P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

FUNKCIONALNI PROSTORI

Doktorska disertacija

MILAN DREŠEVIĆ

B e o g r a d 1973

SADRŽAJ

I DEO

II DEO

PREDGOVOR

Neka su X i Y topološki prostori i F neka familija funkcija iz X u Y. Ako je $\mathcal{T}$ neka topologija na F, koju, na odredjen način, generišu topologije od X i Y (obe ili samo jedna od njih), tada se par $(F, \mathcal{T})$ naziva funkcionalni topološki prostor. Razume se, od najvećeg interesa je slučaj kada je F skup Y^X svih neprekidnih funkcija iz X u Y. Istorijski gledano, mogli bi smo reći da je konačno-otvorena ili topologija Tihonova "najstarija" topologija na skupu Y^X. Od raznih drugih topologija, na ovom skupu, mnogi radovi su pokazali da je "najadekvatnija" takozvana kompaktno-otvorena topologija k koju je, 1945 godine, u jednoj noti uveo R. H. Fox. Tipičan otvoren sub-bazni skup ove topologije je oblika $\{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$, gde je K kompaktan skup u X i U otvoren skup u Y. Od tada, pa sve do danas (dakle nešto manje od 30 godina), traje neprekidno, više ili manje intezivno, ispitivanje prostora (Y^X, k)(u daljem tekstu kratko: prostor Y^X). Od imena matematičara koji su radili ili još uvek rade na ovoj problematici, pomenimo, ovde, samo najznačajnija: R. Arens, J. Dugundji, R. H. Fox, D. Gale, J. R. Jackson, J. L. Kelley, K. Kuratowski, Morse, S. Mrowka, S. B. Myers, A. H. Stone. Interesantno je primetiti da je broj radova sovjetskih matematičara iznenadjujuće mali, kao i da oni u ovoj oblasti, do sada, nemaju značajnijih rezultata. Iako je, dakle, čitava plejada uglednih matematičara (uglavnom sa zapada) radila na ovom poslu, mnoga pitanja vezana za prostor Y^X ostala su, medjutim, i do danas nerešena. Na primer, još uvek, u opštem slučaju, nisu poznati potrebni i dovoljni uslovi koje moraju zadovoljavati prostori X i Y da bi prostor Y^X bio kompaktan ili povezan. Koliko je rešavanje ovih problema teško i u kojoj meri zahteva aparaturu koja izlazi van domena opšte topologije, najbolje u svojoj knjizi govori R. Engelking ([14], str. 245).

U ovom radu naša pažnja je prvenstveno usmerena na probleme karakterizacije kompaktnih skupova u Y^X, odredjene opšte i konkretne inverzne sisteme funkcionalnih prostora i njihove inverzne granice (iz ove oblasti, koliko mi je poznato, do sada postoji samo jedan rad K. Kuratowskog), a takodje, jednim delom, i na hiperprostore, topologizirane tako, da se na njih može gledati kao na odredjene funkcionalne prostore.

Tehnički podaci su, inače, sledeći. Celokupan tekst podeljen je u tri dela: I, II i III. Delovi se sastoje od glava koje su numerisane arapskim ciframa. Na početku ~~svake glave, radi veće~~ preglednosti, dat je, kratko, njen sadržaj. Glave imaju paragrafe (označene, takodje, arapskim ciframa), u kojima se, redom, izlažu definicije, teoreme i td. Pri pozivanju na odredjenu činjenicu iz rada, ukazuje se na deo, glavu i paragraf u kome se ista nalazi, kao i na njen vlastiti redni broj u okviru paragrafa. Tako, na primer, Propozicija II.3.4.6 označava šestu po redu propoziciju iz četvrtog paragrafa treće glave drugog dela. Kao što je uobičajeno, oznake dela i glave se izostavljaju ukoliko je reč o činjenici iz istog dela odnosno iz iste glave.

Brojevi u uglatim zagradama označavaju redne brojeve jedinica iz popisa literature.

Kraj dokaza svakog tvrdjenja označen je simbolom //. Koriste se i sledeće skraćenice: Def. (Definicija), L. (Lema), P. (Posledica), Pr. (Primer), Prop. (Propozicija), T. (Teorema), Z. (Zadatak).

Matematička simbolika u radu je standardna.

Od ukupno 68 kucanih strana teksta, na razna uvodna izlaganja (glave I.1, II.1, II.2 i III.1) otpada zajedno 25 strana. Ovaj uvodni materijal sadrži sve potrebne činjenice na koje se pozivamo u našim dokazima. Preostali deo teksta (glave I.2, II.3, II.4, III.2 i III.3), ukupno 43 strane, predstavljaju, dakle, naš samostalan doprinos teoriji funkcionalnih prostora, odnosno tematici usko vezanoj za nju (glave I.2 i II.4). Primetimo da se svaka od gore pomenutih pet glava, koristeći odgovarajući uvodni tekst, može čitati nezavisno od ostale četiri. Najvažniji rezultati svakako su sadržani u glavama II.3, II.4 i III.3. Opišimo ih ukratko.

U glavi II.3 posmatramo kategoriju $\mathcal{H} = (O,M)$ čiji su objekti O svi Hausdorff-ovi topološki prostori, a morfizmi M sva neprekidna preslikavanja ovih prostora. Neka je X fiksirani objekt kategorije $\mathcal{H}$. Ako je $Y \in O$, neka je $\mathrm{Map}_X(Y) = Y^X$, a ako je $f \in M$ i $f: Y \longrightarrow Z$, neka je $\mathrm{Map}_X(f): \mathrm{Map}_X(Y) \longrightarrow \mathrm{Map}_X(Z)$ preslikavanje definisano sa $[\mathrm{Map}_X(f)](g) = f \circ g$ za svako $g \in \mathrm{Map}_X(Y)$. Sada se može dokazati da je $\mathrm{Map}_X: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ kovarijantni funktor. U II.3.1 dokazujemo (T. 1.1 i T. 1.2) da Map_X funktor komutira sa inverznom granicom.

Za $Y \in O$, neka je $Y = Y^{(o)}$ i $Y^{(n)} = \mathrm{Map}_X(Y^{(n-1)})$ za $n = 1,2,\ldots$. Za fiksirano $a \in X$, neka je $p_a : Y^{(1)} \longrightarrow Y^{(o)}$ preslikavanje definisano sa $p_a(f) = f(a)$. Stavimo $p_a = p_a^{(o)}$ i neka je $p_a^{(n)} = \mathrm{Map}_X(p_a^{(n-1)})$ za $n = 1,2,\ldots$. Tako dolazimo do inverznog niza prostora i preslikavanja $\{Y^{(n)}, p_a^{(n)}\}$ čiju ćemo inverznu granicu označiti sa $Y^{(\omega)}$. Nazovimo prostor Y funkcionalno kompletnim u odnosu na X ako je $Y \approx \mathrm{Map}_X(Y)$. U II. 3.2 dokazujemo (T. 2.4) da je $Y^{(\omega)}$ funkcionalno kompletan u odnosu na X. U II.3.3 dokazujemo (T. 3.3) da se svaki Hausdorff-ov prostor Y može utopiti u $Y^{(\omega)}$. U II.3.4 ispitujemo osobine prostora $Y^{(\omega)}$ i formulišemo jedan otvoren problem. Kao inspiracija za ovu glavu poslužili su mi radovi ([37], [38]) prof. M. Marjanovića.

U glavi II.4 dajemo dva različita dokaza teoreme (T. 1.3) koja, uz pretpostavku da je X k-prostor, konstatuje interesantnu činjenicu da je prostor 2^X(svih zatvorenih podskupova u X) sa kompaktno-otvorenom topologijom (u smislu definicije L. J. Billera-e) homeomorfan inverznoj granici inverznog sistema $\{2^C, \pi^{C_2}_{C_1}, \mathcal{K}\}$ prostora 2^C sa kompaktno-otvorenom topologijom, gde je $\mathcal{K}$ familija svih kompaktnih skupova u X usmerena u odnosu na inkluziju i, za svaki par $C_1, C_2 \in \mathcal{K}$ takav da je $C_1 \subset C_2$, funkcija $\pi^{C_2}_{C_1} : 2^{C_2} \longrightarrow 2^{C_1}$, definisana sa $\pi^{C_2}_{C_1}(F) = F \cap C_1$ za svako $F \in 2^{C_2}$, je neprekidna (L. 1.2).

Ako je $\mathcal{F}$ data familija funkcija u prostoru Y^X, tada svaki podskup Φ skupa $\mathcal{F}$ indukuje funkciju $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ (2^Y ima topologiju Vietoris-a) definisanu sa $\overline{F}_{\Phi}(x) = \overline{\{f(x) \mid f \in \Phi\}}$ za svako $x \in X$. Na sugestiju prof. M. Marjanovića (u III.3) ispitivao sam vezu izmedju topološke uniformne neprekidnosti (Def. I.1.3.3) familije $\mathcal{F}$ sa jedne i poluneprekidnosti odozgo (Def. III.1.1.4) funkcije $\overline{F}_{\Phi}$ sa druge strane i došao do niza interesantnih rezultata (Prop. 2.3, T. 2.5, L. 2.6, T. 2.7, L. 3.1) na osnovu kojih sam dobio osnovni rezultat (T. 3.3) ove glave: jednu novu karakterizaciju kompaktnih skupova u Y^X. Jedna od posledica osnovne teoreme je poznata teorema D. Gale-a

Recimo, ipak, sasvim kratko, nešto i o sadržaju glava I.2 i III.2.

U I.2 variramo jednu teoremu K. Kuratowskog. Dokazujemo tri nove teoreme koje zajedno sa pomenutom čine skup od četiri srodna tvrdjenja.

U III.2.2 dajemo jednu originalnu verziju dokaza Ascoli-jeve teoreme za prostore jednoznačnih funkcija. U [34] Y. Lin i D. Rose generalisali su Ascoli-jevu teoremu za prostore višeznačnih funkcija sa kompaktno-otvorenom topologijom. U III.2.3 mi, medjutim, dokazujemo da jednoznačna verzija Ascoli-jeve teoreme implicira onu za višeznačne funkcije. Ovo umanjuje značaj teoreme Lin-a i Rose-a.

Na kraju, zahvalio bih se prof. M. Marjanoviću, koji me je kao rukovodilac pri izradi ove teze pravilno usmeravao, čiji su me radovi jednim delom inspirisali i koji mi je mnogo pomogao brojnim savetima i korisnim sugestijama.

GLAVA 1

OSNOVNI POJMOVI

Pošto su rezultati ove teze, skoro isključivo, vezani za prostor Y^X (neprekidnih funkcija iz X u Y) sa kompaktno-otvorenom topologijom, u prva tri paragrafa ove glave, koja je uvodnog karaktera, izlažemo osnovne pojmove i činjenice koje se odnose na ovaj prostor. Pri tome izostavljamo neke (uglavnom duže ili trivijalne) dokaze i ograničavamo se samo na one rezultate, na koje ćemo se kasnije pozivati. U kratkom četvrtom paragrafu, koji nije sadržajno vezan za prva tri, podsećamo na neke druge (manje ili više poznate) definicije i činjenice opšte topologije, koje su nam potrebne u daljem radu.

1. NEKE TOPOLOGIJE NA SKUPU Y^X I NJIHOV ODNOS

Neka su X i Y ma koja dva topološka prostora i neka Y^X označava skup svih neprekidnih funkcija iz X i Y. Ovaj skup se može topologizirati na razne načine. Ovde ćemo navesti samo tri najstandardnija načina. Ako je Y^X snabdeven topologijom τ, odgovarajući topološki prostor označavamo sa Y^X_τ. Primetimo, pre svega, da je Y^X podskup topološkog proizvoda

$$P = \prod\{Y_x = Y \mid x \in X\}$$

od X kopija prostora Y.

DEFINICIJA 1.1. <u>Konačno-otvorena topologija</u> skupa Y^X je ona topologija, koju na ovom skupu indukuje topologija Tihonova prostora P.

Za ma koja dva skupa $A \subset X$ i $B \subset Y$, neka (A,B) označava podskup od Y^X definisan sa

$$(A,B) = \{f \in Y^X \mid f(A) \subset B\},$$

a $[A,B]$ podskup od P definisan sa

$$[A,B] = \{f\in P \mid f(A)\subset B\}.$$

U daljem tekstu umesto, na pr., $(\{a\},B)$, pišemo, kratko, samo (a,B).

Sledeće tvrdjenje opravdava naziv "konačno-otvorena topologija".

PROPOZICIJA 1.2. Kolekcija svih skupova (F,U), gde je F konačan skup u X i U otvoren skup u Y, čini sub-bazu konačno-otvorene topologije t.

DOKAZ. Prema definiciji topologije Tihonova ([22], str. 37), kolekcija svih skupova $[x,U]$, gde je x tačka u X i U otvoren skup u Y, čini otvorenu sub-bazu ove topologije. Pošto je

$$(x,U) = [x,U]\cap P,$$

kolekcija svih skupova (x,U) čini sub bazu topologije t (koja se, stoga, često naziva i "point-open" topologija). Za svaki konačan skup F u X i svaki otvoren skup U u Y, posmatrajmo skup

$$(F,U) = \{f\in Y^X \mid f(F)\subset U\} = \cap\{(x,U) \mid x\in F\}.$$

Pošto je F konačan, $(F,U)\in t$. Dakle, i kolekcija svih ovih skupova (F,U) je jedna (šira) sub-baza topologije t. //

Zapažamo da se, u definiciji konačno-otvorene topologije t, ne koristi topologija prostora X. Zbog ovoga, kao i činjenice da je ova topologija veoma "mala" ([59], str. 279, Pr. 42.4), ona je u mnogim slučajevima nezadovoljavajuća. Verovatno "najprirodniju" topologiju u skupu Y^X, uveo je, 1945. godine, R. H. Fox ([16]).

DEFINICIJA 1.3. (R. H. Fox) Kompaktno-otvorena topologija (u oznaci k) skupa Y^X je topologija čiju otvorenu sub-bazu čini kolekcija svih skupova (K,U), gde je K kompaktan skup u X i U otvoren skup u Y.

PROPOZICIJA 1.4. Konačno-otvorena topologija t je slabija od kompaktno-otvorene topologije k.

DOKAZ. Svaki konačan skup je kompaktan. //

PRIMEDBA 1.5. Ako je X diskretan prostor, tada, očigledno, sem konačnih, nema drugih kompaktnih skupova u X, pa je k = t.

DEFINICIJA 1.6. Za topologiju τ u Y^X kaže se da je <u>dopustiva</u> ako je funkcija

$$\omega : Y^X_\tau \times X \longrightarrow Y,$$

definisana sa $\omega(f,x) = f(x)$ za svako $(f,x) \in Y^X_\tau \times X$, neprekidna. Ova funkcija ω naziva se <u>evaluacija</u>.

PROPOZICIJA 1.7. (R. Arens [1]) <u>Kompaktno-otvorena topologija k je slabija od ma koje dopustive topologije</u> τ.

DOKAZ. Neka je dat otvoren sub-bazni skup (K,U) u Y^K_k i tačka $f \in (K,U)$. Pošto je topologija τ dopustiva, evaluacija

$$\omega : Y^X_\tau \times X \longrightarrow Y$$

je prema definiciji neprekidna. Dakle, za svako $x \in K$, postoji otvorena okolina W_x od x u X i otvorena okolina V_x od f u Y^X tako da je

$$\omega(V_x \times W_x) \subset U.$$

Pošto je K kompaktan, postoje tačke $x_1,\dots,x_n \in K$ tako da je

$$K \subset W_{x_1} \cup \dots \cup W_{x_n}.$$

Neka je V okolina od f u Y^X_τ definisana sa

$$V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}.$$

Pokazaćemo da je $V \subset (K,U)$. Neka je $g \in V$. Tada imamo

$$g(K) = \omega(\{g\} \times K) \subset U.$$

Ovo povlači da $g \in (K,U)$ i, dakle, $V \subset (K,U)$. Prema tome, (K,U) je otvoren u Y^X_τ i, znači, $k \subset \tau$. //

Neka je X proizvoljan, a Y metrizabilan topološki prostor i d jedna od ograničenih metrika koje indukuju topologiju prostora Y. Postoji prirodna topologija u skupu Y^X koju (posredno) indukuje uočena funkcija rastojanja d. Neka je, naime,

$$d^* : Y^X \times Y^X \longrightarrow R$$

realna funkcija definisana sa

$$d^*(f,g) = \sup\{d[f(x), g(x)] \mid x \in X\}$$

za svaki par tačaka f i g u Y^X.

Tada, važi sledeća (mi izostavljamo rutinski dokaz)

PROPOZICIJA 1.8. <u>Funkcija</u> $d^* : Y^X \times Y^X \longrightarrow R$ <u>je metrika u</u> Y^X.

DEFINICIJA 1.9. Topologija u Y^X indukovana metrikom d^* naziva se d^*-<u>topologija</u> indukovana sa d ili <u>topologija uniformne konvergencije</u> u odnosu na d. Mi ćemo sa Y^X_d označavati skup Y^X sa d^*-topologijom.

Ova topologija, medjutim, na nesreću, zavisi od izbora metrike u prostoru Y, kao što pokazuje sledeći primer.

PRIMER 1.10. Neka je Y podskup realne prave koji se sastoji od tačaka 1/n i -1/n za n = 1,2,... Očigledno, Y je diskretan prostor. Konstruišimo dve ekvivalentne metrike u Y. Neka je d_1 uobičajena metrika realne prave, a d_2 trivijalna metrika koja svakom paru različitih tačaka u Y prideljuje rastojanje 1. Označimo sa X podprostor realne prave koji se sastoji od prirodnih brojeva. Tada je skup Y^X isti kao skup svih funkcija iz X u Y.

Dve gore navedene metrike d_1 i d_2 definišu dve metrike d_1^* i d_2^* u skupu Y^X. Pokazaćemo da metrike d_1^* i d_2^* nisu ekvivalentne.

Neka je $f_i : X \longrightarrow Y$ (i = 1,2,...) funkcija definisana formulama $f_i(i) = -1/i$ i $f_i(n) = 1/n$ za $n \neq i$, a $f : X \longrightarrow Y$ funkcija definisana na osnovu formule $f(n) = 1/n$ za n = 1,2,... Lako se proverava da je $d_1(f,f_i) = 2/i$, dok je $d_2(f,f_i) = 1$. Prema poznatoj teoremi ([14], str. 171, T.2), ovo povlači da metrike d_1 i d_2 nisu ekvivalentne. //

Dakle, sa topološke tačke gledišta, nema razloga da se posmatra topologija u Y^X indukovana metrikom d^*. Sa druge strane, prostor Y^X_d ima mnoga interesantna svojstva i, šta više, kao što ćemo videti, u važnom slučaju kada je X kompaktan, d^*-topologija je identična sa kompaktno-otvorenom topologijom.

PROPOZICIJA 1.11. d^*-*topologija skupa* Y^X, *indukovana datom ograničenom metrikom* d *na* Y, *je dopustiva*.

DOKAZ. Treba pokazati da je evaluacija

$$\omega : Y^X_d \times X \longrightarrow Y$$

neprekidna. Neka je data tačka $(f_o,x_o) \in Y^X_d \times X$ i pozitivan broj ε i neka je $f_o(x_o) = y_o$. Pošto je f_o neprekidna, postoji u X okolina V tačke x_o tako da je

$$d[y_o,f_o(x)] < (1/2)\varepsilon$$

za svako $x \in V$. Neka je U okolina od f_o u Y^X_d definisana sa

$$U = \{f \in Y^X_d | d^*(f_o,f) < (1/2)\varepsilon\}.$$

Sada se lako proverava da je $\omega(U,V) \subset \{y \in Y | d(y_o,y) < \varepsilon\}$, što dokazuje neprekidnost evaluacije ω. //

PRIMEDBA 1.12. Zapazimo da je, očigledno, svaka neprekidna funkcija $f:X \longrightarrow Y$ iz kompaktnog prostora X u metrizabilan prostor Y, ograničena u odnosu na ma koju metriku d u Y.

TEOREMA 1.13. *Neka je* X *kompaktan prostor*, Y *metrizabilan topološki prostor i* d *proizvoljna metrika u* Y. *Tada je, u* Y^X, d^*-*topologija istovetna sa kompaktno-otvorenom topologijom. Dakle, u ovom slučaju*, d^*-*topologija ne zavisi od izbora metrike* d *u* Y.

DOKAZ. Prema Propozicijama 1.7 i 1.11, svaki skup otvoren u Y^X_k je otvoren u Y^X_d. Da bi dokazali obrnuto, dovoljno je, očigledno, pokazati da za svako $f \in Y^X$ i $\varepsilon > 0$, postoji u Y^X_k otvoren skup G tako da je

$$f \in G \subset H = \{g \in Y^X \; d^*(f,g) < \varepsilon\}. \tag{1}$$

Za svako $x \in X$, neka W_x označava otvoren skup u Y definisan sa

$$W_x = \{y \in Y \mid d[f(x),y] < \varepsilon/4\}.$$

Pošto je f neprekidna i $f(x) \in W_x$, $V_x = f^{-1}(W_x)$ je otvorena okolina od x u X. Pošto je X kompaktan, postoje tačke $x_1,\ldots,x_n \in X$ tako da je

$$(2) \qquad X \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Stavimo (za i = 1,...,n)

$$(3) \qquad K_i = \bar{V}_{x_i} = \overline{f^{-1}(W_{x_i})}, \qquad U_i = \{y \in Y \mid d[f(x_i),y] < \varepsilon/3\}.$$

Skupovi $K_1,\ldots,K_n$ su kompaktni u X, a skupovi $U_1,\ldots,U_n$ su otvoreni u Y. Dakle, skup

$$G = (K_1,U_1) \cap \ldots \cap (K_n,U_n)$$

je otvoren u Y_k^X. Pokazaćemo da, za ovaj skup G, formula (1) važi.

Iz (3) sledi da je $f(K_i) \subset U_i$ za i = 1,...,n, pa je $f \in G$. Neka je $g \in G$ proizvoljno izabrana tačka. Ako je $x \in X$, postoji, prema (2) i (3), indeks $j \leqslant n$ tako da je $x \in K_j$. Imamo, dakle, da je $g(x) \in U_j$ i $f(x) \in U_j$, pa je $d[f(x),g(x)] < (2/3)\varepsilon$. Pošto je x proizvoljno, odavde je $d^*(f,g) < \varepsilon$ i, dakle, $g \in H$. //

2. OSNOVNE OSOBINE KOMPAKTNO-OTVORENE TOPOLOGIJE

Počev od ovog paragrafa pa nadalje, u čitavom tekstu, ukoliko nije drugačije rečeno, predpostavljamo da je skup Y^X snabdeven kompaktno-otvorenom topologijom k. Stoga, umesto oznake Y_k^X, ubuduće koristimo kraću: Y^X.

