UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

Aleksandar Ivić

O NEKIM KLASAMA ARITMETIČKIH FUNKCIJA KOJE SU VEZANE ZA RASPODELU PROSTIH BROJEVA

Doktorska disertacija

Beograd, 1975.

U V O D N I   D E O

I.1 UVOD

Teorija aritmetičkih funkcija je jedna od najvažnijih oblasti teorije brojeva i obuhvata mnoge probleme te teorije, kao što je naprimer, teorija raspodela prostih brojeva i prostih brojeva u aritmetičkim progresijama. Cela teorija je dobila poseban zamah elementarnim dokazom teoreme o prostim brojevima, koga je 1949. dao A. Selberg uz saradnju P. Erdösa i J. van der Corputa,kao i opštim napretkom pojedinih oblasti Analize, kao što su recimo teorija Dirichletovih redova, i teorija teorema Tauberovog tipa. Neke od oblasti teorije aritmetičkih funkcija, kao što su npr. multiplikativne ili aditivne funkcije, predstavljaju danas već samostalne grane teorije brojeva (videti Postnikov,(18)).

Cilj ovoga rada je izučavanje odredjenih klasa aritmetičkih funkcija koje su vezane za raspodelu prostih brojeva i koje predstavljaju prirodnu generalizaciju funkcije $\Lambda(n)$ von Mangoldta koja igra veliku ulogu u teoriji prostih brojeva. Posle Uvodnog dela dolazi originalni deo rada koji je podeljen na tri dela: u prvom se izučavaju funkcije $\Lambda_k(n)$, u drugom se pomoću metode integralnih jednačina dobijaju asimptotske formule za funkcije $a_k(n)$ i $b_k(n)$ koje su generisane funkcijama $\zeta^{-k}(s)$ i $\zeta^k(s)\zeta^{-k}(2s)$, dok se u trećem delu vrši detaljno ispitivanje funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ koje generališu i funkcije $\Lambda_k(n)$ i funkcije $\Lambda_f(n)$ koje koriste Levin i Feinleib u svom metodu odredjivanja asimptotskih formula pomoću integralnih jednačina.

Definišući $\Lambda_k(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\log^k \frac{n}{d}$ za sve prirodne brojeve n i k (za k = 1 dobija se funkcija $\Lambda(n)$ von Mangoldta izvodi se sledeća rekurentna relacija koja važi za $m<k$:

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-m}\left(\frac{n}{d}\right)\log^{m-i}\frac{n}{d}$$

koji je u specijalnom slučaju m=1 dobio I. Kasara, (14). Sem izučavanja čisto aritmetičkih osobina, jedan od glavnih ciljeva izučavanja aritmetičkih funkcija je i dobijanje asimptotskih formula, koje je je u radu detaljno sprovedeno za funkcije $\Lambda_k(n)$. Asimptotsku formulu

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_k(n) = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \tag{1}$$

dobio je i N. P. Romanov, (22), ali drugim putem, primenjujući izvesne linearne operatore na prsten aritmetičkih funkcija. U radu su dobivene i druge, složenije formule, za čiji se dokaz često koristi (1), kao na primer

$$\sum_{mn\leq x}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{r!s!}{(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x) \tag{2}$$ i

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x). \tag{3}$$

Produbljivanje takvih rezultata dobija se odredjivanjem odgovarajućih asimptotskih formula za $\Lambda_k(n)$ u aritmetičkim progresijama, naime za $(l,i)=1$, formule (1),(2) i (3) daju respektivno

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_k(n) = \frac{k}{\phi(i)}x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x), \tag{4}$$

$$\sum_{\substack{mn\leq x\\ mn\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{r!s!}{\phi(i)(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x), \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = \frac{x\log^k x}{\phi(i)} + O(x\log^{k-1}x). \tag{6}$$

Na kraju dela o funkcijama $\Lambda_k(n)$ data je i jedna opšta teorema pomoću koje se na osnovu ponašanja $g(n)$ nalazi asimptotska formula za $f(n)$ gde su $f(n)$ i $g(n)$ aritmetičke funkcije vezane relacijom

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\Lambda_k\left(\frac{n}{d}\right).$$

U delu posvećenom odredjivanju asimptotskih formula za funkcije $a_k(n)$ i $b_k(n)$ odredjuju se i aritmetičke osobine tih funkcija, nalaze se funkcije $\Lambda_{a_k}(n)$ i $\Lambda_{b_k}(n)$ i izlaže se metod Levina i Feinleiba, (16), pomoću koga se dobijaju asimptotske formule tipa

$$(7) \qquad \sum_{n\leq x} b_k(n) = kB_k x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \qquad \text{i}$$

$$(8) \qquad \sum_{n\leq x} a_k(n) = O(x\log^{k-2}x).$$

Konstanta B_k se odredjuje primenom Tauberove teoreme H. Onishija,(8), i iznosi $\frac{1}{k!}(\frac{6}{\pi^2})^k$.

Poslednji deo je posvećen funkcijama $\Lambda_{f,k}(n)$. Svaka aritmetička funkcija $f(n)$ za svaki prirodan broj k jednoznačno odredjuje aritmetičku funkciju $\Lambda_{f,k}(n)$ relacijom

$$(9) \qquad f(n)\log^k n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d}).$$

Za $f(n)=1$, $\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_k(n)$, a za $k=1$, $\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_f(n)$ (funkcije koje koriste Levin i Feinleib u svom metodu). Tako ustvari funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ predstavljaju prirodnu generalizaciju funkcija koje su ispitivane u prva dva dela. Data je teorema o jednoznačnosti funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ kao i više aritmetičkih osobina i identiteta. Iz odredjenih razloga ispitivanje funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ suženo na klasu multiplikativnih funkcija $f(n)$ i izvršeno je detaljno za odredjene klase multiplikativnih funkcija i za najvažnije posebne multiplikativne funkcije. Tako npr. ako je $f(n)$ totalno multiplikativna ($f(mn)=f(m)f(n)$),

$$\Lambda_{f,k}(n) = f(n)\Lambda_k(n),$$

ako je $f(n)$ multiplikativna i beskvadratna

$$\Lambda_{f,k}(n) = \sum_{d|n}\Big(\prod_{p^a\|d}(-1)^a f^a(p)\Big)f(\tfrac{n}{d})\log^k\frac{n}{d},$$

a ako je $f(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1$ (funkcija broj delitelja),

$$\Lambda_{\tau,k}(n) = 2\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\,\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d})$$

Kako se u većini takvih formula javljaju funkcije $\Lambda_k(n)$, to se i odgovarajuće asimptotske formule mogu dobiti korišćenjem asimptotskih formula za funkcije $\Lambda_k(n)$. Na taj način su odredjene asimptotske formule za $\Lambda_{f,k}(n)$ u slučaju $f(n) = \tau(n)$, $\sigma_i(n) = \sum_{d|n} d^i$, $\chi(n), \mu(n), \phi(n)$ i $r(n)$ ($r(n)$ označava broj predstavljanja n kao zbir kvadrata dva cela broja). Na kraju je data sledeća opšta teorema koja zaokružuje ispitivanje funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$:

Neka je $\Lambda_{f,1}(n) \geq 0$ i $\sum_{n \leq x} \Lambda_{f,1}(n) = Ax + O(\frac{x}{\log x})$. Tada važi

$$\sum_{n \leq x} \Lambda_{f,k}(n) = A \prod_{i=1}^{k-1} (i + \frac{A}{i}) x \log^{k-1} x + O(x \log^{k-2} x).$$

Ova teorema je posebno interesantna, jer podvlači vezu izmedju funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ i raspodele prostih brojeva. Naime, ako se za uslov u pretpostavci teoreme uzme $f(n)=1$, $A=1$, dobija se upravo teorema o prostim brojevima.

I.2 Pregled definicija, stalno korišćenih oznaka i teorema

Definicija 1. $\sum_{n\leq x} f(n)$ označava sumu po svim prirodnim brojevima n koji ne premašaju x, $\sum_{n\leq x} f(n) = f(1)+f(2)+\ldots+f([x])$.

Definicija 2. $f(x) = O(g(x))$ označava nejednakost $|f(x)|<Cg(x)$ za neku pozitivnu konstantu C i za sve $x>x_o\geq 0$.

$f(x) = o(g(x))$ za $x\to x_1$ (x_1 može biti i $\pm\infty$) označava da je $\lim_{x\to x_1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definicija 3. $\sum_{d|n} f(d)$ je suma funkcije f po svim deliteljima broja n uključujući 1 i n.

Definicija 4. $\sum_{mn\leq x} f(m)g(n)$ označava sumiranje po svim prirodnim brojevima m i n čiji proizvod mn ne premaša x.

Definicija 5. $\sum_{p\leq x} f(p)$ je suma funkcije f po svim prostim brojevima koji ne premašaju x. Ukoliko nije drugačije naznačeno, p označava prost broj.

Definicija 6. $\sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv 1 (\mathrm{mod}\, i)}} f(n)$ označava sumu po svim prirodnim brojevima n koji ne premašaju x i koji su kongruentni 1 po modulu i, tj. koji su oblika ki+1.

Definicija 7. $\prod_{p|n} f(p)$ označava proizvod funkcije f po svim prostim brojevima p koji dele n, a $\prod_{p^a \| n} f(p^a)$ proizvod po svim stepenima p^a prostih brojeva koji dele n, ali sa osobinom da p^a deli n, a p^{a+1} ne deli n.

Definicija 8. Funkcija f(n) je multiplikativna ako za svaki par uzajamno prostih brojeva m i n (tj. brojeva za koje je $(m,n)=1$) važi $$f(mn) = f(m)f(n),$$

a totalno multiplikativna ako za svaki par prirodnih brojeva m i n važi

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

U radu se koriste sledeće standardne oznake za pojedine aritmetičke funkcije:

$\mu(n)$ za funkciju Möbiusa;

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^r & n=p_1p_2\cdots p_r \\ 0 & \text{ako je } n \text{ deljivo kvadratom prirodnog broja većeg od } 1 \end{cases}$$

$\Lambda(n)$ (isto što i $\Lambda_1(n)$) za funkciju von Mangoldta;

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n=p^a \\ 0 & n\neq p^a \end{cases}$$

$\phi(n)$ za funkciju Eulera;

$\phi(n)$ = broj brojeva manjih od n uzajamno prostih sa n $= n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p}) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$.

$\tau(n)$ (često se označava i sa $d(n)$) broj delitelja broja n;

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

$\sigma_i(n)$ za zbir i-tih stepena delitelja broja n;

$$\sigma_i(n) = \sum_{d|n} d^i,$$

$\chi(n)$ za karakter od n po modulu i ($\chi_o(n)$ je glavni karakter od n po modulu i);

$$\chi_o(n) = \begin{cases} 1 & (n,i)=1 \\ 0 & (n,i)>1, \end{cases}$$

(videti Specht (11), str. 37-43, Rademacher (9), str. 122-128),

$\zeta(s)$ za Riemannovu zeta funkciju;

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ (Res>1), a za ostale vrednosti s nalazi se pomoću funkcionalne jednačine Riemanna

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

(Chandrasekharan (2), str. 28-33, Davenport (13), str. 71-75);

<u>$r(n)$ za broj predstavljanja broja n kao zbir kvadrata dva cela broja</u>;

$$r(n) = \sum_{n=x^2+y^2} 1 ,$$

<u>$\pi(x)$ za broj prostih brojeva koji ne premašaju x</u>;

$$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1,$$

<u>$\theta(x)$ i $\psi(x)$ za funkcije Čebišova</u>;

$$\theta(x) = \sum_{p\le x} \log p, \quad \psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n).$$

U radu se često koristi sledeća teorema o parcijalnom sumiranju:

Neka je $u_1\le u_2\le \dots u_n\le \dots$ niz realnih brojeva koji teži ∞, a $g(t)$ funkcija sa neprekidnim izvodom u intervalu $u_1\le t\le x$. Tada je za proizvoljan niz a_n

$$\sum_{u_1\le u_n\le x} a_n g(u_n) = A(x)g(x) - \int_{u_1}^{x} A(t)g'(t)dt,$$

gde je
$$A(t) = \sum_{u_1\le u_n\le t} a_n.$$

Takodje se često koriste i sledeće teoreme poznate kao formule inverzije (Rademacher (9), str. 104-105, Huxley (4), str. 5, Specht (11), str. 14-15):

Prva teorema inverzije. Ako su $f(n)$ i $g(n)$ aritmetičke funkcije, tada su sledeće relacije ekvivalentne:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \text{i}$$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

Druga teorema inverzije. Ako su $f(x)$ i $g(x)$ funkcije definisane nad $0< <\infty$, tada su sledeće relacije ekvivalentne:

$$g(x) = \sum_{n\le x} f\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{i}$$

$$f(x) = \sum_{n\le x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Dirichletovi redovi. Aritmetičkoj funkciji $f(n)$ često se pridružuje red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ koji se naziva Dirichletov red i koji se označava sa $F(s)$. Dirichletovi redovi su važan analitički aparat za izučavanje aritmetičkih funkcija i sledeće teoreme će se često koristiti (Mandelbrojt (17), str. 9-21, Chandrasekharan (2), 111-11 Prachar (21), str. 423-427):

Teorema o uniformnoj konvergenciji. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergira za $s=s_0$, tada on konvergira u poluravni $\mathrm{Re}s_0<\mathrm{Re}s$ i to uniformno na svakom kompaktnom skupu koji je sadržan u toj poluravni. U toj poluravni konvergencije Dirichletov red predstavlja regularnu analitičku funkciju koja se sme počlano diferencirati.

Teorema o množenju Dirichletovih redova. Neka su Dirichletovi redovi $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ i $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ absolutno konvergentni za neko s. Tada je $H(s) = F(s)G(s)$ absolutno konvergentno i $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s}$ gde je $h(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$.

Teorema o jedinstvenosti Dirichletovih redova. Neka redovi $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ konvergiraju u istoj poluravni, i neka je $F(s) = G(s)$ nad nekim nepraznim otvorenim skupo koji leži u toj poluravni. Tada je $f(n) = g(n)$ za svaki prirodan broj n.

Teorema o inverziji Dirichletovih redova. Neka red $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ absolutno konvergira u poluravni $\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}s_0$. Tada za pozitivno y i svako $w=u+iv$ važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-w}e^{-ny} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s-w)y^{w-s}F(s)ds$$

gde je $b>\mathrm{Re}s_0$ i $b>u$.

I.3 Problemi raspodele prostih brojeva

Zbog povezanosti funkcija $\Lambda_k(n)$ i $\Lambda_{f,k}(n)$ sa raspodelom prostih brojeva u ovom odeljku biće ukratko izložena teorema o prostim brojevima, njeni ekvivalentni, kao i raspodela prostih brojeva u aritmetičkim progresijama. Teorema o prostim brojevima se najčešće formuliše u obliku

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$ ili u obliku

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,x} = 1,$$

u kojem ju je naslutio Gauss još 1849. (Davenport (15), str. 64), gde je
$$\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{dt}{\log t},$$
a svi logaritmi u teoriji brojeva su prirodni (i po tradiciji se ne označavaju sa ln već uvek sa log). Teoremu su dokazali tek 1895. Hadamard i de la Vallée Poussin koristeći kompleksnu integraciju i činjenicu da $\zeta(1+it)\neq 0$ (Chandrasekharan (2), str. 123-124, Prachar (21), str. 65-81) i to u mnogo jačem obliku nego što su (1) i (2):

(3) $$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O(x\exp(-c\sqrt{\log x})) \qquad (c>0).$$

Dokazi metodom kompleksne integracije koriste osobine zeta funkcije, u prvom redu se postavlja pitanje u kojoj oblasti zeta funkcija nema nula; što je ta oblast veća, ostatak u teoremi o prostim brojevima se smanjuje. Ako se iskoristi teorema Littlewooda (Chandrasekharan (1), str. 58-62) da zeta funkcija nema nula u oblasti $(s=\sigma+it)$

$$\sigma>1-\frac{A\log\log(|t|+3)}{\log(|t|+3)}$$

gde je A neka pozitivna konstanta, dobija se teorema o prostim brojevima u obliku još jačem od (3):

(4) $$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + O(x\exp(-c\sqrt{\log x\log\log x}),$$

gde je c pozitivna konstanta koja se razlikuje od one u (3). Najbolji dosada dobiveni rezultati dobiveni su upotrebom trigonometriskih suma

(I.M. Vinogradov (12), Chandrasekharan (1), str. 89-112, Huxley (4),str.1o7-1o9) tzv. metodom Vinogradova. Ta metoda omogućava izvodjenje teoreme Čudakova koja kaže da zeta funkcija nema nula u oblasti

$$\sigma \geq 1 - \frac{B}{\log^{3/4} t (\log\log t)^{3/4}} \qquad (t \geq t_1),$$

a iz teoreme Čudakova se dobija teorema o prostim brojevima u obliku

(5) $$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(x\exp(-c\log^{4/7} x(\log\log x)^{-3/7})).$$

Dosada najjači oblik teoreme o prostim brojevima je

(6) $$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(x\exp(-c\log^{3/5} x(\log\log x)^{-1/5}))$$

koji je dobio Walfisz (Chandrasekharan (1),str.111) koristeći rezultat Korobova i Vinogradova da zeta funkcija nema nula u oblasti

$$\sigma \geq 1 - \frac{A}{\log^{\alpha} t}, \quad t \geq 3, \alpha > 2/3.$$

1860. B. Riemann je iskazao hipotezu (koja ni do dan danas nije ni dokazana ni opovrgnuta) da sve netrivijalne nule zeta funkcije (trivijalne su -2,-4,-6,...) leže na pravoj 1/2+it. Ukoliko bi Riemannova hipoteza bila tačna, onda bi iz nje (Davenport (13), str. 125-126) sledovala teorema o prostim brojevima u obliku jačem i od (6):

(7) $$\pi(x) = \mathrm{li}x + O(\sqrt{x}\log x).$$

Postoji više ekvivalentnih tvrdjenja teoreme o prostim brojevima u obliku (1) ili (2). Tako naprimer (Rademacher (9), str. 117-118, Specht (11), str. 24, Prachar (21), str. 68-69) važe sledeće veze

(8) $$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right),$$

(9) $$\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

(10) $$\theta(x) = \psi(x) + O(\sqrt{x}\log x),$$

koje pokazuju da su teoremi o prostim brojevima u obliku (1) ili (2) ekvivalentna tvrdjenja

(11) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1 \qquad\qquad i$$

(12) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\theta(x)}{x} = 1 .$$

Pomoću parcijalnog sumiranja pokazuje se da važi formula

(13) $$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_0^\infty \psi(e^x)e^{-sx}dx,$$

a iz nje se lako dobija (11) uz pomoć sledeće Tauberove teoreme (Chandrasekharan (2), str. 122-130):

Tauberova teorema Wiener-Ikehara. Neka je $A(x)$ nenegativna, neopadajuća funkcija od x za nenegativno x. Neka integral $\int_0^\infty A(x)e^{-sx}dx$ $(s=\sigma+it)$ konvergira za $\sigma>1$ funkciji $f(s)$. Neka je $f(s)$ analitička za $\sigma\geq 1$, sem za $s=1$ gde ima pol prvoga reda sa ostatkom 1. Tada je

$$\lim_{x\to\infty} A(x)e^{-x} = 1.$$

(11) se dobija ako se uzme $\psi(x) = A(\log x)$, odnosno $A(x) = \psi(e^x)$.

