DO 121

Mr. Časlav Djaja

TEORIJA STABILNOSTI FAMILIJE DINAMIČKIH SISTEMA U METRIČKIM PROSTORIMA

(Doktorska disertacija)

BEOGRAD 1967

UVOD

Opšta teorija dinamičkih sistema u metričkim prostorima data je u [19], gde su izložene osnovne definicije i teoreme i gde se uzima u obzir jednoznačnost preslikavanja metričkog prostora R u samog sebe. Već pri samoj definiciji dinamičkog sistema, ne vezuje se za diferencijalne jednačine i izvode se teoreme nezavisno od njih, mada se trajektorija kretanja dinamičkog sistema u Euklidovom prostoru može interpretirati kao integralna kriva sistema diferencijalnih jednačina

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i\ (x_1,x_2,\ldots x_n), \qquad (i = 1,2,\ldots n),$$

gde su x_i funkcije, a parametar t nezavisno promenljiva. Tako je nastala teorija apstraktnih dinamičkih sistema, gde se obilato koriste topološko-metričke metode, a u novijim radovima se posmatra dinamički sistem u ma kakvom topološkom prostoru. Topološki problemi teorije dinamičkih sistema dati su u [18], gde su navedeni i neki primeri, a opštija definicija dinamičkog sistema, gde parametar t ne mora pripadati skupu realnih brojeva, data je u [16].

Medjutim, iako u jednom pravcu mnogo opštiji, ovako definisan dinamički sistem (u daljem tekstu ćemo upotrebljavati skraćenicu DS) ima tu ograničenost što predstavlja jednoznačnost preslikavanja, što nije uvek slučaj ni kod rešenja diferencijalnih jednačina. Stoga se morala dati definicija uopštenih (disperzionih) dinamičkih sistema i razviti čitava teorija koja je s jedne strane uopštenje teorije integralnih krivih sistema (1), koju je još izgradio H. Poincaré, a s druge uopštenje teorije dinamičkih sistema, koja pretpostavlja jednoznačnost preslikavanja. Teorija uopštenih DS obradjena je u [2], [14], [5], [6] i [15]. Uopšteni odn. disperzioni DS je definisan slično kao i DS G. Birkhoff-a ([3]), tj. kao preslikavanje, ali višeznačno, metričkog prostora u samog sebe, pri čemu su ispunjeni dopunski uslovi. Sa topološke tačke gledišta razlika u definicijama sastoji se u tome što se "jednoznačni" DS definiše kao jednoparametarska grupa neprekidnog preslikavanja topološkog proizvoda $R \times I$ na R, gde je R metrički prostor, a I obično skup realnih brojeva, a uopšteni kao jednoparametarska polugrupa preslikavanja proizvoda $R \times I^+$ na R, gde je I^+ skup nenegativnih realnih brojeva. Pri tome moraju biti ispunjeni još neki uslovi.

U kvalitativnoj teoriji diferencijalnih jednačina veoma opsežno je obradjena stabilnost u smislu Ljapunova počev od prvobitne teorije ([11] , [13], [23]) pa do najnovijih radova u teoriji apstraktnih DS ([1], [2o], [21]). U mnogobrojnim radovima su obradjeni mnogi problemi teorije stabilnosti u smislu Ljapunova, koji se odnose na stabilnost kretanja nekog materijalnog sistema podvrgnutog trenutnim dejstvom poremećajnih sila. Ako je zakon kretanja dat sistemom diferencijalnih jednačina, onda se istim sistemom odredjuju tzv. neporemećena i poremećena kretanja, a uzimaju se samo drugi početni uslovi, koji daju razna poremećena kretanja, što znači da poremećajne sile deluju samo trenutno, a ne za vreme kretanja. Strogo uzevši u praksi se kretanja vrše uvek pod stalnim dejstvom poremećajnih sila, te je stoga i stvorena odgovarajuća teorija stabilnosti kretanja, odn. dinamičkih sistema. Ovakva definicija i osnovne teoreme u vezi sa stabilnošću u smislu Ljapunova pod stalnim dejstvom poremećaja data je u radovima [7], [8] i [12]. Tamo je za definiciju stabilnosti pod stalnim dejstvom poremećaja uzeto u obzir dva sistema diferencijalnih jednačina

(2) $$\frac{dx_i}{dt} = X_i\ (t, x_1, x_2, \ldots x_n)\ , \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(t,x_1,x_2,\dots x_n) + R_i(t,x_1,x_2,\dots x_n),$$

gde su naravno ispunjeni uobičajeni uslovi neprekidnosti i jedinstvenosti. Funkcije R_i, koje su podjednako ograničene u nekoj oblasti, su baš te koje karakterišu neprestano dejstvo poremećaja, pa se stabilnost rešenja sistema (2) definiše pomoću rešenja sistema (3).

Opštija definicija stabilnosti kretanja odn. DS pod stalnim dejstvom poremećaja ili, kako se još naziva, stroge stabilnosti data je u [2o] i [21]. DS se uzima u lokalne kompaktnom metričkom prostoru R i definiše se kao polugrupa $f(p,t)$ $(p\in R, t\in I^+)$ neprekidnog preslikavanja topološkog proizvoda $R\times I^+$ na R, gde je I^+ skup nenegativnih realnih brojeva, pri čemu ne mora biti ispunjen uslov jedinstvenosti. Za definiciju stroge stabilnosti nekog skupa $M\subset R$ u odnosu na DS $f(p,t)$ uzeti su u obzir i drugi dinamički sistemi $f^*(p,t)$ koji sa DS $f(p,t)$ stoje u odnosu

$$\rho\left[f(p,t),f^*(p,t)\right] < \varphi(t),$$

gde je ρ metrika prostora R a $\varphi(t)$ definisana na I^+ neopadajuća funkcija takva da je $\varphi(0) = 0$.

Pomenuta upotreba drugih DS pri izučavanju stabilnosti kretanja odn. stabilnosti skupova pri stalnim delovanjem poremećaja navela me je na ideju da definišem familiju DS, koju označavam sa $F = \bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t)\}$ $(p\in R,\ t\in I$ a J je skup indeksa), u kojoj je svaki DS definisan kao u [19], i da donekle razvijem teoriju stabilnosti familije DS. U toj teoriji se uglavnom radi o stabilnosti u smislu Lagrange-a, u smislu Ljapunova i stabilnosti u smislu Poisson-a. Pored još nekih kvalitativnih svojstava familije kretanja, koja je definisana sa $F_p = \bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t)\}$ (p = const.), to je suština ovog rada. Naravno da on ne pretstavlja neko veće uopštenje teorije dinamičkih sistema date u [19], već u izvesnoj meri samo onih delova, koji se odnose na stabilnost kretanja. Kako sam mnoge definicije i teoreme iz [19] i drugih radova želeo da "prenesem" na familiju DS, to su neki dokazi veoma slični u njihovim algoritmima, ali sam ih u većini slučajeva izvodio radi održavanja celine i postupnosti.

Ovaj rad je podeljen na pet poglavlja.

U prvom poglavlju data je najpre definicija familije dinamičkih sistema, zatim definicije potpuno invarijantnog skupa, α i ω-graničnih tačaka, analogne onima iz [19]. Neki stavovi su dokazani, a neki su samo navedeni bez dokaza, zbog istovetnosti dokazivanja u [19]. Naveden je i primer za ω-granične tačke modifikovan primeru iz [19]. Zatim je data definicija α i ω-granične funkcije, koja se i dalje upotrebljava, i dati su stavovi koji se odnose na nju. Definisan je dinamički levak, njegov odsečak i presek i dokazana dva stava, koji se odnose na koneksnost (analogan stavu u [6]) i kompaktnost odsečka levka. Naziv "dinamički levak" uzeo sam stoga što sličan naziv već postoji u literaturi ([2],[15],[5],[6]).

Drugo poglavlje je posvećeno stabilnosti u smislu Langrange-a, no u njemu se daju još neke definicije, leme i stavovi koji se docnije primenjuju. Dokazana su analogno kao u [5] dva stava (2.1 i 2.7) o potrebnim i dovoljnim uslovima stabilnosti u smislu Lagrange-a. U dokazima ovih, a i drugih stavova, figuriše "odstupanje", kao što je definisano u [22]. Leme 2.1 i 2.3 koje su ovde dokazane, analogne su onima iz [15], gde su uzete kao aksiome, a lema 2.2 je analogna teoremi 2. § 3. u [15], samo se ovde odnosi na familiju kretanja. Stavovi 2.8 i 2.9 dokazani su koristeći se teoremom 4. § 3. u radu [15], ali uz pomoć uvedenih stavova. Medjutim, osnovna definicija koja dominira ovim poglavljem je translatornost familije DS F_p, koja je karakteristična baš za familiju DS. Na nju se nadovezuje nekoliko stavova, a neki se prenose u sledeće poglavlje. Sem toga je ovde definisan i potpuno minimalni skup.

U trećem poglavlju se govori o stabilnosti familije kretanja F_p u smislu Ljapunova (S-stabilnost). Daju se i definicije podjednake i asimptotske stabilnosti familije kretanja, koje su u izvesnom smislu generalizacija poznatih definicija iz [19], [1o] i [9]. Zatim se definiše stabilnost familije DS u skupu A u odnosu na skup B i pokazuje "paralelnost" definicija stabilnosti familije kretanja F_p i familije DS u skupu A. Dalje je data definicija tzv. Q stabilnosti DS $f_o \in F$ i dokazani neki stavovi u vezi sa graničnom funkcijom, a data je i veza izmedju S i Q stabilnosti sa nekoliko stavova. Stav 3.9 se dokazuje delimično na sličan način kao u [19] (str. 421), ali ovde pretstavlja uopštenje za familiju kretanja, zatim su polazeći od definicija u [2o] definisane ograničene familije DS i dokazana dva stava koji se odnose na njih. Na kraju je kao u [1o] (str. 32) definisana stabilnost i asimptotska stabilnost skupa $A \subset R$ kao i potpuno podjednaka asimptotska stabilnost i dokazani, analogno kao u [1o] (str. 36 i 38) neki stavovi.

Četvrto poglavlje je posvećeno stabilnosti u smislu Poissona (P-stabilnost), potpuno minimalnim skupovima i odnosima sa S stabilnim familijama kretanja. Koristeći se definicijama iz [14] i [15] date su definicije P stabilne familije kretanja i preseka dinamičkog levka i dokazani osnovni stavovi, slično onima iz [14] (str. 75) i [15] (str. 146). Zatim su dokazani neki stavovi koji povezuju potpuno invarijantne i potpuno minimalne skupove sa S stabilnim familijama kretanja, a koje su u neku ruku generalizacija sličnih stavova iz [24] (str. 97-1o3). Na kraju ovog poglavlja je data veza izmedju potpuno invarijantnih skupova, P stabilnih i translatornih familija. Definisana je i stroga stabilnost u smislu Poisson-a i dokazan jedan stav u vezi s tim.

Peto poglavlje je ustvari nastavak četvrtog, jer su u njemu definisane rekurentne familije kretanja, koje su specijalan slučaj P stabinih familija, što je i dokazano. U početku ovog poglavlja je pokazana ekvivalentnost dveju definicija rekurentnih familija i dokazani neki stavovi u vezi tih definicija. Koristeći se teoremama iz [19] (str. 375 - 376, teoreme 7.07 i 7.09) dokazana je pod izvesnim uslovima totalna minimalnost adherencije dinamičkog levka i dati su potrebni i dovoljni uslovi da familija F_p bude rekurentna. Na kraju je data veza izmedju rekurentne familije kretanja i granične funkcije.

Kao što se vidi iz gore navedenog, u radu su proučavani samo neki pojmovi teorije dinamičkih sistema i dato je njihovo uopštenje odn. proširenje na familiju DS. Naravno da ovako otvorena problematika pruža velike mogućnosti daljeg proširivanja teorije stabilnosti i primenjivanja kako kod topoloških problema teorije apstraktnih DS tako i kod stabilnosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina. Prema tome, ukoliko dodje do bilo kakvog daljeg razradjivanja teorije obuhvaćene ovim radom, naslov rada se mora promeniti, odn. staviti ispred naslova reč "Osnovi" ili slično. Već samo poslednja dva poglavlja govore, da se kao prvo mogu proučavati dalje klase P stabilnih familija polazeći od podele navedene u [25], ili pak mnoga kvalitativna svojstva DS data u [19] i [18] proširiti na familiju DS. U drugom pravcu može se raditi, ako se mnogobrojni problemi kvalitativne teorije postavljeni u [19] i [18] saobraze u smislu definicije familije DS. Jedan pravac opet je izučavanje stabilnosti u drugih kvalitativnih svojstava u topološkim prostorima analogno onim u [17] i [4], samo sad na čitavu familiju.

Da napomenem da sam pojedine delove ovog rada saopštio na sednicama Matematičkog instituta u Beogradu u 1966 god., na Čehoslovačkoj konferenciji za diferencijalne jednačine, održane u Bratislavi 1966 god. i na Seminaru za kvalitativnu teoriju diferencijalnih jednačina, u Mat. institutu u Beogradu 1967 god.

Literatura je podeljena na dva dela. U prvom delu su uglavnom naučni radovi i monografije kojima sam se neposredno služio pri izradi ovog rada, što se uostalom vidi iz ovog uvoda. U drugom delu je navedena literatura koju sam uopšte koristio pri izučavanju dinamičkih sistema.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost profesorima D^r T. Pejoviću i D^r Dj. Kurepi, koji su mi svojim savetima i primedbama pomogli u radu, kao i prof. D^r Z. Mamuziću, koji mi je dao pravu orijentaciju još na samom početku ovog rada.

Beograd, maja 1967 god. Č.Dj.

1. UVODNE DEFINICIJE I STAVOVI

Neka je dat metrički prostor R sa metrikom ρ, skup realnih brojeva I i familija preslikavanja $f(p,t)$, $p \in R$, $t \in I$, tako da svakoj tački $p \in R$ i svakom broju $t \in I$ odgovara jedna odredjena tačka $f(p,t) \in R$.

DEFINICIJA 1.1. Dinamički sistem (u daljem tekstu DS) naziva se jednoparametarska grupa $f(p,t)$ preslikavanja topološkog proizvoda $R \times I$ na R, ako su ispunjeni sledeći uslovi odn. svojstva:

I. $f(p,0) = p$, za svaku tačku $p \in R$.

II. $\lim_{n\to\infty} f(p_n,t_n) = f(p,t)$, gde je $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$,

odn. za ma kakvo $\varepsilon > 0$ može se naći neko $\delta(\varepsilon) > 0$, takvo, da ukoliko je $\rho(p,p_0) < \delta$ i $|t - t_0| < \delta$, onda je

$$\rho\left[f(p,t),f(p_0,t_0)\right] < \varepsilon.$$

III. $f(f(p,t_1),t_2) = f(p,t_1 + t_2)$, za svako $p \in R$ i ma koja dva broja $t_1,t_2 \in I$ (svojstvo grupe).

Iz uslova II može se lako izvesti neprekidna zavisnost $f(p,t)$ od početnih uslova, koju ćemo dalje obeležavati sa II_1 i ovako formulisati ([19], str. 327):

II_1. Za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$ i ma koju tačku $p \in R$ i proizvoljno veliki realan broj $T > 0$ može se naći broj $\delta(\varepsilon,T) > 0$, takav da, ukoliko je $\rho(p,q) < \delta$ $(q \in R)$ i $|t| \leqslant T$, onda je zadovoljena nejednakost

$$\rho\left[f(p,t),f(q,t)\right] < \varepsilon.$$

Iz I i III sleduje inverzna transformacija $f(f(p,-t),t)=p$.

Posmatrajmo sad skup dinamičkih sistema

$F = \{f_i(p,t); p\in R, t\in I\}$, gde svi dinamički sistemi f_i (i prolazi skupom indeksa J) ispunjavaju gore navedene uslove (svojstva) i nazovimo ga <u>familijom dinamičkih sistema.</u>

Za jedno fiksirano p funkciju $f_i(p,t)$ nazvaćemo <u>kretanjem</u> DS $f_i(p,t)$ familije F, parametar t <u>vremenom</u>, a skup tačaka $f_i(p,t)$, gde $t\in(-\infty, +\infty)$, <u>trajektorijom</u> kretanja $f_i(p,t)$ i obeležavati sa $f_i(p,I)$.

Skup svih DS za jedno fiksirano p čini podfamiliju familije DS F i nju ćemo nazvati <u>familijom kretanja</u> i obeležavati sa F_p. Dakle

$$\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t)\} = F_p\subset F \qquad \text{i} \qquad \bigcup_{p\in R}\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t)\} = F.$$

Analogno gornjem nazovimo skup tačaka $f_i(p,t)$ (p = const, i = const.), gde je $t\in[0, +\infty)$, odn., $t\in(-\infty, 0]$ <u>pozitivnom</u>, odn. <u>negativnom polutrajektorijom</u> kretanja $f_i(p,t)$ i obeležimo sa $f_i(p,I^+)$, odn. sa $f_i(p,I^-)$.

Ako t varira u razmaku $[t_1,t_2]$, onda ćemo odgovarajući deo trajektorije zvati <u>konačni luk</u> trajektorije i obeležavati sa $f_i(p;t_1,t_2)$.

DEFINICIJA 1.2. Ako je p=const. i t=const., onda ćemo skup $S_t^p = \bigcup_i\{f_i(p,t)\}$ ($f_i\in F$) nazvati <u>presekom</u> dinamičkog levka T_p tačke p, gde je dinamički levak dat sledećom definicijom:

DEFINICIJA 1.3. Skup $\bigcup_i\{f_i(p,I)\}$, gde i uzima sve vrednosti iz J zove se <u>dinamički levak</u> tačke p i obeležava se sa T_p.

Analogno se definiše skup $\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,I^+)\}$ odn. $\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,I^-)\}$ kao pozitivan, odn. negativan dinamički polulevak tačke p i obeležava sa T_p^+ odn. T_p^-. [1])

Ako vreme t varira u konačnom razmaki $[t_1,t_2]$, onda se skup $\bigcup_{i\in J}\{f_i(p;t_1,t_2)\}$ zove konačni odsečak dinamičkog levka tačke p i obeležava sa $T_p(t_1,t_2)$.

DEFINICIJA 1.4. Familija kretanja $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ zove se podjednako neprekidna po početnim uslovima, ako proizvoljnom broju $\varepsilon > 0$ i ma koliko velikom broju $T > 0$ odgovara za sva kretanja $f_i(p,t) \in F_p$ broj $\delta(\varepsilon,T) > 0$, tako da je

$$\rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] < \varepsilon$$

za svako $-T \leq t \leq +T$, ukoliko je $\rho(p,q) < \delta$.

STAV 1.1. Ako je metrički prostor R kompaktan, onda je za svako $p \in R$ familija kretanja F_p podjednako neprekidna po početnim uslovima.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno ali fiksirano i neka je $T > 0$ neki konačan broj. Zbog svojstva II_1 DS mogu se naći brojevi $\delta_i(\varepsilon,T) > 0$, gde i prelazi skupom indeksa, tako da je

(1.1) $$\rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] < \varepsilon,$$

---

1) Često ćemo, skraćenja radi umesto $\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t)\}$ pisati $\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$.

za svako $-T \leq t \leq +T$, kadgod je $\rho(p,q) < \delta_i$. Ako uzmemo jedan broj $\delta_k \in \{\delta_i;\ i \in \mathcal{J}\}$ onda će umesto jedne nejednakosti (1.1) doći skup nejednakosti

$$(1.2) \qquad \rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] < \varepsilon_i, \qquad (i \in \mathcal{J}).$$

Formirajmo sad skup nejednakosti

$$\rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] \leq \varepsilon_i',$$

gde je za svako i $\varepsilon_i - \varepsilon_i' = \varepsilon_i'' > 0$. [1]). Odgovarajuće okoline tačaka $f_i(p,t)$ označimo sa S_i'. Formirajmo dalje za jedno fiksirano t skupove $E = \bigcup_i S_i(f_i(p,t), \varepsilon_i)$ i $E' = \bigcup_i S_i'(f_i(p,t), \varepsilon_i')$. (U okolinama iz skupa E se očigledno nalaze tačke $f_i(q,t)$).

Dokažimo najpre da je $\overline{E'} \subset E$. Neka $x \in \overline{E'} = \overline{\bigcup_i S_i'}$, gde je $S_i' = \overline{S_i'}$, za svako $i \in \mathcal{J}$, a to znači da je za bilo koju okolinu $\mathcal{U}(x)$ tačke x presek $\bigcup_i S_i' \cap \mathcal{U}(x) \neq \lambda$. Kako je prema konstrukciji $S_i' \subset S_i$ za svako $i \in \mathcal{J}$, pa prema tome i $\bigcup_i S_i' \subset \bigcup_i S_i$, to sleduje da i presek $\bigcup_i S_i \cap \mathcal{U}(x) \neq \lambda$. Taj presek je otvoren skup. Dokažimo da on sadrži tačku x.

Iz relacije $\bigcup_i S_i' \cap \mathcal{U}(x) \neq \lambda$ sleduje da postoji bar jedno $k \in \mathcal{J}$ za koje je $S_k' \cap \mathcal{U}(x) \neq \lambda$, a to znači da $x \in \overline{S_k'} = S_k'$. Uzmimo sad $\frac{\varepsilon_k''}{2}$ okolinu tačke x. Kako to $x \in S_k'$, to će biti

$$\rho(x, S_k') = \inf_{y \in S_k'} \rho(x,y) < \frac{\varepsilon_k''}{2},$$

1) ε_i'' je proizvoljno mali konačan broj.

jer se svaka tačka adheracije skupa (u ovom slučaju skupa $\overline{S'_k}$) u metričkom prostoru nalazi na nultom rastojanju od tog skupa. Medjutim, prema izboru brojeva ε''_i biće $S(S'_k, \varepsilon''_k) \subset S_k$, pa zbog toga $x \in S_k$, te i $x \in \bigcup_i S_i = E$. Prema tome $\overline{E'} \subset E$.

Kako je R kompaktan, to je onda i $\overline{E'}$ kompaktan, kao zatvoren skup kompaktnog prostora. Posmatrajmo njegov pokrivač $\{S_i : i \in J\}$ skupa $\overline{E'}$. Zbog njegove kompaktnosti postoji konačan broj skupova, S_j $(j=1,2,\dots,N)$, koji takodje pokrivaju $\overline{E'}$: Ako tom konačnom pokrivaču dodamo okolinu prečnika ε, koju ćemo označiti sa ε_0, onda će se svi parovi tačaka $(f_i(p,t), f_i(q,t))$, gde i prolazi skupom indeksa J razbiti na N+1 grupu, tako da ćemo umesto (1.2) imati skup nejednakosti

$$\rho\left[f_i^j(p,t), f_i^j(q,t)\right] < \varepsilon_j, \qquad (i \in J;\ j=0,1,\dots,N), \tag{1.3}$$

ukoliko je $\rho(p,q) < \delta_k$.

Ako u (1.3) umesto brojeva ε_j uzmemo jedinstven broj $\varepsilon_o = \varepsilon$, onda će mesto broja δ_k doći brojevi $\delta_j(\varepsilon) > 0$ $(j=0,1,\dots,N)$ i nejednakosti $\rho(p,q) < \delta_j$, tako da će za svih N+1 grupa biti zadovoljena relacija

$$\rho\left[f_i^j(p,t), f_i^j(q,t)\right] < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Ako stavimo $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)$, onda će tim pre biti u važnosti relacija (1.4). Budući da smo vreme t uzeli proizvoljno, time je stav dokazan.

DEFINICIJA 1.5. Familija kretanja F_p naziva se <u>podjednako neprekidna</u> po parametru t, ako proizvoljno izabranom broju $\varepsilon > 0$ odgovara za sva kretanja $f_i \in F_p$ broj $\delta(\varepsilon) > 0$, tako da je

$$\rho[f_i(p,t'),f_i(p,t)]<\varepsilon,$$

za sva kretanja $f_i \in F_p$, kadgod je $|t' - t| < \delta$.

Na osnovu te definicije, a analogno dokazu u stavu 1.1 može se dokazati da važi

POSLEDICA 1.1. Ako je prostor R kompaktan, onda je familija kretanja F_p podjednako neprekidna po parametru t.

DEFINICIJA 1.6. Neka je dat niz brojeva $\{t_n\} \subset I$, takav da je

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty.$$

Ako za jedno kretanje $f_i(p,t) \in F_p$ odgovarajući niz $\{f_i(p,t_n)\}$ konvergira ka tački q, kad $n \to \infty$, onda se tačka q zove <u>ω-granična tačka</u> kretanja $f_i(p,t)$. Skup svih ω-graničnih tačaka kretanja obeležavaćemo sa Ω_{pi}.

Ako je pak dat niz brojeva

$$\dots < t_n < \quad \dots \quad < t_2 < t_1 \leq 0, \quad \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty,$$

i pri tome odgovarajući niz tačaka konvergira ka tački r, tj. ako je $\lim_{n\to\infty} f_k(p,t_n) = r$, onda se tačka r zove <u>α-granična tačka</u> kretanja $f_k(p,t)$. Skup svih takvih tačaka obeležavaćemo sa A_{pk}.

DEFINICIJA 1.7. Ako za sva kretanja $f_i(p,t)$ postoje rastući nizovi $\{t_n^i\}$ $(i \in J)$, takvi da je $\lim t_n^i = +\infty$, kad $n \to \infty$, odn. da je $\lim t_n^i = -\infty$, i da je $\lim_{n\to\infty} f_i(p,t_n^i) = q$, onda se tačka q zove <u>ω-granična</u> odn. <u>α-granična tačka</u> familije F_p.

Skup svih takvih tačaka obeležavaćemo sa Ω_p (A_p). Odmah se vidi da je, ukoliko Ω_p odn. A_p postoji

$$\Omega_p = \bigcap_i \Omega_{pi}, \quad A_p = \bigcap_i A_{pi} \quad i \quad \Omega_p \subset \bigcup_i \Omega_{pi}, \quad A_p \subset \bigcup_i A_{pi}.$$

U daljem tekstu stavljaćemo $\bigcup_i \Omega_{pi} = \Omega_{pF}$ i $\bigcup_i A_{pi} = A_{pF}$.

DEFINICIJA 1.8. Skup A zove se potpuno invarijantan, ako je $f_i(A,t) = A$, za sve funkcije $f_i \in F$ i svako $t \in I$. [1]). Skup A zove se delimično invarijantan, ako je $f_i(A,t) = A$, za funkcije $f_i \in F' \subset F$, gde je F' pravi deo od F, za svako $t \in I$.

To znači, da ukoliko $p \in A$, onda i $f_i(p,t) \in A$, za svako $f_i \in F$ i svako $t \in I$, odn. za samo neke $f_i \in F$.