PROPOZICIJA 2.1. <u>Ako je</u> $A \subset X$ <u>proizvoljan a</u> $F \subset Y$ <u>zatvoren skup, tada je</u> (A,F) <u>zatvoren skup u</u> Y^X.

DOKAZ. Lako se proverava da važe formule

$$(A,F) = \cap \{(x,F) \mid x \in A\}$$

i

$$Y^X - (x,F) = (x,Y - F).$$

Dakle, $$Y^X - (A,F) = \bigcup\{(x, Y - F) \mid x \in A\}.$$

Sada je očigledno da je $Y^X - (A,F)$ otvoren skup. //

Sledeća, nešto modifikovana, teorema R. Arens-a [1], konstatuje da se, u pogledu separacionih svojstava, Y i Y^X "ponašaju" (uglavnom) isto.

TEOREMA 2.2. Y^X je T_0, T_1, T_2, regularan ili kompletno regularan prostor ako i samo ako je Y, respektivno, takav prostor.

Dakle, Y^X je T_i-prostor ako i samo ako Y je T_i-prostor za $i \leqslant 3\frac{1}{2}$.

DOKAZ. R. Arens ([1], str. 481, T. 1). //

PRIMEDBA 2.3. Ako je Y normalan, Y^X ne mora biti normalan. Zaista ako je X diskretan prostor, tada je prostor Y^X sa kompaktno-otvorenom topologijom, na osnovu Definicije 1.1. i Primedbe 1.5, homeomorfan sa topološkim proizvodom $P = \prod\{Y_x = Y \mid x \in X\}$. Poznato je, medjutim, da proizvod normalnih prostora ne mora biti normalan.

U mnogim dokazima koristi se sledeća propozicija:

PROPOZICIJA 2.4. (J. Jackson [27]) Ako je X Hausdorff-ov prostor i σ sub-baza topologije od Y, tada kolekcija svih skupova (K,U), gde je K kompaktan skup u X i $U \in \sigma$, čini sub-bazu kompaktno-otvorene topologije prostora Y^X.

DOKAZ. Vidi S. T. Hu ([22], str. 153, Prop. 1.3.). //

Naredna propozicija je direktna posledica jedne opštije teoreme R. Arens-a ([1], str. 484, T.5).

PROPOZICIJA 2.5. Neka je X lokalno kompaktan Hausdorff-ov prostor. Ako X i Y imaju prebrojive baze, tada i Y^X ima prebojivu bazu.

DOKAZ. ([22], str. 152, Prop. 1.2). //

Posmatrajmo sada neke značajne funkcije vezane za prostor Y^X.

DEFINICIJA 2.6. Neka, za svaku tačku $y \in Y$, $j(y): X \longrightarrow Y$ označava konstantnu funkciju u Y^X koja preslikava X u tačku y. Tada, korespondencija $y \longrightarrow j(y)$ definiše funkciju

$$j : Y \longrightarrow Y^X$$

koju nazivamo <u>injekcija</u> od Y u Y^X.

PROPOZICIJA 2.7. <u>Injekcija</u> $j : Y \longrightarrow Y^X$ <u>je utapanje</u>.

DOKAZ. Dokažimo prvo da je j 1-1. Neka su y_1 i y_2 ma koje dve tačke u Y i neka je $j(y_1) = j(y_2)$. Tada, imamo

$$y_1 = [j(y_1)](X) = [j(y_2)](X) = y_2$$

i, dakle, j je 1-1 funkcija.

Neka je (K,U) proizvoljan otvoren sub-bazni skup u Y^X. Tada je, prema prethodnoj definiciji, $j^{-1}[(K,U)] = U$. Ovo dokazuje neprekidnost injekcije j.

Ostaje da se pokaže da j preslikava svaki otvoren skup V u Y na neki otvoren skup u $j(Y)$. U tom cilju, izaberimo neku tačku $x \in X$ i posmatrajmo otvoren sub-bazni skup (x,V) u Y^X. Očigledno, imamo

$$j(V) = j(Y) \cap (x,V).$$

Dakle, $j(V)$ je otvoren skup u $j(Y)$. //

DEFINICIJA 2.8. Ako je $a \in X$ data tačka, neka

$$p_a : Y^X \longrightarrow Y$$

označava funkciju definisanu sa

$$p_a(f) = f(a)$$

za svako $f \in Y^X$. Ova funkcija je <u>na</u> pošto preslikava podskup $j(Y)$ prostora Y^X na prostor Y. Kažemo da je p_a <u>projekcija</u> (od Y^X na Y) indukovana datom tačkom $a \in X$.

PROPOZICIJA 2.9. <u>Projekcija</u> $p_a : Y^X \longrightarrow Y$ <u>je neprekidna</u>.

DOKAZ. Neka je U otvoren skup u Y. Prema definiciji projekcije p_a, inverzna slika $p_a^{-1}(U)$ je, očigledno, otvoren sub-bazni skup (a,U) u Y^X. Dakle, p_a je neprekidna. //

Podsećamo na poznati pojam retrakta.

DEFINICIJA 2.10. Podskup A prostora X je <u>retrakt</u> od X ako postoji neprekidna funkcija $r: X \longrightarrow A$ tako da je $r(a) = a$ za svako $a \in A$. Kažemo da je r <u>retrakcija</u> od X na A.

PROPOZICIJA 2.11. $j(Y)$ <u>je retrakt od Y^X</u>.

DOKAZ. Izaberimo tačku $a \in X$ i definišimo funkciju

$$r : Y^X \longrightarrow j(Y)$$

sa $r = j \circ p_a$. Pošto su projekcija p_a i injekcija j neprekidne funkcije, takva je kompozicija r. Ako je $f \in j(Y)$, postoji $y \in Y$ tako da je $f = j(y)$. U tom slučaju imamo

$$r(f) = j[p_a(f)] = j[f(a)] = j(y) = f.$$

Dakle, r je retrakcija od Y^X na $j(Y)$. //

Neka su X, Y i Z topološki prostori i neka je $f: Y \longrightarrow Z$ neprekidna funkcija. Tada, par X,f indukuje preslikavanje

$$Map_X(f) : Y^X \longrightarrow Z^X$$

definisano sa
$$[Map_X(f)](g) = f \circ g$$

za svako $g \in Y^X$.

PROPOZICIJA 2.12. $Map_X(f) : Y^X \longrightarrow Z^X$ <u>je neprekidna funkcija</u>.

DOKAZ. Neka je (K,V) otvoren sub-bazni skup u Z^X. Tada dokaz sledi iz jednakosti

$$[Map_X(f)]^{-1}[(K,V)] = \{g \mid fog \in (K,V)\} = \{g \mid f[g(K)] \subset V\}$$
$$= \{g \mid g(K) \subset f^{-1}(V)\} = (K, f^{-1}(V))$$

jer je, zbog neprekidnosti f, $(K, f^{-1}(V))$ otvoren sub-bazni skup u Y^X. //

PROPOZICIJA 2.13. <u>Dijagram</u>

$$\begin{tikzcd} Y & Y^X \arrow[l, "p_a"'] \arrow[d, "Map_X(f)"] \\ Z \arrow[from=1-1, "f"'] & Z^X \arrow[l, "p_a"] \end{tikzcd}$$

komutira, tj. $p_a \circ Map_X(f) = f \circ p_a$.

DOKAZ. Zaista, za $g \in Y^X$ je

$$\left[p_a \circ Map_X(f)\right](g) = p_a(f\circ g) = (f\circ g)(a) = f\left[g(a)\right]$$
$$f\left[p_a(g)\right] = (f\circ p_a)(g).$$

Ovo dokazuje komutativnost dijagrama. //

DEFINICIJA 2.14. Ako je $C \subset X$ dati skup, neka

$$\varrho_C : Y^X \longrightarrow Y^C$$

označava funkciju definisanu sa

$$\varrho_C(f) = f \mid C$$

za svako $f \in Y^X$. Ova funkcija naziva se funkcija restrikcije indukovana datim skupom C.

PROPOZICIJA 2.15. Ako je C kompaktan skup u X, funkcija restrikcije $\varrho_C : Y^X \longrightarrow Y^C$ je neprekidna.

DOKAZ. Neka je $\Phi = \{g \in Y^C \mid g(C_1) \subset U\}$ otvoren sub-bazni skup u Y^C($C_1 \subset C$ kompaktan, $U \subset Y$ otvoren). Tada tvrdjenje sledi iz jednakosti:

$$\varrho_C^{-1}(\Phi) = \{f \mid (f|C) \in \Phi\} = \{f \mid (f|C)(C_1) \subset U\}$$
$$= \{f \mid f(C_1) \subset U\} = (C_1, U). \;//$$

3. KOMPAKTNI SKUPOVI FUNKCIJA

Klasična teorema Ascoli-a (dokazana 1883 god.) tvrdi da uniformno ograničena, ekvineprekidna familija funkcija ima kompaktno zatvorenje u prostoru neprekidnih funkcija sa topologijom uniformne konvergencije. Ova teorema je značajna u analizi, teoriji integralnih jednačina, konformnom preslikavanju, računu varijacija i td. Ona je dugo vremena bila u centru pažnje mnogih matematičara (Arzela, Montel, Vitali i drugi). Tridesetak godina unazad (1946 god.), S. B. Myers [42] generalisao je ovu teoremu. Jedan deo njegovih rezultata može se formulisati kao što sledi: Ako je topološki prostor X lokalno kompaktan, ili zadovoljava prvi aksiom prebrojivosti, a Y je metrički prostor, tada je familija $\mathcal{F}$ neprekidnih funkcija iz X u Y kompaktna (u topologiji uniformne konvergencije) ako i samo ako (1) $\mathcal{F}$ je zatvoren, (2) $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ je kompaktan za svako $x \in X$, (3) $\mathcal{F}$ je ekvineprekidna familija funkcija.

Ako se žele okarakterisati kompaktni skupovi funkcija kada se umesto metričkog posmatra topološki prostor Y, nastaje problem da se uslov ekvineprekidnosti, koji gubi smisao, zameni nekim drugim adekvatnim uslovom. Značajne rezultate u tom pravcu dobili su, 1950 god., D. Gale [18] sa jedne i, 1955 god., Kelley i Morse [28] sa druge strane. U trećem delu ove teze, mi ćemo se, takodje, baviti pitanjima kompaktnosti skupova funkcija u prostoru Y^X sa kompaktno-otvorenom topologijom i neposredno operisati sa osnovnim rezultatima ove trojice eminentnih američkih matematičara. Pre nego što navedemo njihove rezultate, napomenimo da su se, u skorije vreme, ovom problematikom još bavili: J. Weston [58], R. Bagley i J. Yang [3], R. Smithson [54], V. Mancuso [35] (respektivno 1959, 1966, 1971, 1972 god.). U poslednja dva gore navedena rada daju se generalizacije za višeznačne funkcije modernizovanih varijanti teoreme Ascoli-a.

DEFINICIJA 3.1. Topološki prostor X je k-<u>prostor</u> ako ispunjava sledeći uslov: Podskup A od X je otvoren u X ako i samo ako je $A \cap K$ otvoren u K za svaki kompaktan skup K u X.

Jasno je da se u ovoj definiciji reč "otvoren" može zameniti rečju "zatvoren". Poznato je, takodje, ([59], str. 285, T. 43.9) da su svi lokalno kompaktni i svi prostori koji zadovoljavaju prvi aksiom prebrojivosti (i, dakle, svi metrički prostori) k-prostori.

U formulaciji naredne teoreme p_x označava projekciju.

TEOREMA 3.2. (D. Gale) <u>Neka je</u> X <u>Hausdorff-ov</u> k-<u>prostor</u>, Y <u>regu-</u>

laran Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X. Tada, $\mathfrak{F}$ je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(G1) $\mathfrak{F}$ je zatvoren u Y^X,

(G2) $p_x(\mathfrak{F})$ je kompaktan skup u Y za svaku tačku $x \in X$,

(G3) ako je B zatvoren u Y, tada je $\bigcup\{f^{-1}(B) \mid f \in \Phi\}$ zatvoren u X, za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$.

Primetimo da se uslov (G3) može zameniti sa sledećim, očigledno, ekvivalentnim uslovom:

(G4) ako je B otvoren u Y, tada je $\bigcap\{f^{-1}(B) \mid f \in \Phi\}$ otvoren u X, za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$.

DOKAZ. ([18], str. 304, T.1). //

DEFINICIJA 3.3. Za familiju funkcija $\mathfrak{F} \subset Y^X$ kaže se da je topološki uniformno neprekidna ("evenly continuous") ako za svaku tačku $x \in X$, svaku tačku $y \in Y$ i svaki otvoren skup $V \ni y$ postoji otvoren skup $U \ni x$ i otvoren skup $W \ni y$ tako da

$$\left.\begin{matrix} f \in \mathfrak{F} \\ f(x) \in W \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f(U) \subset V.$$

Primetimo da se ova implikacija može pisati u obliku

$$\mathfrak{F} \cap (x,W) \subset (U,V).$$

Za dokaz sledeće dve teoreme vidi ([28], str. 311, T. 21).

TEOREMA 3.4. (Kelley i Morse) Neka je X lokalno kompaktan regularan prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X. Tada, $\mathfrak{F}$ je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(K1) $\mathfrak{F}$ je zatvoren u Y^X,

(K2) $p_x(\mathfrak{F})$ je kompaktan skup u Y za svaku tačku $x \in X$,

(K3) $\mathfrak{F}$ je topološki uniformno neprekidna familija.

TEOREMA 3.5. (Kelley i Morse) Neka je X Hausdorff-ov k-prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X. Tada, $\mathfrak{F}$ je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(M1) $\mathfrak{F}$ je zatvoren u Y^X,

(M2) $\overline{p_x(\mathfrak{F})}$ je kompaktan skup u Y za svaku tačku $x \in X$,

(M3) $\mathfrak{F}|C = \{f|C \mid f \in \mathfrak{F}\}$ je topološki uniformno neprekidna familija u Y^C za svaki kompaktan skup C u X.

4. NEKE MANJE POZNATE DEFINICIJE I ČINJENICE OPŠTE TOPOLOGIJE

Na kraju ove glave izlažemo neke, uglavnom manje poznate, definicije i činjenice opšte topologije, koje ćemo koristiti u narednim paragrafima II.3.2 i II.3.4.

Prvo navodimo dva separaciona aksioma.

DEFINICIJA 4.1. Prostor X je kompletno Hausdorff-ov prostor ako za svake dve različite tačke a i b u X postoje otvoreni skupovi U i V tako da je

$$a \in U, \qquad b \in V, \qquad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

DEFINICIJA 4.2. Prostor X je prostor Stone-a ako za svake dve različite tačke a i b u X postoji neprekidna funkcija f iz X u jedinični interval $I = [0,1]$ tako da je $f(a) = 0$ i $f(b) = 1$.

Navodimo sada definiciju, propoziciju i teoremu na koje se oslanjamo u dokazu Propozicije II.3.2.3.

DEFINICIJA 4.3. Peano-ov prostor je kompaktan, povezan, lokalno povezan metrizabilan topološki prostor.

PROPOZICIJA 4.4. Ako je $f:X \longrightarrow Y$ neprekidna funkcija, X Peano-ov i Y Hausdorff-ov prostor, tada je $f(X)$ Peano-ov prostor.

DOKAZ. Vidi jednu implikaciju u dokazu teoreme Hahn-a i Mazurkiewicz-a; S. Willard ([59], str. 221, T. 31.5). //

TEOREMA 4.5. Svaki Peano-ov prostor je lučno povezan ("arcwise connected").

DOKAZ. S. Willard ([59], str. 219, T. 31.2). //

DEFINICIJA 4.6. Prostor X je <u>potpuno separiran</u> ako za svake dve različite tačke a i b u X postoje otvoreni skupovi U i V tako da je

$$a \in U, \qquad b \in V, \qquad U \cap V = \emptyset, \qquad U \cup V = X.$$

DEFINICIJA 4.7. Prostor X je <u>potpuno nepovezan</u> ako su komponente u X jednočlani podskupovi.

DEFINICIJA 4.8. Prostor X je 0-<u>dimenzionalan</u> ako svaka tačka u X ima lokalnu bazu čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi u X.

GLAVA 2

NEKE VARIJANTE JEDNE TEOREME K. KURATOWSKOG

U ovoj glavi dokazaćemo tri teoreme, koje zajedno sa jednom teoremom K. Kuratowskog čine skup od četiri srodna tvrdjenja.

1. TEOREMA K. KURATOWSKOG

K. Kuratowski ([30], str. 89, T. 3) dokazao je sledeću teoremu:

TEOREMA. Neka je X kompaktan Hausdorff-ov prostor i Y proizvoljan Hausdorff-ov prostor. Tada je skup

$$\Phi = \{(f,x,y) \mid y = f(x)\}$$

zatvoren u prostoru $Y^X \times X \times Y$.

Zamenjujući, u direktnom proizvodu $Y^X \times X \times Y$, prostore X i Y (jedan ili oba) njihovim hiperprostorima 2^X i 2^Y i definišući, na prirodan način, odgovarajući skup Φ, mi ćemo, u narednom paragrafu, dokazati da važe još tri tvrdjenja slična gore citiranoj teoremi.

2. VARIJANTE TEOREME K. KURATOWSKOG

U sve tri niže navedene teoreme predpostavlja se da su posmatrani hiperprostori snabdeveni topologijom Vietoris-a (Def. III.1.1.1).

TEOREMA 2.1. Neka je X lokalno kompaktan regularan prostor i Y regularan prostor. Tada je skup

$$\Phi = \{(f,x,B) \mid f(x) \in B\}$$

zatvoren u prostoru $Y^X \times X \times 2^Y$.

DOKAZ. Pokazaćemo da je komplement skupa Φ otvoren skup. Neka je (f_0,x_0,B_0) tačka koja pripada tom komplementu, tj. $f_0(x_0) \notin B_0$. Pošto je Y regularan prostor, postoje u Y otvoreni skupovi U i V takvi da je

(1) $f_o(x_o) \in U$, $B_o \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Pošto je f_o neprekidna funkcija (dakle, $f_o^{-1}(U)$ je otvorena okolina tačke x_o), a X je lokalno kompaktan regularan prostor, postoji u X kompaktan skup K ([22], str. 66, Prop. 2.14) tako da je

$$x_o \in \operatorname{int}(K), \qquad K \subset f_o^{-1}(U).$$

Očigledno, tada $f_o \in (K,U)$, dok je, prema (1), $B_o \in \langle V \rangle$. Dakle,

$$N = (K,U) \times \operatorname{int}(K) \times \langle V \rangle$$

je otvorena okolina tačke (f_o, x_o, B_o). Ostaje da se pokaže da je

$$N \cap \Phi = \emptyset.$$

Neka je $(f,x,B) \in N$. Tada je $f(K) \subset U$, $x \in \operatorname{int}(K)$ i $B \subset V$. Dakle, $f(x) \in U$, pa, prema (1), $f(x) \notin V$, odakle, tim pre, $f(x) \notin B$. //

TEOREMA 2.2. <u>Neka je</u> X <u>kompaktan Hausdorff-ov prostor i</u> Y T_3-<u>prostor. Tada je skup</u>

$$\Phi = \{(f,A,y) \mid y \in f(A)\}$$

<u>zatvoren u prostoru</u> $Y^X \times 2^X \times Y$.

DOKAZ. Neka je (f_o, A_o, y_o) tačka koja pripada komplementu skupa Φ, tj. $y_o \notin f_o(A_o)$. Pošto je Y regularan prostor, postoje u Y otvoreni skupovi U i V takvi da je

(2) $f_o(A_o) \subset U$, $y_o \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Očigledno, tada je $A_o \subset f_o^{-1}(U)$, pri čemu je, zbog neprekidnosti funkcije f_o, $f_o^{-1}(U)$ otvorena okolina zatvorenog skupa A_o. Pošto je (prema poznatom stavu) X normalan prostor, odavde sledi (opet na osnovu poznate činjenice), da u X postoji otvoren skup G tako da je

$$A_o \subset G, \qquad \overline{G} \subset f_o^{-1}(U).$$

Iz ovih inkluzija zaključujemo da je $A_o \in \langle G \rangle$ i $f_o \in (\overline{G},U)$. Primetimo da je $\overline{G}$ kompaktan skup u X. Dakle,

$$N = (\overline{G},U) \times \langle G \rangle \times V$$

je otvorena okolina tačke (f_o,A_o,y_o). Treba još pokazati da je

$$N \cap \Phi = \emptyset.$$

Neka je $(f,A,y) \in N$. Tada je $f(\overline{G}) \subset U$, $A \subset G$ i $y \in V$. Prema (2), $y \notin f(\overline{G})$. Pošto je $A \subset G$, očigledno, $y \notin f(A)$. //

TEOREMA 2.3. <u>Neka je</u> X <u>kompaktan Hausdorff-ov prostor</u> i Y T_4-<u>prostor. Tada je skup</u>

$$\Phi = \{(f,A,B) \mid f(A) \cap B \neq \emptyset\}$$

zatvoren u prostoru $Y^X \times 2^X \times 2^Y$.

DOKAZ. Neka je (f_o,A_o,B_o) tačka komplementa skupa Φ, tj. $f_o(A_o) \cap B_o = \emptyset$. Pošto je Y normalan, postoje u Y otvoreni skupovi U i V takvi da je

(3) $\qquad f_o(A_o) \subset U, \qquad B_o \subset V, \qquad U \cap V = \emptyset.$

Očigledno, $f_o^{-1}(U)$ je otvorena okolina zatvorenog skupa A_o. Pošto je X normalan, postoji u X otvoren skup G tako da je

$$A_o \subset G, \qquad \overline{G} \subset f_o^{-1}(U).$$

Odavde je $A_o \in \langle G \rangle$ i $f_o \in (\overline{G},U)$. Prema (3), $B_o \in \langle V \rangle$. Dakle,

$$N = (\overline{G},U) \times \langle G \rangle \times \langle V \rangle$$

je otvorena okolina tačke (f_o,A_o,B_o). Lako se proverava da je

$$N \cap \Phi = \emptyset. \ //$$

II DEO

GLAVA 1

NEKI ELEMENTI TEORIJE KATEGORIJA

U ovoj glavi posmatramo samo neke od osnovnih pojmova i stavova teorije kategorija koje ćemo kasnije koristiti u Glavi 3.