Još od Landaua je poznato (Prachar (24), str. 84-85) da je teoremi o prostim brojevima u obliku (1) ekvivalentno

(14) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0,$$

dok se sasvim elementarno može dokazati da je (1) ekvivalentno sa

(15) $$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\log n} = 1. \qquad (p_n \text{ je n-ti prosti broj})$$

Godine 1955 A.G. Postnikov i N.P.Romanov (Postnikov i Romanov (20)) su dokazali elementarno teoremu o prostim brojevima u sledećem obliku koji je ekvivalentan (1):

(16) $$\sum_{n\leq x}\mu(n) = o(x).$$

Pod "elementarnim" dokazom se podrazumeva dokaz koji je zasnovan samo na čisto aritmetičkim osobinama i realnoj analizi, za razliku od dokaza Hadamarda koji je zasnovan na kompleksnoj analizi, ili od dokaza koji koriste duboke teoreme analize, kao što je recimo Tauberova teorema Wiener-Ikehare.

Prvi elementaran dokaz teoreme o prostim brojevima dao je 1949. A. Selberg uz saradnju P. Erdösa i J. van der Corputa koristeći u osnovi sledeći identitet:

(17) $$\sum_{p\le x}\log^2 p + \sum_{pq\le x}\log p\log q = 2x\log x + O(x).$$

U osnovi svih kasnijih elementarnih dokaza i svih varijacija i uprošćavanja originalnog Selbergovog dokaza leži (17) ili neki njegov ekvivalenat. Tako npr. Prachar (21), str. 94-107, daje sledeći ekvivalenat identiteta (17):

(18) $$\theta(x)\log x + \sum_{pq\le x}\log p\log q = 2x\log x + O(x),$$

dok Postnikov i Romanov (20) rade s identitetom

(19) $$M(x)\log x + \sum_{n\le x}\mu(n)\theta(\tfrac{x}{n}) = O(x)$$

pomoću koga dobijaju nejednakost

(20) $$|M(x)|\le\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}|\mu(\tfrac{x}{n})| + O(\frac{x\log\log x}{\log x})$$

iz koje izvode teoremu o prostim brojevima u obliku (14), pri čemu je $M(x) = \sum_{n\le x}\mu(n)$.

Ovde će biti data Spechtova varijanta elementarnog dokaza teoreme o prostim brojevima (Specht (11), str. 18-37), pri čemu će se Selbergov identitet koristiti u obliku

(21) $$\psi(x)\log x + \sum_{n\le x}\Lambda(n)\psi(\tfrac{x}{n}) + O(x) = 2x\log x.$$

Osim funkcije $\Lambda(n) = \Lambda_1(n)$ uvodi se i funkcija $\Lambda_2(n)$ koja se definiše na sledeći način:

(22) $$\Lambda_2(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log^2\frac{n}{d}.$$

Procena $\psi(x) = O(x)$ je sasvim elementarna, dok se za procenu

(23) $$\psi_2(x) = \sum_{n\le x}\Lambda_2(n) = 2x\log x + O(x)$$

koriste formule inverzije i sledeća lema Shapiroa:

(24) $$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n} = O(1),$$

(25) $$\sum_{n\le x}\frac{\mu(n)}{n}\log\frac{x}{n} = O(1) \text{ i}$$

(26) $$\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n}\log^2\frac{x}{n} = 2\log x + O(1).$$

Sumiranjem identiteta

(27) $$\Lambda_2(n) = \Lambda_1(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\frac{n}{d})$$

po svim n koji ne premašaju x i korišćenjem (23) dobija se Selbergov identitet u obliku (21). Ako se uvede oznaka $\rho(x) = \psi(x) - x$ i iskoristi dobro poznata relacija (Chandrasekharan (2), str.82)

(28) $$x\log x = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\frac{x}{n} + O(x),$$

oduzimanjem (28) od (21) će se dobiti

(29) $$-\rho(x)\log x + O(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\frac{x}{n}).$$

U (29) se x smeni sa $\frac{x}{m}$, sve se pomnoži sa $\Lambda_1(m)$ i vrši se sumiranje po svim m koji ne premašaju x da bi se dobilo

(30) $$\rho(x)\log^2 x + O(x\log x) = \sum_{n\leq x}(-\Lambda_1(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\frac{n}{d}))\rho(\frac{x}{n}).$$

Uzimanje apsolutne vrednosti i korišćenje identiteta (27) daće

(31) $$|\rho(x)|\log^2 x \leq \sum_{n\leq x}\Lambda_2(n)|\rho(\frac{x}{n})|.$$

Parcijalnim sumiranjem se ustanovljava (Specht (11), str.26) da važi

(32) $$\sum_{n\leq x}\Lambda_2(n)|\rho(\frac{x}{n})| = 2\sum_{n\leq x}|\rho(\frac{x}{n})|\log n + O(x\log x),$$

te se time konačno dobija nejednakost

(33) $$|\rho(x)|\log^2 x < \sum_{n\leq x}|\rho(\frac{x}{n})|\log n + O(x\log x)$$

koja ustavari daje procenu funkcije $\rho(x)$ pomoću vrednosti funkcije $\rho(x)$ za $\frac{x}{1}$, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ itd., i predstavlja ključ za dokaz teoreme o prostim brojevima. Sam dokaz teoreme koristi još relacija sa funkcijom $\rho(x)$, a ideja dokaza je sledeća:

Neka je a neka vrednost iz intervala $0<a\leq 2$ tako da za neko x_a i $x\geq x_a$ važi

$$|\rho(x)|<ax.$$

Tada se uz pomoć nejednakosti (33) ustanovljava da postoji neka fiksna pozitivna konstanta C i neko x_b tako da je za $x\geq x_b$

$$|\rho(x)| \leq bx,$$

pri čemu je

$$0<b = a(1-\frac{a^2}{512C})<a.$$

Kako se nejednakost $|\rho(x)|<2x$ lako ustanovljava, to znači da ako se definiše niz a_n: $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n(1-\frac{a^2}{512C})$, onda svakom a_n odgovar neka vrednost x_n tako da je za $x \geq x_n$

$$|\rho(x)|<a_n x.$$

S obzirom na činjenicu da brojevi a_n monotono opadaju, sledi da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a iz definicije a_n sledi da taj limes mora biti 0, pa je zato

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\rho(x)}{x} = 0,$$

tj.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x} = 0, \text{ odnosno}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

što je ekvivalentno teoremi o prostim brojevima.

S prethodnom problematikom tesno je povezana i problematika raspodele prostih brojeva u aritmetičkim progresijama. Još je Dirichlet dokazao godine 1837. (Davenport (13), str. 7-18) da aritmetička progresija ak+b sadrži beskonačno mnogo prostih brojeva čim su a i b uzajamno prosti prirodni brojevi. Analitički pristup je preko Dirichletovih L-funkcija koje se definišu na sledeći način:

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s} = \prod_{p}(1-\chi(p)p^{-s}),$$

gde je $\chi(n)$ funkcija karakter od n po modulu k (Chandrasekharan (1), str. 142-149, Rademacher (9), 121-136, Huxley (4), str. 10-13). Takodje se uvode i sledeće funkcije koje su analogne funkcijama $\pi(x)$, $\theta(x)$ i $\psi(x)$:

$$\pi(x;k,l) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}} 1,$$

$$\theta(x;k,l) = \sum_{\substack{p\leq x\\ p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}} \log p$$

$$\psi(x;k,l) = \sum_{\substack{n<x \\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, k)}} \Lambda(n).$$

Teorema o prostim brojevima u aritmetičkim progresijama može onda da se formuliše kao

(34) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x;k,l)}{\mathrm{li}\,x} = \frac{1}{\phi(k)} .$$

Postoje i jači oblici te teoreme nego što je (34), tako npr. važi sledeća relacija koju je dobio E. Landau

(35) $$\pi(x;k,l) = \frac{\mathrm{li}\,x}{\phi(k)} + O(x\exp(-c\sqrt{\log x\log\log x})),$$

gde je c pozitivna konstanta koja ne zavisi od k i od l. Od posebnog interesa su rezultati koji važe uniformno po k; takav je rezultat A. Walfisza (Chandrasekharan (1), str. 146):

(36) $$\pi(x;k,l) = \frac{\mathrm{li}\,x}{\phi(k)} + O(x\exp(-c\sqrt{\log x})),$$

koji važi uniformno za $3\le k\le\log^{\alpha}x$, gde je α proizvoljno veliki pozitivan broj, a c fiksna pozitivna konstanta. Takodje je interesantno i pitanje nalaženja najmanjeg prostog broja u aritmetičkoj progresiji, posebno kada je k veliko. Sledeća teorema Linnika (Prachar (21), str. 411-419) daje odgovor na to pitanje:

Teorema Linnika. Neka je $k\ge 2$, $(k,l)=1$, $l<k$ i $p(k,l)$ najmanji prost broj u aritmetičkoj progresiji $mk+l$. Tada postoji konstanta C koja ne zavisi od k tako da važi

$$p(k,l)<k^{C}.$$

D R U G I D E O

Funkcije $\Lambda_k(n)$

II.1 Definicija, osnovne osobine i identiteti

Funkcije $\Lambda_k(n)$ predstavljaju prirodno poopštenje funkcija iz raspodele prostih brojeva

$$\Lambda(n) = \Lambda_1(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log\frac{n}{d} = \begin{cases} \log p & n=p^m \\ 0 & n\neq p^m \end{cases}$$

$$\Lambda_2(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log^2\frac{n}{d}$$

i mogu se za svaki prirodan broj k definisati na sledeći način:

$$(1) \qquad \Lambda_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log^k\frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu(\tfrac{n}{d})\log^k d.$$

Očigledno je da za svako k važi $\Lambda_k(1) = \mu(1)\log 1 = 0$, dok se iz formule inverzije neposredno dobija

$$(2) \qquad \sum_{d|n} \Lambda_k(d) = \log^k n,$$

što može da posluži kao ekvivalentna definicija (1). Sledeća teorema daje formulu za rekurzivno izračunavanje funkcija $\Lambda_k(n)$:

Teorema II.1. Za svako m manje od k važi

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{k-m}(d)\Lambda_{m-i}(\tfrac{n}{d})\log^i d.$$

Dokaz. $\Lambda_k(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log^k\frac{n}{d} = \sum_{d|n}\mu(d)\log^m\frac{n}{d}\log^{k-m}\frac{n}{d}$

$$= \sum_{d|n}\mu(d)\log^m\frac{n}{d}\sum_{s|\frac{n}{d}}\Lambda_{k-m}(s) = \sum_{ds|n}\mu(d)\log^m\frac{n}{d}\Lambda_{k-m}(s) =$$

$$\sum_{ds|n}\mu(d)\log^m\frac{n}{ds}s\Lambda_{k-m}(s) = \sum_{ds|n}\mu(d)(\log\frac{n}{ds} + \log s)^m\Lambda_{k-m}(s) =$$

$$\sum_{ds|n}\mu(d)\Lambda_{k-m}(s)\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\log^{m-i}\frac{n}{ds}\log^i s =$$

$$\sum_{ds|n}\mu(d)\Lambda_{k-m}(s)\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\log^{m-i}\frac{n}{ds}\log^i s + \sum_{ds|n}\mu(d)\Lambda_{k-m}(s)\log^m s =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\sum_{ds|n}\Lambda_{k-m}(s)\log^{i}s\,\mu(d)\log^{m-i}\frac{n}{ds}+\sum_{s|n}\Lambda_{k-m}(s)\log^{m}s\sum_{d|\frac{n}{s}}\mu(d)=$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\sum_{s|n}\Lambda_{k-m}(s)\log^{i}s\sum_{d|\frac{n}{s}}\mu(d)\log^{m-i}\frac{n}{ds}+\Lambda_{k-m}(n)\log^{m}n=$$

$$\Lambda_{k-m}(n)\log^{m}n+\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\sum_{s|n}\Lambda_{k-m}(s)\Lambda_{m-i}(\tfrac{n}{s})\log^{i}s,$$

gde je korišćena poznata osobina funkcije Möbiusa $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$.

Za m=1 dobija se identitet (Kasara (14)),

$$\Lambda_k(n)=\Lambda_{k-1}(n)\log n+\sum_{d|n}\Lambda_{k-1}(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}). \tag{3}$$

Za k=3 to postaje

$$\Lambda_3(n)=\Lambda_2(n)\log n+\sum_{d|n}\Lambda_2(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}), \tag{4}$$

dok se iz opšteg slučaja teoreme dobija za k=3,m=2

$$\Lambda_3(n)=\Lambda_1(n)\log^2 n+\sum_{d|n}\Lambda_2(\tfrac{n}{d})\Lambda_1(d)+2\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log d. \tag{5}$$

Uporedjivanjem (4) i (5) uz korišćenje osobine $\sum_{d|n}f(d)=\sum_{d|n}f(\frac{n}{d})$

dobija se

$$\Lambda_2(n)\log n=\Lambda_1(n)\log^2 n+2\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}). \tag{6}$$

Istim postupkom se dobija da je sa jedne strane

$$\Lambda_4(n)=\Lambda_3(n)\log n+\sum_{d|n}\Lambda_3(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}), \tag{7}$$

dok se iz opšteg slučaja teoreme za k=4,m=3 dobija

$$\Lambda_4(n)=\Lambda_1(n)\log^3 n+\sum_{d|n}\Lambda_3(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})+ \tag{8}$$

$$3\sum_{d|n}\Lambda_2(\tfrac{n}{d})\Lambda_1(d)\log d+3\sum_{d|n}\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\Lambda_1(d)\log^2 d.$$

Uporedjivanjem se dobija identitet

$$\Lambda_3(n)\log n=\Lambda_1(n)\log^3 n+3\sum_{d|n}\Lambda_2(\tfrac{n}{d})\Lambda_1(d)\log d+3\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log^2 d,$$

i analognim postupkom se mogu izvesti identiteti i za k>3.

Identitet (6) se može dobiti i na drugi način; u tu svrhu se posmatra funkcija

$$F_k(n) = \sum_{d|n} g(d)g(\tfrac{n}{d})\log^k d,$$

pri čemu je k prirodan broj ili nula, a g(n) je proizvoljna aritmetička funkcija. Kada d prolazi skupom delitelja broja n i $\frac{n}{d}$ prolazi takodje tim skupom, pa će biti

$$F_k(n) = \sum_{d|n} g(d)g(\tfrac{n}{d})\log^k d = \sum_{d|n} g(\tfrac{n}{d})g(d)\log^k \frac{n}{d} =$$

$$\sum_{d|n} g(d)g(\tfrac{n}{d})(\log n-\log d)^k = \sum_{d|n} g(d)g(\tfrac{n}{d}) \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n \log^i d =$$

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n \sum_{d|n} g(d)g(\tfrac{n}{d})\log^i d = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \log^{k-i} n F_i(n).$$

Time se dobila rekurentna veza

$$(9) \qquad F_k(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} F_i(n)\log^{k-i} n,$$

koja je posebno pogodna za neparno k (za parno k $F_k(n)$ se potire sa $F_k(n)$ sa desne strane (9)) i koja u slučaju $g(n)=\Lambda_1(n)$, $F_0(n) = \Lambda_2(n) - \Lambda_1(n)\log n$, za k=1 i k=3 daje identitete

$$(6) \qquad \Lambda_2(n)\log n = \Lambda_1(n)\log^2 n + 2\sum_{d|n} \Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log d$$

$$(10) \qquad \Lambda_2(n)\log^3 n = \Lambda_1(n)\log^4 n + 6\log n \sum_{d|n} \Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log^2 d -$$

$$-4\sum_{d|n} \Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log^3 d,$$

i kasnije još komplikovanije identitete.

Relacija (3) omogućuje dobijanje jednog aritmetičkog svojstva funkcija $\Lambda_k(n)$ kojeg iskazuje sledeća teorema:

Teorema II.2. Funkcije $\Lambda_k(n)$ su za svako k nenegativne funkcije koje nisu jednake nuli samo onda kada n ima k ili manje raznih prostih brojeva kao faktore.

Dokaz. Za k=1 teorema je očigledno tačna jer je

$$\Lambda_1(n) = \begin{cases} \log p & n=p^m \\ 0 & n\neq p^m \end{cases}$$

Time je započet induktivni dokaz teoreme; neka je ona tačna za neko k-1. Tada iz (3) sledi

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-1}(n)\log n + \sum_{d|n} \Lambda_{k-1}(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}).$$

Po induktivnoj pretpostavci svi članovi na desnoj strani su nenegativni, te je stoga i $\Lambda_k(n)$ nenegativno. Ako n ima više od k raznih prostih delitelja, tada za svako d koje deli n ili d ima više od k-1 prostih delitelja, ili $\frac{n}{d}$ ima više od jednog prostog delitelja, te je tada zbog induktivne pretpostavke za svako d

$$\Lambda_{k-1}(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})=0,$$

pa sumiranje i (3) daju da je i $\Lambda_k(n) = 0$.

Postavlja se i pitanje veličine, odnosno rasta funkcija $\Lambda_k(n)$. Za funkciju $\Lambda_2(n)$ može se pokazati (Ivić (6)) da važi sledeća procena

(11) $$\Lambda_2(n)\leq 2\Lambda_1(n)\log n + \tfrac{1}{2}\log^2 n - \Lambda_1^2(n),$$

dok procenu u opštem slučaju daje sledeća

Teorema II.3. Za svaki prirodan broj k važi

$$\Lambda_1(n)\log^{k-1} n\leq\Lambda_k(n)\leq k\log^k n.$$

Dokaz. Za k=1 nejednakost postaje

$$\Lambda_1(n)\leq\Lambda_1(n)\leq\log n,$$

što je očigledno iz definicije funkcije $\Lambda_1(n)$. Time je započet induktivni dokaz; neka je nejednakost tačna za neko k, tada (3) daje

$$\Lambda_{k+1}(n) = \Lambda_k(n)\log n + \sum_{d|n} \Lambda_k(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d}),$$

pa se primenom induktivne pretpostavke dobija

$$\Lambda_{k+1}(n)\geq \Lambda_k(n)\log n \geq \Lambda_1(n)\log^{k-1} n = \Lambda_1(n)\log^k n.$$

Drugi deo nejednakosti se slično dokazuje:

$$\Lambda_{k+1}(n)\leq k\log^k n\log n + \sum_{d|n} \Lambda_k(d)\log\tfrac{n}{d} \leq$$

$$k\log^{k+1} n + \log n\sum_{d|n} \Lambda_k(d) = k\log^{k+1} n + \log n\log^k n = (k+1)\log^{k+1} n.$$

Stavljanjem tih nejednakosti u (3) dobijaju se sledeće oštrije, ali manje praktične za upotrebu nejednakosti:

(12) $$\Lambda_k(n) \geq \Lambda_1(n)\log^{k-1} n + \sum_{d|n} \Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log^{k-2} d$$

(13) $$\Lambda_k(n)\leq(k-1)\log^k n + (k-1)\sum_{d|n}\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log^{k-1} d.$$

Eksplicitno odredjivanje $\Lambda_k(n)$ za neko n nije jednostavno, sem u slučaju kada je n stepen prostog broja, i tada važi:

Teorema II.4. Za svako prirodno k i a važi

$$\Lambda_k(p^a) = f(k,a)\log^k p,$$

pri čemu brojevi $f(k,a)$ zadovoljavaju uslov $f(1,a) = f(k,1) = 1$, a za $k,a>1$ važi

$$f(k,a) = af(k-1,a) + \sum_{i=1}^{a-1} f(k-1,i).$$

Dokaz. Kako je $\Lambda_1(p^a) = \log p$, to odmah sledi $f(1,a) = 1$. Neka je indukcijom po k pokazano da je $f(k-1,1) = 1$, odnosno $\Lambda_{k-1}(p) = \log^{k-1}p$. Relacija (3) za n=p daće

$$\Lambda_k(p) = \Lambda_{k-1}(p)\log p + \sum_{d|p} \Lambda_{k-1}(d)\Lambda_1(\tfrac{p}{d}) = \Lambda_{k-1}(p)\log p$$

što daje $\Lambda_k(p) = \log^k p$, tj. $f(k,1) = 1$.

