je $\rho_{\alpha\alpha}(u) \le \rho_{\alpha\alpha}(u)$ u uredjenom skupu G_α, pa je relacija $\le$ na skupu W refleksivna.

b) Kako je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, uredjenje na skupu G_α tranzitivna relacija, to je relacija $\leq$ na skupu W tranzitivna.

Zaista, neka su $u\in U_\alpha\subset W$, $v\in U_\beta\subset W$ i $w\in U_\gamma\subset W$ proizvoljni elementi u skupu W tako da je $u \leq v$ i $v \leq w$. Kako je $u \leq v$, to postoji indeks $\lambda\in\Lambda$, pri čemu je $\alpha\leq\lambda$ i $\beta\leq\lambda$ tako da je $\rho_{\alpha\lambda}(u) \leq \rho_{\beta\lambda}(v)$ u uredjenom skupu G_λ. Slično, kako važi $v \leq w$ to postoji indeks $\mu\in\Lambda$ pri čemu je $\beta\leq\mu$ i $\gamma\leq\mu$ tako da važi $\rho_{\beta\mu}(v) \leq \rho_{\gamma\mu}(w)$ u uredjenom skupu G_μ. Pošto je skup Λ usmeren skup, to za indekse λ i μ postoji indeks η, $\eta\in\Lambda$, tako da je $\lambda\leq\eta$ i $\mu\leq\eta$. Biće tada:

$$\rho_{\alpha\eta}(u) = \rho_{\lambda\eta}(\rho_{\alpha\lambda}(u)) \leq \rho_{\lambda\eta}(\rho_{\beta\lambda}(v)) =$$
$$= \rho_{\beta\eta}(v) = \rho_{\mu\eta}(\rho_{\beta\mu}(v)) \leq \rho_{\mu\eta}(\rho_{\gamma\mu}(w)) = \rho_{\gamma\eta}(w),$$

dakle, $\rho_{\alpha\eta}(u) \leq \rho_{\gamma\eta}(w)$, a to znači $u \leq w$ pa je relacija $\leq$ na skupu W tranzitivna.

c) Neka je relacija na skupu W kvazi-uredjenje. Za elemente $u\in U_\alpha\subset W$ i $v\in U_\beta\subset W$ stavimo $u \sim_1 v$ ako je $u \leq v$ i $v \leq u$. Relacija $\sim_1$ je relacija ekvivalencije na skupu W. Ako je $[u]$ klasa elementa $u\in U_\alpha\subset W$ u relaciji $\sim$, a $[u]_1$ klasa tog elementa u relaciji $\sim_1$ tada je $[u]\subset[u]_1$ i $[u]_1$ je unija klasa u relaciji $\sim$ svojih elemenata.

Zaista, ako su $u\in U_\alpha\subset W$ i $v\in U_\beta\subset W$ elementi skupa W tako da je $u\sim_1 v$, odnosno $u \leq v$ i $v \leq u$, biće to onda i samo onda ako postoje indeksi γ_1, γ_2 i γ tako da je $\alpha\leq\gamma_1$ i $\beta\leq\gamma_1$, $\beta\leq\gamma_2$ i $\alpha\leq\gamma_2$, $\gamma_1\leq\gamma$ i $\gamma_2\leq\gamma$ i da važi $\rho_{\alpha\gamma_1}(u) \leq \rho_{\beta\gamma_1}(v)$ i $\rho_{\beta\gamma_2}(v) \leq \rho_{\alpha\gamma_2}(u)$, odnosno $\rho_{\alpha\gamma}(u) \leq \rho_{\beta\gamma}(v)$ i $\rho_{\beta\gamma}(v) \leq \rho_{\alpha\gamma}(u)$.

d) Na osnovu predhodnih razmatranja je $u\sim_1 v$ ako i samo ako je ispunjeno da postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ tako da je $\rho_{\alpha\gamma}(u) \leq \rho_{\beta\gamma}(v)$ i $\rho_{\beta\gamma}(v) \leq \rho_{\alpha\gamma}(u)$.

Neka je $w\in U_\gamma\in W$ tako da je $w\in[u]$. Tada postoji indeks $\lambda\in\Lambda$ tako da je $\rho_{\gamma\lambda}(w) = \rho_{\alpha\lambda}(u)$ što znači $\rho_{\gamma\lambda}(w) \leq \rho_{\alpha\lambda}(u)$ i $\rho_{\alpha\lambda}(u) \leq \rho_{\gamma\lambda}(w)$, odnosno, $w\sim_1 u$, dakle $w\in[u]_1$. Prema tome važi $[u] \subset [u]_1$ pa je svaka klasa relacije $\sim_1$ unija klasa svojih elemenata u relaciji $\sim$.

Stavimo $G = W/\sim$ i $\tau_\alpha: G_\alpha \to G$, kao i u slučaju skupova. Na osnovu predhodnih razmatranja vidimo da je skup G uredjen i to kvazi-uredjen, delimično uredjen ili linearno uredjen, ako su takvi redom skupovi G_α za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$.

Zaista, neka su skupovi G_α kvazi-uredjeni za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$ i preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}$ izotona preslikavanja. Prema a) i b) refleksivnost i tranzitivnost se prenose na skup W, a kako važi c) skup G može se snabdeti kvazi-uredjenjem koje u opštem slučaju ne mora biti delimično uredjenje jer važi $[u] \subset [u]_1$ za svaki element $u \in W$.

Ukoliko je na svakom skupu G_α zadano delimično uredjenje biće $[u] = [u]_1$, odnosno, $\sim_1 = \sim$ i $W/\sim = W/\sim_1$ jer uslov d) znači $\sim_1 \subset \sim$ pa je G delimično uredjen skup.

Predpostavimo na kraju da je za svaki indeks α, na skupu G_α definisano linearno uredjenje. Ako su $[u_\alpha]$ i $[v_\beta]$ elementi skupa $G = W/\sim$ tako da je $u_\alpha \in U_\alpha \subset W$ i $v_\beta \in U_\beta \subset W$ tada postoji indeks $\gamma \in \Lambda$, sa $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$ tako da je $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) \in U_\gamma$ i $\rho_{\beta\gamma}(v_\beta) \in U_\gamma$. No skup U_γ je po predpostavci linearno uredjen pa važi recimo $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) \leq \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ dakle $[u_\alpha] \leq [v_\beta]$, pa su elementi $[u_\alpha]$ i $[v_\beta]$ uporedivi a to znači da je G linearno uredjen.

Univerzalnost granice i izotonost preslikavanja pokazuje se neposredno. Q.E.D.

4. Slojevi u predpramenu uredjenih skupova.

Neka je X topološki prostor i F predpramen uredjenih skupova baze X. Uočimo element $x \in X$. Uredjeni skupovi $F(U)$, kad U prolazi kolekcijom otvorenih podskupova u X zajedno sa izotonim preslikavanjima $\rho^U_V: F(U) \to F(V)$, kada je

$x \in V \subset U$, gde su U i V otvoreni podskupovi od X, čine direktan sistem uredjenih skupova.

DEFINICIJA 1. Sloj F(x), predpramena F uredjenih skupova u tački $x \in X$ je granica direktnog sistema skupova F(U) i preslikavanja $\{\rho_{\alpha\beta}\}$ za $\alpha \leq \beta$ zajedno sa uredjenjem koje smo uveli u dokazu teoreme IV.1.3.1., u odnosu na koje su sva preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}$ izotona preslikavanja uredjenih skupova.

Neposredno iz definicije 1., vidimo da je za svaki element $x \in X$, sloj F(x) predpramena F, uredjen skup i to kvazi-uredjen ako su takvi skupovi F(U) odnosno, delimično ili linearno uredjen ako su takvi, redom, skupovi F(U) za svaki otvoren podskup U skupa X.

U primeru IV.1.2.1., govori se o konstantnom predpramenu uredjenih skupova A_X. Sloj nad svakom tačkom $x \in X$ je skup A, dakle uredjen skup.

U primeru IV.1.2.2., radi se takodje o predpramenu C^Y uredjenih skupova. Sloj $C^Y(x)$ u svakoj tački $x \in X$, kao granica direktnog sistema uredjenih skupova može se i sam urediti. Pri tome za dva elementa s_x i t_x iz sloja $C^Y(x)$ u tački x, predstavljena sečenjima $s \in C(U)$ i $t \in C^Y(V)$ kažemo da je $s_x = t_x$ ako i samo ako postoji otvoren skup $W \subset U \cap V$, tako da je $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$.

Sloj predpramena P_1 u odeljku IV.1.2., t.j., skup $P_1(x)$ je za svaki element $x \in X$ jednočlan skup $\{0\}$, a kao takav je uredjen.

Predpostavimo da su F i G predpramenovi uredjenih skupova baze X. Morfizam $f:F \longrightarrow G$ predpramenova je kao i u slučaju skupova ili abelovih grupa, kolekcija preslikavanja $f(U):F(U) \longrightarrow G(U)$ kad U prolazi familijom otvorenih skupova uz uslov da je svako preslikavanje f(U) izotono preslikavanje uredjenih skupova pri čemu se kao i u slučaju skupova zahteva komutativnost odgovarajućeg dijagrama.

Kompoziciju takvih morfizama definišemo na prirodan način stavljajući za $F \longrightarrow G \longrightarrow H$, $(g \circ f)(U) = g(U) \circ f(U)$. Takodje se na prirodan način definiše pojam izomorfizma i identičnog morfizma pramenova.

Kao poseban slučaj preslikavanja direktnih sistema može se navesti sledeća konstrukcija:

Neka je $f:F \longrightarrow G$ morfizam predpramenova uredjenih skupova, tada f indukuje preslikavanje $f_x:F(x) \longrightarrow G(x)$ odgovarajućih slojeva u tački x, za svaki element $x \in X$. Pri tome ako je $F \longrightarrow G \longrightarrow H$, važi $(g \circ f)_x = g_x \circ f_x$.

Za svaki element $x \in X$, preslikavanje $f_x:F(x) \to G(x)$ definišemo kao u slučaju skupova ili abelovih grupa stavljajući $f_x(e) = (f(U)(s))_x$, gde je $e = s_x$, element predstavljen sečenjem $s \in F(U)$ i neposredno dobijamo da je f_x izotono i da važi $(g \circ f)_x = g_x \circ f_x$ uz $(ind_F)_x = ind_{F(x)}$.

5. Pramenovi uredjenih skupova.

Pojam pramenova uredjenih skupova baze X, uvodimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor i F predpramen uredjenih skupova baze X. Predpramen F je pramen uredjenih skupova ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

UG1) Neka je otvoren podskup U skupa X oblika $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$, gde su za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$ skupovi U_λ otvoreni. Ako su s i $s' \in F(U)$ sečenja takva da je za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$ $\rho^U_{U_\lambda}(s) \leq \rho^U_{U_\lambda}(s')$, tada važi $s \leq s'$.

UG2) Neka je otvoren podskup U skupa X, unija familije otvorenih skupova $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, t.j., $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ i neka je $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familija sečenja pri čemu je za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$, $s_\lambda \in F(U_\lambda)$. Ako važi:

$$\rho^{U_\lambda}_{U_\lambda \cap U_\mu}(s_\lambda) = \rho^{U_\mu}_{U_\lambda \cap U_\mu}(s_\mu),$$

za svaka dva indeksa $\lambda, \mu \in \Lambda$, tada postoji sečenje $s \in F(U)$, tako da je $\rho^U_{U_\lambda}(s) = s_\lambda$, za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$.

Kao u slučaju skupova ili abelovih grupa, možemo predpramenove uredjenih skupova koji zadovoljavaju uslov UG1) nazivati monopredpramenovima, uredjenih skupova.

Primeri IV.1.3.1.,IV.1.3.2., i predpramen P_1 u odeljku IV.1.3. su primeri monopredpramenova uredjenih skupova.

Primetimo da je elemenat $s \in F(U)$, u definiciji 1., čiju egzistenciju tvrdi uslov UG2) jedinstven na osnovu uslova UG1), samo u slučaju ako su skupovi F(U) delimično uredjeni, a samim tim i linearno uredjeni, dok taj elemenat ne mora biti jedinstveno odredjen, ako se radi o kvazi-uredjenim skupovima F(U).

TEOREMA 1. Ako je F predpramen, a G monopredpramen uredjenih skupova i $f: F \longrightarrow G$ morfizam predpramenova tako da za svaki element $x \in X$, važi: $f_x \leq g_x$, tada je $f \leq g$.
Pri tome je $f \leq g$, ako i samo ako je za svaki otvoren skup $U \subset X$, $f(U) \leq g(U)$, što je pak ako i samo ako je za svaki element $s \in F(U)$, $f(U)(s) \leq g(U)(s)$; takodje je $f_x \leq g_x$, ako i samo ako je za svaki element $e \in F(x)$, $f_x(e) \leq g_x(e)$.

DOKAZ. Navodi gornje teoreme se dokazuju analogno dokazu odgovarajuće teoreme za skupove ili abelove grupe, tako što se koristi uslov UG1), umesto uslova G1) ili AG1) u definiciji monopredpramenova skupova ili abelovih grupa. Q.E.D.

Predpramenovi C^Y u primeru IV.1.2.2., i predpramen P_2 u odeljku IV.1.2., su primeri pramenova uredjenih skupova.

