U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

Mr MIOLJUB NIKIĆ

KOHOMOLOŠKE GRUPE ODREDJENIH PRAMENOVA NAD NEKIM OBLASTIMA U $\mathbb{C}^n$

BEOGRAD, 1972

S A D R Ž A J

1. U V O D

Bitni rezultati u teoriji funkcija više kompleksnih promenljivih odnose se na algebarsko-topološke rezultate H.Kartana, sa efikasnom primenom teorije pramenova, i doprinos japanskog matematičara K.Oka. Zato se, često danas, centralni deo teorije funkcija više kompleksnih promenljivih zove teorijom Kartana-Oka. Ovaj deo teorije, kao i mnoga otvorena pitanja u teoriji funkcija više promenljivih, nemaju nekog interesa u teoriji funkcija jedne kompleksne promenljive - pošto se analiza više kompleksnih promenljivih, uglavnom, razlikuje od teorije jedne kompleksne promenljive. Navešću neke od tih razlika:

1. Analitička funkcija više promenljivih u nekoj oblasti ne može imati izolovanih singulariteta /teorema Hartogs-Osgud-Brauna [21],[22]/,

2. Ako je K kompaktan skup u $\mathbb{C}^1$, tada je $K = \{\zeta \in \mathbb{C}^1 : |R(\zeta)| \leq \max\limits_K |R(z)|$, za svaku racionalnu funkciju $R(z)$ čiji se polovi ne nalaze u K$\}$. Međutim, u $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ isto ne mora da važi. Na primer: $K = \{\zeta \in \mathbb{C}^n (n \geq 2) : 0 < r \leq |\zeta - z_0| \leq R\} \neq \{\zeta \in \mathbb{C}^n (n \geq 2) : |R(\zeta)| \leq \max\limits_K |R(z)|$, za svaku racionalnu funkciju $R(z)$ čiji su polovi van K$\}$,

3. Svaka oblast D iz $\mathbb{C}^1$ je holomorfno-konveksna, to jest ima sledeću osobinu: ako je K kompaktan skup u D, tada je i skup $\hat{K}_{H(D)} = \{\zeta \in D : |f(\zeta)| \leq \max\limits_K |f(z)|$, za svaku analitičku funkciju u D$\}$, takođe, kompaktan. Ovu osobinu nemaju sve oblasti iz $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$,

4. Za svaku tačku sa granice oblasti D iz $\mathbb{C}^1$ postoji analitička funkcija u D koja se ne može analitički produžiti kroz deo granice oblasti, kojem pripada ova tačka. Oblast D iz $\mathbb{C}^n$, sa pomenutom osobinom, zove se oblast holomorfnosti. Znači, svaka oblast iz $\mathbb{C}^1$ - je oblast holomorfnosti. Sa druge strane, svaka analitička funkcija u oblasti D = $\{z \in \mathbb{C}^n\ (n \geq 2) : 0 < r < |z - z_0| < R\}$, po teoremi Hartogs-Osgud-Brauna [21],[22], može se analitički produžiti u oblast $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C}^n\ (n \geqslant 2) : |z - z_0| < R\}$, te D nije oblast holomorfnosti.

1.1. Oblasti holomorfnosti u $\mathbb{C}^n$.

Može se primetiti, prema prethodnom, da pojedine osobine nekih oblasti iz $\mathbb{C}^n$ nemaju sve oblasti. U vezi toga napomenuću i klasu pseudokonveksnih oblasti: ako je za ma koji kompaktan skup K iz oblasti D i skup $\hat{K}_{P(D)} = \{\zeta \in D : |p(\zeta)| \leqslant \max_K |p|$, za svaku plurisubharmonisku funkciju $p(z)$ iz D $\}$ kompaktan, tada se za D kaže da je pseudokonveksna.

Prirodno se nameće pitanje da li su u nekoj vezi, i u kakvoj, ove tri klase oblasti. Najpre je dokazano da je svaka oblast holomorfnosti pseudokonveksna [19] , [20] . Zatim, 1932.godine H.Kartan i P.Tulen [9] su dokazali da je holomorfno-konveksna oblast, istovremeno, i oblast holomorfnosti, a Benke i Štejn su utvrdili i obrnuto svojstvo [2] .

E.Levi je 1911.godine postavio hipotezu /problem Levi [22] : ako za svaku tačku ζ sa granice oblasti D postoji okolina U i analitička funkcija u $U \cap D$ koja se ne može analitički produžiti u tačku ζ , tada postoji analitička funkcija u oblasti D koja se ne može analitički produžiti u tačku ζ . Ovaj problem rešio je K.Oka, a samim tim je dokazao da je svaka pseudokonveksna oblast i oblast holomorfnosti. /1942.godine za n=2, 1953. za $n > 2$ [14]/.

Pored rešenja problema Levi, od Oka potiču i izvesni rezultati iz teorije aproksimacija [14]:

1. Svaka analitička funkcija u okolini kompaktnog skupa K može se ravnomerno aproksimirati polinomima na K, ako je $K = \hat{K}_p = \{\zeta : |p(\zeta)| \leq \max_K |p(z)|$, za svaki polinom$\}$;

2. Svaka analitička funkcija, u okolini kompaktnog skupa K iz oblasti holomorfnosti D, je ravnomerna granica analitičkih funkcija iz D - ako je $K = \hat{K}_{H(D)}$. Isti rezultat je uopšten što se umesto oblasti holomorfnosti može uzeti mnogostrukost Štejna [7].

Primećujemo, iz dosad izloženog, da su holomorfna konveksnost i pseudokonveksnost bili predmeti istraživanja od velikog interesa, i ne tako brzo dobijeni, ekvivalentni uslovi za holomorfnost oblasti. Pored ovih ekvivalentnih uslova, francuska škola H.Kartana dala je algebarsko-topološke uslove [8], dok od L.Hermandera potiču kao uopštenje leme Dolbo-Grotendika [21], [22] . Ova lema - poznata kao "problem delta sa crtom" - sastoji se u sledećem: Za svaku beskonačno-diferencijabilnu /p,q+1/-formu f $(p \geqslant 0, q \geqslant 0)$ u polikrugu Π, zatvorenu u odnosu na operator $\bar{\partial}$, postoji rešenje sistema parcijalnih jednačina $\bar{\partial}u = f$, u svakoj oblasti D koja je relativno kompaktna u Π. Više od toga, rešenje definiše beskonačno-diferencijabilnu /p,q/-formu u D. Od L.Hermandera [21] imamo sledeće rezultate:

1. Za svaku beskonačno diferencijabilnu /p,q+1/-formu f $(p \geqslant 0,\ q \geqslant 0)$ u pseudokonveksnoj oblasti D iz $\mathbb{C}^n$, pri čemu je f zatvorena u odnosu na $\bar{\partial}$, postoji rešenje sistema parcijalnih jednačina $\bar{\partial}u = f$ u D, i pri tome je u beskonačno-diferencijabilna /p,q/-forma u D;

2. Ako u oblasti D, za svaku beskonačno-diferencijabilnu /0,q+1/-formu f /$q \geqslant 0$/, zatvorenu u odnosu na $\bar{\partial}$, postoji rešenje jednačine $\bar{\partial}u = f$ (u je beskonačno-diferencijabilna /0,q/-forma u D/ - tada je D oblast holomorfnosti.

Dakle, prema rešenju problema Levi, sledi da su uslovi u 2. potrebni i dovoljni da bi D bila oblast holomorfnosti.

1.2. Pramenovi i analitičke funkcije.

U svakoj tački z iz oblasti D iz $\mathbb{C}^n$, preko klase lokalno-analitičkih funkcija u D /funkcije koje su analitičke bar u jednoj tački iz D/, može se uvesti relacija ekvivalencije: $f\,\rho_z\,g$, ako su f i g jednake u nekoj okolini tačke z. Svaka od klasa ekvivalencije $C(z,f)=\{g: g\,\rho_z\,f\}$ zove se klica funkcije f u tački z. Neka je, dalje, $\mathcal{H}_z=\{C(z,f): f$ je analitička u tački $z\}$ i $\mathcal{H}(D)=\bigcup\limits_{z\in D}\mathcal{H}_z$. Pomoću topologije iz D, dakle otvorenih skupova iz D, može se definisati topologija u $\mathcal{H}(D)$. Naime, za analitičku funkciju f u otvorenom skupu $G\subset D$ imamo okoline, odgovarajućih elemenata iz $\mathcal{H}(D)$, $U_{C(z,f)}=\{C(z,g): g$ je analitička u $G\}$. U svakom od skupova $\mathcal{H}_z$ imamo strukturu komutativnog prstena. Zaista, zbir i proizvod klasa ekvivalencije je definisan zbirom, odnosno, proizvodom funkcija: $C(z,f)+C(z,g)=C(z,f+g)$, $C(z,f)\cdot C(z,g)=C(z,f\cdot g)$. Konačno, možemo definisati preslikavanje p, prostora $\mathcal{H}(D)$ na D: $p(C(z,f))=z$. Iz definicije topologije u $\mathcal{H}(D)$, p je lokalno-homeomorfno preslikavanje. Dalje, svaka analitička funkcija f u otvorenom skupu $G\subset D$ određuje neprekidnu funkciju $\tilde{f}: G\to\mathcal{H}(D)$ sa osobinom $p\circ\tilde{f}=I_D$. No, i neprekidnoj funkciji na otvorenom skupu $G\subset D$, sa vrednostima u $\mathcal{H}(D)$ čija je kompozicija sa p jedinično preslikavanje, jednoznačno se korespondira analitička funkcija u G. Zato se takve neprekidne funkcije, koje se zovu sekcije, identifikuju sa lokalno-analitičkim funkcijama u D.

Budući da je $\mathcal{H}_z$ prsten sa jedinicom bez delitelja nule, može se formirati polje odnosa $\mathcal{M}_z$ u $\mathcal{H}_z$, pomoću relacije ekvivalencije u $\mathcal{H}_z\times(\mathcal{H}_z\setminus\{0\})$: $(C(z,f_1),C(z,g_1))\sim(C(z,f_2),C(z,g_2))$ ako je $C(z,f_1)\cdot C(z,g_2)=C(z,f_2)\,C(z,g_1)$. Kao što se topologija uvodi u $\mathcal{H}(D)$, slično se može uvesti i u $\mathcal{M}(D)=\bigcup\limits_{z\in D}\mathcal{M}_z$. Isto tako, sekcije, na otvorenim skupovima iz D sa vrednostima u $\mathcal{M}(D)$, se identifikuju sa lokalno-meromorfnim funkcijama u D.

Prema prethodnom razmatranju, možemo zaključiti da su $\mathcal{H}(D)$ i $\mathcal{M}(D)$ pramenovi /klica holomorfnih, odnosno meromorfnih funkcija/ komutativnih prstenova, odnosno pramenovi vektorskih prostora, nad oblasti D. Jer, u svakom sloju $p^{-1}(z)=\mathcal{H}_z$, odnosno $p^{-1}(z)=\mathcal{M}_z$, imamo strukturu komutativnog prstena i strukturu vektorskog prostora.

Ma koji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ oblasti D određuje kohomološku grupu dimenzije p /p=0,1,2,.../ $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H}(D))$, sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$. Topološkim limesom, preko familije svih otvorenih pokrivača oblasti D, definisana je p-dimenziona kohomološka grupa $H^p(D,\mathcal{H}(D))$ /p=0,1,2,.../ oblasti D sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$ [7],[21],[22]. Grupe $H^p(D,\mathcal{H}(D))$ i $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$, $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$, u opštem slučaju, ne moraju biti izomorfne. Jedino što se zna, to je da iz trivijalnosti grupe $H^1(D,\mathcal{H}(D))$ sledi trivijalnost $H^1(\mathcal{U},\mathcal{H}(D))$ za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ [21]. Isto to važi, ako je D ma koji Hausdorfov prostor i $\mathcal{H}$ bilo koji pramen nad D. Takođe, ako je $\mathcal{E}_q$ pramen klica beskonačno-diferencijabilnih /o,q/-formi nad oblasti D, tada su grupe $H^p(D,\mathcal{E}_q)$ i $H^p(\mathcal{U},\mathcal{E}_q)$ trivijalne, za svako $p>0$ i svaki pokrivač oblasti D [5]. Dalje, ako je $\mathcal{Z}_q$ pramen klica beskonačno-diferencijabilnih, $\bar\partial$ -zatvorenih /o,q/-formi u oblasti D, koristeći lemu Dolbo-Grotendika, Dolbo [5] je dokazao tačnost niza

$$0 \to \mathcal{Z}_q \xrightarrow{i} \mathcal{E}_q \xrightarrow{\bar\partial} 0 \qquad /1/$$

odnosno tačnost niza

$$0 \to H^0(D,\mathcal{L}_q) \to \cdots \to H^p(D,\mathcal{L}_q) \to H^p(D,\mathcal{E}_q) \to$$
$$\to H^p(D,\mathcal{L}_{q+1}) \to H^{p+1}(D,\mathcal{L}_q) \to \cdots \qquad /2/$$

U istom radu nalazi se analogan rezultat, pri čemu se za elemente pokrivača $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ uzimaju oblasti holomofrnosti, tako da iz tačnog niza /1/ sleduje takav tačan niz, što se umesto D u nizu /2/ može uzeti $\mathcal{U}$. Time se dobija poznati izomorfizam Dolboa [5] :

$$H^p(D,\mathcal{H}) = H^p(D,\mathcal{L}_0) \cong H^{p-1}(D,\mathcal{L}_1) \cong \cdots \cong H^1(D,\mathcal{L}_{p-1}) \cong H^0(D,\mathcal{L}_p) | H^0(D,\bar{\partial}\mathcal{E}_p$$
$$\cong H^1(\mathcal{U},\mathcal{L}_{p-1}) \cong \cdots \cong H^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{L}_1) \cong H^p(\mathcal{U},\mathcal{L}_0) = H^p(\mathcal{U},\mathcal{H}).$$

Očigledno je da su $H^0(D,\mathcal{L}_p)$ i $H^0(D,\bar{\partial}\mathcal{E}_{p-1})$ globalne sekcije respektivno pramenova $\mathcal{L}_p$ i $\bar{\partial}\mathcal{E}_{p-1}$, dakle to su sve beskonačno-diferencijabilne $\bar{\partial}$-zatvorene, odnosno kogranične, /o,p/-forme u D. Iz navedenih rezultata Hermandera[21], [22] za holomorfnost oblasti D, dobija se ekvivalentan algebarsko-topološki kriterijum: $H^p(D,\mathcal{H}(D))=0,\ p>0.$

Navedeni uslovi, koji su ekvivalentni holomorfnosti neke oblasti D, odnose se u $\mathbb{C}^n$, za $n \geqslant 1$. Kao što smo primetili da je svaka oblast u $\mathbb{C}^1$, oblast holomorfnosti, to su dati uslovi ispunjeni u svakoj oblasti iz $\mathbb{C}^1$. Dalje, svaka meromorfna funkcija u oblasti može se definisati kao sekcija m: $D \to \mathcal{M}$. Prema teoremi Mitag-Leflera, ako je $\mathcal{U}=\{U_n\}_{n\in N}$ ma koji otvoren pokrivač oblasti D iz $\mathbb{C}^1$ i $\{f_n\}_{n\in N}$ familija meromorfnih funkcija u U_n, takva da je $f_m - f_n$ analitička u

$D_m \cap D_n$, tada postoji meromorfna funkcija f u oblasti D, pri čemu je $f - f_n$ analitička u svakom od skupova U_n.

Pored toga, što trivijalnost grupa $H^p(D, \mathcal{H})$ karakterišu jednu klasu oblasti, ta trivijalnost ima još jednu analitičku dimenziju na osnovu koje se došlo do primene kohomološke teorije u kompleksnoj analizi. Pomoću prethodne tretirane memorfne funkcije f i familije $\{f_n\}$ dobijamo novu familuju $\{\tilde{f}_n = f - f_n\}$ sa osobinama: 1. $\{\tilde{f}_n\}$ su analitičke u U_n, 2. $\tilde{f}_{mn} = \tilde{f}_m - \tilde{f}_n$ u $U_m \cap_n$, 3. $\tilde{f}_{mn}$ su analitičke u $U_m \cap U_n$ i 4. $\tilde{f}_{mn} + \tilde{f}_{np} + \tilde{f}_{pm} = 0$, $\tilde{f}_{mn} = -\tilde{f}_{nm}$ u $U_m \cap U_n$. No, ako je data ma koja familija funkcija $\{a_{mn}\}$ korespondirana presecima parova elemenata nekog otvorenog pokrivača $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in N}$ oblasti D iz $\mathbb{C}^1$ sa osobinama 3. i 4., tada postoji familija funkcija $\{a_n\}$, takva da je ispunjeno 1. i 2. Ovo tvrđenje je direktno ekvivalentno trivijalnosti $H^1(D, \mathcal{H})$ grupe, odnosno grupe $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{H})$. Zaista, prema 3. i 4. sledi da je $\{a_{mn}\}$ kocikl pokrivača $\mathcal{U}$ reda 2, pa prema tome je jednak nekoj kogranici istog pokrivača. Takođe, teorema Mitag-Leflera je u suštini trivijalnost grupe $H^1(D, \mathcal{H})$. Kontraprimerom se može pokazati da prethodno tvrđenje ne mora važiti u svakoj oblasti D iz $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, to jest da za korespondiranu familiju funkcija nekog otvorenog pokrivača oblasti D, sa osobinama 3. i 4. postoji nova familija funkcija takva da je ispunjeno 1. i 2. Znači, ovaj problem - poznat kao aditivan /ili prvi/ problem Kuzena [10], [3], [21], [22], - nije rešiv u svim oblastima iz $\mathbb{C}^n (n \geq 2)$. Najpre je H. Kartan [9], [22] došao do činjenice, da iz rešenja aditivnog problema Kuzena u oblasti D iz $\mathbb{C}^2$, sledi holomorfnost te oblasti. Međutim, za oblasti iz $\mathbb{C}^n (n \geqslant 3)$ isto ne mora da važi. Najzad, rešenje istog problema je ekvivalentno $H^1(D,\mathcal{H})=0$, ili $H^1(\mathcal{U},\mathcal{H})=0$ za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ oblasti D iz $\mathbb{C}^n$. Primetimo i to, da iz trivijalnosti grupe $H^p(D,\mathcal{H})$ za $p \geqslant 2$, ne sleduje i trivijalnost grupe $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$, za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$. Bolje reći, $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})=0$ za svaki otvoren pokrivač, je jači uslov od $H^p(D,\mathcal{H})=0$. Dovoljne uslove za izomorfizam grupa $H^p(D,\mathcal{H})$ i $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$ dao je Lere [3]. Dalje, prema definiciji pramena $\mathcal{H}(D)$ nad oblasti D, sekcije pramena i grupe $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})$, možemo uzeti da je $H^p(\mathcal{U},\mathcal{H})=0$ u izvesnom smislu, ekvivalentno rešenju uopštenja aditivnog problema Kuzena. Zaista, uočimo slučaj za p=2. Tada iz $H^2(\mathcal{U},\mathcal{H})=0$ sleduje: za svaku familiju funkcija $\{a_{mnp}\}$ koja je korespondirana presecima trojki iz $\mathcal{U}$, sa osobinama: 1. a_{mnp} su analitičke u $U_m \cap U_n \cap U_p$, 2. $a_{m_1 n_1 p_1} = -a_{n_1 m_1 p_1}$, $a_{m_2 n_2 p_2} = -a_{m_2 p_2 n_2}$, 3. $a_{npq} - a_{mpq} + a_{mnq} - a_{mnp} = 0$ u $U_m \cap U_n \cap U_p \cap U_q$, postoji familija funkcija $\{a_{mn}\}$, takva da su a_{mn} analitičke funkcije u $U_m \cap U_n$, $a_{mn} = -a_{nm}$ i da je $a_{mnp} = a_{np} - a_{mp} + a_{mn}$ u $U_m \cap U_n \cap U_p$.

Primećujemo kod aditivnog problema u oblasti D, da se za familiju analitičkih funkcija u presecima parova elemenata pokrivača /kocikl reda 1/ traži familija analitičkih funkcija na elementima pokrivača, čija je kogranica polazni kocikl. Ovo ističemo iz razloga, što je prirodno da se prihvati prethodno svojstvo kao uopšten aditivan problem Kuzena. Tim pre, ako rešenje formulišemo na sledeći način: svaki kocikl reda 2 /ili p/ pokrivača $\mathcal{U}$ je kogranica nekog kolanca reda 1 /ili p-1/. Uopšten problem ćemo smatrati rešenim u D, ako je ovo tačno za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ oblasti D.

Dok je rešivost aditivnog problema u oblasti D iz $\mathbb{C}^n$ ekvivalentno $H^1(D,\mathcal{H})=0$, to rešivost uopštenog problema /za neko p $\geqslant$ 2/ ne mora da bude ekvivalentno $H^p(D,\mathcal{H})=0$. Jedino, iz rešivosti sleduje trivijalnost grupa $H^p(D,\mathcal{H})$. Isto tako, rešivost problema u oblasti D iz $\mathbb{C}^2$ je ekvivalentno činjenici da je D oblast holomorfnosti. Međutim, iz holomorfnosti oblasti D iz $\mathbb{C}^n$ /n $\geqslant$ 3/ ne sleduje rešivost uopštenog problema.

1.3. A n a l i t i č k e f u n k c i j e n a m n o g o s t r u k o s t i m a.

Svaka matrica $(a_{ij})_{m\times n}$ sa kompleksnim koeficijentima a_{ij} , može se identifikovati sa jednim elementom iz $\mathbb{C}^{mn}$. Znači, u skupu T/m,n/- svih matrica - može se uvesti topologija $\mathbb{C}^{mn}$. Otvorene skupove, odnosno oblasti, u T/m,n/ dobijamo preko istih iz $\mathbb{C}^{mn}$. Na taj način, možemo definisati analitičku funkciju na matricama. Slično, može se pokazati da je skup matrica T/m,n;k/ /čiji je rang o $<$ k $\leqslant$ min/m,n/ / lokalno-homeomorfan prostoru $\mathbb{C}^N$, $N=k(m+n-k)$. Više od toga, važi sledeće: 1. T/m,n;k/ je Hausdorfov prostor; 2. Postoji familija funkcija $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$, koja homeomorfno preslikava otvorene skupove $\mathcal{U}_\alpha$ iz T/m,n;k/ na otvorene skupove $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha$ iz $\mathbb{C}^N$; 3. $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je pokrivač T/m,n;/; 4. $h_{\alpha'}\circ h_{\alpha''}^{-1}$ su analitičke funkcije; 5. Ako je h lokalni homeorofizam, takav da su $h\circ h_\alpha^{-1}$ i $h_\alpha\circ h^{-1}$ analitičke funkcije, tada $h\in\{h_\alpha\}$.

U tački z iz skupa X, u kojem su ispunjeni uslovi 1.-5. /aksiomi kompleksno-analitičke mnogostrukosti dimenzije N/, može se definisati analitička funkcija f, ako je $f\circ h^{-1}$ analitička funkcija za svaki lokalni homeomorfizam h tačke .