Neka je sada u opštem slučaju za neko k-1 $\Lambda_{k-1}(p^a) = f(k-1,a)\log^{k-1}p$. Koristeći (3) i induktivnu pretpostavku dobiće se

$$\Lambda_k(p^a) = f(k-1,a)\log^{k-1}p\log p^a + \sum_{d|p^a} \Lambda_{k-1}(d)\Lambda_1(\frac{p^a}{d}) =$$

$$af(k-1,a)\log^k p + \sum_{i=1}^{a-1} \Lambda_{k-1}(p^i)\Lambda_1(p^{a-i}) = (af(k-1,a) + \sum_{i=1}^{a-1} f(k-1,i))\log^k p =$$

$f(k,a)\log^k p$. Time je završen induktivni dokaz teoreme.

II.2 Funkcije generatrise za funkcije $\Lambda_k(n)$.

Funkcije $\Lambda_k(n)$ imaju osobinu da im se funkcija generatrisa u obliku Dirichletovog reda nalazi dosta jednostavno. Počlanim diferenciranjem zeta funkcije dobija se

$$(1)\qquad (-1)^k\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \log^k n\cdot n^{-s}.$$

S druge strane zna se da važi (Prachar (21), str. 76)

$$(2)\qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s},$$

pa se množenjem i korišćenjem teoreme o množenju Dirichletovih redova dobija

$$(-1^k)\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$$

gde je $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log^k\frac{n}{d} = \Lambda_k(n)$. Time je dobiven analitički aparat za ispitivanje funkcija $\Lambda_k(n)$ i ujedno pokazano da važi:

Teorema II.5. $(-1)^k\dfrac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_k(n)n^{-s}$.

Ova teorema može da se iskoristi za dokazivanje raznih identiteta sa funkcijama $\Lambda_k(n)$, tako naprimer, (Ivić (5)), identitet

$$\Lambda_2(n)\log n = \Lambda_1(n)\log n + 2\sum_{d|n} \Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log d$$

koji je dokazan u prošlom odeljku vrlo jednostavno se dokazuje pomoću Dirichletovih redova. Sada će biti dat nov dokaz teoreme II.1

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{k-m}(d)\Lambda_{m-i}(\tfrac{n}{d})\log^i d,$$

i to u obliku

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-m}(\tfrac{n}{d})\log^{m-i}\frac{n}{d}$$

koji se dobija ako se u teoremi II.1 i zameni sa m-i, a d sa $\frac{n}{d}$.

Ne pišući zbog preglednosti promenljivu s, dobiće se

$$\zeta^{(k)}(s) = \frac{d^k\zeta(s)}{ds^k} = (\zeta\frac{\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m)} =$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\zeta^{(i)}(\frac{\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m-i)} =$$

$$\zeta(\frac{\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m)} + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\zeta^{(i)}(\frac{\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m-i)}.$$

Stoga važi

$$(-1)^k\frac{\zeta^{(k)}}{\zeta} = (-1)^m(\frac{(-1)^{k-m}\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\frac{(-1)^i\zeta^{(i)}}{\zeta}(-1)^{m-i}((-1)^{k-m}\frac{\zeta^{(k-m)}}{\zeta})^{(m-i)}.$$

Izjednačavajući koeficijente uz n^{-s} poslednjeg identiteta, uz korišćenje osobine

$$(\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s})^{(i)} = (-1)^i(\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\log^i n\cdot n^{-s})$$

dobija se upravo

$$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-m}(\frac{n}{d})\log^{m-i}\frac{n}{d}.$$

Primenom teoreme o jedinstvenosti Dirichletovih redova na identitet

$$\zeta(s)(-1)^k\zeta^{(k)}(s) = (-1)^k\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)}\zeta^2(s)$$

dobija se identitet

$$\sum_{d|n}\log^k d = \sum_{d|n}\Lambda_k(d)\tau(\frac{n}{d}), \tag{3}$$

jer važi $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s}$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, $(-1)^k\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\log^k n\cdot n^{-s}$.

Iz (3) se dobija da važi:

Teorema II.6. $\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\tau(\frac{n}{d}) = \frac{1}{2}\tau(n)\log n.$

Dokaz. Iz (3) se za k=1 dobija da važi

$$\sum_{d|n}\Lambda_1(d)\tau(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n}\log d, \tag{4}$$

Izraz $\sum\limits_{d|n} \log d$ može se transformisati na sledeći način:

$$\sum_{d|n} \log d = \sum_{d|n} \log\frac{n}{d} = \log n \sum_{d|n} 1 - \sum_{d|n} \log d,$$

što daje

$$\sum_{d|n} \log d = \frac{1}{2}\tau(n)\log n,$$

čime je završen dokaz teoreme. Sumiranjem identiteta (3) po svim n koji ne premašaju x uz korišćenje oznake $\psi_k(x) = \sum\limits_{n\le x} \Lambda_k(n)$ dobiće se

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} \Lambda_k(d)\tau(\tfrac{n}{d}) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n} \log^k d = \sum_{n\le x} [\tfrac{x}{n}]\log^k n =$$

$$\sum_{n\le x} \frac{x}{n}\log^k n + O(\sum_{n\le x} \log^k n) = \frac{x\log^{k+1} x}{k+1} + O(x\log^k x),$$ gde su korišćene poznate procene iz analize

$$\sum_{n\le x} \frac{\log^k n}{n} = \frac{\log^{k+1} x}{k+1} + O(1)$$

i

$$\sum_{n\le x} \log^k n = O(x\log^k x).$$

S druge strane,

$$\sum_{n\le x}\ \sum_{d|n} \Lambda_k(d)\tau(\tfrac{n}{d}) = \sum_{mn\le x} \Lambda_k(m)\tau(n) = \sum_{n\le x} \tau(n) \sum_{m\le \frac{x}{n}} \Lambda_k(m) =$$

$\sum\limits_{n\le x} \tau(n)\psi_k(\frac{x}{n})$, te je time pokazano da važi:

Teorema II.7. $$\sum_{n\le x} \tau(n)\psi_k(\tfrac{x}{n}) = \frac{x\log^{k+1} x}{k+1} + O(x\log^k x).$$

Iz identiteta $(-1)^k\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)}\zeta(s-1) = (-1)^k\zeta^{(k)}(s)\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$

korišćenjem teoreme o jedinstvenosti Dirichletovih redova dobija se sledeći identitet

(4) $$\sum_{d|n} \Lambda_k(d)\frac{n}{d} = \sum_{d|n} \phi(\tfrac{n}{d})\log^k d,$$

jer je $$\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot n^{-s} \quad \text{i} \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n)n^{-s}.$$

II.3. Asimptotske procene za sume u kojima se javljaju funkcije $\Lambda_k(n)$

Prvi cilj ovoga odeljka je dobijanje asimptotske formule

(1) $$\psi_k(x) = \sum_{n\le x}\Lambda_k(n) = x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x)$$

koja za k=1 predstavlja jedan od oblika teoreme o prostim brojevima. Jedan dokaz formule (1) dao je N.P. Romanov (22), a ovde će biti data dva dokaza koja se razlikuju od njegovog. Prvi dokaz se zasniva na poopštenju leme Shapiroa (Specht (11), str. 16)

(2) $$\sum_{n\le x}\mu(n)\frac{x}{n}\log^k\frac{x}{n} = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \quad (k\ge 2),$$

a drugi je induktivan i zasniva se na sumiranju već izvedenog identiteta

(3) $$\Lambda_k(n) = \Lambda_{k-1}(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right)\Lambda_{k-1}(d).$$

Da bi se dobila formula (2) potrebno je da se prethodno dokaže sledeća *Lema.* Za pozitivno k važi

(4) $$\sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n} = O(x),$$

a za svaki prirodan broj k važi

(5) $$\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\log^k\frac{x}{n} = \frac{x\log^{k+1}x}{k+1} + \sum_{i=0}^{k}D_i x\log^i x + O(\log^k x),$$

pri čemu su D_i apsolutne konstante.

Dokaz. Zbog monotonosti logaritamske funkcije biće $\sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n} \le \sum_{n\le x}\int_{n-1}^{n}\log^k\frac{x}{t}dt \le \int_1^x\log^k\frac{x}{t}dt$, što će posle smene $y=\frac{x}{t}$ dati $\sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n} \le x\int_x^1 -\frac{\log^k y}{y^2}dy \le \int_1^\infty x\frac{\log^k y}{y}dy = O(x)$, gde je korišćena činjenica da $\int_1^{\infty}\frac{\log^k y}{y^2}dy$ konvergira. Ako se iskoristi poznati rezultat da je

$$\sum_{n\leq x}\frac{\log^i n}{n} = \frac{\log^{i+1}x}{i+1} + C_i + O(\frac{\log^i x}{x}) \qquad (i=0,1,2,\ldots)$$

tada će biti

$$\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\log^k\frac{x}{n} = \sum_{n\leq x}\frac{x}{n}(\log x-\log n)^k =$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\log^i n\log^{k-i}x = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x\log^{k-i}x\sum_{n\leq x}\frac{\log^i n}{n} =$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x\log^{k-i}x(\frac{\log^{i+1}x}{i+1} + C_i + O(\frac{\log^i x}{x})) =$$

$$(\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{1}{i+1})x\log^{k+1}x + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}C_i x\log^{k-i}x + O(\log^k x) =$$

$$\frac{x\log^{k+1}x}{k+1} + \sum_{i=0}^{k}D_i x\log^i x + O(x\log^k x),$$ gde je stavljeno

$D_i = (-1)^{k-i}\binom{k}{i}C_{k-i}$, i gde je iskorišćen identitet

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{k}{i} = \frac{1}{k+1},$$

koji se dobija integraljenjem od 0 do 1 identiteta

$$(1-x)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}x^i.$$

Time je pokazano da važi

$$(5)\qquad \sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\log^k\frac{x}{n} = \frac{x\log^{k+1}x}{k+1} + \sum_{i=0}^{k}D_i x\log^i x + O(\log^k x).$$

Dokaz formule (2) sada je lako izvesti matematičkom indukcijom; kako je ta formula po lemi Shapiroa tačna za k=2, ako se pretpostavi da je tačna za neko k, onda će se primenom druge formule inverzije na (5) dobiti

$$x\log^k x = \sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)x}{k+1\,n}\log^{k+1}\frac{x}{n} + \sum_{i=0}^{k}D_i\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}x\log^i\frac{x}{n} + O(\sum_{n\leq x}\log^k\frac{x}{n}) =$$

$$\frac{1}{k+1}\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\mu(n)\log^{k+1}\frac{x}{n} + \sum_{i=1}^{k} D_i x\log^i x + O(x),$$

odakle sledi

$$\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\mu(n)\log^{k+1}\frac{x}{n} = (k+1)x\log^k x + O(x\log^{k-1}x),$$

te je time završen dokaz relacije (2).

Teorema II.8. $\psi_k(x) = \sum_{n\le x}\Lambda_k(n) = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x)$.

Dokaz. Za k=1 tvrdjenje teoreme je kao što je pokazano u uvodnom delu (str. 11) ekvivalentno teoremi o prostim brojevima. Za k>1 koristiće se upravo dokazana relacija

(2) $$\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\mu(n)\log^{k}\frac{x}{n} = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x)$$

te će se dobiti

$$\psi_k(x) = \sum_{n\le x}\Lambda_k(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\mu(d)\log^k\frac{n}{d} =$$

$$\sum_{mn\le x}\mu(n)\log^k m = \sum_{n\le x}\mu(n)\sum_{n\le\frac{x}{m}}\log^k m =$$

$$\sum_{n\le x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}\log^k\frac{x}{n} - k\frac{x}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} + \ldots + (-1)^k k!\frac{x}{n} + O(\log^k\frac{x}{n})\right) =$$

$$kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) + O(x\log^{k-2}x) + O(x) =$$

$$kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x),$$

pri čemu se više puta koristila relacija (2) kao i

$$\sum_{n\le x}\mu(n)O(\log^k\frac{x}{n}) = O(\sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n}) = O(x).$$

Drugi dokaz ove teoreme dobija se sumiranjem identiteta

(3) $$\Lambda_{k+1}(n) = \Lambda_k(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_k(n)\Lambda_1(\frac{n}{d}),$$

uz korišćenje matematičke indukcije. Za k=1 već je rečeno da se dobija ekvivalenat teoreme o prostim brojevima, a za k=2 dokaz je dao Specht (11), str. 19. Tako znači sumiranjem (3) po svim n koji ne premašuju x dobiće se

$$\psi_{k+1}(x) = \sum_{n\le x}\Lambda_k(n)\log n + \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda_k(d)\Lambda_1(\frac{n}{d}) =$$

$$\sum_{n\le x}\Lambda_k(n)\log n + \sum_{mn\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(m).$$

Parcijalno sumiranje uz induktivnu pretpostavku daće

$$\sum_{n\le x}\Lambda_k(n)\log n = kx\log^k x + O(x\log^{k-1}x) -$$

$$- \int_1^x \frac{kt\log^{k-1}t + O(t\log^{k-2}t)}{t}dt =$$

$$kx\log^k x + O(x\log^{k-1}x),$$

te još ostaje samo da se pokaže $\sum_{mn\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(m) = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x)$

Polazeći od dobro poznate relacije (Chandrasekharan (2), str. 81)

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1),$$

parcijalnim sumiranjem se dobija

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}\log^i n = \frac{\log^{i+1}x}{i+1} + O(\log^i x),$$

te će biti $(\Lambda(n) = \Lambda_1(n))$

$$\sum_{mn\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(m) = \sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\Lambda_k(m) =$$

$$\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\left(k\frac{x}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} + O(\log^{k-2}\frac{x}{n})\right) =$$

$$kx\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^{k-1-i}x\log^i n + O\left(\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\log^{k-2}x\right)$$

$$= kx\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^{k-1-i}x\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_1(n)\log^i n + O(x\log^{k-2}x) =$$

$$kx\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}(-1)^i\log^{k-i-1}x\left(\frac{\log^{i+1}x}{i+1} + O(\log^i x)\right) + O(x\log^{k-2}x) =$$

$$k\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\frac{1}{i+1}\right)x\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

Medjutim važi $\frac{1}{k} = \int_0^1 u^{k-1}du = \int_0^1(1-x)^{k-1}dx = \int_0^1\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}x^i dx =$

$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\frac{1}{i+1}$, te je time dokazana po drugi put teorema II.8, i ujedno pokazano da važi

(6) $$\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(m) = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

Polazeći od identiteta (str. 16)

$$\log^k n = \sum_{d|n}\Lambda_k(d)$$

sumiranjem po svim n koji ne premašuju x dobiće se

$$\sum_{n\le x}\log^k n = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda_k(d) = \sum_{mn\le x}\Lambda_k(n) =$$

$$\sum_{n\le x}\left[\frac{x}{n}\right]\Lambda_k(n) = \sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda_k(n) + O(\sum_{n\le x}\Lambda_k(n)) =$$

$$\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda_k(n) + O(x\log^{k-1}x),$$

a ako se iskoristi elementaran rezultat

$$\sum_{n\le x}\log^k n = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x)$$

dobiće se da važi

Teorema II.9. $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_k(n) = \log^k x + O(\log^{k-1}x).$

Parcijalnim sumiranjem te formule može se dobiti i opštija formula koju daje

Teorema II.10. Za svaki prirodan broj k i za $i\geq 0$ važi

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_k(n)\log^i n = \frac{k}{k+i}\log^{k+i}x + O(\log^{k+i-1}x).$$

Dokaz. $\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_k(n)\log^i n = (\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_k(n))\log^i x -$

$$-\int_1^x \frac{\sum_{n\le t}\frac{1}{n}\Lambda_k(n)}{t}\, i\log^{i-1}t\,dt = \log^{k+i}x + O(\log^{k+i-1}x) -$$

$$-\int_1^x i\frac{\log^{k+i-1}t + O(\log^{k+i-2}t)}{t}dt =$$

$$\frac{k}{k+i}\log^{k+i}x + O(\log^{k+i-1}x).$$

Teoreme II.8. i II.10. omogućuju da se dokaže sledeća teorema koja predstavlja uopštenje relacije (6).

Teorema II.11. Za sve prirodne brojeve r i s važi

$$\sum_{mn\le x}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{r!s!}{(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x).$$

Dokaz. $\sum_{mn\le x}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \sum_{n\le x}\Lambda_r(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\Lambda_s(m) =$

$$\sum_{n\le x}\Lambda_r(n)\psi_s\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\le x}\Lambda_r(n)s\frac{x}{n}\log^{s-1}\frac{x}{n} +$$

$$O\left(\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda_r(n)\log^{s-2}\frac{x}{n}\right) =$$

$$sx\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_r(n)}{n}\sum_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}(-1)^i\log^{s-1-i}x\log^i n + O\left(x\log^{s-2}x\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\Lambda_r(n)\right) =$$

$$sx\sum(-1)^i\binom{s-1}{i}\log^{s-1-i}x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_r(n)}{n}\log^i n + O(x\log^{r+s-2}x) =$$

$$rs\left(\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\binom{s-1}{i}\frac{1}{r+i}\right)x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x).$$

Koristeći istu ideju kao i u dokazu teoreme II.10. dobiće se

$$\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i\binom{s-1}{i}\frac{1}{r+i} = \int_0^1(1-t)^{s-1}t^{r-1}dt =$$

$$\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}.$$

Time se konačno dobija

$$\sum_{mn\le x}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{r!s!}{(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x).$$

Da bi se ispitalo ponašanje sume čiji je opšti član $\dfrac{\Lambda_k(n)}{\log^k n}$

nejednakost teoreme II.3 se napiše u obliku

$$\frac{\Lambda_1(n)}{\log n}\le\frac{\Lambda_k(n)}{\log^k n}\le k$$

a zatim se vrši sumiranje po svim n većim od 1 koji ne premašaju x te se dobija

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{\log n} \le \sum_{n\le x}\frac{\Lambda_k(n)}{\log^k n} \le \sum_{n\le x} k = kx + O(1).$$

Zbir $\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{\log n}$ jednak je $\pi(x) + O(\frac{x}{\log^2 x})$ (Specht (11), str. 22-23), te se stoga može formulisati

Teorema II.12. Postoje konstante A,B i neko fiksno x_0 tako da za $x\ge x_0$ važi

$$\pi(x) - A\frac{x}{\log^2 x} \le \sum_{n\le x}\frac{\Lambda_k(n)}{\log^k n} \le kx + B,$$

pri čemu n u sumi ide od 2 (zbog logaritma u imenitelju).

S obzirom na činjenicu da $\pi(x)$ teži beskonačnosti kad x teži beskonačnosti, to ova teorema ustvari pokazuje da red

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda_k(n)}{\log^k n}$$

divergira.

Teorema II.13. Za k veće od 1 važi

$$\sum_{n\le x}\frac{\psi_k(n)}{n} = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \quad \text{i} \tag{7}$$

$$\sum_{n\le x}\frac{\psi_k(n)}{n^2} = \log^{k-1}x + O(\log^{k-2}x). \tag{8}$$

Dokaz. Iz teoreme II.8. za x=n se dobija

$$\frac{\psi_k(n)}{n} = k\log^{k-1}n + O(\log^{k-2}n) \tag{9}$$

$$\frac{\psi_k(n)}{n^2} = k\frac{\log^{k-1}n}{n} + O(\frac{\log^{k-2}n}{n}). \tag{10}$$

Sumiranjem (9) po svim n koji ne premašuju x dobiće se

$$\sum_{n\le x}\frac{\psi_k(n)}{n} = \sum_{n\le x}k\log^{k-1}n + \sum_{n\le x}O(\log^{k-2}n) =$$

$$kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

(8) se dobija potpuno analogno, sumiranjem (10).