Navedimo sada jedan interesantan primer.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor. Par (E,p), gde je E topološki prostor, a p neprekidno preslikavanje prostora E u prostor X nazovimo presečnim prostorom baze X, kao i u slučaju skupova. Predpostavimo da je F pramen sečenja presečnog prostora (E,p) po X. Neka je za svaki otvoren podskup U skupa X, zadano uredjenje na skupu F(U). Tada je za svaki element $x \in X$, vlakno $p^{-1}(x)$ takodje uredjen skup. Ako je i skup X uredjen, tada je moguće skup E urediti tako da $p:E \longrightarrow X$ bude izotono preslikavanje. Zaista, stavimo za elemente e i e_1 iz skupa E, $e \leq e_1$, ako i samo ako je $p(e) \leq p(e_1)$, a za $p(e) = p(e_1) = x$, $e \leq_x e_1$, gde je $\leq_x$ uredjenje na $p^{-1}(x) \subset E$, pri čemu smo skup $p^{-1}(x)$ uredjajno identifikovali sa skupom $\varinjlim_{U \ni x} \mathrm{GLE}(U)$.

6. Pramen prostor uredjenih skupova.

Neka je X topološki prostor i F predpramen uredjenih skupova, baze X. Neka je $LF = \bigsqcup_{x \in X} F(x)$, disjunktna unija slojeva F(x) u tački $x \in X$. Slojevi F(x) su uredjeni skupovi za svaki element $x \in X$. Skup LF možemo urediti tako što stavljamo da je $u \leq v$ za $u,v \in LF$ ako i samo ako postoji element $x \in X$ tako da je $u,v \in F(x)$ i $u \leq_x v$, gde je $\leq_x$ uredjenje na F(x). Skup LF može se topologizirati kao u teoremi II.2.5.4.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor. Pramen prostor uredjenih skupova je par (E,p) gde je E topološki prostor, a $p:E \longrightarrow X$ lokalni homeomorfizam i pri tome je skup E uredjen tako da je za svako uredjenje na skupu X, p izotono preslikavanje uredjenih skupova.

Morfizam $f:(E,p) \longrightarrow (E',p')$ pramen prostora je morfizam odgovarajućih pramen prostora skupova, ako je još i izotono preslikavanje. Kao u slučaju skupova ili grupa, morfizam $f:(E,p) \longrightarrow (E',p')$ indukuje morfizam pramenova $GE \rightarrow GE'$ uredjenih skupova. Za svaki otvoren skup $U \subset X$, imamo preslikavanje $GE(U) \longrightarrow GE'(U)$ dato sa $\sigma \longmapsto f\circ\sigma$. To preslikavanje je izotono preslikavanje uredjenih skupova. Zaista, za svaki element $x\in U$ je $\sigma(x)\in p^{-1}(x)$. Ako je τ neko drugo sečenje nad U biće $\tau(x)\in p^{-1}(x)$. Kako je vlakno uredjen skup, mogu elementi $\sigma(x)$ i $\tau(x)$ biti u relaciji uredjenja ili ne, što znači možemo za svaka dva elementa $\sigma,\tau\in GE(U)$ staviti $\sigma \leq \tau$ ako i samo ako je za svaki element $x\in U$, $\sigma(x) \leq \tau(x)$, odnosno, $f(\sigma(x)) \leq f(\tau(x))$, pa je $f\circ\sigma \leq f\circ\tau$ u skupu $GE'(U)$, dakle korespodencija $\sigma \longmapsto f\circ\sigma$ je izotona.

LEMA 1. Neka je (E,p) pramen prostor uredjenih skupova, tada je sloj $GE(x)$ do na bijekciju, baš vlakno $p^{-1}(x)$ preslikavanja p u tački $x\in X$ i pri tome je diskretan podprostor prostora E. Takodje, $GE(x)$ i $p^{-1}(x)$ su uredjajno izomorfni.

Dokaz ove leme je kao i za slučaj skupova neposredan. Uredjajna izomorfnost sloja $GE(x)$ i vlakna $p^{-1}(x)$ sledi iz razmatranja posle definicije 1. Posredstvom tog uredjajnog izomorfizma sloj $GE(x)$ i vlakno $p^{-1}(x)$ možemo nadalje identifikovati.

TEOREMA 1. Ako je (E,p) pramen prostor uredjenih skupova, baze X, tada je LGE njemu izomorfan pramen prostor baze X, t.j., postoji izomorfizam $\phi:E \longrightarrow LGE$ pramen prostora.

DOKAZ. Na osnovu predhodne leme za svaki element $x\in X$ postoji uredjajni izomorfizam vlakna $p^{-1}(x)$ sa slojem $GE(x)$, odnosno, vlakno $p^{-1}(x)$ uredjajno je izomorfno sa vlaknom $p_1{}^{-1}(x)$. Svi uredjajni izomorfizmi uzeti zajedno daju uredjajni izomorfizam $\phi:E \longrightarrow LGE$. Kako je kao i u slučaju skupova bez uredjenja $\phi(s(U)) = \hat{s}(U)$, ϕ je otvoreno i neprekidno, dakle homeomorfizam. Takodje je preslikavanje ϕ saglasno sa projekcijama, t.j., komutativan je sledeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & LGE \arrow[dl, "p_1"] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

Q.E.D.

Ova teorema daje karakterizaciju pramenova sa vrednostima u kategoriji uredjenih skupova i izotonih preslikavanja, odnosno pramenova uredjenih skupova.

7. O jednom karakterističnom primeru.

Na prirodan način može se uvesti pojam direktnog sistema uredjenih grupa, ograda i granice datog sistema uredjenih grupa. Jedinstvenost te granice, ako ona postoji je već dokazana, činjenicom da su jedinstvene granice direktnih sistema grupa i homomorfizama, kao i granice direktnih sistema uredjenih skupova i izotonih homomorfizama.

Ostaje da se pokaže teorema egzistencije.

TEOREMA 1. Za svaki direktni sistem $(G_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ uredjenih grupa i izotonih homomorfizama postoji granica G, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je G uredjena grupa, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\sigma_\alpha : G_\alpha \longrightarrow G$ izotoni homomorfizam uredjenih grupa.

DOKAZ. Ako usvojimo oznake teorema III.1.2.1.,i IV.1.3.1., pa na osnovu njih na granici G konstruišemo grupnu i uredjajnu strukturu, ostaje samo da se pokaže saglasnost tih struktura.

Dokažimo da je skup G sa definisanom grupnom i uredjajnom strukturom, uredjena grupa.

Drugim rečima dokažimo da za elemente $u_\alpha \in U_\alpha \subset W$, $v_\beta \in U_\beta \subset W$ i $w_\gamma \in U_\gamma \subset W$, važi sledeća implikacija:

Ako je $[u_\alpha] \leq [v_\beta]$, tada je $[u_\alpha] + [w_\gamma] \leq [v_\beta] + [w_\gamma]$ za svaka tri elementa iz skupa G.

Zaista, stavimo:

$$[u_\alpha] + [w_\gamma] = [z_\nu] \text{ i } [v_\beta] + [w_\gamma] = [x_\mu].$$

Tada je:

$[u_\alpha] + [w_\gamma] = [z_\nu]$ ako i samo ako postoji indeks $\eta_1 \in \Lambda$, tako da je $\alpha \leq \eta_1$, $\gamma \leq \eta_1$ i $\nu \leq \eta_1$ i važi da je $\rho_{\alpha\eta_1}(u_\alpha) + \rho_{\gamma\eta_1}(w_\gamma) = \rho_{\nu\eta_1}(z_\nu)$,

takodje je:

$[v_\beta] + [w_\gamma] = [x_\mu]$ ako i samo ako postoji indeks $\eta_2 \in \Lambda$, tako da je $\beta \leq \eta_2$, $\gamma \leq \eta_2$ i $\mu \leq \eta_2$ i važi da je $\rho_{\beta\eta_2}(v_\beta) + \rho_{\gamma\eta_2}(w_\gamma) = \rho_{\mu\eta_2}(x_\mu)$.

Slično je:

$[u_\alpha] \leq [v_\beta]$, onda i samo onda ako postoji indeks $\lambda \in \Lambda$, tako da je $\alpha \leq \lambda$ i $\beta \leq \lambda$ i da važi $\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) \leq \rho_{\beta\lambda}(v_\beta)$.

Kako je skup indeksa usmeren, to za indekse η_1 i η_2 postoji veći, recimo da je to indeks $\eta \in \Lambda$, a takodje za indekse η i λ postoji veći, recimo $\xi \in \Lambda$.

Iz uslova $\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha) \leq \rho_{\beta\lambda}(v_\beta)$, zbog izotonosti preslikavanja $\rho_{\lambda\xi}$ važi:

$$\rho_{\lambda\xi}(\rho_{\alpha\lambda}(u_\alpha)) \leq \rho_{\lambda\xi}(\rho_{\beta\lambda}(v_\beta)),$$

odnosno:

$$\rho_{\alpha\xi}(u_\alpha) \leq \rho_{\beta\xi}(v_\beta).$$

Element w_γ je u skupu U_γ, pa je $\rho_{\gamma\xi}(w_\gamma) \in U_\xi$. No, na skupu U_ξ imamo strukturu uredjene grupe, pa je:

$$\rho_{\alpha\xi}(u_\alpha) + \rho_{\gamma\xi}(w_\gamma) \leq \rho_{\beta\xi}(v_\beta) + \rho_{\gamma\xi}(w_\gamma).$$

Kako je $\alpha \leq \eta_1 \leq \xi$, $\gamma \leq \eta_1 \leq \xi$ i $\beta \leq \eta_2 \leq \xi$, $\gamma \leq \eta_2 \leq \xi$, biće:

$$\rho_{\eta_1\xi}(\rho_{\alpha\eta_1}(u_\alpha)) + \rho_{\eta_1\xi}(\rho_{\gamma\eta_1}(w_\gamma)) \leq$$
$$\leq \rho_{\eta_2\xi}(\rho_{\beta\eta_2}(v_\beta)) + \rho_{\eta_2\xi}(\rho_{\gamma\eta_2}(w_\gamma)),$$

a kako su $\rho_{\eta_1\xi}$ i $\rho_{\eta_2\xi}$ homomorfizmi, biće:

$$\rho_{\eta_1\xi}[\rho_{\alpha\eta_1}(u_\alpha) + \rho_{\gamma\eta_1}(w_\gamma)] \leq \rho_{\eta_2\xi}[\rho_{\beta\eta_2}(v_\beta) + \rho_{\gamma\eta_2}(w_\gamma)]$$

odnosno:

$$\rho_{\eta_1\xi}(\rho_{\nu\eta_1}(z_\nu)) \leq \rho_{\eta_2\xi}(\rho_{\mu\eta_2}(x_\mu)),$$

dakle:

$$\rho_{\nu\xi}(z_\nu) \leq \rho_{\mu\xi}(x_\mu),$$

što znači da je $[z_\nu] \leq [x_\mu]$, odnosno $[u_\alpha] + [w_\gamma] \leq [v_\beta] + [w_\gamma]$. Q.E.D

Direktni sistemi uredjenih grupa su, kao što se vidi iz napred izloženog, specijalan slučaj direktnih sistema uredjenih skupova. I u slučaju uredjenih grupa, možemo govoriti o predpramenovima i pramenovima. Preciznije je predpramen F baze X, sa vrednostima u kategoriji uredjenih grupa i izotonih homorfizama, ustvari, predpramen uredjenih grupa baze X. Aksiome pramenova uredjenih grupa mogu se formulisati u sledećem obliku:

UAG1) Neka je otvoren podskup $U \subset X$, unija familije otvorenih skupova $\{U_i\}_{i \in I}$, t.j., $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Ako je sečenje $s \in F(U)$ takvo da za svaki indeks $i \in I$ važi $0 \leq \rho^U_{U_i}(s)$, tada je $0 \leq s$.

UAG2) je ista aksioma kao u slučaju abelovih grupa.

S obzirom da konstrukcija granice direktnih sistema prenosi saglasnost grupne i uredjajne strukture, kao što smo napred videli, moguće je za dati pramen uredjenih grupa konstruisati odgovarajući pramen prostor. Slojevi, odnosno vlakna nad svakom tačkom imaju strukturu uredjene grupe. Možemo zato okarakterisati pramenove uredjenih grupa sledećom teoremom.

TEOREMA 1. Svaki pramen uredjenih grupa jednak je do na izomorfizam pramenu sečenja nekog pramen prostora uredjenih grupa, koji je i sam jedinstven do na izomorfizam pramen prostora.

Dokaz ove teoreme predstavljaju napred izložena razmatranja u ovom odeljku. Pri tome za pramen prostor skupova rećićemo da je pramen prostor uredjenih grupa, ako na svakom sloju imamo saglasne grupnu i uredjajnu strukturu i i ako ta struktura na slojevima indukuje strukturu uredjene grupe na skupovima sečenja,

2. SAGLASNOST TOPOLOŠKE I UREDJAJNE STRUKTURE NA GRANICAMA DIREKTNIH SISTEMA.

1. Granice direktnih sistema A-uredjenih topoloških prostora.

Već smo se upoznali sa raznim definicijama saglasnosti uredjajne i topološke strukrure, u glavi I. Postavlja se pitanje, koje saglasnosti prenosi konstrukcija granice direktnog sistema uredjenih topoloških prostora i odgovarajućih preslikavanja. U ovom odeljku posmatramo direktne sisteme A-uredjenih topoloških prostora i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja i pokazujemo da postoji granica takvih direktnih sistema.