1. POJAM KATEGORIJE

DEFINICIJA 1.1. Za kategoriju $\mathcal{K}$ kažemo da je data, ako je data klasa elemenata $O(\mathcal{K})$ (elemente klase $O(\mathcal{K})$ zovemo objektima kategorije $\mathcal{K}$) tako da je:

1. Za svaki par (A,B) objekata iz $\mathcal{K}$ dat je skup $M_{\mathcal{K}}(A,B)$. ($M_{\mathcal{K}}(A,B)$ nazivamo skup morfizama iz A u B. Pri tome često pišemo $u:A \longrightarrow B$ ili $A \xrightarrow{u} B$ umesto $u \in M_{\mathcal{K}}(A,B)$).

2. Za svaku trojku (A,B,C) objekata iz $\mathcal{K}$ dato je preslikavanje

$$\mu : M_{\mathcal{K}}(A,B) \times M_{\mathcal{K}}(B,C) \longrightarrow M_{\mathcal{K}}(A,C)$$

koje zovemo kompozicija morfizama. (Pri tome ako je $u \in M_{\mathcal{K}}(A,B)$, $v \in M_{\mathcal{K}}(B,C)$ sliku $\mu(u,v)$ para (u,v) označavamo i sa vu ili vou).

3. Skupovi $M_{\mathcal{K}}(A,B)$ i kompozicije morfizama zadovoljavaju sledeće aksiome:

(a) Kompozicija morfizama je asocijativna: ako $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} D$, tada

$$w(vu) = (wv)u.$$

(b) Za svaki objekt A iz $\mathcal{K}$ postoji $1_A \in M_{\mathcal{K}}(A,A)$ (tzv. jedinični morfizam od A) tako da ako $B \xrightarrow{u} A$ i $A \xrightarrow{v} C$, tada

$$1_A u = u, \qquad v1_A = v.$$

(c) Ako su parovi (A,B) i (A',B') različiti, tada je

$$M_{\mathcal{K}}(A,B) \cap M_{\mathcal{K}}(A',B') = \emptyset.$$

PRIMER 1.2. Kategorija $\mathcal{S}$ skupova i preslikavanja. Objekte ove kategorije čini klasa svih skupova. Ako su A i B dva proizvoljna skupa tada $M_{\mathcal{S}}(A,B)$ označava skup svih preslikavanja iz A u B. Kompozicija morfizama je definisana kao slaganje preslikavanja.

PRIMER 1.3. Kategorija $\mathcal{T}$ topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja. Objekte ove kategorije čine topološki prostori a morfizme neprekidna preslikavanja. Kompozicija morfizama je slaganje preslikavanja.

DEFINICIJA 1.4. <u>Podkategorija</u> $\mathcal{K}'$ kategorije $\mathcal{K}$ je kategorija tako da

(1) $O(\mathcal{K}') \subset O(\mathcal{K})$.

(2) $M_{\mathcal{K}'}(A,B) \subset M_{\mathcal{K}}(A,B)$.

(3) Kompozicija morfizama u $\mathcal{K}'$ je indukovana kompozicijom u $\mathcal{K}$.

(4) Jedinični morfizmi u $\mathcal{K}'$ su jedinični morfizmi u $\mathcal{K}$.

2. VRSTE MORFIZAMA

Jedno od važnih pitanja u svakoj kategoriji je pitanje klasifikacije njenih morfizama.

Neka su kategoriji $\mathcal{K}$ dati morfizam $u: A \longrightarrow B$ i objekt X. Posmatrajmo preslikavanje

$$[u,X] : M_{\mathcal{K}}(X,A) \longrightarrow M_{\mathcal{K}}(X,B)$$

dato sa

$$[u,X](v) = uv.$$

DEFINICIJA 2.1. Za morfizam u kaže se da je <u>monomorfizam</u> ako je preslikavanje $[u,X]$ 1-1 za svako $X \in O(\mathcal{K})$ tj. $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow uv_2 \neq uv_1$

PROPOZICIJA 2.2. <u>Kompozicija dva monomorfizma je monomorfizam.</u>

DOKAZ. Neka su $u': A \longrightarrow B$ i $u'': B \longrightarrow C$ monomorfizmi i $v_1, v_2: X \longrightarrow A$. Tada

$$(u''u')v_1 = (u''u')v_2 \Longrightarrow u''(u'v_1) = u''(u'v_2)$$
$$\Longrightarrow u'v_1 = u'v_2 \Longrightarrow v_1 = v_2. \;//$$

i dakle $u''u':A \longrightarrow C$ je monomorfizam.

PROPOZICIJA 2.3. Ako je $u:A \longrightarrow B$, $v:B \longrightarrow C$ i ako je vu monomorfizam tada je i u monomorfizam.

DOKAZ. Ako u nije monomorfizam postoje $v_1, v_2:X \longrightarrow A$, $v_1 \neq v_2$ tako da je $uv_1 = uv_2$. Dakle $v(uv_1) = v(uv_2)$ i prema tome $(vu)v_1 = (vu)v_2$ što je nemoguće jer je vu monomorfizam. //

Očigledno važi i sledeća

PROPOZICIJA 2.4. Za svaki objekt A u ma kojoj kategoriji $\mathcal{K}$ $1_A:A \longrightarrow A$ je monomorfizam.

Neka su u kategoriji $\mathcal{K}$ dati morfizam $u:A \longrightarrow B$ i objekt X. Posmatrajmo preslikavanje

$$[X,u] : M_{\mathcal{K}}(B,X) \longrightarrow M_{\mathcal{K}}(A,X)$$

dato sa
$$[X,u](v) = vu.$$

DEFINICIJA 2.5. Za morfizam u kaže se da je epimorfizam ako je preslikavanje $[X,u]$ 1-1 za svako $X \in O(\mathcal{K})$ tj. $v_1 \neq v_2 \Longrightarrow v_1u \neq v_2u$.

Lako se dokazuju sledeće propozicije:

PROPOZICIJA 2.6. Kompozicija dva epimorfizma je epimorfizam.

PROPOZICIJA 2.7. Ako je $u:A \longrightarrow B$, $v:B \longrightarrow C$ i ako je vu epimorfizam, tada je i v epimorfizam.

PROPOZICIJA 2.8. Za svaki objekt A u ma kojoj kategoriji $1_A:A \longrightarrow A$ je epimorfizam.

DEFINICIJA 2.9. Morfizam $u:A \longrightarrow B$ je bijekcija (monoepimorfizam) ako je i monomorfizam i epimorfizam.

DEFINICIJA 2.10. Morfizam $u:A \longrightarrow B$ je izomorfizam (ekvivalencija) ako postoji morfizam $v:B \longrightarrow A$ takav da je

$$vu = 1_A , \qquad uv = 1_B.$$

PROPOZICIJA 2.11. Svaki izomorfizam je bijekcija.

DOKAZ. Iz $vu = 1_A$ prema Propozicijama 2.3 i 2.4 sledi da je u monomorfizam, a iz $uv = 1_B$ prema Propozicijama 2.7 i 2.8 sledi da je u epimorfizam. //

PRIMEDBA 2.12. Bijekcija ne mora biti izomorfizam. ([9] str.6)

PROPOZICIJA 2.13. <u>Kompozicija dva izomorfizma je izomorfizam.</u>

DOKAZ. Neka su $u:A \longrightarrow B$ i $v:B \longrightarrow C$ izomorfizmi. Tada postoje morfizmi $u':B \longrightarrow A$ i $v':C \longrightarrow B$ takvi da je

$$u'u = 1_A, \qquad uu' = 1_B, \qquad v'v = 1_B, \qquad vv' = 1_C.$$

Sada se lako proverava da je $vu:A \longrightarrow C$ izomorfizam jer postoji morfizam $u'v':C \longrightarrow A$ i važi

$$(u'v')(vu) = 1_A, \qquad (vu)(u'v') = 1_C. \ //$$

3. FUNKTORI

DEFINICIJA 3.1. Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ dve kategorije i neka je F funkcija koja svakom objektu A kategorije $\mathcal{C}$ korespondira objekt $F(A)$ kategorije $\mathcal{D}$ i svakom morfizmu u iz $\mathcal{C}$ morfizam $F u$ iz $\mathcal{D}$.

Kažemo da je F <u>kovarijantni funktor</u> iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) Ako $u:A \longrightarrow B$, tada $F(u) : F(A) \longrightarrow F(B)$.

(b) $F(1_A)=1_{F(A)}$.

(c) $F(vu)=F(v)F(u)$.

Slično, kažemo da je F <u>kontravarijantni funktor</u> iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ ako su ispunjeni uslovi:

(α) Ako $u:A \longrightarrow B$, tada $F(u) : F(B) \longrightarrow F(A)$.

(β) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

(γ) $F(vu)= F(u)F(v)$.

PRIMER 3.2. Neka je X fiksirani oblik date kategorije $\mathcal{C}$. Ako je Y objekt u $\mathcal{C}$ neka je $F_X(Y) = M_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Ako je $u:Y \longrightarrow Z$ morfizam u $\mathcal{C}$ neka je $F_X(u): F_X(Z) \longrightarrow F_X(Y)$ dato sa $[F_X(u)](v) = vu$ za svako $v \in F_X(Z)$. Lako se proverava da je $F_X: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ kontravarijantni funktor iz $\mathcal{C}$ u kategoriju $\mathcal{S}$ skupova i preslikavanja.

GLAVA 2

GRANICE I PRESLIKAVANJA INVERZNIH SISTEMA

Ova glava sadrži definicije pojmova i iskaze stavova (bez dokaza), vezanih za inverzne sisteme topoloških prostora, na koje se pozivamo u Glavama 3 i 4 ovog dela.

1. POJAM INVERZNE GRANICE

DEFINICIJA 1.1. Neka je $\leqslant$ binarna relacija u skupu A. Kaže se da je A <u>usmeren</u> relacijom $\leqslant$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) Ako $\alpha \in A$, tada $\alpha \leqslant \alpha$.

(2) Ako $\alpha, \beta, \gamma \in A$ tako da $\alpha \leqslant \beta$ i $\beta \leqslant \gamma$, tada .

(3) Ako $\alpha, \beta \in A$, postoji $\gamma \in A$ tako da $\alpha \leqslant \gamma$ i $\beta \leqslant \gamma$.

Podskup S skupa A je <u>kofinalan podskup</u> od A, ako za svako $\alpha \in A$ postoji $\beta \in S$, tako da je $\alpha \leqslant \beta$.

Neka su A i B skupovi usmereni relacijama $\leqslant_1$ i $\leqslant_2$ redom. Za funkciju $f: A \longrightarrow B$ kaže se da je <u>monotona</u> ako $\alpha \leqslant_1 \beta \Longrightarrow f(\alpha) \leqslant_2 f(\beta)$.

DEFINICIJA 1.2. Neka je A skup usmeren relacijom $\leqslant$, X_α topološki prostor za svako $\alpha \in A$, i $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ neprekidna funkcija za svaki par $\alpha, \beta \in A$ takav da je $\alpha \leqslant \beta$.

Za kolekciju prostora X_α i preslikavanja π_α^β kaže se da čini <u>inverzni sistem</u> prostora i preslikavanja nad usmerenim skupom A, u oznaci $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) Ako $\alpha \in A$, tada $\pi_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha}$.

(2) Ako $\alpha, \beta, \gamma \in A$ i $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, tada $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$.

Umesto $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$ često se kraće piše $\{X, \pi, A\}$ ili samo $\{X, \pi\}$ ako je jasno o kojem je usmerenom skupu reč.

PRIMEDBA 1.3. Usmeren skup A postaje kategorija ako elemente iz

A posmatramo kao objekte, a skup morfizama iz α u β je ili prazan, ako $\alpha \nleqslant \beta$, ili sadrži samo jedan element, relaciju $\leqslant$, ako $\alpha \leqslant \beta$.

Tada, inverzni sistem nad A je, jednostavno, kontravarijantni funktor iz A u kategoriju $\mathcal{T}$ topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja.

DEFINICIJA 1.4. <u>Inverzna granica</u> (kratko granica) inverznog sistema $\{X,\Pi,A\}$, u oznaci X_∞ ili $\varprojlim\{X,\Pi,A\}$, je podprostor topološkog proizvoda prostora X_α, koji sadrži one funkcije $x = \{x_\alpha\}$, kod kojih je $\Pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$, za svaki par $\alpha, \beta \in A$ takav da $\alpha \leqslant \beta$.

PROPOZICIJA 1.5. <u>Granica inverznog sistema T_i-prostora je T_i-prostor</u> za $i \leqslant 3\frac{1}{2}$. <u>Ako svaki</u> X_α <u>je</u> T_2, <u>tada</u> X_∞ <u>je zatvoren u</u> $\prod X_\alpha$.

DOKAZ. Separacione osobine su produktivne i nasledne za $i \leqslant 3\frac{1}{2}$. Za drugi deo tvrdjenja vidi na pr. S. Eilenberg ([13],str.216,L.3.5). //

Neka je, za svako $\alpha \in A$, $\Pi_\alpha : X_\infty \longrightarrow X_\alpha$ restrikcija na X_∞ prirodne projekcije $\prod X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$.

TEOREMA 1.6. <u>Ako je</u> $\{X,\Pi,A\}$ <u>inverzni sistem, tada je familija svih skupova oblika</u> $\Pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, <u>gde</u> α <u>prolazi neki skup</u> S <u>kofinalan u</u> A, <u>a</u> U_α <u>su otvoreni podskupovi prostora</u> X_α, <u>baza prostora</u> X_∞.

DOKAZ. Vidi R. Engelking ([14], str. 88, T. 3). //

PROPOZICIJA 1.7. <u>Ako je</u> $x \in X_\infty$ <u>i</u> $Z \subset X_\infty$, <u>tada je</u>

$$x \in \overline{Z} \Longleftrightarrow \Pi_\alpha(x) \in \overline{\Pi_\alpha(Z)} \quad \underline{\text{za svako}}\ \alpha \in A.$$

DOKAZ. Vidi K. Kuratowski ([29], str. 167, T. 3). //

PRIMEDBA 1.8. Postoje primeri inverznih sistema takvih da je $X_\alpha \neq \emptyset$ za svako $\alpha \in A$, ali je $X_\infty = \emptyset$ (S. Willard [59], str.211, Pr. 29.10)

Medjutim, važi sledeća teorema ([13], str. 217, T. 3.6).

TEOREMA 1.9. <u>Granica inverznog sistema (nepraznih) kompaktnih T_2-prostora je (neprazan) kompaktan T_2-prostor</u>.

2. PRESLIKAVANJA INVERZNIH SISTEMA

DEFINICIJA 2.1. Preslikavanje $\Phi = \{\varphi, \varphi_\beta\}$ inverznog sistema $\{X, \pi, A\}$ u inverzni sistem $\{Y, \varrho, B\}$, u oznaci

$$\Phi : \{X, \pi, A\} \longrightarrow \{Y, \varrho, B\},$$

je familija koja se sastoji od monotone funkcije $\varphi : B \longrightarrow A$ i neprekidnih funkcija

$$\varphi_\beta : X_{\varphi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta$$

definisanih za svako $\beta \in B$, tako da za svaki par $\alpha, \beta \in B$, gde $\alpha \leqslant \beta$ sledeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi(\alpha)} & \xleftarrow{\pi^{\varphi(\beta)}_{\varphi(\alpha)}} & X_{\varphi(\beta)} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_\beta} \\ Y_\alpha & \xleftarrow[\varrho^\beta_\alpha]{} & Y_\beta \end{array}$$

komutira, tj.

$$\varphi_\alpha \circ \pi^{\varphi(\beta)}_{\varphi(\alpha)} = \varrho^\beta_\alpha \circ \varphi_\beta$$

DEFINICIJA 2.2. Neka je $\Phi = \{\varphi, \varphi_\beta\} : \{X, \pi, A\} \longrightarrow \{Y, \varrho, B\}$ preslikavanje inverznih sistema. Ako je $x = \{x_\alpha\} \in X_\infty$, za svako $\beta \in B$ stavimo

$$y_\beta = \varphi_\beta(x_{\varphi(\beta)}).$$

Na osnovu prethodne definicije, za tačku $y = \{y_\beta\} \in \prod Y_\beta$ i svaki par $\alpha, \beta \in B$ takav da je $\alpha \leqslant \beta$, imamo

$$\varrho^\beta_\alpha(y_\beta) = \varrho^\beta_\alpha[\varphi_\beta(x_{\varphi(\beta)})] = \varphi_\alpha[\pi^{\varphi(\beta)}_{\varphi(\alpha)}(x_{\varphi(\beta)})] =$$
$$= \varphi_\alpha(x_{\varphi(\alpha)}) = y_\alpha$$

i, dakle, $y \in Y_\infty$.

<u>Granično preslikavanje</u> preslikavanja Φ, u oznaci φ_∞ ili $\varprojlim \Phi$, je funkcija

$$\varphi_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$$

definisano sa $\varphi_\infty(x) = y$.

TEOREMA 2.3. <u>Granično preslikavanje</u> $\varphi_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$ <u>je neprekidna funkcija</u>.

DOKAZ. Vidi na pr. ([13], str. 218, T. 3.13). //

Navedimo, na kraju, sledeću važnu teoremu čiji se dokaz može izvesti iz ([13], str. 218-219 L.3.11; T.3.13; T.3.15) i ([14], str. 88, T.3).

TEOREMA 2.4. <u>Neka je</u> $\Phi = \{\varphi, \varphi_\beta\} : \{X, \pi, A\} \longrightarrow \{Y, \varrho, B\}$. <u>Ako je</u>

(1) N <u>kofinalan podskup od</u> B,

(2) $\varphi(N)$ <u>kofinalan podskup od</u> A,

(3) $\varphi_\beta : X_{\varphi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta$ <u>homomorfizam za svako</u> $\beta \in N$,

<u>tada je</u> $\varphi_\infty : X_\infty \longrightarrow Y_\infty$ <u>homomorfizam</u>.

GLAVA 3

O INVERZNOJ GRANICI FUNKCIONALNIH PROSTORA

Neka je $\mathcal{K}$ kategorija čiji su objekti kompaktni Hausdorff-ovi prostori, a morfizmi neprekidna preslikavanja ovih prostora. Ako je X objekt u $\mathcal{K}$, neka $\exp(X)$ označava prostor svih nepraznih zatvorenih podskupova od X sa topologijom Vietoris-a. Ako je f morfizam u $\mathcal{K}$ i $f:X \longrightarrow Y$, neka je $\exp(f):\exp(X) \longrightarrow \exp(Y)$ definisano sa $\exp(f) = f(F)$ za svako $F \in \exp(X)$. Tada je $\exp: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ kovarijantni funktor. Neka je $\{X,\pi,A\}$ inverzni sistem u $\mathcal{K}$ nad usmerenim skupom A. U [51] S. Sirota dokazao je da je $\exp(\varprojlim\{X,\pi\}) \approx \varprojlim\{\exp(X),\exp(\pi)\}$. Ako je $\{Y,\varrho,B\}$ drugi inverzni sistem u $\mathcal{K}$ i $\Phi : \{X,\pi\} \to \{Y,\varrho\}$ preslikavanje ovih sistema, tada ono indukuje preslikavanje $\exp(\Phi)$: $\{\exp(X), \exp(\pi)\} \longrightarrow \{\exp(Y), \exp(\varrho)\}$. U [38] M. Marjanović dokazuje da su tada preslikavanja $\exp(\varprojlim \Phi)$ i $\varprojlim \exp(\Phi)$ jednaka do na kompoziciju sa homeomorfizmima. Ovo kompletira pomenuti rezultat iz [51]. Za X u $\mathcal{K}$, neka je $X = X^{(0)}$ i $X^{(n)} = \exp(X^{(n-1)})$ za $n = 1,2,\ldots$. Neka je $u:X^{(2)} \longrightarrow X^{(1)}$ unija shvaćena kao preslikavanje. Stavimo $u = u^{(1)}$ i neka je $u^{(n)} = \exp(u^{(n-1)})$ za $n = 2,3,\ldots$. Tako dolazimo do inverznog niza prostora i preslikavanja: $X^{(1)} \xleftarrow{u^{(1)}} X^{(2)} \xleftarrow{u^{(2)}} \cdots$ čiju ćemo granicu označiti sa $X^{(\omega)}$. Nazovimo prostor X eksponencijalno kompletnim ako je $X \approx \exp(X)$. U [37] M. Marjanović dokazuje da je $X^{(\omega)}$ eksponencijalno kompletan i da se X može utopiti u $X^{(\omega)}$.

U ovoj glavi mi posmatramo kovarijantni funktor Map_X u kategoriji Hausdorff-ovih topoloških prostora i neprekidnih preslikavanja. U prva tri paragrafa dokazujemo da svi gore pomenuti rezultati imaju, u ovom slučaju, svoje analoge. Navodimo i dva primera. U četvrtoj tački ispitujemo neke osobine funkcionalno kompletnog prostora $Y^{(\omega)}$ i formulišemo jedan otvoren problem.

1. KOMUTIRANJE Map_X FUNKTORA SA INVERZNOM GRANICOM

Neka je $\mathcal{H} = (O,M)$ kategorija čiji su objekti O svi Hausdorff-ovi topološki prostori, morfizmi M sva neprekidna preslikavanja ovih prostora i neka X označava fiksirani objekt kategorije $\mathcal{H}$. Mi pretpostavljamo da, ukoliko nije drugačije rečeno, svi prostori i sva preslikavanja koja posmatramo u ovoj glavi pripadaju $\mathcal{H}$. Za svako $Y \in O$, neka $Map_X(Y)$ označava skup svih neprekidnih funkcija iz X u Y snabdeven kompaktno-otvorenom topologijom. Umesto $Map_X(Y)$ koristićemo, takodje, ponekad i uobičajenu oznaku Y^X. Pošto je $Y \in O$, prema T. I.1.2.2, sledi da je $Map_X(Y) \in O$. Ako je $f \in M$ i $f:Y \longrightarrow Z$, neka je $Map_X(f):Map_X(Y) \longrightarrow Map_X(Z)$ preslikavanje definisano sa $[Map_X(f)](g) = f o g$ za svako $g \in Map_X(Y)$. Tada, preslikavanje $Map_X(f)$ je neprekidno (Prop. I.1.2.12). Ako je i M identiteta, tada je $Map_X(i)$ takodje identiteta i, lako je videti da, ako su f_1 i f_2 u M i $f_1 o f_2$ je definisano, tada $Map_X(f_1 o f_2) = Map_X(f_1) o Map_X(f_2)$. Dakle $Map_X: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je kovarijantni funktor (Def. 1.3.1) i slika od $\mathcal{H}$ sa Map_X, u oznaci $Map_X(\mathcal{H})$, je podkategorija od $\mathcal{H}$.

Ekvivalencije u $\mathcal{H}$ su homeomorfizmi i za dva prostora Y i Z u $\mathcal{H}$, $Y \approx Z$ označava da su Y i Z homeomorfni.