Primetimo, da je svaka oblast D iz $\mathbb{C}^n$, kao i sam prostor $\mathbb{C}^n$, n-dimenziona analitička mnogostrukost. Dalje, klasična analitičnost u tački z iz D, isto je što i lokalna analitičnost u tački z, kao elementu mnogostrukosti D. Dakle, svaka mnogostrukost /komplesno-analitička/ je nešto opštije od oblasti iz $\mathbb{C}^n$. Otuda je i razumljivo, što kompleksna analiza na mnogostrukostima ima i složeniji karakter, to jest, što mnogi rezultati na mnogostrukostima nose u sebi, kao specijalne slučajeve, rezultate u oblastima iz $\mathbb{C}^n$.

Kao što je definisan pramen klica holomorfnih funkcija u oblasti D /ili neke druge klase/, na isti način je definisan pramen iste klase nad nekoj mnogostrukosti . Dalje, Štejn [3], [12],[21] je definisao jednu klasu mnogostrukosti /mnogostrukosti Štejna/ a koja sadrži holomorfno-konveksnu klasu oblasti. Značaj /Štejnovih/ S-mnogostrukosti se pokazala šezdesetih godina, zahvaljujući školi H.Kartana [7]. Naime, S-mnogostrukosti imaju, u izvesnom smislu, ulogu oblasti holomorfnosti [3],[12],[21], budući da je holomorfna obvojnica $\tilde{S}$

ove mnogostrukosti jednaka S. H.Grauert [3],[21] je dao potrebne i dovoljne uslove da neka mnogostrukost, bude S-mnogostrukost. Takođe, izomorfizam Dolboa se odnosi na jednu klasu mnogostrukosti, pri čemu su elementi pokrivača S-mnogostrukosti [5] . Dalje, sistem parcijalnih jednačina $\bar{\partial} u = f$, $\bar{\partial} f = 0$ u S-mnogostrukostima uvek ima rešenje. /Ako je f biskonačno-diferencijabilna /p,q+1/-forma, tada je rešenje beskonačno-diferencijabilna /p,q/-forma/. Već smo naveli dovoljan uslov: $K = \hat{K}_{H(D)}$ za aproksimaciju analitičke funkcije u okolini K, analitičkim funkcijama iz S.

Svaka analitička funkcija na nekoj mnogostrukosti X može se smatrati elementom iz $\Gamma(X, \mathcal{H}(X))$ [15] , [21] . U opštem slučaju, za neki pramen $\mathcal{F}$ nad mnogostrukosti X, ne znači da postoje netrivijalne sekcije [7], [21] . H.Kartan [8] je dao dovoljne uslove za egzistenciju netrivijalnih sekcija: X je S-mnogostrukost i $\mathcal{F}$ je koherentan analitički pramen. Više od toga, svaki sloj pomenutog pramena je generisan sekcijama iz $\Gamma(X, \mathcal{F})$, kao $\mathcal{H}_z$-modul. Ovi dovoljni uslovi imaju dosta zajedničkog sa jednom teoremom Oka [12] , prema kojoj je pramen $\mathcal{H}^p = \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \cdots \mathcal{H}$ koherentan nad svakoj oblasti D iz $\mathbb{C}^n$. Dalje, dovoljan uslov Oka [12] : $K = \hat{K}_{H(D)}$, za aproksimaciju analitičke funkcije u okolini kompakta K, sadržan je dovoljnom uslovu H.Kartana [7] : $K = \hat{K}_{H(S)}$, za aproksimaciju ma koje sekcije, u okolini K koherentnog pramena, globalnim sekcijama. Za navedene dovoljne uslove dosad nisu dobijeni potrebni uslovi. Na primer, da li je $X = S$ i potrebno za egzistenciju globalne sekcije koherentnog pramena nad $\mathfrak{X}$. Ili, nije li koherentnost pramena nad S, potrebno za pomenutu egzistenciju. Takođe, nije poznato, da li iz trivijalnosti grupa $H^p(\mathfrak{F},X)$ i koherentnosti pramena $\mathfrak{F}$ sleduje $X=S$. Odnosno, da li iz pomenute trivijalnosti i $\mathfrak{X}=S$, sleduje koherentnosti $\mathfrak{F}$. Mada, iz $\mathfrak{X}=S$ i koherentnosti $\mathfrak{F}$ sleduje $H^p(\mathfrak{F},X)=0$, za svako $p \geqslant 1$ - što je opštije od dovoljnog uslova za $H^p(D,\mathcal{H})=0$.

2. PODPRAMENOVI PRAMENA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

2.1. Neki podpramenovi pramena neprekidnih funkcija nad Žordanovim krivim.

U odeljku 1.3. definisani su pramenovi lokalno-analitičkih, odnosno lokalno-meromorfnih funkcija, u nekoj oblasti $D \subset \mathbb{C}^n$. Slično se može definisati i pramen lokalno-neprekidnih funkcija u oblasti, ili nekom kompaktnom skupu, kao i pojedini podpramenovi pramena neprekidnih funkcija.

D e f i n i c i j a 2.1.1. Neka su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ respektivno skupovi celih, realnih i kompleksnih brojeva. Neka je, dalje, K kompaktan skup iz $\mathbb{C}^n$, D oblast iz $\mathbb{C}^n$ i $Z_K = K \times \mathbb{Z}$, $R_K = K \times \mathbb{R}$, $C_K = K \times \mathbb{C}$, odnosno, $Z_D = D \times \mathbb{Z}$, $R_D = D \times \mathbb{R}$, $C_D = D \times \mathbb{C}$. Ukoliko u $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ uzmemo diskretnu topologiju, tada su Z_K, Z_D, R_K, R_D, C_K i C_D topološki prostori, bolje reći pramenovi nad K, odnosno, nad D. Ove pramenove zovemo pramenovi celih, realnih, kompleksnih brojeva nad K, to jest nad D.

T e o r e m a 2.1.1. Ako je $K_0 = \{z : |z| = 1,\ z \in \mathbb{C}^1\}$ tada je $H^1(K_0, Z_{K_0}) \cong \mathbb{Z}$, $H^1(K_0, R_{K_0}) \cong \mathbb{R}$, $H^1(K_0, C_{K_0}) \cong \mathbb{C}$.

D o k a z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$, $U_1=\{z:|z|=1, -\frac{3\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}\}$, $U_2=\{z:|z|=1, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{7\pi}{4}\}$, otvoren pokrivač kompakta K_o. Dokazaću, najpre, da je $H^1(\mathcal{U},R_{K_o})\cong \mathbb{R}$.

Svaki kolanac datog pokrivača je funkcija, takva da je $h:(1,2)\to h_{12}\in\Gamma(U_1\cap U_2, R_{K_o})$ i $h_{12}=-h_{21}$. Zato se on može identifikovati sa kososimetričkim sekcijama h_{12}. Kako su elementi pokrivača $\mathcal{U}$ definisani, postoje povezani i otvoreni skupovi U'_{12} i U''_{12}, takvi da je

$$U_{12}=U_1\cap U_2=U'_{12}\cup U''_{12},\ U'_{12}\neq\emptyset,\ U''_{12}\neq\emptyset,\ U'_{12}\cap U''_{12}\neq\emptyset. \quad /1/$$

Znači, prema /1 /, svaki kolanac h_{12} je definisan parom sekcija $s'_{12}\in\Gamma(U'_{12},R_{K_o})$ i $s''_{12}=\Gamma(U''_{12},R_{K_o})$. Iz definicije sekcije nekog pramena, dobijamo

$s'_{12}(z)=(z,\alpha'_{12}), z\in U'_{12}, \alpha'_{12}\in\mathbb{R}$, $s''_{12}(z)=(z,\alpha''_{12}), z\in U''_{12}, \alpha''_{12}\in\mathbb{R}$.

Budući da su U'_{12}, U''_{12} otvoreni i povezani skupovi, to su na njima s'_{12} i s''_{12} jednoznačno određene realnim brojevima $\alpha'_{12}, \alpha''_{12}$. Dalje, svaki kolanac datog pokrivača je istovremeno i kocikl. Zatim, odredimo kocikle koji su kohomološki jednaki nuli, to jest kolance h_{12} sa osobinom

$$h_{12}=h_2-h_1=\delta h,\ z\in U_{12},\ h=\{h_1,h_2\},\ h_i\in\Gamma(U_i,R_{K_o}). \quad /2/$$

Kako su U_i povezani, to je $h_i(z)=(z,\alpha_i)$. Prema /16/ i prethodnom je

$$h_{12}(z)=\begin{cases} s'_{12}(z), & z\in U'_{12}\\ s''_{12}(z), & z\in U''_{12}\end{cases}=h_2(z)-h_1(z)=(z,\alpha_2-\alpha_1),\ z\in U_{12} \quad /3/$$

Pošto je $s'_{12}(z)=(z, \alpha'_{12})$, $s_{12}(z)=(z, \alpha''_{12})$ i $h_2(z)-h_1(z)=(z,\alpha_2)-(z,\alpha_1)$ za svako $z\in U_{12}$, to iz /2/ i /3/ sledi da je $(z,\alpha'_{12})=(z,\alpha_2-\alpha_1)\in K_0\times\mathbb{R}$, za $z\in U'_{12}$ i $(z,\alpha''_{12})=(z,\alpha_2-\alpha_1)\in K_0\times\mathbb{R}$ za $z\in U''_{12}$. Dakle je $\alpha'_{12}=\alpha_2-\alpha_1=\alpha'_{12}$. Primetimo da važi i obrnuto, svaki kocikl oblika

$$h_{12}(z)=(z,\alpha_{12}),\ z\in U_{12} \qquad /4/$$

je kohomološki jednak nuli. Zaista, kogranica kolanca $h=\{h_1,h_2\}$, $h_i(z)=(z,0)$, $h_2(z)=(z,\alpha_{12})$, je prema /2/ i /3/ jednaka kociklu /18/.

Neka su

$$h_\alpha=\begin{cases}(z,\alpha'_{12}), & z\in U'_{12}\\ (z,\alpha''_{12}), & z\in U''_{12}\end{cases},\qquad h_\beta=\begin{cases}(z,\beta'_{12}), & z\in U'_{12}\\ (z,\beta''_{12}), & z\in U''_{12}\end{cases} \qquad /5/$$

kocikli kohomološki jednaki, to jest

$$h_\alpha-h_\beta=\delta h,\ h=B^0(\mathcal{U},R_{K_0}). \qquad /6/$$

Iz relacija /5/, /6/ i predhodnog dobijamo da je

$$\alpha'_{12}-\beta'_{12}=\alpha''_{12}-\beta''_{12}.$$

Dalje, binarna relacija, u skupu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')\Longleftrightarrow \alpha-\alpha'=\beta-\beta' \qquad /7/$$

je relacija ekvivalencije. Ako je $l_a=\{(x,y):\ y-x=a,\ a\in\mathbb{R}\}$, tada je prema /7/ skup količnik oblika

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}/_{\sim}=\{l_a : a\in\mathbb{R}\}. \qquad /8/$$

Ako u /8/ definišemo zbir

$$\ell_a+\ell_b=\{(x+x', y+y'):\ (x,y)\in\ell_a, (x',y')\in\ell_b\}\qquad /9/$$

tada $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash_\sim$ ima strukturu grupe koja je izomorfna $\mathbb{R}$. Iz /9/ sledi da je $\ell_a+\ell_b\subset\ell_{a+b}$. S druge strane je i $\ell_{a+b}\subset\ell_a+\ell_b$. Zaista, ako je $(y,x)\in\ell_{a+b}$, tada je $y-x=a+b$. Dalje, sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=x\\ y_1+x_2&=y\\ y_1-x_1&=a\\ y_2-x_2&=b \end{aligned}\qquad /10/$$

ima rešenje - što znači da je $(y,x)\in\ell_a+\ell_b$. Proverom zaključujemo da su ispunjeni aksiomi grupe, a prema prethodnom je $\varphi(a)=\ell_a$ izomorfizam $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Iz /4/, /5/, /6/ i /8/ sledi da su grupe $H^1(\mathcal{U},R_{K_0})$ i $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash_\sim$ izomorfne - dakle $H^1(\mathcal{U},R_{K_0})$ i $\mathbb{R}$ su izomorfne.

Neka je $\mathcal{U}_{(n,\theta)}=\{U_k^{(n)}\}_{k=1,\dots,n}$, $U_k^{(n)}=\{z:\ |z|=1,\ \theta+(k-1)\frac{2\pi}{n}-\delta<\arg z<\theta+k\frac{2\pi}{n}+\delta,\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\delta<\frac{\pi}{n}\}$, pokrivač kompakta K_0 i neka je kocikl $h=\{h_{12},h_{23},\dots,h_{n-1\,n},h_{1n}\}$ kohomološki jednak nuli, to jest

$$h_{ij}=h_j-h_i=\delta h,\ z\in U_{ij}=U_i^{(n)}\cap U_j^{(n)},\ h=\{h_k\}.\qquad /2/$$

Dakle je $\alpha_{ij}=\alpha_j-\alpha_i$, gde je $h_{ij}=(z,\alpha_{ij})$, $h_k(z)=(z,\alpha_k)$, $\alpha_k\in\mathbb{R}$, $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$. Ili

$$\alpha_{12}+\alpha_{23}+\dots+\alpha_{n-1\,n}-\alpha_{1n}=0\qquad /11/$$

Može se primetiti da je /11/ dovoljno, da bi kocikl

$$h=\{h_{12},h_{2,3},\dots,h_{1n}\},\ h_{ij}(z)=(z,\alpha_{ij})\qquad /4/$$

bio kohomološki jednak nuli. Zaista, sistem jednačina

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_2 - \alpha_1 \\ \alpha_{23} &= \alpha_3 - \alpha_2 \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1\,n} &= \alpha_n - \alpha_{n-1} \end{aligned} \qquad /12/$$

ima beskonačno mnogo rešenja i pri tome je

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} = \alpha_n - \alpha_1 \qquad /13/$$

Dalje, prema /11/, /12/ i /13/ određene vrednosti α_n i α_1 su takve, da je $\alpha_{1n} = \alpha_n - \alpha_1$. Znači, svako rešenje sistema /12/ definiše kolanac čija je kogranica jednaka kolancu /4/, koji ima osobinu /11/.

Prema prethodnom, kocikli

$$h_\alpha = \begin{cases} (z, \alpha_{12}), z \in U_{12} \\ (z, \alpha_{23}), z \in U_{23} \\ -------- \\ (z, \alpha_{1n}), z \in U_{1n}, \end{cases} \qquad h_\beta = \begin{cases} (z, \beta_{12}), z \in U_{12} \\ (z, \beta_{23}), z \in U_{23} \\ ------- \\ (z, \beta_{1n}), z \in U_{1n} \end{cases} \qquad /14/$$

su kohomološki jednaki, onda i samo onda, ako je

$$\alpha_{12} - \beta_{12} + \alpha_{23} - \beta_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} - \beta_{n-1\,n} = \alpha_{n1} - \beta_{n1}. \qquad /7'/$$

Ili, ako je

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} - \alpha_{1n} = \beta_{12} + \beta_{23} + \cdots + \beta_{n-1\,n} - \beta_{1n}. \qquad /7''/$$

Prethodne relacije /7'/ i /7''/ definišu relaciju ekvivalencije u skupu $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Naime, u $\mathbb{R}^n$ je sa

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = y_1 + \cdots + y_{n-1} - y_n, \qquad /8'/$$

zaista, definisana relacija ekvivalencije. Skup količnik je

$$\mathbb{R}^n|_\sim = \{ \ell_a : \ell_a = (x_1, \ldots, x_n), \; x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = a, \; a \in \mathbb{R} \} \qquad /8''/$$

bio kohomološki jednak nuli. Zaista, sistem jednačina

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_2 - \alpha_1 \\ \alpha_{23} &= \alpha_3 - \alpha_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1\,n} &= \alpha_n - \alpha_{n-1} \end{aligned} \qquad /12/$$

ima beskonačno mnogo rešenja i pri tome je

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} = \alpha_n - \alpha_1 \qquad /13/$$

Dalje, prema /11/, /12/ i /13/ određene vrednosti α_n i α_1 su takve, da je $\alpha_{1n} = \alpha_n - \alpha_1$. Znači, svako rešenje sistema /12/ definiše kolanac čija je kogranica jednaka kolancu /4/, koji ima osobinu /11/.

Prema prethodnom, kocikli

$$h_\alpha = \begin{cases} (z, \alpha_{12}), z \in U_{12} \\ (z, \alpha_{23}), z \in U_{23} \\ --------- \\ (z, \alpha_{1n}), z \in U_{1n}, \end{cases} \qquad h_\beta = \begin{cases} (z, \beta_{12}), z \in U_{12} \\ (z, \beta_{23}), z \in U_{23} \\ -------- \\ (z, \beta_{1n}), z \in U_{1n} \end{cases} \qquad /14/$$

su kohomološki jednaki, onda i samo onda, ako je

$$\alpha_{12} - \beta_{12} + \alpha_{23} - \beta_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} - \beta_{n-1\,n} = \alpha_{n1} - \beta_{n1}. \qquad /7'/$$

Ili, ako je

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \cdots + \alpha_{n-1\,n} - \alpha_{1n} = \beta_{12} + \beta_{23} + \cdots + \beta_{n-1\,n} - \beta_{1n}. \qquad /7''/$$

Prethodne relacije /7''/ i /7'/ definišu relaciju ekvivalencije u skupu $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Naime, u $\mathbb{R}^n$ je sa

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = y_1 + \cdots + y_{n-1} - y_n, \qquad /8'/$$

zaista, definisana relacija ekvivalencije. Skup količnik je

$$\mathbb{R}^n|_\sim = \{ \ell_a : \ell_a = (x_1, \ldots, x_n), x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = a, a \in \mathbb{R} \} \qquad /8''/$$

Kao što je sa /9/ bio definisan zbir u $\mathbb{R}\times\mathbb{R}|_{\sim}$, to se na isti način i u $\mathbb{R}^n|_{\sim}$ definiše zbir: $\ell_a+\ell_b=\{(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\,|\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\ell_a,\ (y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\ell_b$. Ako je $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\ell_a$ i $(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\ell_b$, tada $x_1+y_1+x_2+y_2+\cdots+x_{n-1}+y_{n-1}-(x_n+y_n)=a+b$. Znači, $\ell_a+\ell_b\subset\ell_{a+b}$. Ako je, dalje, $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\ell_{a+b}$ tada je $z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}-z_n=a+b$.

Dalje, sistem jednačina

$$\begin{aligned} z_1&=x_1+y_1\\ z_2&=x_2+y_2\\ &\cdots\\ z_{n-1}&=x_{n-1}+y_{n-1}\end{aligned}\qquad /10'/$$

ima rešenje. Pomoću jednog rešenja sistema /10'/ moguće je formirati $x_n=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-a$ i $y_n=y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}-b$, pri čemu je $z_n=x_n+y_n=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_{n-1}+y_{n-1})-(a+b)=$ $=z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}-(a+b)$. Dakle je $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\ell_a$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\ell_b$ i $z=x+y$.

Iz /2'/, /11/, /4'/, /13/ i /8'/, za svako $n\in N$, imamo da su grupe $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta},R_{K_0})$ i $\mathbb{R}^n|_{\sim}$ izomorfne, odnosno da su grupe $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta},R_{K_0})$ i $\mathbb{R}$ izomorfne.

Dalje, ako se umesto pramena R_{K_0} posmatraju pramenovi Z_{K_0} i C_{K_0}, tada su grupe $H^1(\mathcal{U},Z_{K_0})$ i $\mathbb{Z}$ izomorfne, to jest grupe $H^1(\mathcal{U},C_{K_0})$ i $\mathbb{C}$ su izomorfne. Odnosno, grupe $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta},Z_{K_0})$ i $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta},C_{K_0})$ su, respektivno, izomorfne grupama $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{C}$. Navedeno tvrđenje je korektno jer se u relacijama /4/, /5/, /8/, /11/, /12/ i /13/ mogu uzeti celi brojevi, ili kompleksni brojevi. Pri tome, sistem jednačina /10/, /12/ i /10'/ imaju rešenja u skupu celih, odnosno, kompleksnih, brojeva.

Sa druge strane, grupe $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta}, R_{K_0})$ su izomorfne, za svako $(n,\theta)\in N\times(0,2\pi)$. Zato se u

$$G=\bigcup_{(n,\theta)} H^1(\mathcal{U}_{n,\theta}, R_{K_0}) \qquad /15/$$

može uvesti relaciju ekvivalencije

$$g_{(n_1,\theta_1)}\sim g_{(n_2,\theta_2)} \Longleftrightarrow g_{(n_1,\theta_1)}=\Psi_{12}(g_{(n_2,\theta_2)}), \qquad /16/$$

gde je Ψ_{12} izomorfizam $\Psi_{12}: H^1(\mathcal{U}_{(n_2,\theta_2)}, R_{K_0})\to H^1(\mathcal{U}_{(n_1,\theta_1)}, R_{K_0})$. Zatim, u količniku $G|_\Psi$ se može uvesti struktura grupe

$$C_\Psi^{(1)}+C_\Psi^{(2)}=\{x+y: x\in C_\Psi^{(1)}\cap H^1(\mathcal{U}_{(n,\theta)}, R_{K_0}), y\in C_\Psi^{(2)}\cap H^1(\mathcal{U}_{(n,\theta)}, R_{K_0})\}. \qquad /17/$$

Prema /15/, /16/, /17/ i prethodnom, grupa $G|_\Psi$ je izomofrna $\mathbb{R}$.

D e f i n i c i j a 2.1.2. Pokrivač $\mathcal{U}'=\{U'_\alpha\}_{\alpha\in A}$, kompaktnog skupa K iz $\mathbb{C}^n$, ili oblasti D iz $\mathbb{C}^n$, je finiji od pokrivača $\mathcal{U}''=\{U''_\beta\}_{\beta\in B}$, ako je svaki element pokrivača $\mathcal{U}'$ sadržan u nekom elementu pokrivača $\mathcal{U}''$. Familija pokrivača $\{\mathcal{U}_\sigma\}_{\sigma\in S}$ kompakta K, odnosno oblasti D, je dovoljno fina, ako za ma koji pokrivač $\mathcal{U}$, K odnosno D, postoji finiji pokrivač iz $\{\mathcal{U}_\sigma\}_{\sigma\in S}$.