TEOREMA 1. Za direktan sistem $(U_\alpha, \rho_{\alpha/\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ A-uredjenih topoloških prostora i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja, postoji granica U, $\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je U, A-uredjen topološki prostor, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\mathcal{J}_\alpha : U_\alpha \to U$

izotono, antitono i otvoreno preslikavanje A-uredjenih topoloških prostora.

DOKAZ. Neka je U, $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granica odgovarajućeg direktnog sistema skupova i preslikavanja. Na skupu U, možemo kao u predhodnom paragrafu definisati uredjajnu strukturu, a takodje i topološku, kao u predhodnoj glavi. Pri tome su preslikavanja $\tau_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$ za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$ izotona, antitona i otvorena, očigledno, prema konstrukciji tih preslikavanja,

Treba pokazati da su uredjajna i topološka struktura na skupu U, A-saglasne, odnosno da je skup U sa uredjajnom i topološkom strukturom, A-uredjen topološki prostor.

Zaista uočimo tačku $u\in U$, njenu okolinu $M\subset U$ i tačku $v\in U$ tako da $v\notin M$ i neka pri tome važi $u\bar{\rho}v$. Kako je $U = W/\sim$ izaberimo elemente $u_\alpha\in U_\alpha\subset W$ i $v_\beta\in U_\beta\subset W$ tako da je $u = [u_\alpha]$ i $v = [v_\beta]$. Zbog usmerenosti skupa indeksa Λ, za indekse α i β postoji indeks $\gamma\in\Lambda$, tako da je $\alpha\leq\gamma$ i $\beta\leq\gamma$. Elementi $u_\gamma = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)$ i $v_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ su različiti elementi skupa U_γ jer su prema svom izboru različiti elementi u i v iz skupa U. Sa M^* označimo kvazi-okolinu elementa u_γ za koju je $p(M^*) = M$. Skup $M^* = \bigcup_{\mu<\lambda}\rho_{\mu\lambda}(M_\mu)$ za $\gamma\leq\mu$. Ne umanjujući opštost zaključivanja možemo predpostaviti da je $\mu=\gamma$, pa je $M^* = \bigcup_{\gamma<\lambda}\rho_{\gamma\lambda}(M_\gamma)$, gde je M_γ, τ_γ-okolina elementa u_γ i $v_\gamma\notin M_\gamma$ jer $v\notin M$. Po predpostavci su uredjajna i topološka struktura na skupu U, A-saglasne, pa postoji okolina N_γ, tačke u_γ uredjajno razdvojena od jednočlanog skupa $\{v_\gamma\}$, tako da ako je $u_\gamma\bar{\rho}\,v_\gamma$, onda je i $N_\gamma\bar{\rho}\,v_\gamma$. Primetimo pre svega da zbog predpostavke $u\bar{\rho}\,v$ na skupu U, možemo uzeti da je $u_\gamma\bar{\rho}\,v_\gamma$ na skupu U_γ. Označimo sa N^* kvazi-okolinu elementa $u_\gamma\in U_\gamma$ oblika $N^* = \bigcup_{\gamma<\lambda}\rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$ i stavimo $N = p(N^*)$. Kako je $N_\gamma\subset M_\gamma$ biće i $N\subset M$, a kako je $u_\gamma\in N_\gamma$, biće $u\in N\subset M$. Dokažimo da je skup N uredjajno razdvojen od jednočlanog skupa $\{v\}\subset U$. Zaista, ako za svaki element x iz skupa N važi $x\parallel v$, skup N je uredjajno razdvojen od jednočlanog skupa $\{v\}$. Predpostavimo zato da postoji neki element $x\in N$ koji je uporediv sa elementom $v\in N$. U tom slučaju može biti $x\rho v$ ili $v\rho x$. Kako je $N = p(N^*)$ biće $x = p(x_\nu)$ za $x_\nu\in N^* = \bigcup_{\gamma<\lambda}\rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$ pa je $x_\nu\in\rho_{\gamma\nu}(N_\gamma)$ za neki indeks $\nu\in\Lambda$ sa $\gamma\leq\nu$. Dakle, $x_\nu = \rho_{\gamma\nu}(x_\gamma)$ za neki element x_γ u skupu N_γ. Kako važi $N_\gamma\bar{\rho}\,v_\gamma$ u skupu U_γ može biti $x_\gamma \rho v_\gamma$ ili $x_\gamma \| v_\gamma$. Ako je $x_\gamma \rho v_\gamma$ biće zbog izotonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\nu}: U_\gamma \to U_\nu$ i $x_\nu \rho v_\nu$, gde je $v_\nu = \rho_{\gamma\nu}(v_\gamma)$ a takodje i $x \rho v$, po definiciji uredjenja na skupu U. Ako je pak $x_\gamma \| v_\gamma$ u skupu U_γ ne može biti x uporedivo sa v, zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\lambda}$ za svaki indeks $\lambda \in \Lambda$ sa $\gamma \leq \lambda$. Možemo zaključiti da važi iskaz $N \bar{\rho} v$. Predpostavimo na kraju da postoji element $y \in N$ tako da je $v \rho y$. Kako je $y \in N = p(N^*)$, biće $y = p(y_\eta)$ za neki indeks $\eta \in \Lambda$ sa $\gamma \leq \eta$. Neka je, što ne umanjuje opštost zaključivanja, $v_\eta \rho y_\eta$, gde je $v_\eta = \rho_{\gamma\eta}(v_\gamma)$. Zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\eta}$ mora biti $v_\gamma \rho y_\gamma$, pri čemu je $y_\gamma \in N_\gamma$ tako da je $y_\eta = \rho_{\gamma\eta}(y_\gamma)$. Kako za svaki element x_γ, $x_\gamma \in N_\gamma$ važi $x_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$ ne može biti $v_\gamma \rho y_\gamma$, pa ni $v_\eta \rho y_\eta$, pa dakle ni $v \rho y$. Time smo pokazali da od dva iskaza $x \rho v$ i $v \rho x$ važi samo jedan i to prvi. Skup N je dakle uredjajno razdvojen od jednočlanog skupa $\{v\}$ i važi implikacija $u \bar{\rho} v \Rightarrow N \bar{\rho} v$, čime je teorema dokazana. Q.E.D.

Na osnovu gornje teoreme, definicije diskretnih topoloških prostora u smislu Aleksandrova i razmatranja u predhodnom paragrafu može se dokazati sledeća posledica.

POSLEDICA 1. Postoji granica U, $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ direktnog sistema $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1}$ diskretnih prostora u smislu Aleksandrova i odgovarajućih preslikavanja.

2. Direktni sistemi S-uredjenih i strogo S-uredjenih topoloških prostora.

U ovom odeljku pokazaćemo da se S-saglasnost i stroga S-saglasnost topološke i uredjajne strukture na datom skupu, održavaju konstrukcijom granice direktnog sistema S-uredjenih, odnosno strogo S-uredjenih topoloških prostora i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja. Mogu se dokazati sledeće teoreme.

TEOREMA 1. Za svaki direktan sistem, u oznaci $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta) \in \Lambda_1}$ S-uredjenih topoloških prostora i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja, postoji granica U, $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je U S-uredjen topološki prostor, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, preslikavanje $\mathcal{T}_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$ izotono, antitono i otvoreno preslikavanje S-uredjenih topoloških prostora.

DOKAZ. Primetimo pre svega da je relacija ρ na skupu U delimično uredjenje. Dokažimo da je topologija na skupu U, T_1-topologija. Zaista, neka su u i v dve različite tačke u topološkom prostoru U. Postoje tada elementi $u_\alpha\in U_\alpha\subset W$ i $v_\beta\in U_\beta\subset W$ i indeks $\gamma\in\Lambda$ sa $\alpha\leq\gamma$ i $\beta\leq\gamma$, tako da su $u=[u_\alpha]$ i $v=[v_\beta]$ i $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)=u_\gamma$ i $\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)=v_\gamma$, dve različite tačke u prostoru U_γ. Kako je topologija na skupu U_γ, T_1-topologija postoji okolina M_γ tačke u_γ tako da $v_\gamma\notin M_\gamma$ i okolina N_γ tačke v_γ tako da $u_\gamma\notin N_\gamma$. Uočimo skupove $M^*=\bigcup_{\gamma<\lambda}\rho_{\gamma\lambda}(M_\gamma)$, $M=p(M^*)$ $N^*=\bigcup_{\gamma<\lambda}\rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$ i $N=p(N^*)$. Skupovi M^* i N^* su kvazi-okoline redom tačaka u_γ i v_γ a skupovi M i N su redom okoline tačaka u i v. Predpostavimo da važi $v\in M=p(M^*)$. Postoji tada neki indeks $\nu\in\Lambda$ sa $\gamma<\nu$ tako da je $v=[v_\nu]$, gde je $v_\nu=\rho_{\gamma\nu}(v_\gamma)$. Kako su izotona i istovremeno antitona preslikavanja delimično uredjenih skupova injektivna, ne može biti $v_\nu\in\rho_{\gamma\nu}(M_\gamma)$ jer bi bilo $v_\nu=\rho_{\gamma\nu}(x_\gamma)$ za neki element $x_\gamma\in M_\gamma$, odnosno $\rho_{\gamma\nu}(x_\gamma)=$ $=\rho_{\gamma\nu}(v_\gamma)$, pa je $x_\gamma=v_\gamma$, a to je nemoguće jer $v_\gamma\notin M$. Dakle, $v\notin M$. Slično pokazujemo da $u\notin N$, pa je topologija na skupu U, T_1-topologija. Predpostavimo da je $u\bar{\rho}v$ i da je $u_\gamma\rho v_\gamma$ što ne umanjuje opštost zaključivanja. Kako su topologija i uredjenje na skupu U_γ, S-saglasne, postoje okoline, redom, tačaka u_γ i v_γ u oznaci P_γ i Q_γ, tako da je $P_\gamma\bar{\rho}v_\gamma$ i $u_\gamma\bar{\rho}Q_\gamma$. Očigledno možemo predpostaviti da je $P_\gamma=M_\gamma$ i $Q_\gamma=N_\gamma$. Tada će na skupu U biti $M\bar{\rho}v$ i $u\bar{\rho}N$. Predpostavimo da za neki element $x\in M$ važi $v\rho x$. Neka je $x=[x_\eta]$, gde je indeks $\eta\in\Lambda$ sa $\gamma<\eta$ i važi $x_\eta\in\rho_{\gamma\eta}(M_\gamma)$ te neka je na skupu U_η, $v_\eta\rho x_\eta$, pri čemu je $v_\eta=\rho_{\gamma\eta}(v_\gamma)$. Kako je $x_\eta\in\rho_{\gamma\eta}(M_\gamma)$ postoji element x_γ, $x_\gamma\in M_\gamma$ tako da je $x_\eta=\rho_{\gamma\eta}(x_\gamma)$. Ako je $x_\gamma\parallel v_\gamma$, zbog $v\rho x$ nije

$x \| v$, pa zbog $M \bar{\rho} v$ i predpostavke $v \rho x$ možemo uzeti dovoljno veliki indeks $\gamma \in \Lambda$ tako da je $x_\gamma \rho v_\gamma$ i $v_\gamma \rho x_\gamma$. Kako je uredjenje na skupu U_γ delimično uredjenje biće $x_\gamma = v_\gamma$, pa dakle i $x = v$, što znači $v \in M$ suprotno predpostavci. Dakle važi $M \bar{\rho} v$. Slično se pokazuje da važi $u \bar{\rho} N$ pa su topologija i uredjenje na skupu U S-saglasni čime je teorema dokazana.

Q.E.D.

TEOREMA 2. Za svaki direktan sistem $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ strogo S-uredjenih topoloških prostora i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja, postoji granica U, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ gde je $\sigma_\alpha : U \longrightarrow U$ izotono, antitono i otvoreno preslikavanje za svaki indeks $\alpha \in \Lambda$.