Neka je $\{Y,\pi,A\}$ inverzni sistem u $\mathcal{H}$ nad usmerenim skupom A. Pošto je Map_X kovarijantni funktor, $\{Map_X(Y), Map_X(\pi), A\}$ je, takodje, jedan inverzni sistem u $\mathcal{H}$.

Mi sada dokazujemo sledeću činjenicu (uporedi sa Bucur i Deleanu ([9], str. 57, Prop. 3.6)):

TEOREMA 1.1. $Map_X(\varprojlim\{Y,\pi\}) \approx \varprojlim\{Map_X(Y), Map_X(\pi)\}$.

DOKAZ. Stavimo $Y_\infty = \varprojlim\{Y,\pi\}$ i posmatrajmo preslikavanje

$$H:Map_X(\varprojlim\{Y,\pi\}) \longrightarrow \varprojlim\{Map_X(Y), Map_X(\pi)\}$$

definisano sa

$$H(f) = \{p_\alpha o f\}$$

za svako $f \in Map_X(Y_\infty)$, gde p_α označava restrikciju prirodne projekcije $\prod\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\} \longrightarrow Y_\alpha$ na skup Y_∞.

Ovo preslikavanje je dobro definisano. Zaista, ako $\alpha, \beta \in A$ i $\alpha \leqslant \beta$ tada

$$\left[Map_X(\pi_\alpha^\beta)\right](p_\beta of) = p_\alpha of$$

jer, za svako $x \in X$, i dakle $f(x) \in Y_\infty$, imamo

$$(\left[Map_X(\pi_\alpha^\beta)\right](p_\beta of))(x) = (\pi_\alpha^\beta op_\beta of)(x) =$$
$$= \pi_\alpha^\beta(p_\beta\left[f(x)\right]) = p_\alpha\left[f(x)\right] = (p_\alpha of)(x) .$$

Posmatrajmo takodje i preslikavanje

$$G: \underleftarrow{\lim}\{Map_X(Y), Map_X(\pi)\} \longrightarrow Map_X(\underleftarrow{\lim}\{Y, \pi\})$$

gde, za proizvoljnu tačku $f = \{f_\alpha\} \in \underleftarrow{\lim}\{Map_X(Y), Map_X(\pi)\}$ (dakle $f_\alpha \in Map_X(Y_\alpha)$), preslikavanje $G(f): X \longrightarrow Y_\infty$, je definisano sa

$$\left[G(f)\right](x) = \{f_\alpha(x)\}$$

za svako $x \in X$. Da bi opravdali ovu definicu, mi zapažamo, pre svega, da je $\left[G(f)\right](x)$ zaista tačka u Y_∞ za svako $x \in X$, jer, za $\alpha \leqslant \beta$, imamo

$$\pi_\alpha^\beta\left[f_\beta(x)\right] = (\pi_\alpha^\beta of_\beta)(x) = (\left[Map_X(\pi_\alpha^\beta)\right](f_\beta))(x) = f_\alpha(x).$$

Šta više, $G(f)$ je neprekidna funkcija tj. $G(f) \in Y_\infty^X$ pošto je, za svako $x \in X$,

$$\left[p_\alpha oG(f)\right](x) = p_\alpha(\{f_\alpha(x)\}) = f_\alpha(x)$$

i, dakle, $p_\alpha oG(f) = f_\alpha$.

Pokazaćemo sada da su G i H bijekcije inverzne jedna drugoj.

(a) $(GoH)(f) = f$ za svako $f \in Y_\infty^X$, jer ako je $x \in X$, tada
$$\left[(GoH)(f)\right](x) = (G\left[H(f)\right])(x) = \{(p_\alpha of)(x)\} = \{p_\alpha\left[f(x)\right]\} = f(x).$$

(b) $(HoG)(f) = f$ za svako $f = \{f_\alpha\} \in \underleftarrow{\lim}\{Map_X(Y), Map_X(\pi)\}$ jer

$$(HoG)(f) = H\left[G(f)\right] = \{p_\alpha oG(f)\} = \{f_\alpha\} = f.$$

Ostaje da se pokaže da su preslikavanja G i H neprekidna.

(c) Neprekidnost funkcije H. Neka je (C, U_α) otvoren sub-bazni skup prostora Y_α^X, gde je C kompaktan skup u X i U_α otvoren skup u Y_α, i neka q_α označava restrikciju prirodne projekcije $\prod\{Y_\alpha^X \mid \alpha\in A\}\longrightarrow Y_\alpha^X$ na podskup $\varprojlim\{Map_X(Y), Map_X(\Pi)\}$. Dovoljno je dokazati neprekidnost kompozicije $q_\alpha oH$.

$$f\in (q_\alpha oH)^{-1}\left[(C,U_\alpha)\right]\Longleftrightarrow q_\alpha\left[H(f)\right]\in (C,U_\alpha)\Longleftrightarrow$$

$$q_\alpha(\{p_\alpha\, of\})\in (C,U_\alpha)\Longleftrightarrow p_\alpha of\ \in (C,U_\alpha)\Longleftrightarrow p_\alpha\left[f(C)\right]\subset U_\alpha$$

$$\Longleftrightarrow f(C)\subset p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\Longleftrightarrow f\in (C,p_\alpha^{-1}(U))$$

i dakle
$$(q_\alpha oH)^{-1}\left[(C,U_\alpha)\right] = (C,p_\alpha^{-1}(U_\alpha)).$$

Ovo kompletira dokaz jer je $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ otvoren bazni skup u Y_∞ prema T. 2.1.6.

(d) Neprekidnost funkcije G. Pošto je X T_2-prostor, $S=(C,p_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ je otvoren sub-bazni skup u Y_∞^X(Prop. I.1.2.4). Ako je $f=\{f_\alpha\}\in \varprojlim\{Map_X(Y), Map_X(\Pi)\}$ imamo

$$f\in G^{-1}(S)\Longleftrightarrow\left[G(f)\right](C)\subset p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\Leftrightarrow\left[G(f)\right](x)\in p_\alpha^{-1}(U_\alpha),\ \forall x\in C$$

$$\Longleftrightarrow\{f_\alpha(x)\}\in p_\alpha^{-1}(U_\alpha),\ \forall x\in C\Longleftrightarrow f_\alpha(x)\in U_\alpha,\ \forall x\in C\Longleftrightarrow f_\alpha(C)\subset U_\alpha$$

$$\Leftrightarrow f_\alpha\in (C,U_\alpha)\Leftrightarrow f\in q_\alpha^{-1}\left[(C,U_\alpha)\right].$$

Dakle, $G^{-1}(S) = q_\alpha^{-1}[(C,U_\alpha)]$ je otvoren skup u $\varprojlim\{Map_X(Y), Map_X(\Pi)\}$ pa je G neprekidna funkcija.

Prema (a), (b), (c), (d) dokaz teoreme je potpun. //

Neka je $\{Z,\varrho,B\}$ drugi inverzni sistem u $\mathcal{H}$ nad usmerenim skupom B. Ako je $\Phi:\{Y,\Pi\}\longrightarrow\{Z,\varrho\}$ preslikavanje ova dva sistema, ono očigledno definiše preslikavanje $Map_X(\Phi):\{Map_X(Y), Map_X(\Pi)\}\longrightarrow\{Map_X(Z).Map_X(\varrho)\}$. Tako imamo dva indukovana preslikavanja $Map_X(\varprojlim\Phi)$ i $\varprojlim Map_X(\Phi)$ za koja ćemo pokazati da su ista do na kompoziciju sa homeomorfizmima. Preciznije imamo sledeću teoremu:

TEOREMA 1.2. Neka je dato preslikavanje inverznih sistema

$$\Phi = \{\varphi,\varphi_\beta\}:\{Y,\Pi,A\}\longrightarrow\{Z,\varrho,B\}.$$

Tada, postoje dva homeomorfizma H i K tako da dijagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_X(\varprojlim\{Y,\Pi\}) & \xrightarrow{H} & \varprojlim\{\mathrm{Map}_X(Y),\mathrm{Map}_X(\Pi)\} \\ {\scriptstyle \mathrm{Map}_X(\varprojlim \Phi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varprojlim \mathrm{Map}_X(\Phi)} \\ \mathrm{Map}_X(\varprojlim\{Z,\varrho\}) & \xrightarrow[K]{} & \varprojlim\{\mathrm{Map}_X(Z),\mathrm{Map}_X(\varrho)\} \end{array}$$

komutira.

DOKAZ. Neka su H i K homeomorfizmi iz T. 1.1 u odnosu na $\{Y,\Pi\}$ i $\{Z,\varrho\}$ respektivno, i neka P_β i Q_β označavaju restrikcije prirodnih projekcija $\prod\{Z_\beta \mid \beta\in B\} \longrightarrow Z_\beta$ i $\prod\{Z_\beta^X \mid \beta\in B\} \longrightarrow Z^X$ na podskupove $\varprojlim\{Z,\varrho\}$ i $\varprojlim\{\mathrm{Map}_X(Z),\mathrm{Map}_X(\varrho)\}$ redom. Sada, za $f \in Y_\infty^X$ i $\beta\in B$, imamo

$$[Q_\beta o K o \mathrm{Map}_X(\varprojlim \Phi)](f) = (Q_\beta o K)(\varprojlim \Phi o f)$$

$$Q_\beta(\{P_\beta o \varprojlim \Phi o f\}) = P_\beta o \varprojlim \Phi o f.$$

Sa druge strane, prema definiciji graničnog preslikavanja je

$$[Q_\beta o \varprojlim \mathrm{Map}_X(\Phi) o H](f) = [Q_\beta o \varprojlim \mathrm{Map}_X(\Phi)](\{p_\alpha o f\})$$

$$= [\mathrm{Map}_X(\varphi_\beta)](p_{\varphi(\beta)} o f) = \varphi_\beta o p_{\varphi(\beta)} o f.$$

Ali, za $x\in X$, je

$$(P_\beta o \varprojlim \Phi o f)(x) = P_\beta(\varprojlim \Phi[f(x)]) = \varphi_\beta(p_{\varphi(\beta)}[f(x)])$$

$$= (\varphi_\beta o p_{\varphi(\beta)} o f)(x)$$

pa je komutativnost dijagrama dokazana. //

Dakle, prema T. 1.1 i T. 1.2, funktor Map_X komutira sa inverznom granicom.

2. FUNKCIONALNO KOMPLETNI PROSTORI

Uvedimo sledeću definiciju:

DEFINICIJA 2.1. Prostor Y je funkcionalno kompletan u odnosu na X ako je $Y \approx \mathrm{Map}_X(Y)$.

PRIMER 2.2. Trivijalan primer funkcionalno kompletnog prostora je svaki prostor Y koji sadrži samo jednu tačku.

Jedan drugi primer daje sledeća propozicija (vidi Def. I.1.4.3):

PROPOZICIJA 2.3. <u>Svaki Hausdorff-ov prostor Y koji ne sadrži luk je funkcionalno kompletan u odnosu na Peano-ov prostor</u> X.

DOKAZ. Prema Prop. I.1.2.7, Y je homeomorfan sa podprostorom j(Y) (svih konstantnih funkcija) prostora Y^X. Dakle, dovoljno je dokazati da je svaka neprekidna funkcija $f:X \longrightarrow Y$ konstanta. Zaista, pošto je X Peano-ov a Y Hausdorff-ov prostor, i f(X) je Peano-ov prostor (Prop. I.1.4.4). Ako f(X) nije tačka, tada f(X) sadrži luk (T. I.1.4.5), što je suprotno pretpostavci za Y. //

Za $Y \in O$, stavimo $Y = Y^{(o)}$, i za n = 1,2,... neka je

$$Y^{(n)} = Map_X(Y^{(n-1)}).$$

Neka je $a \in X$ fiksirana tačka. Posmatrajmo preslikavanje

$$p_a : Y^{(1)} \longrightarrow Y^{(o)}$$

definisano sa

$$p_a(f) = f(a)$$

za svako $f \in Y^{(1)}$, koje je neprekidno i na (Prop. I.1.2.9).

Označimo $p_a:Y^{(1)} \longrightarrow Y^{(o)}$ sa $p_a^{(o)}$, i za n = 1,2,... neka je

$$p_a^{(n)} = Map_X(p_a^{(n-1)}) : Y^{(n+1)} \longrightarrow Y^{(n)}.$$

Tada sva preslikavanja $p_a^{(n)}$, n = 0,1,..., su neprekidna i na. Dakle, dolazimo do inverznog sistema prostora i preslikavanja

$$Y^{(o)} \xleftarrow{p_a^{(o)}} Y^{(1)} \xleftarrow{p_a^{(1)}} Y^{(2)} \longleftarrow \dots \longleftarrow Y^{(n)} \xleftarrow{p_a^{(n)}} Y^{(n+1)} \longleftarrow \dots .$$

Neka je

$$Y^{(\omega)} = \varprojlim\{Y^{(n)}, p_a^{(n)}\}.$$

Tada, $Y^{(\omega)}$ je objekt u $\mathcal{H}$ (Prop. 2.1.5), i primenjujući T. 1.1 na $\varprojlim\{Y^{(n)}, p_a^{(n)}\}$ neposredno dolazimo do

TEOREMA 2.4. <u>Prostor</u> $Y^{(\omega)}$ je <u>funkcionalno kompletan u odnosu na</u> X.

DOKAZ.
$$Map_X(Y^{(\omega)}) \approx \varprojlim\{Map_X(Y^{(n)}), Map_X(p_a^{(n)})\}$$

$$= \varprojlim\{Y_a^{(n+1)}, p_a^{(n+1)}\} \approx Y^{(\omega)},$$

gde poslednja relacija sledi iz T. 2.2.4. //

Posmatrajmo sada preslikavanje $f: Y \longrightarrow Z$ koje pripada $\mathcal{H}$. Stavimo $f = f^{(o)}$, i za $n = 1,2,\ldots$ neka je

$$f^{(n)} = \mathrm{Map}_X(f^{(n-1)}) : Y^{(n)} \longrightarrow Z^{(n)}.$$

DEFINICIJA 2.5. Dijagram

$$\begin{tikzcd}
Y^{(o)} \arrow[d, "f^{(o)}"'] & Y^{(1)} \arrow[l, "p_a^{(o)}"'] \arrow[d, "f^{(1)}"'] & \cdots \arrow[l] & Y^{(n)} \arrow[l] \arrow[d, "f^{(n)}"'] & Y^{(n+1)} \arrow[l, "p_a^{(n)}"'] \arrow[d, "f^{(n+1)}"'] & \cdots \arrow[l] \\
Z^{(o)} & Z^{(1)} \arrow[l, "p_a^{(o)}"] & \cdots \arrow[l] & Z^{(n)} \arrow[l] & Z^{(n+1)} \arrow[l, "p_a^{(n)}"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

nazivamo <u>indukovani dijagram</u>.

PROPOZICIJA 2.6. <u>Svi četvorougli indukovanog dijagrama komutiraju</u>.

DOKAZ. Prvi četvorougao komutira prema Prop. I.1.2.13. Pošto je Map_X kovarijantan funktor, komutativnost svih ostalih četvorouglova neposredno sledi. //

DEFINICIJA 2.7. Za preslikavanje $f: Y \longrightarrow Z$ u $\mathcal{H}$ kažemo da je funkcionalno kompletno u odnosu na X ako je f jednako $\mathrm{Map}_X(f)$ do na kompoziciju sa homeomorfizmima.

Neka je $\{f^{(n)}\} : \{Y^{(n)}, p_a^{(n)}\} \longrightarrow \{Z^{(n)}, p_a^{(n)}\}$ preslikavanje inverznih sistema i neka je $f^{(\omega)} = \varprojlim\{f^{(n)}\}$. Tada je $f^{(\omega)}$ neprekidno (T. 2.2.3) i, dakle, preslikavanje u $\mathcal{H}$.

TEOREMA 2.8. <u>Za ma koje</u> $f: Y \longrightarrow Z$ <u>u</u> $\mathcal{H}$, <u>preslikavanje</u> $f^{(\omega)}$: $Y^{(\omega)} \longrightarrow Z^{(\omega)}$ <u>je funkcionalno kompletno u odnosu na</u> X.

DOKAZ. Primenjujući T. 1.2 na preslikavanje inverznih sistema

$$\{f^{(n)}\} : \{Y^{(n)}, p_a^{(n)}\} \longrightarrow \{Z^{(n)}, p_a^{(n)}\}$$

imamo

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Map}_X(Y^{(\omega)}) & \xrightarrow{H} & \varprojlim\{Y^{(n+1)}, p_a^{(n+1)}\} & \xrightarrow{h} & Y^{(\omega)} \\
\Big\downarrow \mathrm{Map}_X(f^{(\omega)}) & & \Big\downarrow \varprojlim\{f^{(n+1)}\} & & \Big\downarrow f^{(\omega)} \\
\mathrm{Map}_X(Z^{(\omega)}) & \xrightarrow[K]{} & \varprojlim\{Z^{(n+1)}, p_a^{(n+1)}\} & \xrightarrow[k]{} & Z^{(\omega)}
\end{array}$$

gde su h i k očigledni homeomorfizmi. Pošto su četvorougli komutativni nalazimo da je

$$\mathrm{Map}_X(f^{(\omega)}) = (k\circ K)^{-1} \circ f^{(\omega)} \circ (h\circ H). \; //$$

3. TEOREMA O UTAPANJU

Pokazaćemo sada da postoji podkategorija od $\mathcal{H}$ čiji su svi objekti funkcionalno kompletni u odnosu na X i da za svako $Y \in O$ postoji $Z \in O$ koje sadrži Y i funkcionalno je kompletno u odnosu na X.

Posmatrajmo preslikavanje

$$j_o : Y^{(o)} \longrightarrow Y^{(1)}$$

gde, za svaku tačku $y \in Y^{(o)}$, $j_o(y): X \longrightarrow Y$ označava konstantnu funkciju u $Y^{(1)}$ koja preslikava X u tačku y. Preslikavanje j_o je utapanje (Prop. I.1.2.7). Za svako n = 1,2,... neka je

$$j_n = \mathrm{Map}_X(j_{n-1}) : Y^{(n)} \longrightarrow Y^{(n+1)}.$$

Preslikavanja j_n, n = 0,1,..., su neprekidna pa imamo sledeći niz prostora i preslikavanja:

$$Y^{(o)} \xrightarrow{j_o} Y^{(1)} \xrightarrow{j_1} Y^{(2)} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y^{(n)} \xrightarrow{j_n} Y^{(n+1)} \longrightarrow \dots .$$

PROPOZICIJA 3.1. <u>Za svako</u> n = 0,1,..., $j_n(Y^{(n)})$ <u>je retrakt od</u> $Y^{(n+1)}$ <u>sa retrakcijom</u> $j_n\circ p_a^{(n)} : Y^{(n+1)} \longrightarrow j_n(Y^{(n)})$.

DOKAZ. Ovo tvrdjenje je tačno za n = 0 (Prop. I.1.2.11). Neka je $n > 0$. Ako je $f \in j_n(Y^{(n)})$, tada postoji $g \in Y^{(n)}$ tako da je

$$f = j_n(g) = [\mathrm{Map}_X(j_{n-1})](g) = j_{n-1}\circ g.$$

Očigledno, $p_a^{(n)}\circ j_n$ je identiteta na $Y^{(n)}$, za svako n = 0,1,..., pa imamo

$$(j_n o p_a^{(n)})(f) = \left[Map_X(j_{n-1} o p_a^{(n-1)})\right](f) = j_{n-1} o p_a^{(n-1)} o f$$
$$= j_{n-1} o p_a^{(n-1)} o j_{n-1} o g = j_{n-1} o 1_{Y^{(n-1)}} o g = j_{n-1} o g = f.$$

Dakle, $j_n o p_a^{(n)}$ je retrakcija od $Y^{(n+1)}$ na $j_n(Y^{(n)})$. //

Za svako $n = 0,1,\ldots,$ stavimo

$$j_{o,n} = j_n \circ j_{n-1} \circ \ldots \circ j_o : Y^{(o)} \longrightarrow Y^{(n+1)}$$

i posmatrajmo preslikavanje

$$j_{o,\omega} : Y \longrightarrow \varprojlim\{Y^{(n+1)}, p_a^{(n+1)}\} \equiv Y^{\infty}$$

definisano sa

$$j_{o,\omega}(y) = \{j_{o,n}(y)\}$$

za svako $y \in Y$. Ovo preslikavanje je dobro definisano. Zaista, za $n = 1,2,\ldots,$ imamo

$$p_a^{(n)}[j_{o,n}(y)] = p_a^{(n)}[(j_n o j_{o,n-1})(y)] = (p_a^{(n)} o j_n)[j_{o,n-1}(y)]$$
$$= \left[Map_X(p_a^{(n-1)} o j_{n-1})\right]\left[j_{o,n-1}(y)\right] = p_a^{(n-1)} o j_{n-1} o j_{o,n-1}(y)$$
$$= 1_{Y^{(n-1)}} o j_{o,n-1}(y) = j_{o,n-1}(y).$$

PROPOZICIJA 3.2. <u>Ako je</u> f <u>proizvoljna tačka u</u> $j_{o,\omega}(Y)$ <u>i</u> π_n: $\prod\{Y^{(n)} \mid n = 1,2,\ldots\} \longrightarrow Y^{(n)}$ <u>označava prirodnu projekciju, tada</u>

$$[\pi_{n+1}(f)](x) \in j_{n-1}(Y^{(n-1)})$$

<u>za svako</u> $x \in X$ <u>i</u> $n = 1,2,\ldots$,

DOKAZ. Pošto je $f \in j_{o,\omega}(Y)$, postoji $y \in Y$ tako da je $j_{o,\omega}(Y) = f$ i, dakle, $j_{o,n-1}(y) = \pi_n(f)$ za svako $n = 1,2,\ldots$. Neka je $n = 1$ i $x \in X$ proizvoljno dato. Treba pokazati da je $[\pi_2(f)](x) \in j_o(y)$, tj. da je $[\pi_2(f)](x) : X \longrightarrow Y$ konstantna funkcija u $Y^{(1)}$. Ali, ovo je tačno jer

$$[\pi_2(f)](x) = [j_{o,1}(y)](x) = [(j_1 o j_o)(y)](x)$$
$$= [j_o o j_o(y)](x) = j_o([j_o(y)](x)) = j_o(y).$$

Pretpostavimo da je $[\pi_{n+1}(f)](x) \in j_{n-1}(Y^{(n-1)})$. Tada je

$$\pi_{n+2}(f) = j_{o,n+1}(y) = (j_{n+1} \circ j_{o,n})(y)$$
$$= [\mathrm{Map}_X(j_n)][j_{o,n}(y)] = j_n \circ \pi_{n+1}(f),$$

pa imamo $\quad [\pi_{n+2}(f)](x) = j_n([\pi_{n+1}(f)](x)) \in j_n(Y^{(n)})$

što kompletira induktivni dokaz. //

TEOREMA 3.3. <u>Svaki Hausdorff-ov prostor</u> Y <u>može se utopiti u funkcionalno kompletan prostor</u>.