Očigledno da je R potpuno invarijantan skup. Svaka trajektorija $f_k(p,I)$ familije F_p je invarijantan skup u odnosu na preslikavanje f_k ([19], str. 33o).

STAV 1.2. Adherencija potpuno invarijantnog skupa je potpuno invarijantan skup.

Neka je A potpuno invarijantan skup. Ako je $p \in A \subset \bar{A}$, onda je i $f_i(p,t) \in A \subset \bar{A}$, za svako $f_i \in F$ i svako $t \in I$. Stoga uzmimo da je $p \in \bar{A} \setminus A$. Onda postoji niz $\{p_n\} \subset A$, koji konvergira ka p. Zbog neprekidnosti preslikavanja $f_i \in F$ biće i $\lim_{n \to \infty} f_i(p_n,t) = f_i(p,t)$ za svako $f_i \in F$. Podjimo od inkluzija $f_i(p,t) \subset f_i(\bar{A},t)$. Kako je A potpuno invarijantan skup, to nizovi $\{f_i(p_n,t)\} \subset A$, za svako t i svako $i \in J$. Prelazeći na limese biće $f_i(p,t) \subset \bar{A}$. Znači, $f_i(\bar{A},t) \subset \bar{A}$. Kako je prema svojstvu I DS $\bar{A} \subset f_i(\bar{A},t)$, to je $\bar{A} = f_i(\bar{A},t)$, za svako t i svako $i \in J$. Šta više, $f_i(p,t) \notin A$, jer ako bi $f_i(p,t) \in A$, onda bi $p \in f_i(A,-t) = A$, suprotno pretpostavci o tački p.

1) $f_i(A,t) = \bigcup_{p \in A} \{f_i(p,t)\}$; $A \subset R$.

POSLEDICA 1.2. Svaki potpuno invarijantan skup sadrži invarijantan skup u odnosu na svaku funkciju $f_i \in F$.

Stvarno, prema def. 1.8. iz $p \in A$ sleduje $f_i(p,t) \in A$, za svako $t \in I$ i sve $f_i \in F$, ukoliko je A potpuno invarijantan skup. Znači, za svaku funkciju $f_i \in F$ može se naći skup $B_i \subset A$, da ako $p \in B_i$, onda i $f_i(p,t) \in B_i$. Broj skupova B_i za jednu funkciju f_i može biti i beskonačan, zavisno od tačaka u skupu A. Očigledno je $\bigcup_i \{B_i\} = A$.

STAV 1.3. Skupovi Ω_{pi} i A_{pi} ω- i α-graničnih tačaka familije F_p su invarijantni u odnosu na odgovarajuće kretanje f_i i zatvoreni skupovi.

Dokaz se izvodi na potpuno analogan način kao u [19] , te ga ovde nećemo izvoditi.

POSLEDICA 1.3. Svaki skup Ω_{pi} odn. A_{pi} $(i \in J)$ sastoji se iz celih trajektorija.

Zbog invarijantnosti, ako $q \in \Omega_{pi}$, onda i $f_i(q,t) \in \Omega_{pi}$, za svako $t \in I$, a to znači da u Ω_{pi} ulazi i cela trajektorija $f_i(q,I)$.

Isto se odnosi i na skup A_{pi}.

POSLEDICA 1.4. Skupovi Ω_p i A_p su zatvoreni.

Zatvorenost skupa Ω_p proizlazi stoga, što je on, prema def. 1.7. presek zatvorenih skupova Ω_{pi}, tj. što je $\Omega_p = \bigcap_i \Omega_{pi}$.

Isto važi i za skup A_p.

STAV 1.4. Skupovi $\Omega_{pF} = \bigcup_i \Omega_{pi}$ i $A_{pF} = \bigcup_i A_{pi}$ su zatvoreni.

Izvešćemo dokaz samo za skup Ω_{pF}. Uzmimo jedan niz tačaka $\{q_m\} \subset \Omega_{pF}$ tako da $q_m \to q$, kad $m \to \infty$. To znači da za proizvoljno izabrano $\varepsilon>0$ postoji prirodan broj $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$, takav da je $\rho(q_m,q) < \frac{\varepsilon}{2}$, za svako $m \geqslant N_1$. Kako $\{q_m\} \subset \Omega_{pF}$, to svakoj tački q_m odgovara kretanje $f_m(p,t) \in F_p$, tako da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_m(p,t_n)=q_m$, gde $t_n \to \infty$, kad $n \to \infty$, tj. uzetom $\varepsilon>0$ može se naći opet prirodan broj $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$, takav da je $\rho[f_m(p,t_n),q_m] < \frac{\varepsilon}{2}$. Stavimo $N = \max(N_1,N_2)$ pa će biti

$$\rho[f_m(p,t_n),q] \leqslant \rho(q,q_m) + \rho[q_m,f_m(p,t_n)] < \varepsilon,$$

za svako n, $m \geqslant N$, što dokazuje da $q \in \Omega_{pF}$.

Isti je dokaz i za skup A_{pF}.

Očigledno je

$$\Omega_{pF} \subset \overline{\bigcup_i \{f_i(p,I^+)\}} \quad \text{i} \quad A_{pF} \subset \overline{\bigcup_i \{f_i(p,I^-)\}}.$$

POSLEDICA 1.5. Skupovi Ω_p i A_p su delimično invarijantni.

Dokaz ćemo izvesti samo za skup Ω_p a za A_p se dokazuje stav na isti način.

Neka tačka $q \in \Omega_p$. Onda postoje nizovi $\{t_n^i\}$, gde $t_n^i \to \infty$, kad $n \to \infty$, za svako $i \in J$, takvi da je

$$\lim_{n\to\infty} f_i(p,t_n^i) = q, \qquad \text{za svaku funkciju } f_i \in F_p.$$

Zbog svojstva II_1 DS za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i ma koji realan broj $T>0$ mogu se naći brojevi $\varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, tako da je

$$\rho[f_i(p,t_n^i+\tau),f_i(q,\tau)]<\varepsilon, \quad \text{za} \quad |\tau|\leq T,$$

ukoliko je $\rho[f_i(p,t_n^i),q]<\delta_i$. To znači da za ma koje $q\in\Omega_p$ i proizvoljnu ili fiksiranu funkciju $f_i\in F_p$, $f_i(q,\tau)$ postaje ω-granična tačka bar za jednu funkciju $f_i\in F_p$, tj. $f_i(q,\tau)\in\Omega_{pi}$, što dokazuje delimičnu invarijantnost skupa Ω_p.

POSLEDICA 1.6. Ako je skup graničnih tačaka $\Omega_p = \bigcup_i \Omega_{pi}$, onda je on potpuno invarijantan.

Kako je uvek $\Omega_p = \bigcap_i \Omega_{pi}$, to znači da je $\Omega_p = \Omega_{pi}$ za svako $i\in J$. No, prema stavu 1.3. ako tačka $q\in\Omega_{pi}$, onda i $f_i(q,\tau)\in$ $\in\Omega_{pi}$, za ma koje $\tau\in I$. Pošto to važi za svako kretanje $f_i(p,t)\in$ $\in F_p$ i pošto je $\Omega_{pi}=\Omega_p$ za svako $i\in J$, to znači da iz $q\in\Omega_p$ proizlazi da $f_i(q,\tau)\in\Omega_p$, za svako $i\in J$ i svako $\tau\in I$.

Uopšte, Ω_p i ako postoji za jednu familiju F_p, ne mora se poklapati ni sa jednim skupom Ω_{pi}.

Primedba. Kao i ranije, poslednje dve posledice važe i za skup A_p, no ubuduće ćemo stavove izvoditi samo za skupove Ω_{pi}, odn. Ω_p kao i one stavove koji se odnose na pozitivne polutrajektorije, jer se stavovi za negativne polutrajektorije izvode na isti način, sem u izvesnim slučajevima, koje ćemo posebno naglasiti. Neke definicije i stavovi važe za celu trajektoriju ili za ceo dinamički lavak te ćemo ih kao takve navoditi.

Primer. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho}{1+\rho}, \qquad \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+\rho}; \quad (\rho\geq 0), \tag{1.6}$$

gde je

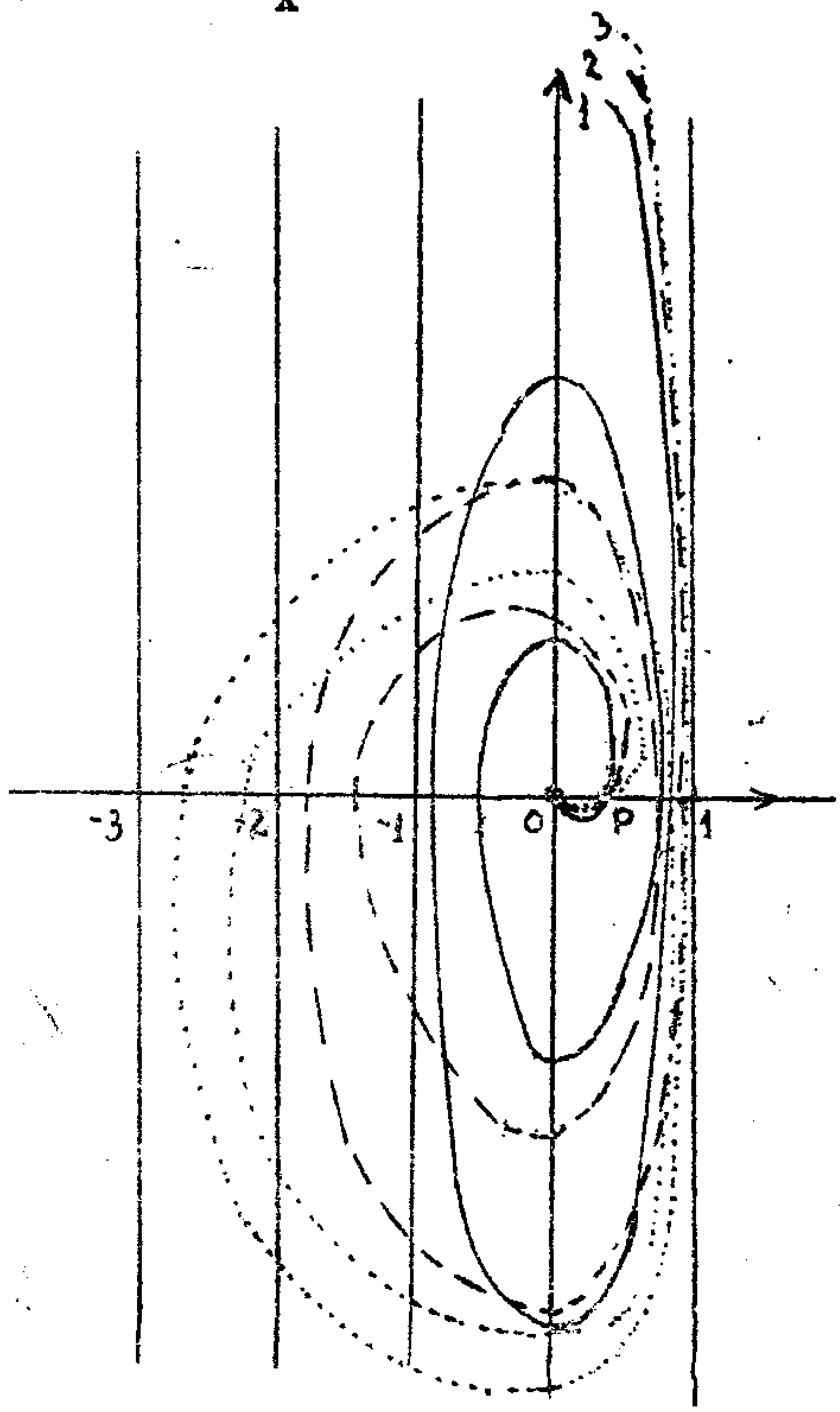
$$\rho^2 = X^2 + Y^2, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{Y}{X},$$

koji izražava zakon kretanja na trajektorijama $\rho = Ce^{\Theta}$. Za jedno fiksirano C dobijamo jednu trajektoriju, po kojoj se vrše kretanja data zakonom (1.6). Lako je proveriti da sva ta kretanja zadovoljavaju uslove I-III DS i prema tome, čine dinamički sistem.

Izvršimo sad smenu promenljivih X, Y u x, y pomoću jednačina

$$X = \frac{x}{(1 - x)(n + x)}, \quad Y = y,$$

gde n pripada, recimo, skupu celih negativnih brojeva. Prelaskom najpre na pravougle koordinate X, Y jednačine (1.6) postaju



sl. 1

$$X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt} = \frac{\rho^2}{1 + \rho},$$

$$X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = \frac{\rho^2}{1 + \rho},$$

odakle se posle uvodjenja smene dobija n sistema od po dve diferencijalne jednačine

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1 - x)(n + x)[x - y(1 - x)(n + x)]}{(1 + \rho)(n + x)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+\rho}\left[y + \frac{x}{(1-x)(n+x)}\right].$$

Svaki od ovih n sistema daje familiju trajektorija i pri tom su ispunjeni uslovi I - III. Od tih trajektorija možemo uzeti iz svake familije po jednu, tako da sve tako izabrane trajektorije prolaze kroz tačku p. (sl. 1). Tako smo dobili familiju kretanja $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$, gde i prolazi skupom celih nenegativnih brojeva. Svako kretanje $f_i \in F_p$ ima ovde kao α-graničnu tačku koordinatni početak. Prema tome, skup A_p postoji i sastoji se iz samo jedne tačke, O(o,o). Pri tome je za svako $i \in \mathfrak{I}$ $A_{pi} = A_p$. Skup Ω_p takodje postoji i to je prava x = 1, dok se skupovi Ω_{pi} razlikuju od Ω_p za svako $i \in \mathfrak{I}$. Naime, svaki skup Ω_{pi} (i = 1,2,...) sastoji se iz dve paralelne prave x = 1 i x = -1.

DEFINICIJA 1.9. Neprekidna funkcija $f_o(p,t)$ zove se <u>$\omega(\alpha)$-granična funkcija</u> familije kretanja $\{f_i(p_m,t)\}$, gde su f_i sva preslikavanja iz F, ako postoji pozitivan broj T i niz $\{f_n(p_m,t)\}$ ($f_n \in F$), koji uniformno konvergira ka $f_o(p,t)$ na skupu $t \geq T$ ($t \leq -T$), kad $n \to \infty$, tj. za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se naći broj $N(\varepsilon) > 0$ takav da je za svako $n > N$

$$\sup_{t \geq T} \rho[f_n(p_m,t), f_o(p,t)] < \varepsilon. \qquad ^{1)}$$

U specijalnom slučaju, ako sva kretanja f_i imaju istu početnu tačku p, definiše se granična funkcija $f_o(p_o,t)$ familije kretanja $\bigcup_i \{f_i(p,t)\} = F_p$. [2]).

Skup $\omega(\alpha)$-graničnih funkcija obeležavaćemo sa Φ (odn. Ψ), a ako se taj skup odnosi na familiju $\bigcup_i \{f_i(p,t)\}$, sa Φ_p (odn. Ψ_p).

---

[1]) p_m su u opštem slučaju različite u R; [2]) p_o može se poklapati sa p.

U daljem izlaganju izvodićemo stavove samo za skupove Φ i Φ_p jer se za skupove Ψ i Ψ_p stavovi dokazuju na isti način.

STAV 1.5. Ako niz kretanja $\{f_n(p_m,t)\}$, $(f_n \in F)$ uniformno konvergira ka funkciji $f_o(p,t)$ za sve $t \in I$, i ako je $f_o(f_o(p,t_1),t_2) = f_o(p,t_1 + t_2)$ za ma koja dva broja $t_1, t_2 \in I$, onda funkcija $f_o(p,t)$ pripada familiji F_p.

Treba samo dokazati da funkcija $f_o(p,t)$ ispunjava svojstva I i II DS.

Iz svojstava III, $f_o(f_o(p,t_1),t_2) = f_o(p,t_1 + t_2)$ sleduje da je za $t_2 = 0$, $f_o(f_o(p,t_1),0) = f_o(p,t_1)$, a kako je t_1 proizvoljno i budući da je $f_o(p,t_1) = q$ neka tačka na trajektoriji $f_o(p,I)$, to je $f_o(q,0) = q$ za svako $q \in f_o(p,I)$.

Dalje iz svojstva III sleduje da je za neku tačku $r = f_o(p,t_o)$, za ma koji broj $t \in I$, $f_o(r,t) = f_o(f_o(p,t_o),t) = f_o(p,t_o + t) = f_o(p,t_r)$, gde je stavljeno $t_o + t = t_r$.

Neprekidnost funkcije $f_o(p,t)$ po t proizlazi iz uslova stava, a neprekidnost po p dokazaćemo tako što ćemo za proizvoljno izabran broj $\varepsilon > 0$ naći prirodan broj $N(\frac{\varepsilon}{3})$, pa će onda zbog uniformne konvergencije biti

$$\rho[f_o(p_k,t),\ f_n(p_k,t)] < \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad (1.7)$$ [1]

$$\rho[f_n(p,t),\ f_o(p,t)] < \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad (1.8)$$

za sve $n \geq N$, a zbog neprekidnosti kretanja $f_n(p,t)$

$$\rho[f_n(p_k,t),\ f_n(p,t)] < \frac{\varepsilon}{3}$$

---

[1]) Ovde je $p_k = f_o(p,t_k)$, te je s obzirom na prethodno tvrdjenje $f_o(p_k,t) = f_o(p,t_k + t)$, tj. tačke na $f_o(p,I)$.

za $k \geq N$, tj. ako $p_k \to p$, kad $k \to \infty$.

Poslednje tri nejednakosti govore da je

$\rho[f_o(p,t), f_o(p_k,t)] < \varepsilon$, kad je $\rho(p_k,p) < \delta(\varepsilon)$, što dokazuje neprekidnost po p.

NAPOMENA. Nejednakost (1.7) je lako dokazati jer je $\rho[f_o(p_k,t), f_n(p_k,t)] = \rho[f_o(p,t_k + t), f_n(p,t_k + t)] \leq$ $\leq \rho[f_n(p,t_k + t), f_n(p_m, t_k + t)] + \rho[f_n(p_m,t_k + t), f_o(p,t_k + t)]$, gde $p_m = f_n(p_m,0)$ konvergira, prema uslovu stava, ka $p = f_o(p,0)$, tj. $f_n(p_m,t) \to f_o(p,t)$ za svako t kad $n \to \infty$. Isto važi i za (1.8).

Ako je skup svih kretanja $\{f_i(p,t)\} = F(p \in R, i \in J)$ uniformno ograničen i podjednako neprekidan, za $t \geq T$ $(t \leq -T)$ onda je $\phi(\Psi)$ neprazan. To sledi neposredno iz toga, što je tada F kompaktan skup i iz svakog niza funkcija $\{f_n(p_m,t)\}$ može se izdvojiti konvergentan podniz za $t \geq T$ $(t \leq -T)$.

STAV 1.6. Skup graničnih funkcija ϕ_p, ukoliko je odgovarajući skup $\{T_m\}$ ograničen, je zatvoren u smislu metrike date u def. 1.9.

Neka je dat niz graničnih funkcija $\{g_m(p,t)\} \subset \phi_p$ koji uniformno konvergira ka $g_o(p,t)$ za $t \geq T_o$ i dokažimo da $g_o(p,t) \in \phi_p$.

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se naći broj $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$ takav da je

$$\sup_{t \geq T_o} \rho[g_m(p,t), g_o(p,t)] < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{za} \quad m > N_1.$$

Uzmimo jednu graničnu funkciju $g_m(p,t) \in \phi_p$. Postoji niz kretanja, prema definiciji granične funkcije, $\{f_n(p,t)\} \subset F_p$ tako da je

$$\sup_{t \geqslant T_m} \rho[f_n(p,t),\ g_m(p,t)] < \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad za \quad n > N_2(\frac{\varepsilon}{2})\ .$$

Nadjimo broj $N = \max(N_1,N_2)$ i stavimo

$T = \sup(T_o,T_1,\dots T_m,\dots)$, pa će biti

$$\sup_{t \geqslant T_o} \rho[f_n(p,t),\ g_o(p,t)] \leq \sup_{t \geqslant T} \rho[f_n(p,t),\ g_m(p,t)] +$$

$$+ \sup_{t \geqslant T} [g_m(p,t),\ g_o(p,t)] < \varepsilon\ ,$$

za $n,\ m > N$, što dokazuje da $g_o(p,t) \in \phi_p$.

STAV 1.7. Skup svih graničnih funkcija ϕ, ako je odgovarajući skup $\{T_m\}$ ograničen, je zatvoren u smislu metrike date u def. 1.9.

Uzmimo niz graničnih funkcija $\{g_\nu(p_n,t)\}$ koji uniformno konvergira ka $g_o(p,t)$ za $t \geqslant T_o$ i dokažimo da $g_o(p,t) \in \phi$.

Za svaku graničnu funkciju $g_\nu(p_n,t)$ postoji neki niz kretanja $f_k(p_m,t)$, koji uniformno konvergira ka $g_\nu(p_n,t)$, za $t \geqslant T_\nu$. Znači, za izabrano $\varepsilon > 0$ može se naći broj $N_1(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$, tako da je

$$\sup_{t \geqslant T_\nu} [f_k(p_m,t),\ g_\nu(p_n,t)] < \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad za \quad k > N_1(\frac{\varepsilon}{2}).$$

S druge strane može se naći broj $N_2(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$, tako da je

$$\sup_{t \geqslant T_o} \rho[g_\nu(p_n,t),\ g_o(p,t)] < \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad za \quad \nu > N_2(\frac{\varepsilon}{2}).$$

Uzmimo broj $N = \max(N_1,N_2)$ i stavimo $T = \sup(T_o,T_1,\dots,T_m,\dots)$, pa će biti

$$\sup_{t\geq T}\rho[f_k(p_m,t),\ g_o(p,t)]\leq \sup_{t\geq T}\rho[g_o(p,t),\ g_v(p_n,t)] +$$

$$+ \sup_{t\geq T}\rho[f_k(p_m,t),\ g_v(p_n,t)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{za} \quad k > N,$$

što dokazuje da $g_o(p,t)\in\Phi$.

STAV 1.7. Ako je svaki presek konačnog odsečka $T_p(T_o,T)$ dinamičkog levka T_p koneksan, onda je i odsečak $T_o(T_o,T)$ koneksan.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $T_p(T_o,T) = A\cup B$, gde su A i B zatvoreni skupovi i $A \neq \lambda$, $B \neq \lambda$, $A\cap B = \lambda$. Prema uslovu stava biće za ma koje t ili $\bigcup_i \{f_i(p,t)\}\subset A$ ili $\bigcup_i \{f_i(p,t)\}\subset B$. Uzmimo niz brojeva $\{t_n\}$ takav da je, recimo $\{f_k(p,t_n)\}\subset A$. Onda će zbog koneksnosti preseka i svaki niz $\{f_i(p,t_n)\}\subset A$ ($i\in J$). To je, zbog učinjene pretpostavke, uvek moguće naći. Isto tako formirajmo niz $\{t_m'\}$, tako da je $\{f_k(p,t_m')\}\subset B$, ali da je $t_n < t_m'$ za svako m i n. Jasno je da se jedan od tih nizova može svesti na tačku.

Označimo sa t^* gornju medju niza $\{t_n\}$, pošto je $T_o\leq\{t_n\}\leq T$. Pretpostavimo da $f_k(p,t^*)\in B$. Onda se može naći niz $\{t_n'\}$, gde $f_k(p,t_n')\subset A$, tako da $t_n' \to t^*$, kad $n\to\infty$, te će prema svojstvu II DS biti

$$\lim_{n\to\infty} f_k(p,t_n') = f_k(p,t^*).$$

Medjutim, zbog zatvorenosti skupa A, tačka $f_k(p,t^*)$ ne može pripadati skupu B. Ako bi pak $f_k(p,t^*)\in A$, onda bi se mogao naći niz $\{t_m''\}$ sa osobinom da $\{f_k(p,t_m'')\}\subset B$, takav da $t_m'' \to t^*$ kad $m\to\infty$. Medjutim, u tom bi slučaju bilo $\lim_{m\to\infty} f_k(p,t_m'') = f(p,t^*)\in A$, što je nemoguće zbog zatvorenosti skupa B. Znači, tačka $f_k(p,t^*)$ u ovom slučaju ne pripada ni jednom od skupova A i B, što je isključeno zbog naše pretpostavke. Dobijena protivrečnost dokazuje stav.

STAV 1.8. Za svaku tačku $p \in R$ važi

$$\bigcup_{i} \overline{\{f_i(p,I)\}} \subset \overline{\bigcup_{i} \{f_i(p,I)\}} \tag{1.9}$$

gde i prolazi skupom indeksa J. Dokaz se izvodi na uobičajen način.

Ako je broj trajektorija $f_i(p,I)$ konačan, onda u (1.9) dolazi znak jednakosti.

Pošto inkluzija (1.9) važi za svaku tačku $p \in R$, to će biti

$$\bigcup_{p \in R} \bigcup_{i} \overline{\{f_i(p,I)\}} \subset \bigcup_{p \in R} \overline{\bigcup_{i} \{f_i(p,I)\}} \subset \overline{\bigcup_{p \in R} \bigcup_{i} \{f_i(p,I)\}}$$

tj. skup adherencija trajektorija DS familije F je podskup adherencije skupa trajektorija DS familije F.

STAV 1.9. Ako je svaki presek $S_t^p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$, gde $T_o \leqslant t \leqslant T$, odsečka dinamičkog levka T_p kompakt, onda je i odsečak $T_p(T_o,T)$ kompakt.

Uzmimo ma koji niz tačaka $\{p_n\} \subset T_p$, gde je $p_n = f_k(p,\tau_{n_k})$, $T_o \leqslant \tau_{n_k} \leqslant T$. [1]). Pretpostavićemo da su te tačke za $n > N$ (N je proizvoljno veliki broj), na raznim trajektorijama kretanja $f_i(p,t) \subset F$, jer ako bi bile na istoj, onda odmah sleduje kompaktnost iz kompaktnosti luka $f_k(p;T_o,T)$ ([19], str. 33o). Kako je niz $\{\tau_{n_k}\}$ ograničen, to iz njega izdvojimo konvergentan podniz koji ćemo obeležiti isto sa τ_{n_k}, tako da $\tau_{n_k} \to \tau$, kad $k \to \infty$. Obrazujmo presek $S_\tau^p = \bigcup_i f_i(p,\tau)$. Kako je on prema pretpostavci kompakt, to se može iz niza $\{f_k(p,\tau)\}$ izabrati konvergentan podniz $\{f_{k_l}(p,\tau)\}$ tako da $f_{k_l}(p,\tau) \to f_o(p,\tau)$, kad $k \to \infty$. Dokažimo da podniz

---

1) Jasno je da je $k \leqslant n$, $n_k \leqslant n$ i $k_l \leqslant k$.