Da bih, konačno, dokazao tvrđenje teoreme, mogu poći od ma kojeg otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$ skupa K_0. Budući da je K_0 kompaktan skup, to iz $\mathcal{U}$ mogu izdvojiti konačan pokrivač $\tilde{\mathcal{U}}$. Dalje, po definiciji pokrivača $\mathcal{U}_{n,\theta}$, familija $\{\mathcal{U}_{(n,\theta)}\}$ je dovoljno fina, te se može odrediti n i θ

takvo da je $\mathcal{U}_{(n,\theta)}$ finiji pokrivač od $\tilde{\mathcal{U}}$, dakle finiji i od $\mathcal{U}$. Zato postoji homomorfizam, bolje reći izomorfizam [21], [22],

$$\varphi^{\mathcal{U}_{n,\theta}}_{\mathcal{U}} : H^1(\mathcal{U}, R_{K_0}) \to H^1(\mathcal{U}_{n,\theta}, R_{K_0}). \qquad /18/$$

Uzimajući topološki limes [22] dobijamo da je isti jednak grupi $H^1(K_0, R_{K_0})$. Pošto su sve grupe $H^1(\mathcal{U}_{(n,\theta)}, R_{K_0})$ izomorfne grupi $\mathbb{R}$, i prema /15/ i /18/, imamo da su i grupe $H^1(K_0, R_{K_0})$ i $\mathbb{R}$ izomorfne.

Slično relaciji /15/ može se formirati $G_{\mathbb{Z}}$ i $G_{\mathbb{C}}$, dakle i relacije ekvivalencije u ovim skupovima, pri čemu su količnici $G_{\mathbb{Z}}|_{\psi}$ i $G_{\mathbb{C}}|_{\psi}$ sa strukturom /17/, grupe izomorfne $\mathbb{Z}$, odnosno $\mathbb{C}$. Obzirom da je familija $\{\mathcal{U}(n,\theta)\}_{(n,\theta)\in N\times(0,2\pi)}$ dovoljno fina, u odnosu na ma koji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$, dobijaju se odgovarajući topološki limesi $H^1(K_0, Z_{K_0})$ i $H^1(K_0, C_K)$ - izomorfni $\mathbb{Z}$, odnosno $\mathbb{C}$.

P o s l e d i c a 2.1.1. Ako je K zatvorena Žordanova kriva iz $\mathbb{C}^n$, tada je $H^1(K, R_K) \cong \mathbb{R}$, $H^1(K, Z_K) \cong$, $H^1(K, C_K) \cong \mathbb{C}$.

Zaista, K je homeomorfno K_0. Znači, svaki otvoren pokrivač K se homeomorfno preslikava na otvoren pokrivač K_0, i obrnuto. Homeomorfne slike familije $\{\mathcal{U}_{(n,\theta)}\}$ su takve, preko kojih su odgovarajuće grupe izomorfne $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{C}$. Dalje, ova familija je dovoljno fina u odnosu na ma koji otvoren pokrivač K i odgovarajući topološki limesi se svode na grupe koje su izomorfne $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{C}$.

P o s l e d i c a 2.1.2. Neka je K zatvorena Žordanova kriva iz $\mathbb{C}^n$, $C^*(K)$ multiplikativna grupa onih kompleksnih neprekidnih funkcija na K koje nemaju nula u K, i neka je $e^{2\pi i C^*(K)} = \{ e^{2\pi i f} : f \in C^*(K) \}$, tada je $C^*(K) | e^{2\pi i C^*(K)} \cong \mathbb{Z}$.

Ako je K kompaktan skup tada je, prema teoremi Brušlinskog [16], $C^*(K) | e^{2\pi i C^*(K)} \cong H^1(K, Z_K)$.

Iz Posledice 2.1.1. i pomenute teoreme sledi Posledica 2.1.2.

Kao što je u odeljku 1.3. definisan pramen $\mathcal{H}(D)$ (pramen klica lokalno homeomorfnih funkcija u nekoj oblasti D), slično se definiše i pramen klica nad kompaktnim skupom K /ili oblasti D/ iz $\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{G}_K$ /ili $\mathfrak{G}_D$/ lokalno neprekidnih funkcija na K /ili D/. Pri tome je $H^p(K, \mathfrak{G}_K) = H^p(D, \mathfrak{G}_D) = 0$ [3].

Svaka od grupa $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{C}$ se može smatrati podgrupom grupe neprekidnih funkcija na K, odnosno D, čije su vrednosti u $\mathbb{C}$. Dakle i pramenovi $R_K(R_D)$, $Z_K(Z_D)$ i $C_K(C_D)$ su podpramenovi pramena $\tilde{C}_K = K \times C(K)$ ($\tilde{C}_D = D \times C(D)$). Sa druge strane, pramen $\tilde{C}_K$ ($\tilde{C}_D$) je podpramen pramena $\mathfrak{G}_K(\mathfrak{G}_D)$, znači da su pramenovi $R_K(R_D)$, $Z_K(Z_D)$ i $C_K(C_D)$ podpramenovi pramena $\mathfrak{G}_K(\mathfrak{G}_D)$.

Nije teško pokazati da je $H^1(K_0, \tilde{C}_{K_0}) = 0$. Zaista, neka je $\mathcal{U}$ definisani pokrivač K_0 u teoremi 2.1.1. i kocikl

$$h_{12}(z) = \begin{cases} (z, f'), & z \in \mathcal{U}'_{12} \\ (z, f''), & z \in \mathcal{U}''_{12} \end{cases} \qquad /19/$$

Po definiciji pramena $\tilde{C}_{K_0}$, f' i f' su neprekidne funkcije, respektivno, u U'_{12} i U''_{12}. Funkcija f' se može produžiti do neprekidne funkcije $\tilde{f}'$ u K_0, tako da je jednaka nuli u U''_{12}. Takođe, funkciju f'' produžićemo do neprekidne funkcije $\tilde{f}''$, pri čemu je $\tilde{f}''$ jednaka nuli u U'_{12}. Ukoliko uzmemo kolanac dimenzije jedan

$$c=\{c_1, c_2\},\ c_1(z)=(z,\tilde{f}'),\ z\in U_1,\ c_2(z)=(z,\tilde{f}''),\ z\in U_2, \qquad /20/$$

dobijamo, prema relacijama /32/ i /33/, $h=\delta c$. Dakle je
$H^1(\mathcal{U},\tilde{C}_{K_0})=0$.

Pokazaćemo da je i $H^1(\mathcal{U}_{n,\theta},\tilde{C}_{K_0})=0$, za svako $(n,\theta)\in N\times(0,2\pi)$. Neka su n i θ proizvoljne fiksirane vrednosti i

$$h=\{h_{12}\ h_{13},\dots,h_{n-1\,n},h_{1n}\} \qquad /21/$$

ma koji kocikl ovog pokrivača. Pri tome je

$$h_{ij}(z)=(z,f_{ij}),\ z\in U_{ij}=U_i\cap U_j,\ f_{ij}\in C(K_0). \qquad /22/$$

Pomoću funkcija f_{ij} može se formirati n neprekidnih funkcija na K_0:

$$f_1=\begin{cases}0, z\in U_{12}\\ 0, z\in U_{12}\end{cases},\ f_2=\begin{cases}f_{12}, z\in U_{12}\\ 0, z\in U_{23}\end{cases},\dots,\ f_n=\begin{cases}f_{n-1n}, z\in U_{n-1n}\\ f_{1n}, z\in U_{1n}\end{cases} \qquad /23/$$

Ovih n funkcija definišu kolanac

$$c=\{c_1,c_2,\dots,c_n\},\ c_i=(z,f_i) \qquad /24/$$

takav da je, prema /21/, /22/, /23/ i /24/, $\delta c=h$.

Kako je $\{\mathcal{U}_{(n,\theta)}\}$ dovoljno fina familija, to je $H^1(K_0,\tilde{C}_{K_0})=0$.

Prema Posledici 2.1.1. imamo da je $H^1(K,\tilde{C}_K)=0$, za svaku zatvorenu Žordanovu krivu K iz $\mathbb{C}^n$. Iz teoreme 2.1.1 i činjenice da je $H^1(K,\tilde{C}_K)=0$, na Žordanovoj zatvorenoj krivoj, dolazimo do sledećeg pitanja: Ako je $G_C(K)$ ma koja podgrupa grupe $C(K)$, kakva je grupa $H^1(K,\tilde{G}_K)$? Bolje reći, koje su to podgrupe grupe $C(K)$ čije su jednodimenzione kohomološke grupe trivijalne nad K ? Ukoliko bismo uzeli grupu racionalnih brojeva Q, kao podgrupu $C(K)$, kao u dokazu prethodne teoreme dobili bismo da je $H^1(K,\tilde{Q}_K) \cong Q$, gde je $\tilde{Q}_K = K \times Q$. Ali, ako bismo, na primer, uzeli kao podgrupu funkcije koje se anuliraju u jednoj tački $z_0 \in K$, tada bi jednodimenziona kohomološka grupa bila trivijalna. Zadnje tvrđenje bi se dokazalo kao što je pokazano $H^1(K,\tilde{C}_K)=0$.

Možda bi od interesa bilo posmatrati podgrupu $P(K)$ grupe $C(K)$, - neprekidne funkcije koje se ravnomerno aproksimiraju polinomima na K - i ispitati grupu $H^1(K,\tilde{P}_K)$, gde je $\tilde{P}_K = K \times P(K)$.

U vezi prethodne primedbe od interesa je uopštenje teoreme Brušlinskog koje su dali Rojden i Arens [16]. U tom radu se, između ostalog, definiše spektar neke algebre A sa jedinicom kompleksnoznačnih funkcija na nekom skupu X, pri čemu elementi iz A razdvajaju tačke iz X:

D e f i n i c i j a 2.1.3. Spektar algebre A je skup svih netrivijalnih homomorfizama algebre A u skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}^1$.

Pomenuto uopštenje se sastoji u sledećem:

Ako je X spektar nekog normiranog prstena A, M multiplokativna grupa algebre A /elementi iz A koji imaju inverzne u odnosu na množenje/ i $E=\{g :$ ako postoji element $f\in A$, takav da je $g=e^{2\pi i f}\}$, tada je $H^1(X,Z_K)\cong M|E$.

Ukoliko je A normiran prsten neprekidnih funkcija na zatvorenoj Žordanovoj krivoj K iz $\mathbb{C}^n$, tada je spektar ove algebre jednak K, M je multiplikativna podgrupa grupe A onih funkcija koje nemaju nula na K i $E= e^{2\pi i M}$. U tom slučaju je, prema posledici 2.1.2. $M|E \cong \mathbb{Z}$.

Međutim, ako je K zatvorena Žordanova kriva u $\mathbb{C}^1$ i A= P(K), tada je spektar ove algebre polinomijalna obvojnica $\hat{K}_{P(K)}$ [4], [21], [16]

$$X = \hat{K}_P = \{\zeta : |p(\zeta)| \leq \max_K |p(z)| \text{, za svaki polinom } p(z)\},$$

to jest

$$X = K \cup (\bigcup_i X_i), \qquad /25/$$

gde su X_i komponente iz $\mathbb{C}^1\setminus K$ koje su relativno kompaktne u $\mathbb{C}^1$ [4].

U vezi prethodnog dokazaću sledeću teoremu:

T e o r e m a 2.1.2. Ako je K zatvorena Žordanova kriva iz $\mathbb{C}^1$ i X spektar normiranog prstena P (K), tada je $H^p(X, Z_X) = 0, p\geq 1$.

Posmatraću slučaj kad je $K = K_o$. Tada je prema /25/ $X = \{ z : |z| \leqslant 1 \}$. Neka je $\mathcal{U} = \{ U_i \}_{1 \leq i \leq 7}$ pokrivač sprektra X, gde je

$$U_{k_1} = \{ z : r < |z \leq 1, -\frac{\pi}{3} - (k_1 - 1)\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2} - (k_1 - 1)\frac{2\pi}{3}, 0 < r < 1 \}_{k_1 = 1,2,3,}$$
$$U_{k_2} = \{ z : r_1 < |z| < r_2, -\frac{2\pi}{3} - (k_2 - 4)\frac{2\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{6} - (k_2 - 4)\frac{2\pi}{3}, 0 < r_1 < r < r_2 < 1 \}, \quad /26/$$
$$k_2 = 4, 5, 6, \quad U_7 = \{ z : |z| < \rho, \ r_1 < \rho < r \}.$$

Tada je $H^1(\mathcal{U}, Z_X) = 0$. Zaista, neka je dat ma koji kocikl ovog pokrivača $h = \{ h_{ij} \}$, gde je

$$h_{ij}(z) = (z, a_{ij}), \ z \in U_{ij} = U_i \cap U_j, \ 1 \leq i, j \leq 7, \ a_{ij} \in \mathbb{Z}. \qquad /27/$$

Kako je h kocikl, znači to je kolanac čija je kogranica jednaka nuli, to prema /27/ dobijamo sistem jednačina koji zadovoljavaju brojevi a_{ij}:

$$\begin{aligned} &a_{24} - a_{14} + a_{12} = 0 \\ &a_{34} - a_{24} + a_{23} = 0 \\ &a_{36} - a_{16} + a_{13} = 0 \\ &a_{57} - a_{47} + a_{45} = 0 \\ &a_{67} - a_{57} + a_{56} = 0 \\ &a_{67} - a_{47} + a_{46} = 0 \end{aligned} \qquad /28/$$

Dakle, sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_3 - a_1 \qquad & a_{75} &= a_5 - a_7 \\ a_{42} &= a_1 - a_4 \qquad & a_{76} &= a_6 - a_7 \\ a_{23} &= a_3 - a_2 \qquad & a_{61} &= a_1 - a_6 \end{aligned} \qquad /29/$$

ima rešenje u skupu $\mathbb{Z}$. Dobijena rešenja, prema /27/, su rešenja i sistema

$$\begin{array}{ll} a_{13} = a_3 - a_1 & a_{75} = a_5 - a_7 \\ a_{42} = a_2 - a_4 & a_{76} = a_6 - a_7 \\ a_{53} = a_3 - a_5 & a_{61} = a_1 - a_6 \end{array} \qquad /30./$$

Znači, prema /29./ i /30/, kogranica kolanca $h = \{h_i\}_{1 \le i \le 7}$, $h_i(z) = (z, a_i)$, $z \in U_i$ je jednaka polaznom kociklu h. Pošto je h bilo koji kocikl, to je $H^1(\mathcal{U}, Z_X) = 0$.

Kao što je formiran otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ spektra X može se formirati familija otvorenih pokrivača $\{\mathcal{U}_{(n)}\}$, čiji bi elementi bili definisani kao što je to u relaciji /26./, tako da je $H^1(\mathcal{U}_{(n)}, Z_X) = 0$. Budući da je X kompaktan prostor, svaki otvoren pokrivač spektra X sadrži konačan pokrivač u koji bi bio upisan jedan element $\{\mathcal{U}_{(n)}\}$. Prema tome, topološki limes, preko svih otvorenih pokrivača X, jednak je trivijalnoj grupi $H^1(X, Z_X)$.

Trivijalnost grupa $H^p(X, Z_X)$, $p \geq 2$, se dokazuje kao u teoremi 2.1.3.

N a p o m e n a. Ukoliko se u relaciji /27/ uzme da je $a_{ij} \in \mathbb{R}$, ili $a_{ij} \in \mathbb{C}$, tako da je ispunjeno /28/, dobili bismo rešenja sistema /29/ iz $\mathbb{R}$, odnosno iz $\mathbb{C}$. Ista rešenja bi, zbog /28/, bila i rešenja sistema /30/. Znači, $H^1(\mathcal{U}, R_X) = H^1(\mathcal{U}, C_X) = 0$, odnosno $H^p(X, R_X) = H^p(X, C_X) = 0$.

Ako je K zatvorena Žordanova kriva iz $\mathbb{C}$, kao što je pretpostavljeno u teoremi, tada je spektar algebre P(K) homeomorfan spektru algebre $P(K_0)$ te je $H^p(X,\mathbb{Z}_X)=0$.

U teoremi se pretpostavlja da je K iz $\mathbb{C}^1$, a u dokazu se koristi /25/. Ustvari, spektar ma kojeg normiranog prstena A je homeomorfan kompaktnom prostoru maksimalnih ideala prstena A [4], [16]. Dalje, prostor maksimalnih ideala prstena P(K), odnosno spektar istog prstena, je homeomorfan polinomijalnoj obvojnici $\hat{K}_p$ kompaktnog skupa K [4]. U specijalnim slučajevima je $\hat{K}_p = K$ /identifikacija je u smislu homeomorfizma/. Naprimer, ako je P(K) = C(K). Znači, da bi bilo $\hat{K}_p = K$, dovoljno je da se svaka neprekidna funkcija na K može ravnomerno aproksimirati polinomima na K.

Kod kompaktnih skupova u $\mathbb{C}^1$ uvek je moguće odrediti, preko /25/, polinomijalnu obvojnicu, dakle i spektar P(K). Međutim, kod istih skupova u $\mathbb{C}^n (n\geq 2)$, $\hat{K}_p$ je još uvek interesantan slučaj, u tom smislu, što nije dobijena neka relacija slična /25/. Dakle, i za zatvorenu Žordanovu krivu u $\mathbb{C}^n (n\geq 2)$ samo znamo da je $\hat{K}_p$ spektar algebre P(K), ali ne znamo kakav taj spektar ima "geometrijski" izgled. Iz ovog razloga mogu biti interesantne kohomološke grupe $H^p(X,\mathbb{Z}_X)$. Može se desiti da iz trivijalnosti ovih grupa sleduje neka "geometrijska" osobina spektra X, ili da trivijalnost bude ekvivalentna "geometriskoj" osobini.

U vezi prethodnog, mogla bi se posmatrati algebra R(K) -neprekidnih funkcija koje se ravnomerno aproksimiraju racionalnim funkcijama na kompaktnom skupu K. Ovo bi bilo od interesa za slučaj $K\subset \mathbb{C}^n (n\geq 2)$. Jer, za $K\subset \mathbb{C}^1$, spektar algebre R(K) se svodi na prostor maksimalnih ideala iz R(K) , odnosno na K .

U navedenoj teoremi Brušlinski-Rojden-Arensa imamo izomorfizam jednodimenzione kohomološke grupe celih brojeva nad proizvoljnim kompaktnim skupom i grupe M|E, odnosno $C^*|e^{2\pi i C^*}$. Verovatno bi bio interesantan izomorfizam grupe čija je dimenzija veća 1, sa nekom grupom. Ili, izomorfizam jedne od grupa $H^p(K,R_K)$, $H^p(K,C_K)$, sa nekom datom grupom. Tu bi se moglo postaviti, takođe, pitanje grupa $H^p(K,\tilde{C}_K)$, $H^p(K,\tilde{P}_K)$, u opštem slučaju $H^p(K,\tilde{G}_c)$ gde je $\tilde{G}_c$ pramen neke date podgrupe $G_c(K)$ grupe $C(K)$.

Što se tiče grupa: $H^p(K,Z_K)$, $H^p(K,R_K)$, $H^p(K,C_K)$, $H^p(K,\tilde{C}_K)$, gde je K zatvorena Žordanova kriva u $\mathbb{C}^n$, $p\geqslant 2$ imamo sledeće tvrđenje:

T e o r e m a 2.1.3. Ako je K zatvorena Žordanova kriva u $\mathbb{C}^n$ i $\mathcal{F}$ ma koji pramen nad K, tada je $H^p(K,\mathcal{F})=0$, za $p\geqslant 2$.

D o k a z. Neka je $K=K_0$ i $\{\mathcal{U}_{(n,\theta)}\}$ definisana familija pokrivača kompakta K_0, dokazaću da je $H^p(\mathcal{U}_{(n,\theta)},\mathcal{F})=0$, za svako $(n,\theta)\in N\times(0,2\pi)$ i svako $p\geqslant 2$. Zaista, pretpostaviću da je p bilo koji fiksiran prirodan broj, pri čemu je $p\geqslant 2$, i (n,θ) ma koje fiksirane vrednosti iz $N\times(0,2\pi)$. Neka je, dalje, multiindeks $i=(i_0,i_1,\dots,i_p)$, gde je $1\leq i_k\leq n$, $k=0,1,\dots,p$, $U_i=U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap\dots\cap U_{i_p}$ i $h: i\to h_i$ proizvoljan kocikl dimenzije p pokrivača $\mathcal{U}_{(n,\theta)}$. Po definiciji pokrivača $\mathcal{U}_{(n,\theta)}$ imamo da je

$$U_i = \begin{cases} \emptyset, & i_k \neq i_\ell, k \neq \ell \\ U_{i_k}, & i_0 = i_1 = \cdots = i_p \\ U_{i_k} \cap U_{i_\ell}, & i_0 = i_1 = \cdots = i_k, i_{k+1} = \cdots = i_p. \end{cases} \qquad /31/$$

Kako je h_i kososimetrična funkcija, to jest $h_{i_0 i_1 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_p} = -h_{i_0 i_1 \cdots i_{k+1} i_k \cdots i_p}$, prema /31/ h_i je identički jednaka nuli na U_i. Dakle, dati kocikl $h: i \to h_i$ je kohomološki jednak nuli.

Kako je pokazano da je familija otvorenih pokrivača $\{\mathcal{U}_{(n,\theta)}\}$ dovoljno fina, u odnosu na bilo koji otvoren pokrivač kompakta K_0, sledi tvrđenje teoreme za $K = K_0$.

Ako je K zatvorena Žordanova kriva, tada se preko homeomorfnih slika $U_{i_0}, U_{i_1}, \ldots, U_{i_p}$, dobija i homeomorfna slika U_i. Znači, svaki kocikl h, prema /31/, na kojeg fiksiranog pokrivača je komološki jednak nuli.

U dosadašnjim razmatranjima posmatrani su određeni podpramenovi pramena $\tilde{C}_K$ na zatvorenim Žordanovim krivim iz $\mathbb{C}^n$. Nije bez interesa ako iste pramenove uzmemo na Žordanovim krivim /neprekidnim, prostim krivim/ u $\mathbb{C}^n$. Naime, može se dokazati:

T e o r e m a 2.1.4. Ako je K Žordanova kriva iz $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ tada su grupe $H^p(K, C_K)$, $H^p(K, R_K)$, $H^p(K, Q_K)$, $H^p(K, Z_K)$, $H^p(K, \tilde{C}_K)$, za svako $p \geq 1$, trivijalne. Ako je $n = 1$, tada je $H^p(K, \hat{P}_K) = 0$, $p \geq 1$.

D o k a z. Neka je $K = K_0 = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 0,$ $\operatorname{Im} z = 0\}$ i neka je $\{\mathcal{U}_n\}$ familija otvorenih pokrivača, gde je

$$U_1 = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z < \tfrac{1}{n}, \operatorname{Im} z = 0\},\ U_K = \{z : \tfrac{K-1}{n} - \tfrac{1}{2n} < \operatorname{Re} z < \tfrac{K}{n}, \operatorname{Im} z = 0\}_{2 \leq K < n},\ U_n = \{z : \tfrac{n-1}{n} - \tfrac{1}{2n} < \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\}. \qquad /32/$$

Najpre, može se dokazati da je $H^1(\mathcal{U}_n, C_K) = 0$, za svako $n \geq 2$. Zaista, neka je

$$h = \{h_{ij}\},\ h_{ij} = (z, a_{ij}),\ z \in U_{ij} = U_i \cap U_j,\ a_{ij} \in \mathbb{C} \qquad /33/$$

kocikl pokrivača $\mathcal{U}$ za jedno fiksirano n. Zatim, primetimo da sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_2 - a_1 \\ a_{23} &= a_3 - a_2 \\ &\text{-- -- -- --} \\ a_{n-1\,n} &= a_n - a_{n-1} \end{aligned} \qquad /34/$$

ima rešenja a_i, $1 \leq i \leq n$, u skupu $\mathbb{C}$. Prema /32/, kogranica kolanca $c = \{c_i\}$, $c_i = (z, a_i)$, $z \in U_i$, $1 \leq i \leq n$, jednaka je kociklu /33/.