DOKAZ. Pokazaćemo da se Y može utopiti u funkcionalno kompletan prostor $Y^{(\omega)}$. Pošto je $h: Y^{\infty} \longrightarrow Y^{(\omega)}$ homeomorfizam (T. 2.2.8), dovoljno je dokazati da je $j_{o,\omega}$ utapanje od Y u Y^{∞}.

Lako se proverava da je $j_{o,\omega}$ 1-1. Šta više, pošto su sva preslikavanja $j_{o,n}$ neprekidna, takvo je i $j_{o,\omega}$ ([22], str. 40, P. 5.8). Prema tome, ostaje da se pokaže da je $j_{o,\omega}$ otvoreno preslikavanje. U tom cilju, neka V označava otvoren skup u Y. Tada je (a,V) otvoren sub-bazni skup u $Y^{(1)}$. Neka je π_n^* restrikcija prirodne projekcije π_n na podskup Y^{∞}. Tada je $(\pi_1^*)^{-1}[(a,V)]$ otvoren bazni skup u Y^{∞} i, dakle
$$P = j_{o,\omega}(Y) \cap (\pi_1^*)^{-1}[(a,V)] = j_{o,\omega}(Y) \cap Y^{\infty} \cap \pi_1^{-1}[(a,V)]$$
je otvoren skup u $j_{o,\omega}(Y)$. Dakle, da pokažemo da je $j_{o,\omega}$ otvoren preslikavanje, dovoljno je dokazati jednakost $j_{o,\omega}(V) = P$.

Neka je, prvo, $f \in j_{o,\omega}(V)$. Tada, postoji $y \in V$, tako da je $j_{o,\omega}(y) = f$ i, dakle, $j_o(y) = \pi_1(f)$. Prema ovoj jednakosti je
$$[\pi_1(f)](a) = [j_o(y)](a) = y \in V$$
i, dakle, $\pi_1(f) \in (a,V)$. Ovo implicira da $f \in \pi_1^{-1}[(a,V)]$ i, dakle, očigledno, $f \in P$.

Obrnuto, ako je $f \in P$, posmatrajmo tačku $y_o = [\pi_1(f)](a) \in V$. Dovoljno je pokazati da je $j_{o,\omega}(y_o) = f$ ili, ekvivalentno,
$$j_{o,n-1}(y_o) = \pi_n(f) \qquad n = 1,2,\ldots$$
Utvrdimo indukcijom ove jednakosti.

Neka je $n = 1$. Pošto je $f \in j_{o,\omega}(Y)$, postoji $y \in Y$ tako da je $j_{o,\omega}(y) = f$. Ovo povlači $j_o(y) = \Pi_1(f)$ i, dakle, $\Pi_1(f)$ je konstantno preslikavanje. Prema tome

$$[\Pi_1(f)](x) = [\Pi_1(f)](a) = y_o = [j_o(y_o)](x)$$

i, dakle, $j_o(y_o) = \Pi_1(f)$. Pretpostavimo sada da je $j_{o,n-1}(y_o) = \Pi_n(f)$. Na osnovu ove induktivne hipoteze, imamo

$$j_{o,n}(y_o) = (j_n o j_{o,n-1})(y_o) = j_n[\Pi_n(f)] = j_n(p_a^{(n)}[\Pi_{n+1}(f)])$$
$$= [\mathrm{Map}_X(j_{n-1} o p_a^{(n-1)})][\Pi_{n+1}(f)] = j_{n-1} o p_a^{(n-1)} o \Pi_{n+1}(f).$$

Dakle, za svako $x \in X$, prema Prop. 3.1 i 3.2, je

$$[j_{o,n}(y_o)](x) = (j_{n-1} o p_a^{(n-1)})([\Pi_{n+1}(f)](x)) = [\Pi_{n+1}(f)](x)$$

i, prema tome, $j_{o,n}(y_o) = \Pi_{n+1}(f)$. Ovo kompletira induktivni dokaz.

Dakle, $u = h o j_{o,\omega}: Y \longrightarrow Y^{(\omega)}$ je utapanje od Y u $Y^{(\omega)}$. //

Prema ovoj teoremi $Y^{(\omega)}$ je neprazan ako je Y neprazan i, dakle, postoje i drugi primeri funkcionalno kompletnih prostora.

PROPOZICIJA 3.4. $u(Y)$ _je retrakt_ od $Y^{(\omega)}$.

DOKAZ. Da dokažemo ovo, pokazaćemo da je $j_{o,\omega}(Y)$ retrakt od Y^{∞} sa retrakcijom $r = j_{o,\omega} o p_a^{(o)} o \Pi_1^{*}: Y^{\infty} \longrightarrow j_{o,\omega}(Y)$.

Neka je $f \in j_{o,\omega}(Y)$. Tada postoji $y \in Y$ tako da je $j_{o,\omega}(y) = f$ i, dakle, $j_o(y) = \Pi_1^{*}(f)$. Prema tome, imamo

$$r(f) = j_{o,\omega}(p_a^{(o)}[\Pi_1^{*}(f)]) = j_{o,\omega}(p_a^{(o)}[j_o(y)]) = j_{o,\omega}(y) = f. \quad //$$

Označimo sa $\mathrm{Map}_X^{(\omega)}$ funktor koji korespondira svakom $Y \in O$ prostor $Y^{(\omega)}$ i svakom preslikavanju $f: Y \longrightarrow Z$ u $\mathcal{H}$ preslikavanje $f^{(\omega)}: Y^{(\omega)} \longrightarrow Z^{(\omega)}$. Tada, imamo

PROPOZICIJA 3.5. $\mathrm{Map}_X^{(\omega)}$ _je kovarijantni funktor iz_ $\mathcal{H}$ _u_ $\mathcal{H}$.

DOKAZ. Ako je $i: Y \longrightarrow Y$ identično preslikavanje, tada su i $i^{(n)}: Y^{(n)} \longrightarrow Y^{(n)}$ identična preslikavanja, pa je takvo i $i^{(\omega)}$. Ako su $f: Y \longrightarrow Z$ i $g: Z \longrightarrow W$ u $\mathcal{H}$, tada je $(g o f)^{(n)} = g^{(n)} o f^{(n)}$, odakle jednostavno sledi $(g\circ f)^{(\omega)} = g^{(\omega)}\circ f^{(\omega)}$. //

Dakle, $\mathrm{Map}_X^{(\omega)}(\mathcal{H})$ je podkategorija kategorije $\mathcal{H}$ koja ima željenu osobinu.

4. NEKE OSOBINE PROSTORA $Y^{(\omega)}$

Posmatramo prvo neka separaciona svojstva prostora $Y^{(\omega)}$.

PROPOZICIJA 4.1. $Y^{(\omega)}$ je $T_3(T_{3\frac{1}{2}})$ prostor ako i samo ako Y je $T_3(T_{3\frac{1}{2}})$ prostor respektivno.

DOKAZ. Implikacija $\Longrightarrow$ sledi neposredno prema T. 3.3.

Obrnuto, ako je Y $T_3(T_{3\frac{1}{2}})$ prostor, na osnovu T. I.1.2.2, indukcijom je lako zaključiti da su takvi i svi prostori $Y^{(n)}(n = 0,1,\ldots)$, pa, dakle, i prostor $Y^{(\omega)}$ prema Prop. 2.1.5. //

Narednim dvema propozicijama dopunjujemo T. I.1.2.2 (vidi Def. I.1.4.1 i Def. I. 1.4.2).

PROPOZICIJA 4.2. Y^X je kompletno Hausdorff-ov prostor ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Ako je Y^X kompletno Hausdorff-ov prostor, takav je i Y, prema Prop. I.1.2.7.

Obrnuto, neka je Y kompletno Hausdorff-ov prostor i neka su f i g dve različite tačke u Y^X. Tada, postoji $a \in X$ tako da je $f(a) \neq g(a)$, a takodje i otvoreni skupovi U i V u Y takvi da je

$$f(a) \in U, \qquad g(a) \in V, \qquad \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

Dakle,

$$f \in (a,U), \qquad g \in (a,V).$$

Iz relacija $(a,U) \subset (a,\overline{U})$, $(a,V) \subset (a,\overline{V})$ i Prop. I.1.2.1 imamo

$$\overline{(a,U)} \cap \overline{(a,V)} \subset \overline{(a,\overline{U})} \cap \overline{(a,\overline{V})} = (a,\overline{U}) \cap (a,\overline{V}).$$

Odavde sledi da je
$$\overline{(a,U)} \cap \overline{(a,V)} = \emptyset$$

(inače $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$), pa je, dakle, Y^X kompletno Hausdorff-ov prostor. //

POSLEDICA 4.3. $Y^{(\omega)}$ je kompletno Hausdorff-ov prostor ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Sličan dokazu Prop. 4.1. //

PROPOZICIJA 4.4. Y^X je prostor Stone-a ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Ako je Y^X prostor Stone-a, takav je i Y (Prop. I.1.2.7).

Obrnuto, neka je Y Stone-ov prostor i neka su f i g dve različite tačke u Y^X. Tada, postoji $a \in X$ tako da je $f(a) \neq g(a)$, a takodje i neprekidna funkcija $F: Y \longrightarrow I$ takva da je

$$F[f(a)] = 0, \qquad F[g(a)] = 1.$$

Kako je sem toga

$$[p_a \circ Map_X(F)](f) = p_a(F \circ f) = (F \circ f)(a) = F[f(a)] = 0,$$

$$[p_a \circ Map_X(F)](g) = p_a(F \circ g) = (F \circ g)(a) = F[g(a)] = 1,$$

Y^X je prostor Stone-a. //

POSLEDICA 4.5. $Y^{(\omega)}$ je prostor Stone-a ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Sličan dokazu Prop. 4.1. //

Za praćenje sledeće tri propozicije podsećamo na Def. I.1.4.6-8.

PROPOZICIJA 4.6. Y^X je potpuno separiran ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Ako je Y^X potpuno separiran, takav je i Y, prema Prop. I. 1,2.7, zbog naslednosti osobine potpune separiranosti.

Obrnuto, neka je Y potpuno separiran i neka su f i g dve različite tačke u Y^X. Tada, postoji $a \in X$ tako da je $f(a) \neq g(a)$, a takodje i otvoreni skupovi U i V u Y takvi da je

$$f(a) \in U, \qquad g(a) \in V, \qquad U \cap V = \emptyset, \qquad U \cup V = Y.$$

Sada se lako proverava da za skupove (a,U) i (a,V), otvorene u Y^X, važi

$$f \in (a,U), \quad g \in (a,V), \quad (a,U) \cap (a,V) = \emptyset, \quad (a,U) \cup (a,V) = Y^X$$

što dokazuje potpunu separiranost prostora Y^X. //

POSLEDICA 4.7. $Y^{(\omega)}$ je potpuno separiran ako i samo ako je takav.

DOKAZ. Ako je Y potpuno separiran, prema prethodnoj propoziciji, indukcijom je lako zaključiti da su takvi i svi prostori $Y^{(n)}$. Odavde, zbog produktivnosti i naslednosti posmatrane osobine, zaključujemo potpunu separiranost prostora $Y^{(\omega)}$.

Drugi deo tvrdjenja sledi iz T. 3.3. //

PROPOZICIJA 4.8. Y^X je potpuno nepovezan ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Ako je Y^X potpuno nepovezan, takav je i Y, prema Prop. I. 1.2.7, zbog naslednosti posmatrane osobine.

Neka je, obrnuto, Y potpuno nepovezan prostor i pretpostavimo da je C povezan skup u Y^X koji ima bar dve različite tačke f i g. Tada, postoji $a \in X$ tako da je $f(a) \neq g(a)$. Neka je $p_a : Y^X \longrightarrow Y$ projekcija indukovana elementom a. Pošto je C povezan i p_a neprekidna, $p_a(C)$ je povezan skup u Y koji, očigledno, sadrži bar dve različite tačke $f(a)$ i $g(a)$. Ovo je, medjutim, nemoguće. Iz dobijene protivrečnosti sledi da je Y^X potpuno nepovezan. //

POSLEDICA 4.9. $Y^{(\omega)}$ je potpuno nepovezan ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Sličan dokazu P. 4.7. //

PROPOZICIJA 4.10. Y^X je 0-dimenzionalan ako i samo ako je Y takav.

DOKAZ. Ako je Y^X 0-dimenzionalan, takav je i Y, prema Prop. I. 1.2.7, zbog naslednosti posmatrane osobine.

Obrnuto, ako je Y 0-dimenzionalan, neka je $f \in Y^X$ proizvoljno izabrana tačka i G ma koji otvoren skup koji je sadrži. Treba pokazati da postoji otvoreno-zatvoren skup H u Y^X takav da je $f \in H \subset G$. Očigledno, može se pretpostaviti da je G otvoren bazni skup. Šta više, pošto je konačan presek otvoreno-zatvorenih skupova opet takav skup, dovoljno je posmatrati samo slučaj kada je G otvoren subbazni skup u Y^X. Neka je, dakle, $G = (K,U)$, gde je K kompaktan u X i U otvoren u Y. Ako je sada $x \in K$, tada je $f(x) \in U$, pa kako je Y 0-dimenzionalan, postoji u Y otvoreno-zatvoren skup V_x takav da je

$$f(x) \in V_x \subset U.$$

Dakle,

$$f(K) \subset \bigcup \{V_x \mid x \in K\}.$$

Pošto je f(K) kompaktan, postoje tačke $x_1,\ldots,x_n \in K$ tako da je

$$f(K) \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Stavimo

$$V = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}, \qquad H = (K,V).$$

Tada, očigledno, $f \in H$, $H \subset G$ (jer je $V \subset U$) i H je otvoreno-zatvoren (jer je V otvoreno-zatvoren). //

POSLEDICA 4.11. $Y^{(\omega)}$ <u>je 0-dimenzionalan ako i samo ako je</u> Y <u>takav</u>.

DOKAZ. Sličan dokazu P. 4.7. //

PROPOZICIJA 4.12. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan prostor. Tada</u> $Y^{(\omega)}$ <u>ima prebrojivu bazu ako i samo ako</u> Y <u>ima prebrojivu bazu</u>.

DOKAZ. Ako Y ima prebrojivu bazu, prema Prop. I.1.2.5, indukcijom zaključujemo da svi prostori $Y^{(n)}$ imaju to svojstvo. Pošto je prebrojiv proizvod prostora sa prebrojivom bazom opet takav prostor ([22], str. 40, Z. 5J) i posmatrana osobina je nasledna, sledi da $Y^{(\omega)}$ ima prebrojivu bazu.

Drugi deo tvrdjenja sledi iz T. 3.3. //

PROPOZICIJA 4.13. <u>Neka je</u> X <u>kompaktan prostor. Tada,</u> $Y^{(\omega)}$ <u>je metrizabilan ako i samo ako je</u> Y <u>metrizabilan</u>.

DOKAZ. Sličan dokazu prethodne propozicije, prema T. I.1.1.13 i činjenici da je metrizabilnost nasledna i produktivna ako je koordinatnih prostora prebrojivo mnogo ([22], str. 98, Prop.8.3. i T.8.5).

Navedimo, na kraju, jedno otvoreno pitanje.

PROBLEM 4.14. Dali je $Y^{(\omega)}$ retrakt od $\prod\{Y^{(n)} | n = 1,2,...\}$?

Napomenimo da se, ukoliko je odgovor potvrdan, može, takođe dokazati sledeća

PROPOZICIJA 4.15. Neka je X kompaktan metrizabilan prostor. Tada, $Y^{(\omega)}$ je apsolutni retrakt ako i samo ako je Y apsolutni retrakt.

GLAVA 4

JEDNA TEOREMA O PROSTORIMA 2^X SA KOMPAKTNO-OTVORENOM TOPOLOGIJOM

Dobro je poznato da ako je X kompaktan T_2-prostor, tada $F: Y \longrightarrow X$ je neprekidna funkcija ako i samo ako graf od f je zatvoren skup u $X \times Y$. U [5] L. J. Billera posmatrao je problem topologiziranja skupa 2^X, svih zatvorenih podskupova prostora X, tako da neprekidne funkcije iz Y u 2^X budu tačno one funkcije koje imaju zatvorene grafove. On je definisao kompaktno-otvorenu topologiju i dokazao da je ona jedinstvena topologija na 2^X sa željenom osobinom ako je X lokalno kompaktan T_2-prostor.

U ovoj glavi mi ćemo dati dva različita dokaza teoreme koja konstatuje interesantnu činjenicu da je prostor 2^X sa kompaktno-otvorenom topologijom homeomorfan inverznoj granici odredjenog inverznog sistema.

1. FORMULACIJA TEOREME

Neka 2^X označava skup svih zatvorenih podskupova topološkog prostora X (uključujući i prazan skup $\emptyset$) i neka je $\mathcal{K}$ familija svih kompaktnih podskupova od X.

DEFINICIJA 1.1. ([5], str. 141) Baza <u>kompaktno-otvorene</u> topologije na 2^X je kolekcija $\{\langle X - C\rangle \mid C \in \mathcal{K}\}$ gde je, za ma koje C ,

$$\langle X - C\rangle = \{F \in 2^X \mid F \subset X - C\}.$$

LEMA 1.2. <u>Neka je</u> X <u>topološki prostor</u>, Y <u>podprostor od</u> X, <u>i neka</u> 2^X <u>i</u> 2^Y <u>imaju kompaktno-otvorene topologije. Tada, funkcija</u> f_Y: $2^X \longrightarrow 2^Y$, <u>definisana sa</u> $f_Y(F) = F \cap Y$ <u>za svako</u> $F \in 2^X$, <u>je neprekidna</u>.

DOKAZ. Neka je $\langle Y - C\rangle = \{A \in 2^Y \mid A \subset Y - C\}$ otvoren bazni pod skup u 2^Y, gde je C kompaktan podskup prostora Y (i, dakle, $C \in \mathcal{K}$). Tvrdjenje leme dobija se sada iz jednakosti:

$$f_Y^{-1}(\langle Y - C\rangle) = \{F \in 2^X \mid f_Y(F) \in \langle Y - C\rangle\} = \{F \in 2^X \mid F \cap Y \subset Y - C\}$$
$$= \{F \in 2^X \mid F \cap C = \emptyset\} = \{F \in 2^X \mid F \subset X - C\} = \langle X - C\rangle. \ //$$

U skupu $\mathcal{K}$ uvedimo binarnu relaciju $\leqslant$ kao što sledi. Ako su C_1 i C_2 ma koja dva elementa u $\mathcal{K}$, definišimo $C_1 \leqslant C_2 \Longleftrightarrow C_1 \subset C_2$. Očigledno, $\mathcal{K}$ je usmeren ovom relacijom (ako $C_1, C_2 \in \mathcal{K}$ tada $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{K}$ i $C_1, C_2 \subset C_1 \cup C_2$).

Prema Lemi 1.2, za svaki par $C_1, C_2 \in \mathcal{K}$ takav da je $C_1 \leqslant C_2$ funkcija

$$\pi_{C_1}^{C_2}: 2^{C_2} \longrightarrow 2^{C_1}$$

definisana sa $\pi_{C_1}^{C_2}(F) = F \cap C_1$ za svako $F \subset 2^{C_2}$, je neprekidna.

Sem toga, lako je videti da je π_C^C identiteta na 2^C za svako $C \in \mathcal{K}$, i da, za svaka tri elementa C_1, C_2, C_3 iz skupa $\mathcal{K}$ takva da je $C_1 \leqslant C_2 \leqslant C_3$, imamo

$$\pi_{C_1}^{C_2} \circ \pi_{C_2}^{C_3} = \pi_{C_1}^{C_3}.$$

Dakle, prema Def. 2.1.2, $\{2^C, \pi_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}$ je inverzni sistem prostora i preslikavanja nad usmerenim skupom $\mathcal{K}$.

Sada smo u mogućnosti da formulišemo sledeću teoremu:

TEOREMA 1.3. Ako je X k-prostor, tada je prostor 2^X sa kompaktno-otvorenom topologijom homeomorfan inverznoj granici inverznog sistema $\{2^C, \pi_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}$ prostora 2^C sa kompaktno-otvorenom topologijom tj.

$$2^X \approx \varprojlim \{2^C, \pi_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}.$$

2. PRVI DOKAZ TEOREME

Prvo izlažemo neke rezultate koje ćemo koristiti u dokazu.

Neka S označava prostor koji ima dve tačke, 0 i 1, i čiji su otvoreni skupovi $\emptyset, S$ i $\{0\}$. Posmatrajmo skup S^X svih neprekidnih funkcija iz X u S sa kompaktno-otvorenom topologijom kako je definisana za prostore neprekidnih funkcija (Def. I.1.1.3). L. J. Billera ([5], str. 142, L. 3.2) dokazao je sledeću činjenicu (koja opravdava naziv kompaktno-otvoren u Def. 1.1):

(1) Ako S^X i 2^X imaju respektivno kompaktno-otvorene topologije, tada je funkcija $H: S^X \longrightarrow 2^X$, definisana sa $H(f) = f^{-1}(1)$ za svako $f \in S^X$, homeomorfizam tj.

$$S^X \approx 2^X.$$

Sa druge strane, poznata je sledeća teorema ([14], str.123, T.5):

(2) Ako je X k-prostor, tada za svaki topološki prostor Y, prostor Y^X sa kompaktno-otvorenom topologijom je homeomorfan inverznoj granici inverznog sistema $\{Y^C, \varrho_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}$ prostora Y^C sa kompaktno-otvorenom topologijom tj.

$$Y^X \approx \varprojlim \{Y^C, \varrho_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}$$

gde za svaki par $C_1, C_2 \in \mathcal{K}$ tako da $C_1 \leqslant C_2$, funkcija

$$\varrho_{C_1}^{C_2} : Y^{C_2} \longrightarrow Y^{C_1}$$

definisana sa $\varrho_{C_1}^{C_2}(f) = f|C_1$ za svako $f \in Y^{C_2}$, je neprekidna.

Dakle, prema (1) i (2), da bi dokazali tvrdjenje teoreme dovoljno je dokazati da je

$$\varprojlim \{S^C, \varrho_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\} \approx \varprojlim \{2^C, \pi_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\} .$$

U tom cilju, posmatrajmo preslikavanje

$$\Phi = \{I, H_C\} : \{S^C, \varrho_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\} \longrightarrow \{2^C, \pi_{C_1}^{C_2}, \mathcal{K}\}$$

ovih inverznih sistema gde je, prema (1), za svako $C \in \mathcal{K}$, $H_C: S^C \longrightarrow 2^C$ homeomorfizam ($H_C(f) = f^{-1}(1)$ za $f \in S^C$), a I je identiteta na $\mathcal{K}$.