$\{p_{n_k}\}$ niza $\{p_n\}$ takodje konvergira, tj. da

$p_{n_k} = f_{k_l}(p,\tau_{n_k}) \to f_o(p,\tau)$, kad $k \to \infty$.

Zbog konvergencije niza $\{f_{k_l}(p,\tau)\}$ za $\varepsilon > 0$, postoji broj $N_1(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ takav da je za $k_l > N_1(\frac{\varepsilon}{2})$

$$\rho\left[f_{k_l}(p,\tau),\ f_o(p,\tau)\right] < \frac{\varepsilon}{2} .$$

No, zbog neprekidnosti DS može se naći $N_2(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$, takav da je za $n_k > N_2(\frac{\varepsilon}{2})$

$$\rho\left[f_{k_l}(p,\tau),\ f_{k_l}(p,\tau_{n_k})\right] < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ako izaberemo broj $N = \max(N_1,N_2)$, onda će poslednje dve nejednakosti dati

$$\rho\left[f_{k_l}(p,\tau_{n_k}),f_o(p,\tau)\right] \leqslant \rho\left[f_o(p,\tau),f_{k_l}(p,\tau)\right] + \rho\left[f_{k_l}(p,\tau),f_{k_l}(p,\tau_{n_k})\right] < \varepsilon .$$

Time je dokazana konvergencija niza $\{p_{n_k}\} = \{f_{k_l}(p,\tau_{n_k})\}$, a ujedno i kompaktnost odsečaka $F_p(T_o,T)$.

2. STABILNOST U SMISLU LAGRANGE - A

DEFINICIJA 2.1. Familija kretanja $\bigcup_i\{f_i(p,t)\}=F_p$ ($p=const$, $f_i\in F$), naziva se <u>stabilna u smislu Lagrange-a</u>, (<u>pozitivno</u>, <u>negativno</u> stabilna), ako je

$$\overline{T}_p = \overline{\bigcup_i\{f_i(p,I)\}} \quad (\overline{T}_p^+ = \overline{\bigcup_i\{f_i(p,I^+)\}} \;,\; \overline{T}_p^- = \overline{\bigcup_i\{f_i(p,I^-)\}}$$

kompaktan skup. Obeležimo ovu stabilnost kratko sa $L(L^+,L^-)$.

Ako je za sve $p\in R$ $\overline{\bigcup_{p\in R} T_p}$ kompaktan skup onda ćemo reći da je familija DS F stabilna u smislu Lagrange-a. Analogne su definicije za pozitivnu i negativnu stabilnost.

Očigledno je da, ako se T_p nalazi u kompaktnom prostoru R, onda je familija kretanja $\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$ L stabilna. Dalje, sleduje iz definicije da za L^+ stabilnu familiju kretanja skupa Ω_{pF}, a prema tome i Ω_{pi} nije prazan, dok za L^- stabilnu, skupovi A_{pF} i A_{pi} nisu prazni.

Ako je familija kretanja $\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$ L stabilna onda, kako to proizlazi iz same definicije, je i svako kretanje $f_k(p,t)$ L stabilno, jer je $\overline{f_k(p,I)}$ kao zatvoren skup kompaktnog prostora kompaktan. Isto tako ukoliko je familija DS F L stabilna, onda je L stabilna i svaka familija kretanja $F_p=\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$. Obrnuto ne važi: iz L stabilnosti familije F_p ne sleduje stabilnost familije DS F.

Često ćemo umesto L stabilnosti familije kretanja $\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$, pisati L stabilnost dinamičkog levka T_p ili kraće levka T_p.

Napomena. U daljem izlaganju biće reči samo o L^+ stabilnosti jer se za L^- i L stabilnosti stavovi izvode na isti način.

Uvedimo pojam poluodstupanja i odstupanja skupova A i B, kako je to dato u [22](str. 293).

DEFINICIJA 2.2. Poluodstupanje skupa A od skupa B, koje ćemo obeležiti sa $\pi(A,B)$, se definiše ovako:

$$\pi(A,B) = \sup_{x\in A} (\inf_{y\in B} \rho(x,y)), \quad \text{gde je} \quad \inf_{y\in B} \rho(x,y) = \rho(x,B).$$

Odstupanje $\tau(A,B)$ izmedju skupova A i B se definiše sa

$$\tau(A,B) = \max\left[\pi(A,B), \pi(B,A)\right].$$

STAV 2.1. Da bi levak T_p bio L^+ stabilan, potrebno je i dovoljno:

1° Ω_{pF} postoji i kompaktan je skup.

2° $\lim\limits_{t\to+\infty} \pi(S_t^p, \Omega_{pF}) = 0$

3° svaki presek S_T^p (T je konačno) je kompaktan.

Potrebnost. Pretpostavimo da je $\overline{T_p^+}$ kompaktan skup. Uzmimo niz $\{q_n\} = \{f_i(p,t_n)\}$, gde $t_n \to +\infty$, kad $n\to\infty$, $\{q_n\}\subset f_i(p,I)$ za ma koje $f_i\in F_p$. Kako $\{q_n\}\subset \overline{T_p^+}$, to se iz njega može izdvojiti konvergentan podniz $q_{n_k} = f_i(p,t_{n_k})$, gde $t_{n_k}\underset{k\to\infty}{\to} +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_{n_k} = q\in \overline{T_p^+}$. Znači, Ω_{pF} postoji. Skup Ω_{pF} je kompaktan jer je Ω_{pF} zatvoren (v.stav 1.4.) i $\Omega_{pF}\subset \overline{T_p^+}$.

Ako ne bi bio ispunjen uslov 2° našao bi se niz preseka $\{S_{t_n}^p\}$ gde $t_n\to+\infty$, takav da je $\pi(S_{t_n}^p, \Omega_{pF})\geqslant \varepsilon$. Prema definiciji poluodstupanja, onda bi postojao niz tačaka $\{p_n : p_n \in S^p_{t_n}\}$, $\rho(p_n, \Omega_{pF}) \geqslant \varepsilon$. Ali zbog kompaktnosti skupa $\overline{T^+_p}$ iz niza $\{p_n\}$ može se izabrati konvergentan podniz $\{p_{n_k}\}$, takav da $p_{n_k} \to p_0$, kad $k \to \infty$. Pošto očigledno $p_0 \in \Omega_{pF}$, to $\rho(p_{n_k}, \Omega_{pF}) \to 0$, kad $k \to \infty$, što je u kontradikciji sa našom pretpostavkom.

Ispunjenje uslova 3° je očigledno.

Dovoljnost. Treba dokazati da je $\overline{T^+_p}$ kompaktan skup ako je ispunjeno 1°, 2° i 3°.

Uzmimo niz $\{q_m\} = \{f_k(p,t_n)\} \subset \overline{T^+_p}$. Iz istih razloga kao u stavu 1.9. pretpostavimo da članovi niza pripadaju raznim trajektorijama familije kretanja $\bigcup_i \{f_i(p,t)\}$. Ako je niz $\{t_n\}$, gde je $t_n > 0$, ograničen, to niz $\{q_m\}$ pripada konačnom odsečku levka, koji je kompaktan (v. stav 1.9.). Prema tome, iz niza $\{q_m\}$ može se izdvojiti konvergentan podniz. Uzmimo zatim da $t_n \to +\infty$. Zbog uslova 2° možemo izabrati takav prirodan broj n_k tako da je $q_{n_k} = f_k(p,t_{n_k})$ i $\Pi(S^p_{t_{n_k}}, \Omega_{pF}) < \frac{1}{k}$, odakle sledi da postoji tačka $r_k \in \Omega_{pF}$, takva da je $\rho(q_{n_k}, r_k) < \frac{1}{k}$. Kako je prema 1° Ω_{pF} kompaktan skup, to niz $\{r_k\}$ možemo smatrati konvergentnim, tj. $\lim_{k\to\infty} r_k = r$. Znači, za dati broj $\varepsilon > 0$ može se naći prirodan broj k tako da je $\rho(r_k, r) < \frac{1}{k}$, te ćemo imati

$$\rho(q_{n_k}, r) \leq \rho(q_{n_k}, r_k) + \rho(r_k, r) < \frac{2}{k},$$

odakle se vidi konvergencija niza $\{q_{n_k}\}$ što dokazuje kompaktnost skupa $\overline{T^+_p}$.

POSLEDICA 2.1. Ako je familija kretanja $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ L^+ stabilna i ukoliko je $\Omega_p = \bigcup_i \Omega_{pi}$, onda je Ω_p kompaktan skup.

Ako je F_p L^+ stabilna, onda je i svako kretanje L^+ stabilno. Medjutim, za svako L^+ stabilno kretanje $f_i(p,t)$ skup Ω_{pi} je koneksan ([19], str. 342). Kako je prema uslovu stava $\Omega_p = \Omega_{pi}$ za svako $i \in J$, onda je i Ω_p koneksan.

STAV 2.2. Ako je familija kretanja F_p L^+ stabilna i $\Omega_{pF} = \Omega_p$, onda je, ukoliko ω-granična funkcija $f_o(p_o,t)$ postoji, $\Omega_p \subset \Omega_{po}$, gde je Ω_{po} skup graničnih tačaka funkcije $f_o(p_o,t)$.

Pošto je u tom slučaju i svako kretanje $f_i(p,t) \in F_p$ L^+ stabilno, biće za ma koje kretanje f_i ([19], str. 341) $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho[f_i(p,t), \Omega_p] = 0$. To znači da se za ma koju tačku $q \in \Omega_p$ može naći niz brojeva $\{t_{n_i}\}$, gde $t_{n_i} \to +\infty$, kad $n_i \to \infty$, takav da proizvoljno izabranom broju $\varepsilon > 0$ odgovara prirodan broj $N_i(\frac{\varepsilon}{2})$, tako da je

$$(2.1) \qquad \rho\left[f_i(p,t_{n_i}),\ q\right] < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{za svako kretanje} \quad f_i \in F_p.$$

Medjutim, zbog kompaktnosti $\overline{\bigcup\limits_i \{f_i(p,I^+)\}}$ može se naći broj $N_1(\frac{\varepsilon}{2})$, takav da relacija (2.1) važi za sve funkcije f_i, ako je $n_i \geqslant N_1$. (Dokaz poslednjeg tvrdjenja je analogan kao u stavu 1.1)

Prema definiciji ω-granične funkcije, postoji broj $T > 0$, tako da je za svako $t \geqslant T$ i za niz kretanja $\{f_m(p,t)\}$

$$\sup_{m \to \infty} \rho[f_m(p,t),\ f_o(p_o,t)] \to 0,$$

a to znači da za već uzeto $\varepsilon > 0$ može se naći prirodan broj $N_2(\frac{\varepsilon}{2})$, takav da je

$$(2.2) \qquad \rho\left[f_{r_m}(p,t_{n_m}),\ f_o(p_o,t_{n_m})\right] < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

za svako $n_m \geqslant N_2$, gde $t_{n_m} \to +\infty$, kad $n_m \to \infty$. Kako prema (2,1) važi i nejednakost

$$(2.3) \qquad \rho[f_{n_m}(p,t_{n_m}),\ q] < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{za} \quad n_m \geqslant N_1,$$

to će se iz (2.2) i (2.3) dobiti, ako stavimo $N = \max (N_1, N_2)$, nejednakost

$$\rho[f_o(p,t_{n_m}),\ q] < \varepsilon ,$$

koja važi za sve $n_m \geqslant N$, što dokazuje da $q \in \Omega_{po}$. Prema tome, $\Omega_p \subset \Omega_{po}$.

POSLEDICA 2.2. Ako je familija F_p L^+ stabilna, onda je pozitivna polutrajektorija ω-granične funkcije, ukoliko ova postoji, kompaktan skup.

Obeležimo ω-graničnu funkciju sa $f_o(p_o,t)$ i uzmimo niz tačaka $\{r_m\} = \{f_o(p_o,t_m)\} \subset f_o(p_o;T,+\infty\ )$ gde T odgovara definiciji ω-granične funkcije i gde je $t_m \geqslant T$ za svako m. Pretpostavimo da $t_m \to +\infty$, kad $m \to \infty$, jer ako t_m teži konačnom broju dokaz je očigledan. Prema definiciji granične funkcije za svaku tačku $r_m \in f(p_o;T,+\infty\ )$ postoji niz tačaka $\{p_n^m\} = \{f_n(p,t_m)\}$, gde $t_m \to +\infty$ kad $m \to \infty$ koji konvergira ka r_m kad $n \to \infty$. S druge strane, iz svakog niza po m $\{p_n^m\}$ može se zbog L^+ stabilnosti izdvojiti konvergentan podniz $\{p_n^{m_k}\} = \{f_n(p,t_{m_k})\}$, tako da $p_n^{m_k} \to q_n$ kad $k \to \infty$. Znači da se proizvoljnom $\varepsilon > 0$ može naći prirodan broj $K(\frac{\varepsilon}{3})$ takav da je

$$\rho(p_n^{m_k},\ q_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{za svako} \quad k \geqslant K.$$

Medjutim, zbog konvergencije nizova $\{p_n^{m_k}\}$ po n može se naći drugi broj $N(\frac{\varepsilon}{3})$ tako da je

$$\rho(r_{m_k},\ p_n^{m_k}) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{za svako} \quad n \geqslant N.$$

Kako niz $\{q_n\} \to q$, što je lako pokazati, to je

$$\rho(q_n,q)<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{za svako} \quad n \geqslant N.$$

Ako stavimo $N_0 = \max(K,N)$, to će poslednje tri nejednakosti dati

$$\rho(r_{m_k},q)<\varepsilon, \qquad \text{za} \quad k \geqslant N_0,$$

što dokazuje konvergenciju niza $\{r_{m_k}\}$ a i kompaktnost $f_0(p_0,I^+)$.

LEMA 2.1. Ako je prostor R kompaktan, onda se za proizvoljne brojeve $\varepsilon>0$ i $T\in I$ može naći drugi broj $\delta(\varepsilon,T)>0$, takav da je $\tau(S_T^p, S_T^p)<\varepsilon$ $(S_T^p = \bigcup_i\{f_i(p,T)\}$, $S_T^q = \bigcup_i\{f_i(q,T)\})$, ukoliko $q\in S(p,\delta)$. (sa $S(p,\delta)$ je označena δ-okolina tačke p, a $T\in I$).

Zbog kompaktnosti prostora R, familija F_p je, prema stavu 1.1 podjednako neprekidna po početnim uslovima te proizvoljno izabranom $\varepsilon>0$, odgovara jedinstven broj, za sve $f_i\in F_p$, $\delta(\varepsilon,T)>0$, tako da je $\rho[f_i(p,t),f_i(q,t)]<\varepsilon$, ukoliko $q\in S(p,\delta)$. Za svako kretanje $f_k\in F_p$ biće $\rho[f_k(p,t), \bigcup_i\{f_i(q,t)\}]<\varepsilon$, znači da je

$$\pi\Big[\bigcup_k\{f_k(p,t)\}, \bigcup_i\{f_i(q,t)\}\Big]<\varepsilon, \qquad \text{za svako} \quad |t|\leqslant T.$$

Na isti način se pokazuje da je

$$\pi\Big[\bigcup_i\{f_i(q,t)\}, \bigcup_k\{f_k(p,t)\}\Big]<\varepsilon.$$

Kako i i k prolazi skupom indeksa $\mathcal{J}$, to je

$$\tau\Big[\bigcup_i\{f_i(p,t)\}, \bigcup_i\{f_i(q,t)\}\Big]<\varepsilon,$$

a kako ova relacija važi za svako $|t|\leqslant T$, to možemo napisati da je $\tau(S_T^p, S_T^q)<\varepsilon$, ukoliko je $q\in S(p,\delta)$.

DEFINICIJA 2.3. <u>Dinamička cev</u> skupa $A\subset R$ naziva se skup $\bigcup_{p\in A} T_p = \bigcup_{p\in A}\bigcup_{i}\{f_i(p,I)\}$, U slučaju da t varira u konačnom razmaku, tj. da je $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, onda se skup $\bigcup_{p\in A}\{T_p(t_1,t_2)\}$ zove <u>dinamička cev skupa A konačne dužine</u>. Dinamičku cev ćemo obeležavati sa T_A, a dinamičku cev konačne dužine sa $T_A(t_1,t_2)$.

<u>Presek dinamičke cevi T_A</u> naziva se skup $\bigcup_{p\in A} S^p_\tau = \bigcup_i\{f_i(A,\tau)\} = \bigcup_{p\in A}\bigcup_i\{f_i(p,\tau)\} = \bigcup_i\bigcup_{p\in A}\{f_i(p,\tau)\}$. Presek dinamičke cevi skupa A u momentu τ obeležavaćemo sa S^A_τ.

LEMA 2.2. Ako je prostor R kompaktan, onda za sve tačke p zatvorenog skupa $A\subset R$ važi stav: Za proizvoljno izabrano $\varepsilon>0$ može se naći broj $\delta(\varepsilon,T)>0$, nezavisan od tačke p, tako da je $\tau(S^p_T, S^q_T)<\varepsilon$, ukoliko $q\in S(p,\delta)$, za svako $T\in I$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da δ zavisi ne samo od nego i od tačke p. Onda se prema lemi 2.1. može naći konvergentan niz tačaka $\{p_n\}\subset A$, tako da za izabrano $\varepsilon>0$ odgovara δ_n-okolina tačke p_n, takva da je $\tau(S^{p_n}_T, S^q_T)<\varepsilon$, za dato T, ako je $q\in S(p_n,\delta_n)$. Kako je $\lim_{n\to\infty} p_n = p\in A$, to možemo uzeti toliki broj $N>0$ da bude $\rho(p,p_n)<\delta_p$ za $n>N$, a onda će biti $\tau(S^p_T, S^{p_n}_T)<\frac{\varepsilon}{2}$, gde je $\delta_p(\frac{\varepsilon}{2})>0$ broj, koji je odredjen na osnovu sledećeg: ako $k\in S(p,\delta_p)$ onda je $\tau(S^p_T, S^k_T)<\frac{\varepsilon}{2}$. S druge strane za ovo δ_p, biće prema pretpostavci, uopšte $\tau(S^{p_n}_T, S^k_T)>\varepsilon$, gde je tačka p_n izabrana tako da $S(p_n,\delta_n)\subset S(p,\delta_p)$ i $k\notin S(p_n,\delta_n)$. Onda će biti

$$\tau(S^{p_n}_T, S^k_T)\leqslant\tau(S^k_T,S^p_T)+\tau(S^p_T,S^{p_n}_T)<\varepsilon,$$

što dovodi do protivrečnosti.

LEMA 2.3. Za tačku p kompaktnog prostora R i proizvoljno $\varepsilon>0$ može se naći drugi broj $\delta(\varepsilon)>0$, takav da je

$\tau(S^p_{t'}, S^p_{t''}) < \varepsilon$, kadgod je $|t' - t''| < \delta$.

Uzmimo jednu fiksiranu tačku $p \in R$ i proizvoljan broj $\varepsilon > 0$. Zbog podjednake neprekidnost f_i po promenljivoj t može se, prema posledici 1.1 naći jedinstven broj $\delta(\varepsilon) > 0$, tako da je

$$\rho[f_i(p,t'), f_i(p,t'')] < \varepsilon,$$

za svako kretanje $f_i(p,t) \in F_p$, kadgod je $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$. Na osnovu toga, za svako kretanje $f_k(p,t) \in F_p$ imamo da je

$$\rho[f_k(p,t'), \bigcup_i \{f_i(p,t'')\}] < \varepsilon,$$

što znači da je, ako pustimo da k prodje skupom indeksa $\mathfrak{J}$,

$$\pi[\bigcup_k \{f_k(p,t')\} , \bigcup_i \{f_i(p,t'')\}] < \varepsilon.$$

Isto tako se dobija i da je

$$\pi[\bigcup_i \{f_i(p,t'')\}, \bigcup_k \{f_k(p,t')\}] < \varepsilon.$$

Pošto i i k prolaze u ovim relacijama celim skupom $\mathfrak{J}$, to je

$$\tau[\bigcup_i \{f_i(p,t')\} , \bigcup_i \{f_i(p,t'')\}] < \varepsilon,$$

odn. $\tau(S^p_{t'}, S^p_{t''}) < \varepsilon$, kadgod je $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$.

LEMA 2.4. Neka su dati skupovi $P = \{p\}$ i $Q = \{q\}$. Ako svakoj tački $p \in P$ odgovara neka tačka $q \in Q$ i obrnuto, svakoj tački $q \in Q$ odgovara neka tačka $p \in P$, tako da je $\tau(S^p_t, S^q_t) < \varepsilon$, onda je i $\tau(S^P_t, S^Q_t) < \varepsilon$.

Uzmimo najpre par fiksiranih tačaka p i q, tako da je $\tau(S^p_t, S^q_t) < \varepsilon$, onda je i $\pi(S^p_t, S^Q_t) < \varepsilon$, gde je $Q = \{q\}$. Kako se poslednja nejednakost može formirati za svaku tačku $p \in P$, onda je $\pi(S^P_t, S^Q_t) < \varepsilon$. Na isti način se pokazuje da je i $\pi(S^Q_t, S^P_t) < \varepsilon$. Prema tome je $\tau(S^P_t, S^Q_t) < \varepsilon$.

LEMA 2.5. Za proizvoljne brojeve $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ može se naći drugi broj $\delta(\varepsilon) > 0$, takav da, ako je $\tau(A,B) < \delta$, gde su A i B skupovi u kompaktnom prostoru R, onda je i $\tau(S_t^A, S_t^B) < \varepsilon$, za ma koje $|t| \leq T$.

Izaberimo broj $\varepsilon > 0$ i neka je $\delta(\varepsilon) > 0$, za koje je $\tau(A,B) < \delta$. Iz te nejednakosti sleduje da za svaku tačku $p \in A$ postoji bar jedna tačka $q \in B_1 \subset B$ tako da je $\rho(p,q) < \delta$. Prema lemi 2.1. je

$$\tau(S_t^p, S_t^q) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.4}$$ [1]

za svako $|t| \leq T$. Isto tako sleduje da za svaku tačku $q' \in B$ postoji bar jedna tačka $p' \in A_1 \subset A$ takva da je $\rho(p', q') < \delta$, a odatle

$$\tau(S_t^{p'}, S_t^{q'}) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.5}$$

za svako $|t| \leq T$. Iz (2.4) prema lemi 2.4. proizlazi da je $\tau(S_t^A, S_t^{B_1}) < \frac{\varepsilon}{3}$ a iz (2.5) da je $\tau(S_t^{A_1}, S_t^B) < \frac{\varepsilon}{3}$. [1].
Onda je tim pre i $\tau(S_t^{B_1}, S_t^{A_1}) < \frac{\varepsilon}{3}$, te dobijamo

$$\tau(S_t^A, S_t^B) \leq \tau(S_t^A, S_t^{B_1}) + \tau(S_t^{B_1}, S_t^{A_1}) + \tau(S_t^{A_1}, S_t^B) < \varepsilon,$$ [2]

što je trebalo dokazati.

STAV 2.3. Uvek je $S_t^S \supset S_{t_1+t_2}^p$, gde je $S = S_{t_1}^p = \bigcup_i \{f_i(p,t_1)\}$, $i \in \mathcal{I}$.

---

[1]) Sa B_1 je obeležen skup svih tačaka q za koje važi relacija (2.4). Analogno je učinjeno i za skup A_1.

[2]) Tačke $p' \in A_1 \subset A$ očigledno zadovoljavaju relaciju (2.4).

Ako $x \in S^p_{t_1+t_2} = \bigcup_i \{f_i(p,t_1+t_2)\} =$

$= \bigcup_i \{f_i(f_i(p,t_1)t_2)\}$, onda će biti $x = f_k(f_k(p,t_1),t_2)$, gde je k neki broj iz J. Ako stavimo $f_k(p,t_1) = p_k$, onda je $x = f_k(p_k,t_2)$, a kako $p_k \in S^p_{t_1}$, tada i $x \in f_k(S^p_{t_1}, t_2) \subset$ $\subset \bigcup_i \{f_i(S^p_t, t_2)\} = S^{S^p_{t_1}}_{t_2} = S^S_t$.

Prema definiciji 2.3. preseka dinamičke cevi T_A, tj. preseka $S^A_t = \bigcup_i f_i(A,t)$, ako je skup $A = S^p_{t_o}$, gde je t fiksirano, biće

$$S_t^{S^p_{t_o}} = \bigcup_{q \in S^p_{t_o}} S^q_t \supset S^q_t ,$$

što govori da presek dinamičke cevi preseka dinamičkog levka T_p za neko fiksirano t sadrži presek levka svake tačke $q \in S^p_{t_o}$ za to t.

DEFINICIJA 2.4. Za niz zatvorenih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ kaže se da <u>metrički</u> konvergira ka skupu A, ako se za ma kakav izabran broj $\varepsilon > 0$ može naći prirodan broj $N(\varepsilon)$, tako da je za svako $n \geqslant N$ ispunjena nejednakost $\tau(A_n, A) < \varepsilon$. Skup A se zove <u>metrička</u> granična vrednost niza skupova $\{A_n\}$ i piše se

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A .$$

Lako je pokazati da je metrička granična vrednost niza skupova zatvoren skup.

Na osnovu leme 2.1. vidi se da je u kompaktnom prostoru, ako $p_n \to p$, kad $n \to \infty$,

$$\lim_{n \to \infty} S^{p_n}_t = S^p_t , \qquad \text{za svako } t \in I.$$

STAV 2.4. Ako je prostor R kompaktan i [illegible] za svako $t \in [t_1, t_2]$ zatvoren skup, onda je i odsečak $T_p(t_1, t_2)$ [illegible] kog levka T_p zatvoren skup u odnosu na metriku [illegible].

Uzmimo niz tačaka $\{q_n\} \subset T_p(t_1, t_2)$ [illegible] $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = q$ i dokažimo da i tačka $q \in T_p(t_1, t_2)$. Izdvojimo iz konvergentnog niza delimičan niz i obeležimo [illegible] isto sa $\{q_n\}$ i pretpostavimo da je $q_n = f_k(p, t_{n_k})$, gde je $t_1 \leqslant t_{n_k} \leqslant t_2$ i gde $k \to \infty$ sa n. Jer ako bi počev od nekog n $q_n \in f_{k_o}(p; t_1, t_2)$, tj. jednoj trajektoriji, dokaz je očigledan (v.[19], str. 33o).

Niz brojeva $\{t_{n_k}\}$ sadrži konvergentan podniz, koji ćemo isto obeležiti sa $\{t_{n_k}\}$. Stavimo da je $\lim\limits_{k \to \infty} t_{n_k} = t_o \in [t_1, t_2]$ i konstruišimo niz preseka $\{S^p_{t_{n_k}}\}$. Prema lemi 2.3 i def. 2.4. biće

$$\lim_{k \to \infty} S^p_{t_{n_k}} = S^p_{t_o} \text{,} \qquad ^{1)}$$

odaklo se, prema definiciji odstupanja, vidi da $q = \lim\limits_{k \to \infty} q_{n_k} \in S^p_{t_o}$.