Trivijalnost grupa $H^1(\mathcal{U}_n, R_K)$, $H^1(\mathcal{U}_n, Q_K)$, $H^1(\mathcal{U}_n, Z_K)$ sleduje iz činjenice, što za polazne vrednosti a_{ij}, iz jednog od skupova $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, sistem /34/ ima rešenja u istom skupu.

Ako je $h = \{h_{ij}\}$ kocikl istog pokrivača sa vrednostima u pramenu $\tilde{C}_K$, tada je

$$h_{ij}(z) = (z, a_{ij}),\ z \in U_{ij},\ a_{ij} \in C(K). \qquad /35/$$

Preko neprekidnih funkcija a_{ij} mogu se formirati novih n neprekidnih funkcija: Neka je $a_1 \in C(K)$, pri čemu je $a_1 \equiv 0$

na K, $a_2 \in C(K)$ takva da je $a_2 = a_{12}, z \in \mathcal{U}_{12}, a_3 = a_{23} + a_2, z \in \mathcal{U}_{23}, \ldots, a_n = a_{n-1\,n} + a_{n-1}, z \in \mathcal{U}_{n-1\,n}$. Određene funkcije $a_i(z) \in C(K)$, $1 \leq i \leq n$, definišu kolanac

$$c = (z, a_i), z \in \mathcal{U}_i \qquad /36/$$

takav da je $\delta c = h$. Dakle je i $H^1(\mathcal{U}_n, \tilde{C}_K) = 0$.

Iz teoreme Vajerštrasa-Lavrentieva [11] sledi da je $C(K) = P(K)$, dakle i $H^1(\mathcal{U}_n, \tilde{P}_K) = 0$.

Ovde se može primetiti da je familija $\{\mathcal{U}_n\}$ dovoljno fina u odnosu na svaki drugi otvoren pokrivač, iz čega sledi tvrđenje teoreme za $p = 1$ i $K = K_0$. Trivijalnost grupa, za $p \geq 2$ i $K = K_0$, dobija se kao u prethodnoj teoremi. Dalje, svaka Žordanova kriva K je homeomorfna K_0 te prethodno važi i ako umesto K_0 uzmemo K.

Najzad, trivijalnost grupa $H^p(K, \tilde{P}_K)$, $p \geq 1$, $n = 1$, dobija se iz teoreme Uolš-Lavrentieva [11], [18].

2.2. Pramenovi celih, realnih i kompleksnih brojeva nad oblastima iz $\mathbb{C}^n$.

U ovom odeljku posmatraću pramenove Z_D, R_D i C_D koji su bili definisani u odeljku 2.1., u slučaju da je oblast D višestruko-povezana. Kao što će se videti, iz daljeg izlaganja, rešenje jednog određenog sistema parcijalnih jednačina u nekoj oblasti $D \subset \mathbb{C}^n$ zavisi od trivijalnosti grupe $H^p(D, C_D)$.

Preko svih funkcija

$$\mathcal{U}(z_1,z_2,\dots,z_n)=\mathcal{U}^{(1)}(x_1,x_2,\dots,x_n;y_1,y_2,\dots,y_n)+i\,\mathcal{U}^{(2)}(x_1,x_2,\dots,x_n;y_1,y_2,\dots,y_n),\ z_k=x_k+iy_k,\ 1\leq k\leq n$$

klase $\mathcal{F}_0^\infty(D)$ koje su beskonačno diferencijabilne u oblasti $D\subset \mathbb{C}^n$ ($\mathcal{U}^{(1)}$ i $\mathcal{U}^{(2)}$ su beskonačno diferencijabilne u D) možemo formirati konačno generisane $\mathcal{F}_0^\infty(D)$ -module [21], [22]

$$\mathcal{F}_1^\infty(D)=\Big\{\sum_{k=1}^{n}\mathcal{U}_k^{(1)}dx_k+\mathcal{U}_k^{(2)}dy_k+i\sum_{k=1}^{n}\mathcal{U}_k^{(2)}dx_k-\mathcal{U}_k^{(1)}dy_k,\ \mathcal{U}_k^{(\nu)}\in \mathcal{F}_0^\infty(D),\ \nu=1,2\Big\}=\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_k^{(1)}+i\,\mathcal{U}_k^{(2)})\,d\bar z_k,\ d\bar z_k=dx_k-idy_k\Big\},\quad /1/$$

$$\Phi_1^\infty(D)=\Big\{\sum_{k=1}^{2n}\mathcal{U}_k\,dx_k,\ x_{n+p}=y_p,\ \mathcal{U}_k\in\mathcal{F}_0^\infty(D)\Big\}.$$

Slično, imamo module

$$\mathcal{F}_q^\infty(D)=\Big\{\sum_{1\leq k_1\leq\dots\leq n}\mathcal{U}_{k_1\dots k_q}(d\bar z_{k_1},\dots,d\bar z_{k_q}),\ \mathcal{U}_{k_1k_2\dots k_q}\in\mathcal{F}_0^\infty(D)\Big\},$$

$$\Phi_q^\infty(D)=\Big\{\sum_{1\leq k_1\leq\dots\leq k_q\leq 2n}(dx_{k_1},\dots,dx_{k_q}),\ x_{n+p}=y_p,\ \mathcal{U}_{k_1\dots k_q}\in\mathcal{F}_0^\infty(D)\Big\}$$

čiji se elementi zovu, respektivno, beskonačno diferencijabilne $(0,q)$-forme, odnosno q -forme. Zbir u modulima je definisan

$$f_{\mathcal{F}}+\varphi_{\mathcal{F}}=\sum(\mathcal{U}_k+V_k)(d\bar z_{k_1},\dots,d\bar z_{k_q}),$$

$$f_\Phi+\varphi_\Phi=\sum(\mathcal{U}_k+V_k)(dx_{k_1},\dots,dx_{k_q}).$$

Dalje, za module $\mathcal{F}_p^\infty(D)$ i $\mathcal{F}_q^\infty(D)$, odnosno $\Phi_p^\infty(D)$ i $\Phi_q^\infty(D)$, imamo bilinearne transformacije $B_{\mathcal{F}}:\mathcal{F}_p^\infty\times\mathcal{F}_q^\infty\to\mathcal{F}_{p+q}^\infty$, $B_\Phi:\Phi_p^\infty\times\Phi_q^\infty\to\Phi_{p+q}^\infty$, definisane preko zakona distribucije

$$B_{\mathcal{F}}(f,\varphi)=\sum_k\sum_\ell \mathcal{U}_kV_\ell(dz_{s_1},\dots,d_{s_{p+q}}),\ B_\Phi(f,\varphi)=\sum_k\sum_\ell \mathcal{U}_kV_k(d_{s_1},\dots,d_{s_{p+q}}),$$

tako da je

$(d\bar{z}_{k_1}, d\bar{z}_{k_2}, \dots, d\bar{z}_{k_p})(d\bar{z}_{\ell_1}, d\bar{z}_{\ell_2}, \dots, d\bar{z}_{\ell_q}) = (d\bar{z}_{s_1}, d\bar{z}_{s_2}, \dots, d\bar{z}_{s_{p+q}})$, $(dx_{k_1}, \dots, dx_{k_p})(dx_{\ell_1}, dx_{\ell_2}, \dots, dx_{\ell_q}) = (dx_{s_1}, \dots, dx_{s_{p+q}})$, $d(\bar{z}_\mu, d\bar{z}_\nu) = -(d\bar{z}_\nu, d\bar{z}_\mu)$, $(dx_\mu, dx_\nu) = -(dx_\nu, dx_\mu.)$. Element $B_{\mathcal{F}}(f, \varphi)$, odnosno $B_\phi(f, \varphi)$, se zove spoljnim proizvodom formi f i φ a označava se sa $f \wedge \varphi$. Znači, forme $f_{\mathcal{F}} = (d\bar{z}_{k_1}, d\bar{z}_{k_2}, \dots, d\bar{z}_{k_q})$ i $f_\phi = (dx_{k_1}, dx_{k_2}, \dots, dx_{k_q})$ možemo uzeti kao proizvod formi $f_\phi = dx_{k_1} \wedge dx_{k_2} \wedge \dots \wedge dx_{k_q}$, $f_{\mathcal{F}} = d\bar{z}_{k_1} \wedge d\bar{z}_{k_2} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q}$, budući da je $B[f_1, B(f_2, f_3)] = B[B(f_1, f_2), f_3]$, za $f_i \in \mathcal{F}^\infty_{q_i}$ ili $f_i \in \phi^\infty_{q_i}$.

Diferencijalnim operatorima

$$\bar{\partial} u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_k} - i\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y_k}\right) dx_k + \left(-\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_k} - \frac{\partial u^{(1)}}{y_k}\right) dy_k\right] +$$

$$\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y_k} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_k}\right) dx_k + \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_k} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y_k}\right) dy_k = \sum \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial y_k}\right) d\bar{z}_k \quad /2/$$

$$u = u^{(1)} + i u^{(2)}; \quad du = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k,$$

definisana su linearna preslikavanja $\bar{\partial} : \mathcal{F}^\infty_0(D) \to \mathcal{F}^\infty_1(D)$, $d : \phi^\infty_0(D) \to \phi^\infty_1(D)$. Prema /1/ i /2/ dobijamo i linearna preslikavanja $\bar{\partial} : \mathcal{F}^\infty_p \to \mathcal{F}^\infty_{p+1}$, $d : \phi^\infty_p \to \phi^\infty_{p+1}$:

$$\bar{\partial}\left(\sum u_{k_1 \dots k_p} d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q}\right) = \sum \bar{\partial} u_{k_1 \dots k_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_p},$$

$$d\left(\sum u_{k_1 \dots k_p} dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p}\right) = \sum du_{k_1 \dots k_p} \wedge dk_1 \wedge \dots \wedge dx_{k_p}.$$

Iz /2/ i /3/ sledi

$$\begin{aligned} \bar\partial(f\,g) &= f\,\bar\partial g + g\,\bar\partial f, \\ \bar\partial(f\wedge g) &= \bar\partial f\wedge g + (-1)^p f\wedge\bar\partial g, \\ d(f\cdot g) &= f\,dg + g\,df, \\ d(f\wedge g) &= df\wedge g + (-1)^p f\wedge dg. \end{aligned} \qquad /4/$$

Ako je $p(z) = \sum a_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}$ polinom, tada je prema /2/, /3/ i /4/

$$\bar\partial p(z) = 0. \qquad /5/$$

U opštem slučaju, prema /2/, jezgro operatora $\bar\partial : \mathcal{F}_0^\infty(D) \to \mathcal{F}_1^\infty(D)$ je prsten holomorfnih funkcija u oblasti D. Isto tako, jezgro preslikavanja $d : \Phi_0^\infty(D) \to \Phi_1^\infty(D)$ je skup kompleksnih brojeva. Dalje, neka je $p(z,\bar z) = \sum_{l} \sum_{k} a_{l_1\ldots l_n k_1\ldots k_n} z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n} \bar z_1^{k_1} \ldots \bar z_n^{k_n}$ polinom po z i $\bar z$, tada iz $\bar\partial(\bar z_\nu^{\mu}) = \mu \bar z_\nu^{\mu-1}$, /4/ i /5/ dobijamo

$$\begin{aligned} \bar\partial p(z,\bar z) = &\Big(\sum_{l}\sum_{k} a_{l_1\ldots k_n} k_1 z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n} \bar z_1^{k_1-1}\ldots \bar z_n^{k_n}\Big) d\bar z_1 + \\ &- - - - - - - - - - - - - - - \\ &+ \Big(\sum_{l}\sum_{k} a_{l_1\ldots k_n} k_n z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n} \bar z_1^{k_1}\ldots \bar z_n^{k_n-1}\Big) d\bar z_n, \end{aligned} \qquad /6/$$

gde je $a_{l_1\ldots k_n} k_\nu z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n} \bar z_\nu^{k_\nu-1} \bar z_1^{k_1}\ldots \bar z_n^{k_n} = 0$ za $k_\nu = 0$.

Prema /2/ i /3/ imamo nizove

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0^\infty(D) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{F}_1^\infty(D) \to \ldots \to \mathcal{F}_p^\infty(D) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{F}_{p+1}^\infty \xrightarrow{\bar\partial} \ldots \\ &\Phi_0^\infty(D) \xrightarrow{d} \Phi_1^\infty(D) \to \ldots \to \Phi_p^\infty(D) \xrightarrow{d} \Phi_{p+1}^\infty(D) \to \ldots \end{aligned} \qquad /7/$$

pri čemu je $\bar\partial\bar\partial=0$ i $dd=0$. Dakle, iz /7/ dobijamo grupe

$$Z^p_{\mathcal{F}}=\{f:\bar\partial f=0,\, f\in\mathcal{F}^\infty_p\},\ B^p_{\mathcal{F}}=\{\bar\partial\varphi:\varphi\in\mathcal{F}^\infty_{p-1}\},\ H^p_{\mathcal{F}}=Z^p_{\mathcal{F}}|B^p_{\mathcal{F}},$$
$$Z^p_{\Phi}=\{f:df=0,\, f\in\Phi^\infty_p\},\ B^p_{\Phi}=\{d\varphi:\varphi\in\Phi^\infty_{p-1}\},\ H^p_{\Phi}=Z^p_{\Phi}|B^p_{\Phi}. \qquad /8/$$

Iz /7/ i /8/ trivijalnost grupa $H^p_{\mathcal{F}}$ i H^p_{Φ}, što je isto $Z^p_{\mathcal{F}}=B^p_{\mathcal{F}}$, $Z^p_{\Phi}=B^p_{\Phi}$, je ekvivalentno činjenici da sistemi parcijalnih jednačina u D

$$\bar\partial\varphi=f,\ \text{za dato f, takvo da je } \bar\partial f=0, \qquad /9/$$
$$d\varphi=f,\ \text{za dato f, takvo da je } df=0, \qquad /10/$$

imaju rešenja. Prema lemi Poenkarea [21] sistem /10/ ima rešenje ako je $D=\{x\in R^{2n}: a_k<|x_k-x_k^{(0)}|<b_k,\ k=1,2,\dots,2n\}$. Takođe, prema lemi Dolbo-Grotendika [21] sistem /9/ ima rešenje ako je $D=\{z\in\mathbb{C}^n:\ r_k<|z_k-z_k^{(0)}|<R_k,\ k=1,2,\dots,n\}$. Iz ovoga sledi da trivijalnost grupa $H^p_{\mathcal{F}}$ i H^p_{Φ}, odnosno tačnost nizova /7/, u opštem slučaju su osobine lokalnog karaktera - ukoliko isto posmatramo ne u D, već u pogodnim otvorenim skupovima u D. Otuda je razumljivo što se umesto abelovih grupa $\mathcal{F}^\infty_p(D)$, $\Phi^\infty_p(D)$ mogu uzeti odgovarajući pramenovi $\mathcal{E}_p$ i $\mathcal{G}_p$ nad D. Naime, neka su $\omega^{(1)}_z, \omega^{(2)}_z$ i $\omega^{(3)}_z$ okoline tačke z $\in$ D, koje pripadaju D. Dalje, neka je $f\in\mathcal{F}^\infty_p(\omega^{(1)}_z)$, $f^z_p=\{g:g\in\mathcal{F}^\infty_p(\omega^{(2)}_z),\ f=g,\ z\in\omega^{(3)}_z\}$ i $\mathcal{E}_p=\bigcup_{z\in D}\{f^z_p: f\in\mathcal{F}^\infty_p(\omega_z)\}$. Slično se dobija pramen $\mathcal{G}_p$ preko lokalnih formi $\Phi^\infty_p(\omega)$, $\omega\subset D$. Po teoremi de Rama [15] iz niza /7/ dobija se tačan niz

$$\mathcal{G}_0\xrightarrow{d}\mathcal{G}_1\xrightarrow{d}\dots\to\mathcal{G}_p\xrightarrow{d}\mathcal{G}_{p+1}\to\dots, \qquad /11/$$

odnosno tačan niz

$$0 \to Z^p(D,\mathcal{E}) \xrightarrow{i} \mathcal{E}_p \xrightarrow{d} Z^{p+1}(D,\mathcal{E}) \to 0, \qquad /12/$$

a takođe i trivijalnost grupe $H^p(D,\mathcal{E}) = Z^p(D,\mathcal{E})|B^p$, gde je $Z^p(D,\mathcal{E}) = \{f_p^z : df_p^z = 0\}$, $B^p(D,\mathcal{E}) = \{dg : g_p^z \in \mathcal{E}_{p-1}^z\}$.
Primećujemo da su nizovi /7/ kao i grupe /8/ lokalnog, dok su nizovi /11/ i /12/ globalnog karaktera. Međutim, budući da je $Z^0(D,\mathcal{E}) \cong \mathbb{C}$ /skup kompleksnih brojeva/, to prema pomenutoj teoremi sledi da je i

$$H^p(D,C_D) \cong Z^p(D,\mathcal{E}) \,|\, B^p(D,\mathcal{E}). \qquad /13/$$

Dakle, da sistem parcijalnih jednačina /10/ ima rešenje u D potrebno je i dovoljno da grupa $H^p(D,C_D)$ bude trivijalna. Time je globalni rezultat dobijen, neposredno, preko lokalno beskonačno diferencijabilnih q-formi u oblasti D.

Kao što je navedeno u 1.3. Dolbo [5] je dobio izomorfizam

$$H^p(D,\mathcal{H}(D)) \cong Z^p(D,\mathcal{E}) \,|\, B^p(D,\mathcal{E}), \qquad /14/$$

analogan izomorfizmu /13/. Za razliku od izomorfizma de Rama, izomorfizam Dolboa je između grupa lokalnog i globalnog karaktera. Isto tako, ima i analitičku težinu obzirom na rezultate Oka-Kartana za slučaj $H^p(D,\mathcal{H}(D)) = 0$.

Iz relacija /2/ i /4/ sledi da je $H^p(D,C_D) = 0$, za $p > n$. Kontraprimer, da ista grupa nije trivijalna za $p < n$, konstruisali su Benke i Štejn [1]. Međutim, ako je D oblast Rungea prve vrste tada je $H^p(D,C_D) = 0$ za $p \geqslant n$ [17].

T e o r e m a 2.2.1. Neka je $D_0=\{z: |z|<1, z\in\mathbb{C}^1\}$, $K=\{z: |z|\le\rho<1\}$ i $D=D_0\setminus K$. Dalje, neka je

$$\mathcal{U}=\{U_1,U_2\},\ U_1=\{z:\ \rho<|z|<1,\ -\tfrac{3\pi}{4}<\arg z<\tfrac{3\pi}{4}\}\qquad /15/$$
$$U_2=\{z:\ \rho<|z|<1,\ \tfrac{\pi}{4}<\arg z<\tfrac{7\pi}{4}\}$$

otvoren pokrivač oblasti D. Tada je $H^1(\mathcal{U},Z_D)\cong\mathbb{Z}$, $H^1(\mathcal{U},R_D)\cong\mathbb{R}$, $H^1(\mathcal{U},C_D)\cong\mathbb{C}$, $H^p(\mathcal{U},Z_D)=H^p(\mathcal{U},R_D)=H^p(\mathcal{U},C_D)=0$, $p\geqslant 2$.

D o k a z. Neka je $h=\{h_{12}\}$ bilo koji kolanac, dakle kako je $\mathcal{U}$ definisano, ma koji kocikl datog pokrivača sa vrednostima u pramenu C_D. Znači, h_{12} je neprekidna funkcija na $U_{12}=U_1\cap U_2$. Kako je otvoren skup U_{12} unija dva povezana, otvorena i disjunktna skupa U'_{12} i U''_{12}, to je

$$h_{12}=\begin{cases} s'_{12}, & z\in U'_{12}\\ s''_{12}, & z\in U''_{12},\end{cases}\qquad /16/$$

gde su s'_{12}, s''_{12} elementi, respektivno, iz $\Gamma(U'_{12},C_D)$ i $\Gamma(U''_{12},C_D)$. Ili

$$s'_{12}(z)=(z,a'_{12}),\ z\in U'_{12},\ a'_{12}\in\mathbb{C},\qquad /17/$$
$$s''_{12}(z)=(z,a''_{12}),\ z\in U''_{12},\ a''_{12}\in\mathbb{C}.$$

Prema /16/ i /17/, kao u odeljku 2.1., dati kocikl je kohomološki jednak nuli onda i samo onda ako je $a'_{12}=a''_{12}$. Dalje, ako su data dva kohomološki jednaka kocikla,

$$h_\alpha=\begin{cases}(z,a'_{12})\\ (z,a''_{12})\end{cases},\quad h_\beta=\begin{cases}(z,b'_{12})\\ (z,b''_{12}),\end{cases}\qquad /18/$$

prema prethodnom, ova pretpostavka je ekvivalentna relaciji $a'_{12}-a''_{12}=b'_{12}-b''_{12}$. Tada se dobija skup količnik $\mathbb{C}\times\mathbb{C}/\sim$ sa strukturom grupe, koja je izomorfna grupi $\mathbb{C}$. Dakle, grupa $H^1(\mathcal{U},C_D)$ je izomorfna $\mathbb{C}$. Slično se dokazuje izomorfizam $H^1(\mathcal{U},R_D)\cong\mathbb{R}$ i $H^1(\mathcal{U},Z_D)\cong\mathbb{Z}$. Trivijalnost grupa, dimenzije $p\geqslant 2$, dokazuje se na taj način što se formira relacija slična /31/ iz 2.1.

U pretpostavci ove teoreme, K je kompaktan skup iz D_0 koji je na određen način definisan. Primećujemo, ako za ρ uzmemo da je jednako nuli, tada se K svodi na tačku. Ustvari, tvrđenje teoreme će biti korektno ako za K uzmemo bilo kakav kompaktan skup iz D_0 u odnosu na koji bismo odabrali otvoren pokrivač oblasti D, kao što je to bilo u datom specijalnom slučaju za K.

Kao što je u prethodnom odeljku formiran otvoren pokrivač $\mathcal{U}_{(n,\theta)}$ kompaktnog skupa K, može se formirati pokrivač

$$\mathcal{U}_{(n,\theta)}=\{U_k^{(n,\theta)}\},\ k=1,\dots,n,\ (n,\theta)\in(0,2\pi)\times N,\ U_k^{(n,\theta)}=\{z:\rho<|z|<1,\ \theta+(k-1)\frac{2\pi}{n}-\delta<\arg z<\theta+k\frac{2\pi}{n}+\delta,\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\delta<\frac{\pi}{n}\},\ n\geqslant 2 \qquad /19/$$

oblasti D.