Dakle, na osnovu T. 2.2.4, dovoljno je dokazati da sledeći dijagram

$$\begin{tikzcd} S^{C_1} \arrow[d, "H_{C_1}"'] & S^{C_2} \arrow[l, "\varrho_{C_1}^{C_2}"'] \arrow[d, "H_{C_2}"] \\ 2^{C_1} & 2^{C_2} \arrow[l, "\pi_{C_1}^{C_2}"] \end{tikzcd}$$

komutira, tj. da je

$$H_{C_1} \circ \rho^{C_2}_{C_1} = \pi^{C_2}_{C_1} \circ H_{C_2}.$$

Zaista, za $f \in S^{C_2}$ imamo

$$(H_{C_1} \circ \rho^{C_2}_{C_1})(f) = H_{C_1}(f|C_1) = (f|C_1)^{-1}(1) = f^{-1}(1) \cap C_1$$

$$= \pi^{C_2}_{C_1}(f^{-1}(1)) = (\pi^{C_2}_{C_1} \circ H_{C_2})(f)$$

što kompletira dokaz. //

3. DRUGI DOKAZ TEOREME

Sada ćemo navesti i drugi dokaz teoreme koji je "direktan" u smislu što efektivno konstruišemo homeomofizam o kome je reč.

LEMA 3.1. <u>Ako je</u> $F_0 \in 2^X$ <u>i</u> $\Phi \subset 2^X$, <u>tada</u>

$$F_0 \in \overline{\Phi} \iff f_C(F_0) \in \overline{f_C(\Phi)} \ \underline{\text{za svako}}\ C \in \mathcal{K}.$$

DOKAZ. Prema L. 1.2, implikacija $\Longrightarrow$ sledi neposredno iz neprekidnosti funkcija $f_C : 2^X \longrightarrow 2^C$.

Obrnuto, pretpostavimo da $F_0 \notin \overline{\Phi} \iff F_0 \in \operatorname{int}(2^X - \Phi)$. Dakle postoji kompaktan skup C_0 u X tako da je

$$F_0 \in \langle X - C_0 \rangle \qquad \text{i} \qquad \langle X - C_0 \rangle \subset 2^X - \Phi .$$

Pošto je skup $\{A \in 2^{C_0} \mid A \subset C_0 - C_0\} = \{\emptyset\}$ otvorena bazna okolina od $f_{C_0}(F_0) = \emptyset$ u 2^{C_0} koja, zbog $\langle X - C_0\rangle \cap \Phi = \emptyset$, ne seče $f_{C_0}(\Phi)$, sledi da $f_{C_0}(F_0) \notin \overline{f_{C_0}(\Phi)}$ i tvrdjenje leme je dokazano. //

Pokazaćemo sada da je funkcija

$$h : 2^X \longrightarrow \varprojlim \{2^C, \pi^{C_2}_{C_1}, \mathcal{K}\},$$

definisana sa $h(F) = \{f_C(F)\}$ za svako $F \in 2^X$, homeomorfizam.

Pre svega h je dobro definisana funkcija jer, za $C_1 \subset C_2$, imamo

$$\pi^{C_2}_{C_1}(f_{C_2}(F)) = \pi^{C_2}_{C_1}(F \cap C_2) = (F \cap C_2) \cap C_1 = F \cap C_1 = f_{C_1}(F).$$

(a) Lako se proverava da je h 1-1 funkcija, jer ako

$$h(F_1) = h(F_2) \Longrightarrow f_C(F_1) = f_C(F_2),\ \forall C \in \mathcal{K} \Longrightarrow F_1 \cap C = F_2 \cap C, \forall C \in \mathcal{K} \Longrightarrow F_1 \cap \{x\} = F_2 \cap \{x\}, \forall x \in X \Longrightarrow F_1 = F_2.$$

(b) Pokažimo da je h funkcija <u>na</u> $\varprojlim \{2^C, \pi^{C_2}_{C_1}, \mathcal{K}\}$. Neka je $\{A_C\} \in \varprojlim \{2^C, \pi^{C_2}_{C_1}, \mathcal{K}\}$ proizvoljno data tačka. Treba dokazati da postoji tačka $F \in 2^X$, takva da je

$$h(F) = \{A_C\} \Longleftrightarrow f_C(F) = A_C, \forall C \in \mathcal{K} \Longleftrightarrow F \cap C = A_C, \forall C \in \mathcal{K}.$$

Stavimo

$$F = \{x \in X \mid A_{\{x\}} = \{x\}\}$$

i dokažimo da je $F \cap C = A_C$ za svako $C \in \mathcal{K}$. Zaista,

$$x \in A_C \Longrightarrow x \in C \Rightarrow \{x\} \subset C \Longrightarrow \pi^C_{\{x\}}(A_C) = A_{\{x\}}$$

$$\Longrightarrow A_C \cap \{x\} = A_{\{x\}} \Rightarrow \{x\} = A_{\{x\}} \Longrightarrow x \in F \Longrightarrow x \in F \cap C$$

i, dakle, $A_C \subset F \cap C$. Obrnuto, ako

$$x \in F \cap C \Longrightarrow A_{\{x\}} = \{x\} \text{ i } \{x\} \subset C \Longrightarrow A_{\{x\}} = \{x\} \text{ i}$$

$$A_C \cap \{x\} = A_{\{x\}} \Longrightarrow A_C \cap \{x\} = \{x\} \Rightarrow \{x\} \subset A_C \Longrightarrow x \in A_C$$

i, dakle, $F \cap C \subset A_C$.

Pošto je X k-prostor i $F \cap C = A_C \in 2^C$ za svako $C \in \mathcal{K}$, F je zatvoren skup u X.

Prema tome, dokaz je potpun prema (a), (b), L. 3.1 i Prop.2.1.7.//

III DEO

GLAVA 1

HIPERPROSTORI

U poslednje dve glave ovog rada, višeznačne funkcije i hiperprostori zauzimaju važno mesto. U ovoj glavi navodimo potrebne definicije i stavove.

1. TOPOLOGIJA VIETORIS-A

Neka $P(Y)$ označava partitivni skup datog skupa Y. Za ma koji podskup $A \subset Y$, neka su $\langle A\rangle$ i $\rangle A\langle$ podskupovi od $P(Y)$ definisani sa

$$\langle A\rangle = \{S \in P(Y) \mid S \subset A\}, \qquad \rangle A\langle = \{S \in P(Y) \mid S \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ako je Y topološki prostor, $P(Y)$ se može topologizirati na razne načine koristeći topologiju prostora Y. Kažemo tada da je $P(Y)$ hiperprostor prostora Y. Jednu od najprirodnijih i, bez sumnje, najviše ispitivanih topologija na $P(Y)$ uveo je Vietoris.

DEFINICIJA 1.1. Konačna, eksponencijalna ili topologija Vietoris-a na skupu $P(Y)$ je ona topologija, čiju otvorenu sub-bazu čini kolekcija svih skupova $\langle U\rangle$ i $\rangle U\langle$, gde je U otvoren skup u Y.

Očigledno, iz prethodne definicije neposredno sledi

PROPOZICIJA 1.2. Baza konačne topologije na $P(Y)$ je kolekcija svih skupova oblika

$$\langle U_0\rangle \cap \rangle U_1\langle \cap \dots \cap \rangle U_n\langle$$

gde su $U_0, U_1, \dots, U_n$ otvoreni skupovi u Y.

Kao što je poznato ([40]), hiperprostor $P(Y)$ sa topologijom Vietoris-a ima slaba separaciona svojstva, pa je, stoga, u mnogim slučajevima nepodesan. To, medjutim, nije slučaj sa njegovim podprostorom, u oznaci 2^Y, čiji su elementi svi zatvoreni podskupovi od Y. Zato je prostoru 2^Y u literaturi posvećena znatno veća pažnja. Uobi čajeno je, takodje, da se i on naziva hiperprostor prostora Y. Na osnovu gore izloženog, otvoreni sub-bazni skupovi u 2^Y su oblika

$$\{F \in 2^Y \mid F \subset U\} \quad \text{i} \quad \{F \in 2^Y \mid F \cap U \neq \emptyset\}$$

gde je U otvoren skup u Y.

PRIMEDBA 1.3. Da bi pojednostavili simboliku, mi ćemo, kada je reč o prostoru 2^Y, oznaku $\langle U\rangle$ odnosno $\rangle U\langle$ upotrebljavati da naznačimo i samo sve zatvorene podskupove od Y koji imaju odgovarajuće svojstvo. Iz teksta će, naime, uvek biti jasno dali, na primer, simbol $\langle U\rangle$ označava sve ili samo sve zatvorene podskupove F od Y za koje je $F \subset U$.

Prelazimo sada na pitanja neprekidnosti funkcija čije je područje vrednosti prostor P(Y) odnosno prostor 2^Y.

DEFINICIJA 1.4. Neka je $F : X \longrightarrow P(Y)$ data funkcija. Tada

(a) F je <u>poluneprekidna odozgo</u> ako je, za svaki otvoren skup $V \subset Y$, $F^{-1}(\langle V\rangle)$ otvoren podskup od X, ili, ekvivalentno, ako je, za svaki zatvoren skup $B \subset Y$, $F^{-1}(\rangle B\langle)$ zatvoren podskup od X.

(b) F je <u>poluneprekidna odozdo</u> ako je, za svaki otvoren skup $V \subset Y$, $F^{-1}(\rangle V\langle)$ otvoren podskup od X, ili, ekvivalentno, ako je, za svaki zatvoren skup $B \subset Y$, $F^{-1}(\langle B\rangle)$ zatvoren podskup od X.

(c) F je <u>neprekidna</u> ako je istovremeno poluneprekidna odozgo i poluneprekidna odozdo.

Razume se, imajući samo u vidu i prethodnu primedbu, na potpuno isti način se definiše poluneprekidnost odozgo (odozdo) kao i neprekidnost neke funkcije $F : X \longrightarrow 2^Y$.

Na sledeću propoziciju (u kojoj se P(Y) može zameniti sa 2^Y), često ćemo se pozivati u daljem radu.

PROPOZICIJA 1.5. <u>Neka je</u> $F : X \longrightarrow P(Y)$ <u>data funkcija</u>. <u>Tada</u>

(a) F <u>je poluneprekidna odozgo ako i samo ako kad god je</u> $x \in X$, $V \subset Y$ <u>otvoren i</u> $F(x) \subset V$, <u>postoji u</u> X <u>otvoren skup</u> U <u>koji sadrži</u> x <u>i takav da</u> $a \in U$ <u>povlači</u> $F(a) \subset V$.

(b) F je poluneprekidna odozdo ako i samo ako kad god je $x \in X$, $y \in F(x)$ i V je otvoren skup koji sadrži y, postoji u X otvoren skup U koji sadrži x i takav da je $F(a) \cap V \neq \emptyset$ za sve $a \in U$.

DOKAZ. Uporedi sa: R. E. Smithson ([53], str. 33, L. 2.1). //

2. VIŠEZNAČNE FUNKCIJE

Neka su X i Y dva topološka prostora. Ako je $F(x)$ neprazan podskup od Y za svako $x \in X$, kažemo da je F višeznačna funkcija iz X u Y i, koristeći uobičajenu funkcionalnu notaciju, pišemo $F : X \longrightarrow Y$.

Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačna funkcija. Ako je $A \subset X$, neka je

$$F(A) = \cup\{F(x) \mid x \in A\},$$

a ako je $B \subset Y$, neka je

$$F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Najprirodniji način da se definiše neprekidnost višeznačne funkcije jeste da se proširi neka od mnogih karakterizacija neprekidnosti za jednoznačne funkcije. I dok u nekim slučajevima izvesne alternacije daju ekvivalentne definicije, u opštem slučaju ovo nije tačno. Tako, na primer, višeznačna funkcija može zadovoljavati uslov da je inverzna slika svakog otvorenog skupa otvoren skup, ali ovo ne implicira da je i inverzna slika svakog zatvorenog skupa zatvoren skup.

Uobičajena je sledeća

DEFINICIJA 2.1. Neka je $F : X \longrightarrow Y$ višeznačna funkcija. Tada

(a) F je poluneprekidna odozgo ako je, za svaki zatvoren skup $B \subset Y$, $F^{-1}(B)$ zatvoren podskup od X.

(b) F je poluneprekidna odozdo ako je, za svaki otvoren skup $V \subset Y$, $F^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

(c) F je neprekidna ako je istovremeno poluneprekidna odozgo i poluneprekidna odozdo.

GLAVA 2

ASCOLI-JEVA TEOREMA ZA PROSTORE VIŠEZNAČNIH FUNKCIJA

U [34], Y. F. Lin i D. A. Rose generalisali su jednu implikaciju Ascoli-jeve teoreme (varijanta Kelley i Morse) za prostore višeznačnih funkcija sa kompaktno-otvorenom topologijom, odredjujući dovoljne uslove koje mora zadovoljavati neki skup $\mathfrak{F}$ neprekidnih višeznačnih funkcija iz X u Y da bi bio kompaktan. U slučaju kada $\mathfrak{F}$ sadrži samo jednoznačne funkcije, ova teorema se redukuje na uobičajenu formu Ascoli-jeve teoreme za jednoznačne funkcije. Cilj našeg izlaganja je da pokažemo kako jednoznačna verzija Ascoli-jeve teoreme implicira niže navedenu verziju 1.5 za višeznačne funkcije. Rezultate ove glave dobio sam u saradnji sa prof. M. Marjanovićem ([39]).

1. TEOREMA LIN-A I ROSE-A

Neka su X i Y topološki prostori i neka $M(X,Y)$ označava skup svih višeznačnih funkcija iz X u Y. Za ma koja dva skupa $A \subset X$ i $B \subset Y$, neka (A,B) i $)A,B($ označavaju podskupove od $M(X,Y)$ definisane sa

$$(A,B) = \{F \in M(X,Y) \mid F(A) \subset B\},$$
$$)A,B(= \{F \in M(X,Y) \mid A \subset F^{-1}(B)\}.$$

PRIMEDBA 1.1. Ako $S(X,Y)$ označava skup svih jednoznačnih funkcija iz X u Y, tada, očigledno, sub-baza kompaktno-otvorene topologije na $S(X,Y)$ je kolekcija svih skupova $(K,U) \cap S(X,Y)$, gde je K kompaktan skup u X i U otvoren skup u Y. I dok su skupovi $(K,U) \cap S(X,Y)$ i $)K,U(\cap S(X,Y)$ uvek isti, skupovi (K,U) i $)K,U($ u opštem slučaju se u $M(X,Y)$ razlikuju. Ovo opravdava definiciju koja sledi ([34], str. 742, Def. 1.3).

DEFINICIJA 1.2. Kompaktno-otvorena topologija (u oznaci c) na skupu $M(X,Y)$ je topologija čiju otvorenu sub-bazu čini kolekcija svih skupova (K,U) i $)L,V($, gde su K i L kompaktni skupovi u X, a U i V su otvoreni skupovi Y.

Neka $M(X,Y;c)$ označava prostor svih višeznačnih funkcija iz X u Y sa kompaktno-otvorenom topologijom.

PRIMEDBA 1.3. Pojam topološke uniformne neprekidnosti (Def. I. 1.3.3), definisan za familije jednoznačnih funkcija, naredna definicija ([34], str. 742, Def. 1.4) generališe za proizvoljne podskupove od $M(X,Y)$. Primetimo, ovde, da se u Definiciji I.1.3.3 možemo ograničiti na posmatranje samo baznih okolina V i W.

DEFINICIJA 1.4. Familija $\mathfrak{F} \subset M(X,Y)$ je topološki uniformno neprekidna ("evenly continuous") ako za svaku tačku x u X, svaku tačku y u Y i svaku otvorenu okolinu V od y postoji otvorena okolina U od x i otvorena okolina W od y tako da

(a) ako je $F \in \mathfrak{F}$ i $F(x) \cap W \neq \emptyset$, tada je $U \subset F^{-1}(V)$;

(b) ako je $F \in \mathfrak{F}$, $F(x) \cap W \neq \emptyset$ i $F(x) \subset V$, tada je $F(U) \subset V$.

Primećujemo da se, koristeći gore uvedene oznake, uslovi (a) i (b) mogu predstaviti ekvivalentno kao, respektivno, (A) i (B):

(A) $\mathfrak{F} \cap)x,W(\subset)U,V($,

(B) $\mathfrak{F} \cap)x,W(\cap (x,V) \subset (U,V)$.

Očigledno, ako $\mathfrak{F}$ sadrži samo jednoznačne funkcije, tada $\mathfrak{F}$ zadovoljava Definiciju 1.4 ako i samo ako $\mathfrak{F}$ je topološki uniformno neprekidna u smislu Definicije I.1.3.3.

Sada teorema Lin-a i Rose-a ([34], str. 746, T. 3.2) glasi:

TEOREMA 1.5. Neka su X i Y proizvoljni topološki prostori i $\mathfrak{F}$ podskup od $M(X,Y;c)$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(L1) $\mathcal{F}$ je zatvoren u $\overline{M(X,Y;c)}$.

(L2) $\cup\{F(x) \mid F \in \mathcal{F}\}$ je kompaktan skup u Y za svako $x \in X$,

(L3) $\mathcal{F}$ je topološki uniformno neprekidna familija.

Tada, $\mathcal{F}$ je kompaktan skup.

Da bi celokupno izlaganje učinili povezanim i kompletnim, mi ćemo, prvo, u narednom paragrafu, navesti jednu originalnu verziju dokaza Ascoli-jeve teoreme za prostore jednoznačnih funkcija.

2. JEDNA ORIGINALNA VERZIJA DOKAZA ASCOLI-JEVE TEOREME ZA PROSTORE JEDNOZNAČNIH FUNKCIJA

Neka $\mathcal{T}$ označava familiju svih otvorenih, a $\mathcal{K}$ familiju svih kompaktnih podskupova topološkog prostora X.

PROPOZICIJA 2.1. Ako su $(X, \mathcal{T}_o)$ i $(X, \mathcal{T}_1)$ dva topološka prostora, tada $\mathcal{T}_o \subset \mathcal{T}_1$ implicira $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_o$.

DOKAZ. Identično preslikavanje $i : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_o)$ je neprekidno i ako $K \in \mathcal{K}_1$, tada $i(K) = K \in \mathcal{K}_o$. //

Neka su $\mathcal{T}_o$ i $\mathcal{T}_1$ dve topologije na X. Uvedimo sledeći pojam:

DEFINICIJA 2.2. Podskup A od X je $(\mathcal{T}_o, \mathcal{T}_1)$-ravnomeran ako ove dve topologije indukuju istu relativnu topologiju na A.

PROPOZICIJA 2.3. Neka su $\mathcal{T}_o$ i $\mathcal{T}_1$ dve ma koje topologije na X. Ako je A $(\mathcal{T}_o, \mathcal{T}_1)$-ravnomeran i $A \in \mathcal{K}_i$ tada je $A \in \mathcal{K}_{1-i}$ $(i = 0,1)$.

DOKAZ. Ako je A $(\mathcal{T}_o, \mathcal{T}_1)$-ravnomeran, tada za $U \in \mathcal{T}_i$ postoji $V \in \mathcal{T}_{1-i}$ tako da je $A \cap U = A \cap V$. Neka je $\{V_s \mid s \in S\}$ pokrivač od A skupovima iz $\mathcal{T}_{1-i}$. Tada, pošto je A $(\mathcal{T}_o, \mathcal{T}_1)$-ravnomeran, za svako V_s postoji $U_s \in \mathcal{T}_i$ tako da je $A \cap U_s = A \cap V_s$, pa $\{U_s \mid s \in S\}$ pokriva A. Pošto je A $\mathcal{T}_i$-kompaktan, postoji konačan podpokrivač $\{U_{s_i} \mid i = 1,\dots,n\}$. Tada $\{V_{s_i} \mid i = 1,\dots,n\}$ takodje pokriva A i, dakle, A je $\mathcal{T}_{1-i}$-kompaktan. //

Kombinujući 2.1 i 2.3 dobija se sledeća

POSLEDICA 2.4. Neka su $\mathcal{T}_o$ i $\mathcal{T}_1$ dve Hausdorff-ove topologije na X takve da je $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$. Tada, $A \in \mathcal{K}_1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{K}_0$ i A je $(\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1)$-ravnomeran.

LEMA 2.5. Neka je $\mathcal{F}$ topološki uniformno neprekidna familija u Y^X, $\overline{\mathcal{F}}$ konačno-otvoreno zatvorenje od $\mathcal{F}$ i $f_0 \in \overline{\mathcal{F}}$. Ako je K kompaktan u X, V otvoren u Y i $f_0(K) \subset V$, tada postoje tačke $x_1, \ldots, x_n$ u K i otvorene okoline $W_i \subset V$ od $f_0(x_i)$ tako da ako (za svako $i = 1, \ldots, n$)

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{F} \\ f(x_i) \in W_i \end{array}\right\} \Rightarrow f(K) \subset V.$$

DOKAZ. Pošto je $\mathcal{T}$ topološki uniformno neprekidna familija, za svako $x \in K$, $f_0(x)$ u Y i otvorenu okolinu V od $f_0(x)$, postoje otvorene okoline U_x od x i W_x od $f_0(x)$ tako da

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{F} \\ f(x) \in W_x \end{array}\right\} \Rightarrow f(U_x) \subset V.$$

Pošto je K kompaktan, postoji konačan podpokrivač $\{U_{x_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ pokrivača $\{U_x \mid x \in K\}$ skupa K. Stavimo $W_i = W_{x_i} \cap V$. Očigledno, tada $f_0(x_i) \in W_i$, $W_i \subset V$ i

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{F} \\ f(x_i) \in W_i \end{array}\right\} \Rightarrow f(U_{x_i}) \subset V. \tag{1}$$

Pošto je $f_0 \in \overline{\mathcal{F}}$, skup funkcija $f \in Y^X$ koje zadovoljavaju (1) nije prazan. Dakle, za neko takvo f, imamo

$$f(K) \subset f(\cup\{U_{x_i} \mid i = 1, \ldots, n\}) \subset V. \;//$$

Iz 2.5 dobija se

LEMA 2.6. Ako je $\mathcal{F}$ topološki uniformno neprekidna familija u Y^X, tada je skup $\mathcal{F}$ ravnomeran u odnosu na konačno-otvorenu i kompaktno-otvorenu topologiju na Y^X.

LEMA 2.7. Neka je $\mathcal{F}$ topološki uniformno neprekidna familija u Y^X. Tada, $\mathcal{F}$ je zatvoren u kompaktno-otvorenoj topologiji ako i samo ako je zatvoren u konačno-otvorenoj topologiji.