Teorema II.14. Za svaki prirodan broj k važi

$$\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

Dokaz. Koristeći teoremu II.4. i osobinu funkcije $\Lambda_1(n)$ da je jednaka nuli čim n nije stepen prostoga broja dobiće se

$$\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = \sum_{p^\alpha\le x}\Lambda_k(p^\alpha)\log p = \sum_{p^\alpha\le x} f(k,\alpha)\log^{k+1}p =$$

$$\sum_{p\le x}\log^{k+1}p + \sum_{p^\alpha\le x} f(k,\alpha)\log^{k+1}p. \qquad (\alpha\ge 2)$$

Svaki od ova dva zbira biće posebno procenjen; korišćenjem teoreme o prostim brojevima u obliku $\theta(x) = x + O(\frac{x}{\log x})$ i parcijalnim sumiranjem dobiće se

$$\sum_{p\le x}\log^{k+1}p = \theta(x)\log^k x - k\int_1^x \frac{\theta(t)\log^{k-1}t}{t}dt =$$

$$x\log^k x + O(x\log^{k-1}x) - k\int_1^x \frac{\hat{\theta}(t)\log^{k-1}t}{t}dt.$$

Medjutim kako je

$$\left|\int_1^x \frac{\theta(t)\log^{k-1}t}{t}dt\right| \le \int_1^x \left|\frac{\theta(t)}{t}\right|\log^{k-1}t\,dt \le$$

$C\int_1^x \log^{k-1}t\,dt = O(x\log^{k-1}x)$, zbog $\theta(x) = x + O(\frac{x}{\log x})$. Time se dobilo

$$\sum_{p\le x}\log^{k+1}p = x\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

$$\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}} f(k,\alpha)\log p\log^k p = O(\log^k x\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 2}}\log p) =$$

$$O(\log^k x(\sum_{p\le\sqrt{x}}\log p + \sum_{p\le\sqrt[3]{x}}\log p + \sum_{p\le\sqrt[4]{x}}\log p + \ldots)) =$$

$$O(\log^{k+1}x\sum_{p\le\sqrt{x}}\log p) = O(\log^{k+1}x\,\theta(\sqrt{x})) =$$

$$O(\sqrt{x}\log^{k+1}x) = O(x\log^{k-1}x),$$

te je time gotov dokaz teoreme.

Na str. 13. uvedena je funkcija $\rho(x) = \psi(x) - x$, pomoću koje se teorema o prostim brojevima može napisati i u obliku

$$\rho(x) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Sledeća teorema pokazuje da se funkcija $\rho(x)$ može izraziti preko svojih vrednosti u tačkama $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, itd.

Teorema II.15. Za svaki prirodan broj $k\geq 2$ važi

$$-\rho(x)\log^k x = \sum_{n\leq x} \Lambda_1(n)\log^{k-1} n\,\rho(\tfrac{x}{n}) + O(x\log^{k-1} x)$$

Dokaz. Sumiranjem već dokazanog identiteta (str. 17)

$$\Lambda_2(n)\log n = \Lambda_1(n)\log^2 n + 2\sum_{d|n} \Lambda_1(d)\ \Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log d$$

po svim n koji ne premašaju x dobiće se

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_2(n)\log n = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\log^2 n + 2\sum_{n\leq x}\ \sum_{d|n}\Lambda_1(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})\log d =$$

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\log^2 n + 2\sum_{mn\leq x}\Lambda_1(m)\Lambda_1(n)\log n =$$

$$\psi_1(x)\log^2 x + O(x\log x) + 2\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\log n\sum_{m\leq\frac{x}{n}}\Lambda_1(m) =$$

$$\psi_1(x)\log^2 x + O(x\log x) + 2\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\psi_1(\tfrac{x}{n})\log n.$$

Parcijalnim sumiranjem teoreme II.8. za k=2 lako se nalazi da je

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_2(n)\log n = 2x\log^2 x + O(x\log x),$$

što daje sledeću relaciju

(11) $$2x\log^2 x = \psi_1(x)\log^2 x + O(x\log x) + 2\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\psi_1(\tfrac{x}{n})\log n.$$

Sumiranjem elementarne relacije (Chandrasekharan (2), str. 81)

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_1(n)}{n} = \log x + O(1)$$

dobija se

(12) $$x\log^2 x = 2\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}x\log n + O(x\log x).$$

Oduzimanjem (12) od (11) dobiće se

(13) $$-\rho(x)\log^2 x = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log n + O(x\log x),$$

a to je upravo tvrdjenje teoreme za k=2. Sada se dokaz nastavlja matematičkom indukcijom; pretpostavi se da je teorema tačna za neko k, i posle množenja sa logx dobija se

$$-\rho(x)\log^{k+1}x = \sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log^{k-1}n\log\tfrac{x}{n}+\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log^k n+O(x\log^k x)=$$

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log^k n + O(x\log^k x),$$

ukoliko uspe da se pokaže da je

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log^{k-1}n\log\tfrac{x}{n} = O(x\log^k x).$$

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\rho(\tfrac{x}{n})\log^{k-1}n\log\tfrac{x}{n} = O(\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\log^{k-1}n\log\tfrac{x}{n}\cdot\tfrac{x}{n}e^{-c\sqrt{\log\frac{x}{n}}}) =$$

$$xO(\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}\log^{k-1}n) = O(x\log^k x),$$

pri čemu je korišćena činjenica da za dovoljno veliko x funkcija xe^{-cx} opada, te je

$$\log\tfrac{x}{n}e^{-c\sqrt{\log x/n}} = O(1).$$

Time je dokaz teoreme završen.

II.4 Asimptotske procene za funkcije $\Lambda_k(n)$ u aritmetičkim progresijama

Čest problem kod ispitivanja aritmetičkih funkcija je odredjivanje asimptotske formule $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)}} f(n)$, posebno ako se već zna ponašanje sume $\sum\limits_{n\le x} f(n)$ za velike vrednosti x. Oznaka $\sum\limits_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)}} f(n)$, označava sumiranje po svim n koji ne premašaju x i koji su oblika ai+l, pri čemu su i i l uzajamno prosti (razlika izmedju 1 i l, cifre *1* i slova *l*, nije lako uočljiva na mašini; u oznaci $n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)$ ako nije drugo naznačeno uvek se radi o slovu). Ispostavlja se da su za funkcije $\Lambda_k(n)$ asimptotske formule za $n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)$ vrlo slične asimptotskim formulama gde se za n ne postavlja drugi uslov sem da ne premaša x; ova sličnost je ustvari posledica već proučene bliskosti funkcija $\Lambda_k(n)$ i funkcija iz raspodele prostih brojeva; tako naprimer važi (teorema o prostim brojevima)

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda_1(n) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

a odgovarajuća teorema za aritmetičke progresije je (Prachar (21), str. 150-154)

$$\psi(x;i,l) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)}} \Lambda_1(n) = \frac{x}{\phi(i)} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

pri čemu je $\phi(i)$ Eulerova funkcija. Sledeće teoreme daju asimptotske formule za funkcije $\Lambda_k(n)$ u aritmetičkim progresijama, i slične su teoremama II.8, II.11. i II.14.

Teorema II.16. Za svako k i $(l,i)=1$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\,i)}} \Lambda_k(n) = \frac{kx}{\phi(i)}\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

Dokaz. Za k=1 već je rečeno da je tvrdjenje tačno, a za k=2 dokaz je dao Specht (11), str. 59-60. Ako je k>2, tada se uz induktivnu pretpostavku dobija

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_{k+1}(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} (\Lambda_k(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_k(d)\Lambda_1(\tfrac{n}{d})) =$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_k(n)\log n + \sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_1(n)\Lambda_k(m).$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_k(n)\log n = \frac{kx}{\phi(i)}\log^k x + O(x\log^{k-1}x) - \int_1^x (\frac{k}{\phi(i)}\log^{k-1}t + O(\log^{k-2}t))dt =$$

$$\frac{kx}{\phi(i)}\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

Ostaje znači još da se pokaže da je

$$\sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_1(n)\Lambda_k(m) = \frac{kx}{\phi(i)}\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

$$\sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_1(n)\Lambda_k(m) = \sum_{\substack{n\le x\\ (n,i)=1}} \sum_{\substack{m\le \frac{x}{n}\\ m\equiv n'1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_1(n)\Lambda_k(m) =$$

$$\sum_{\substack{n\le x\\ (n,i)=1}} \Lambda_1(n) \sum_{\substack{m\le \frac{x}{n}\\ m\equiv n'1(\mathrm{mod}\, i)}} \Lambda_k(m) = \sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n)(\frac{kx}{\phi(i)}\frac{1}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} + O(\frac{x}{n}\log^{k-2}\frac{x}{n})),$$

gde je sa n' označeno jedinstveno rešenje kongruencije $nn'\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)$, a $\chi_0(n)$ je glavni karakter od n po modulu i,

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & (i,n)=1 \\ 0 & (i,n)>1 \end{cases}.$$

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n)O(\frac{x}{n}\log^{k-2}\frac{x}{n}) = O(x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}\log^{k-2}\frac{x}{n}) =$$

$O(x\log^{k-2}x \sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}) = O(x\log^{k-1}x)$, jer je $\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n} = \log x + O(1)$.

Dokaz će biti gotov ako se još pokaže

$$(1) \qquad \sum_{n\le x}\chi_0(n)\frac{\Lambda_1(n)}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} = \frac{\log^k x}{k} + O(\log^{k-1}x).$$

Parcijalnim sumiranjem sledećeg identiteta (Specht, (11) str. 54)

(2) $$\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n} = \log x + O(1)$$ dobiće se $(j\ge 0)$

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n}\log^j n = \frac{\log^{j+1}x}{j+1} + O(\log^j x),$$ te će biti

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} = \sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\log^{k-1-j}x\cdot\log^j n$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\log^{k-1-j}x\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\chi_0(n)\Lambda_1(n)\log^j n =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\log^{k-1-j}x\left(\frac{\log^{j+1}x}{j+1} + O(\log^j x)\right) =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\frac{1}{j+1}\binom{k-1}{j}\log^k x + O(\log^{k-1}x) =$$

$$\int_0^1(1-t)^{k-1}dt\cdot\log^k x + O(\log^{k-1}x) = \frac{\log^k x}{k} + O(\log^{k-1}x).$$

Time je dokaz teoreme završen, uz napomenu da konstanta kod simbola O (a takodje i u ostalim teoremama iz ovog odeljka) zavisi ne samo od k, nego i od modula i, ali razume se ne zavisi od x.

Teorema II.17. Za svaki prirodan broj k i za $\chi_0(n)$ glavni karakter od n po modulu i važi

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_k(n) = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

Dokaz. Dokaz je indukcijom po k. Za k=1 biće

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n) = \sum_{n\le x}\Big(\sum_{d\mid(n,i)}\mu(d)\Big)\Lambda_1(n) =$$

$$\sum_{n\le x}\sum_{\substack{d\mid n\\ d\mid i}}\mu(d)\cdot\Lambda_1(n) = \sum_{md\le x}\sum_{d\mid i}\mu(d)\Lambda_1(md) =$$

$$\sum_{d\mid i}\mu(d)\sum_{m\le\frac{x}{d}}\Lambda_1(md).$$

Kako je $\Lambda_1(n) = 0$ kada $n\ne p^\alpha$, a $\mu(p^\alpha)=0$ za $\alpha\ge 2$, to u $\sum_{d\mid i}$ samo prosti brojevi koji dele i i jedinica dolaze u obzir, a sve ostale vrednosti daju nulu. Stoga je

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n) = \mu(1)\cdot\sum_{m\le x}\Lambda_1(m) + \sum_{p|i}\mu(p)\sum_{m\le\frac{x}{p}}\Lambda_1(mp) =$$

$$\psi_1(x) - \sum_{p|i}\sum_{m\le\frac{x}{p}}\Lambda_1(mp).$$

Dopuštene vrednosti za m su $1,p,p^2,\ldots,p^{\left[\frac{\log x}{\log p}-1\right]}$, jer m mora biti oblika p^α, inače je $\Lambda_1(mp)=0$. Stoga važi

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n) = \psi_1(x) - \sum_{p|i}\sum_{m\le\frac{x}{p}}\Lambda_1(mp) =$$

$$\psi_1(x) + \sum_{p|i}\log p\cdot O\left(\frac{\log x}{\log p}\right) = x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) + O(\log x) =$$

$$x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Neka je teorema tačna za neko k; tada će biti

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_{k+1}(n) = \sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_k(n)\log n + \sum_{n\le x}\chi_0(n)\sum_{d|n}\Lambda_k(d)\Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_k(n)\log n + \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\chi_0(d)\Lambda_1(d)\chi_0\left(\frac{n}{d}\right)\Lambda_k\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_k(n)\log n + \sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\chi_0(m)\Lambda_k(m).$$

Primenom parcijalnog sumiranja dobiće se

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_k(n)\log n = kx\log^k x + O(x\log^{k-1}x) - \int_1^x\frac{kt\log^{k-1}t+O(t\log^{k-2}t)}{t}dt$$

$$kx\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\chi_0(m)\Lambda_k(m) = \sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_1(n)\left(\frac{kx}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n}+O\left(\frac{x}{n}\log^{k-2}\frac{x}{n}\right)\right) =$$

$$kx\sum_{n\le x}\chi_0(n)\frac{\Lambda_1(n)}{n}\log^{k-1}\frac{x}{n} + O\left(\sum_{n\le x}\frac{x}{n}\Lambda_1(n)\log^{k-2}\frac{x}{n}\right) =$$

$$kx\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^{k-1-i}x\log^i n + O\left(x\log^{k-2}x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}\right) =$$

$$kx\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^{k-1-i}x\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_1(n)}{n}\log^i n + O(x\log^{k-2}x\cdot\log x) =$$

$$kx\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^{k-1-i}x\left(\frac{\log^{i+1}x}{i+1} + O(\log^i x)\right)+O(x\log^{k-1}x)=$$

$$\Big(k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\frac{1}{i+1}\binom{k-1}{i}\Big)x\log^k x + O(x\log^{k-1}x) =$$

$$k\Big(\int_0^1(1-t)^{k-1}dt\Big)\cdot x\log^k x + O(x\log^{k-1}x) =$$

$$x\log^k x + O(x\log^{k-1}x).$$

Time se konačno dobilo

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_{k+1}(n) = kx\log^k x + x\log^k x + O(x\log^{k-1}x) =$$
$$(k+1)x\log^k x + O(x\log^{k-1}x),$$

čime je dokaz teoreme završen.

Teorema II.18. Neka su i i l uzajamno prosti brojevi. Tada za prirodne brojeve r i s važi

$$\sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{r!s!}{\phi(i)(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x).$$

Dokaz. $\displaystyle\sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ (n,i)=1}}\Lambda_s(n)\sum_{\substack{m\le \frac{x}{n}\\ m\equiv n'l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_r(m) =$

$$\sum_{n\le x}\chi_0(n)\Lambda_s(n)\frac{r}{\phi(i)}\Big(\frac{x}{n}\log^{r-1}\frac{x}{n} + O\Big(\frac{x}{n}\log^{r-2}\frac{x}{n}\Big)\Big),$$

pri čemu je korišćena teorema II.16, a n′ označava rešenje kongruencije $nn'\equiv l(\mathrm{mod}\, i)$. Polazeći od

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_s(n)}{n} = \log^s x + O(\log^{s-1}x)$$

parcijalnim sumiranjem se dobija

(3) $$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}\chi_0(n)\Lambda_s(n)\log^j n = \frac{s}{s+j}\log^{s+j}x + O(\log^{s+j-1}x),$$

pa će stoga biti

$$\sum_{\substack{mn\le x\\ mn\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_r(m)\Lambda_s(n) = \frac{rx}{\phi(i)}\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_s(n)}{n}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\log^{r-1-j}x\log^j n +$$
$$+ O\Big(x\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_s(n)}{n}\log^{r-2}\frac{x}{n}\Big) =$$

$$\frac{rx}{\phi(i)}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\log^{r-1-j}x\sum_{n\le x}\frac{\chi_0(n)\Lambda_s(n)\log^j n}{n} +$$

$$+ O(x\log^{r-2}x \sum_{n\le x} \frac{\chi_0(n)\Lambda_s(n)}{n}) =$$

$$\frac{rx}{\phi(i)}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\log^{r-1-j}x(\frac{s}{s+j}\log^{s+j}x + O(\log^{s+j-1}x)) +$$

$$+ O(x\log^s x\cdot\log^{r-2}x) =$$

$$\frac{rs}{\phi(i)}x\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\frac{1}{s+j}\binom{r-1}{j}\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x) =$$

$$\frac{rs}{\phi(i)}\int_0^1(1-t)^{r-1}t^{s-1}dt.x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x) =$$

$$\frac{rs}{\phi(i)}\cdot\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x) =$$

$$\frac{r!s!}{\phi(i)(r+s-1)!}x\log^{r+s-1}x + O(x\log^{r+s-2}x).$$

Korišćenjem asimptotske formule za $\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n)$ i teoreme o prostim brojevima u aritmetičkim progresijama u obliku

$$\theta(x;i,l) = \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}} \log p = \frac{x}{\phi(i)} + O(\frac{x}{\log x})$$

može da se dokaže sledeća

Teorema II.19. Za svaki prirodan broj k i (i,l)=1 važi

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = \frac{x\log^k x}{\phi(i)} + O(x\log^{k-1}x).$$

Dokaz. $\displaystyle\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n) = \sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ p^\alpha\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_k(p^\alpha)\log p =$

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}}\log p\cdot\log^k p + \sum_{\substack{p^\alpha\le x,\alpha\ge 2\\ p^\alpha\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}} f(k,\alpha)\log^{k+1}p.$$ Kako je

$$\sum_{\substack{p^\alpha\le x,\alpha\ge 2\\ p^\alpha\equiv l(\mathrm{mod}\, i)}} f(k,\alpha)\log^{k+1}p = O(\sum_{p^\alpha\le x,\alpha\ge 2}\log^{k+1}p) = O(\sqrt{x}\log^{k+1}x),$$

što je dokazano kod formule za $\sum_{n\le x}\Lambda_1(n)\Lambda_k(n)$, pa se može posmatrati samo

$$\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} \log p\cdot \log^k p = \theta(x;i,1)\log^k x - \int_1^x \frac{k\theta(t;i,1)\log^{k-1}t}{t}dt =$$

$$\frac{x\log^k x}{\phi(i)} + O(x\log^{k-1}x) + O(\int_1^x \log^{k-1}t dt) =$$

$$\frac{x\log^k x}{\phi(i)} + O(x\log^{k-1}x).$$

Teorema II.20. Neka je $g(n)$ aritmetička funkcija za koju red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|\log n}{n}$ konvergira. Ako je $f(n)$ aritmetička funkcija definisana preko relacije

(4) $$f(n) = \sum_{d|n} g(d)\Lambda_k(\frac{n}{d}),$$

tada za $k\ge 2$ važe sledeće asimptotske formule:

(5) $$\sum_{n\le x} f(n) = kGx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \quad \text{i za } (i,1)=1$$

(6) $$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}} f(n) = \frac{kH}{\phi(i)}x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x),$$

pri čemu je

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|}{n} \quad \text{i} \quad H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)|g(n)|}{n}$$

gde je $\chi_0(n)$ glavni karakter od n po modulu i.