T e o r e m a 2.2.2. Ako je oblast D definisana u prethodnoj teoremi, $\mathcal{U}_{n\theta}$ pokrivač definisan relacijom 19, tada su grupe $H^p(\mathcal{U},Z_D)$, $H^p(\mathcal{U},R_D)$ i $H^p(\mathcal{U},C_D)$, respektivno, izomorfne $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ za $p=1$, a trivijalne za $p\geqslant 2$.

D o k a z. Dokazaću tvrđenje za grupu $H^p(\mathcal{U},C_D)$, najpre za $p=1$. Zaista, kocikl

$$h=\{h_{12},h_{23},\dots,h_{n-1n}h_{1n}\},\ h_{ij}(z)=(z,a_{ij}) \qquad /20/$$

je kohomološki jednak nuli onda i samo onda ako je $a_{12}+a_{23}+\dots+a_{1n}=0$. Ovo sledi iz 2.1. što sistem /12/ i /13/ ima rešenje u skupu $\mathbb{C}$. Znači, ako pretpostavimo da su kocikli

$$h_a=\{h_{12}^{(a)},\dots,h_{n-1n}^{(a)},h_{1n}^{(a)}\},\ h_b=\{h_{12}^{(b)},\dots,h_{n-1n}^{(b)},h_{1n}^{(b)}\},$$

$h_{ij}^{(a)}=(z,a_{ij}),\ h_{ij}^{(b)}=(z,b_{ij})$, kohomološki jednaki, dobija se relacija /7.''/ iz 2.1. Ov relacij definišu grupu $\mathbb{C}^n|_{\sim}$ izomorfnu $\mathbb{C}$, dakle izomorfnu $H^1(\mathcal{U},C_D)$.

Trivijalnost grupa $H^p(\mathcal{U},C_D), p\geq 2$, dokazuje se na osnovu relacije /31/ iz 2.1. Ako za a_{ij}, odnosno b_{ij}, uzmemo samo realne, ili samo cele brojeve - dobijamo kompletan dokaz.

Kao što smo primetili u prethodnoj teoremi, i u ovom slučaju, za K možemo uzeti ma koji kompaktan skup iz D_0. Zatim, formirati pokrivač $\mathcal{U}_{(n,\theta)}$ oblasti D u odnosu na taj skup, i dobiti tvrđenje kao u prethodnoj teoremi.

Definisana oblast D je dvostruko-povezana. Zato je, možda, od interesa formirati neki pokrivač višestruko povezane oblasti pri čemu je ta "višestrukost" veća od dva.

T e o r e m a 2.2.3. Neka je $D=\{z:|z|<1, z\neq -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ i
$\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_0\cup\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z<0\}\cup\{z:|z|<1, \frac{5\pi}{6}<\arg(z+\frac{1}{2})\leq\pi\}\cup\{z:$
$|z|<1, 0\leq\arg(z-\frac{1}{2})<\frac{\pi}{6}\}, \mathcal{U}_2=\mathcal{U}_0\cup\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$ /21/
$\cup\{z:|z|<1, \frac{7\pi}{6}<\arg(z+\frac{1}{2})\leq\pi\}\cup\{z:|z|<1, -\frac{\pi}{6}<\arg(z-\frac{1}{2})$
$\leq 0\}, \mathcal{U}_0=\{z:|z|<\frac{1}{2}\},$

otvoren pokrivač oblasti D. Tada su grupe $H^p(\mathcal{U},C_D)$, $H^p(\mathcal{U},R_D)$, $H^p(\mathcal{U},Z_D)$, res pektivno, izomorfne $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2$, za $p=1$, a trivijalne za $p\geq 2$.

D o k a z. Najpre, dokazaću da je ovo tačno za grupu $H^1(\mathcal{U},C_D)$. Otvoren skup $\mathcal{U}_{12}$ iz D je unija otvorenih i povezanih disjunktnih skupova $\mathcal{U}^{(1)}, \mathcal{U}^{(2)}, \mathcal{U}^{(3)}$. Dalje, svaki kocikl h_{12} ovog pokrivača je oblika $\{s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}\}$, gde je $s^{(j)}\in\Gamma(\mathcal{U}^{(j)},C_D)$. Kako su $\mathcal{U}^{(j)}$ povezani skupovi, to su sekcije $s^{(j)}$ nad $\mathcal{U}^{(j)}$ oblika

$$s^{(j)}(z)=(z,a_j),\ z\in\mathcal{U}^{(j)},\ a_j\in\mathbb{C}. \qquad /22/$$

Iz pretpostavke da je kocikl $h_{12}=\{s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}\}$ kohomološki jednak nuli, dobija se

$$h_{12}=h_2-h_1,\ h_k\in\Gamma(\mathcal{U}_k,C_D). \qquad /23/$$

Kako su $\mathcal{U}_k$ povezani skupovi sekcije h_k su definisane konstantama b_k, znači da je $h_k(z)=(z,b_k)$, $z\in\mathcal{U}_k$. Prema /22/,/23/ i pretpostavke za kolanac sledi da je $(z,a_j)=(z,b_2-b_1)$, ili $a_1=a_2=a_3$. Nije teško uočiti da je zadnji uslov i dovoljan da bi kocikl $h_{12}=(z,a_j), z\in\mathcal{U}^{(j)}$

datog pokrivača bio kohomološki nula.

Iz prethodnog sledi da su kocikli

$$h_a(z)=(z,a_j),\ z\in U^{(j)},\quad h_b(z)=(z,b_j),\ z\in U^{(j)} \qquad /24/$$

kohomološki jednaki onda i samo onda, ako je

$$a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3. \qquad /25/$$

Relacija /25/ definiše binarnu relaciju u $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, dakle količnik $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}|_\sim$ čiji su elementi oblika $\ell_{(a,b,c)}=\{(x,y,z):a-x=b-y=c-z\}$. U ovom količniku može se definisati zbir

$$\ell_{(a',b',c')}+\ell_{(a'',b'',c'')}=\ell_{(a'+a'',b'+b'',c'+c'')}. \qquad /26/$$

U svakom elementu $\ell_{(a,b,c)}$, kao potskupu iz $\mathbb{C}^3$ prema /25/, pripada $(a-c,b-c,0)$. Iz zadnjeg se dobija

$$\ell_{(a,b,c)}=\ell_{(a-c,b-c,0)}. \qquad /27/$$

Prema /26/ i /27/, preslikavanje $\varphi(\alpha,\beta,0)=(\alpha,\beta)$ je izomorfizam grupa $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}|_\sim$ /sa strukturom /26/ i $\mathbb{C}^2$. Budući da su grupe $H^1(\mathcal{U},C_D)$ i $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}|_\sim$ izomorfne, imamo da su i grupe $H^1(\mathcal{U},C_D)$ i $\mathbb{C}^2$ izomorfne.

Ako u prethodnom dokazu posmatramo samo cele brojeve, ili samo realne brojeve, dobijamo dokaz za $p=1$. Trivijalnost datih grupa za $p\geqslant 2$ sledi iz /31/ prethodnog odeljka.

Oblast D je na određen način definisana, kao i njen otvoren pokrivač. U opštem slučaju, može se uzeti ma koju trostruko-povezanu oblast iz $\mathbb{C}^1$, formirati pokrivač kao što je to definisano relacijom/21/ i dobiti isti rezultat, kao u zadnjoj teoremi. Više od toga, mogli bismo uzeti ma koju trostruko-povezanu oblast iz $\mathbb{C}^1$ formirati pokrivač, analogno/21/, takođe imamo isti rezultat. Dalje, ako bismo definisali n-trostruko-povezanu oblast iz $\mathbb{C}^1$, kao u zadnjoj teoremi /uzimajući $z \neq z_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, $|z_j| < 1$, $z_i \neq z_j$, $i \neq j$/ možemo formirati takav pokrivač $\mathcal{U}$ da su odgovarajuće grupe izomorfne $\mathbb{C}^{n-1}$, $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbb{Z}^{n-1}$, odnosno trivijalne za $p \geq 2$. Takođe, isto bismo mogli dobiti za ma koju n-trostruko-povezanu oblast iz $\mathbb{C}^n$. Tehnika dokaza je ista kao u zadnjoj teoremi.

Iz izloženog se dobija sledeća:

P o s l e d i c a 2.2.1. Sistem parcijalnih jednačina /24/, iz 2.1., za $p=1$, nema rešenja u višestruko-povezanim oblastima.

Z a i s t a, kao što je navedeno u 2.1., prema teoremi de-Rama [15], imamo relaciju /27/. Iz iste relacije, dati sistem u oblasti D ima rešenje onda i samo onda, ako je $H^1(D, C_D) = 0$. Međutim, zadnja grupa je trivijalna. onda i samo onda ako je $H^1(D, C_D) = 0$, za svaki pokrivač $\mathcal{U}$ oblasti D [21]. Pošto za višestruko-povezanu oblast uvek se može formirati pokrivač, takav da je $H^1(\mathcal{U}, C_D) \neq 0$, to je i $H^1(D, C_D) \neq 0$.

N a p o m e n a. Ukoliko bi grupe $H^p(\Omega, C_\Omega)$, $p \geq 1$, bile trivijalne, ako je $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$, Ω_i su prosto-povezane oblasti, tada bi iz teoreme Lerea [3] sledilo

$$H^p(D, C_D) \cong H^p(\mathcal{U}, C_D), \qquad /28/$$

gde je D višestruko-povezana oblast iz $\mathbb{C}^n$, a $\mathcal{U}$ takav pokrivač oblasti D da je $\mathcal{U}=\{U_1, U_2\}$, $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$, Ω_i su prosto povezane oblasti. Dakle, prema relaciji /28/.

$$H^1(D, C_D) \cong H^1(\mathcal{U}, C_D), \; H^p(D, C_D) = 0, \; p \geq 2. \qquad /29/$$

U ovom slučaju, prema teoremi de-Rama, sistem parcijalnih jednačina /24/, za $p \geq 2$, ima rešenja u D.

2.3. Polinomijalno - konjugovane oblasti iz $\mathbb{C}^n$.

U prethodnim odeljcima imali smo određene podpramenove pramena $\tilde{C}_K$, odnosno $\tilde{C}_D$. Ili, podpramenove pramena $\mathcal{E}_K$, odnosno $\tilde{\mathcal{E}}_K$. U ovom slučaju posmatraću neke podpramenove pramena $\tilde{C}_D$, i podpramenove pramena $\tilde{\mathcal{E}}_p$, nad oblastima D iz $\mathbb{C}^n$.

D e f i n i c i j a 2.3.1. Neka je D oblast iz $\mathbb{C}^n$ i P skup svih polinoma. Pramen $\mathcal{P}_D = D \times P$ zvaćemo polinomijalnim pramenom nad D.

D e f i n i c i j a 2.3.2. Neka je D oblast iz $\mathbb{C}^n$ i $\bar{P}$ skup svih polinoma oblika $p(z,\bar{z}) = \sum_{\ell} \sum_{k} a_{\ell_1 \cdots \ell_n k_1 \cdots k_n} z_1^{\ell_1} \cdots z_n^{\ell_n} \bar{z}_1^{k_1} \cdots \bar{z}_n^{k_n}$. Pramen $\bar{\mathcal{P}}_D = D \times \bar{P}$ zovemo konjugovano-polinomijalnim pramenom nad D.

Sa $\bar{\mathcal{F}}_p$ označavaćemo podpramen pramena $\mathcal{E}_p$, pri čemu su klice u $\mathcal{E}_p$ definisane elementima iz $\bar{P}$.

D e f i n i c i j a 2.3.3. $(0,p)$-forme, kod kojih su koeficijenti elementi iz P, zovemo polinomijalne $(0,p)$-forme i označavaćemo ih sa P_p. Ako su koeficijenti iz $\bar{P}$, takve forme zovemo polinomijalno-konjugovane $(0,p)$-forme, koje označavamo sa $\bar{P}_p$.

D e f i n i c i j a 2.3.4. Oblast D iz $\mathbb{C}^n$ je polinomijalno-konjugovana ako su grupe $H^q(D,\bar{\mathcal{F}}_p)$ trivijalne, za svako $q \geq 1$ i svako $p \geq 0$.

T e o r e m a 2.3.1. Neka je $i: P_0 = P \to \bar{P}_0 = P$ identično preslikavanje i preslikavanje $\bar{\partial}: \bar{P}_p \to \bar{P}_{p+1}$ koje je definisano sa /3/ iz 2.2., tada je niz

$$0 \to P_0 \xrightarrow{i} \bar{P}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_1 \to \cdots \to \bar{P}_p \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_{p+1} \to \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_n \to 0 \qquad /1/$$

tačan.

Primećujemo da se dokaz bazira na sledećoj činjenici: ako je $\bar{\partial} f = 0$, $f \in \bar{P}_p$, tada jednačina $\bar{\partial} u = f$ ima rešenje iz $\bar{P}_{p-1}$. U uvodnom delu smo napomenuli da jednačina $\bar{\partial} u = f$, gde je $\bar{\partial} f = 0, f \in \mathcal{F}_p^{\infty}(D)$, ima rešenje $\bar{\partial} u = f, u \in \mathcal{F}_{p-1}^{\infty}(D)$ - ako je D oblast holomorfnosti [21], [22], dakle ima rešenje ako je D = $\mathbb{C}^n$. Znači, ako je $f \in \bar{P}_p$, $\bar{\partial} f = 0$, tada jednačina

$\bar{\partial} u = f$ ima rešenje $u \in \mathcal{F}^{\infty}_{p-1}(D)$ u svakoj oblasti holomorfnosti D. Takvih rešenja ima beskonačno mnogo. Pokazaću da uvek postoji rešenje iz [illegible].

Najpre, dokazaću da je niz /1/ tačan ako je $p \leq 3$. U tom slučaju dobija[illegible] niz

$$0 \rightarrow P_0 \xrightarrow{i} \bar{P}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_2 \rightarrow \bar{P}_3 \quad . \qquad /2/$$

Neka je $f = \sum_{\ell} \sum_{k} a_{\ell_1 \cdots k_n} z_1^{\ell_1} \cdots z_n^{\ell_n} \bar{z}_1^{k_1} \cdots \bar{z}_n^{k_n} \in \bar{P}_0$, pri čemu je $\bar{\partial} f = 0$. Tada je prema /5/ iz 2.2.

$$\left(\sum a_{\ell k} k_1 z^{\ell} \bar{z}_1^{k_1 - 1} \bar{z}_2^{k_2} \cdots \bar{z}_n^{k_n}\right) d\bar{z}_1 + \left(\sum a_{\ell k} k_2 z^{\ell} \bar{z}_1^{k_1} \bar{z}_2^{k_2 - 1} \cdots \bar{z}_n^{k_n}\right) d\bar{z}_2 \qquad /3/$$
$$+ \cdots + \left(\sum a_{\ell k} k_n z^{\ell} \bar{z}_1^{k_1} \cdots \bar{z}_n^{k_n - 1}\right) d\bar{z}_n ,$$

gde je $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $z^{\ell} = z^{\ell_1} z^{\ell_2} \cdots z^{\ell_n}$. Dakle, prema /3/, dobijamo

$$a_{\ell k} k_1 = a_{\ell k} k_2 = \cdots = a_{\ell k} k_n = 0 . \qquad /4/$$

Znači, iz pretpostavke $f \in \bar{P}_0$ i $\bar{\partial} f = 0$, prema /4/, sledi da je $f \in P_0$.

Neka je, dalje,

$$f = \left(\sum a^{(1)}_{\ell^{(1)} k^{(1)}} z^{\ell^{(1)}} \bar{z}^{k^{(1)}}\right) d\bar{z}_1 + \cdots + \left(\sum a^{(n)}_{\ell^{(n)} k^{(n)}} z^{\ell^{(n)}} \bar{z}^{k^{(n)}}\right) d\bar{z}_n , \qquad /5/$$

gde je $\ell^{(\nu)} = (\ell_1^{(\nu)}, \ldots, \ell_n^{(\nu)})$, $k^{(\nu)} = (k_1^{(\nu)}, \ldots, k_n^{(\nu)})$, $z^{\ell^{(\nu)}} = z_1^{\ell_1^{(\nu)}} \cdots z_n^{\ell_n^{(\nu)}}$, $\bar{z}^{k^{(\nu)}} = \bar{z}_1^{k_1^{(\nu)}} \bar{z}_2^{k_2^{(\nu)}} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(\nu)}}$. Prema /5/, to jest iz $0 = \bar{\partial} f \in \bar{P}_2$ sledi

$$-\sum a^{(1)}_{\ell^{(1)} k^{(1)}} k_2^{(1)} z^{\ell^{(1)}} \bar{z}_1^{k_1^{(1)}} \bar{z}_2^{k_2^{(1)} - 1} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(1)}} + \sum a^{(2)}_{\ell^{(2)} k^{(2)}} k_1^{(2)} z^{\ell^{(2)}} \bar{z}_1^{k_1^{(2)} - 1} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(2)}} \equiv 0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$-\sum a^{(1)}_{\ell^{(1)} k^{(1)}} k_n^{(1)} z^{\ell^{(1)}} \bar{z}_1^{k_1^{(1)}} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(1)} - 1} + \sum a^{(n)}_{\ell^{(n)} k^{(n)}} k_1^{(n)} z^{\ell^{(n)}} \bar{z}_1^{k_1^{(n)} - 1} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(n)}} \equiv 0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$-\sum a^{(2)}_{\ell^{(2)}k^{(2)}} k^{(2)}_n z^{\ell^{(2)}} \bar{z}_1^{k_1^{(2)}} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(2)}-1} + \sum a^{(n)}_{\ell^{(n)}k^{(n)}} k_2^{(n)} z^{\ell^{(n)}} \bar{z}_1^{k_1^{(n)}} \bar{z}_2^{k_2^{(n)}-1} \cdots \bar{z}_n^{k_2^{(n)}} \equiv 0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - \qquad /6/$$

$$-\sum a^{(n-1)}_{\ell k} k_n^{(n-1)} z^{\ell^{(n-1)}} \bar{z}_1^{k_1^{(n-1)}} \cdots \bar{z}_n^{k_n^{(n-1)}-1} + \sum a^{(n)}_{\ell k} z^{\ell^{(n)}} \bar{z}_1^{k_1^{(n)}} \cdots z_{n-1}^{k_{n-1}^{(n)}-1} \bar{z}_n^{k_n^{(n)}} \equiv 0$$

Iz /5/ i /6/ dobijamo

/7/

$$f = \Big(\sum \alpha^{(1)}_{\ell^{(1)}k_1} z^{\ell^{(1)}} \bar{z}_1^{k_1} + b^{(1)}_{\ell^{(1)}k^{(1)}} z^{\ell^{(1)}} \bar{z}^{k^{(1)}}\Big) d\bar{z}_1 + \cdots + \Big(\sum \alpha^{n}_{\ell^{(n)}k_n} z^{\ell^{(n)}} \bar{z}_n^{k_n} + b^{(n)}_{\ell^{(n)}k^{(n)}}\Big) d\bar{z}_n .$$

Posmatraćemo sledeće slučajeve:

1. Ako u f postoji član $\alpha_\mu z^\ell \bar{z}^{k_\mu-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_\mu$ /što označavamo $f \supset \alpha_\mu z^\ell \bar{z}_\mu^{k_\mu-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_\mu$, $\alpha_\mu \neq 0$, $k_\nu \neq 0$. Tada, prema /6/, $f \supset \alpha_\nu z^\ell \bar{z}_\mu^{k_\mu} \bar{z}_2^{k_\nu-1} d\bar{z}_\mu$ pri čemu je $\alpha_\nu = \frac{k_\nu}{k_\mu}\alpha_\mu$

2. $f \supset \alpha_j z^\ell \bar{z}_j^{k_j-1} \bar{z}_\mu^{k_\mu} \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_j$, $\alpha_j \neq 0$, $k_j \neq 0$, $k_\mu \neq 0$, $k_\nu \neq 0$. Tada $f \supset \alpha_\mu z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\mu^{k_\mu-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_\mu$ i $f \supset \alpha_\nu z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\mu^{k_\mu} z^{k_\nu-1} d\bar{z}_\nu$. Prema /6/. $\alpha_\mu = \frac{k_\mu}{k_j}\alpha_j$, $\alpha_\nu = \frac{k_\nu}{k_j}\alpha_j$. Ako je $k_j \doteq 1$, tada je $k_\mu = k_\nu = k_j \doteq 1$, $\alpha_\mu = \alpha_\nu = \alpha_j$.

3. $f \supset \alpha_j z^\ell \bar{z}_j^{k_j-1} \bar{z}_2^{k_2} \cdots \bar{z}_m^{k_m} d\bar{z}_j + \cdots + \alpha_m z^\ell \bar{z}_1^{k_1} \cdots \bar{z}_m^{k_m-1} d\bar{z}_m$, $1 \leq j < m \leq n$, $k_\nu \neq 0$. Tada, prema /6/, $\alpha_\nu = \frac{k_\nu}{k_j}\alpha_j$, $\nu = j, 3, \ldots, m$.

4. $f \supset \alpha_\nu z^\ell \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Znači, ako je $f\in \bar{P}_1, \bar{\partial} f=0$, tada može biti ispunjen samo bar jedan od prethodnih slučajeva. Za "elemente" $u\in \bar{P}_0$ uzećemo samo one koji mogu biti oblika

$$\frac{\alpha_j}{k_j} z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\nu^{k_\nu}, \frac{\alpha_j}{k_j} z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\mu^{k_\mu} \bar{z}_\nu^{k_\nu}, \frac{\alpha_j}{k_j} z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \cdots \bar{z}_m^{k_m}, \frac{\alpha_\nu}{k_\nu+1} z^\ell \bar{z}^{k_\nu+1},$$

u zavisnosti koji je od slučajeva 1. - 4. ispunjen. Prema /7/, dobija se da je $\bar{\partial} u = f$.