Kako odsečak $T_p(t_1, t_2) \supset S^p_{t_o}$, to $\lim\limits_{k \to \infty} q_{n_k} = q \in T_p(t_1, t_2)$.

Ako uzmemo niz $\{q_n\} = \{f_n(p, t_o)\} \in S^p_{t_o}$, gde $t_o \in [t_1, t_2]$, onda je zbog zatvorenosti skupa $S^p_{t_o}$ $\lim\limits_{n \to \infty} q_n = q \in S^p_{t_o} \subset T_p(t_1, t_2)$.

POSLEDICA 2.3. U uslovima stava 2.4 odsečak $T_p(t_1, t_2)$ je kompaktan skup.

Dokaz je očigledan, zbog zatvorenosti odsečka $T_p(t_1, t_2)$.

---

1) Očigledno onda i odgovarajući niz $\{q_{n_k}\}$ konvergira ka q.

DEFINICIJA 2.5. Za familiju DS F_p kaže se da se može <u>translatorno pomerati</u>, ako je za ma kakva dva kretanja $f_i(p,t)$, $f_k(p,t) \in F_p$ i ma koja dva broja $t_1, t_2 \in I$ ispunjeno

$$f_k(f_i(p,t_1),\ t_2) = f_i(f_k(p,t_2),\ t_1).$$

Takvu familiju nazvaćemo translatornom.

<u>Primer 2.</u> Neka se F_p sastoji iz dva kretanja:

$$f_i(p,t) : \begin{cases} x = a\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ y = a\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$f_k(p,t) : \begin{cases} x = t^2 + \frac{a}{2} \\ y = t^2 + \frac{a}{2} \end{cases}$$

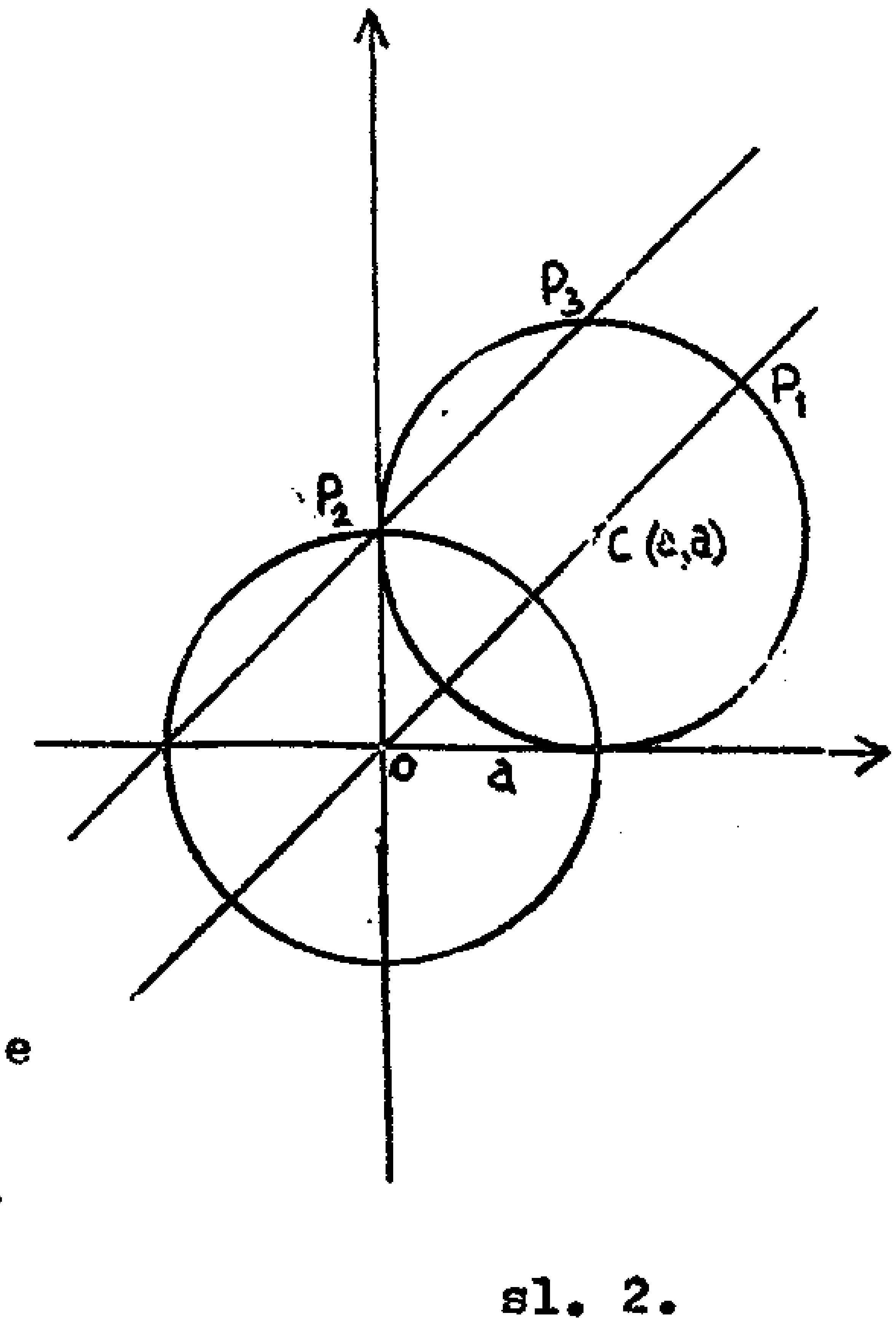
(sl.1), gde je p tačka $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

Uzmimo da je $t_1 = \frac{\pi}{4}$. Onda je

$$f_i(p,t_1) : \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$$

Obeležimo tačku $P_2(0,a)$ sa p_2, pa je

$f_k(f_i(p,t_1),t) = f_k(p_2,t)$. Kretanje $f_k(p_2,t)$ biće dato jednačinama



sl. 2.

$$f_k(p_2,t) : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + a\,. \end{cases}$$

Ako sad uzmemo da je $t_2 = \sqrt{a}$, onda će biti

$$f_k(f_i(p,t_1),t_2) = f_k(p_2,t_2) \; : \begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$$

To je na slici tačka $P_3(a,2a)$.

Podjimo sad obrnutim putem. Uzmimo opet $t_2 = \sqrt{a}$, pa je

$$f_k(p,t_2) \; : \begin{cases} x = a + \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ y = a + \dfrac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

To je tačka $P_1(a + \frac{a}{\sqrt{2}}\, , \, a + \frac{a}{\sqrt{2}})$. Obeležimo je sa p_1, pa će kretanje $f_i(p_1,t)$ biti izraženo jednačinama

$$f_i(p_1,t) \; : \begin{cases} x = a\left[1 + \cos\,(t + \dfrac{\pi}{4})\right] \\ y = a\left[1 + \sin\,(t + \dfrac{\pi}{4})\right]. \end{cases}$$

Uzmimo opet da je $t_1 = \frac{\pi}{4}$, pa ćemo dobiti

$$f_i(f_k(p,t_2),\; t_1) = f_i(p_1,t_1) \; : \begin{cases} x = a \\ y = 2a, \end{cases}$$

što zadovoljava gornju definiciju.

STAV 2.5. Ako je familija F_p translatorna, onda je i familija F_q, gde $q \in \bar{T}_p$ translatorna. Dokažimo to.

Uzmimo ma koja dva DS f_i i f_k iz familije F_p. Ako tačka $q \in T_p$ tj. ako je $q = f_i(p,t_i)$, gde je f_i makakvo kretanje iz F_p, onda je i familija F_q translatorna.

Uzmimo ma koje kretanje iz T_p i primenimo definiciju 2.5. pa će se dobiti

$$f_i(f_k(p,t_2),\; t_i + t_1) = f_k(f_i(p,t_i + t_1),\; t_2\;), \text{ tj.}$$

$$f_i(f_i(f_k(p,t_2),t_i),t_1) = f_k(f_i(f_i(p,t_i),t_1),t_2),\ i$$

primenjujući def. 2.5. dobijamo

$$f_i(f_k(f_i(p,t_i),t_2),t_1) = f_k(f_i(f_i(p,t_i),t_1),t_2),\ \text{odn.}$$

$$f_i(f_k(q,t_2),t_1) = f_k(f_i(q,t_1),t_2)\ ,$$

što dokazuje translatornost familije F_q.

Neka sad tačka $q \in \Omega_{pi}$, tj. $q = \lim_{n \to \infty} f_i(p,t_n)$, gde $t_n \to +\infty$ kad $n \to \infty$. Podjimo od relacije

$$f_i(f_k(p,t_2),t_n + t_1) = f_k(f_i(p,t_n + t_1),t_2).$$

$(t_n, t_1, t_2 \in I)$. Nju možemo drukčije napisati,

$$f_i(f_i(f_k(p,t_2),t_n),t_1) = f_k(f_i(f_i(p,t_n),t_1),t_2),$$

odn. primenjujući opet uslov definicije,

$$f_i(f_k(f_i(p,t_n),t_2),t_1) = f_k(f_i(f_i(p,t_n),t_1),t_2).$$

Kad predjemo na limese kad $n \to \infty$, dobićemo s obzirom na neprekidnost,

$$f_i(f_k(q,t_2),t_1) = f_k(f_i(q,t_1),t_2).$$

Potpuno isto bi se dobilo da smo uzeli tačku iz Ω_{pk}, pa zbog proizvoljnih kretanja f_i i f_k poslednja jednakost važi za ma koju tačku $q \in \Omega_{pF}$.

Neka sada $q \in \overline{T}_p \setminus T_p$ i $q \notin \Omega_{pF}$. Onda će postojati niz $\{q_n\} = \{f_n(p,t_m)\}$, gde $m \to \infty$ sa n, gde možemo bez povrede opštosti uzeti da $t_m \to t_o$, kad $n \to \infty$. Tada je $\lim_{n \to \infty} q_n = q$. Kako je $q_n \in T_p$, to je prema def. 2.5.

$$f_i(f_k(q_n,t_2),t_1) = f_k(f_i(q_n,t_1),t_2).$$

Kad predjemo na limese leve i desne strane pustivši da $n \to \infty$, dobijamo

$$f_i(f_k(q,t_2),t_1) = f_k(f_i(q,t_1),t_2).$$

Time je stav u celosti dokazan.

STAV 2,6. Ako je familija DS F_p L^+ stabilna i ako se može ona translatorno pomerati, onda je i familija F_q, gde tačka q leži na m. kojoj trajektoriji kretanja iz familije F_p, L^+ stabilna.

Treba dokazati da je skup $\overline{T_q^+} = \overline{\bigcup_i f_i(q_i,I^+)}$ kompaktan. Pretpostavimo da $q = f_o(p,t_o)$, gde $f_o(p,t) \in F_p$ i uvedimo preslikavanje kompaktnog skupa $\overline{T_p^+}$ u $\overline{T_q^+}$;

$$(2.6) \qquad \overline{\bigcup_i \{f_i(p,I^+)\}} \xrightarrow{\varphi} \overline{\bigcup_i \{f_i(q,I^+)\}}$$

tako da svakoj tački $f_i(p,t_1) \in \overline{T_p^+}$ odgovara tački $f_i(q,t_1) \in \overline{T_q^+}$. Dokažimo da je to preslikavanje neprekidno.

Uzmimo najpre tačku $r = f_i(p,t_1) \in T_p^+$ i izaberimo ma koje brojeve $\varepsilon > 0$ i $T > 0$, koji odgovaraju neprekidnoj zavisnosti funkcije $f_o \in F$ od početnih uslova, tako da bude $t_o \leqslant T$, gde je $t_o > 0$. Nadjimo neku tačku $s = f_k(p,t_2) \in T_p^+$, koja leži u $\delta(\varepsilon)$-okolini tačke r, tj. da bude

$$(2.7) \qquad \rho(r,s) = \rho[f_i(p,t_1), f_k(p,t_2)] < \delta.$$

Uzeli smo da tačke r i s leže na različitim trajektorijama, jer ako leže na istoj trajektoriji, odn. na trajektoriji jednog istog kretanja, dokaz je očigledan.

Tačke $f_i(p,t_1)$ i $f_k(p,t_2)$ se putem preslikavanja datog odnosom (2.6) preslikavaju u tačke $f_i(q,t_1)$ i $f_k(q,t_2)$, koje obe pripadaju polulevku $T_q^+ = \bigcup_i \{f_i(q,I^+)\}$ pa će biti zbog translatornosti familije F_p

(2.8) $\rho[f_i(q,t_1),f_k(q,t_2)] = \rho[f_i(f_o(p,t_o),t_1),f_k(f_o(p,t_o),t_2)] = \rho[f_o(f_i(p,t_1),t_o),f_o(f_k(p,t_2),t_o)]$.

Medjutim, prema relaciji (2.7), a zbog svojstva II_1 DS rastojanje iz (2.8) postaje

(2.9) $\rho[f_i(q,t_1),f_k(q,t_2)] = \rho[f_o(r,t_o),f_o(s,t_o)] < \varepsilon$.

Kako nejednakost (2.9) važi za ma koju tačku $r = f_i(p,t_1) \in T_p^+$, time je dokazana neprekidnost preslikavanja φ polulevka T_p^+ u T_q^+.

Uzmimo sad dve tačke r_i i $r_k \in \overline{T_p^+} \setminus T_p^+$. Ako tačke r_i i $r_k \in \Omega_{pF}$, onda će biti

$$r_i = \lim_{n\to\infty} f_i(p,t_n) \quad \text{i} \quad r_k = \lim_{m\to\infty} f_k(p,t_m),$$

gde t_n i $t_m \to \infty$, kad m i n $\to \infty$.

Kako tačkama $f_i(p,t_n)$ i $f_k(p,t_m)$ putem preslikavanja φ odgovaraju tačke $f_i(q,t_n)$ i $f_k(q,t_m)$ i ako je $\rho(r_i,r_k) < \delta$, onda se lako dokazuje da je $\rho(s_i,s_k) < \varepsilon$, gde je

$$s_i = \lim_{n\to\infty} f_i(q,t_n), \qquad s_k = \lim_{n\to\infty} f_k(q,t_m).$$

Zaista, ako stavimo $\rho[f_i(p,t_n),f_k(p,t_m)] < \delta$, onda se dobija

$$\rho[f_i(q,t_n),f_k(q,t_m)] = \rho[f_i(f_o(p,t_o),t_n),f_k(f_o(p,t_o),t_m)] =$$

$$\rho[f_o(f_i(p,t_n),t_o),f_o(f_k(p,t_m),t_o)] < \varepsilon.$$

Kad predjemo na granice kad $n,m \to \infty$, dobićemo posle učinjene translacije

$$\rho[\lim_{n\to\infty} f_i(q,t_n), \lim_{m\to\infty} f_k(q,t_m)] = \rho[f_o(r_i,t_o), f_o(r_k,t_o)] < \delta,$$

odn. $\rho(s_i,s_k) < \varepsilon$, što dokazuje neprekidnost.

Na sličan način se dokazuje neprekidnost preslikavanja, ako je $\rho(u_1,u_2) < \delta$, gde su tačke u_1 i u_2 date sa

$$u_1 = \lim_{n\to\infty} f_n(p,t_k) , \qquad u_2 = \lim_{m\to\infty} f_m(p,t_1) ,$$

a t_k i t_1 uzimaju u opštem slučaju razne konačne vrednosti.

Time je dokazana neprekidnost preslikavanja φ skupa $\overline{T_p^+}$ u skup $\overline{T_q^+}$, a ujedno i kompaktnost skupa $\overline{T_q^+}$.

Analogno je i sa ω-graničnim tačkama kretanja $f_i(p,t) \in F_p$. Kako je familija F_p translatorna, to možemo poći od identičnosti

$$f_i(f_k(p,t_1),t_r) = f_k(f_i(p,t_r),t_1). \tag{2.10}$$

Budući da je $\overline{T_p^+}$ kompaktan skup to iz nizova $\{f_k(p,t_1)\}$ i $\{f_i(p,t_r)\}$ možemo izdvojiti konvergentne podnizove. Zadržimo, uprošćavanja radi, iste oznake i za te podnizove. Ako predjemo na limese u identičnosti (2.10), onda će zbog neprekidnosti preslikavanja f_i i f_k biti

$$\lim_{r\to\infty} f_i(f_k(p,t_1),t_r) = f_k(\lim_{r\to\infty} f_i(p,t_r),t_1) , \tag{2.11}$$

gde $t_r \to +\infty$, $t_1 \to +\infty$, kad r, odn. $1 \to \infty$.

Na levoj strani u (2.11) imamo tačku $q_1 \in \Omega_{p_1 i}$, gde je stavljeno $p_1 = f_k(p,t_1)$, a na desnoj $f_k(s_i,t_1)$, gde tačka $s_i \in \Omega_{pi}$. Tačka q_i odgovara konačnom vremenu t_1. Ako pustimo da $1 \to \infty$, tačka q_i će konvergirati nekoj tački $q_{ik} \in \Omega_{u_k i}$, gde $u_k \in \Omega_{pk}$, a $f_k(s_i, t_i)$ nekoj tački $v_k \in \Omega_{s_i k}$. Kako primenjujući oba limesa u (2.11) moramo i na levoj i na desnoj strani dobiti istu tačku, a isto bi se desilo da smo primenjivali limese obrnutim redom, to znači da se, ukoliko je familija F_p translatorna i L^+ stabilna, ta definicija translatorne familije DS može se proširiti kad t_1, odn. t_r teže beskonačnosti.

LEMA 2.6. Neka je familija F_p L^+ stabilna. Ako $p_m \in f_k(p, I)$, onda je $\Omega_{p_m k} = \Omega_{pk}$, za svako kretanje $f_k \in F_p$.

Zbog L^+ stabilnosti skupovi Ω_{pi} su neprazni za svako $i \in J$.

Ako $p_m = f_k(p, t_m) \in T_p$ i ako $q \in \Omega_{p_m k}$, to je $\lim_{n\to\infty} f_k(p_m, t_n) = q$. No, to možemo, prema svojstvu III DS napisati kao

$$\lim_{n\to\infty} f_k(p_m, t_n) = \lim_{n\to\infty} f_k(p, t_m + t_n) = q .$$

Kako $t_m + t_n \to +\infty$, kad $n \to \infty$, znači da je q granična tačka niza $\{f_k(p, t_n + t_m)\}$ i da $q \in \Omega_{pk}$. Prema tome, $\Omega_{p_m k} \subset \Omega_{pk}$. Obrnuto, ako uzmemo da $q \in \Omega_{pk}$, to $\lim_{n\to\infty} f_k(p, t_n) = q$. Pošto je

$p_m = f_k(p, t_m)$, to je $p = f_k(p_m, -t_m)$, pa je $\lim_{n\to\infty} f_k(p, t_n) =$

$= \lim_{n\to\infty} f_k(p_m, t_n - t_m) = q$. Kako je t_m konačno, to $t_n - t_m \to +\infty$ kad $n \to \infty$ i $q \in \Omega_{p_m k}$, odakle sleduje da $\Omega_{pk} \subset \Omega_{p_m k}$. Obe inkluzije daju $\Omega_{p_m k} = \Omega_{pk}$. [1]).

---

[1]) Očigledno je da za kretanje $f_k(p, t)$ je $\Omega_{p_m k} = \Omega_{pk}$, gde $p_m \in f_k(p, I^+)$ i ako ono nije L^+ stabilno, samo ako Ω_{pk} postoji.

Napomena. U specijalnom slučaju ako je $\Omega_{pF} = \Omega_p$, onda ako u formuli (2.1o) pustimo da prvo l pa r ili obrnuto teže beskonačnosti, tačka p dolazi u skup Ω_p i ostaje u njemu bez obzira koja kretanja f_i, f_k iz F_p budemo uzimali.

Zaista na desnoj strani u (2.11) dobićemo, kad $r \to \infty$, najpre tačku $q_i \in \Omega_{p_1}$. No, prema lemi 2.6. $q_i \in \Omega_p$. Na levoj strani dobićemo tačku $f_k(s_i, t_l)$, gde $s_i \in \Omega_p$. Ako pustimo zatim da $l \to \infty$, onda zbog L^+ stabilnosti i potpune invarijantnosti skupa Ω_p, dobijamo opet tačku koja je u Ω_p, naravno i na levoj i na desnoj strani jednakosti (2.11).

POSLEDICA 2.4. Iz leme 2.6. neposredno sledi da, ako je familija F_p L^+ stabilna i ako je $r \in T_p^+$, onda je $\varrho(\Omega_{pF}, \Omega_{rF}) = 0$, gde je ϱ dato metrikom u smislu rastojanja dva skupa ([19]).

Očigledno da je $\varrho(\Omega_{pF}, \Omega_{rF}) = 0$, gde $r \in T_p^+$ i kad familija F_p nije L^+ stabilna, samo ako Ω_{pF} postoji.

POSLEDICA 2.5. Skup svih tačaka $\{p\}$, za koje je odgovarajuća familija kretanja $F_p = \bigcup_{i \in J} \{f_i(p,t)\}$ translatorna, je potpuno invarijantan.

Zaista, ako $q \in T_p$, koja je translatorna, onda je po stavu 2.5. i familija $F_q = \bigcup_i \{f_i(q.t)\}$ translatorna, tj. tački $q = f_k(p, t_1)$, gde je f_k ma koja funkcija iz familije DS F, odgovara translatorna familija kretanja F_q. [1]).

DEFINICIJA 2.6. Neprazan, zatvoren i potpuno invarijantan skup zove se <u>potpuno minimalan skup</u>, ako se u njemu ne sadrži skup, koji poseduje gornje osobine.

Nepokretna tačka $p = f_i(p,t)$ za swako $f_i \in F_p$ pretstavlja potpuno minimalan skup.

---

[1]) Ako takve tačke nazovemo translatornim, onda možemo reći, skup svih translatornih tačaka je potpuno invarijantan.

Može se pokazati, analogno kao u [19] (str. 374) da svaki potpuni invarijantni, zatvoreni kompaktni skup sadrži neki totalno minimalan skup, koji je očigledno kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog prostora.

Ako je prostor R kompaktan, očigledno da on sadrži potpuno minimalni skup.

Napomena. Ako je T_p potpuno invarijantan skup i ako $q \in T_p$, onda i $f_i(r,t) \in T_p$, gde je r ma koja tačka na T_q.

Zaista iz $q \in T_p$, sleduje da $f_i(q,t) \in T_p$. Uzmimo $r \in T_q$, $r = f_k(q,\tau) \in T_p$, jer $f_i(q,t) \in T_p$. Onda zbog invarijantnosti T_p mora i $f_l(r,t) \in T_p$ za ma koje l i svako $t \in I$.

STAV 2.7. Da bi translatorna familija kretanja F_p bila L^+ stabilna potrebno je i dovoljno da su ispunjeni sledeći uslovi:

1^o Ako $r \in T_p^+$, onda je Ω_{rF} neprazan.

2^o Ω_{pF} je kompaktan.

3^o Svaki presek S_T^p (T je konačno) je kompaktan.

Potrebnost. Iz L^+ stabilnosti familije F_p sleduje na osnovu stava 2.6. i L^+ stabilnost familije DS $F_r = \bigcup_i \{f_i(r,t)\}$ a to govori da je Ω_{rF} neprazan skup. Ispunjenje ostala dva uslova je očigledno.

Dovoljnost. Na osnovu stava 2.1. dovoljno je dokazati da je $\lim_{t \to +\infty} (S_t^p, \Omega_{pF}) = 0$. Ako pretpostavimo obrnuto, to znači da se može naći niz preseka $\{S_{t_n}^p\}$[1], za koje je $\pi(S_{t_n}^p, \Omega_{pF}) \geqslant \varepsilon$, gde je ε neki pozitivan broj. Ovo opet govori da postoji niz $\{p_{n_k}\}$, gde $p_{n_k} = f_k(p,t_n)$, $(k \in \mathfrak{J})$[2], takav da je $\rho(p_{n_k}, \Omega_{pF}) \geqslant \varepsilon$. Na osnovu uslova 1^o $\Omega_{p_{n_k}F}$ je

---

[1]) Uzmimo da $t_n \to +\infty$, kad $n \to \infty$.

[2]) k u opštem slučaju može uzimati sve vrednosti iz $\mathfrak{J}$.

neprazan i prema posledici 2.4. biće

$\rho(\Omega_{p_{n_k}F}, \Omega_{pF}) = 0$. Zbog toga se za postojeće ε može naći neki broj $N>0$ i niz $\{\tau_n\}$, $(\tau_n > 0)$, tako da je $\rho(r_{n_k}, \Omega_{pF}) < \varepsilon$, gde $r_{n_k} = f_k(p_{n_k}, \tau_n)$, za svako $n \geq N(\varepsilon)$. Ako napišemo da je $p_{n_k} = f_k(p_{n_k}, 0)$, onda se zbog neprekidnosti može naći neko $0 \leq T_n < \tau_n$, takvo da je

$$(2.12) \qquad \rho[f_k(p_{n_k}, T_n), \Omega_{pF}] = \varepsilon.$$

Prema uslovu 3^0 i stavu 1.9. dinamički polulevak konačne "vremenske dužine" je kompaktan a to znači da je T_p^+ lokalno kompaktan skup. Zbog toga i uslova 2^0, $\overline{S(\Omega_{pF}, 2\varepsilon) \cap T^+}$ je kompaktan skup. Kako, prema (2.12) $f_k(p_{n_k}, T_n) \in \overline{S(\Omega_{pF}, 2\varepsilon) \cap T_p^+}$, to se iz niza $\{f_k(p_{n_k}, T_n)\} = \{f_k(p, t_{n_k} + T_n)\}$ može izdvojiti podniz koji konvergira ka nekoj tački $q \in \Omega_{pF}$, kad $n \to \infty$, što je u protivrečnosti sa (2.12). Time je stav dokazan.

STAV 2.8. Ako skup $A \subset R$, gde je R kompaktan prostor, onda je ispunjeno, ako je za svako $p \in A$ S_t^p zatvoren skup,

$$\overline{S_t^A} = S_t^{\bar{A}}$$

za svako $t \in I$ $(S_t^A = \bigcup_i \{f_i(A, t)\} = \bigcup_{p \in R} \bigcup_i \{f_i(p, t)\}$).