Dokaz. Relacija (4) može se preko Dirichletovih redova napisati u ekvivalentnom obliku

(7) $$F(s) = (-1)^k\frac{\zeta^{(k)}(s)G(s)}{\zeta(s)},$$

gde je $$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s},\ G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}.$$

Redovi G i H su konvergentni zbog konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(n)|\log n}{n}$ koji ih majorira. Koristeći teoremu II.8. dobiće se

$$\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{n\le x}\sum_{d|n} g(d)\Lambda_k(\frac{n}{d}) = \sum_{n\le x} g(n)\Lambda_k(m) =$$

$$\sum_{n\le x} g(n)\sum_{m\le \frac{x}{n}}\Lambda_k(m) = kx\sum_{n\le x}\frac{g(n)}{n}(\log^{k-1}\frac{x}{n} + O(\log^{k-2}\frac{x}{n})) =$$

$$kx\sum_{n\leq x}\frac{g(n)}{n}(\log^{k-1}x+\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}\log^i x\cdot\log^{k-1-i}n)+$$

$$+O(x\log^{k-2}x\sum_{n\leq x}\frac{|g(n)|}{n})=$$

$$kx\log^{k-1}x\sum_{n\leq x}\frac{g(n)}{n}+O(x\log^{k-2}x\sum_{n\leq x}\frac{|g(n)|\log n}{n})+O(x\log^{k-2}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|g(n)|}{n})=$$

$$kx\log^{k-1}x\sum_{n\leq x}\frac{g(n)}{n}+O(x\log^{k-2}x)=$$

$$kx\log^{k-1}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n}+x\log^{k-1}xO(\sum_{n>x}\frac{|g(n)|}{n})+O(x\log^{k-2}x)=$$

$$kGx\log^{k-1}x+O(x\log^{k-2}x\sum_{n>x}\frac{|g(n)|\log n}{n})+O(x\log^{k-2}x)=$$

$$kGx\log^{k-1}x+O(x\log^{k-2}x).$$

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}}f(n)=\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}}\sum_{d|n}g(d)\Lambda_k(\tfrac{n}{d})=$$

$$\sum_{\substack{mn\leq x\\ mn\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}}g(n)\Lambda_k(m)=\sum_{\substack{n\leq x\\ (n,i)=1}}g(n)\sum_{\substack{m\leq\frac{x}{n}\\ m\equiv n'1(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_k(m)=$$

$$\sum_{n\leq x}\chi_0(n)g(n)\sum_{\substack{m\leq\frac{x}{n}\\ m\equiv n'1(\mathrm{mod}\, i)}}\Lambda_k(m),$$

gde je n' rešenje kongruencije $nn'\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)$. Korišćenjem teoreme II.16. dobiće se

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\, i)}}f(n)=\sum_{n\leq x}\chi_0(n)g(n)(\frac{kx}{\phi(i)n}\log^{k-1}\frac{x}{n}+O(\frac{x}{n}\log^{k-2}\frac{x}{n}).$$

Odavde je dokaz isti kao i za prethodnu formulu, samo svuda stoji $\chi_0(n)g(n)$ umesto $g(n)$ i javlja se još i konstanta $\frac{1}{\phi(i)}$, te nema potrebe za ponavljanjem.

T R E Ć I   D E O

Odredjivanje asimptotskih formula nekih aritmetičkih funkcija metodom integralnih jednačina

III.1 Definicija i osobine funkcija $a_k(n)$ i $b_k(n)$

U ovom delu biće ispitivane asimptotske formule nekih aritmetičkih funkcija metodom integralnih jednačina Levina i Feinleiba (Levin i Feinleib (16), Postnikov (18), str.379-393). Svakoj multiplikativnoj funkciji f(n) pridružuje se jedna nova aritmetička funkcija $\Lambda_f(n)$ koja je jednaka nuli čim n nije oblika p^α, a iz asimptotske formule za $\Lambda_f(n)$ (koja je često posledica teoreme o prostim brojevima) rešavanjem izvesne integralne jednačine dobija se asimptotska formula za f(n). U četvrtom delu rada biće definisane funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ koje generališu i funkcije $\Lambda_k(n)$ i funkcije $\Lambda_f(n)$.

Neka su $a_k(n)$ i $b_k(n)$ za svaki prirodan broj $k\geq 2$ aritmetičke funkcije definisane na sledeći način preko Dirichletovih redova:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k(n)n^{-s} = \frac{1}{\zeta^k(s)}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)n^{-s} = \frac{\zeta^k(s)}{\zeta^k(2s)}. \tag{2}$$

Ispitivanje se vrši za $k\geq 2$, jer se za k=1 dobijaju dobro poznate funkcije teoreije brojeva $a_1(n)=\mu(n)$ i $b_1(n)=\mu^2(n)$, koje su obe multiplikativne. Iz identiteta

$$\frac{1}{\zeta^{k-1}(s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta^k(s)},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{1}{\zeta^{k-1}(s)} = \frac{1}{\zeta^k(s)},$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\cdot\frac{\zeta^{k-1}(s)}{\zeta^{k-1}(2s)} = \frac{\zeta^k(s)}{\zeta^k(2s)}$$

primenom teoreme o jedinstvenosti Dirichletovih redova dobijaju se relacije

(3) $$a_{k-1}(n) = \sum_{d|n} a_k(d),$$

(4) $$a_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) a_{k-1}(\tfrac{n}{d}) \quad \text{i}$$

(5) $$b_k(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d) b_k(\tfrac{n}{d}).$$

Relacije (4) i (5) zajedno sa multiplikativnošću $a_1(n)$ i $b_1(n)$ daju multiplikativnost funkcija $a_k(n)$ i $b_k(n)$; znači za svaki par uzajamno prostih brojeva m i n $a_k(mn) = a_k(m)a_k(n)$ i $b_k(mn) = b_k(m)b_k(n)$. Isto to se zaključuje i iz sledećeg razlaganja

$$\zeta^{-k}(s) = \prod_p (1-p^{-s})^k = \prod_p \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} p^{-is}. \text{ Stoga je}$$

(6) $$a_k(p^i) = \begin{cases} 0 & \text{za } i>k \\ (-1)^i \binom{k}{i} & i=1,2,\dots,k \end{cases}.$$

Slično se nalazi

$$\zeta^{-k}(2s)\zeta^k(s) = \prod_p (1+p^{-s})^k = \prod_p \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} p^{-is}. \text{ Stoga je}$$

(7) $$b_k(p^i) = \begin{cases} 0 & \text{za } i>k \\ \binom{k}{i} & i=1,2,\dots,k. \end{cases}$$

Relacije (6) i (7) zajedno sa multiplikativnošću funkcija $a_k(n)$ i $b_k(n)$ daju

$$b_k(n) = |a_k(n)|.$$

Radi primene postupka Levina i Feinleiba na odredjivanje asimptotske formule za funkciju $b_k(n)$ potrebno je grubo odrediti tu asimptotiku, što je i sadržaj sledeče leme.

Lema III.1. $$\sum_{n\le x} b_k(n) = O(x \log^{k-1} x),$$

$$\sum_{n\le x} \frac{b_k(n)}{n} = O(\log^k x).$$

Dokaz. Lema je očigledno tačna za $k=1$, jer je

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = O\Big(\sum_{n\leq x} 1\Big) = O(x),$$

a drugi deo se lako dobija parcijalnim sumiranjem. Neka je sada lema tačna za neko k; korišćenjem indukcije i (5) dobiće se

$$\sum_{n\leq x} b_{k+1}(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{d|n} \mu^2(d) b_k\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{mn\leq x} \mu^2(m) b_k(n) =$$

$$\sum_{n\leq x} b_k(n) \sum_{m\leq\frac{x}{n}} \mu^2(m) = O\Big(\sum_{n\leq x} \frac{x}{n} b_k(n)\Big) = O(x\log^k x).$$

$$\sum_{n\leq x} \frac{b_{k+1}(n)}{n} = \frac{1}{x}\Big(\sum_{n\leq x} b_{k+1}(n)\Big) - \int_1^x \Big(\sum_{n\leq t} b_{k+1}(n)\Big)\frac{-1}{t^2}dt =$$

$$O(\log^k x) + O(\log^{k+1} x) = O(\log^{k+1} x).$$

III.2 Metoda integralnih jednačina

Za svaku multiplikativnu aritmetičku funkciju $f(n)$ definiše se nova aritmetička funkcija $\Lambda_f(n)$ (Levin i Feinleb (16), Postnikov (19), Postnikov (18), str. 379-393) na sledeći način:

(1) $$f(n)\log n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_f(\frac{n}{d}),$$

ili što je ekvivalentno, Dirichletov red $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ zadovoljava uslov

(2) $$-\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_f(n)n^{-s}.$$

Za funkcije $a_k(n)$ i $b_k(n)$ te funkcije se mogu odrediti na sledeći način:

Za $a_k(n)$ $$-\frac{F'(s)}{F(s)} = (-\log F(s))' = (-k\log\prod_p(1-p^{-s}))' =$$

$$(-\sum_p \log(1-p^{-s}))' = \sum_p \sum_{i=1}^{\infty} (-k)\log p\cdot p^{-s}.$$

Prema tome važi

(3) $$\Lambda_{a_k}(n) = -k\Lambda_1(n).$$

Za $b_k(n)$ $$(-\log F(s))' = (-k\sum_p \log(1+p^{-s})' =$$

$$\sum_p - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i k\log p\cdot p^{-is}.$$ Prema tome važi

$$\Lambda_{b_k}(n) = \begin{cases} 0 & n\neq p^a \\ k\log p & n=p^{2m-1} \quad m=1,2,\ldots \\ -k\log p & n=p^{2m} \quad m=1,2,\ldots \end{cases}$$

Teorema Levina i Feinleiba tvrdi sledeće: Neka je $f(n)$ multiplikativna funkcija za koju važi

$$\sum_{n\leq x} |f(n)| = O(\log^A x),$$

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_f(n) = \tau\log x + B + h(x),$$

pri čemu $h(x)$ ne raste i $h(x) = O(\min(1,\log^{-N}x))$. Tada je

$$\sum_{n\leq x} f(n) = K\log^{\tau}x + O(\log^{A-1}x),$$

gde je K neka konstanta (Postnikov (18), str. 381-383). Korišćenjem teoreme o prostim brojevima nalazi se za funkciju $b_k(n)$

(4) $$\sum_{n\leq x}\Lambda_{b_k}(n) = \sum_{p^{2m-1}\leq x} k\log p + O(x\log^{-N}x) = kx + O(x\log^{-N}x),$$

pri čemu je N proizvoljan prirodan broj. Očigledno, funkcija $b_k(n)$ ne ispunjava uslove teoreme Levina i Feinleiba, medjutim sledeća lema pokazuje da funkcija $\frac{b_k(n)}{n}$ ispunjava uslove te teoreme.

Lema III.2 Za svaku multiplikativnu funkciju $f(n)$ i svaku totalno multiplikativnu funkciju $g(n)$ važi

$$\Lambda_{fg}(n) = \Lambda_f(n)g(n).$$

Dokaz. Ako se (1) pomnoži sa $g(n)$ dobiće se

$$f(n)g(n)\log n = \sum_{d|n} f(d)g(n)\Lambda_f(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} f(d)g(d)g(\tfrac{n}{d})\Lambda_f(\tfrac{n}{d}),$$

te je zbog jednoznačnosti funkcije $\Lambda_f(n)$ dokaz gotov. Primenom te leme dobija se $(g(n)=\frac{1}{n})$ da funkcija $g_k(n) = \frac{b_k(n)}{n}$ zadovoljava uslove teoreme Levina i Feinleiba, jer je po lemi III.1

$$\sum_{n\leq x} g_k(n) = O(\log^k x),$$

($g_k(n)$ je nenegativna funkcija, pa apsolutna vrednost nije potrebna), a parcijalnim sumiranjem (4) dobiće se

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{g_k}(n) = \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\Lambda_{b_k}(n) = k\log x + O(1).$$

Sada se lako može dobiti integralna jednačina koju zadovoljava funkcija $m_k(x) = \sum_{n\leq x} g_k(n)$, ako se u (1) umesto f stavi g_k i sumira po svim n koji ne premašuju x dobiće se

$$\sum_{n\leq x} g_k(n)\log n = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda_{g_k}(n)g_k(\tfrac{n}{d}) =$$

$$\sum_{n\leq x} g_k(n)\sum_{m\leq\frac{x}{n}}\Lambda_{g_k}(m) = \sum_{n\leq x} g_k(n)(k\log\tfrac{x}{n} + O(1)) =$$

$$km_k(x)\log x - k\sum_{n\le x} g_k(n)\log n + O(\log^k x).$$

Posle parcijalnog sumiranja $\sum_{n\le x} g_k(n)\log n$ i sredjivanja dobiće se

(5) $$m_k(x)\log x - (k+1)\int_1^x \frac{m_k(t)}{t}dt = O(\log^k x),$$

i to je integralna jednačina koju zadovoljava funkcija $m_k(x)=\sum_{n\le x} g_k(n)$.

Ta jednačina se rešava na sledeći način: x se smeni sa u, jednačina se podeli sa $u\log^{k+2}u$, i zatim se integrali (zbog logaritma u imeniocu) od 2 do x, te se dobija

$$\int_2^x \frac{m_k(u)du}{u\log^{k+1}u} - \int_2^x \frac{(k+1)du}{u\log^{k+2}u}\int_1^u \frac{m_k(t)}{t}dt = C_k + O(\frac{1}{\log x}).$$

Smena reda integracije daće

$$\int_2^x \frac{m_k(u)du}{u\log^{k+1}u} - (k+1)\int_1^2 \frac{m_k(t)}{t}dt\int_2^x \frac{du}{u\log^{k+2}u} - (k+1)\int_2^x \frac{m_k(t)}{t}dt\int_t^x \frac{du}{u\log^{k+2}u} =$$

$$C_k + O(\frac{1}{\log x}).$$

Posle izračunavanja integrala dobiće se

(6) $$\int_2^x \frac{m_k(t)}{t}dt = C_k\log^{k+1}x + O(\log^k x).$$

Smenom relacije (6) u (5) ($\int_1^x \frac{m_k(t)}{t}dt=\int_2^x \frac{m_k(t)}{t}dt+O(1)$) biće

$$m_k(x)\log x - (k+1)C_k\log^{k+1}x = O(\log^k x), \text{ ili}$$

(7) $$\sum_{n\le x} \frac{b_k(n)}{n} = m_k(x) = B_k\log^k x + O(\log^{k-1}x).$$

Time je dobivena asimptotska formula za $\frac{b_k(n)}{n}$; konstanta B_k biće eksplicitno odredjena u sledećem delu, ali relacija (7) predstavlja znatno poboljšanje leme III.1. Iz (7) se <u>ne može</u> parcijalnim sumiranjem dobiti precizna formula za $b_k(n)$, već samo gruba procena leme III.1, te se mora primeniti druga metoda. Relacija

$$(8) \qquad b_k(n)\log n = \sum_{d|n} b_k(d)\Lambda_{b_k}(\tfrac{n}{d})$$

se sumira po svim n koji ne premašaju x:

$$\sum_{n\le x} b_k(n)\log n = \sum_{mn\le x} b_k(n)\Lambda_{b_k}(m) = \sum_{n\le x} b_k(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\Lambda_{b_k}(m).$$

Ako se relacija (4) napiše u obliku (N=1)

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{b_k}(n) = kx + O(\frac{x}{\log 2x})$$

(što je moguće jer je $\frac{1}{\log x} = O(\frac{x}{\log 2x})$, a dvojka je potrebna zbog logaritma u imeniocu) dobiće se

$$(9) \qquad \sum_{n\le x} b_k(n)\log n = kx\sum_{n\le x}\frac{b_k(n)}{n} + O(x\sum_{n\le x}\frac{b_k(n)}{n\log\frac{2x}{n}}) =$$

$$kxB_k\log^k x + O(x\log^{k-1}x) + O(x\sum_{n\le x}\frac{b_k(n)}{n\log\frac{2x}{n}}).$$

Da bi se iz (9) mogla dobiti asimptotska formula za $b_k(n)$ koristi se

Lema III.3. Neka je $f(n)\ge 0$ i neka je za $m\ge 2$

$$\sum_{n\le x} f(n) = A\log^m x + O(\log^{m-1}x).$$

Tada je

$$\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\log\frac{2x}{n}} = O(\log^{m-1}x).$$

Dokaz. Iz pretpostavke sledi

$$\sum_{n\le x}\frac{f(n)}{\log x} = A\log^{m-1}x + O(\log^{m-2}x) = O(\log^{m-1}x),$$

pa je dovoljno pokazati da je

$$\sum_{n\le x} f(n)(\frac{1}{\log\frac{2x}{n}} - \frac{1}{\log x}) = O(\log^{m-1}x).$$

$$\sum_{n\le x} f(n)(\frac{1}{\log\frac{2x}{n}} - \frac{1}{\log x}) = \sum_{n\le x} f(n)\int_{2x/n}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t} =$$

$$f(1)\int_{2x}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t}+f(2)\int_{x}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t}+f(3)\int_{2x/3}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t}+\ldots+f([x])\int_{2x/[x]}^{x}\frac{dt}{t\log t}=$$

$$f(1)\int_{2x}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t}+\sum_{i=2}^{[x]-1}\int_{2x/i+1}^{2x/i}\frac{\sum_{i+1\leq n\leq x} f(n)}{t\log^2 t}dt=$$

$$O(1)+\sum_{i=2}^{[x]-1}\int_{2x/i+1}^{2x/i}\frac{\sum_{2x/t\leq n\leq x} f(n)}{t\log^2 t}dt.$$ Naime za $t\in[2x/i+1,2x/i]$

$$\sum_{2x/t\leq n\leq x} f(n)=\sum_{i+1\leq n\leq x} f(n),$$

jer je za $t=2x/i+1$ $n=2\frac{x}{t}=i+1$, pa je $n\geq i+1$, a za $t<2\frac{x}{i}, n>2\frac{x}{t}>i$,

tj. n opet polazi od i+1. Stoga je

$$\sum_{n\leq x} f(n)\int_{2x/n}^{x}\frac{dt}{t\log^2 t}=O(1)+\sum_{i=2}^{[x]-1}\int_{2x/i+1}^{2x/i}\frac{\sum_{2x/t\leq n\leq x} f(n)}{t\log^2 t}dt=$$

$$O(1)+\int_{2x/[x]}^{x}\frac{\sum_{2x/t\leq n\leq x} f(n)}{t\log^2 t}dt=O(1)+\int_{2}^{x}\frac{\sum_{2x/t\leq n\leq x} f(n)}{t\log^2 t}dt=$$

$$\int_{2}^{x}\frac{A\log^m x+O(\log^{m-1}x)-A\log^m 2x/t+O(\log^{m-1}2x/t)}{t\log^2 t}dt+O(1)=$$

$$O(1)+\int_{2}^{x}\frac{O(\log^{m-1}x)+C\log x\cdot\log^{m-1}t+O(\log^{m-1}x)}{t\log^2 t}dt=$$

$O(\log^{m-1}x)$.