DOKAZ. Neka su u i v dva različita elementa u skupu U i neka je $u \rho v$, gde je $u = [u_\alpha]$, $v = [v_\beta]$ i $\gamma \in \Lambda$ indeks sa $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Elementi $u_\gamma = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)$ i $v_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ su različiti i za dovoljno veliki indeks $\gamma \in \Lambda$, u skupu U_γ, važi $u_\gamma \rho v_\gamma$. Kako su uredjajna i topološka struktura na skupu U_γ, strogo S-saglasne postoje okoline M_γ i N_γ, redom, tačaka u_γ i v_γ tako da je $M_\gamma \bar{\rho} N$, t.j., za svaki par tačaka u tim skupovima, $x_\gamma \in M_\gamma$ i $y_\gamma \in N_\gamma$ važi $x_\gamma \rho y_\gamma$ ili $x_\gamma \| y_\gamma$. Uočimo skupove $M^* = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_{\gamma\lambda}(M_\gamma)$, $N^* = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$, $M = p(M^*)$ i $N = p(N^*)$. Skupovi M^* i N^* su kvazi-okoline redom tačaka u_γ i v_γ, a skupovi M i N, okoline, redom, tačaka u i v. Kako je $M_\gamma \bar{\rho} N_\gamma$ biće i $M \bar{\rho} N$. Predpostavimo da za neki par tačaka $x \in M$ i $y \in N$ važi $y \rho x$, pri čemu je $y = [y_\delta]$ i $x = [x_\delta]$, za indeks $\delta \in \Lambda$ sa $\gamma \leq \delta$ i da je indeks δ uzet tako da važi $y_\delta \rho x_\delta$. Takav indeks očigledno postoji zbog usmerenosti skupa Λ i predpostavke da je $y \rho x$. No tada prema konstrukciji skupova M i N, $y_\delta = \rho_{\gamma\delta}(y_\gamma)$ i $x_\delta = \rho_{\gamma\delta}(x_\gamma)$ gde je $x_\gamma \in M_\gamma$ i $y_\gamma \in N_\gamma$. Kako važi $M \bar{\rho} N$, a nije $x \| y$, možemo, a što ne umanjuje opštost zaključivanja, predpostaviti da u skupu U važi $x \rho y$. S druge strane, zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\lambda} : U_\gamma \longrightarrow U_\lambda$ važi da je $y \rho x$, pa je u skupu U istovremeno $x \rho y$ i $y \rho x$, što je nemoguće. Dakle ne može biti $y \rho x$. Prema tome su topološka i uredjajna struktura na skupu U strogo S-saglasne čime je i teorema dokazana. Q.E.D.

3. O direktnim sistemima nekih klasa A-uredjenih topoloških prostora.

U ovom odeljku posmatraju se klase O_i, A-uredjenih topoloških prostora (i = 0,1,2) i pokazuje se da konstrukcija granice direktnih sistema prenosi aksiome O_i, ako su preslikavanja izotona, antitona i otvorena. Važi zapravo sledeća teorema.

TEOREMA 1. Za svaki direktan sistem $(U_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ A-uredjenih O_i-topoloških prostora (i = 1,2,0), i izotonih, antitonih i otvorenih preslikavanja, postoji granica U, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je U, A-uredjen O_i-topološki prostor, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, $\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U$ izotono, antitono i otvoreno preslikavanje.

DOKAZ. Dokažimo teoremu najpre za A-uredjene O_0-topološke prostore. U odeljku 1., ovog paragrafa, dokazali smo da je skup U zajedno sa uredjajnom i topološkom strukturom A-uredjen topološki prostor. Neka su u i v različite tačke u A-uredjenom topološkom prostoru $U = W/\sim$ tako da je $u \bar{\rho} v$. Postoje tada elementi $u_\alpha \in U_\alpha \subset W$ i $v_\beta \in U_\beta \subset W$ tako da je $u = [u_\alpha]$ i $v = [v_\beta]$. Kako je skup indeksa Λ usmeren, za indekse α i β postoji indeks $\gamma\in\Lambda$ tako da je $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Uočimo tačke $u_\gamma = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)$ i $v_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ u skupu U_γ. To su razne tačke, jer ako bi bile jednake bilo bi u = v u skupu U, suprotno predpostavci. Kako je po predpostavci $u \bar{\rho} v$, ne umanjujući opštost zaključivanja možemo uzeti da je $u_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$. Prostoru U_γ je O_0-topološki prostor, pa postoji okolina M_γ tačke $u_\gamma \in U$ tako da je $v_\gamma \notin M$ i važi $M_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$. U prostoru U_γ je topologija A-saglasna sa uredjenjem pa za okolinu M_γ tačke u_γ, koja ne sadrži tačku v_γ, postoji okolina N_γ, $N_\gamma \subset M_\gamma$ tačke u_γ, koja je uredjajno razdvojena od jednočlanog skupa $\{v_\gamma\}$, a kako je $u_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$ biće $N_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$. Uočimo kvazi-okolinu N^* tačke u_γ definisanu sa $N^* = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$ i stavimo $N = p(N^*)$. Skup N je okolina tačke $u \in U$. Pokažimo najpre da $v \notin N$. Zaista, predpostavimo da je $v = y \in N = p(N^*)$. Dakle $y = p(y_\nu)$, za neki indeks $\nu \in \Lambda$ sa $\gamma < \nu$, pri čemu je $y_\nu \in \rho_{\gamma\nu}(N_\gamma)$ pa postoji element $y_\gamma \in N_\gamma$ tako da je $y_\nu = \rho_{\gamma\nu}(y_\gamma)$. Kako je $v = y$ biće $v_\nu = y_\nu$ u skupu U_ν pa dakle i $v_\nu \rho y_\nu$ i $y_\nu \rho v_\nu$, a zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\nu}: U_\gamma \longrightarrow U_\nu$ biće $y_\gamma \rho v_\gamma$ i $v_\gamma \rho y_\gamma$, a to je nemoguće jer je skup N_γ uredjajno razdvojen od jednočlanog skupa $\{v_\gamma\}$. Prema tome ne može biti $v \in N$. Kao i u dokazu teoreme 1., u prvom odeljku ovog paragrafa, važi $N \bar{\rho} v$, čime je dokazano da je U, A-uredjen O_0-topološki prostor.

Da teorema važi ako se radi o A-uredjenim O_1-topološkim prostorima može se dokazati analogno napred navedenom dokazu za O_0-topološke prostore.

Dokažimo sada teoremu za A-uredjene O_2-topološke prostore.

Zaista, neka su u i v različite tačke u skupu U, tako da je $u \bar{\rho} v$. Postoje tada elementi $u_\alpha \in U_\alpha \subset W$ i $v_\beta \in U_\beta \subset W$ tako da je $u = [u_\alpha]$ i $v = [v_\beta]$. Kako je skup indeksa Λ usmeren, za indekse α i β postoji indeks $\gamma \in \Lambda$ tako da je $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Uočimo tačke $u_\gamma = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)$ i $v_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ u skupu U_γ. To su različite tačke, i ne umanjuje opštost zaključivanja ako stavimo da je $u_\gamma \bar{\rho} v_\gamma$ u skupu U_γ. Kako je U_γ, A-uredjen O_2-topološki prostor postoje u skupu U_γ uredjajno razdvojene okoline M_γ i N_γ, redom tačaka u_γ i v_γ tako da je $M_\gamma \bar{\rho} N_\gamma$. Uočimo skupove $M^* = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_{\gamma\lambda}(M_\gamma)$ i $N^* = \bigcup_{\gamma<\lambda} \rho_{\gamma\lambda}(N_\gamma)$. Ovi skupovi su kvazi-okoline elemenata u_γ i v_γ, a skupovi $M = p(M^*)$ i $N = p(N^*)$ su okoline redom tačaka u i v. Dokažimo da su skupovi M i N uredjajno razdvojeni. Zaista, pre svega je $M \cap N = \emptyset$. Ako bi bilo $M \cap N \neq \emptyset$, postojao bi element $x = y \in M \cap N$, pri čemu je $x \in M$ i $y \in N$. Obzirom na oblik skupova M i N, odnosno skupova M^* i N^* postoji indeks $\nu \in \Lambda$ sa $\gamma < \nu$ tako da je $x_\nu = y_\nu$, gde je $[x_\nu] = x = y = [y_\nu]$, pri čemu je $x_\nu = y_\nu \in \rho_{\gamma\nu}(M_\gamma) \cap \rho_{\gamma\nu}(N_\gamma)$, pa postoje elementi $x_\gamma \in M_\gamma$ i $y_\gamma \in N_\gamma$ tako da je $x_\nu = \rho_{\gamma\nu}(x_\gamma)$, $y_\nu = \rho_{\gamma\nu}(y_\gamma)$. Zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\nu}: U_\gamma \longrightarrow U_\nu$ mora biti $x_\gamma \rho y_\gamma$ i $y_\gamma \rho x_\gamma$ u skupu U_γ, a to je nemoguće jer su skupovi M_γ i N_γ uredjajno razdvojeni. Važi dakle $M \cap N = \emptyset$.

Dokažimo na kraju, da je $M \bar{\rho} N$. Neka su $a \in M$ i $b \in N$ dve proizvoljne tačke. Prema konstrukciji skupova M i N važi $a \bar{\rho} b$. Dokažimo da $b \rho a$ ne važi. Neka je takodje $a = [a_\eta]$ i $b = [b_\eta]$ gde je indeks $\eta \in \Lambda$ takav da je $\gamma < \eta$ i da je u skupu U_η, $b_\eta \rho a_\eta$. No mora biti $a_\eta \in \rho_{\gamma\eta}(M_\gamma)$ i $b_\eta \in \rho_{\gamma\eta}(N_\gamma)$ pa postoje elementi $a_\gamma \in M_\gamma$ i $b_\gamma \in N_\gamma$ tako da je $a_\eta = \rho_{\gamma\eta}(a_\gamma)$ i $b_\eta = \rho_{\gamma\eta}(b_\gamma)$, pa zbog antitonosti preslikavanja $\rho_{\gamma\eta}: U_\gamma \longrightarrow U_\eta$ mora biti $b_\gamma \rho a_\gamma$ što je nemoguće jer su skupovi M_γ i N_γ uredjajno razdvojeni i važi iskaz $M_\gamma \bar{\rho} N_\gamma$. Dakle, Skupovi M i N su disjunktne, uredjajno razdvojene okoline, redom tačaka u i v i važi $M \bar{\rho} N$, pa je teorema dokazana. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

V. O DIREKTNIM SISTEMIMA SKUPOVA SA BITOPOLOŠKOM STRUKTUROM.

1. EGZISTENCIJA GRANICE DIREKTNIH SISTEMA NEKIH KLASA BITOPOLOŠKIH PROSTORA.

1. Opšta razmatranja.

Na prirodan način, uvodimo pojam direktnih sistema bitopoloških prostora i biotvorenih preslikavanja. Pri tome za preslikavanje $f:(X,P,Q) \to (Y,P_1,Q_1)$ kažemo da je biotvoreno, ako je ono otvoreno kao preslikavanje topoloških prostora $(X,P) \to (Y,P_1)$ i $(X,Q) \to (Y,Q_1)$. Može se takodje govoriti o direktnim sistemima bitopoloških prostora i biotvorenih injektivnih preslikavanja. Postavlja se problem koje su klase bitopoloških prostora zatvorene u odnosu na granicu direktnih sistema, preciznije, za koje klase bitopoloških prostora postoje granice odgovarajućih direktnih sistema.

U ovom paragrafu posmatramo klase uzajamno T_i-

-bitopoloških prostora, za i = 0,1,2, i konstruišemo granice direktnih sistema takvih bitopoloških prostora.

2. Direktni sistemi uzajamno T_i-bitopoloških prostora (i = 0,1,2).

Direktni sistem $(X_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ uzajamno T_i-bitopoloških prostora (i = 0,1,2) i biotvorenih injektivnih preslikavanja je odgovarajući direktni sistem skupova i preslikavanja, pri čemu je za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, skup X uzajamno T_i-bitopološki prostor, a preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}:X_\alpha\rightarrow X_\beta$ biotvorena injektivna preslikavanja bitopoloških prostora.

Na prirodan način uvodi se pojam ograde, a takodje i pojam granice gore definisanog direktnog sistema uzajamno T_i-bitopoloških prostora i biotvorenih injektivnih preslikavanja. Dokažimo zato teoremu egzistencije granice direktnih sistema tih bitopoloških prostora.

TEOREMA 1. Za svaki direktan sistem $(X_\alpha, \rho_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ uzajamno T_i-bitopoloških prostora i biotvorenih injektivnih preslikavanja postoji granica X, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, gde je X, uzajamno T_i-bitopološki prostor, a za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$, preslikavanje $\sigma_\alpha:X_\alpha\longrightarrow X$ biotvoreno, injektivno preslikavanje bitopoloških prostora.

DOKAZ. Neka je X, $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ granica odgovarajućeg direktnog sistema skupova i preslikavanja. Na skupu X mogu se definisati dve topologije, kao u dokazu teoreme III.2.2.1., pri čemu su preslikavanja $\sigma_\alpha:X_\alpha\longrightarrow X$ biotvorena i injektivna, za svaki indeks $\alpha\in\Lambda$. Ako sa P i Q označimo topologije na skupu X, treba dokazati da je skup X, sa topologijama P i Q, uzajamno T_i-bitopološki prostor. Dokažimo da je (X,P,Q) uzajamno T_2-bitopološki prostor.