DOKAZ. $\Rightarrow$: Neka je $\mathcal{F}$ zatovren u kompaktno-otvorenoj topologiji i $f_o \in \bar{\mathcal{F}}$ (konačno-otvoreno zatvorenje). Pretpostavimo da imamo okolinu od f_o:

$$\mathcal{V} = \{f \mid f(K_j) \subset V_j,\ j = 1,\dots,m\}.$$

Tada je, prema 2.5,

$$\mathcal{U}_j = \{f \mid f(x_i^j) \in W_i^j,\ j = 1,\dots,n(j)\}$$

sadržano u $\{f \mid f(K_j) \subset V_j\}$, i $\mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_m \subset \mathcal{V}$, pa postoji $f \in \mathcal{F}$ tako da $f \in \mathcal{V}$. //

TEOREMA 2.8. (Ascoli) $\mathcal{F} \subset Y^X$ <u>je kompaktan (u kompaktno-otvorenoj topologiji) ako su zadovoljeni sledeći uslovi</u>:

(A1) <u>$\mathcal{F}$ je zatvoren u kompaktno-otvorenoj topologiji na</u> Y^X,

(A2) <u>$\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ je kompaktan skup u Y za svako</u> $x \in X$,

(A3) <u>$\mathcal{F}$ je topološki uniformno neprekidna familija</u>.

DOKAZ. Prema 2.7, iz (A1) i (A3) sledi da je $\mathcal{F}$ zatvoren u konačno-otvorenoj topologiji, što zajedno sa (A2) implicira da je $\mathcal{F}$ kompaktan u konačno-otvorenoj topologiji. Prema 2.6, $\mathcal{F}$ je ravnomeran i, prema 2.3, $\mathcal{F}$ je takodje kompaktan u kompaktno-otvorenoj topologiji. //

3. DOKAZ TEOREME LIN-A I ROSE-A

Primetimo, prvo, da se svaka višeznačna funkcija $F: X \longrightarrow Y$ može posmatrati kao jednoznačna funkcija iz X u $P(Y)$. Ako je partitivni skup od Y uzet sa topologijom Vietoris-a, F je neprekidna u smislu Definicije 1.2.1 ako i samo ako je $F : X \longrightarrow P(Y)$ neprekidna u smislu Definicije 1.1.4.

LEMA 3.1. <u>Važe sledeće formule</u>:

$$(K,U) = \{F \in M(X,Y) \mid F(K) \subset \langle U \rangle\},$$
$$)K,U(= \{F \in \dot{M}(X,Y) \mid F(K) \subset\ )U(\}.$$

DOKAZ. Prva formula je očigledna, Za drugu, imamo

$$F \in)K,U(\Leftrightarrow K \subset F^{-1}(U) \Leftrightarrow F(x) \cap U \neq \emptyset,\ \forall x \in K$$
$$\Leftrightarrow F(x) \in\ )U\langle,\ \forall x \in K \Leftrightarrow F(K) \subset\ )U\langle.\ //$$

Dakle, kolekcija skupova

$$\{F \mid F(K) \subset \langle U_o\rangle \cap\ )U_1\langle \cap \dots \cap\ )U_n\langle\}$$

(gde skupovi $\langle U_o\rangle \cap\ )U_1\langle \cap \dots \cap\ )U_n\langle$ čine standardni bazni sistem za topologiju Vietoris-a na $P(Y)$) je druga sub-baza za $M(X,Y;\alpha)$.

LEMA 3.2. <u>Topološka uniformna neprekidnost familije</u> $\mathcal{F} \subset M(X,Y)$ <u>u smislu Definicije</u> 1.4 <u>implicira topološku uniformnu neprekidnost iste familije</u> $\mathcal{F} \subset (P(Y))^X$ <u>u smislu Definicije</u> I.1.3.3.

DOKAZ. Neka su dati $x \in X$, $A \in P(Y)$ i okolina $\langle V_o\rangle \cap\ )V_1\langle \cap \dots \cap\ )V_n\langle$ od A. Neka je $a_i \in A \cap V_i$, $i = 1,\dots,n$. Tada, prema (a) u 1.4, za par x, a_i postoje otvorene okoline W_i od a_i i U_i od x tako da

$$\left.\begin{array}{l} F \in \mathcal{F} \\ F(x) \in\ )W_i\langle \end{array}\right\} \Rightarrow F(U_i) \subset\ )V_i\langle, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Posmatrajmo $\langle V_o\rangle \cap\ )W_1\langle \cap \dots \cap\ )W_n\langle$ i neka je $U = \cap\{U_i \mid i = 1,\dots,n\}$. Ako je $F \in \mathcal{F}$ i $F(x) \in \langle V_o\rangle \cap\ )W_1\langle \cap \dots \cap\ )W_n\langle$, tada, na osnovu uslova (b) u 1.4, $F(U) \subset \langle V_o\rangle \cap\ )V_1\langle \cap \dots \cap\ )V_n\langle$.

Dakle za $x \in X$, $A \in P(Y)$ i ma koju okolinu $\langle V_o\rangle \cap\ )V_1\langle \cap \dots \cap\ )V_n\langle$ od A, U je okolina od x i $\langle V_o\rangle \cap\ )W_1\langle \cap \dots \cap\ )W_n\langle$ od A tako da

$$\left.\begin{array}{c} F \in \mathcal{F} \\ F(x) \in \langle V_o\rangle \cap\ )W_1\langle \cap \dots \cap\ )W_n\langle \end{array}\right\} \Rightarrow F(U) \subset \langle V_o\rangle \cap\ )V_1\langle \cap \dots \cap\ )V_n\langle.$$

Ovo dokazuje da je $\mathcal{F} \subset (P(Y))^X$ topološki uniformno neprekidna. //

DOKAZ Teoreme 1.5. Sva tri uslova Teoreme 2.8 su zadovoljena : (A1) <u>sledi iz 3.1,</u> (A2) sledi iz činjenice da je $P(B)$ kompaktan za $B = \cup\{F(x) \mid F \in \mathcal{F}\}$ (vidi [30] ili [40], podskupovi ne moraju biti zatvoreni!), (A3) sledi iz 3.2. Dakle, 2.8 implicira tvrdjenje Teoreme 1.5. //

GLAVA 3

JEDNA NOVA KARAKTERIZACIJA KOMPAKTNIH SKUPOVA U Y^X

Kao što smo već ranije pomenuli (vidi Paragraf I.1.3), osnovni problem koji nastaje pri generalizaciji teoreme S. B. Myers-a, tj. pri želji da se okarakteriše kompaktan skup $\mathfrak{F}$ u Y^X, kada se umesto metričkog posmatra topološki prostor Y, a umesto topologije uniformne konvergencije kompaktno-otvorena, jeste, da se uslov ekvineprekidnosti familije funkcija $\mathfrak{F}$, koji gubi smisao, zameni nekim drugim adekvatnim uslovom. U tom cilju, D. Gale uveo je uslov (G3) (ili njemu ekvivalentan (G4), dok su Kelley i Morse posmatrali uslove (K3) i (M3). U ovoj glavi mi uvodimo u razmatranje jedan nov prirodan uslov, u oznaci (U3), koji, čini se (vidi komentar na kraju glave), ima odredjene prednosti u odnosu na gore pomenute uslove D. Gale-a i Kelley-a i Morse-a. Za razliku od prethodne, u ovoj glavi sve posmatrane funkcije su jednoznačne, svi funkcionalni prostori imaju kompaktno-otvorenu, a svi hiperprostori topologiju Vietoris-a.

1. NAPOMENE O ODNOSU NEKIH TEOREMA O KOMPAKTNOSTI SKUPOVA FUNKCIJA

Na početku ove glave dokazujemo tri propozicije o topološki uniformnoj neprekidnosti date familije funkcija i na osnovu njih komentarišemo odnos nekih poznatih teorema o kompaktnosti skupova funkcija. Prvu od ovih propozicija koristićemo i kasnije u dokazu osnovnog rezultata (T. 3.3) ove glave.

PROPOZICIJA 1.1. <u>Neka je</u> $\mathfrak{F}$ <u>topološki uniformno neprekidna familija u</u> Y^X <u>i</u> C <u>proizvoljan podprostor od</u> X. <u>Tada je</u> $\mathfrak{F}|C = \{f|C \mid f\in\mathfrak{F}\}$ <u>topološki uniformno neprekidna familija u</u> Y^C.

Stavimo $\qquad U = G \cap \operatorname{int}(C), \qquad W = H.$

Očigledno, $U \subset G \cap C = N$. Neka je

$$f \in \mathfrak{F} \qquad \text{i} \qquad f(x) \in W.$$

Stavimo $g = f|C$. Tada, $g \in \mathfrak{F}|C$ i $f(x) = g(x)$, pa, dakle, $g(x) \in H$. Prema tome, na osnovu (2), $g(N) \subset V$, pa je, tim pre, $g(U) \subset V$. Pošto je $U \subset C$ i $g = f|C$, imamo, konačno, $f(U) \subset V$.

Dakle, $\mathfrak{F}$ je topološki uniformno neprekidna familija. //

Sledeća propozicija je neposredna posledica prethodnih dveju.

PROPOZICIJA 1.4. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan prostor i</u> $\mathfrak{F} \subset Y^H$. <u>Tada</u>, $\mathfrak{F}$ <u>je topološki uniformno neprekidna familija u</u> Y^X <u>ako i samo ako je</u> $\mathfrak{F}|C$ <u>topološki uniformno neprekidna familija u</u> Y^C <u>za svaki kompaktan skup</u> C <u>u</u> X.

PRIMEDBA 1.5. Kao što smo ranije pomenuli (I.1.3), svaki lokalno kompaktan prostor jeste k-prostor. Ali, očigledno, lokalno kompaktan regularan prostor ne mora biti Hausdorff-ov prostor. Dakle, u opštem slučaju, teoreme I.1.3.4 i I.1.3.5 su neuporedive. Ako je, medjutim, X lokalno kompaktan Hausdorff-ov prostor, tada je prema Propoziciji 1.4, teorema I.1.3.5 generalizacija Teoreme I.1.3.4.

2. USLOV POLUNEPREKIDNOSTI ODOZGO FUNKCIJE $\bar{F}_\Phi$

Neka su X i Y topološki prostori i neka je $\mathfrak{F}$ data familija funkcija u prostoru Y^X. Tada svaki podskup Φ skupa $\mathfrak{F}$ indukuje funkciju

$$\bar{F}_\Phi : X \longrightarrow \underline{2^Y}$$

definisanu sa $\qquad \bar{F}_\Phi(x) = p_x(\Phi)$

za svako $x \in X$ (ovde $p_x : Y^X \longrightarrow Y$ označava projekciju indukovanu tačkom $x \in X$ i, dakle, $p_x(\Phi) = \{f(x) \mid f \in \Phi\}$).

Ova prirodno definisana funkcija leži u osnovi svih naših daljih razmatranja. Kao što ćemo odmah pokazati, pod različitim pre-

DOKAZ. Neka su date tačke $x \in C$, $y \in Y$ i otvoren skup $V \ni y$. Pošto je $\mathcal{F}$ topološki uniformno neprekidna familija, postoje u X i Y, respektivno, otvoreni skupovi $G \ni x$ i $H \ni y$ tako da

$$\left.\begin{array}{r} f \in \mathcal{F} \\ f(x) \in H \end{array}\right\} \Rightarrow f(G) \subset V. \tag{1}$$

Stavimo

$$U = G \cap C, \qquad W = H.$$

Tada je U otvorena okolina od x u C. Neka je

$$g \in \mathcal{F}\,|\,C \qquad \text{i} \qquad g(x) \in W.$$

Tada, postoji $f \in \mathcal{F}$ tako da je $f|C = g$. Iz $x \in C$ i $f|C = g$ sledi $f(x) = g(x)$, pa, dakle, $f(x) \in H$. Prema tome, na osnovu (1), $f(G) \subset V$, pa je, tim pre, $f(U) \subset V$. Pošto je $U \subset C$ i $f|C = g$, imamo, konačno, $g(U) \subset V$.

Dakle, $\mathcal{F}\,|\,C$ je topološki uniformno neprekidna familija u Y^C. //

PRIMEDBA 1.2. R. W. Bagley i J.S. Yang dokazali su ([3], str. 705, T. 4) da Teorema I.1.3.5 ostaje tačna ako se u njoj uslov (M3) zameni odgovarajućim uslovom (K3) Teoreme I.1.3.4. Propozicija 1.1 konstatuje implikaciju (K3) $\Longrightarrow$ (M3), pa je, dakle, rezultat Bagley-a i Yang-a samo jedan specijalan slučaj Teoreme I.1.3.5.

PROPOZICIJA 1.3. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan prostor i</u> $\mathcal{F} \subset Y^X$. <u>Ako je, za svaki kompaktan skup</u> C <u>u</u> X, $\mathcal{F}\,|\,C$ <u>topološki uniformno neprekidna familija u</u> Y^C, <u>tada je i</u> $\mathcal{F}$ <u>topološki neprekidna familija u</u> Y^X.

DOKAZ. Neka su date tačke $x \in X$, $y \in Y$ i otvoren skup $V \ni y$. Pošto je X lokalno kompaktan prostor, postoji kompaktan skup C tako da $x \in \operatorname{int}(C)$. Po pretpostavci je $\mathcal{F}\,|\,C$ topološki uniformno neprekidna familija, pa, dakle, postoje u C i Y, redom, otvoreni skupovi $N = G \cap C \ni x$ (G otvoren u X) i $H \ni y$ tako da

$$\left.\begin{array}{r} g \in \mathcal{F}\,|\,C \\ g(x) \in H \end{array}\right\} \Longrightarrow g(N) \subset V. \tag{2}$$

tpostavkama o prostorima X i Y, postoji tesna uzajamna veza izmedju topološki uniformne neprekidnosti familije $\mathfrak{F}$ sa jedne i poluneprekidnosti odozgo funkcije $\overline{F}_{\Phi}$ sa druge strane. Dokazujemo, prethodno, jednu čisto tehničku propoziciju vezanu za funkciju $\overline{F}_{\Phi}$, a koju ćemo koristiti tek u narednom paragrafu.

PROPOZICIJA 2.1. *Neka je C proizvoljan podskup prostora X i a ma koja tačka u C. Tada:*

(a) Trougao

$$\begin{tikzcd} Y^X \arrow[rr, "\varrho_C"] \arrow[dr, "p_a"'] & & Y^C \arrow[dl, "q_a"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

(p_a *i* q_a *projekcije,* ϱ_C *funkcija restrikcije) komutira, tj.* $p_a = q_a \circ \varrho_C$.

(b) *Funkcije* $\overline{F}_{\Phi|C}$ *i* $\overline{F}_{\Phi}|C$ (*iz* C *u* 2^Y) *su jednake.*

DOKAZ. (a) Za $f \in Y^X$, imamo

$$(q_a \circ \varrho_C)(f) = q_a(f|C) = (f|C)(a) = f(a) = p_a(f),$$

pa je $p_a = q_a \circ \varrho_C$.

(b) Neka je $x \in C$ proizvoljno izabrana tačka. Tada, prema (a),

$$\overline{F}_{\Phi|C}(x) = \overline{q_x(\Phi|C)} = \overline{q_x[\varrho_C(\Phi)]} = \overline{p_x(\Phi)}$$
$$= \overline{F}_{\Phi}(x) = (\overline{F}_{\Phi}|C)(x). \ //$$

LEMA 2.2. *Neka je X proizvoljan, a Y regularan topološki prostor i neka je* $\mathfrak{F} \subset Y^X$. *Ako je, za svaki skup* Φ *zatvoren u* $\mathfrak{F}$, *funkcija* $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ *poluneprekidna odozgo, tada je* $\mathfrak{F}$ *topološki uniformno neprekidna familija.*

DOKAZ. Neka su date tačke $x \in X$, $y \in Y$ i otvoren skup $V \ni y$. Pošto je Y regularan prostor, postoji skup G otvoren u Y tako da je

$$y \in G, \qquad \overline{G} \subset V.$$

Dakle, skup

$$\Phi = (x, \overline{G}) \cap \mathfrak{F}$$

je zatvoren u $\mathfrak{F}$ (Prop. I.1.2.1). Očigledno, $p_x(\Phi) \subset \overline{G}$, pa je, zatvaranjem, $\overline{F}_{\Phi}(x) \subset \overline{G}$, odakle je, tim pre, $\overline{F}_{\Phi}(x) \subset V$. Prema tome, pošto je funkcija $\overline{F}_{\Phi}$ poluneprekidna odozgo, postoji (Prop. 1.1.5) u X otvoren skup $U \ni x$ tako da

$$a \in U \Longrightarrow \overline{F}_{\Phi}(a) \subset V.$$

Stavimo $W = G$ i pokažimo da je

$$\mathfrak{F} \cap (x,W) \subset (U,V)$$

Neka je $f \in \mathfrak{F} \cap (x,W)$ i $a \in U$. Tada je, očigledno, $f \in \Phi$, pa je $p_a(f) \in p_a(\Phi)$ i, prema tome, $f(a) \in \overline{p_a(\Phi)} = \overline{F}_{\Phi}(a)$. Pošto je $\overline{F}_{\Phi}(a) \subset V$, imamo $f(a) \in V$ i, dakle, $f(U) \subset V$ tj. $f \in (U,V)$.

Ovo dokazuje da je $\mathfrak{F}$ topološki uniformno neprekidna familija. //

Neposredna posledica ove leme i Leme 2.2.6 je sledeće interesantno tvrdjenje (za koje ovde dajemo i direktan dokaz):

PROPOZICIJA 2.3. Neka je X proizvoljan, a Y regularan topološki prostor i neka je $\mathfrak{F} \subset Y^X$. Ako je, za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$, funkcija $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo, tada se na $\mathfrak{F}$ kompaktno-otvorena topologija redukuje na konačno-otvorenu topologiju.

DOKAZ. Neka je K kompaktan skup u X i U otvoren skup u Y. Dovoljno je dokazati da je $(K,U) \cap \mathfrak{F}$ otvoren skup u konačno-otvorenoj topologiji na $\mathfrak{F}$. Neka je

(1) $$f_0 \in (K,U) \cap \mathfrak{F}.$$

Tada je $f_0(K) \subset U$, pa, dakle, pošto je Y regularan prostor i $f_0(K)$ kompaktan skup, postoji u Y (prema poznatom stavu) otvoren skup V takav da je

(2) $$f_0(K) \subset V, \qquad \overline{V} \subset U.$$

Neka je $x \in K$ proizvoljno izabrana tačka. Tada je

$$\Phi_x = (x,\overline{V}) \cap \mathfrak{F}$$

zatvoren skup u $\mathfrak{F}$. Lako proveravamo da je $p_x(\Phi_x) \subset \overline{V}$, odakle, zatvaranjem i na osnovu (2), imamo

$$\overline{F}_{\Phi_x}(x) \subset U.$$

Dakle, pošto je funkcija $\overline{F}_{\Phi_x}$ poluneprekidna odozgo, postoji u X otvoren skup $N_x \ni x$ tako da

(3) $$a \in N_x \Longrightarrow \overline{F}_{\Phi_x}(a) \subset U.$$

Prema tome, familija $\{N_x \mid x \in K\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa K i, znači, postoje tačke $x_1,\ldots,x_n \in K$ tako da je

$$K \subset N_{x_1} \cup \ldots \cup N_{x_n}.$$

Pokažimo da za skup

$$G = (x_1,V) \cap \ldots \cap (x_n,V) \cap \mathcal{F},$$

otvoren u konačno-otvorenoj topologiji na $\mathcal{F}$, važi

$$f_0 \in G, \qquad G \subset (K,U) \cap \mathcal{F}.$$

Zaista, na osnovu (1) i (2), $f_0 \in G$. Neka je $g \in G$ i $a \in K$. Tada, $a \in N_{x_j}$ za neko $j \leqslant n$, pa je, prema (3), $\overline{F}_{\Phi_{x_j}}(a) \subset U$. Iz $g \in G$, sledi $g \in \Phi_{x_j}$, pa, dakle, imamo

$$g(a) = p_a(g) \in p_a(\Phi_{x_j}) \subset \overline{p_a(\Phi_{x_j})} = \overline{F}_{\Phi_{x_j}}(a) \subset U.$$

Ovo, očigledno, kompletira dokaz. //

Sledeća lema je, u izvesnom smislu, obrat Leme 2.2. Ovu lemu, u nešto izmenjenoj formi, ali sa osnovnom pretpostavkom da je Y kompaktan prostor, sugerirao mi je prof. M. Marjanović.

LEMA 2.4. Neka je X proizvoljan, a Y kompaktan Hausdorff-ov prostor. Ako je $\mathcal{F} \subset Y^X$ topološki uniformno neprekidna familija, tada je $\overline{F}_\Phi : X \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo za svaki podskup $\Phi \subset \mathcal{F}$.

DOKAZ. Neka je dat podskup $\Phi \subset \mathcal{F}$, tačka $x \in X$ i skup V otvoren u Y tako da je $\overline{F}_\Phi(x) \subset V$. Pošto je Y regularan (kao kompaktan Hausdorff-ov prostor) i $\overline{F}_\Phi(x)$ kompaktan (kao zatvoren skup u kompaktnom prostoru), postoji u Y otvoren skup G tako da je

(4) $$\overline{F}_{\Phi}(x) \subset G, \qquad \overline{G} \subset V.$$

Neka je $y \in \overline{F}_{\Phi}(x) \subset G$ proizvoljno izabrana tačka. Pošto je $\mathfrak{F}$ topološki uniformno neprekidna familija, takva je, očigledno, i familija Φ, pa, dakle, postoje u X i Y, respektivno, otvoreni skupovi $U_y \ni x$ i $W_y \ni y$ tako da

(5) $$\left.\begin{array}{l} f \in \Phi \\ f(x) \in W_y \end{array}\right\} \Rightarrow f(U_y) \subset G.$$

Dakle, $\{W_y \mid y \in \overline{F}_{\Phi}(x)\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa $\overline{F}_{\Phi}(x)$ i, znači, postoje tačke $y_1, \ldots, y_n \in \overline{F}_{\Phi}(x)$ tako da je

$$\overline{F}_{\Phi}(x) \subset W_{y_1} \cup \ldots \cup W_{y_n}.$$

Neka je

$$U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}.$$

Očigledno, U je otvoren i sadrži x, pa je dovoljno dokazati da

$$a \in U \Rightarrow \overline{F}_{\Phi}(a) \subset V.$$

Zaista, ako je $f \in \Phi$, tada je $f(x) \in \overline{F}_{\Phi}(x)$, pa je $f(x) \in W_{y_i}$ za neko $i \leqslant n$. Dakle, prema (5), $f(U_{y_i}) \subset G$, odakle zaključujemo da je $f(U) \subset G$, odnosno $f(a) \in G$. Prema tome,

$$\{f(a) \mid f \in \Phi\} \subset G.$$

Odavde sledi da je $\overline{p_a(\Phi)} \subset \overline{G}$, pa je, prema (4), $\overline{F}_{\Phi}(a) \subset V$. //

Direktna posledica Leme 2.2 i Leme 2.4 je sledeća teorema:

TEOREMA 2.5. <u>Neka je</u> Y <u>kompaktan Hausdorff-ov prostor i</u> $\mathfrak{F} \subset Y^X$. <u>Tada, sledeća tvrdjenja su ekvivalentna</u>:

(a) $\mathfrak{F}$ <u>je topološki uniformno neprekidna familija</u>,

(b) <u>funkcija</u> $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ <u>je poluneprekidna odozgo za svaki skup</u> Φ <u>zatvoren u</u> $\mathfrak{F}$.