Lemu III.3. moguće je primeniti na funkciju $f(n)=\frac{b_k(n)}{n}$, pri čemu je $A=B_k$, $m=k$, pa se dobija

$$\sum_{n\leq x} \frac{b_k(n)}{n\log 2\frac{x}{n}} = O(\log^{k-1}x),$$

pa relacija (9) postaje

$$\sum_{n\leq x} b_k(n)\log n = kB_k x\log^k x + O(x\log^{k-1}x), \tag{10}$$

a parcijalnim sumiranjem se odatle nalazi

$$\sum_{n\leq x} b_k(n) = kB_k x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x). \tag{11}$$

Time su dobivene asimptotske formule za funkcije $b_k(n)$, a pomoću njih se dobijaju asimptotske formule za funkcije $a_k(n)$, koje ne sadrže glavni član, već samo član sa simbolom O, jer su za razliku od funkcija $b_k(n)$ koje su nenegativne, funkcije $a_k(n)$ promenljivog znaka, pa glavni član u asimptotskoj formuli otpada. Sumiranjem relacije (4) po svim n koji ne premašuju x dobija se

$$\sum_{n\leq x} a_k(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \mu(d)a_{k-1}(\tfrac{n}{d}) = \sum_{mn\leq x} \mu(m)a_{k-1}(n) =$$

$$\sum_{n\leq x} a_{k-1}(n)\sum_{m\leq \frac{x}{n}}\mu(m) = \sum_{n\leq x} a_{k-1}(n)O(\frac{x}{n\log 2x/n}) =$$

$$O(x\sum_{n\leq x} \frac{|a_{k-1}(n)|}{n\log 2\frac{x}{n}}) = O(x\sum_{n\leq x} \frac{b_{k-1}(n)}{n\log 2\frac{x}{n}}) = O(x\log^{k-2}x),$$

pri čemu je korišćena relacija (7), lema III.3, kao i procena

$$\sum_{n\leq x} \mu(n) = O(\frac{x}{\log 2x}),$$

koja je posledica teoreme o prostim brojevima sa ostatkom. Parcijalnim sumiranjem

$$\sum_{n\leq x} a_k(n) = O(x\log^{k-2}x) \tag{12}$$

dobijaju se formule

$$\sum_{n\leq x} a_k(n)\log n = O(x\log^{k-1}x) \text{ i} \tag{13}$$

$$(14)\qquad \sum_{n\le x}\frac{a_k(n)}{n} = O(\log^{k-1}x).$$

Ova poslednja relacija omogućava da se dobije i bolja procena za funkciju $f_k(n) = \frac{a_k(n)}{n}$. Na osnovu leme III.2. biće

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{f_k}(n) = -k\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_1(n)}{n} = -k\log x - k + O\left(\frac{1}{\log 2x}\right),$$

pri čemu je korišćen jedan od oblika teoreme o prostim brojevima sa ostatkom. Sumiranjem (1) sa f_k umesto f po svim n koji ne premašaju x dobija se

$$\sum_{n\le x} f_k(n)\log n = \sum_{mn\le x} f_k(n)\Lambda_{f_k}(m) = \sum_{n\le x} f_k(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\Lambda_{f_k}(m) =$$

$$\sum_{n\le x} f_k(n)\left(-k\log\frac{x}{n} - k + O\left(\frac{1}{\log 2\frac{x}{n}}\right)\right) =$$

$$-k\sum_{n\le x} f_k(n)\log\frac{x}{n} - k\sum_{n\le x} f_k(n) + O\left(\sum_{n\le x}\frac{|f_k(n)|}{\log 2\frac{x}{n}}\right) =$$

$$-k\sum_{n\le x} f_k(n)\log\frac{x}{n} + O(\log^{k-1}x) + O\left(\sum_{n\le x}\frac{b_k(n)}{n\log 2\frac{x}{n}}\right) =$$

$$-k\sum_{n\le x} f_k(n)\log\frac{x}{n} + O(\log^{k-1}x),$$

pri čemu je korišćena relacija (7) i lema III.3. Odavde se parcijalnim sumiranjem i uvodjenjem oznake $s_k(x) = \sum_{n\le x} f_k(n)$ dobija

$$(15)\qquad s_k(x)\log x + (k-1)\int_1^x \frac{s_k(t)}{t}dt = O(\log^{k-1}x).$$

Ova integralna jednačina rešava se tako što se pomnoži sa $\frac{\log^{k-2}x}{x}$, x se smeni sa u, a zatim se cela jednačina integrali od 1 do x. Tako se dobija

$$\int_1^x \frac{s_k(u)\log^{k-1}u}{u}du + (k-1)\int_1^x \frac{\log^{k-2}u}{u}du\int_1^u \frac{s_k(t)}{t}dt = O(\log^{2k-2})$$

$$\int_1^x \frac{s_k(u)\log^{k-1}u}{u}du + \int_1^x \frac{s_k(t)}{t}dt\int_t^x (k-1)\frac{\log^{k-2}u}{u}du = O(\log^{2k-2}x)$$

$$\int_1^x \frac{s_k(u)\log^{k-1}u}{u}du + \int_1^x \frac{s_k(t)}{t}(\log^{k-1}x-\log^{k-1}t)dt = O(\log^{2k-2}x)$$

$$\log^{k-1}x\int_1^x \frac{s_k(t)}{t}dt = O(\log^{2k-2}x)$$

$$\int_1^x \frac{s_k(t)}{t}dt = O(\log^{k-1}x). \tag{16}$$

Smenom (16) u (15) dobija se $s_k(x) = O(\log^{k-2}x)$, odnosno

$$\sum_{n\leq x} \frac{a_k(n)}{n} = O(\log^{k-2}x), \tag{17}$$

što je, razume se, pojačanje asimptotske formule (14). Ceo postupak je detaljno sproveden, jer da se direktno primenila teorema Levina i Feinleiba, dobila bi se upravo procena (14), pošto se u opštem slučaju o nepoznatoj funkciji ne zna mnogo, već se koristi sasvim gruba procena $\sum_{n\leq x} f(n) = O(\sum_{n\leq x} |f(n)|)$, dok je u ovom slučaju poznavanje grube procene (14) omogućilo da se dobije integralna jednačina (15) koja na desnoj strani sadrži $O(\log^{k-1}x)$, a ne $O(\log^k x)$. Rezultati ovog odeljka formulisani su u sledećoj teoremi:

Teorema III.1. Za $k\geq 2$ važe procene

$$\sum_{n\leq x} a_k(n) = O(x\log^{k-2}x),$$

$$\sum_{n\leq x} \frac{a_k(n)}{n} = O(\log^{k-2}x),$$

$$\sum_{n\leq x} b_k(n) = kB_k x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \text{ i}$$

$$\sum_{n\leq x} \frac{b_k(n)}{n} = B_k\log^k x + O(\log^{k-1}x),$$

a konstante B_k biće eksplicitno odredjene u sledećem odeljku.

III.3 Primena jedne Tauberove teoreme na odredjivanje asimptotske formule za funkciju $\frac{b_k(n)}{n}$

Asimptotska formula za funkciju $\frac{b_k(n)}{n}$, kao i vrednost konstante B_k mogu se dobiti primenom sledeće Tauberove teoreme (H. Onishi (8)):

Neka je $\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, $a_n \geq 0$ *i*

α) $\phi(s)$ *konvergira za* $\sigma>0$, $s=\sigma+it$,

b) $\phi(s) = \frac{1}{s^{\alpha}} + O(\frac{1}{|s|^{\alpha-1}})$ *za* $\alpha>1$, $|s|\leq 1$,

c) $\phi(s) = O(|s|^{K})$ *za* $t\geq 1, \sigma\geq 0$ *i* $K>0$. *Tada je*

$$\sum_{n\leq x} a_n = \Gamma(\alpha+1)^{-1}\log^{\alpha}x + O(\log^{\alpha-1}x).$$

Navedena teorema primeniće se na funkciju

$$\phi(s) = (\frac{\zeta(2)\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)})^k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

pri čemu je jasno da je

$$a_n = \zeta(2))^k \frac{b_k(n)}{n} = \frac{\pi^{2k} b_k(n)}{6^k n} \geq 0.$$

$\phi(s)$ je očevidno konvergentno za $\sigma>0$, jer je red kojim je definisana zeta funkcija konvergentan za $\sigma>1$. Za $|s-1|\leq 1$ važi razvoj

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2+\ldots$$

pa znači za $|s|\leq 1$ važi

$$\zeta(s+1) = \frac{1}{s} + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{\zeta(2s+2)} = \frac{1}{\zeta(2)} + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots ,$$

pri čemu numeričke vrednosti konstanti a_k i b_k ovde nisu od značaja, te se množenjem dobija da važi za $|s|\leq 1$

$$\left(\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}\right)^k = \frac{1}{\zeta^k(2)s^k} + c_{k-1}s^{1-k} + \dots + c_{-1}s^{-1} + c_0 + c_1 s + \dots$$

pa je prema tome

$$\phi(s) = s^{-k} + O(|s|^{1-k}),$$

te je i druga pretpostavka teoreme ispunjena ($\alpha=k$). Za prirodan broj k aritmetička funkcija $\tau_k(n)$ definiše se preko svog Dirichletovog reda na sledeći način:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_k(n) n^{-s} = \zeta^k(s),$$

odakle sledi da je $\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d)$. Kako važi

$$b_2(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d)\mu^2(\tfrac{n}{d}) \le \sum_{d|n} 1 \le \tau_2(n) = \tau(n),$$

ako se pretpostavi da važi $b_{k-1}(n) \le \tau_{k-1}(n)$, onda se dobija

$$b_k(n) = \sum_{d|n} \mu^2(d) b_{k-1}(n/d) \le \sum_{d|n} \tau_{k-1}(\tfrac{n}{d}) = \tau_k(n),$$

te je time indukcijom pokazano da važi $b_k(n) \le \tau_k(n)$ za $k \ge 2$.

$$\left|\frac{\zeta^k(s+1)}{\zeta^k(2s+2)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^{s+1}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_k(n)}{n^{\sigma+1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^{\sigma+1}} \le$$

$$\zeta^k(\sigma+1) \le ct^{k(1-\delta)} = O(|s|^K),$$

pri čemu je korišćena sledeća procena (Chandrasekharan (1), str.33)

$$|\zeta(s)| \le c(\delta)t^{1-\delta} \qquad (0<\delta<1)$$

za $\sigma \ge \delta, t \ge 1$, te je i poslednja pretpostavka teoreme zadovoljena, pošto $\sigma+1 \ge \delta$ daje uslov $\sigma \ge -1+\delta > 0$. Stoga primena teoreme daje

$$\sum_{n\le x} a_n = \sum_{n\le x} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^k \cdot \frac{b_k(n)}{n} = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \log^k x + O(\log^{k-1} x)$$

odnosno

$$\sum_{n\le x} \frac{b_k(n)}{n} = \frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k \log^k x + O(\log^{k-1} x)$$

odakle sledi sa uporedjivanjem teoreme III.1 da je

$$B_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^k.$$

ČETVRTI DEO

Funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$

IV.1 Definicija i opšte osobine

Za svaku aritmetičku funkciju f(n) definišimo novu aritmetičku funkciju $\Lambda_{f,k}(n)$ na osnovu sledeće relacije:

(1) $$f(n)\log^k n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d}).$$

Ovakva definicija omogućava rekurzivno izračunavanje funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$; k je proizvoljan prirodan broj, a svaki izbor broja k daje drugu funkciju $\Lambda_{f,k}(n)$, tako da definicija (1) definiše ustvari familiju aritmetičkih funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ koje zavise od funkcije f(n) i od prirodnog broja k. Ovako definisane funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ predstavljaju poopštenje i funkcija $\Lambda_k(n)$ i funkcija $\Lambda_{f(n)}$, naime za f(n)=1 dobija se iz (1)

$$\log^k n = \sum_{d|n} \Lambda_{1,k}(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} \Lambda_{1,k}(d),$$

odakle se pomoću formule inverzije dobija

$$\Lambda_{1,k}(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log^k \frac{n}{d} = \Lambda_k(n).$$

S druge strane, ako se u (1) stavi k=1 dobija se

$$f(n)\log n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{f,1}(\tfrac{n}{d}),$$

a to je upravo relacija koja definiše funkciju $\Lambda_f(n)$ (v. str. 45), te je stoga

$$\Lambda_f(n) = \Lambda_{f,1}(n).$$

Definicija (1) može se dati i u drugom obliku; ako je $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, tada se počlanim diferenciranjem nalazi $F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\log^k n\cdot n^{-s}$, pa se (1) može napisati u obliku

$$(2) \qquad (-1)^k F^{(k)}(s) = F(s) \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{f,k}(n) n^{-s} \qquad \text{ili}$$

$$(3) \qquad \frac{(-1)^k F^{(k)}(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{f,k}(n) n^{-s},$$

što može da služi ako ekvivalentna definicija funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$.

Definicija (1) ima smisla za svaku aritmetičku funkciju $f(n)$ i svaki prirodan broj k, medjutim sledeća teorema o jednoznačosti pokazuje da je proučavanje funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$ zgodno ograničiti na one funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ koje odgovaraju multiplikativnim funkcijama $f(n)$.

Teorema IV.1. Svaka multiplikativna funkcija $f(n)$ za svaki prirodan broj k jednoznačno odredjuje funkciju $\Lambda_{f,k}(n)$.

Dokaz. Neka je, nasuprot tvrdjenju, za dve različite multiplikativne funkcije $f(n)$ i $g(n)$ $\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{g,k}(n)$. Tada je $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{f,k}(n) n^{-s} = \sum^{\infty} \Lambda_{g,k}(n) n^{-s}$, odnosno

$$(4) \qquad (-1)^k \frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} = (-1)^k \frac{G^{(k)}(s)}{G(s)}$$

$$(5) \qquad (-1)^k F^{(k)}(s) G(s) = (-1)^k G^{(k)}(s) F(s) \qquad \text{odakle je}$$

$$(6) \qquad \sum_{d|n} g(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \log^k \frac{n}{d} = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \log^k \frac{n}{d}.$$

Kako su $f(n)$ i $g(n)$ po pretpostavci multiplikativne, $f(1)=g(1)=1$, pa iz (6) sledi za $n=p$

$$g(1)f(p)\log^k p + g(p)f(1)\log^k 1 = f(1)g(p)\log^k p + f(p)g(1)\log^k 1,$$

odnosno $f(p)=g(p)$. Neka je pokazano da je $f(p^i)=g(p^i)$ za $i=1,\dots,a-1$. Ako se u (6) stavi $n=p^a$ dobiće se

$$\sum_{i=0}^{a-1} g(p^i) f(p^{a-i}) \log^k p^{a-i} = \sum_{i=0}^{a-1} f(p^i) g(p^{a-i}) \log^k p^{a-i}$$

$$f(p^a)\log^k p^a + \sum_{i=1}^{a-1} f(p^i) f(p^{a-i}) \log^k p^{a-i} = g(p^a)\log^k p^a + \sum_{i=1}^{a-1} f(p^i) f(p^{a-i}) \log^k p^{a-i}$$

odakle se dobija $f(p^a) = g(p^a)$ za svaki prirodan broj a, pa je zbog multiplikativnosti $f(n) = g(n)$ za sve n, što je kontradikcija. Time je teorema dokazana.

Teorema IV.2. Za svako $k \geq 2$ važi

(7) $$\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{f,k-1}(n)\log n + \sum_{d|n} \Lambda_{f,1}(d)\Lambda_{f,k-1}(\tfrac{n}{d}).$$

Dokaz. $$F(s)\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k}(n)n^{-s} = (-1)^k F^{(k)}(s) =$$

$$-((-1)^{k-1}F^{(k-1)}(s))' = (-1)(F(s)\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k-1}(n)n^{-s})' =$$

$$F(s)(\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k-1}(n)\log n\cdot n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,1}(n)n^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k-1}(n)n^{-s}).$$

Teorema o jedinstvenosti Dirichletovih redova omogućava da se posle skraćivanja sa $F(s)$ dobije tvrdjenje teoreme.

Teorema IV.3 Ako je $f(n)$ multiplikativna funkcija, a n ima više od k različitih prostih faktora, onda je $\Lambda_{f,k}(n)=0$.

Dokaz. Za k=1 Postnikov daje (Postnikov (18), str. 379-380) skicu dokaza pomoću Dirichletovih redova. Sledeći dokaz za k=1 ($\Lambda_{f,1}(n) = \Lambda_f(n)$) je elementaran.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,1}(n)n^{-s} = -\frac{F'(s)}{F(s)},$$

pa ako se definiše funkcija $\bar{f}(n)$ redom $\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}(n)n^{-s}$, tada je

$$\Lambda_{f,1}(n) = \Lambda_f(n) = \sum_{d|n}\bar{f}(d)f(\tfrac{n}{d})\log\tfrac{n}{d}.$$

Neka n ima više od jednog prostog faktora, tada je $n=p^a m$, $m>1$ i $(p,m)>1$. Delitelji broja n su brojevi d, pd, p^2d, ..., $p^a d$, gde je d delitelj broja m.

$$\Lambda_f(p^a m) = \sum_{d|p^a m}\bar{f}(d)f(\tfrac{p^a m}{d})\log\tfrac{p^a m}{d} =$$

$$\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{p^a m}{d})\log\tfrac{m}{d}p^a + \sum_{d|m}\bar{f}(pd)f(p^{a-1}\tfrac{m}{d})\log p^{a-1}\tfrac{m}{d} + \sum_{d|m}\bar{f}(p^a d)f(\tfrac{m}{d})\log\tfrac{m}{d} =$$

$$\bar{f}(1)f(p^a)\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{m}{d})(\log p^a + \log\tfrac{m}{d}) + \bar{f}(p)f(p^{a-1})\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{m}{d})(\log p^{a-1} + \log\tfrac{m}{d}) +$$

$$+ \ldots + \bar{f}(p^a)f(1)\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{m}{d})(\log 1 + \log\tfrac{m}{d}) =$$

$$\sum_{d|p^a}\bar{f}(d)f(\tfrac{p^a}{d})\log\tfrac{p^a}{d}\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{m}{d}) +$$

$$\sum_{d|p^a}\bar{f}(d)f(\tfrac{p^a}{d})\sum_{d|m}\bar{f}(d)f(\tfrac{m}{d})\log\tfrac{m}{d} = 0,$$

što dolazi zbog $F(s)\cdot\frac{1}{F(s)} = 1$, odnosno

$$\sum_{d|n}f(d)\bar{f}(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n}\bar{f}(d)f(\tfrac{n}{d}) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}.$$

U dokazu je korišćena multiplikativnost funkcija $f(n)$ i $\bar{f}(n)$, pa treba da se pokaže da multiplikativnost $f(n)$ povlači za sobom multiplikativnost funkcije $\bar{f}(n)$. Neka je $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$,

$G(s) = \prod_p(1+\bar{f}(p)p^{-s}+\bar{f}(p^2)p^{-2s}+\bar{f}(p^3)+\ldots)$, $\bar{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}(n)n^{-s}$. Tada je

$$F(s)G(s) = \prod_p(1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}+\ldots)\prod_p(1+\bar{f}(p)p^{-s}+\ldots) =$$

$$\prod_p(1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}+\ldots)\prod_p(1+\bar{f}(p)p^{-s}+\bar{f}(p)p^{-2s}+\ldots) =$$

$$\prod_p(1+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{d|p^i}f(d)\bar{f}(\tfrac{p^i}{d})p^{-is}) = \prod_p(1+0) = 1,$$

zbog osobina funkcije $\bar{f}(n)$. Stoga je $F(s)\bar{F}(s) = F(s)G(s) = 1$, što daje $\bar{F}(s) = G(s)$, odnosno $\bar{f}(n) = \prod_{p^a\|n}\bar{f}(p^a)$, te je $\bar{f}(n)$ doista multiplikativna.

Dokaz same teoreme sprovodi se induktivno uz pomoć relacije

(7) $$\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{f,k-1}(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_{f,1}(d)\Lambda_{f,k-1}(\tfrac{n}{d}).$$

Ako n ima više od k različitih prostih faktora, $\Lambda_{f,k-1}(n)$ je po induktivnoj pretpostavci nula, a kako d i $\frac{n}{d}$ dele n i $d\cdot\frac{n}{d}=n$, to ili d ima više od jednog prostog faktora, ili $\frac{n}{d}$ ima više od $k-1$ različitih prostih faktora, pa je u svakom slučaju $\sum_{d|n}\Lambda_{f,1}(d)\Lambda_{f,k-1}(\frac{n}{d})=0$, što dovršava dokaz teoreme.

Teorema IV.4 Neka je f(n) multiplikativna funkcija različita od nule. Tada $\Lambda_{f,k}(n)$ nije multiplikativna funkcija ni za jedno k.