Dokazaću da je niz $\bar{P}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{P}_2$ tačan. Zaista, ako je $f\in \bar{P}_0$ tada je prema /7/ iz 2.2. $\bar{\partial}\bar{\partial} f=0$. Dalje, neka je

$$f=\left(\sum a^{12}_{\ell^{12}k^{12}} z^{\ell^{12}} \bar{z}^{k^{12}}\right) d\bar{z}_1\wedge d\bar{z}_2+\cdots+\left(\sum a^{n-1n}_{\ell k} z^{\ell^{n-1n}} \bar{z}^{k^{n-1n}}\right) d\bar{z}_{n-1}\wedge d\bar{z}_n \quad /8/$$

$$\bar{\partial} f = 0.$$

U zavisnosti od toga da li je $\bar{\partial} f=0$, mogu postojati sledeći slučajevi za oblik forme /8/:

1. $f\supset \alpha_{\mu\nu} z^\ell \bar{z}_\mu^{k_\mu} d\bar{z}_\mu\wedge d\bar{z}_\nu, \ 1\le\mu<\nu\le n.$

2. $f\supset \alpha_{j\mu} z^\ell \bar{z}_j^{k_j-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu} d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_\mu + \alpha_{j\nu} z^\ell \bar{z}_j^{k_j-1} \bar{z}_\mu^{k_\mu}$
$\bar{z}_\nu^{k_\nu-1} d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_\nu + \alpha_{\mu\nu} z^\ell \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\mu^{k_\mu-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu-1} d\bar{z}_\mu\wedge d\bar{z}_\nu, 1\le j<\mu<\nu\le n, k_j k_\mu k_\nu\neq 0.$

Tada je $\alpha_{\mu\nu} = -\frac{k_\mu}{k_j}\alpha_{j\nu} + \frac{k_\nu}{k_j}\alpha_{j\mu}.$

3. $f\supset \alpha_{j\mu} z^\ell \bar{z}_j^{k_j-1} \bar{z}_\mu^{k_\mu-1} \bar{z}_\nu^{k_\nu} \bar{z}_\tau^{k_\tau} d\bar{z}_j\wedge d\bar{z}_\mu+\cdots+$
$\alpha_{\nu\tau} \bar{z}_j^{k_j} \bar{z}_\mu^{k_\mu} \bar{z}_\nu^{k_\nu-1} \bar{z}_\tau^{k_\tau-1} d\bar{z}_\nu\wedge d\bar{z}_\tau, 1\le j<\mu<\nu<\tau\le n, k_j k_\mu k_\nu k_\tau\neq 0.$

Kako je $\bar{\partial} f=0$, to je

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{k_\mu}{k_j}\alpha_{j\nu} - \frac{k_\nu}{k_j}\alpha_{j\mu},$$

$$\alpha_{\mu\tau} = \frac{k_\mu}{k_j}\alpha_{j\tau} - \frac{k_\tau}{k_j}\alpha_{j\mu},$$

$$\alpha_{\nu\tau} = \frac{k_\nu}{k_j}\alpha_{j\tau} - \frac{k_\tau}{k_j}\alpha_{j\nu}.$$

$$4.\quad f \supset \alpha_{12} z^\ell \bar z_1^{k_1-1} \bar z_2^{k_2-1} \bar z_3^{k_3} \cdots \bar z_m^{k_m} d\bar z_1 \wedge d\bar z_2 + \cdots +$$

$$\alpha_{1m} z^\ell \bar z_1^{k_1-1} \cdots \bar z_m^{k_m-1} d\bar z_1 \wedge d\bar z_m + \alpha_{23} z^\ell \bar z_1^{k_1} \bar z_2^{k_2-1} \bar z_3^{k_3-1} \cdots \bar z_m^{k_m} d\bar z_2 \wedge d\bar z_3 +$$

$$\cdots + \alpha_{2m} z^\ell \bar z_1^{k_1} \bar z_2^{k_2-1} \cdots \bar z_m^{k_m-1} d\bar z_2 \wedge d\bar z_m + \cdots + \alpha_{m-1\,m} z^\ell \bar z_1^{k_1} \cdots \bar z_{m-1}^{k_{m-1}-1} \bar z_m^{k_m-1} d\bar z_{m-1} \wedge d\bar z_m$$

Prema /8/, dobija se

$$\alpha_{\mu\nu} = \frac{k_\mu}{k_1}\alpha_{1\nu} - \frac{k_\nu}{k_1}\alpha_{1\mu},\ \mu = 2,3,\ldots,m-1,\ \mu<\nu\leq n,\ 2\leq m\leq n. \quad /9/$$

Rešenje jednačine $\bar\partial u = f$, $f \in \bar P_1$, formira se tako što "elementi" forme u mogu biti sledećeg oblika:

$$1'.\quad \frac{\alpha_{\nu\mu}}{k_\mu+1} z^\ell \bar z_\mu^{k_\mu+1} \bar z_\nu^{k_\nu} d\bar z_\nu,$$

$$2'.\quad a_j z^\ell \bar z_j \bar z_j^{k_j-1} \bar z_\mu^{k_\mu} \bar z_\nu^{k_\nu} d\bar z_j + a_\mu z^\ell \bar z_j^{k_j} \bar z_\mu^{k_\mu-1} \bar z_\nu^{k_\nu} d\bar z_\mu$$

$$+ a_\nu z^\ell \bar z_j^{k_j} \bar z_\mu^{k_\mu} \bar z_\nu^{k_\nu} d\bar z_\nu,\ a_j = \frac{-\alpha_{j\mu}}{k_\mu},\ a_\mu = 0,\ a_\nu = \frac{1}{k_j}\alpha_{j\nu} - \frac{k_\nu}{k_j k_\mu}\alpha_{j\mu}.$$

$$3'.\quad a_j z^\ell \bar z_j^{k_j-1} \bar z_\mu^{k_\mu} \bar z_\nu^{k_\nu} \bar z_\tau^{k_\tau} d\bar z_j + a_\mu z^\ell \bar z_j^{k_j} z_\mu^{k_\mu-1} \bar z_\nu^{k_\nu} \bar z_\tau^{k_\tau} d\bar z_\mu$$

$$+ a_\nu z^\ell \bar z_j^{k_j} \bar z_\mu^{k_\mu} \bar z_\nu^{k_\nu-1} \bar z_\tau^{k_\tau} d\bar z_\nu + a_\tau z^\ell \bar z_j^{k_j} \bar z_\mu^{k_\mu} \bar z_\nu^{k_\nu} \bar z_\tau^{k_\tau-1} d\bar z_\tau,\ a_\mu = 0,$$

$$a_j = -\frac{\alpha_{j\mu}}{k_\mu},\ a_\nu = \frac{1}{k_j}\alpha_{j\nu} - \frac{k_\nu}{k_j k_\mu}\alpha_{j\mu},\ a_\tau = \frac{1}{k_j}\alpha_{j\tau} - \frac{k_\tau}{k_j k_\mu}\alpha_{j\mu}$$

$4'.$

$$a_1 z^\ell z_1^{k_1-1} \bar z_2^{k_2} \cdots z_m^{k_m} d\bar z_1 + \cdots + a_m z^\ell \bar z_1^{k_1} \cdots \bar z_m^{k_m-1} d\bar z_m,$$

$$a_1 = -\frac{\alpha_{12}}{k_2},\ a_2 = 0,\ a_\nu = \frac{1}{k_1}\alpha_{1\nu} - \frac{k_\nu}{k_1 k_2}\alpha_{12},\ \nu = 3,4,\ldots,m,$$

$$m = 1,2,\ldots,n.$$

Dokazavši tačnost niza /3/, imamo induktivni postupak za tačnost niza /1/. Naime, ako pretpostavimo da je niz /1/ tačan za svako $p<n-1$, tada je tačan i za svako $p<n$. Zaista, neka je

$$f\in \bar{P}_p ,\ \bar{\partial} f=0. \qquad /10/$$

Koristeći $\bar\partial f=0$, to jest kakav oblik može imati forma f , formiraćemo formu $u\in \bar{P}_{p-1}$ koja zadovoljava jednačinu $\bar\partial u=f$. Oznaku $f\supset \varphi\, d\bar z_K \Rightarrow u\supset \psi\, d\bar z_\ell\ (d\bar z_j = d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_s})$ podrazumevamo: ako u formi f postoji element $\varphi\, d\bar z_K$, tada u formi u uzećemo element $\psi\, d\bar z_\ell$.

$$1.\ f\supset \alpha_{j_1\dots j_p} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}} \bar z_{j_2}^{k_{j_2}}\cdots \bar z_{j_p}^{k_{j_p}}\, d\bar z_{j_1}\wedge d\bar z_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_p},$$

$$1\le j_1<\cdots<j_p\le n, \Rightarrow u\supset \frac{\cancel{\alpha_{j_1\dots j_p}}}{j_p+1} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}+1} \bar z_{j_2}^{k_2}\cdots \bar z_{j_p}^{k_{j_p}}\, d\bar z_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_p};$$

$$2.\ f\supset \alpha_{j_1\dots j_p} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}-1}\cdots \bar z_{j_p}^{k_{j_p}-1} \bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}}\, d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_p}$$

$$+\cdots+\alpha_{j_2\dots j_{p+1}} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}} \bar z_{j_2}^{k_{j_2}-1}\cdots \bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}-1}\, d\bar z_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_{p+1}},\ 1\le j_1<\cdots<j_{p+1}\le n.$$

$$j_2\cdots j_{p+1} = (-1)^{p-1}\frac{k_{j_{p+1}}}{k_{j_1}}\alpha_{j_1\dots j_p} - (-1)^{p-1}\frac{k_{j_p}}{k_{j_1}}\alpha_{j_1\dots \check{j}_p\, j_{p+1}}+\cdots+$$

$$\frac{k_{j_2}}{k_{j_1}}\alpha_{j_1 \check{j}_2\dots j_{p+1}}, \Rightarrow u\supset a_{j_1\dots j_{p-1}} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}-1}\cdots \bar z_{j_{p-1}}^{k_{j_{p-1}}-1} \bar z_{j_p}^{k_{j_p}}$$

$$\bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}}\, d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_{p-1}}+\cdots+ a_{j_3\dots j_{p+1}} z^\ell \bar z_{j_1}^{k_{j_1}} \bar z_{j_2}^{k_{j_2}}$$

$$\bar z_{j_3}^{k_{j_3}-1}\cdots \bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}-1}\, d\bar z_{j_3}\wedge d\bar z_{j_4}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_{p+1}}.$$

Koeficijente a_j određujemo kao u 2.

3. Ukoliko f ima elemente oblika

$$\alpha_{j_1\cdots j_p} z^{\ell}\,\bar z_{j_1}^{k_{j_1}-1}\cdots \bar z_{j_p}^{k_{j_p}-1}\,\bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}}\,\bar z_{j_{p+2}}^{k_{j_{p+2}}}\,d\bar z_{j_1}\wedge d\bar z_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_p},$$

tada zatvorenost ove forme uslovljava da koeficijenti α_j ispunjavaju vezu preko k_j kao u 3. iz prethodnog slučaja. Zahvaljujući toj vezi možemo da odredimo $\Psi\subset\mathcal{U}$ tako da se gornji elementi iz f_i svode na $\bar\partial\Psi$.

4. $$f\supset\varphi=\alpha_{j_1\cdots j_p} z^{\ell}\,\bar z_{j_1}^{k_{j_1}-1}\cdots\bar z_{j_p}^{k_{j_p}-1}\,\bar z_{j_{p+1}}^{k_{j_{p+1}}}\cdots\bar z_{j_{p+s}}^{k_{j_{p+s}}}\,d\bar z_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_p}+\cdots+\underbrace{\alpha_{j_1\cdots j_{p+s}}}_{p} z^{\ell}\,\bar z_{j_1}^{k_{j_1}-1}\cdots\bar z_{j_{p+s}}^{k_{j_{p+s}}-1}\,d\bar z_{j_1}\wedge d\bar z_{j_2}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_{p+s}}+\cdots$$
$$\cdots+\alpha_{j_{p+s-1}\cdots j_{p+r}} z^{\ell}\,\bar z_{j_{p+s-1}}^{k_{j_{p+s-1}}-1}\cdots\bar z_{j_{p+r}}^{k_{j_{p+r}}-1}\,d\bar z_{j_{p+s-1}}\wedge\cdots\wedge d\bar z_{j_{p+r}}.$$

Koeficijenti α_j ispunjavaju relaciju sličnu relaciji /9/. Na osnovu te relacije možemo odrediti koeficijente a_k, kao što je to bio slučaj 1′ - 4′, takve forme $\Psi\subset\mathcal{U}$, pri čemu je $\bar\partial\Psi=\varphi$.

P o s l e d i c a 2.3.1. Ako je D polinomijalno-konjugovana oblast iz $\mathbb{C}$, tada je $H^q(D,\mathcal{P}_D)=0,\ q\geq 1$.

D o k a z. Pomoću niza /1/ dobijamo tačne nizove

$$0\to\mathcal{P}_D\xrightarrow{i}\mathcal{P}_0\xrightarrow{\bar\partial}\bar{\mathcal{P}}_1\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\bar{\mathcal{P}}_p\xrightarrow{\bar\partial}\bar{\mathcal{P}}_{p+1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\bar{\mathcal{P}}_n\xrightarrow{\bar\partial}0 \qquad /1'/$$

$$0\to\Gamma(D,\mathcal{P}_D)\to\Gamma(D,\mathcal{P}_0)\to\cdots\to\Gamma(D,\bar{\mathcal{P}}_p)\to\Gamma(D,\bar{\mathcal{P}}_{p+1})\to\cdots\to\Gamma(D,\bar{\mathcal{P}}_n)\to 0.$$

Kako je svaka oblast D iz $\mathbb{C}^n$ parakompaktan prostor, $\mathcal{P}_D$ pramen abelovih grupa i $H^q(D,\bar{\mathcal{P}}_p)=0$, za svako $q\geq 1$ i svako $p\geq 0$, to je prema teoremi de-Rama [12], [15] $H^q(D,\mathcal{P}_D)=0,\ q\geq 1$.

3. RACIONALNI PRAMENOVI NAD OBLASTIMA KONVEKSNIM U ODNOSU NA NEKE KLASE FUNKCIJA

3.1. Prosto - povezane oblasti koje su konveksne u odnosu na jednu klasu funkcija.

U uvodnom delu su navedene holomorfno-konveksne oblasti, kao i rezultati koji se odnose na ovu klasu oblasti. Pojam konveksnosti neke oblasti D iz $\mathbb{C}^n$ može se tretirati sa geometriske tačke gledišta. Naime, ako za ma koje dve tačke z_1 i z_2 iz D duž $tz_1+(1-t)z_2,\ 0\leq t\leq 1$, pripada D -tada je D /geometriski/ konveksna. Nije teško uočiti da se geometriska konveksnost može, u nekom smislu, analitički definisati. Ako je K bilo koji kompaktan skup iz D i skup

$$\{\zeta\in D : |\ell(\zeta)|\leq \max_K |\ell(z)|, \forall \ell\in\mathcal{L}\},\ \mathcal{L}=\{\lambda_0+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k z_k : (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\}$$

kompaktno pripada D, tada je D geometriski konveksna. Takođe, iz beometriske konveksnosti važi prethodno za bilo koji kompaktan skup iz D. Dalje, prema teoremi H.Kartan-P.Tulena [9],[21], [22], imamo da je svaka geometriski konveksna oblast D i holomorfno-konveksna, to jest D je oblast holomorfnosti.

Primećujemo da je skup $\mathcal{L}$ sadržan u skupu svih holomorfnih funkcija $H(D)$ iz oblasti D. Kako je preko $\mathcal{L}$ moguće definisati geometrisku konveksnost oblasti, ili $\mathcal{L}$ -konveksnost otuda je razumljiv smisao definicije holomorfne konveksnosti, ili, na primer, polinomijalne konveksnosti.

D e f i n i c i j a 3.1.1. Neka je S_M neki skup meromorfnih funkcija u oblasti D iz $\mathbb{C}$ i K kompaktan skup iz D, tada se skup

$$\hat{K}_{S_M} = \{\zeta \in D : |f(\zeta)| \le \max_K |f(z)|, \forall f \in S_M, \mathcal{P}_f \cap K = \emptyset\} \qquad /1/$$

/ $\mathcal{P}_f$ je polaran skup funkcije f / zove S_M-obvojnica kompakta K. Za oblast D kažemo da je S_M-konveksna ako $\hat{K}_{S_M}$ kompaktno pripada D, za svaki kompaktan skup iz D.

Prema ovoj definiciji imamo R-obvojnicu kompaktnog skupa K iz D, gde je R skup racionalnih funkcija. Takođe, imamo R-konveksne oblasti, ukoliko je $\hat{K}_R$ kompaktan skup u D, za svaki kompaktan skup K iz D.

D e f i n i c i j a 3.1.2. Za analitičku funkciju $f(z)$ iz oblasti D kazaćemo da se ravnomerno aproksimira racionalnim funkcijama unutar D ako za svaki kompaktan skup K iz D i svako $\varepsilon > 0$, postoji racionalna funkcija $r(z)$ takva da je $\mathcal{P}_r \cap K = \emptyset$ i $\max_K |f(z) - r(z)| < \varepsilon$.

Skup analitičkih funkcija koje se ravnomerno aproksimiraju racionalnim funkcijama unutar D označićemo sa $R(D)$.

Kako je $R(D)$ prsten sa jedinicom, bez delitelja nule, to je moguće formirati polje odnosa $\tilde{R}(D)$ prstena $R(D)$.

Dalje, pomoću $\tilde{R}(D)$ mogu se formirati skupovi

$$\mathcal{R}_z = \{(z,f) : z \in D \setminus \sigma_f, f \in \tilde{R}(D)\}, \quad \mathcal{R} = \bigcup_{z \in D} \mathcal{R}_z . \qquad /2/$$

U skupu $\mathcal{R}$ može se uvesti topologija, na taj način, što se okolina elementa (z,f) definiše sa $\{(\zeta,f) : |\zeta - z| < \varepsilon\}$.

Nije teško uočiti da je $\mathcal{R}$ sa definisanom topologijom pramen nad D. Pre svega, D i $\mathcal{R}$ su topološki prostori. Dalje, funkcija

$$\pi : \mathcal{R} \to D, \quad \pi(z,f) = z \qquad /3/$$

je na i lokalno homeomorfno preslikavanje. Ovo tvrđenje se dobija iz činjenice da postoji okolina $\mathcal{U} \subset D$ ma koje tačke iz D i jedan element $f \in \tilde{R}(D) \cap H(\mathcal{U})$, pri čemu se okolina $\{(z,f) : z \in \mathcal{U}\}$, pomoću /3/, lokalno-homeomorfno preslikava na $\mathcal{U}$. Ako je $\mathcal{U}$ otvoren-povezan skup iz D i neprekidna Θ funkcija $\mathcal{U} \to \mathcal{R}$, sa osobinom $\pi\Theta = I_{\mathcal{U}}$, tada je $\Theta(\mathcal{U})$ otvoren skup u $\mathcal{R}$ i funkciju Θ možemo identifikovati sa jednim elementom iz $\tilde{R}(D)$. Isto tako, svaki element iz $\tilde{R}(D) \cap H(\mathcal{U})$ određuje jednu funkciju sa osobinom koju ima navedena funkcija Θ.

T e o r e m a 3.1.1. Ako je D prosto-povezana oblast iz $\mathbb{C}^n$, $H^1(D,\mathcal{H}(D)) = 0$ i ako se svaka analitička funkcija iz D može aproksimirati racionalnim funkcijama unutar D, tada je $H^1(D,\mathcal{R}) = 0$.

U odeljku 1.3. navedeno je da trivijalnost grupe $H^1(D,\mathcal{H}(D))$, za $D \subset \mathbb{C}^n$, je ekvivalentno činjenici da je u ovoj oblasti rešiv aditivni problem Kuzena. Takođe, $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$, za $D\subset\mathbb{C}^2$, je ekvivalentno holomorfnoj konveksnosti oblasti D. Zato, prethodnu teoremu možemo formulisati na sledeći način: Ako je u prosto-povezanoj oblasti D rešiv aditivni problem Kuzena i $R(D)=H(D)$, tada važi sledeće: ako je $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ma koji otvoren pokrivač oblasti D tada za svaku familiju funkcija $\{f_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$, sa osobinom $f_{jk}-f_{ik}+f_{ij}=0$, za $z\in U_i\cap U_j\cap U_k$, $f_{\alpha\beta}\in\tilde{R}(D)\cap H(U_\alpha\cap U_\beta)$, postoji familija funkcija $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ takva da je $f_\alpha\in\tilde{R}(D)\cap H(U_\alpha)$ i $f_{\alpha\beta}=f_\beta-f_\alpha$, $z\in U_\alpha\cap U_\beta$.

D o k a z t e o r e m e 3.1.1. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$ otvoren pokrivač oblasti D. Pošto je D prosto-povezana oblast, može se formirati otvoren pokrivač $\mathcal{U}'=\{U_1',U_2'\}$ oblasti D koji je finiji u odnosu na polazni pokrivač $\mathcal{U}$ - takav da je $U_1'\cap U_2'$ povezan skup. Dalje, svaki kocikl $\mathcal{h}$ pokrivača $\mathcal{U}'$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$ je kocikl istog pokrivača sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$.

Kako je $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$, to je $H^1(\mathcal{U}',\mathcal{H}(D))=0$, ili

$$\mathcal{h}=h_2-h_1,\quad h_\nu\in H(U_\nu'), \tag{4}$$

za svaki kocikl $\mathcal{h}$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$. Prema prethodnom, relacija /4/ je ispunjena i za svaki kocikl $\mathcal{h}$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$. Znači, iz relacije /4/ sledi da se funkcije h_ν mogu produžiti, po putanji pomoću $\mathcal{h}$, do meromorfnih funkcija $\tilde{h}_\nu$ u oblasti D.

Japanski matematičari J.Kajiwara i E.Sakai [6], koristeći rezultate S.Hitotumatu i O.Kôta [20], pokazali su: Svaka oblast nad mnogostrukosti Štejna je slabog tipa Poenkarea, to jest svaka meromorfna funkcija u takvoj oblasti je oblika $\frac{f}{\varphi}$, gde su f i φ analitičke funkcije u toj oblasti.

Kako se svaka oblast D iz $\mathbb{C}^n$ može smatrati oblašću nad $\mathbb{C}^n$, a $\mathbb{C}^n$ je mnogostrukost Štejna, to su produžene funkcije $\tilde{h}_\nu$ oblika $\frac{f_\nu}{g_\nu}$, pri čemu $f_\nu \in H(D), g_\nu \in H(D)$. Sa druge strane $H(D)=R(D)$, te je prema /4/ kocikl $\mathcal{C}$ jednak kogranici kolanca $\{\tilde{h}_\nu\}$, sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$. Dakle je grupa $H^1(\mathcal{U}', \mathcal{R})$ trivijalna. Kako je $\mathcal{U}'$ finiji pokrivač, u odnosu na $\mathcal{U}$, to je i $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{R})=0$.

Poslednje tvrđenje sledi iz opšte teorije pramenova. Naime, ako je $\mathcal{F}$ ma koji pramen nad nekim topološkim prostorom X i ako je $\mathcal{U}'$ otvoren pokrivač X, finiji od otvorenog pokrivača $\mathcal{U}$, tada postoji homomorfno, jedan-jedan preslikavanje: $\rho: H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{U}', \mathcal{F})$.