Zaista, neka su $[u_\alpha]$ i $[v_\beta]$ dva različita elementa bitopološkog prostora (X,P,Q), pri čemu je $u_\alpha\in X_\alpha\subset W$,

$v_\beta \in X_\beta \subset W$, gde je $W/\sim = X$. Za indekse α i β postoji, zbog usmerenosti skupa indeksa Λ, indeks $\gamma \in \Lambda$ sa $\alpha \leq \gamma$ i $\beta \leq \gamma$. Uočimo elemente $\rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha)$ i $\rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ u skupu X. To su različiti elementi skupa X_γ, pa kako je bitopološki prostor X_γ uzajamno T_2, sa topologijama P_γ i Q_γ, postoje P_γ-otvoren skup U_γ i Q_γ-otvoren skup V_γ, tako da je $u_\gamma = \rho_{\alpha\gamma}(u_\alpha) \in U_\gamma$, $v_\gamma = \rho_{\beta\gamma}(v_\beta)$ sa $v_\gamma \in V_\gamma$ i važi $U_\gamma \cap V_\gamma = \emptyset$. Uočimo kvazi-okoline $U^* = \bigcup_{\gamma \leq \lambda} \rho_{\gamma\lambda}(U_\gamma)$ i $V^* = \bigcup_{\gamma \leq \lambda} \rho_{\gamma\lambda}(V_\gamma)$ redom elemenata u_α i v_β. Skupovi $U = p(U^*)$ i $V = p(V^*)$ su okoline redom tačaka u i v u skupu X. Pri tome je U, P-otvoren, a V, Q-otvoren skup u X. Važi takodje i $U \cap V = O$. Ako bi bilo $U \cap V \neq \emptyset$, postojao bi elemenat $x = y$, za $x \in U$ i $y \in V$. Predpostavimo da je $x = [x_\mu]$ i $y = [y_\nu]$, gde je $\gamma \leq \mu$ i $\gamma \leq \nu$. Ne umanjuje se opštost zaključivanja ako predpostavimo da je $\gamma = \mu = \nu$. Kako je $x = y$ mora postojati indeks $\eta \in \Lambda$ sa $\gamma \leq \eta$ tako da je $\rho_{\gamma\eta}(x_\gamma) = \rho_{\gamma\eta}(y_\gamma)$, pri čemu je $x_\gamma \in U_\gamma$ a $y_\gamma \in V_\gamma$. Zbog injektivnosti preslikavanja $\rho_{\gamma\eta}$ mora biti $x_\gamma = y_\gamma$, što znači da je $U_\gamma \cap V_\gamma \neq \emptyset$, a to je nemoguće. Dakle važi $U \cap V = \emptyset$, pa je bitopološki prostor (X,P,Q) uzajamno T_2-bitopološki prostor.

Analogno se može dokazati teorema i za slučaj uzajamno T_0 i T_1-bitopoloških prostora. A to je i trebalo dokazati. $\mathcal{Q.E.D.}$

Pitanje koje ostaje otvoreno je na koji se način može oslabiti uslov injektivnosti preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}$ za $\alpha \leq \beta$ u predhodnoj teoremi. Takodje je otvoreno pitanje koje sve klase dopuštaju konstrukciju granice i uz uslov injektivnosti preslikavanja $\rho_{\alpha\beta}$ ili uz neki drugi uslov koji se može nametnuti preslikavanjima $\rho_{\alpha\beta}$ ili skupu indeksa Λ.

2. BITOPOLOŠKI PRAMENOVI.

1. Osnovni pojmovi.

U predhodne dve glave govorili smo o predpramenovima i pramenovima baze X, gde je X topološki prostor. Kako postoje granice direktnih sistema nekih klasa bitopoloških prostora ima smisla posmatrati predpramenove i pramenove tih klasa bitopoloških prostora.

U ovom paragrafu, mi nećemo posmatrati predpramenove i pramenove bitopoloških prostora jer su vrlo uske klase bitopoloških prostora zatvorene u odnosu na konstrukciju granice odgovarajućih direktnih sistema.

Ovde ćemo predpostaviti da je bazni prostor X snabdeven bitopološkom strukturom, dakle $X = (X,P,Q)$ gde će topologije P i Q zadovoljavati neki od uslova saglasnosti.

DEFINICIJA 1. Kategorija B$\mathcal{O}$-otvorenih skupova u bitopološkom prostoru X, ima za objekte sve podskupove skupa X oblika $U \cap V$, gde je U, P-otvoren, a V, Q-otvoren skup, a za svaki par objekata $M,N \in obB\mathcal{O}$, skup morfizama $Hom(M,N)$ je jednočlan, ako je $M \subset N$, a prazan u ostalim slučajevima.

Da se u gornjoj definiciji radi o kategoriji vidi se neposredno.

2. Bitopološki predpramenovi.

Kao u slučaju predpramenova čija je baza topološki prostor, može se govoriti, da tako kažemo, o predpramenovima čija je baza bitopološki prostor ili kraće o bitopološkim predpramenovima.

DEFINICIJA 1. Neka je X bitopološki prostor. Bitopološki predpramen F, baze X sa vrednostima u kategoriji K je svaki kontravarijantan funktor $F:B\mathcal{O} \longrightarrow K$, kategorije $B\mathcal{O}$, otvorenih skupova u kategoriju K.

Drugim rečima, bitopološki predpramen F, baze X je dat sledećim informacijama:

a) Svakom podskupu $U \subset X$, koji je presek nekog P-otvorenog i Q-otvorenog skupa, pridružuje se $F(U)$, koji nazivamo skupom sečenja F po U.

b) za svaka dva objekta $U,V \in obB\mathcal{O}$, sa $V \subset U$ odredjena je veza $\rho^U_V:F(U) \longrightarrow F(V)$ tako da je:

- za svaki $U \in obB\mathcal{O}$, $\rho^U_U = ind_{F(U)}$,
- ako je $W \subset V \subset U$, za $U,V,W \in obB\mathcal{O}$, tada je

$$\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V.$$

Možemo analogno primerima za predpramenove konstruisati primere za bitopološke predpramenove.

PRIMER 1. Neka je A dati skup. Konstantnim bitopološkim predpramenom, u oznaci A_X, nazovimo bitopološki predpramen koji je dat na sledeći način:

a) Za svaki objekt $U \in ob B\mathcal{O}$, stavimo $A_X(U) = A$.

b) Kad god je $V \subset U$, za objekte $U, V \in ob B\mathcal{O}$, važi $\rho_V^U = ind_A : A_X(U) \longrightarrow A_X(V)$.

PRIMER 2. Označimo sa C^Y bitopološki predpramen zadat na sledeći način:

a) $C^Y(U)$ je skup svih bineprekidnih funkcija objekta U u bitopološki prostor Y.

b) $\rho_V^U : C^Y(U) \longrightarrow C^Y(V)$, definisano je sa $\rho_V^U(f) = f|V$, kad god je $V \subset U$ i $U, V \in ob B\mathcal{O}$.

PRIMER 3. Definišimo bitopološki predpramen P_1 sledećim informacijama:

a) $P_1(X) = Z$, a za $U \in ob B\mathcal{O}$, sa $U \neq X$, $P_1(U) = \{0\}$.

b) svi morfizmi restrikcija su konstantna preslikavanja, osim ρ_X^X.

Možemo definisati i bitopološki predpramen P_2 ako stavimo:

$P_2(U) = Z$, ako za $U \in ob B\mathcal{O}$, $x_o \in U$, gde je x_o istaknuta tačka, a $P_2(U) = \{0\}$, ako $x_o \notin U$.

$\rho_V^U = ind_Z$, ako za $U, V \in ob\, B\mathcal{O}$, važi $x_o \in V \subset U$, a ρ_V^U je trivijalno u ostalim slučajevima.

PRIMER 4. Neka je X bitopološki prostor i $\mathcal{T}$ familija skupova $W = U \cap V$, gde je U, P-otvoren, V, Q-otvoren podskup skupa X. Familija $\mathcal{T}$ je usmeren skup ako za W_1 i W_2 iz $\mathcal{T}$ stavimo:

$$W_1 \leq W_2 \text{ ako i samo ako je } W_1 \supset W_2.$$

Predpostavimo da je F bitopološki predpramen skupova baze X. Stavimo $\rho_V^U = \rho_{UV}$ i dobićemo da je $(F(U), \rho_{UV})_{U \leq V}$, direktan sistem skupova.

Predhodni primer nam pokazuje kako se na prirodan način može govoriti o sloju nad datom tačkom $x \in X$, pa se može iskazati sledeća definicija.

DEFINICIJA 2. Neka je F bitopološki predpramen skupova baze X i $x \in X$. Neka $T(x)$ označava familiju objekata kategorije $B\mathcal{O}$, koji sadrže tačku x. Sloj $F(x)$ bitopološkog predpramena F u tački x je granica $\varinjlim_{U \ni x} F(U)$, direktnog sistema $(F(U), \rho_{UV})_{U \leq V}$.

Neposredno iz definicije 2., možemo zaključiti da svaki element $t \in F(x)$, možemo predstaviti sečenjem s, $s \in F(U)$ gde je $U \in obB\mathcal{O}$ koji sadrži tačku x. Takodje dva elementa s_x i t_x iz sloja $F(x)$, predstavljena sečenjima $s \in F(U)$ i $t \in F(V)$ su jednaka, ako i samo ako postoji $W \in obB\mathcal{O}$, tako da je $W \subset U \cap V$ i važi $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$.

Može se analogno pojmu morfizma predpramenova uvesti pojam morfizma bitopoloških predpramenova. Slično možemo definisati kompoziciju tih morfizama, pojam identičnog morfizma kao i pojam izomorfizma bitopoloških predpramenova.

3. Bitopološki pramenovi skupova.

Neka je X bitopološki prostor i F bitopološki predpramen skupova baze X. F je bitopološki pramen skupova baze X, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

BF1) Neka su $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ i $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ dve familije, redom, P-otvorenih i Q-otvorenih skupova takve da je $\bigcup_i U_i = \bigcup_j V_j = W$.

Stavimo $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ i $L = I \cup J$ i uočimo dva elementa s' i s'' u skupu $F(W)$. Ako za svaki indeks $\lambda \in L$ i skup $W_\lambda \in \mathcal{W}$ važi:

$$\rho^W_{W_\lambda}(s') = \rho^W_{W_\lambda}(s''),$$

onda je $s' = s''$.

BF2) Neka su $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ i $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ dve familije, redom, P-otvorenih i Q-otvorenih skupova takve da je $\bigcup_i U_i = \bigcup_j V_j = W$.

Stavimo $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ i $L = I \cup J$ i za indekse λ i μ u skupu L uočimo elemente $s_\lambda \in F(W_\lambda)$ i $s_\mu \in F(W_\mu)$ gde su $W_\lambda, W_\mu \in \mathcal{W}$. Ako je:

$$\rho^{W_\lambda}_{W_\lambda \cap W_\mu}(s_\lambda) = \rho^{W_\mu}_{W_\lambda \cap W_\mu}(s_\mu),$$

za sve indekse $\lambda, \mu \in L$,

tada postoji element $s \in F(W)$ takav da je $\rho^{W}_{W_\lambda}(s) = s_\lambda$, za svaki indeks $\lambda \in L$.

Element $s \in F(W)$, čiju egzistenciju tvrdi uslov BF2) je jedinstven prema uslovu BF1). Ako je $L = \emptyset$, biće $F(\emptyset)$ jednočlan skup osim u trivijalnom slučaju, da za sve objekte U u kategoriji $B\mathcal{O}$, su skupovi F(U) prazni, što po dogovoru isključujemo. Formulacija uslova BF1) i BF2) za bitopološke pramenove neposredna je posledica uvodjenja pojma bineprekidnih preslikavanja koja se u radu [33] sreću kao P-poluneprekidna odozgo i Q-poluneprekidna odozdo.

DEFINICIJA 1. Neka je X bitopološki prostor. Presečnim prostorom baze X nazivamo svaki par (E,p) gde je $E = (E, P_E, Q_E)$, bitopološki prostor, a p bineprekidno preslikavanje E u X. Uočimo skup $M \subset X$. Sečenjem prostora (E,p) nad M nazivamo svako bineprekidno preslikavanje s, $s: M \longrightarrow E$, tako da je $p(s(x)) = x$, za svaki element $x \in M$.

Neka je $U \in \mathrm{ob}B\mathcal{O}$, i F(U) skup svih sečenja presečnog prostora (E,p) nad U, u definiciji 1., tada je veza $U \longmapsto F(U)$ tipa bitopološkog pramena.

4. Bitopološki pramen prostor.

Neka je (E,p) presečni bitopološki prostor baze X. Nazovimo prostor (E,p) bitopološkim pramen prostorom ako je preslikavanje $p:E \longrightarrow X$ lokalni bihomeomorfizam, t.j., ako postoje za ma koju tačku $u \in E$, P_E-otvorena okolina U i Q_E-okolina V takve da ih preslikavanje p preslikava u okoline $p(U)$ i $p(V)$, redom, P- i Q-otvorene, homeomorfno.

Bitopološki pramen prostori (E,p) i (E',p') su izomorfni, ako postoji bihomeomorfizam $h:E \longrightarrow E'$ i važi $p' h = p$.

Može se dokazati sledeća teorema.

TEOREMA 1. Neka je X bitopološki prostor. Svaki bitopološki pramen F, skupova baze X je podpramen bitopološkog pramena sečenja nekog, nekog bitopološkog pramen prostora baze X, koji je i sam jedinstven do na izomorfizam pramen prostora.