Dokažimo najpre da je $\overline{S_t^A} \subset S_t^{\bar{A}}$. Uzmimo tačku $q \in \overline{S_t^A}$. Ako $q \in S_t^A$, onda $q \in S_t^{\bar{A}}$, pa je gornja inkluzija odmah ispunjena. Stoga pretpostavimo da $q \in \overline{S_t^A} \setminus S_t^A$. Tada postoji niz $\{q_n\} \subset S_t^A = \bigcup_i \{f_i(A, t)\}$, takav da $q_n \to q$, kad $n \to \infty$.

Nizu $\{q_n\}$ odgovara, zbog jednoznačnosti preslikavanja f_i, bar jedan niz $\{p_n\} \subset A$, takav da je $q_n = f_i(p_n, t) (i \in J)$.

Zbog kompaktnosti prostora R može se iz niza $\{p_n\}$ izdvojiti konvergentan podniz, koji ćemo isto obeležiti sa $\{p_n\}$ i koji konvergira ka tački $p \in \bar{A}$, kad $n \to \infty$. Ako sa $\{q_n\}$ označimo odgovarajući podniz konvergentnom podnizu $\{p_n\}$, onda je očigledno da niz $\{q_n\}$ konvergira ka tački q, kad $n \to \infty$.

Ako se posle nekog $n > N$ sve tačke niza $\{q_n\}$ nalaze na jednoj trajektoriji $f_k(p_n, I)$, tj. ako je za $n > N$ $q_n = f_k(p_n, t)$, onda će se dobiti, pošto primenimo invertno preslikavanje

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} f_k(q_n, -t) = f_k(\lim_{n\to\infty} q_n, -t) = f_k(q, -t),$$

Odavde proizlazi

$$q = f_k(p,t) \in \bigcup_i \{f_i(p,t)\} \subset \bigcup_i \bigcup_{p\in\bar{A}} \{f_i(p,t)\} =$$

$$= \bigcup_i \{f_i(\bar{A},t)\} = S_t^{\bar{A}}.$$

Ako tačke q_n posle nekog $n > N$ ne leže na jednoj trajektoriji, tj. ako je $q_n = f_i(p_n, t)$, gde $i \to \infty$, kad $n \to \infty$, onda pokažimo najpre da $q = \lim_{n\to\infty} q_n \in S_t^p$. Pretpostavimo da je naprotiv $\rho(q, S_t^p) \geq \varepsilon$. Iz odnosa $p_n \to p$, kad $n \to \infty$, proizlazi prema definiciji 2.4 da je $\lim_{n\to\infty} S_t^{p_n} = S_t^p$, tj. da se za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ može naći prirodan broj $N_1(\frac{\varepsilon}{3})$, takav da je $\tau(S_t^{p_n}, S_t^p) < \frac{\varepsilon}{3}$ za svako $n > N_1$, a to daje relaciju

(2.13) $$\tau(S_t^{p_n}, S_t^p) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{za} \quad n > N_1.$$

Dalje, kako je $q_n = f_i(p_n, t)$, te prema tome, tačka $q_n \in S_t^{p_n}$, to se može napisati da je

(2.14) $$\rho(S_t^{p_n}, q_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

S obzirom na konvergenciju niza $\{q_n\}$ ka tački q, to već uzetom broju ε odgovara prirodan broj $N_2(\frac{\varepsilon}{3})$, takav da je

$$\rho(q_n,q) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{za} \quad n > N_2. \tag{2.15}$$

Ako stavimo da je $N = \max(N_1,N_2)$, onda nejednakosti (2.13), (2.14) i (2.15) daju

$$\rho(q,S_t^p) < \varepsilon,$$

što dovodi do protivrečnosti. Pošto je S_t^p zatvoren skup to $q \in S_t^p$. Prema tome, možemo staviti da je za neko $f_o \in F_p$

$$q = f_o(p,t) \in f_o(\bar{A},t) \subset S_t^{\bar{A}},$$

što daje $\overline{S_t^A} \subset S_t^{\bar{A}}$.

Dokažimo inkluziju $S_t^{\bar{A}} \subset \overline{S_t^A}$. Neka tačka $q \in S_t^{\bar{A}} = \bigcup_i \{f_i(\bar{A},t)\}$. Onda postoji neka funkcija $f_k \in F_p$ i tačka $p \in \bar{A}$, tako da je $f_k(q,-t) = p$. Ako $p \in A$ onda $q \in S_t^A \subset \overline{S_t^A}$, te je gornja inkluzija odmah zadovoljena. Stoga uzmimo da $p \in \bar{A} \setminus A$, Tada postoji niz $\{p_n\} \subset A$ tako da $p_n \to p$, kad $n \to \infty$, te je onda

$$\bigcup_i \{f_i(p_n,t)\} \subset \bigcup_i \{f_i(A,t)\} = S_t^A \subset \overline{S_t^A}.$$

Kad pustimo da $n \to \infty$, onda će biti na osnovu leme 2.1. def. 2.4. i prema poslednjoj inkluziji

$$S_t^p = \lim_{n\to\infty} S_t^{p_n} = \lim_{n\to\infty} \bigcup_i \{f_i(p_n,t)\} \subset \overline{S_t^A},$$

jer je $\overline{S_t^A}$ zatvoren skup. Kako je poslednja inkluzija zadovoljena za ma koju tačku $p \in \bar{A}$, samim tim je zadovoljena i inkluzija $S_t^{\bar{A}} \subset \overline{S_t^A}$.

Obe inkluzije daju

$\overline{S_t^A} = S_t^{\bar{A}}$, te je time stav dokazan.

STAV 2.9. Neka je u kompaktnom prostoru R Ω_p skup ω-graničnih tačaka familije F_p. Ako je familija DS translatorna, onda postoje ω-granični skupovi familija F_{p_k}, gde je $p_k = f_k(p,\tau)$, za ma koje $f_k \in F$ i $|\tau| \leqslant T$ (T je proizvoljan broj) i $\Omega_{p_k} = \Omega_p (T>0)$.

Neka su $T>0$ i $\varepsilon>0$ proizvoljno izabrani brojevi, a $\delta(\frac{\varepsilon}{2})>0$ broj koji odgovara podjednako neprekidnoj zavisnosti familije $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ od početnih uslova i neka tačka $q \in \Omega_p$. S obzirom na kompaktnost prostora R može se naći prirodan broj $N(\delta)$, koji odgovara broju $\delta(\frac{\varepsilon}{2})$, tako da je $\rho[f_i(p,t_n^i), q] < \delta$ za svako kretanje $f_i \in F_p$ i svako $n \geqslant N$. Prema svojstvu II_1 DS biće za neko kretanje $f_k \in F_p$

$$\rho[f_k(f_i(p,t_n^i),\tau), f_k(q,\tau)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

za sve $|\tau| \leqslant T$ i za $n \geqslant N$.

Medjutim na osnovu translatornosti familije F_p je

$$f_i(f_k(p,\tau), t_n^i) = f_k(f_i(p,t_n^i),\tau),$$

tako da će za ma koja dva kretanja $f_i, f_h \in F_p$ biti

$$\rho[f_h(f_k(p,\tau), t_n^h), f_k(q,\tau)] < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i}$$

$$\rho[f_i(f_k(p,\tau), t_n^i), f_k(q,\tau)] < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.16}$$

odakle je

$$\rho[f_h(f_k(p,\tau), t_n^h), f_i(f_k(p,\tau), t_n^i)] < \varepsilon.$$

Pošto je $p_k = f_k(p,\tau)$, to znači da je

$$(2.17)\quad \lim_{n\to\infty} f_h(f_k(p,\tau),t_n^h) = \lim_{n\to\infty} f_i(f_k(p,\tau),t_n^i) = r_k \in$$

$\in \Omega_{p_k}$, gde su f_i i f_h ma koja kretanja iz F_p. Uzimajući u obzir činjenicu da, ako $q\in\Omega_{pk}$ onda i $q\in\Omega_{p_k k}$, gde je $p_k = f_k(p,\tau)$, pojedinačno za svako $k\in J$ i svako $\tau\in I$, vidi se da ω-granične tačke r_k iz skupa Ω_{p_k} ne zavise od indeksa iz J, tj. od kretanja $f_i(p,t)\in F_p$ [1]. Pošto smo obeležili $f_k(p,\tau)$ sa p_k, onda, kako je prema lemi 2.6. $\Omega_{p_k i} = \Omega_{pi}$ za svako $i\in J$, to je $\Omega_{p_k} = \Omega_p$, što važi za svaku tačku $p_k = f_k(p,\tau)\in T_p^+$. Prema tome je za svako k

$$\bigcup_{k\in J}\Omega_{p_k} = \bigcup_k \Omega_{f_k(p,\tau)} = \Omega_p .$$

Jednakost (2.17) pokazuje egzistenciju skupa ω-graničnih tačaka familije kretanja F_{p_k}.

POSLEDICA 2.6. Ako je A zatvoren skup u kompaktnom prostoru onda i presek S_t^A zatvoren i kompaktan skup.

Zaista, kako je onda $A = \bar{A}$, to će prema stavu 2.9. biti

$$S_t^A = S_t^{\bar{A}} = \overline{S_t^A},$$

Prema tome S_t^A je i kompaktan skup, kao zatvoren skup kompaktnog prostora

---

1) Sa Ω_{p_k} je obeležen skup ω-graničnih tačaka familije F_{p_k}, tj. skup tačaka r_k za koje je $r_k = \lim_{n\to\infty} f_i(p_k,t_n^i)$, za sve $f_i\in F$.

3. STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA

DEFINICIJA 3.1. Familija kretanja $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$

naziva se stabilna u smislu Ljapunova (pozitivno, negativno stabilna), ako za proizvoljno izabran broj $\varepsilon > 0$ mogu se naći brojevi $\delta_i(\varepsilon) > 0$, tako da je $\rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] < \varepsilon$, ukoliko je $\rho(p,q) < \delta_i$ $(p,q \in R)$ za svako $f_i \in F_p$ i svako $t \in I$ $(t \in [o,+\infty), t \in (-\infty, o])$.

Tu stabilnost ćemo skraćeno obeležavati sa $S(S^+, S^-)$.

Ako je još pri tom ispunjen uslov

$$\lim_{t \to \infty} \rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] = o, \quad \text{za svako} \quad f_i \in F_p$$

stabilnost se zove asimptotska.

Odmah se vidi da iz S stabilnosti familije F_p sledi i S stabilnost svakog kretanja iz te familije.

Ako se pod uslovima gornje definicije može naći za dato $\varepsilon > 0$ za svako kretanje $f_i(p,t)$ jedinstven broj $\delta(\varepsilon) > 0$, onda se stabilnost zove podjednaka.

U toku daljeg izlaganja uglavnom ćemo navoditi definicije i izvoditi stavove koji se odnose na S^+ stabilnost, jer se dokazi za S i S^- stabilnost izvode na isti način.

STAV 3.1. Ako je kretanje $f_k(p,t) \in F_p$ S^+ stabilno, onda je i kretanje $f_k(p_1,t)$, gde je p_1 ma koja tačka na polutrajektoriji $f_k(p,I^+)$, S^+ stabilno.

Neka je $p_1 = f_k(p,t_1)$ proizvoljno izabrana, ali fiksirana tačka na polutrajektoriji $f_k(p,I^+)$. Kako je kretanje

$f_k(p,t)$ S^+ stabilno, to se za proizvoljno $\varepsilon>0$ može naći drugi broj $\delta_k(\varepsilon)>0$, tako da je ispunjena nejednakost

$$(3.1)\qquad \rho\left[f_k(p,t+t_1),f_k(q,t+t_1)\right]<\varepsilon, \quad \text{za sve } t+t_1>0,$$

ukoliko je $\rho(p,q)<\delta_k$.

Nadjimo sad broj $\delta_1(\delta_k)>0$ prema uslovu II_1 DS, a to će reći za uzeto $\delta_k>0$ i neki izabrani broj $T>0$ može se naći broj $\delta_1(\delta_k)>0$, tako da je

$$(3.2)\qquad \rho\left[f_k(p_1,-t_1),f_k(q_1,-t_1)\right]=\rho(p,q)<\delta_k\,,$$

ukoliko je $\rho(p_1,q_1)<\delta_1$, za $-t_1\leqslant -T$. [1]

S druge strane nejednakost (3.1) se može, prema svojstvu III DS, napisati kao

$$\rho\left[f_k(f_k(p,t_1),t),f_k(f_k(q,t_1),t\right]=\rho\left[f_k(p_1,t),f_k(q_1,t)\right]<\varepsilon,$$

gde je kao u (3.2) stavljeno $f_k(q,t_1)=q_1$.

Pošto uzeto δ_1 u krajnjoj liniji zavisi od ε, to poslednja relacija dokazuje stabilnost kretanja $f_k(p_1,t)$.

STAV 3.2. Ako je familija kretanja $F_p=\bigcup_i\{f_i(p,t)\}$ S^+ stabilna i translatorna, onda je i familija $F_r=\bigcup_i\{f_i(r,t)\}$, gde $r\in T_p^+$, S^+ stabilna.

Neka je tačka $p\in R$ i neka je uzeto proizvoljno $\varepsilon>0$, Odredimo brojeve $\eta_i(\varepsilon)$ saglasno uslovu II_1 DS. Prema uslovu stava, mogu se naći brojevi $\delta_i(\eta_i)>0$ tako da je za svako $i\in\mathfrak{I}$ ispunjena nejednakost

---

1) Kako svakoj tački $q_1\in S(p_1,\delta_1)$ prema relaciji (3.2) odgovara tačka $q=f_k(q_1,-t_1)\in S(p,\delta_k)$, a nejednakost (3.1) važi za sva-

(3.4) $\rho\left[f_i(p,t),f_i(q,t)\right]<\eta_i$ za sve $t>0$,

ukoliko je $\rho(p,q)<\delta_i$. Uzmimo tačku $r = f_k(p,t_o) \in T_p^+$, gde je f_k ma koje kretanje iz F_p. Prema stavu 3.1 kretanje $f_k(r,t)$ je S^+ stabilno, tj. za uzeto $\varepsilon>0$ može se naći broj $\delta_k^i(\varepsilon)>0$ tako da je

$$\rho\left[f_k(r,t),f_k(s,t)\right]<\varepsilon \qquad \text{za sve } t>0, \quad ^{2)}$$

ako je $\rho(r,s)<\delta_k^i$. Kao što se vidi iz dokaza stava 3.1 može se staviti $s = f_k(q,t_o)$. Zbog translacije familije F_p se dobija za svako $i\in J$

$$\rho\left[f_i(r,t),f_i(s,t)\right] = \rho\left[f_i(f_k(p,t_o)t),f_i(f_k(q,t_o),t)\right] =$$

$$= \rho\left[f_k(f_i(p,t),t_o),f_k(f_i(q,t),t_o)\right] \quad ,$$

za sve $t>0$ i svako $t_o\leqslant T$, gde T odgovara uslovu II_1 DS. Zbog toga uslova, a prema (3.4) važi nejednakost

$$\rho\left[f_i(r,t)f_i(s,t)\right] = \rho\left[f_k(f_i(p,t),t_o),f_k(f_i(q,t),t_o\right]<\varepsilon \;,$$

za svako $f_i\in F$ i sve $t>0$, što dokazuje stav.

---

ko $q\in S(p,\delta_k)$, to možemo uzeti da se tačka q iz relacije (3.2) poklapa sa tačkom q iz nejednakosti (3.1).

2) Naprvi pogled izgleda da broj δ_k^i ne zavisi od indeksa i, što bi u izvesnom smislu davalo uniformnu stabilnost. Medjutim, ta zavisnost se vidi iz dokaza stava 3.1, gde δ_1 zavisi od indeksa k preko broja δ_k, koji majorira rastojanje tačaka p i q. Ovde je to rastojanje majorirano brojem δ_i, te zbog toga δ_k^i zavisi i od indeksa i.

POSLEDICA 3.1. Ako je familija kretanja F_p u kompaktnom prostoru podjednako S^+ stabilna i translatorna onda je i $F_r = \bigcup_i \{f_i(r,t)\}$, gde $r \in T_p^+$, podjednako S^+ stabilna.

Uzmimo ma koje kretanje $f_k(p,t) \in F_p$. Zbog kompaktnosti prostora R i na osnovu stava 3.2 za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se za to kretanje naći jedinstven broj $\delta_k(\varepsilon) > 0$, tako da on odgovara S stabilnosti za svaku tačku $r \in T_p^+$ ([19] str. 385). Ako sad fiksiramo tačku r a uzmemo sva kretanja $f_i(r,t) \in F_r$, $(i \in J)$, onda zbog podjednake S stabilnosti broj $\delta(\varepsilon)$ odgovara svim kretanjima f_i. Odavde sleduje da se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može naći jedinstven broj $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da je za svaku tačku $r \in T_p^+$ i svako kretanje $f_i \in F$ $\rho[f_i(r,t), f_i(q,t)] < \varepsilon$, ako je $\rho(r,q) < \delta$, tj. podjednaka stabilnost familije F_r.

DEFINICIJA 3.3. Familija DS $F = \bigcup_{p \in A} F_p$, gde je $A \subset B \subset R$ naziva se <u>$S^+(S^-)$ stabilna u skupu A u odnosu na skup B</u>, ako se za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$ i za ma koju tačku $p \in A$ mogu naći brojovi $\delta_i(p, \varepsilon) > 0$, tako da je $\rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] < \varepsilon$, za sve $t > 0$ $(t < 0)$, gde $f_i \in F$, ukoliko $q \in S(p, \delta_i) \cap B$.

Ako se za uzeto $\varepsilon > 0$ može u gornjoj definiciji naći jedinstven broj $\delta(\varepsilon) > 0$ za sve tačke $p \in A$ stabilnost ćemo nazvati <u>uniformnu</u>, a ako δ ne zavisi od indeksa i, onda ćemo reći da je <u>podjednaka</u> stabilnost.

Ako je familija F istovremeno S^+ i S^- stabilna, onda kažemo da je ona S stabilna.

Ukoliko uz zadovoljenje uslova gornje definicije je ispunjen i uslov

$$\lim_{t \to \infty} \rho[f_i(p,t), f_i(q,t)] = 0 \tag{3.5}$$

onda se stabilnost zove <u>asimptotska</u>.

Skup svih tačaka $q \in B (q \notin A)$, za koje važi (3.5) čine <u>oblast privlačenja</u> skupa A familijom F.

NAPOMENA. Ako je familija kretanja F_p S^+ stabilna i translatorna, onda je i familija $F = \bigcup_{q \in T_p^+} F_q$ S^+ stabilna u skupu T_p^+, u odnosu na neki skup $B \supset T_p^+$. To neposredno proizlazi iz stava 3.2 i definicije 3.3. Dalje iz posledice 3.1 i def. 3.3 se vidi da, ukoliko je familija F_p u kompaktnom prostoru podjednako S^+ stabilna i translatorna, onda je i familija $F = \bigcup_{q \in T_p^+} F_q$ podjednako uniformno S^+ stabilna u skupu T_p^+ u odnosu na neki skup $B \supset T_p^+$.

Umesto kompaktnosti prostora R može se zahtevati, uz ostale uslove, L^+ stabilnost familije F_p, jer je onda prema def. 2.1 $\overline{T_p^+}$ kompaktan skup. Ali, prema stavovima 2.5 i 2.6 onda je i svaka familija $F_q (q \in T_p)$ translatorna i L^+ stabilna, pa je i svaki skup $\overline{T_q^+}$ kompaktan, a prema posledici 3.1 i svaka familija $F_q = \bigcup_i \{f_i(q,t)\}$ $(q \in T_p^+)$ je podjednako S^+ stabilna. Stoga je u važnosti

STAV 3.3. Ako je translatorna L^+ stabilna familija kretanja F_p ujedno i podjednako S^+ stabilna, onda je i svaka familija $F^q = \bigcup_{r \in T_q^+} F_r (q \in T_p^+)$ podjednako uniformno S^+ stabilna u skupu T_q u odnosu na neki skup $B \supset T_q$. [1]

STAV 3.4 Oblast privlačenja B potpuno invarijantnog skupa $A \subset B$ familijom $F = \bigcup_{p \in A} F_p$ je otvoren skup.

---

[1]) Očigledno da je $F^q = \bigcup_{r \in T_q^+} \bigcup_i \{f_i(r,t)\}$, tj. unija svih familija F_r, gde r pripada polulevku T_q^+, a $q \in T_p^+$.

Uzmimo ma koju tačku $p \in A$ i ma koje kretanje $f_1(p,t) \in F_p$. Zbog asimptotske stabilnosti može se za ma kakvo $\varepsilon > 0$, naći $\delta_1(p,\varepsilon) > 0$ tako da, ukoliko je $\rho(p,q) < \delta_1 (q \in B, q \notin A)$, onda je $\rho[f_1(p,t), f_1(q,t)] < \varepsilon$ i $\rho[f_1(p,t), f_1(q,t)] \to 0$, kad $t \to +\infty$.

Prema tome, može se naći broj $T > 0$ takav da važi nejednakost

$$(3.6) \qquad \rho[f_1(p,T), f_1(q,T)] < \frac{1}{2}\delta_1 .$$

No, usled svojstva II_1 DS za brojeve δ_1 i $T > 0$ može se naći odgovarajući broj $\sigma_1 > 0$, takav da ukoliko $r \in S(q, \sigma_1)$, $(r \notin A)$, onda je

$$(3.7) \qquad \rho[f_1(q,T), f_1(r,T)] < \frac{1}{2}\delta_1 .$$

Nejednakosti (3.6) i (3.7) daju

$$\rho[f_1(r,T), f_1(p,T)] < \delta_1 .$$

Stavimo $f_1(p,T) = p_1 \in A$, pa će zbog uslova stava biti za isti broj $1 \in J$

$$\lim_{t \to \infty} \rho[f_1(r, T+t), f_1(p_1, t)] = 0,$$

što kazuje da i tačka $r \in S(q, \sigma_1)$ pripada oblasti privlačenja B, tj. da je B otvoren skup.

STAV 3.5. Ako je familija $F_p \cup f_0(p,t)$ translatorna, a F_p S^+ stabilna, gde je $f_0(p,t)$ ω-granična funkcija familije F_p za neko $t \geq T$, onda je i $f_0(q,t)$ ω-granična funkcija familije DS F_q za isto to $t \geq T$, gde je $q = f_s(p,t_0)$ ma koja tačka levka T_p.

Uzmimo proizvoljno, ali fiksirano $\varepsilon>0$ i odredimo broj $\delta(\varepsilon)>0$ koji odgovara S^+ stabilnosti funkcije f_s. Za to možemo, prema definiciji ω-granične funkcije naći drugi broj $N(\delta)>0$, takav da bude

$$\sup_{t\geqslant T} \rho\left[f_o(p,t),f_n(p,t)\right]<\delta \quad \text{za } n>N(\delta).$$

To znači, da je za svako $t\geqslant T$ $\rho\left[f_o(p,t),f_n(p,t)\right]<\delta$, ukoliko je $n>N(\delta)$. Onda će za tačku $q = f_s(p,t_o)$ biti, prema uslovu stava za svako $t\geqslant T$ i svako $n>N(\delta)$

$$\rho\left[f_n(q,t),f_o(q,t)\right. = \rho\left[f_n(f_s(p,t_o),t),f_o(f_s(p,t_o),t)\right] =$$

$$= \rho\left[f_s(f_n(p,t),t_o),f_s(f_o(p,t),t_o)\right] .$$

No, kako je $\rho\left[f_o(p,t),f_n(p,t)\right]<\delta$, onda će zbog S^+ stabilnosti biti $\rho\left[f_n(q,t),f_o(q,t)\right]<\varepsilon$ za svako $t\geqslant T$ i $n>N(\delta)$ a to znači da je i

$$\sup_{t\geqslant T}\rho\left[f_o(q,t),f_n(q,t)\right]<\varepsilon, \qquad \text{za } n>N(\delta(\varepsilon)) = N_1(\varepsilon)$$

što dokazuje da je $f_o(q,t)$ ω-granična funkcija familije F_q.

<u>Napomena.</u> Ako granična funkcija $f_o(p,t)\in F_p$, tj. ispunjava uslove I, II, III DS, onda se ona zove granično kretanje familije F_p.

DEFINICIJA 3.4. Kretanje $f_o(p,t)$ familije F_p naziva se <u>$Q^+(Q^-)$ stabilno</u> u odnosu na familiju $F_p'\subset F_p$, ako se za proizvoljno izabran broj $\varepsilon>0$ može naći realan broj $T(\varepsilon)>0$ $(-T(\varepsilon)<0)$, takav da je

$$\rho\left[f_o(p,t),f_1(p,t)\right]<\varepsilon$$

za sve $t \geqslant T$ $(t \leqslant -T)$ i svako kretanje $f_1 \in F'_p$. [1]

DEFINICIJA 3.5. Dinamički sistem $f_o \in F'$ naziva se $Q^+(Q^-)$ stabilan u odnosu na familiju $F' \subset F$, ako se za proizvoljno izabran broj $\varepsilon > 0$, može naći broj $T(\varepsilon, p) > 0$ $(-T(\varepsilon, p) < 0)$ takav da je za svaku tačku $p \in R$

$$(3.8) \qquad \rho\left[f_o(p,t), f_1(p,t)\right] < \varepsilon$$

za sve $t \geqslant T$ $(t \leqslant -T)$ i svaku funkciju $f_1 \in F'$.

Ako broj T u def. 3.5 zavisi samo od ε, stabilnost se zove uniformna.

Ako je DS f_o istovremeno Q^+ i Q^- stabilan, onda ćemo reći da je on Q stabilan.

STAV 3.6. Ako je kretanje $f_o(p,t)$ Q^+ stabilno u odnosu na familiju F_p, koja je podjednako S^+ stabilna, onda je i kretanje $f_o(q,t)$ gde je $q \in S(p, \delta)$, Q^+ stabilno u odnosu na F_q $(\delta = \delta(\varepsilon))$.

Izaberimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ shodno definicijama 3.1 i 3.4 i nadjimo broj $T(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$ takav da je

$$\rho\left[f_o(p,t), f_1(p,t)\right] < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{za svako } t \geqslant T \text{ i svako } f_1 \in F_p.$$

Prema def. 3.1 može se naći broj $\delta(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$, tako da za svaku tačku $q \in S(p, \delta)$ važe nejednakosti

$$\rho\left[f_o(p,t), f_o(q,t)\right] < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad \rho\left[f_1(p,t), f_1(q,t)\right] < \frac{\varepsilon}{3}$$

za f_o, $f_1 \in F_p$ i svako $t > 0$.

[1]) Očigledno da je onda i cela familija F'_p $Q^+(Q^-)$ stabilna.

Poslednje tri nejednakosti daju za svako kretanje $f_i \in F_p$

$$\rho\left[f_o(q,t), f_i(q,t)\right] < \varepsilon \qquad \text{za sve} \quad t \geqslant T,$$

što dokazuje da je kretanje $f_o(q,t)$ Q^+ stabilno. Na isti način se dokazuje Q^- stabilnost.