Može se pokazati da je grupa $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{R})$ trivijalna za bilo koji otvoren pokrivač $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ oblasti D. Zaista, formiraćemo finiji pokrivač $\mathcal{U}'=\{U'_\beta\}_{\beta\in B}$ tako, što umesto elemenata U_α iz $\mathcal{U}$ uzimamo njegove komponente $U_\alpha = U_{\beta(\alpha)}$ koje su i elementi pokrivača $\mathcal{U}'$. Neka je, dalje $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_{\beta_1}, \mathcal{C}_{\beta_2}\}$ kocikl pokrivača $\mathcal{U}'$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$. Kako je $H^1(D, \mathcal{H}(D))=0$ i $\mathcal{C}$, takođe, kocikl sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$, to je $\mathcal{C}_{\beta_1\beta_2} = h_{\beta_2} - h_{\beta_1}$, $z \in U'_{\beta_1} \cap U'_{\beta_2}$, $h_{\beta_\nu} \in H(U'_{\beta_\nu})$. Budući da je D prosto-povezana oblast, svaka od funkcija h_β se produžuje, po putanji, do jednoznačne meromorfne funkcije $\tilde{h}_\beta$ u oblasti D. Prema navedenim rezultatima [6], svaka oblast D iz $\mathbb{C}^n$ je slabog tipa Poenkarea pa je svaka od funkcija $\tilde{h}_\beta$ iz $\tilde{R}(D)$. Dakle, kogranica dobijenog kolanca $\{\tilde{h}_\beta\}$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$, jednaka je polaznom kociklu c. Znači, $H^1(\mathcal{U},\mathcal{R})=0$, odnosno $H^1(D,\mathcal{R})=0$.

Ukoliko oblast D nije prosto-povezana, primerom se može pokazati da ne mora biti $H^1(D,\mathcal{R})=0$, pri ostalim pretpostavkama teoreme. Zaista, neka je D dvostruko-povezana oblast i otvoren pokrivač $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$ takav, da je $U_1\cap U_2$ unija otvorenih skupova $\mathcal{U}'$ i $\mathcal{U}''$, takvih da je $\mathcal{U}'\cap\mathcal{U}''\neq 0$, $\mathcal{U}'\neq 0$, $\mathcal{U}''\neq 0$. U tom slučaju funkcija

$$c(z)=\begin{cases} 0, & z\in\mathcal{U}' \\ 1, & z\in\mathcal{U}'' \end{cases} \qquad /5/$$

definiše kocikl datog pokrivača. Iz pretpostavke $H^1(\mathcal{U},\mathcal{R})=0$, sledi da je $c=h_2-h_1, z\in U_1\cap U_2$, $h_\nu\in\Gamma(U_\nu,\mathcal{R})$, ili $h_\nu\in\tilde{R}(D)\cap H(U_\nu)$ (c je kocikl definisan relacijom /5/). Kako je $h_1=h_2$, za $z\in\mathcal{U}'$, to su h_ν neposredna produženja kroz $\mathcal{U}'$. Sa druge strane, to su grane neke mnogoznačne funkcije h. No, grane mnogoznačne funkcije h ne mogu pripadati, po teoremi jedinosti, suženju $\tilde{R}(D)\backslash U_\nu$.

U odeljku 1.2. je navedeno da se analitička funkcija u okolini polinomijalno-konveksnog kompaktnog skupa K /ukoliko je $K=\hat{K}_P$/ može ravnomerno aproksimirati polinomima na K. Analogno tome, može se pokazati:

L e m a 3.1.1. Ako je kompaktan skup K R-konveksan, to jest $K=\hat{K}_R$, i funkcija f analitička u okolini K, tada se f može ravnomerno aproksimirati racionalnim funkcijama na K.

D o k a z. Neka je $K=\hat{K}_R$ i U_K neka okolina kompaktnog skupa K. Može se pokazati da postoje racionalne funkcije $r_1(z), r_2, \dots, r_\ell(z)$ takve da je

$$K\subset \{z : |r_i(z)|\leq 1, 1\leq i\leq \ell\}\subset U_K . \qquad /6/$$

Zaista, neka su polinomi $a_1z_1, a_2z_2, \dots, a_nz_n$ takvi da je $|a_\nu z_\nu| \leq 1$ za $z\in K$. Za ma koju tačku $z_0=(z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)})\notin U_K$, sa osobinom da je $|a_\nu z_\nu^{(0)}| \leq 1, 1\leq \nu \leq n$, može se uzeti racionalna funkcija $r(z)$, tako da je $|r(z_0)|>1$ i $\max_K |r(z)|<1$. Po teoremi Hajne-Borel-Lebega. postoji konačno mnogo racionalnih funkcija sa prethodnom osobinom, odnosno konačno mnogo da bude ispunjena relacija /6/.

Kompaktan skup $\{z : |r_i(z)|\leq 1, 1\leq i\leq \ell\} = \mathcal{T}$ je R-konveksan. Ako je ζ iz R-obvojnice ovog skupa, tada je $|r(\zeta)|\leq \max_{\mathcal{T}} |r(z)|$, $r(z)\in R$, $\mathcal{P}_n\cap K=\emptyset$. Dakle, $|r_i(\zeta)| \leq \max_K |r_i(z)|, 1\leq i\leq \ell$ što znači da $\zeta\in\mathcal{T}$.

Neka je, dalje. $\bar{\Pi}$ adherencija polikruga $\Pi\subset \mathbb{C}^n$ sa centrom u nuli, pri čemu $\mathcal{T}\subset\bar{\Pi}$, i $\bar{I}$ adherencija unutrašnjosti jediničnog kruga iz $\mathbb{C}$. Znači, $(z, r_1(z),\dots, r_\ell(z))\in \Pi\times I^\ell$ Kako je funkcija $f(z)$ analitička u U_K, to su zadovoljene Koši-Rimanove jednačine $\bar{\partial} f=0$. Dakle, postoji analitička funkcija $\tilde{f}(z)$ u okolini $\bar{\Pi} \times \bar{I}^{\ell}$, takva da je $f(z) = \tilde{f}(z, r_1(z), \ldots, r_\ell(z))$[14] Međutim, delimične sume $\tilde{f}_s(z, w)$ stepenog reda oko tačke $z=0 \in \bar{\Pi} \times \bar{I}^{\ell}$, ravnomerno konvergiraju funkciji $\tilde{f}(z)$ u zatvorenom polikrugu $\bar{\Pi} \times \bar{I}^{\ell}$. Prema tome, niz racionalnih funkcija $\tilde{f}_s(z, r_1(z), \ldots, r_\ell(z))$ ravnomerno konvergira funkciji $\tilde{f}(z, r_1(z), \ldots, r_\ell(z)) = f(z)$ na Π , tim pre i na K.

P o s l e d i c a 3.1.1. Ako je D prosto-povezana oblast iz $\mathbb{C}$, koja je holomorfno konveksna i R-konveksna, tada je $H^1(D, \mathcal{R}) = 0$.

U odeljku 1.3. je istaknuto da $H^1(D, \mathcal{H}(D)) = 0$ sledi iz holomorfne konveksnosti oblasti D. Prema lemi 3.1.1. se dobija, da iz R-konveksnosti sledi $H(D) = R(D)$. Znači, ispunjeni su uslovi teoreme 3.1.1., te je $H^1(D, \mathcal{R}) = 0$.

T e o r e m a 3.1.2. Ako je D oblast iz $\mathbb{C}^2$ i $H^1(D, \mathcal{R}) = 0$, tada je D prosto-povezana i konveksna u odnosu na klasu $\tilde{R}(D) \cap H(D)$.

D o k a z. Pretpostavićemo suprotno, to jest da oblast D nije konveksna u odnosu na klasu $\tilde{R}(D) \cap H(D)$. U tom slučaju bi postojao kompaktan skup $K \subset D$ takav da $\hat{K}_{\tilde{R}(D) \cap H(D)}$ ne pripada kompaktno D. Što znači da bi postojala tačka $\zeta_0 \in \hat{K}_{\tilde{R}(D) \cap H(D)} \cap \partial D$. Dalje, svaki element $f \in \tilde{R}(D) \cap H(D)$

je oblika $\frac{f_1}{f_2}$, pri čemu $f_\nu \in R(D)$. Ukoliko niz racionalnih funkcija $(R_m^{(\nu)}(z))$ uniformno konvergira f_ν na kompaktnom skupu $K \subset D$, tada po teoremi Vajerštrasa i niz racionalnih funkcija $\left(\frac{\partial^{|K|} R_m^{(\nu)}}{\partial z^K}\right)$ uniformno konvergira $\frac{\partial^{|K|} f_\nu}{\partial z^K}$ na K, za svako $\nu = 1,2$. Isto tako, svaka od funkcija $\frac{\partial^{|K|} f_\nu}{\partial z^K}$ je analitička u D. Znači, klasa $\tilde{R}(D) \cap H(D)$ je zatvorena u odnosu na diferenciranje. Prema teoremi H.Kartan-P.Tulena [9] svaka funkcija iz klase $\tilde{R}(D) \cap H(D)$ se analitički produžuje u polikrug $U(\zeta_0, r)$, gde je r rastojanje kompaktnog skupa K od granice oblasti D. Neka je, dalje, $B(\zeta_0, r')$ otvorena sfera koja pripada $U(\zeta_0, r)$. Kako je određena tačka ζ_0, svaka tačka $\zeta' = (\zeta_1', \zeta_2') \in B \cap D$, može se spojiti otsečkom $\zeta_0 \zeta'$ sa ζ_0. Na ovom otsečku postoji tačka $\zeta'' = (\zeta_1'', \zeta_2'')$ sa granice ∂D koja je najbliža tački ζ'. Pomoću tačaka ζ' i ζ'' formiraćemo jednačine kompleksnih pravih. koje prolaze kroz tačku ζ'':

$$L_1 : z_2 - \zeta_2'' - \frac{\zeta_2' - \zeta_2''}{\zeta_1' - \zeta_1''}(z_1 - \zeta_1'') = 0, \qquad /7/$$

$$L_2 : z_2 - \zeta_2'' + \frac{\zeta_1' - \zeta_1''}{\zeta_2' - \zeta_2''}(z_1 - \zeta_1'') = 0.$$

Neka je $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$,

$$U_1 = \{(z_1, z_2) : (z_1, z_2) \in D \setminus L_1\}, \qquad /8/$$

$$U_2 = \{(z_1, z_2) : (z_1, z_2) \in D \setminus L_2\},$$

pokrivač oblasti D. Tada funkcija

$$f(z) = \frac{1}{\left(z_2 - \zeta_2'' - \frac{\zeta_2' - \zeta_2''}{\zeta_1' - \zeta_1''}(z_1 - \zeta_1'')\right)\left(z_2 - \zeta_2'' + \frac{\zeta_1' - \zeta_1''}{\zeta_2' - \zeta_2''}(z_1 - \zeta_1'')\right)} \qquad /9/$$

određuje kocikl u odnosu na pokrivač /8/ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}$. Kako je po pretpostavci $H^1(D,\mathcal{R})=0$, znači i $H^1(\mathcal{U},\mathcal{R})=0$ postoje funkcije $h_\nu \in \Gamma(U_\nu,\mathcal{R}) = \tilde{R}(D)\cap H(U_\nu)$ koje definišu kolanac $\{h_1, h_2\}$ čija je kogranica jednaka kociklu /9/. Ili, $f(z)=h_2(z)-h_1(z)$ za $z\in U_1\cap U_2 = D\setminus(L_1\cup L_2)$. No, tada je funkcija

$$g(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{z_2-\zeta_2''-\dfrac{\zeta_2'-\zeta_2''}{\zeta_1'-\zeta_1''}(z_1-\zeta_1'')}+\left(z_2-\zeta_2''+\dfrac{\zeta_1'-\zeta_1''}{\zeta_2'-\zeta_2''}(z_1-\zeta_1'')\right)h_1 \\[2ex] (z_2-\zeta_2'')+\dfrac{\zeta_1'-\zeta_1''}{\zeta_2'-\zeta_2''}(z_1-\zeta_1'')\,h_2 \end{cases} \qquad /10/$$

analitička u D. Dalje, kako su h_ν iz klase $\tilde{R}(D)$, to je prema relaciji /10/, $g(z)=\left(z_2-\zeta_2''+\dfrac{\zeta_1'-\zeta_1''}{\zeta_2'-\zeta_2''}(z_1-\zeta_1'')\right)\dfrac{h^{(1)}}{h^{(2)}}$, $h^{(i)}\in \tilde{R}(D)$. Prema tome je i g iz klase $\tilde{R}(D)\cap H(D)$. Pošto se svaka funkcija iz $\tilde{R}(D)\cap H(D)$ analitički produžuje u sferu $B(\zeta_0, r')$, to bi se prema /10/ i funkcija

$$\varphi(z)=\frac{1}{z_2-\zeta_2''-\dfrac{\zeta_2'-\zeta_2''}{\zeta_1'-\zeta_1''}(z_1-\zeta_1'')} \qquad /11/$$

analitički produžila u tačku ζ'' kao analitička funkcija na pravoj L_2, što je nemoguće obzirom da je to racionalna funkcija.

Iz primera /5/ se dobija da oblast D ne može biti višestruko povezana.

Primetimo, da je $H^1(D,\mathcal{R})=0$, za ma koju prosto-povezanu oblast $D\subset\mathbb{C}^1$. Zaista, u odeljku 1.3. smo videli da je u svakoj oblasti $D\subset\mathbb{C}^1$ rešiv aditivni problem Kuzena, prema tome je $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$. Isto tako, prema 1.2. svaki kompaktan skup iz $\mathbb{C}^1$ je R-konveksan te je $R(D)=H(D)$.

Sasvim je očigledno da je $R(D)=H(D)\cap\tilde{R}(D)$ u svakoj oblasti $D\subset\mathbb{C}^1$. Međutim, za oblasti $D\subset\mathbb{C}^n$, $n\geq 1$, to nije tako jednostavno pokazati, kako je utvrdio E.M.Čirka ,

3.2. Racionalni pramenovi nad oblastima iz $\mathbb{C}^n$.

U prethodnom odeljku je posmatran pramen, koji je definisan na određen način, nad prosto-povezanim oblastima. Ograničenje na prosto povezane oblasti je potrebno zbog analitičkog, odnosno, meromorfnog produženja. Kao što je istaknuto, u primeru /5/ iz 3.1., produženje neke funkcije ne daje jednoznačnu funkciju u višestruko povezanoj oblasti.

U ovom odeljku posmatraću neke pramenove nad oblastima koje ne moraju biti samo prosto-povezane. U navedenom radu [6] imamo sledeću definiciju:

D e f i n i c i j a 3.2.1. Neka su M_1 i M_2 kompleksno-analitičke mnogostrukosti i lokalno-bihomomorfno preslikavanje $p: M_1 \to M_2$. Par (M_1, p) zove se otvoren skup, odnosno oblast nad M_2, što zavisi da li je M_1 povezana mnogostrukost.

Analitička funkcija, u daljem razmatranju nezavisno da li je jednoznačna ili višeznačna, u oblasti $D \subset \mathbb{C}^n$ može se smatrati kao jednoznačna analitička funkcija u otvorenom skupu, odnosno oblasti, u smislu definicije 3.2.1., a pri maksimalnom analitičkom produženju u $\mathbb{C}^n$. Otvoren skup, odnosno oblast, u kojoj je takva funkcija jednoznačna, ima oblik

$$(V_f, p),\ V_f = \{(z, f_z), z \in D\},\ p(z, f_z) = z, \qquad /1/$$

gde je f_z klica neke grane funkcije $f(z)$ u okolini tačke z. Okolina tačke $(z, f_z) \in (V_f, p)$ može se definisati sa $\{(\zeta, f_\zeta)\}$, gde je ζ u otvorenoj sferi $B \subset D$ sa centrom u tački z, a f_ζ je klica grane $f(z)$ u sferi B.

Kako je definisana topologija u (V_f, p) nije teško uočiti da je (V_f, p) kompleksno-analitička mnogostrukost nad $\mathbb{C}^n$, budući da je u /1/, sa $p(z, f_z) = z$, definisano lokalno-biholomorfno preslikavanje $p: (V_f, p) \to \mathbb{C}^n$.

D e f i n i c i j a 3.2.2. Neka je $f(z)$ analitička funkcija u oblasti $D \subset \mathbb{C}^n$ i (V_f, p) otvoren skup nad D.

Kazaćemo da se prirodna granica funkcije projektuje van D, ako su povezane komponente, inverzne slike ma koje zatvorene sfere $\bar{B}\subset D$, kompaktni skupovi u(V_f, p).

D e f i n i c i j a 3.2.3. Višeznačna analitička funkcija u oblasti D. ravnomerno se aproksimira racionalnim funkcijama unutar D, ako za svaki kompaktan skup $K\subset D$, svako $\varepsilon>0$ i svaku granu f_K, funkcije f na K, postoji racionalna funkcija $\eta(z)$ takva da je $\max_K|f-\eta(z)|<\varepsilon, \mathcal{P}_\eta\cap K=\emptyset$.

Ako je prethodno ispunjeno za ma koju granu $f_{\hat{K}_H}$ date funkcije $f(z)$, na holomorfnoj obvojnici kompakta $K\subset D$, tada se kaže - f se g-racionalno aproksimira unutar D.

Iz definicije holomorfne obvojnice nekog kompaktnog skupa K iz D /odeljak 1.1. i 3.1./ sleduje da racionalna aproksimacija, neke funkcije, implicira g-racionalnu aproksimaciju. Dalje, za svaki kompaktan skup K iz neke oblasti $D\subset\mathbb{C}^n$, prema definiciji 3.1.1., može se formirati R-obvojnica. Takođe, kao što je napomenuto u 3.1., D je R-konveksna ako je $\hat{K}_R(D)$ kompaktan skup u D, za ma koji kompaktan skup iz D. R-konveksnost oblasti D može se definisati preko racionalne obvojnice oblasti. Naime, R-obvojnica nekog kompakta $K\subset D$ može se posmatrati kao R-obvojnica u $\mathbb{C}^n$: $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n : |\eta(\zeta)|\leq \max_K|\eta(z)|, \eta\in R, \mathcal{P}_\eta\cap K=\emptyset\}$. Tada se kaže da je racionalna obvojnica $\hat{D}_R$ neke oblasti $D\subset\mathbb{C}^n$ unija R-obvojnica $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ kompaktnih skupova $K\subset D$. Dakle, prema prethodnom i definiciji 3.1.1., oblast D je R-konveksna, onda i samo onda, ako je $D=\hat{D}_R$.

D e f i n i c i j a 3.2.4. Neka je $\mathcal{H}_D$ skup svih analitičkih funkcija u oblasti $D\subset\mathbb{C}^n$ kod kojih se prirodna granica projektuje van D. Neka je, dalje, $R'_{\mathcal{H}}(D)$ skup funkcija iz $\mathcal{H}_D$, koje se g-racionalno aproksimiraju unutar D, a $R_{\mathcal{H}}(D)$ skup iz $\mathcal{H}_D$, koje se racionalno aproksimiraju unutar D. Sa $\tilde{\mathcal{H}}_D$, $\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$ i $\tilde{R}'_{\mathcal{H}}(D)$ označićemo polje odnosa, respektivno $\mathcal{H}_D$, $R_{\mathcal{H}}(D)$ i $R'_{\mathcal{H}}(D)$.

Kako su $\mathcal{H}_D$, $R_{\mathcal{H}}(D)$ i $R'_{\mathcal{H}}(D)$ komutativni prstenovi sa jedinicom bez delitelja nule, to se mogu obrazovati odgovarajuća polja odnosa. Dalje, ako se za klasu $\mathcal{H}_D$ uzmu samo jednoznačne funkcije, tada je $\mathcal{H}_D$ skup svih jednoznačnih analitičkih funkcija u D. U tom slučaju je $R_{\mathcal{H}}(D)=R'_{\mathcal{H}}(D)=R(D)$.

L e m a 3.2.1. Svaka meromorfna, u opštem slučaju mnogoznačna, funkcija f u oblasti $D\subset\mathbb{C}^n$ ima oblik $\frac{g}{h}$, gde su g i h analitičke funkcije u D.

D o k a z. Neka je $V_f(D)=\{(z,f_z),z\in D\}$ i $V_f(\mathbb{C}^n)=\{(z,f_z),z\in\mathbb{C}^n\}$, gde je f_z klica jedne grane funkcije $f(z)$ u tački z. Tada je prema definiciji 3.1.1. $(V_f(\mathbb{C}^n),p)$ oblast nad $\mathbb{C}^n$. Znači, funkcija f se može smatrati kao jednoznačna funkcija $\tilde{f}$ u $V_f(D)$. Kako je $\mathbb{C}^n$ oblast holomorfnosti, dakle mnogostrukost Štejna, to je $\tilde{f}=\frac{\tilde{g}}{\tilde{h}}$, gde su $\tilde{g}$ i $\tilde{h}$ analitičke funkcije u $(V_f(\mathbb{C}^n),p)$ [6], znači analitičke i u $(V_f(D),p)$. No, u tom slučaju su $g=\tilde{g}\circ p^{-1}$ i $h=\tilde{h}\circ p^{-1}$ analitičke /višeznačne/ funkcije u D i $f=\frac{g}{h}$.

L e m a 3.2.2. Analitička funkcija u R-konveksnoj oblasti D čija se prirodna granica projektuje van D, može se g-racionalno aproksimirati unutar D.

D o k a z. Pokazaću, najpre, da je $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)=\hat{K}_{H(D)}$ za svaki kompaktan skup K iz D. Neka je $z_0\in\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ i $\varphi(z)$ ma koja jednoznačna analitička funkcija u D. Kako je $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ kompaktan skup u D i D racionalno konveksna oblast, a prema lemi 3.1.1., postoji niz racionalnih funkcija $(R_n(z))$ koji uniformno konvergira funkciji $\varphi(z)$ na $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ /u oznaci $R_n(z)\overset{\hat{K}_R}{\rightrightarrows}\varphi(z)$. Budući da $z_0\in\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$, sledi da je

$$|R_n(z_0)-R_m(z_0)|\leq\max_K|R_n(z)-R_m(z)|. \qquad /2/$$

Znači, $(R_n(z_0))$ je Košiev niz u $\mathbb{C}$ i kao takav konvergira nekom broju $\alpha\in\mathbb{C}^n$. Kako $R_n(z)\overset{\hat{K}}{\rightrightarrows}\varphi(z)$, to i $R_n(z)\overset{K}{\rightrightarrows}\varphi(z)$, te je . Sa druge strane je $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_K|R_n(z)-\varphi(z)|=0$, znači

$$\lim_{n\to\infty}\max_K|R_n(z)|=\max_K|\varphi(z)|. \qquad /3/$$

Prema prethodnom, odnosno iz relacije /2/ i /3/, sleduje da je $|\varphi(z_0)|\leq\max\limits_K|\varphi(z)|$. Kako zadnje važi za ma koju funkciju iz $H(D)$, to $z_0\in\hat{K}_{H(D)}$.

Neka je, dalje, $R(K)$ skup onih racionalnih funkcija čiji su polovi van K. Iz definicije $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ neposredno se dobija da su polovi svake funkcije iz $R(K)$ i van $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$. Više od toga, postoji okolina $\mathcal{U}_{\hat{K}_R}$ skupa $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ koja pripada D i koja nema zajedničkih tačaka sa polovima ma koje funkcije iz $R(K)$. Ovakva okolina je konveksna u odnosu na klasu $R(K)$, te je po teoremi H.Kartan-P.Tulena [9] holomorfno konveksna. Dakle je $\hat{K}_{H(D)} \subset \hat{K}_{H(\mathcal{U}_{\hat{K}})}$. Međutim, iz $R(K) \subset H(\mathcal{U}_{\hat{K}})$ sledi $\hat{K}_{H(\mathcal{U}_{\hat{K}_R})} \subset \hat{K}_{R(K)} \subset \hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$.