Dokaz. Neka je (m,n)=1. Ako d|m, d'|n, onda dd' prolazi skupom delitelja broja mn i obrnuto, ako d" deli mn, onda je d"=dd' pri čemu d deli m, d' deli n i (d,d')=1. Neka je nasuprot tvrdjenju $\Lambda_{f,k}(n)$ multiplikativna funkcija i d|m, d'|n. Tada je

$$\Lambda_{f,k}(dd') = \Lambda_{f,k}(d)\Lambda_{f,k}(d')$$

$$\sum_{d'|n} f(\tfrac{n}{d'})\Lambda_{f,k}(dd') = \Lambda_{f,k}(d)\sum_{d'|n} f(\tfrac{n}{d'})\Lambda_{f,k}(d')$$

$$\sum_{d|m} f(\tfrac{m}{d})\sum_{d'|n} f(\tfrac{n}{d'})\Lambda_{f,k}(dd') = \sum_{d|m} f(\tfrac{m}{d})\Lambda_{f,k}(d)\sum_{d'|n} f(\tfrac{n}{d'})\Lambda_{f,k}(d')$$

$$\sum_{d|m}\sum_{d'|n} f(\tfrac{m}{d})f(\tfrac{n}{d'})\Lambda_{f,k}(dd') = f(m)\log^k m\cdot f(n)\log^k n$$

$$\sum_{dd'|mn} f(\tfrac{mn}{dd'})\Lambda_{f,k}(dd') = f(m)f(n)(\log m\cdot\log n)^k$$

$$\sum_{d''|mn} f(\tfrac{mn}{d''})\Lambda_{f,k}(d'') = f(m)f(n)(\log m\cdot\log n)^k$$

$$f(mn)\log^k mn = f(m)f(n)(\log m\cdot\log n)^k$$

Kako je zbog multiplikativnosti f(mn) = f(m)f(n), skraćivanje u slučaju $f(n)\neq 0$ daje

$$\log^k mn = (\log m\cdot\log n)^k,$$

$$\log m + \log n = \log m\cdot\log n,$$

a to je kontradikcija koja dokazuje teoremu.

Neka je j prirodan broj izmedju 1 i k, 1<j<k. Tada se može napisati

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k}(n)n^{-s} = (-1)^k\frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} = (-1)^j\frac{F^{(j)}(s)}{F(s)}(-1)^{k-j}\frac{F^{(k)}(s)}{F^{(j)}(s)}$$

$$= (-1)^j\frac{F^{(j)}(s)}{F(s)}(-1)^{k-j}\frac{(F^{(j)}(s))^{(k-j)}}{F^{(j)}(s)}.$$

Kako je medjutim $(-1)^j\frac{F^{(j)}(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,j}(n)n^{-s}$,

$$F^{(j)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)(-1)^j\log^j n\cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)(-\log n)^j n^{-s},$$

$$(-1)^{k-j}\frac{(F^{(j)}(s))^{(k-j)}}{F^{(j)}(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f(-\log)^j,k-j}(n)n^{-s},$$

gde je

$$\Lambda_{f(-\log)^j,k-j}(n) = \Lambda_{f(n)(-\log n)^j,k-j}(n).$$

Time je ustvari pokazano da važi

Teorema IV.5. Neka je $1<j<k$. Tada je

$$\Lambda_{f,k}(n) = \sum_{d|n}\Lambda_{f,j}(d)\Lambda_{f(-\log)^j,k-j}(\tfrac{n}{d}).$$

Ova teorema kao i teorema IV.2. omogućavaju rekurzivno izračunavanje funkcija $\Lambda_{f,k}(n)$. Teorema IV.2 i teorema II.1. mogu mogu se poopštiti, kao što pokazuje

Teorema IV.6. Neka je m prirodan broj manji od k. Tada važi

$$\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{f,k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{f,i}(d)\Lambda_{f,k-m}(\tfrac{n}{d})\log^{m-i}\frac{n}{d}.$$

Dokaz. $\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k}(n)n^{-s} = (-1)^k\frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} =$

$$(-1)^m\{F\frac{^{(k-m)}(s)(-1)^{k-m}}{F(s)}\}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{F(s)}\{F(s)\frac{(-1)^{k-m}F^{(k-m)}(s)}{F(S)}\}^{(m)}$$

$$\frac{(-1)^m}{F(s)}\{F(s)(\frac{(-1)^{k-m}F^{(k-m)}(s)}{F(s)})^{(m)}+\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}F^{(i)}(s)(\frac{(-1)^{k-m}F^{(k-m)}(s)}{F(s)})^{(m-i)}\}=$$

$$(-1)^m\{(-1)^{k-m}\frac{F^{(k-m)}(s)}{F(s)}\}^{(m)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i\frac{F^{(i)}(s)}{F(s)}(-1)^{m-i}\{(-1)^{k-m}\frac{F^{(k-m)}(s)}{F(s)}\}^{(m-i)}.$$

Ako se iskoristi činjenica da je

$$(-1)^i\frac{F^{(i)}(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,i}(n)n^{-s}, (-1)^{k-i}\{\frac{F^{(k-m)}(s)}{F(s)}\}^{(m-i)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k-m}(n)\log^{m-i}n.n^{-s},$$

kao i teorema o jedinstvenosti Dirichletovih redova, neposredno se dobija

$$\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{f,k-m}(n)\log^m n + \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{f,i}(d)\Lambda_{f,k-m}(\frac{n}{d})\log^{m-i}\frac{n}{d}.$$

IV.2 Odredjivanje $\Lambda_{f,k}(n)$ za pojedine funkcije i pojedine klase funkcija

Bez obzira na rekurzivne veze za funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ koje daju teorema IV.5. i IV.6, njihovo eksplicitno odredjivanje za pojedine funkcije nije jednostavno. U ovom odeljku biće odredjene funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$ za neke klase multiplikativnih funkcija kao i za najznačajnije posebne multiplikativne funkcije.

Teorema IV.7. Ako je c konstanta različita od nule, tada je

$$\Lambda_{cf,k}(n) = \Lambda_{f,k}(n).$$

Dokaz. Po definiciji će biti

$$cf(n)\log^k n = \sum_{d|n} cf(d)\Lambda_{cf,k}(\tfrac{n}{d}).$$

Skraćivanjem ($c\neq 0$) se odatle dobija

$$f(n)\log^k n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{cf,k}(\tfrac{n}{d}) = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d}).$$

Jednoznačnost daje tvrdjenje teoreme.

Teorema IV.8. Neka je f(n) multiplikativna, a g(n) totalno multiplikativna funkcija. Tada je

$$\Lambda_{fg,k}(n) = \Lambda_{f,k}(n)g(n).$$

Dokaz. Imamo po definiciji

$$f(n)\log^k n = \sum_{d|n} f(d)\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d})$$

$$f(n)g(n)\log^k n = \sum_{d|n} f(d)g(d\cdot\tfrac{n}{d})\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d}) =$$

$$\sum_{d|n} f(d)g(d)\Lambda_{f,k}(\tfrac{n}{d})g(\tfrac{n}{d}).$$

Teorema o jednoznačnosti daje $\Lambda_{fg,k}(n) = \Lambda_{f,k}(n)g(n)$.

Posledica. Ako se uzme da je $f(n)=1$, tada se zbog $\Lambda_{1,k}(n) = \Lambda_k(n)$ dobija

$$\Lambda_{g,k}(n) = g(n)\Lambda_k(n),$$

za svaku totalno multiplikativnu funkciju g(n).

Za aritmetičku funkciju $f(n)$ se kaže da je <u>beskvadratna</u> ako je $f(n)=0$ čim je n deljivo kvadratom nekog prirodnog broja većeg od jedinice (funkcija Möbiusa naprimer).

Teorema IV.9. Ako je $f(n)$ multiplikativna beskvadratna funkcija tada je

$$\Lambda_{f,k}(n) = \sum_{d|n}\{\prod_{p^a\|d}(-1)^a f^a(p)\}f(\tfrac{n}{d})\log^k\frac{n}{d}.$$

Dokaz. Ako je $f(n)$ beskvadratna tada je

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_p(1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}+\dots) =$$

$$\prod_p(1+f(p)p^{-s}).$$

$$\frac{1}{F(s)} = \prod_p\frac{1}{1+f(p)p^{-s}} = \prod_p\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i f^i(p)p^{-is}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{f,k}(n)n^{-s} = (-1)^k\cdot\frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} =$$

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\log^k n\cdot n^{-s}\}\{\prod_p\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i f^i(p)p^{-is}\}.$$

Izjednačavanje koeficijenata uz n^{-s} daje tvrdjenje teoreme.

Ove teoreme omogućuju da se eksplicitno odredi $\Lambda_{f,k}(n)$ za najvažnije multiplikativne funkcije $f(n)$.

1. <u>Odredjivanje $\Lambda_{\mu,k}(n)$</u>. Ako se u prethodnoj teoremi uzme $f(n)=\mu(n)$, tada je $\mu(p)=(-1)$, $\prod_{p^a\|d}(-1)^a f^a(p) = 1$, pa se dobija

$$\Lambda_{\mu,k}(n) = \sum_{d|n}\mu(\tfrac{n}{d})\log^k\frac{n}{d} = \sum_{d|n}\mu(d)\log^k d.$$

Ovaj izraz je sličan izrazu kojim se definišu funkcije $\Lambda_k(n)$, i on se može transformisati u oblik u kome figurišu funkcije $\Lambda_k(n)$ na sledeći način:

$$\Lambda_{\mu,k}(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\log^k d = \sum_{d|n}\mu(d)(\log n-\log\tfrac{n}{d})^k =$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\log^i n\log^{k-i}\frac{n}{d} = \sum_{d|n}\mu(d)(-1)^k\log^k n +$$

$$\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\log^i n\cdot\log^{k-i}\frac{n}{d} =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\log^i n\sum_{d|n}\mu(d)\log^{k-i}\frac{n}{d} =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\Lambda_{k-i}(n)\log^i n.$$

Odatle se za k=1 dobija

$$\Lambda_{\mu,1}(n) = \Lambda_\mu(n) = -\Lambda_1(n).$$

2. Odredjivanje $\Lambda_{\chi,k}(n)$. Kako su svi karakteri od n po nekom modulu i totalno multiplikativne funkcije, to iz posledice teoreme IV.8. neposredno sledi

$$\Lambda_{\chi,k}(n) = \chi(n)\Lambda_k(n).$$

Ako se u teoremi IV.8. uzme da je $f(n) = \frac{1}{n^a}$, onda se dobija

$$\Lambda_{f,k}(n) = \frac{\Lambda_k(n)}{n^a},$$

jer je stepena funkcija totalno multiplikativna.

3. Odredjivanje $\Lambda_{\tau,k}(n)$. Za funkciju broja delitelja $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)n^{-s} = \zeta^2(s)$. Korišćenjem Leibnizovog pravila o izvodu proizvoda dobija se

$$(-1)^k\cdot\frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} = \frac{(-1)^k}{\zeta^2(s)}\{\zeta(s)\zeta(s)\}^{(k)} =$$

$$\frac{(-1)^k}{\zeta^2(s)}\{2\zeta(s)\zeta^{(k)}(s) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\zeta^{(i)}(s)\cdot\zeta^{(k-i)}(s)\} =$$

$$2(-1)^k\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\frac{(-1)^i\zeta^{(i)}(s)}{\zeta(s)}\cdot\frac{(-1)^{k-i}\zeta^{(k-i)}(s)}{\zeta(s)}.$$

Odatle sledi

$$\Lambda_{\tau,k}(n) = 2\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\cdot\Lambda_{k-i}\left(\frac{n}{d}\right).$$

4. Odredjivanje $\Lambda_{f,k}(n)$ za f(n) karakterističnu funkciju potpunih l-tih stepena. Neka je f(n) karakteristična funkcija brojeva koji su potpuni l-ti stepeni:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n=m^l \\ 0 & n\neq m^l \end{cases}.$$ Tada je

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (n^l)^{-s} = \zeta(ls).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{f,k}(n)n^{-s} = (-1)^k.\frac{F^{(k)}(s)}{F(s)} = (-1)^k\frac{\{\zeta(ls)\}^{(k)}}{\zeta(ls)} =$$

$$(-1)^k l^k.\frac{\zeta^{(k)}(ls)}{\zeta(ls)}.$$

Medjutim, zbog $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_k(n)n^{-s} = (-1)^k\frac{\zeta^{(k)}(s)}{\zeta(s)}$ dobija se

$$\Lambda_{f,k}(n) = l^k f(n)\Lambda_k(n).$$

Sledeća teorema omogućava da se odredi $\Lambda_{f,k}(n)$ za dosta široku klasu funkcija koje su vezane relacijom konvolucije sa drugim aritmetičkim funkcijama.

Teorema IV.10. Neka je $f(n) = \sum_{d|n} g(d)h(\frac{n}{d})$. Tada je

$$\Lambda_{f,k}(n) = \Lambda_{g,k}(n) + \Lambda_{h,k}(n) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{d|n} \Lambda_{g,i}(d)\Lambda_{h,k-i}(\tfrac{n}{d}).$$

Dokaz. Neka je $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$, $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s}$. Tada se pretpostavka teoreme u obliku Dirichletovih redova može napisati kao $F(s) = G(s)H(s)$, pa će biti

$$(-1)^k F^{(k)}(s) = (-1)^k\{G(s)H^{(k)}(s)+H(s)G^{(k)}(s) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} G^{(i)}(s)H^{(k-i)}(s)\},$$

$$\frac{(-1)^k F^{(k)}(s)}{F(s)} = \frac{(-1)^k G^{(k)}(s)}{G(s)} + \frac{(-1)^k H^{(k)}(s)}{H(s)} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{(-1)^k G^{(i)}(s)}{G(s)}.\frac{H^{(k-i)}(s)}{H(s)}$$

Teorema o jedinstvenosti Dirichletovih redova neposredno daje tvrdjenje teoreme izjednačavanjem koeficijenata uz n^{-s} uz korišćenje $\frac{(-1)^k F^{(k)}(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{f,k}(n)n^{-s}$ i analogno za H i G.

5. <u>Odredjivanje $\Lambda_{\sigma^i,k}(n)$</u>. Ako se u prethodnoj teoremi uzme $g(n)=1$, $h(n)=d^i$ $(i>0)$, onda će biti $f(n) = \sum_{d|n} (\frac{n}{d})^i = \sum_{d|n} d^i = \sigma_i(n)$. Kako je onda $\Lambda_{h,k}(n) = n^i\Lambda_k(n)$, to će se primenom teoreme dobiti

$$\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = \Lambda_k(n)(1+n^i) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{d|n}\Lambda_{k-j}(d)\Lambda_j(\tfrac{n}{d})(\tfrac{n}{d})^i.$$

6. <u>Odredjivanje $\Lambda_{\phi,k}(n)$</u>. Funkcija $\phi(n)$ može se predstaviti u obliku

$$\phi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d},$$

pa se prethodna teorema može primeniti sa $g(n) = \mu(n)$, $h(n) = n$, te će se tako dobiti

$$\Lambda_{\phi,k}(n) = \Lambda_{\mu,k}(n) + n\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{\mu,i}(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d})\tfrac{n}{d}.$$

7. <u>Odredjivanje $\Lambda_{r,k}(n)$</u>. Funkcija $r(n)$ označava broj predstavljanja prirodnog broja n kao zbir kvadrata dva cela broja, i

$$r(n) = 4\sum_{d|n}\chi(d),$$

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & n=2k \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & n=2k+1 \end{cases},$$

pri čemu četvorka dolazi zbog uzimanja u obzir svih mogućih kombinacija znakova. Za funkciju $\chi(n)$ (u ovom slučaju to je neglavni karakter od n po modulu 4) pokazano je da je

$$\Lambda_{\chi,k}(n) = \chi(n)\Lambda_k(n).$$

Po teoremi IV.7. konstanta 4 ne utiče na odredjivanje $\Lambda_{f,k}(n)$, pa se može primeniti teorema IV.10. sa $g(n)=1$, $h(n)=\chi(n)$, pa se tako dobija

$$\Lambda_{r,k}(n) = (1+\chi(n))\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d})\chi(\tfrac{n}{d}).$$

...edjivanje $\Lambda_{\sigma i,k}(n)$. Ako se u prethodnoj teoremi uzme ...)$=d^i$ $(i>0)$, onda će biti $f(n) = \sum_{d|n} (\frac{n}{d})^i = \sum_{d|n} d^i = \sigma_i(n)$.

... $\Lambda_{h,k}(n) = n^i\Lambda_k(n)$, to će se primenom teoreme dobiti

$$...(n) = \Lambda_k(n)(1+n^i) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{d|n}\Lambda_{k-j}(d)\Lambda_j(\tfrac{n}{d})(\tfrac{n}{d})^i.$$

...edjivanje $\Lambda_{\phi,k}(n)$. Funkcija $\phi(n)$ može se predstaviti u

$$\phi(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d},$$

...thodna teorema može primeniti sa $g(n) = \mu(n)$, $h(n) = n$, ...tako dobiti

$$...(n) = \Lambda_{\mu,k}(n) + n\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_{\mu,i}(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d})\tfrac{n}{d}.$$

...redjivanje $\Lambda_{r,k}(n)$. Funkcija $r(n)$ označava broj pred-... prirodnog broja n kao zbir kvadrata dva cela broja, i

$$r(n) = 4\sum_{d|n}\chi(d),$$

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & n=2k \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & n=2k+1 \end{cases},$$

...četvorka dolazi zbog uzimanja u obzir svih mogućih kom-... znakova. Za funkciju $\chi(n)$ (u ovom slučaju to je neglavni ... od n po modulu 4) pokazano je da je

$$\Lambda_{\chi,k}(n) = \chi(n)\Lambda_k(n).$$

...i IV.7. konstanta 4 ne utiče na odredjivanje $\Lambda_{f,k}(n)$, pa ...primeniti teorema IV.10. sa $g(n)=1$, $h(n)=\chi(n)$, pa se tako

$$...(n) = (1+\chi(n))\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d})\chi(\tfrac{n}{d}).$$

IV.3 Asimptotske formule za funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$

Cilj ovog odeljka je dobijanje asimptotskih formula za pojedine eksplicitno odredjene funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$, kao i dobijanje jedne opšte asimptotske formule. U tu svrhu vršiće se sumiranje rezultata iz prethodnog odeljka.

1. <u>Asimptotska formula za funkciju $\Lambda_{\tau,k}(n)$</u>.

Za funkciju $\tau(n)$ pokazano je da važi

$$\Lambda_{\tau,k}(n) = 2\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d}),$$

pa će se sumiranjem po svim n koji ne premašaju x dobiti

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{\tau,k}(n) = \sum_{n\leq x}2\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda_i(d)\Lambda_{k-i}(\tfrac{n}{d}) =$$

$$2kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{mn\leq x}\Lambda_i(m)\Lambda_{k-i}(n) =$$

$$2kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{k!\,i!\,(k-i)!}{(k-i)!\,i!\,(k-1)!}(x\log^{k-1}x+O(x\log^{k-2}x)) =$$

$$2kx\log^{k-1}x + \sum_{i=1}^{k-1}kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) =$$

$$k(k+1)x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

Time je dokazano da važi

Teorema IV.11. $\sum_{n\leq x}\Lambda_{\tau,k}(n) = k(k+1)x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$

U dokazivanju su korišćene teoreme II.8. i II.11.

2. <u>Odredjivanje asimptotske formule za funkciju $\Lambda_{\sigma^i,k}(n)$</u>.