DOKAZ. Neka je $\widetilde{F}(x) = \varinjlim_{U \ni x} F(U)$ sloj nad tačkom $x \in X$., a $\widetilde{F}$ disjunktna unija skupova $\widetilde{F}(x)$ indeksirana skupom X. Preslikavanje $p:\widetilde{F} \longrightarrow X$, definišimo sa $p(F(x)) = x$. Na skupu $\widetilde{F}$ uvedimo bitopološku strukturu tako da ona bude najslabija bitopološka struktura pri kojoj je preslikavanje p bineprekidno, analogno slučaju za pramen prostore. Ako kao i u slučaju pramen prostora uočimo korespodenciju $F(U) \to \widetilde{F}(U)$ definisanu sa $s \longmapsto \tilde{s}$, može se pokazati da je ta korespodencija monomorfizam funktora. Zaista, neka su elementi $s', s'' \in F(U)$, takvi da odredjuju isto sečenje prostora $(\widetilde{F},p)$ nad U. Tada za svaki elemenat $x \in U$ važi $\tilde{s}'(x) = \tilde{s}''(x)$. No, onda postoji objekt koji sadrži tačku x, na kome se sečenja s' i s'' poklapaju, te se U može zapisati kao unija objekata U_i na kojima se sečenja s' i s'' poklapaju. Zato je $s' = s''$ pa je korespodencija $F(U) \longrightarrow \widetilde{F}(U)$ injektivna. Da je bitopološki pramen prostor jedinstven do na izomorfizam pramen prostora vidi se neposredno. Q.E.D.

Iz teoreme 1., može se zaključiti da je bitopološki pramen prostor sa supremumom topologija $P_{\widetilde{F}}$ i $Q_{\widetilde{F}}$ upravo pramen prostor topološke baze X, sa supremumom topologija P i Q.

VI. ZAVRŠNA RAZMATRANJA

1. JEDAN OPŠTI PROBLEM

1. Osnovni pojmovi.

Pojam prostornosti već dugo zauzima jedno od centralnih mesta u matematici, a puni svoj izražaj dobija pojavom topologije. Topološka struktura na datom skupu precizno odredjuje pojam blizine, a dodatnim uslovima i pojam metrike, pa na taj način dobrim delom zahvata sadržaj našeg intuitivnog pojma prostornosti.

No, prostornost nije jedini atribut kategorije materije u realnom svetu; kretanje je drugi važan atribut materijalnih objekata.

Prirodno se postavlja pitanje, šta je do sada učinjeno na matematizovanju drugog važnog atributa materijalnih objekata, pojma kretanja.

Pojam funkcije, slobodno govoreći translacije skupa u skup, kao i pojam funkcionalnih prostora, pojam graničnog procesa, homotopije, svakako su sredstva da se opisuje kretanje ili mogućnost kretanja. Medjutim ovi pojmovi ne zahvataju sadržaj intuitivnog pojma kretanja, ni približno onoliko, koliko topološka struktura zahvata intuitivni sadržaj pojma prostornosti.

Očigledno topološki prostori su nepokretni i kretanje im nije svojstvo.

U narednom odeljku je namera da se uvede pojam kretanja topoloških prostora u sebi i na taj način da prilog matematizovanju pojma kretanja.

2. Kretanje topoloških prostora u sebi.

Ako je X topološki prostor i $\mathcal{F}$ pramen baze X sa vrednostima u datoj kategoriji $\mathcal{K}$, tada je do na i[illegible] odredjen pramen prostor kao što smo videli u odeljku II.2.5. U zavisnosti od izbora kategorije $\mathcal{K}$, mi smo na prirodan način uvodili strukture na sloju $\mathcal{F}(x)$, svake tačke $x \in X$. Tako smo, naprimer u glavi III., uveli na slojevima topološku strukturu i strukturu topološke grupe; u glavi IV., uredjajnu strukturu i strukturu uredjenih topoloških prostora, a u glavi V., bitopološku strukturu.

Sloj $\mathcal{F}(x)$, svake tačke $x \in X$ je diskretan podprostor pramen prostora i u sloju možemo, kako to kaže B. R. Tennison (vid. [55] str.17), izbor tačaka vršiti neprekidno u odnosu na topologiju pramen prostora.

Ako je pramen $\mathcal{F}$ sa vrednostima u nekoj od kategorija uredjenih skupova tada na sloju $\mathcal{F}(x)$ svake tačke x, $x \in X$ imamo i uredjajnu strukturu, koju smo uveli u glavi IV., onda izbor tačaka u sloju, da tako kažemo, možemo vršiti odredjenim redom.

Uredjajna struktura na slojevima u pramen prostoru nije indukovana topološkom strukturom baznog prostora X kao što smo videli u glavi IV., već je definisana zadavanjem uredjenja na skupovima $\mathcal{F}(U)$. To se uostalom može videti i iz sledećeg primera.

PRIMER 1. Neka je X topološki prostor i C^X predpramen svih neprekidnih funkcija sa vrednostima u X. Predpostavimo da je na svakom skupu $C^X(U)$, gde je U otvoren podskup u X, definisano uredjenje tako da su za $V \subset U$, gde je V otvoren podskup u X, morfizmi restrikcija izotona preslikavanja. Pod tim uslovom C^X je pramen uredjenih skupova. Uredjenje na skupovima $C^X(U)$ može se definisati na razne načine i mi navodimo jedan. Predpostavimo da skup X osim topološke ima i uredjajnu strukturu, sa kojom je uredjen topološki prostor. Za elemente $f,g \in C^X(U)$ stavimo $f \leq g$, ako je $f(x) \leq g(x)$ za svaki element $x \in U$. Morfizmi restrikcija ρ_V^U, za otvoren V, $V \subset U$ su izotona preslikavanja pa je C^X pramen uredjenih skupova.

Postavlja se pitanje, da li samo zadavanjem baznog prostora, odnosno njegove topologije, možemo definisati pramen uredjenih skupova. To zaista možemo na sledeći način.

Neka je X topološki prostor i $\mathcal{K}(X)$ funktor na kategoriji otvorenih podskupova u X, sa vrednostima u kategoriji skupova i preslikavanja, definisan sledećim informacijama:

1. $\mathcal{K}(X)(U) = \{f \mid f:U \to X,$ f otvoreno i neprekidno$\}$
2. $\rho_V^U: \mathcal{K}(X)(U) \to \mathcal{K}(X)(V)$, za otvoren $V \subset U$, definisano sa $\rho_V^U(f) = f|V$, za svaki $f \in \mathcal{K}(X)(U)$.

TEOREMA 1. Za dati topološki prostor X, $\mathcal{K}(X)$ je pramen skupova baze X.

DOKAZ. Za svaki element $f \in \mathcal{K}(X)(U)$ je $\rho_V^U(f)$ u skupu $\mathcal{K}(X)(V)$. Zaista, $\rho_V^U(f)$ je neprekidno preslikavanje V u X jer je preslikavanje f neprekidno. Neka je $W \subset V$ otvoren podskup u V. Kako je V otvoren u X, W je otvoren u X, pa je $f(W) = (f|V)(W)$ otvoren u X. Preslikavanje $f|V$ je dakle otvoreno, pa kako je i neprekidno biće $f|V \in \mathcal{K}(X)(V)$. $\mathcal{K}(X)$ je prema tome predpramen skupova baze X.

Neka je $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ sa $s_i \in \mathcal{K}(X)(U_i)$ pri čemu važi $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$. Postoji $s \in \mathcal{K}(X)(U)$ sa $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$, za svaki indeks $i \in I$. Treba pokazati da je $s \in \mathcal{K}(X)(U)$. Kako preslikavanje s postoji i ono je neprekidno, dovoljno je da pokažemo da je ono otvoreno preslikavanje skupa U u skup X.

Neka je zato, $W \subset U = \bigcup_{i \in I} U_i$ otvoren podskup skupa U.

$W = U \cap W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap W = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap W)$.

$s(W) = s(\bigcup_{i \in I}(U_i \cap W)) = \bigcup_{i \in I} s(U_i \cap W)$, a ovaj je otvoren u X, jer je $s(U_i \cap W) = s_i(U_i \cap W)$ sa $s_i \in \mathcal{K}(X)(U_i)$.

$\mathcal{K}(X)$ je dakle pramen skupova baze X. Q.E.D.

TEOREMA 2. Neka je X topološki prostor. $\mathcal{K}(X)$ je pramen skupova baze X, sa vrednostima u kategoriji uredjenih skupova, ako uredjenje na skupovima $\mathcal{K}(X)(U)$ definišemo na sledeći način:

- za elemente $s, t \in \mathcal{K}(X)(U)$ stavimo $s \leq t$, ako za sečenja $s: U \to X$ i $t: U \to X$ postoji sečenje p, $p \in \mathcal{K}(X)(s(U))$ tako da je $\bar{t} = p \circ \bar{s}$, odnosno da je komutativan sledeći dijagram:

$$\begin{array}{ccl} U & \xrightarrow{\bar{s}} & s(U) \subset X \\ & \searrow^{\bar{t}} & t(U) \subset X, \end{array}$$

  gde su $\bar{s}$, odnosno $\bar{t}$ preslikavanja koja imaju isti grafik kao i preslikavanja s i t.

DOKAZ. Za svaki otvoren podskup $U \subset X$, skup sečenja $\mathcal{K}(X)(U)$ je uredjen skup, što se neposredno proverava. Relacija $\leq$ na tom skupu je u opštem slučaju kvazi-uredjenje.

Svaki morfizam restrikcije ρ^U_V, za otvoren skup V, $V \subset U$, je izotono preslikavanje.

Zaista, neka su elementi $s, t \in \mathcal{K}(X)(U)$ tako da je $s \leq t$. Važi $\rho^U_V(s) = s|V$, $\rho^U_V(t) = t|V$, pri čemu $s|V: V \to X$, $t|V: V \to X$. Dokažimo da je $\rho^U_V(s) \leq \rho^U_V(t)$.

Uočimo preslikavanje $p|(s|V)(V): (s|V)(V) \to t(V)$, za koje je $p|(s|V)(V)(x) = p(x)$, za svaki element x, $x \in V$.

Preslikavanje $p|s(V)$ je otvoreno, neprekidno preslikavanje na skup $t(V)$, dakle indentifikacija i ono u kompoziciji sa preslikavanjem $\bar{\rho}^U_V(s)$ daje preslikavanje $\bar{\rho}^U_V(t)$, pri čemu su preslikavanja $\bar{\rho}_V^U(s)$ i $\bar{\rho}_V^U(t)$, preslikavanja koja imaju isti grafik kao preslikavanja $\rho_V^U(s)$ i $\rho_V^U(t)$. Q.E.D.

Kao u glavi IV., možemo za pramen $\mathcal{K}(X)$ konstruisati odgovarajući pramen prostor, u oznaci K(X) i zaključiti da je sloj nad svakom tačkom uredjen skup. Uredjajna struktura na slojevima u pramen prostoru K(X) zavisi kao što se vidi iz teoreme 2., samo od topološke strukture baznog prostora X.

Osim uredjajne strukture na slojevima u pramen prostoru K(X), možemo, zadavanjem baznog prostora X definisati u opštem slučaju nediskretnu topološku strukturu na slojevima. U tom cilju izkažimo i dokažimo sledeću teoremu.

TEOREMA 3. Neka je X topološki prostor. $\mathcal{K}(X)$ je pramen baze X sa vrednostima u kategoriji topoloških prostora i otvorenih preslikavanja, ako topološku strukturu na skupovima $\mathcal{K}(X)(U)$ definišemo na sledeći način:

- Podskup $O \subset \mathcal{K}(X)(U)$ je otvoren, ako je za svaki element $x \in U$ skup $\{x_f\}_{f \in O}$ otvoren u X, pri čemu je x_f oznaka za $f(x)$.

DOKAZ. Dokažimo najpre da je izabrana kolekcija podskupova skupa $\mathcal{K}(X)(U)$, kolekcija otvorenih podskupova.

Neka su O_1 i O_2 otvoreni podskupovi skupa $\mathcal{K}(X)(U)$ tada je $O_1 \cap O_2$ otvoren podskup. Zaista, za svaki element x, $x \in U$ važi:

$$\{x_f\}_{f \in O_1} \cap \{x_f\}_{f \in O_2} = \{x_f\}_{f \in O_1 \cap O_2}.$$

Neka je $x_\nu \in \{x_f\}_{f \in O_1} \cap \{x_f\}_{f \in O_2}$, a to znači da je $x_\nu \in \{x_f\}_{f \in O_1}$ i $x_\nu \in \{x_f\}_{f \in O_2}$, $\nu \in O_1$ i $\nu \in O_2$, pa dakle i $x_\nu \in \{x_f\}_{f \in O_1 \cap O_2}$

Skupovi na levoj strani gornje jednakosti su otvoreni podskupovi skupa X, pa je takav i njihov presek dakle skup $\{x_f\}_{f \in O_1 \cap O_2}$ je otvoren u X, za svaki element $x \in X$, a to znači da je $O_1 \cap O_2$ otvoren skup u $\mathcal{K}(X)(U)$.