Analogno se dokazuje i

POSLEDICA 3.2. Ako je DS $f_o(p,t)$ $(p \in A \subset R)$ unoformno Q^+ stabilan u odnosu na familiju $F = \bigcup_{p \in A} F_p$, a familija F podjednako uniformno S^+ stabilna u A, u odnosu na skup B, onda je i DS $f_o(q,t)$, gde $q \in S(p,\delta) \cap B$ uniformno Q^+ stabilan u odnosu na familiju $F' = \bigcup_{q \in S \cap B} F_q$.

Iz def. 3.1 vidi se da za podjednako S stabilnu familiju F_p važi inkluzija

$$f_i(S(p,\delta),t) \subset S(f_i(p,t),\varepsilon)$$

za svako $t \in I$ i svako kretanje $f_i \in F_p$.

Isto tako se iz def. 3.3 vidi da za podjednako uniformno S^+ stabilnu familiju DS F u skupu A u odnosu na skup B važi

$$f_i(S(A,\delta),t) \subset S(f_i(A,t),\varepsilon),$$

za svako $t \in I$ i svaku funkciju $f_i \in F$.

STAV 3.7. Ako je kretanje $f_o(p,t)$ Q^+ stabilno u odnosu na translatornu familiju $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ $(p = \text{const.})$, onda su i sva kretanja $f_o(r,t)$, gde $r \in T_p^+$, Q^+ stabilna u odnosu na familiju $F_r = \bigcup_i \{f_i(r,t)\}$.

Izaberimo proizvoljno $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko $T_1 > 0$ i saglasno svojstvu II_1 DS nadjimo broj $\delta(\varepsilon, T_1) > 0$. Prema definiciji Q^+ stabilnosti za taj broj δ može se naći $T(\delta) > 0$ tako da je

$$(3.9) \qquad \rho\left[f_o(p,t), f_i(p,t)\right] < \delta \qquad \text{za } t \geq T \text{ i svako } f_i \in F_p .$$

Uzmimo proizvoljnu, ali fiksiranu tačku $r = f_k(p, t_k) \in T_p^+$, gde je $|t_k| \leq T_1$. Onda će s obzirom na translatornost familije F_p, biti

$$\rho\left[f_o(r,t), f_i(r,t)\right] = \rho\left[f_o(f_k(p,t_k),t), f_i(f_k(p,t_k),t)\right] =$$
$$= \rho\left[f_k(f_o(p,t),t_k), f_k(f_i(p,t),t_k)\right] .$$

Medjutim, prema svojstvu II_1 DS na osnovu nejednakosti (3.9) dobiće se za $|t_k| \leq T_1$

$$\rho\left[f_k(f_o(p,t),t_k), f_k(f_i(p,t),t_k)\right] < \varepsilon ,$$

te je onda i

$$\rho\left[f_o(r,t), f_i(r,t)\right] < \varepsilon \qquad \text{za } t \geq T,$$

što s obzirom na proizvoljnost izbora tačke r dokazuje stav.

STAV 3.8. Neka je u lokalno kompaktnom prostoru familija $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ L stabilna. Ako je pri tom ona i S stabilna onda je skup tačaka $\{q\} = \{q : q \in T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\}\}$ otvoren.

Prema uslovu teoreme svako kretanje $f_i(p,t) \in F_p$ je L i S stabilno, te je skup tačaka na svakoj trajektoriji dinamičkog levka T_p otvoren, ([19], str. 427), a onda je i ceo levak T_p kao unija otvorenih skupova otvoren skup.

STAV 3.9. Neka je familija F_p S^+ stabilna u lokalno kompaktnom prostoru R. Ako je ona pri tome L^+ nestabilna, onda je skup Ω_p prazan.

Pretpostavimo suprotno, da skup Ω_p nije prazan. Onda postoji tačka $q \in \Omega_p$, tako da je za svako kretanje $f_i(p,t) \in F_p$

$$\lim_{n \to \infty} f_i(p, t_n^i) = q, \tag{3.10}$$

gde $t_n^i \to +\infty$, kad $n \to \infty$. S druge strane zbog L^+ nestabilnosti postoji niz $\{q_n\} = \{f_m(p, \tau'_{m,n})\}$ iz koga se ne može izdvojiti konvergentan podniz. $(n \geqslant m)$; neki od brojeva $\tau'_{m,n}$ mogu biti jednaki, iako su im indeksi različiti.

Pretpostavimo najpre da $\tau'_{m,n} \to +\infty$, kad $n \to \infty$. Iz nizova $\{f_i(p, t_n^i)\}$ $(i \in J)$ možemo izdvojiti dijagonalan niz $\{r_m\} = \{f_m(p, t'_{m,n})\}$, koji očigledno konvergira ka q, kad $m \to \infty$. Izaberimo sad broj $\varepsilon > 0$, koji odgovara S^+ stabilnosti i odredimo $N(\varepsilon)$ tako da bude $\rho(r_m, q) < \frac{\varepsilon}{8}$ za $m > N$. Napišimo nizove $\{q_n\}$ i $\{r_m\}$ na ovaj način:

$\{q_n\} = \{f_m(p_m, \tau_{m,n})\}$ i $\{r_m\} = \{f_m(p_m, t_{m,n})\}$. To je moguće učiniti, jer se tačke p_m nalaze na treajektorijama $f_m(p, I)$ [1]). Odredimo brojeve $\{\theta_n^m\}$ takve da bude $\rho[r_m, f_m(p_m, \theta_n^m)] \leq \frac{\varepsilon}{2}$ za svako kretanje f_m. Za $\theta_n^m < t \leq \tau_{m,n}$

biće $\rho[r_m, f_m(p_m, t)] > \frac{\varepsilon}{2}$. Dalje dobijamo za prirodan broj

---

[1]) Stavljajući, recimo $f_m(p, \tau'_{m,n}) = f_m(p, t_m + \tau_{m,n}) =$

$n > N$

$$\rho[q, f_m(p_m, \theta^m_n)] \leqslant \rho(q, x_m) + \rho[x_m, f_m(p_m, \theta^m_n)] < \varepsilon.$$

Znači $f_m(p_m, \theta^m_n) \in S(q, \varepsilon)$ za svako $m > N$. Zbog kompaktnosti okoline $\overline{S(q, \varepsilon)}$, iz svakog od nizova $\{f_m(p_m, \theta^m_n)\}$ mogu se izdvojiti konvergentni podnizovi, koje ćemo uproščenja radi, obeležiti istim oznakama. Onda je

$$(3.11) \qquad \lim_{n \to \infty} f_m(p_m, \theta^m_n) = q_1 \in \overline{S(q, \varepsilon)}, \quad \text{za svako } m > N.$$

Slično kao u [19] (str. 421) može se pokazati da brojevi $\{\tau_{m_n} - \theta^m_n\}$ neograničeno rastu kad $n \to \infty$, za svako $m > N$.

Dalje se dokaz izvodi kao u [19], ali ga navodimo radi celine.

Uzmimo sad ma koje kretanje $f_m(p,t)$ $(m > n)$ i nadjimo, saglasno S^+ stabilnosti broj $\delta_m(\frac{\varepsilon}{8})$. Kako je prema stavu 3.1 i kretanje $f_m(f_m(p_m, \theta^m_n), t)$ S^+ stabilno, to δ_m zavisi i od tačke $f_m(p_m, \theta^m_n)$. Odredimo prirodan broj N_0, tako da je za $n \geqslant N_0$ prema (3.11)

$$(3.12) \qquad \rho[q_1, f_m(p_m, \theta^m_n)] < \delta_m.$$

Uzmimo $t > \theta^m_{N_0}$ i odredimo prirodan broj $N_1 > N_0$ takav, da je $t - \theta^m_{N_0} < \tau_{m_{N_1}} - \theta^m_{N_1}$. Onda će biti $\theta^m_{N_1} < \theta^m_{N_1} + t - \theta^m_{N_0} < \tau_{m_{N_1}}$. No, za to važi nejednakost $\rho[x_m, f_m(p_m, \theta^m_{N_1} + t - \theta^m_{N_0})] > \frac{\varepsilon}{2}$, a prema (3.12) biće

---

$= f_m(f_m(p, t_m), \tau_m)$ i $f_m(p, t_m) = p_m$, to će biti $f_m(p, \tau'_{m_n}) = f_m(p_m, \tau_{m_n})$.

$$\rho[q_1, f_m(p_m, \Theta^m_{N_0})] < \delta_m \quad \text{i} \quad \rho[q_1, f_m(p_m, \Theta^m_{N_1})] < \delta_m.$$

Primenjujući dvaput S^+ stabilnost dobijamo

$$\rho\left[f_m(q_1, t - \Theta^m_{N_0}), f_m(p_m, t)\right] < \frac{\varepsilon}{8}$$

i

$$\rho\left[f_m(q_1, t - \Theta^m_{N_0}), f_m(p_m, \Theta^m_{N_1} + t - \Theta^m_{N_0})\right] < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Formirajmo nejednakost

$$\rho\left[r_m, f_m(p_m, \Theta^m_{N_1} + t - \Theta^m_{N_0})\right] \leqslant \rho(r_m, q) + \rho\left[q, f_m(p_m, t)\right] +$$

$$+ \rho\left[f_m(p_m, t), f_m(q_1, t - \Theta^m_{N_0})\right] + \rho\left[f(q_1, t - \Theta^m_{N_0}), f_m(p_m, {}^m_{N_1} +\right.$$

$$\left. + t - \Theta^m_{N_0})\right].$$

Odavde prema gornjem, sleduje

$$\rho\left[q, f_m(p_m, t)\right] > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{8}.$$

Kako je $t > \Theta^m_{N_0}$ proizvoljno veliko izabrano, to je poslednja nejednakost u kontradikciji s tim što $\rho[q, f_m(p_m, t_{m_n})] \to 0$ kad $t_{m_n} \to \infty$.

Ako uzmemo niz $\{f_m(p, t_{m_n})\}$, gde je $0 < t_{m_n} \leqq T$, a T konačan i pozitivan broj, onda sve tačke $f_n(p, t_{n_k})$ leže u sferi konačnog poluprečnika $S(p,d)$, a zbog lokalne kompaktnosti, iz ma kojeg niza oblika $\{f_n(p, t_{n_k})\}$, gde je niz $\{t_{n_k}\}$ ograničen, može se izdvojiti konvergentan podniz. Znači da za nekompaktnost skupa T^+_p dolazi u obzir za rasmatranje samo slučaj kad niz $t_n \to +\infty$, što je proučavano gore. Time je stav u potpunosti dokazan.

DEFINICIJA 3.6. Familija DS F naziva se ograničena, ako za makakav ograničen skup A za svako preslikavanje $f_1 \in F$ skup $f_1(A,I)$ je ograničen, tj. $f_1(A,I) \subset B^1$, gde je B^1 neki ograničen skup.

Analogno se definiše pozitivno odn. negativno ograničena familija DS F. Za te familije je $f_1(A,I^+)$ odn. $f_1(A,I^-)$ ograničen skup, tj.

$$f_1(A,I^+) \subset B_1^1, \text{ odn. } f_1(A,I^-) \subset B_2^1 ,$$

gde su B_1^1 i B_2^1 neki ograničeni skupovi.

DEFINICIJA 3.7. Familija DS F naziva se <u>potpuno pozitivno ograničena</u>, ako postoji jedan ograničen skup D^1, tako da se za svaki ograničen skup C može naći broj $\tau \in I$, takav da važi inkluzija

$$f_1(C; \tau, +\infty) \subset D^1, \quad \text{za svako } f_1 \in F.$$

Ako je pri istim uslovima def. 3.7 ispunjena inkluzija

$$f_1(C; -\infty, \tau) \subset D_1^1 \quad \text{za svako } f_1 \in F,$$

onda se familija DS zove <u>potpuno negativno ograničena</u>.

Iz potpune ograničenosti familije F ne sleduje njena ograničenost, a isto tako ne važi ni obrnuto.

U definicijama 3.6 i 3.7 skupovi B^1, B_1^1, B_2^1, D^1 i D_1^1 zavise u opštem slučaju od preslikavanja f_1 F. Ako se mogu naći takvi skupovi nezavisni od f_1 onda se ograničenost naziva <u>podjednaka</u>.

STAV 3.1o. Ako je DS $f_0 \in F$ Q^+ uniformno stabilan u odnosu na familiju F i ako je $S(C,\varepsilon) \subset B \subset A$, onda iz uslova 1° $f_0(B,I^+) \subset A$ i 2° $f_0(S(A,\varepsilon); T, +\infty) \subset C$, gde ε i T odgovaraju definiciji Q^+ stabilnosti sleduje

$$f_1(B;2T,+\infty) \subset S(C,\varepsilon), \quad \text{za svako } f_1 \in F.$$

Prema uslovu 1^o proizlazi da je za ma kakav broj $t_1 \in [T,+\infty)$ i ma koju tačku $p \in B$,

$$f_o(p,t_1) \in A,$$

a na osnovu definicije Q^+ stabilnosti i kako je $B \subset A$ biće za svako $f_1 \in F$

$$f_1(p,t_1) \in S(A,\varepsilon).$$

Onda je prema uslovu 2^o, ako stavimo $f_1(p,t_1) = q_1$,

$$f_o(q_1;T,+\infty) \subset C.$$

Kako je DS $f_o \in F$ Q^+ stabilan, biće dalje

$$\rho[f_1(q_1,t), f_o(q_1,t)] < \varepsilon$$

za svako $f_1 \in F$ i svako $t \in [T,+\infty)$, odn.

$$f_1(q_1; T, +\infty) \subset S(C,\varepsilon),$$

te će se na osnovu svojstva III DS i zamenom za $q_1 = f_1(p,t_1)$, dobiti

$$f_1(p;2T, +\infty) \subset S(C,\varepsilon), \quad \text{za svako } p \in B,$$

odn.

$$f_1(B;2T, +\infty) \subset S(C,\varepsilon), \quad \text{za svako } f_1 \in F.$$

<u>Napomena.</u> Ako u stavu 3.10 Q^+ stabilnost važi za neko T_1 umesto T, onda pri ispunjavanju svih ostalih uslova stava važi inkluzija

$$f_1(B;T_1+T, +\infty) \subset S(C,\varepsilon), \quad \text{za svako } f_1 \in F.$$

STAV 3.11. Ako je DS $f_o \in F$, koji je u odnosu na familiju F uniformno Q^+ stabilan, pozitivno ograničen i pozitivno potpuno ograničen, onda je i familija F podjednako pozitivno i podjednako pozitivno potpuno ograničena.

Neka su $\mathcal{E}$ i T_1 brojevi koji odgovaraju Q^+ stabilnosti din. sistema f_o i neka je D skup u koji se na osnovu def. 3.7 preslikava svaki ograničen skup. Ako uzmemo ma koji ograničen skup $B \supset S(D, \mathcal{E})$, onda će prema def. 3.6 i uslovu stava skup $A = f_o(B, I^+)$ biti ograničen. Skup $S(A, \mathcal{E})$ je takodje ograničen i prema uslovu stava postoji broj T_2, takav da je

$$f_o(S(A, \mathcal{E}); T_2, +\infty) \subset D.$$

Kako je zbog izabranih skupova B i A

$$S(D, \mathcal{E}) \subset B \subset A,$$

to se može na familiju F primeniti stav 3.lo. Stoga stavimo najpre $T = \max(T_1, T_2)$, pa će biti

$$f_1(B; 2T, +\infty) \subset S(D, \mathcal{E}). \tag{3.13}$$

Pošto se skup B može proizvoljno uzeti, to je time ispunjen uslov podjednake potpune ograničenosti.

Podjednaka pozitivna ograničenost familije F sleduje neposredno na osnovu definicije Q^+ stabilnosti DS f_o, a iz njegove pozitivne ograničenosti.

Napomena. U dokazu ovog stava uzet je skup B koji sadrži skup $S(D, \mathcal{E})$ i za njega dokazan stav. Ako se uzme $B_1 \not\supset S(D, \mathcal{E})$, onda se uvek može naći skup B za koji je $B \supset B_1$ i $B \supset S(D, \mathcal{E})$. Kako formula (3.13) važi za taj skup B, onda će tim pre važiti i za $B_1 \subset B$.

DEFINICIJA 3.8. Zatvoren i potpuno invarijantan skup $A \subset R$ zove se S^+ (S^-) stabilan u odnosu na familiju DS F, ako se za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$ mogu naći brojevi $\delta_i(\varepsilon) > 0$, tako da je $\rho[f_i(q,t),A] < \varepsilon$, ukoliko je $\rho(q,A) < \delta_i$, gde $f_i \in F$, za sve $t > 0$ $(t < 0)$ i svako $i \in J$.

Ako se za uzeto $\varepsilon > 0$ može u gornjoj definiciji naći jedinstven broj $\delta(\varepsilon) > 0$ nezavisan od DS f_i, onda se ova stabilnost zove podjednaka.

Ako je skup A istovremeno S^+ i S^- stabilan onda kažemo da je on S stabilan.

Ukoliko je uz ispunjene uslove def. 3.8 i

$$\lim_{t \to +\infty} \rho[f_i(q,t),A] = 0, \qquad \text{za svako } f_i \in F,$$

kazaćemo da je zatvoren i potpuno invarijantan skup A asimptotski S^+ stabilan u odnosu na familiju DS F. Analogno se dalje definicija negativne asimptotske stabilnosti.

POSLEDICA 3.3. Ako je familija DS $F = \bigcup_{p \in A} F_p$ uniformno S^+ stabilna u zatvorenom i potpuno invarijantnom skupu $A \subset R$, onda je i skup A S^+ stabilan u odnosu na familiju F.

Zaista, ako su ispunjeni uslovi def. 3.3 uz uniformnu stabilnost u odnosu na tačke $p \in A \subset R$, to znači da se za proizvoljno uzeto $\varepsilon > 0$ mogu naći za svaku funkciju $f_i \in F$ brojevi $\delta_i(\varepsilon) > 0$ tako da je za svaku tačku $p \in A$

$$\rho[f_i(p,t)f_i(q,t)] < \varepsilon \qquad \text{za svako } t > 0, \tag{3.14}$$

ukoliko je $\rho(p,q) < \delta_i(\varepsilon)$.

Uzmimo sad da je $\rho(q,A) < \delta_i(\varepsilon)$ (što kazuje da je $\inf_{p \in A} \rho(q,p) < \delta_i(\varepsilon)$) i da je zadovoljena nejednakost (3.14). Kako je A potpuno invarijantan skup, to znači da je $f_i(p,t) = r_i \in A$, pa onda i za svako $i \in J$ je $\rho[r_i, f_i(q,t)] < \varepsilon$ a tim pre i

$$\rho\left[A, f_1(q,t)\right] < \varepsilon .$$

STAV 3.12. Neka je zatvoren i potpuno invarijantan skup $A \subset R$ S^+ stabilan u odnosu na DS $f_o \in F$, koji je uniformno Q^+ stabilan u odnosu na familiju F i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabran broj. Onda se može naći broj $T > 0$ tako da je za svako $f_1 \in F$

$$\rho\left[f_1(p,t), A\right] < \varepsilon, \text{ za } t \geqslant T \text{ i svaku tačku } p \in S(A, \delta)\ ^{1)}.$$

Neka broj $T(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ odgovara Q^+ stabilnosti DS f_o, to se za izabrano ε može naći broj $\delta(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$, tako da je pri $\rho(p, A) < \delta$ zadovoljena nejednakost $\rho[f_o(p,t), A] < \frac{\varepsilon}{2}$, tj.

$$\inf_{r \in A} \rho\left[f_o(p,t), r\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za sve } t > 0. \tag{3.15}$$

S druge strane iz uniformne Q^+ stabilnosti DS f_o, sleduje da je

$$\rho\left[f_o(p,t), f_1(p,t)\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ za sve } f_1 \in F \text{ i } t \geqslant T, \tag{3.16}$$

bilo za koju tačku $p \in R$, pa i za $p \in S(A, \delta)$.

No kako je nejednakost

$$\rho\left[f_1(p,t), A\right] \leqslant \rho\left[f_o(p,t), f_1(p,t)\right] + \rho\left[f_o(p,t), A\right]$$

ispunjena za sve DS $f_1 \in F$ i svako $t \geqslant T$, to će se s obzirom na (3.15) i (3.16) dobiti da je $\rho[f_1(p,t), A] < \varepsilon$, ukoliko je $\rho(p, A) < \delta$, za svaki DS $f_1 \in F$ i $t \geqslant T$.

POSLEDICA 3.4. Ako je zatvoreni i potpuno invarijantni skup A asimptotski S^+ stabilan u odnosu na DS $f_o \in F$, koji

---

[1]) Broj $\delta(\varepsilon) > 0$ odgovara S^+ stabilnosti skupa A.

je uniformno Q^+ stabilan u odnosu na familiju F, onda je i

$$\lim_{t \to +\infty} \rho[f_i(p,t),A] = 0 \qquad \text{za svako} \quad i \in \mathcal{J}.$$

Dokaz neposredno sledi iz prethodnog stava a na osnovu def. 3.5 i 3.8.

Na osnovu stava 3.12 i posledice 3.4 možemo reći da je pod uslovom iskazanim u stavu, skup A podjednako(asimptotski) S^+ stabilan u odnosu na familiju DS F, ali za vreme $t \geqslant T > 0$, gde $T(\varepsilon)$ odgovara uniformnoj Q^+ stabilnosti DS $f_o \in F$.

Napomena. Uz definiciju stabilnosti kretanja $f(p,t)$ ili familije kretanja F_p u smislu Ljapunova može se dati definicija stabilnosti u skupu tačaka trajektorije $f_i(p,I)$ ili pojedinačno ili celog dinamičkog levka $T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\}$ odn. polulevka $T_p^+ = \bigcup_i \{f_i(p,I^+)\}$ i $T_p^- = \bigcup_i \{f_i(p,I^-)\}$.

Kako se onda trajektorija ili levak odn. polulevak tretira kao skup tačaka, onda se samim tim definicija stabilnosti jednog DS $f_k \in F$ ili pak familije F daju shodno def. 3.3 gde je A skup tačaka trajektorije $f_i(p,I)$ ili recimo levka $T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\}$.

DEFINICIJA 3.9. Zatvoreni potpuno invarijantan skup $A \subset R$, koji je S^+ asimptotski stabilan u odnosu na familiju DS F, zove se potpuno asimptotski S^+ stabilan, ako postoje brojevi $\eta_i > 0$ takvi, da ma kako izabranom broju $\varepsilon > 0$ odgovara broj $T(\varepsilon) > 0$, tako da je $\rho[f_i(p,t),A] < \varepsilon$, za sve funkcije $f_i \in F$ i svako $t \geqslant T$, ukoliko je $\rho(p,A) < \eta_i$.

DEFINICIJA 3.10. Zatvoreni potpuno invarijantni skup $A \subset R$, koji je S^+ podjednako asimptotski stabilan, u odnosu na familiju DS F, zove se potpuno podjednako asimptotski S^+ stabilan, ako postoji jedinstven broj $\eta > 0$ za sve DS $f_i \in F$, takav da ma kojem $\varepsilon > 0$ odgovara broj $T(\varepsilon) > 0$; tako da je za sve funkcije $f_i \in F$ $\rho[f_i(p,t),A] < \varepsilon$, za svako $t \geqslant T$, ukoliko je $\rho(p,A) < \eta$.

STAV 3.12. Neka je zatvoreni i potpuno invarijantni skup A asimptotski S^+ stabilan, u lokalno kompaktnom prostoru, u odnosu na DS $f_0 \in F$. Ako je pri tom DS f_0 uniformno Q^+ stabilan u odnosu na familiju F, onda je skup A potpuno podjednako asimptotski S^+ stabilan u odnosu na familiju F, za neko $t \geqslant T$.

Kako je pod uslovima stava skup A potpuno asimptotski S^+ stabilan u odnosu na f_0 ([lo], str. 38), to se može uvek naći broj $\delta > 0$ takav da za ma kakvo $\varepsilon > 0$ postoji broj $T_0(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$, tako da je

$$(3.17) \qquad \rho[f_0(p,t),A] < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za } t \geqslant T_0,$$

ukoliko je $\rho(p,A) < \delta$. Zbog uniformne Q^+ stabilnosti familije F za već uzeto ε može se naći broj $T_1(\varepsilon)$, tako da je za svaku tačku $p \in R$ i svaki DS $f_1 \in F$

$$(3.18) \qquad \rho[f_0(p,t),f_1(p,t)] < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za } t \geqslant T_1.$$

Nejednakosti (3.17) i (3.18) daju, pošto stavimo $T = \max(T_0, T_1)$,

$$\rho[f_1(p,t),A] < \varepsilon \qquad \text{za } t \geqslant T \text{ i sve } f_1 \in F.$$

Kako je prema posledici 3.4 skup A podjednako asimptotski S^+ stabilan u odnosu na familiju F, za $t \geqslant T$, to je prema def. 3.lo on i podjednako potpuno asimptotski S^+ stabilan u odnosu na familiju F za $t \geqslant T$.

STAV 3.13. Ako je familija F_p podjednako S stabilna u odnosu na levak T_p a familija $F_p \cup f_0(p,t)$, gde je $f_0(p,t)$ granična funkcija familije F_p za sve $t \in I$, je translatorna, onda je i ta granična funkcija S stabilna.

Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan ali fiksirani broj i $\delta(\frac{\varepsilon}{3})>0$ broj koji odgovara podjednakoj S stabilnosti. S obzirom na definiciju granične funkcije, može se naći prirodan broj $N_0(\frac{\varepsilon}{3})$, takav da je

$$\sup_{t\in I}\rho[f_0(p,t),f_n(p,t)]<\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{za svako } n\geqslant N_0,$$

što govori da je za svako $t\in I$

(3.19) $$\rho[f_0(p,t),f_n(p,t)]<\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{za } n\geqslant N_0.$$

S druge strane zbog S stabilnosti biće

(3.2o) $$\rho[f_n(p,t),f_n(q,t)]<\frac{\varepsilon}{3}$$

za svako $n\in J$, ukoliko je $\rho(p,q)<\delta$.

Kako, prema pretpostavci, tačka $q\in T_p\cap S(p,\delta)$, onda je na osnovu stava 3.5 i $f_0(q,t)$ granična funkcija familije F_q, te se za već uzeto ε može naći prirodan broj $N_1(\frac{\varepsilon}{3})$, takav da je

(3.21) $$\rho[f_0(q,t),f_n(q,t)]<\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{za } n\geqslant N_1$$

i svako $t\in I$. Stavimo $N=\max(N_0,N_1)$, pa će za $n\geqslant N$ nejednakosti (3.19), (3.2o) i (3.21) dati

$$\rho[f_0(p,t),f_0(q,t)]<\varepsilon,$$

ukoliko je $\rho(p,q)<\delta$, što dokazuje S stabilnost funkcije $f_0(p,t)$.