Za funkciju zbira i-tih stepena delitelja n, $\sigma_i(n)$, pokazano je da važi

$$\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = \Lambda_k(n)(1+n^i) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{d|n}\Lambda_{k-j}(d)\Lambda_j(\tfrac{n}{d})(\tfrac{n}{d})^i,$$

pa se sumiranjem po svim n koji ne premašaju x dobija

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = \sum_{n\leq x}\Lambda_k(n)(1+n^i) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda_{k-j}(d)\Lambda_j(\tfrac{n}{d})(\tfrac{n}{d})^i =$$

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_k(n)(1+n^i) + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{mn\leq x}\Lambda_{k-j}(n)\Lambda_j(m)m^i.$$

Da bi se dobila asimptotska formula za $\Lambda_k(n)n^i$ vrši se parcijalno sumiranje formule

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_k(n) = kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) \quad \text{(Teorema II.8)},$$

pa se dobija

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_k(n)n^i = kx^{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x) -$$

$$- \int_1^x it^{i-1}(kt\log^{k-1}t + O(t\log^{k-2}t))dt =$$

$$kx^{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x) - ki\int_1^x t^i\log^{k-1}t dt =$$

$$\frac{k}{i+1}x^{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x) \quad (k\geq 1, i>0).$$

Stoga je

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = k\frac{x^{i+1}}{i+1}\cdot\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x) + \sum_{j=1}\binom{k}{j}\sum_{n\leq x}\Lambda_{k-j}(n)\sum_{m\leq \frac{x}{n}}\Lambda_j(m)m^i =$$

$$\frac{k}{i+1}x^{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x) +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{n\leq x}\Lambda_{k-j}(n)\{(\tfrac{x}{n})^{i+1}\frac{j}{i+1}\log^{j-1}\frac{x}{n} + O((\tfrac{x}{n})^{i+1}\log^{j-2}\frac{x}{n})\}.$$

Polazeći od

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_k(n)}{n}\log^i n = \frac{k}{k+i}\log^{k+i}x + O(\log^{k+i-1}x)$$

parcijalnim sumiranjem se dobija

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_k(n)}{n}\log^i\frac{x}{n} = \frac{k!i!}{(k+i)!}\log^{k+i}x + O(\log^{k+i-1}x)$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_k(n)}{n^{j+1}}\log^i\frac{x}{n} = \frac{k!i!\log^{k+i}x}{(k+i)!x^j} + O(\frac{\log^{k+i-1}x}{x^j}),$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{k-j}(n)}{n^{i+1}}\log^{j-1}\frac{x}{n} = \frac{(k-j)!(j-1)!\log^{k-1}x}{(k-1)!x^i} + O(\frac{\log^{k-2}x}{x^i}).$$

Stoga je

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = \frac{k}{i+1}x^{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x),$$

jer je $\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda_{k-j}(n)\left(\frac{x}{n}\right)^{i+1}\log^{j-1}\frac{x}{n} = O(x\log^{k-1}x) = O(x^{i+1}\log^{k-2}x)$,

jer je po pretpostavci $i>0$. Time je dokazana

Teorema IV.12. $\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda_{\sigma^i,k}(n) = \frac{kx^{i+1}}{i+1}\log^{k-1}x + O(x^{i+1}\log^{k-2}x)$.

Glavni član ove asimptotske formule dolazi od $\Lambda_k(n)n^i$, a svi ostali članovi daju veličine nižeg reda.

3. Odredjivanje asimptotske formule za funkciju $\Lambda_{\chi,k}(n)$.

Ukoliko je $\chi(n) = \chi_0(n)$ (glavni karakter od n po modulu i), tada je asimptotska formula za $\Lambda_{\chi_0,k}(n)$ ustvari sadržaj teoreme II.17, jer je $\Lambda_{\chi_0,k}(n) = \chi_0(n)\Lambda_k(n)$. Neka je onda $\chi(n)$ neglavni karakter od n po modulu i; tada važi

Teorema IV.13. $\displaystyle\sum_{n\le x}\Lambda_{\chi,k}(n) = O(x)$.

Dokaz. Neka je $X(n) = \chi(1) + \chi(2) + \ldots + \chi(n)$.

Parcijalnim sumiranjem se dobija

$$\sum_{n\le x}\chi(n)\log^k n = \sum_{n\le x}\chi(n)\{\log^k(n+1)-\log^k n\}+X([x])\log^k([x]+1).$$

Sada se koriste osobine karaktera $|\chi(n)|\le 1$ i $|X(n)|\le i$, pa će biti

$$\Big|\sum_{n\le x}\chi(n)\log^k n\Big| \le \sum_{n\le x}|\chi(n)|\,|\log^k(n+1)-\log^k n| + |X([x])\log^k([x]+1)| \le$$

$$\sum_{n\le x}(\log^k(n+1)-\log^k n) + O(\log^k x) = \log^k([x]+1) + O(\log^k x) =$$

$$O(\log^k x).$$

Sada se može odrediti asimptotska formula za $\Lambda_{\chi,k}(n)$:

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\chi,k}(n) = \sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda_k(n) = \sum_{n\le x}\chi\left(d\frac{n}{d}\right)\sum_{d|n}\mu(d)\log^k\frac{n}{d} =$$

$$\sum_{mn\le x}\chi(n)\mu(n)\chi(m)\log^k m = \sum_{n\le x}\chi(n)\mu(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\chi(m)\log^k m =$$

$$\sum_{n\le x}\chi(n)\mu(n)O\left(\log^k\frac{x}{n}\right) = O\left(\sum_{n\le x}\log^k\frac{x}{n}\right) = O(x).$$

4. Odredjivanje asimptotske formule za $\Lambda_{\mu,k}(n)$. Asimptotska formula za $\Lambda_{\mu,k}(n)$ ne sadrži glavni član u opštem slučaju, isto kao i asimptotska formula za $\mu(n)$, što je karakteristično za funkcije koje osciluju (uzimaju i pozitivne i negativne vrednosti), dok asimptotske formule za nenegativne funkcije obično imaju i glavni član. Važi sledeća

Teorema IV.14.
$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\mu,k}(n) = \begin{cases} -x + O(\frac{x}{\log x}) & k=1 \\ O(x\log^{k-2}x) & k\ge 2 \end{cases}.$$

Dokaz. Sumiranjem relacije
$$\Lambda_{\mu,k}(n) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\Lambda_{k-i}(n)\log^i n$$
po svim n koji ne premašaju x dobija se
$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\mu,k}(n) = \sum_{n\le x}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\Lambda_{k-i}(n)\log^i n =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i}\binom{k}{i}\sum_{n\le x}\Lambda_{k-i}(n)\log^i n =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}((k-i)x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x)) =$$
$$\{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}(k-i)\binom{k}{i}\}x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) =$$
$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}j\binom{k}{j}\cdot x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) =$$
$$\frac{d(1-t)^k}{dt}\Big|_{t=1}\cdot x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) = \begin{cases} -x + O(\frac{x}{\log x}) & k=1 \\ O(x\log^{k-2}x) & k\ge 2 \end{cases},$$
jer je $\frac{d(1-t)^k}{dt}\Big|_{t=1} = \begin{cases} -1 & k=1 \\ 0 & k\ge 2 \end{cases}$.

5. Odredjivanje asimptotske formule za $\Lambda_{\phi,k}(n)$. Za funkciju $\Lambda_{\phi,k}(n)$ važi:

Teorema IV.15. $\sum_{n\le x}\Lambda_{\phi,k}(n) = \frac{kx^2}{2}\log^{k-1}x + O(x^2\log^{k-2}x)$.

Dokaz. Sumiranjem formule za $\Lambda_{\phi,k}(n)$ iz prošlog odeljka dobija se

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\phi,k}(n) = \sum_{n\le x}\Lambda_{\mu,k}(n) + \sum_{n\le x} n\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda_{\mu,i}(d)\Lambda_{k-i}\left(\frac{n}{d}\right)\frac{n}{d}.$$

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{\mu,k}(n) = O(x\log^{k-2}x) \qquad (\text{za } k\ge 2).$$

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda_{\mu,i}(d)\Lambda_{k-i}\left(\frac{n}{d}\right)\frac{n}{d} = \sum_{mn\le x}\Lambda_{\mu,i}(m)\Lambda_{k-i}(n)n =$$

$$\sum_{n\le x} n\Lambda_{k-i}(n)\sum_{m\le\frac{x}{n}}\Lambda_{\mu,i}(m) = \sum_{n\le x} n\Lambda_{k-i}(n)O\left(\frac{x}{n}\log^{i-2}\frac{x}{n}\right) =$$

$$O\left(x\sum_{n\le x}\Lambda_{k-i}(n)\log^{i-2}\frac{x}{n}\right) = O\left(x\log^{i-2}x\sum_{n\le x}\Lambda_{k-i}(n)\right) =$$

$$O(x\log^{i-2}x\cdot x\log^{k-i-1}x) = O(x^2\log^{k-3}x).$$

Parcijalnim sumiranjem se dobija

$$\sum_{n\le x} n\Lambda_k(n) = kx^2\log^{k-1}x + O(x^2\log^{k-2}x) -$$

$$- \int_1^x (kt\log^{k-1}t + O(t\log^{k-2}t)dt = \frac{kx^2}{2}\log^{k-1}x + O(x^2\log^{k-2}x).$$

Time je teorema dokazana za $k\ge 2$, medjutim kako je $\Lambda_{\phi,1}(n)=(n-1)\Lambda_1(n)$, to se lako vidi da je teorema tačna i za $k=1$.

Dosada su bile odredjivane asimptotske formule za pojedine funkcije $\Lambda_{f,k}(n)$. Sledeća teorema daje asimptotsku formulu u opštem slučaju, pod pretpostavkom da $\Lambda_{f,1}(n)$ poseduje odredjenu asimptotsku formulu.

Teorema IV.16. Neka je $\Lambda_{f,1}(n)\ge 0$, i neka važi

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{f,1}(n) = Ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Tada je

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{f,k}(n) = A\prod_{i=1}^{k-1}\left(1+\frac{A}{i}\right)x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

Dokaz. Dokaz je matematičkom indukcijom po k. Za k=1 dobija se pretpostavka teoreme o funkciji $\Lambda_{f,1}(n)$ koja je ustvari poopštenje teoreme o prostim brojevima, jer se ta pretpostavka o funkciji $\Lambda_{f,1}(n)$ za A=1, f(n)=1 ($\Lambda_{f,1}(n) = \Lambda_1(n)$) upravo svodi na teoremu o prostim brojevima. Prema tome, pretpostavimo da je teorema tačna za neko k. Tada važi teorema IV.2

$$\Lambda_{f,k+1}(n) = \Lambda_{f,k}(n)\log n + \sum_{d|n}\Lambda_{f,k}(d)\Lambda_{f,1}(\tfrac{n}{d}),$$

koja pokazuje da iz $\Lambda_{f,1}(n)\geq 0$ sledi $\Lambda_{f,k}(n)\geq 0$ za svako k što će biti potrebno zbog procena u kojima se javlja simbol O. Sumiranjem po svim n koji ne premašaju x dobija se:

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k+1}(n) = \sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k}(n) + \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\Lambda_{f,k}(d)\Lambda_{f,1}(\tfrac{n}{d}) =$$

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k}(n)\log n + \sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k}(n)\sum_{m\leq\frac{x}{n}}\Lambda_{f,1}(m).$$

Kako je za $x\geq 2$ $\frac{1}{\log x} \leq \frac{2}{\log 2x}$, to se pretpostavka teoreme može napisati u sledećem, pogodnijem za primenu obliku

$$(1) \qquad \sum_{n\leq x}\Lambda_{f,1}(n) = Ax + O(\frac{x}{\log 2x}).$$

Induktivna pretpostavka uz parcijano sumiranje daje redom

$$(2) \qquad \sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k}(n)\log n = A^k\prod_{i=1}^{k-1}(1+\tfrac{A}{i})x\log^k x + O(x\log^{k-1}x),$$

$$(3) \qquad \sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n} = \frac{A^k}{k}\prod_{i=1}^{k-1}(1+\tfrac{A}{i})\log^k x + O(\log^{k-1}x).$$

Stoga je

$$\sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k+1}(n)=A\prod_{i=1}^{k-1}(1+\tfrac{A}{i})x\log^k x+O(x\log^{k-2}x)+\sum_{n\leq x}\Lambda_{f,k}(n)\{\frac{Ax}{n}+O(\frac{x}{n\log\frac{2x}{n}})\} =$$

$$A\prod_{i=1}^{k-1}(1+\tfrac{A}{i})x\log^k x+Ax\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n}+O(x\log^{1-1}x)+ O(x\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n\log\frac{2x}{n}}) =$$

$$\{A\prod_{i=1}^{k-1}(1+\frac{A}{i})+\frac{A^2}{k}\prod_{i=1}^{k-1}(1+\frac{A}{i})\}x\log^k x+O(x\log^{k-1}x)+O(x\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n\log\frac{2x}{n}}) =$$

$$A\prod_{i=1}^{k-1}(1+\frac{A}{i})(1+\frac{A}{k})x\log^k x + O(x\log^{k-1}x) + O(x\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n\log\frac{2x}{n}}) =$$

$$A\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{A}{i})x\log^k x + O(x\log^{k-1}x),$$

pri čemu se koristila lema III.3. primenjena na funkciju $\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n}$

sa m=k, pa je stoga $\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_{f,k}(n)}{n\log\frac{2x}{n}} = O(\log^{k-1}x)$.

6. Odredjivanje asimptotske formule za $\Lambda_{b,k}(n)$. Kao primena prethodne teoreme odrediće se asimptotska formula za $\Lambda_{b,k}(n)$, pri čemu je b(n) karakteristična funkcija za brojeve koji se mogu predstaviti kao zbir dva kvadrata, dakle

$$b(n) = \begin{cases} 1 & n = x^2 + y^2 \\ 0 & n \neq x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Dobro je poznato da je b(n) multiplikativna funkcija i da brojeve koji se mogu predstaviti kao zbir dva kvadrata generišu 2, prosti brojevi oblika 4k+1 i kvadrati prostih brojeva oblika 4k+3. Stoga važi

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s} = (1-2^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{p\equiv 3(\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2s})^{-1}.$$

$$\log F(s) = -(\log(1-2^{-s})+\log\prod_{p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}(1-p^{-s})+\log\prod_{p\equiv 3(\mathrm{mod}4)}(1-p^{-2s})).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_{b,1}(n)n^{-s} = -\frac{F'(s)}{F(s)} = -(\log F(s))' =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\log 2}{2^{is}} + \sum_{p\equiv 1(\mathrm{mod}4)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\log p}{p^{is}} + \sum_{p\equiv 3(\mathrm{mod}4)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\log p}{p^{2is}}.$$

Stoga važi

$$\Lambda_{b,1}(n) = \begin{cases} \log p & n=p^{i} \quad p=2,\ p\equiv 1 (\mathrm{mod} 4) \\ 2\log p & n=p^{2i} \quad p\equiv 3 (\mathrm{mod} 4) \end{cases} .$$

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{b,1}(n) = O(1) + \sum_{\substack{p^{i}\leq x \\ p\equiv 1 (\mathrm{mod}4)}} \log p + \sum_{\substack{p^{2i}\leq x \\ p\equiv 3(\mathrm{mod}4)}} 2\log p =$$

$$O(1) + \psi(x,4,1) + \psi(\sqrt{x},4,3) = \frac{x}{2} + O\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

gde je korišćena teorema o prostim brojevima u aritmetičkim progresijama, kao i oznaka

$$\psi(x,k,l) = \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv l(\mathrm{mod}k)}} \Lambda(n).$$

Primena teorema ($A=\frac{1}{2}$) daje

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{b,k}(n) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1+\frac{1}{2i}\right) x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) =$$

$$\frac{(2k-1)!!}{2^{k}(k-1)!} x\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x).$$

7. <u>Odredjivanje asimptotske formule za $\Lambda_{r,k}(n)$</u>. Za funkciju $r(n)$ koja predstavlja broj reprezentacija prirodnog broja n u vidu zbira dva kvadrata, pokazano je da važi

$$\Lambda_{r,k}(n) = \Lambda_k(n) + \chi(n)\Lambda_k(n) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{d|n} \Lambda_i(d)\Lambda_{k-i}\left(\frac{n}{d}\right)\chi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Sumiranje po svim n koji ne premašaju x uz korišćenje osobine neglavnog karaktera po modulu 4

$$\chi(n) = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} & n=2k+1 \\ 0 & n=2k \end{cases} \qquad \text{daje}$$

$$\sum_{n\leq x} \Lambda_{r,k}(n) = \sum_{n\leq x} \Lambda_k(n) + \sum_{n\leq x} \chi(n)\Lambda_k(n) +$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \sum_{n\leq x} \Lambda_i(n) \sum_{m\leq \frac{x}{n}} \Lambda_{k-i}(m)\chi(m) =$$

$$kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\Big\{\sum_{n\le x}\Lambda_i(n)\Big(\sum_{\substack{m\le\frac{x}{n}\\ m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Lambda_{k-i}(m) - \sum_{\substack{m\le\frac{x}{n}\\ m\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Lambda_{k-i}(m)\Big)\Big\} =$$

$$kx\log^{k-1}x+O(x\log^{k-2}x) + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}\sum_{n\le x}\Lambda_i(n)O\Big(\frac{x}{n}\log^{k-i-2}\frac{x}{n}\Big) =$$

$$kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x),$$

jer je već ranije pokazano da je

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda_i(n)}{n}\log^{k-i-2}\frac{x}{n} = \frac{i!(k-i-2)!}{(k-2)!}\log^{k-2}x + O(\log^{k-3}x),$$

pa se time konačno dobija

$$\sum_{n\le x}\Lambda_{r,k}(n)= kx\log^{k-1}x + O(x\log^{k-2}x),$$

što znači da se $\sum_{n\le x}\Lambda_{r,k}(n)$ asimptotski ponaša kao $\sum_{n\le x}\Lambda_k(n)$.

LITERATURA

[1] *K. Chandrasekharan*, Arithmetical Functions, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[2] *K. Chandrasekharan*, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[3] *T. Estermann*, Introduction to Modern Prime Number Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1961.

[4] *M.N. Huxley*, The distribution of Prime Numbers, Clarendon Press, Oxford, 1972.

[5] *A. Ivić*, An Application of Dirichlet Series to Certain Arithmetical Functions, Mathematica Balkanica (3) 1973, Beograd, (25) str. 158-165.

[6] *A. Ivić*, O nekim aritmetičkim funkcijama vezanim za raspodelu prostih brojeva, Zbornik radova PMF-a u Novom Sadu br. 4, Novi Sad, 1974, str.9-17.

[7] *J.E. Littlewood*, The quickest proof of the Prime Number Theorem, Acta Arithmetica, XVIII (1970), str. 83-86.

[8] *H. Onishi*, A tauberian theorem on Dirichlet series, Journal of Number Theory, 5(1973), str. 55-57.

[9] *H. Rademacher*, Lectures on Elementary Number Theory, Blaisdell, New York, 1964.

[10] *R.W. Ryden*, Groups of arithmetic functions under Dirichlet convolution, Pacific Jour. of Math.,(44)N$^{\underline{0}}$1.1973,str.335-360.

[11] *W. Specht*, Elementare Beweise der Primzahlsätze, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[12] И.М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Наука, Москва, 1971.

[13] Г. Дэвенпорт, Мультипликативная теория чисел, Наука, Москва, 1971.

[14] И. Касара, Об одной обобщений формулы Сельберга, Труды Самаркандского Университета, вып. 181, 1970, Самарканд, стр. 44-49.

[15] Б.В. Левин, А.С. Файнлейб, Об одном методе суммирования мультипликативных функций, Известия Академии Наук СССР, 31, 1967, стр. 697-710.

[16] Б. В.Левин, А.С. Файнлейб, Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел, УМН 22, 3 вып. 135, 1967, стр. 119-198.

[17] С. Манделбройт, Ряды Дирихле, Мир, Москва, 1973.

[18] А.Г. Постников, Введение в аналитическую теорию чисел, Наука, Москва, 1971.

[19] А.Г. Постников, О теореме Деланжа, Актуальные проблемы теории чисел, Наука и техника, Минск, 1978, стр.168-177.

[20] А.Г. Постников, Н.П. Романов, Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел, УМН том X, вып. 4,/1966, стр. 75-87, 1955.

[21] К. Прахар, Распределение простых чисел, Мир, Москва, 1967.

[22] Н.П. Романов, Об одной обобщений формулы Сельберга, Труды Среднеазиатского Университета, вып. 54, Ереван, 1954, стр. 23-27.

[23] А.С. Файнлейб, Некоторые асимптотические формулы для сумм мультипликативных функции и их приложения, Литовский мат. сборник, Вильнюс, том 7 вып. 3, 1968, стр. 535-546

SADRŽAJ