Neka je sada $\{O_i\}_{i\in I}$ kolekcija otvorenih skupova u $\mathcal{K}(X)(U)$ i $O = \bigcup_{i\in I} O_i$. Za svaki element $x\in U$ važi:

$$\bigcup_{i\in I}\{x_f\}_{f\in O_i} = \{x_f\}_{f\in \bigcup_i O_i}.$$

Zaista, neki element $y\in \bigcup_{i\in I}\{x_f\}_{f\in O_i}$ ako i samo ako postoji indeks $i\in I$ i element $f\in O_i$ tako da je $y = x_f$, dakle, $y = x_f\in \{x_f\}_{f\in \bigcup_i O_i}$. Kako je skup na levoj strani gornje jednakosti otvoren, takav je i skup na desnoj strani te jednakosti. Skup $O = \bigcup_{i\in I} O_i$ je prema tome otvoren.

Dokažimo na kraju da su morfizmi restrikcija otvorena preslikavanja topoloških prostora. Neka je zato skup $O\subset\mathcal{K}(X)(U)$ otvoren. $\rho_V^U(O) = \{t \mid t = f|V,\ f\in O\}$ i to je otvoren skup jer je za svaki element $x\in V$, $t(x) = f(x)$, odnosno, $x_f = x_t$, odnosno $\{x_f\}_{f\in O} = \{x_t\}_{t\in\rho_V^U(O)}$. Q.E.D.

Neposredno iz predhodne teoreme možemo formulisati sledeću posledicu.

POSLEDICA 1. Ako su na skupovima $\mathcal{K}(X)(U)$ topološka i uredjajna struktura A-saglasne, tada su topološka i uredjajna struktura A-saglasne na sloju svake tačke u pramen prostoru $K(X)$.

DOKAZ. Na osnovu teoreme IV.3.1., na skupovima $\mathcal{K}(X)(x) = \varinjlim_{U\ni x}\mathcal{K}(X)(U)$ imamo uredjajnu strukturu, za svaki element $x\in X$. Na tim skupovima imamo i topološku strukturu po teoremi III.2.2.1., a prema uslovima našeg tvrdjenja i teoremi IV.2.1.1., na skupu $\mathcal{K}(X)(x)$ imamo A-saglasne strukture.

Kako je svaki pramen do na izomorfizam jednak pramenu sečenja nadkrivajućeg prostora prema II.2.5.1. teoremi, pa dakle na sloju svake tačke u pramen prostoru $K(X)$ imamo saglasnu i to A-saglasnu strukturu uredjenog topološkog prostora. Q.E.D.

Predhodna razmatranja omogućuju nam da uvedemo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 1. Neka je X topološki prostor. Pramen $\mathcal{K}(X)$ baze X, sa vrednostima u kategoriji uredjenih skupova (kao u teoremi 2., ovog odeljka) nazovimo kretanjem prostora X u sebi, sloj nad svakom tačkom $x \in X$, u pramen prostoru K(X) nazovimo putanjom tačke x, elemente svakog sloja nazovimo položajima, a uredjenje na sloju neke tačke $x \in X$, nazovimo lokalnim vremenom u tački $x \in X$.

Neposredno iz predhodne definicije i teoreme 2.5.1, u poglavlju II., može se formulisati sledeća teorema.

TEOREMA 4. Za svaki topološki prostor X je kretanje tog prostora u sebi jedinstveno do na izomorfizam.

DOKAZ. Na osnovu teoreme II.2.5.1., svaki pramen baze X izomorfan je pramenu sečenja, pramen prostora, koji je i sam jedinstven do na izomorfizam pramen prostora. Pri tome pramen prostori date baze X su izomorfni, ako postoji homeomorfizam izmedju njih, saglasan sa projekcijama. Q.E.D.

TEOREMA 5. Kretanje topoloških prostora u sebi je topološka invarijanta.

DOKAZ. Neka su X i Y topološki prostori i h homeomorfizam X na Y. Za otvoren podskup $U \subset X$ i sečenje s u skupu $\mathcal{K}(X)(U)$ uočimo element $h_U(s) \in \mathcal{K}(Y)(h(U))$ definisan na sledeći način. $h_U(s): h(U) \longrightarrow Y$ sa $h_U(s)(y) = h(s(h^{-1}(y)))$, za svaki element $y \in h(U)$.

Očigledno, $h_U: \mathcal{K}(X)(U) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)(h(U))$.

Neka je $x \in X$. Kako je $\mathcal{K}(X)(x) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{K}(X)(U)$, a $\mathcal{K}(Y)(h(x)) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{K}(X)(h(U))$, imamo preslikavanje $\varinjlim_{U \ni x} h_U$ sa $\varinjlim_{U \ni x} h_U: \mathcal{K}(X)(x) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)(h(x))$, a ono je bijekcija, šta više i uredjajni izomorfizam. Dakle izomrfni su odgovarajući pramen prostori a samim tim i prameni sečenja tih prostora, koji su kretanja u sebi prostora X i Y. Q.E.D.

Nadkrivajuće preslikavanje $p:K(X) \to X$ je lokalni homeomorfizam, pa neposredno iz definicije 1., možemo zaključiti, da svaka dva položaja na putanji neke tačke imaju homeomorfne okoline, a takodje to svojstvo ima tačka i svaki njen položaj. Možemo zaključiti da se svaka tačka baznog prostora kreće, da tako kažemo, po svojoj putanji zajedno sa dovoljno malom svojom okolinom. Ako je $x \in X$, a $p^{-1}(x) \subset K(X)$, putanja tačke x, tada svaka tačka $z \in p^{-1}(x)$ definiše otvoren skup $U_z \ni x$, sa $U_z = p(V_z)$, gde je $V_z \subset K(X)$, otvoren koji sadrži tačku $z \in K(X)$, takav da je $p|V_z$ homeomorfizam. Skup $\bigcap_z U_z$ je neprazan, jer sadrži tačku $x \in X$ i taj skup je, da tako kažemo elementarni deo prostora X, koji se kreće zajedno sa tačkom x.

Lokalno vreme u svakoj tački $x \in X$ je kvazi-uredjenje u opštem slučaju, što se neposredno vidi iz definicije.

Svojstva kretanja topološkog prostora X u sebi u potpunosti zavise od prirode baznog prostora X. Može se naprimer dokazati sledeća teorema.

TEOREMA 6. Ako topološki prostor X ima bar jednu izolovanu tačku, tada za svaki element $x \in X$ putanja $p^{-1}(x) \subset K(X)$ ima maksimalni element.

DOKAZ. Neka je $y \in X$, izolovana tačka u prostoru X i neka je $x \in X$. Uočimo otvoren skup U, tako da $x \in U$. U skupu $\mathcal{K}(X)(U)$ izaberimo proizvoljno sečenje s, gde $s: U \to X$, i definišimo preslikavanje $m: U \to X$, sa $m(z) = y$, za svaki element $z \in U$. Preslikavanje m je neprekidno i otvoreno, pa dakle $m \in \mathcal{K}(X)(U)$. Dokažimo da je $s \leq m$. Zaista, uočimo preslikavanje $m': s(U) \to \{y\}$. Preslikavanje m' je neprekidno i otvoreno, pa $m' \in \mathcal{K}(X)(s(U))$ i važi $m' \circ \bar{s} = m$, pri čemu je $\bar{s}$ preslikavanje na $s(U)$, koje ima isti grafik kao i s. Prema tome je $s \leq m$. Sečenje m je maksimalni element u skupu $\mathcal{K}(X)(U)$

Neka je otvoren skup $V \subset U$, i ρ_V^U odgovarajući morfizam restrikcije. Ako je $m \in \mathcal{K}(X)(U)$ maksimalni element u skupu $\mathcal{K}(X)(U)$, tada je $\rho_V^U(m) \in \mathcal{K}(X)(V)$, maksimalni element u skupu $\mathcal{K}(X)(V)$, što se vidi neposredno. Prelaskom na granicu $\mathcal{K}(X)(x) = \lim_{U \ni x} \mathcal{K}(X)(U)$ zaključujemo da i granica ima maksimalni element. Q.E.D.

Neposredno iz ove teoreme možemo zaključiti da skup izolovanih tačaka u prostoru X predstavlja, da tako kažemo nepokretni deo prostora X prema kome se svaka tačka kreće. Interesantno je primetiti da ako za datu tačku $x \in X$ uočimo položaje na njenoj putanji, definisane klasama identifikacija u izolovanu tačku, videćemo da su takvi položaji obostrano uporedivi, te da lokalno vreme u tački $x \in X$ ne uredjuje takve položaje u tom smislu što, da tako kažemo, obostrano teče.

Možemo primetiti, takodje, da u svim skupovima sečenja $\mathcal{K}(X)(U)$ postoje minimalni elementi.

Zaista, ako za dati otvoren podskup $U \subset X$, uočimo skup svih homeomorfizama skupa U u samog sebe, tada je svaki takav homeomorfizam shvaćen kao otvoreno i neprekidno preslikavanje skupa U u skup X, minimalni element u skupu $\mathcal{K}(X)(U)$. Zaista, ako je $s \in \mathcal{K}(X)(U)$ i t homeomorfizam skupa U u skup U biće $t \leq s$, jer postoji identifikacija skupa U na skup $s(U)$, da je označimo sa r, gde je $r(y) = s(t^{-1}(y))$, za svaki element $y \in U$. Kako u opštem slučaju morfizmi restrikcija ne prenose minimalne elemente u minimalne to bez dodatnih uslova ne možemo definisati minimalne elemente na putanji svake tačke.

Kretanje topološkog prostora u sebi je, možemo reći mera za homogenost topološkog prostora. Važi zapravo sledeća teorema.

TEOREMA 7. Ako je bazni prostor X topološka grupa, kretanje prostora X u sebi, do na izomorfizam pramenova je konstantni pramen baze X.

DOKAZ. Translacijom sistema okolina neutralnog elementa dobijamo sistem okolina svakog elementa u topološkoj grupi X. Postoji zato izomorfizam skupova sečenja, jer za svako sečenje $s \in \mathcal{K}(X)(U)$, gde je U otvoren skup koji sadrži neutral $e \in X$, postoji otvoren skup aU, koji sadrži element a, i sečenje $t \in \mathcal{K}(X)(aU)$ definisano sečenjem s, na sledeći način; za svaki element $y = au \in aU$, $t(y) = s(a^{-1}y)$, gde je u, $u \in U$. Neposredno se proverava da je $t \in \mathcal{K}(X)(aU)$. Pridruživanje $s \longmapsto t$, napred definisano je zapravo uredjajni izomorfizam skupa $\mathcal{K}(X)(U)$ u skup $\mathcal{K}(X)(aU)$. Prelaskom na granicu, granicu tog sistema preslikavanja, gde je taj direktni sistem indeksiran svim otvorenim skupovima U koji sadrže neutral $e \in X$, zaključujemo da postoji uredjajni izomorfizam skupova $\mathcal{K}(X)(e)$ u skup $\mathcal{K}(X)(a)$. To pak znači da su putanje tačaka $e \in X$ i $a \in X$ uredjajno izomorfne u pramen prostoru $K(X)$. Kako je a proizvoljna tačka u topološkoj grupi X, zaključujemo da su putanje svih tačaka uredjajno izomorfne. Uočimo sada konstantni pramen baze X, A_X, definisan u primeru II.2.2.1. Ako stavimo da je u tom primeru $A = p^{-1}(e)$, zaključujemo da je kretanje topološke grupe u sebi, do na izomorfizam pramena, upravo pramen A_X. Q.E.D.

Teorema 7., može se uopštiti na bilo koj homogen topološki prostor X, gde homogenim nazivamo onaj topološki prostor u kome za svake dve razne tačke x i y, postoje otvoreni skupovi $U_x \ni x$, $V_y \ni y$ i homeomorfizam $h_{xy}: U_x \longrightarrow V_y$, tako da je $h_{xy}(x) = y$.

Može se dokazati sledeća teorema.

TEOREMA 8. Ako je topološki prostor homogen, kretanje topološkog prostora X u sebi, do na izomorfizam pramenova je konstantni pramen baze X.

DOKAZ. Neka su $x, y \in X$, dve razne tačke u prostoru X i $s_U \in \mathcal{K}(X)(U)$, predstavnik klase $[s_U] \in \mathcal{K}(X)(x)$. Kako je topološki prostor X homogen postoje otvoreni skupovi $U_x \ni x$ i V_y, $V_y \ni y$, kao i preslikavanje $h_{xy}: U_x \longrightarrow V_y$ koje je homeomorfizam sa $h_{xy}(x) = y$. Sečenje $s_{U \cap U_x} = s_U | U \cap U_x = \rho^U_{U \cap U_x}(s_U)$ definiše isti element $[s_{U\cap U_x}] = [s_U] \in \mathcal{K}(X)(x)$.

Skup $h_{xy}(U\cap U_x)$ je podskup skupa V_y i $h_{xy}|U\cap U_x$ je homeomorfizam skupa $U\cap U_x$ na skup $h_{xy}(U\cap U_x)$.

Za svaki element $z\in h_{xy}(U\cap U_x)$ uočimo sledeći element; $s_U(h_{xy}^{-1}(z))$. Preslikavanje $t_{h_{xy}(U\cap U_x)}: h_{xy}(U\cap U_x) \to X$, tako definisano je očigledno neprekidno i otvoreno, pa dakle važi $t_{h_{xy}(U\cap U_x)} \in \mathcal{K}(X)(h_{xy}(U\cap U_x))$. Element $t_{h_{xy}(U\cap U_x)}$ jednoznačno definiše klasu $[t_{h_{xy}(U\cap U_x)}] \in \mathcal{K}(X)(y)$.