4. STABILNOST U SMISLU POISSON-A

DEFINICIJA 4.1. Familija kretanja $F_p = \bigcup_i \{f_i(p,t)\}$ naziva se <u>pozitivno (negativno) stabilna u smislu Poisson-a</u>, ako se proizvoljno izabrane brojeve $\varepsilon>0$ i $T>0$ $(T<0)$ može se naći broj $t \geqslant T$ $(t \leqslant -T$, tako da je

$$\tau(p, S_t^p) < \varepsilon .$$

(Odstupanje $\tau(A,B)$ je dato definicijom 2.2)

Ako je familija F_p istovremeno stabilna u oba pravca, reći ćemo da je ona stabilna u smislu Poisson-a. Ovu stabilnost ćemo, kratkoće radi, obeležavati sa P, odn. P^+ i P^-.

DEFINICIJA 4.2. Presek $S_{t_o}^p$ dinamičkog levka $T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\}$ naziva se <u>pozitivno (negativno) stabilnom u smislu Poisson-a</u>, odn. P^+ (P^-) stabilan, ako za proizvoljno izabrane brojeve $\varepsilon > 0$ i $T>0$ $(T<0)$ može se naći broj $t \geqslant T$ $(t \leqslant T)$, tako da je

$$\tau(S_{t_o}^p, S_{t_o+t}^p) < \varepsilon .$$

Ako je presek $S_{t_o}^p$ stabilan u oba pravca kazaćemo da je on stabilan u smislu Poisson-a, odn. P stabilan.

U daljem izlaganju govorićemo uglavnom o P^+ stabilnosti, jer se stavovi za P i P^- stabilnosti izvode analogno.

Lako se može pokazati slično kao u [14] (str. 75) da je za P^+ (P^-) stabilnost familije F_p potreban i dovoljan uslov, da postoji niz brojeva $\{t_n\}$, takav da $t_n \to +\infty$ ($t_n \to -\infty$), kad $n \to \infty$, za koji je

$$\tau(p, S^p_{t_n}) \to 0, \qquad \text{kad } n \to \infty ,$$

a ako je u pitanju stabilnost preseka $S^p_{t_o}$, onda je

$$\tau(S^p_{t_o}, S^p_{t_o + t_n}) \to 0, \qquad \text{kad } n \to \infty .$$

POSLEDICA 4.1. Ako je familija F_p P^+, odn. P^- stabilna, onda $p \in \Omega_p$, odn. $p \in A_p$.

Zaista kod, recimo, P^+ stabilne familije F_p je $\lim\limits_{n\to\infty} \tau(p, S^p_{t_n}) = 0$, gde je $t_n \to +\infty$, kad $n \to \infty$, a to će reći da je za svako kretanje $f_1(p,t) \in F_p$ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(p, f_1(p,t_n)) = 0$, kad $t_n \to +\infty$. To govori da $p \in \Omega_p$.

STAV 4.1. Ako je u kompaktnom prostoru familija F_p P^+ stabilna, onda je i svaki presek $S^p_{t_o}$ ($t_o > 0$) polulevka T^+_p P^+ stabilan.

Neka su $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ proizvoljni ali fiksirani brojevi i neka im odgovara broj $\delta > 0$ saglasno neprekidnoj zavisnosti od početnih uslova. Zbog P^+ stabilnosti familije F_p može se za to $\delta > 0$ naći broj $t \geq T$ takav da je $\tau(p, S^p_t) < \delta$, a to znači da je

$$\rho\,[p, f_1(p,t)] < \delta$$

za svako $f_1 \in F_p$. Na osnovu svojstva II_1 DS, a zbog kompaktnosti prostora R biće opet za svako f_1

$$(4.1) \qquad \rho\left[f_i(p,t_o), f_i(p,t_o+t)\right] < \varepsilon ,$$

za svako $|t_o| \leq T$. Medjutim, prema dokazu iz leme 2.1 iz nejednakosti (4.1) se odmah dobija da je

$$\tau\left[\bigcup_i \{f_i(p,t_o)\}, \bigcup_i \{f_i(p,t_o+t)\}\right] < \varepsilon,$$

tj.

$$\tau(S^p_{t_o}, S^p_{t_o+t}) < \varepsilon,$$

što važi za svako $|t_o| \leq T$ i $t \geq T$. S obzirom na proizvoljnost izbora broja T stav je dokazan.

STAV 4.2. Neka je dinamički levak $T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\}$ potpuno invarijantan skup i L stabilan. Potreban i dovoljan uslov da zatvoreni skup A bude totalno minimalan je da $\overline{T}_p = A$ za svaku tačku $p \in A$. [1])

Uslov je potreban. Ako pretpostavimo da je A totalno minimalan skup, onda će za $p \in A$ biti i $f_i(p,t) \in A$, za svako $f_i \in F_p$ i svako $t \in I$, pa prema tome i $T_p = \bigcup_i \{f_i(p,I)\} \subset A$. Kako je A zatvoren skup onda će biti i $\overline{T}_p \subset A$. Medjutim $\overline{T}_p$ je na osnovu stava 1.2 i def. 2.1 potpuno invarijantan kompaktan i zatvoren skup pa sadrži totalno minimalan skup tj. $\overline{T}_p \supset B$. Ako bi bilo $B \neq A$, onda A ne bi bio totalno minimalan skup, što je suprotno pretpostavci. Znači $\overline{T}_p \supset A$ i onda je dakle $\overline{T}_p = A$.

Uslov je dovoljan. Uzmimo sad da uz $p \in A$ bude $\overline{T}_p = A$. Ako pretpostavimo da A nije potpuno minimalan skup, onda

1) Često umesto reči "potpuno" uzimamo reč "totalno".

$A \supset B$, gde je B sad potpuno minimalan skup. No, zbog njegove potpune invarijantnosti mora biti pri $p_o \in B$ i $f_i(p_o, t) \in B$ za svako $i \in \mathfrak{J}$ i svako $t \in I$, a zbog zatvorenosti i $\overline{T}_{p_o} \subset B$. Iz $\overline{T}_{p_o} = A \supset B$ i $\overline{T}_{p_o} \subset B$ sleduje $A = B$, što govori da je A potpuno minimalan skup. [1])

POSLEDICA 4.2. Neka je A potpuno invarijantan, zatvoren i kompaktan skup. Ako je $\overline{T}_p = A$ za svaku tačku $p \in A$, onda je A potpuno minimalan skup.

Zaista, ako bi bio skup $B \subset A$ (pravi deo), potpuno minimalan, onda bi, s obzirom na njegovu potpunu invarijantnost i zatvorenost, iz $p_o \in B$, sledovalo da $\overline{T}_{p_o} \subset B$. Ali kako, zbog uslova stava mora biri $\overline{T}_{p_o} = A$, to se odmah dobija, kao u stavu 4.2 da je $B = A$.

Neka je A potpuno minimalan skup. Zbog njegove potpune invarijantnosti i zatvorenosti biće za svaku tačku $p \in A$ i $\overline{T}_p \subset A$. Odavde sleduje da se potpuno minimalan skup može definisati kao unija adherencija levaka T_p čiji "vrhovi" p leže u A tj. $A = \bigcup_{p \in A} \overline{T}_p$. Ako su svi levkovi $\overline{T}_p \subset A$, gde sad "$\subset$" označava pravi deo, zatvoreni, onda sledi da nijedan od njih nije potpuno invarijantan, jer u tom slučaju ne bi bio skup A potpuno minimalan. Medjutim, ako je T_p, za ma koje $p \in A$ zatvoren i potpuno invarijantan, onda je $T_p = A$, za svako $p \in A$. Otuda i sleduje:

Svi potpuno invarijantni i zatvoreni levkovi T_p jednog potpuno minimalnog skupa A se poklapaju sa skupom A.

POSLEDICA 4.3. Neka je levak T_p potpuno invarijantan skup, a F_p L stabilna familija i q ma koja tačka u T_p. Ako

1) $\overline{T}_p = A$, jer uslov dovoljnosti se odnosi na ma koju tačku u A, te iz $p_o \in B \subset A$ je $\overline{T}_{p_o} = A$, pa je ispunjena polazna pretpostavka.

$\overline{T}_q \supset \overline{T}_p$, onda je $\overline{T}_p$ potpuno minimalan.

Iz $q \in T_p$ odmah proizlazi, kao u dokazu stava 4.2 da $\overline{T}_q \subset \overline{T}_p$, za ma koju tačku $q \in T_p$. Prema uslovu stava $\overline{T}_q \supset \overline{T}_p$, te se iz obe inkluzije dobija da je $\overline{T}_q = \overline{T}_p$, za svaku tačku $q \in T_p$. No, onda je na osnovu posledice 4.2 skup $\overline{T}_p$ totalno minimalan.

Obrnuto, ako je $\overline{T}_p$ totalno minimalan skup i ako je za svaku tačku $q \in T_p$ $\overline{T}_q \supset \overline{T}_p$, onda je $\overline{T}_q = \overline{T}_p$.

STAV 4.3. Neka je dinamički levak T_p potpuno invarijantan skup, a F_p L stabilna familija. Ako pri $q \in \overline{T}_p$ i $p \in \overline{T}_q$, onda je $\overline{T}_p$ potpuno minimalan skup.

Pretpostavimo suprotno, da $\overline{T}_p$ nije totalno minimalan skup. Onda $\overline{T}_p \supset B$ (pravi deo), gde je B totalno minimalan skup. Zbog toga će zbog potpune invarijantnosti B biti: za svako $q \in B$ i $T_q \subset B$, odn. zbog zatvorenosti B, $\overline{T}_q \subset B$. Prema tome, $B = \bigcup_{q \in B} \overline{T}_q$. Medjutim, iz $p \in \overline{T}_q$ dobija se da $p \in B$, a zbog potpune invarijantnosti i zatvorenosti skupa B onda i $\overline{T}_p \subseteq B$. Iz ove i prve inkluzije sledi $\overline{T}_p = B$, što znači da je $\overline{T}_p$ potpuno minimalan skup.

STAV 4.4. Ako je familija F_p S stabilna, a $\overline{T}_p$ totalno minimalan skup, onda ukoliko tačka $q \in \overline{T}_p$, za nju važi: $p \in \overline{T}_q$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da $p \notin \overline{T}_q$. Tada se može naći neki broj $d > 0$, tako da je za ma koju tačku

$f_1(q, t_0) \in T_q$

(4.2) $$\rho\left[p, f_1(q, t_o)\right] \geqslant d.$$

Uzmimo sad proizvoljan broj $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < d$ i odredimo $\delta(\varepsilon) > 0$ saglasno S stabilnosti familije F_p. Budući da $q \in \bar{T}_p$, to postoji tačka $f_1(p, t_1) \in T_p$ takva da je $\rho\left[q, f_1(p, t_1)\right] < \delta$. Zbog S stabilnosti biće dalje

(4.3) $$\rho\left[f_1(q, -t_1), p\right] < \varepsilon,$$

Medjutim relacija (4.2) treba da važi i za tačku $f_1(q, -t_1)$ T_q, a to je u protivrečnosti sa nejednakošću (4.3).

STAV 4.5 Neka je familija F_p S stabilna, a $\bar{T}_p$ potpuno minimalan skup i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, ali fiksiran broj. Onda postoji bar jedna funkcija $f_k \in F$, takva da se za ma koji konvergentan niz $\{q_n\} \subset T_p$ mogu naći prirodan broj N i broj $\tau \in I$, tako da $f_k(q_n, \tau) \in S(p, \varepsilon)$, za svako $n \geqslant N$.

Neka niz $\{q_n\} = \{f_n(p, \tau_{n_k})\}$ konvergira ka tački q, koja mora pripadati $\bar{T}_p$. Prema stavu 4.5 onda tačka $p \in \bar{T}_q$, te se može naći realan broj τ i funkcija $f_k(q, t) \in F_q$, tako da je

(4.4) $$\rho\left[f_k(q, \tau), p\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Medjutim, zbog neprekidnosti funkcije f_k, može se naći takav prirodan broj N, da usled konvergencije q_n ka q, bude

(4.5) $$\rho\left[f_k(q, \tau), f_k(q_n, \tau)\right] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ za sve } n \geqslant N.$$

Nejednakost (4.4) i (4.5) daju $\rho\left[f_k(q_n, \tau), p\right] < \varepsilon$.

LEMA 4.1. Neka je levak T_p potpuno invarijantan skup, familija F_p L stabilna, a $\{q_n\} \subset T_p$ ma kakav konvergentan niz. Ako se za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$, mogu naći prirodan broj N, funkcija $f_k \in F$ i broj $\tau \in I$, tako da $f_k(q_n, \tau) \in S(p, \varepsilon)$ za svako $n \geqslant N$, onda je skup $\bar{T}_p$ totalno minimalan.

Neka ma koja tačka $q \in \bar{T}_p$. Može se naći konvergentan niz $\{q_n\} \subset T_p$, tako da $\lim q_n = q$, kad $n \to \infty$. Izaberimo ma kakav broj $\varepsilon > 0$. Prema uslovu leme postoji prirodan broj N i funkcija $f_k \in F$, tako da je $\rho[f_k(q_n, \tau), p] < \frac{\varepsilon}{2}$ za svako $n \geqslant N$. Medjutim zbog konvergencije niza $\{q_n\}$ i zbog neprekidnosti je $\rho[f_k(q_n, \tau), f_k(q, \tau)] < \frac{\varepsilon}{2}$, odakle sledi da je $\rho[f_k(q, \tau), p] < \varepsilon$. Kako se ε može izabrati po volji malo a $f_k(q, \tau) \in T_q$ to $p \in \bar{T}_q$. Prema stavu 4.3 $\bar{T}_p$ je potpuno minimalan skup.

STAV 4.6. Neka je familija F podjednako uniformno S stabilna u potpuno invarijantnom levku T_p u odnosu na njega samog. Ako je familija F_p L stabilna, onda je skup $\bar{T}_p$ potpuno minimalan.

Uzmimo proizvoljan konvergentan niz tačaka $\{q_n\} = \{f_n(p, t_{n_k})\} \subset T_p$ i broj $\varepsilon > 0$ i nadjimo saglasno uslovu stava broj $\delta(\varepsilon) > 0$. Kako niz $\{q_n\}$ konvergira, to se može naći dovoljno veliki prirodan broj $N(\delta)$ tako da je

$$(4.6) \qquad \rho(q_n, q_{n+k}) < \delta$$

za svako $n \geqslant N$ i $k \geqslant 1$ (k je prirodan broj). Tačke q_n i q_{n+k} leže na trejektorijama $f_n(p, I)$ i $f_{n+k}(p, I)$ levka T_p. Iz (4.6) dobija se za funkciju $f_n \in F$, a na osnovu S stabilnosti da je $\rho[f_n(q_n, t), f_n(q_{n+k}, t)] < \varepsilon$ za svako $t \in I$. Izaberimo $t = t_0$ tako da bude $f_n(q_n, t_0) = p$, te će biti $\rho[f_n(q_{n+k}, t_0), p] < \varepsilon$. Stavimo da je $n + k = m$, pa će poslednja nejednakost dati $\rho[f_n(q_m,t_o);p] < \varepsilon$, što znači da je za svako $m \geq N$ $f_n(q_m,t_o) \in S(p,\varepsilon)$, a time je u stvari ispunjen uslov leme 4.1. Prema tome, skup $\bar{T}_p$ je potpuno minimalan.

Prema napomeni posle definicije 3.3 možemo umesto uslova u stavu zahtevati da prostor R bude kompaktan i da familija F_p bude uniformno S stabilna i translatorna jer to povlači i uniformnu podjednaku stabilnost familije $F = \bigcup_{q \in T} F_q$. Naravno da uslov potpune invarijantnosti mora ostati. Dalje, uslov kompaktnosti prostora R možemo zameniti, uz održavanje ostalih uslova, sa L stabilnošću familije F_p, jer je onda skup $\bar{T}_p$ kompaktan, pa dobijamo

STAV 4.7. Neka je dat potpuno invarijantan levak T_p. Ako je translatorna L stabilna familija F_p ujedno i podjednako S stabilna, onda je skup $\bar{T}_p$ totalno minimalan.

LEMA 4.2. Ako je familija F_p translatorna, onda je za ma koje kretanje $f_k(p,t) \in F_p$ i ma koja dva broja t_1, $t_2 \in I$

$$S_{t_1}^{f_k(p,t_2)} = f_k(S_{t_1}^{p}, t_2). \tag{4.7}$$

Podjimo na osnovu pretpostavke u lemi, od identičnosti

$$f_i(f_k(p,t_2),t_1) = f_k(f_i(p,t_1),t_2)$$

i formirajmo uniju po $i \in \mathfrak{I}$, tj.

$$\bigcup_i \{f_i(f_k(p,t_2),t_1\} = \bigcup_i \{f_k(f_i(p,t_1),t_2)\}. \tag{4.8}$$

Prema definiciji preslikavanja f_k skupa $\bigcup_i \{f_i(p,t_1)\} \equiv A$ dobija se

$$f_k(\bigcup_i \{f_i(p,t_1)\},t_2) = \bigcup_{f_i(p,t_1)\in A}\{(f_k(f_i(p,t_1),t_2)\},$$

jer su tačke $f_i(p,t_1)$ $(i \in J)$ svi elementi skupa $\bigcup_i \{f_i(p,t_1)\} \equiv A$, te možemo relaciju (4.8) napisati kao

$$(4.9) \qquad \bigcup_i \{f_i(f_k(p,t_2),t_1) = f_k(\bigcup_i \{f_i(p,t_1)\},t_2)$$

a to je prema definiciji preseka levka T_p jednakost (4.7).

LEMA 4.3. Ako je familija F_p translatorna, onda je za ma koja dva broja $t_1,\ t_2 \in I$

$$(4.1o) \qquad S_{t_2}^{S_{t_1}^p} = S_{t_1}^{S_{t_2}^p}$$

Drugim rečima treba pokazati da je

$$\bigcup_{i\in J}\{f_i(\bigcup_{h\in J}\{f_h(p,t_1)\},t_2)\} = \bigcup_{h\in J} f_h(\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t_2)\},t_1)$$

za ma koja dva broja $t_1,t_2 \in J$.

Neka najpre $x \in \bigcup_i \{f_i(\bigcup_h \{f_h(p,t_1)\},t_2)\}$. Onda će biti za neko $k \in J$ $x \in f_k(\bigcup_{h\in J}\{f_h(p,t_1)\},t_2)$, a prema jednakosti (4.9) $x \in \bigcup_h \{f_h(f_k(p,t_2),t_1)\}$. Tada mora biti i

$x \in \bigcup_h \{f_h(\bigcup_i \{f_i(p,t_2)\},t_1)\}$, te je

$$\bigcup_{i\in J}\{f_i(\bigcup_{h\in J}\{f_h(p,t_1)\},t_2)\} \subset \bigcup_{h\in J}\{f_h(\bigcup_{i\in J}\{f_i(p,t_2)\},t_1)\}.$$

Budući da se inkluzija u suprotnom smeru dokazuje na potpuno isti način, time je dokaz leme završen.

POSLEDICA 4.4. Ako je familija kretanja F_p P stabilna, onda je i svako kretanje $f_i(p,t) \in F_p$ P stabilno.

To neposredno sledi iz def. 4.1 jer se onda za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ može naći broj $t \geqslant T$, takav da je $\rho[p, f_i(p,t)] < \varepsilon$, za svako kretanje $f_i \in F_p$. Očigledno je da važi i obrnuto: iz P stabilnosti svih kretanja familije F_p proizlazi P stabilnost familije F_p.

POSLEDICA 4.5. Ako je familija F_p P^+ (P^-) stabilna, onda je skup $\Omega_p(A_p)$ neprazan.

Kako je prema prethodnoj posledici u tom slučaju i svako kretanje $f_i \in F_p$ P^+ (P^-) stabilno, to tačka $p \in \Omega_{pi}$ (A_{pi}) za svako i te je $\bigcap_i \Omega_{pi} = \Omega_p$ neprazan skup.

POSLEDICA 4.6. Ako je familija F_p P^+ stabilna, onda je i svaka ω-granična funkcija $f_o(p,t)$ P^+ stabilna za $t \geqslant T_1$, gde je T_1 uslovljeno definicijom granične funkcije.

Prema definiciji granične funkcije za proizvoljno uzeto $\varepsilon > 0$ postoji broj $N(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ takav da je

$$\rho\left[f_n(p,t), f_o(p,t)\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $n > N$ i sve $t \geqslant T_1$. S druge strane, prema posledici 4.4 svako kretanje $f_n(p,t) \in F$ je P^+ stabilno, pa se može naći broj $t \geqslant T_1$ tako da je

$$\rho\left[p, f_n(p,t)\right] < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za svako } n > N.$$

Poslednje dve nejednačine daju $\rho\left[p, f_o(p,t)\right] < \varepsilon$ za neko $t \geqslant T_1$ što dokazuje stav.

STAV 4.8. Ako je familija F_p P^+ stabilna i regulatorna, onda je i familija F_q, gde je q ma koja tačka na T_p^+, P^+

stabilna.

Neka je $q = f_k(p,t_o) \in S^p_{t_o}$, proizvoljno izabrana tačka na T^+_p. Uzmimo proizvoljan broj $\varepsilon > 0$ i odredimo $\delta_k(\varepsilon) > 0$ shodno svojstvu II_1 DS. Prema def. 4.1 može se za ovo δ_k i ma koliki broj $T > 0$ naći $t \geqslant T$ da je

$$(4.11) \qquad \tau(p, S^p_t) < \delta_k.$$

Ako primenimo obrazac (4.9) u sledećim jednakostima, dobićemo

$$\tau(q, S^q_t) = \tau\left[f_k(p,t_o), \bigcup_i \{f_i(f_k(p,t_o),t\}\right] =$$

$$= \tau\left[f_k(p,t_o), f_k(\bigcup_i \{f_i(p,t)\}, t_o)\right] = \tau\left[f_k(p,t_o),\right.$$

$$\left. f_k(S^p_t, t_o)\right],$$

gde je t isto kao u (4.11).

Dalje iz relacije (4.11) dobija se da je $\rho(p,r) < \delta_k$, za svako $r \in S^p_t$, jer se za tačku odstupanje τ svodi na rastojanje ρ. Prema svojstvu II_1 DS biće za već uzeti broj t_o

$$\rho\left[f_k(p,t_o), f_k(r,t_o)\right] < \varepsilon,$$

što važi za svaku tačku $r \in S^p_t$, pa je onda i

$$\tau\left[f_k(p,t_o), f_k(S^p_t, t_o)\right] < \varepsilon,$$

tj. $\tau(q, S^q_t) < \varepsilon$ za $t \geqslant T$. S obzirom da su funkcija f_k, brojevi t_o i T uzeti proizvoljno, time je stav dokazan.

DEFINICIJA 4.3. Presek $S^p_{t_0}$ dinamičkog levka T_p naziva se strogo pozitivno (negativno) stabilan u smislu Poisson-a, ako za ma koje brojeve $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ ($T < 0$) postoji $t \geq T$ ($t \leq T$), takvo da je zadovoljena nejednakost

$$(4.12) \qquad \tau(S^p_{t_0}, S_t^{S^p_{t_0}}) < \varepsilon .$$

Kao i ranije $S_t^{S^p_{t_0}} = \bigcup_i \{ f_i(S^p_{t_0}, t)\} = \bigcup_i \bigcup_{q \in S^p_{t_0}} \{ f_i(q,t)\}$.

Ako je presek $S^p_{t_0}$ strogo stabilan u oba pravca, kazaćemo da je on strogo stabilan u smislu Poisson-a ili strogo P stabilan.

STAV 4.9. Ako je familija F_p P^+ stabilna i translatorna, onda je i svaki presek $S^p_{t_0}$ polulevka T^+_p strogo P^+ stabilan.

Neka su ε i T proizvoljni ali fiksirani pozitivni brojevi. Dokažimo da njima odgovara broj $t \geq T$ za koji je ispunjena relacija (4.12).

Budući da je prema stavu 4.8 u uslovima našeg stava i svaka familija F_{q_i} ($q_i = f_i(p,t_0)$, gde je t_0 ma koji realan broj) P^+ stabilna, onda će biti za $t \geq T$, gde t i ε odgovaraju P^+ stabilnosti familije F_p,

$$(4.13) \qquad \tau(q_i, S_t^{q_i}) < \varepsilon .$$

Formirajmo poluodstupanja tačaka q_i od preseka $S_t^{q_i}$, pa će biti za svako $i \in J$ i za neko $t \geq T$

$$\pi(q_i, S_t^{q_i}) = \rho(q_i, S_t^{q_i}) < \varepsilon .$$

A kako $q_i \in S^p_{t_0}$, to je za svako $i \in \mathcal{J}$

$$\rho(q_i, S_t^{S^p_{t_0}}) = \Pi(q_i, S_t^{S^p_{t_0}}) < \varepsilon ,$$

gde je $S^p_{t_0} = \bigcup_i \{f_i(p, t_0)\}$. Pošto poslednja nejednakost važi za svaku tačku $q_i \in S^p_{t_0}$, to je

(4.14) $$\sup_{q_i \in S^p_{t_0}} \rho(q_i, S_t^{S^p_{t_0}}) = \Pi(S^p_{t_0}, S_t^{S^p_{t_0}}) < \varepsilon .$$

Iz (4.13) s obzirom na izbor brojeva ε i T sleduje

$$\sup_{r^k_i \in S^q_t} \rho(r^k_i, q_i) = \Pi(S^q_t, q_i) < \varepsilon, \text{ za svako } q_i \in S^p_{t_0} ,$$

pa će onda biti i

$$\rho(r^k_i, S^p_{t_0}) < \varepsilon, \text{ za svako } k \in \mathcal{J} \text{ i } i \in \mathcal{J}.\ ^{1)}$$

Tada je i

(4.15) $$\sup_{r^k_i \in S_t^{S^p_{t_0}}} \rho(r^k_i, S^p_{t_0}) = \Pi(S_t^{S^p_{t_0}}, S^p_{t_0}) < \varepsilon .$$

Relacije (4.14) i (4.15) daju $\tau(S^p_t, S_t^{S^p_{t_0}}) < \varepsilon$, što pokazuje strogu stabilnost familije F_p.

1) Skup indeksa $\mathcal{J}$ obuhvata ovde samo one indekse koji se odnose na preslikavanja familije F.

5. REKURENTNE FAMILIJE KRETANJA

DEFINICIJA 5.1. Familija kretanja DS F_p naziva se rekurentna ako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći broj $L(\varepsilon) > 0$, tako da je za ma koja dva broja $t_1, t_2 \in I$ ispunjena nejednakost

$$(5.1) \qquad \tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_0}) < \varepsilon$$

gde je t_0 neki broj: $0 \leqslant t_0 \leqslant L$.