LEMA 2.6. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan regularan prostor</u>, Y <u>Haus-</u>

dorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ kompaktan skup u Y^X. Tada je funkcija $\overline{F}_{\Phi}$: $X \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$.

DOKAZ. Neka je dat skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$, tačka $x \in X$ i skup V otvoren u Y takav da je $\overline{F}_{\Phi}(x) \subset V$. Treba odrediti otvorenu okolinu U tačke x tako da

(6) $$a \in U \Longrightarrow \overline{F}_{\Phi}(a) \subset V.$$

Primetimo prvo da je $p_a(\Phi)$ zatvoren skup u Y (za svako $a \in X$). Zaista, pošto je Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{F}$ kompaktan, sledi da je Φ kompaktan skup, pa dakle, zbog neprekidnosti projekcije p_a, takav je i $p_a(\Phi)$. Kako je, medjutim, Y Hausdorff-ov prostor, imamo da je $\overline{p_a(\Phi)} = p_a(\Phi)$ ili, što je isto, $\overline{F}_{\Phi}(a) = \{f(a) \mid f \in \Phi\}$. Dakle, prema (6), treba pokazati da

(7) $$\left.\begin{array}{l} a \in U \\ f \in \Phi \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a) \in V.$$

Neka je $g \in \Phi$ proizvoljno izabrana tačka. Tada je $g(x) \in \overline{F}_{\Phi}(x)$ i, dakle, $g(x) \in V$. Pošto je g neprekidna funkcija, postoji u X otvoren skup $U_g \ni x$ tako da je

$$g(U_g) \subset V.$$

Pošto je X lokalno kompaktan regularan prostor, postoji kompaktan skup K_g ([22], str. 66, Prop. 2.14) tako da

$$x \in \operatorname{int}(K_g), \qquad K_g \subset U_g.$$

Dakle, $g(K_g) \subset V$ tj. $g \in (K_g,V)$. Prema tome, familija $\{(K_g,V) \mid g \in \Phi\}$ je otvoren pokrivač kompaktnog skupa Φ i, znači, postoje tačke $g_1, \ldots, g_n \in \Phi$ tako da je

$$\Phi \subset (K_{g_1},V) \cup \ldots \cup (K_{g_n},V).$$

Neka je

$$U = \operatorname{int}(K_{g_1} \cap \ldots \cap K_{g_n}) = \operatorname{int}(K_{g_1}) \cap \ldots \cap \operatorname{int}(K_{g_n}).$$

Očigledno, U je otvoren i sadrži x, pa ostaje da se proveri implikacija (7). Neka je $f \in \Phi$ i $a \in U$. Tada je $f(K_{g_i}) \subset V$ za neko $i \leqslant n$ i $a \in \mathrm{int}(K_{g_i})$, što povlači $f(a) \in V$. //

Dokazujemo sada prvu teoremu koja karakteriše kompaktne skupove u Y^X.

TEOREMA 2.7. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan regularan prostor</u>, Y <u>regularan Hausdorff-ov prostor i</u> $\mathfrak{F}$ <u>podskup od</u> Y^X. <u>Tada</u>, $\mathfrak{F}$ <u>je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi</u>:

(U1) $\mathfrak{F}$ je zatvoren u Y^X,

(U2) $\overline{p_x(\mathfrak{F})}$ je kompaktan skup u Y za svaku tačku $x \in X$,

(U3) <u>funkcija</u> $\tilde{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ <u>je poluneprekidna odozgo za svaki skup</u> Φ <u>zatvoren u</u> $\mathfrak{F}$.

DOKAZ. Pokazaćemo da je, pod gore navedenim pretpostavkama o prostorima X i Y, skup uslova (U1)-(U3) ekvivalentan skupu uslova (K1)-(K3) Teoreme I.1.3.4 Kelley-a i Morse-a.

(U1)-(U3) $\Longrightarrow$ (K1)-(K3) : Prema Lemi 2.2.

(K1)-(K3) $\Longrightarrow$ (U1)-(U3) : $\mathfrak{F}$ je kompaktan (T. I.1.3.4), pa implikacija sledi na osnovu Leme 2.6. //

Navodimo posledicu dokazane i Teoreme I.1.3.4 (uporedi sa T.2.5).

POSLEDICA 2.8. <u>Neka je</u> X <u>lokalno kompaktan regularan prostor</u>, Y <u>regularan Hausdorff-ov prostor i</u> $\mathfrak{F}$ <u>podskup od</u> Y^X <u>koji ispunjava uslove</u> (U1) <u>i</u> (U2). <u>Tada su uslovi</u> (K3) <u>i</u> (U3) <u>ekvivalentni</u>.

3. OSNOVNA TEOREMA

Prirodno se postavlja pitanje, može li se u Teoremi 2.7, pretpostavka da je X lokalno kompaktan regularan prostor, zameniti sa pretpostavkom da je X Hausdorff-ov k-prostor. Kao što ćemo kasnije videti, odgovor na ovo pitanje je potvrdan.

LEMA 3.1. <u>Neka su</u> X <u>i</u> Y <u>Hausdorff-ovi prostori i</u> $\mathfrak{F}$ <u>kompaktan skup u</u> Y^X. <u>Ako je</u> C <u>kompaktan skup u</u> X <u>i</u> Φ <u>zatvoren skup u</u> $\mathfrak{F}$, <u>tada</u>

je funkcija $\overline{F}_{\Phi} | C : C \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo.

DOKAZ. Očigledno, C je kompaktan Hausdorff-ov prostor i, dakle, lokalno kompaktan regularan prostor.

Pošto je funkcija $\mathcal{S}_C : Y^X \longrightarrow Y^C$ neprekidna (Prop. I.1.2.15) i $\mathcal{F}$ kompaktan skup, $\mathcal{S}_C(\mathcal{F}) = \mathcal{F} | C$ je kompaktan skup u prostoru Y^C.

Pokažimo sada da je $\Phi | C$ zatvoren skup u $\mathcal{F} | C$. Zaista, pošto je Φ zatvoren u $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}$ kompaktan, Φ je kompaktan u Y^X i, znači, $\mathcal{S}_C(\Phi) = \Phi | C$ je kompaktan u Y^C. Pošto je Y Hausdorff-ov prostor, Y^C je Hausdorff-ov prostor (T. I.1.2.2) i, dakle, $\Phi | C$ je zatvoren u Y^C, kao kompaktan skup u Hausdorff-ovom prostoru. Ovo, zajedno sa očiglednom inkluzijom $\Phi | C \subset \mathcal{F} | C$, implicira da je $\Phi | C$ zatvoren skup u $\mathcal{F} | C$.

Dakle, prema prethodno dokazanom, na osnovu Leme 2.6 (gde je X zamenjeno sa C, Y^X sa Y^C, $\mathcal{F}$ sa $\mathcal{F} | C$ i Φ sa $\Phi | C$), funkcija $\overline{F}_{\Phi | C}$: $C \longrightarrow 2^Y$ je poluneprekidna odozgo. Ali, prema Propoziciji 2.1, $\overline{F}_{\Phi | C} = \overline{F}_{\Phi} | C$, pa je, dakle, funkcija $\overline{F}_{\Phi} | C$ poluneprekidna odozgo. //

LEMA 3.2. Neka je X k-prostor i $F : X \longrightarrow 2^Y$. Ako je, za svaki kompaktan skup C u X, funkcija $F | C : C \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo, tada je i funkcija F poluneprekidna odozgo.

DOKAZ. Neka je U otvoren skup u Y. Pokažimo da je $F^{-1}(\langle U \rangle)$ otvoren skup u X. Neka je C proizvoljan kompaktan skup u X. Očigledno, važi jednakost

$$F^{-1}(\langle U \rangle) \cap C = (F | C)^{-1}(\langle U \rangle).$$

Pošto je funkcija $F | C$ poluneprekidna odozgo, $(F | C)^{-1}(\langle U \rangle)$ je otvoren skup u C. Dakle, pošto je $F^{-1}(\langle U \rangle) \cap C$ otvoren u C i X k-prostor, $F^{-1}(\langle U \rangle)$ je otvoren skup u X. //

Izlažemo sada osnovni rezultat ove glave.

TEOREMA 3.3. Neka je X Hausdorff-ov k-prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathcal{F}$ podskup od Y^X. Tada, $\mathcal{F}$ je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(U1) $\mathfrak{F}$ je zatvoren u Y^X.

(U2) $\overline{p_x(\mathfrak{F})}$ je kompaktan skup u Y za svaku tačku $x \in X$,

(U3) funkcija $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ je poluneprekidna odozgo za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$.

DOKAZ. Očigledno, dovoljno je pokazati da je, pod gore navedenim pretpostavkama o prostorima X i Y, skup uslova (U1)-(U3) ekvivalentan skupu uslova (M1)-(M3) Teoreme I.1.3.5 Morse-a i Kelley-a.

(U1)-(U3) $\Longrightarrow$ (M1)-(M3) : Prema Lemi 2.2, $\mathfrak{F}$ je topološki uniformno neprekidna familija, a prema Propoziciji 1.1, $\mathfrak{F} | C$ je, takođe, topološki neprekidna familija za svaki kompaktan skup $C \subset X$.

(M1)-(M3) $\Longrightarrow$ (U1)-(U3) : Na osnovu Teoreme I.1.3.5, $\mathfrak{F}$ je kompaktan, pa je, prema Lemi 3.1, funkcija $\overline{F}_{\Phi} | C : C \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo za svaki kompaktan skup C u X i svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$. Odavde zaključujemo (Lema 3.2) da je i funkcija $\overline{F}_{\Phi} : X \longrightarrow 2^Y$ poluneprekidna odozgo za svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$. //

Iz dokazane i Teoreme I.1.3.5 sledi

POSLEDICA 3.4. Neka je X Hausdorff-ov k-prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X koji zadovoljava uslove (U1) i (U2). Tada su uslovi (M3) i (U3) ekvivalentni.

PRIMEDBA 3.5. Primetimo da se uslov (U3), prema 2.1 i 3.2, može zameniti sa sledećim uslovom:

(U4) funkcija $\overline{F}_{\Phi | C} : C \longrightarrow 2^Y$ je poluneprekidna odozgo za svaki kompaktan skup C u X i svaki skup Φ zatvoren u $\mathfrak{F}$.

4. JEDNA POSLEDICA OSNOVNE TEOREME

Pokazaćemo, na kraju, da se Teorema I.1.3.2 D. Gale-a može dobiti kao posledica Teoreme 3.3.

Neka su X i Y topološki prostori i neka je $\mathfrak{F}$ data familija funkcija u prostoru Y^X. Tada svaki podskup Φ skupa $\mathfrak{F}$ indukuje funkciju

$$F_{\Phi} : X \longrightarrow P(Y)$$

definisanu sa

$$F_{\Phi}(x) = p_x(\Phi)$$

za svako $x \in X$.

Iako tehničke prirode, naredna propozicija je veoma važna, kao osnova veze izmedju gore pomenutih teorema.

PROPOZICIJA 4.1. Neka je B proizvoljan podskup od Y. Tada je

$$F_{\Phi}^{-1}(\rangle B\langle) = \bigcup\{f^{-1}(B) \mid f \in \Phi\}.$$

DOKAZ. Sledi iz

$$x \in F_{\Phi}^{-1}(\rangle B\langle) \Longleftrightarrow F_{\Phi}(x) \in \rangle B\langle \Longleftrightarrow \{f(x) \mid f \in \Phi\} \cap B \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \exists f \in \Phi \text{ i } f(x) \in B \Longleftrightarrow \exists f \in \Phi \text{ i } x \in f^{-1}(B). \ //$$

LEMA 4.2. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

(G3) ako je B zatvoren u Y, tada je $\bigcup\{f^{-1}(B) \mid f \in \Phi\}$ zatvoren u X, za svaki skup Φ zatvoren u $\mathcal{F} \subset Y^X$,

(H3) funkcija $F_{\Phi} : X \longrightarrow P(Y)$ je poluneprekidna odozgo za svaki skup Φ zatvoren u $\mathcal{F}$.

DOKAZ. Ekvivalentnost tvrdjenja (G3) i (H3) je neposredna posledica Definicije 1.1.4 i Propozicije 4.1. //

Na osnovu Leme 4.2, Gale-ova teorema dobija formu veoma sličnu formi Teoreme 3.3. Ovo, medjutim, omogućava, da preko naredne dve jednostavne leme, lako dodjemo do željenog cilja.

LEMA 4.3. Neka je Y Hausdorff-ov prostor, $\mathcal{F}$ kompaktan skup u Y^X i Φ zatvoren skup u $\mathcal{F}$. Tada su funkcije F_{Φ} i $\overline{F}_{\Phi}$ jednake.

DOKAZ. Prema definiciji funkcija F_{Φ} i $\overline{F}_{\Phi}$, dovoljno je pokazati da je $p_x(\Phi) = \overline{p_x(\Phi)}$ za svako $x \in X$. Dokaz ove jednakosti, medjutim, sadržan je u delu dokaza Leme 2.6. //

LEMA 4.4. Neka je Y regularan prostor i $\mathcal{F}$ podskup od Y^X. Tada uslovi (G2) i (G3) Teoreme I.1.3.2 D. Gale-a impliciraju uslove (U2) i (U3) Teoreme 3.3.

DOKAZ. (U2) sledi iz (G2) i regularnosti prostora Y. Dokažimo (U3).

Neka je dat skup Φ zatvoren $\mathfrak{F}$, tačka $x \in X$ i skup V otvoren u Y takav da je $\overline{F}_{\Phi}(x) = \overline{p_x(\Phi)} \subset V$. Kao zatvoren skup kompaktnog prostora $\overline{p_x(\mathfrak{F})}$, $\overline{p_x(\Phi)}$ je kompaktan skup. Dakle, pošto je Y regularan prostor, postoji u Y otvoren skup G tako da je

$$\overline{p_x(\Phi)} \subset G, \qquad \overline{G} \subset V.$$

Dakle, $F_{\Phi}(x) = p_x(\Phi) \subset G$, pa, pošto je (Lema 4.2) F_{Φ} poluneprekidna odozgo, postoji u X otvoren skup $U \ni x$ tako da

$$a \in U \Longrightarrow F_{\Phi}(a) = p_a(\Phi) \subset G,$$

odakle

$$\overline{F}_{\Phi}(a) = \overline{p_a(\Phi)} \subset \overline{G} \subset V. \quad //$$

Prema 4.3. i 4.4, neposredna posledica Teoreme 3.3 je sledeća

TEOREMA 4.5. Neka je X Hausdorff-ov k-prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X. Tada, $\mathfrak{F}$ je kompaktan ako i samo ako su ispunjeni uslovi (G1)-(G3).

Iz Teorema 3.3 i 4.5 dobija se

POSLEDICA 4.6. Neka je X Hausdorff-ov k-prostor, Y regularan Hausdorff-ov prostor i $\mathfrak{F}$ podskup od Y^X koji ispunjava uslov (U1). Tada su uslovi (U2) i (U3) ekvivalentni uslovima (G2) i (G3), odnosno uslovima (G2) i (H3).

Ako poredimo uslove (G3), (K3), (M3) i (U3), pada odmah u oči da je, prema definicji funkcije $\overline{F}_{\Phi}$, uslov (U3) prirodnije vezan za uslov (U2) nego što je to slučaj sa uslovima (G3) i (G2), (K3) i (K2), odnosno (M3) i (M2). Pored toga, po formi, (U3) je, svakako, standardniji od (G3), (K3) i (M3). Što je najvažnije, u praksi, (U3) je lakše proveriti nego (K3) ili (M3). Isto tako, dok (G3) (tj. (H3)) operiše sa svim podskupovima prostora Y, (U3) se ograničava samo na klasu zatvorenih skupova.

LITERATURA

Arens, R.

[1] A topology for spaces of transformations, Ann. of Math. 47(1946), 480-495.

Arens, R. i Dugundji, J.

[2] Topologies for function spaces, Pac. J. Math. 1(1951), 5-31.

Bagley, R. W. i Yang, J. S.

[3] On k-spaces and function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 17(1966), 703-705.

Bashkirov, A. I.

[4] Normality and compactness of mapping spaces, Vestnik Moskov. Univ. 3(1972). 77-79.

Billera, L. J.

[5] Topologies for 2^X; set-valued functions and their graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 155(1971), 137-147.

Borges, C. R.

[6] Connectivity of function spaces, Can. J. Math. 23(1971), 759-763.

Borsuk, K.

[7] Theory of retracts, Monografie Matematyczne 44, PWN, Warszawa 1967.

Brown, R.

[8] Function spaces and product topologies, Quart. J. Math. 15 (1964), 238-250.

Bucur, I. i Deleanu, A.

[9] Introduction to the theory of categories and funktors, John Wiley, London 1968.

Drešević, M. M.

[10] The converse to an Ascoli's type theorem, Publ. Inst. Math. 13(1972), 17-21.

[11] A theorem on spaces 2^X with the compact-open topology, Publ. Inst. Math. (u štampi).

[12] On inverse limit of function spaces, Publ. Inst. Math. (u štampi).

Eilenberg, S. i Steenrod, N.

[13] Fundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, Princeton 1952.

Engelking, R.

[14] Outline of general topology, North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1968.

Ezust, P.

[15] Joint continuity of function spaces, Colloq. Math. 21 (1970), 87-89.

Fox, R. H.

[16] On topologies for function spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 51(1945), 429-432.

Fuller, R. V.

[17] Condition for a function space to be locally compact, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 615-617.

Gale, D.

[18] Compact sets of functions and function rings, Proc. Amer. Math. Soc. 43(1950), 303-308.

Hansard, J. D.

[19] A note on the connected-open topology, Math. Nachr. 46 (1970), 57-60.

[20] Function space topologies, Pac. J. Math. 35(1970), 381-388.

Hoyle, H. B.

[21] Function spaces for somewhat continuous functions, Czech. Math. J. 21(1971), 31-34.

Hu, S. T.

[22] Elements of general topology, Holden-Day, San Francisko 1964.

[23] Theory of retracts, Wayne State Univ. Press, Detroit 1965.

[24] Homotopy theory, Academic Press, New York 1959.

Irudayanathan, A. i Naimpally, S.

[25] Connected-open topology for function spaces, Indag. Math. 28(1966), 22-24.

Jackson, J. R.

[26] Comparison of topologies on function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), 156-158.

[27] Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), 327-333.

Kelley, J. L.

[28] Opšta topologija, Nauka, Moskva 1968.

Kuratowski, K.

[29] Topologija I, Mir, Moskva 1966.

[30] Topologija II, Mir, Moskva 1969.

[31] On the completeness of the space of monotone mappings, Bull. Acad. Polon. Sci. 16(1968), 283-285.

[32] Applications of set-valued mappings to various spaces of continuous functions, Gen. Top. and its Appl. 1(1971), 155-161.

Kuratowski, K. i Lacher, R.

[33] A theorem on the space of monotone mappings, Bull. Acad. Polon. Sci. 17(1969), 797-800.

Lin, Y. F. i Rose, D. A.

[34] Ascoli's theorem for spaces of multifunctions, Pac. J. Math. 34(1970), 741-747.

Mancuso, V. J.

[35] An Ascoli theorem for multi-valued functions, J. Austral. Math. Soc. 12(1972), 466-472.

Marjanović, M. M.

[36] Topologizing the hipersets, Publ. Inst. Math. 11(1971), 123-134.

[37] Exponentially complete spaces I, Glasnik Matematički 6 (1971), 143-147.

[38] Exponentially complete spaces II, Publ. Inst. Math. 13 (1972), 77-79.

Marjanović, M. M. i Drešević, M. M.

[39] A note on Ascoli's theorem for spaces of multifunctions, Publ. Inst. Math. 14(1972), 111-114.

Michael, E.

[40] Topologies on spaces of subsets, Trans, Amer. Math. Soc. 71(1951), 152-182.

Mrowka, S.

[41] On function spaces, Fund. Math. 45(1958), 273-282.

Myers, S. B.

[42] Equicontinuous sets of mappings, Ann. of Math. 47(1946), 496-502.

Naimpally, S.

[43] Graf topology for function spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 123(1966), 267-272.

[44] Function space topologies for connectivity and semi-connectivity functions, Cannad. Math. Bull. 9(1966), 349-352.

[45] Function spaces of invertible spaces, Amer. Math. Monthly 73(1966), 513-515.

Naimpally, S. i Pareek, C.

[46] Graf topologies for function spaces II, Comment. Math. Prace Math. 13(1970), 221-231.

O'Steen, D. N.

[47] Spaces of set-valued functions, Trans. Amer. Math. Soc. 169(1972), 307-315.

O'Meara, P.

[48] On paracompactness in function spaces with the compact-open topology, Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971), 183-189.

Pervin, W. J.

[49] On the connected-open topology, Indag. Math. 29(1967), 126-127.

Pol, R.

[50] On the position of the set of monotone mappings in functions spaces, Fund. Math. 75(1972), 75-84.

Sirota, S.

[51] On spectral representation of spaces of closed subsets of bicompacta, Dokl. Akad. Nauk SSSR 181(1968), 1069-1072.

Smithson, R. E.

[52] Some general properties of multivalued functions, Pac. J. Math. 15(1965), 681-703.

[53] Multifunctions, Nieuw. Arch. Wisk. 20(1972), 31-53.

[54] Uniform convergence for multifunctions, Pac. J. Math. 39 (1971), 253-260.

Steen, L. A. i Seebach, J. A.

[55] Counter examples in topology, Holt, Rinehart and Winston, New York 1970.

Stone, A. H.

[56] A note on paracompactness and normality of mapping spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 81-83.

Thron, W. J.

[57] Topological structures, Holt, Rinehart and Winston, New York 1966.

Weston, J. D.

[58] A generalization of Ascoli's theorem, Mathematika 6(1959), 19-24.

Willard, S.

[59] General topology, Addison-Wesley, Reading 1970.