Kompaktan skup $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ prema prethodnom je konveksna obvojnica kompakta $K \subset D$ u odnosu na klasu $R(K)$. Kako je svaka funkcija iz $R(K)$ analitička u okolini $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$, to je $R(K) = R(\hat{K}_R(\mathbb{C}^n))$. Znači, racionalna obvojnica za $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$- je obvojnica istog skupa u odnosu na klasu $R(K)$, te je $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n) = \widehat{(\hat{K}_R(\mathbb{C}^n))}_R$. Zaista, ako je $z_0 \in \hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ tada je

$$|r(z_0)| \leq \max_{\hat{K}} |r(z)| \leq \max_{\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)} |r(z)|, \ r \in R(K). \qquad /4/$$

Dalje, neka je $z_0 \in (\hat{K}_R)_R$ tada

$$|r(z_0)| \leq \max_{\hat{K}_R} |r(z)|, \ r \in R(K). \qquad /5/$$

Budući da je $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$ kompaktan skup, svaka od funkcija $r(z)$ dostiže maksimum u nekoj tački $\zeta_r \in \hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$, znači

$$|r(z_0)| \leq |r(\zeta_r)| \leq \max_{K} |r(z)|, \ r \in R(K). \qquad /6/$$

Iz /5/ i /6/ se dobija da $z_0 \in \hat{K}_R(\mathbb{C}^n)$, a prema /4/ $\hat{K}_R(\mathbb{C}^n) = \widehat{(\hat{K}_R(\mathbb{C}^n))}_R$.

Najzad, svaka grana $f_{\hat{K}_H}$ funkcije $f \in \mathcal{H}_D$ je jednoznačna analitička funkcija na $\hat{K}_{H(D)}=\hat{K}_{R}(\mathbb{C}^n)$, dakle analitička funkcija u okolini $\hat{K}_{H(D)}$. Kako je, iz prethodnog $\hat{K}_{H(D)}$ racionalno konveksan skup u D, to se $f_{\hat{K}_H}$ prema lemi 3.1.1. može aproksimirati racionalnim funkcijama na $\hat{K}_{H(D)}$.

D e f i n i c i j a 3.2.5. Neka je $\mathcal{R}_z^{\tilde{\mathcal{H}}}=\{(z,f_z): f_z$ je holomorfna klica funkcije $f\in\tilde{\mathcal{H}}_D\}$ i $\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{H}}}=\bigcup_{z\in D}\mathcal{R}_z^{\tilde{\mathcal{H}}}$. Preko okolina $\{(\zeta,f_\zeta): |\zeta-z|<\varepsilon\}$ se dobija topologija u $\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{H}}}$, odnosno pramen nad D.

Ako se za (z,f_z) uzmu holomorfne klice funkcija iz $\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$, dobija se pramen $\mathcal{R}^{\tilde{R}}$ nad D koji ćemo zvati racionalnim pramenom nad D.

Takođe, imamo g-racionalni pramen $\mathcal{R}^{\tilde{R}'}$ ako se za f_z uzmu klice iz $\tilde{R}'_{\mathcal{H}}(D)$.

Ukoliko je D prosto-povezana oblast tada se $\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{H}}}$, $\mathcal{R}^{\tilde{R}}$, $\mathcal{R}^{\tilde{R}'}$ svode na pramen koji je definisan u odeljku 3.1. Sledeći rezultati su uopštenje rezultata iz 3.1., odnosno rezultati u radu [13] dobijaju se kao specijalan slučaj.

T e o r e m a 3.2.1. Ako je D oblast iz $\mathbb{C}^n$ i ako je $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$, tada je $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{H}}})=0$.

D o k a z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,U_2\}$ otvoren pokrivač oblasti D i $s\in\Gamma(U_1\cap U_2,\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{H}}})$. Ako je $U_{12}=U_1\cap U_2$ povezan skup, s se može posmatrati kao jedna grana neke funkcije f

iz $\tilde{\mathcal{H}}_D$ i, osim toga, $s \in H(U_{12})$. Iz $H^1(D, \mathcal{H}(D)) = 0$ sledi $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{H}(D)) = 0$ te je $s = h_2 - h_1$, pri čemu $h_\nu \in H(U_\nu)$. Pomoću funkcije f i jednačine $s = h_2 - h_1$ funkcije h_ν se produžuju do meromorfnih /mnogoznačnih/ funkcija $\tilde{h}_\nu$ u D. Dalje, prema lemi 3.2.1., $\tilde{h}_\nu = \frac{\tilde{h}'_\nu}{\tilde{h}''_\nu}$ gde su $\tilde{h}'_\nu$ i $\tilde{h}''_\nu$ analitičke u D. Kako je $f = \frac{g}{h}$, g i h su iz $\mathcal{H}_D$, to i $\tilde{h}'_\nu$, $\tilde{h}''_\nu$ pripadaju $\mathcal{H}_D$, odnosno $h_\nu \in \Gamma(U_\nu, \mathcal{R}^{\mathcal{H}})$.

Ako U_{12} nije povezan, s je definisano granama funkcija iz $\mathcal{H}$ na povezanim komponentama skupa U_{12}. Pomoću grana funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}_D$, h_ν se produžuju do funkcija $\frac{\tilde{h}'_\nu}{\tilde{h}''_\nu} \in \tilde{\mathcal{H}}_D$.

Isto se dobija za ma koji otvoren pokrivač oblasti D. Zaista, neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otvoren pokrivač oblasti D i $\{s_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in A \times A}$ kocikl datog pokrivača sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}^{\mathcal{H}}$. Iz definicije pramena $\mathcal{R}^{\mathcal{H}}$ i činjenice da $s_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{R}^{\mathcal{H}})$, odnosno $s_{\alpha\beta} \in H(U_{\alpha\beta})$, sledi da je $\{s_{\alpha\beta}\}$ kocikl datog pokrivača sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$. Kako je $H^1(\mathcal{H}(D), D) = 0 = H^1(D, \mathcal{U})$, to postoji kolanac $h = \{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{H}(D)$, takav da je $s_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$ za $z \in U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Svaka sekcija $s_{\alpha\beta}$ je familija $\{s^\delta_{\alpha\beta}\}$, gde se $s^\delta_{\alpha\beta}$ može identifikovati sa granom neke meromorfne funkcije $f^\delta_{\alpha\beta} = \frac{g^\delta_{\alpha\beta}}{h^\delta_{\alpha\beta}} \in \tilde{\mathcal{H}}_D$ na jednoj povezanoj komponenti otvorenog skupa $U_{\alpha\beta}$. Pomoću $\{f^\delta_{\alpha\beta}\}$ svaka od funkcija h_α može se meromorfno produžiti u oblasti D, i na taj način dobiti meromorfnu funkciju $\tilde{h}_\alpha = \frac{h'_\alpha}{h''_\alpha}$. Kako su produženja dobijena preko funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}_D$, to je $\tilde{h}_\alpha \in \tilde{\mathcal{H}}_D$. Dakle je $s_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$, pri čemu su h_α i h_β grane respektivno $\tilde{h}_\alpha$ i $\tilde{h}_\beta$, te je $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{R}^{\mathcal{H}})$. Najzad, pošto prethodno ne zavisi od izbora kocikla $\{s_{\alpha\beta}\}$ i otvorenog pokrivača oblasti D, dobija se $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}})=0$.

P o s l e d i c a 3.2.1. Ako je D oblast iz $\mathbb{C}^n$, $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$ i ako se svaka funkcija iz $\tilde{\mathcal{H}}_D$ može aproksimirati racionalnim funkcijama unutar D, tada je $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}})=0$.

Polazeći od kocikla $\{f_{\alpha\beta}\}$ sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}^{\tilde{R}}$. nekog otvorenog pokrivača $\{U_\alpha\}$, dolazimo do relacije $f_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha$, obzirom da je $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$. Prema teoremi 3.2.1., h_α i h_β su grane funkcija $\tilde{h}_\alpha=\frac{\tilde{h}'_\alpha}{\tilde{h}''_\alpha}\in\tilde{\mathcal{H}}_D$ i $\tilde{h}_\beta=\frac{\tilde{h}'_\beta}{\tilde{h}''_\beta}\in\tilde{\mathcal{H}}_D$. Iz pretpostavke da se funkcije iz $\mathcal{H}_D$' racionalno aproksimiraju, a po definiciji polja $\tilde{\mathcal{H}}_D$, funkcije $\tilde{h}'_\alpha$, $\tilde{h}''_\alpha$, $\tilde{h}'_\beta$, $\tilde{h}''_\beta$ pripadaju prstenu $R_{\mathcal{H}}(D)$. Ili, $\tilde{h}_\alpha\in\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$, $\tilde{h}_\beta\in\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$

P o s l e d i c a 3.2.2. Ako je $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$ i svaka funkcija iz $\mathcal{H}_D$ se g-racionalno aproksimira unutar oblasti D, tada je $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}'})=0$.

Kao u posledici 3.2.1., iz relacije $f_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha$ se dolazi do funkcija $\tilde{h}_\alpha\in\tilde{\mathcal{H}}_D$, $\tilde{h}_\beta\in\tilde{\mathcal{H}}_D$. Međutim, kako se funkcije iz $\mathcal{H}_D$ g-racionalno aproksimiraju tada su h_α i h_β grane funkcija iz $\tilde{R}'_{\mathcal{H}}(D)$.

L e m a 3.2.3. Ako je D racionalno konveksna oblast iz $\mathbb{C}^n$ i $R^*(D)$ skup svih facionalnih funkcija koje nemaju polova u D, tada je oblast D $R^*(D)$-konveksna.

D o k a z. Neka je $\hat{K}_{R^*(D)}(D)$ obvojnica nekog kompaktnog skupa $K \Subset D$ u odnosu na klasu $R^*(D)$ i

$$\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n : |r(\zeta)|\le \max_K |r(z)|,\ r\in R^*(D)\}. \qquad /7/$$

Najpre, može se pokazati da je $\hat{K}_{R^*(D)}(D)$ ograničen skup. U suprotnom bi postojao niz tačaka $z_m=(z_1^{(m)},z_2^{(m)},\dots,z_n^{(m)})\in \hat{K}_{R^*(D)}(D)$, takav da za jedan indeks ν_0, $1\le \nu_0\le n$, $z_{\nu_0}^{(m)}\to\infty$. Dalje, klasa funkcija $P_{z_{\nu_0}}=\{\sum_0^p a_i z_{\nu_0}^i : p\geq 0,\ a_i\in\mathbb{C},\ p\in N\}$ pripada $R^*(D)$ te je

$$\hat{K}_{R^*(D)}(D)\subset \hat{K}_{P_{z_{\nu_0}}}(D). \qquad /8/$$

Neka su K', $(\hat{K}_{R^*(D)}(D))'$, $(\hat{K}_{P_{z_{\nu_0}}}(D))'$, projekcije, respektivno, skupova K, $\hat{K}_{R^*(D)}$, $\hat{K}_{P_{z_{\nu_0}}}$, u ravni (z_{ν_0}). Tada je, u ravni (z_{ν_0}), K' kompaktan skup i $(\hat{K}_{R^*(D)})'$ neograničen. Znači, prema /8/, projekcija $(\hat{K}_{z_{\nu_0}})'$ je, takođe, neograničen skup u (z_{ν_0}). Međutim, $(\hat{K}_{P_{z_{\nu_0}}})'$ je sadržan u polinomijalnoj obvojnici $(\hat{K}')_P$ u ravni (z_{ν_0}). kompaktnog skupa K'. Dakle je i $(\hat{K}')_P$ neograničen skup u (z_{ν_0}), što je nemoguće prema /25/ iz 2.1.

Skup $\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$ je zatvoren. Zaista, ukoliko to nije tačno. postoji niz (z_m), $z_m\in\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$, i tačka $z_0\notin \hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$, tako da je $\lim_{m\to\infty} z_m=z_0$. Međutim, prema /7/

$$|r(z_m)|\le \max_K |r(z)|,\ \forall r\in R^*(D). \qquad /9/$$

Znači, tačka z_0 ne može biti pol neke funkcije iz $R^*(D)$. Sa druge strane, zbog neprekidnosti

$$\lim_{m\to\infty}|r(z_m)|=|r(z_0)|,\ \forall r\in R^*(D) \qquad /10/$$

Iz /9/ i /lo/ sledi $|R(z_0)| \leq \max_K |R(z)|$, za svaku funkciju $R \in R^*(D)$.

Svaka oblast iz $\mathbb{C}^n$ je prebrojiva u beskonačnosti, to jest $D = \bigcup_{i \in N} K^{(i)}$, gde su $K^{(i)}$ kompaktni skupovi u D i $K^{(i)} \subset K^{(i+1)}$. Budući da je D racionalno konveksna oblast to su $\hat{K}^{(i)}_R(D)$ i $\hat{K}^{(i)}_R(\mathbb{C}^n)$ kompaktni i jednaki skupovi u D i, po definiciji racionalne obvojnice kompaktnog skupa, $K^{(i)} \subset \hat{K}^{(i)}_R$. Dakle je $D = \bigcup_{i \in N} \hat{K}^{(i)}_R$. Neka je, dalje $R(K^{(i)})$ skup racionalnih funkcija čiji polovi ne seku kompakt $K^{(i)}$. Kako je $K \subset K^{(i)}$, $i \geq i_0$, to iz $\zeta \in \hat{K}_R$ sledi $|R(\zeta)| \leq \max_K |R(z)| \leq \max_{K^{(i)}} |R(z)|$, $R \in R(K^{(i)})$, $i \geq i_0$. Ili,

$$\hat{K}_R \subset \hat{K}_{R(K^{(i)})}(D) \subset \hat{K}_{R(K^{(i)})}(\mathbb{C}^n) \subset \hat{K}^{(i)}_R, \quad i \geq i_0. \qquad /11/$$

Obzirom da je $R^*(D) = \bigcap_{i \in N} R(K^{(i)})$, to je prema /11/

$$\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{i \geq i_0} \hat{K}_{R(K^{(i)})}(\mathbb{C}^n) \qquad /12/$$

No, kako $\hat{K}^{(i)}_R \subset D$, prema /11/ i /12/, sleduje da i $\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n) \subset D$ Prema prethodnom, skup $\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$ je zatvoren i $\hat{K}_{R^*(D)}(D) \subset \hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$. To znači, ako je z_0 tačka nagomilavanja za $\hat{K}_{R^*(D)}$, tada je $z_0 \in D$. Kao što je pokazano da je $\hat{K}_{R^*(D)}(\mathbb{C}^n)$ zatvoren skup, bolje reći iz relacija /9/ i /lo/, dobija se da $z_0 \in \hat{K}_{R^*(D)}(D)$.

U posledici 3.1.1., odnosno posledici iz [13], pretpostavlja se za prosto-povezanu oblast da je holomorfno-lonveksna i racionalno-konveksna. Primećujemo da je, prema lemi

3.2.3., dovoljno pretpostaviti da je oblast racionalno-konveksna - pošto je, u tom slučaju, i holomorfno-konveksna. Dalje, iz leme 3.2.3. sleduje i sledeća teorema:

T e o r e m a 3.2.2. Ako je D racionalno-konveksna oblast iz $\mathbb{C}^n$, tada je $H^p(D,\mathcal{H}(D))=0, p\geq 1$, i $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}'})=0$.

D o k a z. Ako je D racionalno-konveksna, prema lemi 3.2.3., sledi da je D konveksna u odnosu na klasu $R^*(D)$. Sa druge strane, svaka od funkcija iz $R^*(D)$ je analitička u D te je D, po teoremi H.Kartan-P.Tulena [9] , oblast holomorfnosti. Dakle je $H^p(D,\mathcal{H}(D))=0, p\geq 1$.

Budući da je D racionalno-konveksna oblast, iz leme 3.2.2. sledi da se svaka funkcija iz D može g-racionalno aproksimirati unutar D. A kako je, prema prethodnom, $H^1(D,\mathcal{H}(D))=0$ to se iz posledice 3.2.2.. neposredno dobija da je i $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}'})=0$.

U odeljku 3.1. dati su dovoljni uslovi da bi grupa $H^1(D,\mathcal{R})$ bila trivijalna /teorema 3.1.1., posledica 3.1.1./ za prosto-povezanu oblast D, gde je $\mathcal{R}$ pramen nad D koji je definisan relacijom /2/. Sa druge strane, iz trivijalnosti grupe $H^1(D,\mathcal{R})$ sleduje da je D prosto-povezana oblast i da je konveksna u odnosu na klasu $\tilde{R}(D)\cap H(D)$ /teorema 3.1.2./. Dalje, u odeljku 3.2. dati su dovoljni uslovi da bi grupa $H^1(D,\mathcal{R}^{\tilde{R}})$ bila trivijalna /teorema 3.2.1./. Analogno ovome može se nešto više ustanoviti za oblast D ako je grupa $H^1(D, \mathcal{R}^{\tilde{R}})$ trivijalna.

T e o r e m a 3.2.3. Ako je oblast D iz $\mathbb{C}^2$ i $H^1(D, \mathcal{R}^{\tilde{R}}) = 0$, tada je D konveksna u odnosu na klasu $\tilde{R}(D) \cap H(D)$.

D o k a z. Dokaz teoreme se zasniva, uglavnom, na dokazu teoreme 3.1.2. Naime, ako se pretpostavi suprotno, svaka od funkcija iz $\tilde{R}(D) \cap H(D)$ se analitički produžuje u okolinu neke tačke $\zeta_0 \in \partial D$. Dalje, pomoću kompleksnih pravih L_1 i L_2 /relacija /7/ iz 3.1./ može se formirati pokrivač $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ oblasti D. U tom slučaju, funkcija

$$f(z) = \frac{1}{\left((z_2 - \zeta_2'') - \frac{\zeta_2' - \zeta_2''}{\zeta_1' - \zeta_1''}(z_1 - \zeta_1'')\right)\left(z_2 - \zeta_2'' + \frac{\zeta_1' - \zeta_1''}{\zeta_2' - \zeta_2''}(z_1 - \zeta_1'')\right)} \qquad /13/$$

određuje kocikl u odnosu na $\mathcal{U}$ sa vrednostima i u pramenu $\mathcal{R}^{\tilde{R}}$. Zaista, prema definiciji 3.2.4. i 3.2.5., sečenje nad $U_1 \cap U_2$ je jednoznačna analitička funkcija u $U_1 \cap U_2$ a koja je jedna grana neke funkcije iz $\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$. A kako je funkcija iz $\tilde{R}(D)$ istovremeno i element klase $\tilde{R}_{\mathcal{H}}(D)$, to je kocikl /13/, zaista, sa vrednostima u pramenu $\mathcal{R}^{\tilde{R}}$.

Pošto je $H^1(D, \mathcal{R}^{\tilde{R}}) = 0$ odnosno $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{R}^{\tilde{R}}) = 0$, to je

$$f(z) = h_2(z) - h_1(z), \qquad /14/$$

gde $h_\nu \in \Gamma(U_\nu, \mathcal{R}^{\tilde{R}})$, $z \in U_1 \cap U_2$. Funkcije h_ν su oblika $\frac{h'_\nu}{h''_\nu}$, gde su h_ν' i h_ν'' analitičke grane funkcija $\tilde{h}_\nu' \in R_{\mathcal{H}}(D)$, $\tilde{h}_\nu'' \in R_{\mathcal{H}}(D)$, u $\mathcal{U}_\nu$. Prema definiciji klase $\mathcal{H}_D$ /$R_{\mathcal{H}}(D) \subset \mathcal{H}_D$/, funkcije h_ν' i h_ν'' su grane funkcija $\tilde{h}_\nu'$ i $\tilde{h}_\nu''$ u oblasti D. Prema tome $h_\nu \in \Gamma(\mathcal{U}_\nu, \mathcal{R})$. Obzirom na relacije /13/ i /14/ dobija se funkcija $g(z)$, kao u relaciji /10/ iz 3.1., koja se analitički produžuje u tačku ζ_0. Najzad, pomoću funkcije $\varphi(z)$, koja je definisana sa /11/ u 3.1., dolazi se do protivrečnosti.

L I T E R A T U R A

1. Behnke H., Stein K, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromor phie-Konvexität, Math. Ann. 116 (1938), 2o4-216.
2. Behnke H., Stein K., Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Mitt. Math. Ges. Hamburg, VIII (194o).
3. Gunning R.C., Rossi H., Analytic functions of several complex variables, (1965).
4. Gončar A. A. (redakcija), Nekatorie vaprosi teorii približenij, In.lit., Moskva (1963)
5. Dolbeut P., Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I, Ann. Math. 64 (1956) 83-12o, II, Ann. Math. 14o (196o) 94-123.
6. Kojiwara J., Sakai E., Generalization of Levi-Oka's theorem concerning meromorphic functions, Nayoya Math. J. vol. 29, No 1, (1967), 75-84.
7. Cartan H., Seminaire ENS, 1953-1954, Paris.
8. Cartan H., Varietes analytiques réeles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. Math. France 85(1957), 77-99.
9. Cartan H., Thullen P., Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen: Regularitäts und Konvergenzbereiche, Math. Ann., lo6(1932), 617-647.
lo. Cousin P., Sur les fonctions de n variables complexes, Acta Math. 19(1895).
11. Lovrentiev M. A., Sur les fonctions d'une variable complex représentables par des série de polynomes,Hermann, Paris, 1936.
12. Malgrange B., Lectures on the theory of funkctions of several complex variables, Bombay (1958).
13. Nikić M., Neke oblasti u $\mathbb{C}^2$, Mat. ves. 8(23),2(1971).
14. Oka K., Sur les fonctions analytiques de plusiears variables, Tokyo, I wanomi Shoten (1961).
15. de Rham G., Seminar on Several Complex variables, I ns. for. Ad. st., Princton, N.J. (1958).
16. Royden H.L., Functions algebras, Bull. Amer. Mathe. Soc., 69 (1963) 281-298.
17. Serre J.P., Une propriété topologuque des domiaines de Runge, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955) 133-134.
18. Walsch J.L. Über die Entwicklung einer harmonischen Functionen nach harmonischen Polynomen, J. R. Ang. Math., 159(1928) 197-2o9.

19. Hartogs F., Über die ans den singulären einer analytischer Function mehrerer Veränderlichen bestehenden Gebilde, Acta Math., 32(19o9) 57-79.

2o. Hitotumati S., Kota O., Ideals of meromorphic functions of several complex variables, Math. Ann. 125 (1952) 119-126.

21. Hörmander L., An Intraduction to complex analysis in several variables (1966).

22. Šabat B.V., Vedenije v kompleksnij analiz, Moskva (1966).