Ako je $s_{U'} \in \mathcal{K}(X)(U')$ tako da je $[s_{U'}] = [s_U]$,primetimo da postoji skup $U''\ni x$, tako da je $s_{U'}|U'' = s_U|U''$ gde je $U''\subset U\cap U'$. Skup $h_{xy}(U''\cap U_x)$ je otvoren i sadrži tačku $y\in X$. Preslikavanje $h_{xy}|U''\cap U_x$ je homeomorfizam skupa $U''\cap U_x$ na otvoren skup $h_{xy}(U''\cap U_x)$. Uočimo sečenje $t_{h_{xy}(U''\cap U_x)} \in \mathcal{K}(X)(h_{xy}(U''\cap U_x))$ definisano sa $z \longrightarrow s_U(h_{xy}^{-1}(z))$, za svaki element $z\in h_{xy}(U''\cap U_x)$

Kako je $t_{h_{xy}(U''\cap U_x)} = t_{h_{xy}(U\cap U_x)}|h_{xy}(U''\cap U_x)$, biće $[t_{h_{xy}(U''\cap U_x)}] = [t_{h_{xy}(U\cap U_x)}]$.

Može se dakle dobro definisati preslikavanje skupa $\mathcal{K}(X)(x)$ u skup $\mathcal{K}(X)(y)$ sa $[s_U] \longrightarrow [t_{h_{xy}(U\cap U_x)}]$, za svaki element $[s_U]\in \mathcal{K}(X)(x)$. To preslikavanje označimo sa ϕ_x. Preslikavanje ϕ_x je preslikavanje "na".

Zaista, neka je $[t_V]\in\mathcal{K}(X)(y)$, proizvoljni element u skupu $\mathcal{K}(X)(y)$. Primetimo da je $t_V|V\cap V_y = \rho^V_{V\cap V_y}(t_V)$,element koji u istoj klasi kao i t_V.

Uočimo sečenje $s: h_{xy}^{-1}(V\cap V_y) \longrightarrow X$ definisano sa $s(z) = t_V\circ h_{xy}(z)$ za svaki element z iz skupa $h_{xy}^{-1}(V\cap V_y)$.Očigledno je tada $\phi_x([s]) = [t_V]$.

Preslikavanje ϕ_x je injektivno, što se neposredno vidi iz konstrukcije tog preslikavanja.

Na kraju preslikavanje ϕ_x je uredjajni izomorfizam jer ako je $[s_U] \preceq [s_{U'}]$ postoji skup $U''\subset U\cap U'$, tako da je $s_U|U'' = \rho^U_{U''}(s_U) \preceq s_{U'}|U'' = \rho^{U'}_{U''}(s_{U'})$, pa postoji identifikacija skupa $\rho^{U}_{U''}(s_U)(U'')$ na skup $\rho^{U'}_{U''}(s_{U'})(U'')$ koju možemo označiti sa t''. Iz konstrukcije preslikavanja ϕ_x zaključujemo da identifikacija t'' vezuje sečenja $\phi_x([s_U])$ i $\phi_x([s_{U'}])$ pa je $\phi_x([s_U]) \leq \phi_x([s_{U'}])$, a važi i obrat.

Na taj način dobili smo da su slojevi uredjajno izomorfni, a analogno teoremi 7., da je kretanje do na izomorfizam jednako konstantnom pramenu A_X, gde je $A = p^{-1}(x)$, za bilo koji element $x \in X$. Q.E.D.

Predhodna teorema inicira sledeća razmatranja.

Neka je X topološki prostor. Uvedimo relaciju Γ na sledeći način:

- za elemente $x,y \in X$, stavimo $x \Gamma y$, ako postoji okolina $U_x \ni x$ i okolina $V_y \ni y$ i indentifikacija $h_{xy}: U_x \to V_y$, sa $h_{xy}(x) = y$.

Neposredno proveravamo da je relacija Γ kvaziuredjenje na skupu X. Relaciju Γ nazovimo gustinom, a ako je $x \Gamma y$, recimo da prostor X ima veću gustinu u tački y, nego u tački $x \in X$.

Ako topološki prostor X ima izolovanih tačaka onda su te tačke maksimalni elementi u prostoru X u odnosu na uredjenje Γ. Dakle, ako topološki prostor ima izolovanih tačaka, onda on u njima ima najveću gustinu. Homogeni prostor ima u svim tačkama ekvivalentnu gustinu jer u njemu relacija Γ postaje trivijalna relacija ekvivalencije.

Postavlja se na kraju pitanje kakav je odnos kretanja u sebi, datih topoloških prostora X i Y, ako su oni u nekoj vezi. Navedimo jednu teoremu koja razmatra takvo pitanje.

TEOREMA 9. Neka su X i Y dati topološki prostori i $h: X \to Y$, lokalni homeomorfizam. Postoji monomorfizam $\phi: \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ kretanja u sebi.

DOKAZ. Neka su U_x i $V_{h(x)}$ okoline redom tačaka x i h(x), takve da je $h|U_x$, homeomorfizam skupova U_x i $V_{h(x)}$.

Za element $s_U \in \mathcal{K}(X)(U)$ uočimo element $s_U|U \cap U_x = \rho^U_{U\cap U_x}(s_U) = s_{U\cap U_x}$. Očigledno je $[s_U] = [s_{U\cap U_x}]$.

Na skupu $h(U\cap U_x) \cap V_{h(x)}$ možemo jednoznačno odrediti sečenje $t \in \mathcal{K}(Y)(h(U\cap U_x))$ na sledeći način:

$t(z) = h(s_{U\cap U_x}(h^{-1}(z)))$ za svaki element $z \in h(U\cap U_x)$

Pridruživanje $[s_U] \longrightarrow [t]$ definiše preslikavanje skupova $\mathcal{K}(X)(x) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)(h(x))$. Označimo ga sa ϕ_x.

Kao u dokazu predhodne teoreme može se pokazati da je za svaki element $x \in X$, preslikavanje ϕ_x uredjajni monomorfizam, a takodje i da je ukupnost preslikavanja ϕ_x, u oznaci ϕ, monomorfizam kretanja u sebi $\mathcal{K}(X)$ i $\mathcal{K}(Y)$. Q.E.D.

I N D E X

L i t e r a t u r a

|1| Adnadjević D., Saglasnost topologije i uredjenja, Mat. Vesn.7(22)1970,109-112.

|2| Adnadjević D., Saglasnost topologije i uredjenja II., Mat.Vesn. 8(23)1971,83-88.

|3| Адnаджевич Д., Топология и порядок, Д.А.Н. СССР, 1972, Т.206. №6, 1273-1276

|4| Адnаджевич Д., Некторые вопросы взаимоотношения топологий и квазипорядка, Top. and Appl 1973 Београд

|5| Adnadjević D., Oredered spaces and bitopology,Glasnik Mat.10.(30)1975,337-340.

|6| Arens R.,Dugundji J., Topologies for function spaces, Pac.J.Math.1(1951),5-31.

|7| Букур И. Делягну А., Введение в теорию категорий и функторов, „Мир" Москва 1972

|8| Bourbaki N., Theorie des ensambles, Hermann, Paris, 1970.

|9 | Bourbaki N., Topologie generale,ch.1-4,Hermann, Paris 1971.

|10| Bourbaki N., Algebra, ch.1-3., Hermann, Paris 1970.

|11| Cartan H., Chevalley C., Geometrie Algebrique., Seminaire E.N.S., 1955-1956.

|12| Clifford A.H., Preston G.B., The algebraic Theory of semigroups, vol.1.,Am.Math.Soc.1964.

|13| Ćirić D., Aksiome separacije u bitopološkim prostorima, Mat.Vesn.11(26)1974,10-21.

|14| Ćirić D., Dimension of bitopological spaces, Math.Balcanica 4.18(1974)99-105.

|15| Ćirić D.,Dimitrijević R., Normalno i savršeno normalno kvazi-uredjeni bitopološki prostori,Zbornik radova Fil.fak.Niš, knj.II,1974.175-185.

|16| Ćirić D. Bitopološki prostori, mag.rad, P.M.F.Beograd, 1973.

|17| Ćirić D. O jednoj klasi abelovih grupa, u pripremi.

|18| Ćirić D. O direktnim sistemima topoloških grupa, u pripremi.

|19| Dimitrijević R., Topološke i uredjajne strukture, dok. rad, PMF Beograd 1978.

|20| Dimitrijević R., Normalno i savršeno normalno kvazi-uredjeni topološki prostori, Mat.Vesn.11(26)1. 1974,31-37.

|21| Fuch L., Note on ordered groups and rings, Fund.Math.46. (1958)167-174.

|22| Gittings R., Open maping theory,Set-theoretic topology, Acad.Press.I.N.C.1977,141-191.

|23| Godement R., Topologie algebrique et theorie des Faisceaux, Publ.de l'inst.Math.de l'univer. de Strasbourg. XIII, Hermann Paris 1958.

|24| Green J.A., Rees D., On semigroups in wich $x^r=x$, Proc. Cambridge Phil.Soc.48,35-40.(1952)

|25| Jакубик J., Прямые разложения частично упорядоченных групп I., Чехословацкий мат. ж.Т.10 (85) 1960. 231-513

|26| Jакубик J., Прямые разложения частично упорядоченных групп II., Чехословацкий мат. ж.Т. 11(86) 1961. 490-513

|27| Kelly J.C., Bitopological spaces,Proc.London Math. Soc. (3)1963.71-89.

|28| Kim Y.W., Pairwise compactness, Publ.Math.Debricin,XV (1968)87-90.

|29| Kimura N., Maximal subgroups of a semigroup , Kodai Math. Sem.Rep.1954.85-88.

|30| Коцорин А.И. Копытов В.М., Линейно упорядочное группы, „Наука" Москва 1972

|31| Kurepa G.,Ensambles ordonnes et ramifies, Publ.Math.Th. IV.1935,1-136.Beograd.

|32| Курош К., Теорий групп, „Мир" Москва 1967

|33| Lane E.P., Bitopological spaces and kuazi-uniform spaces, Proc.London Math.Soc.(3)17(1967)241-256.

|34| Mc Cartan S.D., Separation axioms for topological ordered spaces, Proc.Phil.Soc.64(1968)965-973.

|35| Mardešić S., On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Ill.J.Math.4 N.2(1960)278--291

|36| Mijajlović Ž., Prilog teoriji modela i bulovih algebri, Doktorski rad,PMF Beograd 1977.

|37| Nachbin L., Topology and order, Van Nostr.Princeton,New Jersey 1965.

|38| Patty C.W., Bitopological spases, Duke Math.J.Vol.34(1967) 387-392.

|39| Pervin W.J., Connectedness in bitopological spaces, Duke Math. J. 35(1969)124-138.

|40| Понтрягин Л.С., Непрерывные групы, „Наука" Москва 1973

|41| Puzio E., Limit mapings and projection of invers systems, Fund.Math.LXXX(1973)

|42| Reilly I., Zero dimensional bitopological spaces, to apear.

|43| Ribeiro H.,Sur les espaces metrique faible,Portugaliae Math.4(1943)21-40 et 65-68.

|44| Rosicky J., A note on topology compatible with ordering, Arch.Math.(Brno)5(1969)19-24.

|45| Sekanina A and M.,Topologies compatible with ordering, Arch.Math.(Brno) 2(1966)113-126.

|46| Скорняков Л.А., Елементы теорий структур, „Наука" Москва 1970

|47| Smirnov Yu., On metrization of topological spaces, An. Math.Soc.Trans.91(1953)

|48| Spanier E., Quazi-topologies, Duke Math.J.30(1963)1-14.

|49| Steenrod N., The topology of fibre bundles,14.Princeton Math.Ser.1974.

|50| Шварц Ш., Максималшеидеалце в теорий полугрупп I., Чехссловацкий Мат. Ж. Т.3 (78) 1953. 139-153

|51| Шварц Ш., Максимальные идеалы в теорий полугрупп II., Чехословацкий Мат. Ж. Т. 3 (78) 1953. 365-381

|52| Шварц Ш., К теорий периодических полугрупий, Чехословацкий Мат. Ж. Т.3.(78) 1953. 7-21

|53| Tamura T.,Kimura N.,On decomposition of comutative semigroups, Kodai Math.Sem.Rep.1954.109-112.

|54| Tamura T.,Kimura N., Existence of gritest dekomposition of a semigroup, Kodai Math.Sem.Rep.7.83-84.

|55| Tenisson B.R., Sheaf theory,London Math.Soc.Lec.Note Ser.

20,Cambridge Univ.Press 1975.

|56| Tully E.J., The existence of total order on a group, Proc.Amer.Math.Soc,13(1962)217-219.

|57| Wilson W.A., On quasi-metric spaces, Am.J.Math.53(1931) 675-684.

|58| Wolk E.S., Order-compatible topologies on partially ordered set,Proc.Am.Math.Soc.9(1958)524-529.

|59| Wolk E.S., The topology of a partially ordered set,Fund. Math.LXV(1968)255-264.

|60| Wyler O., Top categories and cathegorical topology, Gen. Top.and Appl.1(1971)17-28.Nord.Holl.Publ.Co.