POSLEDICA 5.1. Ako familija F_p rekurentna, onda je svaki presek levka T_p stabilan u smislu Poisson-a.

Izvedimo dokaz za P^+ stabilnost. Uzmimo proizvoljne brojeve $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ saglasno P^+ stabilnosti i neka je $t_1 > 0$ ma koji broj. Stavimo li $t_1 + T = t_2$, onda se prema def. 5.1 može naći broj $L(\varepsilon) > 0$, takav da je za neko $t_0 \in [0, L]$ zadovoljena nejednakost

$$(5.2) \qquad \tau(S^p_{t_1}, S^p_{(t_1+T)+t_0}) = \tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_1+(T+t_0)}) < \varepsilon \quad ,$$

što dokazuje P^+ stabilnost preseka S^p_t.

Na isti način se dokazuje P^- stabilnost, pa odatle sleduje P stabilnost svakog preseka levka T_p.

POSLEDICA 5.2. Ako je familija F_p rekurentna i translatorna, onda je i svaki presek S^p_t levka T_p strogo P stabilan.

Iz rekurentnosti familije F_p sleduje prema posledici 5.1 i stabilnost svakog preseka dinamičkog levka T_p u smislu

Poisson-a bilo u kom pravcu, pa prema tome i P stabilnost familije F_p. No, kako je prema pretpostavci familija F_p i translatorna, to je prema stavu 4.9. i svaki presek levka T_p strogo stabilan.

NAPOMENA 5.1. U kompaktnom prostoru rekurentnost familije F_p može se definisati i na drugi način. Naime, iz def. 5.1 sleduje s obzirom na proizvoljnost brojeva $t_1, t_2 \in I$ da se za izabrano $\varepsilon > 0$ može naći broj $L(\varepsilon)$ tako da je za svako t_k

$$\tau\left[T_p,\ T_p(t_k, t_k + L)\right] < \varepsilon \ , \tag{5.3}$$

Što će reći: familija F_p naziva se rekurentna, ako za ma koje $\varepsilon > 0$ postoji broj $L(\varepsilon)$ takav da svaki odsečak levka "vremenske dužine" L sadrži u svojoj ε okolini ceo levak T_p.

Pokažimo da su definicije date formulama (5.1) i (5.3) ekvivalentne. Iz (5.1) sledi da pri proizvoljim ali fiksiranim brojevima t_1 i t_2 postoji broj $t_0 \in [0, L]$ tako da važi relacija (5.1). Ako sad umesto t_2 uzimamo brojeve t_v : $t_2 \leq t_v \leq t_2 + t_0$, onda će se za svako t_v naći neki t_{v0}: : $0 \leq t_{v0} \leq t_0$, tako da je $\tau(S^p_{t_1+t_v+t_{v0}}) < \varepsilon$. Znači, svi preseci u vremenskom intervalu $[t_2, t_2 + t_0]$ nalaze se u ε-okolini preseka $S^p_{t_1}$. Uzimamo li sad brojeve $t_\mu \in [t_2 + t_0, t_2 + L]$ onda se po definiciji mogu naći odgovarajući brojevi $t_{\mu 0}$: : $0 \leq t_{\mu 0} \leq L$ takvi da je $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2 + t_0 + t_{\mu 0}}) < \varepsilon$, te prema tome mora biti $\tau\left[S^p_{t_1}, T_p(t_2, t_2 + 2L)\right] < \varepsilon$. S obzirom na proizvoljnost izbora broja t_1 i ako stavimo L_1 umesto $2L$ dobija se da je $\tau\left[T_p, T_p(t_2, t_2 + L_1)\right] < \varepsilon$, odn. definicija data relacijom (5.3).

Dokažimo sad ekvivalentnost u obrnutom pravcu. Za bilo koja dva broja t_1 i t_2 može se naći broj t_o, takav da je $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_0}) < \varepsilon$. Zaista, ako stavimo recimo da je $t_o = t_1 - t_2 + \delta$, onda se zbog kompaktnosti prostora $\mathcal{R}$ može primeniti lema 2.3, pa se za izabrano $\varepsilon > 0$ može naći $\delta(\varepsilon) > 0$, tako da je $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_o}) < \varepsilon$, jer je $|t_2 + t_o - t_1| < \delta$. Dokažimo da pri definiciji datoj nejednakošću (5.3) mora biti $0 \leqslant t_o \leqslant L$, za koje važi relacija (5.1).

Pretpostavimo suprotno, tj. da je za sve $t_o \in [0,L]$ $\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_o}) \geqslant \varepsilon$. Onda je recimo $\pi(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_o}) \geqslant \varepsilon$ (Dokaz teče na isti način dalje, ako uzmemo da je $\pi(S^p_{t_2+t_o}, S^p_{t_1}) \geqslant \varepsilon$). Odatle je

$$\sup_{x \in S^p_{t_1}} \rho(x, S^p_{t+t}) \geqslant \varepsilon ,$$

što znači da postoji tačka $x \in S^p_{t_1}$ tako da je

$$(5.3') \qquad \rho(x, S^p_{t_2+t_o}) \geqslant \varepsilon .$$

Bez povrede opštosti možemo staviti, s obzirom na proizvoljnost broja t_k u (5.3), da je $S^p_{t_1} \subset T_p \setminus T_p(t_2, t_2 + L)$, i $S^p_{t_2+t_o} \subset T_p(t_2, t_2 + L)$. Kako (5.3') treba da važi za sve $t_o \in [0,L]$, onda će biti i

$$(5.3'') \qquad \rho[x, T_p(t_2, t_2, + L)] \geqslant \varepsilon .$$

S druge strane, iz (5.3) sleduje da je $\pi\left[T_p, T_p(t_2, t_2 + L)\right] < \varepsilon$, a kako $S^p_{t_1} \subset T_p$, to je onda i $\pi\left[S^p_{t_1}, T_p(t_2, t_2 + L)\right] < \varepsilon$, to znači da je za svako $x \in S^p_{t_1}$

$$\rho\left[x, T_p(t_2, t_2 + L)\right] < \varepsilon,$$

a to je u protivrečnosti sa (5.3").

Tvrdjenje je tim pre ispunjeno ako i $S^p_{t_1} \subset T_p(t_2, t_2 + L)$.

POSLEDICA 5.3. Ako izmedju skupova A i B postoje relacija $A \subset B$ i $\pi(B,A) < \varepsilon$, onda je i $\pi(A,B) < \varepsilon$, tj. $\tau(A,B) < \varepsilon$.

Jasno je da pri uslovu $A \supset B$ i $\pi(B,A) < \varepsilon$ ne sleduje da je $\pi(A,B) < \varepsilon$. Dokaz posledice je očigledan.

STAV 5.1. Ako je R kompaktan prostor onda iz rekurentnosti svakog pojedinačnog kretanja f_i iz familije F_p proizlazi i rekurentnost familije F_p.

Prema definiciji rekurentnog kretanja f_i datoj u [19] (str. 375) za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$ postoji broj $L_i(\varepsilon)$, tako da je

$$\rho\left[q_i, f_i(p; t_k, t_k + L_i)\right] < \varepsilon,$$

gde je t_k ma koji realan broj, a q_i ma koja tačka na trajektoriji $f_i(p, I)$ $(i \in \mathcal{J})$, tj. $q_i = f_i(p, t_o)$. Slično kao u stavu 1.1 može se dokazati, a obzirom na kompaktnost prostora R, da se za sva kretanja $f_i \in F_p$ može naći pozitivan broj $J(\varepsilon)$, tako da je

$$\rho\left[q_i, f_i(p; t_k, t_k + L)\right] < \varepsilon , \tag{5.4}$$

gde su $q_i = f_i(p, t_o)$ ma koje tačke na trajektorijama $f_i(p, I)$ a t_k ma koji realan broj, te se iz (5.4) dobija

$$\mathcal{T}\left[\bigcup_i q_i, T_p(t_k, t_k + L)\right] < \varepsilon . \tag{5.5}$$

Medjutim, kako (5.5) važi za ma koju tačku q_i u T_p, pa stoga i u $T_p(t_k, t_k + L)$ to će biti

$$\mathcal{T}\left[T_p, T_p(t_k, t_k + L)\right] < \varepsilon , \tag{5.6}$$

a prema posledici (5.3) i

$$\tau\left[T_p, T_p(t_k, t_k + L)\right] < \varepsilon ,$$

što dokazuje rekurentnost familije F_p.

STAV 5.2. Ako je familija F_p rekurentna i L stabilna a T_p potpuno invarijantan skup, onda je skup $\overline{T}_p$ totalno minimalan u odnosu na familiju F.

Ako pretpostavimo suprotno, onda postoji zatvoreni potpuno invarijantni skup $A \subset \overline{T}_p$, kao pravi deo od $\overline{T}_p$. Tačka $p \notin A$ u tom slučaju, jer ako bi $p \in A$, onda bi zbog potpune invarijantnosti bilo $f_i(p, t) \in A$, za svako $i \in \mathcal{J}$, i svako $t \in I$, odn. $\bigcup_i \{f_i(p, I)\} = T_p \subset A$, a zbog zatvorenosti skupa A i $\overline{T}_p \subset A$. Usled učinjene pretpostavke bilo bi $\overline{T}_p = A$. Prema tome je

$$\rho(p, A) > d > 0 \tag{5.7}$$

Izaberimo brojeve $\varepsilon < \frac{d}{2}$ i $L(\varepsilon)$ saglasno rekurentnosti familije F_p. Neka tačka $q \in A \subset \overline{T}_p$. Zbog toga postoji niz tačaka $\{p_n\} = \{f_k(p,t_{n_k})\}$ tako da je $\lim_{n\to\infty} p_n = q$. Pretpostavimo najpre, da se počev od nekog $n \geq N$ sve tačke p_n nalaze na istoj trajektoriji $f_k(p,I)$. Usled svojstva II_1 DS biće

$$\rho\left[f_k(p_n,t),f_k(q,t)\right] < \varepsilon$$

za $|t| \leq L$, ukoliko je $\rho(p_n,q) < \delta_k$. Kako zbog potpune invarijantnosti $f_k(q,t) \in A$, to je tim pre i

$$\rho\left[f_k(p_n,t),A\right] < \varepsilon \,. \tag{5.8}$$

Pošto je $p_n = f_k(p,t_{n_k})$, to će biti dalje

$$\rho\left[f_k(f_k(p,t_{n_k}),t),A\right] = \rho\left[f_k(p,t_{n_k}+t),A\right] < \varepsilon \,. \tag{5.9}$$

Iz (5.7) i (5.9) se dobija

$$\rho\left[p,f_k(p,t_{n_k}+t)\right] > d - \varepsilon > \varepsilon \quad ,$$

što daje $\tau(p,S^p_{t_{n_k}+t}) > \varepsilon$, a to, s obzirom da je $|t| \leq L$, protivreči rekurentnosti familije F_p.

Na isti način se izvodi dokaz ako tačke p_n, počev od nekog $n > N$ ne leže na istoj trajektoriji.

STAV 5.3. Ako je familija kretanja F_p L stabilna, a levak T_p zatvoren i potpuno invarijantan, onda je on i totalno minimalan u odnosu na familiju F.

Pretpostavimo suprotno: da postoji skup $A \subset T_p$, kao pravi deo, i da je totalno minimalan. Najpre pokažimo da $p \notin A$.

To je sigurno, jer ako bi $p \in A$, onda bi zbog potpune invarijantnosti skupa A i $f_i(p,t) \in A$ za svako $f_i \in F$ i sve t tj. $\bigcup_i \{f_i(p,I)\} = T_p \subset A$, što sa prethodnom inkluzijom daje $T_p = A$, a to je suprotno uvedenoj pretpostavci. Uzmimo sad tačku $r \in A$. Kako, ujedno i $r \in T_p$, to je $r = f_k(p,\tau)$, odakle se dobija $f_k(r,-\tau) = p \notin A$ za neku funkciju $f_k \in F$, a to protivreči potpunoj invarijantnosti skupa A.

STAV 5.4. Neka je familija DS F_p L stabilna, a T_p potpuno invarijantan skup. Da bi familija F_p bila rekurentna, potrebno je i dovoljno, da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ skup vrednosti $\{t\}$, za koje važi nejednakost $\tau(p,S_t^p) < \varepsilon$, bude relativno gust. [1])

Potrebnost. Ako uzmemo da je familija F_p rekurentna, onda je po def. 5.1 $\tau(S_{t_1}^p, S_{t_2+t_o}^p) < \varepsilon$, gde je $0 \leq t_o \leq L(\varepsilon)$, a L odgovara definiciji rekurentnosti. Kako def. 5.1 važi za ma koja dva broja $t_1, t_2 \in I$, to, ako stavimo $t_1 = 0$, $t_2 + t_o = t$, onda će biti $t_2 \leq t \leq t_2 + L$ i $\tau(p,S_t^p) < \varepsilon$, a skup brojeva $\{t\}$ biće relativno gust, s tim što je $L(\varepsilon) = D(\varepsilon)$, gde D odgovara definiciji relativne gustine.

Dovoljnost. Neka je ispunjen uslov stava. Onda će za svako $f_i \in F_p$ biti

$$(5.1o) \qquad \rho\left[p, f_i(p,t)\right] < \varepsilon ,$$

gde t pripada vremenskom intervalu dužine D. Pretpostavimo da familija F_p nije rekurentna. Prema stavu 5.2 i kako je zbog L stabilnosti $\bar{T}_p$ kompaktan to on sadrži kao pravi deo totalno

1) Definicija relativno gustog skupa data je u [19] (str. 378).

minimalan skup A, tj. $\bar{T}_p \supset A$. Pokazuje se kao u stavu 5.2 da $p \notin A$. Neka je dakle

$$(5.11) \qquad \rho(p,A) = d$$

i izaberimo ε takvo da bude $2\varepsilon < d$. Uzmimo sad tačku $q \in A \subset \bar{T}_p$. Njoj sigurno odgovara neka funkcija $f_k \in F_p$ i neko t_0 tako da je $\rho[f_k(p,t_0),q] < \delta$, gde je δ broj koji, saglasno svojstvu II_1 DS, odgovara uzetom broju $\varepsilon > 0$. Onda je za $0 \leq t \leq D$

$$\rho[f_k(p,t_0+t),f_k(q,t)] < \varepsilon\,,$$

a kako i $f_k(q,t) \in A$, to je

$$(5.12) \qquad \rho[f_k(p,t_0+t),A] < \varepsilon \quad \text{za } t_0 \leq t_0+t \leq t_0+D.$$

Nejednakosti (5.12) i (5.11) daju

$$\rho[p,f_k(p,t_0+t)] \geq \rho(p,A) - \rho[f_k(p,t_0+t),A] > d-\varepsilon > \varepsilon$$

za $t_0+t \in [t_0,t_0+D]$, što znači da se tačka p u vremenskom intervalu dužine D ne vraća u $S(p,\varepsilon)$, a to je u suprotnosti sa relacijom (5.10).

STAV 5.5. Neka su T_p i T_q dva potpuno invarijantna levka. Ako $q \in T_p$, onda se oni poklapaju.

Uzmimo ma koju tačku $r = f_k(q,t_k) \in T_q$. Kako $q \in T_p$, to zbog potpune invarijantnosti i $f_k(q,t_k) \in T_p$ za svako $k \in \mathcal{I}$ i svako t_k. Znači $T_q \subset T_p$. Uzmimo obrnuto ma koju tačku $s = f_i(p,t_i) \in T_p$. Kako $q \in T_p$, tj. $q = f_e(p,t_e)$, to je

$p = f_e(q,-t_e) \in T_q$. Zbog invarijantnosti skupa T_q biće $s = f_1(p,t_1) \in T_q$. Prema tome, $T_p \subset T_q$. Obe ove inkluzije daju $T_p = T_q$.

POSLEDICA 5.4. Ako $q \in T_p$, gde je T_p potpuno invarijantni skup i ako $T_q \neq T_p$, onda T_q ne može biti potpuno invarijantan.

Tvrdjenje je očigledno iz stava 5.5. Medjutim, kako je T_p potpuno invarijantan, to za svaku tačku $r = f_1(q,\tau) \in \in T_q$ važi $r \in T_p$, pošto $q \in T_p$, što znači da $T_q \subset T_p$, gde inkluzija u ovom slučaju isključivo označava pravi deo.

STAV 5.6. Neka je $\{f_n(p,t)\}$ niz kretanja koji uniformno konvergira ka funkciji $f_0(p,t)$ za $t \in (-\infty, +\infty)$. Ako je za neki broj N familija kretanja $F_p = \bigcup_{n>N}\{f_n(p,t)\}$ rekurentna, onda je i granična funkcija $f_0(p,t)$ rekurentna.

Kako je familija F_p rekurentna, to se za svako $\varepsilon > 0$ može naći broj $L(\frac{\varepsilon}{6}) > 0$, tako da je

$$\tau(S^p_{t_1}, S^p_{t_2+t_0}) < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad (t_0 \in [0,L]),$$

za ma koja dva broja $t_1, t_2 \in I$.

Uzmimo broj $N_1(\frac{\varepsilon}{6}) > N$ tako veliki da je usled konvergencije niza $\{r_n\} = \{f_n(p,t)\}$, $\rho(r_{n_k}, r_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{6}$, za $n_k, n_i > N_1$. Pošto je familija F_p rekurentna, to postoje funkcije $f_{n_k}, f_{n_i} \in F_p$, tako da je

$$(5.13) \qquad \rho\left[f_{n_k}(p,t_1), f_{n_i}(p,t_2+t_0)\right] < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Kako je niz $\{f_n(p,t)\}$ uniformno konvergentan, to je za $t = t_1$

(5.14) $$\rho[f_{n_k}(p,t_1),f_{n_i}(p,t_1)] < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \text{za } n_k,n_i > N_1 > N.$$

Poslednje dve nejednakosti daju

$$\rho[f_{n_i}(p,t_1),f_{n_i}(p,t_2+t_o)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Za potpuni dokaz stava izaberimo $N_2 > N_1 > N$ tako veliko, da je za $n_i > N_2$ i svako t, zbog uniformne kovergencije

$$\rho[f_{n_i}(p,t_1),f_o(p,t_1)] < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{i}$$

$$\rho[f_{n_i}(p,t_2+t_o),f_o(p,t_2+t_o)] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Poslednje tri nejednakosti daju $\rho[f_o(p,t_1),f_o(p,t_2+t_o)] < \varepsilon$, čime je dokazana rekurentnost granične funkcije $f_o(p,t)$.

L i t e r a t u r a

[1] Auslander, J.; Seibert, P.: Prolongations and generalized Liapunov functions, Inter. on Nonlin. diff. equat. mech., New York, N. Y., 1963 (454-462)

[2] Барбашин, Е. А.: К теории обобщенных динамических систем, Учен. записки МГУ, вып. 135, мат., т. II, 1948 (11-133)

[3] Birkhoff, G.: Dynamical systems, New York, 1927 (8-295)

[4] Бронштейн, И. У.: О динамических системах без единственности как полугруппах неоднозначных отображений топологического просстранства, Изв. АН Молд. ССР, No.1, 196 (3-18).

[5] Бронштейн, И.; Щербаков, Б. А.: Некоторые свойства устойчивых по Лагранжу ворожок обобщенных динамических систем, Изв. АН Молд. ССР, 5, 1962 (99-102).

[6] Будак, Б. М.: Понятие движения в обобщеной динамической системе, Учен. заоуски МГУ, 155, мат. т. 5, 1952 (174-194).

[7] Горшин, С.: Об устойчивости движения с постоянно действукшими возмущениями, Изв. АН К..ахской ССР, сер. мат. и мех., в. 2, 1948

[8] Дубошин, Г.Н.: К вопросу об устойчивости движения относително постоянно действующих возмущений, Гос. Астроном. инст. МГУ, т. 14, в. I, 1940 (153-164)

[9] Зубов, В. И.: Колебания в нелинейных и уплавллемых системах, Ленинград, 1962 (631)

[10] Зубов, В. И.: Методы АЛяпунова А. М. и их применение, Ленинград, 1957 (241)

[11] Ляпунов, А. М.: Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950

[12] Малким, И.: Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, Приклад. мат. и мех., АН СССР, т. 8, 1944 (241-245)

[13] Малкин, И. Г.: Теория устойчивости движения, Москва, 1966_2 (530)

[14] Минкевич, М. И.: Замкнутые интегральные воронке бв обобшенных динамических системах без предположения единственности, Учен. записки МГУ, т.6, вып. 163, 1952 (73-87)

[15] Минкевич, М. И.: Теория интегральних воронок в динамических системах без единственности, Учен. записки МГУ, 135, мат. т. II, 1948 (134-151)

[16] Немыцкий, В. В.: Ктеории орбит обших динамических систем, Мат. сборник, т. 23 (65), 1948 (161-186)

[17] Немыцкий, В. В.: Обобшения теории динамических систем, Усп Успехи мат. наук, т. 5, в. 3 (37), 1950 (47-59)

[18] Немыцкий, В. В.: Топологические вопросы теории динамических, Успехи мат. наук т. 4, в. 6 (34), 1949 (91-153)

[19] Nemytskii, V. V.; Stepanov, V. V.: Qualitative theory of differential equatona (prevod sa ruskog), New Jersey, 1960 (8+523)

[20] Seibert, P.: Stability under perturbations in generalized dynamical systema, Inter. Symp. on nonlin. diff. equations mech., N. Y. 1963 (463-473)

[21] Seibert, P.: Zum Problem der Stabilität unter ständig wirkedig Störungen bei dynamischen Systemen, Arch. der Math., 15, 1964 (108-114)

[22] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre, New Yurk, 1949 (8+476)

[23] Четаев, Н. Г.: Устойчивост движения, Москва, 1955_2 (207)

[24] Щербаков, Б. А.: Минимальные движения и структура минимальных множеств, АН Молд. ССР, Инст. мат., 1965 (97-108)

[25] Щербаков, Б. А.: О классах устойчивых по Пуассону движений, Изв. АН Молд. ССР, Но. I, 1963 (58-71)

[26] Альмухамедов, М. И.: Пространство полупериодических функций в теории динамических систем, Ученые зап. Казанского гос. пед. инст. в. 10, 1955 (29-56)

[27] Барбашин, Е. А.: К теории систем неоднозначных отображений топологического пространства, Учен. зап. Уральского Унив., в. 7, 1950 (54-60)

[28] Барбашин, Е. А.: О гомоморфизмах дин. систем, Мат. сборник, т. 27, в. 3, 1950 (455-470)

[29] Барбашин, Е. А.; Алимов, Ю. А.: К теории дин. систем с неоднозначными и разрывными характеристиками, ДАН СССР, т. 140, Но. I, 1961 (9-II)

[30] Бебутов, М. В.: О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень МГУ, т. II, в. 5, 1941

[31] Бебутов, М. В.: Об отображении траекторий динамической системы параллельных прямых, Бюллетень МГУ, т. II, в. 3, 1939

[32] Бронштейн, И. У.: Об однородных минимальных множествах, АН Молд. ССР, Исследования по алгебре и мат. анализу, 1965 (113-115)

[33] Бронштейн, И. У.; Сибирский, К. С.: Групповые частично упорядоченные динамические системы, Кишинев. Гос. Унив., т. 54, 1960 (33-36)

[34] Будак, Б. М.: Дисперсные динамические системы, Вестник, Моск. Унив., Но. 8, 1947 (135-137)

[35] Викторовский, Е.Е.: Об одном обобщении понятия интегральных кривых, Мат. сборник, т. 34 (76) Но. 2, 1954 (213-248)

[36] Винокуров, В. Р.: Об определении динамически-предельной точки в общих динамических системах, Изв. высш. учеб. зав. (матем). Но. 3 (40), 1964 (36-38)

[37] Врублевская, И. Н.: О геометрической эквивалентности траекторий динамических систем, Мат. сборник, т. 42 (84), Но. 3, 1957

[38] Живов, В.С.: Об устойчивости траекторий, Изв. высш. учеб. зав. (математика) Но. 2 (39), 1964 (79-81)

[39] Зубов, И. В.: Некоторые задачи об устойчивости движения, Успехи мат. наук, т. 11, в. 6 (72), 1956

[40] Красовский, Н. Н.: Некоторые задачи теории устойчивости движения, Москва, 1959 (211)

[41] Lefschetz, S.: Differential equations: Geometric theory, New York, 1957 (387)

[42] Майерчик, И.: Сепаратрисы плоских динамических систем, Мат. сборник, т. 59 (101), 1962 (58-66)

[43] Markoff, A.: Stabilität im Liapunoffschen Sinne ind Fastperiodizität, Math. T., Bd. 36, N. 5, 1933 (708-738)

[44] Немыцкий, В. В.: О проблеме качественного исследования в целом методами функции Лапунова, Вестник МГУ, сер. 1, 6, 1962 (26-128)

[45] Пономарев, В. И.: Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Мат. сборник, т. 48 (90), Но. 2, 1959 (191-212)

[46] Понтрагин, Л. С.: Непрерывные группы, Москва, 1954 (515)

[47] Reissig, R.: Neue Probleme und Methoden aus der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen, Monatsberichte Deutsche Akad. Wiss, Bd. 2, H. 1, 1960 (1-8)

[48] Сибирский, К. С.: Розвамерная аппроксима ция точек и свойства движений у динамички предельних множествах, Изв. АН Молд. ССР, сер. естест. и техн. наук, 1963, No. I I (38-48)

[49] Сибирский, К. С.; Крецу, В. И.; Бронштейн, И. У.: Устойчивость по Лапунову в ча стичко упорядоченных динамических системах Учен. зап. Кишинев. Гос. Унив., т. 54, 1960 (29-32)

[50] Franklin, Ph.: Almost periodic recurrent motions, Math. Z., Bd. 30 B. 3, 1929 (325-331)

[51] Hajek, O.: Critical points of abstract dynamical systems, Com. Math. Univ. Carolinae, 5, 3 1964, Prag (121-124)

[52] Щербаков, В. А.: Динамические системы в работах Кишиневского семинара по качественной теории дифф. уравнений дифференциальные уравнения, т. I, Но. 2, 1965 (260-266)

[53] Щербаков, В. А.: Об одном классе устойчивых по Пуассону движений, АН Молд. ССР, 1965 (153-158)

[54] Щербаков, Б. А.: Розбиение множества устойчивых по Пуассому движений на инвариантые классе, ДАН СССР, 1963, т. 152, Но. I (71-74)

[55] Щербаков, Б. А.: Составляющие классы устойчивых по Пуассому движений, Сибир. мат. журн., т. 5, Но. 6 (1397-1417)

[56] Эльгольц, Э. А.: Диффеценциальные уравнения, Москва, 1957 (271)

R E G I S T A R

(umesto reči dinamički sistem stoji skraćeno DS)

S A D R Ž A J

strana